



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Métodos Estocásticos en Control Cuántico

TESIS

Que presenta

Gerardo Emmanuel Cardona Sánchez

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la Especialidad de

Control Automático

Director de Tesis

Dr. Jorge Alberto León Vázquez

Jurado de Tesis / Thesis Committee:

Dr. Roberto Quezada Batalla, UAM-Iztapalapa

Dr. Julio César García Corte, UAM-Iztapalapa

Dr. Jorge Alberto León Vázquez, CINVESTAV-IPN

Dr. Fernando Castaños Luna, CINVESTAV-IPN

Dr. Alexander Poznyak Gorbach, CINVESTAV-IPN

Abstract

In this thesis we study the Quantum Filtering Problem under the framework of Quantum Probability. Observations performed to the system are equivalent to classical stochastic processes, and the concept of non-demolition processes make the Filtering Problem well posed. The Filtering Equation, which is the best estimate of the system observable, is the Kushner-Stratonovich equation in the Quantum Context. In the finite-dimensional setting, we regard the set of density matrices as our state space, under which the filter has a unique solution, and a feedback controller stabilizes the system to an objective state, where the proofs of convergence rely on stochastic Lyapunov methods.

Resumen

En esta tesis se aborda el estudio del problema de filtrado para modelos matemáticos basados en sistemas de óptica cuántica. La descripción de los sistemas es en espacios de probabilidad cuántica, donde las observaciones generan subálgebras abelianas reducen a un espacio de probabilidad cuántica (no conmutativo) a un espacio de probabilidad de Kolmogorov (conmutativo). Después introducimos una extensión del cálculo de Itô en el contexto no conmutativo que permite definir ecuaciones diferenciales estocásticas cuánticas para procesos en el espacio de Fock. Con estas herramientas se plantea el problema de filtrado cuántico en base a álgebras abelianas generadas por mediciones compatibles, con la que se presentan métodos para obtener la esperanza condicionada como el mejor estimado en mínimos cuadrados. Terminamos con una aplicación al control cuántico, en el que primero hay una etapa de estimación por parte del filtro y la siguiente etapa es el controlador que recibe el estado estimado y aplica una ley de control usando métodos de Lyapunov estocásticos.

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mi asesor, Jorge A. León, ya que no solo me dió una total libertad de seguir mis intereses, sino que siempre me animó a seguirlos y me proporcionó todas las facilidades a su alcance. Agradezco la confianza que depositó en mí para realizar esta tesis, todas las horas que dedico a revisar mi trabajo, sus invaluable consejos y por su amistad. Estar este año estudiando con usted ha sido una de las mejores experiencias que he tenido.

En Marzo de 2016 tuve la oportunidad de presentar parte de este trabajo de Tesis en la Universidad Autónoma Metropolitana, agradezco a Julio Cesar García Corte y a Roberto Quezada Batalla por sus comentarios, observaciones, y por su entusiasta ayuda, así mismo agradezco hayan accedido a ser revisores externos de esta tesis. Cuando se trabaja en la intersección entre dos disciplinas, es bastante importante poder comunicar las ideas efectivamente a especialistas de las dos áreas, por lo que agradezco a Fernando Castaños Luna por sus comentarios. También agradezco a Alexander Poznyak por haber aceptado ser mi revisor de tesis.

Agradezco también a Jorge Bolaños por invitarme al Seminario de Análisis de la Universidad Autónoma Metropolitana en Iztapalapa, esta experiencia fue muy agradable y me sirvió mucho para poder expresar ideas de forma concreta. Asimismo a Jose María González Barrios y al comité organizador del Quinto Congreso Regional de Probabilidad y Estadística por la invitación a dicho congreso en la ciudad de Xalapa, Veracruz.

Quisiera agradecer a Stéphane Attal y a los miembros del proyecto A.N.R. StoQ por la invitación a la escuela de verano 'Stochastic Methods in Quantum Mechanics' realizada en Autrans en Julio 2016, pude conocer a personas increíbles que hizo de este evento una de las mejores experiencias que haya tenido en mi maestría, y personalmente le agradezco por haberme recibido con los brazos abiertos. También a Alain Sarlette, Pierre Rouchon y Mazyar Mirrahimi por sus comentarios y puntos de vista sobre mi trabajo futuro. Aprovecho para agradecer a Sonia Alfaro del DCA por su amable apoyo administrativo (y los dulces), a la dirección de becas de CINVESTAV y al proyecto de Investigación CONACYT 220303 por el apoyo financiero para mi transporte a la escuela de verano.

No solo me beneficié de una experiencia de investigación única, también me beneficié de rodearme de muchos amigos a los que les estoy agradecido por escucharme y apoyarme, Carlos Tovar, Carlos Daniel, Sergio, Jessy, Jonny, Kevin, Luis y el resto de mis compañeros de maestría y doctorado, les estoy en deuda.

También quiero agradecer a mis padres y a mi hermana por su apoyo en todos esos momentos difíciles que hemos vivido, pero que siempre hemos superado con una sonrisa.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca número 392856 que me permitió realizar mis estudios de posgrado, al CINVESTAV y al DCA por haberme proporcionado un ambiente en el que pude desarrollar mis ideas.

Sinceramente,

Gerardo Cardona
Ciudad de México

Índice general

Overview	ix
Introducción	xv
1 Probabilidad cuántica	1
1.1 Introducción	1
1.2 Espacios de Probabilidad Cuántica	3
1.2.1 Variables aleatorias	7
1.3 Esperanza condicionada	8
2 Cálculo estocástico cuántico	11
2.1 Introducción	11
2.2 El espacio de Fock	11
2.3 Procesos estocásticos en el espacio de Fock	14
2.4 Integral estocástica y Fórmula de Itô	18
2.4.1 Operadores de Creación, Aniquilación y de Gauge	18
2.4.2 Integrales estocásticas para procesos simples	21
2.4.3 Extendiendo la Integral	22
2.4.4 Ecuaciones diferenciales estocásticas cuánticas	24
2.5 Aproximación de modelos de óptica cuántica	25
3 Ecuaciones de filtrado	29
3.1 Planteamiento del problema de filtrado	29
3.2 Método de cambio de medida de probabilidad	31
3.3 Método de Proceso de Innovación	35
4 Ecuaciones de filtrado controladas	39
4.1 Propiedades de la ecuación de filtrado	39
4.1.1 Matrices de densidad	40
4.1.2 Existencia y unicidad	40
4.2 La ecuación de filtrado controlada	43
4.2.1 Sistemas de momento angular	44
4.3 Estabilización de un sistema de dos Qubit	48
4.3.1 Demostración del teorema 4.3.1	49
5 Conclusiones	59
A Probabilidad Clásica	61
A.1 Algunos resultados de estabilidad estocástica	65
B Demostraciones	69
B.1 Demostraciones del capítulo 2	69

Overview

The main motivation I had to work on this Thesis was to understand the problem posed by Mirrahimi and Van Handel [38]: A stabilizing feedback controller for an open quantum system, subject to continuous measurements. The solution to this problem relies on stochastic stability theory using the Lyapunov method, and it has the characteristic of using different controls on the level sets in order to move from states orthogonal to the objective state.

The equation describing the system is an stochastic differential equation in finite dimension where the state is a symmetric positive matrix of trace one. The first natural question was: Why is it that the equation describing the quantum system was integrated with respect to a Brownian Motion?, and then, How can one perform measurements to the system and use it to control it? The answer to the second question is that performing measurements to the system interacting with the environment gives rise to classical stochastic processes under which stochastic control techniques can be applied. The rigorous derivation of the filtering equation is done via the framework of Quantum Probability, which is a non-commutative analog of the Probability Theory developed by Kolmogorov.

Quantum Probability and Quantum Stochastic Calculus

A classical probability space is a triple (Ω, \mathcal{F}, P) where we interpret the σ -álgebra \mathcal{F} as containing information about the events in the set Ω . Quantum probability (**Chapter 1**) encodes quantum information in such a way as to capture the non-commutative structure.

A quantum probability space is a pair $(\mathcal{N}, \mathbb{E})$ where \mathcal{N} is a von Neumann álgebra (characterized by von Neumann's Double Commutant Theorem 1.2.3) it is a subset the von Neumann algebra of Bounded Operators $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ on a Hilbert space \mathcal{H} and the *state* $\mathbb{E} : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ is a positive ($\mathbb{E}(AA^*) \geq 0$) and normalized ($\mathbb{E}(I) = 1$) linear functional.

A commutative von Neumann algebra \mathcal{C} is generated by a single self-adjoint operator (Lemma 1.2.1) and, for this abelian algebra, the Spectral Theorem allows to make a *-isomorphism $\iota : \mathcal{C} \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ such that

$$\mathbb{E}(C) = E_P(\iota(C)),$$

where E_P is the expected value of $\iota(C)$ in a classical probability space (Ω, \mathcal{F}, P) . We say that the operator C has the same distribution of a random variable $X = \iota(C)$ under the state \mathbb{E} .

Performing a measurement corresponds to a particular choice of commuting observables, see Figure 1. Given the family \mathcal{A} of elements in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, which we are going to interpret as our observations, we would like to estimate observables in its commutant, i.e., the set

$$\mathcal{A}' = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : AX = XA, A \in \mathcal{A}\}.$$

Given $B \in \mathcal{A}'$, the von Neumann algebra generated by B and \mathcal{A} , $vN(B, \mathcal{A})$ is an abelian von Neumann algebra, then we have a *-isomorphism with a classical probability space and hence we can define the *conditional expectation* $\mathbb{E}(B|\mathcal{A})$ by the relation $\mathbb{E}(\mathbb{E}(B|\mathcal{A})A) = \mathbb{E}(BA)$ for all $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}'$. Defining the conditional expectation over commuting observables allows to recover the best estimate as the orthogonal projection in the sense of the inner product

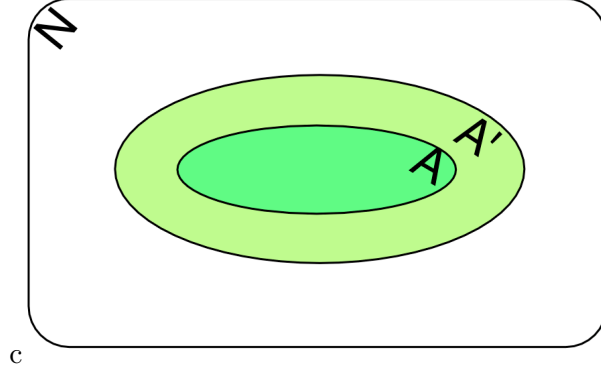


Figura 1: Given an abelian algebra, we would like to infer information about observables of the system

$\langle A, B \rangle_{\mathbb{E}} = \mathbb{E}(A^*B)$ and it is physically meaningful because we can't measure non-commutative observables in a single realization of an experiment, by Heisenberg's Inequality.

Quantum decoherence can be viewed as the loss of information from a quantum system to the environment, if we view the system as an non-isolated one, then the dynamics are not unitary, hence, the dynamics of the non-isolated system is not reversible. Decoherence is the main obstacle for realizing technologies that take advantage of quantum phenomena.

Nevertheless, we can model the system coupled to the environment, such that the dynamics of the composite system is unitary. Considering that the system evolves in a Hilbert space \mathcal{H}_0 , and the environment evolves in an (enormous) Hilbert space \mathfrak{F} , the coupled system is described over the tensor product

$$\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{F}.$$

We can get a description of the dynamics of the coupled system via the Quantum Stochastic Calculus (**Chapter 2**): The Hilbert space \mathfrak{F} is called the symmetric Fock space, defined by

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_{sym}^{\otimes n},$$

where the symmetrization is given in (2.1), where we can define *exponential vectors* as follows:

$$\mathbf{e}(u) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, \quad u \in \mathcal{H}.$$

This elements have the exponential property $\mathbf{e}(u \oplus v) = \mathbf{e}(u) \otimes \mathbf{e}(v)$ and their span \mathcal{E} is dense in \mathfrak{F} . We identify the symmetric Fock space \mathfrak{F} with the symmetric Fock space over $L^2(\mathbb{R})$ (this is done by Guichardet's representation), and define the annihilation, creation, and conservation operators denoted as $a(\cdot)$, $a^*(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ respectively, by the action over the exponential vectors:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}(f), a(u)\mathbf{e}(g) \rangle &= \langle u, g \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle, \\ \langle \mathbf{e}(f), a^*(u)\mathbf{e}(g) \rangle &= \langle f, u \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle, \\ \langle \mathbf{e}(f), \lambda(T)\mathbf{e}(g) \rangle &= \langle f, Tg \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle, \end{aligned}$$

with $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $f, g, u \in \mathcal{H}$, now we define the quantum processes $A_t = a(\mathbb{1}_{[0,t]})$, $A_t^* = a^*(\mathbb{1}_{[0,t]})$, and $\Lambda_t = \lambda(m(\mathbb{1}_{[0,t]}))$. We wish to integrate against these three *fundamental processes*, that is, to give meaning to

$$\int_0^t L_s dM_s,$$

where M_s is one of the fundamental processes: A_t, A_t^*, Λ_t . To do this, we choose our simple integrands L_t to be adapted processes, acting as $L_t \otimes I$ on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{F}_t \otimes \mathfrak{F}_t$, so we can define

$$\int_0^t L_s dM_s = \sum_{i=0}^{n-1} L_{t_i} \otimes (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}).$$

This definition makes sense as long as the operators L_s are defined at least on the exponential domain. The approach of Hudson and Parthasarathy to the Quantum Stochastic Calculus allows to specify an integral I_t as the limit of integrals over simple processes I_t^n and it is the unique operator on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{E}$ such that $\langle (I_t - I_t^n)h \otimes \mathbf{e}(u), (I_t - I_t^n)h \otimes \mathbf{e}(u) \rangle \rightarrow 0$. Once we have these conditions are fulfilled (it is done by an estimate that replaces Itô's isometry), we define the Quantum Itô Integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t (E_s d\Lambda_s + F_s dA_s + G_s dA_s^* + H_s ds),$$

as the strong limit of simple integrals. A Quantum Itô Fórmula can be given for two processes X_t, Y_t (Theorem 2.4.4) such that

$$d(X_t Y_t) = (dX_t)Y_t + (X_t)dY_t + (dX_t)(dY_t).$$

We can define unitary processes with the evolution-system or cocycle property, i.e., $U_{[0,t]} = U_{[0,s]} \otimes U_{[s,t]}$. For such unitary operators, its evolution is described by means of the quantum stochastic differential equation as

$$dU_t = \left((W - I)d\Lambda_t + LdA_t^* - L^*WdA_t - \frac{1}{2}L^*Ldt - iHdt \right) U_t, \quad U_0 = I.$$

This is a "good enough" approximation to the quantum dynamics, in the stochastic limit. Now, we can describe the dynamics of an observable $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ as

$$j_t(X) = U_t^*(X \otimes I)U_t.$$

The Quantum Filtering Problem

Filtering refers to obtaining information from a process given our observations. From the discussion above, we can see that at most we have imperfect observations, since we have non-commuting observables that we cannot measure during our experiment. Nevertheless, given an observable $Z = (I \otimes Z)$ of the field, it is possible to measure X in such a way that we preserve the statistics of X in the future. In fact, any observable Z of the field is of the form $I \otimes Z$ where I is the identity operator over \mathcal{H}_0 , then for $X \otimes I$ we have $[X, Z] = 0$, so Z is non-demolition with respect to X .

Given $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, by the Quantum Itô's Rule the dynamic evolution of the observable is

$$dj_t(X) = j_t(i[H, X] + L^*XL - \frac{1}{2}(L^*LX + XL^*L))dt + j_t([L^*, X])dA_t + j_t([X, L])dA_t^*,$$

and for Homodyne detection $Y_t = U_t^*(A_t + A_t^*)U_t$ evolves as

$$d(Y_t) = dA_t + dA_t^* + j_t(L + L^*)dt,$$

so we have a system-observation pair in analogy to the models used in Control Theory.

We have for our observation process, the von Neumann algebra $\mathcal{Y}_t = vN\{Y_s : 0 \leq s \leq t\}$, which is a commutative algebra, is non-demolition with respect to X , so $X \in \mathcal{Y}_t'$. The **filtering problem (Chapter 3)** is: Find the best estimate in the least squares sense of a

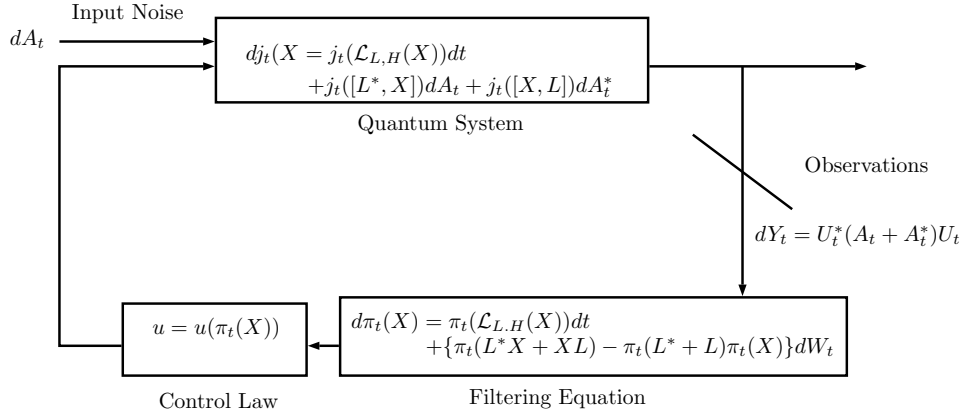


Figura 2: Measurement Based Controller

system observable $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ at time t , given the observations Y up to time t , this is, compute the conditional expectation

$$\pi_t(X) = \mathbb{E}(j_t(X)|\mathcal{Y}_t).$$

The problem can be approached by means of the method of change of state (which is the change of measure method in the quantum context), where instead of working with $Y_t = U_t^*(A_t + A_t^*)U_t$, we work with $Z_t = A_t + A_t^*$ and introduce a state \mathbf{Q} under which Z_t is a Brownian motion, or with an innovations process method, where a square integrable martingale can be expressed in terms of the innovation process Y .

Under the two methods, one arrives to the Quantum Kushner-Stratonovich equation

$$d\pi_t(X) = \pi_t(\mathcal{L}_{L,H}(X))dt + \{\pi_t(L^*X + XL) - \pi_t(L^* + L)\pi_t(X)\}(dY_t - \pi_t(L^* + L)dt).$$

where the innovation process is $dW_t := dY_t - \pi_t(L^* + L)dt$.

Feedback Control for Open Quantum Systems

Control Engineering provides us with a very convenient way to represent a controller connected with a quantum system (see Figure 2): The open quantum system interacts with the environment via input channels, and from the output channel, a non-demolition measurement is performed continuously, this measurement is a classical stochastic process, and it is fed to a computer that solves the filtering equation iteratively. The output of the filtering equation represents our knowledge of the system up to the time of measurement, and this history is sent to a controller which then applies corrective actions by means of control fields. We say that a control system satisfies a *separation principle* if we can decouple the controller design into a filtering stage (obtaining the best estimate of our knowledge) and an actuation stage (the best action based on our knowledge). So, in a way, the best we can do is to control the best estimate of the state, i.e., the conditional state. Control of systems with incomplete information is the subject of Robust Control.

In finite dimension, every state on a quantum probability space can be expressed as $Tr[\rho X]$ for some density matrix ρ . Using this fact, one gets the adjoint equation for the quantum filter

$$d\rho_t = (-i[H, \rho_t] - \frac{1}{2}\{L^*L, \rho_t\} + L\rho_tL^*)dt + (L\rho_t + \rho_tL^* - Tr[(L + L^*)\rho_t]\rho_t)dW_t,$$

which is precisely the equation that I wanted to understand in the first place. We know now that by Girsanov's Theorem, $dW_t = dY_t - Tr((L + L^*)\rho_t)dt$ is a Brownian motion under some

measure P , and dY_t is a square integrable semimartingale with quadratic variation t . We regard ρ_t as our state, and our state space is the set

$$\mathcal{S} = \{\rho \in \mathbb{C}^{n \times n}; \rho = \rho^*, \text{Tr}(\rho) = 1, \rho \geq 0\}.$$

This set has some interesting properties, for example, it is a convex set, and its extremal points are the set of pure states, and it is also a compact set. It can be proved that the quantum filter has a unique solution, and that if the initial condition is a pure state, the solution will take values on the set of pure states.

In measurement based feedback control¹ we will consider the Hamiltonian of the filtering equation as $H = H_0 + u_t G$, where H_0 and G are the system Hamiltonian and an engineered Hamiltonian coupled to a control scalar field u_t , where the main point is that the control depends on the state, i.e., $u_t = u_t(\rho)$, and it can be proven that the resulting control is a well-defined càdlàg control.

The types of physical problems considered are called *angular momentum systems*, measurements play a big role in the behaviour of the system. Indeed, taking $u_t = 0$, i.e., relying on measurements only, we can guarantee (Quantum state reduction, Theorem 4.2.4) that the system is going to converge to one of the proper states of the angular momentum operator, which is a discrete set (hence the name of Quantum Mechanics). This is an important result, since the feedback law must guarantee convergence to an *objective state* belonging to one of the proper states of the angular momentum operator.

We will finish this overview with a discussion of the feedback control law proposed by Mirrahimi and Van Handel [38] (**Chapter 4**) for a system of entangled Qubits, described by equation (4.8) which is based on identifying level sets for the following Lyapunov function:

$$V(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho\rho_f),$$

where $\text{Tr}(\rho\rho_f)$ is the Fidelity function, a measure of distance used in Quantum Information. This function fulfills the requirement that $V(\rho) \geq 0$, and if $V(\rho) = 0 \iff \rho = \rho_f$, however, we have when $V(\rho) = 1$ that $\rho \perp \rho_f$, a whole set of these elements can fulfill these condition (at least the other proper states of the angular momentum observable), so in order to break this condition, we need to rely on different controllers for the level sets.

In particular, making $u' = (u_1(t), u_2(t)) = (1, 0)$, ensures that we will leave the set of states orthogonal to ρ_f (4.10), and we can extend this result to a neighborhood γ (Lemma 4.3.3), and we have a finite escape time from this neighborhood. Then, we are left with proving that the control makes the state ρ_t converge to the target state ρ_f . This relies on another controller $u(\rho)$ (4.11), and from this it remains to prove almost sure convergence to ρ_f . A solution can be constructed from the two solutions given by the controllers $u', u(\rho)$ on their respective level sets, and proving that joining the two solutions we have a solution which is a strong Markov process.

¹It is important to differentiate other types of quantum feedback control, for instance, coherent feedback control, introduced by Lloyd [32], regards the controller and the system form a single dynamical system. Classically, the distinction would be unimportant, because the type of information is irrelevant, nevertheless, in classical systems the passivity approach allows to regard the controlled system as the interconnection between two passive systems. An approach of this idea in the quantum context is developed by James and Gough [24]. We will not go further in this line of thought, however, the reader is encouraged to read the articles of Gough [16], Altafini and Ticozzi [2] and Petersen and Dong [44] to get a better picture on several lines of research in *open/closed* loop quantum control.

Introducción

Mecánica Cuántica como una Teoría de Probabilidad no conmutativa

La mecánica cuántica es una rama fundamental de la física que apareció a principios del siglo XX para poder describir procesos que involucran, por ejemplo, fotones y átomos con una gran precisión.

La descripción matemática de estos sistemas se da en un espacio de Hilbert complejo, es decir, un espacio vectorial con producto interior, para asentar ideas, en dimensión finita sin pérdida de generalidad lo podemos poner como \mathbb{C}^n . En este espacio, la información de interés del sistema se obtiene por medio de matrices denominadas *observables*, que tienen la característica de que son autoadjuntos, i.e.,

$$X = X^*,$$

para un observable X en $\mathbb{C}^{n \times n}$, donde X^* es la matriz adjunta de X . Todo observable tiene una descomposición espectral

$$X = \sum_i \lambda_i P_i,$$

para una elección de proyectores ortogonales $\{P_i\}$, $\sum_i P_i = I$, y los λ_i son los valores propios del observable. Interpretamos a λ_i como el valor que toma X al realizar una medición sobre este, y a cada P_i como los eventos que pueden ser medidos.

Teniendo esta descomposición del observable, ¿Cómo obtenemos información de las estadísticas del sistema? Introduzcamos una medida de probabilidad mediante el uso de una matriz de densidad ρ , también llamado el estado del sistema, que es un operador lineal que actúa sobre \mathbb{C}^n , y que satisface

$$\text{Tr}(\rho) = 1, \quad \rho = \rho^*, \quad \rho \geq 0.$$

Entonces, definamos la probabilidad del evento P_i en el estado ρ como:

$$P(X = \lambda_i) := \text{Tr}(\rho P_i), \tag{1}$$

y entonces el valor esperado de X es

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i \lambda_i \text{Tr}(\rho P_i) = \text{Tr}(\rho X). \tag{2}$$

Un axioma importante en mecánica cuántica es el postulado de proyección, lo que nos dice es que si medimos un observable X y obtenemos una medición λ_i , inmediatamente después de la medición, el estado ρ colapsa

$$\rho \mapsto \frac{P_i \rho P_i}{\text{Tr}(\rho P_i)} =: \rho_i,$$

entonces, supongamos que queremos medir otro observable $Y = \sum_j \mu_j P'_j$ después de medir X , la probabilidad de que al medir Y tengamos un valor μ_j dado que medimos a X con un valor λ_i es

$$P(Y = \mu_j | X = \lambda_i) = \text{Tr}(P'_j \rho_i) = \frac{\text{Tr}(\rho P_i P'_j P_i)}{\text{Tr}(\rho P_i)}.$$

La mecánica cuántica debe su nombre a que los observables precisamente tienen una cantidad discreta de valores que pueden tomar. Supongamos el siguiente escenario: supongamos que tenemos un sistema tal que queremos que un observable X tome un valor λ_f , y tal que al realizar por primera vez una medición sobre X obtenemos que el resultado de la medición es precisamente λ_f , por lo que el estado colapsa a ρ_f . Si hacemos otra medición, la probabilidad de que tome el mismo valor es $P(X = \lambda_f | X = \lambda_f) = 1$. Entonces, el sólo hecho de realizar una medición, puede hacer que un observable del sistema llegue al estado objetivo, y este se mantenga bajo mediciones continuas. Esta pequeña observación tiene implicaciones importantes que se pueden explotar para realizar controladores, y podamos preparar un estado de nuestra elección realizando mediciones y aplicando retroalimentación a las dinámicas del sistema.

Vamos a desviar un poco la atención a la teoría de probabilidad clásica. Dados dos eventos A, B de algún experimento aleatorio, digamos, lanzar dos dados, la probabilidad condicional de que ocurra A dado B se define como

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

En un espacio de probabilidad, dadas dos variables aleatorias Y que toma valores μ_1, \dots, μ_n , y X que toma valores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, la esperanza condicional de la variable aleatoria Y dado X es la única variable aleatoria que cumple

$$E(E(Y|\sigma\{X\})\mathbb{1}_{\{X=\lambda_j\}}) = E(Y\mathbb{1}_{\{X=\lambda_j\}})$$

donde $\sigma\{X\}$ es la σ -álgebra generada por la v.a. X , que es el conjunto de todos los posibles eventos que pueden pasar con esta variable aleatoria.

En un proceso clásico, por ejemplo, un horno, con el que tenemos un proceso de observación, digamos, un termómetro con fallas, tal que queramos estimar la temperatura, suponemos que las variables aleatorias tienen una densidad conjunta (en el caso continuo), y es más, no tenemos ninguna restricción en el tipo de mediciones que puedo hacer al sistema (podemos medir la temperatura mientras medimos el consumo eléctrico), también podemos repetir el experimento en múltiples ocasiones sin que el experimento anterior afecte al experimento actual. Sin embargo, necesitamos saber cómo podemos extender el concepto de condicionamiento de variables aleatorias en un contexto no conmutativo, donde no siempre puedo realizar dos tipos de mediciones, debido a la no conmutatividad de los observables, no hay distribuciones conjuntas en el sentido clásico.

Profundicemos un poco más en esta dirección. Regresando a la teoría cuántica, para la descomposición $X = \sum_i \lambda_i P_i$, denotemos por $\mathcal{A} = \text{span}\{P_i\}$, entonces, definamos la versión cuántica de la esperanza condicional de Y por

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{A}) := \sum_i \frac{\text{Tr}(\rho P_i Y P_i) P_i}{\text{Tr}(\rho P_i)},$$

y notemos lo siguiente: Un hecho de álgebra lineal es que dos matrices autoadjuntas que conmutan se diagonalizan en una misma base ortonormal, sin pérdida de generalidad digamos que hemos escogido dicha base, entonces, si $Y = \sum_i \mu_i P_i$ conmuta con $X = \sum_i \lambda_i P_i$, entonces, la

esperanza condicional nos da:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{A})X) &= \mathbb{E}\left(\sum_i \frac{\text{Tr}(\rho P_i Y P_i) P_i X}{\text{Tr}(\rho P_i)}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_i \mu_i \frac{\text{Tr}(\rho P_i)}{\text{Tr}(\rho P_i)} P_i X\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_i \mu_i P_i X\right) \\
&= \mathbb{E}(Y X),
\end{aligned}$$

la esperanza condicional que hemos definido para observables coincide con la esperanza condicional en un espacio de probabilidad clásico. Esta observación es importante en un sentido práctico, pues es una medida del conocimiento que tiene el observador del sistema, y en los cimientos de la teoría cuántica, dos variables que no conmutan no pueden ser medidas en una sola realización del experimento en virtud de las desigualdades de Heisenberg. Para evitar estos problemas definimos la esperanza condicional solo para el caso en que Y conmute con \mathcal{A} . Decimos que \mathcal{A} es de no demolición con respecto a Y .

La idea principal es que la Mecánica Cuántica no relativista es una extensión de la teoría de Probabilidad Clásica, y la Probabilidad Cuántica permite juntarlas en un sólo formalismo.

Descripción y Control de Sistemas Cuánticos Abiertos

Como es bien sabido en mecánica cuántica, la evolución de un observable de un sistema cuántico es dado por medio de un operador unitario

$$j_t : X \mapsto U_t^* X U_t,$$

sin embargo, necesitamos extender este concepto, puesto que estamos suponiendo que estamos trabajando con un sistema cerrado, es decir, aislado de su entorno, lo cuál no es una suposición bastante realista, pues es muy difícil evitar que un sistema cuántico no interactúe con un sistema exterior.

Un sistema cuántico abierto consiste de un sistema pequeño (como un átomo), y uno muy grande al que no tenemos acceso (como el ambiente) que es muy complejo, la interacción entre ambos es lo que induce la llamada *decoherencia* en el sistema pequeño, y es el obstáculo principal por el cuál no se puede construir una computadora cuántica. Prevenir, o controlar ésta decoherencia es uno de los principales retos para el desarrollo de nuevas tecnologías.

En un sistema cuántico abierto, describimos la evolución del sistema compuesto sobre el producto tensorial

$$\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{F},$$

donde \mathcal{H}_0 es el espacio de Hilbert del sistema (aquí supondremos que es de dimensión finita), y \mathfrak{F} es el espacio de Hilbert que describe al ambiente. Para describir el ambiente, el decir que \mathfrak{F} tiene que ser de dimensión infinita no es suficiente, como pensamos que el ambiente es macroscópico, no ponemos una cota al número de partículas posibles. En particular, suponemos que es un campo de bosones libres, para el cuál, el espacio de Hilbert es entonces el espacio de Fock simétrico sobre $L^2(\mathbb{R})$. Al sistema compuesto se le conoce como sistema spin-bosón.

¿Cómo podemos describir la dinámica de un observable del sistema?. En este caso, necesitamos tomar $X \otimes I$ que actúa en $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{F}$, y necesitamos darle sentido a la evolución $U_t(X \otimes I)U_t$.

Darle sentido a esta evolución es el papel del cálculo estocástico cuántico, que es un formalismo que nos permite dar un análogo del proceso de Wiener en un espacio de probabilidad cuántica.

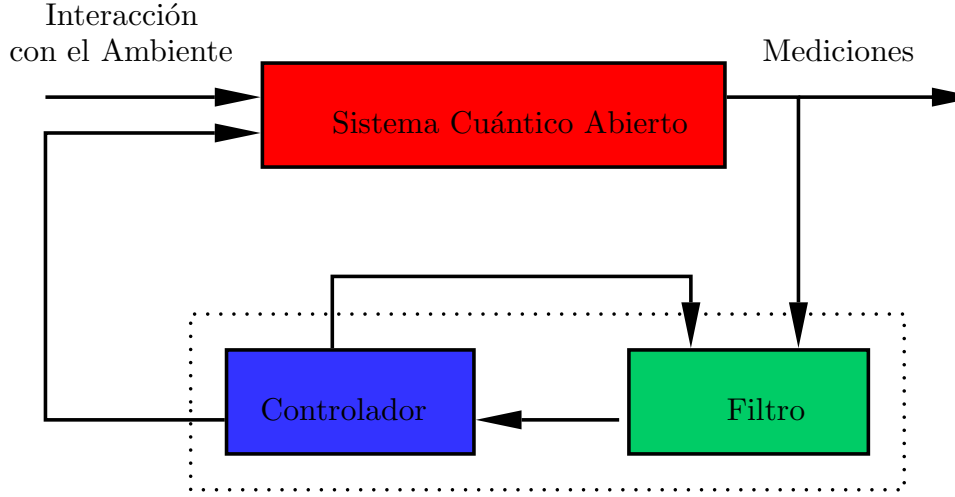


Figura 3: En control clásico, el principio de separación nos permite separar el problema de control en una parte de estimación y una acción de control. Acá la pregunta es: ¿Cómo puedo considerar mediciones de un sistema cuántico y utilizarlas en una ley de control?

De acuerdo a la ecuación de Schrödinger la evolución del sistema compuesto es dada por un proceso unitario tal que

$$\frac{d}{dt}U_t = -iH_{tot}U_t,$$

donde el Hamiltoniano del sistema compuesto se divide como

$$H_{tot} = H_{sys} \otimes I + I \otimes H_{env} + H_{int},$$

donde el Hamiltoniano de interacción actúa sobre $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{F}$. En el límite estocástico, podemos describir la evolución temporal del proceso U_t por medio de los operadores de *creación*, *aniquilación* y de *conservación* que actúan sobre el espacio de Fock simétrico, como una ecuación integral de la forma:

$$dU_t = \left((W - I)d\Lambda_t + LdA_t^* - L^*WdA_t - \frac{1}{2}L^*Ldt - iHdt \right) U_t, \quad U_0 = I,$$

La ingeniería de control nos ofrece una manera bastante conveniente de representar a los sistemas cuánticos abiertos (vea Gough [16], donde se presentan otras perspectivas para controlar sistemas cuánticos en lazo cerrado y abierto), consideremos la figura 3:

El sistema pequeño que conocemos lo representamos por un bloque que representa al sistema, que interactúa con el entorno por medio de una entrada, y sobre el cuál realizamos mediciones en el canal de salida. En el control basado en *medición* tenemos un instrumento que realiza mediciones continuas al sistema, y la señal de medición va hacia una computadora, que resuelve una ecuación de filtrado, la solución de esta ecuación va hacia un controlador que establece la acción correctiva.

La idea básica es la siguiente: Dado un observable $X \in \mathcal{H}_0$ que tiene una evolución temporal

$$j_t : X \mapsto U_t^*(X \otimes I)U_t$$

donde U_t es un proceso unitario, y un proceso de medición que se representa como un observable del ambiente Y que interactúa con el sistema y que tiene una evolución temporal

$$Y_t : Y \mapsto U_t^*(I \otimes Y)U_t$$

la pregunta es ¿Cómo obtengo información de X_t dadas las observaciones Y_t ?

Una implementación concreta del lazo de control de la figura 3 parecería difícil de imaginar, ya que realizar una medición implica que estamos copiando el estado, e inmediatamente después, este se proyecta de forma irreversible. Sin embargo, si se pueden hacer mediciones destructivas en el ambiente, de manera que una observación directa de un observable del campo nos de una observación indirecta de un observable del sistema. Este es llamado como *propiedad de no demolición*, el observable de sistema conmuta con las observaciones, y podemos definir la esperanza condicionada sobre elementos conmutativos, esto tiene un sentido físico, pues es precisamente sobre observables conmutativos que podemos realizar mediciones en un sólo experimento, y podemos obtener estadísticas clásicas del sistema.

Entonces el problema de filtrado se reduce a encontrar la esperanza condicional

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{Y}_t]$$

es decir, el mejor estimado de X dada el álgebra de operadores \mathcal{Y}_t generada por las observaciones Y_s , $0 \leq s \leq t$, esta esperanza condicional se verá es un proceso estocástico clásico.

Dado que tenemos una ecuación diferencial estocástica clásica que describe la dinámica del sistema, podemos utilizar técnicas de control estocástico. El método de Lyapunov para demostrar estabilidad de sistemas es un método bastante poderoso en sistemas no lineales. En el contexto determinista, el método consiste en encontrar una función definida positiva con derivada negativa, de manera que se pueden definir conjuntos de nivel y demostrar que las trayectorias del sistema de ecuaciones ya sea no salen del conjunto de nivel (es estable), o convergen a cero (asintóticamente estable). En el contexto estocástico, la propiedad de martingala que tiene esta difusión de Itô (por ser un proceso fuerte de Markov) nos permite utilizar la fórmula de Dynkin, que es el análogo estocástico del segundo teorema fundamental del cálculo. Entonces, el análogo estocástico del método de Lyapunov consiste en demostrar que la función de Lyapunov definida es una supermartingala, es decir, el valor esperado de la la función en el futuro es menor o igual que el valor actual de la difusión, entonces, en valor esperado, la función es decreciente.

Precedentes

El Control retroalimentado ha estado presente en trabajos de física desde finales de los 80, y en el contexto de ecuaciones de filtrado, el trabajo de Belavkin [9, 10] fue el primero que presentó una teoría matemática de control de sistemas cuánticos.

