CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Control neuronal para sistemas no lineales en cascada con aplicación al tratamiento de aguas residuales

TESIS

Que presenta

DANIEL MUÑOZ CARRILLO

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

En la especialidad de

CONTROL AUTOMÁTICO

Director de la Tesis:

Dr. Wen Yu Liu

México, D. F. **OCTUBRE, 2015**

Para Sony, Emi y Gaby.

A Dios.

Mis soportes terrenales y espirituales.

Agradecimientos

A mi asesor el Dr. Wen Yu Liu, por el tiempo dedicado a este trabajo, por compartirme sus conocimientos y consejos que influyeron durante el desarrollo y la conclusión de este trabajo, muchas gracias.

A mis sinodales, el Dr. Rafael Martínez Guerra y el Dr. Isaac Chairez Oria por dedicar su tiempo en la lectura de este trabajo y aportar valiosos comentarios que enriquecieron la calidad del mismo.

Al CINVESTAV-IPN Unidad Zacatenco, por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios dentro del Departamento de Control Automático. A todos mis profesores, por compartir sus conocimientos y experiencias los cuales ayudaron en mi formación profesional y personal.

Y al CONACYT, por el soporte económico que me otorgó para realizar mis estudios de posgrado.

Resumen

Este trabajo presenta el diseño de un controlador neuronal no lineal para regular el oxígeno disuelto en una planta de tratamiento de aguas residuales. La configuración de la planta consiste en un bioreactor anóxico, un bioreactor aeróbico y un sedimentador secundario; todos estos conectados en cascada. Primeramente, se presenta un modelo matemático de la planta basado en el ASM No. 1. Después, usando diseños en cascada para sistemas pasivos se obtiene un control no lineal para regular el oxígeno disuelto en la cascada formada por los bioreactores. Se muestra que este controlador tiene ventaja sobre un control PI. Por otro lado, se presenta un modelo neuronal de la planta usando redes neuronales jerárquicas. La tarea de las redes neuronales es identificar algunas reacciones que se producen en los bioreactores. Usando el modelo neuronal, se rediseña el control no lineal obteniendo un *controlador neuronal*. La implementación del controlador neuronal y otros resultados son realizados por medio de simulaciones numéricas.

Palabras Clave:

tratamiento de aguas residuales, procesos en cascada, redes neuronales jerárquicas, sistemas pasivos, control de oxígeno disuelto.

Abstract

This thesis work presents a nonlinear neural controller to regulate the dissolved oxygen in a wastewater treatment plant. The plant configuration, as a cascade, consists of an anoxic bioreactor, an aerobic bioreactor and a secondary settler. Firstly, a mathematical model of the plant based on the ASM No. 1 is shown. After, a nonlinear control for the regulation of the dissolved oxygen inside the bioreactors via cascade designs for passive systems is obtained. It is shown that this control has an advantage over a PI control. Furthermore, a neural model of the plant using hierarchical neural networks is presented. The task of neural networks is to identify some reactions occurring in bioreactors. A *neural controller* is obtained based on the neural model. The neural controller is a redesign from the first nonlinear control. The neural controller implementation and other results are achieved through numerical simulations.

Keywords:

wastewater treatment plant, cascade process, hierarchical neural networks, passive systems, dissolved oxygen control

Índice general

1. Introducción **1**

1.1. Procesos en cascada 2

1.2. Tratamiento de aguas residuales 3

1.2.1. Proceso de lodos activados 3

1.2.2. Desafíos de control para el PLA 6

1.3. Estado del arte 8

1.4. Motivación 13

1.5. Objetivos 14

1.6. Estructura 15

2. Modelo matemático para una planta TAR **17**

2.1. Configuración de la planta 18

2.2. Modelo de los bioreactores 21

2.3. Modelo del sedimentador (TSS) 25

2.4. Acoplamiento entre el modelo del bioreactor y el sedimentador 32

2.5. Importancia del modelado presentado 33

3. Control de oxígeno disuelto en la planta de TAR **35**

3.1. Teoría general de sistemas pasivos 35

3.1.1. Estabilidad de sistemas pasivos 38

3.2. Diseños en cascada 40

3.3. Control de oxígeno disuelto 42
3.3.1. Control en cascada de OD 42
3.3.2. Control PI para el OD 50
3.3.3. Comparación entre los controladores 54

4. Modelado de procesos en cascada con redes neuronales jerárquicas 59
4.1. Introducción 59
4.2. Modelado de procesos en cascada por RNJ 61
4.3. Análisis de estabilidad para los algoritmos de aprendizaje 66
4.4. Aplicación del modelo neuronal jerárquico en el PLA 68
4.4.1. Generalización 73

5. Control neuronal en la planta de TAR 77
5.1. Control en cascada de OD en el modelo neuronal 77
5.2. Control neuronal en cascada para el OD en la planta de TAR 80

6. Conclusiones 85

Referencias 89

A. Descripción del ASM No. 1 97
A.1. Variables de estado 97
A.2. Procesos descritos 99

B. Redes neuronales 103
B.1. Arquitecturas 104
B.2. Procesos de aprendizaje 105
B.3. Aproximación de una función 107

C. Demostración de Teorema 4.1 109

Índice de figuras

1.1. Esquema de un sistema en cascada. 2
1.2. Diagrama general del proceso de lodos activados para el tratamiento de aguas residuales [11]. 4
1.3. Tanque de sedimentador secundario. 7

2.1. Configuracion simple de una planta de TAR. 19
2.2. Esquema de flujos para un sedimentador unidimensional. 27
2.3. Modelo del sedimentador en capas. Interacción de flujos entre capas. 29

3.1. Estabilización de una cascada por realimentación de estado. 36
3.2. Interconexión realimentada de sistemas pasivos. 38
3.3. Sistema en cascada. 41
3.4. Cascada de OD en los bioreactores. 43
3.5. Cascada como interconexión realimentada de dos sistemas pasivos. 48
3.6. Control en cascada de OD. 50
3.7. Control en cascada de OD con perturbaciones. 51
3.8. Diagrama a bloques para el control por PI de OD en el tanque aeróbico. . . 53
3.9. Control de OD con un PI convencional. 55
3.10. Control de OD con un PI convencional y en presencia de perturbaciones. . . 56
3.11. Error de OD en el tanque aeróbico. 57

4.1. Modelado de plantas en cascada. 61

4.2. Modelado de procesos en cascada con redes neuronales jerárquicas. 64
4.3. Redes neuronales jerárquicas generales. 64
4.4. Estrategia de modelado vía RNJ para una planta de TAR. 70
4.5. Identificación de la reacción de amonio mediante RNJ. 72
4.6. Errores de identificación de la reacción de amonio. 73
4.7. Identificación de reacciones con conocimiento del error entre bloques. 74
4.8. Resultado de la generalización del modelo neuronal. 75

5.1. Control neuronal en cascada de OD en el modelo neuronal. 81
5.2. Control neuronal en cascada de OD en la planta real. 84

A.1. Caracterización del COD total. 98

B.1. Modelo simple de una neurona. 104
B.2. Arquitecturas de redes neuronales. 106
B.3. Esquema general de identificación de sistemas con redes neuronales. 108

Índice de Tablas

2.1. Componentes orgánicas del ASM No. 1. 20
2.2. Parámetros del ASM No. 1 a 20 ºC y volúmenes de los bioreactores. 26
2.3. Parámetros para el modelo del sedimentador. 32

3.1. Variables operacionales de la planta de TAR. 49

A.1. Reacciones básicas descritos por el ASM No.1. 101

Lista de acrónimos

ASM No. 1 Del inglés: *Activated Sludge Model No. 1*, Modelo de lodos activados No. 1

BIBO Del inglés: *Bounded input-Bounded output*, Entrada acotada-salida acotada

COD Del inglés: *Chemical Oxygen Demand*, Demanda de oxígeno bioquímico

CPM Control predictivo basado en modelos

ECD Estado cero detectable

OD Oxígeno disuelto

pH Potencial de hidrógeno

PI Proporcional Integral

PID Proporcional Integral Derivativo

PLA Proceso de lodos activados

RNJ Redes neuronales jerárquicas

SISO Del inglés: *Single input-Single output*, Una entrada-una salida

TAR Tratamiento de aguas residuales

TSS Tanque de sedimentador secundario

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, por la búsqueda de un desarrollo social, económico y tecnológico, la población mundial ha causado una disminución preponderante de los recursos naturales disponibles. A raíz de esto, diversas actividades del individuo contemporáneo están obligadas a ser de carácter sustentable, para así, entre muchos otros beneficios, conseguir el máximo aprovechamiento de cada uno de los recursos. En ese sentido, cada día, acciones sustentables como el reciclaje y reutilización de materiales, el uso de fuentes de energía renovables o el tratamiento de aguas residuales juegan un rol más importante. Sin embargo, el impacto ambiental que producen estas acciones no siempre es suficiente ante la alta demanda de eficiencia que se requiere. Esto se debe principalmente a la complejidad de las acciones sustentables para producir un alto índice de costo/beneficio. Por la importancia y complejidad de dichas acciones, han llamado la atención de ingenieros e investigadores para indagar en soluciones que permitan mejorarlos en algún sentido. Uno de los procesos más interesantes para la investigación es el tratamiento de aguas residuales, por el desafío que resulta obtener una descripción matemática fehaciente y controladores más eficientes, sin olvidar también, que con este tratamiento, se puede reutilizar un elemento tan vital como el agua. Por esto, el foco de estudio en este trabajo es el desarrollo de un controlador para plantas de tratamiento de aguas residuales visto desde un enfoque particular como lo es un proceso en cascada.

1.1. Procesos en cascada

Frecuentemente en la realidad se encuentran sistemas o procesos que poseen subsistemas o subprocesos respectivamente, cuya interconexión forma una cascada. Un sistema en cascada es caracterizado normalmente por dos subsistemas. Solo uno de estos (H_0) contiene la entrada del sistema u y es llamado *driven system* (sistema que maneja). El otro subsistema (H_1), conocido como *driving system* (sistema manejado), recibe la salida de (H_0) [1]. La salida de la cascada es y. El esquema del sistema en cascada es ilustrado en la Figura 1.1.

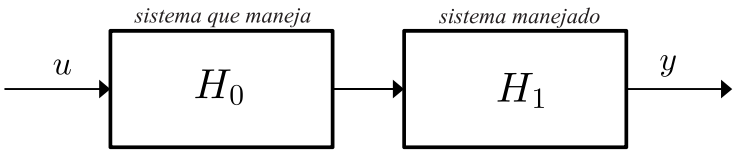


Figura 1.1: Esquema de un sistema en cascada.

El estudio de estos sistemas ha sido enfocado en encontrar condiciones de estabilidad entrada-salida para toda la cascada. Por ejemplo, en [2] y [3] proponen condiciones de estabilidad global para dos sistemas no lineales conectados en cascada, mientras que en [4] establece también condiciones de estabilidad global aunque para una cascada formada por un sistema no lineal (*driven system*) con un sistema lineal (*driving system*).

Muchas aplicaciones prácticas aparecen en configuración de cascada. Un sistema mecánico con esta configuración es el TORA (*Translational Oscillator with Rotating Actuador*, Oscilador traslacional con actuador rotacional) [5], que consiste en una plataforma traslacional que es estabilizada por medio de una masa giratoria excéntrica. Otras cascadas más comunes aparecen en los sistemas electromecánicos donde existe una conexión entre la parte eléctrica (*driven system*) y la parte mecánica (*driving system*) tales como robots manipuladores con manejadores de corriente alterna [6] o motores de corriente directa manejados por un convertidor de potencia [7]. Por otro lado, es más fácil identificar una cascada cuando se habla de algún tipo de proceso. Los casos más representativos son la destilación fraccionada en la

cual se obtiene principalmente la gasolina [8]; o configuraciones de reactores bioquímicos en cascada con aplicaciones en la purificación de metales, obtención de plásticos o el tratamiento de aguas [9].

Por lo antes expuesto, una de las propuestas de este trabajo es vincular los estudios de estabilidad de una cascada para una aplicación que posea esta propiedad estructural como lo es el tratamiento de aguas residuales, el cual se describe a detalle en la siguiente sección.

1.2. Tratamiento de aguas residuales

El tratamiento de aguas residuales (TAR) tiene como objetivo eliminar los contaminantes físicos, químicos y biológicos presentes en el agua del uso humano a través de procesos físicos, químicos y biológicos. Los procesos más utilizados son tres: el proceso de lodos activados, la zanja de oxidación y digestión anaeróbica. Los dos primeros son alternativas para el tratamiento biológico de flujo líquido mientras que el último se refiere al tratamiento de residuos sólidos [10]. En particular, se restringirá el estudio al proceso de lodos activados.

1.2.1. Proceso de lodos activados

El proceso de lodos activados (PLA) consiste en el cultivo de microorganismos en el agua residual bajo condiciones que optimizan el consumo de materia orgánica biodegradable en el afluente. La Figura 1.2 muestra un diagrama a bloques general sobre el PLA. Como se puede ver, el afluente pasa a través de un bioreactor anóxico en el cual el nitrato es reducido a nitrógeno y el carbón orgánico es consumido. Después, en el bioreactor aeróbico el consumo de carbón orgánico ocurre adicionalmente y el amonio es convertido a nitrato. La recirculación de líquido mezclado regresa el nitrato generado al bioreactor anóxico para su reducción a gas nitrógeno. El tanque de sedimentación secundario (TSS) regresa una corriente concentrada de lodo activado al reactor anóxico mientras pasa efluente clarificado a través de un filtro y de ahí a una escudilla de desinfección para la inactivación de microorganismos perjudiciales [11].

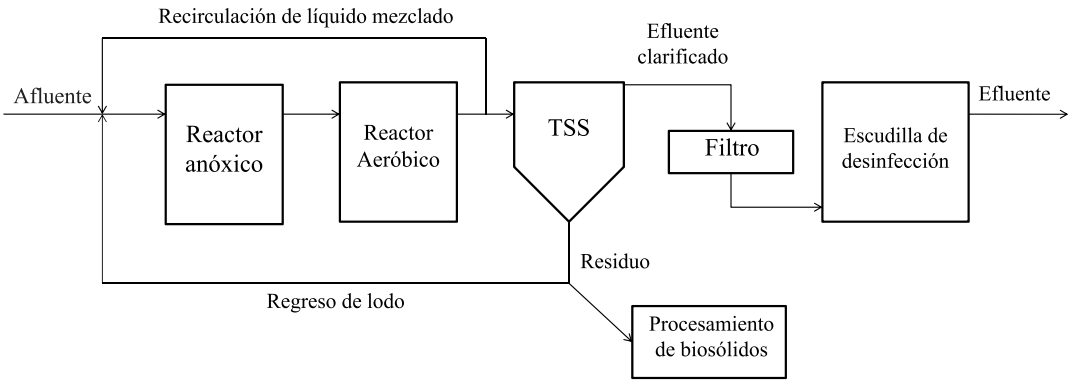


Figura 1.2: Diagrama general del proceso de lodos activados para el tratamiento de aguas residuales [11].

Para conocer más a detalle las variables involucradas, se describe a continuación cada una de las etapas del proceso.

- Reactor anóxico . Es usado para eliminación de nitrógeno (N). A través de la denitrificación, que toma lugar en los reactores anóxicos, el nitrato (NO_3^-) es reducido a gas nitrógeno, que pasa inofensivamente hacia la atmósfera. La siguiente reacción simplificada muestra lo antes explicado

$$2NO_3^- + 2H^+ \rightarrow N_2 + H_2O + 2{,}5O_2$$

  Las bacterias denitrificantes en el reactor anóxico usan nitrato recirculado de un reactor aeróbico como aceptor de electrón terminal para su crecimiento bajo condiciones de ausencia de oxígeno. La razón de cambio de la recirculación presenta un desafío de control, debido a que debe ser lo suficientemente rápido para suministrar el adecuado nitrato sin introducir exceso de oxígeno disuelto. En algunas instalaciones, la eliminación de nitrógeno adicional es lograda con un reactor anóxico seguido de un reactor aeróbico. Una alternativa para uso de un solo reactor anóxico es el encendido y apagado

de circulamiento de aire, así se asegura tanto la nitrificación como la denitrificación en el mismo reactor.

- Reactor aeróbico. Algunos microorganismos crecen bajo condiciones aeróbicas, es decir, en presencia de oxígeno disuelto. Así, con estos microbios lo que se busca es eliminar la demanda de oxígeno bioquímico, que es una medida de la cantidad de carbón orgánico disponible para apoyar el crecimiento microbiano. Las condiciones aeróbicas están conducidas hacia el crecimiento de una amplia variedad de microbios, incluyendo bacterias heterotróficas, que remueven la demanda de oxígeno bioquímico del agua residual, así como también bacterias nitrificantes que oxidan el amonio (NH_4^+) a nitrato y después a nitrito (NO_2^-). Esto último es conocido como la nitrificación. Las reacciones simplificadas que describen este proceso son

$$\begin{aligned} NH_4^+ + 1{,}5O_2 &\rightarrow NO_2^- + H_2O + 2H^+ \\ NO_2^- + 0{,}5O_2 &\rightarrow NO_3^- \end{aligned}$$

  La oxigenación en el reactor es lograda típicamente usando impulsores de superficie o bien difusores sumergidos, sin embargo el costo de energía que demanda es muy grande. Por tanto, debido a los costos de energía de la oxigenación y el efecto trascendental de la oxigenación sobre el crecimiento de la biomasa, el control de concentración de oxígeno disuelto (OD) es uno de los problemas más estudiados en el TAR.

- Tanque de sedimentador secundario (véase Figura 1.3). Después de abandonar los bioreactores, los lodos activados entran al TSS, donde grupos de microbios y otras particulas de materia son atrapadas para sedimentarse y formar una membrana de lodo en la parte inferior del tanque. El efluente clarificado sale de la parte superior del tanque y fluye a los filtros (zona de clarificación del tanque), mientras que el lodo sedimentado es continuamente removido de la parte inferior del tanque por un sistema de remoción hidráulico (zona de espesamiento). Un sistema de control es usado para ajustar el flujo de una parte de lodo sedimentado que regresa a los bioreactores. Esto

representa otra tarea de control, pues si el lodo regresa a una razón muy lenta, la membrana de lodo puede acercarse a la superficie, donde puede ser fácilmente llevada al efluente clarificado. Si el lodo regresa a una razón muy alta, la turbulencia causaría que la membrana se convierta en sedosa, diluyéndose en la corriente y reduciendo la eficiencia del TSS. El resto de lodo se desperdicia o pasa a otra etapa de procesamiento.

- Filtros. El propósito de filtración es decrementar la concentración de partículas sólidas en el efluente tratado mediante el paso del agua a través de medios granulares o de tela. Solo requieren de mantenimiento cuando disminuye su efectividad de operación.

- Escudilla de desinfección. Es el paso final y es logrado comúnmente mediante la dosificación de cloro o la exposición de luz ultravioleta al efluente clarificado. En este proceso muchos de los microorganismos son aniquilados antes de que el agua sea reutilizada. El cloro efluente es controlado por un lazo de realimentación que establece la dosis de cloro basado en la concentración de cloro efluente.

- Procesamiento de biosólidos. Es una etapa secundaria del TAR. El proceso más utilizado es la digestión anaeróbica. Más detalles en [10].

Cabe mencionar que la descripción anterior es solo una generalización del PLA, pues existen variantes en las configuraciones de los reactores o bien hay otra clase de etapas donde se busca optimizar el proceso.

1.2.2. Desafíos de control para el PLA

Después de la descripción, de acuerdo a [12], los desafíos para optimizar esta clase de procesos son:

1. Configuraciones alternativas del proceso.

2. Uso eficiente de instrumentación en-línea.

3. Estimación de variables no medibles.

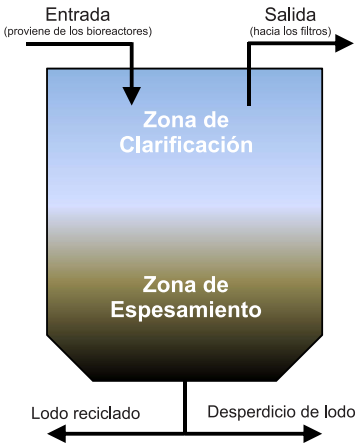


Figura 1.3: Tanque de sedimentador secundario.

4. Mejores diagnósticos de condiciones de operación.

5. Mejores controladores y estrategias de operación.

Sobre el punto cinco es donde se centra el desarrollo de este trabajo. Por ello, en [12] se sintetiza las características principales de un controlador. Un sistema de control para el TAR debe considerar actuar sobre tres niveles diferentes de ambición y complejidad, esto es:

1. Mantener la planta en funcionamiento continuo y evitar fallas graves en el mismo.

2. Minimizar los costos de operación mientras se satisfacen los límites de permisibilidad.

3. Mejorar la calidad del efluente.

Las principales variables involucradas (frecuentemente usadas) dentro de un sistema de control que en la actualidad aparecen en plantas reales se encuentran por un lado, como variables manipuladas, el estado físico-químico de la biomasa (microbios) y el estado biológico del proceso; y por otro lado, entre las variables de control se encuentran la razón de cambio de la oxigenación, la razón de cambio del recirculamiento de lodo activado y la razón de cambio de lodo sedimentado en el TSS.

1.3. Estado del arte

EL PLA ha sido estudiado con gran interés desde finales del siglo pasado por el desafío que involucra tanto en la búsqueda de una descripción matemática (modelo), como en el diseño de controladores que optimicen el proceso o regulen una o más variables dentro del mismo. Las dificultades para obtener un modelo matemático y más relevante, para el diseño de controladores son las siguientes:

1. Complejidad del proceso debido a dinámicas no lineales.
2. Grandes incertidumbres.
3. Tiempos de escala múltiples en el proceso dinámico interno.
4. Estructuras multivariables.

Adicionalmente, en particular para el diseño de controladores, existe la limitante de mediciones disponibles de variables durante la operación del proceso. La consecuencia más interesante que lo anterior arroja es que las técnicas convencionales de control quedan marginadas u obsoletas para regular/optimizar el proceso. Sin embargo, en la literatura existen diversos trabajos donde se exponen estrategias de control que buscan ofrecer una solución a las contrariedades mencionadas y los cuales se exponen a continuación.

Una estrategia de control muy estudiada y aplicada en muchos de los procesos industriales es el control predictivo basado en modelos (CPM). Un primer trabajo es presentado por Serra, *et. al.* [13], donde proponen un sistema experto en tiempo real (*software* y *hardware*) para controlar el OD mediante un algoritmo de control predictivo no lineal. El algoritmo usa datos obtenidos de la planta mediante sensores, donde son procesados y recursivamente se estima la razón de cambio del oxígeno. Otro trabajo similar es [14], donde controlan el OD mediante un CPM. Añaden un estudio sobre el efecto de algunos parámetros de sintonización para el controlador como el horizonte de predicción, pesos de entrada y el tiempo de muestreo. En [15] proponen un controlador jerárquico para el seguimiento de OD como referencia de trayectoria. Consideran dentro del proceso la eliminación de nitrógeno

y fósforo. El controlador es de dos niveles para seguir el OD en el reactor. El control de nivel superior genera las trayectorias mediante un CPM y el control de nivel inferior forza al sistema de oxigenación a seguir esas trayectorias. Un estudio similar sobre un controlador predictivo jerárquico fue presentado en [16]. La estrategia usada fue una descomposición funcional que produjo tres capas de control: un supervisor, un optimizador y un seguidor. La característica de este controlador es la robustez bajo una gran variedad de entradas perturbantes en el afluente, pues son predecidas por medio de un CPM. Con esas predicciones su controlador permite atenuar los efectos que producen. En [17], se modela el PLA con un sistema bilineal discreto mediante la aplicación de una técnica de identificación de sistema por medio del error de predicción recursivo y se aplica un algoritmo de CPM bilineal para mejorar la eliminación de nitrógeno. Por otra parte, Duzinkiewicz, *et. al.*, [18], desarrollan un controlador jerárquico de dos niveles para un seguimiento de trayectoria de OD en el PLA. El control de nivel superior genera las trayectorias de flujo de aire deseado dentro de los reactores aeróbicos. Un algoritmo de CPM se usa para diseñar este nivel de control. El controlador de nivel inferior forza al sistema a seguir estas trayectorias minimizando el costo de energía. Un control predictivo se aplica para diseñar este controlador basado en una dinámica híbrida linealizada a pedazos del sistema de oxigenación. Sin embargo, debido a la limitada frecuencia de conmutación del oxigenador, deducen otro algoritmo de control predictivo híbrido no lineal basado en un algoritmo genético para evitar las restricciones de conmutación. Por ultimo, Han y Quiao, en [19], realizan el diseño e implementación de un CPM no lineal para una planta de TAR. Esta estrategia utiliza una red neuronal de función radial básica autorganizada como identificador de la planta y un método de optimización multiobjetivo. El controlador actúa sobre las concentraciones de OD y nitrato. Presentan también las condiciones de estabilidad de su esquema de control.

Por otro lado, en la literatura se encuentran trabajos que proponen estrategias de control adaptables. Se presentan algunos trabajos interesantes sobre esta temática. Para mejorar el control de la concentración de OD en el oxigenador de una planta de TAR, en [20] sugieren un control no lineal adaptable. La dinámica de OD la representan por medio de un modelo bilineal, del cual interesa solucionar las tareas de identificación de parámetros y su control.

La estrategia de control adaptable que usan es la combinación de un procedimiento de mínimos cuadrados para obtener una única estimación de parámetros y un algoritmo de control por varianza mínima para el control del proceso. Nejjari, *et. al.*, en [21], presentan un control adaptativo no lineal linealizado por realimentación para un modelo del PLA. La estructura está basada en un modelo no lineal del proceso combinado con un estimador que juega un rol de sensor para la estimación en-línea de los estados biológicos y las variables parámetricas de interés del bioproceso. Su controlador demuestra robustez significante y efectividad contra ruidos en las mediciones y otras perturbaciones. Más recientemente, en [22] presentan un modelo de agente libre de aprendizaje reforzado que aprende autónomamente a sintonizar activamente la referencia del OD. Por activo se refiere a una sintonización continua, minuto tras minuto. Por autónomo y adaptativo se refiere a que el agente por sí mismo aprende desde su interacción directa con la planta de TAR. Su objetivo es eliminar el amonio del agua residual dentro del PLA sin perder eficiencia ante los cambios abruptos de carga de afluente. Otro de estos trabajos propone una combinación entre un CPM y adaptabilidad y es presentado por Wahab, *et. al.* [23], donde desarrollan un nuevo CPM adaptativo manejado por datos con restricciones en la entrada. El método que proponen emplea una técnica de identificación del subespacio y una descomposición de valores singulares basada en una estrategia de optimización para formular el algoritmo de control e incorporar las restricciones en la entrada. Consideran tanto un control predictivo directo como un indirecto. Ambos controladores son aplicados a un modelo no lineal de cuarto orden del PLA, donde el control es la tasa de cambio del OD aplicado al reactor. Por ultimo, Vlad, *et. al.*, [24], presentan una comparación entre un CPM y un control proporcional-integral (PI) de ganancia programada. El objetivo de ambos controladores es regular la concentración de OD dada como una referencia obtenida de pruebas preliminares y como consecuencia obtener una concentración de sustrato en el efluente dentro de los estándares legales. Esta concentración no es medible ni otra variable dentro del proceso, a excepción del OD. Lo aplican a un modelo no lineal multivariable de dos entradas y dos salidas.

En los últimos años, el control inteligente ha sido una de la estrategias de control más utilizadas, especialmente cuando se trata de controlar sistemas complejos no lineales. Por

ello, es inherente la existencia de trabajos que utilizan dicha estrategia para el control del PLA y por eso se presentan algunos de ellos. En [25], utilizan una estrategia de control multicriterio para decrementar el costo global del PLA a través de un supervisor difuso Takagi-Sugeno. Además, proponen un estudio sobre la elección de las variables manipuladas y medidas basado en un análisis de sensibilidad sobre un modelo reducido. Su estrategia asume el compromiso entre costo y calidad del efluente. Por otra parte, en [26], estudian una configuración particular del PLA, es decir, para la eliminación de nitrógeno alternan las condiciones aeróbicas y anóxicas en un mismo reactor mediante la conmutación de encendido y apagado secuencialmente de la oxigenación. La optimización de la oxigenación es lograda a partir de un algoritmo genético. Demostraron un procedimiento de optimización para minimizar las cargas de contaminantes en el afluente usando un modelo completo del proceso. A través de un criterio de evaluación riguroso muestran que usando el algoritmo genético, una solución óptima puede ser encontrada, donde tanto la carga de contaminantes y el consumo de energía puede llegar alcanzar hasta un 10 % de efectividad comparada con estrategias de control convencionales. Por otra parte, Hernandez-Vargas, *et. al.,* [27], presentan un sistema inteligente híbrido basado en lógica difusa para controlar la tasa de cambio de las concentraciones de biomasa y sustratos en un reactor, usando la tasa de cambio del recirculamiento de lodo activado y la inyección de OD. Además, para estimar las concentraciones presentan un observador neuronal recurrente de alto orden discreto, el cual es entrenado en-línea mediante un algoritmo basado en un filtro extendido de Kalman. En otro trabajo, [28], se presenta un controlador difuso para eliminar el nitrógeno en el PLA bajo la condición de suficiencia e insuficiencia de fuente de carbón en el afluente. La razón de carbono/nitrógeno del afluente fue seleccionado como variable de entrada; y la razón de afluencia y distribución de volumen en cada etapa fueron seleccionados como variables de salida. La información detallada sobre el desarrollo del modelo difuso fue obtenida a partir del análisis y recopilación de datos experimentales. Después de un periodo de tres meses de experimentos, muestran que la eficiencia de eliminación de nitrógeno total alcanzó un 95.1 % usando su controlador. Por último, Qiao, *et. al.*, [29], proponen un método para modelar y controlar en-línea el proceso de TAR. De acuerdo al caracter de aproximación de una red neuronal *feedforward*, proponen un modelo

de red neuronal *feedforward* para simular y desacoplar el TAR. Así, diseñan un controlador multivariable. Además, la estabilidad es probada del controlador en una inferencia general vía la limitación de la razón de aprendizaje de la red neuronal. Comparan su método con un CPM y un controlador proporcional-integral-derivativo (PID).

