



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES DE ESTABILIDAD
PARA SISTEMAS INTEGRALES CON RETARDO EN TÉRMINOS
DE LA MATRIZ DE LYAPUNOV

TESIS QUE PRESENTA

REYNALDO ORTIZ PEREZ

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE

CONTROL AUTOMÁTICO

DIRECTOR DE TESIS

DRA. SABINE MONDIÉ CUZANGE

Agradecimientos

A mis padres y hermana por ofrecerme su apoyo incondicional y motivarme a cumplir una más de mis metas.

A la Doctora Sabine Mondié por guiarme a través de este trabajo, pero sobretodo por las enseñanzas, paciencia y tiempo.

A mis sinodales los Doctores Fernando Castaños y Gilberto Ochoa por los comentarios para mejorar este trabajo.

A mis compañeros por los momentos compartidos en el DCA.

A mis amigos de Pachuca que me apoyaron y motivaron durante esta etapa de mi vida.

Al CONACyT por el apoyo económico

Resumen

Los sistemas con retardo son aquellos en donde la dinámica depende tanto del estado en el tiempo presente como de las dinámicas en un lapso de tiempo anterior, aunque suponen un problema con una dificultad mayor a los sistemas libres de retardo han ganado interés por parte de la comunidad científica, permiten modelar una gran variedad de fenómenos.

Para analizar la estabilidad de sistemas con retardo existen métodos frecuenciales como el método D-Particiones y temporales que se basan en el uso de funciones y funcionales extendiendo los Teoremas de Lyapunov a los sistemas con retardo, el método más utilizado es el de Lyapunov-Krasovskii.

Una clase particular de estos sistemas son los sistemas integrales con retardo, que aunque son poco comunes se hacen presentes como dinámicas adicionales al aplicar ciertas transformaciones o cuando se aplican leyes de control que reasignan el espectro de sistemas con retardo en la entrada. Además describen fenómenos físicos como los reactores químicos, procesos de mezclado y de transporte de fluidos que aparecen por ejemplo en los motores a gasolina. El análisis de estabilidad de esta clase de sistemas es el tema principal de este trabajo de tesis.

Se abordan temas y conceptos como estabilidad exponencial, matriz fundamental, fórmula de Cauchy y matriz de Lyapunov.

Las condiciones de estabilidad obtenidas gracias a una funcional bilineal y un grupo particular de condiciones iniciales consisten en construir y verificar la positividad de una matriz que depende de la matriz de Lyapunov por lo cual esta última es de gran importancia y se verifica su existencia y unicidad así como el método semi-analítico para su construcción.

Se presentan ejemplos para verificar las condiciones de estabilidad para sistemas con kernels particulares analizando un conjunto de puntos en un espacio de parámetros de interés y comparando las zonas de estabilidad obtenidas con las zonas definidas por el método D-Particiones y el programa QPmR.

Abstract

Delay systems depends on the present state and of previous dynamics, although their analysis suppose a more difficult problem than that of the delay free systems are of interest for the scientific community because is possible to describe a variety of phenomena with them.

For the stability analysis of time delay systems there exist frequency methods as D-Subdivisions and temporal methods based on functions and functionals that extend the Lyapunov's Theorem, the most used method is Lyapunov-Krasovskii.

A particular class of systems are integral delay systems, they are rare but we can find them on additional dynamics when we apply some transformations, when we use control laws for eigenvalues reassignment in systems with input delay. Also describe physical phenomena such as chemical reactors mixing and transport processes for fluids for example in gas exhaust recirculation in automotive engines. The stability analysis for this class of systems is the main topic of this work.

Issues and concepts like exponential stability, fundamental matrix, Cauchy formula and Lyapunov matrix are addressed.

The stability conditions obtained tanks to a bilinear functional and a particular group of initial conditions consist in verify the positivity of a matrix that depends on the Lyapunov matrix. For this reason the existence and uniqueness as well as the construction of Lyapunov matrix is a very important topic, a semi-analytic method for its construction is presented.

We verify the stability conditions through examples for particular kernels, where we verify a set of points in a space of parameters and comparing the stability regions obtained with the regions defined by D-Subdivisions method and the QPmR program.

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Sistemas con retardo	1
1.2. Sistemas Integrales con Retardo	2
1.3. Objetivos	3
1.4. Estructura de la Tesis	3
1.5. Publicaciones resultado de la Tesis	3
2. Fundamentos	5
2.1. Sistema	5
2.2. Matriz Fundamental	6
2.3. Formula de Cauchy	6
2.3.1. Formula de Cauchy para la Matriz Fundamental	8
2.4. Matriz de Lyapunov	12
2.4.1. Propiedades de la Matriz de Lyapunov	12
Propiedad Simétrica	12
Propiedad Dinámica	14
2.5. Funcional con derivada prescrita	15
2.6. Conclusiones	18
3. Condiciones de Estabilidad	19
3.1. Funcional Bilineal	19
3.1.1. Simetría de la matriz $L(\tau_1, \tau_2)$	21
3.2. Aproximación de Funciones	22
3.3. Teorema de Inestabilidad	26
3.4. Condiciones Necesarias y Suficientes	27
3.4.1. Demostración. Necesidad	27
3.4.2. Demostración. Suficiencia	28
3.5. Conclusiones	29
4. Existencia y Unicidad de la matriz de Lyapunov	31
4.1. Sistema libre de retardo y condiciones de frontera	31
4.1.1. Kernel con una estructura particular	34
4.2. Productos Kronecker	37

4.3. Existencia de las condiciones de frontera auxiliares	38
4.4. Existencia y Unicidad	40
4.4.1. Condición de Lyapunov	47
4.5. Conclusiones	54
5. Construcción de la matriz de Lyapunov	55
5.1. Kernel Constante	55
5.2. Kernel Exponencial	58
5.3. Kernel Polinomial	63
5.4. Kernel más General	69
5.5. Conclusiones	75
6. Ejemplos	77
6.1. Análisis D-Particiones	77
6.2. Mapas de Estabilidad	79
6.3. Conclusiones	86
7. Conclusiones	87
Referencias	89

Notación y Símbolos

\mathbb{C}	Conjunto de números complejos.
\mathbb{R}	Conjunto de números reales.
\mathbb{R}^n	Vectores de dimensión n con entradas en \mathbb{R} .
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Matrices de dimensión $n \times n$ con entradas en \mathbb{R} .
$\mathcal{C}^{(\sigma)}$	Conjunto de funciones continuas y σ veces diferenciables.
$\mathcal{PC}([a, b])$	Conjunto de funciones continuas a pedazos en el intervalo $[a, b]$.
$\ \cdot\ $	Norma euclidiana de un vector o matriz.
$\ \varphi\ _{\mathcal{H}}$	Norma de funciones a pedazos definida por $\sqrt{\int_{-H}^0 \ \varphi(\theta)\ ^2 d\theta}$.
I_n	Matriz identidad de dimensión $n \times n$.
0_n	Matriz de ceros de dimensión $n \times n$.
$0_{n \times m}$	Matriz de ceros de dimensión $n \times m$.
a_{ij}	Elemento de la matriz A ubicado en la fila i y la columna j .
A^T	Transpuesta de la matriz A .
A^{-1}	Inversa de la matriz A .
$\det(A)$	Determinante de la matriz A .
$\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)$	Valores propios mínimo y máximo de la matriz A , respectivamente.
$\{A_{i,j}\}_{i,j=1}^r$	Bloque correspondiente a la fila i , columna j de una matriz de $r \times r$ bloques.
*	Elemento obtenido al transponer el bloque correspondiente en una matriz simétrica a bloques.
$A > 0$ ($A \geq 0$)	Matriz simétrica A positiva definida (positiva semidefinida).

$\text{vec}(A)$	Vectorización de la matriz A donde las columnas se apilan.
$A \otimes B$	Producto Kronecker de las matrices A y B .
$F'(\theta)$	Derivada de la función $F(\theta)$ tal que $\frac{d}{d\theta}F(\theta)$.
$F''(\theta)$	Segunda derivada de la función $F(\theta)$ tal que $\frac{d^2}{d\theta^2}F(\theta)$.
$F^{(\sigma)}(\theta)$	σ -ésima derivada de la función $F(\theta)$ de manera que $\frac{d^\sigma}{d\theta^\sigma}F(\theta)$.
$\mathcal{L}\{\cdot\}$	Transformada de Laplace de una función.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se hace una introducción general a los sistemas con retardo y los principales enfoques para su análisis, se hace una introducción a los sistemas integrales con retardo y se presentan algunas de sus aplicaciones.

1.1. Sistemas con retardo

Conocidos por la dificultad debida a su naturaleza infinito dimensional. Los sistemas con retardos han recibido especial atención por parte de los investigadores durante las últimas décadas. Los retardos aparecen en distintos problemas de ingeniería como sistemas de transporte, propagación de masa o de energía, sistemas conectados entre si y modelos de perforación [1]. Los sistemas con retardo son aquellos en donde la evolución del sistema depende del estado en el tiempo actual así como en tiempos pasados, es decir, la información necesaria para continuar la solución del sistema, contrariamente a los sistemas libres de retardo, depende de un pedazo de trayectoria y no de un solo punto. Estos sistemas generalmente son representados con ecuaciones diferenciales funcionales y ecuaciones diferenciales en diferencias.

Existen dos enfoques para su estudio [2]:

Frecuencial: Se basa en el análisis de las raíces de la ecuación característica del sistema y aunque esta limitado a sistemas lineales es posible obtener información mas rica sobre la estabilidad. Existen métodos gráficos como D-Particiones [3] con el que se obtienen las fronteras de estabilidad en un espacio de parámetros de interés.

Temporal: Con este enfoque además de sistemas lineales se pueden analizar también sistemas no lineales, se basa en la extensión de funciones de Lyapunov a los sistemas con retardo a través de los enfoques de Lyapunov-Krasovskii [4] y Lyapunov-Razumikhin [5].

Existen sistemas en los que es posible representar la dependencia de estados pasados sin el uso de ecuaciones diferenciales. Este es el caso de las ecuaciones en diferencias en tiempo continuo. Cuando el estado no depende de retardos puntuales sino de una distribución en un intervalo se emplean ecuaciones integrales con retardo. En ambos casos es el estado presente el que depende de dinámicas en tiempos pasados y no su derivada.

1.2. Sistemas Integrales con Retardo

Esta clase de sistemas se presentan como objetos matemáticos en el estudio de la estabilidad de sistemas con retardo. Se ha demostrado que al realizar alguna transformación para obtener condiciones de estabilidad dependientes del retardo aparecen dinámicas adicionales, una de estas transformaciones consiste en pasar de un sistema con retardo puntual a uno con retardo distribuido [6]. Las dinámicas adicionales son responsables de la falta de equivalencia entre el sistema original y el sistema transformado, es decir, la estabilidad del sistema transformado supone la estabilidad del sistema original mientras que la inversa no siempre es cierta [6, 7]. La dinámica adicional se describe por un sistema integral con retardo, en [8, 9] se demuestra que si el sistema integral es estable entonces también el sistema transformado es estable.

Los sistemas integrales se observan en controladores basados en predictores de estado utilizados para asignar los polos de sistemas con retardo en la entrada o en el estado [10], las ecuaciones integrales con retardo resultan más naturales al aplicar directamente el predictor porque no involucran ninguna transformación [11]. En [12] aparece la condición de estabilidad del termino integral para que estos predictores funcionen correctamente.

En los sistemas de tipo neutral aparecen términos integrales en el análisis de algunos tipos de operadores diferenciales, la estabilidad del operador es una condición necesaria para la estabilidad del sistema de tipo neutral [13].

Modelos que describen fenómenos de propagación en medios excitables cuya representación involucra fracciones parciales, en algunos casos es posible representarlos con un sistema con retardo. Por ejemplo la propagación de pulsos eléctricos en un anillo unidimensional, fenómeno que puede ser encontrado en algunas dinámicas del corazón (modelo de Beeler-Reuter) [14]. Igualmente modelan fenómenos físicos como reactores químicos [15], mezcla y transporte de fluidos como el que se ve en la recirculación de los gases de escape de los motores a gasolina [16].

La relación que existe entre las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas y los sistemas con retardo es bastante conocida pues en muchos casos es posible transformar un sistema de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de primer orden a un sistema descrito por ecuaciones diferenciales con retardo. Investigaciones recientes han demostrado que las ecuaciones parciales hiperbólicas de primer orden pueden ser utilizadas en la estabilización de sistemas con retardo [17].

El análisis de los sistemas integrales se puede realizar con los mismos métodos usados para el análisis de sistemas diferenciales, en [18] se obtienen los retardos críticos de sistemas integrales a través de un análisis frecuencial mientras que en [7, 19, 20] se realizan análisis de estabilidad con el método de Lyapunov-Krasovskii. Un tipo de condiciones suficientes basadas en desigualdades matriciales para sistemas integrales con kernel de tipo polinomial y exponencial se presentan en [21], los resultados obtenidos se aplican en un controlador de tipo predictor para un sistema con retardo en la entrada. En [7] aparece un termino llamado matriz de Lyapunov en las funcionales utilizadas y en [22] se proporciona un método para construir estas matrices que son una extensión a las matrices de Lyapunov descritas en [23].

1.3. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es obtener condiciones de estabilidad necesarias y suficientes dependientes de la matriz de Lyapunov.