En el trabajo de Bouten et al. [12], se presenta una introducción concisa del problema de filtrado, más accesible por las nuevas herramientas que se desarrollaron con el paso de los años y en Mirrahimi and Van Handel [38], se ocuparon estas ecuaciones en dimensión finita para dar controles estabilizantes de sistemas genéricos. Estos dos artículos fueron la motivación para realizar esta tesis, la ley de control que proponen se puede extender a una clase más grande de sistemas [3], y ha sido usado en implementación de experimentos, en [37] y [13] se dieron algunos resultados teóricos con un enfoque destinado a la implementación de experimentos y en [48] el grupo de Serge Haroche implementa el primer protocolo de control retroalimentado estabilizando estados los estados de Fock (*photon number states*).

Cabe mencionar otro tipo de control que no estamos viendo en esta tesis, pero vale la pena mencionar². En el control retroalimentado *coherente*, en el que el controlador y la planta forman un sólo sistema dinámico, propuesto por primera vez por Lloyd [32]. En James et al. [25] utilizaron metodologías de tipo H^∞ para diseñar controladores para sistemas cuánticos lineales, y en Mabuchi [33] se presentó una realización experimental de la metodología.

²Sin embargo, el lector es invitado a leer los artículos de Petersen and Dong [44], Altafini and Ticozzi [2] y Gough [16], donde dan un panorama más amplio de los distintos métodos de control, en lazo abierto y cerrado, sobre los cuáles se realiza investigación.

Estructura de la tesis

La estructura de esta tesis es la siguiente:

- En el capítulo 1, establecemos los conceptos necesarios de probabilidad cuántica. Esta es una caracterización no conmutativa de la teoría de probabilidad de Kolmogorov, y permite caracterizar la probabilidad cuántica como un par compuesto por álgebra de von Neumann y un estado que toma el rol de medida de probabilidad. El punto importante en esta sección es que una subálgebra abeliana es equivalente a un espacio de probabilidad clásico, y podemos definir la esperanza condicional en esta subálgebra abeliana por medio del *conmutante* de la subálgebra.
- En el capítulo 2, describimos una extensión del cálculo estocástico al dominio cuántico. El objetivo es definir una integral respecto a *procesos de operadores*, que son el análogo no conmutativo de un proceso estocástico. En particular, el movimiento Browniano y el proceso de Poisson emergen de subálgebras conmutativas. Además, revisamos el modelado de un sistema en óptica cuántica interactuando con el campo y la aproximación estocástica para tratar el campo en términos de *ruidos fundamentales* no conmutativos, trabajaremos con modelos similares para derivar las ecuaciones de filtrado.
- En el capítulo 3, enunciaremos el problema de filtrado cuántico, en el que obtenemos el mejor estimado del estado de un sistema cuántico a partir de las observaciones disponibles. Para realizar las observaciones es necesario que las mediciones y el observable que queremos estimar satisfagan una propiedad de *no demolición*, que asegura que las observaciones que hacemos en el presente no afectarán la evolución del sistema en el futuro. Se plantea un modelo *sistema-observación* a partir del cual se deduce una ecuación de evolución para la distribución condicional del observable del sistema, que es la ecuación de Kushner-Stratonovich en el contexto cuántico.
- En el capítulo 4 estudiamos el problema de control en sistemas cuánticos de momento angular, estudiado en Mirrahimi and Van Handel [38], donde la dinámica es descrita por una ecuación de filtrado como en el capítulo 3, pero en dimensión finita. Estudiamos algunas propiedades de la ecuación diferencial estocástica y analizamos un ejemplo de estabilización de un sistema de dos qubit entrelazados.

Capítulo 1

Probabilidad cuántica

1.1 Introducción: La relación entre la probabilidad cuántica y la probabilidad clásica

La probabilidad cuántica es una generalización no conmutativa de la teoría clásica de la probabilidad. La distinción entre la mecánica clásica y la cuántica es que los observables, que son representaciones matemáticas de cantidades físicas que (en principio) pueden ser medidas, no necesariamente conmutan, y mientras que en la probabilidad clásica, para dos eventos independientes tenemos que $P(AB) = P(A)P(B)$, en probabilidad cuántica para dos eventos E y F el evento EF solo tiene sentido, si E y F conmutan ($EF = (EF)^* = FE$), si no conmutan no podemos hablar de una probabilidad conjunta y mucho menos de independencia.

Veremos que la probabilidad clásica es un caso particular de la probabilidad cuántica, y exploraremos dos ideas, que iremos desarrollando en esta sección y que nos servirán más adelante:

- El conjunto de todas las mediciones hechas en un sólo experimento corresponden a una elección particular de un álgebra conmutativa de observables.
- Cualquier álgebra conmutativa es equivalente a un modelo de probabilidad clásico.

En esta introducción, para exponer las ideas anteriores adecuadamente, nos enfocaremos en el caso de dimensión finita, posteriormente generalizaremos estas ideas.

Un observable A en un espacio de Hilbert de dimensión finita \mathcal{H} es una matriz Hermitiana. El teorema espectral ([18, Sección 79]) nos permite descomponer un operador autoadjunto de la siguiente manera

$$A = \sum_{\alpha \in \text{spec}(A)} \alpha E_{\alpha},$$

donde los E_{α} son las proyecciones ortogonales (que son disjuntos, ver [18, sección 75]). Además, podemos definir funciones sobre A como

$$f(A) = \sum_{\alpha \in \text{spec} A} f(\alpha) E_{\alpha},$$

y todos estos operadores conmutan el uno con el otro. Entonces, el conjunto de matrices $\mathcal{A} = \{X : X = f(A), f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ es conmutativo. Llamamos a \mathcal{A} la *-álgebra generada por A , y notemos que es cerrada bajo sumas, multiplicaciones por escalar y composiciones. Por *-álgebra nos referimos a que es cerrada bajo la operación de realizar la transpuesta conjugada, i.e.,

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{A} &\implies X^* \in \mathcal{A} \\ X = f(\mathcal{A}) &\implies X^* = \bar{f}(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

Un mapeo lineal $\mathbb{E} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ que es positivo ($\mathbb{E}(A) \geq 0, A \geq 0$) y normalizado ($\mathbb{E}(I) = 1$) es llamado un *estado* en \mathcal{A} . Las proyecciones $E \in \mathcal{A}$ son precisamente esos eventos que podemos distinguir al medir A (ya que vamos a obtener un α particular resultado de la medición que corresponde a un E_α) y $\mathbb{E}(E)$ nos da sus probabilidades. Esta estructura algebraica nos da una conexión directa con la teoría clásica.

Teorema 1.1.1. *Sea \mathcal{A} un *-álgebra conmutativa de operadores en un espacio de Hilbert de dimensión finita, y sea \mathbb{E} un estado en \mathcal{A} . Entonces hay un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y un mapeo ι de \mathcal{A} sobre el conjunto de funciones medibles de Ω que es un *-isomorfismo, i.e., una biyección lineal con $\iota(AB) = \iota(A)\iota(B)$ (puntualmente) y $\iota(A^*) = \iota(A)^*$, y además $\mathbb{E}(A) = E_P(\iota(A))$ (la esperanza respecto a la medida P)*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ y \mathcal{A} es la álgebra conmutativa de matrices complejas de dimensión $n \times n$. Como todos los elementos de \mathcal{A} conmutan, podemos encontrar una matriz unitaria U tal que U^*AU sea una matriz diagonal para cada $A \in \mathcal{A}$ (Diagonalización simultánea), y podemos obtener una base simultánea de \mathcal{H} para todas las matrices A .

Definimos $\Omega = \{1, \dots, n\}$ y

$$\iota(A) : \Omega \mapsto \mathbb{C}, \quad \iota(A)(i) = (U^*AU)_{i,i} \forall A \in \mathcal{A},$$

es decir, tomamos el i -ésimo elemento de la diagonal. Luego, definamos $\mathcal{F} = \sigma\{\iota(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Finalmente, definamos $P(S) = \mathbb{E}(\iota^{-1}(\mathbb{1}_S))$, para toda $S \in \mathcal{F}$. Con esto hemos construido explícitamente (Ω, \mathcal{F}, P) . \square

Lo que este teorema nos dice es que cada álgebra conmutativa es completamente equivalente a un espacio de probabilidad clásico, al diagonalizar simultáneamente todos los operadores en el álgebra, obtenemos una representación explícita de variables aleatorias medibles como funciones de las diagonales.

Definición 1.1.1 (Estados puros y mixtos). *Un **estado puro** sobre un espacio de dimensión finita \mathcal{H} es una proyección unidimensional sobre \mathcal{H} . En particular, tenemos que $\mathbb{E}(X) = \langle \psi, X\psi \rangle$ para algún vector unitario $|\psi\rangle$. Combinaciones convexas de estados puros son llamados **vectores mixtos**.*

De momento hemos estado hablando de álgebras conmutativas de observables compatibles, pero en mecánica cuántica tenemos observables que no conmutan (como los canónicos de posición y momento, P, Q , que satisfacen $[Q, P] = i\hbar I$). Esto motiva a dar la siguiente definición:

Definición 1.1.2. (Espacio de Probabilidad Cuántica, dimensión finita) *Un par $(\mathcal{N}, \mathbb{E})$, donde \mathcal{N} es un *-álgebra (no necesariamente conmutativa) de operadores en un espacio de Hilbert de dimensión finita y \mathbb{E} es un estado en \mathcal{N} , es llamado un espacio de probabilidad cuántica de dimensión finita.*

Ilustremos lo que el teorema 1.1.1 nos quiere decir con un ejemplo, basado en [12], [39]

Ejemplo 1.1.1. Consideremos $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ y $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = M_2$, el *-álgebra de matrices complejas 2×2 . Este espacio lo revisitaremos en otras secciones. Las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

donde σ_z tiene valores propios $(1, -1)$ (llamados *up* y *down* [39]) con vectores propios $(1, 0)^\top$ y $(0, 1)^\top$ respectivamente, son hermitianos y junto con I_2 generan todas las proyecciones de M_2 . Además, satisfacen las relaciones

$$\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z = -\sigma_y \sigma_x, \quad \sigma_y \sigma_z = i\sigma_x = -\sigma_z \sigma_y, \quad \sigma_z \sigma_x = i\sigma_y = -\sigma_x \sigma_z,$$

En el contexto de mecánica cuántica, las matrices de Pauli son observables que toman en cuenta la interacción del momento angular intrínseco (spin) de un átomo con un campo electromagnético externo. Consideremos el observable σ_z , que representa el spin en la dirección z . Sus proyecciones ortogonales son

$$E_{z,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{z,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y podemos escribir $\sigma_z = E_{z,1} - E_{z,-1}$, además, el estado puro está definido por $\mathbb{E}(A) = \langle \psi, A\psi \rangle$, con $\psi = (c_1, c_{-1})^T$, y $|c_1|^2 + |c_{-1}|^2 = 1$.

Si observamos σ_z , obtenemos la salida 1 (spin arriba) con probabilidad $\langle \psi, E_{z,1}\psi \rangle = |c_1|^2$ o la salida -1 (spin abajo) con probabilidad $\langle \psi, E_{z,-1}\psi \rangle = |c_{-1}|^2$. Las proyecciones ortogonales conmutan, y entonces $\mathcal{A}_{\sigma_z} = \text{span}\{E_{z,1}, E_{z,-1}\}$ es la *-álgebra conmutativa asociada al observable σ_z

Construyamos (Ω, \mathcal{F}, P)

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, 2\} \\ \mathcal{F} &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \Omega\} \\ P(\{1\}) &= |c_1|^2 = \mathbb{E}(\iota^{-1}\mathbb{1}_1) = \mathbb{E}(E_{z,1}) \\ P(\{2\}) &= |c_{-1}|^2 = \mathbb{E}(\iota^{-1}\mathbb{1}_2) = \mathbb{E}(E_{z,-1}), \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que queremos medir el spin no en la dirección z , sino en la dirección x . El observable σ_x tiene descomposición espectral

$$E_{x,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{x,-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

el observable σ_x genera la *-álgebra conmutativa $\mathcal{A} = \text{span}\{E_{x,1}, E_{x,-1}\}$, sin embargo

$$\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y = -\sigma_x\sigma_z,$$

En otras palabras, σ_z y σ_x no son compatibles ,i.e., no podemos observar ambos en una sola realización del experimento, por lo tanto no podemos construir un espacio de probabilidad conjunto de los dos observables. \square

Un poco de contexto físico para este ejemplo [39]: A este experimento se le conoce como el experimento de Stern-Gerlach, en este experimento, átomos de plata (en 1927 fue hecho con átomos de hidrogeno) eran sujetos a un campo magnético no homogéneo, lo que ocasionara que los átomos fueran desviados. En el experimento, se esperaba que fueran desviados en de forma aleatoria en un rango continuo de direcciones correspondientes a una orientación aleatoria inicial del átomo. Sin embargo, después de varias repeticiones, se observa que los átomos emergen en un conjunto discreto de ángulos, hacia 'arriba', y hacia 'abajo'.

1.2 Espacios de Probabilidad Cuántica

El objetivo de esta sección es presentar una formulación general de los espacios de probabilidad cuántica, en la cual las variables aleatorias, que son llamados observables en mecánica cuántica, no necesariamente son conmutativos. Estos observables son representados por operadores auto-adjuntos en un espacio de Hilbert. Definiremos una clase especial de *-álgebras (cerradas bajo adjuntas) llamadas álgebras de von Neumann y damos algunas propiedades elementales con el fin de poder dar la definición general de un espacio de probabilidad cuántica. El enfoque será en subálgebras conmutativas para dar cabida a los espacios de probabilidad clásicos y después definiremos los conceptos de variables aleatorias, esperanza condicionada y la fórmula de Bayes

en este contexto. La probabilidad cuántica es un tema muy extenso, el lector puede revisar Attal [5], Bouten et al. [12], o Meyer [36] para profundizar más en el tema.

Introduzcamos terminología, para más detalles se puede ver, e.g., Reed and Simon [46]: En adelante, denotamos por \mathcal{H} a un espacio de Hilbert complejo separable. La norma de un operador lineal acotado $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se define por $\|T\| = \sup_{\{x \in \mathcal{H}_1 : \|x\|=1\}} \|T(x)\|$.

Denotamos al conjunto de todos estos operadores como $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ este conjunto tiene estructura de espacio vectorial, es decir, para dos elementos $S, T \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}(S + T)(x) &= S(x) + T(x), \\ (\lambda S)(x) &= \lambda S(x),\end{aligned}$$

pero adicionalmente tenemos (como son operadores acotados)

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)),$$

esta operación adicional nos permite diferenciarlo de un espacio vectorial, a este conjunto de operadores lo llamamos un *álgebra*. Si definimos una norma, si la norma es submultiplicativa tenemos la siguiente definición:

Definición 1.2.1 (Álgebra de Banach). *Un espacio de Banach \mathcal{A} es un álgebra de Banach si hay un producto definido en \mathcal{A} que satisface*

$$\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|,$$

para dos elementos cualquiera $X, Y \in \mathcal{A}$

Definición 1.2.2. *Una *-álgebra \mathcal{A} es un álgebra de Banach con una involución $a \mapsto a^*$ (en inglés *involution*) de \mathcal{A} a \mathcal{A} tal que las siguientes propiedades se mantienen para $a, b \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$*

1. $(a^*)^* = a$
2. $(ab)^* = b^* a^*$
3. $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha} a^* + b^*$

Ejemplos de *-álgebra son

- El conjunto M_2 de matrices complejas de dimensión 2×2 actuando sobre \mathbb{C}^2 es un *-álgebra, donde para $A \in M_2$, A^* es la transpuesta conjugada de la matriz. Si $A = A^*$, a la matriz se le denomina simétrica o Hermitiana.
- Denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ al conjunto de todos los operadores lineales acotados en \mathcal{H} . Para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, su adjunta $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ está definida por $\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A^*\psi, \phi \rangle$, $\psi, \phi \in \mathcal{H}$. Con esta involución, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una *-álgebra.
- Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finito, $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es una *-álgebra donde la involución se define como

$$f^*(x) = \overline{f(x)}$$

- Sea Ω un espacio localmente compacto, entonces $C(\Omega) = \{f | f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es continua}\}$, con la norma

$$\|f\| = \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \Omega\}, \quad (f \in C(\Omega))$$

y con una involución definida como el ejemplo anterior, es una *-álgebra abeliana.

Decimos que una red¹ T_α de operadores converge en la topología de operador fuerte a un operador T si y sólo si $\|T_\alpha x - Tx\| \rightarrow 0$ para toda $x \in \mathcal{H}$. También decimos que $T_\alpha \rightarrow T$ en la topología de operador débil si $|\langle y, T_\alpha x \rangle - \langle y, Tx \rangle| \rightarrow 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

Vamos a tomar unos resultados importantes de la teoría espectral²: El teorema espectral es una descripción concreta de operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert. Nos permite generalizar el teorema en dimensión finita que nos dice que toda matriz Hermitiana puede diagonalizarse, y nos dice que cada operador autoadjunto es unitariamente equivalente a un operador multiplicativo, usaremos un corolario especial que nos dice que esta diagonalización se puede hacer en un espacio de medida finita [46, p. 227].

Teorema 1.2.1 (Teorema Espectral, versión de operadores multiplicativos). *Sea A un operador autoadjunto acotado en un espacio de Hilbert separable \mathcal{H} . Entonces existe un espacio de medida finita (M, μ) , una función acotada F en M y una aplicación $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(M, d\mu)$ tal que*

$$(UAU^{-1}f)(m) = F(m)f(m).$$

Otra versión del Teorema Espectral [46, p. 235] nos permite asignar a cada subconjunto medible del espectro del observable A una proyección ortogonal E_λ . Esta proyección ortogonal nos define una medida espectral en el sentido de que $\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$ es una medida ordinaria para cualquier ψ . Una interpretación probabilista es que E_λ es el evento de que la variable aleatoria descrita por A tome el valor λ .

Definición 1.2.3 (Proyección espectral). *Sea A un operador autoadjunto acotado y Ω un Boreliano de \mathbb{R} . $E_\Omega := \mathbb{1}_\Omega(A)$ es llamada una proyección espectral de A .*

Teorema 1.2.2 (Teorema Espectral- versión de medida espectral). *Hay una correspondencia uno a uno entre operadores autoadjuntos acotados A y medidas espectrales acotadas valuadas en proyecciones $\{E_\Omega\}$ dadas por*

$$A \mapsto \{E_\Omega\},$$

$$\{E_\Omega\} \mapsto A = \int_{\text{spec}(A)} \lambda dE_\lambda.$$

Definición 1.2.4. *Dado $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{G}' = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XS = SX \quad \forall S \in \mathcal{G}\}$ es llamado el conmutante de $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

\mathcal{G}' es siempre cerrado bajo operaciones algebraicas, y es cerrado bajo la topología débil de operadores(i.e., si para una red $\{A_j\} \in \mathcal{G}'$, los productos interiores $\langle x, A_j y \rangle \rightarrow \langle x, Ay \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, entonces $A \in \mathcal{G}'$). Además, si \mathcal{G} es autoadjunto, esto es $\mathcal{G} = \mathcal{G}'^*$, i.e., es una *-álgebra, entonces también lo es \mathcal{G}' . Es evidente que \mathcal{G} siempre está contenido en \mathcal{G}'' (el conmutante de \mathcal{G}'), el siguiente teorema [7, Teorema 3.6 p. 89] nos indica que si \mathcal{G} contiene la identidad, uno tiene $\mathcal{G} = \mathcal{G}''$

Teorema 1.2.3 (Doble conmutante de von Neumann). *Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una *-sub-álgebra la cual contenga la identidad. Entonces \mathcal{G} es denso en \mathcal{G}'' en las topologías fuerte y débil de operadores.*

El Teorema de Doble Conmutante nos provee un criterio para categorizar una clase especial de álgebras:

¹Una red generaliza el concepto de sucesión, una sucesión es una función con dominio en los naturales, mientras que la red es una función de un espacio dirigido a un espacio topológico, donde el espacio dirigido I tiene una relación \leq que es un orden parcial, y con la propiedad de que para todo $\alpha, \beta \in I$ existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$, es decir, tienen una cota superior. Para más detalles se puede ver [46, Capítulo 4.2]

²El teorema espectral no es trivial de demostrar, por lo que sólo enunciaremos los puntos principales, se puede ver [17] para una explicación bastante accesible, y [46, Capítulo 7] para un tratamiento extensivo del tema.

Definición 1.2.5. *Un álgebra de von Neumann \mathcal{N} es una *-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que*

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}''$$

Definición 1.2.6. *Un estado \mathbb{E} en un álgebra de von Neumann \mathcal{N} es una funcional $\mathbb{E} : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ que es lineal, positiva ($\mathbb{E}(A^*A) \geq 0$) y normalizada $\mathbb{E}(I) = 1$. Además se dice fiel si $\mathbb{E}(A^*A) = 0 \implies A = 0$ y se dice que el estado es normal si es continuo bajo la topología débil de operadores sobre la bola unitaria de \mathcal{N} .*

Estamos listos para definir un espacio de probabilidad cuántica³:

Definición 1.2.7 (Espacio de Probabilidad Cuántica). *Un espacio de probabilidad cuántica es un par $(\mathcal{N}, \mathbb{E})$, donde \mathcal{N} es un álgebra de von Neumann y \mathbb{E} es un estado normal como en la Definición 1.2.6.*

Ejemplos de espacios de probabilidad cuántica son

- $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra de von Neumann, donde los *estados puros* se definen por $\mathbb{E}(A) = \langle \psi, A\psi \rangle$, con $\psi \in \mathcal{H}$ y $\|\psi\| = 1$, y los *estados mixtos*, que son cualquier combinación convexa de los estados puros.

Además, tenemos que el estado $\mathbb{E}(X) = \text{Tr}(\rho X)$ para alguna matriz positiva, autoadjunta y de traza 1. Esta matriz es conocida como matriz de densidad. En el capítulo 4 haremos un uso extensivo de este estado.

- $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ actuando sobre $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bajo multiplicación puntual es un álgebra de von Neumann conmutativa. Además, cualquier estado de la forma $\mathbb{E}(X) = E_P(X)$ es un estado.

Así como en probabilidad no se trata de forma directa al conjunto de eventos, sino se enfoca en variables aleatorias, en probabilidad cuántica no se usa de forma explícita un espacio de Hilbert, hay uno subyacente que es fijo, sobre el cuál actúan los operadores.

Las álgebras de von Neumann abelianas nos permitira establecer una conexión con espacios de probabilidad clásicos, el siguiente resultado nos permite reducir el estudio de una subálgebra abeliana al estudio de un sólo operador que la genera [49, p. 112]:

Lema 1.2.1. *Un álgebra de Von Neumann abeliana en un espacio de Hilbert separable es generada por un sólo operador autoadjunto.*

Hemos llegado al teorema principal de esta sección, éste nos permite concluir que estudiar subálgebras conmutativas de un espacio de probabilidad cuántica es equivalente a estudiar espacios de probabilidad clásicos.

Teorema 1.2.4 (Teorema espectral). *Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{N}$ una sub-álgebra de von Neumann conmutativa en un espacio de probabilidad cuántico $(\mathcal{N}, \mathbb{E})$. Entonces hay un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y un *-isomorfismo de $\iota : \mathcal{C} \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Además, un estado normal \mathbb{E} en \mathcal{C} define una medida de probabilidad P , la cual es absolutamente continua con respecto a μ tal que*

$$\mathbb{E}(C) = E_P(\iota(C)) = \int_{\Omega} \iota(C)P(d\omega) \quad \forall C \in \mathcal{C}.$$

³El lector familiarizado con probabilidad cuántica notará que la continuidad de \mathbb{E} se define sobre la topología de operador *-débil, que es más débil, pero en la bola unitaria las dos topologías coinciden [49]. En la literatura también se define a partir de la topología *normal*, que tiene la propiedad de continuidad $\mathbb{E}(\sup_{\alpha} A_{\alpha}) = \sup_{\alpha} \mathbb{E}A_{\alpha}$ [45], [12]

Demostración. Por el Lema 1.2.1, \mathcal{C} es generado por un sólo operador autoadjunto acotado C . Entonces, por el Teorema 1.2.1 existe un espacio de medida finita $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, una función $F \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y un mapeo $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{G}, d\mu)$ tal que

$$(UCU^{-1}\psi)(\omega) = F(\omega)\psi(\omega) \quad \omega \in \Omega, \psi \in \mathcal{H}.$$

Sea $\mathcal{F} = \sigma\{F\}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ entonces, definamos $\iota : \mathcal{C} \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ por $\iota(X) = UXU^{-1}$ con $X \in \mathcal{C}$. En la nueva representación definida por U , por el Teorema 1.2.2 tenemos

$$\mathbb{E}(X) = \langle \psi, \iota(X)\psi \rangle = \int_{\Omega} F(\omega)d\mu.$$

Notemos que el estado \mathbb{E} podría ser tal que para una proyección $E \in \mathcal{C}$, $\mathbb{E}(E) = 0$, esto significaría que $\iota(E)$ sería una función indicadora sobre un conjunto de medida cero c.s., por lo que estaría en la misma clase de equivalencia de la función cero, por lo que se perdería el isomorfismo, sin embargo, definimos la medida de probabilidad $dP = Fd\mu$ por el Teorema de Radon-Nykodim tal que esté en la misma clase de equivalencia de μ (es decir, tienen los mismos conjuntos de medida cero, vea [46, p. 232]), entonces tenemos que

$$\mathbb{E}(C) = E_P(\iota(C)).$$

□

Observación. Como consecuencia de que el álgebra es generada por un sólo operador autoadjunto, obtenemos la familia $\{X \in \mathcal{N} : X = f(C), f \text{ Borel}\}$, el álgebra conmutativa generada por C , entonces tenemos

$$\mathbb{E}(f(C)) = \int_{\Omega} \iota(f(C))dP.$$

1.2.1 Variables aleatorias

El teorema anterior nos permite definir variables aleatorias en términos de observables. Sea $(\mathcal{N}, \mathbb{E})$ un espacio de probabilidad cuántica y consideremos un elemento $A \in \mathcal{N}$ el cual es autoadjunto $A = A^*$. Entonces el álgebra de von Neumann generada por A , $\mathcal{A} = vN(A) \subset \mathcal{N}$ es conmutativa. Por el Teorema 1.2.4, hay un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y un *-isomorfismo ι que mapea A a alguna variable aleatoria $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Podemos ahora aplicar lo que conocemos de la teoría de probabilidad clásica; para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tenemos el evento

$$[a \in B] = \{\omega \in \Omega : a(\omega) \in B\} = a^{-1}(B) \in \mathcal{F},$$

para mapear de regreso a \mathcal{A} invertimos ι , la proyección correspondiente a $[a \in B]$ se denota por

$$E_A(B) = \iota^{-1}(\mathbb{1}_{[a \in B]}),$$

podemos interpretar a $E_A(B)$, como el evento $[A \text{ toma valores en } B]$ el cual ocurre con probabilidad $\mathbb{E}(E_A(B))$.

Seamos más concretos, tomemos el estado puro asociado a un vector unitario ψ por el Teorema Espectral 1.2.2 podemos expresar A en términos de su medida espectral como

$$\mathbb{E}(f(A)) = \langle \psi, f(A)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)d\langle \psi, E_A(\lambda)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)d\mathbb{E}(E_A(\lambda)), \quad (1.1)$$

la distribución del observable $f(A)$ en el estado ψ es la misma que la distribución de una variable aleatoria que toma valores $f(\lambda)$ en un espacio de probabilidad clásico.

Hasta ahora hemos considerado operadores acotados en un espacio de Hilbert separable, pero no necesariamente vamos a estar manejando operadores acotados, y estos son comunes en física matemática, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.1. Decimos que dos operadores autoadjuntos P, Q satisfacen las relaciones canónicas de conmutación si

$$[P, Q] := PQ - QP = -iI,$$

además

$$[P, Q^n] = -inQ^{n-1}. \quad (1.2)$$

En efecto, procedamos por inducción: supongamos es cierto para $n = k$ y queremos ver que se cumple para $n = k + 1$, entonces

$$\begin{aligned} [P, Q^{k+1}] &= PQ^{k+1} - Q^{k+1}P = PQQ^k - QQ^kP \quad (PQ^k - Q^kP = -ikQ^{k-1}) \\ &= PQQ^k - QPQ^k - ikQ^k \\ &= -iQ^k - ikQ^k \\ &= -i(k+1)Q^k \end{aligned}$$

Ahora, no puede ser el caso de que tanto P como Q sean acotados, ya que si ambos lo fueran, de (1.2) tendríamos

$$\begin{aligned} n\|Q\|^{n-1} &= n\|Q^{n-1}\| \leq 2\|P\|\|Q\|^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ 2\|P\|\|Q\| &\geq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto, P ó Q son no acotados o ámbos son no acotados. \square

El problema con los operadores no acotados, es que, en general, no podemos definirlos en todo el espacio de Hilbert, a lo más, podemos definirlos en un subespacio denso.

Por otra parte, el concepto de la adjunta de un operador es muy importante: Sólo para operadores autoadjuntos el Teorema Espectral puede ser aplicado. Para un operador T densamente definido, su adjunta T^* es el operador que cumple la relación $\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T\varphi, \psi \rangle$ con dominio $Dom\ T^* = \{\varphi \in \mathcal{H} : \psi \mapsto \langle \varphi, T\psi \rangle \text{ es continuo sobre } Dom(T)\}$ siempre es un operador cerrado. El operador se dice que es autoadjunto si es simétrico (i.e., $\langle \psi, T\varphi \rangle = \langle T\psi, \varphi \rangle$ para todo $\psi, \varphi \in Dom(T)$) y si $Dom(T) = Dom(T^*)$.

Todas las consideraciones de las que hemos hablado son bien conocidas [46, Capítulo 8] [5, Capítulo 1], y son importantes para extender el cálculo estocástico al contexto no conmutativo, pues precisamente las integrales serán definidas en un dominio denso fijo, esto quiere decir que a lo más podremos hablar de operadores simétricos, sin embargo, si tenemos procesos acotados simétricos y son densos en su dominio, podemos extenderlo de forma única en \mathcal{H} .

En el caso de que estemos en álgebras de von Neumann conmutativas, podemos sumar y hacer composiciones de operadores no acotados a voluntad [27, Teorema 5.6.15], y podemos *afiliar* (ver Bouten et al. [12, p. 2215] para más detalles) un operador no acotado A a un álgebra de von Neumann \mathcal{N} mediante $T_A = (A - iI)^{-1}$, que es invertible con inversa acotada.

1.3 Esperanza condicionada

Vamos a hablar de la esperanza condicionada, la observación importante es la siguiente: La probabilidad condicionada de un evento B dado un evento A es la probabilidad de que B es cierto dado que A es cierto en la *misma* realización. Esto significa que solo podemos definir esperanzas condicionadas en subálgebras conmutativas de un espacio de probabilidad cuántica. Para ser más precisos, sea $(\mathcal{N}, \mathbb{E})$ un espacio de probabilidad cuántica, $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ una subálgebra conmutativa y $B \in \mathcal{N}$ un elemento autoadjunto que conmute con cada $A \in \mathcal{A}$. Entonces B y \mathcal{A} generan una subálgebra conmutativa más grande $\mathcal{A}' \subset \mathcal{N}$, donde \mathcal{A}' está definido como en la Definición 1.2.4, a la cual se puede aplicar el Teorema 1.2.4 para obtener un *-isomorfismo ι . Vamos a considerar la esperanza condicionada siguiendo el tratamiento de [12].

Definición 1.3.1 (Esperanza condicionada). Sea $(\mathcal{N}, \mathbb{E})$ un espacio de probabilidad cuántica y $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ una subálgebra de von Neumann abeliana. Entonces el mapeo $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A}) : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ es la esperanza condicionada de \mathcal{A}' sobre \mathcal{A} si $\mathbb{E}(\mathbb{E}(B|\mathcal{A})A) = \mathbb{E}(BA)$ para toda $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}'$.

Teorema 1.3.1. La esperanza condicionada de la Definición 1.3.1 existe y es única con probabilidad uno. Además, $\mathbb{E}(B|\mathcal{A})$ es el estimado en mínimos cuadrados de B dado \mathcal{A} en el sentido de $\|B - \mathbb{E}(B|\mathcal{A})\|_{\mathbb{E}} \leq \|B - A\|_{\mathbb{E}}$ para toda $A \in \mathcal{A}$ ($\|X\|_{\mathbb{E}}^2 = \mathbb{E}(X^*X)$).

Demostración. Existencia. Dado $(\mathcal{A}, \mathbb{E})$ como en la definición 1.3.1, denotemos el producto interno $\langle A, B \rangle_{\mathbb{E}} = \mathbb{E}(A^*B)$ y $B \in \mathcal{A}'$ arbitrario, tomemos $\nu N(\mathcal{A}, B)$ el álgebra de von Neumann generada por B y \mathcal{A} , es un álgebra de von Neumann abeliana, entonces el Teorema 1.2.4 nos permite construir (Ω, \mathcal{F}, P) con $\mathcal{F} = \sigma\{\iota(\nu N(\mathcal{A}, B))\}$. Sea $L^2(\Omega, \mathcal{F}, dP)$ el espacio de Hilbert asociado a dicho espacio de probabilidad y tomemos $\mathcal{A} = \sigma\{\iota(\mathcal{A})\} \subset \mathcal{F}$ la σ -álgebra generada por \mathcal{A} . Sea $\iota(B) = X \in L^2(\mathcal{F})$, entonces existe $Y \in L^2(\mathcal{A})$ tal que

$$E[(X - Y)^2] = \inf\{E[(X - W)^2]\} \quad \forall W \in L^2(\mathcal{A})$$

y $\langle X - Y, Z \rangle = 0 \quad \forall Z \in L^2(\mathcal{A})$. Entonces para $A \in \mathcal{A}$ y $Z = \mathbb{1}_A$

$$0 = \int_A (X - Y)dP \implies \int_A XdP = \int_A YdP$$

y entonces $Y = E[X|\mathcal{A}]$. Hemos probado la existencia de la esperanza condicionada en un espacio de probabilidad clásico, ahora, usando de nuevo el Teorema (1.2.4) tenemos un *-isomorfismo con el espacio de probabilidad cuántico conmutativo con el que concluimos que

$$\iota^{-1}(E[X|\sigma\{\iota(\mathcal{A})\}]) = \mathbb{E}[B|\mathcal{A}] \quad \forall B \in \mathcal{A}'$$

existe en \mathcal{A} para $B \in \mathcal{A}'$ autoadjunto. Además, cualquier $B \in \mathcal{A}'$ puede ser escrito como $B = B_1 + iB_2$ donde $B_1 = \frac{B+B^*}{2}$ y $B_2 = \frac{B-B^*}{2}$, entonces $\mathbb{E}(B|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(B_1|\mathcal{A}) + i\mathbb{E}(B_2|\mathcal{A})$

Unicidad con probabilidad uno. Definamos el producto interno $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(X^*Y)$ en \mathcal{A}' con $\|X\|_{\mathbb{E}}^2 = \mathbb{E}(X^*X)$. Entonces

$$\langle A, B - \mathbb{E}(B|\mathcal{A}) \rangle = \mathbb{E}(A^*B) - \mathbb{E}(A^*\mathbb{E}(B|\mathcal{A})) = \mathbb{E}(A^*B) - \mathbb{E}(A^*B) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}'$$

Sean P, Q dos versiones de $\mathbb{E}(B|\mathcal{A})$. Se sigue que $\langle A, P - Q \rangle = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$, pero $P - Q \in \mathcal{A}$ por lo que $\langle P - Q, P - Q \rangle = \|P - Q\|_{\mathbb{E}}^2 = 0$.

Mínimos cuadrados. Sea $B \in \mathcal{A}'$. Entonces para toda $K \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \|B - K\|_{\mathbb{E}}^2 &= \|B - \mathbb{E}(B|\mathcal{A}) + \mathbb{E}(B|\mathcal{A}) + K\|_{\mathbb{E}}^2 \\ &= \|B - \mathbb{E}(B|\mathcal{A})\|_{\mathbb{E}}^2 + \|\mathbb{E}(B|\mathcal{A}) + K\|_{\mathbb{E}}^2 \geq \|B - \mathbb{E}(B|\mathcal{A})\|_{\mathbb{E}}^2 \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad es porque $(B - \mathbb{E}(B|\mathcal{A})) \perp (\mathbb{E}(B|\mathcal{A}) + K)$ □

De esto, concluimos que la esperanza condicionada es simplemente la heredada del espacio de probabilidad clásico $\iota^{-1}(E_P(\iota(B)|\sigma\{\iota(\mathcal{A})\}))$. Esto nos permite conocer las estadísticas de un observable B en el conmutante de \mathcal{A} , incluso, podríamos medir dos observables B, C que no conmutan siempre y cuando conmuten con \mathcal{A} , puesto que las esperanzas condicionales $\mathbb{E}[B|\mathcal{A}]$, $\mathbb{E}[C|\mathcal{A}]$ conmutan por definición.

En general, si $B, C \in \mathcal{A}'$ tal que conmutan con cada $A \in \mathcal{A}$, no implica que B y C conmuten, tenemos que un álgebra de von Neumann abeliana es *maximal* si es igual a su conmutante (ver [12, Ejemplo 2.8] para un ejemplo en dimensión finita de elementos del conmutante que no conmutan).