Por la complejidad del proceso estudiado, se ha mencionado brevemente que los controladores convencionales no resultan eficientes al momento de implementarlos, o bien, se requiere establecer suposiciones sobre la operación del proceso para lograr su objetivo de control. No obstante, se han encontrado trabajos que proponen modificaciones estructurales de estos controladores para mejorar su desempeño. Ejemplos son mencionados a continuación. En [30] desarrollan un control robusto de dos etapas para mejorar el desempeño del PLA. En la primera etapa, se asegura que un comando asintótico siga la concentración de sustrato con atenuación simultánea de las fluctuaciones de la concentración de OD. La primera etapa es un controlador dinámico puro. El segundo controlador es un PID que actúa directamente sobre la concentración de OD. La aportación de su trabajo fue el desarrollo de este controlador lineal robusto que controla las concentraciones de sustrato en el efluente sin la necesidad de medirlas. Wahab, *et. al.* [31], investigan la aplicación óptima de controladores PID multivariables. La aportación significativa es el desarrollo de un método de sintonización de los parámetros de control donde solo practican pruebas sobre la respuesta al escalón o respuesta a la frecuencia. Este método está basado en una técnica de optimización para encontrar la calidad estándar del efluente a un mínimo costo. Así, sus resultados muestran un potencial ahorro de energía y se mejora notablemente la eliminación de nitrógeno.

Finalmente, para exaltar las investigaciones sobre el control del PLA, se presenta una recopilación de trabajos donde resaltan otro tipo de estrategias de control desarrolladas por parte de sus autores. Un trabajo de estos es [32], donde presentan un controlador multivariable robusto para el PLA. El controlador estabiliza robustamente los nutrientes del efluente en presencia de incertidumbres como el comportamiento de fósforo acumulado en organismos, así como también, atenuar efectivamente las mayores perturbaciones introducidas como cambios de tipo escalón. Este estudio muestra que el desempeño de el controlador es superior a controladores PI multilazos SISO para regular los nutrientes del afluente en términos de

estabilidad y desempeño. Betancur, *et. al.*, [33], proponen un método para optimizar robustamente la operación de bioreactores en un PLA cuando pocas variables están disponibles y el modelo que lo describe es incierto. La estrategia es un control óptimo de tiempo exacto, sin embargo para implementarla se requiere conocer perfectamente el modelo del proceso y todas las variables. Por eso, proponen dos estrategias de control para aproximar la mejor solución de tiempo óptimo arbitrariamente. Sus estrategias son robustas frente a incertidumbres del modelo de la planta. Finalmente, Aguilar-López en [34], diseña una ley de control robusta SISO para la regulación de OD en PLA vía la razón de flujo de aire. El diseño de control está relacionado con un estimador de incertidumbres basado en un control de modelo genérico. La trayectoria deseada de OD es propuesta por un PI del error de regulación y el error de modelado relacionado con el estimador. El comportamiento del sistema en lazo cerrado es analizado via el error de estimación y el error de regulación.

1.4. Motivación

Después de la extensa recopilación de trabajos se destacan las siguientes puntos

1. El modelado que describe al PLA está normalmente representado por ecuaciones diferenciales ordinarias o se busca obtener un modelo a partir de una base de datos de una planta real para emular a la misma. Una desventaja de la primera forma de modelado es la obtención de modelos con dinámicas desconocidas e incertidumbres paramétricas y casi ningún trabajo contempla el modelado del proceso completo. La segunda forma es más versatil en ese sentido. Por ejemplo, estructuras como redes neuronales son usadas para identificar plantas reales y los parámetros que tienen estructuralmente se modifican de acuerdo a un algoritmo de aprendizaje que hace a la red comportarse como la planta [35]. Así, puede reducirse el efecto de incertidumbres paramétricas presentes dentro de un modelo en ecuaciones diferenciales.

2. Las estrategias de control buscan optimizar el proceso respecto al costo de energía que consume y la mejora en la calidad del efluente. También son robustas ante perturba-

ciones en el proceso, el desconocimiento de dinámicas que no fueron consideradas en su diseño o ante ruidos producidos en las mediciones de variables. En la mayoría de los controladores, no se considera el control de todo el proceso, sino más bien consisten en controlar a una etapa del mismo o una variable. La más común e importante es el OD.

3. Existe un déficit en la medición de variables dentro del proceso o dinámicas desconocidas. Por eso, algunos trabajos presentan estructuras que permiten la estimación con observadores o redes neuronales. La combinación de estas estructuras con los controladores ha sido lo que prevalece en la mayoría de los trabajos. Para evadir el problema de medición, otras estrategias de control buscan reducir el número de variables medibles.

4. Las técnicas de control desarrolladas son comparadas con técnicas convencionales como el PI y PID.

Por lo antes mencionado y en vías de acotar sus alcances, la motivación de este trabajo es establecer un controlador para el OD de la planta de TAR vista como un proceso en cascada. Se elige controlar el OD por ser la variable principal que permite al PLA realizar la tarea de eliminación de contaminantes en el afluente. No hay trabajos en la literatura que aprovechen esa característica estructural de la planta para el diseño de controladores. Por otra parte, para mejorar el modelado de la planta y consecuentemente, encontrar un controlador más práctico en la realidad, se considera establecer un sistema que logre estimar dinámicas complejas que permita obtener información más confiable para la implementación del controlador. Por último, es imperativo establecer un comparativo entre la propuesta de control desarrollada y técnicas convencionales que ejecuten el mismo objetivo de control.

1.5. Objetivos

Diseñar un control neuronal no lineal para regular el oxígeno disuelto en un modelo de una planta de tratamiento de aguas residuales, explotando su característica de proceso en cascada (establecer una relación entrada-salida). Para ello, se consideran los siguientes puntos

1. Obtener un modelo de la planta de tratamiento de aguas residuales.
2. Identificar el proceso en cascada (modelo de la planta) utilizando una nueva técnica de modelado por medio de redes neuronales, es decir, usando el enfoque de redes neuronales jerárquicas [36]. Con esto, se consigue un modelo neuronal del proceso.
3. Utilizar alguna técnica para el diseño de un control no lineal en cascada [37], que se base en el modelo neuronal.
4. Obtener resultados en simulación sobre la implementación del controlador.

1.6. Estructura

El Capítulo 1 describe el proceso de lodos activados para el tratamiento de aguas residuales y se establecen cuáles son los desafíos de control que rodean al proceso. Además, presentan trabajos presentes en la literatura donde se aborda los diferentes esquema de control propuestos. Por último, se presenta la motivación que originó el desarrollo de este trabajo y los objetivos trazados.

En el Capítulo 2 se presenta un modelo matemático para una configuración simple de una planta de tratamiento de aguas residuales. El modelo está dado en ecuaciones diferenciales ordinarias y está basado en el ASM No. 1 y el modelo para un sedimentador secundario de Vitasovic (1986).

El Capítulo 3 describe el diseño de un controlador no lineal para regular el OD en la cascada formada por los tanques. El controlador está basado en la teoría de sistemas pasivos que permite entre otras cosas, mostrar la estabilidad de la cascada. Este controlador es comparado con un PI clásico. Se muestran los resultados obtenidos en simulación numérica.

En el Capítulo 4 se presenta una alternativa de modelado a través de redes neuronales jerárquicas. El enfoque es aplicado al modelo de la planta descrito en el Capítulo 2, donde se identifican algunas reacciones generadas en los bioreactores a través de neuronas perceptrón multicapa. Después de un tiempo de aprendizaje en las neuronas, se presenta una generalización del modelo neuronal.

En el Capítulo 5 se realiza un controlador no lineal para el modelo neuronal, siguiendo el proceso de diseño presentado en el Capítulo 3 para el mismo objetivo de control. Es llamado control neuronal. El controlador es aplicado también al modelo real del Capítulo 2 y se describe bajo que condiciones es viable su aplicación. Se realizan simulaciones numéricas para verificar su desempeño y se discuten los resultados.

El Capítulo 6 detalla las conclusiones y perspectivas de trabajo a futuro originadas con el desarrollo de esta tesis.

Finalmente, los Apéndices A, B y C muestran respectivamente, un resumen de los procesos descritos en el ASM No. 1, una introducción a redes neuronales y la demostración del teorema base del enfoque de redes neuronales jerárquicas.

Capítulo 2

Modelo matemático para una planta TAR

Este capítulo presenta un modelo matemático para una configuración particular de una planta de TAR que describe el PLA. Una parte del proceso, la que concierne a la dinámica dentro de los bioreactores (anóxico o aeróbico), se describe a través de uno de los modelos más aceptados por los especialistas en los últimos años y es aquel presentado por un equipo de trabajo formado por la Asociación Internacional sobre la Calidad del Agua (*IAWQ*, por sus siglas en inglés) en 1987, el denominado IAQW *Activated Sludge Model No. 1* (ASM No. 1), [38]. Este modelo proporciona una descripción en ecuaciones sobre el comportamiento dinámico de cada una de las concentraciones de las componentes orgánicas presentes en los bioreactores; que a su vez son incluidas dentro de ecuaciones de balance de masas para cada bioreactor. En el Apéndice A se presenta una descripción general del modelo que sirve como contexto para las ideas planteadas en este Capítulo. La otra parte del proceso describe la dinámica de un sedimentador secundario propuesto por Z. Vitasovic en 1986, basado en la teoría de flujo de sólidos suspendidos. Para obtener un modelo que describe el proceso completo, se presenta una opción para el acoplamiento entre los modelos de los bioreactores y el sedimentador. Por otra parte, el modelo del bioreactor y del sedimentador han sido exhaustivamente reportados y estudiados como en [39] y [40], por lo que siguen siendo confiables

para el desarrollo de proyectos de investigación recientes. Por lo mismo, se enfatiza el rol que juega retomar estos modelos para describir una planta real en la realización de este trabajo.

2.1. Configuración de la planta

La planta de TAR que se estudia en este trabajo es una configuración simple del PLA que consiste en dos bioreactores continuos, uno del tipo anóxico y otro aeróbico; además de un TSS, todos estos formando un proceso en cascada tal y como se muestra en la Figura 2.1. Aquí, Q_{in}, Q_r, Q_R, Q_m, Q_a y Q_w denotan el flujo del afluente, flujo de reciclaje interno, flujo de reciclaje externo, flujo de afluente mezclado ($Q_m = Q_{in}+Q_r+Q_R$), flujo de alimentación de OD y flujo de lodo sobrante o en exceso, respectivamente; en unidades de $[m^3\ d^{-1}]$. La entrada Q_a en el bioreactor aeróbico es la más significativa pues se considera la energía suministrada a la planta que produce el crecimiento de la biomasa. Además, x^γ, $\gamma = \{in, a, o, R, e\}$ denota un vector de estado de las concentraciones de las componentes orgánicas en la localidad γ, es decir, x^{in} es el vector de concentración de las componentes del afluente, x^a es la concentración en el efluente del reactor anóxico, x^o es la concentración del efluente del reactor aeróbico, x^R es la concentración en la zona de espesamiento del TSS y x^e es la concentración en la zona de clarificación del TSS o en otras palabras, la concentración del efluente de todo el proceso. El vector x^m denota la concentración de afluente mezclado caracterizado por

$$x^m = \frac{Q_{in}x^{in} + Q_r x^o + Q_R x^R}{Q_m} \tag{2.1}$$

Con base en el ASM No.1, existen 13 componentes orgánicas fundamentales que actúan sobre todo el proceso, divididas en componentes solubles (S) o partículas (X). Los índices de calidad del agua tales como COD (demanda de oxígeno bioquímico), NH-N_4 (amonio) y SS (Partículas suspendidas) son descompuestos a través de esas componentes. Así, el vector de estado x^γ queda definido por

$$x^\gamma = \left[\begin{array}{cccccccccccc} S_I & S_S & X_I & X_S & X_P & X_{BH} & X_{BA} & S_{NO} & S_{NH} & S_O & S_{ND} & X_{ND} & S_{alk} \end{array} \right]^T \tag{2.2}$$

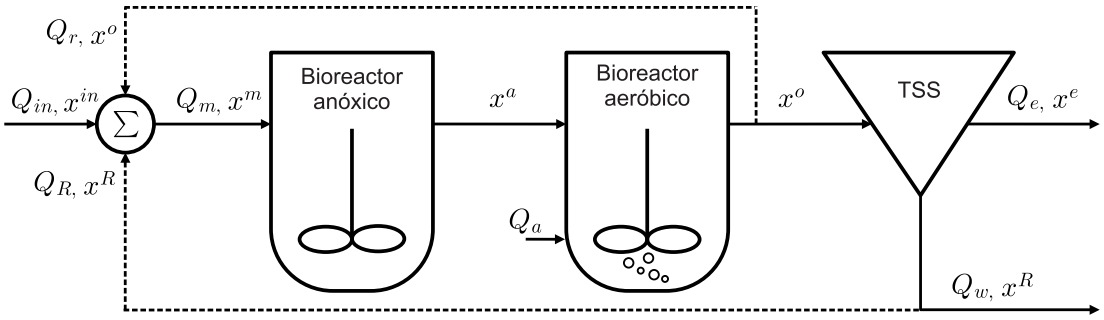


Figura 2.1: Configuracion simple de una planta de TAR.

donde cada variable de estado o componente es descrito en la Tabla 2.1. A pesar de que algunas de estas variables no siempre se pueden medir durante el proceso o no se pueden interpretar en muchas aplicaciones prácticas, el hecho de que sean definidas en unidades de COD o de nitrógeno (N), permite que sean medidas en la realidad. Los estados medidos en COD son $x_i^\gamma,\ i = 1, ..., 7, 10$. El resto de las componentes $(x_i^\gamma, i = 8, 9, 11, 12)$, excepto la concentración de alcalinidad, están dadas en unidades de N.

Por otra parte, respecto a los bioreactores, se considera que ambos están equipados con agitadores para asegurar una homogeneidad de concentración para cada componente en cualquier región dentro del bioreactor. Además, respecto al TSS, se recuerda que su tarea es la separación de sustancias sólidas y líquidas.

El índice de calidad del agua COD depende de la entrada de control definida por

$$\omega = \left[\begin{array}{ccccc} Q_{in} & Q_r & Q_R & Q_w & Q_a \end{array} \right]^T$$

así como también de la calidad en el afluente x^{in}, es decir,

$$\text{COD} = f\left(Q_{in}, Q_r, Q_R, Q_w, Q_a, x^{in}\right)$$

La caracterización para el total del COD en base a las componentes de carbono del ASM No. 1 es sintetizado por (veáse también Figura A.1)

$$\text{COD} = \sum_{i=1}^{7} x_i^\gamma$$

Nomenclatura	Componente y unidades
S_I	Materia orgánica inerte soluble $\left[\frac{g(\text{COD})}{m^3}\right]$
S_S	Sustrato soluble biodegradable fácilmente $\left[\frac{g(\text{COD})}{m^3}\right]$
X_I	Materia orgánica inerte en partículas $\left[\frac{g(\text{COD})}{m^3}\right]$
X_S	Sustrato en partículas biodegradable fácilmente $\left[\frac{g(\text{COD})}{m^3}\right]$
X_P	Producto en partículas resultado del decaimiento de biomasa $\left[\frac{g(\text{COD})}{m^3}\right]$
X_{BH}	Biomasa heterotrófica activa $\left[\frac{g(\text{COD})}{m^3}\right]$
X_{BA}	Biomasa autotrófica activa $\left[\frac{g(\text{COD})}{m^3}\right]$
S_{NO}	Nitrógeno nitrato y nitrógeno nitrato $\left[\frac{g(\text{N})}{m^3}\right]$
S_{NH}	Nitrógeno $NH_4^+ + NH$ (Amonio) $\left[\frac{g(\text{N})}{m^3}\right]$
S_O	Oxígeno (COD negativo) $\left[\frac{g(\text{-COD})}{m^3}\right]$
S_{ND}	Nitrógeno orgánico biodegradable soluble $\left[\frac{g(\text{N})}{m^3}\right]$
X_{ND}	Nitrógeno orgánico biodegradable en partículas $\left[\frac{g(\text{N})}{m^3}\right]$
S_{alk}	Alcalinidad [unidades molar]

Tabla 2.1: Componentes orgánicas del ASM No. 1.

Así, una tarea importante en la operación de la planta es regular el total de COD en el efluente dentro de los estándares admitidos. Esto es,

$$\text{COD}_e = \sum_{i=1}^{7} x_i^e \tag{2.3}$$

Con la información anterior, el propósito ahora es obtener un modelo dinámico que descri-

ba el comportamiento de las concentraciones del afluente a través de los subprocesos (reactor anóxico, reactor aeróbico y sedimentador).

2.2. Modelo de los bioreactores

Un modelo para describir cada componente del ASM No. 1 dentro de un bioreactor continuo completamente agitado puede ser obtenido mediante una ecuación de balance de masa [41], [42], determinada por la siguiente expresión

$$[\text{ACUMULACIÓN}] = [\text{ENTRADAS}] - [\text{SALIDAS}] + [\text{APARICIÓN POR REACCIÓN}] \tag{2.4}$$

Por consiguiente, la ecuación de estado queda expresada por

$$\underbrace{V\dot{x}_i}_{acumulación} = \overbrace{Qx_{in_i}}^{entrada} - \underbrace{Qx_i}_{salida} + \overbrace{Vr_{x_i}}^{reacción}, \quad i = 1, ..., 13 \tag{2.5}$$

donde V representa el volumen del reactor, Q el flujo de entrada, que es igual al flujo de salida; x_i es la concentración en la salida del reactor, x_{in_i} es la concentración en la entrada del reactor y finalmente r_{x_i} denota la aparición por reacción de la componente o la razón del proceso de reacción que generalmente presenta un comportamiento no lineal. Simplificando la ecuación (2.5), se obtiene finalmente

$$\dot{x}_i = \frac{1}{V}\left(Qx_{in_i} - Qx_i\right) + r_{x_i}, \quad i = 1, ..., 13 \tag{2.6}$$

A partir de la Figura 2.1 y usando (2.6), la ecuación de estado para cada componente dentro del reactor anóxico es

$$\dot{x}_i^a = \frac{1}{V_a}\left[\left(Q_{in} + Q_r + Q_R\right)x_i^m - \left(Q_{in} + Q_r + Q_R\right)x_i^a\right] + r_{x_i^a}, \quad i = 1, ..., 13 \tag{2.7}$$

donde V_a es el volumen del reactor anóxico. De manera análoga, la ecuación para el reactor aeróbico es

$$\dot{x}_i^o = \frac{1}{V_o}\left[\left(Q_{in} + Q_r + Q_R\right)x_i^a - \left(Q_{in} + Q_r + Q_R\right)x_i^o\right] + r_{x_i^o}, \quad i = 1, ..., 13 \tag{2.8}$$

donde V_o es el volumen del reactor aeróbico. Para $i = 10$ en (2.8), se añade el término que suministra oxígeno al bioreactor dado por [43]

$$Q_a = k_L a \left(x_{10}^{sat} - x_{10}^{o}\right)$$

donde $k_L a$ $[d^{-1}]$ es el coeficiente de transferencia de OD y x_{10}^{sat} una constante de saturación. Para definir completamente las ecuaciones (2.7)-(2.8) resta conocer las razones del proceso de reacción para cada componente, las cuales fueron desarrolladas dentro del trabajo que generó el ASM No. 1, siendo estas la contribución más significativa de este modelo. Por tanto, las reacciones de cada componente para ambos bioreactores, es decir, $r_{x_i^a}$ o $r_{x_i^o}$ para $i = 1, ..., 13$ se presentan a continuación; tal y como se describen y caracterizan en [38], donde por simplicidad de notación se evita añadir el superíndice a u o. Primeramente, tanto para la materia orgánica inerte soluble y en partículas, S_I y X_I respectivamente, sus reacciones son consideradas nulas, es decir, $r_{S_I} = r_{x_1} = 0$ y $r_{X_I} = r_{x_3} = 0$; ya que no se ven afectadas dentro del PLA. La concentración de sustrato soluble biodegradable fácilmente S_S es reducido por el crecimiento de bacteria heterotrófica (en condiciones aeróbicas y anóxicas) y es incrementada por la hidrólisis de sustrato biodegradable lentamente, por lo que su ecuación es

$$\begin{aligned} r_{S_S} = r_{x_2} \;=\; & \left[-\frac{\hat{\mu}_H}{Y_H}\left(\frac{S_S}{K_S + S_S}\right)\left\{\left(\frac{S_O}{K_{OH} + S_O}\right) + \eta_g\left(\frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O}\right)\left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}}\right)\right\}\right. \\ & +k_h \frac{X_S/X_{BH}}{K_X + (X_S/X_{BH})} \\ & \left.\left\{\left(\frac{S_O}{K_{OH} + S_O}\right) + \eta_h\left(\frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O}\right)\left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}}\right)\right\}\right] X_{BH} \end{aligned} \tag{2.9}$$

La concentración de sustrato en partículas biodegradable fácilmente X_S es incrementada por el reciclaje de bacteria muerta respecto a la hipótesis de regeneración-muerte y decrementada por el proceso de hidrólisis de acuerdo a

$$\begin{aligned} r_{X_S} = r_{x_4} \;=\; & (1 - f_P)\left(b_H X_{BH} + b_A X_{BA}\right) - k_h \frac{X_S/X_{BH}}{K_X + (X_S/X_{BH})}\left[\left(\frac{S_O}{K_{OH} + S_O}\right) + \right. \\ & \left.\eta_h\left(\frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O}\right)\left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}}\right)\right] X_{BH} \end{aligned} \tag{2.10}$$

La ecuación más corta de las reacciones es la que describe los productos en partículas inertes incrementándose a partir del decaimiento de biomasa, que es simplemente

$$r_{X_P} = r_{x_5} = f_P \left(b_H X_{BH} + b_A X_{BA} \right) \tag{2.11}$$

El comportamiento dinámico de la concentración de biomasa heterotrófica X_{BH} es afectada por tres diferentes procesos: crecimiento aeróbico, crecimiento anóxico y decaimiento, esto es

$$\begin{aligned} r_{X_{BH}} = r_{x_6} &= \left[\hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \eta_g \left(\frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} - b_H \right] X_{BH} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Para el caso de la concentración de biomasa autotrófica X_{BA} es más simple, a causa de que esta biomasa no crece en un ambiente anóxico. Consecuentemente

$$r_{X_{BA}} = r_{x_7} = \left[\hat{\mu}_A \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{OA} + S_O} \right) - b_A \right] X_{BA} \tag{2.13}$$

La concentración de nitrato S_{NO} está involucrada en dos procesos: es incrementada por la nitrificación y decrementada por la denitrificación. La ecuación dinámica que describe lo anterior es

$$\begin{aligned} r_{S_{NO}} = r_{x_8} &= -\hat{\mu}_H \eta_g \left(\frac{1 - Y_H}{2{,}86 Y_H} \right) \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{BH} + \\ &\quad \frac{\hat{\mu}_A}{Y_A} \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{OA} + S_O} \right) X_{BA} \end{aligned} \tag{2.14}$$

La concentración de amonio S_{NH} es afectada por el crecimiento de todos los microorganismos mientras que el amonio es usado como fuente de nitrógeno para la incorporación en la masa celular. La concentración también es decrementada por el proceso de nitrificación como un resultado de la amonificación de nitrógeno orgánico soluble. Esto produce una compleja

ecuación dada por

$$\begin{aligned} r_{S_{NH}} = r_{x_9} &= \left[-i_{XB}\hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S+S_S}\right)\left\{ \left(\frac{S_O}{K_{OH}+S_O}\right) + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \eta_g \left(\frac{K_{OH}}{K_{OH}+S_O}\right)\left(\frac{S_{NO}}{K_{NO}+S_{NO}}\right)\right\} + k_a S_{ND}\right] X_{BH} - \\ &\quad \hat{\mu}_A \left(i_{XB}+\frac{1}{Y_A}\right)\left(\frac{S_{NH}}{K_{NH}+S_{NH}}\right)\left(\frac{S_O}{K_{OA}+S_O}\right) X_{BA} \end{aligned} \tag{2.15}$$

La concentración de oxígeno S_O en el agua residual es reducida por el crecimiento aeróbico de biomasa heterotrófica y autotrófica, de acuerdo a

$$\begin{aligned} r_{S_O} = r_{x_{10}} &= -\hat{\mu}_H \left(\frac{1-Y_H}{Y_H}\right)\left(\frac{S_S}{K_S+S_S}\right)\left(\frac{S_O}{K_{OH}+S_O}\right) X_{BH} - \\ &\quad \hat{\mu}_A \left(\frac{4{,}57-Y_A}{Y_A}\right)\left(\frac{S_{NH}}{K_{NH}+S_{NH}}\right)\left(\frac{S_O}{K_{OA}+S_O}\right) X_{BA} \end{aligned} \tag{2.16}$$

La concentración de nitrógeno orgánico soluble es afectado por la amonificación e hidrólisis, esto se expresa por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} r_{S_{ND}} = r_{x_{11}} &= \left[-k_a S_{ND} + k_h \frac{X_{ND}/X_{BH}}{K_X+(X_S/X_{BH})}\left\{ \left(\frac{S_O}{K_{OH}+S_O}\right) + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \eta_h \left(\frac{K_{OH}}{K_{OH}+S_O}\right)\left(\frac{S_{NO}}{K_{NO}+S_{NO}}\right)\right\}\right] X_{BH} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Similar a (2.10), la concentración de nitrógeno orgánico biodegradable en partículas X_{ND} es incrementado por el decaimiento de biomasa y decrementada por el proceso de hidrólisis. La ecuación resultante es

$$\begin{aligned} r_{X_{ND}} = r_{x_{12}} &= (i_{XB} - f_P i_{XP})(b_H X_{BH} + b_A X_{BA}) - k_h \frac{X_{ND}/X_{BH}}{K_X+(X_S/X_{BH})}\left[\left(\frac{S_O}{K_{OH}+S_O}\right) \right. \\ &\quad \left. +\eta_h \left(\frac{K_{OH}}{K_{OH}+S_O}\right)\left(\frac{S_{NO}}{K_{NO}+S_{NO}}\right)\right] X_{BH} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Por último, se presenta la alcalinidad total S_{alk}. Si bien su inclusión no es esencial, es deseable porque provee información sobre cambios en el pH, los cuales se pueden predecir y evitar.

Su dinámica se describe por

$$
\begin{aligned}
r_{S_{alk}} = r_{x_{13}} \quad = \quad & \Bigg[-\frac{i_{XB}}{14}\hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S+S_S}\right)\left\{\left(\frac{S_O}{K_{OH}+S_O}\right)\right. \\
& \left. +\eta_g\left(\frac{K_{OH}}{K_{OH}+S_O}\right)\left(\frac{S_{NO}}{K_{NO}+S_{NO}}\right)\right\} \\
& +\frac{1-Y_H}{14\ 2{,}86Y_H}\hat{\mu}_H\eta_g\left(\frac{S_S}{K_S+S_S}\right)\left(\frac{K_{OH}}{K_{OH}+S_O}\right)\left(\frac{S_{NO}}{K_{NO}+S_{NO}}\right) \\
& \left. +\frac{1}{14}k_a S_{ND}\right] X_{BH} \\
& -\hat{\mu}_A\left(\frac{i_{XB}}{14}+\frac{1}{7Y_A}\right)\left(\frac{S_{NH}}{K_{NH}+S_{NH}}\right)\left(\frac{S_O}{K_{OA}+S_O}\right)X_{BA} \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Para finalizar, como se observa en el conjunto de ecuaciones (2.9)-(2.19), existen 19 parámetros que permiten describir las reacciones de las componentes, divididos en parámetros estequiométricos y cinéticos. La descripción, unidades y valor para cada parámetro es mostrado en la Tabla 2.2, aunado a los volúmenes de cada bioreactor. Estos valores son típicos bajo una temperatura de 20 ^{o}C y para un pH neutral.

2.3. Modelo del sedimentador (TSS)

El comportamiento del sedimentador secundario y su importancia para la operación satisfactoria del PLA ha hecho al proceso de sedimentación un gran desafío para investigadores que se desempeñan en el campo de modelado matemático. Diferentes enfoques de modelado han sido reportados en [44], [45], [46], [47] y [48]; y en este trabajo se retomará uno de estos.

