



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE

CONTROL AUTOMÁTICO

**"Identificación de parámetros de Sistemas Hamiltonianos por medio de Primeras
Integrales"**

TESIS

Que presenta

ALEJANDRA HERNANDEZ SANCHEZ

Para obtener el Grado de

MAESTRA EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE

CONTROL AUTOMÁTICO

Director de Tesis

Dr. Alexander Semionovich Poznyak Gorbach

Ciudad de México

AGOSTO, 2018

Dedicado a

mi familia

Agradecimientos

A mis grandes maestros de la vida que siempre me enseñan con el ejemplo que están a mi lado en cada paso que doy impulsando mi camino a cosas nuevas y grandes, que siempre tuvieron palabras de aliento y amor para mí, que siempre me jalaron las orejas al ser necesario y que me hicieron saber siempre que no importara que pasara todo saldría bien al final. Los amo.

A mi familia por elección que entendieron siempre de mis ausencias, que me escucharon, consolaron y compartieron conmigo buenos momentos y muchas risas cada vez que los necesitaba.

Todo mi agradecimiento y admiración a mi asesor Dr. Alexander Poznyak Gorbach quien me tendió una mano amiga cuando más lo necesité. Gracias por todas sus enseñanzas, sus consejos, atenciones y tiempo que me dio que sin ellos no creo que hubiera sido posible este proyecto.

A todos los Doctores que me dieron clase, porque de cada uno aprendí grandes lecciones y sobre todo me enseñaron con el ejemplo que si vives tu pasión todo es más fácil y sencillo y que la vida es mejor.

Al CONACYT por sustentar mis estudios a través de la beca y permitirme estar en la maestría.

Gracias a DIOS por que me dejo llegar hasta aquí, por la gran fortaleza interna que me dio para lograr todas mis metas y crecer con todas las pruebas que se me pusieron en el camino.

Abstract

In the present work it is affront the problem of parametric identification for Hamiltonian Systems, employing the trajectories for the system and formulating the problem as stabilization of function named as First Integrals of Hamiltonian System, which are functions that belongs constant through the trajectory of the system.

Approach this as an optimization problem minimizing the time variation of this functions employing the gradient method and the sliding mode. It is including in the work the convergence analysis of both methods.

The implementation of these methods is done in three different examples where the parameters participate in both linear and non-linear ways and which can participate in the definition of the generalized impulse. These experimentations were developed by simulations in MATLAB-SIMULINK[®].

Resumen

En el presente trabajo se afronta la problemática de la identificación paramétrica para Sistemas Hamiltonianos, empleando las trayectorias del sistema, estimados de sus derivadas y planteando el problema como la estabilización de funciones conocidas como Primeras Integrales de Sistemas Hamiltonianos, las cuales son funciones que permanecen constante a través de las trayectorias del sistema.

Se aborda esto como un problema de optimización minimizando la variación de estas funciones con respecto al tiempo empleando el método del gradiente y el enfoque de modos deslizantes. Se incluyen en el trabajo los análisis de convergencia de ambos métodos.

La implementación de estos métodos se realiza en diversos ejemplos donde los parámetros participan de forma tanto lineal como no lineal y los cuales pueden llegar a participar en la definición del impulso generalizado. Estas experimentaciones se realizaron por medio de simulaciones en MATLAB-SIMULINK[®].

Contents

Contents	iv
Contents of figures	vii
Introducción	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Planteamiento	3
1.3 Justificación	4
1.4 Objetivos	5
1.5 Estructura de la tesis	6
2 Marco Teórico	7
2.1 Enfoque Lagrangiano	7
2.1.1 Ecuación de Lagrange	7
2.2 Transformación de Legendre	8
2.3 Formato Hamiltoniano	9
2.3.1 Función Hamiltoniana	9
2.3.2 Ecuaciones Canónicas Hamiltonianas	10
2.4 Parámetros desconocidos en las ecuaciones dinámicas	10

2.5	Optimización	11
2.5.1	Método del gradiente	12
2.6	Modos deslizantes	13
2.7	Función signo y tangente hiperbólica	13
2.7.1	Signo	13
2.7.2	Tangente hiperbólica	14
2.7.3	Filtro pasa baja	15
3	Identificación de sistemas Hamiltonianos	16
3.1	Formulación del problema	17
3.2	Primeras Integrales	18
3.2.1	Definición de Primeras Integrales	18
3.2.2	Caracterización de primeras integrales por la estructura del Hamiltoniano	20
3.3	Identificación como estabilización	21
3.3.1	Derivada de una Primera Integral	22
3.3.2	Ejemplo ilustrativo	23
3.4	Estabilización como optimización	23
3.4.1	Optimizadores diferenciales	24
3.4.2	Convergencia del procedimiento	26
3.5	Reducción de chattering	28
3.6	Observador de Super-twist para la estimación en línea de $\dot{q}(t \alpha^*)$ y $\dot{p}(t \alpha^*)$...	29
3.7	Estimador diferenciador de Euler	30
4	Procedimientos numéricos	32

4.1	Ejemplo 1	32
4.2	Ejemplo 2	38
4.3	Ejemplo 3	45
5	Conclusiones	54
5.1	Trabajos a futuro	54
6	Anexo I	56
	Bibliografía	58

Contents of figures

2.1	Función signo vs Tangente hiperbólica	14
3.2	Diagrama de fase	19
3.3	Identificación como estabilización	22
3.4	La función $\sigma(t, u)$	24
4.5	Sistema mecánico	32
4.6	$Q(\theta, r)$	34
4.7	Dinámica de $x(t)$ y $p_x(t)$	36
4.8	Dinámica de $\phi(t)$ y $p_\phi(t)$	37
4.9	$H(q, p \alpha^*)$ vs $H(q, p \alpha)$	38
4.10	Identificación de θ	39
4.11	Identificación de r	40
4.12	$H(q, p)$	41
4.13	Circuito eléctrico	41
4.14	$Q(c_0, L_1)$	42
4.15	q_1 y p_1	44
4.16	q_2 y p_2	45
4.17	$H(q, p \alpha^*)$ vs $H(q, p \alpha)$	46

4.18	c_0 –convergencia	47
4.19	L_1 –convergencia	48
4.20	$H(q, p \alpha)$ –Hamiltoniano	49
4.21	$\varphi(c_0, L_1)$	50
4.22	p_1 –Estimación de impulso generalizado	50
4.23	q_1 y p_1 Q1IA	51
4.24	q_1 y p_1	51
4.25	q_3 y p_3	52
4.26	$H(q, p \alpha^*)$ vs $H(q, p \alpha)$	52
4.27	a –Estimación	53
4.28	Dinamica de $H(q, p \alpha)$	53

Introducción

Actualmente existen diversos enfoques por medio de los cuales se puede analizar la dinámica de sistemas, entre ellos destaca el enfoque Hamiltoniano el cual tiene relación con la función de Lagrange, dadas las características de este enfoque se pueden describir y estudiar diversas propiedades especiales de los denominados Sistemas Hamiltonianos (SH). Uno de los atributos más remarcados de esta representación es la existencia de funciones conocidas como Primeras Integrales (PI), las cuales tienen como característica fundamental ser funciones algebraicas que dependen de las trayectorias del sistema y los parámetros del sistema analíticamente, con las cuales se puede llegar a delimitar la dinámica del SH y deducir diversos comportamientos del mismo como en diversos ejemplos estudiados en [1, 2].

1.1 Antecedentes

A través de los años hasta la actualidad se han desarrollado una extensa teoría sobre Sistemas Electromecánicos, los cuales son todo sistema donde participe la electricidad y la mecánica, sobre los cuales se han llegado a escribir diversas obras [1, 3, 4]. Esta teoría ha servido como base para el desarrollo de trabajos científicos en diversos campos [5, 6, 7]. En los cuales se resalta la necesidad del desarrollo de teoría y metodologías que faciliten el estudio de la dinámica de los sistemas.

La dinámica de los Sistemas Electromecánicos puede ser obtenida mediante diversos enfoques [1, 4]. Entre los cuales se resalta el enfoque Lagrangiano con el cual es posible

determinar la dinámica de diversos sistemas por el solo empleo de una función, que es la diferencia de energía cinética menos la energía potencial, conocida como función de Lagrange. Esto ha hecho posible estudiar las características y los comportamientos de los sistemas mediante diferentes técnicas para el desarrollo de diversas investigaciones [10, 12].

A pesar de ser de gran ayuda el enfoque Lagrangiano la dinámica se presenta como un conjunto de n ecuaciones de segundo orden por lo cual su estudio puede llegar a ser algo complicado, dado que se debe de resolver las ecuaciones diferenciales empleando diversas técnicas. Es por ello por lo que se recurre al enfoque Hamiltoniano, el cual es un enfoque matemático que como ya dijimos parte de la función de Lagrange. Este enfoque ha sido ampliamente estudiado [1, 2, 8]. La dinámica que se obtiene mediante este enfoque se presenta por un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden también conocidas como SH con las cuales se ha podido estudiar el comportamiento de los sistemas y desarrollar miles de trabajos en diferentes ámbitos [13, 14, 15].

Tanto en la investigación como en la práctica es de gran utilidad el conocimiento de los parámetros para la toma de decisiones y para el desarrollo de diversos proyectos por lo cual es que se han dedicado una enorme cantidad de trabajos en el desarrollo de metodologías para la estimación de parámetros de los sistemas, los cuales se pueden llegar a clasificar por: el modelo a estimar, las señales que emplean para la tarea y el criterio en el que se basan. En el trabajo [11] se presenta un resumen y una clasificación general de diversos métodos para la estimación de parámetros de sistemas. También dentro del trabajo hace mención sobre la estimación de parámetros que participan tanto de forma lineal y no

lineal dentro de la dinámica del sistema. Muchos de los métodos para la estimación de parámetros de forma no lineal se basan en señales de error y en linealizaciones del sistema [11, 17, 18, 19]. Para sistemas con parámetros que participan de forma no lineal en la dinámica del sistema se han implementado enfoques como mínimos cuadrados no lineales, redes neuronales y gradiente basado en algoritmos [46, 50, 51, 52]. En el caso del algoritmo de mínimo cuadrado no lineal no se puede llevar a cabo la tarea si la función empleada no presenta múltiples mínimos locales.

Actualmente se han desarrollado trabajos en la estimación de primeras Integrales de SH por variaciones paramétricas enfocado a trabajos químicos, pero a partir del conocimiento de otra primera Integral [16].

1.2 Planteamiento

Los SH pueden llegar a representar una gran diversidad de sistemas para fines prácticos y teóricos con diversas dinámicas tanto lineales como no lineales. En este marco se tiene la problemática de la estimación de parámetros ya sea para cualquier sistema como para SH y a pesar de que a través de los años se han realizados diversos trabajos para la resolución de este problema, aun concretamente para SH, no se han logrado desarrollar técnicas que aprovechen las características y propiedades de este enfoque.

Es necesario el desarrollo de metodologías que exploten las características que brindan los SH para una mayor obtención de información sobre estos con la menor cantidad de datos sobre estos. En este trabajo consideramos una propiedad importante de este tipo de sistema que es la existencia de funciones algebraicas que permiten en muchos casos

delimitar la dinámica del sistema, este tipo de funciones son conocidas como Primeras Integrales(PI) de los SH las cuales han sido ampliamente estudiadas [1, 2], al considerar esta propiedad convertimos el problema de estimación de parámetros en un problema de estabilización el cual se propuso resolverlo mediante un enfoque de optimización que ha sido empleado en diversos trabajos.[48, 49].

1.3 Justificación

Los SH dados sus propiedades y comportamientos son un objeto matemático ampliamente abordados desde diferentes campos de estudio, como: Química, Mecánica, Matemáticas, Mecánica cuántica, Mecánica celestial, Control Optimo, etc.[43, 1, 42, 30, 45, 44]. Campos en los cuales se han llevado a cabo diversos avances mediante el empleo de esta herramienta matemática.

Actualmente existen diversos métodos que pueden ser implementados para la identificación de sistemas Hamiltonianos que toman a consideración la estructura del sistema [19, 17, 11], dejando de lado sus propiedades. A pesar de esto existen SH cuyos parámetros participan dentro de la dinámica de una manera no lineal en los cuales métodos como el mínimos cuadrado no lineal no pueden llevar a cabo la identificación del sistema debido a la presencia de múltiples mínimos locales [46], y el uso de redes neuronales no pueden ser empleados para la identificación cuando en algún sistema Hamiltoniano no se tiene analíticamente una relación entrada salida como por ejemplo en mecánica celestial [53, 45].

Actualmente la importancia de las PI radica en su uso para determinar algunas características de los sistemas [2]. Un uso práctico ha sido desde un enfoque químico además de

que se busca definir nuevas PI a partir del conocimiento de una previamente y la variación de parámetros [9]. También se emplean para determinar la integralidad de un sistema e identificar osciladores no lineales mediante linealizaciones [54].

En el presente trabajo se propone la identificación de SH considerando las propiedades de las PI y a bordando el problema como estabilización de estas planteando un problema de optimización.

1.4 Objetivos

- Introducir la teoría fundamental del enfoque Lagrangiano y su relación con los SH.
De igual manera incluir la teoría que fundamenta las propiedades de las PI
- Estabilizar el valor de las PI de SH al reducir la variación de estas a través del tiempo por medio de la identificación de parámetros.
- Emplear las características de las PI de SH para definir un algoritmo capaz de estimar sus parámetros sin considerar la estructura del sistema y el cual sea aplicable a sistemas donde los parámetros participen de forma lineal y no lineal dentro de la dinámica del sistema.
- Realizar una estimación en línea del impulso generalizado cuando se desconocen los parámetros que participen en su definición para dinámica acotadas.

1.5 Estructura de la tesis

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente forma:

- En el capítulo 2 se encuentra descrita toda la teoría que define a los SH en que se parte del enfoque Lagrangiano al igual que algunos conceptos relacionados con optimización y modos deslizantes.
- En el capítulo 3 se da una formulación completa del problema, junto con descripción de PI de SH al igual que sus propiedades, las diversas estructuras que se pueden encontrar en las mismas integrales. Se define el enfoque de optimización en que se basa este trabajo y también se presentan los análisis de convergencia por Lyapunov de los métodos propuestos y una proposición para la reducción de chattering presentado por los algoritmos propuestos.
- En el capítulo 4 se aborda la problemática de la identificación de parámetros en un sistema mecánico, un circuito eléctrico y un problema propuesto, partiendo de la obtención de sus representaciones por sistemas Hamiltonianos a partir de la función de Lagrange. Se presentan los resultados obtenidos de la implementación de los algoritmos de identificación de parámetros sobre estos casos desarrollados en MATLAB-SIMULINK[®] y un comentario sobre los mismos.
- En el capítulo 5 se resumen los resultados obtenidos tras las experimentaciones, así como las implicaciones del trabajo y los futuros trabajos a desarrollar.