Los objetivos particulares son:

- Comprobar la existencia y unicidad de la matriz de Lyapunov para sistemas integrales.
- Realizar la construcción de la matriz de Lyapunov para sistemas con diferentes tipos de kernel.
- A través de ejemplos verificar que las condiciones obtenidas arrojan resultados de estabilidad congruentes con los que se obtienen por otras técnicas.

1.4. Estructura de la Tesis

El presente trabajo esta organizado como sigue:

El capítulo 2 contiene las bases teóricas de los sistemas integrales entre ellas se encuentran definiciones y conceptos como las matrices fundamental y de Lyapunov así como algunas de sus propiedades.

En el capítulo 3 se presentan las condiciones de estabilidad junto a resultados previos a estas como la funcional bilineal, el teorema de inestabilidad y la aproximación de funciones en función de la matriz fundamental del sistema.

La prueba de existencia y unicidad de la matriz de Lyapunov se encuentra en el capítulo 4. La construcción de la matriz de Lyapunov por medio del método semi-analítico para cuatro posibles tipos de kernel se presenta en el capítulo 5.

En el capítulo 6 se verifica que las condiciones de estabilidad obtenidas sean congruentes con resultados en publicaciones anteriores u obtenidos por el método D-Particiones. La tesis termina con las conclusiones.

1.5. Publicaciones resultado de la Tesis

A continuación se enlistan las publicaciones derivadas del presente trabajo de tesis.

Revista

1. Saúl Del Valle, Reynaldo Ortiz, Alexey V. Egorov and Sabine Mondié
“Necessary Stability Conditions for Integral Delay Systems”
IEEE Transactions on Automatic Control. Sometido.

Congreso

1. Reynaldo Ortiz, Sabine Mondié, Saul del Valle and Alexey V. Egorov
“Construction of Delay Lyapunov Matrix for Integral Delay Systems”
IEEE 57th Conference on Decision and Control, Miami Beach, Florida, USA, December 2018. Aceptado.

Capítulo 2

Fundamentos

En este capítulo se hace una recopilación de conceptos generales de las ecuaciones integrales con retardo, los conceptos de solución, estabilidad exponencial y se introducen en particular la matriz fundamental, la formula de Cauchy y matrices de Lyapunov. De igual manera se describe una funcional con derivada prescrita que posteriormente será utilizada para obtener los resultados de estabilidad.

2.1. Sistema

Se considera un sistema integral con retardo de la forma

$$x(t) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) x(t+\theta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

donde el kernel $F_j(\theta) \in \mathcal{PC}([-H, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$, $j = \overline{1, m}$, $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m$ donde $h_m = H$ es el retardo mas grande. Para la condición inicial $\varphi \in \mathcal{PC}([-H, 0], \mathbb{R}^n)$, existe una única solución $x(t, \varphi)$ de (2.1) para todo $t \geq 0$. La solución $x(t, \varphi)$ en el intervalo $[t-H, t]$ se escribe como

$$x_t(\varphi) : \theta \rightarrow x(t+\theta, \varphi), \quad \theta \in [-H, 0].$$

Definición 2.1. El sistema (2.1) se dice *exponencialmente estable* si existen constantes $\mu > 0$ y $\sigma > 0$ tales que toda solución de (2.1) satisface la desigualdad

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \mu \|\varphi\|_{\mathcal{H}} e^{-\sigma t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Definición 2.2. [23]. Se dice que el sistema (2.1) satisface la *condición de Lyapunov* si el espectro del sistema

$$\Lambda = \left\{ s \in \mathbb{C} \left| \det \left[I_n - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) e^{s\theta} d\theta \right] = 0 \right. \right\},$$

no incluye un punto s_0 tal que $-s_0$ también pertenece al espectro del sistema, dicho de otra manera no existen valores propios simétricos con respecto al origen del plano complejo.

2.2. Matriz Fundamental

En esta sección se introduce la definición de la matriz fundamental, su condición inicial y una propiedad que será de ayuda posteriormente.

Definición 2.3. La matriz fundamental del sistema (2.1) satisface

$$K(t) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t+\theta) F_j(\theta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

con condición inicial para $t < 0$

$$K(t) = K_0 = \left[\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) d\theta - I_n \right]^{-1}. \quad (2.3)$$

Lema 2.1. La matriz fundamental satisface la igualdad

$$K(0) - K_0 = I_n. \quad (2.4)$$

Demostración. Usando la definición (2.2) en (2.4), se obtiene

$$K(0) - K_0 = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(\theta) F_j(\theta) d\theta - K_0,$$

cuando $\theta \in [-h_j, 0)$, $j = \overline{1, m}$, $K(\theta) = K_0$, entonces

$$K(0) - K_0 = K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) d\theta - K_0.$$

Factorizando K_0 por la izquierda,

$$K(0) - K_0 = K_0 \left[\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) d\theta - I_n \right],$$

por (2.3) se obtiene el resultado buscado. ■

2.3. Formula de Cauchy

A continuación se presenta la formula de Cauchy que consiste en escribir la solución de (2.1) para una condición inicial dada a partir de la matriz fundamental del sistema.

Teorema 2.1. Para una función inicial dada $\varphi \in \mathcal{PC}([-H, 0], \mathbb{R}^n)$, la solución de (2.1) esta definida por

$$x(t, \varphi) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) \varphi(\xi) d\xi d\theta, \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Demostración. Partiendo de la siguiente igualdad

$$\int_0^t K(t - \xi) x(\xi) d\xi = \int_0^t K(t - \delta) x(\delta) d\delta,$$

se sustituye (2.2) en el lado izquierdo y (2.1) en el lado derecho, de manera que

$$\int_0^t \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) d\theta x(\xi) d\xi = \int_0^t K(t - \delta) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) x(\delta + \theta) d\theta d\delta.$$

Realizando el cambio de variable $\xi = \delta + \theta$ y cambiando el orden de integración, se obtiene

$$\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^t K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) x(\xi) d\xi d\theta = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^{t+\theta} K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) x(\xi) d\xi d\theta,$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^t K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) x(\xi) d\xi d\theta &= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) x(\xi) d\xi d\theta \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^{t+\theta} K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) x(\xi) d\xi d\theta, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^t K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) x(\xi) d\xi d\theta &+ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{t+\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) x(\xi) d\xi d\theta \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) x(\xi) d\xi d\theta, \end{aligned}$$

se reduce a

$$\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{t+\xi}^t K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) x(\xi) d\xi d\theta = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) x(\xi) d\xi d\theta.$$

Si $\xi \in (t + \theta, t]$, entonces $t - \xi + \theta \in [-h_j, 0)$, $j = \overline{1, m}$, por lo que $K(t - \xi + \theta) = K_0$, además, $x(\xi) = \varphi(\xi)$ cuando $\xi \in [-h_j, 0)$, $j = \overline{1, m}$, entonces la ecuación anterior se puede reescribir como

$$K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) \int_{t+\theta}^t x(\xi) d\xi d\theta = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) \varphi(\xi) d\xi d\theta.$$

Diferenciando con respecto de t ,

$$K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) [x(t) - x(t + \theta)] d\theta = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) \varphi(\xi) d\xi d\theta,$$

usando la definición (2.1) en el lado izquierdo la ecuación anterior se reduce a

$$K_0 \left[\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) d\theta - I_n \right] x(t) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) \varphi(\xi) d\xi d\theta.$$

Finalmente el resultado se obtiene por la ecuación (2.3). ■

2.3.1. Formula de Cauchy para la Matriz Fundamental

A continuación se muestra que la matriz fundamental satisface el siguiente lema que sirve para obtener la formula de Cauchy de la matriz fundamental.

Lema 2.2. *La matriz fundamental $K(t)$ satisface la ecuación*

$$K(t) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) K(t + \theta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

con la condición inicial (2.3) para $t < 0$.

Demostración. Se introduce la matriz $G(t)$ que es solución de

$$G(t) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) G(t + \theta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

$$G(t) = K_0, \quad t < 0.$$

Partiendo de la igualdad

$$\int_0^t K(t - \xi) G(\xi) d\xi = \int_0^t K(t - \delta) G(\delta) d\delta,$$

se utiliza la ecuación (2.7) en el lado izquierdo y (2.2) en el lado derecho de la ecuación anterior, de manera que

$$\int_0^t K(t-\xi) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) G(\xi+\theta) d\theta d\xi = \int_0^t \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t-\delta+\theta) F_j(\theta) d\theta G(\delta) d\delta.$$

Con el cambio de variable $\delta = \xi + \theta$, se reescribe

$$\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^{t+\theta} K(t+\theta-\delta) F_j(\theta) G(\delta) d\delta d\theta = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^t K(t-\delta+\theta) F_j(\theta) G(\delta) d\delta d\theta,$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^t K(t-\delta+\theta) F_j(\theta) G(\delta) d\delta d\theta &= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^t K(t-\delta+\theta) F_j(\theta) G(\delta) d\delta d\theta \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^{t+\theta} K(t-\delta+\theta) F_j(\theta) G(\delta) d\delta d\theta, \end{aligned}$$

lo cual se simplifica a

$$\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^t K(t-\delta+\theta) F_j(\theta) G(\delta) d\delta d\theta = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{t+\theta}^t K(t-\delta+\theta) F_j(\theta) G(\delta) d\delta d\theta. \quad (2.8)$$

Cuando del lado izquierdo $\delta \in [\theta, 0)$, $G(\delta) = K_0$ mientras que del lado derecho, cuando $\delta \in (t+\theta, t]$, entonces $t-\delta+\theta \in [-h_j, 0)$, $j = \overline{1, m}$, por lo tanto $K(t-\delta+\theta) = K_0$. Por consiguiente la ecuación (2.8), se reduce de tal manera que

$$\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^t K(t-\delta+\theta) F_j(\theta) d\delta d\theta K_0 = K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{t+\theta}^t F_j(\theta) G(\delta) d\delta d\theta,$$

usando el cambio de variable $s = t - \delta + \theta$, se obtiene

$$- \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_t^{t+\theta} K(s) F_j(\theta) ds d\theta K_0 = K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{t+\theta}^t F_j(\theta) G(\delta) d\delta d\theta,$$

equivalentemente

$$\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{t+\theta}^t K(s) F_j(\theta) ds d\theta K_0 = K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{t+\theta}^t F_j(\theta) G(\delta) d\delta d\theta.$$

Derivando con respecto a t ,

$$\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{t+\theta}^t K(s) ds F_j(\theta) d\theta K_0 = K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) \frac{d}{dt} \int_{t+\theta}^t G(\delta) d\delta d\theta,$$

lo cual resulta en

$$\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 [K(t) - K(t+\theta)] F_j(\theta) d\theta K_0 = K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) [G(t) - G(t+\theta)] d\theta,$$

expandiendo términos,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t) F_j(\theta) d\theta K_0 - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t+\theta) F_j(\theta) d\theta K_0 \\ = K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) G(t) d\theta - K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) G(t+\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.2) en el lado izquierdo y (2.7) en el lado derecho, se obtiene

$$\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t) F_j(\theta) d\theta K_0 - K(t) K_0 = K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) G(t) d\theta - K_0 G(t),$$

que se puede reescribir como

$$K(t) \left[\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) d\theta - I_n \right] K_0 = K_0 \left[\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) d\theta - I_n \right] G(t).$$

Finalmente por (2.3) se llega a la igualdad

$$K(t) = G(t),$$

con lo que se demuestra que la matriz fundamental satisface (2.6). ■

Lema 2.3. *Dada la matriz fundamental $K(t)$ definida en (2.2) y (2.6), se cumple la siguiente igualdad*

$$K(t+\tau) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 K(t-\xi+\theta) F_j(\theta) K(\xi+\tau) d\xi d\theta, \quad \tau \geq 0. \quad (2.9)$$

Demostración. Se define la igualdad

$$\int_0^t K(t-\xi) K(\xi+\tau) d\xi = \int_0^t K(t-\delta) K(\delta+\tau) d\delta,$$

sustituyendo (2.2) en el lado izquierdo y (2.6) en el lado derecho, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t-\xi+\theta) F_j(\theta) d\theta K(\xi+\tau) d\xi \\ = \int_0^t K(t-\delta) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) K(\delta+\tau+\theta) d\theta d\delta. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \delta + \theta$ y separando la integral del lado derecho, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^t K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) K(\xi + \tau) d\xi d\theta &= \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) \\ &\times K(\xi + \tau) d\xi d\theta + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^{t+\theta} K(t - \theta + \xi) F_j(\theta) K(\xi + \tau) d\xi d\theta, \end{aligned}$$

sumado términos semejantes,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{t+\theta}^t K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) K(\xi + \tau) d\xi d\theta \\ = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) K(\xi + \tau) d\xi d\theta. \end{aligned}$$

Si $\xi \in (t + \theta, t]$, entonces $t - \xi + \theta \in [-h_j, 0)$, $j = \overline{1, m}$, por lo que $K(t - \xi + \theta) = K_0$, por lo tanto la ecuación anterior es igual a

$$K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) \int_{t+\theta}^t K(\xi + \tau) d\xi d\theta = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) K(\xi + \tau) d\xi d\theta,$$

Diferenciando con respecto de t ,

$$\begin{aligned} K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) [K(t + \tau) - K(t + \tau + \theta)] d\theta \\ = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) K(\xi + \tau) d\xi d\theta, \end{aligned}$$

reemplazando la ecuación (2.6) en el lado izquierdo, resulta

$$K_0 \left[\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) d\theta - I_n \right] K(t + \tau) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) K(\xi + \tau) d\xi d\theta.$$

La ecuación (2.9) se obtiene por la ecuación (2.3). ■

Corolario 2.1. *La ecuación (2.9) satisface para $\tau = 0$*

$$K(t) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) K(\xi) d\xi d\theta. \quad (2.10)$$

2.4. Matriz de Lyapunov

En esta sección se introduce una nueva definición de la matriz de Lyapunov.