El enfoque aquí presentado es el estudio de un modelo unidimensional para el TSS. Se supone que en el sedimentador los perfiles de velocidades son uniformes y que los gradientes horizontales en concentración de componentes son rechazados. Consecuentemente, solo el proceso en la dimensión vertical es modelado. El modelo considera concentración de sólidos suspendidos en el efluente, en este caso, del bioreactor aeróbico. En la Figura 2.2 se muestra un esquema del flujo simplicado dentro del tanque. Como se puede notar, en la sección de

Parámetros	Símbolo	Unidad	Valor
Parámetros estequiométricos			
Producción heterotrófica	Y_H	g células de COD formadas (g COD oxidado)$^{-1}$	0.67
Producción autotrófica	Y_A	g células de COD formadas (g COD oxidado)$^{-1}$	0.67
Fracción de biomasa productos en partículas	f_P	adimensional	0.08
Masa N/masa COD en biomasa	i_{XB}	g N (g COD)$^{-1}$ en biomasa	0.086
Masa N/masa COD en productos a partir de biomasa	i_{XP}	g N (g COD)$^{-1}$ en biomasa endógena	0.06
Parámetros cinéticos			
Razón de crecimiento específico máx. heterotrófico	$\hat{\mu}_H$	día^{-1}	6.0
Razón de decaimiento heterotrófico	b_H	día^{-1}	0.62
Coeficiente saturación-media (CSM) para heterótrofos	K_S	g COD m^{-3}	20
CSM de oxígeno para heterótrofos	K_{OH}	g O_2 m^{-3}	0.20
CSM de nitrato para heterótrofos	K_{NO}	g NO_3-N m^{-3}	0.50
Razón de crecimiento específico máx. autotrófico	$\hat{\mu}_A$	día^{-1}	0.80
Razón de decaimiento autotrófico	b_A	día^{-1}	0.20
CSM de oxígeno para autótrofos	K_{OA}	g O_2 m^{-3}	0.4
CSM de amonio para autótrofos	K_{NH}	g NH_3-N m^{-3}	1.0
Factor de corrección para crecimiento anóxico de heterótrofos	η_g	adimensional	0.8
Razón de amonificación	k_a	m^3(g COD día)$^{-1}$	0.08
Razón de hidrólisis específico máx.	k_h	g COD biodeg. lentamente (g células COD día)$^{-1}$	3.0
CSM para hidrólisis de sustrato biodeg. lentamente	K_X	g COD biodeg. lentamente (g células COD día)$^{-1}$	0.03
Factor de corrección para hidrólisis anóxica	η_h	adimensional	0.4
Volúmenes de los bioreactores			
Volumen reactor anóxico	V_a	m^3	7772. 5
Volumen reactor aeróbico	V_o	m^3	10326

Tabla 2.2: Parámetros del ASM No. 1 a 20 ºC y volúmenes de los bioreactores.

entrada el afluente y la concentración de sólidos son homogéneamente distribuidos sobre la sección transversal horizontal y los sólidos entrantes son distribuidos uniformemente e instantáneamente a través de toda el área de sección transversal. El flujo está dividido en un flujo descendiente hacia la salida de flujo inferior en la parte de abajo y un flujo ascendente hacia la salida del efluente en la parte de arriba. Este modelo está basado en el enfoque

de Vitasovic [47], donde el sedimentador está dividido en un número de capas m, de altura constante h $[m]$; para desarrollar una ecuación de balance de masas sobre cada capa (ver Figura 2.3). El modelo está basado sobre el concepto de *flujo de sólidos*, que establece que los sólidos que entran en el TSS llegan a la parte inferior a través de una sedimentación por gravedad de flujo J_s y por flujo de carga J_b (turbulencia o movimiento de masa). El primer flujo da como resultado la sedimentación de lodo hacia abajo a través del agua, mientras que el segundo describe el movimiento del agua hacia abajo en el sedimentador debido a la bomba de reciclaje de lodo del sobreflujo. El flujo total está dado por

$$J = J_b + J_s$$

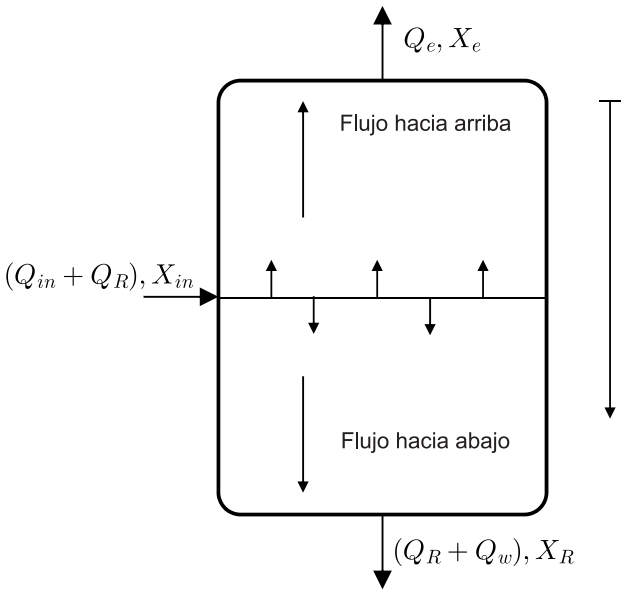


Figura 2.2: Esquema de flujos para un sedimentador unidimensional.

El modelo de Vitasovic considera cinco grupos de capas dependiendo de su posición relativa respecto al punto de alimentación: la capa superior, las capas arriba de la capa de alimentación, la capa de alimentación, las capas debajo de la capa de alimentación y la capa

inferior, como se visualiza en la Figura 2.3. El flujo de sólidos debido al movimiento del líquido a granel es un cálculo directo basado en la concentración de sólidos por la velocidad de masa del líquido, que puede ser tanto hacia arriba o hacia abajo dependiendo de su posición relativa a la capa de alimentación. El flujo de sólidos es descrito por una función de sedimentación exponencial aplicable tanto para condiciones de sedimentación obstaculizada y sedimentación de floculantes. Esto significa que muchas cosas necesitan ser consideradas dentro del sedimentador. Por supuesto, para obtener el modelo solo se deducen ecuaciones de balance de masas para cada capa, pero también se consideran los flujos de sólidos entre capas y los flujos ascendentes y descendentes generales. El flujo de sólidos debido al movimiento a granel del líquido también es sencillo de evaluar, siendo igual al producto de la concentración de sólidos, X, y la velocidad de masa del líquido. La velocidad puede ser hacia abajo (v_{dn}) o hacia arriba (v_{up}) dependiendo de la posición de la capa con respecto al punto de alimentación, esto es

$$\begin{aligned} v_{dn} &= \frac{Q_u}{A} = \frac{Q_R + Q_w}{A} \\ v_{up} &= \frac{Q_e}{A} \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde A $[m^2]$ es el área de sección transversal del tanque.

De manera semejante, para obtener el flujo de sólidos debido a la sedimentación por gravedad se calcula mediante el producto de la concentración X, y la velocidad de sedimentación de las partículas sólidas, v_s. La determinación de una apropiada velocidad de sedimentación es indispensable para el modelo de un TSS. Muchos modelos han sido propuestos para describir esta velocidad, pero en este trabajo se retoma aquella propuesta por Takács, *et. al.* [49], la cual es una expresión compuesta por una doble función exponencial. Para cada capa j, la velocidad se calcula como sigue

$$\begin{aligned} v_{sj} &= v_0 e^{-r_h(X_j - X_{min})} - v_0 e^{-r_p(X_j - X_{min})}, \quad [m/d] \\ & 0 \leq v_{sj} \leq v_0^{'} \end{aligned} \tag{2.21}$$

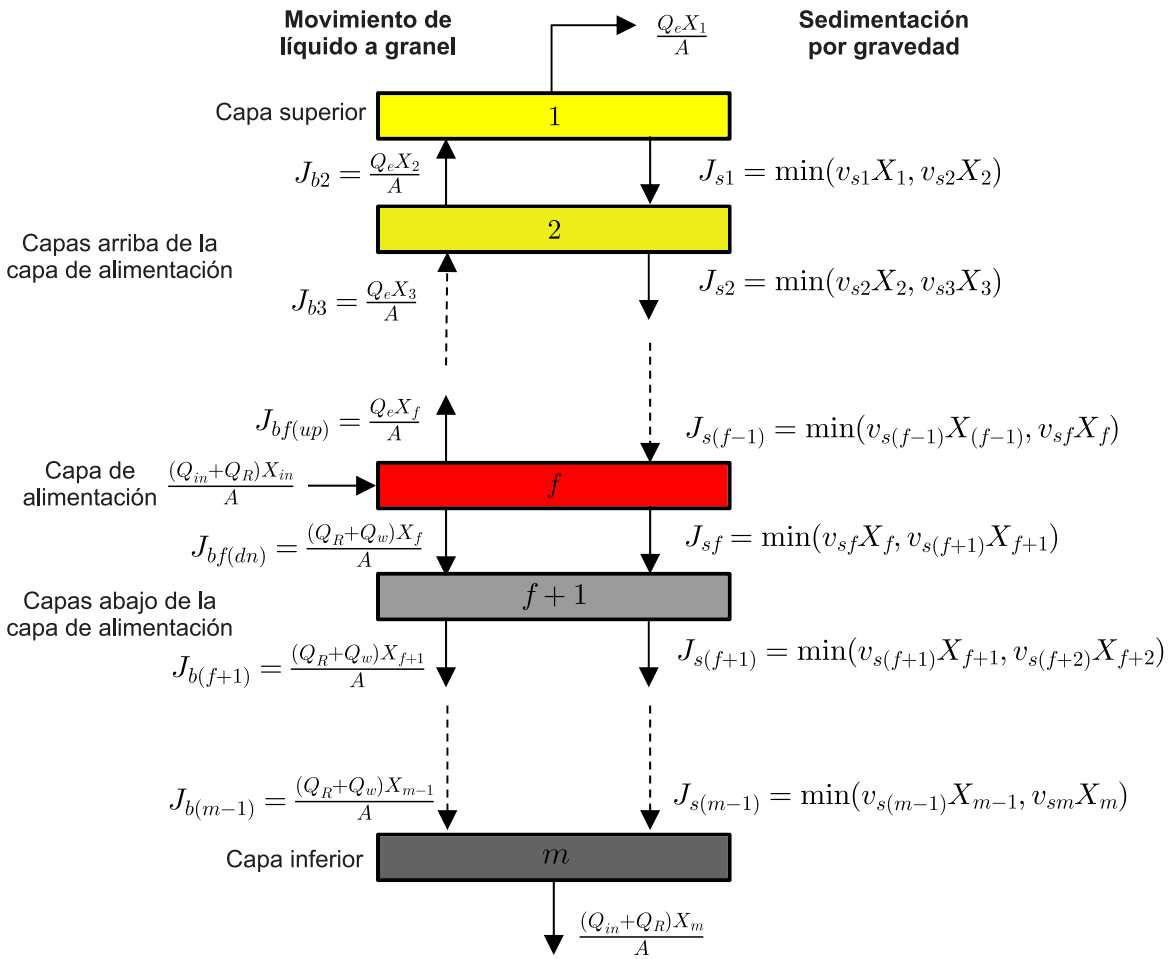


Figura 2.3: Modelo del sedimentador en capas. Interacción de flujos entre capas.

donde

- v_0 es la velocidad de sedimentación teórica máxima, $[m/d]$,
- $v_0^{'}$ es la velocidad de sedimentación práctica máxima, $[m/d]$,
- r_h es el parámetro de sedimentación característico de la zona de sedimentación obstaculizada, $[m^3/d]$,

- r_p es el parámetro de sedimentación característico de concentraciones de sólidos bajos, $[m^3/d]$.
- $X_{min} = f_{ns}X_{in}$ es la concentración de sólidos suspendidos accesible mínima, con X_{in} siendo la concentración de sólidos entrando al sedimentador y f_{ns} la fracción no sedimentable de X_{in}. X_j es la concentración de sólidos en la capa j. Todas las concentraciones de sólidos están dadas en $[g\ (\text{SS})/m^3]$.

La expresión (2.21) representa tanto el fénomeno de engrosamiento y clarificación dentro del tanque, ya que el término $v_0 e^{-r_h(X_j - X_{min})}$ rechaza la velocidad de sedimentación de partículas floculantes grandes y el término $v_0 e^{-r_p(X_j - X_{min})}$ toma en cuenta la velocidad de partículas sedimentables más pequeña.

Una vez que las velocidades han sido definidas, sigue deducir las ecuaciones de masa de las capas en el tanque de la forma dada en (2.4), aunque para este caso se elimina el término de 'aparición por reacción', pues se supondrá que no existen reacciones dentro del tanque. Así, con ayuda de la Figura 2.3 para conocer los flujos que interactúan entre las capas y de la Figura 2.1 que ejemplifica los flujos de entrada y salida en el TSS, las ecuaciones son deducidas como sigue. Para la capa superior ($j = 1$), hay una entrada de flujo J_b hacia arriba y dos salidas; una es la del efluente y la otra un flujo J_s, es decir,

$$h\frac{d}{dt}X_j = \frac{Q_e}{A}X_{j+1} - \frac{Q_e}{A}X_j - \text{mín}(v_{sj}X_j, v_{s(j+1)}X_{j+1}) \tag{2.22}$$

Para las capas arriba de la capa de alimentación ($1 < j \leq f - 1$) se consideran dos entradas y dos salidas. Una entrada es el flujo J_s de una capa superior y la otra es un flujo J_b hacia arriba que proviene de una capa inferior. Las salidas son un flujo J_s y un flujo J_b hacia arriba. Entonces, la ecuación resulta en

$$h\frac{d}{dt}X_j = \frac{Q_e}{A}X_{j+1} - \frac{Q_e}{A}X_j + \text{mín}(v_{s(j-1)}X_{j-1}, v_{sj}X_j) - \text{mín}(v_{sj}X_j, v_{s(j+1)}X_{j+1}) \tag{2.23}$$

Para la capa de alimentación $j = f$, se consideran como entradas el flujo principal al tanque y el flujo J_s de una capa superior. Las salidas son un flujo J_s, y dos flujos J_b en ambos sentidos. La expresión obtenida es

$$h\frac{d}{dt}X_j = \frac{(Q_{in}+Q_R)}{A}X_{in} - \frac{Q_e}{A}X_j - \frac{Q_R+Q_w}{A}X_j + \text{mín}(v_{s(j-1)}X_{j-1}, v_{sj}X_j) - \text{mín}(v_{sj}X_j, v_{s(j+1)}X_{j+1}) \quad (2.24)$$

Para las capas abajo de la capa de alimentación ($f < j \leq m-1$) la expresión es similar a (2.23), solo que los flujos J_b ahora se suponen en dirección hacia abajo, esto es

$$h\frac{d}{dt}X_j = \frac{Q_R+Q_w}{A}X_{j-1} - \frac{Q_R+Q_w}{A}X_j + \text{mín}(v_{s(j-1)}X_{(j-1)}, v_{sj}X_j) - \text{mín}(v_{sj}X_j, v_{s(j+1)}X_{j+1}) \quad (2.25)$$

Por último, para la capa inferior ($j = m$), la ecuación obtenida es resultado de suponer que hay dos flujos de entrada; uno es un flujo J_s y el otro es un J_b que viene de una capa superior. La única salida de la capa es el flujo que deja al TSS como producto del reciclaje de lodo externo en el PLA. Por lo que se tiene

$$h\frac{d}{dt}X_j = \frac{Q_R+Q_w}{A}X_{j-1} - \frac{Q_R+Q_w}{A}X_j - \text{mín}(v_{s(j-1)}X_{j-1}, v_{sj}X_j) \quad (2.26)$$

Para este enfoque de modelado del tanque se recomienda usar entre 30 y 50 capas para una mejor aproximación de los fenómenos que se consideran (si se aumentan las capas, se mejora el modelo), según [50]. Sin embargo, al incrementar el número de capas, aumenta también la complejidad computacional del modelo. Para [49], una buena representación del comportamiento del sedimentador se logra con 10 capas. Asimismo, para enfatizar el fenómeno del tanque, la concentración de sólidos en la capa superior es la concentración de sólidos reflejada en el efluente de todo el proceso, es decir, x^e. De la misma forma, la concentración de sólidos en la capa inferior es la concentración en la zona de espesamiento, esto es, x^R y que servirá para el reciclaje externo del PLA antes mencionado. Por tanto, la Tabla 2.3 resume los parámetros del sedimentador que se utilizan para este trabajo.

Parámetro	Valor
m	10 [adimensional]
f	4 [adimensional]
h	0,42 $[m]$
A	$2{,}552 \times 10^3$ $[m^2]$
v_0	712 $[m/d]$
$v_0^{'}$	340 $[m/d]$
r_h	$4{,}26 \times 10^{-4}$ $[m^3/g]$
r_p	$5{,}0 \times 10^{-3}$ $[m^3/g]$
f_{ns}	$1{,}0 \times 10^{-4}$ [adimensional]

Tabla 2.3: Parámetros para el modelo del sedimentador.

2.4. Acoplamiento entre el modelo del bioreactor y el sedimentador

Existe un problema importante a considerar cuando se evalúan los modelos del bioreactor y el sedimentador, debido al flujo de reciclaje externo Q_R [51]. El inconveniente es producido por la diferencia entre las componentes que describen ambos modelos. El ASM No. 1 está basado en 13 componentes divididos entre partículas y solubles; mientras que el modelo del sedimentador considera solo la concentración de sólidos suspendidos total. Consecuentemente, todas las componentes en partículas del bioreactor deberían agruparse en una sola variable cuando entran al sedimentador y realizar el proceso inverso a la salida del mismo. De hecho, esto puede ser mejor apreciado en las unidades, pues en los bioreactores las unidades de materia orgánica son $g(\mathrm{COD})/m^3$ y para las fracciones completas de nitrógeno son $g(\mathrm{N})/m^3$; en cambio en el sedimentador las unidades son $g(\mathrm{SS})/m^3$. El material de partículas es afectado por la gravedad y la masa real de todas las componentes del bioreactor (aeróbico) debe ser conocida cuando entra al TSS.

Una opción para resolver lo anterior es encontrar un factor de conversión que lleve a las

partículas de unidades COD a SS, y viceversa. Estos factores han sido propuestos en [38], los cuales han sido encontrados de manera experimental. Para material en partículas e inerte (X_P, X_S y X_I) el factor es 0,75 [g(SS)/g(COD)]. Para biomasa heterotrófica y autotrófica (X_{BH} y X_{BA}) el factor es 0,9 [g(SS)/g(COD)]. Es de notar que para X_{ND} no hay un factor de conversión al ser materia orgánica. Esto es porque es un subconjunto de otra componente en partícula y ya está incluída en su concentración [38]. Para las componentes solubles no hay factores de conversión, ya que se supone solo siguen el flujo del agua y como se dijo anteriormente, no se consideran reacciones dentro del tanque.

En resumen, cada una de las 13 componentes del ASM No. 1 se tratarán separadamente dentro del sedimentador, considerando su respectiva conversión a la entrada y salida del mismo (si aplica). Otro detalle a considerar en particular, para las componentes solubles, es que el conjunto de ecuaciones (2.22)-(2.26) se reducen a solo incluir la dinámica de flujos de líquido a granel J_b y se eliminan los términos de flujos de sedimentación por gravedad J_s. Por esta opción de acoplamiento, el modelo del sedimentador propuesto de 10 capas produce 130 ecuaciones para cada componente más las ecuaciones que modelan a los bioreactores. En términos computacionales, la evaluación del modelo puede ser compleja, pero el acoplamiento planteado es simple y directo.

2.5. Importancia del modelado presentado

Una de las dificultades que surgen cuando se trabaja con el PLA es que no se tiene acceso a datos o información acerca de la operación de una planta real que contribuyan en la calibración de un modelo, aplicación de técnicas de control, estrategias de monitoreo, etc. Esto implica que investigaciones, por ejemplo sobre controladores, necesariamente terminan siendo evaluadas en un modelo y no en una planta real. Como una de las aportaciones de este trabajo es la identificación de una planta real mediante una red neuronal jerárquica basada en un mecanismo, que finalmente también es un modelo, la ausencia de una planta limitaría la contribución del trabajo.

Por esta razón el modelo presentado en las secciones anteriores asumirá el rol de una

planta real y será identificada por la red neuronal. Además, como la red neuronal está basada en un mecanismo, el modelo del PLA también representará a dicho mecanismo.

De ahí la importancia de dedicar un capítulo completo para obtener una planta de la cual se pueda obtener información. En resumen, la planta consta de 13 ecuaciones para cada bioreactor, es decir, (2.7) y (2.8), con las reacciones (2.9)-(2.19); y la parte del sedimentador que produce 130 ecuaciones, 10 de esas para cada componente de la forma (2.22)-(2.26).

Finalmente, se establecen los siguientes fundamentos relacionados al modelo de la planta de TAR que permiten el desarrollo de este trabajo.

Suposición 2.1 *El modelo de la planta de TAR se asume BIBO estable. Soluciones en estado estable inestables se producen cuando los flujos del afluente y efluente son idénticos [53]. No se asumirá este caso.*

Comentario 2.1 *Físicamente, no tiene ningún sentido considerar una variable de estado o un flujo de entrada de signo negativo. Por eso, se consideran siempre de signo positivo o cero.*

Suposición 2.2 *Los estados en el proceso de TAR se suponen completamente medibles.*

Capítulo 3

Control de oxígeno disuelto en la planta de TAR

En este capítulo se presenta el diseño y aplicación de un controlador para regular el OD del reactor aeróbico en la configuración de la planta estudiada en este trabajo. El controlador fue diseñado a partir de analizar a la planta como un proceso en cascada, una propiedad estructural que es explotada en la teoría de diseños en cascada de sistemas pasivos para la estabilización del proceso por realimentación [37]. Los resultados de la implementación del controlador en simulación son presentados y comparados con un controlador PI clásico.

3.1. Teoría general de sistemas pasivos

La *pasividad* es una de las propiedades de sistemas dinámicos que produce una relación especial entre la salida y entrada de un sistema, y es comúnmente usada en el análisis de estabilidad de una amplia clase de sistemas no lineales [54], [55], [56]. Esta propiedad parece ser muy atractiva en diferentes aplicaciones de sistemas físicos. Hablando vagamente, si un sistema no lineal es *pasivo* puede ser estabilizado por cualquier realimentación lineal negativa. Esto puede ser extendido a sistemas conectados en cascada, donde se han obtenido resultados para el diseño de controladores por realimentación para su estabilización. El enfoque consiste

primeramente en diseñar un controlador por realimentación no lineal para hacer pasiva a la cascada, después una realimentación lineal negativa simple se introduce para producir la propiedad de estabilidad de la cascada en lazo cerrado. Esto se puede apreciar en la Figura 3.1, donde y y u denotan la salida y entrada, respectivamente, de la cascada formada por 'n' subsistemas. Se mencionan algunos conceptos y resultados básicos de pasividad para sistemas no lineales.

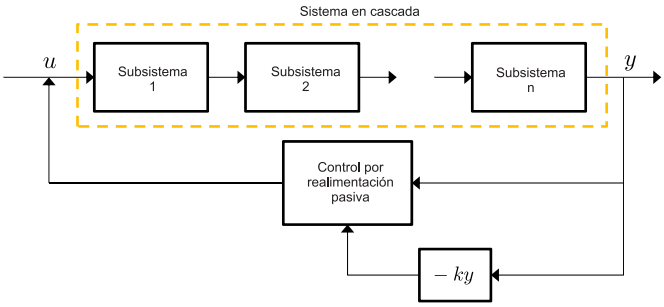


Figura 3.1: Estabilización de una cascada por realimentación de estado.

Considere un sistema no lineal definido por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u), \quad x \in R^n \\ y &= h(x,u), \quad u,\ y \in R^m \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $x(t)$ representa al estado el cual es una función del tiempo determinado únicamente por el estado inicial $x(0) = x_0$; $u(t)$ es la entrada e $y(t)$ la salida del sistema. Supóngase que f y h son mapeos suaves con $f(0,0) = 0$ y $h(0,0) = 0$.

Definición 3.1 ***(Disipatividad)***. *Supóngase que el sistema (3.1) está asociado a una función $w : R^m \times R^m \to R$ llamada razón de suministro, que es localmente integrable, es decir, satisface $\int_{t_0}^{t_1} |w(u(t), y(t))|\, dt < \infty$ para todo $t_0 \leq t_1$. Sea X un subconjunto conectado de R^n que contiene al origen. Se dice que el sistema (3.1) es disipativo en X con la razón de*

suministro $w(u, y)$ si existe una función $S(x)$, $S(0) = 0$, tal que para todo $x \in X$

$$S(x) \geq 0 \quad y \quad S(x(T)) - S(x(0)) \leq \int_0^T w(u(t), y(t))dt \tag{3.2}$$

para todo $T \geq 0$ tal que $x(t) \in X$ para todo $t \in [0, T]$. La función $S(x)$ es llamada función de almacenamiento.

Es más práctico usar una versión diferencial de (3.2) para verificar la disipatividad en un sistema, esto es,

$$\dot{S}(x) \leq w(u(t), y(t))$$

Definición 3.2 ***(Pasividad)****. El sistema (3.1) es pasivo si es disipativo con una razón de suministro $w(u, y) = u^T y$.*

Generalmente, un sistema no es pasivo por naturaleza, aunque puede hacerse pasivo por medio de una realimentación de estado no lineal, siendo llamados *sistemas pasivos por realimentación.*

Definición 3.3 ***(Sistemas pasivos por realimentación)*** *[57]. De dice que un sistema (3.1) es pasivo por realimentación si existe un control suave*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{3.3}$$

con $\alpha(0) = 0$ y $\beta(0) \neq 0$, tal que para el sistema en lazo cerrado (3.1) y (3.3), se satisface

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x}(f(x, u)) \leq u^T y$$

donde $S(x)$ es una función de almacenamiento.

Una estructura de sistemas puede estar formada por subsistemas interconectados con propiedades pasivas. Una de estas es la interconexión realimentada, como se muestra en la Figura 3.2, donde *H1* y *H2* son subsistemas de la forma (3.1). En vista de esto, se presenta el siguiente resultado.

Teorema 3.1 ***(Interconexión de sistemas pasivos)****. Suponga que H1 y H2 son pasivos. Entonces el sistema que se obtiene por interconexión realimentada es pasivo.*

Demostración. Demostración del Teorema 2.10 en [37]. ■

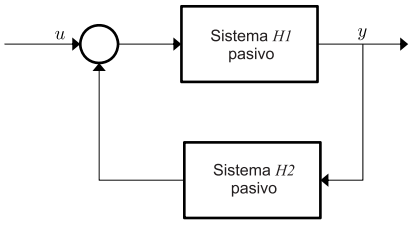


Figura 3.2: Interconexión realimentada de sistemas pasivos.

3.1.1. Estabilidad de sistemas pasivos

La estabilidad de un punto de equilibrio en un sistema es usualmente caracterizada en el sentido de Lyapunov (Estabilidad de Lyapunov) que permite conocer el comportamiento de todas las soluciones con condiciones iniciales cercanas al equilibrio conforme transcurre el tiempo [1].

Considere $u = y = 0$ en (3.1) y que $f : X \to R^n$ es una función localmente Lipschitz en el dominio $X \subset R^n$.

Definición 3.4 *El punto de equilibrio $x = 0$ de (3.1) es*

- *Estable si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \to \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

  .

- *Inestable si no es estable.*

- *Asintóticamente estable si es estable y δ puede ser elegido tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \to \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

El principal resultado de Lyapunov permite conocer la estabilidad de un punto de equilibrio en un sistema dado por el siguiente teorema.

Teorema 3.2 *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para (3.1) y $X \subset R^n$ que contiene a $x = 0$. Sea $V : X \to R$ una función continuamente diferenciable tal que*

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0 \quad en \quad X - \{0\} \tag{3.4}$$

y

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad en \quad X$$

Entonces $x = 0$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad en \quad X - \{0\} \tag{3.5}$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable. Más todavía, si se cumplen (3.4), (3.5), $X = R^n$ y

$$\|x\| \to \infty \quad \to \quad V(x) \to \infty$$

entonces $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Demostración. Demostración de Teoremas 4.1 y 4.2 en [1]. ■

El método directo de Lyapunov (uso del Teorema 3.2) permite demostrar la estabilidad de un equilibrio a partir de una función $V(x)$ definida positiva llamada *función de Lyapunov*, lo que puede ser una tarea compleja considerando el sistema a analizar. Aquí se conecta la propiedad de pasividad de un sistema pues la función de almacenamiento $S(x)$ puede fungir como una función de Lyapunov. Sin embargo, $S(x)$ no necesariamente cumple (3.4), en otras palabras, no se pide que la función de almacenamiento sea definida positiva. La definición de pasividad y disipatividad se puede cumplir con $S(x)$ semidefinida positiva. Una consecuencia de esto es que en presencia de una parte inobservable inestable del sistema produciría una inestabilidad de $x = 0$. Entonces para que disipatividad implique estabilidad se introduce el siguiente concepto.

Definición 3.5 ***(Estado cero detectable)***. *Considere (3.1) con $u = 0$ y sea $Z \subset R^n$ su conjunto invariante positivamente más grande contenido en $\{x \in R^n \mid y = h(x, 0) = 0\}$. Se dice que (3.1) es estado cero detectable (ECD) si $x = 0$ es condicionalmente asintóticamente estable a Z. Si $Z = \{0\}$, se dice que es estado cero observable.*

La definición anterior conecta las propiedades de estabilidad y pasividad aun cuando $S(x)$ es semidefinida positiva. El principal beneficio de esto es que con una realimentación $u = -y$ se puede asegurar estabilidad asintótica. El resultado posterior muestra lo antes explicado.

Teorema 3.3 ***(Estabilidad y pasividad)***. *Sea (3.1) pasivo con $S(x)$ como función de almacenamiento C^1 y $h(x, u)$ también C^1 en u para todo x. Las siguientes propiedades se satisfacen*

- *Si S es definida positiva, entonces $x = 0$ de (3.1) con $u = 0$ es estable.*
- *Si (3.1) es ECD, entonces $x = 0$ de (3.1) con $u = 0$ es estable.*
- *Cuando $y = h(x)$, entonces la realimentación $u = -y$ asegura estabilidad asintótica de $x = 0$ si y solo si (3.1) es ECD.*

Demostración. Demostración de Teorema 2.28 en [37]. ■

3.2. Diseños en cascada

En muchas aplicaciones, los sistemas pueden ser vistos como una estructura en cascada. Un sistema puede contener subsistemas conectados en cascada. Si estos subsistemas poseen propiedades pasivas, dependiendo de su interconexión, pueden mantener dicha propiedad, como se vio en el Teorema 3.1 e incluso se puede lograr estabilidad asintótica de un equilibrio de la cascada, como lo demuestra el Teorema 3.3. Por eso, se presenta un tipo de cascada [37] que permite extender los resultados de la sección previa y será útil en el diseño de un controlador para regular el OD en la planta de TAR.

Considere una estructura en cascada formada por dos subsistemas, con los estados de cada subsistema denotados por z y ξ, como lo representa la Figura 3.3.

La primera característica de la cascada es que la ley de control u entra solamente en el subsistema ξ. Y la segunda característica es que el estado ξ es tratado como la entrada del subsistema z.

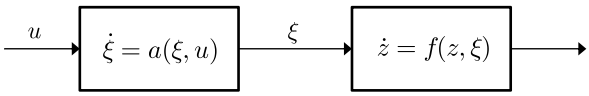


Figura 3.3: Sistema en cascada.

Para una caracterización de la cascada se considera la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z) + \psi(z, \xi) \\ \dot{\xi} &= a(\xi) + b(\xi)u \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $f \in R^{n_z}$ y $a \in R^{n_\xi}$ son funciones suaves tal que $f(0) = a(0) = 0$ y ψ es un término de interconexión entre los subsistemas ξ y z.