Lema 1.3.1 (Fórmula de Bayes). *Sea \mathcal{C} una subálgebra de von Neumann conmutativa y sea su conmutante \mathcal{C}' con el estado normal \mathbb{E} . Escogamos $V \in \mathcal{C}'$ tal que $V^*V > 0$ y $\mathbb{E}(V^*V) = 1$. Definimos el nuevo estado en \mathcal{C}' $\mathbf{Q}(A) = \mathbb{E}(V^*AV)$. Entonces*

$$\mathbf{Q}(X|\mathcal{C}) = \frac{\mathbb{E}(V^*XV|\mathcal{C})}{\mathbb{E}(V^*V|\mathcal{C})}, \quad X \in \mathcal{C}'. \quad (1.3)$$

Demostración. Sea K un elemento de \mathcal{C} . Para toda $X \in \mathcal{C}'$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(V^*XV|\mathcal{C})K) &= \mathbb{E}(V^*XKV) = \mathbf{Q}(XK) = \mathbf{Q}(\mathbf{Q}(X|\mathcal{C})K) \\ &= \mathbb{E}(V^*V\mathbf{Q}(X|\mathcal{C})K) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(V^*V\mathbf{Q}(X|\mathcal{C})K|\mathcal{C})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(V^*V|\mathcal{C})\mathbf{Q}(X|\mathcal{C})K) \end{aligned}$$

Como esto se mantiene para toda $K \in \mathcal{C}$, y como por construcción las esperanzas condicionadas son elementos de \mathcal{C} concluimos que

$$\|\mathbb{E}(V^*XV|\mathcal{C}) - \mathbb{E}(V^*V|\mathcal{C})\mathbf{Q}(X|\mathcal{C})\|_{\mathbb{E}} = 0$$

entonces $\mathbb{E}(V^*XV|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(V^*V|\mathcal{C})\mathbf{Q}(X|\mathcal{C})$ \mathbb{E} -c.s.. □

Capítulo 2

Cálculo estocástico cuántico

2.1 Introducción

En esta sección, revisaremos el concepto del espacio de Fock, que nos permite describir las dinámicas de múltiples partículas idénticas. En este espacio podemos definir un espacio de probabilidad cuántica y además, definiremos procesos estocásticos en este espacio. Nos será útil para poder describir sistemas cuánticos que interactúan con su entorno. En particular, veremos que los procesos de Wiener y Poisson emergen de subálgebras de von Neuman conmutativas, aunque dichos procesos no conmutan el uno con el otro. Una extensión del cálculo de Itô, inicialmente desarrollada por Hudson and Parthasarathy [22], nos permite capturar estos procesos en un cálculo estocástico cuántico.

2.2 El espacio de Fock

Consideremos un sistema físico que consta de n partículas idénticas, esta característica de la mecánica cuántica necesita la introducción de productos tensoriales. Supongamos que \mathcal{H} es un espacio de Hilbert que describe el espacio de estados de una partícula, entonces $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ describe el espacio de dos partículas del mismo tipo, y el espacio $\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$ describe el espacio de estados de n partículas idénticas.

El espacio de Fock nos permite describir algún sistema donde puede haber algún número de partículas que son 'creadas' o 'aniquiladas', pero dependiendo del tipo de partículas (bosones o fermiones) hay algunas simetrías que nos llevan a concentrar nuestra atención a algunos subespacios de dicho espacio. En esta sección presentamos algunas propiedades del espacio de Fock, y particularizamos al caso del espacio de Fock simétrico, que lo podemos considerar en términos de una suma directa de espacios de Hilbert sobre subconjuntos finitos de un intervalo, esto provee una estructura de producto tensorial continuo. Un tratamiento extensivo del espacio de Fock es desarrollado por Attal [5, Capítulo 8], del cual nos estamos basando.

Sea $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$ y definamos

$$\mathfrak{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n},$$

$\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ es llamado el espacio de Fock sobre \mathcal{H} , es separable si \mathcal{H} lo es [46]. Por ejemplo si $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, entonces $\psi \in \mathfrak{F}(\mathcal{H})$ es la sucesión de funciones

$$\psi = \{\psi_0, \psi_1(x_1), \psi_2(x_1, x_2), \psi_3(x_1, x_2, x_3), \dots\},$$

tal que

$$|\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_n(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n < \infty.$$

Hay dos subespacios importantes usados en la teoría cuántica. Se construyen como sigue [46]: Sea P_n el grupo de permutación de n elementos y sea $\{\varphi_k\}$ una base de \mathcal{H} . Para cada $\sigma \in P_n$, definamos un operador sobre los elementos de la base de $\mathcal{H}^{\otimes n}$ por

$$U_\sigma(\varphi_{k_1} \otimes \varphi_{k_2} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_n}) = \varphi_{k_{\sigma(1)}} \otimes \varphi_{k_{\sigma(2)}} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{\sigma(n)}},$$

U_σ se extiende por linealidad a un operador unitario sobre $\mathcal{H}^{\otimes n}$, por lo que podemos definir

$$S_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P_n} U_\sigma, \quad (2.1)$$

S_n es una proyección ortogonal. El rango de S_n es llamado el n producto tensorial simétrico de \mathcal{H} . En el caso de $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{H}^{\otimes n} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes L^2(\mathbb{R})$, $S_n \mathcal{H}^{\otimes n}$ es el subespacio de $L^2(\mathbb{R}^n)$ de todas las funciones invariantes a una permutación de las variables. Ahora definimos

$$\mathfrak{F}_s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \mathcal{H}^{\otimes n} = \mathbb{C} + S_1 \mathcal{H}^{\otimes 1} + S_2 \mathcal{H}^{\otimes 2} + \dots,$$

$\mathfrak{F}_s(\mathcal{H})$ es llamado el espacio de Fock **simétrico** sobre \mathcal{H} o espacio de Fock bosónico sobre \mathcal{H} .

Sea $e(\cdot) : P_n \rightarrow \{1, -1\}$ tal que $e(\sigma) = 1$ si la permutación es par y -1 si es impar. Definamos $A_n = (\frac{1}{n!}) \sum_{\sigma \in P_n} e(\sigma) U_\sigma$, entonces A_n es una proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}^{\otimes n}$. $A_n \mathcal{H}^{\otimes n}$ es llamado el n producto tensorial antisimétrico sobre \mathcal{H} . En el caso que $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $A_n \mathcal{H}^{\otimes n}$ es el subespacio de $L^2(\mathbb{R}^n)$ que consiste de todas esas funciones impares bajo cambio de dos coordenadas. El subespacio

$$\mathfrak{F}_a(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n \mathcal{H}^{\otimes n},$$

es llamado el espacio de Fock **antisimétrico** (fermiónico) sobre \mathcal{H} .

Proposición 2.2.1. *Los operadores S_n , A_n son proyecciones ortogonales sobre los subespacios $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H})$ y $\mathfrak{F}_a(\mathcal{H})$, es decir*

$$S_n^2 = S_n, \quad S_n^* = S_n, \quad A_n^2 = A_n, \quad A_n^* = A_n,$$

Demostración. i) Veamos que $U_{\sigma^*} = U_{\sigma^{-1}}$, ya que

$$\langle \phi_{\sigma(1)k} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(n)k}, \phi_{k\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{k\sigma(n)} \rangle = \prod_{i=1}^n \langle \phi_{\sigma(i)k}, \phi_{k\sigma(i)} \rangle \neq 0 \iff \phi_{\sigma(i)k} = \phi_{k\sigma(i)},$$

Además, claramente $U_\sigma U_{\sigma'} = U_{\sigma\sigma'}$, entonces

$$S_n U_\sigma = U_\sigma S_n \implies S_n = S_n^2,$$

y por i), es claro que $Im(S_n) \perp Ker(S_n)$, entonces $S_n^* = S_n$.

Para A_n , basta ver que considerando la permutación (i, j) , para $\varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_n} \in \mathfrak{F}_a(\mathcal{H})$, $\varphi_{k_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_i} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_j} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{\sigma(n)}} = e(\sigma) \varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_j} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_i} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_n}$, entonces

$$\begin{aligned} A_n(\varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_n}) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P_n} e(\sigma) (\varphi_{k_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_i} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_j} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{\sigma(n)}}) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P_n} e(\sigma) e(\sigma) \varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_j} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_i} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_n} \\ &= \varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_n}, \end{aligned}$$

Entonces $A_n^2 = A_n$. Para A_n^* , tenemos que $A_n^* = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P_n} e(\sigma) U_\sigma^*$. □

Denotamos al vector $\Phi = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$ como el *vector vacío* (en inglés *vacuum vector*). El caso más simple de un espacio de Fock simétrico es obtenido tomando $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, por lo que $\mathfrak{F}_s(\mathbb{C}) = l^2(\mathbb{N})$.

Definición 2.2.1. Sea $u \in \mathcal{H}$ dado. Notemos que $S_n u^{\otimes n} = u^{\otimes n}$. El vector coherente (vector exponencial) $e(u)$ asociado a u es

$$e(u) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u^{\otimes n}}{\sqrt{n!}},$$

($0! = 1$, $u^{\otimes 0} = 1$) y tenemos que $\langle e(u), e(v) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} (\langle u, v \rangle)^n = e^{\langle u, v \rangle}$

Denotamos por \mathcal{E} el espacio de todas las combinaciones lineales finitas de vectores coherentes en $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H})$.

Proposición 2.2.2. El espacio \mathcal{E} es denso en $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H})$ y cada familia finita de vectores coherentes es linealmente independiente

Demostración. Veamos primero la independencia lineal. Sean $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{H}$ fijos. Consideremos los conjuntos

$$E_{i,j} = \{u \in \mathcal{H} : \langle u, u_i \rangle \neq \langle u, u_j \rangle\} \quad i \neq j,$$

estos son conjuntos abiertos, densos en \mathcal{H} . Entonces $\cap_{i,j} E_{i,j}$ es no vacío. En particular, existe $v \in \mathcal{H}$ tal que las cantidades $\theta_j = \langle v, u_j \rangle$ son mutuamente distintas. Si existieran escalares α_i tal que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e(u_i) = 0$ esto implicaría

$$0 = \langle e(zv), \sum_{i=1}^n \alpha_i e(u_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{z\theta_i}, \quad z \in \mathbb{C},$$

por lo que todos los α_i son iguales a 0. Supongamos que S es el subespacio cerrado generado por los vectores exponenciales. Entonces $e(0) \in S$ y la igualdad

$$v^{\otimes n} = \left. \frac{d^n}{dz^n} \right|_{z=0} \frac{e(zv)}{\sqrt{n!}},$$

demuestra que para todo $v \in \mathcal{H}$ $n \in \mathbb{N}$, $v^{\otimes n} \in S$. Entonces $S = \mathfrak{F}_s(\mathcal{H})$. \square

Como un corolario, si $S \subset \mathcal{H}$ es un espacio denso, el espacio $\mathcal{E}(S) = \{e(u) : u \in S\}$ es denso en $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H})$. Para ver esto tomemos

$$\|e(u) - e(v)\|^2 = e^{\|u\|^2} + e^{\|v\|^2} - 2 \operatorname{Re}(e^{\langle u, v \rangle}) \implies u \mapsto e(u) \text{ es continuo}$$

y se puede extender via un isomorfismo unitario. En particular $\overline{\{e(u) : u \in S\}} = \{e(u) : u \in \mathcal{H}\}$

Teorema 2.2.1. (Propiedad exponencial) Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Entonces el mapeo $U(e(u \oplus v)) = e(u) \otimes e(v)$ de $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \mapsto \mathfrak{F}_s(\mathcal{H}_1) \otimes \mathfrak{F}_s(\mathcal{H}_2)$ se extiende a un isomorfismo unitario

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle e(u \oplus v), e(u' \oplus v') \rangle &= e^{\langle u \oplus v, u' \oplus v' \rangle} = e^{\langle u, u' \rangle + \langle v, v' \rangle} \\ &= e^{\langle u, u' \rangle} e^{\langle v, v' \rangle} = \langle e(u), e(u') \rangle \langle e(v), e(v') \rangle \\ &= \langle e(u) \otimes e(v), e(u') \otimes e(v') \rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto el mapeo U es isométrico. Como $\mathcal{E}(\mathcal{H}_i)$ es denso en $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H}_i)$, $i = 1, 2$ y el conjunto $\{e(u) \otimes e(v) : u \in \mathcal{H}_1, v \in \mathcal{H}_2\}$ es total en $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H}_1) \otimes \mathfrak{F}_s(\mathcal{H}_2)$, tenemos que U se extiende a un operador unitario. \square

En base a las propiedades de los vectores exponenciales que acabamos de ver, podemos definir al espacio de fock $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H})$ como un espacio de Hilbert generado por la familia de vectores exponenciales, y es de utilidad ya que nos permite identificar el espacio de Fock sobre una suma directa con el producto tensorial de espacios de Fock sobre los sumandos, y en el cálculo estocástico cuántico, vamos a ver que el espacio de Fock sobre $L^2(\mathbb{R})$ tiene una familia natural de descomposiciones en sumas directas sobre la que podemos ocupar una estructura de productos tensoriales continuos.

Representación de Guichardet

En probabilidad cuántica, estaremos interesados en el espacio $\mathfrak{F}_s(L^2(\mathbb{R}))$. En particular, vamos a ver la representación de este espacio de Fock como la suma directa de espacios $L_n^2 = L^2(X_n)$, donde X_n es el espacio de todos los subconjuntos del espacio $[0, 1]$ teniendo n elementos. De esto se trata la representación de Guichardet que damos a continuación.

Consideremos $\mathfrak{F}_s(H)$ cuando $H = L^2(E, \mathcal{E}, m)$, un espacio de medida σ -finito, no atómico y separable. Sea \mathcal{P} el conjunto de subconjuntos finitos de E . Entonces $\mathcal{P} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ donde $\mathcal{P}_0 = \{\emptyset\}$ y \mathcal{P}_n la familia de todos los subconjuntos con n elementos de E .

Sea $f_n \in L_{sym}^2(E^{\otimes n}, \mathcal{E}^{\otimes n}, m^{\otimes n})$ y definamos f en \mathcal{P} como

$$\begin{cases} f(\tau) = 0, & \text{si } \tau \in \mathcal{P} \text{ y } |\tau| \neq n \\ f(\{x_1, \dots, x_n\}) = f_n(x_1, \dots, x_n), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ la σ -álgebra más pequeña en \mathcal{P} que hace a todas estas funciones medibles. Sea $\Delta_n \subset E^n$ el conjunto de (x_1, \dots, x_n) tal que $x_i \neq x_j$ para toda $i \neq j$. Por la no atomicidad de m tenemos que $m(E^n \setminus \Delta_n) = 0$. Para $F \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ ponemos

$$\mu(F) = \mathbb{1}_F(\emptyset) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Delta_n} \mathbb{1}_{F \cap \mathcal{P}_n}(x_1, \dots, x_n) dm(x_1) \dots dm(x_n),$$

La medida μ es σ -finita y posee un sólo átomo $\mu(\{\emptyset\}) = 1$. Llamamos a $(\mathcal{P}, \mathcal{E}_{\mathcal{P}}, \mu)$ el espacio simétrico sobre (E, \mathcal{E}, m)

Para todo $u \in L^2(E, \mathcal{E}, m)$ definimos por π_u al elemento de $L^2(\mathcal{P}, \mathcal{E}_{\mathcal{P}})$ que satisface

$$\pi_u(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = \emptyset \\ \prod_{s \in \tau} u(s) & \text{en otro caso} \end{cases},$$

para todo $\tau \in \mathcal{P}$.

Con el producto interior en $L^2(\mathcal{P}, \mathcal{E}_{\mathcal{P}}, \mu)$, tenemos que $\langle \pi_u, \pi_v \rangle = e^{\langle u, v \rangle}$, por lo que tenemos un isomorfismo entre π_u y $e(u)$.

Por ejemplo, si $E = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue, entonces \mathcal{P} puede ser identificado por el conjunto creciente $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < \dots < x_n\}$. Vamos a ver como se construye este espacio de Fock simétrico y posteriormente veamos como emergen los procesos de Poisson y Wiener.

2.3 Procesos estocásticos en el espacio de Fock

Procesos de Poisson

Sea $I = [0, T]$ un intervalo cerrado en la línea real y $\Omega(I)$ el espacio simétrico de todos los subconjuntos finitos de I

$$\begin{aligned} \Omega(I) &= \cup_{n=0}^{\infty} \Omega_n(I) & \Omega_n(I) &= \{\{t_1, \dots, t_n\} | t_1, \dots, t_n \in I\} \\ \Omega_0(I) &= \emptyset \end{aligned}$$

Por el orden total del intervalo I , un subconjunto finito de I corresponde a una sucesión ordenada (podemos decir, orden creciente). Entonces, $\Omega_n(I)$ corresponde a

$$\{[t_1, \dots, t_n] \in I^n | t_1 < \dots < t_n\}$$

Ahora, consideramos a Ω_n como un subconjunto del cubo $[I^n, e^{-T} \lambda_n]$ donde λ_n es la medida de Lebesgue, por lo que Ω_n hereda la σ -álgebra \mathcal{F}_n y una medida P_n del cubo. Bajo P tenemos a \emptyset como un átomo de peso 1, los tiempos de salto t_1, \dots, t_n son uniformemente distribuidos y $P_n(\Omega_n) = T^n e^{-T} / n!$. Entonces la medida P inducida en Ω es la medida de probabilidad de un proceso de Poisson con tasa unitaria.

Con esto definimos el espacio de Fock simétrico $\mathfrak{F} = (L^2(\Omega(I), \mathcal{F}, dP))$. Por la definición de $\Omega(I)$ tenemos la descomposición

$$\mathfrak{F}(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n(I) \quad \mathfrak{F}_n(I) = L^2(\Omega_n(I), dP)$$

Definimos los espacios \mathfrak{F}_s , $\mathfrak{F}_{[s,t]}$ y \mathfrak{F}_t en los intervalos $[0, s]$, $[s, t]$ y $[t, T]$ y para $0 < s < t < T$ tenemos que $\Omega = \Omega_s \times \Omega_{[s,t]} \times \Omega_t$, por la propiedad exponencial 2.2.1 podemos separar al espacio de Fock como

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_s \otimes \mathfrak{F}_{[s,t]} \otimes \mathfrak{F}_t$$

y tenemos una estructura de producto tensorial continuo. Además, el álgebra $\mathcal{B}(\mathfrak{F}) = \mathcal{W}$ se separa de forma similar

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_s \otimes \mathcal{W}_{[s,t]} \otimes \mathcal{W}_t$$

Decimos que un proceso de operadores $\{X_t\}$ es adaptado si X_t es de la forma $X_{t_j} \otimes I_t$ como un operador en $\mathfrak{F}_{t_j} \otimes \mathfrak{F}_t$, donde I_t es el operador identidad en \mathfrak{F}_t

Para $f \in L^\infty([0, T])$ definamos $\mathbf{e}(f) \in \mathfrak{F}(I)$ por

$$\begin{cases} \mathbf{e}(f)(\tau) = \prod_{t \in \tau} f(t) & \tau = [t_1, \dots, t_n], \\ \mathbf{e}(f)(\emptyset) = 1 \end{cases}$$

el *vector exponencial*, que generan a $\mathfrak{F}(I)$ como un espacio de Hilbert (ver Proposición 2.2.2). Entonces para $\mathbf{e}(f) \in \mathfrak{F}$

$$\langle \mathbf{e}(g), \mathbf{e}(f) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-T}}{n!} \left(\int_0^T g^*(t) f(t) dt \right)^n = \exp \left[\int_0^T (g^*(t) f(t) - 1) dt \right]$$

y por lo tanto $\|\mathbf{e}(f)\|^2 = e^{\|f\|^2 - T} < \infty$ para todo $f \in L^\infty([0, T])$. El dominio exponencial \mathcal{E} es el espacio de combinaciones lineales finitas de los vectores coherentes y por 2.2.2 es denso en \mathfrak{F} , además, factorizan el producto tensorial continuo 2.2.1

$$\mathbf{e}(f) = \mathbf{e}(f_s) \otimes \mathbf{e}(f_{[s,t]}) \otimes \mathbf{e}(f_t)$$

Definamos el proceso de conteo $N_t(\tau) = |\tau \cap [0, t]|$ donde $|\tau|$ determina el número de elementos del conjunto $\tau \in \Omega$. Por construcción, con la medida P es un proceso de Poisson. Ahora lo transformamos a un proceso de operadores:

$$(\Lambda_t \psi)(\tau) = N_t(\tau) \psi(\tau) = |\tau \cap [0, t]| \psi(\tau), \quad \psi \in \mathfrak{F}, \tau \in \Omega, t \in [0, T] \quad (2.2)$$

$\{\Lambda_t\}$ es llamado el *proceso de gauge*, este es un proceso de operadores no acotado pero que aún así es adaptado a \mathcal{W}_{t_j} (esto será más claro en la siguiente sección) y además es afiliado a \mathcal{W}_t (es decir, podemos definir $T_{\Lambda_t} = (\Lambda_t + iI)^{-1}$ y $T_{\Lambda_t} \in \mathcal{W}_t$); de hecho, para $s < t$ los

incrementos $\Lambda_t - \Lambda_s$ son adaptados a $\mathscr{W}_{[s,t]}$ y Λ_t y Λ_s conmutan para todo $s, t \in [0, T]$ y en efecto $vN(\Lambda_t, t \in [0, T]) = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset \mathscr{W}$ es conmutativa.

Ahora, introducimos los estados coherentes

$$\mathbb{E}_f(X) = \langle \mathbf{e}(f), X\mathbf{e}(f) \rangle e^{T-\|f\|^2}, \quad (2.3)$$

y la estructura de producto tensorial continuo nos permite separar los estados coherentes de la forma

$$X = X_{[s]} \otimes X_{[s,t]} \otimes X_{[t]} \quad \mathbb{E}_f(X) = \mathbb{E}_{f_{[s]}}(X_{[s]}) \mathbb{E}_{f_{[s,t]}}(X_{[s,t]}) \mathbb{E}_{f_{[t]}}(X_{[t]}),$$

En particular, con el *vector vacío* $\mathbf{e}(0) = \Phi = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$ definimos el *estado vacío* \mathbb{E}_0 como en (2.3), y $(\mathscr{W}, \mathbb{E}_0)$ es un espacio de probabilidad cuántica.

Como $\Lambda_t - \Lambda_s$ es adaptado a $\mathscr{W}_{[s,t]}$, el proceso de gauge bajo el estado \mathbb{E}_f tiene incrementos independientes. Ahora, si denotamos por $E_{\Lambda_t - \Lambda_s}(B)$ la medida espectral de $\Lambda_t - \Lambda_s$ entonces tenemos con la definición del estado coherente y el producto interior de los vectores exponenciales

$$\mathbb{E}(E_{\Lambda_t - \Lambda_s}) = \mathbb{E}_{f_{[s,t]}}(\mathbb{1}_B(\tau \cap [s, t])) = \sum_{n \in B} \frac{e^{-\int_s^t |f(r)|^2 dr}}{n!} \left(\int_s^t |f(r)|^2 dr \right)^n,$$

Entonces Λ_t es un proceso de Poisson no homogéneo con tasa $|f(t)|^2$ bajo el estado \mathbb{E}_f . En particular $e(1)(\tau) = 1$ y entonces para toda $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tenemos la relación

$$\mathbb{E}_1(X) = \langle 1, X1 \rangle = E_P(X),$$

por lo que bajo el estado \mathbb{E}_1 el proceso de gauge $\{\Lambda_t\}$ es un proceso de Poisson con tasa unitaria. Con el vector vacío tenemos la propiedad de que el proceso de gauge $\Lambda_t \Phi = 0$, eso quiere decir que el proceso de gauge no registra ningún conteo en el estado.

Procesos de Wiener

Definición 2.3.1. En el dominio \mathcal{E} definimos para toda $f, g \in L^\infty([0, T])$ el operador de Weyl

$$W(f)e(g) = e^{-\langle f, g \rangle - \|f\|^2/2} e(f + g).$$

En particular tenemos la relación

$$\begin{aligned} W(h)W(f)e(g) &= e^{-\langle f, g \rangle - \|f\|^2/2} W(h)e(f + g) \\ &= e^{-\langle f, g \rangle - \|f\|^2/2 - \langle h, f+g \rangle - \|h\|^2/2} e(h + f + g) \\ &= e^{-\|f\|^2/2 - \|h\|^2/2 - \langle h, f \rangle} e^{-\langle h, f+g \rangle} e(h + f + g) \\ &= e^{-1/2(\|f\|^2 + \|h\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle h, f \rangle + 2i\operatorname{Im}\langle h, f \rangle)} e^{-\langle h, f+g \rangle} e(h + f + g) \\ &= e^{-i\operatorname{Im}\langle h, f \rangle} e^{-1/2\|h+f\|^2 - \langle h, f+g \rangle} e(h + f + g) \\ &= e^{-i\operatorname{Im}\langle h, f \rangle} W(h + f)e(g), \end{aligned}$$

$$W(h)W(f) = e^{-i\operatorname{Im}\langle h, f \rangle} W(h + f), \quad (2.4)$$

llamado las *Relaciones de Conmutación de Weyl*.

Proposición 2.3.1. Los operadores de Weyl son unitarios

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle W(f)\mathbf{e}(u), W(f)\mathbf{e}(v) \rangle &= \exp(-\langle f, u \rangle - \langle f, v \rangle - \|f\|^2) \langle \mathbf{e}(f+u), \mathbf{e}(f+v) \rangle \\
&= \exp(-\langle f, u \rangle - \langle f, v \rangle - \|f\|^2) \exp(\langle f+u, f+v \rangle) \\
&= \exp(-\langle f, u \rangle - \langle f, v \rangle - \|f\|^2) \exp(\langle f, u \rangle + \langle f, v \rangle + \|f\|^2 + \langle u, v \rangle) \\
&= e^{\langle u, v \rangle} = \langle \mathbf{e}(u), \mathbf{e}(v) \rangle,
\end{aligned}$$

Entonces $W(f)$ se extiende a una isometría, pero además

$$W(f)W(-f) = W(f-f)e^{-i\text{Im}\langle f, -f \rangle} = W(0)e^{\text{Im}(\|f\|^2)} = I,$$

entonces $W(f)$ es invertible y unitario. \square

Una propiedad importante que sigue inmediatamente de la definición de $W(f)$ y de la estructura de producto tensorial continua es

$$W(f)\mathbf{e}(g) = W(f_s)\mathbf{e}(g_s) \otimes W(f_{[s,t]})\mathbf{e}(g_{[s,t]}) \otimes W(f_t)\mathbf{e}(g_t)$$

en particular, vemos que $W(f\mathbb{1}_{[0,t]})$ es adaptado en $[0, T]$.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Stone [46]). *Sea \mathcal{N} un álgebra de von Neumann y sea $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{N}$ un grupo de operadores unitarios que es fuertemente continuo. Entonces hay un único autoadjunto A afiliado a \mathcal{N} , el generador de Stone, tal que $U_t = e^{itA}$*

Ahora, fijamos $f \in L^\infty([0, T])$ y consideremos el grupo unitario $\{W(kf)\}_{k \in \mathbb{R}}$, se puede probar que es fuertemente continuo [41] y por el teorema de Stone 2.3.1 existe un operador autoadjunto $B(f)$ tal que $W(kf) = e^{ikB(f)}$.

Estos operadores son llamados *operadores de campo* y en particular cumplen la *relación canónica de conmutatividad*

$$[B(f), B(g)] = 2i \text{Im}\langle f, g \rangle. \quad (2.5)$$

Calculemos la función característica de $B(f)$, usando la definición de estado coherente tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_g(W(kf)) &= \langle \mathbf{e}(g), W(kf)\mathbf{e}(g) \rangle e^{T-\|g\|^2} = \langle \mathbf{e}(g), \mathbf{e}(kf+g) \rangle e^{T-\|g\|^2 - \langle kf, g \rangle - k^2\|f\|^2/2} \\
&= e^{\langle g, g+kf \rangle - T} e^{T-\|g\|^2 - \langle kf, g \rangle - k^2\|f\|^2/2} \\
&= e^{i2k \text{Im}\langle g, f \rangle - k^2\|f\|^2/2},
\end{aligned} \quad (2.6)$$

Entonces $B(f)$ es una variable aleatoria con distribución Gaussiana de media $2\text{Im}\langle g, f \rangle$ y varianza $\|f\|^2$.

En el espacio de probabilidad cuántica $(\mathcal{W}, \mathbb{E}_0)$, consideremos el proceso de operadores $\{B_t^\varphi = B(e^{i\varphi}\mathbb{1}_{[0,t]}) : t \in [0, T]\}$ para una función fija $\varphi \in L^\infty([0, T])$. entonces B_t^φ es adaptada, por lo que $B(e^{i\varphi}\mathbb{1}_{[s,t]}) = B_t^\varphi - B_s^\varphi$.

Por la relación (2.5) tenemos que B_s^φ y B_t^φ conmutan para todo $s, t \in [0, T]$. Entonces $vN(B_t^\varphi, t \in [0, T])$ es una subálgebra conmutativa y por el teorema 1.2.4 hay un *-isomorfismo ι tal que podemos representar B_t^φ para cada t como una variable aleatoria en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega^\varphi, \mathcal{F}^\varphi, P^\varphi)$. En particular, para cada φ , $\{\iota(B_t^\varphi)\}$ es un proceso estocástico. Vemos que bajo el estado \mathbb{E}_0 , $B_t^\varphi - B_s^\varphi$ tiene media cero y como $f = \mathbb{1}_{[s,t]}$ concluimos que tiene varianza $s - t$, además, de la definición de los estados coherentes podemos ver que para $t_1, t_2 - t_2, \dots, t_n - t_{n-1}$, las diferencias $B_{t_i}^\varphi - B_{t_{i-1}}^\varphi$ son independientes. Entonces $\iota\{B_t^\varphi\}$ es un proceso de Wiener en $(\Omega^\varphi, \mathcal{F}^\varphi, P^\varphi)$.

Notemos que para φ_1, φ_2 diferentes, en general los procesos de Wiener $\{\iota(B_t^{\varphi_1})\}, \{\iota(B_t^{\varphi_2})\}$ no conmutan, por lo que no podemos representarlos en un mismo espacio de probabilidad, a menos de que $\text{Im}(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = 0$.

Consideremos el proceso de Poisson $\{\Lambda_t\}$, que como vimos se desvanece en el vacío, pero si consideramos el proceso $\Lambda_t(f) = W(f)^* \Lambda_t W(f)$, entonces para cada función Borel medible b podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0(b(\Lambda_{t_1}(f), \dots, \Lambda_{t_n}(f))) &= \langle \Phi, b(\Lambda_{t_1}(f), \dots, \Lambda_{t_n}(f)) \Phi \rangle e^{T - \|f\|^2} \\ &= \langle \Phi, W(f)^* b(\Lambda_{t_1}, \dots, \Lambda_{t_n}) W(f) \Phi \rangle e^{T - \|f\|^2} \\ &= \langle W(f) \Phi, b(\Lambda_{t_1}, \dots, \Lambda_{t_n}) W(f) \Phi \rangle e^{T - \|f\|^2} \\ &= \langle e(f), b(\Lambda_{t_1}, \dots, \Lambda_{t_n}) \Phi \rangle e^{T - \|f\|^2} \\ &= \mathbb{E}_f(b(\Lambda_{t_1}, \dots, \Lambda_{t_n})), \end{aligned}$$

y entonces tenemos la misma distribución que el proceso Λ_t en el estado coherente \mathbb{E}_f , lo que nos permite definir el proceso de Poisson en el vacío, y para f, g los procesos $\Lambda_t(f), \Lambda_t(g)$ no conmutan.

Entonces tenemos en el espacio de probabilidad cuántica $(\mathscr{W}, \mathbb{E}_0)$ una familia de procesos estocásticos no compatibles, en la siguiente sección, veremos una manera de desarrollar integrales estocásticas para estos procesos.

2.4 Integral estocástica y Fórmula de Itô

A continuación veremos un método dado por Hudson y Parthasarathy para integrar procesos respecto a *ruidos fundamentales* definidos en el espacio de probabilidad cuántica $(\mathscr{W}, \mathbb{E}_0)$. Esta sección está basada en los textos de Hudson [23], Holevo [21] y de Bouten et al. [12].

2.4.1 Operadores de Creación, Aniquilación y de Gauge

En la sección pasada vimos que a partir de los operadores de campo B_t^φ , tenemos un proceso de Wiener para φ fija, pero para φ_1, φ_2 diferentes, estos procesos no conmutan. Vamos a capturar estos procesos no conmutativos por medio de los operadores de *aniquilación* y *creación*. Definimos $Q(f) = B(if)$ y $P_t = B(-f)^1$ y sean $a(f)$ y su adjunta $a(f)^*$

$$\begin{aligned} a(f) &= \frac{Q(f) + iP(f)}{2}, \\ a(f)^* &= \frac{Q(f) - iP(f)}{2}, \end{aligned}$$

Calculemos

$$\begin{aligned} B(f)e(g) &= \frac{1}{i} \frac{d}{dk} (W(kf)e(g))|_{k=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{dk} (e^{-k\langle f, g \rangle - k^2 \|f\|^2} \mathbf{e}(kf + g))|_{k=0} \\ &= \frac{1}{i} ([-\langle f, g \rangle - 2k\|f\|^2] e^{-k\langle f, g \rangle - k^2 \|f\|^2} \mathbf{e}(kf + g))|_{k=0} \\ &\quad + \frac{1}{i} e^{-k\langle f, g \rangle - k^2 \|f\|^2}|_{k=0} \frac{d}{dk} \mathbf{e}(kf + g)|_{k=0} \\ &= i\langle f, g \rangle \mathbf{e}(g) - i \frac{d}{dk} \mathbf{e}(kf + g)|_{k=0}, \end{aligned}$$

¹ Q y P son autoadjuntos por el Teorema de Stone 2.3.1

La acción del *Operador de Aniquilación* $a(f)$ sobre los vectores exponenciales es:

$$\begin{aligned}
\langle e(h), a(f)\mathbf{e}(g) \rangle &= \langle e(h), \frac{1}{2}(B(if) + iB(-f))\mathbf{e}(g) \rangle \\
&= \frac{1}{2}i\langle if, g \rangle \langle e(h), \mathbf{e}(g) \rangle - \frac{i}{2} \langle e(h), \frac{d}{dk}\mathbf{e}(g + ikf)|_{k=0} \rangle \\
&\quad + \frac{i}{2} \{ i\langle -f, g \rangle \langle e(h), \mathbf{e}(g) \rangle - i \langle e(h), \frac{d}{dk}\mathbf{e}(g - kf)|_{k=0} \rangle \} \\
&= \langle f, g \rangle \langle e(h), \mathbf{e}(g) \rangle - \frac{i}{2} \langle h, if \rangle \langle e(h), \mathbf{e}(g) \rangle - \frac{1}{2} \langle h, f \rangle \langle e(h), \mathbf{e}(g) \rangle \\
&= \langle f, g \rangle \langle e(h), \mathbf{e}(g) \rangle, \\
a(f)\mathbf{e}(g) &= \langle f, g \rangle \mathbf{e}(g)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Observemos que

$$\langle a(f)^*\mathbf{e}(g), \mathbf{e}(u) \rangle = \langle \mathbf{e}(g), a(f)\mathbf{e}(u) \rangle = \langle f, u \rangle \langle \mathbf{e}(g), \mathbf{e}(u) \rangle = \langle f, u \rangle e^{\langle g, u \rangle} = \langle f, u \rangle \langle \mathbf{e}(g), \mathbf{e}(u) \rangle$$

y además

$$\left\langle \frac{d}{dk}\mathbf{e}(g + kf)|_{k=0}, \mathbf{e}(u) \right\rangle = \frac{d}{dk} \exp(\langle g + kf, u \rangle)|_{k=0} = \langle f, u \rangle \langle \mathbf{e}(g), \mathbf{e}(u) \rangle,$$

entonces el *Operador de Creación* es

$$a(f)^*\mathbf{e}(g) = \frac{d}{dk}\mathbf{e}(g + kf)|_{k=0}, \tag{2.8}$$

y su acción sobre operadores exponenciales es

$$\langle \mathbf{e}(f), a^*(u)\mathbf{e}(g) \rangle = \langle f, u \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle. \tag{2.9}$$

Definimos a los *procesos* de aniquilación y creación como

$$A_t = a(\mathbb{1}_{[0,t]}), \tag{2.10}$$

$$A_t^* = a^*(\mathbb{1}_{[0,t]}). \tag{2.11}$$

Observación. La definición que estamos usando para los procesos de aniquilación y de creación en términos de productos internos nos son más útiles en esta sección para poder definir las integrales estocásticas, pero también podemos obtener una expresión en términos de la representación de Guichardet. Para $\tau \in \Omega(I)$ podemos escribir

$$A_t\mathbf{e}(g)(\tau) = \int_0^t g(s) d\mathbf{e}(g) = \int_0^t g(s) \prod_{r \in \tau} g(r) ds = \int_0^t e(g)(\tau \cup \{s\}) ds$$

En particular, podemos extender esta integral a cualquier $\psi \in \mathfrak{F}(\Omega)$, A_t es el proceso de *aniquilación* en la representación de Guichardet.

Por otra parte consideremos la regla para la derivada del producto

$$\frac{d}{dx} \left[\prod_{i=1}^k f_i(x) \right] = \sum_{i=1}^k \left(\frac{d}{dx} f_i(x) \prod_{j \neq i} f_j(x) \right),$$

y entonces tenemos una expresión para el operador de *creación*

$$\begin{aligned}
A_t^*\mathbf{e}(g)(\tau) &= \frac{d}{dk} e(g + k\mathbb{1}_{[0,t]})(\tau) = \sum_{s \in \tau} \left(\frac{d}{dk} (g(s) + k\mathbb{1}_{[0,t]}(s))|_{k=0} \prod_{r \neq s} (g(r) + k\mathbb{1}_{[0,t]}(r))|_{k=0} \right) \\
&= \sum_{s \in \tau} \mathbb{1}_{[0,t]}(s) e(g)(\tau \setminus \{s\}) \\
&= \sum_{s \in \tau \cap [0,t]} e(g)(\tau \setminus \{s\}),
\end{aligned}$$

y también podemos extender al operador de creación a cualquier $\psi \in \mathfrak{F}(\Omega)$.