Lema 2.4. *Sea el sistema (2.1) exponencialmente estable, entonces para toda matriz $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida, la matriz*

$$U(\tau) = \int_0^\infty [K(t) - K_0]^T W K(t + \tau) dt, \quad (2.11)$$

esta bien definida para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Dado $\tau_0 \in \mathbb{R}$, la integral (2.11) converge absoluta y uniformemente con respecto a $\tau \in [\tau_0, \infty)$.

Demostración. Con la suposición de que el sistema (2.1) es exponencialmente estable, esta matriz admite una cota superior de la forma

$$\|K(t)\| \leq \gamma \|K_0\| e^{-\sigma t}. \quad (2.12)$$

Directamente de (2.12), para $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty [K(t) - K_0]^T W K(t + \tau) dt \right\| &\leq \int_0^\infty \|K^T(t) W K(t + \tau)\| dt + \int_0^\infty \|K_0^T W K(t + \tau)\| dt, \\ \left\| \int_0^\infty [K(t) - K_0]^T W K(t + \tau) dt \right\| &\leq \gamma \|W\| \|K_0\|^2 \int_0^\infty (\gamma e^{-\sigma(2t+\tau)} + e^{-\sigma(t+\tau)}) dt, \\ \left\| \int_0^\infty [K(t) - K_0]^T W K(t + \tau) dt \right\| &\leq \frac{\gamma}{\sigma} \|W\| \|K_0\|^2 \left(\frac{\gamma}{2} + 1\right) e^{-\sigma\tau}. \end{aligned}$$

Para $\tau \in [\tau_0, \infty)$, se tiene

$$\left\| \int_0^\infty [K(t) - K_0]^T W K(t + \tau) dt \right\| \leq \frac{\gamma^2}{2\sigma} \|W\| \|K_0\|^2 \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) e^{-\sigma\tau_0},$$

esta desigualdad prueba el lema. ■

2.4.1. Propiedades de la Matriz de Lyapunov

La matriz de Lyapunov satisface dos propiedades importantes llamadas simétrica y dinámica que serán utilizadas posteriormente.

Propiedad Simétrica

Lema 2.5. *Sea el sistema (2.1) exponencialmente estable. Se define la matriz antisimétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$,*

$$P = \int_0^\infty K^T(\tau) W K_0 d\tau - \int_0^\infty K_0^T W K(\tau) d\tau, \quad (2.13)$$

donde K_0 se define en (2.3). Entonces la matriz de Lyapunov (2.11) asociada a la matriz W positiva definida satisface la propiedad simétrica

$$U(-\tau) = U^T(\tau) + P - \tau K_0^T W K_0, \quad \tau \in [-H, H]. \quad (2.14)$$

Demostración. Evaluando la ecuación (2.11) en $-\tau$, se obtiene

$$U(-\tau) = \int_0^{\infty} [K(t) - K_0]^T W K(t - \tau) dt.$$

Realizando el cambio de variable $\xi = t - \tau$, resulta

$$U(-\tau) = \int_{-\tau}^{\infty} [K(\xi + \tau) - K_0]^T W K(\xi) d\xi,$$

lo cual es equivalente a

$$U(-\tau) = \int_{-\tau}^{\infty} K^T(\xi + \tau) W K(\xi) d\xi - \int_{-\tau}^{\infty} K_0^T W K(\xi) d\xi \pm \int_{-\tau}^{\infty} K^T(\xi + t) W K_0 d\xi.$$

Agrupando términos la ecuación anterior se escribe como

$$U(-\tau) = \int_{-\tau}^{\infty} K^T(\xi + \tau) W [K(\xi) - K_0] d\xi + \int_{-\tau}^{\infty} K^T(\xi + \tau) W K_0 d\xi - \int_{-\tau}^{\infty} K_0^T W K(\xi) d\xi,$$

con el cambio de variable $\delta = \xi + \tau$ en el segundo término del lado derecho, se obtiene

$$U(-\tau) = \int_{-\tau}^{\infty} K^T(\xi + \tau) W [K(\xi) - K_0] d\xi + \int_0^{\infty} K^T(\delta) W K_0 d\delta - \int_{-\tau}^{\infty} K_0^T W K(\xi) d\xi,$$

puesto que $K(\xi) = K_0$ para $\xi \in [-\tau, 0)$ la ecuación anterior es igual a

$$U(-\tau) = \int_0^{\infty} K^T(\xi + \tau) W [K(\xi) - K_0] d\xi + \int_0^{\infty} K^T(\delta) W K_0 d\delta - \int_0^{\infty} K_0^T W K(\xi) d\xi - \int_{-\tau}^0 K_0^T W K_0 d\xi.$$

Se utilizan las ecuaciones (2.11) y (2.13) y se integra el último término, de manera que

$$U(-\tau) = U^T(\tau) + P - \tau K_0^T W K_0,$$

es el resultado buscado. ■

Lema 2.6. *La matriz $P = -P^T$ puede ser expresada como*

$$P = S^T W K_0 - K_0^T W S, \quad (2.15)$$

donde

$$S = K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \theta F_j(\theta) d\theta K_0. \quad (2.16)$$

Demostración. Consiste en probar que

$$S = \int_0^{\infty} K(\tau) d\tau. \quad (2.17)$$

Integrando (2.2) de 0 a ∞ ,

$$\int_0^{\infty} K(t) dt = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t+\theta) F_j(\theta) d\theta dt,$$

cambiando el orden de integración y realizando el cambio de variable $\xi = t + \theta$, se obtiene

$$\int_0^{\infty} K(t) dt = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^{\infty} K(\xi) d\xi F_j(\theta) d\theta.$$

Separando la integral del lado derecho y debido a que $K(\xi) = K_0, \xi \in [-h_j, 0], j = \overline{1, m}$, entonces

$$\int_0^{\infty} K(t) dt = \int_0^{\infty} K(\xi) d\xi \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) d\theta + K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{\theta}^0 d\xi F_j(\theta) d\theta,$$

por la ecuación (2.3) e integrando el segundo término del lado derecho la ecuación anterior se reescribe como

$$\int_0^{\infty} K(t) dt = \int_0^{\infty} K(\xi) d\xi [K_0^{-1} + I_n] - K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \theta F_j(\theta) d\theta.$$

Agrupando términos, se obtiene

$$- \int_0^{\infty} K(t) dt K_0^{-1} = -K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \theta F_j(\theta) d\theta,$$

despejando la integral del lado izquierdo de la igualdad se obtiene el resultado buscado,

$$\int_0^{\infty} K(t) dt = K_0 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \xi F_j(\xi) d\xi K_0 = S. \quad \blacksquare$$

Propiedad Dinámica

Lema 2.7. *Sea el sistema (2.1) exponencialmente estable. Entonces, la matriz de Lyapunov (2.11) satisface la ecuación*

$$U(\tau) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(\tau+\theta) F_j(\theta) d\theta, \quad \tau \geq 0. \quad (2.18)$$

Demostración. Sustituyendo (2.2) en (2.11), se obtiene

$$U(\tau) = \int_0^\infty [K(t) - K_0]^T W \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t + \tau + \theta) F_j(\theta) d\theta dt,$$

que es igual a

$$U(\tau) = \sum_{j=1}^m \int_0^\infty \int_{-h_j}^0 [K(t) - K_0]^T W K(t + \tau + \theta) F_j(\theta) d\theta dt.$$

Cambiando el orden de integración la ecuación anterior se reescribe como

$$U(\tau) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_0^\infty [K(t) - K_0]^T W K(t + \tau + \theta) dt F_j(\theta) d\theta,$$

por la definición de la matriz de Lyapunov (2.11) se llega a (2.18). ■

2.5. Funcional con derivada prescrita

Para una matriz $W > 0$ dada, se busca una funcional cuadrática $v_0(\varphi), \varphi \in \mathcal{PC}([-H, 0], \mathbb{R}^n)$, que satisfice

$$\frac{d}{dt} v_0(x_t) = -x^T(t, \varphi) W x(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad (2.19)$$

a lo largo de la solución de sistemas estables de la forma (2.1). Integrando (2.19) de 0 a ∞ ,

$$v_0(x_\infty) - v_0(x_0) = - \int_0^\infty x^T(t, \varphi) W x(t, \varphi) dt,$$

por la suposición de que el sistema (2.1) es exponencialmente estable la ecuación anterior se reduce a

$$v_0(\varphi) = \int_0^\infty x^T(t, \varphi) W x(t, \varphi) dt.$$

Reemplazando $x(t, \varphi)$ por la formula de Cauchy (2.5), se obtiene

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) = & \int_0^\infty \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \varphi^T(\xi_1) \int_{\theta_1}^0 F_j^T(\theta_1) \frac{d}{dt} K^T(t - \xi_1 + \theta_1) d\theta_1 d\xi_1 W \\ & \times \sum_{k=1}^m \int_{-h_k}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta_2}^0 K(t - \xi_2 + \theta_2) F_k(\theta_2) d\theta_2 \varphi(\xi_2) d\xi_2 dt, \end{aligned}$$

que puede ser reescrita como

$$v_0(\varphi) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_k}^0 \varphi^T(\delta) \int_{\xi_1}^0 F_j^T(\xi_1) \int_{\xi_2}^0 \int_0^\infty \frac{d}{dt} K^T(t - \delta + \xi_1) W \\ \times \frac{d}{dt} K(t - \theta + \xi_2) dt F_k(\xi_2) d\xi_1 d\delta d\xi_2 \varphi(\theta) d\theta.$$

Pero dado que

$$\frac{d}{dt} K(t - \tau) = -\frac{d}{d\tau} K(t - \tau),$$

entonces

$$v_0(\varphi) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_k}^0 \varphi^T(\delta) \int_{\xi_1}^0 F_j^T(\xi_1) \int_{\xi_2}^0 \int_0^\infty \frac{d}{d\delta} K^T(t - \delta + \xi_1) W \\ \times \frac{d}{d\theta} K(t - \theta + \xi_2) dt F_k(\xi_2) d\xi_1 d\delta d\xi_2 \varphi(\theta) d\theta.$$

Ahora se introduce una funcional v , importante para los resultados de estabilidad.

Teorema 2.2. *La funcional*

$$v(\varphi) = v_0(\varphi) + \int_{-H}^0 \varphi^T(\theta) W \varphi(\theta) d\theta. \quad (2.20)$$

satisface las siguientes propiedades:

1. Su derivada con respecto a t , es

$$\frac{d}{dt} v(x_t) = -x^T(t - H) W x(t - H). \quad (2.21)$$

2. Si el sistema (2.1) es exponencialmente estable, entonces

$$v(\varphi) \geq \lambda_{\min}(W) \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

3. Existe un numero $\alpha > 0$, tal que

$$v(\varphi) \leq \alpha \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Demostración. Para probar 1, se diferencia $v(t)$ con respecto a t ,

$$\frac{d}{dt} v(x_t) = \frac{d}{dt} v_0(x_t) + \frac{d}{dt} \int_{-H}^0 x^T(t + \theta) W x(t + \theta) d\theta,$$

con el cambio de variable $\delta = t + \theta$ se reescribe como

$$\frac{d}{dt}v(x_t) = -x^T(t)Wx(t) + \frac{d}{dt}\int_{t-H}^t x^T(\delta)Wx(\delta)d\delta,$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt}v(x_t) = -x^T(t)Wx(t) + x^T(t)Wx(t) - x^T(t-H)Wx(t-H),$$

$$\frac{d}{dt}v(x_t) = -x^T(t-H)Wx(t-H).$$

Ahora para probar el punto numero 2, se toma la desigualdad,

$$v(\varphi) = v_0(\varphi) + \int_{-H}^0 \varphi^T(\theta)W\varphi(\theta)d\theta \geq \int_{-H}^0 \varphi^T(\theta)W\varphi(\theta)d\theta,$$

por la desigualdad de Rayleigh

$$v(\varphi) \geq \lambda_{\min}(W) \int_{-H}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta,$$

lo cual prueba la propiedad.