Suposición 3.1 *El equilibrio $z = 0$ de $\dot{z} = f(z)$ es globalmente estable y se conoce una función definida positiva radialmente no acotada $W(z)$, C^2 tal que*

$$\frac{\partial W(z)}{\partial z} f(z) \leq 0$$

.

Se establece el siguiente resultado para la estabilización.

Teorema 3.4 *Suponga la cascada (3.6). Se satisface la Suposición 3.1 y existe una salida $y = h(\xi)$ tal que*

(i) *la interconexión $\psi(z, \xi)$ puede ser factorizada como $\psi(z, \xi) = \tilde{\psi}(z, \xi)y$;*

(ii) *el subsistema*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a(\xi) + b(\xi)u \\ y &= h(\xi) \end{aligned} \tag{3.7}$$

es pasivo con una función de almacenamiento $U(\xi)$, C^1, definida positiva y radialmente no acotada.

Entonces la cascada completa (3.6) puede hacerse pasiva con la realimentación

$$u = -\left(\frac{\partial W(z)}{\partial z}\tilde{\psi}\right)^T (z,\xi) + v$$

y su función de almacenamiento es $V(z,\xi) = W(z) + U(\xi)$*. Si con la nueva entrada* v *y la salida* y*, la cascada es ECD, entonces* $v = -ky$*,* $k > 0$*, asegura EAG del equilibrio* $(z,\xi) = (0,0)$*.*

Demostración. Seguir demostración de Teorema 5.1 en [55]. ■

3.3. Control de oxígeno disuelto

Se presenta el diseño en cascada de un controlador que actúa sobre el OD en los bioreactores. Para fines comparativos, se muestra un controlador PI convencional para el mismo objetivo de control. Ambos son implementados en simulación y se señalan las ventajas que ofrecen entre sí.

3.3.1. Control en cascada de OD

En esta subsección se presenta el diseño de un controlador para regular el OD (x_{10}) en los bioreactores dentro de la configuración de la planta mostrada en la Figura 2.1, a partir del resultado visto en la sección anterior, es decir, ver los bioreactores como una cascada. La entrada para controlar el OD es el flujo de aire Q_a y más específicamente, la señal de control es el coeficiente de transferencia k_La. La forma de visualizar la cascada para desarrollar el controlador se presenta en la Figura 3.4, de donde se recuerda que las ecuaciones de estado para el OD en cada bioreactor son

$$\begin{aligned}
\dot{x}^a_{10} &= \frac{1}{V_a}\left[(Q_{in}+Q_r+Q_R)\,x^m_{10} - (Q_{in}+Q_r+Q_R)\,x^a_{10}\right] + r_{x^a_{10}}(x^a) \\
\dot{x}^o_{10} &= \frac{1}{V_o}\left[(Q_{in}+Q_r+Q_R)\,x^a_{10} - (Q_{in}+Q_r+Q_R)\,x^o_{10}\right] + r_{x^o_{10}}(x^o) + k_La\left(x^{sat}_{10} - x^o_{10}\right)
\end{aligned}$$

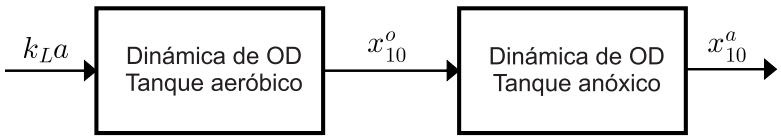


Figura 3.4: Cascada de OD en los bioreactores.

Definiendo $D_o = (Q_{in} + Q_r + Q_R)/V_o$ y $D_a = (Q_{in} + Q_r + Q_R)/V_a$, se reescriben las ecuaciones como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10}^a &= D_a x_{10}^m - D_a x_{10}^a + r_{x_{10}^a}(x^a) \\ \dot{x}_{10}^o &= D_o x_{10}^a - D_o x_{10}^o + r_{x_{10}^o}(x^o) + k_L a \left(x_{10}^{sat} - x_{10}^o\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Suposición 3.2 *En el tanque anóxico la concentración de OD en el afluente es cero, esto es,* $x_{10}^{in} = 0$*. Además, se considera que la concentración de OD proveniente del sedimentador es aproximadamente igual comparada con la que proviene del tanque aeróbico, es decir,* $x_{10}^R \approx x_{10}^o$*. Por lo que el oxígeno mezclado se reduce a* $x_{10}^m = (Q_r + Q_R)x_{10}^o/Q_m$*.*

Suposición 3.3 *La concentración de OD saliente del tanque anóxico es mucho menor que el nivel de OD fluyendo dentro del tanque aeróbico. Como consecuencia, se supone que en el tanque aeróbico* $x_{10}^a = 0$*.*

De las Suposiciones 3.2 y 3.3, y definiendo $D_{a1} = (Q_r + Q_R)/V_a$, (3.8) se reescribe en términos de la cascada (3.6) como

$$\begin{aligned} \dot{z}_{10} &= -D_a z_{10} + r_{z_{10}}(z) + D_{a1}\xi_{10} \\ \dot{\xi}_{10} &= -D_o \xi_{10} + r_{\xi_{10}}(\xi) + \left(\xi_{10}^{sat} - \xi_{10}\right) u \end{aligned} \tag{3.9}$$

Suposición 3.4 *Las variables de* D_a*,* D_{a1} *y* D_o *se conocen totalmente y su valor está acotado. En principio se suponen constantes.*

La cascada (3.9) describe la dinámica del OD dentro de los bioreactores y haciendo un cálculo simple, se sabe que el origen $(z, \xi) = (0, 0)$ es un equilibrio. Entonces, para encontrar una realimentación que estabilice asintóticamente el origen se busca satisfacer las condiciones del Teorema 3.4.

Primero, se debe satisfacer la Suposición 3.1. De (3.9) se tiene que $\dot{z}_{10} = f(z_{10}) = -D_a z_{10} + r_{z_{10}}(z)$. Considere ahora la función definida positiva $W(z_{10})$, radialmente no acotada y C^2

$$W(z_{10}) = \frac{1}{2} z_{10}^2 \tag{3.10}$$

Calculando $\frac{\partial W(z_{10})}{\partial z_{10}} f(z_{10})$ se obtiene

$$\frac{\partial W(z_{10})}{\partial z_{10}} f(z_{10}) = z_{10} f(z_{10}) = -D_a z_{10}^2 + z_{10} r_{z_{10}}(z)$$

sustituyendo la reacción (2.16) en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(z_{10})}{\partial z_{10}} f(z_{10}) &= -D_a z_{10}^2 + z_{10} \Bigg[- \hat{\mu}_H \left(\frac{1 - Y_H}{Y_H} \right) \left(\frac{z_2}{K_S + z_2} \right) \left(\frac{z_{10}}{K_{OH} + z_{10}} \right) z_6 - \\
&\quad \hat{\mu}_A \left(\frac{4{,}57 - Y_A}{Y_A} \right) \left(\frac{z_9}{K_{NH} + z_9} \right) \left(\frac{z_{10}}{K_{OA} + z_{10}} \right) z_7 \Bigg] \\
&= -D_a z_{10}^2 - \Bigg[\hat{\mu}_H \left(\frac{1 - Y_H}{Y_H} \right) \left(\frac{z_2}{K_S + z_2} \right) \left(\frac{1}{K_{OH} + z_{10}} \right) z_6 + \\
&\quad \hat{\mu}_A \left(\frac{4{,}57 - Y_A}{Y_A} \right) \left(\frac{z_9}{K_{NH} + z_9} \right) \left(\frac{1}{K_{OA} + z_{10}} \right) z_7 \Bigg] z_{10}^2 \\
&= - \left(D_a + \Omega(z) \right) z_{10}^2
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Omega(z) &= \Bigg[\hat{\mu}_H \left(\frac{1 - Y_H}{Y_H} \right) \left(\frac{z_2}{K_S + z_2} \right) \left(\frac{1}{K_{OH} + z_{10}} \right) z_6 + \\
&\quad \hat{\mu}_A \left(\frac{4{,}57 - Y_A}{Y_A} \right) \left(\frac{z_9}{K_{NH} + z_9} \right) \left(\frac{1}{K_{OA} + z_{10}} \right) z_7 \Bigg]
\end{aligned}$$

Por la positividad de los estados y de los flujos en la planta (Comentario 2.1), el término $(D_a + \Omega(z)) > 0$ e implica que

$$\frac{\partial W(z_{10})}{\partial z_{10}} f(z_{10}) < 0$$

lo que asegura EG de $z_{10} = 0$.

Por otro lado, se busca satisfacer las condiciones **(i)** y **(ii)** del Teorema 3.4. De (3.9), es claro que el término de interconexión está dado por

$$\psi(z, \xi) = D_{a1}\xi_{10}$$

Si la salida se selecciona como

$$y(\xi) = \xi_{10} \tag{3.11}$$

entonces el término de interconexión es factorizado como

$$\psi(z, \xi) = \tilde{\psi}(z, \xi) y(\xi) \quad \rightarrow \quad \tilde{\psi}(z, \xi) = D_{a1}$$

cumpliéndose así **(i)**. Para **(ii)**, el subsistema de la forma (3.7) está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{10} &= -D_o\xi_{10} + r_{\xi_{10}}(\xi) + \left(\xi_{10}^{sat} - \xi_{10}\right) u \\ y &= \xi_{10} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Sea la función de almacenamiento, $U(\xi_{10})$, C^1, positiva definida, radialmente no acotada

$$U(\xi_{10}) = \frac{1}{2}\xi_{10}^2 \tag{3.13}$$

Se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \xi_{10}\dot{\xi}_{10} \\ &= \xi_{10}\left(-D_o\xi_{10} + r_{\xi_{10}}(\xi) + \left(\xi_{10}^{sat} - \xi_{10}\right) u\right) \end{aligned}$$

Si se escoge a u como

$$u = \frac{1}{\left(\xi_{10}^{sat} - \xi_{10}\right)} \left[D_o\xi_{10} - r_{\xi_{10}}(\xi) + v\right] \tag{3.14}$$

implica que

$$\dot{U} = \xi_{10} v = y v$$

y por Definición 3.3, se dice que el subsistema (3.12) es pasivo por realimentación respecto a la salida y y una nueva entrada v, con la ley de control u y función de almacenamiento (3.13). Con esto se cumple **(ii)**. Luego, la realimentación que hace pasiva a toda la cascada (3.9) viene dada por

$$v = -\left(\frac{\partial W(z_{10})}{\partial z_{10}}\tilde{\psi}\right)^T (z_{10}, \xi_{10}) + \beta = -D_{a1} z_{10} + \beta \tag{3.15}$$

con función de almacenamiento $V(z_{10}, \xi_{10}) = W(z_{10}) + U(\xi_{10})$, salida y y entrada β, es decir,

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{W} + \dot{U} = \dot{z}_{10} z_{10} + \dot{U} \\
&= \left(-D_a z_{10} + r_{z_{10}}(z) + D_{a1}\xi_{10}\right) z_{10} + \xi_{10} v \\
&= -D_a z_{10}^2 + r_{z_{10}}(z) z_{10} + D_{a1}\xi_{10} z_{10} + \xi_{10}\left(-D_{a1} z_{10} + \beta\right) \\
&= -D_a z_{10}^2 + r_{z_{10}}(z) z_{10} + \xi_{10}\beta
\end{aligned}$$

De un ejercicio anterior, se sabe que $r_{z_{10}}(z) z_{10} \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -D_a z_{10}^2 + \xi_{10}\beta \\
&= -D_a z_{10}^2 + y\beta \\
&\leq y\beta
\end{aligned}$$

lo que efectivamente demuestra la pasividad de la cascada. Con este resultado, falta verificar si la cascada es ECD con entrada β y salida y. De la Definición 3.5, se considera a $\beta = 0$ y se hace $y \equiv 0$. Esto implica que $\xi_{10} = 0$, y el subsistema z_{10} se reduce a $\dot{z}_{10} = -D_a z_{10} + r_{z_{10}}(z)$ que previamente ha sido demostrado que $z_{10} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Además, como una consecuencia adicional, $v \to 0$ e implica que también $u \to 0$ pues queda en función del estado ξ_{10}, el cual es cero, y de la reacción $r_{\xi_{10}}(\xi)$ que por su definición dada en (2.16) es claro que también es cero. En conclusión, la cascada pasiva es ECD, es decir, $y \equiv 0 \to (z_{10}, \xi_{10}) \equiv 0$. Por Teorema 3.4, la realimentación que estabiliza globalmente asintóticamente al equilibrio $(z_{10}, \xi_{10}) = (0, 0)$ está dada por

$$\beta = -ky, \quad k > 0 \tag{3.16}$$

La ley de control completa que estabiliza al equilibrio de la cascada está definida por (3.14), con (3.15), (3.16), y salida (3.11); más específicamente por

$$u = \frac{1}{(\xi_{10}^{sat} - \xi_{10})} \left[D_o \xi_{10} - r_{\xi_{10}}(\xi) - D_{a1} z_{10} - k\xi_{10} \right]. \quad k > 0$$

Aunque se encontró un controlador que estabilice al origen de la cascada, físicamente no tiene sentido que el OD en el reactor aeróbico sea cero ya que esta variable es la energía del sistema que hace posible la remoción de contaminantes en el agua residual. Por eso, aprovechando que la salida de la cascada (3.11) es el OD en el tanque aeróbico, se traslada el equilibrio $\xi_{10} = 0$ a $\xi_{10} = \xi_{10}^{ref}$, con ξ_{10}^{ref} una referencia deseada de OD. El controlador (3.16) se modifica por

$$\beta = k(\xi_{10}^{ref} - \xi_{10}), \quad k > 0 \tag{3.17}$$

Una observación sobre este diseño en cascada es que el control (3.17) estabiliza asintóticamente a la cascada (3.9) que se ha convertido en la interconexión realimentada de los subsistemas pasivos z_{10} y ξ_{10}, que a su vez también es pasiva (por Teorema 3.1). Para ser más precisos, por un lado, se sabe que el subsistema (3.12) es pasivo con entrada v, salida y y función de almacenamiento (3.13). Por otro lado, si se definen $y_1 = D_{a1} z_{10}$ y $v_1 = y$ como la salida y la entrada del subsistema z_{10} respectivamente, entonces este subsistema es pasivo con función de almacenamiento (3.10). La interconexión realimentada sucede mediante la entrada v como función de y_1. Lo anterior se ilustra en bloques en la Figura 3.5.

Finalmente, en términos de las variables originales, el controlador que estabiliza asintóticamente al equilibrio $(x_{10}^a, x_{10}^o) = (0, x_{10}^{ref})$, con x_{10}^{ref} una referencia deseada de OD en el tanque aeróbico, es

$$k_L a = \frac{1}{(x_{10}^{sat} - x_{10}^o)} \left[D_o x_{10}^o - r_{x_{10}^o}(x^o) - D_{a1} x_{10}^a + k \left(x_{10}^{ref} - x_{10}^o \right) \right], \quad k > 0 \tag{3.18}$$

Comentario 3.1 *Para el desarrollo del controlador (3.18), en las reacciones de OD en la cascada (3.8) se omitió la dependencia de otras variables de estado del PLA. Las reacciones fueron tratadas como funciones conocidas y acotadas (Suposición 2.1) que no afectan las condiciones de pasividad y estabilidad de la cascada (deducidas usando el Comentario 2.1).*

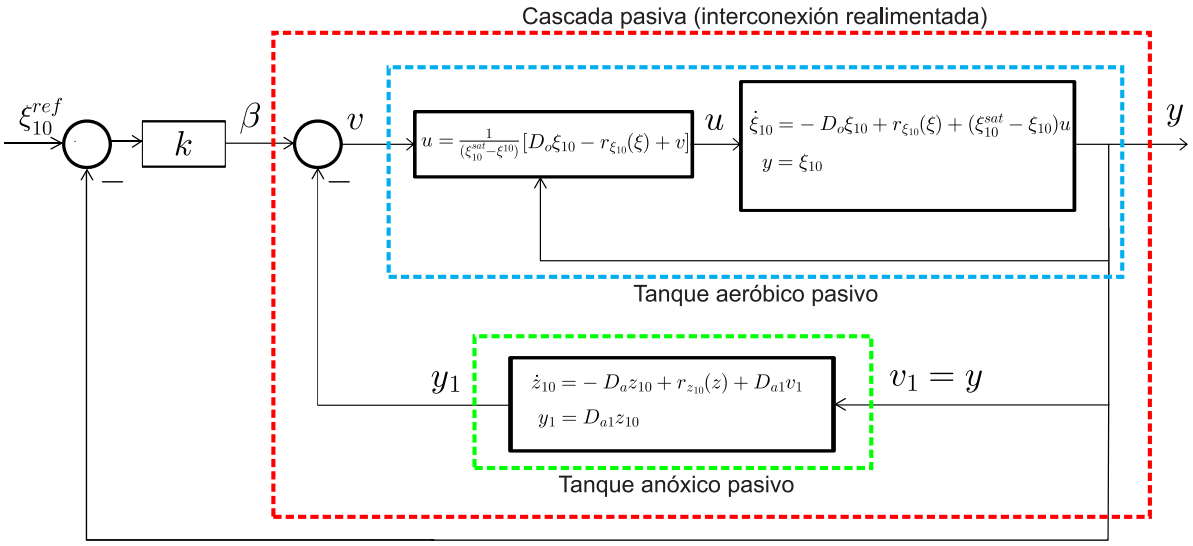


Figura 3.5: Cascada como interconexión realimentada de dos sistemas pasivos.

Resultados

Se presentan los resultados obtenidos para el control de OD. Se realiza una simulación en *Matlab-Simulink*. Se utiliza un paso fijo de integración de 0.001 y el método de integración seleccionado es *ode1* (para resultados subsecuentes se usan estos mismos parámetros de simulación). Las variables de operación de la planta se presentan en la Tabla 3.1. La ganancia de (3.18) es seleccionada como

$$k = 1$$

La Figura 3.6 muestra la implementación del control diseñado para regular el OD. Como se puede ver en la Figura 3.6(a), en el reactor anóxico, el OD viaja asintóticamente hacia la referencia y permanece cercano a ese valor, por lo que se logra regular el OD. En la Figura 3.6(b) se muestra el OD en el reactor anóxico, el cual se mantiene prácticamente en cero. El coeficiente de transferencia se presenta en la Figura 3.6(c). Adicionalmente como resultado ilustrativo, en la Figura 3.6(d) se muestra el COD tanto en el afluente (COD_{in}) como en el efluente (COD_e), donde se puede observar la reducción en el nivel de COD del agua tratada.

Condiciones iniciales	
T. anóxico $[g/m^3]$	$x^a(0) = [35\ 24\ 90\ 95\ 40\ 80\ 2{,}5\ 0{,}07\ 15\ 0{,}0013\ 0{,}5\ 6{,}5\ 2{,}5]^T$
T. aeróbico $[g/m^3]$	$x^o(0) = [35\ 3{,}8\ 90\ 2{,}8\ 50\ 120\ 4\ 9\ 4{,}2\ 0\ 1{,}2\ 0{,}25\ 1{,}25]^T$
Sedimentador $[g/m^3]$	$x^R(0) = 0$
Características del afluente	
$x^{in} = [35\ 80\ 40\ 105\ 0\ 25\ 0\ 0\ 20\ 0\ 2\ 6\ 3]^T \quad [g/m^3]$	
Vector de control	
$w = [5000\ 2500\ 1500\ 750\ k_La(x^{sat} - x^o_{10})]^T \quad [m^3/d]$	
Parámetros de OD	
Coeficiente de saturación $x^{sat}_{10} = 8{,}88\ [g/m^3]$	Referencia deseada $x^{ref} = 2\ [g/m^3]$

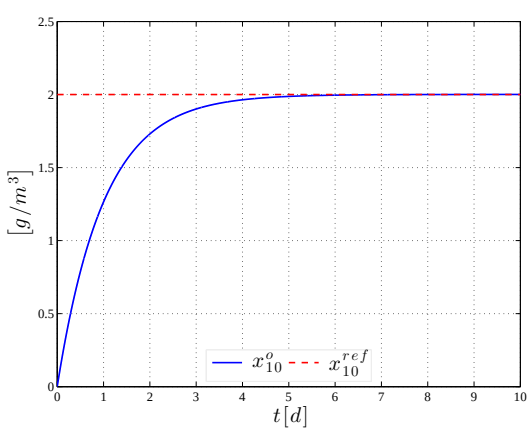
Tabla 3.1: Variables operacionales de la planta de TAR.

Por otro lado, la Figura 3.7 presenta un resultado con variaciones en las variables involucradas. Algunas concentraciones del afluente se les añade una función que emula ruido de medición. Lo mismo aplica para el OD en el tanque aeróbico enviado a k_La. Además, al flujo del afluente Q_{in} y a algunas de sus concentraciones se les añade una función para simular una variación en el tiempo, quedando de la siguiente manera

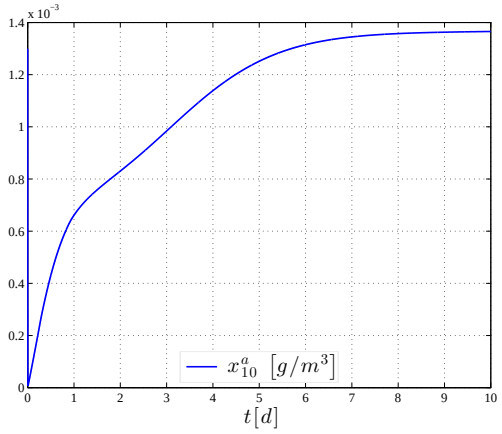
$$x_2^{in_r} = x_2^{in} + 20\vartheta(t), \quad x_4^{in_r} = x_4^{in} + 30\vartheta(t), \quad x_9^{in_r} = x_9^{in} + 5\vartheta(t), \quad x_{11}^{in_r} = x_{11}^{in} + 0{,}5\vartheta(t),$$
$$x_{10}^{o_r} = x_{10}^{in} + 0{,}1\vartheta(t) \qquad \text{y} \qquad Q_{in_r} = 5000 + 1000\sin(2t) \tag{3.19}$$

donde $\vartheta(t)$ es una función que genera un número aleatorio con distribución uniforme [58] en $[-1, 1]$. Todo con la intención de que el controlador se implemente en presencia de perturbaciones. La Figura 3.7(a) muestra que el OD en el tanque aeróbico se acerca a la referencia y varía alrededor de la misma. El control k_La y el OD anóxico sufren alteraciones respecto a lo visto en la Figura 3.6 pero no se pierde el objetivo de control.

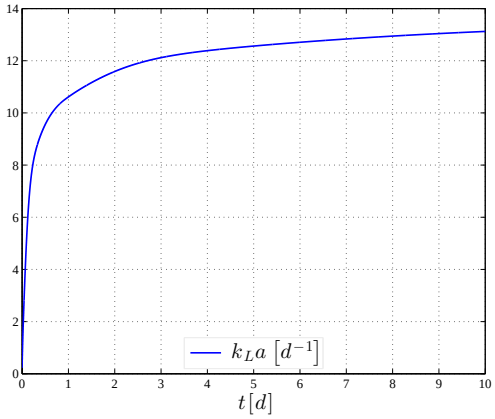
En conclusión, el control propuesto 3.7(c) regula el OD para la configuración de la planta de TAR.



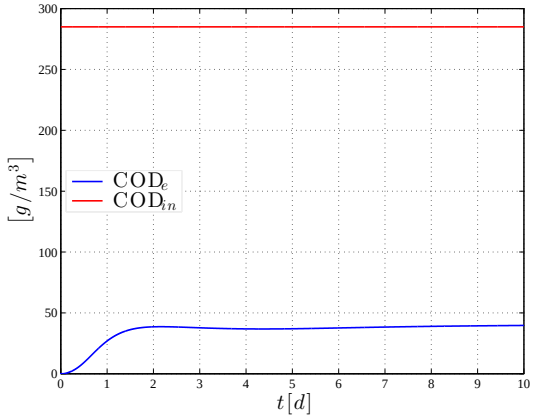
(a) OD en el reactor aeróbico.



(b) OD en el reactor anóxico.



(c) Coeficiente de transferencia.

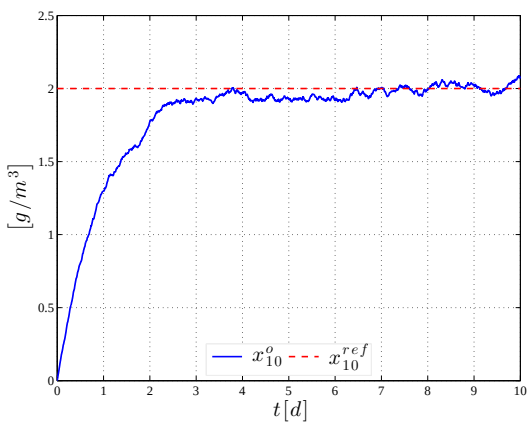


(d) COD en el afluente y efluente.

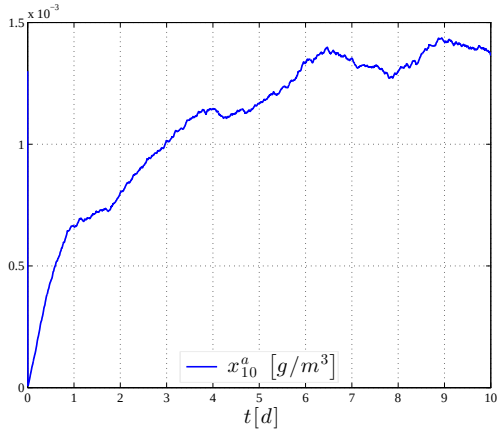
Figura 3.6: Control en cascada de OD.

3.3.2. Control PI para el OD

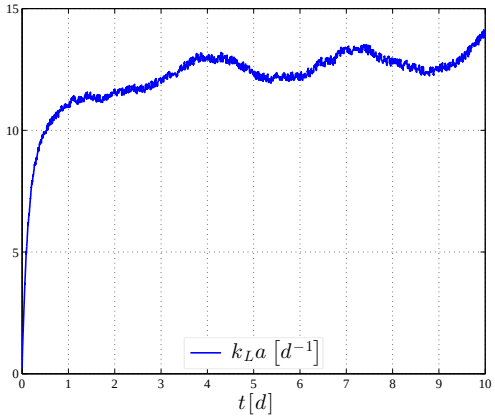
Las técnicas convencionales de control como el PI son usadas con frecuencia en diversas aplicaciones debido a su estructura simple, fácil implementación y gran funcionalidad. Nuevas estrategias de control normalmente son comparadas con esas técnicas clásicas para mostrar



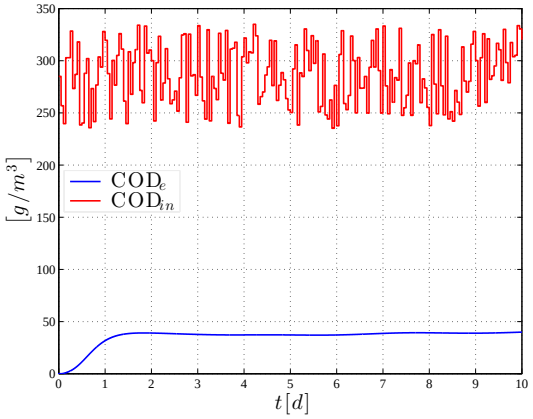
(a) OD en el reactor aeróbico.



(b) OD en el reactor anóxico.



(c) Coeficiente de transferencia.



(d) COD en el afluente y efluente.

Figura 3.7: Control en cascada de OD con perturbaciones.

alguna mejora significativa y del porqué podrían sustituirlas (como en [24] y [29]). Ante esto, en vías de presentar una comparación con la ley de control presentada en la subsección previa, se desarrolla un control PI para regular el OD.

Un controlador clásico PI lineal [59], está definido por

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau)\ d\tau, \quad e(t) = x^{ref} - x$$

donde u es la señal de control, e es el error entre la referencia x^{ref} y la variable controlada x; k_p y k_i son las ganancias proporcional e integral, respectivamente.

En este caso, para el control de OD solo se necesita la dinámica del mismo en el tanque aeróbico dada por (incluyendo Suposiciones 3.2 y 3.3)

$$\dot{x}_{10}^o = -D_o x_{10}^o + k_L a \left(x_{10}^{sat} - x_{10}^o\right) + r_{x_{10}^o}(x^o) \tag{3.20}$$

Para la implementación del PI, se considera la reacción $r_{x_{10}^o}(x^o)$ como una perturbación en la dinámica del OD. Así, se reduce la ecuación (3.20) en

$$\dot{x}_{10}^o = -D_o x_{10}^o + k_L a \left(x_{10}^{sat} - x_{10}^o\right) \tag{3.21}$$

Un cálculo sencillo permite obtener los siguientes puntos de equilibrio

$$\overline{x}_{10}^o = x^*, \quad \overline{k_L a} = \frac{D_o x^*}{x^{sat} - x^*} \tag{3.22}$$

para un punto de operación deseado x^*. Como (3.21) es de la forma $\dot{x} = f(x,u)$ ($x = x_{10}^o$, $u = k_L a$) y $f(x,u)$ es continuamente diferenciable, se puede linealizar alrededor del punto de equilibrio [1]. Entonces, linealizando (3.21) alrededor de $(\overline{x}_{10}^o, \overline{k_L a})$, la dinámica lineal del OD queda descrita por

$$\dot{x}_{\delta 10}^o = -a x_{\delta 10}^o + b k_L a_\delta \tag{3.23}$$

con $a = D_o x^{sat}$ y $b = (x_{10}^{sat} - \overline{x}_{10}^o)$. Así, un controlador PI para (3.23) viene dado por

$$k_L a_\delta = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau)\ d\tau, \quad e(t) = x_{10}^{ref} - x_{\delta 10}^o \tag{3.24}$$

El esquema de control en el dominio s para la planta (3.23) con la estrategia de control (3.24) es mostrado en la Figura 3.8, donde se elige como punto de operación x^* a la referencia de OD x_{10}^{ref}. Ahí mismo se puede observar la adición de un término $R(s)$ como entrada de

la planta, la cual denota la perturbación proveniente de la reacción de OD que se produce en el tanque y es rechazada por el término integral de (3.24). De la Figura 3.8, el polinomio característico en lazo cerrado es

$$P_c(s) = s^2 + (a + k_p b)s + k_i b \tag{3.25}$$

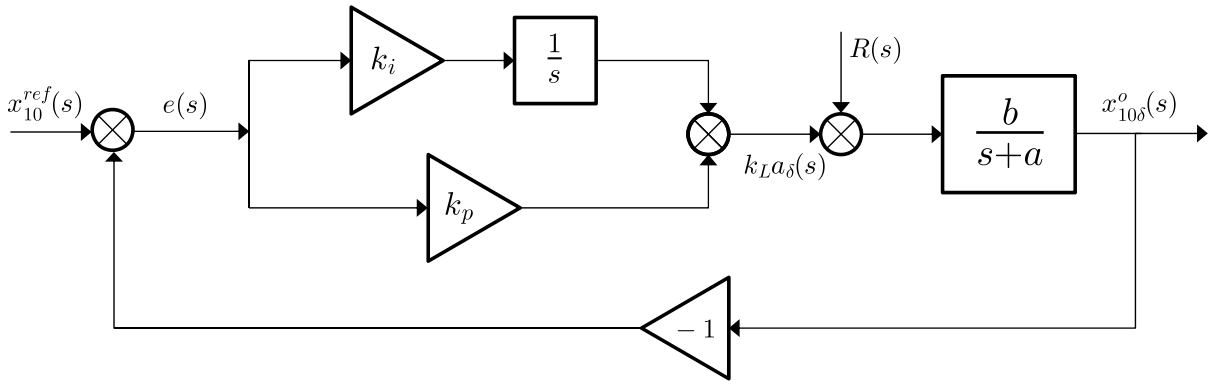


Figura 3.8: Diagrama a bloques para el control por PI de OD en el tanque aeróbico.