El operador $\lambda(S)\mathbf{e}(g) = \frac{d}{dk}\mathbf{e}(e^{kS}g)|_{k=0}$ con $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es llamado la segunda cuantización diferencial de S . Su acción sobre los vectores exponenciales es:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}(f), \lambda(S)\mathbf{e}(g) \rangle &= \langle \mathbf{e}(f), \frac{d}{dk}\mathbf{e}(e^{kS}g)|_{k=0} \rangle \\ &= \frac{d}{dk}e^{\langle f, e^{kS}g \rangle}|_{k=0} \\ &= \langle f, Sg \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle\end{aligned}\quad (2.12)$$

Definimos el proceso de gauge como sigue: Denotando por $m(f)$ el elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ definido por multiplicación por la función medible acotada f . Entonces

$$\Lambda_t = \lambda(m(\mathbb{1}_{[0,t]})). \quad (2.13)$$

Observación. Veamos que este proceso de gauge es equivalente al proceso (2.2) en la representación de Guichardet que dimos en la sección anterior, usamos $S = \mathbb{1}_{[0,t]}$ y $m = 1$

$$\begin{aligned}\lambda(S)\mathbf{e}(g)(\tau) &= \frac{d}{dk}\mathbf{e}(e^{kT}g(\tau))|_{k=0} = \frac{d}{dk}\left(\prod_{s \in \tau} e^{kT}g(s)\right)|_{k=0} \\ &= \sum_{s \in \tau} \frac{d}{dk}e^{kT}g(s)|_{k=0} \prod_{r \neq s} g(r) = \sum_{s \in \tau} Tg(s)\mathbf{e}(g(\tau \setminus \{s\})) \\ &= \sum_{s \in \tau} T\mathbf{e}(g) = \sum_{s \in \tau \cap [0,t]} \mathbf{e}(g) \\ &= |\tau \cap [0,t]|\mathbf{e}(g),\end{aligned}$$

donde en el último paso $|\cdot|$ denotan la cardinalidad del conjunto, como lo definimos en la sección anterior. Como los vectores exponenciales son densos, concluimos el resultado para $\psi \in \mathfrak{F}$.

Tenemos las siguientes relaciones para los operadores de creación, aniquilación y de gauge, que nos serán útiles después (probamos unas relaciones, las demás se demuestran de forma análoga a partir de la acción de los vectores exponenciales):

$$\begin{aligned}\langle a(e)\mathbf{e}(f), a(h)\mathbf{e}(g) \rangle &= \langle \langle e, f \rangle \mathbf{e}(f), \langle h, g \rangle \mathbf{e}(g) \rangle \\ &= \langle h, g \rangle \langle f, e \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}\langle a^*(e)\mathbf{e}(f), a^*(h)\mathbf{e}(g) \rangle &= \langle e(f), a(e)a^*(h)\mathbf{e}(g) \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}(f), \frac{d}{dk}a(e)\mathbf{e}(g + kh)|_{k=0} \rangle \\ &= \langle e, g \rangle \langle \mathbf{e}(f), \frac{d}{dk}\mathbf{e}(g + kh)|_{k=0} \rangle + \langle \mathbf{e}(f), \frac{d}{dk}\langle e, kh \rangle \mathbf{e}(g + kh)|_{k=0} \rangle \\ &= \langle e, g \rangle \langle f, h \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle + \langle e, h \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{e}(f), \langle e, kh \rangle \frac{d}{dk}\mathbf{e}(g + kh)|_{k=0} \rangle \\ &= \{ \langle e, g \rangle \langle f, h \rangle + \langle e, h \rangle \} \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\langle \lambda(S^*)\mathbf{e}(f), \lambda(T)\mathbf{e}(g) \rangle = \langle f, STg \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle \quad (2.16)$$

$$\langle a^*(e)\mathbf{e}(f), a(h)\mathbf{e}(g) \rangle = \langle a^*(h)\mathbf{e}(f), a^*(e)\mathbf{e}(g) \rangle = \langle e, g \rangle \langle h, g \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle \quad (2.17)$$

$$\langle a^*(f)\mathbf{e}(f), \lambda(S)\mathbf{e}(g) \rangle = \{ \langle f, e \rangle \langle f, Sg \rangle + \langle e, Sg \rangle \} \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle \quad (2.18)$$

$$\langle \lambda(S^*)\mathbf{e}(f), a(h)\mathbf{e}(g) \rangle = \langle h, g \rangle \langle f, Sg \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle \quad (2.19)$$

$$\langle a(e)\mathbf{e}(f), \lambda(s)\mathbf{e}(g) \rangle = \langle f, e \rangle \langle f, Sg \rangle \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle \quad (2.20)$$

$$\langle \lambda(S^*)\mathbf{e}(f), a^*(h)\mathbf{e}(g) \rangle = \{ \langle f, Sg \rangle \langle f, h \rangle - \langle f, Sh \rangle \} \langle \mathbf{e}(f), \mathbf{e}(g) \rangle \quad (2.21)$$

2.4.2 Integrales estocásticas para procesos simples

Un proceso $\{F_t, t \in [0, T]\}$ se dice es *simple* si hay una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ tal que

$$F_t = F_{t_{j-1}} \text{ para } t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Estamos integrando respecto a $dA_t, dA_t^*, d\Lambda_t$ y dt , en el espacio de probabilidad cuántica

$$(\mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \otimes \mathcal{W}, \rho_0 \otimes \mathbb{E}_0),$$

donde \mathcal{H}_0 es el espacio *inicial*.

Como vimos en la sección anterior, un proceso $\{F_t\}$ se dice es *adaptado* si para t arbitrario

$$F_t = F_{t_j} \otimes I_t,$$

y notemos que F_{t_j} actúa sobre $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{F}_{t_j}$.

Definición 2.4.1 (Integral cuántica de Itô para procesos simples). *Para procesos adaptados simples, la integral estocástica está definida por el operador*

$$I_T = \int_0^T (F_0 d\Lambda + F_1 dA + F_2 dA^* + F_3 dt) = \quad (2.22)$$

$$\sum_{j=1}^N \{F_0(t_j)(\Lambda_{t_j} - \Lambda_{t_{j-1}}) + F_1(t_j)(A_{t_j} - A_{t_{j-1}}) + F_2(t_j)(A_{t_j}^* - A_{t_{j-1}}^*) + F_3(t_j)(t_j - t_{j-1})\}.$$

Recordemos que $\Lambda_{t_j} - \Lambda_{t_{j-1}}$ (respectivamente $A_{t_j} - A_{t_{j-1}}, A_{t_j}^* - A_{t_{j-1}}^*$) están adaptados a $\mathcal{W}_{[t_{j-1}, t_j]}$ mientras que F_i , ($i = 0, 1, 2$) están adaptados a $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \otimes \mathfrak{F}(\Omega)_{t_{j-1}}$. Entonces podemos escribir $F_0(\Lambda_{t_j} - \Lambda_{t_{j-1}}) = F_0 \otimes (\Lambda_{t_j} - \Lambda_{t_{j-1}})$ (respectivamente $F_1 \otimes (A_{t_j} - A_{t_{j-1}}), F_2 \otimes (A_{t_j} - A_{t_{j-1}})$) y la definición tiene sentido siempre y cuando F_i ($i = 0, 1, 2$) con Λ_t, A_t, A_t^* tengan un dominio denso común lo suficientemente grande tal que la suma esté bien definida. En particular requerimos que el dominio de cada F_t contenga al menos el *dominio exponencial restringido* \mathcal{E}_* que corresponde a las funciones $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ de funciones localmente acotadas.

El siguiente teorema es conocido como la *primera fórmula fundamental*, lo enunciamos para integrandos simples, esta nos permite expresar los elementos de las integrales estocásticas como integrales de Lebesgue.

Teorema 2.4.1. *Sean E, F, G, H procesos simples. Entonces para $f, g \in \mathcal{E}$, $u, v \in \mathcal{H}_0$ y $t \in \mathbb{R}_+$*

$$\begin{aligned} & \langle u \otimes e(f), \int_0^t (E_s d\Lambda_s + F_s dA_s + G_s dA_s^* + H_s dT_s) v \otimes e(g) \rangle \\ &= \int_0^t \langle u \otimes e(f), (\bar{f}_s g_s E_s + g_s F_s + \bar{f}_s G_s + H_s) v \otimes e(g) \rangle ds. \end{aligned}$$

Demostración. Ver la demostración en el Apéndice B.1. □

Teniendo dos integrales I_t y J_t , la composición $I_t J_t$ no necesariamente tiene que estar bien definida en el dominio $\mathcal{H}_0 \otimes D$, entonces en lugar de tratar con el producto de integrales $I_t J_t$, tratamos con $\langle J_t^\dagger u \otimes e(f), I_t v \otimes e(g) \rangle$, esto es lo que la *segunda fórmula fundamental* nos ayuda definir para las integrales estocásticas, de nuevo, enunciándolo para el caso simple.

Teorema 2.4.2. *Sean E_j, F_j, G_j, H_j , con $j = 1, 2$ procesos simples y M_1, M_2 las integrales*

$$M_j(t) = \int_0^t (E_j d\Lambda_s + F_j dA_s + G_j dA_s^* + H_j dt) \quad j = 1, 2,$$

entonces, para $f, g \in \mathcal{E}$ y $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \langle M_1(t)u \otimes e(f), M_2(t)v \otimes e(g) \rangle \\ &= \int_0^t \{ \langle M_1(s)u \otimes e(f), \bar{f}(s)g(s)E_2(s) + g(s)F_2(s) + \bar{f}(s)G_2(s) + H_2(s)v \otimes e(g) \rangle \\ &+ \langle (\bar{g}(s)f(s)E_1(s) + f(s)F_1(s) + \bar{g}(s)G_1(s) + H_1(s))u \otimes e(f), M_2(s)v \otimes e(g) \rangle \\ &+ \langle (f(s)E_1(s) + G_1(s))u \otimes e(f), (g(s)E_2(s) + G_2(s))v \otimes e(g) \rangle \} ds. \end{aligned}$$

Demostración. referimos al lector a [41]. □

2.4.3 Extendiendo la Integral

En el cálculo estocástico clásico respecto a un movimiento Browniano, la isometría de Itô nos permite extender la integral que fue definida para procesos estocásticos simples a una familia más grande de procesos. En nuestro caso, los *estimados fundamentales* nos permiten extender la integración a una familia más grande de elementos.

Teorema 2.4.3. *Sea $f \in \mathcal{E}_*$ (el dominio exponencial restringido) y $t \geq 0$. Entonces existe un número no negativo $\beta(f, t)$ con la propiedad de que para procesos adaptados simples E , para $K \in \{A^*, A, \Lambda, T\}$ uno de los procesos fundamentales y $0 \leq s \leq t$*

$$\| \int_0^s E(u) dK(u) u \otimes e(f) \|^2 \leq \beta(f, t) \int_0^s \|E(u)u \otimes e(f)\|^2 du.$$

Demostración. Ver la demostración en el Apéndice B.1. □

Proposición 2.4.1. *Decimos que un proceso adaptado E es cuadrado integrable si para g, f arbitrarios, la función con valores complejos $R_+ \ni r \mapsto \langle e(g), E(r)e(f) \rangle$ es una función Lebesgue medible. Entonces existe una secuencia $E^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ de procesos simples tal que para todo $t > 0$, $u \in \mathcal{H}_0$, $f \in \mathcal{E}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \|(E(s) - E^{(n)}(s))u \otimes e(f)\|^2 ds = 0.$$

Demostración. La demostración de este teorema se encuentra en [22], en la demostración primero demuestran que una función cuadrado integrable puede ser aproximada por funciones continuas definidas mediante una probabilidad de densidad, y después basta ver que se pueden aproximar esas funciones continuas a partir de funciones simples. □

Proposición 2.4.2. *Para E un proceso cuadrado integrable tal que $E_n \rightarrow E$ y K uno de los integradores estocásticos fundamentales, entonces para $f \in \mathcal{E}_*$ $t \leq 0$ la secuencia*

$$\left(\int_0^t E_n(r) dK(r) u \otimes e(f) \right),$$

converge en \mathfrak{F} .

Demostración. Tenemos que $\int_0^t \|(E_n(s) - E(s))u \otimes e(f)\|^2 ds \rightarrow 0$. Entonces

$$\| \int_0^t (E_n(s) - E_m(s)) dK(s) u \otimes e(f) \|^2 \leq \beta(f, t) \int_0^t \|E_n(s) - E_m(s)\|^2 ds \rightarrow 0,$$

entonces la secuencia es de Cauchy y converge en \mathfrak{F} . La convergencia es uniforme en $s \in [0, t]$ □

Denotamos ese límite por $\int_0^t E(s) dK(s)$ y el límite es independiente de la elección de la secuencia que aproxima a E ya que si $E_n \rightarrow E$ y $F_n \rightarrow E$ son dos de dichas secuencias, entonces, la secuencia $E_1, F_1, \dots, E_n, F_n, \dots$ converge al mismo límite. Con esto podemos definir la Integral Cuántica para procesos integrables:

Definición 2.4.2 (Integral Cuántica de Itô). *Un proceso de operadores $\{X_t\}$ es estocásticamente integrable si es adaptado y cuadrado integrable. Dada una cuádrupla (E, F, G, H) de tales procesos, la integral estocástica*

$$X_t = X_0 + \int_0^t (E_s d\Lambda_s + F_s dA_s + G_s dA_s^* + H_s ds) \quad (2.23)$$

está definida de forma única como el límite fuerte de integrales estocásticas de la forma dada en la Proposición 2.4.1 en el dominio $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{E}$.

Observación. Podemos escribir la ecuación integral de forma simbólica como

$$dX_t = E_t d\Lambda_t + F_t dA_t + G_t dA_t^* + H_t dt$$

Los estimados fundamentales y la primera y segunda fórmula fundamental siguen siendo válidas para procesos estocásticamente integrables. En particular, todo proceso continuo es integrable, lo que nos garantiza la existencia de una gran cantidad de procesos integrables. Vimos en el teorema 2.4.2 una forma de definir el producto de integrales, sin embargo, en la práctica necesitamos calcular las composiciones de integrales $I_t J_t$, el concepto de *par adjunto* nos permite definir el producto de los elementos de $I_t J_t$ a partir de los elementos de $\langle I_t^\dagger u \otimes \mathbf{e}(g), J_t u \otimes \mathbf{e}(g) \rangle$, que sí está bien definido.

Definición 2.4.3 (Par adjunto). *Un par de procesos simples estocásticamente integrables (L, L^\dagger) se dice son un par adjunto si*

$$\langle L_t^\dagger u \otimes \mathbf{e}(f), v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle = \langle u \otimes \mathbf{e}(f), L_t v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle$$

Proposición 2.4.3. *Supongamos que (L, L^\dagger) es un par adjunto de procesos estocásticamente integrables y*

$$X_t = \int_0^t L dM, \quad X_t^\dagger = \int_0^t L^\dagger dM^\dagger$$

para M uno de los procesos fundamentales Λ, A, A^ Entonces (X_t, X_t^\dagger) es un par adjunto.*

Demostración. A_t y A_t^* son mutuamente adjuntos y Λ_t es esencialmente autoadjunto en \mathcal{E} , entonces para procesos simples la proposición es válida, y podemos extenderlo a procesos estocásticamente integrables. \square

Entonces podemos escribir una expresión para el par adjunto de la integral dX_t y en base a estas integrales, enunciamos la regla cuántica de Itô, su demostración rigurosa es la del teorema 2.4.2 extendida a procesos integrables.

Teorema 2.4.4. (Regla cuántica de Itô). *Sean (F, G, H, I) , (B, C, D, E) y $(B^\dagger, C^\dagger, D^\dagger, E^\dagger)$ procesos estocásticamente integrables tal que los últimos dos sean pares adjuntos. Consideremos las integrales estocásticas*

$$\begin{aligned} dX_t &= B_t d\Lambda_t + C_t dA_t + D_t dA_t^* + E_t dt \\ dY_t &= F_t d\Lambda_t + G_t dA_t + H_t dA_t^* + I_t dt \end{aligned}$$

Entonces el proceso $X_t Y_t$ satisface la relación

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + (dX_t) Y_t + dX_t dY_t$$

donde los términos

$$\begin{aligned} X_t dY_t &= X_t F_t d\Lambda_t + X_t G_t dA_t + X_t H_t dA_t^* + X_t I_t dt \\ (dX_t) Y_t &= B_t Y_t d\Lambda_t + C_t Y_t dA_t + D_t Y_t dA_t^* + E_t Y_t dt \\ dX_t dY_t &= B_t F_t d\Lambda_t + C_t F_t dA_t + B_t H_t dA_t^* + C_t H_t dt \end{aligned}$$

son evaluados de acuerdo a la siguiente tabla

$dX dY$	dA_t	$d\Lambda_t$	dA_t^*	dt
dA_t	0	dA_t	dt	0
$d\Lambda_t$	0	$d\Lambda_t$	dA_t^*	0
dA_t^*	0	0	0	0
dt	0	0	0	0

Observación. Esta representación simbólica de la regla cuántica de Itô se puede derivar tomando los elementos matriciales de la segunda fórmula de Itô. Tomando $X_0 = 0$ y $dX_t^\dagger = B_t^\dagger d\Lambda_t + D_t^\dagger dA_t + C_t^\dagger dA_t^* + E_t^\dagger dt$

$$\begin{aligned} \langle u \otimes \mathbf{e}(f), X_t Y_t v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle &= \langle X_t^\dagger u \otimes \mathbf{e}(f), Y_t v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\ &= \int_0^t \{ \langle X_s^\dagger u \otimes \mathbf{e}(f), (\bar{f}_s g_s F_s + g_s G_s + \bar{f}_s H_s + I_s) v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\ &\quad + \langle (\bar{g}_s f B_s^\dagger + f_s D_s^\dagger + \bar{g}_s C_s^\dagger + E_s^\dagger) u \otimes \mathbf{e}(f), Y_s v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\ &\quad + \langle (C_s^\dagger + f_s B_s^\dagger) u \otimes \mathbf{e}(f), (H_s + g_s F_s) v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \} ds, \end{aligned}$$

usando nuevamente el concepto de par adjunto

$$\begin{aligned} &\int_0^t \{ \langle u \otimes \mathbf{e}(f), X_s (\bar{f}_s g_s F_s + g_s G_s + \bar{f}_s H_s + I_s) v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\ &\quad + \langle u \otimes \mathbf{e}(f), (\bar{f}_s g_s B_s + \bar{f}_s D_s + g_s C_s + E_s) Y_s v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\ &\quad + \langle u \otimes \mathbf{e}(f), (C_s H_s + g_s C_s F_s + \bar{f}_s B_s H_s + \bar{f}_s g_s B_s F_s) v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \} ds. \end{aligned}$$

Recordando la acción de los procesos sobre los vectores exponenciales, la composición del primer sumando es $X_t dY_t$, la segunda es $dX_t Y_t$ y la última la denotamos por $(dX_t)(dY_t)$. Cuando X_0 no es cero, observemos que

$$\begin{aligned} &\langle X_t u \otimes \mathbf{e}(f), Y_t v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle - \langle X_0 u \otimes \mathbf{e}(f), Y_0 v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\ &= \langle (X_t - X_0) u \otimes \mathbf{e}(f), (Y_t - Y_0) v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle + \langle (X_t - X_0) u \otimes \mathbf{e}(f), Y_0 v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\ &\quad + \langle X_0 u \otimes \mathbf{e}(f), (Y_t - Y_0) v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle, \end{aligned}$$

aplicamos la fórmula de Ito al primer término de la suma, y la primera fórmula fundamental a los dos términos restantes.

2.4.4 Ecuaciones diferenciales estocásticas cuánticas

Teniendo la regla cuántica de Itô, Hudson y Parthasarathy en [22] definen ecuaciones diferenciales estocásticas para un proceso de operadores $\{U_t\}$ que satisfaga una ecuación del tipo

$$dU_t = (L_1 d\Lambda_t + L_2 dA_t + L_3 dA_t^* + L_4 dt) U_t, \quad U_0 = I$$

La existencia de dicha evolución estocástica es dada por medio un argumento de iteraciones de Picard, así mismo demuestran unicidad [22, Proposición 7.1]. Para que la solución sea unitaria dU_t es de la forma

$$dU_t = \left\{ (W - I) d\Lambda_t + L dA_t - W L^* dA_t^* + (iH - \frac{1}{2} L L^* dt) \right\} U_t \quad (2.24)$$

Con $W, L, H \in \mathcal{B}(\mathfrak{F})$.

Considerando (2.24), una representación natural de sus soluciones es dada por exponenciales (ver [21, Capítulo 5, p. 129] para más detalles) del tipo

$$\exp \int_0^t \left((W - I) d\Lambda_s + L dA_s - W L^* dA_s^* + (iH - \frac{1}{2} L L^* ds) \right).$$

2.5 Aproximación de modelos de óptica cuántica

La idea principal de esta sección es ver que un sistema cuántico que interactúa con su entorno, en el *límite estocástico* [1] puede ser aproximado por ruido blanco no conmutativo, esto en analogía con el resultado de Wong y Zakai [30] en el caso clásico. Algunos de estos modelos han sido utilizados en la literatura para el problema de filtrado y control cuántico (ver [38] [51]). La intención de esta sección es desarrollar las ideas que se encontraron en [51], donde dan una breve revisión del modelado de sistemas controlados que interactúan con un campo electromagnético.

Vamos a introducir terminología usada en óptica cuántica [20]. Un estado de Fock es cualquier estado del espacio de Fock² con un número bien definido de partículas de un sistema cuántico, es decir, es un estado en la variedad lineal de vectores de partículas finitas $v^{\otimes n}$. Definimos al estado de Fock en la notación *bra-ket* por $|n\rangle = 1 \otimes \dots \otimes 1$. Observemos que en esta base, el vector exponencial (2.2.1) es expresado como

$$\mathbf{e}(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n |n\rangle}{\sqrt{n!}},$$

y podemos recuperar el estado de Fock como sigue

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left. \frac{d^n}{dv^n} \right|_{v=0} \mathbf{e}(v).$$

Tenemos además para los operadores de creación, aniquilación y de gauge las siguientes relaciones:

Proposición 2.5.1. *Para los operadores de creación (2.8) aniquilación (2.7) y de gauge (2.12) tenemos,*

$$a(1)|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.25)$$

$$a^*(1)|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2.26)$$

$$\lambda(S)|n\rangle = nS|n\rangle, \quad S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (2.27)$$

Demostración. • Para el operador de aniquilación, consideremos $a(u)\mathbf{e}(tv) = t\langle u, v\rangle\mathbf{e}(tv)$, y tomando la acción del operador sobre los vectores exponenciales, queremos demostrar que

$$a(u)v^{\otimes n} = \sqrt{n}\langle u, v\rangle v^{\otimes n-1},$$

y concluimos con $u = v = 1$. De la definición de los vectores exponenciales tenemos

$$a(u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n v^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} = t\langle u, v\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n v^n |n\rangle}{\sqrt{n!}}, \quad (2.28)$$

para $n = 0$ claramente

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} a(u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n v^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} = a(u)|1\rangle = \langle u, v\rangle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1} v^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} = \langle u, v\rangle |0\rangle.$$

Procedemos por inducción, $a(u)v^k|k\rangle = \langle u, v\rangle\sqrt{k}v^{k-1}|k-1\rangle$, entonces del lado derecho de

²Estamos trabajando en un espacio de Fock simétrico

(2.28),

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \Big|_{t=0} \frac{t^{n+1} v^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} &= \langle u, v \rangle \sum_{n=k-1}^{\infty} (n+1)(n) \dots (n-k+2) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\frac{t^{n-k+1} v^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} \right) \\
&= \langle u, v \rangle \sum_{n=k}^{\infty} (n+1)(n) \dots (n-k+2)(n-k+1) t^{n-k} \frac{v^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} \Big|_{t=0} \\
&= \sqrt{(k+1)!} \sqrt{(k+1)(k)!} \langle u, v \rangle \frac{v^k |k\rangle}{\sqrt{k!}} \\
&= \sqrt{(k+1)!} \sqrt{(k+1)} \langle u, v \rangle v^k |k\rangle.
\end{aligned}$$

Del lado izquierdo de (2.28),

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \Big|_{t=0} a(u) \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{v^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} = a(u) \sqrt{(n+1)!} v^{k+1} |k+1\rangle,$$

y comparando ambas ecuaciones tenemos el resultado.

- Para el operador de creación, consideremos

$$\begin{aligned}
a^*(1)|k\rangle &= a^*(1) \frac{d^k}{dv^k} \Big|_{v=0} \frac{\mathbf{e}(v)}{\sqrt{k!}} = \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{d^k}{dv^k} \Big|_{v=0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v+t)^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{d^k}{dv^k} \Big|_{v=0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(v+t)^{n-1} |n\rangle}{\sqrt{n!}} \Big|_{t=0} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{d^k}{dv^k} \Big|_{v=0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n!}} v^{n-1} |n\rangle \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!}} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} n(n-1) \dots (n-k-1) v^{n-k-1} |n\rangle \Big|_{v=0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{(k+1)!}{\sqrt{(k+1)!}} |k+1\rangle = \sqrt{k+1} |k+1\rangle.
\end{aligned}$$

- Finalmente, para el operador de gauge, recordemos que $\lambda(S)e(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbf{e}(e^{tS}v)$ entonces,

$$\begin{aligned}
\lambda(S)|k\rangle &= \lambda(S) \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{d^k}{dv^k} \mathbf{e}(v) \Big|_{v=0} = \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{d^k}{dv^k} \Big|_{v=0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbf{e}(e^{tS}v) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{d^k}{dv^k} \Big|_{v=0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{tS}v)^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{d^k}{dv^k} \Big|_{v=0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(e^{tS}v)^{n-1} S e^{tS}v |n\rangle}{\sqrt{n!}} \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{d^k}{dv^k} \Big|_{v=0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n S \frac{(e^{tS}v)^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{d^k}{dv^k} \Big|_{v=0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n S \frac{v^n |n\rangle}{\sqrt{n!}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{kk!}{\sqrt{k!}} S |k\rangle = kS |k\rangle.
\end{aligned}$$

□

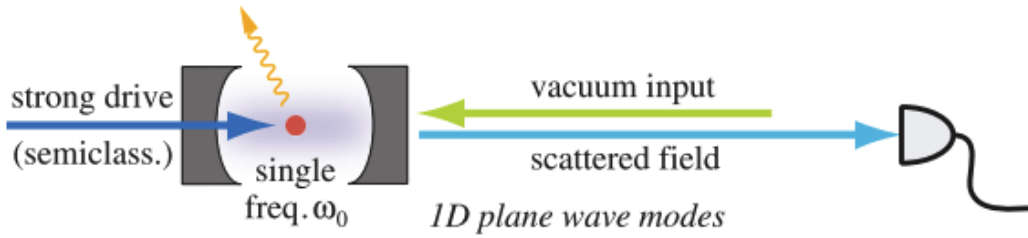


Figura 2.1: Modelo simplificado (Imagen tomada de [51])

Denotamos por $N = \lambda(1)$ que es el operador de conteo, y se puede verificar directamente (tomando composiciones respecto a $|n\rangle$) que

$$[a(1), N] = a(1), \quad (2.29)$$

$$[a^*(1), N] = -a^*(1), \quad (2.30)$$

$$[a(1), a^*(1)] = 1, \quad (2.31)$$

$$N = a(1)^* a(1) - 1. \quad (2.32)$$

No es de sorprender que podamos recuperar resultados bastante conocidos de mecánica cuántica a partir del formalismo dado por la probabilidad cuántica, sin embargo, queremos ver la manera de poder trabajar los modelos físicos como ecuaciones estocásticas no conmutativas, y además, buscar la relación que hay con la teoría de probabilidad clásica.

Estamos tratando con sistemas que interactúan con su entorno, el Hamiltoniano total del sistema es la suma del Hamiltoniano del sistema sin interacción, el del campo externo y el de interacción entre el sistema y el entorno.

La interacción completa se puede ver en la figura 2.1: Este es un modelo altamente simplificado (en [50] se puede ver una versión más completa), pero que es usado ampliamente. La justificación del modelo es la afirmación de que la física más interesante ocurre en la dirección del láser, y añadiendo decoherencia se toman en cuenta los modos que no se observan (sólo se observan los que impactan al detector).

Entonces el Hamiltoniano total del sistema lo escribimos como:

$$H_{tot} = H_{sys} + H_{env} + H_{int}$$

, y la evolución temporal del Hamiltoniano puede describirse en forma de propagador

$$\frac{dU_t}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H_{tot} U_t,$$

y podemos hacer la aproximación estocástica de la siguiente manera: Reescalamos

$$\begin{aligned} H_{tot} &\rightarrow \lambda H_{tot}, \\ t &\mapsto t/\lambda^2, \end{aligned}$$

y tomamos el límite cuando $\lambda \rightarrow 0$. El Hamiltoniano libre del entorno en muchas ocasiones se describe [20] como

$$H_{env} = \int \omega(r) dr a_r^* a_r,$$

y el Hamiltoniano de interacción depende del tipo de aproximación que se haga, pero el Hamiltoniano que describe la interacción de un spin con el campo electromagnético tiene la forma

$$\lambda(L^* \otimes a^*(g) + L \otimes a(g)),$$

donde L es un operador acotado que representa el acoplamiento del sistema con el campo.

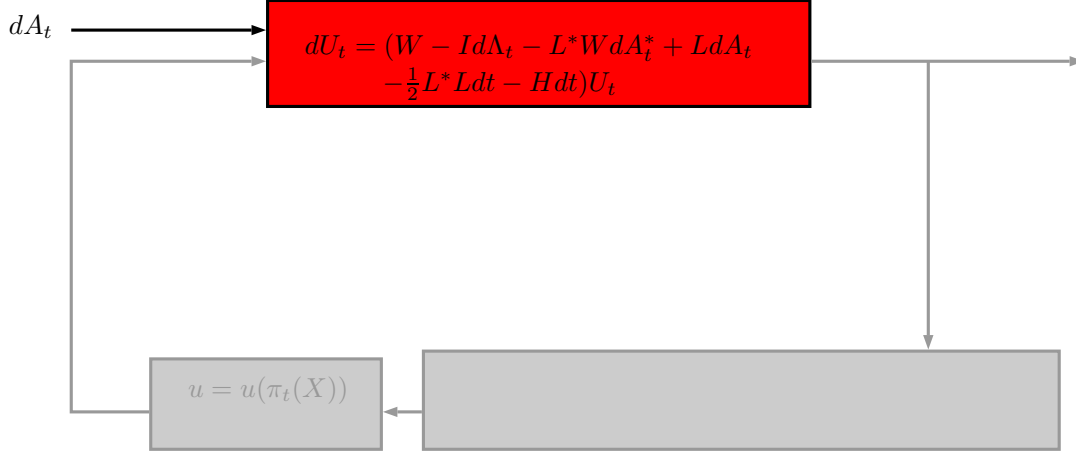


Figura 2.2: Ya tenemos una descripción para sistemas cuánticos abiertos que nos permite establecer campos de entrada sobre el sistema, estos los podemos ver como ruidos no conmutativos.

Heuristicamente podemos ver que $H_{env} \rightarrow \tilde{W}\Lambda_t$ para algún operador $\tilde{W} \in \mathcal{H}_0$, la convergencia, cuando $\lambda \rightarrow 0$, de U_t^λ se encuentra por medio de las llamadas series de Dyson. Este resultado en general es difícil de demostrar, para más detalles se puede ver [1], enunciaremos una versión del teorema cuya demostración se puede encontrar en [15, Teorema 4.2]³.

Teorema 2.5.1 (Gough, Van Handel). *Supongamos que los observables de sistema W , L , L^* , H son acotados. Entonces existe un proceso estocástico unitario $\{\bar{U}_t : t \geq 0\}$ tal que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \psi_1, U_t(\epsilon) \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \bar{U}_t \psi_2 \rangle,$$

donde $U_t(\epsilon)$ es el proceso unitario escalado $U_t(\epsilon) = \frac{U_t}{\epsilon^2}$ para cualquier par de vectores $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_{sys} \otimes \mathfrak{F}(L^2(\mathbb{R}_+))$. El proceso satisface una ecuación diferencial estocástica de tipo Hudson-Parthasarathy

$$d\bar{U}_t = \left((W - I)d\Lambda_t + LdA_t^* - L^*WdA_t - \frac{1}{2}L^*Ldt - iHdt \right) \bar{U}_t, \quad \bar{U}_0 = I.$$

En la introducción, comentamos que queremos dar sentido a un diagrama de bloques como el de la figura 2.2: Esto es precisamente lo que estamos logrando con el uso de ecuaciones estocásticas cuánticas que aproximan las dinámicas del sistema cuántico abierto, donde las ecuaciones se integran respecto a los operadores de aniquilación, creación y de gauge.

Hasta ahora hemos considerado un sistema cuántico interactuando con el entorno, pero necesitamos algo más: vamos a someter al sistema a mediciones continuas, necesitamos ver que implica esto para el sistema, y a partir de esas mediciones, que información podemos extraer. Esto es lo que veremos en la próxima sección.

³No tomaremos en cuenta evoluciones unitarias que involucren ruidos Λ_t . Entonces ponemos $W = I$

Capítulo 3

Ecuaciones de filtrado

3.1 Planteamiento del problema de filtrado

En probabilidad clásica, el problema de filtrado dado un sistema X_t y un proceso de observación Y_t , consiste en obtener el mejor estimado de X_t dadas nuestras observaciones (ver, por ejemplo, [8] para un tratamiento del problema de filtrado en el caso clásico). En particular, para sistemas lineales es sabido que el filtro de Kalman es el mejor estimador en el sentido de mínimos cuadrados de las observaciones. Supongamos, por ejemplo, que queremos conocer el estado de un conjunto de átomos que decaen emitiendo radiación, si uno sabe el estado inicial y detecta los fotones irradiados, entonces la idea es deducir información sobre el sistema a partir de la radiación medida.

Como toda medición Y_t experimentalmente significativa debe realizarse sobre observables compatibles, el álgebra generada por la medición es abeliana y por lo tanto equivalente a un proceso estocástico clásico, el problema de filtrado cuántico consiste en estimar un proceso cuántico a través de un proceso clásico.

Definición 3.1.1 (Procesos de no demolición, [1]). *Un proceso de operadores adaptados $Y = \{Y_t\}$ se llama un proceso de no demolición con respecto a un proceso $X = \{X_t\}$ si para t fijo*

$$[X_t, Y_s] = 0 \quad \forall s \leq t,$$

Decimos que Y_t es de auto-no demolición (o clásico) si cada Y_t es normal, i.e. $Y_t^ Y_t = Y_t Y_t^*$ y para tiempos diferentes s, t*

$$[Y_s, Y_t] = 0.$$

Además, un proceso clásico Y_t que sea de no demolición con respecto a un proceso X_t es llamado una medición de X_t .

Lo que estas definiciones nos dicen es que las mediciones de Y en tiempo real no destruyen el sistema cuántico X en el tiempo presente o en el futuro [10].

Sea U_t un proceso de operadores solución de

$$dU_t = \{LdA_t^* - L^*dA_t - \frac{1}{2}L^*Ldt - iHdt\}U_t, \quad U_0 = I, \quad (3.1)$$

con adjunta

$$dU_t^* = U_t^* \{L^*dA_t - LdA_t^* - \frac{1}{2}L^*Ldt + iHdt\}, \quad U_0^* = I, \quad (3.2)$$

con $H, L, L^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$. Estas ecuaciones en el límite estocástico, describen las dinámicas del sistema en el origen interactuando con el campo electromagnético, L es un operador de dipolo atómico y H es el Hamiltoniano atómico, que es un operador autoadjunto. Para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, U_t define la evolución temporal

$$j_t(X) = U_t^*(X \otimes I)U_t,$$

es decir, una observación de X en el tiempo t es descrito por el observable $X_t = j_t(X)$.

Usando la regla de Itô con dU_t^* y dXU_t , obtenemos la ecuación dinámica de la evolución del observable,

$$dj_t(X) = j_t(\mathcal{L}_{L,H}(X))dt + j_t([L^*, X])dA_t + j_t([X, L])dA_t^*, \quad (3.3)$$

donde el generador de Gorini-Kossakowski-Sudarshan y Lindblad $\mathcal{L}_{L,H}$ es dado por

$$\mathcal{L}_{L,H} := i[H, X] + L^*XL - \frac{1}{2}(L^*LX + XL^*L).$$

Una pequeña digresión: si $L = 0$ en (3.1), vemos que $dU_t = -iHU_tdt$ es la ecuación de Schrödinger, esto explica por qué a las ecuaciones estocásticas cuánticas en la literatura se les conoce como ecuaciones de Schrödinger estocásticas, o ecuaciones estocásticas maestras.

Ahora hablemos de las observaciones que podemos realizar. En modelos cuánticos la observación se lleva a cabo mediante una sonda que interactúa con el campo, entonces podemos hacer inferencia estadística de los observables del sistema a partir de la interacción del sistema y el campo.

Sea Y un observable del campo, el observable de interés depende del tipo de medición que queramos hacer, dos tipos de medición [12] comunes son:

- Fotodetección directa (conteo de fotones) $Y_t^\Lambda = U_t^* \Lambda U_t$,
- Detección homódina $Y_t^W = U_t^*(A_t + A_t^*)U_t$.

Proposición 3.1.1. *Las ecuaciones dinámicas de la detección por fotoconteo y la detección homódina son*

$$d(Y_t^\Lambda) = d\Lambda_t + j_t(L^*)dA_t + j_t(L)dA_t^* + j_t(L^*L)dt \quad (3.4)$$

$$d(Y_t^W) = dA_t + dA_t^* + j_t(L + L^*)dt \quad (3.5)$$

Demostración. Para la detección por fotoconteo tomando la regla de Itô 2.4.4 $d(\Lambda_t U_t) = \Lambda_t(dU_t) + (d\Lambda_t)U_t + (d\Lambda_t)(dU_t)$, donde $(d\Lambda_t)(dU_t) = LdA_t^*U_t$, aplicando nuevamente la regla de Itô, $dY_t^\Lambda = d(U_t \Lambda_t U_t) = d(U_t^*)\Lambda_t U_t + U_t^*d(\Lambda_t U_t) + (dU_t^*)(d\Lambda_t U_t)$, realizando manipulaciones algebraicas llegamos al resultado.