Finalmente para probar 3, por la desigualdad del triángulo se tiene

$$|v(\varphi)| \leq \|v_0(\varphi)\| + \left\| \int_{-H}^0 \varphi^T(\theta)W\varphi(\theta)d\theta \right\|.$$

Sustituyendo $v_0(\varphi)$, se obtiene

$$|v(\varphi)| \leq \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_k}^0 \varphi^T(\delta) \int_{\xi_1}^0 F_j^T(\xi_1) \int_{\xi_2}^0 \int_0^\infty \frac{d}{d\delta} K^T(t-\delta+\xi_1)W \right. \\ \left. \times \frac{d}{d\theta} K(t-\theta+\xi_2) dt F_k(\xi_2) d\xi_1 d\delta d\xi_2 \varphi(\theta) d\theta \right\| + \left\| \int_{-H}^0 \varphi^T(\theta)W\varphi(\theta)d\theta \right\|,$$

$$|v(\varphi)| \leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_k}^0 \|\varphi(\delta)\| \int_{\xi_1}^0 \left\| F_j^T(\xi_1) \int_{\xi_2}^0 \frac{d}{d\delta} \frac{d}{d\theta} \int_{-s+\xi_1}^\infty K^T(\sigma)W \right. \\ \left. \times K(\sigma+\delta-\xi_1-\theta+\xi_2) d\sigma F_k(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\delta \right\| \|\varphi(\theta)\| d\theta + \int_{-H}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 \|W\| d\theta.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder dos veces a las integrales, se obtiene el resultado buscado

$$|v(\varphi)| \leq \alpha \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2,$$

donde

$$\alpha = \|W\| + \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h_k}^0 \int_{\xi_1}^0 \left\| F_j^T(\xi_1) \int_{\xi_2}^0 \frac{d}{d\delta} \frac{d}{d\theta} \int_{-s+\xi_1}^{\infty} K^T(\sigma) W K(\sigma + \delta - \xi_1 - \theta + \xi_2) d\sigma \right. \\ \left. \times F_k(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right\| d\delta d\theta}.$$

■

2.6. Conclusiones

En este capítulo se realizó la generalización del sistema integral con retardo, la matriz fundamental, formula de Cauchy, la matriz de Lyapunov y la funcional con derivada prescrita que se presentan en [24], además se recuerdan conceptos y definiciones tales como estabilidad exponencial y la condición de Lyapunov. Lo cual es la base teórica de este trabajo.

Capítulo 3

Condiciones de Estabilidad

En este capítulo se presenta el resultado principal de este trabajo el cual se obtiene a partir de una funcional bilineal y la aproximación de las condiciones iniciales de (2.1) en función de la matriz fundamental del sistema. Las condiciones de estabilidad obtenidas consisten en determinar la positividad de una matriz simétrica a bloques donde cada bloque depende de la matriz de Lyapunov.

3.1. Funcional Bilineal

Ahora se define una funcional bilineal de la forma

$$z(\varphi, \psi) = \int_{-H}^{\infty} x^T(t, \varphi) W x(t, \psi) dt. \quad (3.1)$$

Lema 3.1. *Para cualesquiera $\tau_1, \tau_2 \in (0, -H)$ y condiciones iniciales*

$$\varphi_0(\theta) = [K(\tau_1 + \theta) - K_0] \gamma_1, \quad \theta \in [-H, 0), \quad (3.2)$$

$$\psi_0(\delta) = [K(\tau_2 + \delta) - K_0] \gamma_2, \quad \delta \in [-H, 0), \quad (3.3)$$

donde $K(\cdot)$ es la matriz fundamental y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^n$ son vectores arbitrarios y constantes. La función bilineal (3.1) puede ser escrita como

$$z(\varphi_0, \psi_0) = \gamma_1^T L(\tau_1, \tau_2) \gamma_2, \quad (3.4)$$

donde

$$L(\tau_1, \tau_2) = U(0) - U(-\tau_1) - U(\tau_2) + U(\tau_2 - \tau_1). \quad (3.5)$$

Demostración. Al sustituir la formula de Cauchy (2.5) en (3.1), resulta

$$z(\varphi_0, \psi_0) = \int_{-H}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 \varphi_0^T(\xi) F_j^T(\theta) K^T(t - \xi + \theta) d\xi d\theta \right] W \\ \times \left[\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) \psi_0(\xi) d\xi d\theta \right] dt.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales (3.2) y (3.3) en la ecuación anterior, se obtiene

$$z(\varphi_0, \psi_0) = \gamma_1^T \int_{-H}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 [K^T(\tau_1 + \xi) - K_0^T] F_j^T(\theta) K^T(t - \xi + \theta) d\xi d\theta \right\} W \\ \times \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) [K(\tau_2 + \xi) - K_0] d\xi d\theta \right\} dt \gamma_2,$$

puesto que $K(t) = K_0, t < 0$, entonces

$$z(\varphi_0, \psi_0) = \gamma_1^T \int_{-H}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 [K^T(\tau_1 + \xi) - K^T(\xi)] F_j^T(\theta) K^T(t - \xi + \theta) d\xi d\theta \right\} W \\ \times \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{d}{dt} \int_{\theta}^0 K(t - \xi + \theta) F_j(\theta) [K(\tau_2 + \xi) - K(\xi)] d\xi d\theta \right\} dt \gamma_2.$$

Haciendo uso de las ecuaciones (2.9) y (2.10) la expresión anterior se puede reescribir como

$$z(\varphi_0, \psi_0) = \gamma_1^T \int_{-H}^{\infty} [K^T(t + \tau_1) - K^T(t)] W [K(t + \tau_2) - K(t)] dt \gamma_2,$$

sumando y restando K_0^T , resulta

$$z(\varphi_0, \psi_0) = \gamma_1^T \int_{-H}^{\infty} [(K^T(t + \tau_1) - K_0^T) - (K^T(t) - K_0^T)] W [K(t + \tau_2) - K(t)] dt \gamma_2.$$

Expandiendo términos,

$$z(\varphi_0, \psi_0) = \gamma_1^T \int_{-H}^{\infty} [K^T(t + \tau_1) - K_0^T] W K(t + \tau_2) dt \gamma_2 \\ - \gamma_1^T \int_{-H}^{\infty} [K^T(t + \tau_1) - K_0^T] W K(t) dt \gamma_2 \\ - \gamma_1^T \int_{-H}^{\infty} [K^T(t) - K_0^T] W K(t + \tau_2) dt \gamma_2 \\ + \gamma_1^T \int_{-H}^{\infty} [K^T(t) - K_0^T] W K(t) dt \gamma_2.$$

Haciendo el cambio de variable $\delta = t + \tau_1$,

$$\begin{aligned} z(\varphi_0, \psi_0) &= \gamma_1^T \int_{-H+\tau_1}^{\infty} [K^T(\delta) - K_0^T] W K(\delta + \tau_2 - \tau_1) d\delta \gamma_2 \\ &\quad - \gamma_1^T \int_{-H+\tau_1}^{\infty} [K^T(\delta) - K_0^T] W K(t - \tau_1) d\delta \gamma_2 \\ &\quad - \gamma_1^T \int_{-H}^{\infty} [K^T(t) - K_0^T] W K(t + \tau_2) dt \gamma_2 \\ &\quad + \gamma_1^T \int_{-H}^{\infty} [K^T(t) - K_0^T] W K(t) dt \gamma_2, \end{aligned}$$

puesto que $H > \tau_1$, por (2.3) la ecuación anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} z(\varphi_0, \psi_0) &= \gamma_1^T \int_0^{\infty} [K^T(\delta) - K_0^T] W K(\delta + \tau_2 - \tau_1) d\delta \gamma_2 \\ &\quad - \gamma_1^T \int_0^{\infty} [K^T(\delta) - K_0^T] W K(t - \tau_1) d\delta \gamma_2 \\ &\quad - \gamma_1^T \int_0^{\infty} [K^T(t) - K_0^T] W K(t + \tau_2) dt \gamma_2 \\ &\quad + \gamma_1^T \int_0^{\infty} [K^T(t) - K_0^T] W K(t) dt \gamma_2. \end{aligned}$$

Por (2.11) lo anterior se reduce a

$$z(\varphi_0, \psi_0) = \gamma_1^T [U(\tau_2 - \tau_1) - U(-\tau_1) - U(\tau_2) + U(0)] \gamma_2,$$

que claramente es (3.4). ■

3.1.1. Simetría de la matriz $L(\tau_1, \tau_2)$

Lema 3.2. *La matriz $L(\tau_1, \tau_2)$ satisface la siguiente propiedad*

$$L(\tau_2, \tau_1) = L^T(\tau_1, \tau_2). \quad (3.6)$$

Demostración. Observese que

$$L(\tau_2, \tau_1) = U(0) - U(-\tau_2) - U(\tau_1) + U(-(\tau_2 - \tau_1)).$$

Usando la propiedad simétrica (2.14), resulta

$$\begin{aligned} L(\tau_2, \tau_1) &= [U^T(0) + P] - [U^T(\tau_2) + P - \tau_2 K_0^T W K_0] \\ &\quad - U(\tau_1) + [U^T(\tau_2 - \tau_1) + P - (\tau_2 - \tau_1) K_0^T W K_0], \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$L(\tau_2, \tau_1) = U^T(0) - U^T(\tau_2) - U(\tau_1) + U^T(\tau_2 - \tau_1) + P + \tau_1 K_0^T W K_0.$$

Dado que la matriz P es anti-simétrica, entonces

$$L(\tau_2, \tau_1) = [U(0) - (U^T(\tau_1) + P - \tau_1 K_0^T W K_0) - U(\tau_2) + U(\tau_2 - \tau_1)]^T,$$

usando la propiedad simétrica (2.14) fácilmente se obtiene (3.6). ■

Lo anterior permite construir la matriz $L(\tau_1, \tau_2)$ en función de la matriz de Lyapunov con argumentos exclusivamente positivos.

Lema 3.3. *La matriz $L(\tau_1, \tau_2)$ alternativamente puede ser escrita como*

$$L(\tau_1, \tau_2) = U(0) - U^T(\tau_1) - U(\tau_2) + U(\tau_2 - \tau_1) - P + \tau_1 K_0^T W K_0.$$

Demostración. Usando la propiedad simétrica (2.14) en (3.5), resulta

$$L(\tau_1, \tau_2) = U(0) - [U(\tau_1) + P - \tau_1 K_0^T W K_0] - U(\tau_2) + U(\tau_2 - \tau_1),$$

que claramente es el resultado buscado. ■

3.2. Aproximación de Funciones

Ahora se introduce una clase de funciones de la forma

$$\bar{\varphi}(\theta) = \sum_{i=1}^r [K(\tau_i + \theta) - K_0] \gamma_i, \quad \theta \in [-H, 0], \quad (3.7)$$

con τ_i equidistantes,

$$\mathcal{S} = \left\{ \psi \in \mathcal{PC}([-H, 0], \mathbb{R}^n) : \psi(\theta) = \sum_{i=1}^r [K(\tau_i + \theta) - K_0] \gamma_i, \tau_i = \frac{i}{r}H, \gamma_i \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1, r} \right\}.$$

El lema que se muestra a continuación establece que es posible aproximar cualquier función diferenciable a través de elementos de \mathcal{S} .

Lema 3.4. [25], [26]. *Para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}^{(1)}([-H, 0], \mathbb{R}^n)$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función $\psi \in \mathcal{S}$, tal que*

$$\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon. \quad (3.8)$$

Demostración. Dada una función continua φ y un $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, se busca un número natural r y los vectores $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, tal que $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$, donde

$$\psi(\theta) = \sum_{i=1}^r \left[K \left(\frac{i}{r} H + \theta \right) + K_0 \right] \gamma_i.$$

La matriz fundamental tiene derivada acotada en el intervalo $[0, H]$, por lo tanto existe un número $L > 0$, de manera que

$$\|K(t_1) - K(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in (0, H].$$

Puesto que cualquier función continua en un segmento es uniformemente continua, entonces existe un número $\bar{\delta} > 0$, tal que para cualquier $\delta \in (0, \bar{\delta})$, se cumple

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| < \varepsilon_1.$$

Ahora se define $M = \|\varphi(-\tau_r)\| = \|\varphi(-H)\|$ y

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{H}(1 + LM)e^{LH}}.$$

Además existe δ_1 , tal que

1. $\delta_1 \in (0, \bar{\delta})$.
2. $\delta_1 < \varepsilon_1$.
3. $\frac{H}{\delta_1}$ es un número natural.