De acuerdo al Criterio de Routh-Hurwitz [60], para conseguir estabilidad de la planta, basta con seleccionar las ganancias como $k_i > 0$ y $k_p > -\frac{a}{b}$ para un $P_c(s)$ estable. Para fines prácticos, las ganancias simplemente se eligen como

$$k_p > 0 \quad \text{y} \quad k_i > 0 \tag{3.26}$$

Resultados

Primeramente, el controlador PI se somete bajo las mismas condiciones de la planta expuestos en la Tabla 3.1 para regular el OD. Las ganancias del controlador

$$k_p = 10 \quad \text{y} \quad k_i = 5$$

las cuales se seleccionaron a 'prueba y error', cumpliendo solamente con las condiciones de estabilidad (3.26). La intención fue obtener una respuesta de OD en el tanque aeróbico

comparable con la que se produce con el controlador (3.18). Los resultados se muestran en la Figura 3.9. De la Figura 3.9(a) se ve que el OD alcanza a la referencia deseada y el error en estado estacionario es casi cero. Lo que permite demostrar que el PI rechaza la 'perturbación' vinculada a la reacción; para que eso ocurra, la perturbación debe ser constante y lo es. Esta afirmación es válida cuando el OD alcanza su valor en estado estacionario, lo que sugiere una reacción constante. En otra situación, lo anterior no se cumple.

Aunque el OD en el tanque anóxico no es controlado directamente, sus niveles son casi cero en todo momento (ver Figura 3.9(b)). Además en las Figuras 3.9(c) y 3.9(d) se muestran la señal de control y el COD tanto en el afluente como en el efluente, respectivamente.

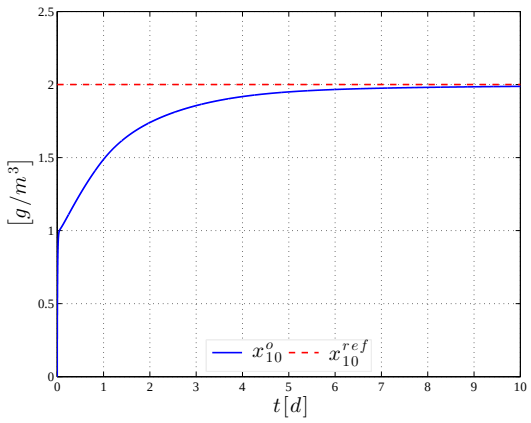
Otro resultado se presenta en la Figura 3.10 donde las condiciones de la planta cambian respecto a lo mostrado en (3.19). En otras palabras, cuando se añade ruido en algunas concentraciones del afluente y en el OD medido en el tanque aeróbico. El OD controlado logra llegar a la referencia e intenta mantenerse alrededor de la misma con el paso del tiempo como se aprecia en la Figura 3.10(a). Una diferencia significativa es la amplitud de ruido en el OD de ambos tanques, producida principalmente por la señal de control k_La mostrada en la Figura 3.10(c). La Figura 3.10(d) muestra las variaciones del COD en el afluente (COD_{in}) y el COD en el efluente (COD_e), este último en un nivel más bajo como se espera suceda después del proceso.

3.3.3. Comparación entre los controladores

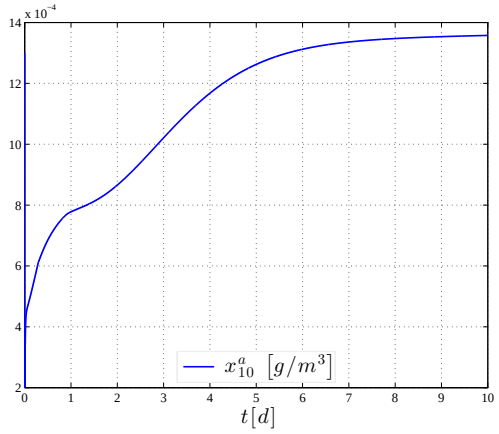
A partir de los resultados obtenidos entre un controlador en cascada y un PI clásico para regular el OD en una planta de TAR, emergen los siguientes comentarios

1. El controlador en cascada requiere información de las concentraciones de OD en los bioreactores y por consecuencia las mismas concentraciones son controladas. A diferencia de lo que ocurre con el PI, que solo regula el OD en uno de los bioreactores que forma el proceso en cascada sin tomar en cuenta lo que sucede en el otro tanque.

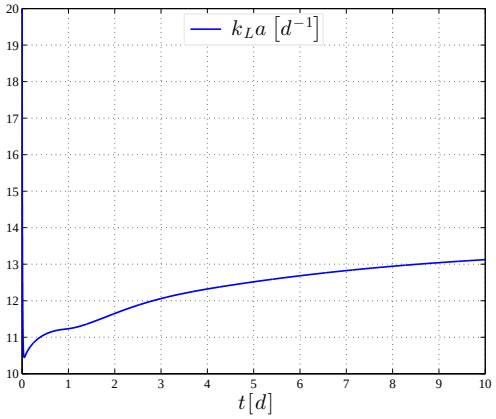
   La estrategia de control en cascada tiene la ventaja de controlar la salida de un proceso completo a partir de su entrada, cumpliéndose ciertas condiciones (propiedades



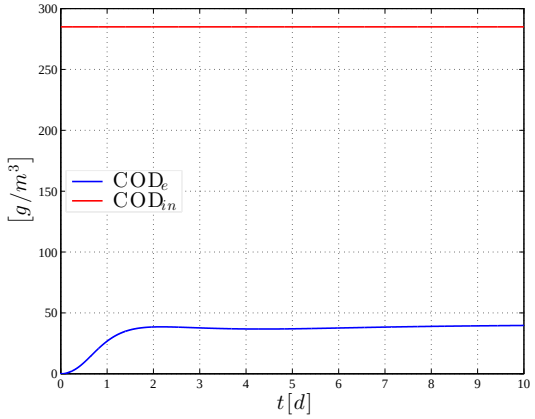
(a) OD en el reactor aeróbico.



(b) OD en el reactor anóxico.



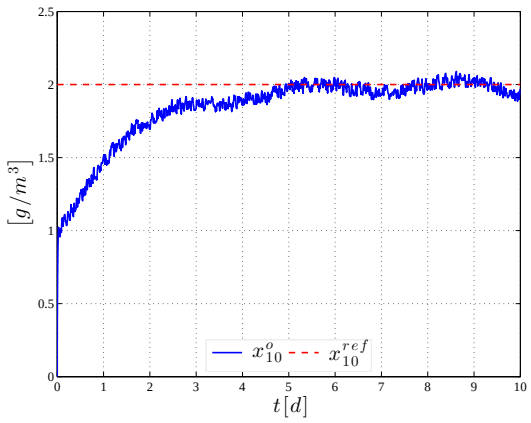
(c) Coeficiente de transferencia.



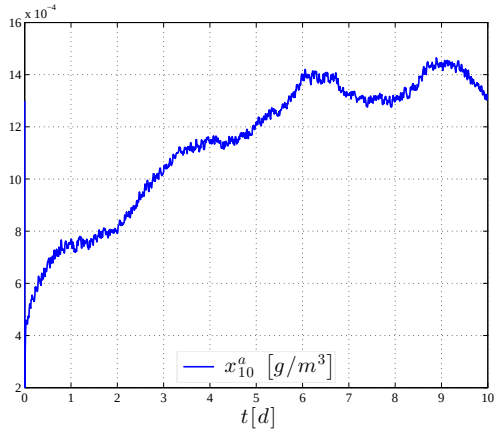
(d) COD en el afluente y efluente.

Figura 3.9: Control de OD con un PI convencional.

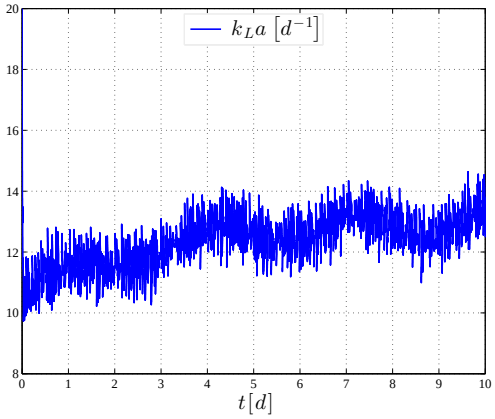
de pasividad) entre los subprocesos. Es de notar que esta ventaja no tiene contribución en este ejemplo de regulación de OD, pues su dinámica en el tanque anóxico es insignificante, por lo que el PI logra obtener resultados similares respecto a los que se presentan usando un controlador en cascada.



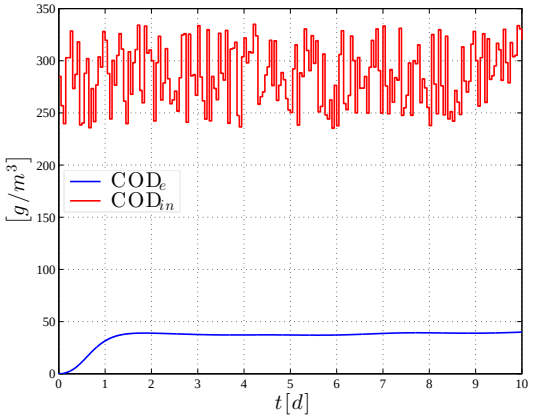
(a) OD en el reactor aeróbico.



(b) OD en el reactor anóxico.



(c) Coeficiente de transferencia.



(d) COD en el afluente y efluente.

Figura 3.10: Control de OD con un PI convencional y en presencia de perturbaciones.

2. La señal de control calculada por el PI alcanza valores máximos más grandes comparados con los producidos por el control en cascada si se desea obtener una respuesta similar en la variable controlada. En este caso, si se comparan las respuestas de k_La en las Figuras 3.6(c) y 3.9(c), el PI produce una señal más grande al inicio de la implementación. El consumo de energía y el tiempo de respuesta que demanda producir

esa señal puede no ser viable en la realidad.

3. Si bien no se presenta un análisis formal de robustez de los controladores (no considerado en este trabajo), se puede comentar de manera cualitativa lo siguiente a partir de los resultados de las Figuras 3.7 y 3.10.

   - El PI es más sensible al ruido de medición. La señal de control se vuelve más ruidosa y afecta a la variable controlada (veánse Figuras 3.10(a) y 3.10(c)). Esta situación es cualitativamente menor con el controlador en cascada (ver Figuras 3.7(a) y 3.7(c)).
   - El error entre la referencia y la concentración de OD en el tanque aeróbico es cuantitativamente similar en ambos controladores, como se aprecia en la Figura 3.11.

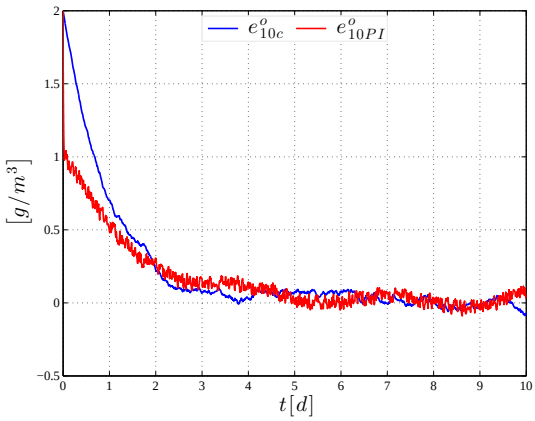


Figura 3.11: Error de OD en el tanque aeróbico.

4. La estructura del controlador en cascada demanda un conocimiento de la dinámica de la variable controlada mientras que el PI solo requiere el error de regulación. Aunque aparenta ser una desventaja, con mayor información de la planta existe la posibilidad

de ocasionar un mejor desempeño en el objetivo de control. Por supuesto, esto exige una buena aproximación del modelo de la planta.

5. El mejor desempeño del PI se produce cuando trabaja cerca del punto de operación de la planta (origen de su diseño), por su naturaleza lineal. Bajo las mismas condiciones, eso no sucede con el controlador en cascada.

Capítulo 4

Modelado de procesos en cascada con redes neuronales jerárquicas

En este capítulo se discute un enfoque de modelado para procesos en cascada usando un mecanismo basado en redes neuronales jerárquicas (RNJ) desarrollado por Cong, *et. al.*, y presentado en [61], [62] y [36]. Se describe la caracterización de los procesos en cascada y la estructura de identificación del proceso para desarrollar un modelo neuronal. Es presentado también los algoritmos de aprendizaje para las redes neuronales y un análisis de estabilidad. Asimismo, se muestra la aplicación del enfoque para obtener un modelo neuronal de la planta del PLA mostrado en el capítulo anterior y se presentan los resultados obtenidos. Finalmente, se realiza una validación del modelo neuronal mediante una generalización para conocer su viabilidad.

4.1. Introducción

Las redes neuronales (véase Apéndice B como base teórica) han sido utilizadas ampliamente, entre otras aplicaciones, para aproximar cualquier función no lineal, donde la precisión está en función del tipo de red neuronal y estructura.

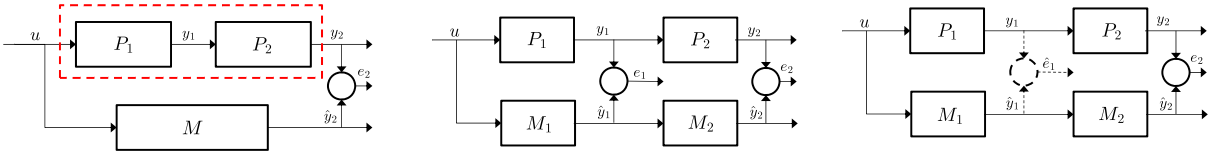
Los procesos en cascada, como la planta de TAR, incluye muchos subsistemas no li-

neales que pueden aproximarse por redes neuronales. Sin embargo, encontrar una relación entrada/salida entre el primer subsistema y el último puede ser una tarea compleja para representar el proceso completo cuando el número de subsistemas es grande. Una forma de abordar este problema es usando modelos jerárquicos, en particular, modelos neuronales jerárquicos.

El modelado neuronal normal está basado en el enfoque de 'caja negra' basado en datos donde no se necesita ningún mecanismo de conocimiento. Cuando existe un conocimiento a priori, es decir, la identificación de una 'caja gris' que es la combinación de un modelo de mecanismo y una identificación inteligente, puede mostrar mejores resultados [63]. El modelo de mecanismo representa usualmente las propiedades físicas que pueden ser descritas por funciones no lineales o ecuaciones dinámicas no lineales. Las incertidumbres entre el modelo de mecanismo y la planta pueden ser modeladas como cajas negras por redes neuronales. En este caso, para la planta de TAR el modelo de mecanismo son las ecuaciones que describen la dinámica de los bioreactores (2.7)-(2.8) y las partes desconocidas son las reacciones de las componentes, es decir, se usará el enfoque de modelado de caja gris, lo que permitirá mejorar la precisión del modelado.

Para modelar procesos en cascada existen tres enfoques diferentes como se muestra en la Figura 4.1. Si los datos de cada subsistema están disponibles, existen muchos modelos que podrían ser aplicados para identificarlos independientemente como lo muestra la Figura 4.1(b). Si las variables internas no son medibles, se puede usar un método general que suponga a la planta completa como un único sistema y se usa un solo modelo para identificarlo [64], [65], tal y como lo representa la Figura 4.1(a). Otro método es usar modelos jerárquicos como se presenta en la Figura 4.1(c). La ventaja de este enfoque es que la información entrada/salida de todo el proceso es usada para la identificación y estimación de las variables internas de cada subsistema. Por ejemplo, en la Figura 4.1(c) se muestra una cascada de dos subsistemas. La variable y_1 es estimada por $y_1 = \hat{e}_1 + \hat{y}_1$, donde $\hat{y}_1$ es la salida del modelo M_1, y $\hat{e}_1$ puede ser calculada a partir del modelo M_2 y e_2. En muchas plantas de TAR, y_1 es muestreada aleatoriamente. A pesar de que $\hat{e}_1$ no es un error real de identificación entre P_1 y M_1, se puede usar la muestra aleatoria y_1 para mejorar la precisión del modelado.

El problema clave para el entrenamiento del modelo neuronal jerárquico es cómo obtener una expresión explícita de cada error interno, el cual es presentado más adelante. La idea



(a) Enfoque 1. (b) Enfoque 2. (c) Enfoque 3.

Figura 4.1: Modelado de plantas en cascada.

principal es usar el mecanismo basado en RNJ aplicado al modelo de la planta de TAR, que como se había mencionado antes, supondremos que es la planta real.

4.2. Modelado de procesos en cascada por RNJ

Para cada subproceso del proceso en cascada, puede ser descrito usando la siguiente ecuación dinámica no lineal general

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t, \gamma(x_t)) \tag{4.1}$$

donde $x \in R^{n_c}$ es el estado interno, $u \in R^{m_c}$ es la entrada, f es una función vectorial y $\gamma(x_t)$ es un término desconocido. El modelo de mecanismo es $\dot{x}_t = f(\cdot)$ y se usarán redes neuronales para modelar $\gamma(x_t)$. Por ello, se requiere obtener un modelo en tiempo discreto de (4.1), para implementar redes neuronales. Así, suponga que un modelo discreto es

$$x(k+1) = \Psi[X_1(k)], \quad y(k) = h(X_2(k)) \tag{4.2}$$

donde $\Psi(\cdot)$ es una función no lineal desconocida representando a $\gamma(x_t)$, $h(\cdot)$ es el modelo conocido conteniendo la dinámica de la planta y $y \in R^r$ es la salida. $y(k) = [y_1 \ \cdots \ y_r]^T$,

$$X_1(k) = [x(k),\ x(k-1),\ \cdots, x(k-n_1),\ u(k),\ u(k-1),\ \cdots, u(k-m_1)]^T,$$

$$X_2(k) = [x(k),\ x(k-1),\ \cdots, x(k-n_2),\ u(k),\ u(k-1),\ \cdots, u(k-m_2)]^T,$$

donde $n_c \times n_1 + m_c \times m_1 = n_d$. Es un modelo NARMAX. Si h^{-1} existe (no es de interés obtenerla en este trabajo), entonces

$$X_1(k) = [h^{-1}[y(k)],\ h^{-1}[y(k-1)],\ \cdots, h^{-1}[y(k-n_1)],\ u(k),\ u(k-1),\ \cdots, u(k-m_1)]^T,$$

$$X_2(k) = [h^{-1}[y(k)],\ h^{-1}[y(k-1)],\ \cdots, h^{-1}[y(k-n_2)],\ u(k),\ u(k-1),\ \cdots, u(k-m_2)]^T$$

La idea básica del modelo neuronal basado en un mecanismo es que se utilicen redes neuronales para identificar las partes desconocidas de la planta y las salidas x de las redes neuronales son enviadas al modelo de mecanismo como parte de las entradas X_2.

La neurona adoptada es un perceptrón multicapa de una salida [66]

$$\hat{x}(k) = W(k)\phi\left[V(k)\hat{X}(k)\right] \tag{4.3}$$

donde la salida neuronal $\hat{x}(k)$ es escalar, el vector de entrada $\hat{X}(k) \in R^n$ definido por

$$\hat{X}(k) = [y_1(k),\ y_1(k-1),\ \cdots, y_r(k-n_1),\ u(k),\ u(k-1),\ \cdots, u(k-m_1)]^T,$$

los pesos en la capa de la salida son $W(k) \in R^{1\times m}$, los pesos en la capa oculta son $V(k) \in R^{m\times n}$, ϕ es una función vectorial de dimensión m. La representación típica del elemento $\phi_i(\cdot)$ es una función sigmoide. El modelo de mecanismo es

$$\hat{y} = h\left[\hat{X}_2(k)\right] \tag{4.4}$$

Primeramente se establecerá cómo modelar un bloque del proceso en cascada con un mecanismo basado en redes neuronales. El objetivo es actualizar los pesos de la red neuronal para que el error entre la salida del modelo neuronal (4.4) y la salida de la planta (4.2) sea minimizado. El índice de desempeño está definido como

$$J = \frac{1}{2}\|e(k)\|^2 = \frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{r}\left(\hat{y}_i(k) - y(k)\right)^2, \quad e(k) = \hat{y}(k) - y(k)$$

Además, la ley de aprendizaje de gradiente descendiente [67], $\Delta w_i(k) = -\eta\frac{\partial J}{\partial w_i}$, $\Delta v_{i,j}(k) = -\eta\frac{\partial J}{\partial v_{i,j}}$, donde $W(k) = [w_i(k)]$, $V(k) = [v_{i,j}]$, se usa para actualizar los pesos de la neurona y minimizar el índice de desempeño. Mediante la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial J}{\partial w_i} = \frac{\partial J}{\partial \hat{y}}\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{x}}{\partial w_i} = \sum_{t=1}^{r}\left(e_t(k)\frac{\partial \hat{y}_t}{\partial \hat{x}}\right)\frac{\partial \hat{x}}{\partial w_i} = e^T(k)h'\phi_i$$

donde ϕ_i es la salida en el i-ésimo nodo oculto. El mismo procedimiento es aplicado para $V(k)$. La regla de la cadena de los pesos de la capa oculta es calculada como sigue

$$\frac{\partial J}{\partial v_{i,j}} = \frac{\partial J}{\partial \hat{y}}\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{x}}{\partial \phi_i}\frac{\partial \phi_i}{\partial v_{i,j}} = \sum_{t=1}^{r}\left(e_t(k)h_t'\right)w_i\phi_i' x_j$$

. Así, para cada bloque la ley de aprendizaje es

$$\begin{aligned} W(k+1) &= W(k) - \eta e^T(k)h'\phi^T \\ V(k+1) &= V(k) - \eta e^T(k)h'\phi' W^T(k)\hat{X}^T \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde η es el parámetro de aprendizaje.

Ahora se establece el modelado de un proceso en cascada con RNJ. Los procesos no lineales en cascada pueden ser descritos como

$$\begin{aligned} \dot{x}_t^{(1)} &= f(x_t^{(1)}, u_t^{(1)}), \quad y_t^{(1)} = h\left(x_t^{(1)}\right) \\ \dot{x}_t^{(2)} &= f(x_t^{(2)}, y_t^{(1)}), \quad y_t^{(2)} = h\left(x_t^{(2)}\right) \\ &\vdots \\ \dot{x}_t^{(p)} &= f(x_t^{(p)}, y_t^{(p-1)}), \quad y_t^{(p)} = h\left(x_t^{(p)}\right) \end{aligned}$$

Suponga que se puede obtener un modelo discreto del proceso en cascada de la forma (4.2) para cada subproceso, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x}(k+1)^{(1)} &= \Psi\left[X_1^{(1)}(k)\right], \quad y^{(1)}(k) = h\left[X_2^{(1)}(k)\right] \\ \dot{x}(k+1)^{(2)} &= \Psi\left[X_1^{(2)}(k)\right], \quad y^{(2)}(k) = h\left[X_2^{(2)}(k)\right] \\ &\vdots \\ \dot{x}(k+1)^{(p)} &= \Psi\left[X_1^{(p)}(k)\right], \quad y^{(p)}(k) = h\left[X_2^{(p)}(k)\right] \end{aligned} \tag{4.6}$$

El esquema de modelado es presentado en la Figura 4.2. El punto clave es poder entrenar cada bloque relacionado a un subproceso de la cascada si se conoce los errores de modelado entre las redes neuronales y su correspondiente bloque de subproceso $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ... , $e^{(p)}$. Entonces se discute cómo se propagan los errores de modelado virtuales. Las RNJ generales

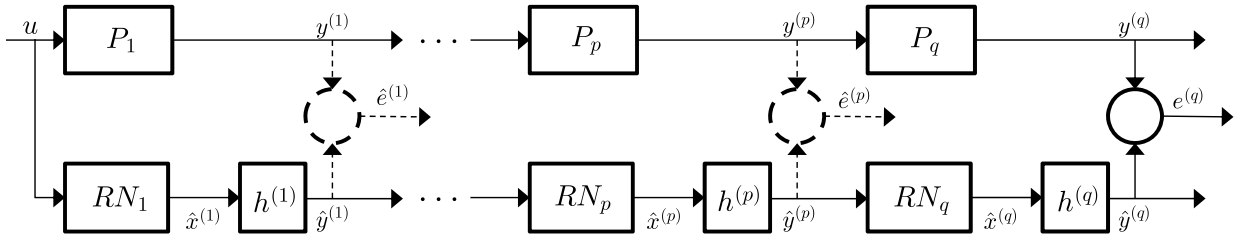


Figura 4.2: Modelado de procesos en cascada con redes neuronales jerárquicas.

se presentan en la Figura 4.3. Cuando los errores son propagados hacia atrás desde el bloque

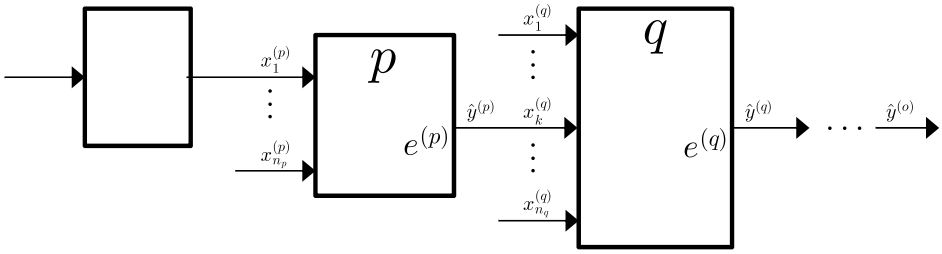


Figura 4.3: Redes neuronales jerárquicas generales.

q al bloque p, cómo se puede obtener $e^{(p)}$ desde el modelo jerárquico si $e^{(q)}$ es conocido. La relación entre $e^{(q)}$ y $e^{(p)}$ debe satisfacer la regla de la cadena. Se define

$$\begin{aligned} e^{(q)}(k) &= \left[e_i^{(q)}(k)\right] \\ e_i^{(q)}(k) &= \hat{y}_i^{(q)} - y_i^{(q)}, \quad i = 1, \ \ldots \ , r \end{aligned}$$

donde $\hat{y}_i^{(q)}(k)$ es la salida del q-ésimo bloque del modelo (mecanismo y red neuronal), $y_i^{(q)}(k)$ es la salida virtual del q-ésimo bloque de la planta. Si se usa el error del bloque q para calcular $\frac{\partial J}{\partial w_i} = \frac{\partial J}{\partial \hat{y}} \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial w_i} \right)$ para el bloque p, se obtiene

$$\frac{\partial J}{\partial w_i} = \frac{\partial J}{\partial \hat{y}^{(q)}} \frac{\partial \hat{y}^{(q)}}{\partial \hat{y}^{(p)}} \left(\frac{\partial \hat{y}^{(p)}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial w_i} \right)$$

Se puede ver que los últimos dos términos de la expresión anterior son iguales al caso cuando solo hay un bloque, $\frac{\partial J}{\partial \hat{y}^{(q)}}$ es el error virtual del bloque q, es decir, $\frac{\partial J}{\partial \hat{y}^{(q)}} = e^{(q)}$; el término $\frac{\partial \hat{y}^{(q)}}{\partial \hat{y}^{(p)}}$ cuantifica el error de propagación hacia atrás, el cual resulta en

$$\frac{\partial \hat{y}^{(q)}}{\partial \hat{y}^{(p)}} = \frac{\partial \hat{y}^{(q)}}{\partial \hat{x}^{(q)}} \frac{\partial \hat{x}^{(q)}}{\partial \phi^{(q)}} \frac{\partial \phi^{(q)}}{\partial \hat{y}^{(p)}} = h^{(q)'} \phi^{(q)'} W^{(q)T} V^{(q)}$$

Finalmente, se obtiene

$$e^{(p)} = e^{(q)T} h^{(q)'} \phi^{(q)'} W^{(q)T} V^{(q)} \tag{4.7}$$

Todo lo anterior es extendido a estructuras jerárquicas generales (ver Figura 4.3). Para eso, se explica el procedimiento de entrenamiento

- (Propagación hacia adelante) Respecto a la estructura de RNJ, calcular la salida de cada mecanismo basado en redes neuronales (4.3) y (4.4). La salida de cada mecanismo debe ser la entrada del siguiente nivel.