Para la detección homodina, con la fórmula de Itô calculamos $d((A_t + A_t^*)U_t) = d(A_t + A_t^*)U_t + (A_t + A_t^*)dU_t + d(A_t + A_t^*)dU_t$ donde el último término es $Ld_t U_t$, después aplicamos la regla de Itô sobre $d(U_t^*(A_t + A_t^*)U_t) = d(U_t^*)(A_t + A_t^*)U_t + U_t^*d((A_t + A_t^*)U_t)$, y notemos que $dU_t^*(A_t + A_t^*)U_t + U_t^*(A_t + A_t^*)dU_t = 0$, usando manipulaciones algebraicas llegamos al resultado. \square

Observemos que para $s, t \in \mathbb{R}_+$ $[Y_t^W, Y_s^W] = [Y_t^\Lambda, Y_s^\Lambda] = 0$, entonces los procesos satisfacen la propiedad de auto-no demolición 3.1.1, y denotemos al álgebra de von Neumann abeliana generada por los procesos de observación Y_t^W, Y_t^Λ por \mathcal{Y}_t^W y \mathcal{Y}_t^Λ respectivamente. Ambos procesos de observación no conmutan, por lo que no podemos realizar ambos tipos de mediciones en una misma realización del experimento, sin embargo, si fijamos una medición, podemos aplicar el teorema espectral 1.2.4 para poder representar las observaciones Y_t como un proceso estocástico clásico $\iota(Y_t)$ en un espacio de probabilidad.

Ahora, notemos que si $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, tiene la forma $X \otimes I$ en $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{F}$ y si Z es un observable del campo tiene la forma $I \otimes Z$ actuando en $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{F}$. Entonces para $t \leq s$ el conmutador $[j_t(X), j_t(Z)] = 0$, por lo que los procesos Y_t^W y Y_t^Λ son de no demolición respecto a X_t , y de esto se sigue que $j_t(X)$ está en el conmutante de $(Y)_t$, por lo que podemos aplicar la esperanza condicional 1.3.1 y el teorema de Bayes (1.3).

El **problema de filtrado** es el siguiente: Para encontrar el estimado en mínimos cuadrados de un observable del sistema $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ en el tiempo t , dadas las observaciones $Y_s, 0 \leq s \leq t$, debemos calcular la esperanza condicionada

$$\pi_t(X) = \mathbb{E}(j_t(X)|\mathcal{Y}_t). \quad (3.6)$$

donde $\mathcal{Y}_t = vN(Y_s : 0 \leq s \leq t)$. Queremos encontrar la ecuación recursiva para $\pi_t(X)$ con las ecuaciones dinámicas de sistema-observación

$$dj_t(X) = j_t(\mathcal{L}_{L,H}(X))dt + j_t([L^*, X])dA_t + j_t([X, L])dA_t^*, \quad (3.7)$$

$$d(Y_t^W) = dA_t + dA_t^* + j_t(L + L^*)dt, \quad \text{Detección homodina} \quad (3.8)$$

O en el otro caso

$$d(Y_t^\Lambda) = d\Lambda_t + j_t(L^*)dA_t + j_t(L)dA_t^* + j_t(L^*L)dt, \quad \text{Detección fotoconteo} \quad (3.9)$$

en analogía con modelos de sistema-observación usados en teoría de filtrado y control. En lo que sigue, ocuparemos las ecuaciones (3.7) y (3.8). El caso de fotoconteo se desarrolla de forma similar y se puede ver el tratamiento en [12].

Veremos dos formas para poder encontrar la ecuación de evolución para π_t :

- El método de cambio de medida de probabilidad, en el caso clásico, consiste en construir una medida bajo la cual el proceso de observación Y es un movimiento Browniano, y tenemos una representación de π_t en términos de una versión no normalizada ρ mediante el teorema de Girsanov. Veremos un teorema que lo reemplaza en el contexto no conmutativo.
- Un resultado clásico de Fujisaki, Kallianpur y Kunita permite expresar una martingala cuadrado integrable en términos de el proceso de innovación, una versión no conmutativa del teorema nos permite encontrar la ecuación de evolución de π_t .

3.2 Método de cambio de medida de probabilidad

En lugar de trabajar con Y_t^W y buscar un nuevo estado tal que Y_t^W sea un movimiento Browniano, trabajamos en términos de $Z_t := A_t + A_t^*$, por lo que $Y_t = U_t^* Z_t U_t^*$. Recordemos que con el estado vacío, el estado $\mathbb{E} = \rho \otimes \Phi$ junto con $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \otimes \mathcal{W}$ definen un espacio de probabilidad cuántica. Definimos el estado \mathbf{Q}^t por

$$\mathbf{Q}^t = \mathbb{E}(U_t^* X U_t), \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$$

Esto nos va a permitir expresar la evolución en términos del estado mientras que los observables están fijos (es la representación de Schrödinger), y podemos relacionar ambos estados mediante la siguiente proposición:

Proposición 3.2.1. *Sea $\mathcal{C}_t = vN(Z_s : 0 \leq s \leq t)$. Para $X \in \mathcal{C}_t'$ y $Z \in \mathcal{C}_t$,*

$$\mathbb{E}(U_t^* X U_t | U_t^* \mathcal{C}_t U_t) = U_t^* \mathbf{Q}^t(X | \mathcal{C}_t) U_t$$

Demostración. De la definición de la esperanza condicional 1.3.1, $K \in \mathcal{C}_t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(U_t^* X U_t | U_t^* \mathcal{C}_t U_t) U_t^* K U_t) &= \mathbb{E}(U_t^* X U_t U_t^* K U_t) \\ &= \mathbf{Q}^t(XK) = \mathbf{Q}^t(\mathbf{Q}^t(X | \mathcal{C}_t)K) \\ &= \mathbb{E}(U_t^* \mathbf{Q}^t(X | \mathcal{C}_t) K U_t) \\ &= \mathbb{E}(U_t^* \mathbf{Q}^t(X | \mathcal{C}_t) U_t U_t^* K U_t), \end{aligned}$$

como K es arbitrario se sigue el resultado. \square

Queremos calcular $\mathbf{Q}^t(X | \mathcal{C}_t)$, bajo el estado \mathbb{E} , Z_s es un movimiento Browniano, pues recordando lo que se vió en la Sección 2.3, $A_s + A_s^* = B(i\mathbb{1}_{[0,s]})$, donde B es el operador de campo que bajo el estado vacío es adaptado, tiene incrementos independientes y varianza s . Podríamos usar la Fórmula de Bayes 1.3.1 para expresar \mathbf{Q}^t en términos de una \mathbb{E} -esperanza condicional, sin embargo el operador U_t que relaciona a \mathbb{E} con \mathbf{Q}^t no está en el conmutante \mathcal{C}_t , el siguiente teorema reemplaza a U_t por un operador $V_t \in \mathcal{C}_t'$ tal que $\mathbb{E}(U_t^* X U_t) = \mathbb{E}(V_t^* X V_t)$ para toda $X \in \mathcal{H}$, y se encuentra primero en [21], y su uso para realizar un cambio de estado en [12].

Teorema 3.2.1. *Sea V_t la solución de la ecuación estocástica*

$$dV_t = \{L(dA_t^* + dA_t) - \frac{1}{2}L^*Ldt - iHdt\}V_t, \quad V_0 = I, \quad (3.10)$$

Entonces V_t está afiliada a \mathcal{C}_t' y $\mathbf{Q}^t(X) = \mathbb{E}(V_t^* X V_t)$ para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \otimes \mathcal{W}$.

Demostración. Supongamos por simplicidad que el estado ρ que actúa sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ es puro (ya que podemos obtener estados mixtos a partir de combinaciones convexas). Entonces definimos el estado como $\mathbb{E}(X) = \langle \psi \otimes \Phi, X \psi \otimes \Phi \rangle$ con $\psi \in \mathcal{H}_0$, $\Phi \in \mathfrak{F}$. Para demostrar que $\mathbb{E}(U_t^* X U_t) = \mathbb{E}(V_t^* X V_t)$ basta ver que $U_t \psi \otimes \Phi = V_t \psi \otimes \Phi$ para toda $\psi \in \mathcal{H}_0$, entonces considerando

$$\langle (U_t - V_t)\psi \otimes \Phi, (U_t - V_t)\psi \otimes \Phi \rangle,$$

apliquemos la segunda fórmula fundamental (ver el comentario después del Teorema 2.4.4) sobre $(U_t - V_t)^*(U_t - V_t)$ y recordemos que la acción de $A_t \Phi = 0 = \Phi A_t^*$,

$$\begin{aligned} & \langle (U_t - V_t)\psi \otimes \Phi, (U_t - V_t)\psi \otimes \Phi \rangle \\ &= \int_0^t \langle (U_s - V_s)\psi \otimes \Phi, (-\frac{1}{2}L^*LU_s - iH_s + \frac{1}{2}L^*LV_s + iHV_s)\psi \otimes \Phi \rangle ds \\ &+ \int_0^t \langle (-\frac{1}{2}L^*LU_s - iHU_s + \frac{1}{2}L^*LV_s + iHV_s)\psi \otimes \Phi, (U_s - V_s)\psi \otimes \Phi \rangle ds \\ &+ \int_0^t \langle (LU_s - LV_s)\psi \otimes \Phi, (LU_s - LV_s)\psi \otimes \Phi \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle \psi \otimes \Phi, (\frac{1}{2}L^*LV_s^*U_s + iHV_s^*U_s + \frac{1}{2}L^*LU_s^*V_s + iHU_s^*V_s)\psi \otimes \Phi \rangle ds \\ &+ \int_0^t \langle \psi \otimes \Phi, (\frac{1}{2}L^*LU_s^*V_s - iHU_s^*V_s + \frac{1}{2}L^*LV_s^*U_s - iHV_s^*U_s)\psi \otimes \Phi \rangle ds \\ &+ \int_0^t \langle (LU_s - LV_s)\psi \otimes \Phi, (LU_s - LV_s)\psi \otimes \Phi \rangle ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

La diferencia entre U_t y V_t es que V_t es función del ruido conmutativo $dZ_t = dA_t + dA_t^*$ y sus coeficientes están en \mathcal{C}_t' . Aplicando la Fórmula de Bayes 1.3.1 con el Teorema 3.2.1 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.2 (Fórmula de Kallianpur-Striebel no conmutativa). *Definimos para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ la esperanza condicional no normalizada*

$$\mu_t(X) = U_t^* \mathbb{E}(V_t^* X V_t | \mathcal{C}_t) U_t \in \mathcal{A}_t. \quad (3.11)$$

Entonces la Esperanza Condicional (3.6) es dada por

$$\pi_t(X) = \frac{\mu_t(X)}{\mu_t(I)}, \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0). \quad (3.12)$$

Queremos sacar esperanzas condicionales de integrales de Itô cuánticas, en probabilidad clásica es necesario que el proceso sea progresivamente medible, en nuestro caso, notemos que para un proceso F_t adaptado con F_s afiliado a \mathcal{C}_t' , $\mathbb{E}(F_s | \mathcal{C}_t) = \mathbb{E}(F_s | \mathcal{C}_s)$ para todo $s \leq t$. entonces, podemos enunciar la siguiente proposición:

Lema 3.2.1. Sea F_t un proceso adaptado tal que F_s esté afiliado a \mathcal{C}'_s , entonces,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t F_s ds \middle| \mathcal{C}_t\right) = \int_0^t \mathbb{E}(F_s | \mathcal{C}_s) ds,$$

y

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t F_s dZ_s \middle| \mathcal{C}_t\right) = \int_0^t \mathbb{E}(F_s | \mathcal{C}_s) dZ_s.$$

Demostración. Podemos definir el estado en términos de estados puros y después tomar combinaciones convexas para tomar el caso de estados mixtos, entonces tomando $\mathbb{E}(\cdot) = \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g), \cdot \psi \otimes \mathbf{e}(g) \rangle$ y $Y \in \mathcal{C}_t$

$$\begin{aligned} \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g), \mathbb{E}\left(\int_0^t F_s ds \middle| \mathcal{C}_t\right) Y \psi \otimes \mathbf{e}(g) \rangle &= \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g), \int_0^t F_s ds Y \psi \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\ &= \int_0^t \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g), F_s Y \psi \otimes \mathbf{e}(g) \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g), \mathbb{E}(F_s | \mathcal{C}_s) \psi \otimes \mathbf{e}(g) \rangle ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E}(\mathbb{E}(F_s | \mathcal{C}_s) Y) ds. \end{aligned}$$

Para la segunda integral, tomando a F_s como un proceso simple y adaptado, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g), \mathbb{E}\left(\int_0^t F_s dZ_s \middle| \mathcal{C}_t\right) Y \psi \otimes \mathbf{e}(g) \rangle &= \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g), \int_0^t F_s dZ_s Y \psi \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\ &= \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g), \sum_i F_j (Z_{j+1} - Z_j) Y \psi \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\ &= \sum_j \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g_{[t_j]}), K_j Y \psi \otimes \mathbf{e}(g_{[t_j]}) \rangle \langle \mathbf{e}(g_{[t_j]}), (Z_{j+1} - Z_j) \mathbf{e}(g_{[t_j]}) \rangle \\ &= \sum_j \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g_{[t_j]}), \mathbb{E}(K_j | \mathcal{C}_j) Y \psi \otimes \mathbf{e}(g_{[t_j]}) \rangle \langle \mathbf{e}(g_{[t_j]}), (Z_{j+1} - Z_j) \mathbf{e}(g_{[t_j]}) \rangle \\ &= \int_0^t \langle \psi \otimes \mathbf{e}(g), \mathbb{E}(K | \mathcal{C}_s) dZ_s \psi \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.3 (Ecuación de Zakai). La esperanza condicional $\mu_t(X)$ satisface la siguiente ecuación estocástica lineal:

$$d\mu_t(X) = \mu_t(\mathcal{L}_{L,H}(X))dt + \mu_t(L^*X + XL)dY_t. \quad (3.13)$$

Demostración. Primero apliquemos la regla de Itó para $V_t^* X V_t$.

$$\begin{aligned} d(V_t^* X V_t) &= V_t^* X L V_t dZ_t - \frac{1}{2} V_t^* X L^* L V_t - i V_t^* X H V_t dt + V_t^* L^* X V_t dZ_t - \frac{1}{2} V_t^* L^* L X V_t dt \\ &\quad + i V_t^* H X V_t dt + V_t^* L^* X L V_t dt \\ &= V_t^* (\mathcal{L}_{L,H}(X)) V_t dt + V_t^* (X L + L^* X) V_t dZ_t, \end{aligned}$$

Aplicando la esperanza condicional y por el resultado del lema 3.2.1 tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_t^* X V_t | \mathcal{C}_t) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}\left(\int_0^t V_s^* (\mathcal{L}_{L,H}(X)) ds \middle| \mathcal{C}_t V_s\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^t V_s^* (X L + L^* X) dZ_s \middle| \mathcal{C}_t V_s\right) \\ &= \mathbb{E}(X) + \int_0^t \mathbb{E}(V_s^* (\mathcal{L}_{L,H}(X)) V_s | \mathcal{C}_s) ds + \int_0^t \mathbb{E}(V_s^* (X L + L^* X) V_s | \mathcal{C}_s) dZ_s \end{aligned}$$

Ahora, tomemos la regla de Itô sobre $\mathbb{E}(V_t^* X V_t | \mathcal{C}_t) U_t$ y luego sobre $U_t^* \mathbb{E}(V_t^* X V_t | \mathcal{C}_t) U_t$. Para la primera parte tenemos la expresión:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_t^* X V_t | \mathcal{C}_t) U_t &= \mathbb{E}(X) + \int_0^t \mathbb{E}(V_s^* X V_s | \mathcal{C}_s) L U_s dA_s^* - \int_0^t \mathbb{E}(V_s^* X V_s | \mathcal{C}_s) L^* U_s dA_s \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{E}(V_s^* X V_s | \mathcal{C}_s) L^* L U_s ds - i \int_0^t \mathbb{E}(V_s^* X V_s | \mathcal{C}_s) H U_s ds \\ &\quad + \int_0^t \mathbb{E}(V_s^* (\mathcal{L}_{L,H}(X) V_s) | \mathcal{C}_s) U_s ds + \int_0^t \mathbb{E}(V_s^* (X L + L^* X) V_s | \mathcal{C}_s) U_s dZ_s \\ &\quad + \int_0^t \mathbb{E}(V_s^* (X L + L^* X) V_s | \mathcal{C}_s) L U_s ds \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la regla de Itô tenemos

$$\begin{aligned} U_t^* \mathbb{E}(V_t^* X V_t | \mathcal{C}_t) U_t &= \mathbb{E}(X) + \int_0^t U_s^* \mathbb{E}(V_s^* (\mathcal{L}_{L,H}(X)) V_s | \mathcal{C}_s) U_s ds \\ &\quad + \int_0^t U_s^* \mathbb{E}(V_s^* (X L + L^* X) V_s | \mathcal{C}_s) U_s dZ_s + \int_0^t U_s^* \mathbb{E}(V_s^* (X L + L^* X) V_s | \mathcal{C}_s) L U_s ds \\ &\quad + \int_0^t U_s^* L^* \mathbb{E}(V_s^* (X L + L^* X) V_s | \mathcal{C}_s) U_s ds \end{aligned}$$

Donde hemos usado el hecho de que $H, L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ conmutan con $\mathbb{E}(V_t^* X V_t | \mathcal{C}_t) \in \mathcal{Y}_t$. Usando la ecuación dinámica del proceso de observación (3.8) y la definición de μ_t tenemos el resultado:

$$\mu_t(X) = \mathbb{E}(X) + \int_0^t \mu(\mathcal{L}_{L,H}(X)) ds + \int_0^t \mu_t(X L + L^* X) dY_s^W$$

□

Podemos ahora tomar la ecuación de evolución de la ecuación (3.12), primero veamos que la ecuación $\mu_t(1)$ satisface

$$d\mu_t(1) = \mu_t(L^* + L) dY_t = \mu_t(1) \pi_t(L^* + L) dY_t^W$$

Teorema 3.2.4. *La esperanza condicional (3.12) satisface la ecuación de filtrado cuántico de Kushner-Stratonovich*

$$d\pi_t(X) = \pi_t(\mathcal{L}_{L,H}(X)) dt + \{\pi_t(L^* X + X L) - \pi_t(L^* + L) \pi_t(X)\} (dY_t - \pi_t(L^* + L) dt). \quad (3.14)$$

donde el proceso de innovación es $dW_t := dY_t^W - \pi_t(L^* + L) dt$.

Una propiedad importante que usaremos más adelante, es que el proceso de innovación es un movimiento Browniano bajo \mathbb{E} .

Proposición 3.2.2. *El proceso de innovación*

$$dW_t = dY_t^W - \pi_t(L^* + L) dt$$

es una martingala bajo \mathbb{E} .

Demostración. Para demostrar que es una martingala, es decir $\mathbb{E}(W_t | \mathcal{Y}_s) = W_s$ con $t \leq s$ es equivalente a demostrar que $\mathbb{E}(W_t - W_s | \mathcal{Y}_s) = 0$ \mathbb{E} -c.s. Por la definición de π_t , (3.6) y $K \in \mathcal{Y}_s$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(Y_t - Y_s - \int_s^t j_u(L^* + L) du | \mathcal{Y}_s) K \right] &= \mathbb{E} \left[(Y_t - Y_s - \int_s^t j_u(L^* + L) du) K \right] \\ &= \mathbb{E}[(Z_t - Z_s) K] = \mathbb{E}[(dA_{[s,t]} + dA_{[s,t]}^*) K] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde hemos usado la expresión de Y_t (3.8) y la acción de los procesos de creación y de aniquilación en el vacío. \square

Como $Z_t = A_t + A_t^*$ es conmutativo, se sigue que el proceso W_t además de ser una martingala, por la ecuación (2.6) con $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$ tiene variación cuadrática t , entonces, por el teorema de caracterización de Lévy [30, Teorema 8.4.2], tenemos que W_t es un movimiento Browniano. El uso de este teorema nos permite enfatizar una de las premisas con las que iniciamos el estudio de probabilidad cuántica: Al realizar una medición, el proceso que describe dicha medición es conmutativo, y por el teorema espectral podemos usar las herramientas del cálculo estocástico clásico.

3.3 Método de Proceso de Innovación

Como en el caso anterior, el proceso de observación que estamos usando es la detección homodina

$$dY_t^W = j_t(L + L^*)dt + dA_t + dA_t^*$$

y escribimos $h_t = j_t(L + L^*)$ y Z_t como antes.

Sean $\xi_t, \beta_t, \lambda_t, \mu_t$ procesos adaptados afiliados a \mathcal{Y}'_t y definimos

$$\begin{aligned} \xi_t &:= \xi_0 + \int_0^t \beta_s ds + m_t \\ &= \xi_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t (\lambda_s dA_s + \mu_s dA_s^*) \end{aligned} \quad (3.15)$$

También escribimos $\hat{\xi}_t = \mathbb{E}(\xi_t | \mathcal{C}_t)$, que está bien definido por el lema 3.2.1. Busquemos una expresión para ξ en términos del proceso de innovación W .

Lema 3.3.1. *El proceso*

$$M_t = \hat{\xi}_t - \hat{\xi}_0 - \int_0^t \hat{\beta}_s ds$$

es una \mathcal{Y} -martingala, i.e. $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{Y}_s) = M_s$, $s \leq t$.

Demostración. Tenemos que

$$m_t = \xi_t - \xi_0 - \int_0^t \beta_s ds,$$

entonces basta ver que $\mathbb{E}[(m_t - m_s)K] = 0$, pero tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t (\lambda_u dA_u + \mu_u dA_u^*)K\right] = 0$$

con $K \in \mathcal{Y}_s$ por la acción de los procesos de creación y aniquilación en el vacío. \square

Como se discutió anteriormente después de la proposición 3.2.2, el proceso de innovación W_t es un movimiento Browniano. Entonces, usando el teorema clásico de Fujisaki-Kallianpur-Kunita [8, Proposición 2.31 y Corolario 3.33], tenemos que M_t tiene una representación ($M_0 = 0$):

$$M_t = \int_0^t \gamma dW_s, \quad \gamma \in \mathcal{Y}_t$$

y en vista de la ecuación (3.15) esto implica

$$\hat{\xi}_t = \hat{\xi}_0 + \int_0^t \hat{\beta}_s ds + \int_0^t \gamma_s dW_s$$

Lo que falta es identificar a γ_t .

Proposición 3.3.1. Con ξ_s, h_s, λ_s que satisfacen las condiciones anteriores,

$$\gamma_s = \widehat{\xi_s h_s} + \hat{\lambda}_s - \hat{\xi}_s \hat{h}_s$$

Demostración. Consideremos

$$\begin{aligned} d(\xi_t Y_t^W) &= (d\xi_t)Y_t^W + \xi_t(dY_t^W) + (d\xi_t)(dY_t^W) \\ &= (\beta_t dt + dm_t)Y_t^W + \xi_t(h_t dt + dZ_t) + dm_t dZ_t \\ &= (\beta_t Y_t^W dt + \lambda_t dt + \xi_t h_t dt) + Y_t^W \mu_t dA_t^* + \xi_t dA_t^* + \xi_t dA_t + \lambda_t Y_t^W dA_t \\ &= (\beta_t Y_t^W + \lambda_t + \xi_t h_t)dt + (\lambda_t Y_t^W + \xi_t)dA_t + (Y_t^W \mu_t + \xi_t)dA_t^* \\ &= (\beta_t Y_t^W + \lambda_t + \xi_t h_t)dt + M_1(t) \end{aligned}$$

donde $M_1(t)$ es una martingala, y entonces tenemos que

$$\widehat{\xi_t Y_t^W} = \int_0^t (\widehat{\beta_s Y_s^W} + \hat{\lambda}_s + \widehat{\xi_s h_s}) ds$$

Por otra parte, observemos que $\widehat{\xi_t Y_t^W} = \hat{\xi}_t Y_t^W$ pues $Y_t^W \in \mathcal{Y}_t$, por la proposición 3.2.2 tenemos que $d\hat{Y}_t = \hat{h}_t dt + dW_t$, entonces,

$$\begin{aligned} d(\hat{\xi}_t Y_t^W) &= (d\hat{\xi}_t)Y_t^W + \hat{\xi}_t dY_t^W + d\hat{\xi}_t dY_t^W \\ &= (\hat{\beta}_t dt + \gamma_t dW_t)Y_t^W + \hat{\xi}_t(\hat{h}_t dt + dW_t) + \gamma_t dt \\ &= (\hat{\beta}_t Y_t^W + \hat{\xi}_t \hat{h}_t + \gamma_t)dt + (\gamma_t Y_t^W + \hat{\xi}_t)dW_t \\ &= (\hat{\beta}_t Y_t^W + \hat{\xi}_t \hat{h}_t + \gamma_t)dt + M_2(t) \end{aligned}$$

Tenemos dos representaciones para $\widehat{\xi_t Y_t^W}$. Por unicidad, los términos de variación acotada son iguales,

$$\widehat{\beta_s Y_s^W} + \hat{\lambda}_s + \widehat{\xi_s h_s} = \hat{\beta}_s Y_s^W + \hat{\xi}_s \hat{h}_s + \gamma_s$$

Como $\widehat{B_s Y_s^W} = \hat{B}_s Y_s^W$, $\gamma_s = \widehat{\xi_s h_s} + \hat{\lambda}_s - \hat{\xi}_s \hat{h}_s$. \square

Con lo que hemos hecho en esta sección se demuestra el teorema de Fujisaki-Kallianpur-Kunita.

Teorema 3.3.1 (Fujisaki-Kallianpur-Kunita no conmutativo [12]). *Bajo las suposiciones anteriores, el proceso filtrado $\hat{\xi}_t$ satisface la ecuación estocástica*

$$d\hat{\xi}_t = \hat{\beta}_t dt + (\hat{\lambda}_t + \widehat{\xi_t h_t} - \hat{\xi}_t \hat{h}_t) dW_t \quad (3.16)$$

donde $\hat{r}_t := \mathbb{E}(r_t | \mathcal{C}_t)$ para toda r_t afiliada a \mathcal{Y}_t , y el proceso de innovación $dW_t = dY_t - \hat{h}_t dt$ es un movimiento Browniano adaptado con respecto a \mathcal{Y}_t .

Corolario 3.3.1. $\pi_t(X)$ satisface la ecuación de Kushner-Stratonovich (3.14).

Demostración. Sea $\lambda_t = -j_t([X, L^*])$, $\mu_t = j_t([X, L])$, $\beta_t = j_t(\mathcal{L}_{L,H}(X))$ y $\xi_t = j_t(X)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \widehat{\xi_t h_t} &= \mathbb{E}(j_t(X)j_t(L + L^*) | \mathcal{Y}_t) = \mathbb{E}(j_t(X(L + L^*)) | \mathcal{Y}_t) = \pi_t(X(L + L^*)) \\ \hat{\xi}_t \hat{h}_t &= \mathbb{E}(j_t(X) | \mathcal{Y}_t) \mathbb{E}(j_t(L + L^*) | \mathcal{Y}_t) = \pi_t(X) \pi_t(L + L^*) \\ \hat{\lambda}_t &= -\pi_t([X, L^*]) \\ \hat{\beta}_t &= \pi_t(\mathcal{L}_{L,H}(X)) \end{aligned}$$

Entonces (3.16) y (3.3) dan:

$$\begin{aligned} d\pi_t(X) &= \pi_t(\mathcal{L}_{L,H}(X))dt + (-\pi_t([X, L^*]) + \pi_t(X(L + L^*)) - \pi_t(X)\pi_t(L + L^*))dW_t \\ &= \pi_t(\mathcal{L}_{L,H}(X))dt + (\pi_t(L^* X + X L) - \pi_t(X)\pi_t(L + L^*))dW_t. \end{aligned}$$

\square

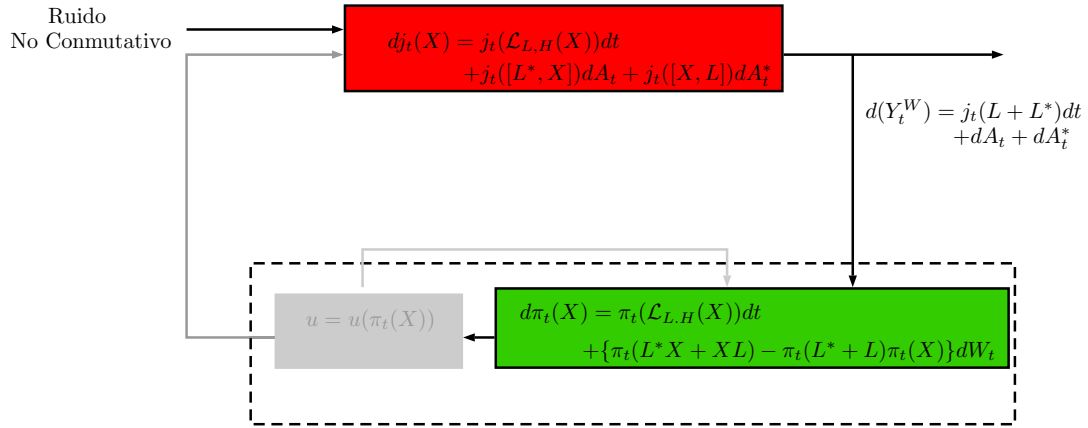


Figura 3.1: Diagrama para el sistema con el filtro.

Tomemos un momento para discutir lo que hemos hecho en este capítulo y conectarlo con el siguiente capítulo.

El cálculo estocástico cuántico desarrollado por Hudson y Parthasarathy nos ha permitido expresar un sistema cuántico abierto en términos del producto tensorial de un sistema inicial (que es el sistema pequeño que queremos controlar) con el espacio de Fock simétrico, que toma en cuenta la interacción entre el campo electromagnético y el sistema. La interacción con el entorno se describe a partir de los operadores de aniquilación y de creación, que son ruidos no conmutativos.

Realizar mediciones continuas Y_t sobre el sistema, generan un álgebra conmutativa $\{Y_t : 0 \leq s \leq t\}$, y si X es un observable del sistema inicial, entonces X está en el conmutante de Y_t por lo que podemos encontrar la esperanza condicional de X , que es la ecuación de Kushner-Stratonovich.

Con esto, ya tenemos la mitad de la arquitectura del sistema controlado que se quiere realizar (ver Figura 3.1): Tenemos una descripción de un sistema cuántico abierto, en el que tomamos en cuenta la interacción del sistema con su ambiente a partir de campos de entrada, y así mismo parte del campo de salida es convertido en un proceso estocástico clásico manejado por un movimiento Browniano W_t . Este proceso estocástico alimenta a la ecuación de filtrado, y obtenemos el estado cuántico estimado $\pi_t(X)$.

Todo estado en un espacio de Hilbert de dimensión finita puede ser expresado como $Tr[\rho X]$ para alguna matriz de densidad ρ [39], entonces siempre podemos escribir $\pi_t(X) = Tr[\rho U_t^* X U_t] = Tr[U_t \rho U_t^* X] = Tr[\rho_t X]$ donde ρ_t depende de las observaciones. Entonces directamente de (3.14) obtenemos la ecuación adjunta ¹

$$d\rho_t = -i[H, \rho_t]dt + (L\rho_t L^* - \frac{1}{2}L^*L\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t L^*L)dt + (L\rho_t + \rho_t L^* - Tr[(L + L^*)\rho_t]\rho_t)dW_t, \quad (3.17)$$

donde $dW_t = dY_t - Tr[(L + L^*)\rho_t]dt$ es un proceso de Wiener.

Ahora, para completar la imagen, necesitamos definir una ley de control que pueda estabilizar a la planta a partir de la información que el filtro le proporciona. En la siguiente sección lo estudiaremos para una clase especial de sistemas.

¹La ecuación se entiende en el sentido débil, es decir, en el sentido de que la ecuación integral para $Tr(\rho_t X)$ no depende de la elección de $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, que es un operador lineal en dimensión finita.

Capítulo 4

Ecuaciones de filtrado controladas

En este capítulo revisamos el tema que motivó la realización de esta tesis: Control retroalimentado basado en medición. Consideramos el problema de *preparación de estado* para una planta que inicialmente está en un estado incierto. La planta a controlar interactúa con el entorno sujeta a mediciones continuas. La forma más general para describir este tipo de sistemas es por medio de ecuaciones estocásticas maestras como (3.17).

En términos de la teoría de control, la preparación de estado consiste en un problema de estabilización global para la dinámica asociada, queremos preparar de forma asintótica hacia un estado cuántico particular ρ_f en el sentido de que $E[X_t] = Tr(\rho_t X) \rightarrow Tr(\rho_f X)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Como vimos en la sección 3, al realizar mediciones continuas al sistema, el filtro es equivalente a una ecuación estocástica clásica, por lo que el problema de control cuántico se reduce a un problema de control estocástico para el filtro. Se ha demostrado que el enfoque basado en filtrado es robusto ante pequeños retardos en el lazo de control [28], y también a errores de inicialización del filtro [19].

Vamos a revisar la implementación computacional del control estocástico realizado en [38], en este artículo el problema físico es respecto al control del momento angular de sistemas cuánticos. Los controles usados estabilizan globalmente al sistema, y evita utilizar métodos numéricos para encontrar los controles, sin embargo, otros tipos de controladores en lazo cerrado se han ocupado, como en [3], donde utilizan técnicas de control en lazo abierto en conjunto con técnicas de lazo cerrado para estabilizar el sistema.

4.1 Propiedades de la ecuación de filtrado

Regresemos a la ecuación de filtrado en dimensión finita:

$$d\rho_t = (-i[H_0, \rho_t] - \frac{1}{2}\{L^*L, \rho_t\} + L\rho_tL^*)dt + (L\rho_t + \rho_tL^* - Tr[(L + L^*)\rho_t]\rho_t)dW_t, \quad (4.1)$$

donde por comodidad denotamos por $[\cdot, \cdot]$ y $\{\cdot, \cdot\}$ al conmutador y al anticonmutador, respectivamente. Recordemos que el proceso de innovación $dW_t = dY_t - Tr[(L + L^*)\rho_t]dt$ en la ecuación (4.1), es un proceso de Wiener (vea el Apéndice A, Teorema A.0.7), y Y_t es una semimartingala cuadrado integrable con variación cuadrática $[Y, Y]_t = t$. La matriz H_0 es el Hamiltoniano del sistema que describe fuerzas externas actuando sobre el sistema y la matriz L representa el acoplamiento entre el sistema y el campo electromagnético. En esta ecuación estamos considerando mediciones perfectas, cuando no lo sea, tendremos un factor $\sqrt{\eta}$ multiplicando al término estocástico. De momento lo dejaremos con $\eta = 1$ para estudiar algunas propiedades de la ecuación.

Este tipo de ecuaciones estocásticas se encuentran en la literatura de sistemas cuánticos abiertos (por ejemplo Haroche and Raimond [20]), sin embargo no se trata en la literatura de

cálculo estocástico. Además, no es obvio que la ecuación (4.1) admita una solución y que ésta sea única.

En esta sección, veremos lo siguiente:

- Primero enunciamos algunas propiedades de la matriz de densidad.
- (4.1) tiene una solución única, además, la solución toma valores en el conjunto de matrices de densidad (matrices simétricas, positivas y de traza uno).
- Si la condición inicial ρ_0 es un estado puro, la solución de (4.1) toma valores en el conjunto de estados puros.

4.1.1 Matrices de densidad

Las matrices de densidad proveen una manera conveniente de describir sistemas cuánticos que no se conocen completamente. Denotamos por $\mathcal{S} = \{\rho \in \mathbb{C}^{n \times n} : \rho = \rho^*, \text{Tr}(\rho) = 1, \rho \geq 0\}$ al conjunto de matrices de densidad. Denotamos como estados puros aquellos que $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ y si $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ lo denominamos como estado mixto. La geometría de \mathcal{S} es lo que hace que el análisis de la ecuación se tenga que hacer con cuidado, caracterizarla para dimensiones mayores que 2 no es trivial, referimos al lector al artículo de [29], en el que se realiza un intento para caracterizar el conjunto de matrices de densidad de forma semialgebráica.

Por el momento solo necesitaremos algunos conceptos básicos: Denotemos por $\mathcal{P} = \{|\psi\rangle\langle\psi| \in \mathbb{C}^{n \times n} : |\psi\rangle \in \mathbb{C}^n, \|\psi\| = 1\}$ al conjunto de estados puros. Veamos la relación entre las matrices de densidad y los estados puros.

Proposición 4.1.1. *El conjunto de matrices de densidad \mathcal{S} es convexo y los elementos de \mathcal{P} son los puntos extremales.*

Demostración. Sea $\rho \in \mathcal{S}$. Como las matrices de densidad son simétricas, el teorema espectral en dimensión finita nos permite escribir $\rho = \sum_i^n \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ donde λ_i es el valor propio correspondiente al vector propio $|\psi_i\rangle$, en el que los $\{|\psi_i\rangle\}$ forman una base ortonormal. Como $\text{Tr}(\rho) = 1$ y $\rho \geq 0$ tenemos que $\lambda_i \in [0, 1]$. Esto demuestra que $\mathcal{S} \in \text{Conv}(\mathcal{P})$, la cáscara convexa de \mathcal{P} .

Por otra parte, tomando cualquier elemento de \mathcal{P} , definimos un proyector ortogonal $\rho' := |\psi\rangle\langle\psi|$, un elemento de la cáscara convexa toma valores 0 o 1, entonces es claro que $\rho' \in \mathcal{S}$. Además, como solo toman valores 0 o 1, son los puntos extremales de \mathcal{S} , i.e. estados con información máxima. \square

Proposición 4.1.2. *El conjunto de matrices de densidad \mathcal{S} es isomorfo al subconjunto $K \subset \mathbb{R}^{n^2-1}$ de matrices definidas positivas. Además, K es compacto.*

Demostración. Ver [50, Proposición 1]. \square

4.1.2 Existencia y unicidad

En esta sección, consideraremos el espacio de Hilbert \mathbb{C}^n , y para matrices usaremos la norma de Frobenius $\|A\|_F^2 = \text{Tr}(A^*A)$, también conocida como norma de Hilbert-Schmidt. Denotamos por $\|\cdot\|^2$ a la norma euclidiana, y tengamos en cuenta que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_F$.