Chapter 2

Marco Teórico

2.1 Enfoque Lagrangiano

Función de Lagrange

En este enfoque se toma como punto de partida la definición del vector de coordenadas generalizadas $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))^T$, que son el conjunto de n -tuplas por medio de las cuales se describe de manera única la posición de una partícula y que tiene una correspondencia con los grados de libertad del sistema que se quiera estudiar en el tiempo $t \geq 0$. Ejemplos de estas son: las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas [29, 1]. Con estas coordenadas generalizadas $q(t)$ es posible describir según sea el caso de estudio la energía cinética $T(q(t), \dot{q}(t), t)$ y la energía potencial $V(q(t), t)$ de una partícula. La función de Lagrange o Lagrangiano se define como la diferencia de energía potencial y cinética de un sistema y se da por la siguiente expresión:

$$L(q(t), \dot{q}(t), t) := T(q(t), \dot{q}(t), t) - V(q(t), t) \quad (2.1)$$

2.1.1 Ecuación de Lagrange

La descripción de modelos dinámicos para una amplia clase de sistemas electromecánicos está dada por la clásica ecuación de Lagrange la cual se deduce de 2.1 y está dada por la

siguiente expresión

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(q(t), \dot{q}(t), t) \\ = Q_{i, no-potencial}(q(t), \dot{q}(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Donde $Q_{i, no-potencial}(q(t), \dot{q}(t), t)$ es la fuerza generalizada no potencial actuando sobre la i -ésima coordenada ($i = \overline{1, n}$).

En lo subsecuente se considerará la clase de *sistemas conservativos*[1] solamente, donde la participación de las fuerzas no potenciales es nula para todo $i = \overline{1, n}$ y todo $t \geq 0$, lo cual se expresa como

$$Q_{i, no-potencial}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

Teniendo de esta manera las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0 \quad (2.3)$$

2.2 Transformación de Legendre

Se define como transformación de Legendre a la relación existente entre una función convexa y su dominio con su conjugado de Legendre el cual es otra función convexa con su correspondiente dominio [38, 39, 40, 41], lo cual se expresa como:

$$(f, x) \rightarrow (g, y)$$

Donde $f, g \in C^0$, convexas y x, y sus respectivos dominios.

La transformación de Legendre está dada definiendo y el dominio conjugado de x , como el valor de la pendiente de la función f con respecto a la variable x :

$$y(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (2.4)$$

Esta definición solo es posible si se define al primer argumento x en función del dominio conjugado y lo cual se expresa como:

$$x = x(y)$$

y con esto la relación con la función conjugada g se obtiene a partir de:

$$g(y) := [(y, x) - f(x)]_{x=x(y)} \quad (2.5)$$

Esta transformación es involutiva por lo que

$$(f, x) \leftrightarrow (g, y)$$

o equivalentemente

$$y = y(x)$$

$$f := [(x, y) - g(y)]_{y=y(x)}$$

En consecuencia, se puede volver a la función $f(y)$ inicial a partir de $g(x)$.

2.3 Formato Hamiltoniano

2.3.1 Función Hamiltoniana

Dada la transformación de Legendre, aplicada a la función de Lagrange 2.1 con respecto a $\dot{q}(t)$ se define su variable conjugada como:

$$p_i(t) := \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q(t), \dot{q}(t), t), \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2.6)$$

llamado impulso generalizado. Por medio de esta variable se pone $\dot{q}(t)$ en función de las coordenadas generalizadas, el impulso generalizado y el tiempo, lo cual se expresa como:

$$\dot{q} = \dot{q}(q(t), p(t), t)$$

Con esto y la relación (2.5) se define la función del Hamiltoniano como:

$$H(q(t), p(t), t) := [p^\top(t) \dot{q} - L(q(t), \dot{q}, t)]_{\dot{q}=\dot{q}(q(t), p(t), t)} \quad (2.7)$$

Dado que la transformación de Legendre es involutiva es posible definir el Lagrangiano

2.1 en función del Hamiltoniano por medio de la siguiente expresión :

$$L(q(t), \dot{q}, t) := [p^\top(t) \dot{q} - H(q(t), p(t), t)]_{p=p(q(t), \dot{q}(t), t)} \quad (2.8)$$

2.3.2 Ecuaciones Canónicas Hamiltonianas

De (2.3) y (2.6) directamente sigue que las coordenadas generalizadas e impulso satisfacen las llamadas *ecuaciones Hamiltonianas canónicas*,

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial}{\partial p_i} H(q(t), p(t), t) \\ \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial}{\partial q_i} H(q(t), p(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Las cuales son $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden que describen la dinámica del sistema y que están en función del Hamiltoniano 2.7.

2.4 Parámetros desconocidos en las ecuaciones dinámicas

Suponiendo que la energía cinética $T(q(t), \dot{q}(t), t)$ al igual que la energía potencial $V(q(t), t)$ dependen de un vector $\alpha^* \in \mathbb{R}^r$ de parámetros desconocidos, definiéndolos como:

$$T = T(q(t), \dot{q}(t), t | \alpha^*), \quad V = V(q(t), t | \alpha^*)$$

con lo cual se implica que la función de Lagrange $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ (2.1) y la función del Hamiltoniano correspondiente $H(q(t), p(t), t)$ (2.7) están en función de α^* , i.e.,

$$L = L(q(t), \dot{q}(t), t|\alpha^*), \quad H = H(q(t), p(t), t|\alpha^*)$$

En vista de esto las ecuaciones diferenciales (2.9), las coordenadas e impulsos generalizados también dependen de estos parámetros desconocidos α^* :

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i(t|\alpha^*) &= \frac{\partial}{\partial p_i} H(q(t|\alpha^*), p(t|\alpha^*), t|\alpha^*) \\ \dot{p}_i(t|\alpha^*) &= -\frac{\partial}{\partial q_i} H(q(t|\alpha^*), p(t|\alpha^*), t|\alpha^*) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

2.5 Optimización

La optimización es en esencia encontrar el valor x^* que de la mejor solución a problemas del tipo:

$$f(x) \rightarrow \min_x$$

Con lo que x^* debe ser tal que se satisfaga

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (2.11)$$

Para todo $x \neq x^*$. Si x^* satisface 2.11 se le considera un mínimo local. En caso de que la desigualdad sea estricta $f(x^*) < f(x)$ entonces x^* es un mínimo global.

Buscando dar solución a este tipo de problemas se hace empleo de las siguientes condiciones necesarias de optimalidad [30, 31, 32]:

- **Condición necesaria de primer orden:** Sea x^* un mínimo local sin restricciones de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, considerando que f es continuamente diferenciable. Entonces

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad (2.12)$$

- **Condición necesaria de segundo orden:** Si además f es dos veces continuamente diferenciable entonces

$$\nabla^* f(x^*) \geq 0 \quad (2.13)$$

Tomando esto a consideración se han desarrollado muchos procedimientos numéricos para la solución de este problema [30, 31, 32].

2.5.1 Método del gradiente

Entre los métodos numéricos existentes para la optimización se encuentran los llamados de descenso que se han empleado en diversos trabajos [33, 34, 35, 36]. Estos métodos buscan por medio de sucesiones acercarse lo más posible a x^* en cada iteración mediante la selección de la dirección de x hacia x^* .

$$\dot{x} = -\gamma d$$

Donde d es la dirección de descenso.

Entre los algoritmos de descenso se encuentra el conocido método del gradiente o de máximo descenso. El cual es un método de primer orden [37], donde la dirección de máximo descenso está dada por:

$$d = -\nabla f(x) \quad (2.14)$$

2.6 Modos deslizantes

También se puede llevar a cabo la optimización por medio diversos métodos [48, 49]. Entre ellos está el empleo de modos deslizantes. El cuál es el termino empleado para describir el desplazamiento del estado de un sistema sobre una superficie discontinua o la intersección de superficies discontinuas [26], definidas como:

$$S_i(t, x) = 0 \quad S_i(t, x) \in \mathbb{R}^1 \quad i : 1, \dots, m$$

Para lograr esto se hace empleo de controles discontinuos definidos en general por la relación

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+(t, x) & \text{si } S_i(t, x) > 0 \\ u_i^-(t, x) & \text{si } S_i(t, x) < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Donde $S_i(t, x)$ es la condición de cambio o switcheo, la cual debe ser tal que se asegure la existencia de un modo deslizante lo cual sucede si la distancia hacia la superficie y la velocidad de cambio sean de signo opuesto lo cual se expresa:

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{S} > 0 \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{S} < 0$$

O equivalentemente

$$(S)(\dot{S}) < 0 \quad (2.16)$$

para todo $t > 0$.

2.7 Función signo y tangente hiperbólica

2.7.1 Signo

La función *signo* se define como:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

cuyo dominio esta dado por $D = (-\infty, \infty)$ y su imagen $I \in [-1, 1]$ [27, 28, 29].

Esta función está ilustrada en la Fig.2.1. Dada la definición de la función $\text{sign}(0) \in [-1, 1]$

como tal no se le da un valor específico si no que su valor se encuentra contenido en $[-1, 1]$.

2.7.2 Tangente hiperbólica

La función tangente hiperbólica se define como:

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} \dots \\ &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{aligned}$$

cuyo dominio esta dado por $D = (-\infty, \infty)$ y su imagen $I = [-1, 1]$ [24, 25]. Esta función se ilustra en la Fig. 2.1. La función de tangente hiperbólica a diferencia de la función *signo* entre -1 y 1 tiene un comportamiento lineal por lo que alrededor de cero es una función más suave. Esta observación es visible en la Fig.2.1.

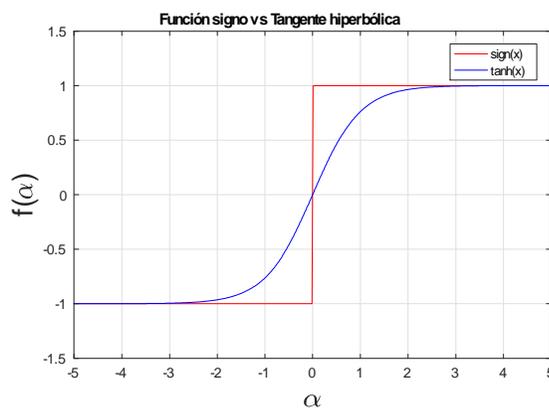


Fig. 2.1. Función signo vs Tangente hiperbólica

2.7.3 Filtro pasa baja

Entre algunas de las opciones que se pueden implementar practicamente para la reducción de chattering es el empleo de filtro pasa baja[56]. Los cuales son filtros que no permiten el paso a frecuencias mayores a las de su frecuencia de corte. Esto ya a sido empleado en controladores por modos deslizantes.

Chapter 3

Identificación de sistemas Hamiltonianos

La identificación de sistemas Hamiltonianos(SH), de acuerdo con la definición dada por Norton en [17] y la definición de SH, es el proceso de construir un modelo matemático de un sistema dinámico, mecánico y conservativo desde observaciones y un conocimiento previo del sistema.

Lo cual consiste en definir un algoritmo que determine por algún criterio el vector de parámetros $\alpha \in \mathbb{R}^r$ por medio de la medición de las coordenadas generalizadas $q(t|\alpha^*)$, el conocimiento de algunos parámetros del sistema y del Hamiltoniano H correspondiente.

Para llevar a cabo esto se han implementado diferentes propuestas [18, 19] donde la gran mayoría considera la estructura del sistema o llevan a cabo linealizaciones del sistema. Por lo que en muchos casos es difícil de realizar la identificación de SH ya que los parámetros pueden participar de forma no lineal en estos haciendo infructuosas muchas técnicas desarrolladas actualmente [46, 50, 51, 52].

Otra cuestión que se toma en cuenta es el hecho que el impulso generalizado es una variable matemática, por lo que es necesario tomarlo a consideración para la formulación de una solución para los casos en que esta variable dependa del vector de parámetros desconocidos.

3.1 Formulación del problema

Basado en las mediciones en línea de las coordenadas generalizadas $q(t|\alpha^*)$ (suponiendo que estas mediciones son exactas) del SH con Hamiltoniano $H = H(q, p, t)$ se requiere diseñar el procedimiento numérico que estime el vector de parámetros $\alpha(t) \in \mathbb{R}^r$ que es *asintóticamente consistente*, que satisface

$$\alpha(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \alpha^*$$

Para resolver exitosamente este problema se tiene que resolver los siguientes subproblemas:

1. Para cada dinámica medible $q(t|\alpha^*)$ obtener estimados en línea de $\dot{q}(t|\alpha^*)$ denominado $\hat{\dot{q}}(t|\alpha^*)$.
2. Usando $q(t|\alpha^*)$ y obteniendo los estimados $\hat{\dot{q}}(t|\alpha^*)$ diseñar los estimados en línea $\hat{p}(t|\alpha^*)$ y $\hat{\dot{p}}(t|\alpha^*)$ de $p(t|\alpha^*)$ y $\dot{p}(t|\alpha^*)$, respectivamente cuando estos no dependan del vector de parámetros desconocidos analíticamente.

Cabe resaltar que el vector α^* de parámetros desconocidos puede participar en las ecuaciones canónicas (3.33) en una manera extremadamente no lineal. Entonces, para muchos casos la aplicación directa del Método de Mínimos Cuadrados (o sus modificaciones) [46, 50, 51, 52] es imposible que genere algún resultado, generando así un nuevo desafío para los investigadores y los ingenieros prácticos, requiriendo el diseño de algunos métodos específicos (procedimientos numéricos) para la identificación exitosa del vector de parámetros desconocido α^* .

3.2 Primeras Integrales

Los SH dada su estructura tiene diferentes propiedades que son de ayuda para determinar características asociadas a estos [1, 2, 8]. Entre estas propiedades esta la existencia de funciones algebraicas llamadas *Primeras Integrales*.

3.2.1 Definición de Primeras Integrales

Si una función $f(t, q, p)$, permanece constante en las trayectorias del SH (2.9), se dice que es *Primera Integral del sistema* [1, 2, 8]. La siguiente propiedad caracteriza la clase de las primeras integrales.

Lema 1 *Una función $f(t, q, p)$ es la Primera integral del Sistema Hamiltoniano 2.9 con el Hamiltoniano H si y sólo si su derivada con respecto al tiempo es cero o como se expresa en la siguiente ecuación*

$$\frac{\partial f(t, q(t), p(t))}{\partial t} + [f, H] = 0 \quad (3.17)$$

donde $[f, H]$ se conoce como *Paréntesis de Poison* y se define por

$$[f, H] := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (3.18)$$

Otra de las características de las primeras integrales es que al ser expresiones algebraicas es posible por medio de estas poner una de las variables en función del resto de estas por lo que al tener $n - 1$ primeras integrales se le da solución al sistema y es posible deducir más información del Sistema Hamiltoniano [2].