Para este δ_1 se define

$$r = \frac{H}{\delta_1}, \quad \tau_k = \frac{k}{r}H = k\delta_1, \quad k = \overline{1, r}.$$

Se buscan los vectores $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ tales que

$$\varphi(-\tau_k) = \psi(-\tau_k), \quad k = \overline{1, r}.$$

Debido a que $K(t) = K_0$ para $t < 0$, entonces (3.7) se escribe como

$$\psi(-\tau_k) = \sum_{i=1}^r [K(\tau_i - \tau_k) - K_0] \gamma_i = \sum_{i=k}^r (K(\tau_i - \tau_k) - K_0) \gamma_i,$$

que es lo mismo que

$$\psi(-\tau_k) = \sum_{i=1}^r [K(\tau_i - \tau_k) - K_0] \gamma_i = \sum_{i=k+1}^r (K(\tau_i - \tau_k) - K_0) \gamma_i + (K(0) - K_0) \gamma_k.$$

Debido a la propiedad $K(0) - K_0 = I_n$, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\psi(-\tau_k) = \sum_{i=k+1}^r (K(\tau_i - \tau_k) - K_0) \gamma_i + \gamma_k,$$

entonces

$$\begin{aligned} \gamma_r &= \varphi(-\tau_r), \\ \gamma_k &= \varphi(-\tau_k) - \sum_{i=k+1}^r (K(\tau_i - \tau_k) - K_0) \gamma_i, \quad k = \overline{1, r-1}. \end{aligned}$$

Ahora que se ha calculado la función $\psi(\theta)$ resta probar la desigualdad (3.8). Considerando $\theta \in [-\tau_r, -\tau_{r-1})$

$$\begin{aligned} \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| &= \|\varphi(\theta) - \varphi(-\tau_r) + \psi(-\tau_r) - \psi(\theta)\|, \\ \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| &= \|\varphi(\theta) - \varphi(-\tau_r) + [K(\tau_r - \tau_r) - K_0 - K(\tau_r + \theta) + K_0] \gamma_r\|, \\ \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| &\leq \|\varphi(\theta) - \varphi(-\tau_r)\| + \|[K(0) - K(\tau_r + \theta)] \gamma_r\|, \\ \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| &\leq \|\varphi(\theta) - \varphi(-\tau_r)\| + \|K(0) - K(\tau_r + \theta)\| \|\gamma_r\|. \end{aligned}$$

Pero cuando $\theta \rightarrow -\tau_{r-1}$

$$\begin{aligned} \|K(0) - K(\tau_r + \theta)\| &\leq L|-\tau_r + \tau_{r-1}|, \\ -\tau_r + \tau_{r-1} &= -H(-r + r - 1) = -\frac{1}{r}H = -\delta_1, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| < \varepsilon_1 + L\delta_1 M.$$

Ahora se define $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon_1 + L\delta_1 M$. Por lo que se puede decir que

$$\lim_{\theta \rightarrow -\tau_{r-1}} \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| < \varepsilon^{(1)}.$$

Por definición

$$\|\varphi(-\tau_{r-1}) - \psi(-\tau_{r-1})\| = \|\varphi(-\tau_{r-1}) - [K(\tau_r - \tau_{r-1}) - K_0] \gamma_r - \gamma_{r-1}\| < \varepsilon^{(1)},$$

es claro que

$$\|\varphi(-\tau_{r-1}) - [K(\tau_r - \tau_{r-1}) - K_0] \gamma_r\| \leq \|\varphi(-\tau_{r-1}) - [K(\tau_r - \tau_{r-1}) - K_0] \gamma_r - \gamma_{r-1}\|,$$

que conlleva a

$$\|\varphi(-\tau_{r-1}) - [K(\tau_r - \tau_{r-1}) - K_0] \gamma_r\| < \varepsilon^{(1)}.$$

Puesto que

$$\varphi(-\tau_{r-1}) = \psi(-\tau_{r-1}) = [K(\tau_r - \tau_{r-1}) - K_0] \gamma_r + \gamma_{r-1},$$

se concluye la siguiente desigualdad

$$\|\gamma_{r-1}\| < \varepsilon^{(1)}.$$

Similarmente para el intervalo $\theta \in [-\tau_{r-1}, -\tau_{r-2})$

$$\begin{aligned} \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| &= \|\varphi(\theta) - \varphi(-\tau_{r-1}) + \psi(-\tau_{r-1}) - \psi(\theta)\|, \\ \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| &\leq \|\varphi(\theta) - \varphi(-\tau_r - 1)\| + \|K(\tau_r - \tau_{r-1}) - K(\tau_r + \theta)\| \|\gamma_r\| \\ &\quad + \|K(0) - K(\tau_{r-1} + \theta)\| \|\gamma_{r-1}\|, \\ \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| &< \varepsilon_1 + L\delta_1 M + L\delta_1 \varepsilon^{(1)}. \end{aligned}$$

Es decir

$$\|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| < \varepsilon^{(2)},$$

donde $\varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(1)}(1 + L\delta_1)$, por lo tanto

$$\|\gamma_{r-2}\| < \varepsilon^{(2)}.$$

Continuando con el proceso se llega al siguiente resultado

$$\|\gamma_{r-k}\| < \varepsilon^{(k)}, \quad \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| < \varepsilon^{(k)}, \quad \theta \in [-\tau_{r-k+1}, \tau_{r-k}),$$

donde $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon^{(k-1)}(1 + L\delta_1)$, $k = \overline{2, r-1}$. Claramente,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)} < \varepsilon^{(2)} < \dots < \varepsilon^{(r-1)} &= \varepsilon^{(1)}(1 + L\delta_1)^{r-2} = (\varepsilon_1 + L\delta_1 M)(1 + L\delta_1)^{r-2} \\ &< \varepsilon_1(1 + LM)(1 + L\delta_1)^{r-1} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{H}e^{LH}} \left(1 + \frac{LH}{r}\right)^{r-1}. \end{aligned}$$

Se cumple la siguiente desigualdad

$$\left(1 + \frac{LH}{r}\right)^{r-1} \leq e^{LH}.$$

Por lo tanto

$$\|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{H}}, \quad \theta \in [-H, 0).$$

De la definición de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$

$$\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\int_{-H}^0 \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\|^2 d\theta} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{H}}\right)^2 \int_{-H}^0 d\theta} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{H}} \sqrt{H} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

3.3. Teorema de Inestabilidad

A continuación se muestra el teorema de inestabilidad basado en las ideas introducidas en [27] y que será utilizado posteriormente en la prueba de estabilidad.

Teorema 3.1. [25], [26]. *Si el sistema (2.1) es inestable y satisface la condición de Lyapunov, entonces para todo $\alpha_1 > 0$, existe una función $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^{(1)}([-H, 0], \mathbb{R}^n)$ tal que*

$$v(\hat{\varphi}) \leq -\alpha_1. \quad (3.9)$$

Demostración. Integrando (2.21) de 0 a τ ,

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt} v(x_t(\varphi)) = - \int_0^\tau x^T(t-H) W x(t-H) dt,$$

integrando el lado izquierdo y realizando el cambio de variable $t = t' - H$ en el lado derecho, resulta

$$v(x_\tau(\varphi)) - v(x_0(\varphi)) = - \int_{-H}^{\tau-H} x^T(t) W x(t) dt. \quad (3.10)$$

Fijando un $\alpha_1 > 0$ arbitrario. El sistema (2.1) satisface la condición de Lyapunov. Puesto que se hace la suposición de que el sistema es inestable, existe al menos un valor propio $s = \alpha + j\beta$ con parte real positiva. Entonces existen dos vectores C_1, C_2 al menos uno diferente de cero, tal que

$$\tilde{x}(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) C_1 + \sin(\beta t) C_2),$$

es una solución de (2.1), la cual es diferente de cero en $[-H, \tau - H]$ para algún $\tau > 0$. Entonces

$$\int_{-H}^{\tau-H} \|\tilde{x}(t)\|^2 dt \neq 0.$$

Dada una constante arbitraria a , la función

$$\bar{x}(t) = a\tilde{x}(t),$$

también es solución de (2.1), con condición inicial $\hat{\varphi}(\theta) = a\tilde{x}(\theta)$, $\theta \in [-H, 0]$. Si $\beta \neq 0$, entonces se fija $\tau = 2\pi/|\beta|$ y para $\beta = 0$ fija $\tau = 1$. Se tiene

$$\bar{x}(\tau + \theta) = e^{\alpha\tau} \hat{\varphi}(\theta), \quad \theta \in [-H, 0],$$

$$v(\bar{x}_\tau(\hat{\varphi})) = e^{2\alpha\tau} v(\hat{\varphi}).$$

De (3.10), se obtiene

$$v(\hat{\varphi}) = - \frac{\int_{\tau-H}^{-H} \bar{x}^T(t, \bar{\varphi}) W \bar{x}(t, \bar{\varphi}) dt}{e^{2\alpha\tau} - 1},$$

por la desigualdad de Rayleigh,

$$v(\hat{\varphi}) \leq -a^2 \frac{\lambda_{\min}(W) \int_{\tau-H}^{-H} \|\bar{x}(t)\|^2 dt}{e^{2\alpha\tau} - 1},$$

eligiendo

$$a = \sqrt{\frac{\alpha_1 (e^{2\alpha\tau} - 1)}{\lambda_{\min}(W) \int_{\tau-H}^{-H} \|\bar{x}(t)\|^2 dt}},$$

se llega a la desigualdad (3.9). ■

3.4. Condiciones Necesarias y Suficientes

En esta sección se presentan las condiciones necesarias de estabilidad para sistemas integrales con retardo expresadas en términos de la matriz de Lyapunov. Estas pertenecen a la familia de condiciones obtenidas en [25, 26, 28].

Se introduce la matriz a bloques

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = \{L(\tau_i, \tau_j)\}_{i,j=1}^r = \{U(0) - U(-\tau_i) - U(\tau_j) + U(\tau_j - \tau_i)\}_{i,j=1}^r. \quad (3.11)$$

Teorema 3.2. *El sistema (2.1) es exponencialmente estable si y solo si para todo número natural $r \geq 2$*

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = \left\{ L \left(\frac{i}{r}H, \frac{j}{r}H \right) \right\}_{i,j=1}^r > 0,$$

además si el sistema (2.1) es inestable, entonces existe un número natural $r \geq 2$ tal que

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = \left\{ L \left(\frac{i}{r}H, \frac{j}{r}H \right) \right\}_{i,j=1}^r \not\geq 0.$$

3.4.1. Demostración. Necesidad

Ya que la funcional $v(\varphi)$ se puede escribir como $v(\varphi) = z(\varphi, \varphi)$. Del Lema 3.1 la funcional $v(\varphi)$ evaluada con la función

$$\bar{\varphi}(\theta) = \sum_{i=1}^r [K(\theta + \tau_i) - K_0] \gamma_i, \quad \theta \in [-H, 0],$$

donde los vectores $\gamma_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, r}$, son arbitrarios, es igual a

$$v(\bar{\varphi}) = z(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r z(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \gamma_i^T L(\tau_i, \tau_j) \gamma_j,$$

$$v(\bar{\varphi}) = \gamma^T \mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) \gamma,$$

donde $\gamma = (\gamma_1^T, \dots, \gamma_r^T)^T$. Se hace la suposición de que el sistema (2.1) es exponencialmente estable, del Teorema 2.2 $v(\bar{\varphi}) \geq \alpha \|\bar{\varphi}\|_{\mathcal{H}}^2$, resta mostrar que $\|\bar{\varphi}\|_{\mathcal{H}} > 0$, si $\gamma \neq 0$.

Por contradicción se supone que $\gamma \neq 0$, pero $\|\bar{\varphi}\|_{\mathcal{H}} = 0$. Puesto que $\bar{\varphi}$ es continua a pedazos, es claro que $\bar{\varphi} = 0$ en $[-H, 0)$. Esto contradice la suposición de que $\gamma \neq 0$, dado que $K(t) - K_0 = I_n$ cuando $t = 0$. Entonces

$$v(\bar{\varphi}) = \gamma^T \mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) \gamma > 0,$$

por lo tanto la matriz a bloques

$$\mathcal{K}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) > 0.$$

3.4.2. Demostración. Suficiencia

Suponiendo que la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ existe. Si el sistema es inestable existe un número natural $r \geq 2$, tal que

$$\left\{ L \left(\frac{i}{r}H, \frac{j}{r}H \right) \right\}_{i,j=1}^r \not\geq 0,$$

lo que es equivalente a la existencia de un vector γ ,

$$\gamma^T \mathcal{K}_r \left(\frac{1}{r}H, \frac{2}{r}H, \frac{3}{r}H, \dots, \frac{r-1}{r}H, H \right) \gamma < 0.$$

Suponiendo que el sistema (2.1) es inestable. Si se define un número $\alpha_1 > 0$, por el Teorema 3.1 existe $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^{(1)}([-H, 0], \mathbb{R}^n)$ y se cumple $v(\hat{\varphi}) \leq -\alpha_1$, puesto que la funcional $v(\hat{\varphi})$ es continua en cada punto, es decir, para cada α_1 existe un número $\Delta > 0$, tal que

$$\|\hat{\varphi} - \varphi\|_{\mathcal{H}} < \Delta \Rightarrow |v(\hat{\varphi}) - v(\varphi)| < \alpha_1.$$

Del Lema 3.4, existe $\psi \in \mathcal{S}$, de manera que

$$\|\hat{\varphi} - \psi\|_{\mathcal{H}} < \Delta,$$

por la continuidad de la funcional $v(\hat{\varphi})$, se tiene

$$|v(\hat{\varphi}) - v(\psi)| < \alpha_1.$$

Por lo tanto

$$-\alpha_1 < v(\hat{\varphi}) - v(\psi) < \alpha_1.$$

$$v(\psi) < v(\hat{\varphi}) + \alpha_1,$$

Del Teorema 3.1,

$$v(\hat{\varphi}) + \alpha_1 \leq 0,$$

entonces

$$v(\psi) < v(\hat{\varphi}) + \alpha_1 \leq 0.$$

Puesto que la función ψ es de la forma

$$\psi(\theta) = \sum_{i=1}^r [K(\tau_i - \theta) - K_0] \gamma_i,$$

entonces la funcional $v(\psi)$, se escribe como

$$v(\psi) = \gamma^T \mathcal{K}_r \left(\frac{1}{r}H, \frac{2}{r}H, \frac{3}{r}H, \dots, \frac{r-1}{r}H, H \right) \gamma < 0,$$

equivalentemente

$$\left\{ L \left(\frac{i}{r}H, \frac{j}{r}H \right) \right\}_{i,j=1}^r \not\geq 0.$$

Con lo cual la suficiencia queda demostrada.

3.5. Conclusiones

Se ha presentado una funcional bilineal y se demostró que sus condiciones iniciales pueden ser aproximadas con elementos dependientes de la matriz fundamental de (2.1) que junto con el teorema de inestabilidad permitieron obtener las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para sistemas integrales con retardo, estas consisten en verificar la positividad de una matriz que depende de la matriz de Lyapunov del sistema.