Sea ρ_0 cualquier estado en \mathcal{S} , queremos demostrar existencia y unicidad de la ecuación diferencial estocástica (4.1). Los teoremas clásicos de ecuaciones diferenciales estocásticas no pueden ser aplicados directamente a (4.1) ya que los coeficientes no son Lipschitz. Además, aún cuando exista una solución, se debe demostrar que la solución toma valores en el conjunto de estados con sentido físico, es decir, que tome valores en el conjunto de matrices de densidad

La siguiente proposición considera una ecuación estocástica que si su condición inicial es un vector unitaria, la solución también será unitaria para toda t . A partir de esta ecuación, veamos que podemos construir ρ_t tal que si satisface (4.1).

Proposición 4.1.3 (Pellegrini, [43]). *Sea (W_t) un movimiento Browniano sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ y $|\psi_0\rangle$ cualquier vector de norma 1 en \mathbb{C}^2 . Sea $v_t = \frac{1}{2}\langle\psi_t, (L + L^*)\psi_t\rangle$ donde L es cualquier operador sobre \mathbb{C}^2 .*

Si la siguiente ecuación estocástica:

$$d|\psi_t\rangle = (L - v_t I)|\psi_t\rangle dW_t + (-iH_0 - \frac{1}{2}(L^*L - 2v_tL + v_t^2I))|\psi_t\rangle dt, \quad (4.2)$$

admite una solución $\{|\psi_t\rangle\}$, entonces $\|\psi_t\|^2 = 1$ para toda t c.s.

Definamos el proceso $\rho_t = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$ con $\|\psi_t\| = 1$. Veamos que satisface la ecuación (4.1). Tenemos, para todo $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$

$$\rho_t|\phi\rangle = \langle\psi_t, \phi\rangle|\psi_t\rangle,$$

usando (4.2) y la fórmula de Itô para encontrar $d\rho_t|\phi\rangle$

$$\begin{aligned} d\rho_t|\phi\rangle &= \langle d\psi_t, \phi\rangle|\psi_t\rangle + \langle\psi_t, \phi\rangle d\psi_t + \langle d\psi_t, \phi\rangle d\psi_t \\ &= \langle(L - v_t I)\psi_t, \phi\rangle|\psi_t\rangle dW_t + \langle\psi_t, \phi\rangle(L - v_t I)|\psi_t\rangle dW_t \\ &\quad + \langle(-iH_0 - \frac{1}{2}(L^*L - 2v_tL + v_t^2I))\psi_t, \phi\rangle|\psi_t\rangle dt \\ &\quad + \langle\psi_t, \phi\rangle(-iH_0 - \frac{1}{2}(L^*L - 2v_tL + v_t^2I))|\psi_t\rangle dt \\ &\quad + \langle(L - v_t I)\psi_t, \phi\rangle(L - v_t I)|\psi_t\rangle dt. \end{aligned}$$

Tenemos que $v_t = \frac{1}{2}\langle\psi_t, (L + L^*)\psi_t\rangle = \text{Tr}[|\psi_t\rangle\langle\psi_t|(L + L^*)]$ pues $|\psi_t\rangle$ es un estado puro. Analicemos los primeros dos términos que se integran respecto al movimiento Browniano dW_t .

$$\begin{aligned} (\langle(L - v_t I)\psi_t, \phi\rangle|\psi_t\rangle + \langle\psi_t, \phi\rangle(L - v_t I)|\psi_t\rangle)dW_t &= (\langle L\psi_t, \phi\rangle|\psi_t\rangle - \langle v_t I\psi_t, \phi\rangle|\psi_t\rangle \\ &\quad + \langle\psi_t, \phi\rangle L|\psi_t\rangle - \langle\psi_t, \phi\rangle v_t I|\psi_t\rangle)dW_t \\ &= (|\psi_t\rangle\langle\psi_t|L^*|\phi\rangle + |\psi_t\rangle\langle\psi_t|L|\phi\rangle - 2|\psi_t\rangle\langle\psi_t|v_t I|\phi\rangle)dW_t \\ &= (\rho_t L^* + L\rho_t - \text{Tr}[\rho_t(L + L^*)]\rho_t)|\phi\rangle dW_t. \end{aligned}$$

Sigamos con los términos deterministas, observemos que

$$\begin{aligned} \langle(L - v_t I)\psi_t, \phi\rangle(L - v_t I)|\psi_t\rangle dt &= (\langle(L - v_t I)\psi_t, \phi\rangle\langle\psi_t|(L^* - v_t I)|\phi\rangle)dt \\ &= (L\rho_t(L^* - v_t I)|\phi\rangle - v_t I\rho_t(L^* - v_t I)|\phi\rangle)dt \\ &= (L\rho_t L^*|\phi\rangle - v_t L\rho_t|\phi\rangle - v_t \rho_t L^*|\phi\rangle + v_t^2 I\rho_t|\phi\rangle)dt, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\langle(-iH_0 - \frac{1}{2}(L^*L - 2v_tL + v_t^2I))\psi_t, \phi\rangle|\psi_t\rangle dt + \langle\psi_t, \phi\rangle(-iH_0 - \frac{1}{2}(L^*L - 2v_tL + v_t^2I))|\psi_t\rangle dt \\ &= (|\psi_t\rangle\langle\psi_t|(iH_0 - \frac{1}{2}(L^* - 2V_t + v_t^2I))|\phi\rangle + (-iH_0 - \frac{1}{2}(L^*L - 2v_tL + v_t^2I))|\psi_t\rangle\langle\psi_t||\phi\rangle)dt \\ &= (-iH_0\rho_t + i\rho_t H_0 - \frac{1}{2}\rho_t L^*L + v_t\rho_t L^* - v_t^2\rho_t - \frac{1}{2}L^*L\rho_t + v_t L\rho_t)|\phi\rangle dt, \end{aligned}$$

Sumando los términos deterministas tenemos

$$(-i[H_0, \rho_t] - \frac{1}{2}\{L^*L, \rho_t\} + L\rho_t L^*)|\phi\rangle dt.$$

Finalmente, sumando con la parte estocástica, llegamos a la ecuación (4.1). A la ecuación (4.2) se le conoce como la ecuación diferencial estocástica correspondiente a una función de onda, la función de onda siendo un vector de norma uno que define un estado puro. Recordemos

que el conjunto de estados puros son los puntos extremales del conjunto de matrices de densidad. Entonces, si demostramos que la solución existe y es única, por el lema anterior tomará valores en el conjunto de estados. Ahora podemos enunciar el Teorema de existencia y unicidad para (4.1).

Teorema 4.1.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espacio de probabilidad que soporte un movimiento Browniano $\{W_t\}$ y sea ρ_0 cualquier estado.*

La ecuación diferencial estocástica

$$d\rho_t = (-i[H_0, \rho_t] - \frac{1}{2}\{L^*L, \rho_t\} + L\rho_t L^*)dt + (L\rho_t + \rho_t L^* - \text{Tr}[(L + L^*)\rho_t]\rho_t)dW_t$$

admite una única solución $\{\rho_t\}$. Esta solución toma valores en el conjunto de estados y está definida para toda $t \geq 0$. Además, si la condición inicial es un estado puro, la solución toma valores en el conjunto de estados puros.

Demostración. Escribimos la ecuación (4.1) de la siguiente forma:

$$d\rho_t = \Phi(\rho_t)dt + \Theta(\rho_t)dW_t$$

Donde $\Phi, \Theta \in C^\infty$ y $\Phi(\rho_t) = (-i[H_0, \rho_t] - \frac{1}{2}\{L^*L, \rho_t\})$, $\Theta(\rho_t) = \rho_t L^* + L\rho_t - \text{Tr}[(L + L^*)\rho_t]\rho_t$. Recordemos que estamos considerando la norma de Frobenius, tomando $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, por el teorema anterior la solución toma valores en \mathcal{S} . Para $k > 1$, la función de truncado es

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} k & \text{si } x > k \\ x & \text{si } |x| \leq k \\ -k & \text{si } x < -k \end{cases}$$

Para una matriz $A = (a_{ij})$ definimos por extensión $\tilde{\varphi}_k(A) = \varphi_k(\text{Re}(a_{ij})) + \varphi_k(\text{Im}(a_{ij}))$. Entonces $\Theta \circ \tilde{\varphi}_k$ es Lipschitz. Entonces, considerando la ecuación truncada

$$d\rho_{k,t} = \Phi \circ \tilde{\varphi}_k(\rho_{k,t})dt + \Theta \circ \tilde{\varphi}_k(\rho_{k,t})dW_t,$$

para cada $k > 1$, definamos los tiempos de paro

$$T_k = \inf\{t : \exists(i,j) : |\text{Re}(a_{ij}(\rho_{k,t}))| = k \text{ o } |\text{Im}(a_{ij}(\rho_{k,t}))| = k\},$$

entonces, para $t \leq T_k$ $\tilde{\varphi}_k(\rho_t) = \rho_t$. Es claro que Φ tiene crecimiento lineal, tomemos un estimado para Θ :

$$\begin{aligned} \|\Theta(\rho)\|^2 &\leq 2\|L\rho_t + \rho_t L^*\|^2 + 2|\text{Tr}[(L + L^*)\rho_t]|^2 \|\rho_t\|^2 \\ &\leq 2\|L\rho_t + \rho_t L^*\|^2 + 4\|L\|_F^2 \|\rho_t\|^2 \\ &\leq 4\|L\|_F^2 \|\rho_t\|^2 + 4\|L\|_F^2 \|\rho_t\|^2, \\ &\leq 8\|L\|_F^2 \|\rho_t\|^2 \end{aligned}$$

Donde usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el operador de Traza en la segunda línea, la submultiplicatividad de la norma de Frobenius, y el hecho de que $\|\rho_t\|_F = \text{Tr}(\rho_t^2) \leq 1$, con la igualdad si ρ_t es un estado puro, y concluimos entonces que $\Theta(\rho)$ tiene crecimiento lineal, y aplican los teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas [40]. Tomando $T = \lim_k T_k \leq \infty$, y como los coeficientes tienen crecimiento lineal, concluimos que $P(T = \infty) = 1$ [34, Sección 3.3].

Falta ver que la solución toma valores en el conjunto de estados, es claro que la secuencia

$$\begin{cases} \rho_{n+1}(t) = \rho_n(0) + \int_0^t \Phi \circ \tilde{\varphi}_k(\rho_n(s))ds + \int_0^t \Theta \circ \tilde{\varphi}_k(\rho_n(s))dW_s, \\ \rho_0(t) = \rho, \end{cases}$$

es autoadjunta con traza uno. Estas condiciones son cerradas y el proceso límite es autoadjunto con traza uno. Falta ver la condición de positividad. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass complejo, \mathbb{C}^n es secuencialmente compacto, entonces, toda secuencia $\{\rho_n\} \in \mathcal{S}$ tiene una subsecuencia convergente en \mathcal{S} pues es compacto, y tenemos la positividad. \square

4.2 La ecuación de filtrado controlada

Consideraremos una ecuación de filtrado de la forma

$$d\rho_t = (-i[H_t, \rho_t] - \frac{1}{2}\{L^*L, \rho_t\} + L\rho_tL^*)dt + \sqrt{\eta}(\{L, \rho_t\} - \text{Tr}[(L + L^*)\rho_t]\rho_t)dW_t, \quad (4.3)$$

Respecto a la sección anterior, en esta ecuación el Hamiltoniano del sistema es de la forma $H_t = H + u_tG$, donde u_t es una entrada de control escalar. Tomamos el Hamiltoniano de esta forma, pues tomamos en cuenta a H como el Hamiltoniano del sistema sin controlar, y a G un Hamiltoniano el cual tenemos cierta libertad para diseñarlo. Además, suponemos que u_t es un proceso real càdlàg adaptado a $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$, la filtración generada por las observaciones al tiempo t . Introducimos η , que indica la eficiencia del detector (en la práctica, aprox. 35 %.)

Suponemos adicionalmente que el estado inicial del filtro ρ_0 coincide con el estado en el que el sistema está preparado¹, y que el control es aplicado tanto al filtro como al sistema físico.

Tomemos el caso $u_t = u(\rho_t)$, $u \in C^1(S, \mathbb{R})$ y veamos algunas propiedades de la ecuación controlada.

Teorema 4.2.1. *La ecuación (4.3) con $u_t = u(\rho_t)$, $u \in C^1(S, \mathbb{R})$ y $\rho_0 = \rho \in \mathcal{S}$ tiene una solución única fuerte $\rho_t := \varphi_t(\rho, u)$ en \mathcal{S} , y u_t es un control continuo acotado*

Demostración. Como \mathcal{S} es compacto, podemos encontrar un conjunto abierto acotado $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $\mathcal{S} \subset T$. Sea $C(\rho) : \mathbb{C}^{n \times n} \mapsto [0, 1]$ una función suave con soporte compacto tal que $C(\rho) = 1$ para $\rho \in T$ y sea $U(\rho) \in C^1(\mathbb{C}^{n \times n}, \mathbb{R})$ tal que $U(\rho) = u(\rho)$ para $\rho \in S$. Entonces la ecuación

$$\begin{aligned} d\bar{\rho}_t = & -iC(\bar{\rho}_t)[H + U(\bar{\rho}_t)G, \bar{\rho}_t]dt + C(\bar{\rho}_t)(L\bar{\rho}_tL^* - \frac{1}{2}\{L^*L, \bar{\rho}_t\})dt \\ & + C(\bar{\rho}_t)\sqrt{\eta}(L\bar{\rho}_t + \bar{\rho}_tL^* - \text{Tr}((L + L^*)\bar{\rho}_t)\bar{\rho}_t)dW_t, \end{aligned}$$

Se desvanece fuera de intervalos compactos, y esto implica que tiene una solución fuerte usando los mismos argumentos que el teorema de la ecuación no controlada (ver Teorema 4.1.1). Además $\bar{\rho}_t$ debe ser acotada, y entonces $U_t = U(\bar{\rho}_t)$ es un proceso continuo adaptado y acotado c.s..

Considerando la solución ρ_t de (4.3) con $u_t = U(\bar{\rho}_t)$ y $\rho_0 = \bar{\rho}_0 \in \mathcal{S}$, las soluciones ρ_t y $\bar{\rho}_t$ deben coincidir hasta el primer tiempo de paro $\tau = \inf\{t(\omega) : \rho \notin T\}$ (pues ambas ecuaciones admiten una solución única). Pero como hemos establecido que $\rho_t \in S$ para toda t , $\bar{\rho}_t$ no puede salir de T . Entonces $\rho_t = \bar{\rho}_t$ para toda $t > 0$. \square

Denotemos a la solución de (4.3) por $\varphi_t(\rho, u)$ con el control $u_t = U(\rho_t)$ y $\rho_0 = \rho \in \mathcal{S}$. Una difusión ρ_t^ρ (donde $\rho = \rho_0$ es la condición inicial) es *Feller continua* si para t fija, $EG(\rho_t^\rho)$ es continua en ρ para toda función continua acotada G .

Proposición 4.2.1. *Si $V(\rho)$ es una función continua, entonces $EV(\varphi_t(\rho, u))$ es continua en ρ ; i.e., la difusión (4.3) es Feller continua.*

¹Sin embargo, en [19] se demuestra que el filtro es estable ante errores de inicialización, no profundizaremos en ese aspecto.

Demostración. Los detalles de la demostración están en [38, Proposición 3.6]: Consiste primero en demostrar que para una secuencia $\rho^n \rightarrow \rho^\infty \in \mathcal{S}$, entonces para las soluciones hasta el tiempo t , $\rho_t^n := \varphi_t(\rho_t(\rho^n, u))$ y $\rho_t^\infty := \varphi_t(\rho_t(\rho^\infty, u))$, tenemos que $E\|\rho_t^n - \rho_t^\infty\|^2 \rightarrow 0$ por convergencia dominada. Como la convergencia es en L^2 , esto implica convergencia en probabilidad. Usando una función V continua, también tenemos que $V(\rho_t^n) \rightarrow V(\rho_t^\infty)$ en probabilidad. Usando el hecho de que \mathcal{S} es compacto esto implica que V es acotado y se concluye que

$$\lim_n E(V(\rho_t^n)) = EV(\rho_t^\infty),$$

que es la definición de una difusión Feller continua. \square

Proposición 4.2.2. $\varphi_t(\rho, u)$ es un proceso de Markov fuerte en \mathcal{S} .

Demostración. Todo proceso Feller continuo por la derecha es un proceso de Markov fuerte [14, Teorema 5.10]. \square

Denotamos por $E^\rho[\cdot]$ al valor esperado con respecto a P^ρ , la distribución del proceso $\{\rho_t\}$ con condición inicial $\rho = \rho_0$. Definimos:

Definición 4.2.1. El generador infinitesimal \mathcal{A} de ρ_t se define como

$$\mathcal{A}f(\rho) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E^{\rho_0}(f(\rho_t)) - f(\rho)}{t}, \quad \rho \in \mathcal{S}. \quad (4.4)$$

Proposición 4.2.3. Sea τ el primer tiempo de salida de ρ_t de un conjunto abierto $Q \subset \mathcal{S}$ y consideremos el proceso parado $\rho_t^Q = \varphi_{t \wedge \tau}(\rho, u)$. Entonces ρ_t^Q es también un proceso de Markov fuerte en \mathcal{S} . Además, para V tal que $\mathcal{A}V$ exista y sea continuo, tenemos que $\mathcal{A}_Q V(x) = \mathcal{A}V(x)$ si $x \in Q$ y $\mathcal{A}_Q V(x) = 0$ si $x \notin Q$ para el operador infinitesimal \mathcal{A}_Q asociado a ρ_t^Q .

Demostración. [31, Capítulo 1, Sección 3]. \square

4.2.1 Sistemas de momento angular

Consideraremos sistemas de momento angular (vea Merzbacher [35, Capítulo 11]) en $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^{2J+1}$, los tres operadores autoadjuntos F_x, F_y y F_z que satisfacen las relaciones de conmutación de momento angular:

$$[F_x, F_y] = iF_z, \quad [F_y, F_z] = iF_x, \quad [F_z, F_x] = iF_y,$$

denotando los valores propios de F_z por $m = J, (J-1), \dots, -(J-1), -J$ son $2J+1$ valores propios con $2J+1$ kets propios ortogonales, el problema de valor propio para F_z se escribe como

$$F_z|\psi_m\rangle = m|\psi_m\rangle,$$

y

$$F_y = i(C_m|\psi_{m+1}\rangle - C_{-m}|\psi_{m-1}\rangle),$$

donde $C_m = \frac{1}{2}\sqrt{(J-m)(J+m+1)}$.

Resulta que los valores que puede tomar J son enteros no negativos o medios enteros, es decir, los únicos valores que puede tomar son

$$J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

Consideremos la ecuación (4.3) en el caso que $H = 0$ $G = F_y$, $L = F_z$ de dimensión $N = 2J+1$. Tenemos la ecuación:

$$d\rho_t = -iu_t[F_y, \rho_t]dt - \frac{1}{2}[F_z, [F_z, \rho_t]]dt + \sqrt{\eta}(\{F_z, \rho_t\} - 2Tr(F_z\rho_t)\rho_t)dW_t \quad (4.5)$$

Por el teorema 4.1.1, sabemos que si la condición inicial de la ecuación estocástica es un estado puro, entonces, la solución toma valores en el conjunto de estados puros. ¿Que podemos decir del comportamiento asintótico de la ecuación cuando no tenemos control, i.e., $u_t = 0$? La siguiente proposición muestra que la ecuación (4.5) convergerá hacia uno de los proyectores ortogonales de F_z , es decir, al realizar mediciones sobre (4.5) sin control, causa que *collapse* a uno de los proyectores ortogonales. Hacer la demostración de esta proposición tiene otro propósito, pues empezaremos a ver como aplicar técnicas de Lyapunov estocásticas para asegurar la convergencia de ρ_t .

Proposición 4.2.4 (Reducción de estado cuántico). *Para todo $\rho_0 \in \mathcal{S}$, la solución ρ_t de (4.5) con $u_t = 0$ converge c.s. cuando $t \rightarrow \infty$ a uno de los valores propios $|\psi_m\rangle\langle\psi_m|$.*

Demostración. Vamos a aplicar el teorema A.1.1 con $Q_\lambda = \mathcal{S}$. Consideremos la función de Lyapunov $v(\rho) = Tr(F_z^2\rho) - Tr^2(F_z\rho)$. El resto de la demostración consiste en calcular una expresión para $\mathcal{A}v(\rho)$, una vez que veamos que $\mathcal{A}v(\rho) \leq 0$ concluiremos por el Teorema A.1.1.

Podemos expresar a (4.5) de la forma

$$d\rho_t = \Phi(\rho_t)dt + \Theta(\rho_t)dW_t,$$

$$\frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho_i} = [(F_z^2)_{1i} - 2Tr(\rho F_z)(F_z)_{1i}, \dots, (F_z^2)_{ni} - 2Tr(\rho F_z)(F_z)_{ni}]$$

Para la segunda derivada, entendemos a $\frac{\partial^2}{\partial \rho_i \partial \rho_j}$ a la derivada con respecto al vector $\rho_i = [\rho_{i1}, \dots, \rho_{in}]^\top$ y respecto al vector columna $\rho_j = [\rho_{1j}, \dots, \rho_{nj}]^\top$ (corresponde a la Matriz Hessiana). Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(\rho)}{\partial \rho_i \partial \rho_j} &= -2[(F_z)_{1i}, \dots, (F_z)_{ni}]^\top \frac{\partial Tr(\rho F_z)}{\partial \rho_j} \\ &= -2[(F_z)_{1i}, \dots, (F_z)_{ni}]^\top \begin{bmatrix} (F_z)_{j1} \\ \vdots \\ (F_z)_{jn} \end{bmatrix} \\ &= -2 \sum_k (F_z)_{ki} (F_z)_{jk} \\ &= -2 \sum_k (F_z)_{ik} (F_z)_{kj} \\ &= -2(F_z^2)_{ij}. \end{aligned}$$

Siguiendo (A.12) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_i \Phi(\rho)_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} v(\rho) &= \sum_i \sum_k [F_z, [F_z, \rho]]_{ik} ((F_z)^2 - 2Tr(\rho F_z)F_z)_{ki} \\ &= Tr([F_z, [F_z, \rho]]((F_z)^2 - 2Tr(\rho F_z))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\Theta(\rho))_{i,j}^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_i \partial \rho_j} v(\rho) \\
&= -\eta \sum_{i,j} \sum_k (F_z \rho + \rho F_z - \text{Tr}(F_z \rho) \rho)_{ik} (F_z \rho + \rho F_z - \text{Tr}(F_z \rho) \rho)_{kj} (F_z)_{ik} (F_z)_{kj} \\
&= -\eta \sum_{i,j} \sum_k (F_z \rho + \rho F_z - 2\text{Tr}(F_z \rho) \rho)_{ik} (F_z \rho + \rho F_z - \text{Tr}(F_z \rho) \rho)_{kj} (F_z)_{kk} (F_z)_{ki} \\
&= -\eta \sum_i \sum_k (F_z \rho + \rho F_z - 2\text{Tr}(F_z \rho) \rho)_{ik} \text{Tr}((F_z \rho + \rho F_z - \text{Tr}(F_z \rho) \rho)(F_z)) (F_z)_{ki} \\
&= -\eta \text{Tr}((F_z \rho + \rho F_z - 2\text{Tr}(F_z \rho) \rho)(F_z)) \sum_i \sum_k (F_z \rho + \rho F_z - 2\text{Tr}(F_z \rho) \rho)_{ik} (F_z)_{ki} \\
&= -\eta \text{Tr}^2((F_z \rho + \rho F_z - 2\text{Tr}(F_z \rho) \rho) F_z) \\
&= -4\eta \text{Tr}^2(\rho(F_z^2 - \text{Tr}(F_z \rho) F_z)) \\
&= -4\eta v^2(\rho).
\end{aligned}$$

Juntando los términos tenemos $\mathcal{A}v(\rho) = -4\eta v(\rho)^2 \leq 0$. Siguiendo el teorema A.1.1 Entonces tenemos que

$$Ev(\rho_t) = v(\rho_0) - 4\eta \int_0^t Ev(\rho_s)^2 ds,$$

por la fórmula de Dynkin. Como $v(\rho) \geq 0$,

$$4\eta \int_0^t Ev(\rho_s)^2 ds = v(\rho_0) - Ev(\rho_t) \leq v(\rho_0) < \infty,$$

Por convergencia monótona

$$E \int_0^t v(\rho_s)^2 ds < \infty \implies \int_0^\infty v(\rho_s)^2 ds < \infty \quad c.s. \quad (4.6)$$

Por el teorema de Kushner $\lim_{t \rightarrow \infty} v(\rho_t)$ existe *c.s.*, y la ecuación (4.6) implica que $v(\rho_t) \rightarrow 0$ *c.s.*. Pero los únicos estados que satisfacen $v(\rho) = 0$ son $\rho = |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$, por la acción de F_z sobre estos. \square

Tenemos entonces que $\rho_\infty = |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$, estudiemos la probabilidad con la que la ecuación (4.5) sin control converge a $|\psi_m\rangle\langle\psi_m|$, es decir, calculemos $\pi_t(|\psi_m\rangle\langle\psi_m|)$. Tenemos directamente:

$$\begin{aligned}
d\pi_t(|\psi_m\rangle\langle\psi_m|) &= \text{Tr}(d(\rho_t|\psi_m\rangle\langle\psi_m|)) = \text{Tr}(\sqrt{\eta}(\{F_z, \rho_t\} - 2\text{Tr}(F_z \rho_t) \rho_t) |\psi_m\rangle\langle\psi_m|) dW_t \\
&= \sqrt{\eta} \text{Tr}((F_z \rho_t + \rho_t F_z) |\psi_m\rangle\langle\psi_m| - 2\text{Tr}(F_z \rho_t) \rho_t |\psi_m\rangle\langle\psi_m|) dW_t \\
&= \sqrt{\eta} (2m \text{Tr}(\rho_t |\psi_m\rangle\langle\psi_m|) - 2\text{Tr}(F_z \rho_t) \rho_t |\psi_m\rangle\langle\psi_m|) dW_t \\
&= 2\sqrt{\eta} \text{Tr}(\rho_t |\psi_m\rangle\langle\psi_m|) (m - \text{Tr}(F_z \rho_t) \rho_t) dW_t \\
&= 2\sqrt{\eta} \pi_t(|\psi_m\rangle\langle\psi_m|) (m - \pi_t(F_z)) dW_t,
\end{aligned}$$

que claramente es una Martingala, entonces $p_m = \pi_\infty(|\psi_m\rangle\langle\psi_m|) = \pi_0(|\psi_m\rangle\langle\psi_m|)$, es decir, la probabilidad p_m es sólo la probabilidad de $|\psi_m\rangle\langle\psi_m|$. Entonces si ρ_0 es uno de los estados puros $|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, tenemos que $p_m = 0$ o 1 dependiendo si $\rho_m = \rho_0$, es decir, si $n = m$ y tenemos que $\pi_0(|\psi_m\rangle\langle\psi_m|) = \text{Tr}(\rho_0 |\psi_m\rangle\langle\psi_m|)$ es precisamente la probabilidad (1) que se definió en la Introducción.

Ejemplo 4.2.1. Vamos a especializarnos en el caso de operadores de momento angular intrínseco² con Spin $J = \frac{1}{2}$. Los Qubits son considerados como los sistemas cuánticos más simples no triviales, con un rol importante en información cuántica y cómputo cuántico.

Revisitando el ejemplo 1.1.1, en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, tenemos la base computacional $|0\rangle = (1, 0)^\top$ y $|1\rangle = (0, 1)^\top$. Los operadores de momento angular intrínseco de Spin 1/2 son descritos mediante las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

que son matrices simétricas de traza cero actuando sobre \mathbb{C}^2 que representan el momento angular intrínseco del sistema y los valores propios m de σ_z toman valores ± 1 .

Tomando $F_y = \sigma_y$ y $F_z = \sigma_z$ reescribimos (4.5) con $u_t = 0$ como:

$$d\rho_t = -\frac{1}{2}[\sigma_z, [\sigma_z, \rho_t]]dt + \sqrt{\eta}(\{\sigma_z, \rho_t\} - 2Tr(\sigma_z \rho_t)\rho_t)dW_t. \quad (4.7)$$

Entonces $\rho_t \rightarrow \rho_f$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ver Figura 4.1), donde ρ_f puede ser

$$\rho_f = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ó} \quad \rho_f = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces si $E(\rho_\infty) = \rho_0$ por la propiedad de martingala y $Tr(\rho_f \rho_0) = 1$ si $\rho_0 = \rho_f$. \square

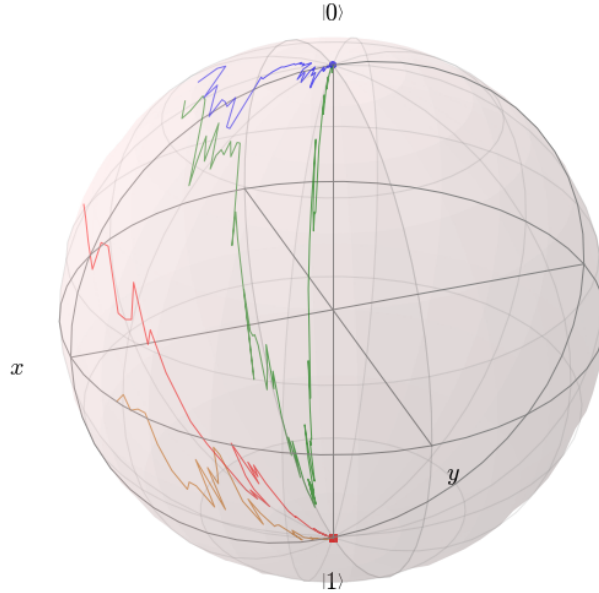


Figura 4.1: Evolución del sistema (4.7) del ejemplo 4.2.1 con cuatro condiciones iniciales unitarias diferentes, las trayectorias son también unitarias y convergen al polo norte ($|0\rangle$) o al polo sur ($|1\rangle$).

²Simulaciones realizadas con Qutip [26]

4.3 Estabilización de un sistema de dos Qubit

Consideremos ahora un sistema compuesto de dos qubit, que está definido en el espacio $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ con base

$$\{|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle, |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle, |10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle, |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle\}.$$

Denotemos por $\sigma_x^1 = \sigma_x \otimes I$, y $\sigma_x^2 = I \otimes \sigma_x$ (respectivamente y, z) a las matrices de Pauli del primer y segundo qubit respectivamente, y $F_x = \sigma_x^1 + \sigma_x^2$ son los operadores de momento angular colectivo no normalizados (resp. para y, z).

En (4.3) escribimos nuevamente $H = 0$, pero ahora $L = F_z$ y $G = u_1(t)G^1 + u_2(t)G^2$ con $G^1 = \sigma_y^1$, $G^2 = \sigma_y^2$. Las funciones escalares $u_1(t), u_2(t)$ son dos controles escalares independientes que actúan como campos magnéticos locales en la dirección y de cada qubit. La ecuación de filtrado cuántica para el sistema de dos qubit es dada por la ecuación

$$d\rho_t = -iu_1(t)[\sigma_y^1, \rho_t]dt - iu_2(t)[\sigma_y^2, \rho_t]dt - \frac{1}{2}[F_z, [F_z, \rho_t]]dt + \sqrt{\eta}(\{F_z, \rho_t\} - 2Tr(F_z\rho_t)\rho_t)dW_t. \quad (4.8)$$

El objetivo de control es estabilizar al sistema alrededor del estado objetivo

$$\rho_f = \frac{1}{2}(|01\rangle - |10\rangle)(|01\rangle - |10\rangle)^*$$

que es un estado de Bell (vea Haroche and Raimond [20, Capítulo 2] para una discusión interesante de los estados de Bell).

¿Cómo cuantificamos que tan lejos estamos del estado objetivo?. En información cuántica existen dos tipos de medidas usadas, la *medida tracial* $D(\rho, \sigma) := \frac{1}{2}Tr|\rho - \sigma|$, y la *fidelidad* $F(\rho, \sigma) := Tr\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}$.

No es inmediatamente obvio que la fidelidad sea una medida de distancia útil, pero podemos obtener algunas propiedades que si son de una métrica. El teorema de Uhlman [39, Teorema 9.4] nos permite expresar la fidelidad como

$$F(\rho, \sigma) = \max_{|\psi\rangle, |\phi\rangle} |\langle\psi|\phi\rangle|,$$

es decir, nos permite caracterizar la fidelidad en términos de algún $|\psi\rangle$ purificación de ρ y un $|\phi\rangle$ purificación de σ , donde el sistema compuesto donde pertenecen es una copia del mismo sistema, es decir $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. A partir de esto se puede deducir que la fidelidad es simétrica. Por otra parte, se puede demostrar que es monótona [39, Teorema 9.6]. Además, $F(\rho, \sigma) = 0$ si y sólo si ρ y σ tienen soporte en subespacios ortogonales (usaremos esta propiedad más adelante). En resumen, la fidelidad es simétrica en sus entradas, $0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$ donde se alcanza la igualdad en la izquierda si y sólo si $\rho \perp \sigma$ y la desigualdad de la derecha si y sólo si $\rho = \sigma$.

Sean ρ y σ dos estados cuánticos, y sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ dos purificaciones tal que $F(\rho, \sigma) = |\langle\psi|\phi\rangle|$ entonces

$$1 - F(\rho, \sigma)^2 \leq D(\rho, \sigma) \leq \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)^2},$$

nos implica que la distancia tracial y la fidelidad son métricas cualitativamente equivalentes para estados cuánticos. En teoría de control esto nos sirve como una medida de qué tan lejos estamos del objetivo. Consideraremos la distancia

$$V(\rho) = 1 - Tr(\rho\rho_f),$$

que sale del hecho de que ρ_f es un estado puro.

El resto de este capítulo consistirá en revisar la estabilización del sistema (4.8) mediante la siguiente ley de control:

Teorema 4.3.1 (Mirrahimi and Van Handel [38]). *Consideremos la siguiente ley de control:*

- Si $Tr(\rho\rho_f) \geq \gamma$:
 $u_1(t) = 1 - Tr(i[\sigma_y^1, \rho_t]\rho_f)$, $u_2(t) = 1 - Tr(i[\sigma_y^2, \rho_t]\rho_f)$
- Si $Tr(\rho\rho_f) \leq \gamma/2$:
 $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = 0$
- Si $\rho_t \in \{\rho : \gamma/2 < Tr(\rho\rho_f) < \gamma\}$:
 $u_1(t) = 1 - Tr(i[\sigma_y^1, \rho_t]\rho_f)$, $u_2(t) = 1 - Tr(i[\sigma_y^2, \rho_t]\rho_f)$

Entonces existe $\gamma > 0$ tal que (4.8) es globalmente estable alrededor de ρ_f y $E[\rho_t] \rightarrow \rho_f$ cuando $t \rightarrow \infty$.

4.3.1 Demostración del teorema 4.3.1

En los Lemas siguientes, denotamos a la solución ρ_t de (4.8) por $\varphi_t(\rho, u_1(t), u_2(t))$, es decir, $\rho_0 = \rho \in \mathcal{S}$ y u_1, u_2 son los controles escalares actuando en el tiempo t . En su forma general, el Teorema 4.3.1 fue demostrada en [38], y ésta sección consiste únicamente en particularizar los resultados al caso de dos Qubit, y en el caso de que poner la demostración de un resultado no aporte a la discusión, sólo ponemos una explicación de la demostración.

Vayamos preparando el terreno para la demostración. Salvo en algunos casos que se indicarán, usaremos la función de distancia

$$V(\rho) = 1 - Tr(\rho\rho_f) : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1],$$

como nuestra Función de Lyapunov, con $\gamma > 0$, definimos los siguientes conjuntos de nivel:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{\rho \in \mathcal{S} : V(\rho) = 1\}, \\ \mathcal{S}_{>1-\gamma} &= \{\rho \in \mathcal{S} : 1 - \gamma < V(\rho) \leq 1\}, \\ \mathcal{S}_{\leq 1-\gamma} &= \{\rho \in \mathcal{S} : 0 \leq V(\rho) \leq 1 - \gamma\}, \\ \mathcal{S}_{<1-\gamma/2} &= \{\rho \in \mathcal{S} : 0 \leq V(\rho) \leq 1 - \gamma/2\}. \end{aligned}$$

Entonces, la demostración de la ley de control 4.3.1 consiste en:

1. Primero, demostrar que el control constante $u_1(t) = 1$, asegura que las trayectorias de (4.8) salen del conjunto \mathcal{S}_1 en valor esperado.
2. Existe $\gamma > 0$ tal que podemos extender el resultado del paso anterior a una vecindad $\mathcal{S}_{\geq 1-\gamma}$. Para toda condición inicial $\rho \in \mathcal{S}_{\geq 1-\gamma}$, hay un tiempo de escape finito de este conjunto.
3. Ahora, vamos a considerar que la condición inicial se encuentra en el conjunto $\mathcal{S}_{\leq 1-\gamma}$. Consideremos los controles $u_1(\rho) = 1 - Tr(i[\sigma_y^1, \rho_t]\rho_f)$, y $u_2(\rho) = 1 - Tr(i[\sigma_y^2, \rho_t]\rho_f)$ primero vamos a demostrar que para toda condición inicial en $\mathcal{S}_{\leq 1-\gamma}$, las trayectorias nunca salen del conjunto $\mathcal{S}_{<1-\gamma/2}$. Las trayectorias que no salen de este conjunto convergen casi seguramente a ρ_f cuando $t \rightarrow \infty$.
4. Hay una única solución ρ_t con el control compuesto por $(u_1(t) = 1, u_2(t) = 0)$ y $(u_1(t) = 1 - Tr(i[\sigma_y^1, \rho_t]\rho_f), u_2(t) = 1 - Tr(i[\sigma_y^2, \rho_t]\rho_f))$. Las trayectorias del sistema convergen al estado de equilibrio ρ_f con probabilidad uno.