Para ilustrar esto se toma el caso del péndulo estándar cuyo Hamiltoniano, que se plantea en la referencia [2], está dado por

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2(l)^2} + mgl(1 - \cos(q)) - \frac{1}{2}(\nu l)^2 \sin^2(q) \quad (3.19)$$

Dado que 3.19 no depende del tiempo es una Primera Integral del sistema Hamiltoniano correspondiente. Suponiendo que se tiene conocimiento de todos los parámetros y del valor del Hamiltoniano es posible dejar el impulso generalizado en función de las coordenadas generalizadas dado que es una expresión algebraica, cuya expresión sería:

$$p(t) = \sqrt{2l^2 \left[H(q, p) - mgl(1 - \cos(q)) + \frac{1}{2}\nu^2 l^2 \sin^2(q) \right]} \quad (3.20)$$

Por medio de esta expresión se obtuvo el diagrama de fase que se muestra en la Fig. 3.2 con lo que se comprueba que se le da solución al sistema Hamiltoniano correspondiente.

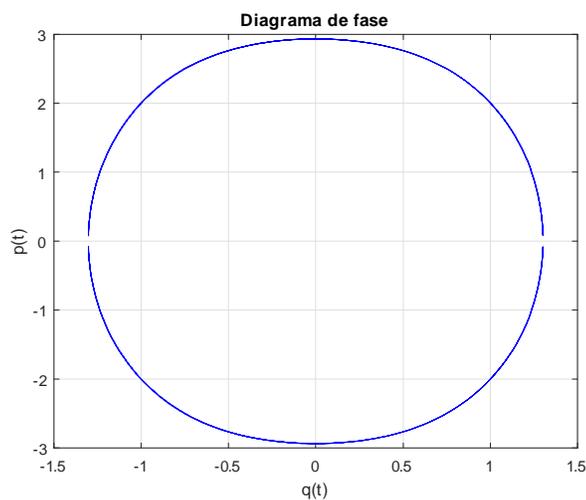


Fig. 3.2. Diagrama de fase

3.2.2 Caracterización de primeras integrales por la estructura del Hamiltoniano

Considerando la propiedad (3.17) (usando el método simple de inspección), tomando $\phi(t)$, $f, \varphi \in C^0$, es sencillo encontrar que las siguientes funciones son primeras integrales:

1. Existen variables cíclicas dentro del Hamiltoniano, con $i = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} = 0 \Rightarrow q_i = \text{const}_t \\ p_i &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{const}_t \end{aligned} \quad (3.21)$$

2. El Hamiltoniano es independiente del tiempo

$$\frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{const}_t \quad (3.22)$$

3. Una función implícita en el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= H(f(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m), q_{m+1}, p_{m+1}, \dots, q_n, p_n, t) \\ &\Rightarrow f(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m) = \text{const}_t \end{aligned} \quad (3.23)$$

4. Una función implícita en el Hamiltoniano cuyos argumentos son la coordenada y su correspondiente impulso generalizado

$$H = H(\varphi_1(q_1, p_1), \dots, \varphi_n(q_n, p_n), t) \Rightarrow \varphi_i(q_i, p_i) = \text{const}_t \quad (3.24)$$

5. Una primera integral dentro de otra primera integral (Estructura Antena)

$$\begin{aligned} H &= H(\varphi_j(\dots \varphi_2(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2) \dots), q_{j+1}, p_{j+1}, \dots, q_n, p_n, t) \\ &\Rightarrow \varphi_k(\dots \varphi_2(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2) \dots, q_k, p_k) = \text{const}_t \end{aligned} \quad (3.25)$$

6. Cociente de funciones distintas

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(q_i, p_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_i(q_i, p_i)} \Rightarrow f_i(q_i, p_i) - H \varphi_i(q_i, p_i) = \text{const}_t \quad (3.26)$$

7. Ecuación de Hamilton variante en el tiempo

$$H = \phi(t) \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(q_i, p_i)}{\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(q_i, p_i)} \Rightarrow f_i(q_i, p_i) = \text{const}_t \quad (3.27)$$

8. La suma de primeras Integrales

$$H = \sum_{i=1}^n f_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \Rightarrow \sum_{i=1}^n f_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \text{const}_t \quad (3.28)$$

Donde $f_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \neq f_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ para todo $i \neq j$.

9. La multiplicación de primeras Integrales

$$H = \prod_{i=1}^n f_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \Rightarrow \prod_{i=1}^n f_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \text{const}_t \quad (3.29)$$

Donde $f_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \neq f_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ para todo $i \neq j$.

3.3 Identificación como estabilización

Al tener un caso con parámetros desconocidos estos participan analíticamente en cualquier primer integral $f(t, q, p|\alpha)$, donde pueden participar tanto de una forma lineal como no lineal, y llegar a casos donde no sea posible linealizar el parámetro de alguna manera dentro de la función.

Es importante considerar, lo antes mencionando, de que las trayectorias medibles del sistema dependen del valor real del vector de parámetros desconocidos α^* y por consiguiente sus estimados también, i.e., $q = q(t|\alpha^*)$ y $p = p(t|\alpha^*)$. Esto significa que

$$f(t, q(t|\alpha^*), p(t|\alpha^*)|\alpha) = \text{const}_t \quad (3.30)$$

si $\alpha = \alpha^*$.

Dicho de otra forma, para identificar un vector de parámetros desconocidos $\alpha \in \mathbb{R}^r$ se toma en cuenta la condición (3.30), considerando el vector de parámetros α como una acción de control, la cual se intenta seleccionar para estabilizar la función $f(t, q(t|\alpha^*), p(t|\alpha^*)|\alpha)$ y que así esta sea una primera integral del sistema Hamiltoniano correspondiente. Tal como se ilustra en la Fig.[3.3].

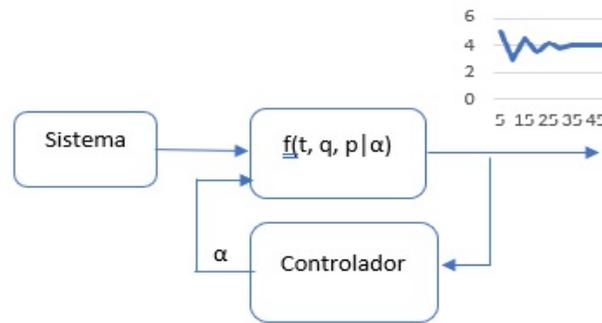


Fig. 3.3. Identificación como estabilización

3.3.1 Derivada de una Primera Integral

Dado que es bien sabido que la derivada de una función constante es cero [20] la condición (3.30) puede ser expresada como:

$$\sigma(t, \alpha) := \frac{d}{dt} f(t, q(t|\alpha^*), p(t|\alpha^*)|\alpha) = 0 \quad (3.31)$$

si $\alpha = \alpha^*$. Donde $\sigma(t, \alpha) \in \mathbb{R}^r$ es la condición de una primera integral (3.17).

Entonces, la condición de estabilidad (3.30) puede ser interpretada como una acción de control diseñando $u \in \mathbb{R}^r$, proporcionando la propiedad σ de estabilización

$$\sigma(t, u) = 0 \quad (3.32)$$

para todo $t \geq 0$.

3.3.2 Ejemplo ilustrativo

Para ilustrar la propiedad (3.31), se consideró de nuevo el caso del péndulo estándar y cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{p}{\alpha^{*2}} \\ \dot{p} &= -mg\alpha^* \sin(q) + (\nu\alpha^*)^2 \sin(q) \cos(q)\end{aligned}\tag{3.33}$$

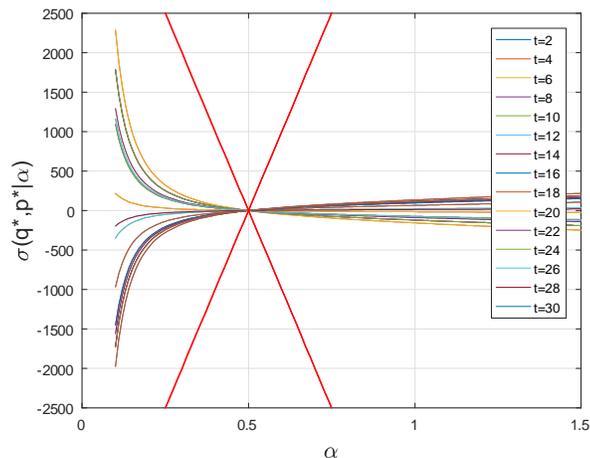
Donde $r = n = 1$, $\alpha^* = l$ lo que corresponde al largo de la cuerda del péndulo y cuyo Hamiltoniano correspondiente está dado por (3.19). Cuya condición (3.31) se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\sigma(t, u) &= \frac{p}{u} \dot{p} + [mgu \sin(q) - (\nu u)^2 \sin(q) \cos(q)] \dot{q} \\ &= -\frac{p}{u^2} \frac{\partial H}{\partial q} + [mgu \sin(q) - (\nu u)^2 \sin(q) \cos(q)] \frac{\partial H}{\partial p} \\ &= -\frac{p}{u^2} [mg\alpha^* \sin(q) - (\nu\alpha^*)^2 \sin(q) \cos(q)] + \dots \\ &= \dots [mgu \sin(q) - (\nu u)^2 \sin(q) \cos(q)] \frac{p}{\alpha^{*2}} \\ &= p \left(\frac{u^2 - \alpha^{*2}}{l^2 u^2} \right) [mg \sin(q) (\alpha^* + u) - (\alpha^{*2} + u^2) \nu^2 \sin(q) \cos(q)] \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.34}$$

sí $u = \alpha^*$.

Para los valores numéricos $\alpha^* = 0.5$ la función $\sigma(t, u)$ se muestra en la Figura.3.4 para diferentes tiempos $t = t_k$. Donde se puede observar que $\sigma(t, u) = 0$ si y solo si $u = \alpha^* = 0.5$ y donde se tiene un cono que contiene los valores de $\sigma(t_k, u)$.

3.4 Estabilización como optimización

Fig. 3.4. La función $\sigma(t, u)$.

3.4.1 Optimizadores diferenciales

La condición (3.32), la cual tratamos de obtener, puede también verse como la optimización de la siguiente expresión:

$$|\sigma(t, \alpha)| \rightarrow \min_{\alpha} \quad (3.35)$$

la cual tiene un mínimo global en $\alpha = \alpha^*$. Dado que la función (3.35) a optimizar es convexa la condición suficiente de primer orden de optimalidad (2.12) queda expresado como:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \alpha} |\sigma(t, \alpha)| = \text{sign}(\sigma(t, \alpha)) \frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma(t, \alpha) \quad (3.36)$$

Para llevar acabo lo anterior se propuso los siguientes procedimientos de primer orden diferenciales (optimizadores):

1. El algoritmo propuesto es empleando el método del Gradiente (2.14), que fue descrito en el capítulo anterior considerando la condición de optimalidad (3.36), por lo que se

propuso la siguiente dinámica para $\alpha(t)$.

$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma(t) \text{sign}(\sigma(t, \alpha(t))) \frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma(t, \alpha(t)) \quad (3.37)$$

2. Para la segunda proposición se toma el enfoque de modos deslizantes, para lo cual se define como superficie deslizante la siguiente expresión

$$s(\alpha) = \alpha(t) - \alpha^*$$

Y se propone como dinámica de $\alpha(t)$

$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma(t) \text{sign} \left[\text{sign}(\sigma(t, \alpha(t))) \frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma(t, \alpha(t)) \right]$$

o equivalentemente

$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma(t) \text{sign}(\sigma(t, \alpha(t))) \text{sign} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma(t, \alpha(t)) \right) \quad (3.38)$$

Donde el momento del cambio de este algoritmo es en base a la condición de optimalidad (3.36). Como se explicó anteriormente para la existencia de una superficie deslizante es necesarios que la superficie y la velocidad de cambio sean de signos opuestos lo cual se satisface si para todo $t \geq 0$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}^r$ la condición especial de "cono" se mantiene

$$\text{sign}(\sigma(t, \alpha)) (\alpha - \alpha^*)^\top \frac{\partial}{\partial \alpha} [\sigma(t, \alpha)] \geq \rho V^\varkappa(\alpha)$$

donde $\varkappa \in (0, 1]$. De esta manera se tiene

$$\begin{aligned} (\alpha - \alpha^*)^\top \dot{\alpha}(t) &= -\gamma(t) \text{sign}(\sigma(t, \alpha(t))) (\alpha(t) - \alpha^*)^\top \text{sign} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} [\sigma(t, \alpha(t))] \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Lo cual asegura la existencia de un modo deslizante sobre la superficie $s(\alpha)$.

Cabe resaltar que la proposición de estos algoritmos son soluciones en base a la propiedad de primeras integrales y es gracias a la existencia de estos que se puede plantear el problema de identificación de la manera aquí presentada. En ambos procedimientos la función de ganancia $\gamma(t)$ satisface

Suposicion 1

$$\gamma(t) \geq 0, \int_{t=0}^{\infty} \gamma(t) dt = \infty \quad (3.39)$$

3.4.2 Convergencia del procedimiento

La proposición siguiente presenta las condiciones suficientes de la viabilidad de los procedimientos de identificación sugeridos (3.37)-(3.38). Definiendo la función de Lyapunov $V(\alpha)$ como

$$V(\alpha) := \frac{1}{2} \|\alpha - \alpha^*\|^2$$

Teorema 1 *Suponiedo que*

1. *Suposicion 1 (3.39) se cumplen.*
2. *Para todo $t = 0$ y todo $\alpha \in R^r$ la condición especial de cono se mantiene*

$$\text{sign}(s(t, \alpha))(\alpha - \alpha^*)^T \frac{\partial \sigma(t, \alpha)}{\partial \alpha} \geq \rho V^\chi(\alpha)$$

donde $\chi \in (0, 1]$.

Entonces

-el procedimiento 3.37 tomando $\chi = 1$ proporciona la convergencia asintótica

$$\alpha(t) \rightarrow \alpha^*$$

y un acotamiento de $\|\alpha(t) - \alpha^*\|$ dada por

$$\|\alpha(t) - \alpha^*\| \leq \delta \exp\left(-\rho \int_{\tau}^t \gamma(\tau) d\tau\right) \quad (3.40)$$

donde $\delta \geq \|\alpha(0) - \alpha^*\|$

-el procedimiento 3.38 con $\gamma = \text{const} > 0$ y $\chi = 1/2$ proporciona la convergencia de tiempo finito, es decir, para todo $t > t_{\text{con}}$ se tiene $\alpha(t) = \alpha^*$, donde

$$t_{\text{con}} := \sqrt{2} \frac{\|\alpha(0) - \alpha^*\|}{\gamma \rho} \quad (3.41)$$

Prueba 1 De 3.39 se tiene

$$V(\alpha(t)) = (\alpha(t) - \alpha^*)^\top \dot{\alpha}(t) = -\gamma(t) \text{sign}(\sigma(t, \alpha(t))) (\alpha(t) - \alpha^*)^\top \left(\frac{\partial \sigma(t, \alpha(t))}{\partial \alpha}\right)$$

Por las condiciones aceptadas de este teorema sigue

$$V(\alpha(t)) \leq -\gamma(t) \rho V^x(\alpha(t)) \quad (3.42)$$

Tomando $\chi = 1$ para el procedimiento (3.37) y por la suposición 2 se tiene

$$V(\alpha(t)) \leq V(\alpha(0)) \exp\left(-\rho \int_{\tau=0}^t \gamma(\tau) d\tau\right) \rightarrow 0$$

implicando $\alpha \rightarrow \alpha^*$ y

$$\frac{1}{2} \|\alpha(t) - \alpha^*\| \leq \frac{1}{2} \|\alpha(0) - \alpha^*\| \exp\left(-\rho \int_{\tau=0}^t \gamma(\tau) d\tau\right)$$

definiendo $\delta \geq \|\alpha(0) - \alpha^*\|$ lo que lleva a (3.40). Tomando $\chi = 0.5$ y $\gamma = \text{const} > 0$ para el procedimiento (3.38) se tiene

$$V(\alpha(t)) \leq -\gamma \rho \sqrt{V(\alpha(t))} \quad (3.43)$$

implicando

$$0 \leq \sqrt{V(\alpha(t))} = \frac{\|\alpha(t) - \alpha^*\|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{V(\alpha(0))} - \frac{1}{2}\gamma\rho t$$

y

$$\|\alpha(t) - \alpha^*\| \leq \|\alpha(0) - \alpha^*\| - \frac{\gamma\rho}{\sqrt{2}}t$$

lo que lleva a (3.41)◊.