Capítulo 4

Existencia y Unicidad de la matriz de Lyapunov

En este capítulo se considera un sistema con un único retardo y se presenta un sistema de ecuaciones diferenciales libre de retardo sujeto a ciertas condiciones de frontera, primero para el caso de un kernel general y posteriormente para un caso en donde el kernel tiene una forma particular. Para este último y a partir de las ideas expuestas en [29] se demuestra que si el sistema cumple la condición de Lyapunov entonces la matriz de Lyapunov existe y además es única.

4.1. Sistema libre de retardo y condiciones de frontera

A continuación se presenta el sistema libre de retardo correspondiente a un sistema integral de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 F(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (4.1)$$

donde $h > 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y kernel $F(\theta) \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$. La matriz fundamental es de la forma

$$K(t) = \int_{-h}^0 K(t + \theta) F(\theta) d\theta, \quad t \geq 0,$$
$$K(t) = \left[\int_{-h}^0 F\theta d\theta - I_n \right]^{-1}, \quad t < 0. \quad (4.2)$$

Las propiedades simétrica y dinámica de la matriz de Lyapunov son

$$U(-\tau) = U^T(\tau) + P - \tau K_0^T W K_0, \quad (4.3)$$

$$U(\tau) = \int_{-h}^0 U(\tau + \theta) F(\theta) d\theta, \quad (4.4)$$

respectivamente, donde

$$P = S^T W K_0 - K_0^T W S,$$

$$S = K_0 \int_{-h}^0 \theta F(\theta) d\theta K_0.$$

Se introducen las variables auxiliares

$$Y(\tau) = U(\tau), \quad Z(\tau) = U(\tau - h), \quad \tau \in [0, h]. \quad (4.5)$$

Lema 4.1. *Considérese el sistema (4.1) y sea $U(\tau)$ una matriz de Lyapunov asociada a una matriz simétrica $W > 0$. Entonces, las matrices auxiliares (4.5) satisfacen el sistema de ecuaciones matriciales*

$$\frac{d}{d\tau} Y(\tau) = Y(\tau) F(0) - Z(\tau) F(-h) - \int_{-h}^0 Y(\tau + \theta) F'(\theta) d\theta, \quad (4.6a)$$

$$\frac{d}{d\tau} Z(\tau) = F^T(-h) Y(\tau) - F^T(0) Z(\tau) + \int_{-h}^0 [F'(\theta)]^T Z(\tau - \theta) d\theta - W K_0. \quad (4.6b)$$

Con las condiciones de frontera

$$Y(0) = Z(h), \quad (4.7a)$$

$$Y(0) = \int_0^h Z(\theta) F(\theta - h) d\theta. \quad (4.7b)$$

Demostración. Para probar (4.6a) se toma la propiedad dinámica (4.4) y haciendo el cambio de variable $\xi = \tau + \theta$, se obtiene

$$U(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} U(\xi) F(\xi - \tau) d\xi.$$

Derivando con respecto a τ ,

$$\frac{d}{d\tau} U(\tau) = U(\tau) F(0) - U(\tau - h) F(-h) + \int_{\tau-h}^{\tau} U(\xi) \frac{\partial}{\partial \tau} F(\xi - \tau) d\xi,$$

de la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(\xi - \tau) = -\frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi - \tau), \quad (4.8)$$

y haciendo el cambio de variable $\theta = \xi - \tau$,

$$\frac{d}{d\tau} U(\tau) = U(\tau) F(0) - U(\tau - h) F(-h) - \int_{-h}^0 U(\tau + \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} F(\theta) d\theta. \quad (4.9)$$

Ahora para probar (4.6b), se aplica la propiedad simétrica (4.3) a $U^T(h - \tau)$,

$$U(\tau - h) - P - (\tau - h) K_0^T W K_0 = U^T(h - \tau),$$

aplicando la propiedad dinámica (4.4) en el lado derecho, resulta

$$U(\tau - h) - P - (\tau - h) K_0^T W K_0 = \int_{-h}^0 F^T(\theta) U^T(h - \tau + \theta) d\theta.$$

Se usa de nuevo la propiedad simétrica (4.3), de manera que

$$U(\tau - h) - P - (\tau - h) K_0^T W K_0 = \int_{-h}^0 F^T(\theta) [U(\tau - h - \theta) - P - (\tau - h - \theta) K_0^T W K_0] d\theta,$$

agrupando términos semejantes la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned} U(\tau - h) = & \int_{-h}^0 F^T(\theta) U(\tau - h - \theta) d\theta - (\tau - h) \left[\int_{-h}^0 F^T(\theta) d\theta - I_n \right] \\ & \times K_0^T W K_0 + \int_{-h}^0 F^T(\theta) \theta d\theta K_0^T W K_0 - \left[\int_{-h}^0 F^T(\theta) d\theta - I_n \right] P. \end{aligned}$$

Usando la ecuación (4.2), se obtiene

$$U(\tau - h) = \int_{-h}^0 F^T(\theta) U(\tau - h - \theta) d\theta - (\tau - h) W K_0 + \int_{-h}^0 F^T(\theta) \theta d\theta K_0^T W K_0 - K_0^{-T} P. \quad (4.10)$$

Realizando el cambio de variable $\xi = h - \tau - \theta$ y derivando (4.10) respecto a τ ,

$$\frac{d}{d\tau} U(\tau - h) = -\frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{\tau-h} F^T(\tau - h - \xi) U(\xi) d\xi - W K_0$$

lo cual es igual a

$$\frac{d}{d\tau} U(\tau - h) = -F^T(0) U(\tau - h) + F^T(-h) U(\tau) - \int_{\tau}^{\tau-h} \frac{\partial}{\partial \tau} F^T(\tau - h - \xi) U(\xi) d\xi - W K_0.$$

Dado que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F^T(\tau - h - \xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} F^T(\tau - h - \xi), \quad (4.11)$$

entonces

$$\frac{d}{d\tau} U(\tau - h) = F^T(-h) U(\tau) - F^T(0) U(\tau - h) + \int_{\tau}^{\tau-h} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} F^T(\tau - h - \xi) \right] U(\xi) d\xi - W K_0,$$

con el cambio de variable $\theta = \tau - h - \xi$, la ecuación anterior se reescribe como

$$\frac{d}{d\tau} U(\tau - h) = F^T(-h) U(\tau) - F^T(0) U(\tau - h) + \int_{-h}^0 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} F^T(\theta) \right] U(\tau - h - \theta) d\theta - W K_0. \quad (4.12)$$

Las ecuaciones (4.6a) y (4.6b) se obtienen al expresar (4.9) y (4.12) en las variables auxiliares (4.5). Para probar la condición de frontera (4.7a) se parte de la definición de las variables auxiliares, de manera que

$$Y(0) = U(0) = U(h-h) = Z(h).$$

Para probar (4.7b), se realiza el cambio de variable $\xi = \theta + h$ en (4.4), tal que

$$U(\tau) = \int_0^h U(\tau + \xi - h) F(\xi - h) d\xi.$$

Al evaluar en $\tau = 0$, se obtiene

$$U(0) = \int_0^h U(\xi - h) F(\xi - h) d\xi,$$

expresando la ecuación anterior en términos de las variables auxiliares (4.5) se recupera (4.7b). ■

4.1.1. Kernel con una estructura particular

Si ahora se considera que el sistema (4.1) tiene un kernel de la forma

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^k \eta_i(\theta) B_i, \quad B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (4.13)$$

donde $\eta_i(\theta)$, $i \in [1, k]$ son funciones escalares, entonces el sistema (4.1) se puede escribir como

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \int_{-h}^0 \eta_i(\theta) B_i x(t + \theta) d\theta. \quad (4.14)$$

En las ecuaciones libres de retardo (4.6a) y (4.6b) aparecen los términos $F'(\theta)$ y $[F'(\theta)]^T$, respectivamente, de la definición de $F(\theta)$ se concluye que

$$F'(\theta) = \sum_{i=1}^k \eta'_i(\theta) B_i. \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.15) en (4.6a) y (4.6b), resulta

$$\frac{d}{d\tau} Y(\tau) = Y(\tau) F(0) - Z(\tau) F(-h) - \sum_{i=1}^k \int_{-h}^0 \eta'_i(\theta) Y(\tau + \theta) B_i d\theta, \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{d\tau} Z(\tau) = F^T(-h) Y(\tau) - F^T(0) Z(\tau) + \sum_{i=1}^k \int_{-h}^0 \eta'_i(\theta) B_i Z(\tau - \theta) d\theta - WK_0, \quad (4.17)$$

respectivamente, ahora se introducen las matrices auxiliares

$$Q_i(\tau) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(\tau + \theta) d\theta, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (4.18)$$

$$R_i(\tau) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (4.19)$$

donde $\mu_i(\theta) = \eta'_i(\theta)$ y que además satisface

$$\mu'_i(\theta) = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \mu_j(\theta), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \quad (4.20)$$

que es equivalente a

$$\mu'(\theta) = A\mu(\theta), \quad (4.21)$$

donde

$$\mu(\theta) = \begin{bmatrix} \mu_1(\theta) \\ \mu_2(\theta) \\ \vdots \\ \mu_k(\theta) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kk} \end{bmatrix}.$$

Con el kernel (4.13) y por las ideas expuestas en [29], es posible reescribir el Lema 4.1 como se muestra a continuación.

Lema 4.2. *Sea un sistema integral con retardo de la forma (4.14), entonces las matrices auxiliares (4.5), (4.18) y (4.19) satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales matriciales libre de retardos siguiente*

$$\frac{d}{d\tau} Y(\tau) = Y(\tau) F(0) - Z(\tau) F(-h) - \sum_{i=1}^k Q_i(\tau) B_i, \quad (4.22a)$$

$$\frac{d}{d\tau} Z(\tau) = F^T(-h) Y(\tau) - F^T(0) Z(\tau) + \sum_{i=1}^k B_i^T R_i(\tau) - WK_0, \quad (4.22b)$$

$$\frac{d}{d\tau} Q_i(\tau) = \mu_i(0) Y(\tau) - \mu_i(-h) Z(\tau) - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} Q_j(\tau), \quad i \in [1, k], \quad (4.22c)$$

$$\frac{d}{d\tau} R_i(\tau) = \mu_i(-h) Y(\tau) - \mu_i(0) Z(\tau) + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} R_j(\tau), \quad i \in [1, k]. \quad (4.22d)$$

Con las condiciones de frontera (4.7), y las condiciones debido a las matrices auxiliares

$$Q_i(0) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(h + \theta) d\theta, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (4.23a)$$

$$Q_i(h) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(h + \theta) d\theta, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (4.23b)$$

$$R_i(0) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(-\theta) d\theta, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (4.23c)$$

$$R_i(h) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(-\theta) d\theta, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (4.23d)$$

Demostración. Las primeras ecuaciones (4.22a) y (4.22b) ya han sido probadas parcialmente en el Lema 4.1, ahora se deben dejar en términos de las matrices auxiliares (4.18) y (4.19). Claramente al sustituir (4.18) en (4.16) se obtiene (4.22a). Por otro lado sustituyendo (4.19) en (4.17) se obtiene (4.22b). Ahora tomando la ecuación (4.18), realizando el cambio de variable $\xi = \tau + \theta$ y derivando con respecto a τ , resulta

$$\frac{d}{d\tau} Q_i(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{\tau-h}^{\tau} \mu_i(\xi - \tau) Y(\xi) d\xi,$$

que es igual a

$$\frac{d}{d\tau} Q_i(\tau) = \mu_i(0) Y(\tau) - \mu_i(-h) Y(\tau - h) + \int_{\tau-h}^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \mu_i(\xi - \tau) Y(\xi) d\xi.$$

De la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mu_i(\xi - \tau) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \mu_i(\xi - \tau), \quad (4.24)$$

y con el cambio de variable $\theta = \xi - \tau$, se obtiene

$$\frac{d}{d\tau} Q_i(\tau) = \mu_i(0) Y(\tau) - \mu_i(-h) Z(\tau) - \int_{-h}^0 \mu_i'(\theta) Y(\tau + \theta) d\theta.$$

Por (4.20) la ecuación anterior se escribe como

$$\frac{d}{d\tau} Q_i(\tau) = \mu_i(0) Y(\tau) - \mu_i(-h) Z(\tau) - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(\tau + \theta) d\theta, \quad i \in [1, k],$$

de (4.18) se recupera (4.22c). Finalmente se toma (4.19), se hace el cambio de variable $\xi = \tau - \theta$ y se deriva con respecto a τ , de manera que

$$\frac{d}{d\tau} R_i(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{\tau+h}^{\tau} \mu_i(\tau - \xi) Z(\xi) d\xi,$$

lo cual es igual a

$$\frac{d}{d\tau} R_i(\tau) = -\mu_i(0) Z(\tau) + \mu_i(-h) Z(\tau + h) - \int_{\tau+h}^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \mu_i(\tau - \xi) Z(\xi) d\xi.$$

De la igualdad (4.24) más el cambio de variable $\theta = \tau - \xi$, se obtiene

$$\frac{d}{d\tau} R_i(\tau) = -\mu_i(0) Z(\tau) + \mu_i(-h) Y(\tau) + \int_{-h}^0 \mu_i'(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta,$$

por (4.20) la ecuación anterior se reescribe como

$$\frac{d}{d\tau} R_i(\tau) = -\mu_i(0) Z(\tau) + \mu_i(-h) Y(\tau) + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta, \quad i \in [1, k],$$

sustituyendo (4.19) se obtiene (4.22d).