Paso 1

Veamos que si el estado inicial está en el conjunto $\mathcal{S}_1 = \{\rho \in \mathcal{S} : V(\rho) = 1\}$, los controles constantes $u_1(t) = 1$ y $u_2(t) = 0$ aseguran la salida de las trayectorias en valor esperado del conjunto de nivel \mathcal{S}_1 .

Recordemos que $\varphi_t(\rho, 1, 0)$ denota la solución ρ_t como , es decir $\rho_0 = \rho \in \mathcal{S}$ y $u_1(t) = u_1(0) = 1$ y $u_2(t) = u_2(0) = 0$. Notemos que $ETr(\varphi_t(\rho, 1, 0)\rho_f) = 0$ si y sólo si $E(Tr(\tilde{\rho}_t\rho_f)) = \sum_i \lambda_i E(\langle v_t^i | \rho_f | v_t^i \rangle) = 0$. Pero $\langle v_t^i | \rho_f | v_t^i \rangle \geq 0$, entonces $E(V(\varphi_t(\rho, 1, 0))) = 1$ si y sólo si $\langle v_t^i | v_f \rangle = 0$ c.s. para toda i .

La observación de que ρ_f sea ortogonal a ρ es importante, puesto que necesitamos asegurar que las trayectorias salen del conjunto \mathcal{S}_1 entonces, consideremos al conjunto $\{|v\rangle : \langle v, v_f \rangle = 0\}$, esto es el conjunto donde $V(\rho) = 1$, y el siguiente Lema nos permite ver que salimos de este conjunto en el caso determinista, después usaremos el Teorema de Soporte A.1.3 para asociar el resultado a la ecuación de filtrado.

Lema 4.3.1. *Tomemos $v_f = |01\rangle - |10\rangle$. Consideremos la ecuación diferencial determinista*

$$\frac{d}{dt}|v_t\rangle = (-i\sigma_y^1 - F_z^2 + CF_z)|v_t\rangle, \quad |v_0\rangle \in C^N \otimes C^N \setminus \{0\} \quad (4.9)$$

Para $C \gg 1$, $|v_t\rangle$ sale del conjunto $\{|v\rangle : \langle v, v_f \rangle = 0\}$ en el intervalo $[0, T]$; i.e., existe $t \in [0, T]$ tal que $\langle v_t | v_f \rangle \neq 0$.

Demostración. Daremos un bosquejo de la demostración en el caso general, los detalles se encuentran en [38, Lema 4.4]. Esencialmente, la matriz F_z tiene un espectro no degenerado, y las entradas arriba y abajo de $\sigma_y = F_y$ son no cero. Se escoge una constante κ tal que la matriz $A = -iF_y - F_z^2 + \kappa F_z$ tenga valores propios distintos.

Entonces consideremos la ecuación

$$\dot{|v\rangle} = A|v\rangle, \quad v|_{t=0} = v_0,$$

y supongamos que su solución nunca sale del conjunto $\{|v\rangle : \langle v, v_f \rangle = 0\}$ en el intervalo $t \in [0, T]$.

Entonces $\frac{d}{dt}\langle v, v_f \rangle = 0$ y en particular $\frac{d^n}{dt^n}\langle v, v_f \rangle = \langle (A^n)^* v_0, v_f \rangle = 0$.

Como la matriz A tiene valores propios distintos, hay una matriz P y una matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$, reescribimos entonces

$$\frac{d^n}{dt^n}\langle v, v_f \rangle = \langle (D^n)^* \tilde{v}_0, \tilde{v}_f \rangle = \langle \tilde{v}_0, D^n \tilde{v}_f \rangle = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con $\tilde{v}_0 = P^{-1}v_0$ y $\tilde{v}_f = P^*v_f$.

Para cada $k \in 0, 1, \dots, n$ tenemos el producto

$$D^k \tilde{v}_f = \begin{bmatrix} D_{11}^k(\tilde{v}_f)_1 \\ \vdots \\ D_{NN}^k(\tilde{v}_f)_N \end{bmatrix},$$

con esto construimos la matriz de Vandermonde

$$M = \begin{bmatrix} (\tilde{v}_f)_1 & (\tilde{v}_f)_1 D_{11}^1 & \cdots & (\tilde{v}_f)_n D_{NN}^n \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ (\tilde{v}_f)_N & (\tilde{v}_f)_N D_{11}^{n-1} & \cdots & (\tilde{v}_f)_N D_{NN}^{n-1} \end{bmatrix}$$

que implica $M\tilde{v}_0 = 0$ por el producto interno de la diagonal con \tilde{v}_0 .

La determinante de la matriz de Vandermonde es

$$\det M = (\tilde{v}_f)_1^* \cdots (\tilde{v}_f)_N^* \prod_{i>j} (D_{ii} - D_{jj}),$$

como la matriz A tiene valores propios distintos, todas las entradas D_{11}, \dots, D_{NN} son diferentes, entonces si los elementos del vector \tilde{v}_f son no cero, la matriz M debe ser invertible. Pero como $M\tilde{v}_0 = 0$ esto implica que $\tilde{v}_0 = 0$ y por lo tanto $v_0 = 0$ es el único estado inicial para el cual la ecuación (4.9) nunca deja el conjunto $\{|v\rangle : \langle v, v_f \rangle = 0\}$ en el intervalo $t \in [0, T]$.

El resto de la demostración consiste en demostrar que las entradas de \tilde{v}_f no son cero, pero esto es equivalente a demostrar que la matriz A tiene vectores propios con elementos no cero, la conclusión se obtiene de que los elementos debajo de la diagonal de F_y son diferentes de cero.

Para el caso particular de los Qubits, un cálculo explícito nos da:

$$A = -i\sigma_y^1 - F_z^2 + 2F_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \end{bmatrix},$$

que tiene una diagonalización $A = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{bmatrix} -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1270 & 7,8729 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7,8729 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1270 \end{bmatrix},$$

por lo que A tiene valores propios distintos, y por lo tanto aplica el resultado anterior si se puede ver que las entradas de \tilde{v}_f son no cero, pero un cálculo explícito nos da:

$$P^*(|01\rangle - |10\rangle) = (-1, -1, 0,12, 7,87)^T,$$

que son no cero, y entonces aplica el resultado anterior: $v_0 = (0, 0, 0, 0)^T$ es el único elemento de para el cual la ecuación (4.9) nunca deja el conjunto $\{|v\rangle : \langle v, v_f \rangle = 0\}$ en el intervalo $t \in [0, T]$. \square

Sea $T > 0$ y definamos la función no negativa

$$\chi(\rho) = \min_{t \in [0, T]} EV(\varphi_t(\rho, 1, 0)), \quad \rho \in \mathcal{S}.$$

Lema 4.3.2. $\chi(\rho) < 1$ para todo $\rho \in \mathcal{S}_1$.

Demostración. Consideremos la ecuación

$$d|v_t^i\rangle = -i\sigma_y^1|v_t^i\rangle dt - \frac{1}{2}F_z^2|v_t^i\rangle dt + F_z v_t^i dW_t', \quad (4.10)$$

donde $dW_t' = \sqrt{\eta}dy_t + \sqrt{1-\eta}d\hat{W}_t = 2\eta Tr(F_z \rho_t)dt + \sqrt{\eta}dW_t + \sqrt{1-\eta}d\hat{W}_t$.

Escogemos un espacio de probabilidad tal que \hat{W}_t se a un movimiento Browniano independiente de y_t . Para demostrar el lema, recordemos que $V(\varphi_t(\rho, 1, 0)) = 1 \iff \langle v_t^i | v_f \rangle = 0$, entonces basta ver que existe $t \in [0, T]$ tal que $EV(\varphi_t(\rho, 1)) < 1$, y entonces basta ver que existe $t \in [0, T]$ tal que $P(\langle v_t | v_f \rangle \neq 0) > 0$.

El proceso W_t' es un movimiento Browniano con deriva acotada, el teorema de Girsanov A.0.7 nos permite encontrar una medida Q bajo la cuál W_t' sea un movimiento Browniano y podamos aplicar el teorema de soporte A.1.3. Como las dos medidas son equivalentes, tenemos que ver que

$$Q(\langle v_t | v_f \rangle \neq 0) > 0.$$

Transformamos la ecuación (4.10) a la interpretación de Stratonovich, tenemos

$$d|v_t^i\rangle = -i\sigma_y^1|v_t^i\rangle dt - F_z^2|v_t^i\rangle dt + F_z v_t^i \circ dW_t',$$

que satisface los requerimientos del teorema de soporte.

Ahora, supongamos que $Q(\langle v_t | v_f \rangle = 0) = 1$. De acuerdo con el teorema de soporte denotamos por \mathcal{W}_{v_0} al conjunto de trayectorias continuas iniciando en v_0 , por $\mathcal{I}_{v_0} \subset \mathcal{W}_{v_0}$ al subconjunto cerrado más pequeño tal que $Q(\{\omega \in \Omega : v.(\omega) \in \mathcal{I}_{v_0}\}) = 1$.

Además denotamos por $\mathcal{I}_{v_0,t} \subset \mathcal{W}_{v_0}$ como el subconjunto tal que $\langle v_t | v_f \rangle = 0$, éste conjunto es cerrado bajo la topología de convergencia uniforme. Entonces $Q(\langle v_t | v_f \rangle = 0) = 1$ implica que $\mathcal{I}_{v_0} \subset \mathcal{I}_{v_0,t}$ para toda $t \in [0, T]$. Pero por el teorema de soporte las soluciones de (4.10) son elementos de \mathcal{I}_{v_0} . y por el Lema 4.3.1 existe un tiempo $t \in [0, T]$ y una constante C tal que la solución de (4.10) no es un elemento de $\mathcal{I}_{v_0,t}$, por lo que tenemos la contradicción deseada. \square

Paso 2

Primero extendemos el resultado del paso 1 a una vecindad $\mathcal{S}_{\geq 1-\gamma}$

Lema 4.3.3. *Existe $\gamma > 0$ tal que $\chi(\rho) < 1 - \gamma$ para toda $\rho \in \mathcal{S}_{\geq 1-\gamma}$.*

Demostración. Supongamos que para cada $\xi > 0$ existe una matriz $\rho_\xi \in \mathcal{S}_{>1-\xi}$ tal que

$$1 - \xi < \chi(\rho_\xi) \leq 1.$$

Sea $\{\rho_{\xi_n}\}$ tal que $\xi_n \rightarrow 0$. Como \mathcal{S} es compacto, $\rho_{\xi_n} \rightarrow \rho_\infty \in \mathcal{S}_1$ y tal que $\chi(\rho_{\xi_n}) \rightarrow 1$. Pero por el Lema 4.3.2, $\chi(\rho_\infty) = 1 - \epsilon < 1$. Escogiendo $s \in [0, T]$ tal que

$$EV(\varphi_s(\rho_\infty, 1, 0)) = 1 - \epsilon,$$

y como la difusión es Feller continua, podemos escribir

$$1 = \lim_n \chi(\rho_{\xi_n}) \leq \lim_n E(V(\varphi_s(\rho_{\xi_n}, 1, 0))) = E(\varphi_s(\rho_\infty, 1, 0)) = 1 - \epsilon < 1,$$

entonces existe $\xi > 0$ tal que $\chi(\rho) \leq 1 - \xi$ para toda $\rho \in \mathcal{S}_{>1-\xi}$, y terminamos escogiendo $\gamma = \xi/2$. \square

Ahora, para toda condición inicial $\rho \in \mathcal{S}_{\geq 1-\gamma}$, el control $u = (1, 0)$ asegura un tiempo de escape finito de este conjunto.

Lema 4.3.4. *Sea $\tau_\rho(\mathcal{S}_{>1-\gamma})$ el primer tiempo de salida de $\varphi_t(\rho, 1, 0)$ del conjunto $\mathcal{S}_{>1-\gamma}$. Entonces*

$$\sup_{\rho \in \mathcal{S}_{>1-\gamma}} E\tau_\rho(\mathcal{S}_{>1-\gamma}) < \infty.$$

Demostración. Para un tiempo de paro τ_ρ tenemos el estimado [14]:

$$E\tau_\rho(\mathcal{S}_{>1-\gamma}) \leq \frac{T}{1 - \sup_{\zeta \in \mathcal{S}} P(\tau_\zeta(\mathcal{S}_{>1-\gamma}) > T)}.$$

La demostración consiste en ver que $\sup_{\zeta \in \mathcal{S}} P(\tau_\zeta(\mathcal{S}_{>1-\gamma}) > T) < 1$. (Note que si $\zeta \in \mathcal{S}_{\leq 1-\gamma}$ el primer tiempo de salida es cero) Suponemos que para $\epsilon > 0$ existe $\zeta_\epsilon \in \mathcal{S}_{>1-\gamma}$ tal que para toda $s \in [0, T]$ tenemos que

$$EV(\rho_s(\zeta_\epsilon, 1, 0)) > (1 - \epsilon) \inf_{\rho \in \mathcal{S}_{>1-\gamma}} V(\rho) = (1 - \epsilon)(1 - \gamma).$$

Por compacidad se puede escoger una secuencia $\epsilon_n \downarrow 0$ tal que $\zeta_{\epsilon_n} \rightarrow \zeta_\infty \in \mathcal{S}_{\geq 1-\gamma}$ y por continuidad de Feller $EV(\varphi_s(\zeta_\infty, 1, 0)) > 1 - \gamma$ para $s \in [0, T]$. Pero esto contradice el Lema 4.3.3, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $P(\tau_\zeta(\mathcal{S}_{>1-\gamma}) > T) = 1 - \epsilon$ y

$$E(\tau_\rho(\mathcal{S}_{>1-\gamma})) < \frac{T}{1 - (1 - \epsilon)} < \infty.$$

\square

Paso 3

Ahora, vamos a considerar que la condición inicial se encuentra en el conjunto $\mathcal{S}_{\leq 1-\gamma}$. Consideremos los controles $u_1(\rho) = 1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f)$, y $u_2(\rho) = 1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^2, \rho]\rho_f)$, primero vamos a demostrar que para toda condición inicial en $\mathcal{S}_{\leq 1-\gamma}$, las trayectorias nunca salen del conjunto $\mathcal{S}_{< 1-\gamma/2}$

Lema 4.3.5. *Consideremos la función de Lyapunov*

$$V(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho\rho_f),$$

donde $\rho \in \mathcal{S}_{\leq 1-\gamma}$ y $u_t = (u_1(\rho_t), u_2(\rho_t))$, con

$$u_1(\rho) = 1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f) \quad (4.11)$$

$$u_2(\rho) = 1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^2, \rho]\rho_f). \quad (4.12)$$

Para toda $\rho \in \mathcal{S}_{\leq 1-\gamma}$ tenemos que

$$P\left(\sup_{0 \leq t < \infty} V(\varphi_t(\rho, u_t)) \geq 1 - \gamma/2\right) \leq \frac{1-\gamma}{1-\gamma/2} = 1 - p < 1.$$

Demostración. Basta ver que $V(\rho)$ es una supermartingala, y usando la desigualdad de Doob concluimos el resultado, por lo que tenemos que calcular $\mathcal{A}V(\rho)$. De la misma manera en la que hemos estado trabajando, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho_1} &= [-\rho_f^{11}, \dots, -\rho_f^{n1}]^\top \\ &\vdots \\ \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho_n} &= [-\rho_f^{1n}, \dots, -\rho_f^{nn}]^\top \end{aligned}$$

y notemos por lo tanto que la segunda derivada es cero. Tomando $\Phi(\rho) = \Phi(\rho)_1 dt + \Phi(\rho)_2$, con $\Phi(\rho)_1 = -i(1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f))[\sigma_y^1, \rho] - i(1 - i\text{Tr}(i[\sigma_y^2, \rho]\rho_f))[\sigma_y^2, \rho]$ y $\Phi(\rho)_2 = -\frac{1}{2}[F_z, [F_z, \rho]]$. Calculemos una expresión para $\sum_k \Phi_k \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho_k}$ de acuerdo con (A.12). Tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_1 \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho_1} &= -[\Phi_{11} \dots \Phi_{1n}][\rho_f^{(11)}, \dots, \rho_f^{(n1)}]^\top \\ &= -(\Phi_{11}\rho_f^{11} + \Phi_{12}\rho_f^{21} + \dots + \Phi_{1n}\rho_f^{n1}), \end{aligned}$$

siguiendo con $1 \leq k \leq n$ tenemos $\Phi_k \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho_k} = -\sum_i \Phi_{ki}\rho_f^{ik}$. Sumando todos los términos tenemos

$$\begin{aligned} \sum_k \Phi_k \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho_k} &= -\sum_k \sum_i \Phi_{ki}\rho_f^{ik} = -\text{Tr}(\Phi\rho_f) \\ &= -\text{Tr}(-i(1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f))[\sigma_y^1, \rho]\rho_f) \\ &\quad - \text{Tr}(-i(1 - i\text{Tr}(i[\sigma_y^2, \rho]\rho_f))[\sigma_y^2, \rho]\rho_f) \\ &\quad + \frac{1}{2}\text{Tr}([F_z, [F_z, \rho]]\rho_f) \\ &= \text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f) - \text{Tr}^2(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f) \\ &\quad + \text{Tr}(i[\sigma_y^2, \rho]\rho_f) - \text{Tr}^2(i[\sigma_y^2, \rho]\rho_f) \\ &\quad - \frac{1}{2}\{\text{Tr}(F_z^2\rho\rho_f) - 2(m-j)\text{Tr}(\rho\rho_f F_z) + (m-j)^2\text{Tr}(\rho\rho_f)\} \\ &= -(-\text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f) + \text{Tr}^2(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f) \\ &\quad - \text{Tr}(i[\sigma_y^2, \rho]\rho_f) + \text{Tr}^2(i[\sigma_y^2, \rho]\rho_f) + 1 - 1) \\ &= -(u_1(\rho)^2 + u_2(\rho)^2), \end{aligned}$$

Donde hemos usado la acción de F_z sobre $\rho_f = |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$ y el hecho de que la traza es cíclica para ver que el término entre corchetes del quinto renglón es cero. Entonces

$$\mathcal{A}V(\rho) = -(u_1(\rho)^2 + u_2(\rho)^2) \leq 0, \quad (4.13)$$

de la fórmula de Dynkin

$$E_\rho V(\rho_t) - V(\rho) = \int_0^t \mathcal{A}V(\rho_s) ds \leq 0,$$

implica que $E_\rho V(\rho_t) \leq V(\rho)$ es una supermartingala, entonces la desigualdad que queremos probar es consecuencia de la Desigualdad de Doob. \square

Ahora que hemos demostrado que las trayectorias que inician en $\mathcal{S}_{\leq 1-\gamma}$ no salen de $\mathcal{S}_{1-\gamma/2}$, el siguiente lema nos da información del comportamiento asintótico de $\varphi_t(\rho, u_1)$. En este teorema ilustraremos el uso del Teorema de Invariancia A.1.2, sabemos que $\lim_t V(\rho_t)$ existe casi seguramente, pero no sabemos si, con los controles, ρ_t converge a ρ_f , para ver esto requerimos usar otra función de Lyapunov puesto que la que hemos estado usando no nos da información sobre la parte no controlada.

Lema 4.3.6. *Las trayectorias de $\varphi_t(\rho, u_1)$ que nunca salen del conjunto $\mathcal{S}_{< 1-\gamma/2}$ convergen en probabilidad a ρ_f cuando $t \rightarrow \infty$.*

Demostración. Consideremos la función de Lyapunov $V_1(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho\rho_f)^2$. Nuevamente vamos a revisar que $V_1(\rho)$ es una supermartingala. Recordemos que $u_1(\rho) = 1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f)$, y $u_2(\rho) = 1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^2, \rho]\rho_f)$.

Realizando los mismos cálculos que en los casos anteriores, encontramos

$$\mathcal{A}V_1(\rho) = -2[(u_1(\rho) - 1)^2 + (u_2(\rho) - 1)^2]\text{Tr}(\rho\rho_f) - 4\eta\text{Tr}(\rho F_z)^2\text{Tr}^2(\rho\rho_f) \leq 0,$$

la difusión es Feller continua y $P(\|\rho_t - \rho\| > \epsilon) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$ para todo $\epsilon > 0$, entonces por el teorema A.1.2 ρ_t converge en probabilidad al conjunto invariante más grande contenido en

$$C = \{\rho \in \mathcal{S} : \mathcal{A}V_1(\rho) = 0\},$$

donde $\mathcal{A}V_1(\rho) = 0$ si

$$-2[(u_1(\rho) - 1)^2 + (u_2(\rho) - 1)^2]\text{Tr}(\rho\rho_f) = 0 \quad \text{y si} \quad 4\eta\text{Tr}(\rho F_z)\text{Tr}^2(\rho\rho_f) = 0,$$

pero basta ver que el segundo término que

$$\text{Tr}(\rho F_z) = 0 \quad \text{ó} \quad \text{Tr}(\rho\rho_f) = 0.$$

Tenemos que $V_1(\rho) = 0 \iff \rho = \rho_f$, pues estamos en el conjunto de trayectorias que no salen de $\mathcal{S}_{< 1-\gamma/2}$, basta que consideremos el conjunto $C' = \{\rho : \text{Tr}(\rho F_z) = 0\}$ e investigar el conjunto invariante más grande. Vamos a demostrar que este conjunto es $\{\rho_f\}$.

Usando la regla de Itô tenemos:

$$d\text{Tr}(\rho_t F_z) = -u_1(\rho_t)\text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho_t]F_z)dt - u_2(\rho_t)\text{Tr}(i[\sigma_y^2, \rho_t]F_z)dt + 2\sqrt{\eta}(\text{Tr}(F_z^2 \rho_t) - \text{Tr}^2(F_z \rho_t))dW_t.$$

Si la condición inicial ρ se encuentra en C' entonces la trayectoria $\text{Tr}(\rho_t F_z) = \text{Tr}(\varphi_t(\rho, u_1, u_2)F_z)$ debe ser constante, y para que esto suceda, debemos tener al menos

$$\text{Tr}(F_z^2 \rho) - \text{Tr}^2(F_z \rho) = 0,$$

y esto implica que ρ debe ser un estado propio de F_z . Esto es cierto si ρ pertenece al conjunto

$$\{\rho \in \mathcal{S} : \rho = \alpha|01\rangle\langle 01| + \beta|01\rangle\langle 10| + \beta|10\rangle\langle 01| + (1 - \alpha)|10\rangle\langle 10|\}, \quad (4.14)$$

donde un cálculo directo muestra que $Tr(\hat{\rho}F_Z) = 0$ para todo $\hat{\rho}$ en el conjunto 4.14. Supongamos que la ecuación (4.8) deja al conjunto (4.14) invariante con $u_1(\rho)$ y $u_2(\rho)$. Por otro lado, la solución de esta ecuación debe de coincidir con la solución al tiempo t de

$$d\rho_t = -i[F_y, \rho_t]dt \quad (4.15)$$

donde $F_y = \sigma_y^1 + \sigma_y^2$, $U_1 = U_2 = 1$ y $\varphi_t(\rho, U_1, U_2)$ donde ρ está en el conjunto (4.14). Afirmamos que esto sólo es el caso si $\rho = \rho_f$, es decir, que ρ_f es el único elemento de la forma (4.14) que es invariante.

Escribimos $\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, $\lambda_i \in [0, 1]$, $\sum_i \lambda_i = 1$, en el caso de que sean de la forma 4.14, son generados por $\text{span}\{|01\rangle, |10\rangle\}$. Entonces tenemos que

$$\frac{d}{dt} |\psi\rangle_t^i = -iF_y |\psi\rangle_t^i,$$

pero $F_y \psi^i \notin \text{span}\{|01\rangle, |10\rangle\}$ puesto que si lo fuera, conmutaría con F_z , y $[F_y, \rho_f] = 0$, por lo que $\psi^i = (|01\rangle - |10\rangle)$, entonces el conjunto invariante más grande en \mathcal{C} debe estar contenido en $\{\rho_f\} \cup \mathcal{S}_1$, pero como estamos en las trayectorias que no salen de $\mathcal{S}_{1-\gamma/2}$, las trayectorias deben de converger en probabilidad a ρ_f por A.1.2. □

Y de este resultado, podemos hacer una aseveración más fuerte:

Lema 4.3.7. $\varphi_t(\rho, u_t) = \varphi_t(\rho, u_1, u_2)$ converge a ρ_f cuando $t \rightarrow \infty$ para casi todas las trayectorias que nunca salen del conjunto $\mathcal{S}_{1-\gamma/2}$.

Demostración. Definimos el evento $P_{<1-\gamma/2}^\rho = \{\omega \in \Omega : \varphi_t(\rho, u_1)$ nunca sale de $\mathcal{S}_{<1-\gamma/2}\}$. Como P-lím $\rho_t = \rho_f$ para las trayectorias que nunca salen de $\mathcal{S}_{<1-\gamma/2}$, esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\|\varphi_t(\rho, u_1, u_2) - \rho_f\| > \epsilon | P_{<1-\gamma/2}^\rho) = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

y por continuidad de $V(\rho) = 1 - Tr(\rho\rho_f)$ esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(V(\varphi_t(\rho, u_1, u_2)) > \epsilon | P_{<1-\gamma/2}^\rho) = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Como $V(\rho) \leq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} E(V(\varphi_t(\rho, u_1, u_2)) | P_{<1-\gamma/2}^\rho) &\leq P(V(\varphi_t(\rho, u_1, u_2)) > \epsilon | P_{<1-\gamma/2}^\rho) \\ &\quad + \epsilon(1 - P(V(\varphi_t(\rho, u_1, u_2)) > \epsilon | P_{<1-\gamma/2}^\rho)). \end{aligned}$$

Tomando el supremo cuando t tiende a infinito

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E(V(\varphi_t(\rho, u_1, u_2)) | P_{<1-\gamma/2}^\rho) \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0,$$

y esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(V(\varphi_t(\rho, u_1, u_2)) | P_{<1-\gamma/2}^\rho) = 0.$$

Como V es acotada y $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi_t(\rho, u_1, u_2))$ existe casi seguramente por el Teorema A.1.1, por el Teorema de Convergencia Dominada:

$$E(\lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi_t(\rho, u_1, u_2)) | P_{<1-\gamma/2}^\rho) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(V(\varphi_t(\rho, u_1, u_2)) | P_{<1-\gamma/2}^\rho) = 0,$$

y esto implica que $\lim_t Tr(\rho_t \rho_f) = 1$ para casi todas las trayectorias que nunca salen del conjunto $\mathcal{S}_{<1-\gamma/2}$, que implica que $\rho_t \rightarrow \rho_f$ casi seguramente. □

Paso 4

Hay una solución única ρ_t bajo el control u_t que consiste de juntar las soluciones de los controles $u_t = (1, 0)$ y $u'_t = (u_1(\rho_t), u_2(\rho_t)) = (1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho_t]\rho_f), 1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^2, \rho_t]\rho_f))$. Combinando los resultados del paso 2 y 3, mostramos que las trayectorias resultantes del sistema eventualmente convergen al estado de equilibrio ρ_f con probabilidad uno.

Lema 4.3.8. *Hay una solución única $\varphi_t(\rho, u_1, u_2)$ para toda $t \in \mathbb{R}_+$. Además, para casi toda trayectoria de $\varphi_t(\rho, u_1, u_2)$ existe un tiempo $T < \infty$ después del cuál la trayectoria nunca sale del conjunto $\mathcal{S}_{1-\gamma/2}$ y la ley de control activa es $u_t = (u_1(t), u_2(t))$.*

Demostración. Los detalles se encuentran en [38, Lema 4.10], sólo pondremos un bosquejo. Sea $\rho \in \mathcal{S}$. Primero se construye una solución $\varphi_t^n(\rho, u_1, u_2)$ que coincida con $\rho_t \varphi_t(\rho, u_1, u_2)$ hasta un tiempo n con el tiempo de paro

$$\tau_1^n = \inf\{t \geq 0 : \varphi_t(\rho, 1, 0) \in \mathcal{S}_{\leq 1-\gamma}\} \wedge n.$$

Entonces, denotamos, para el control $(1, 0)$

- $\varphi_{t \wedge n}(\rho, 1, 0)$ para $t < \tau_1^n$
- $\rho_{\tau_1^n} = \varphi_{\tau_1^n}(\rho, 1, 0)$

y definimos para $u'(\rho) = [(1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f)), ((1 - \text{Tr}(i[\sigma_y^1, \rho]\rho_f)))]$ el tiempo de paro

$$\sigma_1^n = \inf\{t \geq \tau_1^n : \varphi_{\tau_1^n, t}(\rho_{\tau_1^n}, u'(\rho)) \in \mathcal{S}_{\geq 1-\gamma/2}\} \wedge n.$$

Dada la condición inicial ρ en el tiempo s , y definimos para el control u'

- $\rho_{\tau_1^n, u'} = \varphi_{\tau_1^n, \sigma_1^n}(\rho_{\tau_1^n}, u')$

Entonces, extendemos la solución por

$$\varphi_{t \wedge n}(\rho, u) = \mathbb{1}_{\{t < \tau_1^n\}} \varphi_t(\rho, 1, 0) + \mathbb{1}_{\{\tau_1^n \leq t < \sigma_1^n\}} \varphi_{\tau_1^n, t}(\rho_{\tau_1^n}, u'), \quad t < \sigma_1^n.$$

Fijando n y definiendo la secuencia de tiempos de paro predecibles σ_k^n y τ_k^n (no decrecientes, por lo que $\lim_k \sigma_k^n$ existe), y la ecuación está únicamente definida c.s. en los segmentos.

Dejando $n \rightarrow \infty$ se obtiene una solución $\varphi_t(\rho, u)$, el resto de la demostración consiste en ver que sólo una cantidad finita de φ_k^n son finitas. \square

Demostración del Teorema 4.3.1. Primero veamos que el estado objetivo ρ_f es localmente estable en probabilidad.

Definiendo el proceso parado

$$\varphi_{t \wedge \tau}(\rho, u) = \varphi_{t \wedge \tau}(\rho, u_1), \quad \tau = \inf\{t : \varphi_t(\rho, u) \notin \mathcal{S}_{1-\gamma/2}\},$$

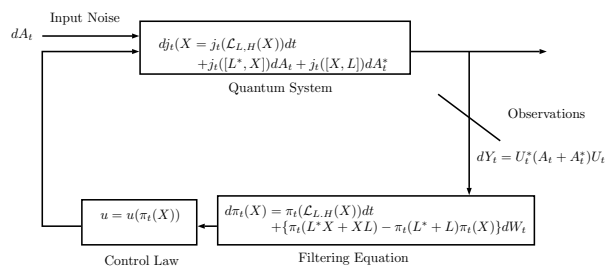
El generador infinitesimal nos da $\mathcal{A}V(\rho) = -u_1(\rho)^2 \leq 0$ para $\rho \in \mathcal{S}_{< 1-\gamma/2}$, pero por el teorema A.1.1, con $Q_\lambda = \mathcal{S}_{< 1-\gamma/2}$ tenemos estabilidad local.

Por los lemas 4.3.7 y 4.3.8, tenemos que $\varphi_t(\rho, u_2)$ casi seguramente cuando $t \rightarrow \infty$.

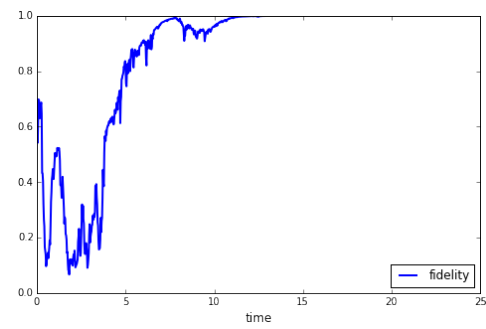
Para terminar, se ha demostrado que $E[\lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi_t(\rho, u))] = V(\rho_f) = 0$. Como V es uniformemente acotada, lineal y continua, tenemos por convergencia dominada

$$V(\lim_{t \rightarrow \infty} E\varphi_t(\rho, u)) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(V(\varphi_t(\rho, u))) = 0,$$

por lo tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} E\varphi_t(\rho, u) = \rho_f$. \square



(a) Lazo de control del sistema cuántico



(b) Convergencia de la fidelidad $Tr(\rho\rho_f)$.

Capítulo 5

Conclusiones

Abordar el tema de controlar sistemas cuánticos puede ser difícil en un principio, pues si hablamos de un sistema cuántico cerrado, el realizar una medición, algo ubicuo en la ingeniería de control, causa un *colapso* que se puede ver como una perturbación muy fuerte, que es un comportamiento poco deseado para efectos prácticos.

Sin embargo, en esta tesis vimos que la descripción de sistemas cuánticos abiertos puede ser descrita de forma apropiada con el lenguaje de la probabilidad cuántica, donde el colapso de la función no es otra cosa que el condicionamiento del estado del sistema, tomando el valor esperado de la evolución del sistema. La probabilidad cuántica permite recuperar estructura estadística de sistemas cuánticos cuando nos enfocamos en subálgebras abelianas, y es precisamente esta conexión con la probabilidad clásica lo que la hace tan útil. En efecto, la conexión entre la probabilidad clásica, que caracteriza la información en términos de σ -álgebras y la probabilidad cuántica que lo hace en términos de observables, es profunda y podemos explotar este hecho para poder realizar control estocástico basado en observaciones parciales.

Respecto a la ley de control para sistemas de control angular, una pregunta inmediata es saber la aplicabilidad de estos controladores en sistemas físicos. Parte de estas técnicas fueron aplicadas en [48] para estabilizar estados no clásicos, una lectura rápida de ese artículo nos permite darnos una idea del estado del arte en tecnología que fue necesario para implementar estos controles. Claro, hay varios problemas y detalles de los métodos de control basado en medición que pueden ser mejorados, en particular, notemos que para que esta ley de control tenga que ser resuelta en un computador, esta ecuación claramente conlleva cierta complejidad numérica, y necesita ser resuelta en un tiempo menor que la escala temporal del sistema físico para poder ser útil.

La pregunta es si es necesario tener que estar resolviendo la ecuación diferencial todo el tiempo, es decir, si es necesario tener activo el control retroalimentado. Una dirección en este sentido fue iniciada por Altafini et al. [3], donde están extendiendo el diseño del controlador introduciendo un control Hamiltoniano en lazo abierto invariante en el tiempo, y el ambiente modelado como un proceso Markoviano, donde la idea es establecer un enlace entre la estabilidad de la evolución de la ecuación de filtrado con la estabilidad del semigrupo cuántico de Markov asociado, y demostrar estabilidad en probabilidad.

Entonces la consecuencia es de que si se puede diseñar el control en lazo abierto en conjunto con el control en lazo cerrado, se puede estabilizar al sistema, en lazo abierto la disipación generada por el ambiente o por el proceso de medición pueden mantener estable al sistema, y cuando las condiciones de disipatividad no sean suficientes, se puede recurrir al control en lazo cerrado, además, es libre de parametrización. El uso de retroalimentación se minimiza, y lo que es más, la estructura se puede reducir, por lo que en principio es posible hacer una reducción de modelo que potencialmente reduciría el tiempo de cómputo de la ecuación de filtrado. Además, la ley de control necesita menos información que el control que vimos, por lo que se sugiere que un estimador de dimensión baja podría ser usado. Investigación más profunda de esta hipótesis

es necesaria para poder analizar su posibilidad.

El cálculo estocástico cuántico es una herramienta muy poderosa para analizar sistemas cuánticos abiertos, sin embargo, para usarlo es necesario tener un conocimiento de teoría de operadores en dimensión infinita, lo cual es un conocimiento bastante especializado. El espacio de Fock de juguete, (vea Attal [6], Meyer [36]) permite describir toda una familia de caminatas aleatorias no conmutativas actuando como operadores de multiplicación sobre el producto tensorial numerable de \mathbb{C}^2 . Podría estudiarse la estabilidad del filtro en este contexto, de hecho, algunos pasos se han realizado en [47] [11] [19], y en el artículo [42] se ha estudiado de forma rigurosa la aproximación de ecuaciones de filtrado controladas tanto para el caso de detección homodina como el de detección por fotoconteo.

Desde un punto de vista más hacia teoría de probabilidad y sus aplicaciones a teoría de sistemas y control, estudiamos la esperanza condicionada del sistema que satisface la ecuación de filtrado de Kushner-Stratonovich, que es una ecuación de filtrado no lineal, el estudio de fenómenos condicionales es un área muy rica donde la oportunidad de investigación es grande. Textos como [8] proveen un breve panorama de esta importante rama, que usa desde técnicas clásicas de control estocástico, a métodos usando el Cálculo de Malliavin o trayectorias rugosas. Definitivamente es un área en la que quisiera seguir en contacto en mi vida académica.

Apéndice A

Probabilidad Clásica

En este apéndice vamos a revisar brevemente unos resultados importantes en probabilidad, en particular un rápido repaso de cálculo estocástico.

Un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es una terna que consiste en un conjunto Ω que contiene nuestros eventos, llamado espacio muestral, una σ -álgebra \mathcal{F} que es una colección de subconjuntos de Ω y una medida $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que es la probabilidad definida sobre \mathcal{F} . Denotamos la filtración $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ a la familia de σ -álgebras tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $s \leq t$. Además, decimos que la filtración satisface las siguientes condiciones denominadas como *usuales* [30]:

- \mathcal{F} es completo, es decir, si $A \subset B$, $B \in \mathcal{F}$ y $P(B) = 0$ (P -nulo), entonces $A \in \mathcal{F}$ y $P(A) = 0$.
- La filtración \mathcal{F}_t es continua por la derecha, es decir, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ (i.e. $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$)
- \mathcal{F}_0 contiene todos los conjuntos P -nulos

Una filtración puede ser interpretada como información que obtengo del sistema hasta el tiempo t . Ahora, definamos variables aleatorias sobre nuestras filtraciones. Un *proceso estocástico* X lo podemos ver como una familia $\{X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : t \in [0, T]\}$, y decimos es *adaptado* si para cada t , X_t es \mathcal{F}_t -medible

Un concepto fundamental en probabilidad es el concepto de *martingala*, que lo podemos ver como un juego justo, en el que tener conocimiento de resultados pasados del juego (e.g., el resultado de la caída de dos dados en ocasiones previas), no nos sirve para desarrollar una estrategia que nos ayude a ganar el juego. La definición formal de una martingala es:

Definición A.0.1 (Martingalas). *Un proceso $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ es una martingala (respecto a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$) si*

- X es adaptado,
- $E(|X_t|) < \infty$ para toda $t \in [0, T]$,
- Para $0 \leq s \leq t$, $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$

Decimos que es una *supermartingala* si $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$ y una *submartingala* si $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$.