3.5 Reducción de chattering

Es bien sabido que existe la presencia de chattering ante el uso de la función signo en diversos algoritmos [[21], [22], [23] y [26]], por lo que se han diseñado algoritmos que reduzcan este efecto ya que su aplicación en la práctica implica un gran desgaste en el sistema. En vista de esto se recurrió al cambio de la función *signo* por la función tangente hiperbólica, dado su comportamiento alrededor del cero que se ilustra en la Fig.2.1. Con esto se busca que al estar cerca del valor cero se comporte de una forma lineal suavizando así la respuesta de los algoritmos propuestos. Con lo cual los algoritmos 3.37 y 3.38 quedan expresados como

$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma(t) \tanh(\sigma(t, \alpha(t))) \frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma(t, \alpha(t)) \quad (3.44)$$

y el segundo algoritmo

$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma(t) \tanh(\sigma(t, \alpha(t))) \tanh\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma(t, \alpha(t))\right) \quad (3.45)$$

Como ya se mencionó esto ya ha sido implementado en otros trabajos [[21], [22] y [23]].

También para la reducción de chattering es que se han implementado el uso de filtros pasa-baja para atenuar las altas frecuencias de la función signo.

3.6 Observador de Super-twist para la estimación en línea de $\dot{q}(t|\alpha^*)$ y $\dot{p}(t|\alpha^*)$

Nótese, primero, que

$$\sigma(t, \alpha(t)) = \left[\frac{\partial}{\partial q} \sigma(t, \alpha(t)) \right]^T \dot{q}(t|\alpha^*) + \left[\frac{\partial}{\partial p} \sigma(t, \alpha(t)) \right]^T \dot{p}(t|\alpha^*) \quad (3.46)$$

y, como resultado,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma(t, \alpha(t)) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial q} \sigma(t, \alpha(t)) \right]^T \dot{q}(t|\alpha^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial p} \sigma(t, \alpha(t)) \right]^T \dot{p}(t|\alpha^*) \quad (3.47)$$

Y como se puede ver, para obtener la función 3.46 y 3.47, las cuales participan en los dos procedimientos (3.37) y (3.38), es necesario tener el vector de funciones $\dot{q}(t|\alpha^*)$ y $\dot{p}(t|\alpha^*)$, o, si es imposible, substituirlos por sus estimaciones en línea $\hat{\dot{q}}(t|\alpha^*)$ y $\hat{\dot{p}}(t|\alpha^*)$.

Para los casos en que el impulso generalizado depende del vector de parámetros desconocidos α^* analíticamente (2.6) se considerará dentro de $\sigma(t, \alpha)$ como funciones de las coordenadas y velocidades generalizadas $p(t|\alpha^*) = p(q, \dot{q}, t|\alpha^*)$ dada su definición por la transformación de Legendre (2.6) y por consiguiente su derivada en función de las velocidades y aceleraciones generalizadas $\dot{p}(t|\alpha^*) = p(\dot{q}, \ddot{q}, t|\alpha^*)$. Por lo que se debe obtener estimaciones de igual manera de las aceleraciones generalizadas $\ddot{q}(t|\alpha^*)$ denominadas $\hat{\ddot{q}}(t|\alpha^*)$.

Dado que en la práctica no es rentable la medición de las funciones $\dot{q}(t|\alpha^*)$, $\ddot{q}(t|\alpha^*)$ y $\dot{p}(t|\alpha^*)$ se propone emplear estimados generados en línea por el siguiente algoritmo de super-twist [26]:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \hat{\dot{q}}(t|\alpha^*) \end{pmatrix} = \begin{cases} q(t|\alpha^*) - \beta \text{sign}(\hat{q}(t|\alpha^*) - q(t|\alpha^*)) \\ x_2(t) - \mu ||q(t|\alpha^*) - \hat{q}(t|\alpha^*)||^{1/2} \text{sign}(\hat{q}(t|\alpha^*) - q(t|\alpha^*)) \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \hat{\dot{q}}(t|\alpha^*) \end{pmatrix} = \begin{cases} \dot{q}(t|\alpha^*) - \beta \text{sign}(\hat{\dot{q}}(t|\alpha^*) - \dot{q}(t|\alpha^*)) \\ x_2(t) - \mu ||\dot{q}(t|\alpha^*) - \hat{\dot{q}}(t|\alpha^*)||^{1/2} \text{sign}(\hat{\dot{q}}(t|\alpha^*) - \dot{q}(t|\alpha^*)) \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \hat{\dot{p}}(t|\alpha^*) \end{pmatrix} = \begin{cases} p(t|\alpha^*) - \beta \text{sign}(\hat{p}(t|\alpha^*) - p(t|\alpha^*)) \\ x_2(t) - \mu ||p(t|\alpha^*) - \hat{p}(t|\alpha^*)||^{1/2} \text{sign}(\hat{p}(t|\alpha^*) - p(t|\alpha^*)) \end{cases} \quad (3.50)$$

donde los parámetros μ y β de los diferenciadores (3.48), (3.49), (3.50)

$$\beta > 5L, \mu^2 \in \{32L, 8[\beta - L]\}, \max \left\{ \sup_t |\dot{q}(t|\alpha^*)|; \sup_t |\dot{p}(t|\alpha^*)| \right\} \leq L$$

Nótese que los estimados $\hat{\dot{q}}(t|\alpha^*)$, y $\hat{\dot{p}}(t|\alpha^*)$ convergen en tiempo finito a sus valores reales $\dot{q}(t|\alpha^*)$ y $\dot{p}(t|\alpha^*)$ si no hay ruido o perturbaciones en las mediciones en línea $q(t|\alpha^*)$ y $p(t|\alpha^*)$.

Para el caso del estimado $\hat{\ddot{q}}(t|\alpha^*)$ se obtiene del estimado en de $\hat{\dot{q}}(t|\alpha^*)$ debido a la rápida respuesta del algoritmo implementado es necesario filtrar la señal de $\hat{\dot{q}}(t|\alpha^*)$ por un filtro pasa baja [55].

3.7 Estimador diferenciador de Euler

En algunas ocasiones la dinámica de un sistema puede no estar acotado o su variación ser muy lenta por lo que en esas ocasiones el observador de Super-twist no tiene un buen desempeño para llevar acabo la tarea de estimar las derivadas. Por lo tanto, se propone que

ante este tipo de dinámicas implementar el siguiente algoritmo [47]:

$$\hat{\dot{q}}(t|\alpha^*) = \frac{q(t|\alpha^*) - q(t - \Delta t|\alpha^*)}{\Delta t} \quad (3.51)$$

$$\hat{\ddot{q}}(t|\alpha^*) = \frac{\dot{q}(t|\alpha^*) - \dot{q}(t - \Delta t|\alpha^*)}{\Delta t} \quad (3.52)$$

$$\hat{\dot{p}}(t|\alpha^*) = \frac{p(t|\alpha^*) - p(t - \Delta t|\alpha^*)}{\Delta t} \quad (3.53)$$

Chapter 4

Procedimientos numéricos

4.1 Ejemplo 1

Ejemplo 1 Se tiene como sistema mecánico un disco de radio r y masa m cuya posición angular está dada por $\phi(t)$ y se encuentra rodando sin fricción sobre un plano con un ángulo de inclinación θ con masa M y el cual se desliza sobre el eje x y su posición está dada por $x(t)$. El vector de coordenadas generalizadas del sistema es $q(t) = [x(t) \ \phi(t)]$, sus velocidades generalizadas $\dot{q}(t) = [\dot{x}(t) \ \dot{\phi}(t)]$ y sus aceleraciones generalizadas $\ddot{q}(t) = [\ddot{x}(t) \ \ddot{\phi}(t)]$. Este sistema se ilustra en la Fig.4.5 De este sis-

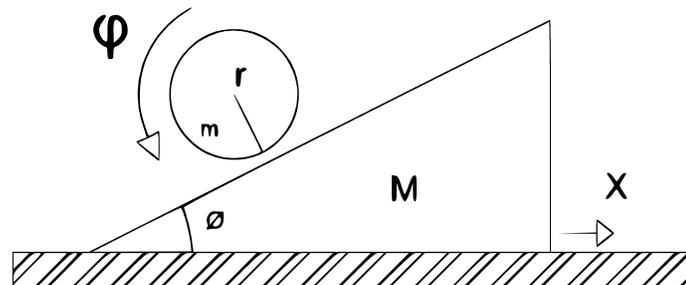


Fig. 4.5. Sistema mecánico

tema se desconoce el valor del ángulo de inclinación θ y el radio del disco r . El vector de parámetros desconocidos se define como $\alpha^* = [\theta^* \ r^*]$ los cuales son los parámetros por identificar.

Comenzamos por definir la dinámica del sistema desde el enfoque Lagrangiano. Se inicio considerando que el disco no se encuentra sobre el eje x por lo que la energía potencial del sistema solo depende del disco y está dado por:

$$V(q(t)) = -gmr\phi \sin(\theta)$$

La energía cinética del sistema se define por la relación de fuerzas existentes entre el plano inclinado y el disco.

$$T(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 - mr\dot{x}\dot{\phi} \cos(\theta) + \frac{3}{4}mr^2\dot{\phi}^2$$

Teniendo definida la energía cinética y potencial del sistema la función de Lagrange dada su definición 2.1 se tiene por la siguiente expresión:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 - mr\dot{x}\dot{\phi} \cos(\theta) + \frac{3}{4}mr^2\dot{\phi}^2 + gm\varphi r \sin(\theta) \quad (4.54)$$

Para la función de Lagrange 4.54 se tiene como ecuaciones de Euler-Lagrange las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} f_1 &:= (M + m)\ddot{x} + -mr\ddot{\phi} \cos(\theta) = 0 \\ f_2 &:= -mr\ddot{x} \cos(\theta) + \frac{1}{2}mr^2\ddot{\phi}(1 + \cos^2 \theta) - gmr \sin(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Las cuales se deducen de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L &= (M + m)\ddot{x} + -mr\ddot{\phi} \cos(\theta), \frac{\partial}{\partial x} L = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} L &= -mr\ddot{x} \cos(\theta) + \frac{1}{2}mr^2\ddot{\phi}(1 + \cos^2 \theta), \frac{\partial}{\partial \phi} L = gmr \sin(\theta) \end{aligned}$$

Definiendo a la siguiente función con las ecuaciones (4.55) para ser optimizada por medio del Método de Mínimos Cuadrados

$$Q(\theta, r) = \int_{t=0}^{T=50} [f_1^2(\theta, r, t) + f_2^2(\theta, r, t)] dt \quad (4.56)$$

Cuya gráfica está dada en la Fig.4.6. Donde se observa que existen múltiples mínimos locales en la función $Q(\theta, r)$ por los que su implementación para la estimación α^* no es factible.

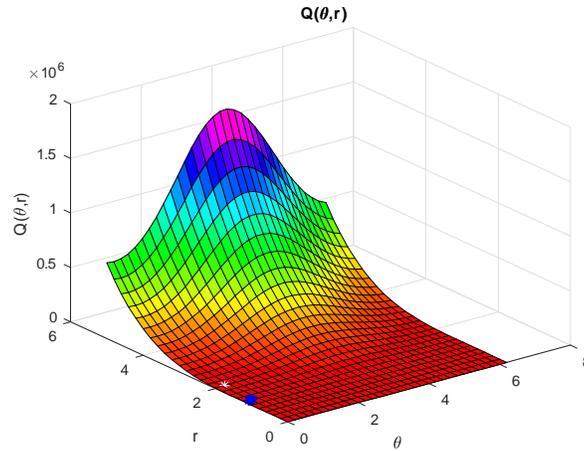


Fig. 4.6. $Q(\theta, r)$

Por medio de la transformación de Legendre el impulso generalizado de este sistema está dado por:

$$P(\dot{q}(t)) = \begin{bmatrix} p_x(\dot{q}(t)) \\ p_\varphi(\dot{q}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (M + m)\dot{x} - mr\dot{\phi} \cos(\theta) \\ -mr\dot{x} \cos(\theta) + \frac{3}{2}mr^2\dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Donde se resalta que no es posible estimar los impulsos generalizados dado que en su definición participa el vector de parámetros desconocidos α^* . Por lo que se les considera funciones de las velocidades generalizadas y α . En función de los impulsos generalizados 4.57 se define analíticamente sus correspondientes derivadas como:

$$P(\ddot{q}(t)) = \begin{bmatrix} p_x(\ddot{q}(t)) \\ p_\phi(\ddot{q}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (M + m)\ddot{x} - mr\ddot{\phi} \cos(\theta) \\ -mr\ddot{x} \cos(\theta) + \frac{3}{2}mr^2\ddot{\phi} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Se define las velocidades generalizadas en función de los impulsos generalizados como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3P_x r + 2P_\phi \cos(\theta)}{r(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \\ \frac{2(m+M)P_\phi + 2mP_x r \cos(\theta)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Dadas las expresiones 4.57, 4.59 y 2.7 se tiene como Hamiltoniano correspondiente

$$H(q(t), p(t)) = \frac{2(m+M)P_\phi^2 + 3mP_x^2 r^2 + 4mP_\phi P_x r \cos(\theta)}{2mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} - gm\phi r \sin(\theta) \quad (4.60)$$

Con lo cual se establece como Sistema Hamiltoniano del sistema las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{3mP_x r^2 + 2mP_\phi r \cos(\theta)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \\ \dot{\phi} &= \frac{2(m+M)P_\phi + 2mP_x r \cos(\theta)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \\ \dot{p}_x &= 0 \\ \dot{p}_\phi &= gm r \sin(\theta) \end{aligned}$$

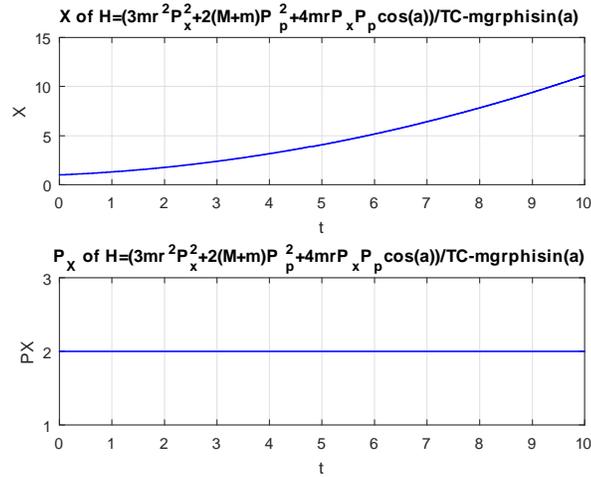
Para este sistema se tiene dos Primeras Integrales las cuales son

$$\begin{aligned} H(q(t), p(t)) &= \text{cte}_t \\ p_x &= \text{cte}_t \end{aligned}$$

La prueba de estas dos Primeras Integrales se encuentra en el Anexo 1. Tomando como valores para el sistema

$$m = 1, \quad M = .1, \quad r = 2, \quad g = 9.81m/s^2, \quad \theta = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$$

y mediante el uso de MATLAB/Simulink se simuló la dinámica del sistema y para este caso se consideró tener la medición exacta de $q = q(t|\alpha^*)$ donde se estimó $\dot{q} = \dot{q}(t|\alpha^*)$ y $\ddot{q} = \ddot{q}(t|\alpha^*)$. Dado que la dinámica del sistema $q = q(t|\alpha^*)$ no esta acotada por lo que la implementación del observador de suspertwisting no es posible, motivo por el cual se recurrió para las estimaciones por medio del procedimiento numérico de Euler ???. La dinámica del sistema simulada se muestra en la Fig.4.7 y 4.8.