- Calcular el error de modelado para cada bloque. Se inicia a partir del último bloque, el error de identificación $e^{(o)}$ es

$$e^{(o)}(k) = \hat{y}^{(o)}(k) - y^{(o)}(k) \tag{4.8}$$

  donde $\hat{y}^{(o)}$ es la salida de la RNJ completa, $y^{(o)}$ es la salida final de la planta en cascada. Después se propaga el error de identificación hacia atrás de la estructura de RNJ como en la Figura 4.3. Se calcula el error del bloque p (definido como $e^{(p)}$) desde su bloque q precedente (definido como $e^{(q)}$) con (4.7).

- Entrenar las matrices de pesos para cada bloque independientemente. El algoritmo similar al propagación hacia atrás del bloque p es

$$\begin{aligned} W^{(p)}(k+1) &= W^{(p)}(k) - \eta e^{(p)T} h^{(p)'} \phi^{(p)T} \\ V^{(p)}(k+1) &= V^{(p)}(k) - \eta e^{(p)T} h^{(p)'} \phi^{(p)'} W^{(p)T}(k) \hat{X}^T \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.3. Análisis de estabilidad para los algoritmos de aprendizaje

El error de identificación está definido en (4.8). De la sección previa se sabe que el error en cada bloque puede ser calculado, esto es $e^{(p)}(k)$, y que existe una salida virtual $y^{(p)}(k)$ en la planta correspondiente a la salida de su bloque. Entonces el error de identificación es

$$e^{(p)}(k) = \hat{y}^{(p)}(k) - y^{(p)}(k)$$

De acuerdo al teorema de Stone-Weierstrass [68], un bloque del proceso de cascada (4.6) se escribe como

$$y^{(p)}(k) = W^{(p)*} \phi \left[V^{(p)*} \hat{X}(k) \right] - \mu(k)$$

donde W^* y V^* son las matrices de pesos desconocidas que pueden minimizar el error de modelado $\mu(k)$ de ese bloque. Se usa la serie de Taylor para obtener la dinámica del error. En el caso de dos variables independientes, la k-ésima expansión en series de Taylor de una función suave f cerca del punto $[x_1^0, x_2^0]$ tiene la siguiente forma

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} \left[\left(x_1 - x_1^0\right) \frac{\partial}{\partial x_1'} + \left(x_2 - x_2^0\right) \frac{\partial}{\partial x_2'} \right]^k f\left(x_1', x_2'\right)_{\substack{x_1'=x_1^0 \\ x_2'=x_2^0}} + \varepsilon$$

donde ε es el residuo de la fórmula de Taylor. Para la red neuronal $\hat{x}(k) = W(k)\phi\left[V(k)\hat{X}^T\right]$, si se establece la relación x_1 y x_2 con $W(k)$ y $V(k)$ respectivamente, y x_1^0, x_2^0 cuya correspondencia es W^* y V^*, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= W^{(p)*} \phi \left[V^{(p)*} \hat{X}(k) \right] + \left[W^{(p)}(k) - W^{(p)*} \right] \phi + \left[V^{(p)} - V^{(p)*} \right] \phi' W^{(p)T}(k) \hat{X}^T(k) + \varepsilon(k) \\ &= x(k) + \left[W^{(p)}(k) - W^{(p)*} \right] \phi + \left[V^{(p)} - V^{(p)*} \right] \phi' W^{(p)T}(k) \hat{X}^T(k) + \varepsilon(k) + \mu(k) \end{aligned}$$

donde W^* y V^* son los pesos desconocidos que pueden minimizar las dinámicas no modeladas $\varepsilon(k)$ y $\mu(k)$. El error de identificación puede ser representado por

$$e^{(p)}(k) = \tilde{W}^{(p)}(k)\phi\left[V^{(p)}\hat{X}(k)\right] + \tilde{V}^{(p)}(k)\phi' W^{(p)T}(k)\hat{X}^T(k) + \zeta(k) \tag{4.10}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{W}^{(p)}(k) &= W^{(p)}(k) - W^{(p)*}, \\
\tilde{V}^{(p)}(k) &= V^{(p)}(k) - V^{(p)*}, \\
\zeta(k) &= \varepsilon(k) + \mu(k), \\
e^{(p)}(k) &= \hat{y}^{(p)}(k) - y^{(p)}(k), \\
e^{(o)}(k) &= \hat{y}^{(o)}(k) - y^{(o)}(k)
\end{aligned}$$

Se asume que la planta (4.6) es BIBO estable, es decir, $y(k)$, $x(k)$ y $u(k)$ en (4.6) están acotadas (Comentario 2.1). Esto es razonable para suponer que las dinámicas no modeladas $\mu(k)$ y el error de aproximación de Taylor $\varepsilon(k)$ también son acotadas. El siguiente teorema ofrece un algoritmo similar al propagación hacia atrás estable para el entrenamiento de redes neuronales multicapa en tiempo discreto.

Teorema 4.1 *Si se usan redes neuronales multicapa (4.3) para identificar la planta no lineal (4.2), y el siguiente algoritmo similar al propagación hacia atrás para el bloque p*

$$\begin{aligned}
W^{(p)}(k+1) &= W^{(p)}(k) - \eta_p e^{(p)}(k)\phi^T\left[V^{(p)}\hat{X}(k)\right] \\
V^{(p)}(k+1) &= V^{(p)}(k) - \eta_p e^{(p)}(k)\phi' W^{(p)T}(k)\hat{X}^T(k)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

donde

$$\eta_p = \frac{\eta_0}{1 + \left\|\phi' W^{(p)}(k)\hat{X}^T(k)\right\|^2 + \|\phi\|^2}, \quad 0 < \eta_0 \leq 1,$$

el promedio del error de identificación satisface

$$\lim_{T\to\infty} \sup \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} \|e^{(o)}(k)\|^2 \leq \frac{\bar{\zeta}}{1-\eta_0} \tag{4.12}$$

donde $\bar{\zeta} = \max_k [\zeta^2(k)]$

Demostración. Ver Apéndice C ■

Comentario 4.1 *Un bloque p es un perceptrón multicapa. Su propiedad de estabilidad ha sido discutida en [69].*

El parámetro de aprendizaje normalizado η_p es variante en el tiempo para asegurar que el proceso de identificación sea estable [70]. Este ley de aprendizaje es fácil de usar porque no se requiere un cuidado especial acerca de cómo seleccionar el mejor parámetro de aprendizaje para asegurar tanto una convergencia rápida como la estabilidad, ni tampoco requiere de información previa.

4.4. Aplicación del modelo neuronal jerárquico en el PLA

El modelo neuronal jerárquico que se desea obtener es para identificar algunas reacciones no lineales de las componentes en el PLA. En consecuencia, solo se trabaja con la cascada formada por los dos bioreactores (2.7)-(2.8) y sus reacciones (2.9)-(2.19). Por otra parte, el modelo completo del PLA está dado en tiempo continuo y para aplicar el enfoque de RNJ se requiere un modelo en tiempo discreto. Por lo mismo, se utiliza el método de integración numérica de Euler sugerido por [38] para calcular numéricamente una ecuación de estado en tiempo continuo dado por

$$C(k+h) = C(k) + \left(\frac{dC}{dt}\right) h$$

donde C es la variable de estado y h es el paso de integración. Este método numérico es aplicado a todo el modelo en tiempo continuo. Una vez aplicado el método mencionado, se aborda el problema de identificación. De la ecuación de estado general para un bioreactor (2.6), la ecuación de estado discreta puede expresarse como

$$\mathbf{x}(k+1) = (1 - hD)\mathbf{x}(k) + hD\mathbf{x}_{in}(k) + h\ r_x(\mathbf{x}(k)) \tag{4.13}$$

donde $\mathbf{x} \in R^{13}$, $D = Q/V$. La salida de cada reactor es simplemente $y(k) = \mathbf{x}(k)$. Se define una variable adicional

$$x(k) = \frac{1}{h}\left((\mathbf{x}(k+1) - (1 - hD)\mathbf{x}(k) - hD\mathbf{x}_{in}(k)\right)$$

De (4.13) implica que

$$x(k) = r_x(\mathbf{x}(k))$$

la cual será la variable a identificar (la reacción) con el perceptrón multicapa definido en (4.3), en otras palabras, la reacción estimada es

$$\hat{x}(k) = \hat{r}_x(\mathbf{x}(k))$$

Comentario 4.2 *La discretización del modelo del PLA puede o no llevarse a cabo. El software de aplicación (Matlab-Simulink) realiza esa tarea simplemente especificando el método de integración. Presentar la discretización es solo para formalizar la implementación.*

El objetivo es entrenar los pesos de las redes neuronales a partir del enfoque mostrado en la sección anterior. La estrategia de modelado es presentado en la Figura 4.4. El primer nivel es el proceso anóxico. Los datos de entrada para este nivel son las concentraciones de cada componente $\mathbf{x}^m$. Las salidas de las redes neuronales son las reacciones r_2^a y r_9^a; y son enviadas a su correspondiente modelo de mecanismo. Esto conforma el modelo neuronal anóxico. La salida del modelo neuronal anóxico $\hat{y}^a(k) = \hat{\mathbf{x}}^a$ son las concentraciones de las componentes salientes del bloque anóxico. El segundo nivel corresponde al proceso aeróbico, donde las entradas son las salidas $\hat{y}^a(k)$. Las salidas de las redes neuronales dentro de ese nivel son las reacciones r_4^o, r_9^o y r_{10}^o. Esas tres reacciones son enviadas al segundo modelo de mecanismo. Las salidas de ese bloque son $\hat{y}^o(k) = \hat{\mathbf{x}}^o$, con lo cual se obtiene el modelo neuronal aeróbico. El modelo del sedimentador recibe a $\hat{y}^o(k)$ y se obtiene a $\hat{y}^e(k) = \hat{\mathbf{x}}^e$, que sirve para calcular el $\hat{\text{COD}}_e$ del efluente de todo el proceso. En el sedimentador no se aplica el modelado por RNJ porque no existen reacciones dentro de este. En el modelo neuronal obtenido, solo la reacción r_9 (amonio) se identifica con el enfoque de RNJ para mostrar su aplicación. El resto de las reacciones identificadas se realizan conociendo el error 'real' entre la planta y el modelo neuronal, tal y como se muestra en la Figura 4.4.

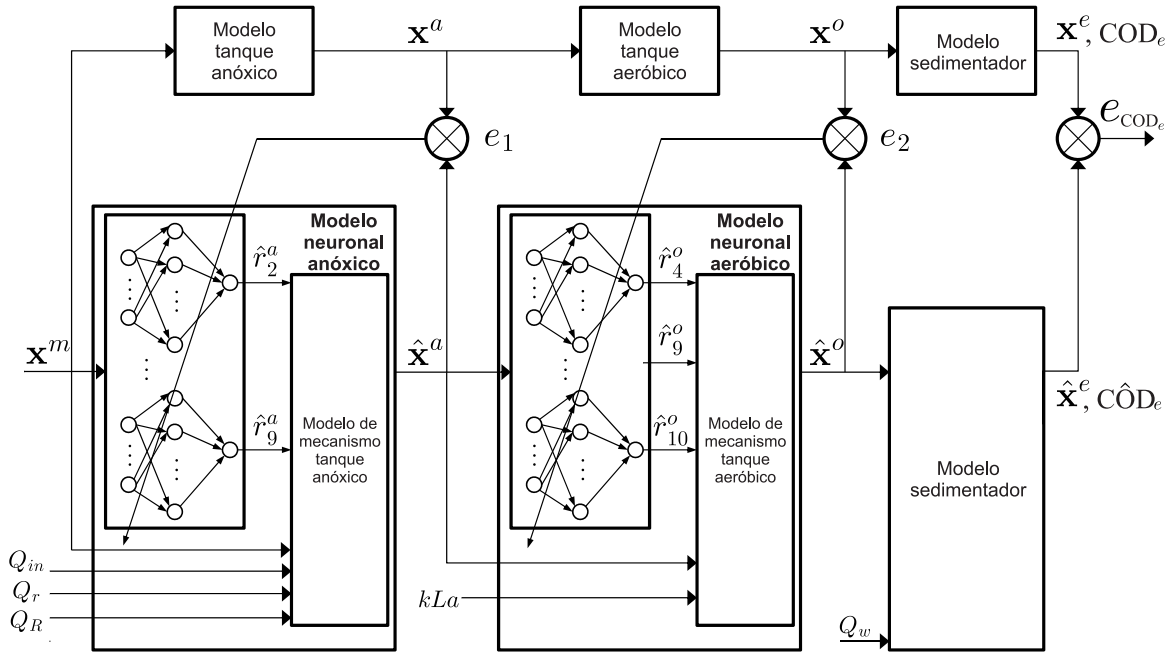


Figura 4.4: Estrategia de modelado vía RNJ para una planta de TAR.

El diseño de las redes neuronales se escoge como sigue. Cada perceptrón multicapa tiene una capa oculta con $m = 20$ nodos. Los algoritmos de entrenamiento están dados por (4.11). La función de activación empleada es

$$\phi_i(z) = \tanh(z)$$

Esta función de activación es útil cuando se identifican funciones no lineales [71], como en este caso son las reacciones. Los valores iniciales para los pesos $W(1)$ y $V(1)$ son números aleatorios con distribución uniforme en el intervalo $[-1, 1]$. Asimismo, para evitar una identificación errónea, las entradas de las neuronas son normalizadas con la siguiente transformación

$$\bar{\hat{X}} = \frac{(\hat{X} - X_{min})(d_2 - d1)}{X_{max} - X_{min}} + d_1$$

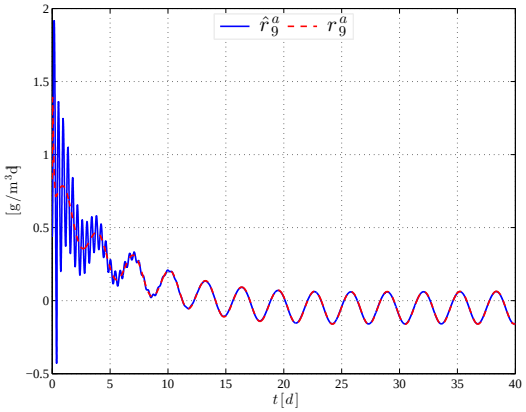
donde $\hat{X}$ es la entrada a normalizar, X_{min} y X_{max} son los valores mínimo y máximo respectivamente, que alcanza la entrada y $[d_1, d_2]$ es el intervalo hacia donde se normaliza la entrada. Debido a que las entradas son datos de signo positivo, se opta por el mapeo dentro del rango $[0, 1]$.

La implementación de redes neuronales en la identificación se realiza por medio de una simulación en *Matlab-Simulink*. El paso de integración se elige como $h = 1 \times 10^{-3}$. Las condiciones de operación para el modelo de la planta y el mecanismo son las mismas que las mostradas en la Tabla 3.1 con $k_L a$ dada por (3.18). Cuatro concentraciones en el afluente varían de acuerdo a

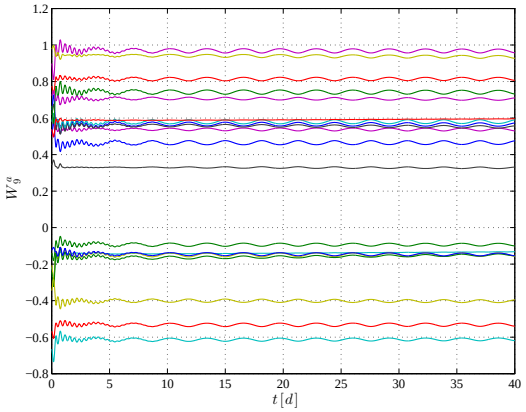
$$\mathbf{x}_2^{in_r} = \mathbf{x}_2^{in} + 10\sin(2t), \qquad \mathbf{x}_4^{in_r} = \mathbf{x}_4^{in} + 8\sin(2t),$$
$$\mathbf{x}_9^{in_r} = \mathbf{x}_9^{in} + 4\sin(2t), \qquad \mathbf{x}_{11}^{in_r} = \mathbf{x}_{11}^{in} + 0{,}25\sin(2t)$$

para obtener diferentes patrones de entrada en las neuronas y lograr un mejor aprendizaje. Los resultados se muestran en las Figuras 4.5 y 4.7. El primer resultado muestra la identificación de la reacción de amonio con el enfoque de RNJ. Las reacciones en ambos tanques son identificadas como se observa en las Figuras 4.5(a) y 4.5(c). El algoritmo de aprendizaje que entrena a los pesos converge en aproximadente 10 días, donde se ve que las reacciones estimadas se traslapan con las reales. El inicio de la evolución de los pesos de la capa de salida en ambos tanques denotados por W_9^a y W_9^o se presentan en las Figuras 4.5(b) y 4.5(d). Los errores de identificación se muestran en la Figura 4.6. La Figura 4.6(a) muestra el error estimado $\hat{e}_{1_9}$ y su contraparte real e_{1_9}. El primero es el actúa en el algoritmo de aprendizaje para el perceptrón que identifica la reacción de amonio en el tanque anóxico. Si bien ambos errores no son similares, el $\hat{e}_{1_9}$ es suficientemente aproximado para lograr el objetivo de identificación.

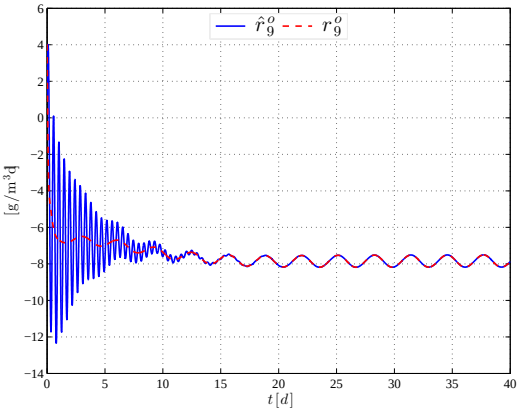
El segundo resultado (Figura 4.7) presenta la identificación de las reacciones r_2^a, r_4^o y r_{10}^o; conociendo los errores entre los tanques, en particular e_1, enalteciendo que el enfoque de RNJ permite entrenar las neuronas independientemente de un bloque si se conoce el error interno. Se aprecia que las tres reacciones son estimadas adecuadamente. El caso de interés es la estimación de r_{10}^o pues es un argumento del controlador diseñado en el Capítulo 3 y se



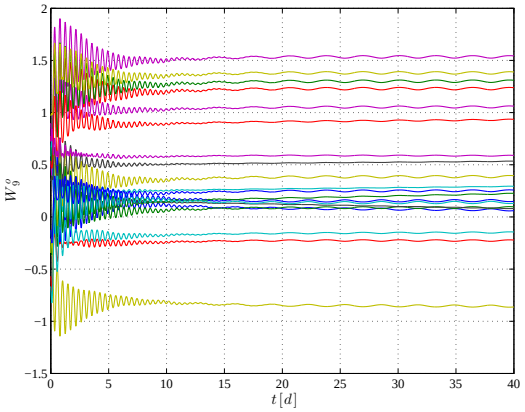
(a) Reacción de amonio. Tanque anóxico.



(b) Evolución de los pesos de la capa de salida. Tanque anóxico.



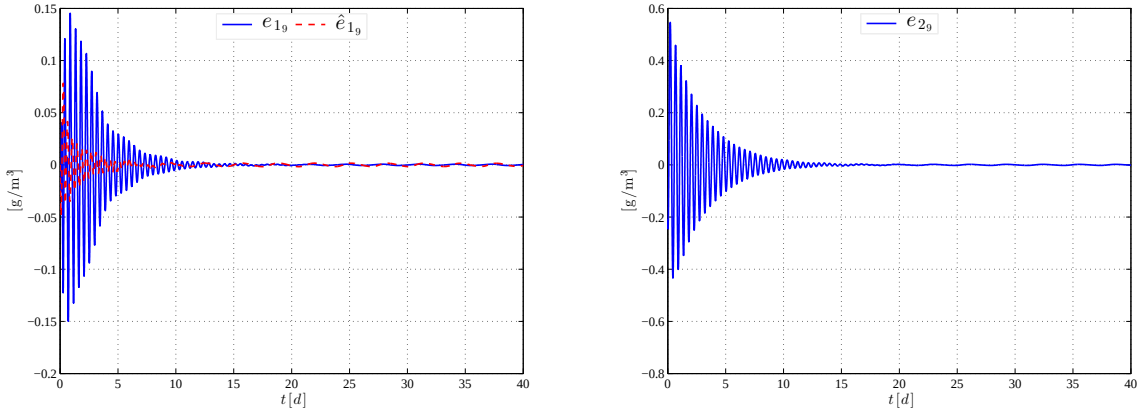
(c) Reacción de amonio. Tanque aeróbico.



(d) Evolución de los pesos de la capa de salida. Tanque aeróbico.

Figura 4.5: Identificación de la reacción de amonio mediante RNJ.

verá su aplicación más adelante.



(a) Errores de identificación (real y estimado). Tanque anóxico.

(b) Error de identificación. Tanque aeróbico.

Figura 4.6: Errores de identificación de la reacción de amonio.

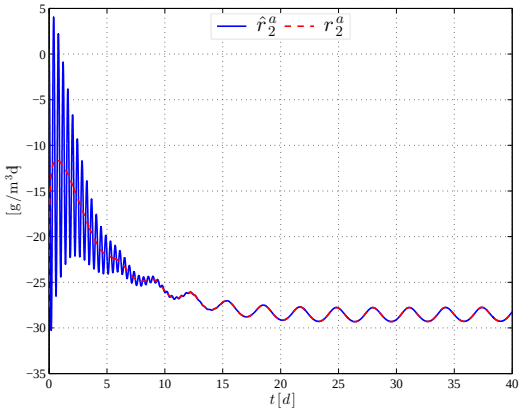
4.4.1. Generalización

Como se mencionó, se han estimado cinco de las reacciones del modelo de la planta. Lo que se busca ahora es eliminar el proceso de aprendizaje de las neuronas y obtener para cada una de estas un vector de pesos de la capa de salida W^* y una matriz de nodos ocultos V^* fijos, es decir, congelar los pesos después de un lapso de aprendizaje; y además someter el modelo neuronal a un nuevo patrón de entradas. De los resultados en simulación presentados anteriormente, se obtiene un promedio del valor en los pesos después de un aprendizaje de 40 días. La nueva entrada, el afluente, cambia en algunas de sus concentraciones como sigue

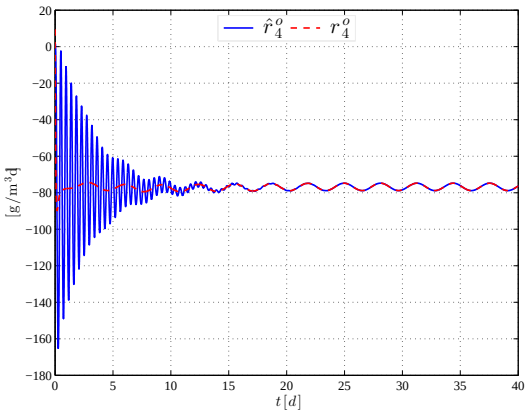
$$\mathbf{x}_2^{in_r} = \mathbf{x}_2^{in} + \vartheta(t), \qquad \mathbf{x}_4^{in_r} = \mathbf{x}_4^{in} + 8\vartheta(t),$$
$$\mathbf{x}_9^{in_r} = \mathbf{x}_9^{in} + 4\vartheta(t), \qquad \mathbf{x}_{11}^{in_r} = \mathbf{x}_{11}^{in} + 0{,}25\vartheta(t)$$

donde $\vartheta(t)$ es una función generadora de un número aleatorio con distribución uniforme en $[-1, 1]$.

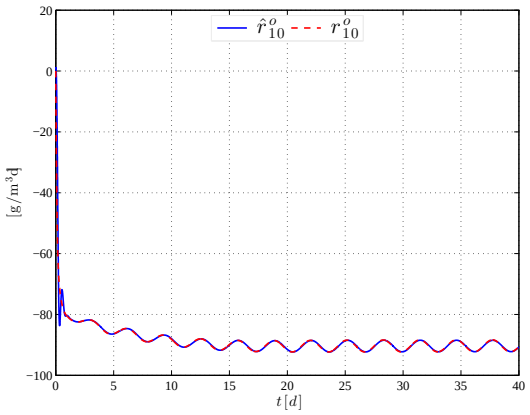
Una forma de verificar el modelo neuronal es calculando su índice de COD en el efluente $\hat{\text{COD}}_e$ y compararlo con el modelo real COD_e, obteniendo un error e_{COD} como es mostrado



(a) Reacción de sustrato soluble biodegradable fácilmente. Tanque anóxico.



(b) Reacción de sustrato en partículas biodegradable fácilmente. Tanque aeróbico.

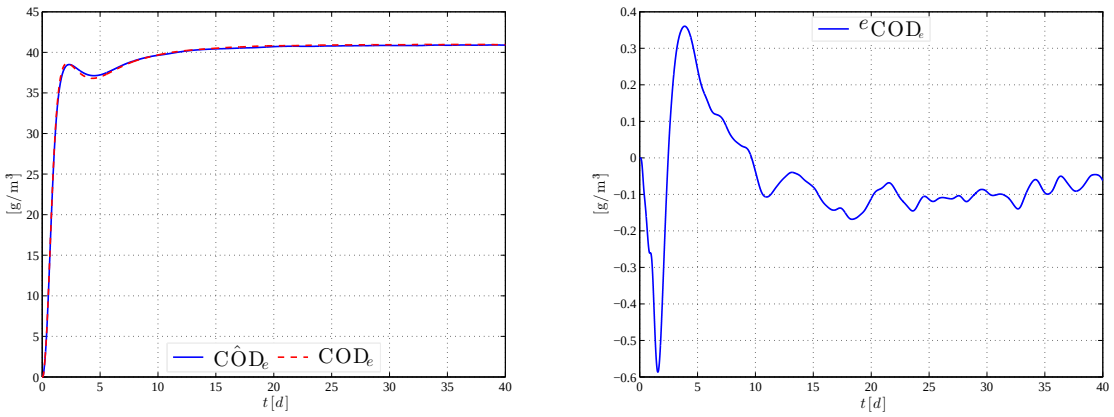


(c) Reacción de oxígeno. Tanque aeróbico.

Figura 4.7: Identificación de reacciones con conocimiento del error entre bloques.

en la Figura 4.4. El resultado obtenido se presenta en la Figura 4.8. Como se observa en la Figura 4.8(a), el COD en el efluente del modelo neuronal es aproximado al real. El error entre estos se visualiza en la Figura 4.8(b), donde el error más grande se presenta en la

parte transitoria. En estado estacionario, el error disminuye y se mantiene cerca de cero. En definitiva, el modelo neuronal obtenido es una buena estimación del modelo real de la planta de TAR.



(a) COD en el efluente real y aproximado. (b) Error de aproximación medido en el COD_e.

Figura 4.8: Resultado de la generalización del modelo neuronal.

Capítulo 5

Control neuronal en la planta de TAR

Este capítulo representa una extensión del Capítulo 3, debido a que se retoma el control no lineal en cascada para regular el OD en la planta de TAR desarrollado en ese capítulo y es aplicado al modelo neuronal visto en el Capítulo 4, obteniendo así un control neuronal. Para generalizar este control, se aplica al modelo de la planta real. Se presentan y discuten los resultados obtenidos en simulación.

5.1. Control en cascada de OD en el modelo neuronal

El desarrollo del control no lineal presentado en la Subsección 3.3.1 para el modelo de la planta se extiende igualmente para el control de su respectivo modelo neuronal, la diferencia que existe es que ahora la reacción de OD presente en el tanque aeróbico es estimada a partir de una red neuronal. Para ser más explícitos, se presenta la esencia sobre el diseño del control en cascada para regular el OD en el modelo neuronal.

Las ecuaciones de estado para el OD en cada bioreactor son

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{10}^{a} &= \frac{1}{V_a}\left[\left(Q_{in}+Q_r+Q_R\right)\hat{x}_{10}^{m}-\left(Q_{in}+Q_r+Q_R\right)\hat{x}_{10}^{a}\right]+\hat{r}_{\hat{x}_{10}^{a}}(\hat{x}^{a}) \qquad (5.1)\\ \dot{\hat{x}}_{10}^{o} &= \frac{1}{V_o}\left[\left(Q_{in}+Q_r+Q_R\right)\hat{x}_{10}^{a}-\left(Q_{in}+Q_r+Q_R\right)\hat{x}_{10}^{o}\right]+\hat{r}_{\hat{x}_{10}^{o}}(\hat{x}^{o})+\hat{k_L a}\left(x_{10}^{sat}-\hat{x}_{10}^{o}\right) \end{aligned}$$

donde

$$\hat{r}_{\hat{x}^a_{10}}(\hat{x}^o) = W^{o*}_{10}\phi[V^{o*}_{10}\hat{x}^a] \tag{5.2}$$

donde W^{o*}_{10} y V^{o*}_{10} son la capa de salida y la matriz de nodos ocultos de la neurona perceptrón que estima la reacción, respectivamente, y que han sido congelados después de un periodo de aprendizaje. Una consecuencia de que la neurona ha sido entrenada es que se considera como una función estática (sin dinámica) cuyo argumento es el vector de concentraciones del tanque anóxico. Con ello, se evita una ambigüedad sobre si trabaja en tiempo continuo o discreto. La reacción de OD en el tanque anóxico es igual a (2.16) (no fue estimada por redes neuronales).

Nuevamente, si se admiten las Suposiciones 3.2 y 3.3; y definiendo $D_{a1} = (Q_r + Q_R)/V_a$, $D_o = (Q_{in} + Q_r + Q_R)/V_o$ y $D_a = (Q_{in} + Q_r + Q_R)/V_a$, (5.1) se expresa como la cascada (3.6) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_{10} &= -D_a\hat{z}_{10} + \hat{r}_{\hat{z}_{10}}(\hat{z}) + D_{a1}\hat{\xi}_{10} \\ \dot{\hat{\xi}}_{10} &= -D_o\hat{\xi}_{10} + \hat{r}_{\hat{\xi}_{10}}(\hat{\xi}) + \left(\xi^{sat}_{10} - \hat{\xi}_{10}\right)\hat{u} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Por tanto, básicamente es la misma cascada que en el planteamiento presentado anteriormente donde se busca satisfacer las condiciones del Teorema 3.4. La Suposición 3.1 se satisface con la función definida positiva $\hat{W}(\hat{z}) = \frac{1}{2}\hat{z}_{10}$ y $\dot{\hat{z}}_{10} = f(\hat{z}_{10}) = -D_a\hat{z}_{10} + \hat{r}_{\hat{z}_{10}}(\hat{z})$ de (5.3) donde se asegura EG de $\hat{z}_{10} = 0$.