En el Lema 4.1 se demostró que se cumplen las condiciones de frontera (4.7), resta mostrar que las matrices auxiliares (4.18) y (4.19) cumplen las condiciones (4.23), sustituyendo $\tau = 0$ y $\tau = h$ directamente en (4.18), resulta

$$Q_i(0) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(\theta) d\theta = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(h + \theta - h) d\theta = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(h + \theta) d\theta,$$

$$Q_i(h) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(h + \theta) d\theta,$$

respectivamente. Al sustituir $\tau = 0$ y $\tau = h$ en (4.19), se obtiene

$$R_i(0) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(-\theta) d\theta,$$

$$R_i(h) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(h - \theta) d\theta = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(h - \theta - h) d\theta = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(-\theta) d\theta.$$

Entonces la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ del sistema (4.14) satisface el sistema de ecuaciones (4.22) y las condiciones de frontera (4.7), (4.23). ■

4.2. Productos Kronecker

A continuación se define el producto Kronecker y la propiedad del producto mixto [30]. Sean dos matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, el producto Kronecker se define como $A \otimes B$, tal que

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

Si ahora se introducen las matrices $C \in \mathbb{R}^{n \times k}$ y $D \in \mathbb{R}^{q \times r}$, entonces el producto Kronecker cumple la propiedad del producto mixto,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

Por otro lado se define la operación vectorización como

$$\text{vec}(Q) = q,$$

donde $q \in \mathbb{R}^{np}$ se obtiene al apilar las columnas de la matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Los productos Kronecker se aplican a la solución de sistemas de ecuaciones matriciales lineales, tales que, la ecuación

$$AXB = F,$$

donde $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es desconocida y $F \in \mathbb{R}^{m \times q}$, es equivalente a

$$\text{vec}(AXB) = \text{vec}(F),$$

$$(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(F),$$

$$(B^T \otimes A)x = f.$$

4.3. Existencia de las condiciones de frontera auxiliares

En esta sección se muestra que existen diferentes combinaciones equivalentes para elegir las condiciones de frontera (4.23a)-(4.23d). Se introduce la notación

$$Q(\tau) = \begin{bmatrix} Q_1(\tau) \\ Q_2(\tau) \\ \vdots \\ Q_k(\tau) \end{bmatrix}, \quad R(\tau) = \begin{bmatrix} R_1(\tau) \\ R_2(\tau) \\ \vdots \\ R_k(\tau) \end{bmatrix}.$$

Lema 4.3. [29]. Sean las funciones $(Y(\tau), Z(\tau), Q(\tau), R(\tau))$ que satisfacen el sistema de ecuaciones (4.22), entonces

1. La condición (4.23a) se satisface si la condición (4.23b) se satisface.
2. La condición (4.23c) se satisface si la condición (4.23d) se satisface.

Demostración. Las condiciones (4.23a) y (4.23b) pueden ser reescritas como

$$Q(0) = \int_{-h}^0 \mu(\theta) \otimes Z(h+\theta) d\theta, \quad Q(h) = \int_{-h}^0 \mu(\theta) \otimes Y(h+\theta) d\theta,$$

respectivamente. Si se define $\mathcal{A} = A \otimes I_n$, entonces de la ecuación (4.22c), se obtiene la ecuación diferencial

$$Q'(\tau) = \mu(0) \otimes Y(\tau) - \mu(-h) \otimes Z(\tau) - \mathcal{A}Q(\tau),$$

cuya solución esta dada por

$$Q(\tau) = e^{-\mathcal{A}\tau} Q(0) + \int_0^\tau e^{\mathcal{A}(t-\tau)} [\mu(0) \otimes Y(t) - \mu(-h) \otimes Z(t)] dt.$$

Puesto que se cumple la igualdad

$$e^{-\mathcal{A}\tau} = e^{-A\tau} \otimes I_n,$$

entonces

$$Q(\tau) = e^{-A\tau} Q(0) + \int_0^\tau [e^{A(t-\tau)} \otimes I_n] [\mu(0) \otimes Y(t) - \mu(-h) \otimes Z(t)] dt.$$

Debido a la propiedad del producto mixto de los productos Kronecker [30],

$$Q(\tau) = e^{-A\tau} Q(0) + \int_0^\tau [e^{A(t-\tau)} \mu(0) \otimes Y(t) - e^{A(t-\tau)} \mu(-h) \otimes Z(t)] dt.$$

Haciendo el cambio de variable $t = h + \theta$ y puesto que la solución de (4.21) es $\mu(\theta) = e^{A\theta} \mu(0)$, la ecuación anterior es equivalente a

$$Q(\tau) = e^{-A\tau} Q(0) + \int_{-h}^{\tau-h} [\mu(h + \theta - \tau) \otimes Y(h + \theta) - \mu(\theta - \tau) \otimes Z(h + \theta)] d\theta. \quad (4.25)$$

Suponiendo que se cumple la condición (4.23a), entonces

$$e^{-Ah} Q(0) = [e^{-Ah} \otimes I_n] \int_{-h}^0 \mu(\theta) \otimes Z(h + \theta) d\theta = \int_{-h}^0 \mu(\theta - h) \otimes Z(h + \theta) d\theta,$$

por lo tanto al sustituir la ecuación anterior en (4.25) y evaluando con $\tau = h$ se obtiene (4.23b).

Por otro lado, si se satisface (4.23b), entonces

$$\begin{aligned} Q(h) &= \int_{-h}^0 \mu(\theta) \otimes Y(h + \theta) d\theta = \\ &= \int_{-h}^0 \mu(\theta - h) \otimes Z(h + \theta) d\theta + \int_{-h}^0 [\mu(\theta) \otimes Y(h + \theta) - \mu(\theta - h) \otimes Z(h + \theta)] d\theta. \end{aligned}$$

Al compararla con (4.25), se deduce que

$$\begin{aligned} Q(0) &= e^{Ah} \int_{-h}^0 \mu(\theta - h) \otimes Z(h + \theta) d\theta = [e^{Ah} \otimes I_n] \int_{-h}^0 \mu(\theta - h) \otimes Z(t + \theta) d\theta, \\ Q(0) &= \int_{-h}^0 e^{Ah} \mu(\theta - h) \otimes Z(t + \theta) d\theta = \int_{-h}^0 \mu(\theta) \otimes Z(h + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

La prueba para las condiciones (4.23a) y (4.23b) se realiza de manera similar. ■

Del Lema 4.3 se deduce que hay cuatro formas equivalentes de elegir las condiciones de frontera: (4.23a) y (4.23c), (4.23a) y (4.23d), (4.23b) y (4.23c) y (4.23b) y (4.23d).

Corolario 4.1. [29]. *Si las condiciones (4.23a)-(4.23d) se satisfacen, entonces las matrices auxiliares también se pueden expresar como*

$$Q_i(\tau) = \int_{-h}^{-\tau} \mu_i(\theta) Z(\tau + h + \theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 \mu_i(\theta) Y(\tau + \theta) d\theta,$$

$$R_i(\tau) = \int_{-h}^{\tau-h} \mu_i(\theta) Y(\tau - \theta - h) d\theta + \int_{\tau-h}^0 \mu_i(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta.$$

4.4. Existencia y Unicidad

A continuación se muestra que la solución del problema de valores en la frontera (4.22) es la matriz de Lyapunov, entonces si esta solución es única también lo es la matriz de Lyapunov. Sea $W > 0$ una matriz simétrica, se dice que $U(\tau)$ es la matriz de Lyapunov del sistema (4.14) asociada a W si satisface las propiedades simétrica (4.3) y dinámica (4.4).

Lema 4.4. [29]. *Si el sistema (4.22) tiene solución $(Y(\tau), Z(\tau), Q(\tau), R(\tau))$ que satisface (4.7), (4.23), entonces la función matricial $U(\tau)$ definida como*

$$U(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} [Y(\tau) + Z^T(h - \tau) + P + \tau K_0^T W K_0], & 0 \leq \tau \leq h, \\ \frac{1}{2} [Z(\tau + h) + Y^T(-\tau) + P + \tau K_0^T W K_0], & -h \leq \tau < 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

es la matriz de Lyapunov del sistema (4.14) asociada a W .

Demostración. Para probar este lema se debe mostrar que si la matriz (4.26) satisface las propiedades simétrica (4.3) y dinámica (4.4), entonces es una matriz de Lyapunov del sistema (4.14).

Tomando $\tau \in [-h, 0)$ de (4.26), se hace $\tau = -\theta$ con $\theta > 0$, entonces se obtiene

$$U(-\theta) = \frac{1}{2} [Z(-\theta + h) + Y^T(\theta) + P - \theta K_0^T W K_0],$$

$$U(-\theta) = \frac{1}{2} [Z^T(-\theta + h) + Y(\theta) - P - \theta K_0^T W K_0]^T.$$

Sumando y restando $P + \theta K_0^T W K_0$,

$$U(-\theta) = \frac{1}{2} [Z^T(-\theta + h) + Y(\theta) + P + \theta K_0^T W K_0 - P - \theta K_0^T W K_0 - P - \theta K_0^T W K_0]^T,$$

agrupando términos,

$$U(-\theta) = \frac{1}{2} [Y(\theta) + Z^T(-\theta + h) + P + \theta K_0^T W K_0]^T + \frac{1}{2} [-P - \theta K_0^T W K_0 - P - \theta K_0^T W K_0]^T.$$

Por (4.26) la ecuación anterior se reduce a

$$U(-\theta) = U^T(\theta) + [-P - \theta K_0^T W K_0]^T,$$

por lo que

$$U(-\theta) = U^T(\theta) + P - \theta K_0^T W K_0,$$

se concluye que (4.26) satisface la propiedad simétrica (4.3).

Para la probar la propiedad dinámica se toma $\tau \in [0, h]$ y se sustituye (4.26) en (4.4), de manera que

$$U(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-h}^0 Y(\tau + \theta) F(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{-h}^0 [Z^T(h - \tau - \theta) + P + (\tau + \theta) K_0^T W K_0] F(\theta) d\theta.$$

Usando la propiedad simétrica (4.3) en $Z^T(h - \tau - \theta)$, se obtiene

$$Z^T(h - \tau - \theta) = Y^T(h - \tau - \theta - h) = Y(\tau + \theta) - P - (\tau + \theta) K_0^T W K_0,$$

por lo tanto

$$U(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-h}^0 Y(\tau + \theta) F(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{-h}^0 Y(\tau + \theta) F(\theta) d\theta,$$

$$U(\tau) = \int_{-h}^0 Y(\tau + \theta) F(\theta) d\theta.$$

Expresando el lado derecho de la ecuación anterior en las variables originales se recupera la propiedad dinámica. Por lo que se concluye que (4.26) es una matriz de Lyapunov del sistema (4.14) asociada a W . ■

Teorema 4.1. [29]. *Si el sistema (4.22) admite una solución única $(Y(\tau), Z(\tau), Q(\tau), R(\tau))$ que satisface (4.7), (4.23), entonces, la matriz $U(\tau)$, definida como*

$$U(\tau) = \begin{cases} Y(\tau), & 0 \leq \tau \leq h, \\ Y^T(-\tau) + P + \tau K_0^T W K_0, & -h \leq \tau < 0, \end{cases}$$

es la única matriz de Lyapunov del sistema (4.14) asociada a W .

Demostración. Se introducen las funciones

$$\tilde{Y}(\tau) = Z^T(h - \tau) + P + \tau K_0^T W K_0, \quad (4.27)$$

$$\tilde{Z}(\tau) = Y^T(h - \tau) + P - (h - \tau) K_0^T W K_0, \quad (4.28)$$

$$\tilde{Q}_i(\tau) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) [Z^T(h - \tau - \theta) + P + (\tau + \theta) K_0^T W K_0] d\theta, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (4.29)$$

$$\tilde{R}_i(\tau) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) [Y^T(h - \tau + \theta) + P - (h - \tau + \theta) K_0^T W K_0] d\theta, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (4.30)$$

las cuales deben satisfacer las ecuaciones dinámicas (4.22). Nótese que las matrices \tilde{Q}_i y \tilde{R}_i alternativamente se pueden expresar como

$$\tilde{Q}_i(\tau) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) \tilde{Y}(\tau + \theta) d\theta, \quad (4.31)$$

$$\tilde{R}_i(\tau) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) \tilde{Z}(\tau - \theta) d\theta. \quad (4.32)$$

Se aplica la propiedad dinámica (4.4) a (4.27), de manera que

$$\tilde{Y}(\tau) = \int_{-h}^0 [Y^T(h - \tau - \theta - h) + P + (\tau + \theta) K_0^T W K_0] F(\theta) d\theta.$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \tau + \theta$ y derivando respecto de τ , resulta

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Y}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{\tau-h}^{\tau} [Y^T(h - \xi - h) + P + \xi K_0^T W K_0] F(\xi - \tau) d\xi,$$

usando la derivada bajo el signo de la integral,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tilde{Y}(\tau) &= [Y^T(h - \tau - h) + P + \tau K_0^T W K_0] F(0) \\ &\quad - [Y^T(h - \tau + h - h) + P + (\tau - h) K_0^T W K_0] F(-h) \\ &\quad + \int_{\tau-h}^{\tau} [Y^T(h - \xi - h) + P + \xi K_0^T W K_0] \frac{\partial}{\partial \tau} F(\xi - \tau) d\xi. \end{aligned}$$

Por (4.27), (4.28) y (4.5), la expresión anterior se reduce a

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Y}(\tau) = \tilde{Y}(\tau) F(0) - \tilde{Z}(\tau) F(-h) + \int_{\tau-h}^{\tau} [Z^T(h - \xi) + P + \xi K_0^T W K_0] \frac{\partial}{\partial \tau} F(\xi - \tau) d\xi,$$

sustituyendo (4.27),

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Y}(\tau) = \tilde{Y}(\tau) F(0) - \tilde{Z}(\tau) F(-h) + \int_{\tau-h}^{\tau} [\tilde{Y}(\xi)] \frac{\partial}{\partial \tau} F(\xi - \tau) d\xi.$$

Utilizando la igualdad (4.8) y realizando el cambio de variable $\theta = \xi - \tau$, se reescribe

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Y}(\tau) = \tilde{Y}(\tau) F(0) - \tilde{Z}(\tau) F(-h) - \int_{-h}^0 [\tilde{Y}(\tau + \theta)] \frac{\partial}{\partial \theta} F(\theta) d\theta,$$

por (4.15), resulta

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Y}(\tau) = \tilde{Y}(\tau) F(0) - \tilde{Z}(\tau) F(-h) - \sum_{i=1}^k \int_{-h}^0 [\tilde{Y}(\tau + \theta)] \mu_i(\theta) B_i d\theta.$$

Sustituyendo (4.31), la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Y}(\tau) = \tilde{Y}(\tau) F(0) - \tilde{Z}(\tau) F(-h) - \sum_{i=1}^k \tilde{Q}_i(\tau) B_i,$$

que es (4.22a).