Fig. 4.7. Dinámica de $x(t)$ y $p_x(t)$

Como se puede corroborar la dinámica del sistema no está acotada. Para ilustrar la variación de $H(q(t), p(t)|\alpha)$ se toma $\alpha^* = \left[\frac{\pi}{12} \quad 2 \right]$ y $\alpha = \left[\frac{\pi}{3} \quad 5 \right]$, y como se ilustra en la Fig. 4.17 $H(q(t), p(t)|\alpha^*) \approx \text{const}$ y $H(q(t), p(t)|\alpha)$ oscila en el tiempo. No se tiene como una constante a $H(q(t), p(t)|\alpha^*)$ debido a los errores en las estimaciones en línea.

Como condiciones iniciales de los parámetros desconocidos son distintas de cero lo que se expresa como $\alpha(0) \neq 0$.

Al aplicar el procedimiento (3.44) se emplea una ganancia $\gamma(t)$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \omega & \text{si } t \leq t_0 \\ \frac{\omega}{1000(t - t_0 + 1)} & \text{si } t_0 < t \end{cases}$$

Donde para el procedimiento $t_0 = 2$ y $\omega = [1 \quad 12.5]$. Para el procedimiento (3.45) se emplea una ganancia $\gamma(t) = 2$ para todo el tiempo de simulación. La elección del t_0 tan pequeño para el procedimiento (3.44) es debido a que en este procedimiento como se considera el valor de $\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}$ este valor aumenta debido al valor de las dinámicas del sistema. Se dio un tiempo de simulación $t_s = 10$, debido a la dinámica del sistema no se puede estimar

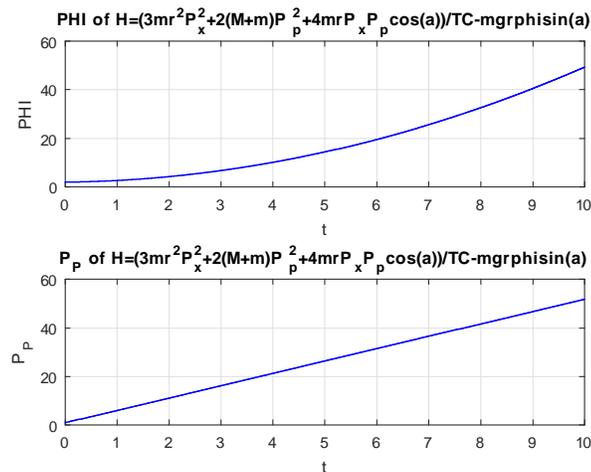


Fig. 4.8. Dinámica de $\phi(t)$ y $p_\phi(t)$

con un mayor tiempo. La dinámica de la estimación de los parámetros se ilustra en la Fig. 4.10 y Fig. 4.11

En esta simulaciones la variación del Hamiltoniano es debido a las dimensiones de las coordenadas generalizadas y los impulsos generalizados los cuales como van creciendo con respecto al tiempo el error en el valor del Hamiltoniano va aumentando considerablemente a pesar de la estimación. La dinámica del Hamiltoniano se muestra en la Fig.4.12.

Como se puede observar por medio de las simulaciones mediante los algoritmo propuesto (3.44) y (3.45) se pudo obtener una estimación del parámetro α^* con un error de ± 0.5 para r y ± 0.6 para θ dichos errores son debido al ruido en las estimaciones en línea. Dada las dinámicas no acotadas del sistema no fue posible obtener un valor exacto del Hamiltoniano y de p_x .

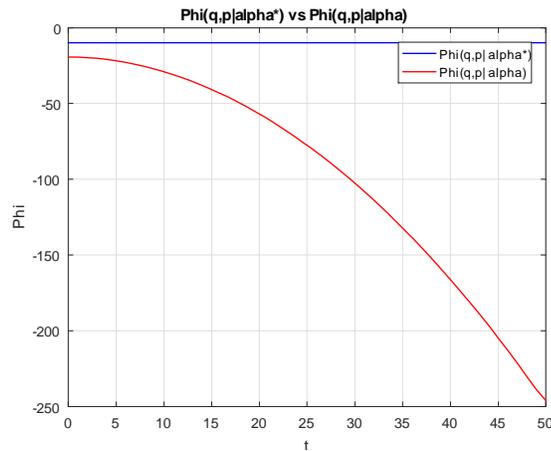
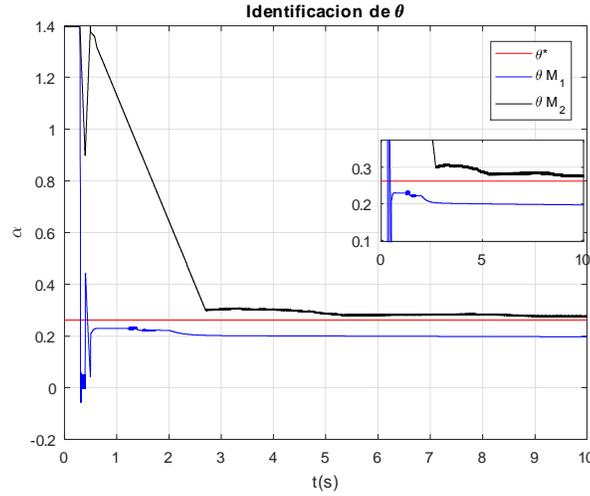


Fig. 4.9. $H(q, p|\alpha^*)$ vs $H(q, p|\alpha)$.

4.2 Ejemplo 2

Ejemplo 2 *Se tiene un circuito eléctrico constituido por dos mallas eléctricas la primera se encuentra alimentada por una fuente eléctrica cuyo potencial eléctrico esta dado por E_1 , que alimenta un capacitor con capacitancia c_1 , una bobina con una inductancia L_1 y de igual manera un capacitor con capacitancia c_0 que también participa en la dinámica de la malla 2, estos tres elementos se encuentran conectados en serie. La malla 2 es alimentada por una fuente eléctrica cuyo potencial eléctrico esta dado por E_2 , que alimenta también el capacitor con capacitancia c_0 , una bobina con una inductancia L_2 y de igual manera un capacitor con capacitancia c_2 , estos elementos se encuentran conectados en serie.*

Para este caso se considera $\alpha^ = [c_0 \quad L_1]^T$ por lo que el valor del capacitor que participa en las dos mallas y la inductancia de la malla 1 son los parámetros del sistema a determinar a través de lo propuesto en este trabajo. La configuración de este circuito eléctrico se muestra en la Fig.4.13.*

Fig. 4.10. Identificación de θ

Donde las coordenadas generalizadas $q(t|\alpha^*) = [q_1 \quad q_2]^\top$ corresponden a la carga en la malla 1 y en la malla 2. Para definir la dinámica empleamos las Leyes de Kirchhoff de la Ley de la Malla para definir la energía potencial del sistema como:

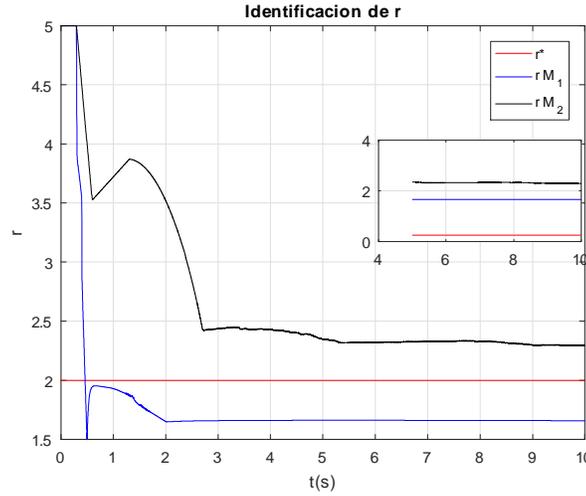
$$V(q(t, \alpha^*)) = \frac{q_1^2}{2c_0} + \frac{q_1^2}{2c_1} + \frac{(c_0 + c_2)}{2c_0c_2}q_2^2 - E_1q_1 - E_2q_2 - \frac{q_1q_2}{c_0} \quad (4.61)$$

De igual forma se definió la energía cinética como:

$$T(\dot{q}(t, \alpha^*)) = \frac{\dot{q}_1^2 L_1}{2} + \frac{\dot{q}_2^2 L_2}{2} \quad (4.62)$$

Por medio de las funciones de energía (4.61) y (4.62) y mediante la definición de la función de Lagrange (2.1) se obtiene la siguiente expresión:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\dot{q}_1^2 L_1}{2} + \frac{\dot{q}_2^2 L_2}{2} + E_1q_1 + E_2q_2 + \frac{q_1q_2}{c_0} - \frac{q_1^2}{2c_0} - \frac{q_1^2}{2c_1} - \frac{(c_0 + c_2)}{2c_0c_2}q_2^2 \quad (4.63)$$

Fig. 4.11. Identificación de r

Para la función de Lagrange (4.63) se tiene como ecuaciones de Euler-Lagrange las siguientes expresiones

$$f_1(\theta, r) := \ddot{q}_1 L_1 - E_1 + \frac{q_1}{c_0} + \frac{q_1}{c_1} - \frac{q_2}{c_0} = 0 \quad (4.64)$$

$$f_2(\theta, r) := \ddot{q}_2 L_2 - E_2 + \frac{q_2}{c_0} + \frac{q_2}{c_2} - \frac{q_1}{c_0} = 0$$

Las cuales se deducen de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_1} &= \ddot{q}_1 L_1, & \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_1} &= E_1 - \frac{q_1}{c_0} - \frac{q_1}{c_1} + \frac{q_2}{c_0} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_2} &= \ddot{q}_2 L_2, & \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_2} &= E_2 - \frac{q_2}{c_0} - \frac{q_2}{c_2} + \frac{q_1}{c_0} \end{aligned}$$

Definiendo a la siguiente función con las ecuaciones (4.64) para ser optimizada por medio del Método de Mínimos Cuadrados

$$Q(c_0, L_1) = \int_{t=0}^{T=50} [f_1^2(c_0, L_1, t) + f_2^2(c_0, t)] dt \quad (4.65)$$

Cuya gráfica está dada en la Fig.4.14. Donde se observa que existen múltiples mínimos locales en la función $Q(\theta, r)$ por los que su implementación para la estimación α^* no es factible.

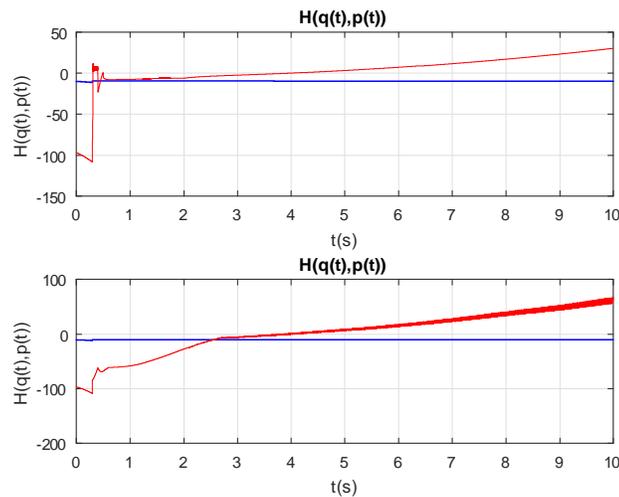


Fig. 4.12. $H(q, p)$

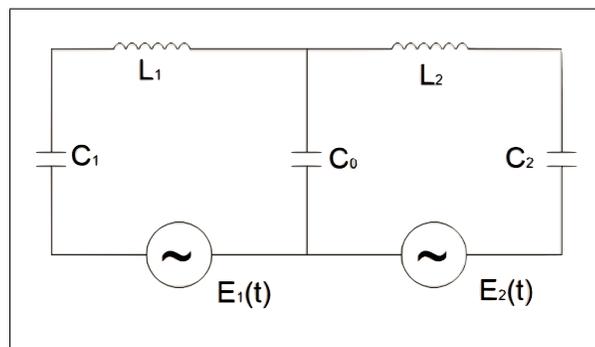
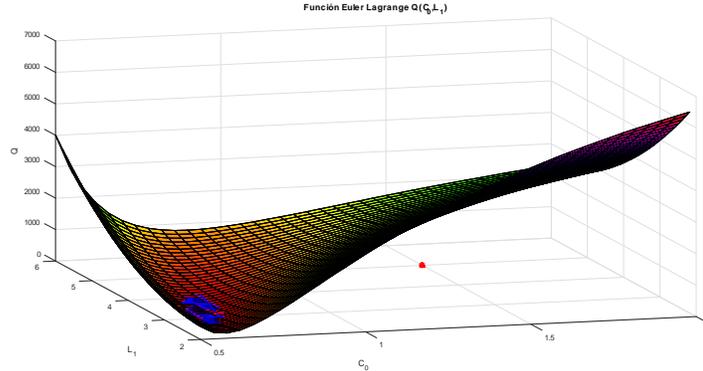


Fig. 4.13. Circuito eléctrico

Se considera que se tiene medición exacta de $q(t, \alpha^*)$. Dada la definición del impulso generalizado se tiene las siguientes expresiones

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 L_1 \\ \dot{q}_2 L_2 \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

Dado que en la definición de p_1 participa el parámetro L_1 es necesario considerar a p_1 en función de la coordenadas y velocidades generalizadas $p_1 = p_1(\dot{q}_1)$. Teniendo (4.66) y la definición por la transformación de Legendre (2.7) se tiene como función de Hamiltoniana

Fig. 4.14. $Q(c_0, L_1)$

del circuito eléctrico la siguiente expresión

$$H(q(t), p(t), t) = \frac{p_1^2}{2L_1} + \frac{p_2^2}{2L_2} + \frac{c_0+c_1}{2c_0c_1} q_1^2 + \frac{(c_0+c_2)}{2c_0c_2} q_2^2 - \frac{q_1q_2}{c_0} - E_1q_1 - E_2q_2 \quad (4.67)$$

, el cual es una primera integral.