Las condiciones **(i)** y **(ii)** del Teorema 3.4 se cumplen eligiendo a la salida como (con $\psi = D_{a1}$)

$$\hat{y}(\hat{\xi}) = \hat{\xi}_{10} \tag{5.4}$$

y el subsistema de la forma (3.7) dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_{10} &= -D_o\hat{\xi}_{10} + \hat{r}_{\hat{\xi}_{10}}(\hat{\xi}) + \left(\xi^{sat}_{10} - \hat{\xi}_{10}\right)\hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{\xi}_{10} \end{aligned} \tag{5.5}$$

es pasivo por realimentación con entrada $\hat{v}$, salida $\hat{y}$ y función de almacenamiento $\hat{U}(\hat{\xi}_{10}) =$

$\frac{1}{2}\hat{\xi}_{10}^2$; siendo la realimentación definida por

$$\hat{u} = \frac{1}{\left(\xi_{10}^{sat} - \hat{\xi}_{10}\right)} \left[D_o \hat{\xi}_{10} - \hat{r}_{\hat{\xi}_{10}}(\hat{\xi}) + \hat{v} \right] \tag{5.6}$$

Posteriomente, la realimentación que hace pasiva a toda la cascada (5.3) es

$$\hat{v} = -\left(\frac{\partial \hat{W}(\hat{z}_{10})}{\partial \hat{z}_{10}} \tilde{\psi} \right)^T + \beta = -D_{a1} \hat{z}_{10} + \hat{\beta} \tag{5.7}$$

con función de almacenamiento $\hat{V}(\hat{z}_{10}, \hat{\xi}_{10}) = \hat{W}(\hat{z}_{10}) + \hat{U}(\hat{\xi}_{10})$, salida $\hat{y}$ y entrada $\hat{\beta}$. Por último, se requiere verificar si la cascada es ECD con entrada $\hat{\beta}$ y salida $\hat{y}$. Por Definición 3.5, se considera a $\hat{\beta} = 0$ y se hace $\hat{y} \equiv 0$. Esto implica que $\hat{\xi}_{10} = 0$ y como antes $\hat{z}_{10} \to 0$ cuando $t \to \infty$ (Subsección 3.3.1). A partir de eso, $\hat{v} \to 0$ y $\hat{u}$ tiende a

$$\hat{u} = \frac{1}{\left(\xi_{10}^{sat} - \hat{\xi}_{10}\right)} \left[D_o \hat{\xi}_{10} - \hat{r}_{\hat{\xi}_{10}}(\hat{\xi}) \right]$$

por lo que la dinámica de $\dot{\hat{\xi}}_{10} \to 0$. Se dice entonces que la cascada pasiva es ECD. Por Teorema 3.4, la realimentación que estabiliza globalmente asintóticamente al equilibrio $(\hat{z}_{10}, \hat{\xi}_{10}) = (0, 0)$ está dada por

$$\hat{\beta} = -k\hat{y}, \quad k > 0 \tag{5.8}$$

El controlador total que estabiliza al equilibrio de la cascada está definida por (5.6), con (5.7), (5.8), y salida (5.4). Recordar que la reacción de OD para $\hat{u}$ está dada por (5.2). Para darle sentido físico al controlador, se traslada el equilibrio $\hat{\xi}_{10} = 0$ a $\hat{\xi}_{10} = \xi_{10}^{ref}$, este último la referencia de OD. La expresión general del controlador es

$$\hat{u} = \frac{1}{\left(\hat{\xi}_{10}^{sat} - \hat{\xi}_{10}\right)} \left[D_o \hat{\xi}_{10} - W_{10}^{o*} \phi[V_{10}^{o*} \hat{\xi}] - D_{a1} \hat{z}_{10} + k \left(\xi_{10}^{ref} - \hat{\xi}_{10} \right) \right], \quad k > 0 \tag{5.9}$$

al que se hace referencia como *control neuronal* en cascada, por la neurona que estima la reacción de OD. En términos de las variables originales (5.1), el control neuronal en cascada se reescribe como

$$\hat{k_L a} = \frac{1}{(\hat{x}_{10}^{sat} - \hat{x}_{10}^{o})} \left[D_o \hat{x}_{10}^{o} - W_{10}^{o*} \phi[V_{10}^{o*} \hat{x}^a] - D_{a1} \hat{x}_{10}^{a} + k \left(x_{10}^{ref} - \hat{x}_{10}^{o} \right) \right], \quad k > 0 \tag{5.10}$$

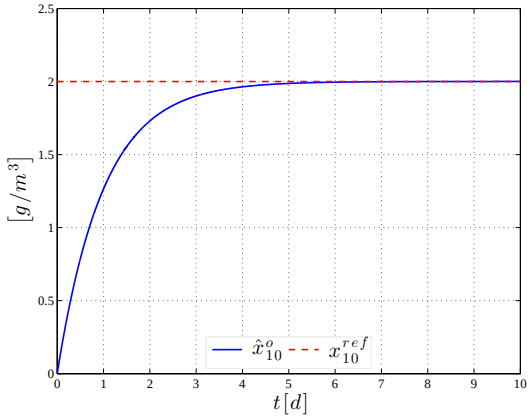
Para complementar este resultado, se aplica el controlador (5.10) al modelo neuronal por medio de una simulación. Las variables de operación del modelo están descritos en la Tabla 3.1. La ganancia de (5.10) se escoge unitaria. La Figura 5.1 muestra la implementación del control neuronal. Como se esperaba, el OD converge asintóticamente hacia la referencia como se ve en la Figura 5.1(a). El OD en el reactor anóxico permanece cercano a cero (Figura 5.1(b)). La señal de control se presenta en la Figura 5.1(c). En último lugar, es presentado en la Figura 5.1(d) el COD en el afluente (COD_{in}) y el COD en el efluente ($\hat{\mathrm{COD}}_e$), este último, que bajo las mismas condiciones de operación que en resultados anteriores, mantiene un nivel más bajo respecto al del afluente.

De todo lo anterior, la propuesta del controlador neuronal (5.10) logra el objetivo de regular el OD en los bioreactores del PLA.

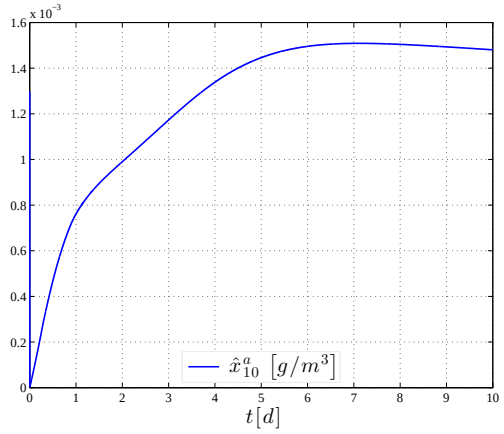
5.2. Control neuronal en cascada para el OD en la planta de TAR

La regulación de OD en la planta de TAR fue lograda a partir de un control no lineal en cascada (véase Subsección 3.3.1) el cual requiere del conocimiento de su dinámica. La característica de ese controlador (3.18) es cancelar las no linealidades de la dinámica para así estabilizar asintóticamente el equilibrio con una simple realimentación lineal de la salida. En ocasiones, resulta difícil conocer exactamente esas no linealidades lo que produce una disminución en el desempeño del controlador. En este caso, es demasiado complicado cuantificar las reacciones de OD que se producen dentro de los bioreactores, por lo que se usó el enfoque de RNJ para su estimación (Capítulo 4) y encontrar un controlador más práctico, que llamamos control neuronal (sección anterior). La intención ahora es saber si es viable usar el control neuronal en la planta de TAR sin destruir las propiedades de pasividad y estabilidad instauradas en el diseño del controlador original (3.18).

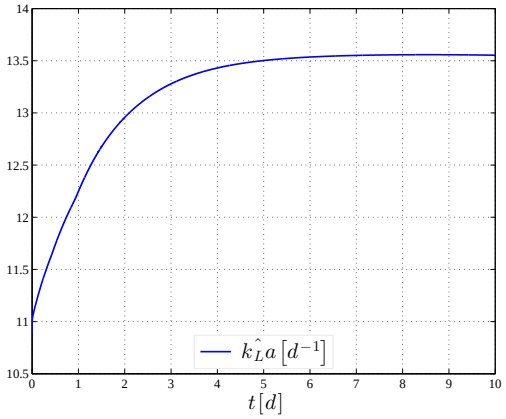
Se regresa al diseño del control no lineal (3.3.1) (en términos de la cascada (3.9)). La



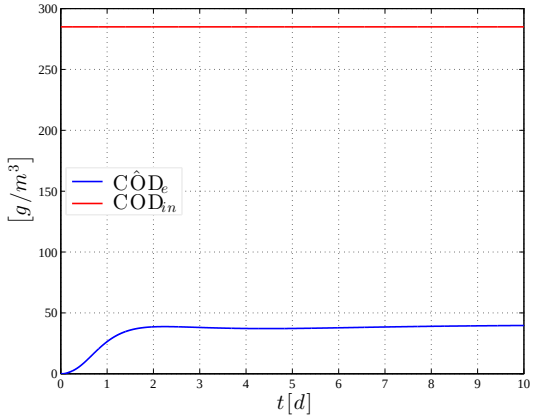
(a) OD en el modelo neuronal aeróbico.



(b) OD en el modelo neuronal anóxico.



(c) Coeficiente de transferencia.



(d) COD en el afluente y efluente.

Figura 5.1: Control neuronal en cascada de OD en el modelo neuronal.

primera selección fue (3.14) que hace pasivo a (3.12). La contraparte neuronal de (3.14) es

$$\hat{u} = \frac{1}{(\xi_{10}^{sat} - \xi_{10})} \left[D_o \xi_{10} - \hat{r}_{\xi_{10}}(z) + v \right] \tag{5.11}$$

con $\hat{r}_{\xi_{10}}(z) = W_{10}^{o*} \phi[V_{10}^{o*} \hat{z}]$. La diferencia entre los controladores $\hat{u}$ y (3.14) viene dada por la

reacción, la cual es caracterizada por medio de

$$\hat{r}_{\xi_{10}}(z) = r_{\xi_{10}}(\xi) + \varrho(t) \tag{5.12}$$

donde $\varrho(t)$ es un error de estimación que se supondrá es acotado, esto es, $|\varrho(t)| \leq \epsilon$ siendo ϵ una constante. Sustituyendo la expresión (5.12) en (5.11) se obtiene lo siguiente

$$\hat{u} = \frac{1}{(\xi_{10}^{sat} - \xi_{10})} \left[D_o \xi_{10} - r_{\xi_{10}}(\xi) + \varrho(t) + v \right]$$

Si se modifica la entrada v por $\hat{v} = v + \varrho(t)$, entonces

$$\hat{u} = \frac{1}{(\xi_{10}^{sat} - \xi_{10})} \left[D_o \xi_{10} - r_{\xi_{10}}(\xi) + \tilde{v} \right]$$

que conservaría la forma de u (3.14) y en consecuencia, la pasividad de (3.12) con una entrada auxiliar $\hat{v}$. Por otra parte, esa entrada $\hat{v}$ es usada para hacer pasiva a toda la cascada (3.9). Usando v de (3.15), se tiene lo siguiente

$$\hat{v} = v + \varrho(t) = -D_{a1} z_{10} + \beta + \varrho(t)$$

De forma similar al paso anterior, si ahora se define a $\hat{\beta} = \beta + \varrho(t)$, se consigue que

$$\hat{v} = -D_{a1} z_{10} + \hat{\beta}$$

preservando tanto la forma original de v como la pasividad de la cascada con otra entrada auxiliar $\hat{\beta}$. Establecida la conservación de una cascada pasiva, se necesita saber qué pasa con la estabilidad asintótica del equilibrio con $\hat{\beta}$. Con lo mostrado hasta este momento no se ha modificado la propiedad de ECD en la cascada. Por otro lado, se sabe que la función de almacenamiento que demuestra la pasividad está dada por $V = W(z_{10}) + U(\xi_{10})$. Asumiendo la entrada $\hat{\beta}$ y de un cálculo previo, se sabe que $\dot{V} \leq y\hat{\beta}$. Sustituyendo $\hat{\beta}$ con β dada por (3.16), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq y(-ky + \varrho(t)) \\ &\leq y(-ky + |\varrho(t)|) = y(-ky + \epsilon) = -ky^2 + y\epsilon \end{aligned}$$

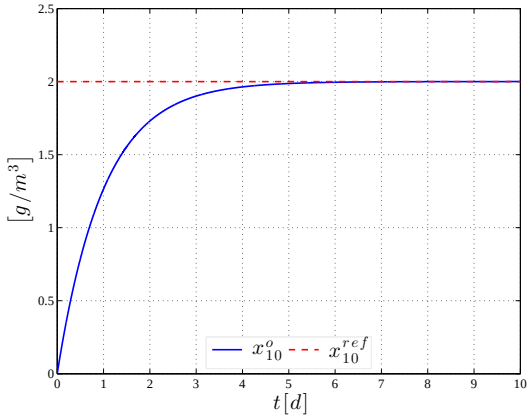
Para asegurar estabilidad asintótica $\dot{V}$ debe ser estrictamente negativa y para que eso suceda simplemente se establece que $\epsilon \to 0$. En otras palabras, si el error de estimación $\epsilon \to 0$, entonces $\varrho(t) \to 0$ e implica que $\hat{\beta} \to \beta$, a su vez $\hat{v} \to v$ y finalmente $\hat{u} \to u$. Concluyendo, el control neuronal (5.11) preserva las propiedades de pasividad de la cascada, pero la estabilidad solo se logra a razón de una mejor estimación de la reacción por medio de la red neuronal.

Por ende, el control neuronal análogo a (5.10) para la cascada (3.8) queda definido por

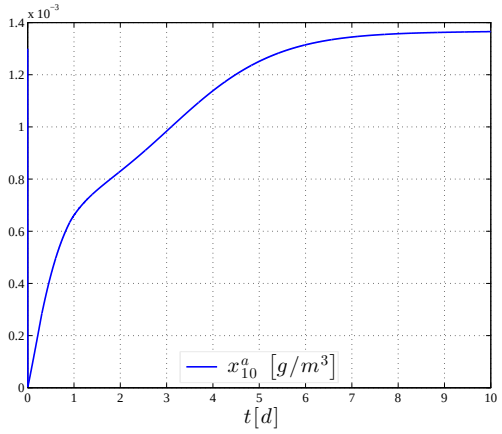
$$\hat{k_L a} = \frac{1}{(x_{10}^{sat} - x_{10}^{o})} \left[D_o x_{10}^{o} - W_{10}^{o*} \phi[V_{10}^{o*} x^{a}] - D_{a1} x_{10}^{a} + k \left(x_{10}^{ref} - x_{10}^{o} \right) \right], \quad k > 0 \qquad (5.13)$$

Para verificar el funcionamiento, se realiza una simulación del control neuronal aplicado a la planta de TAR y se comparan con los resultados obtenidos en el Capítulo 3. Los parámetros de la planta están descritos en la Tabla 3.1. La ganancia prevalece en $k = 1$. La Figura 5.2 muestra la implementación del control (5.13). De nueva cuenta, el OD en el tanque aeróbico alcanza la referencia deseada (Figura 5.2(a)). Del mismo modo, el OD en el tanque anóxico y el COD en el efluente (Figuras 5.2(b) y 5.2(d)) son prácticamente los mismos que en el resultado de la Figura 3.6. El cambio significativo aparece en la señal de control $\hat{k_L a}$ (5.13) de la Figura 5.2(c) donde se observa que tiene un sobrepaso antes de estabilizarse en su valor de estado estacionario. El resultado presentado en la Figura 3.6(c) tiene un comportamiento subamortiguado respecto a su valor en estado estacionario. Probablemente este constraste viene dado por el valor inicial ya que $k_L a$ (3.18) casi es cero mientras que $\hat{k_L a}$ (5.13) posee un valor más grande cercano a donde converge. De cualquier forma, esta observación no alteró el objetivo de control.

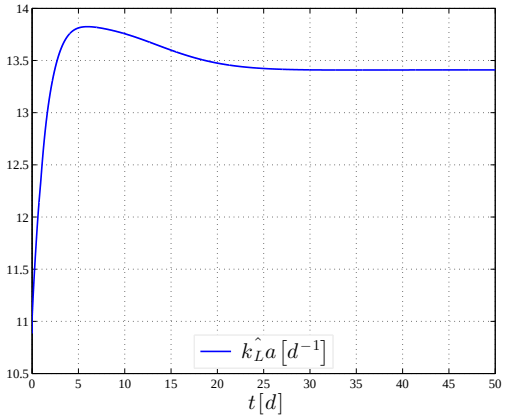
Por lo tanto, la alternativa de un controlador neuronal en cascada logra regular el OD en los bioreactores.



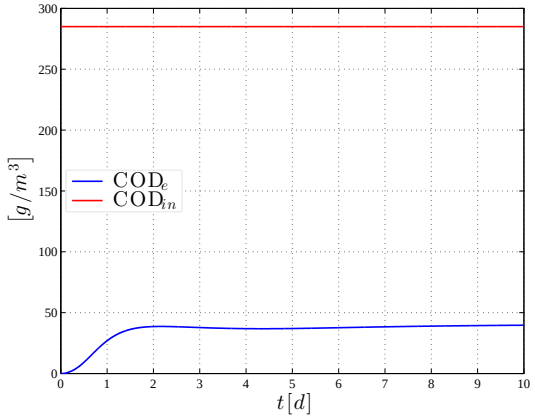
(a) OD en el modelo neuronal aeróbico.



(b) OD en el modelo neuronal anóxico.



(c) Coeficiente de transferencia.



(d) COD en el afluente y efluente.

Figura 5.2: Control neuronal en cascada de OD en la planta real.

Capítulo 6

Conclusiones

La revisión de lo expuesto en este trabajo permite decir que una de las primeras conclusiones es que se cumplieron los objetivos trazados inicialmente para el control de una planta de TAR. Más específicamente se comenta lo siguiente

- De la literatura fue retomado un modelo matemático de una configuración particular (Figura 2.1), comúnmente utilizada, de una planta de TAR que opera bajo el PLA (Capítulo 2). Se necesitó estudiar el modelo en dos partes: la primera vinculada a los bioreactores y la segunda parte concerniente a un sedimentador secundario. Múltiples trabajos han desarrollado modelos sobre los bioreactores y del sedimentador de manera separada, pero pocos trabajos precisan la correlación entre ellos. Con base en los trabajos [38], [47] y [39] principalmente, se logró obtener un modelo completo de la planta, eliminando la brecha entre un bioreactor y el sedimentador. Se piensa que el modelo completo es bastante confiable en la descripción dinámica del proceso por la gran aceptación de las referencias citadas.

- El principio de obtener un modelo matemático fue para diseñar un controlador dentro del proceso. La variable controlada elegida fue el OD en los bioreactores, que es fundamental para el TAR. El controlador fue diseñado usando la teoría de procesos en cascada que involucra cumplir con propiedades de pasividad y consecuentemente

de estabilidad. El controlador obtenido fue una realimentación no lineal de estado que permitió regular el OD en un nivel de operación deseado en la cascada formada por los bioreactores (Capítulo 3). Los resultados en simulación mostraron que el controlador en cascada cumple con el objetivo de control. Además, se demostró que este controlador no lineal posee ventajas significativas respecto a un control PI tradicional, como por ejemplo el control de toda la cascada (el PI solo actúa en un tanque), la señal de control calculada es más suave y existe un mejor rechazo al ruido de medición (mostrado solo cualitativamente).

- A partir del enfoque de RNJ [36] se logró aproximar aún más el modelo visto en el Capítulo 2. Este enfoque está pensado en obtener un modelo neuronal a partir de datos (información) de una planta real y un modelo de mecanismo (que fue parte del ASM No. 1); conveniente para procesos en cascada (Capítulo 3). En este trabajo ante la ausencia de esos datos, el modelo del Capítulo 2 pasó a ser la planta 'real' y fue aproximada por RNJ. Los resultados mostraron que el enfoque identifica algunas reacciones de las concentraciones presentes en el proceso y en general, la aproximación fue aceptable. Además, en cuanto a estructura matemática, las reacciones se redujeron considerablemente. Por ejemplo, para la reacción de OD descrita por el ASM No. 1 dado en (2.16) quedó simplificada en una neurona perceptrón (4.3). Por lo tanto, se puede decir que es más práctico calibrar un modelo neuronal basado RNJ que el ASM No. 1 y posee una mejor aproximación.

- Con el modelo neuronal, se aprovechó el diseño del controlador en cascada y se definió un controlador neuronal para regular el OD (Capítulo 5). Las pruebas en simulación mostraron su funcionalidad dentro del modelo neuronal. De hecho, la estructura del controlador neuronal es la misma respecto al controlador en cascada definido en el Capítulo 3. Sin embargo, de este último existía la desventaja de conocer exactamente la dinámica de OD en los reactores, en particular, la reacción en el tanque aeróbico y fue superada con ayuda del controlador neuronal. Bajo esta equivalencia, se discutió bajo que condición el controlador neuronal funciona pero ahora dentro de la planta

real (modelo del Capítulo 2). Los resultados mostraron que el control neuronal trabaja aceptablemente en el objetivo de control.

Por lo tanto, la contribución más significativa de este trabajo fue diseñar un controlador neuronal que regula el OD en la planta de TAR fusionando la teoría de procesos en cascada [37] y el enfoque de RNJ propuesto en [36].

Para finalizar, se vislumbra un amplio número de perspectivas de trabajo a futuro, se enumeran solo algunas de estas a continuación

1. Presentar formalmente las condiciones del controlador neuronal no lineal en cascada para rechazar perturbaciones tales como ruidos de medición en las concentraciones del proceso o cambios en los flujos de operación, es decir, un análisis de robustez del controlador.

2. Bajo la primicia del punto anterior y explotando la propiedad de pasividad en la cascada, definir una nueva realimentación de la salida en la cascada que sea robusta ante perturbaciones u otros efectos indeseables en la operación de la planta.

3. Presentar un análisis de gasto de energía necesario para implementar el controlador neuronal. Establecer si existe una minimización de costos de operación respecto a otro tipo de controladores que ejecutan la misma tarea.

4. Con el enfoque de diseño de controladores en cascada, controlar el COD en el efluente.

5. Conseguir datos (flujos de operación, concentraciones, características físicas de los tanques) de una planta real para obtener su modelo neuronal equivalente con el enfoque de RNJ, como en [36]. Esto permitirá una evaluación más aproximada a la realidad de los controladores diseñados.

Referencias

[1] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 2002.

[2] P. Seibert and R. Suarez, "Global stabilization of nonlinear cascade systems," *Systems and Control Letters*, 1990, **14**, pp. 347-352.

[3] R. Ortega, "Passivity properties for stabilization of cascaded nonlinear systems," *Automatica*, 1991, **27**, No. 2, pp. 423-424.

[4] R. Lozano, B. Brogliato, and I. D. Landau, "Passivity and global stabilization of cascaded nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **37**, No. 9, pp. 1386-1388.

[5] M. Jankovic, D. Fontaine, and P. V. Kokotović, "TORA example: cascade and passivity based control designs," *IEEE Trans. Control Systems Technology*, 1996, **4**, pp. 292-297.

[6] R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland, and B. Maschke, *Dissipative Systems Analysis and Control. Theory and Applications*, Springer-Verlag, London, 2000.

[7] R. Silva-Ortigoza, V. M. Hernández-Guzmán, M. Antonio-Cruz, and D. Muñoz-Carrillo, "DC/DC Buck power converter as a smooth starter for a DC motor based on a hierarchical control," *IEEE Trans. Power Electronics*, 2015, **30**, No. 2, pp. 1076-1084.

[8] C. S. Robinson and E. R. Guilliland, *Elements of fractional distillation*, McGraw-Hill, 2008.

[9] R. Katebi, M. A. Johnson, and J. Wilkie, *Control and Instrumentation for Wastewater Treatment Plants*, Springer-Verlag, London, 1999.

[10] M.A. Beck, "Identification, estimation and control of biological waste-water treatment processes," *IEE Procedings*, 1986, **131**, No. 5, pp. 254-264.

[11] R. Hamilton, B. Braun, R. Dare, B. Koopman, and S. A. Svoronos, "Control issues and challenges in wastewater treatment plants," *IEEE Control systems magazine*, 2006, pp. 63-69.

[12] G. Olsson, "Control of wastewater treatment systems," *ISA Transactions*, 1992, **31**, No. 1, pp. 87-96.

[13] P. Serra, J. Lafuente, R. Moreno, C. de Prada, and M. Poch, "Development of a real-time expert system for wastewater treatment plants control," *Control Eng. Practice*, 1993, **1**, No. 2, pp. 329-335.

[14] B. Holenda, E. Domokovos, Á. Rédey, and J. Fazakas, "Dissolved oxygen control of the activated sludge wastewater treatment process using model predictive control," *Computers and Chemical Enginnering*, 2008, **32**, pp. 1270-1278.

[15] R. Piotrowski, M. A. Brdys, K. Konarczak, K. Duzinkiewicz, and W. Chotkowski, "Hierarchical dissolved oxygen control for activated sludge processes," *Control Eng. Practice*, 2008, **16**, pp. 114-131.

[16] M. A. Brdys, M. Grochowski, T. Gminski, K. Konarczak, and M. Drewa, "Hierarchical predictive control of integrated wastewater treatment systems," *Control Eng. Practice*, 2008, **16**, pp. 751-767.

[17] M. Ekman, "Bilinear black-box identification and MPC of the activated sludge process," *Journal of Process Control*, 2008, **18**, pp. 643-653.

[18] K. Duzinkiewicz, A. Brdys, W. Kurek, and R. Piotrowski, "Genetic hybrid predictive controller for optimized dissolved-oxygen tracking at lower control level," *IEEE Trans. Control Systems Technology*, 2009, **17**, No. 5, pp. 1183-1192.

[19] H. Han and J. Quiao, "Nonlinear model-predictive control for industrial processes: An application to wastewater treatment process," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 2014, **61**, No. 4, pp. 1970-1982.

[20] K. Yuh-Ju Ko, B. C. McInnis, and G. C. Goodwin, "Adaptive control and identification of the dissolved oxygen process," *Automatica*, 1982, **18**, No. 6, pp. 727-730.

[21] F. Nejjari, B. Dahhou, A. Benhammou, and G. Roux, "Non-linear multivariable adaptive control of an activated sludge wastewater treatment process," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1999, **13**, No. 5, pp. 347-365.

[22] F. Hernandez-del-Olmo, E. Gaudioso, and A. Nevado, "Autonomous adaptive and active tuning up of the dissolved oxygen setpoint in a wastewater treatment plant using reinforcement learning," *IEEE Trans. Sys. Man Cyber-Part C:Applications and Reviews*, 2012, **42**, No. 5, pp. 768-774.

[23] N. A. Wahab, R. Katebi, J. Balderud, and M. F. Rahmat, "Data-driven adaptive model-based predictive control with application in wastewater systems," *IET Control Theory Appl.*, 2011, **5**, No. 6, pp. 803-812.

[24] C. Vlad, M. Sbarciog, M. Barbu, S. Caraman, and A. Wouwer Vande, "Indirect control of substrate concentration for a wastewater treatement process by dissolved oxygen tracking," *Control Engineering and Applied Informatics*, 2012, **14**, No. 1, pp. 38-47.

[25] C. Cadet, J. F. Béteau, and S. C. Hernandez, "Multicriteria control strategy for cost/quality compromise in wastewater treatment plants," *Control Eng. Practice*, 2004, **12**, pp. 335-347.

[26] B. Holenda, E. Domokovos, Á. Rédey, and J. Fazakas, "Aeration optimization of a wastewater treatment plant using genetic algorithm," *Optim. Control Appl. Meth.*, 2007, **28**, pp. 191-208.

[27] E. A. Hernandez-Vargas, E. N. Sanchez, J. F. Beteau, and C. Cadet, "Neural observer based hybrid intelligent scheme for activated sludge wastewater treatment," *Chemical and Biochemical Engineering Quarterly*, 2009, **23**, No. 3, pp. 377-384.

[28] G. Zhu, Y. Peng, B. Ma, Y. Wang, and C. Yin, "Optimization of anoxic/oxic step feeding activated sludge process with fuzzy control model for improving nitrogen removal," *Chemical Engineering Journal*, 2009, **151**, pp. 195-201.

[29] J-F. Qiao, G. Han, and H-G. Han, "Neural network on-line modeling and controlling method for multi-variable control of wastewater treatment processes," *Asian Journal of Control*, 2014, **16**, No. 4, pp. 1213-1223.

[30] F. N. Koumboulis, N. D. Kouvakas, R. E. King, and A. Stathaki, "Two-stage robust control of substrate concentration for an activated sludge process," *ISA Transactions*, 2008, **47**, pp. 267-278.

[31] N. A. Wahab, R. Katebi, and J. Balderud, "Multivariable PID control design for activated sludge process with nitrification and denitrification," *Biochemical Engineering Journal*, 2009, **45**, pp. 239-248.

[32] T. T. Lee, F. Y. Wang, and R. B. Newell, "Robust multivariable control of complex biological processes," *Journal of Process Control*, 2004, **14**, pp. 193-209.

[33] M. J. Betancur, J. A. Moreno, I. Moreno-Andrade, and G. Buitrón, "Practical optimal control of fed-batch bioreactors for the waste water treatment," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2006, **16**, pp. 173-190.

[34] R. Aguilar-López, "Robust generic model control for dissolved oxygen in activated sludge wastewater plant," *Chemical and Biochemical Engineering Quarterly*, 2008, **22**, No. 1, pp. 71-79.

[35] S. Haykin, *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Prentice-Hall, 1999.