Hay juegos (como los de casino) que no son justos, por lo que podemos esperar que sean supermartingalas, por eso si un apostador de casino intenta usar una técnica de martingala, en general no va a tener ganancias, o peor aún, se irá a la ruina. Supón que para $s \leq t$, $X_t - X_s$ son tus ganancias netas en el juego en el tiempo t . No hay juego en el tiempo 0 ($X_0 = 0$). Entonces en el caso de que el juego sea una martingala, $E(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = 0$, $s \leq t$, y si el juego no es justo, es supermartingala, es decir, $E(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) \leq 0$.

Definimos la variación cuadrática de un proceso como $[X]_t := \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2$ donde π la norma de la partición sobre $[0, T]$. Además, dada una martingala M , M^2 es una submartingala (por la desigualdad de Jensen), y toda submartingala puede descomponerse en una martingala y el compensador de M^2 , denotado por $\langle M \rangle_t$. En general, el compensador y la variación cuadrática no coinciden. Lévy demostró un teorema bastante útil para caracterizar martingalas continuas, y veremos que si satisfacen las condiciones del teorema, la martingala es un movimiento Browniano.

Teorema A.0.1 (Teorema de caracterización de Lévy). *Un proceso estocástico B_t es un movimiento Browniano si y sólo si existe una medida de probabilidad Q y una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ tal que B_t es una martingala continua con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$ bajo Q , $Q\{B_0 = 0\} = 1$, y $\langle B \rangle_t = t$ casi seguramente con respecto a Q para cada t . [30, Teorema 8.4.2]*

El teorema anterior sigue siendo válido cuando la martingala es local.

Cuando queremos hacer modelos que tomen en cuenta incertidumbres, idealizamos las interacciones de la ecuación que queremos modelar mediante movimiento Browniano. Kyoshi Itô desarrollo una integral estocástica que integra con respecto a el movimiento Browniano. Veamos brevemente una idea de como se construye, para los detalles se pueden ver libros como el de Oksendal [40], o Kuo [30].

Definimos un proceso simple como un proceso de la forma

$$\phi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t)$$

Donde ϕ_k es una variable aleatoria \mathcal{F}_{t_k} medible y cuadrado integrable. La integral estocástica de Itô para un proceso simple se define como

$$I(\phi) = \int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

El movimiento Browniano no es de variación acotada, sin embargo, debido a que para B_t su variación cuadrática es t , la isometría de Itô nos da una manera de definirla

$$E\left[\left(\int_s^t \phi_u dB_u\right)^2\right] = E\left[\int_s^t \phi_u^2 dt\right],$$

Esta integral nos permite extender a una clase mas general de procesos, definiendolos como el límite de procesos simples cuadrado integrables.

Ahora podemos definir un proceso de Itô como un proceso dado por

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s \quad (\text{A.1})$$

donde u y v son procesos adaptados y cuadrado integrables, que pueden ser aproximados (vea Oksendal [40, Capítulo 3] para más detalles). Lo escribimos de forma simbólica como

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t \quad (\text{A.2})$$

Así como en la integral de Riemann usamos el teorema fundamental del cálculo para calcular integrales, la fórmula de Itô nos permite hacer lo mismo para integrales estocásticas, sin embargo, la variación cuadrática del movimiento Browniano que nos permitió extender la integral, nos da un término extra.

Teorema A.0.2 (Fórmula de Itô). Si $g \in C^2$ y X un proceso de Itô, entonces $Y_t = g(t, X_t)$ es también un proceso de Itô y

$$dY_t = \frac{\partial}{\partial t}g(t, X_t)dt + \frac{\partial}{\partial X_t}g(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X_t^2}g(t, X_t) \cdot (dX_t)^2$$

donde $(dX_t)^2$ se calcula como $dt \cdot dt = dB_t \cdot dt = dt \cdot dB_t = 0$ y $dB_t \cdot dB_t = dt$.

Por ejemplo, si tenemos la integral

$$\int_0^t B_s dB_s,$$

Con $X_t = B_t$ y $g(t, x) = \frac{1}{2}x^2$. Entonces $Y_t = \frac{1}{2}B_t^2$ y por la fórmula de Itô

$$dY_t = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt.$$

Así mismo, tenemos una fórmula de integración por partes:

Teorema A.0.3. Supongamos f es de variación acotada en $[0, t]$. Entonces

$$\int_0^t f_s dB_s = f_t B_t - \int_0^t B_s df_s$$

Supongamos que queremos describir el movimiento de una partícula suspendida en un líquido sujeto a choques con otras partículas o moléculas. Si $u(t, x) \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad del fluido en el punto x en el tiempo t , entonces un modelo matemático razonable para la partícula X_t es dada por

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t. \quad (\text{A.3})$$

Decimos que b es nuestro coeficiente de *deriva* y σ el coeficiente de *difusión*. Tales procesos estocásticos son llamados *difusiones de Itô*.

Es fundamental asociar un operador diferencial parcial a la difusión de Itô.

Definición A.0.2. El generador infinitesimal \mathcal{A} de X_t se define como

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E^x(f(X_t)) - f(X_0)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.4})$$

El conjunto de funciones $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ tal que el límite existe en x es denotado como $\mathcal{D}_A(x)$, mientras que \mathcal{D}_A denota el conjunto de funciones para los cuales el límite existe para todo $x \in \mathbb{R}$. A veces encontrar una función $f \in \mathcal{D}_A(x)$ es bastante complicado y más aún el calcular el generador actuando sobre dicha función, pero si tenemos una difusión de Itô, podemos calcular de forma explícita el generador para una función.

Teorema A.0.4. Sea X la difusión de Itô

$$dX_t = u(X_t)dt + v(X_t)dB_t$$

Si $f \in C^2$, entonces $f \in \mathcal{D}_A$ y

$$\mathcal{A}f(x) = u(x) \frac{\partial}{\partial x} f + \frac{1}{2} v^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \quad (\text{A.5})$$

Denotamos por $E^x[\cdot]$ al valor esperado con respecto a la condición inicial $x = X_0$, tenemos:

Teorema A.0.5. Para X_t una difusión de Itô,

$$E^x(f(X_t)) = f(X_0) + E^x\left(\int_0^t (u(X_s)\frac{\partial}{\partial x}f(X_s) + \frac{1}{2}v(X_s)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(X_s))ds\right) \quad (\text{A.6})$$

Teorema A.0.6 (Fórmula de Dynkin). Sea $f \in C^2$ y suponga que τ es un tiempo de paro tal que $E^x[\tau] < \infty$. Entonces

$$E^x(X_{t \wedge \tau}) = f(x) + E^x\left(\int_0^{t \wedge \tau} \mathcal{A}f(X_r)dr\right). \quad (\text{A.7})$$

En el problema de filtrado encontramos procesos de observación de la forma $dW_t = dY_t - a_t dt$, el Teorema de Girsanov nos permite caracterizar este término como un movimiento Browniano con respecto a otra medida absolutamente continua:

Teorema A.0.7 (Girsanov, [40]). Sea $X(t) \in \mathbb{R}$ un proceso de Itô de la forma

$$dX_t = -a(t)dt + dB_t, \quad t \leq T, \quad Y_0 = 0,$$

donde B_t es un movimiento Browniano en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Sea

$$M_t = \exp\left(\int_0^t a(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s)ds\right)$$

y supongamos que M es una \mathcal{F}_t -martingala con respecto a P . Definimos la medida \tilde{P} por

$$d\tilde{P}(\omega) = M_T(\omega)dP(\omega)$$

Entonces \tilde{P} es una medida de probabilidad en \mathcal{F}_t y X_t es un movimiento Browniano con respecto a \tilde{P} para $0 \leq t \leq T$.

Tomemos el caso de la ecuación (4.1): con el proceso de innovación $dW_t = dY_t - \text{Tr}[(L + L^*)\rho_s]dt$, entonces tenemos que

$$d\tilde{P} = M_t dP,$$

con

$$M_T = \exp\left(\int_0^T \text{Tr}[(L + L^*)\rho_s]dY_s - \frac{1}{2}\int_0^T \text{Tr}^2[(L + L^*)\rho_s]ds\right),$$

y bajo esta medida \tilde{P} , el Teorema de Girsanov indica que dW_t es un movimiento Browniano.

¿Cómo aseguramos que M_t sea una martingala?, una condición suficiente es la condición de Novikov:

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \text{Tr}^2[(L + L^*)\rho_s]ds\right)\right] < \infty.$$

Teorema A.0.8 (Fujisaki, Kallianpur, Kunita). Sea $h = (h_i)_{i=1}^m : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}$ una función medible tal que

$$P\left(\int_0^t \|\pi_s(h)\|^2 ds < \infty\right) = 1 \quad (\text{A.8})$$

y

$$E\left[\int_0^t \|h(X_s)\|^2 ds\right] < \infty \quad (\text{A.9})$$

Suponga que se satisfacen (A.9) (A.8). Entonces toda variable aleatoria cuadrado integrable \mathcal{Y}_∞ medible η tiene una representación de la forma

$$\eta = E[\eta] + \int_0^\infty v_s^\top dI_s, \quad (\text{A.10})$$

donde $v = \{v_t\}$ es un proceso \mathcal{Y}_t -adaptado progresivamente medible tal que

$$E\left[\int_0^\infty \|v_s\|^2 ds\right] < \infty$$

Corolario A.0.1. *Bajo las condiciones del teorema anterior, toda martingala cuadrado integrable continua por la derecha \mathcal{Y}_t -adaptada tiene una representación*

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t v^\top dI_s, \quad t \geq 0$$

A.1 Algunos resultados de estabilidad estocástica

Vamos a trabajar con una modificación de (4.1), la diferencia principal es que tendra controles que harán que las trayectorias de la solución convergan a un estado objetivo. Para demostrar que la ley de control es efectiva, necesitamos algunos resultados de estabilidad estocástica, que emplean un análogo estocástico del segundo método de Lyapunov, que es una herramienta muy poderosa para estudiar la estabilidad de sistemas no lineales en el caso determinista.

Vamos a preparar el terreno para poder avanzar en esa dirección. Las siguientes suposiciones son necesarias para los siguientes teoremas:

1. Sea X_t^z es un proceso de difusión sobre el espacio métrico \mathcal{X} con condición inicial $X_0 = z$ y \tilde{z} es una posición de equilibrio de la difusión, i.e., $\tilde{X}_t^{\tilde{z}} = \tilde{z}$.
2. El espacio de estados \mathcal{X} es un espacio métrico completo separable, y X_t^z es un proceso de Markov fuerte homogéneo sobre \mathcal{X} con trayectorias continuas.
3. $V(\cdot)$ es una función con valores reales no negativa sobre \mathcal{X} .
4. Para $\lambda > 0$, $Q_\lambda = \{X \in \mathcal{X} : V(X) < \lambda\}$ es un conjunto no vacío, y con el tiempo de paro $\tau_\lambda = \inf\{t : X_t^z \notin Q_\lambda\}$ definimos el proceso parado $\tilde{X}_t^z = X_{t \wedge \tau}^z$.

Denotamos por \mathcal{A}_λ al generador infinitesimal de \tilde{x}_t (ver el apéndice, A.0.2 para una pequeña discusión del tema), V está en el dominio de \mathcal{A}_λ . Daremos unos resultados de estabilidad de Lyapunov estocástica, en este enfoque, el estudio de propiedades cualitativas de estabilidad se infieren a a partir de $\mathcal{A}V(\tilde{x}_t)$, que es el análogo estocástico natural de la derivada determinista.

Teorema A.1.1 (Estabilidad local). *Sea $\mathcal{A}_\lambda V \leq 0$ en Q_λ . Entonces se cumple:*

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\tilde{X}_t^z)$ existe c.s., por lo que $V(X_t^z)$ converge para casi toda trayectoria que permanece en Q_λ .
2. $P\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}_\lambda V(\tilde{X}_t^z) = 0$, por lo que $\mathcal{A}_\lambda V(X_t^z) \rightarrow 0$ en probabilidad cuando $t \rightarrow \infty$ para casi todas las trayectorias que permanecen en Q_λ .
3. Para $z \in Q_\lambda$ y $\alpha \leq \lambda$ tenemos el estimado uniforme

$$P\left(\sup_{0 \leq t < \infty} V(X_t^z) \geq \lambda\right) = P\left(\sup_{0 \leq t < \infty} V(\tilde{X}_t^z) \geq \alpha\right) \leq \frac{V(z)}{\alpha}. \quad (\text{A.11})$$

4. Si $V(\tilde{z}) = 0$ y $V(x) \neq 0$ para $X \neq \tilde{z}$, entonces \tilde{z} es estable en probabilidad.

El siguiente teorema es la versión estocástica del teorema de invariancia de LaSalle:

Teorema A.1.2 (Teorema de Invariancia). *Sea $\mathcal{A}_\lambda V \leq 0$ en Q_λ . Supongamos que Q_λ tiene cerradura compacta, \tilde{X}_t^z es Feller continuo, y que $P(\|\tilde{X}_t^z - z\| > \epsilon) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$ para todo $\epsilon > 0$, uniformemente para $z \in Q_\lambda$. Entonces \tilde{X}_t^z converge en probabilidad al conjunto invariante más grande contenido en $C_\lambda = \{X \in Q_\lambda : \mathcal{A}_\lambda V(X) = 0\}$. Entonces X_t^z converge en probabilidad al conjunto invariante más grande contenido en C_λ para casi todas las trayectorias que nunca dejan Q_λ .*

El teorema de soporte que se enuncia a continuación nos servirá para utilizar técnicas de control geométrico en la ecuación diferencial estocástica:

Teorema A.1.3 (Teorema de Soporte). *Sea M una variedad C^∞ , conexa y paracompacta, y sean X_k $k = 0, \dots, n$ campos vectoriales C^∞ sobre M tal que todas las sumas lineales de X_k sean completas. Sea $X_k = \sum_l X_k^l(x)\delta_l$ en coordenadas locales y consideremos la ecuación de Stratonovich*

$$dx_t = X_0(x_t)dt + \sum_{k=1}^n X_k(x_t) \circ dW_t^k, \quad x_0 = x.$$

Consideremos además el sistema controlado determinista asociado

$$\frac{d}{dt}x_t^u = X_0(x_t^u) + \sum_{k=1}^n X_k(x_t^u)u^k(t), \quad x_0 = x,$$

con $u^k \in \mathcal{U}$, el conjunto de funciones constantes a trozos de \mathbb{R}_+ a \mathbb{R} . Entonces

$$\mathcal{J}_x = \{\overline{x^u : u \in \mathcal{U}}\} \subset \mathcal{W},$$

donde \mathcal{W}_x es el conjunto de todas las trayectorias continuas de \mathbb{R}_+ a M empezando en x , equipada con la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos, e \mathcal{J}_x es el subconjunto cerrado más pequeño en \mathcal{W}_x tal que $P(\{\omega \in \Omega : x.(\omega) \in \mathcal{J}_x\}) = 1$.

Lo que este teorema nos quiere decir, es que podemos asociar propiedades con probabilidad uno de una ecuación diferencial estocástica con una ecuación determinista asociada.

Generador de la ecuación de filtrado

Para hacer uso de técnicas de Lyapunov estocástica para la ecuación de filtrado en su forma controlada, haremos uso de la fórmula de Itô para poder calcular el generador infinitesimal de la difusión. En la literatura tradicional de cálculo estocástico, se integra un vector de procesos de Itô que se integran respecto a movimientos Brownianos independientes, sin embargo, nosotros ocupamos un proceso que es una matriz con entradas aleatorias. Veamos brevemente como se adapta la regla de Itô con esta ecuación.

Revisitemos la parte clásica. En la literatura de cálculo estocástico, tenemos a X_t un proceso estocástico n dimensional $[X_t^1, \dots, X_t^n]$ y $\{B_1(t), \dots, B_m(t)\}$ m movimientos Brownianos independientes. Los n procesos de Itô son dados por

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \sum_{j=1}^m \int_0^t f_{ij} dB_j(s) + \int_0^t g_i(s) ds, \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde $f_{ij} \in L^2(P)$ y $g_i \in L^1(P)$. Introducimos las matrices

$$B_t = \begin{bmatrix} B_t^{(1)} \\ \vdots \\ B_t^{(m)} \end{bmatrix}, \quad X_t = \begin{bmatrix} X_t^{(1)} \\ \vdots \\ X_t^{(n)} \end{bmatrix},$$

$$f_t = \begin{bmatrix} f_t^{11} & \cdots & f_t^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_t^{(n1)} & \cdots & f_t^{nm} \end{bmatrix}, \quad g_t = \begin{bmatrix} g_t^1 \\ \vdots \\ g_t^n \end{bmatrix},$$

Entonces tenemos la ecuación multidimensional

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s dB_s + \int_0^t g_s ds.$$

La fórmula de Itô se extiende en el caso multidimensional. Tomando $\theta(X_1, \dots, X_n)$ en $C^2(\mathbb{R}^n)$, la fórmula multidimensional es:

$$d\theta(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \theta(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \theta(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) dX_t^{(i)} dX_t^{(j)},$$

donde $dB_t^{(i)} dB_t^{(j)} = \delta_{i,j} dt$.

Regresando a la ecuación de filtrado, ésta tiene la forma

$$d\rho_t = \Phi(\rho_t)dt + \Theta(\rho_t)dW_t,$$

donde $\rho \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\Phi, \Theta : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ y W_t es un movimiento Browniano 1-dimensional. Para darle sentido a la fórmula de Itô, lo que hay que notar es que consideramos a ρ como un vector columna, donde cada elemento es un vector fila, es decir

$$\rho = \begin{bmatrix} [\rho_{11} \dots \rho_{1n}] \\ \vdots \\ [\rho_{n1} \dots \rho_{nn}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\rho_{11}, \dots, \rho_{n1}]^\top \\ \vdots \\ [\rho_{1n}, \dots, \rho_{nn}]^\top \end{bmatrix},$$

donde denotamos por ejemplo a $\rho_1 = [\rho_{11}, \dots, \rho_{1n}]$ y de la misma forma a Φ y a Θ ,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \{\Phi_{11}, \dots, \Phi_{1n}\} \\ \vdots \\ \{\Phi_{n1} \dots \Phi_{nn}\} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} [\Theta_{11}, \dots, \Theta_{1n}] \\ \vdots \\ [\Theta_{n1} \dots \Theta_{nn}] \end{bmatrix},$$

donde además aprovechamos que ρ , Φ y Θ son matrices simétricas y las dimensiones permiten aplicar la fórmula de Itô a los componentes (El lector puede revisar [4, p.p. 92] para una discusión más detallada).

En las demostraciones que haremos más adelante, usaremos funciones $V : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow [0, 1]$ no negativas doblemente diferenciables. entonces el generador de la difusión (ver el Apéndice para más detalles) es:

$$\mathcal{A}V(\rho) = \sum_i \Phi(\rho)_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} V(\rho) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\Theta(\rho)^2)_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial \rho_i \partial \rho_j} V(\rho), \quad (\text{A.12})$$

donde i, j iteran sobre las filas y columnas de las matrices. La derivada de $V(\rho)$ con respecto a ρ_i es la derivada de un escalar y respecto a un vector $R = [R_1, \dots, R_n]^\top$ es

$$\frac{dy}{dR} = \left[\frac{\partial y}{\partial R_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial R_n} \right]^\top.$$

Apéndice B

Demostraciones

B.1 Demostraciones del capítulo 2

Demostración del teorema 2.4.1. Como estamos hablando de proceso simples, podemos considerar a $K_t = \mathbb{1}_{[t_1, t_2]} K(t_1)$ para K algunos de los procesos E, F, G, H . Además, por aditividad del producto interno consideramos los casos donde tres de los procesos son cero.

- **Caso $\mathbf{E=F=H=0}$** Tomando la acción del operador de creación A_t^* de los operadores exponenciales (2.9)

$$\begin{aligned}
 \langle u \otimes \mathbf{e}(f), \int_0^t G_s dA_s^* v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle &= \langle u \otimes \mathbf{e}(f), G(s)(A_{t_2 \wedge t}^* - A_{t_1}^*)v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\
 &= \langle u \otimes \mathbf{e}(f), G(s) \otimes (A_{t_2 \wedge t}^* - A_{t_1}^*)v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle \\
 &= \langle u \otimes \mathbf{e}(f_{t_1}), G(t_1)v \otimes \mathbf{e}(g_{t_1}) \rangle \langle \mathbf{e}(f_{t_1}), (A_{t_2 \wedge t}^* - A_{t_1}^*)\mathbf{e}(f_{t_1}) \rangle \\
 &= \langle u \otimes \mathbf{e}(f_{t_1}), G(t_1)v \otimes \mathbf{e}(g_{t_1}) \rangle \int_{t_1}^{t \wedge t_2} \bar{f}(s) \langle \mathbf{e}(f_{t_1}), \mathbf{e}(g_{t_1}) \rangle ds \\
 &= \int_0^t \bar{f}(s) \langle u \otimes \mathbf{e}(f_{t_1}), G(t_1)v \otimes \mathbf{e}(g_{t_1}) \rangle \langle \mathbf{e}(f_{t_1}), \mathbf{e}(g_{t_1}) \rangle \\
 &= \int_0^t \langle u \otimes \mathbf{e}(f), \bar{f}(s)G_s v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle ds
 \end{aligned}$$

- **Caso $\mathbf{E=G=H=0}$** Tomando la acción de A_t sobre los vectores exponenciales (2.7) tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle u \otimes \mathbf{e}(f), \int_0^t F_s dA_s v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle &= \langle u \otimes \mathbf{e}(f_{t_1}), F(t_1)v \otimes \mathbf{e}(g_{t_1}) \rangle \langle \mathbf{e}(f_{t_1}), (A_{t_2 \wedge t} - A_{t_1})\mathbf{e}(f_{t_1}) \rangle \\
 &= \langle u \otimes \mathbf{e}(f_{t_1}), F(t_1)v \otimes \mathbf{e}(g_{t_1}) \rangle \int_{t_1}^{t \wedge t_2} g(s) \langle \mathbf{e}(f_{t_1}), \mathbf{e}(g_{t_1}) \rangle ds \\
 &= \int_0^t \langle u \otimes \mathbf{e}(f), g(s)F_s v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle ds
 \end{aligned}$$

- **Caso $\mathbf{F}=\mathbf{G}=\mathbf{H}=\mathbf{0}$** Usando (2.12)

$$\begin{aligned}
\langle u \otimes \mathbf{e}(f), \int_0^t E_s d\Lambda v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle &= \langle u \otimes \mathbf{e}(f_{[t_1]}), E(t_1)v \otimes \mathbf{e}(g_{[t_1]}) \rangle \langle \mathbf{e}(f_{[t_1]}), (\Lambda_{t_2 \wedge t} - \Lambda_{t_1})\mathbf{e}(f_{[t_1]}) \rangle \\
&= \langle u \otimes \mathbf{e}(f_{[t_1]}), E(t_1)v \otimes \mathbf{e}(g_{[t_1]}) \rangle \int_{t_1}^{t \wedge t_2} \bar{f}(s)g(s) \langle \mathbf{e}(f_{[t_1]}), \mathbf{e}(g_{[t_1]}) \rangle ds \\
&= \int_0^t \langle u \otimes \mathbf{e}(f), \bar{f}(s)g(s)F_s v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle ds
\end{aligned}$$

- Para el último caso, consideremos $T = t1$ y se sigue que

$$\langle u \otimes \mathbf{e}(f), \int_0^t H_s dT_s \mathbf{e}(g) \rangle = \int_0^t \langle u \otimes \mathbf{e}(f), H_s v \otimes \mathbf{e}(g) \rangle ds$$

□

Demostración del teorema 2.4.3. Para demostrar el teorema, tomaremos los casos separados de A , A^* , Λ y T , y se escoge β es el máximo de las números que los acotan

- Primero con el proceso de aniquilación. Usando la segunda fórmula fundamental 2.4.2 para procesos simples, con $M_1 = M_2 = \int_0^t E_s dA_s$ y $f = g \in \mathcal{E}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t E_s dA_s \mathbf{e}(f) \right\|^2 &= \int_0^t \{ \langle M(s)\mathbf{e}(f), f_s E_s \mathbf{e}(f) \rangle + \langle f_s E_s \mathbf{e}(f), M(s)\mathbf{e}(f) \rangle \} ds \\
&= \int_0^t 2\text{Re} \langle \bar{f}_s M(s)\mathbf{e}(f), E_s \mathbf{e}(f) \rangle ds
\end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 &= 2\text{Re} \langle \bar{f}_s M(s)\mathbf{e}(f), E_s \mathbf{e}(f) \rangle \\
&\leq |f(s)|^2 \|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 + \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2
\end{aligned}$$

Tomamos el factor integrante $e^{-\int_0^s |f(r)|^2 dr}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} (\|M(s)\mathbf{e}(f)\| e^{-\int_0^s |f(r)|^2 dr}) &\leq e^{-\int_0^s |f(r)|^2 dr} \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2 \\
\|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 e^{-\int_0^s |f(r)|^2 dr} &\leq \int_0^s e^{-\int_0^t |f(r)|^2 dr} \|E_t \mathbf{e}(f)\|^2 dt \\
\|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 &\leq \int_0^s e^{\int_0^t |f(r)|^2 dr} \|E_t \mathbf{e}(f)\|^2 dt \\
&\leq \int_0^s e^{\int_0^t |f(r)|^2 dr} \|E_t \mathbf{e}(f)\|^2 dt
\end{aligned}$$

Entonces en este caso $\beta_A(f, t) = e^{\int_0^t |f(s)|^2 ds}$

- Para el proceso de creación de nuevo por la segunda fórmula fundamental

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t E_s dA_s^* \mathbf{e}(f) \right\|^2 &= \int_0^t \{ \langle M(s)\mathbf{e}(f), \bar{f}_s E_s \mathbf{e}(f) \rangle + \langle \bar{f}_s E_s \mathbf{e}(f), M(s)\mathbf{e}(f) \rangle + \langle E_s \mathbf{e}(f), E_s \mathbf{e}(f) \rangle \} ds \\
&= \int_0^t \{ 2\text{Re} \langle M(s)\mathbf{e}(f), \bar{f}_s E_s \mathbf{e}(f) \rangle + \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2 \} ds
\end{aligned}$$

De nuevo por el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\frac{d}{ds} \|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 \leq |f(s)|^2 \|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 + 2\|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2$$

Y por el mismo método que en el caso anterior llegamos a

$$\|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 \leq 2e^{\int_0^s |f(s)|^2 ds} \int_0^s \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2 ds$$

y entonces $\beta_{A^*}(f, t) = 2e^{\int_0^t |f(s)|^2 ds}$.

- Para el proceso de gauge

$$\begin{aligned} \|E_s d\Lambda_s \mathbf{e}(f)\|^2 &= \int_0^t \{ \langle M(s)\mathbf{e}(f), \bar{f}f E_s \mathbf{e}(f) \rangle + \langle \bar{f}f E_s \mathbf{e}(f), M(s)\mathbf{e}(f) \rangle + |f(s)|^2 \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2 \} ds \\ &= \int_0^t \{ 2\operatorname{Re} |f(s)|^2 \langle M(s)\mathbf{e}(f), E_s \mathbf{e}(f) \rangle + |f(s)|^2 \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2 \} ds \end{aligned}$$

Nuevamente por el teorema fundamental del cálculo

$$\frac{d}{ds} \|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 \leq \|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 + (|f(s)|^2 + |f(s)|^4) \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2,$$

usando el factor integrante e^{-s}

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (e^{-s} \|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2) &\leq e^{-s} (|f(s)|^2 + |f(s)|^4) \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2 \\ e^{-t} \|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 &\leq \int_0^t e^{-s} (|f(s)|^2 + |f(s)|^4) \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2 ds \\ \|M(s)\mathbf{e}(f)\|^2 &\leq \int_0^t e^{t-s} (|f(s)|^2 + |f(s)|^4) \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2 ds \\ &\leq \int_0^t e^t (|f(s)|^2 + |f(s)|^4) \|E_s \mathbf{e}(f)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Entonces $\beta_\Lambda(f, t) = e^t \max\{|f(s)|^2 + |f(s)|^4 : 0 \leq s \leq t\}$ que es finito, ya que f es localmente acotado.

- Finalmente

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t E(s) dT(s) \mathbf{e}(f) \right\|^2 &= \left\| \int_0^t E(s) \mathbf{e}(f) ds \right\|^2 \\ &\leq \left(\int_0^t \|1 \times E(s) \mathbf{e}(f)\| ds \right)^2 \leq t \int_0^t \|E(s) \mathbf{e}(f)\|^2 ds \end{aligned}$$

con el último paso la desigualdad de Cauchy-Schwartz, entonces $\beta_T(f, t) = t$

Entonces, podemos tomar a $\beta(f, t) = \max\{\beta_{A^*}, \beta_\Lambda, \beta_T\}$ (no tomamos β_A porque $\beta_A < \beta_{A^*}$)

□

Bibliografía

- [1] Luigi Accardi, Yun Gang Lu, and Igor Volovich. *Quantum Theory and Its Stochastic Limit*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] C. Altafini and F. Ticozzi. Modeling and Control of Quantum Systems: An Introduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(8):1898–1917, 2012. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.2012.2195830.
- [3] C. Altafini, Kazunori Nishio, and Francesco Ticozzi. Stabilization of Stochastic Quantum Dynamics via Open and Closed Loop Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(1):74–85, 2012. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.2012.2206713. URL <http://dx.doi.org/10.1109/TAC.2012.2206713>.
- [4] Ludwig Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. Wiley, 1974.
- [5] Stéphane Attal. Lectures on quantum noise theory. In Preparation. URL <http://math.univ-lyon1.fr/~attal/chapters.html>.
- [6] Stéphane Attal. Approximating the fock space with the toy fock space. *Séminaire de Probabilités XXXVI*, pages 477–491, 2004.
- [7] Stéphane Attal. Elements of operator algebras and modular theory. In Stéphane Attal; Alain Joye; Claude-Alain Pillet, editor, *Open Quantum Systems I: The Hamiltonian Approach*, Lecture Notes in Mathematics, pages 69–105. Springer, 2006.
- [8] Alan Bain and Dan Crisan. *Fundamentals of stochastic filtering*, volume 3. Springer, 2009.
- [9] Viacheslav Belavkin. Non-demolition measurement and control in quantum dynamical systems. In *Information complexity and control in quantum physics*, pages 311–329. Springer, 1987.
- [10] Viacheslav P Belavkin. Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering. *Journal of Multivariate Analysis*, 42(2):171 – 201, 1992. ISSN 0047-259X. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0047-259X\(92\)90042-E](http://dx.doi.org/10.1016/0047-259X(92)90042-E). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0047259X9290042E>.
- [11] Tristan Benoist, Clément Pellegrini, and Francesco Ticozzi. Exponential stability of subspaces for quantum stochastic master equations. *arXiv preprint arXiv:1512.00732*, 2015.
- [12] Luc Bouten, Ramon Van Handel, and Matthew R. James. An introduction to quantum filtering. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(6):2199–2241, 2007. doi: 10.1137/060651239. URL <http://dx.doi.org/10.1137/060651239>.
- [13] I. Dotsenko, M. Mirrahimi, M. Brune, S. Haroche, J.-M. Raimond, and P. Rouchon. Quantum feedback by discrete quantum nondemolition measurements: Towards on-demand generation of photon-number states. *Phys. Rev. A*, 80:013805, Jul 2009. doi: 10.1103/PhysRevA.80.013805. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.013805>.

- [14] E. B. Dynkin. *Theory of Markov Processes (Dover Books on Mathematics)*. Dover Publications, 2006. ISBN 0486453057.
- [15] John Gough and Ramon van Handel. Singular perturbation of quantum stochastic differential equations with coupling through an oscillator mode. *Journal of Statistical Physics*, 127(3):575–607, 2007.
- [16] John E Gough. Principles and applications of quantum control engineering. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 370(1979):5241–5258, 2012.
- [17] P. R. Halmos. What does the spectral theorem say? *The American Mathematical Monthly*, 70(3):241–247, 1963. ISSN 00029890, 19300972. URL <http://www.jstor.org/stable/2313117>.
- [18] Paul R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Springer New York, 1974. doi: 10.1007/978-1-4612-6387-6. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-6387-6>.
- [19] Ramon Van Handel. The stability of quantum markov filters. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 12(01):153–172, 2009. doi: 10.1142/S0219025709003549. URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219025709003549>.
- [20] Serge Haroche and Jean Michel Raimond. *Exploring the quantum*. Oxford Univ. Press, 2006.
- [21] Alexander S Holevo. *Statistical structure of quantum theory*, volume 67. Springer Science & Business Media, 2001.
- [22] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy. Quantum Ito’s formula and stochastic evolutions. *Communications in Mathematical Physics*, 93(3):301–323, September 1984. ISSN 0010-3616. doi: 10.1007/BF01258530. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF01258530>.
- [23] RL Hudson. An introduction to quantum stochastic calculus and some of its applications. *Quantum Probability Communications*, XI:221–271, 2003.
- [24] M. R. James and J. E. Gough. Quantum dissipative systems and feedback control design by interconnection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(8):1806–1821, Aug 2010. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.2010.2046067.
- [25] M. R. James, H. I. Nurdin, and I. R. Petersen. H^∞ control of linear quantum stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(8):1787–1803, Sept 2008. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.2008.929378.
- [26] J.R. Johansson, P.D. Nation, and Franco Nori. Qutip 2: A python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, 184(4):1234 – 1240, 2013. ISSN 0010-4655. doi: 10.1016/j.cpc.2012.11.019. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465512003955>.
- [27] Richard Kadison. *Fundamentals of the theory of operator algebras*. American Mathematical Society, Providence, R.I, 1997. ISBN 978-0821808191.
- [28] K. Kashima and N. Yamamoto. Control of quantum systems despite feedback delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(4):876–881, April 2009. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.2008.2010969.

- [29] Gen Kimura. The bloch vector for n-level systems. *Physics Letters A*, 314(5):339–349, 2003.
- [30] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [31] H. J. Kushner. *Stochastic Stability and Control. (Mathematics in Science and Engineering Volume 33)*. WILEY-VCH Verlag, 1968. doi: 10.1002/zamm.19680480428. URL <http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19680480428>.
- [32] Seth Lloyd. Coherent quantum feedback. *Physical Review A*, 62(2):022108, 2000.
- [33] Hideo Mabuchi. Coherent-feedback quantum control with a dynamic compensator. *Phys. Rev. A*, 78:032323, Sep 2008. doi: 10.1103/PhysRevA.78.032323. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.032323>.
- [34] Henry P McKean. *Stochastic integrals*, volume 353. American Mathematical Soc., 1969.
- [35] Eugen Merzbacher. *Quantum mechanics*. Wiley, New York, 1998. ISBN 0471887021.
- [36] Paul A Meyer. *Quantum Probability for Probabilists*. Springer Science & Business Media, 1995.
- [37] M. Mirrahimi, I. Dotsenko, and P. Rouchon. Feedback generation of quantum fock states by discrete qnd measures. In *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, pages 1451–1456, Dec 2009. doi: 10.1109/CDC.2009.5399839.
- [38] Mazyar Mirrahimi and Ramon Van Handel. Stabilizing Feedback Controls for Quantum Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(2):445–467, January 2007. ISSN 0363-0129. doi: 10.1137/050644793. URL <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/050644793>.
- [39] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [40] Bernt Oksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [41] Kalyanapuram R Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [42] Clément Pellegrini. Poisson and diffusion approximation of stochastic master equations with control. *Annales Henri Poincaré*, 10(5):995–1025, 2009. ISSN 1424-0661. doi: 10.1007/s00023-009-0004-0. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00023-009-0004-0>.
- [43] Clément Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic schrödinger equation: The diffusive case. *Ann. Probab.*, 36(6):2332–2353, 11 2008. doi: 10.1214/08-AOP391. URL <http://dx.doi.org/10.1214/08-AOP391>.
- [44] I.R. Petersen and D. Dong. Quantum control theory and applications: a survey. *IET Control Theory & Applications*, 4(12):2651–2671, dec 2010. ISSN 1751-8644. doi: 10.1049/iet-cta.2009.0508. URL <http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-cta.2009.0508>.

- [45] Miklós Rédei and Stephen Jeffrey Summers. Quantum probability theory. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 38(2):390 – 417, 2007. ISSN 1355-2198. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsb.2006.05.006>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1355219807000342>. Probabilities in quantum mechanics.
- [46] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis*, volume 1. Gulf Professional Publishing, 1980.
- [47] P. Rouchon. Fidelity is a sub-martingale for discrete-time quantum filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(11):2743–2747, Nov 2011. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.2011.2161792.
- [48] Clement Sayrin, Igor Dotsenko, Xingxing Zhou, Bruno Peaudecerf, Theo Rybarczyk, Sebastien Gleyzes, Pierre Rouchon, Mazyar Mirrahimi, Hadis Amini, Michel Brune, Jean-Michel Raimond, and Serge Haroche. Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states. *Nature*, 477(7362):73–77, sep 2011. ISSN 0028-0836. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature10376>.
- [49] Masamichi Takesaki. *Theory of operator algebras I*. Springer-Verlag, New York, 1979. ISBN 978-3-540-42248-8.
- [50] Ramon Van Handel, John K Stockton, and Hideo Mabuchi. Feedback control of quantum state reduction. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 50(6):768–780, 2005. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.2005.849193.
- [51] Ramon van Handel, John K Stockton, and Hideo Mabuchi. Modelling and feedback control design for quantum state preparation. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 7(10):S179, 2005. URL <http://stacks.iop.org/1464-4266/7/i=10/a=001>.