Para demostrar esto se tiene $u = c_0$

$$\begin{aligned} \sigma_H(t, u) &= \frac{p_1}{L_1} \dot{p}_1 + \frac{p_2}{L_2} \dot{p}_2 + \left[\frac{u+c_1}{uc_1} q_1 - E_1 - \frac{q_2}{u} \right] \dot{q}_1 + \left[\frac{(u+c_2)}{uc_2} q_2 - E_2 - \frac{q_1}{u} \right] \dot{q}_2 \\ &= \frac{p_1}{L_1} \left[E_1 + \frac{q_2}{c_0} - \frac{c_0+c_1}{c_0c_1} q_1 \right] + \frac{p_2}{L_2} \left[E_2 + \frac{q_1}{c_0} - \frac{c_0+c_2}{c_0c_2} q_2 \right] + \\ &\quad \left[\frac{u+c_1}{uc_1} q_1 - E_1 - \frac{q_2}{u} \right] \frac{p_1}{L_1} + \left[\frac{(u+c_2)}{uc_2} q_2 - E_2 - \frac{q_1}{u} \right] \frac{p_2}{L_2} \\ &= \frac{p_1}{L_1} \left[\frac{c_0-u}{c_0u} q_2 + \frac{c_0(u+c_1)-u(c_0+c_1)}{c_0uc_1} q_1 \right] + \frac{p_2}{L_2} \left[\frac{u-c_0}{c_0u} q_1 + \frac{c_0(u+c_2)-u(c_0+c_2)}{c_0uc_2} q_2 \right] \\ &= \frac{p_1}{L_1} \left[\frac{c_0-u}{c_0u} q_2 + \frac{c_1(c_0-u)}{c_0uc_1} q_1 \right] + \frac{p_2}{L_2} \left[\frac{u-c_0}{c_0u} q_1 + \frac{c_2(c_0-u)}{c_0uc_2} q_2 \right] \\ &= (c_0 - u) \left[\frac{p_1}{L_1} \left[\frac{1}{c_0u} q_2 + \frac{c_1}{c_0uc_1} q_1 \right] + \frac{p_2}{L_2} \left[\frac{1}{c_0u} q_1 + \frac{c_2}{c_0uc_2} q_2 \right] \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dado que $r = 2$ se tiene como otra primera integral la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \varphi(q(t), p(t), t) &= [H(q(t), p(t), t)]^2 \\ &= \left[\frac{p_1^2}{2L_1} + \frac{p_2^2}{2L_2} + \frac{c_0+c_1}{2c_0c_1} q_1^2 + \frac{(c_0+c_2)}{2c_0c_2} q_2^2 - \frac{q_1q_2}{c_0} - E_1q_1 - E_2q_2 \right]^2 \end{aligned}$$

Para demostrar esto se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi(t, u) &= 2H\sigma_H(t, u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

como $\sigma_H(t, u) = 0$ con $u = c_0$ entonces $\sigma_\varphi(t, u) = 0$.

Dada la función Hamiltoniana (4.67) se tiene como Sistema Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{p_1}{L_1} \\ \dot{q}_2 &= \frac{p_2}{L_2} \\ \dot{p}_1 &= E_1 + \frac{q_2}{c_0} - \frac{c_0 + c_1}{c_0 c_1} q_1 \\ \dot{p}_2 &= E_2 + \frac{q_1}{c_0} - \frac{c_0 + c_2}{c_0 c_2} q_2 \end{aligned}$$

Mediante el uso de MATLAB/Simulink se simuló la dinámica del circuito y para este caso se consideró tener la medición exacta de $q = q(t|\alpha^*)$ donde se estimó $\dot{q} = \dot{q}(t|\alpha^*)$ y $\ddot{q} = \ddot{q}(t|\alpha^*)$. Mediante las ecuaciones del algoritmo de super twisting (3.48) se obtuvo $\hat{q} = \hat{q}(t|\alpha^*)$ y $\hat{\ddot{q}} = \hat{\ddot{q}}(t|\alpha^*)$.

Tomando como valor para los parámetros: $L_2 = 7H$, $E_1 = E_2 = 127v$, $c_1 = .5f$ y $c_2 = 2.2f$. La dinámica del sistema simulado se muestra en la Fig. 4.15 y Fig. 4.16.

Para esquematizar el comportamiento de las primeras integrales se toma $\alpha^* = [c_0 \quad L_1] = [.5f \quad 5H]$ y $\alpha = [2 \quad 3]$, y como se ilustra en la Fig. 4.17 $H(q(t), p(t)|\alpha^*) \approx \text{const}$ y $H(q(t), p(t)|\alpha)$ oscila en el tiempo. No se tiene como una constante a $H(q(t), p(t)|\alpha^*)$ debido a los errores en las estimaciones de las derivadas.

Lo observado en la Fig. 4.17 confirma que la estabilización de $H(q(t), p(t)|\alpha)$ toma sentido y corresponde a la identificación de α^* .

Al aplicar los procedimientos (3.44)-(3.45) se empleó una ganancia $\gamma(t)$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0.03 & \text{si } t \leq t_0 \\ \frac{0.03}{t - t_0 + 1} & \text{si } t_0 \leq t \end{cases}$$

Donde $t_0 = 10$ Se dio un tiempo de simulación $t_s = 50$. El proceso de identificación obtenido se describe en las Fig. 4.18 y Fig. 4.19. La dinámica correspondiente del Hamiltoniano (4.67) esta dado en Fig.4.20.

La dinámica de la primera integral $\varphi(q, p|\alpha)$ se muestra en la Fig.4.21.

Dada que la dinámica está acotada es posible estimar el impulso generalizado p_1 por medio de los algoritmos propuestos lo cual se muestra en la Fig. 4.22.

Los errores en la estimación del parámetro son debido a los ruidos presentados en la estimación de las derivadas ya que se tiene ruidos de estimación de ± 20 en la estimación de la derivada \hat{p}_2 del impulso generalizado p_2 .

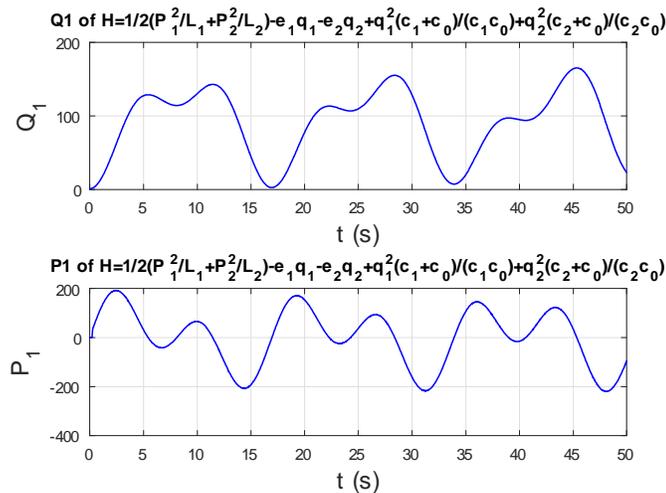
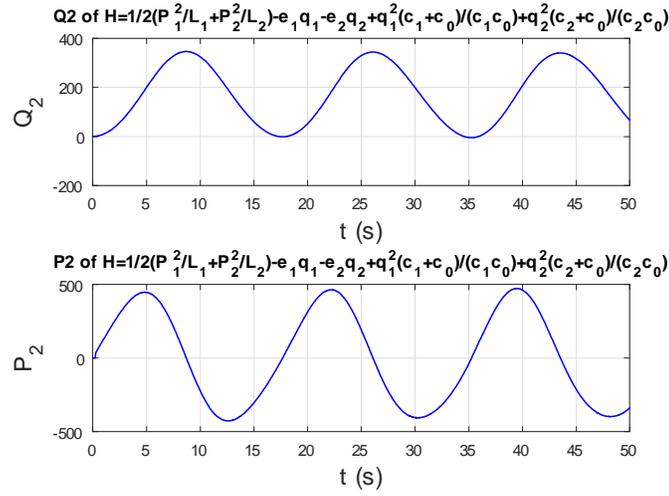


Fig. 4.15. q_1 y p_1

Fig. 4.16. q_2 y p_2

4.3 Ejemplo 3

Ejemplo 3 Se propone como energía cinética del sistema la siguiente expresión:

$$T(q(t), \dot{q}(t), t) = \frac{\dot{q}_1^2}{2b_1} + \frac{3\dot{q}_2^2}{4b_2} - \frac{a_1^2 q_2 \dot{q}_3}{2a_3^2} + \frac{\dot{q}_3^2 + 4(a_2 a_3)^2 \dot{q}_3 q_2}{4a_3^4} \quad (4.68)$$

Y cuya energía potencial está dada por:

$$V(q(t), t) = \frac{a_1^2}{a_1^2 + q_1^2} + (a_1^2 q_2)^2 - a_1^2 q_2 a_2^2 q_2 - a_2^4 q_2^2 \quad (4.69)$$

Por me

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\dot{q}_1^2}{2b_1} + \frac{3\dot{q}_2^2}{4b_2} - \frac{a_1^2}{a_1^2 + q_1^2} - (a_1^2 q_2)^2 + \frac{(a_1^2 q_2 \dot{q}_3 + 2a_1^2 q_2 (a_2 a_3)^2 q_2)}{2a_3^2} + \frac{\dot{q}_3^2 + 4(a_2 a_3)^2 \dot{q}_3 q_2 + 4(a_2 a_3)^4 q_2^2}{4a_3^4} \quad (4.70)$$

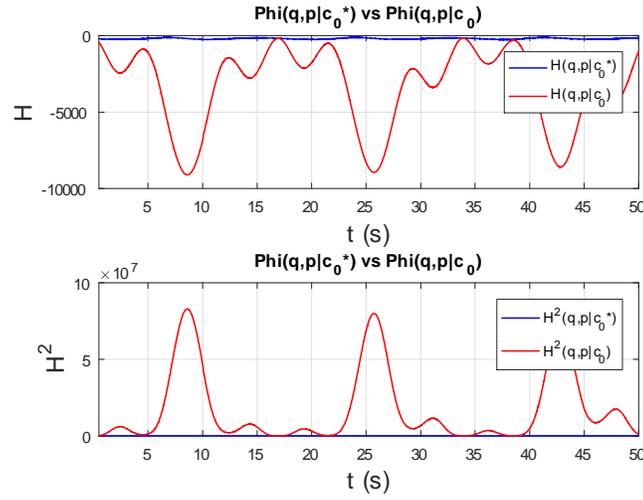


Fig. 4.17. $H(q, p|\alpha^*)$ vs $H(q, p|\alpha)$.

Corresponding Euler-Lagrange equations are given by

$$f_1(a_1, a_2, a_3, t) := \frac{\ddot{q}_1}{b_1} + \frac{2a_1^2 q_1}{(a_1^2 + q_1^2)^2} = 0$$

$$f_2(a_1, a_2, a_3, t) := \frac{3\ddot{q}_2}{2b_2} + 2(a_1^4 - a_1^2 a_2^2 - a_2^4)q_2 - \frac{a_1^2 + 2a_2^2}{2a_3^2} \dot{q}_3 = 0$$

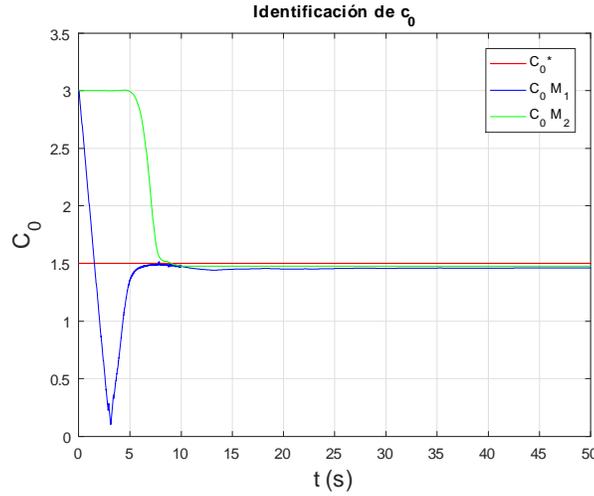
$$f_3(a_1, a_2, a_3, t) := \frac{a_1^2 \dot{q}_2}{2a_3^2} + \frac{2\dot{q}_3 + 4(a_2 a_3)^2 q_2}{4a_3^4} = 0$$

Estas expresiones se obtienen mediante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\dot{q}_1}{b_1} & \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_1} &= -\frac{2a_1^2 q_1}{(a_1^2 + q_1^2)^2} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{3\dot{q}_2}{2b_2} & \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_2} &= 2[a_1^2 a_2^2 + a_2^4 - a_1^4]q_2 + \frac{a_1^2 + 2a_2^2}{2a_3^2} \dot{q}_3 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_3} &= \frac{a_1^2 \dot{q}_2}{2a_3^2} + \frac{2\dot{q}_3 + 4(a_2 a_3)^2 q_2}{4a_3^4} & \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_3} &= 0 \end{aligned}$$

El impulso generalizado $p(t) = [p_1(t), p_2(t), p_3(t)]^T$ que por la definición de la transformación de Legendre (2.6) se define como:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1}{b_1} \\ \frac{3\dot{q}_2}{2b_2} \\ \frac{\dot{q}_3 + 2(a_2 a_3)^2 q_2}{2a_3^4} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 p_1 \\ \frac{2b_2 p_2}{3} \\ 2a_3^2 [a_2^2 q_2 + a_3^2 p_3] \end{bmatrix}$$

Fig. 4.18. c_0 -convergencia

La función de Hamilton dada por la transformación de Legendre es:

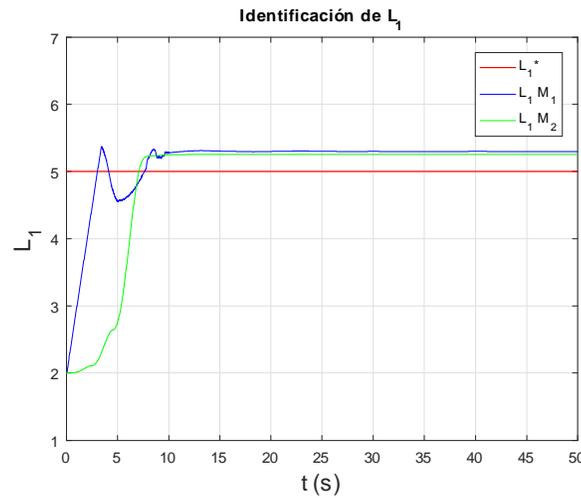
$$H(q(t), p(t), t) = \frac{b_1 p_1^2}{2} + \frac{b_2 p_2^2}{3} + \frac{a_1^2}{a_1^2 + q_1^2} + [a_1^2 q_2 + a_3^2 p_3]^2 \quad (4.71)$$

Donde se observa que los parámetros participan de una forma no lineal y en la cual las primeras integrales que se tienen del sistema presentan diversas de las estructuras deducibles por inspección (3.21-3.29).