[36] Q. Cong, W. Yu, and T. Chai, " Cascade process modeling with mechanism-based hierarchical neural networks," *International Journal of Neural Systems*, 2010, **20**, No. 1, pp. 1-11.

[37] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. V. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, London, 1997.

[38] M. Henze, C. P. Leslie Grady, W. Gujer, G. V. R. Maris, and T. Mat-suo, "Activated sludge process model No. 1," *Scientific and Technical Report 1, IAWQ*, 1987. London, UK.

[39] U. Jeppsson, *Modelling aspects of wastewater treatment processes*. PhD dissertation, IEA, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1996.

[40] M. Mulas, *Modelling and control of activated sludge process*. Ph. D. dissertation, University of Cagliari, Cagliari, Italy, 2006.

[41] J. E. Bailey and D. F. Ollis, *Biochemical Engineering Fundamentals*, McGrawHill, New York, 1986.

[42] B. W. Bequette, *Process Dynamics: Modeling, Analysis and Simulation*, Prentice Hall, New Jersey, 1998.

[43] D. Dochain and M. Perrier, "Dynamical modelling, analysis, monitoring and control design for nonlinear bioprocesses," in *Biotreatment, Downstream Processing and Modelling*, Springer Berlin Heidelberg, 1997, pp. 147-197.

[44] J. O. Bryant, *Continuos time simulation of the conventional activated sludge wastewater renovation system*. Ph. D. dissertation, Clemson University, Clemson, S. C., 1972.

[45] D. T. Chapman, *The influence of dynamic loads and process variables on the removal of suspended solids from an activated sludge plant*. Ph. D. dissertation, University of Alberta, Edmonton, Alberta, 1984.

[46] R. D. Hill, *Dynamics and control of solids-liquid separation in the activated sludge process*. Ph. D. dissertation, Rice University, Houston, Tex., 1985.

[47] Z. Z. Vitasovic, *An integrated control strategy for the activated sludge process*. Ph. D. dissertation, Rice University, Houston, Tex., 1986.

[48] Z. Z. Vitasovic, "Continuos settler operation: a dynamic model," In *Dynamic Modelling and Expert Systems in Wastewater Engineering (Edited by Patry G. G. and Chapman D.)*, pp. 59-81, Lewis, Chelsea, Mich., 1989.

[49] I. Takács, G. G. Patry and D. Nolasco, "A dynamic model of the clarification-thickening process," *Wat. Res.*, 1991, **25**, No. 10, pp. 1263-1271.

[50] U. Jeppsson and S. Diehl, "An evaluation of the dynamic model of the secondary settler," *Water Science and Techonology*, 1996, **34**, No. 5-6, pp. 19-26.

[51] S Diehl. and U. Jeppsson, "A model of the settler coupled to the biological reactor," *Water Research*, 1998, **32**, No. 2, pp. 331-342.

[52] P. L. Dold, G. A. Ekama, and G. V. R. Marais, "A general model for the activated sludge process," *Prog. Water Technology*, 1980, **12**, pp. 47-77.

[53] M. I. Nelson and H. S. Sidhu, "Analysis of the activated sludge model (number 1)," *Applied Mathematics Letters*, 2009, **22**, pp. 629-635.

[54] D. Hill and P. Moylan, "Stability results for nonlinear feedback systems," *Automatica*, 1976, **13**, pp. 373-382.

[55] C. I. Byrnes, A. Isidori and J. C. Willems, "Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1991, **36**, pp. 1228-1240.

[56] W. Lin, "Feedback stabilization of general nonlinear control system: A passive system approach," *Syst. Control Lett.*, 1995, **25**, pp. 41-52.

[57] M. M. Seron, D. J. Hill, and A. L. Fradkov "Nonlinear adaptive control of feedback passive systems," *Automatica*, 1995, **31**, No. 7, pp. 1053-1060.

[58] R. E. Walpole, R. H. Myers and S. L. Myers, *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*, Prentice-Hall, 1999.

[59] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, 2002.

[60] B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automático*, Prentice-Hall, 1996.

[61] Q. Cong, T. Chai, and W. Yu, "Cascade process modeling with mechanism-based hierarchical neural networks," *17th IFAC World Congress*, 2008, Seoul, Korea, pp. 5563-5568.

[62] Q. Cong, W. Yu, and T. Chai, "Hierarchical neural network model for water quality prediction in wastewater treatment plants," *2nd International Workshop on Advanced Computational Intelligence IWACI09*, 2009, Mexico City, Mexico, pp. 155-166.

[63] W. Pedrycz, R. Rai and J. Zuruda, "Experience-consistent modelling for radial basis function neural networks," *International Journal of Neural Systems*, 2008, **18**, No. 4, pp. 279-292.

[64] D. S. Lee, P. A. Vanrolleghem and J. M. Park, "Parallel hybrid methods for a full-scale cokes wastewater treatment plant," *Journal of Biotechnology*, 2005, **115**, No. 3, pp. 317-328.

[65] A. A. Guergachi and G. G. Patry, "Constructing a model hierarchy with a background knowledge for structural risk minimization: Application to biological treatment of wastewater," *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics–Part A: Systems and Humans*, 2006, **36**, No. 2, pp. 1-11.

[66] F. L. Lewis, A. Yesildirek and K. Liu, "Multilayer neural-netrobot controller with guaranteed tracking performance," *IEEE Trans. Neural Netw.*, 1996, **7**, No. 2, pp. 338-399.

[67] J. Snyman, *Practical Mathematical Optimization*, Springer US, 2005.

[68] G. Cybenko, "Approximation by superposition of sigmoidal activation function," *Math. Control Sig. Syst.*, 1989, **2**, No. 4, pp. 303-314.

[69] W. Yu, F. Ortiz and M. A. Moreno, "Hierarchical fuzzy CMAC for nonlinear systems modeling," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 2008, **16**, No. 5, pp. 1302-1314.

[70] W. Yu and X. Li, "Discrete-time neuro identification without robust modification," *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 2003, **150**, No. 3, pp. 311-316.

[71] M. T. Hagan, H. B. Demuth, M. H. Beale, and O. De Jesús, *Neural Networks Design*, 2nd Edition, 2014.

[72] D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, and R.J. Williams, "Learning internal representations by backpropagating errors," *Nature*, 1986, **323**, pp. 533-536.

Apéndice A

Descripción general del ASM No. 1 [38]

El ASM No. 1 es considerado como modelo de referencia ya que este modelo provocó la aceptación general del modelado de procesos biológicos. Fue desarrollado principalmente para describir la eliminación de compuestos orgánicos y nitrógeno con el consumo simultáneo de oxígeno y nitrato como aceptor de electrones. Además, el modelo tiene como objetivo producir una buena descripción de la producción de lodos. El COD se adoptó como medida de concentración de materia orgánica.

A.1. Variables de estado

La principal clasificación de las variables de estado es en materia orgánica, expresada en términos de COD y componentes de nitrógeno, tal y como lo muestra la Tabla 2.1.

La materia orgánica se divide en COD biodegradable (S_S y X_S), COD no biodegradable (S_I y X_I) y la biomasa activa (X_{BH} y X_{BA}). El COD total es sintetizado por la suma de todas estas componentes (Figura A.1). Se supone que el sustrato fácilmente biodegradable que se compone de moléculas solubles simples puede ser absorbido fácilmente por los organismos y metabolizados para energía y síntesis. En contraste, el sustrato biodegradable lentamente

consiste en moléculas relativamente complejas que requieren descomposición enzimática antes de la absorción y la utilización. Materia orgánica no biodegradable es biológicamente inerte y pasa a través del sistema sin cambio en forma. Puede ser soluble (S_I) que deja el proceso en la misma concentración a medida que entra y partículas (X_I) que pueden enredarse en el lodo activado, dejando el sistema principalmente como lodo sobrante. Además, la biomasa se divide en heterotrófica (X_{BH}) y la biomasa autótrofa (X_{BA}). Como una componente adicional se incluye X_P para tener en cuenta el particulado inerte que surge de la descomposición celular.

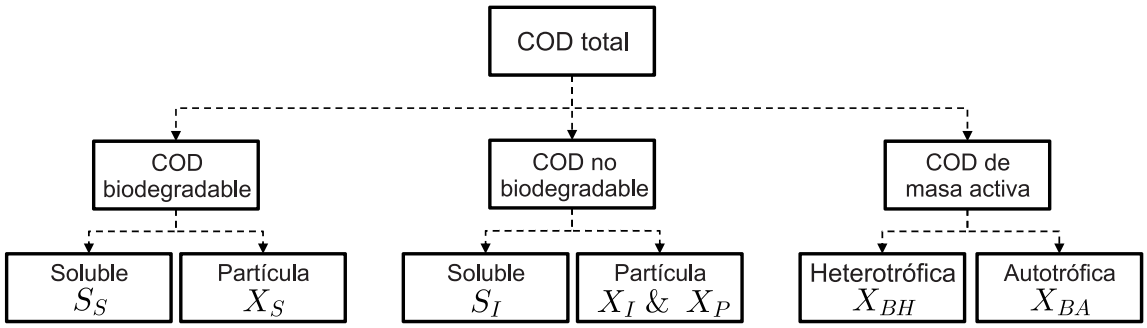


Figura A.1: Caracterización del COD total.

Como para la parte orgánica, la materia de nitrógeno se puede dividir en dos categorías: no biodegradables y biodegradables. Con respecto a la parte biodegradable, la porción de partículas se asocia al COD no biodegradable de partículas. La porción soluble es generalmente insignificante y no se incorpora en el modelo. La materia biodegradable se divide en ionizada libre y amoniaco (S_{NH}), nitrógeno orgánico soluble (S_{ND}) y nitrógeno orgánico en partículas (X_{ND}). Este último se hidroliza en nitrógeno orgánico soluble en paralelo con la hidrólisis de la materia orgánica lentamente biodegradable, mientras que, el nitrógeno orgánico soluble actúa por el material heterotrófico y se convierte en amoniaco. En aras de la simplicidad, la conversión autótrofa de amoniaco a nitrato es considerado como un pro-

ceso único que requiere oxígeno. Esto significa que una variable de estado (S_{NO}) representa compuestos de nitrato/nitrógeno en el sistema de lodos activados.

Además, se incluye una variable para representar el consumo de oxígeno disuelto en el sistema de lodos activados, S_O. Incluso se añade una variable de alcalinidad, S_{alk}, y aunque en el proceso de conversión no es esencial, su inclusión en el modelo es deseable ya que proporciona información mediante el cual los cambios indebidos en el pH pueden predecirse.

A.2. Procesos descritos

Hay dos tipos de microorganismos que llevan a cabo las reacciones: heterótrofos y autótrofos. A continuación, se describe brevemente los diferentes procesos incorporados en el ASM No. 1 y la Tabla A.1 presenta las reacciones básicas asociadas a cada proceso.

- El *crecimiento aeróbico de heterótrofos* se produce a expensas de sustrato soluble utilizando el oxígeno y da como resultado una producción de biomasa heterótrofa. El crecimiento se modela utilizando la cinética de Monod [42], la cual supone que ante la limitación de nutrientes se doble su tasa en función de la concentración tanto de S_S y S_O. Este proceso es, en general, el principal contribuyente a la producción de nueva biomasa y la eliminación de COD. El amoniaco se utiliza como fuente de nitrógeno para la síntesis y se incorpora en la masa celular.

- El *crecimiento anóxico de heterótrofos* se produce en ausencia de oxígeno disuelto con nitrato como aceptor terminal de electrones, con S_S el sustrato y en la biomasa resultante heterótrofos. La misma cinética de Monod usada en el crecimiento aeróbico se aplican, excepto que la tasa máxima de sustrato es menor en condiciones anóxicas. Por esta razón, la expresión de velocidad cinética se multiplica por un factor de $\eta_g < 1$ (ver Tabla 2.2). El amoniaco sirve como fuente de nitrógeno para la síntesis celular.

- En el *crecimiento aeróbico de autótrofos*, el S_{NH} sirve como fuente de energía para el crecimiento de las bacterias nitrificantes, que resulta en la masa de células autótrofas y

nitrógeno de nitrato como productos. Este proceso se asocia a la demanda de oxígeno y una vez más la tasa de crecimiento se basa en utilizar la cinética de Monod .

- El *decaimiento de los heterótrofos* se inspira en el enfoque de muerte-regeneración propuesto por Dold, *et al.*, [52]. Los organismos mueren a una cierta velocidad y una porción del material se considera no biodegradable sumando a la fracción X_P. El resto se suma a X_S. El nitrógeno orgánico asociado con X_S se convierte en disponible como partículas de nitrógeno orgánico.

- El *decaimiento de autótrofos* es exactamente el mismo enfoque de modelado como el decaimiento de los heterótrofos.

- La *amonificación de nitrógeno orgánico soluble* que se refiere a la conversión de la S_{ND} en S_{NH} por un proceso de primer orden mediada por los heterótrofos activos.

- En *la hidrólisis de compuestos orgánicos atrapados*, el sustrato biodegradable lentamente atrapado en la masa de lodo se descompone, produciendo S_S para el crecimiento organismos. El proceso se modela sobre la base de la cinética de reacción y se produce en ambientes aeróbicos y anóxicos. La velocidad de hidrólisis se reduce en condiciones anóxicas en comparación con las condiciones aeróbicas en un factor $\eta_h < 1$ (ver Tabla 2.2).

- En *la hidrólisis de nitrógeno orgánico atrapado*, el X_{ND} se descompone en nitrógeno orgánico soluble a una tasa definida por la reacción de hidrólisis para los orgánicos atrapados.

Como característica útil en el modelo ASM No. 1, es la introducción del concepto de funciones de conmutación que permite convertir ecuaciones de velocidad de proceso de encendido y apagado como se cambian las condiciones ambientales. Esto fue particularmente necesario para los procesos que dependen del tipo de aceptor de electrones presentes. Por ejemplo, las bacterias que son responsables de la nitrificación son capaces de crecer solo bajo condiciones aeróbicas y su tasa de crecimiento cae a cero como la concentración de oxígeno

Proceso	Reacción básica
Crecimiento aeróbico de heterótrofos	$S_S + S_O + S_{NH} \rightarrow X_{BH}$
Crecimiento anóxico de heterótrofos	$S_S + S_{NO} + S_{NH} \rightarrow X_{BH}$
Crecimiento aeróbico de autótrofos	$S_O + S_{NH} \rightarrow X_{BH} + S_O$
Decaimiento de heterótrofos	$X_{BH} \rightarrow X_P + X_S + X_{ND}$
Decaimiento de autótrofos	$X_{BA} \rightarrow X_P + X_S + X_{ND}$
Amonificación de nitrógeno orgánico soluble	$S_{ND} \rightarrow S_{NH}$
Hidrólisis de compuestos orgánicos atrapados	$X_S \rightarrow S_S$
Hidrólisis de nitrógeno orgánico atrapados	$X_{ND} \rightarrow S_{ND}$

Tabla A.1: Reacciones básicas descritos por el ASM No.1.

disuelto se aproxima a cero (independientemente de la concentración de su sustrato produciendo energía). Esto se modela en el ASM No. 1 incluyendo un interruptor de oxígeno en las ecuaciones de velocidad del proceso. Siempre que las condiciones aeróbicas necesitan ser modelados, la función de conmutación de oxígeno adoptada es

$$\frac{S_O}{K_{OH} + S_O}$$

donde un valor pequeño de K_{OH} (ver Tabla 2.2) implica que el valor de la función de conmutación está cerca de la unidad para las concentraciones de oxígeno disuelto moderados y disminuye a cero cuando el oxígeno se aproxima a cero. Del mismo modo, los procesos que se producen sólo cuando el oxígeno disuelto está ausente puede ser activado por una función de conmutación de la forma

$$\frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O}$$

El coeficiente K_{OH} tiene el mismo valor que en la expresión para el crecimiento aeróbico de manera que a medida que disminuye el crecimiento aeróbico, el crecimiento anóxico aumenta.

Apéndice B

Redes neuronales [35]

Una red neuronal es una máquina que está diseñada para modelar la forma en que el cerebro desarrolla una tarea en particular o función de interés; la red es usualmente implementada mediante el uso de componentes electrónicos o es simulada en *software* sobre una computadora. Existe una clase importante de redes neuronales que realizan estimaciones útiles a través de un proceso de aprendizaje. Para asegurar un buen desempeño, las redes neuronales usan una interconexión masiva de células de cálculo llamadas neuronas o unidades de procesamiento. El procedimiento usado para realizar el proceso de aprendizaje es llamado un algoritmo de aprendizaje, el cual sirve para modificar los pesos sinápticos de una red de manera ordenada para lograr el objetivo de diseño deseado. Una red neuronal puede considerarse como una 'caja negra' que recibe señales de entrada y proporciona resultados como salidas.

Una neurona es una unidad de procesamiento de información que es fundamental para la operación de una red neuronal. La Figura B.1 muestra el modelo de una neurona simple que forma la base de una red neuronal. Se identifican tres elementos

- Un conjunto de sinapsis cada una caracterizado por un peso. Específicamente, una señal x_j es la entrada de la sinapsis j conectada a una neurona n es multiplicada por un peso sináptico w_{nj}.

- Un sumador para operar las señales de entrada, ponderadas por la respectiva sinapsis de la neurona.

- Una función de activación para limitar la amplitud de la salida de una neurona.

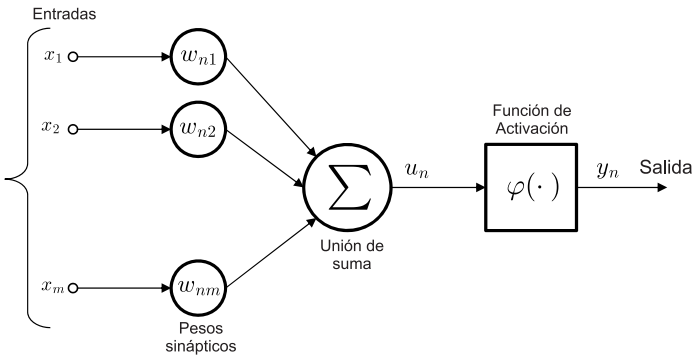


Figura B.1: Modelo simple de una neurona.

En términos matemáticos, una neurona n puede escribirse como

$$u_n = \sum_{j=1}^{m} w_{nj} x_j$$

y

$$y_n = \varphi(u_n)$$

B.1. Arquitecturas

La manera en que las neuronas de una red están estructuradas están íntimamente ligadas con los algortimos de aprendizaje usados para entrenar la red, de ahí la importancia de conocer el tipo de arquitectura que posee.

Existen tres tipos de clases principalmente (Figura B.2)

- Redes alimentadas hacia adelante de una capa: En una red neuronal en capas las neuronas están organizadas en capas. En la forma más simple de una red de este tipo, se tiene una capa de entrada de nodos fuente que se desplazan sobre una capa de salida de neuronas, pero no al revés. Se muestra un ejemplo en la Figura B.2(a).

- Redes alimentadas hacia adelante multicapa (Figura B.2(b)): Se distingue por la presencia de una o más capas ocultas, cuyos nodos son llamados neuronas ocultas. La función de las neuronas ocultas es para intervenir entre la entrada externa y la salida de la red.

- Redes recurrentes: Se distingue de una red alimentada hacia adelante en que tiene al menos un lazo de realimentación. Por ejemplo, una red recurrente consiste de una capa de neuronas con cada neurona realimentando su salida hacia la entrada de sus otras neuronas, como lo ilustra la Figura B.2(c). Los lazos de realimentación involucran ramas particulares compuestas por elementos de retraso unitario denotados por z^{-1}.

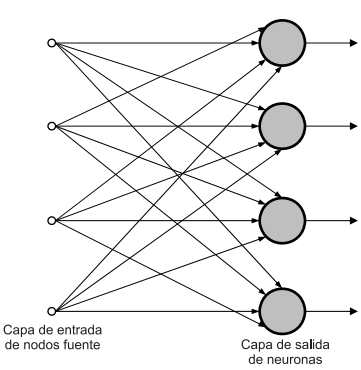
B.2. Procesos de aprendizaje

Existen varias reglas de aprendizaje para actualizar los pesos de una neurona, entre las cuales destacan el aprendizaje por corrección del error, aprendizaje basado en memoria, aprendizaje Hebbiano, aprendizaje competitivo y aprendizaje Boltzmann. Solo se discute el aprendizaje por corrección del error.

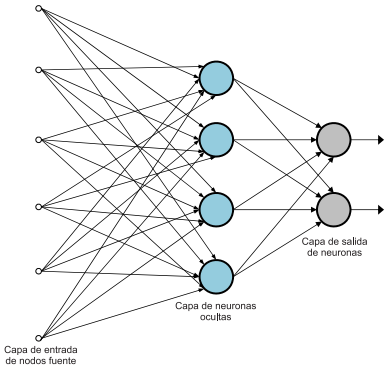
Considere la señal de salida de una neurona n denotada por $y_n(k)$. Esta salida es comparada con una respuesta deseada o señal objetivo denotada por $d_n(n)$. Consecuentemente, el error denotado por $e_n(k)$ se define por

$$e_n(k) = y_n(k) - d_n(k)$$

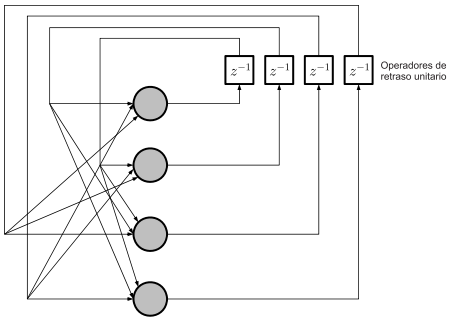
La señal de error actúa como mecanismo de control, donde su propósito es aplicar una secuencia de ajustes correctivos a los pesos sinápticos de la neurona n. Esto se para reducir



(a) Alimentada hacia adelante de una capa.



(b) Alimentada hacia adelante multicapa.



(c) Recurrente.

Figura B.2: Arquitecturas de redes neuronales.

la señal de error de manera 'paso a paso'. El objetivo es asegurar por minimización de una función de desempeño $J(k)$ definido en términos del error dada por

$$J(k) = \frac{1}{2}e_n^2(k)$$

. El ajuste paso a paso de los pesos sinápticos de la neurona n es repetido hasta que el sistema alcance un estado estable. En este punto el proceso ha finalizado.

La minimización de la función de desempeño $J(k)$ produce una regla de aprendizaje llamada *regla delta*. Sea $w_{nj}(k)$ el valor del peso sináptico de la neurona n excitado por un

elemento $x_j(k)$ (entradas) en el paso de tiempo k. Respecto a la regla delta, el ajuste $\Delta w_{nj}(k)$ aplicado al peso sináptico w_{nj} en el paso n está definido por

$$\Delta w_{nj}(k) = \eta e_n(k) x_j(k)$$

donde η es una constante positiva que determina la razón de aprendizaje. Finalmente, obtenido el ajuste sináptico $\Delta w_{nj}(k)$, el valor actualizado del peso sináptico w_{nj} está determinado por

$$w_{kj}(k+1) = w_{nj}(k) + \Delta w_{nj}(k)$$

Cabe mencionar que para arquitecturas más complejas, como una red neuronal hacia adelante multicapa, existe un algoritmo llamado 'propagación hacia atrás del error' [72] que está basado en la regla de aprendizaje de error por corrección.

B.3. Aproximación de una función

La habilidad de una red neuronal para aproximar un mapeo entrada-salida puede ser explotada por medio de un sistema de identificación. La Figura B.3 muestra un esquema para entrenar una red neuronal como un modelo de un sistema. Sea y la salida de la red neuronal producida en respuesta a una entrada x. La diferencia entre d que es la salida del sistema (asociado con x) y y produce una señal de error e como se aprecia en la Figura B.3. Ese error es usado para ajustar los parámetros libres de la red y minimizar la diferencia cuadrática entre la salida del sistema desconocido y la red neuronal.

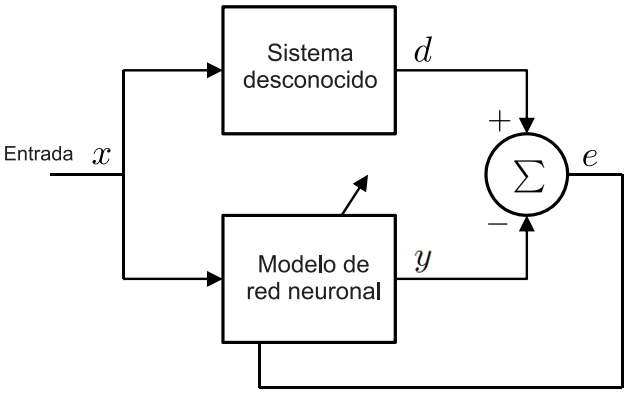


Figura B.3: Esquema general de identificación de sistemas con redes neuronales.

Apéndice C

Demostración de Teorema 4.1

Se selecciona una matriz definida positiva L_k como

$$L_k = \|\tilde{W}^{(p)}(k)\|^2 + \|\tilde{V}^{(p)}(k)\|^2$$

De la ley de actualización (4.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{(p)}(k+1) &= \tilde{W}^{(p)}(k) - \eta_k e^{(p)}(k)\phi \\ \tilde{V}^{(p)}(k+1) &= \tilde{V}^{(p)}(k) - \eta_k e^{(p)}(k)\phi' \tilde{W}^{(p)T}(k)\hat{X}^T(k) \end{aligned}$$

De (4.10) se conoce

$$e^{(p)}(k) = \tilde{W}^{(p)}(k)\phi + \tilde{V}^{(p)}(k)\phi' W^{(p)T}(k)\hat{X}^T(k) + \zeta(k)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Delta L_k &= \|\tilde{W}^{(p)}(k) - n_k e^{(p)}(k)\phi\|^2 + \|\tilde{V}^{(p)}(k) - n_k e^{(p)}(k)\phi' \tilde{W}^{(p)T}(k)\hat{X}^T(k)\|^2 \\ &\quad -\|\tilde{W}^{(p)}(k)\|^2 - \|\tilde{V}^{(p)}(k)\|^2 \\ &= \eta_k^2(\|\phi'\tilde{W}^{(p)T}(k)\hat{X}^T(k)\|^2 + \|\phi\|^2)\|e^{(p)}(k)\|^2 \\ &\quad -2\eta_k \mathrm{tr}\{(\tilde{V}^{(p)}(k)\phi'\tilde{W}^{(p)T}(k)\hat{X}^T(k) + \tilde{W}^{(p)}(k)\phi)e^{(p)}(k)\} \\ &= \eta_k^2\|e^{(p)}(k)\|^2(\|\phi'\tilde{W}^{(p)T}(k)\hat{X}^T(k)\|^2 + \|\phi\|^2) - 2\eta_k\|e^{(p)}(k)(e^{(p)} - \zeta(k))\| \\ &\leq -\eta_k\|e^{(p)}(k)\|^2(1 - \eta_k(\|\phi'\tilde{W}^{(p)T}(k)\hat{X}^T(k)\|^2 + \|\phi\|^2)) + \eta_k\zeta(k)^2 \\ &\leq -\eta_k(1-\eta_0)\|e^{(p)}(k)\|^2 + \eta_k\zeta^2(k) \end{aligned} \tag{C.1}$$

Debido a que $n[\text{mín}(\tilde{w}_i^2)+\text{mín}(\tilde{v}_i^2)] \leq L_k \leq n[\text{máx}(\tilde{w}_i^2)+\text{máx}(\tilde{v}_i^2)]$ donde $n[\text{mín}(\tilde{w}_i^2)+\text{mín}(\tilde{v}_i^2)]$ y $n[\text{máx}(\tilde{w}_i^2)+\text{máx}(\tilde{v}_i^2)]$ son funciones K_∞ y $\eta_k(1-\eta_0)\|e^{(p)}(k)\|^2$ es una función K_∞ entonces $\eta_k\zeta^2(k)$ es una función K_∞. De (C.1) se sabe que L_k está en función de $e^{(p)}(k)$ y $\zeta(k)$, por eso L_k admite una función de Lyapunov ISS suave. Del Teorema 4.1, la dinámica del error de identificación es estable entrada-estado. Debido a que la entrada $\zeta(k)$ está acotada y la dinámica es ISS, el estado $e^{(p)}(k)$ está acotado. La expresión (C.1) es reescrita como

$$\Delta L_k \leq -\eta_k(1-\eta_0)\|e^{(p)}(k)\|^2 + \eta_k\bar{\zeta} \tag{C.2}$$

Sumando (C.2) desde 1 hasta T, y utilizando $L_T > 0$ y L_1 como una constante, se obtiene

$$\begin{aligned} L_T - L_1 &\leq -\eta_k(1-\eta_0)\sum_{k=1}^{T}\|e^{(p)}(k)\|^2 + T\eta_k\bar{\zeta}\sum_{k=1}^{T}\|e^{(p)}(k)\|^2 \\ &\leq L_1 - L_T + T\eta_k\bar{\zeta} \leq L_1 + T\eta_k\bar{\zeta} \end{aligned}$$

por lo que (4.12) queda establecido. Suponga que la función suave satisface la condición de Lipschitz

$$\|h(x_1) - h(x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|$$

Entonces se obtiene

$$\|e^{(o)}(k)\| = \|h(\hat{X}(k)) - h(X_2(k))\| \leq l\|\hat{x}(k) - x(k)\| = l\|e^{(p)}(k)\|$$

Por lo que $\|e^{(o)}(k)\|$ está acotado como

$$\lim_{T\to\infty}\sup\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\|e^{(o)}(k)\|^2 \leq \frac{l\bar{\zeta}}{1-\eta_0}$$

Se está interesado en la estabilidad de los algoritmos de aprendizaje, en otras palabras, es de interés que todos los estados en el procedimiento de identificación sean estables. Del Teorema 4.1, se sabe $e^{(p)}(k) = \hat{y}^{(p)}(k) - y^{(p)}(k)$, y como consecuencia de que $y^{(p)}$ está acotado y $e^{(p)}$ está probado que es acotado, $\hat{y}^{(p)}$ está acotado y los estados en los bloques finales y todos los estados internos son estables. Por eso se concluye que los algoritmos de aprendizaje para los modelos jerárquicos son estables. ■