Del Hamiltoniano (4.71) se deduce el siguiente sistema de ecuaciones canónicas.

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= b_1 p_1 & \dot{p}_1 &= \frac{2a_1^2 q_1}{(a_1^2 + q_1^2)^2} \\ \dot{q}_2 &= \frac{2b_2 p_2}{3} & \dot{p}_2 &= -2a_1^2 [a_1^2 q_2 + a_3^2 p_3] \\ \dot{q}_3 &= 2a_3^2 [a_2^2 q_2 + a_3^2 p_3] & \dot{p}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Mediante el uso de MATLAB/Simulink se simuló la dinámica del sistema y para este caso se consideró tener la medición exacta de $q = q(t|\alpha^*)$ y donde se estimó $\dot{q} = \dot{q}(t|\alpha^*)$ y $\ddot{q} = \ddot{q}(t|\alpha^*)$. Mediante las ecuaciones del algoritmo de super twisting (3.48) se obtuvo $\hat{q} = \hat{q}(t|\alpha^*)$ y $\hat{\ddot{q}} = \hat{\ddot{q}}(t|\alpha^*)$.

Fig. 4.19. L_1 -convergencia

Tomando como valor para los parámetros: $b_1 = 3$, $b_2 = 1$ y $b_3 = 2$. La dinámica del sistema en sus tres grados de libertad se ilustra en las figuras (4.23, 4.24, 4.25)

Para ilustrar esto se toma $\alpha^* = [a_1 \ a_2 \ a_3] = [2 \ 1 \ 3]$ y $\alpha = [6 \ 7 \ 5]$, y como se ilustra en la Fig. 4.26 $H(q(t), p(t)|\alpha^*) \approx \text{const}$ y $H(q(t), p(t)|\alpha)$ oscila en el tiempo. No se tiene como una constante a $H(q(t), p(t)|\alpha^*)$ debido a los errores en las estimaciones de las derivadas.

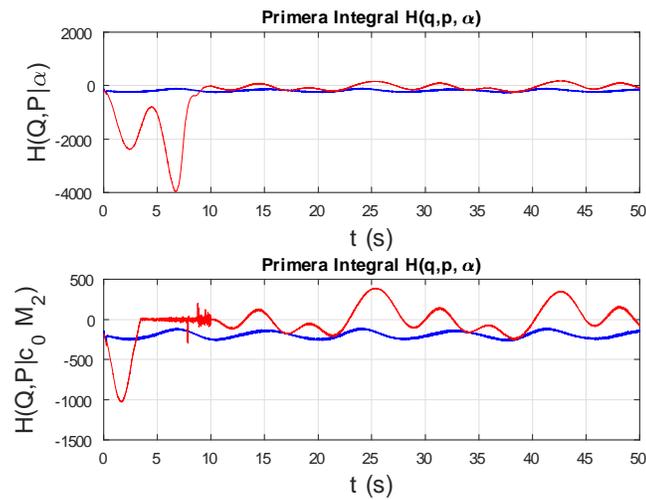
Lo observado en la Fig. 4.17 confirma que la estabilización de $H(q(t), p(t)|\alpha)$ toma sentido y corresponde a la identificación de α^* .

Las primeras integrales empleadas para la estimación de los parámetros son

$$\varphi_1(q, p|\alpha) = \frac{b_1 p_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{a_1^2 + q_1^2}$$

$$\varphi_2(q, p|\alpha) = \frac{b_2 p_2^2}{3} + [a_1^2 q_2 + a_3^2 p_3]^2$$

$$\varphi_3(q, p|\alpha) = \frac{\dot{q}_3 + 2(a_2 a_3)^2 q_2}{2a_3^4}$$

Fig. 4.20. $H(q, p|\alpha)$ –Hamiltoniano

Al aplicar los procedimientos (3.44)-(3.45) se empleó una ganancia $\gamma(t)$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \omega & \text{si } t \leq t_0 \\ \frac{\omega}{t - t_0 + 1} & \text{si } t_0 \leq t \end{cases}$$

Donde $t_0 = 27$ Se dio un tiempo de simulación $t_s = 40$. Para el procedimiento 3.44 se empleó $\omega = [40 \ 1 \ 0.001]$, para el procedimiento 3.45 se empleó un $\omega = 1.2$. El proceso de identificación obtenido se describe en las figuras 4.27

Dado que el Hamiltoniano es la suma de las primeras integrales si alguna de estas no es constante se ve reflejado en su dinámica por esta razón es la que solo se muestra la dinámica del Hamiltoniano por los dos métodos en la Fig. 4.28.

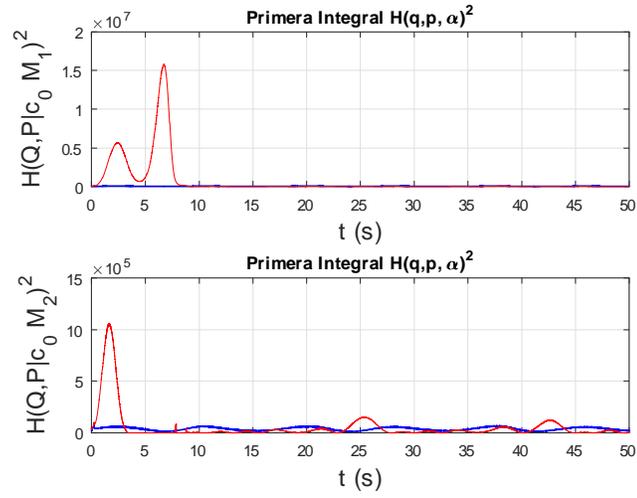


Fig. 4.21. $\varphi(c_0, L_1)$

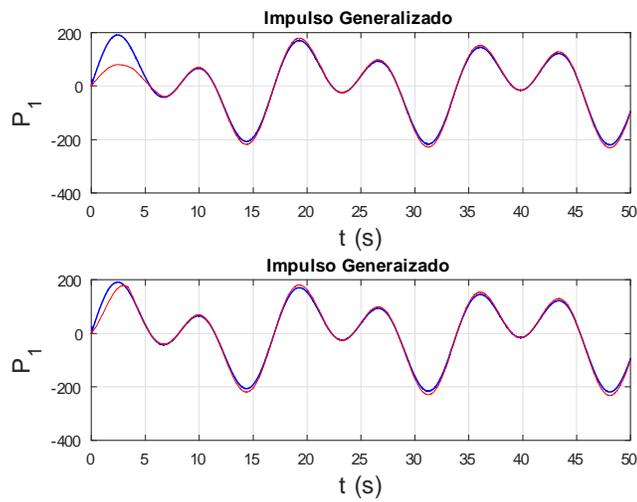


Fig. 4.22. p_1 —Estimación de impulso generalizado

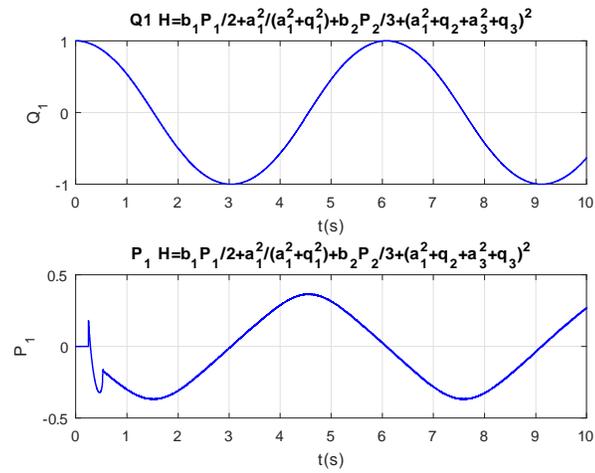


Fig. 4.23. q_1 y p_1 Q1IA

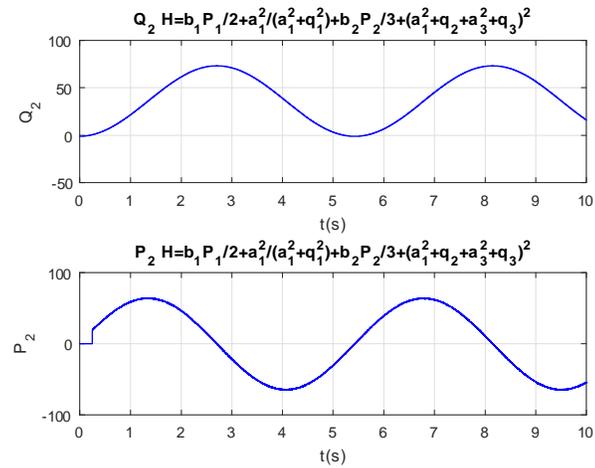


Fig. 4.24. q_1 y p_1

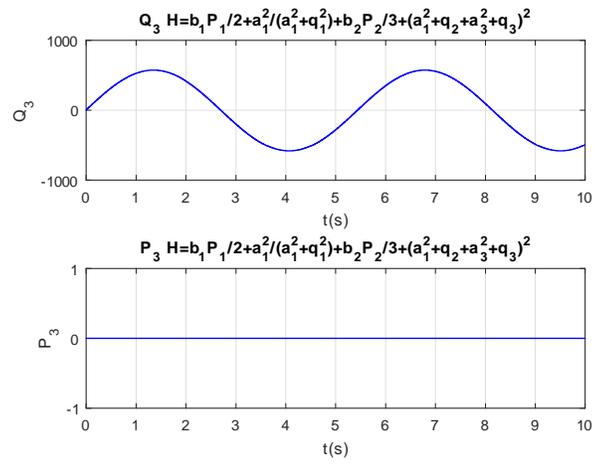


Fig. 4.25. q_3 y p_3

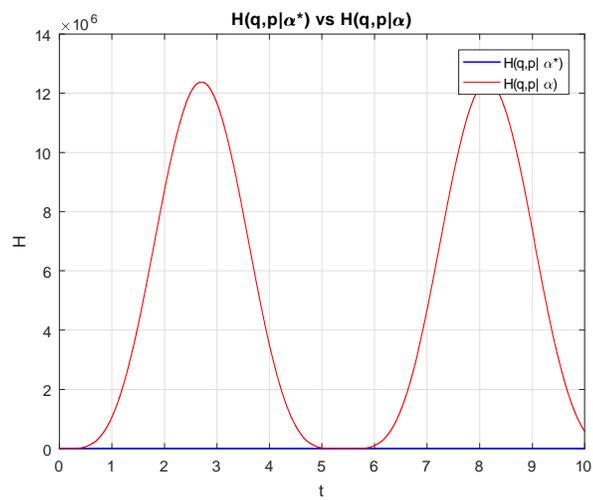


Fig. 4.26. $H(q,p|\alpha^*)$ vs $H(q,p|\alpha)$.

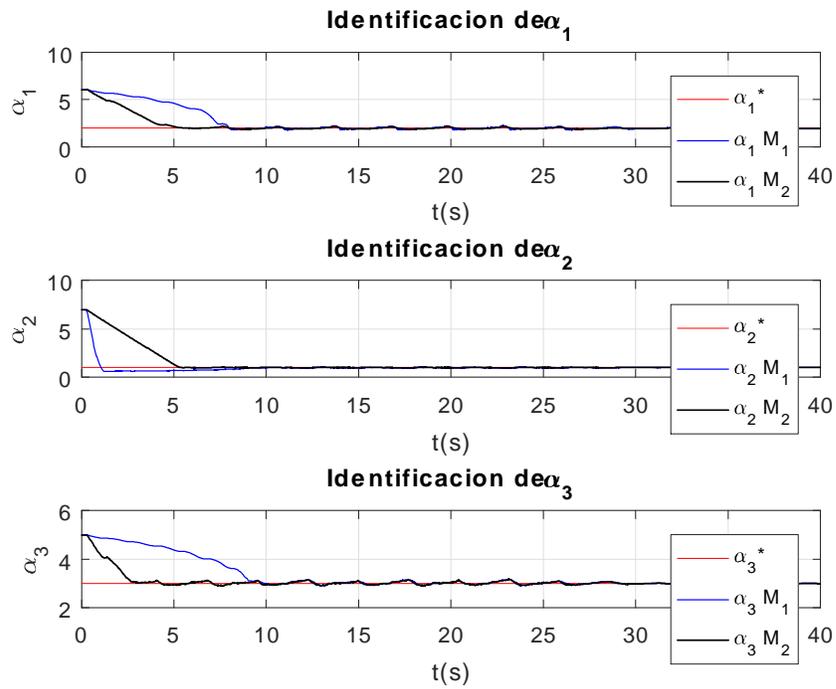


Fig. 4.27. a —Estimación

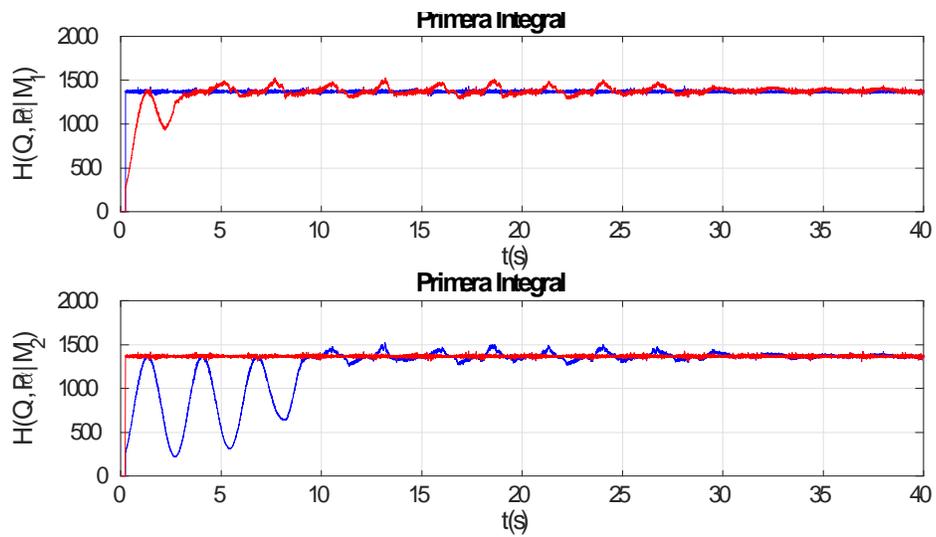


Fig. 4.28. Dinámica de $H(q, p | \alpha)$

Chapter 5

Conclusiones

En el trabajo presentado se abordó la problemática de la identificación de cierta clase de Sistema Hamiltonianos.

Fue posible identificar los parámetros de los casos abordados mediante algoritmos inspirados en la propiedad de las Primeras Integrales y empleando diversos enfoques de optimización. Además de que en los casos donde la dinámica está acotada se obtuvo un valor aproximado de las Primera Integrales y si los parámetros participan en la definición analítica del impulso generalizado se podía llevar a cabo la estimación de esta variable.

Los comentarios finales de las experimentaciones realizadas son:

- Es necesario un conocimiento muy preciso de las variables que participan en el sistema, lo cual debido a diversas situaciones es prácticamente difícil de conseguir.
- Debido a la propiedad considerada en este trabajo los procedimientos son sensibles ante ruidos y perturbaciones.
- La selección de las ganancias debe ser de acuerdo a la magnitud de la dinámica.

5.1 Trabajos a futuro

Como trabajos futuros se considera:

- Identificación de sistemas Hamiltonianos por medio de primeras integrales con presencia de ruido acotado en las mediciones.
- Identificación de sistema Hamiltonianos donde los parámetros sean variables en el tiempo.
- Implementar diversos tipos de optimizadores de primer y segundo orden.
- Emplear los algoritmos propuesto en sistemas en los que se implemente un control optimo ya que son sistemas Hamiltonianos
- Identificación de parámetros en sistemas que son parcialmente observables.

Chapter 6

Anexo I

Proof. Prueba para el ejemplo 1 de $H(q(t), p(t)|\alpha^*)$ y p_x son Primeras Integrales del sistema

$$H(q(t), p(t)|\alpha^*) = \frac{2(m+M)P_\phi^2 + 3mP_x^2 r^2 + 4mP_\phi P_x r \cos(\theta)}{2mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} - gm\phi r \sin(\theta)$$

tomando $u = [u_1 \ u_2]$ se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_1(t, u) &= \frac{4(m+M)P_\phi \dot{P}_\phi + 6mu_2^2 P_x \dot{P}_x + 4mu_2 \cos(u_1) \left[P_\phi \dot{P}_x + \dot{P}_\phi P_x \right]}{2mu_2^2(m+3M+2m \sin^2(u_1))} - gm u_2 \sin(u_1) \dot{\phi} \\ &= \frac{4(m+M)P_\phi [gmr \sin(\theta)] + 6mu_2^2 P_x [0] + 4mu_2 \cos(u_1) \left[P_\phi [0] + [gmr \sin(\theta)] P_x \right]}{2mu_2^2(m+3M+2m \sin^2(u_1))} \dots \\ &\quad \dots - gm u_2 \sin(u_1) \left[\frac{2(m+M)P_\phi + 2mP_x r \cos(\theta)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \right] \\ &= [gmr \sin(\theta)] \frac{2(m+M)P_\phi + 2mu_2 \cos(u_1) P_x}{mu_2^2(m+3M+2m \sin^2(u_1))} \\ &\quad \dots - gm u_2 \sin(u_1) \left[\frac{2(m+M)P_\phi + 2mP_x r \cos(\theta)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \right] \\ &= 2g(m+M)P_\phi \left[\frac{\sin(\theta)r^3(m+3M+2m \sin^2(\theta)) - \sin(u_1)u_2^3(m+3M+2m \sin^2(u_1))}{u_2^2(m+3M+2m \sin^2(u_1))r^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \right] \\ &\quad \dots + 2gmP_x u_2 r \left[\frac{\sin(\theta) \cos(u_1) [u_2^2(m+3M+2m \sin^2(u_1))] - \sin(u_1) \cos(\theta) [r^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))]}{[u_2^2(m+3M+2m \sin^2(u_1))] [r^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))]} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $u_1 = \theta$ y $u_2 = r$

$$p_x = (M+m)\dot{x} - mr\dot{\phi} \cos(\theta)$$

Se tiene

$$\sigma_2(t, u) = (M+m)\ddot{x} - mu_2 \cos(u_1) \ddot{\phi} \tag{6.72}$$

Dadas las ecuaciones del sistema Hamiltoniano se tiene

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{3m\dot{p}_x r^2 + 2m\dot{p}_\varphi r \cos(\theta)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \\ \ddot{\phi} &= \frac{2(m+M)\dot{p}_\varphi + 2m\dot{p}_x r \cos(\theta)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))}\end{aligned}$$

Dado que $\sigma_2(t, u) = \dot{p}_x$ la ecuacion 6.72 se expresa como

$$\begin{aligned}\sigma_2(t, u) &= (M+m) \frac{3mr^2 \sigma_2(t, u) + 2m\dot{p}_\varphi r \cos(\theta)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} - mu_2 \cos(u_1) \frac{2(m+M)\dot{p}_\varphi + 2mr \cos(\theta) \sigma_2(t, u)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \\ &= 2(m+M)m\dot{p}_\varphi \left[\frac{r \cos(\theta) - u_2 \cos(u_1)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \right] + \frac{\sigma_2(t, u)[3r(M+m) - 2mu_2 \cos(u_1) \cos(\theta)]}{r(m+3M+2m \sin^2(\theta))}\end{aligned}$$

por lo que se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\sigma_2(t, u) &= 2(m+M)m\dot{p}_\varphi \left[\frac{r \cos(\theta) - u_2 \cos(u_1)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta))} \right] \left[\frac{r(m+3M+2m \sin^2(\theta))}{r(m+3M+2m \sin^2(\theta)) - [3r(M+m) - 2mu_2 \cos(u_1) \cos(\theta)]} \right] \\ \sigma_2(t, u) &= 2(m+M)m\dot{p}_\varphi \left[\frac{r \cos(\theta) - u_2 \cos(u_1)}{mr^2(m+3M+2m \sin^2(\theta)) - [3r(M+m) - 2mu_2 \cos(u_1) \cos(\theta)]} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Si $u_1 = \theta$ y $u_2 = r$ ■

Bibliografía

- [1] A.Poznyak (2005), *Modelado Matemático de los Sistemas Mecánicos, Electricos y Electromecánicos*, <https://www.ctrl.cinvestav.mx/>
- [2] Meyer, K., Hall, G., & Offin, D. (2008). Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem (Vol. 90). Springer Science & Business Media.
- [3] Davies, M., & Schmitz, T. L. (2015). System Dynamics for Mechanical Engineers. Springer New York..
- [4] Preumont, A. (1997). Vibration control of active structures (Vol. 2). Dordrecht: Kluwer academic publishers.
- [5] Jiang, H., Wang, R., Gao, J., Gao, Z., & Gao, X. (2017). Evidence fusion-based framework for condition evaluation of complex electromechanical system in process industry. *Knowledge-Based Systems*, 124, 176-187.
- [6] Jiarula, Y., Wenlei, S., Jun, F., & Qing, T. (2017, October). A fault detection method for complex electromechanical system using improved integrated approach. In *Information Technology and Mechatronics Engineering Conference (ITOEC), 2017 IEEE 3rd* (pp. 1269-1272). IEEE.
- [7] Fault Detection and Isolation in a Nonlinear Electromechanical System. (2017). 2017 International Conference on Sensing, Diagnostics, Prognostics, and Control (SDPC), Sensing, Diagnostics, Prognostics, and Control (SDPC), 2017 International Conference on, SDPC, 264. doi:10.1109/SDPC.2017.58
- [8] Moser, J. (1981). Integrable Hamiltonian systems and spectral theory.
- [9] Schaper, C. D., Larimore, W. E., Seborg, D. E., & Mellichamp, D. A. (1994). Identification of chemical processes using canonical variate analysis. *Computers & chemical engineering*, 18(1), 55-69.
- [10] Wcislik, M., & Suchenia, K. (2017). Holonomicity analysis of electromechanical systems. *Open Physics*, 15(1), 942-947.
- [11] Åström, K. J., & Eykhoff, P. (1971). System identification—a survey. *Automatica*, 7(2), 123-162.

- [12] Ortega, R., Perez, J. A. L., Nicklasson, P. J., & Sira-Ramirez, H. J. (2013). Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications. Springer Science & Business Media.
- [13] Haas, W., & Schlacher, K. (2000). Design of Dynamical Controllers for Electro-mechanical Hamiltonian Systems. IFAC Proceedings Volumes, 33(14), 763-768.
- [14] Chern, S. J. (2002). Stability theory for linear dissipative Hamiltonian systems. Linear algebra and its applications, 357(1-3), 143-162.
- [15] Fujimoto, K., Kakiuchi, H., & Sugie, T. (2002, December). Iterative learning control of Hamiltonian systems. In Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on (Vol. 3, pp. 3344-3349). IEEE.
- [16] Primera, J. R., Sánchez, M., Romero, M., Sierraalta, A., & Ruetter, F. (1999). Analysis of parametric functionals in semiempirical approaches using simulation techniques. Journal of Molecular Structure: THEOCHEM, 469(1-3), 177-190.
- [17] Norton, J. P. (2009). An introduction to identification. Courier Corporation.
- [18] Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A. F., & Golinval, J. C. (2006). Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. Mechanical systems and signal processing, 20(3), 505-592.
- [19] Haber, R., & Unbehauen, H. (1990). Structure identification of nonlinear dynamic systems—a survey on input/output approaches. Automatica, 26(4), 651-677.
- [20] Granville, W. A., Smith, P. F., Longley, W. R., & Byington, S. T. (1980). Cálculo diferencial e integral (No. 515.307 G735.). ^eD. F DF: Limusa.
- [21] Khandekar, A. A., Malwatkar, G. M., & Patre, B. M. (2013). Discrete sliding mode control for robust tracking of higher order delay time systems with experimental application. ISA transactions, 52(1), 36-44.
- [22] Lee, J., Jin, M., & Ahn, K. K. (2013). Precise tracking control of shape memory alloy actuator systems using hyperbolic tangential sliding mode control with time delay estimation. Mechatronics, 23(3), 310-317.
- [23] Wang, J., & Sun, Z. (2012). 6-DOF robust adaptive terminal sliding mode control for spacecraft formation flying. Acta Astronautica, 73, 76-87.
- [24] Jeffrey, A., & Dai, H. H. (2008). Handbook of mathematical formulas and integrals. Elsevier.

- [25] Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1965). Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55). Courier Corporation. Pags. 67-94, 1970.
- [26] Utkin, V., Guldner, J., & Shi, J. (2009). Sliding mode control in electro-mechanical systems. CRC press.
- [27] G. Bachman y L Narici, Functional Analysis, Academic Press, Pag. 205, 1966.
- [28] Bracewell, R. N., & Bracewell, R. N. (1986). The Fourier transform and its applications (Vol. 31999). New York: McGraw-Hill. Pag. 65.
- [29] Greenberg, M. D. (1998). Advanced engineering mathematics (Vol. 2). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- [30] Liberzon, D. (2011). Calculus of variations and optimal control theory: a concise introduction. Princeton University Press.
- [31] Bertsekas, D. P. (1999). Nonlinear programming (pp. 191-276). Belmont: Athena scientific.
- [32] Snyman, J. A. (2005). Practical mathematical optimization.
- [33] Yuan, Y. X. (2008). Step-sizes for the gradient method. AMS IP Studies in Advanced Mathematics, 42(2), 785.
- [34] Combettes, P. L., & Pesquet, J. C. (2011). Proximal splitting methods in signal processing. In Fixed-point algorithms for inverse problems in science and engineering (pp. 185-212). Springer, New York, NY.
- [35] Babuška, R., & Verbruggen, H. (2003). Neuro-fuzzy methods for nonlinear system identification. Annual reviews in control, 27(1), 73-85.
- [36] Ruder, S. (2016). An overview of gradient descent optimization algorithms. arXiv preprint arXiv:1609.04747.
- [37] Hernández, G. (2006). Métodos clásicos de optimización para problemas no-lineales sin restricciones. Departamento de Ingeniería Matemática. Universidad de Chile. Chile.
- [38] Rockafellar, R. T. (1997). Convex Analysis. Princeton landmarks in mathematics.
- [39] Zia, R. K., Redish, E. F., & McKay, S. R. (2009). Making sense of the Legendre transform. American Journal of Physics, 77(7), 614-622.

- [40] Touchette, H. (2005). Legendre-Fenchel transforms in a nutshell. URL <http://www.maths.qmul.ac.uk/~ht/archive/lfth2.pdf>.
- [41] Nielsen, F. (2010). Legendre transformation and information geometry.
- [42] Bernstein, D. S. (2005). Matrix mathematics: Theory, facts, and formulas with application to linear systems theory (Vol. 41). Princeton: Princeton university press.
- [43] Stevenson, P. E. (1972). Introductory quantum chemistry (Schug, John C.).
- [44] Greiner, W. (2012). Quantum mechanics: Special chapters. Springer Science & Business Media.
- [45] Craig, W. (Ed.). (2008). Hamiltonian dynamical systems and applications. Springer Science & Business Media.
- [46] Chavent, G. (2010). Nonlinear least squares for inverse problems: theoretical foundations and step-by-step guide for applications. Springer Science & Business Media.
- [47] Kroese, D. P., Taimre, T., & Botev, Z. I. (2013). Handbook of monte carlo methods (Vol. 706). John Wiley & Sons.
- [48] Munteanu, I., Bacha, S., Bratcu, A. I., Guiraud, J., & Roye, D. (2008). Energy-reliability optimization of wind energy conversion systems by sliding mode control. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 23(3), 975-985.
- [49] Cochocki, A., & Unbehauen, R. (1993). Neural networks for optimization and signal processing. John Wiley & Sons, Inc..
- [50] Ran, C., Yang, H., & Zhang, G. (2018). A gradient based algorithm to solve inverse plane bimodular problems of identification. *Journal of Computational Physics*, 355, 78-94.
- [51] Yang, Z. J., Iemura, H., Kanae, S., & Wada, K. (2007). Identification of continuous-time systems with multiple unknown time delays by global nonlinear least-squares and instrumental variable methods. *Automatica*, 43(7), 1257-1264.
- [52] Vahabi, M., Mehdizadeh, E., Kabganian, M., & Barazandeh, F. (2011). Experimental identification of IPMC actuator parameters through incorporation of linear and nonlinear least squares methods. *Sensors and Actuators A: Physical*, 168(1), 140-148.
- [53] Chen, S. A. B. S., & Billings, S. A. (1992). Neural networks for nonlinear dynamic system modelling and identification. *International journal of control*, 56(2), 319-346.

- [54] Chandrasekar, V. K., Pandey, S. N., Senthilvelan, M., & Lakshmanan, M. (2006). A simple and unified approach to identify integrable nonlinear oscillators and systems. *Journal of mathematical physics*, 47(2), 023508.
- [55] Paarmann, L. D. (2006). *Design and analysis of analog filters: a signal processing perspective* (Vol. 617). Springer Science & Business Media.
- [56] Tseng, M. L., & Chen, M. S. (2010). Chattering reduction of sliding mode control by low-pass filtering the control signal. *Asian Journal of control*, 12(3), 392-398.