Por otro lado, se expresa (4.10) en términos de las variables auxiliares (4.5), de manera que

$$Z(\tau) = \int_{-h}^0 F^T(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta - (\tau - h) W K_0 + \int_{-h}^0 F^T(\theta) \theta d\theta K_0^T W K_0 - K_0^{-T} P, \quad (4.33)$$

cuya derivada es

$$\frac{d}{d\tau} Z(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{-h}^0 F^T(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta - W K_0.$$

Sustituyendo (4.28) en la ecuación anterior, resulta

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Z}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{-h}^0 F^T(\theta) [Y^T(h - \tau + \theta) + P - (h - \tau + \theta) K_0^T W K_0] d\theta - W K_0.$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \tau - h - \theta$, se obtiene

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Z}(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{\tau-h} F^T(\tau - h - \xi) [Y^T(h - \xi - h) + P + \xi K_0^T W K_0] d\xi - W K_0,$$

realizando la derivada de la integral,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tilde{Z}(\tau) &= -F^T(0) [Y^T(-\tau + h) + P + (\tau - h) K_0^T W K_0] \\ &\quad + F^T(-h) [Y^T(-\tau) + P + \tau K_0^T W K_0] \\ &\quad - \int_{\tau}^{\tau-h} \frac{\partial}{\partial \tau} F^T(\tau - h - \xi) [Y^T(h - \xi - h) + P + \xi K_0^T W K_0] d\xi - W K_0, \end{aligned}$$

por (4.27), (4.28) se reescribe de la siguiente manera

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Z}(\tau) = F^T(-h) \tilde{Y}(\tau) - F^T(0) \tilde{Z}(\tau) - \int_{\tau}^{\tau-h} \frac{\partial}{\partial \tau} F^T(\tau - h - \xi) [\tilde{Z}(\xi + h)] d\xi - W K_0.$$

Usando la igualdad (4.11) y haciendo el cambio de variable $\theta = \tau - h - \xi$, resulta

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Z}(\tau) = F^T(-h) \tilde{Y}(\tau) - F^T(0) \tilde{Z}(\tau) + \int_{-h}^0 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} F^T(\theta) \right] [\tilde{Z}(\tau - \theta)] d\theta - W K_0,$$

sustituyendo (4.15), se obtiene

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Z}(\tau) = F^T(-h) \tilde{Y}(\tau) - F^T(0) \tilde{Z}(\tau) + \sum_{i=1}^k \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) B_i^T [\tilde{Z}(\tau - \theta)] d\theta - W K_0.$$

Por (4.32), la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Z}(\tau) = F^T(-h) \tilde{Y}(\tau) - F^T(0) \tilde{Z}(\tau) + \sum_{i=1}^k A_i^T \tilde{R}_i(\tau) - WK_0,$$

que es (4.22b).

Para la dinámica de las matrices auxiliares, se parte de (4.29), se realiza el cambio de variable $\xi = \tau + \theta$ y se deriva respecto a τ ,

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Q}_i(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{\tau-h}^{\tau} \mu_i(\xi - \tau) [Y^T(h - \xi - h) + P + \xi K_0^T W K_0] d\xi,$$

de manera que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tilde{Q}_i(\tau) &= \mu_i(0) [Y^T(h - \tau - h) + P + \tau K_0^T W K_0] \\ &\quad - \mu_i(-h) [Y^T(h - \tau + h - h) + P + (\tau - h) K_0^T W K_0] \\ &\quad + \int_{\tau-h}^{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \mu_i(\xi - \tau) \right] [Y^T(h - \xi - h) + P + \xi K_0^T W K_0] d\xi. \end{aligned}$$

Por (4.27), (4.28) y de la igualdad (4.24), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tilde{Q}_i(\tau) &= \mu_i(0) \tilde{Y}(\tau) - \mu_i(-h) \tilde{Z}(\tau) \\ &\quad - \int_{\tau-h}^{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \mu_i(\xi - \tau) \right] [Z^T(h - \xi) + P + \xi K_0^T W K_0] d\xi, \end{aligned}$$

usando (4.27), se puede reescribir como

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Q}_i(\tau) = \mu_i(0) \tilde{Y}(\tau) - \mu_i(-h) \tilde{Z}(\tau) - \int_{\tau-h}^{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \mu_i(\xi - \tau) \right] [\tilde{Y}(\xi)] d\xi.$$

Realizando el cambio de variable $\theta = \xi - \tau$,

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Q}_i(\tau) = \mu_i(0) \tilde{Y}(\tau) - \mu_i(-h) \tilde{Z}(\tau) - \int_{-h}^0 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \mu_i(\theta) \right] [\tilde{Y}(\tau + \theta)] d\xi,$$

se sustituye (4.20), tal que

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Q}_i(\tau) = \mu_i(0) \tilde{Y}(\tau) - \mu_i(-h) \tilde{Z}(\tau) - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \int_{-h}^0 \mu_j(\theta) \tilde{Y}(\tau + \theta) d\xi. \quad (4.34)$$

Por (4.31), la ecuación (4.34) se reescribe como

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{Q}_i(\tau) = \mu_i(0) \tilde{Y}(\tau) - \mu_i(-h) \tilde{Z}(\tau) - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \tilde{Q}_j(\tau),$$

la cual es (4.22c).

Procediendo de forma similar para (4.30), se hace el cambio de variable $\xi = \tau - h - \theta$ y se deriva respecto a τ ,

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{R}_i(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{\tau-h} \mu_i(\tau - h - \xi) [Y^T(h - \xi - h) + P + \xi K_0^T W K_0] d\xi,$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tilde{R}_i(\tau) = & -\mu_i(0) [Y^T(h - \tau + h - h) + P + (\tau - h) K_0^T W K_0] \\ & + \mu_i(-h) [Y^T(h - \tau - h) + P + \tau K_0^T W K_0] \\ & - \int_{\tau}^{\tau-h} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \mu_i(\tau - h - \xi) \right] [Y^T(h - \xi - h) + P + \xi K_0^T W K_0] d\xi. \end{aligned}$$

Por (4.27), (4.28) y usando la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mu_i(\tau - h - \xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \mu_i(\tau - h - \xi),$$

se obtiene

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{R}_i(\tau) = -\mu_i(0) \tilde{Z}(\tau) + \mu_i(-h) \tilde{Y}(\tau) + \int_{\tau}^{\tau-h} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \mu_i(\tau - h - \xi) \right] [\tilde{Z}(\xi + h)] d\xi.$$

Realizando el cambio de variable $\theta = \tau - h - \xi$,

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{R}_i(\tau) = -\mu_i(0) \tilde{Z}(\tau) + \mu_i(-h) \tilde{Y}(\tau) + \int_{-h}^0 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \mu_i(\theta) \right] [\tilde{Z}(\tau - \theta)] d\theta.$$

Se sustituye (4.20), tal que

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{R}_i(\tau) = -\mu_i(0) \tilde{Z}(\tau) + \mu_i(-h) \tilde{Y}(\tau) + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \int_{-h}^0 \mu_j(\theta) \tilde{Z}(\tau - \theta) d\theta. \quad (4.35)$$

Por (4.32), la ecuación (4.35) es igual a

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{R}_i(\tau) = -\mu_i(0) \tilde{Z}(\tau) + \mu_i(-h) \tilde{Y}(\tau) + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \tilde{R}_j(\tau),$$

que es (4.22d).

Ya se ha probado que las matrices auxiliares $(\tilde{Y}(\tau), \tilde{Z}(\tau), \tilde{Q}(\tau), \tilde{R}(\tau))$ satisfacen el sistema de ecuaciones (4.22). Ahora se verifica que también cumplen las condiciones de frontera (4.7) y (4.23). De (4.27) y (4.28), se tiene

$$\tilde{Y}(0) - \tilde{Z}(h) = [Z^T(h) + P - Y^T(0) - P] = [Z^T(h) - Y^T(0)] = [Y^T(h - h) - Y^T(0)] = 0_n,$$

de donde se observa que se cumple la condición (4.7a).

Aplicando la propiedad dinámica (4.4) a (4.27) y evaluando en $\tau = 0$, se obtiene

$$\tilde{Y}(0) = \int_{-h}^0 [U^T (h - h - \xi) + P + \xi K_0^T W K_0] F(\xi) d\xi.$$

Realizando el cambio de variable $\theta = h + \xi$,

$$\tilde{Y}(0) = \int_0^h [U^T (h - \theta) + P + (\theta - h) K_0^T W K_0] F(\theta - h) d\theta,$$

que se reduce a

$$\tilde{Y}(0) = \int_0^h \tilde{Z}(\theta) F(\theta - h) d\theta.$$

Lo que prueba que cumple la condición de frontera (4.7b).

Para verificar las condiciones (4.23a)-(4.23d), primero se evalúa (4.29) en $\tau = 0$ y $\tau = h$,

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i(0) &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) [Y^T (h - \theta - h) + P + \theta K_0^T W K_0] d\theta, \\ \tilde{Q}_i(h) &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) [Y^T (h - h - \theta - h) + P + (h + \theta) K_0^T W K_0] d\theta. \end{aligned}$$

Usando (4.27) y (4.28) las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i(0) &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) \tilde{Z}(h + \theta) d\theta, \\ \tilde{Q}_i(h) &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) \tilde{Y}(h + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Las cuales son (4.23a) y (4.23b), respectivamente. Ahora se evalúa (4.30) en $\tau = 0$ y $\tau = h$,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_i(0) &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) [Y^T (h + \theta) + P - (h + \theta) K_0^T W K_0] d\theta, \\ \tilde{R}_i(h) &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) [Y^T (h - h + \theta) + P - \theta K_0^T W K_0] d\theta. \end{aligned}$$

Por (4.27) y (4.28),

$$\begin{aligned} \tilde{R}_i(0) &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) \tilde{Z}(-\theta) d\theta, \\ \tilde{R}_i(h) &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) \tilde{Y}(-\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Que son (4.23c) y (4.23d), respectivamente. Con lo cual se concluye que

$$(Y(\tau), Z(\tau), Q(\tau), R(\tau)) = (\tilde{Y}(\tau), \tilde{Z}(\tau), \tilde{Q}(\tau), \tilde{R}(\tau)),$$

por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones (4.22) es única. ■

4.4.1. Condición de Lyapunov

En esta sección se demuestra que la matriz de Lyapunov existe si y solo si el sistema (4.14) satisface la condición de Lyapunov. A continuación se presenta un lema auxiliar para esta prueba.

Lema 4.5. [29]. Sea $(Y(\tau), Z(\tau), Q(\tau), R(\tau))$ una solución de (4.22) que satisface (4.7), (4.23), entonces para $W = 0_n$, se tiene

$$Y(\tau) = Z(h + \tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (4.36)$$

Demostración. El sistema (4.22) es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes entonces cualquiera de sus soluciones es una función analítica en \mathbb{R} por lo tanto es una función en $C^\infty(\mathbb{R})$. Si se deriva (4.22) es claro que $(Y'(\tau), Z'(\tau), Q'(\tau), R'(\tau))$ también es solución del sistema (4.22). Se verificara que las condiciones de frontera (para $W = 0_n$) se cumplen para las derivadas. Ya que $W = 0_n$, entonces por la definición de la matriz de Lyapunov (2.11),

$$Y'(0) = Z'(h).$$

De $Y(0) = Z(h)$ y (4.23a)-(4.23d), se tiene

$$\int_{-h}^0 \mu_i(\theta) \frac{d}{d\tau} Z(\tau + h + \theta) \Big|_{\tau=0} d\theta = \frac{d}{d\tau} \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(\tau + h + \theta) d\theta \Big|_{\tau=0}.$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \tau + \theta + h$ y realizando la derivada bajo el signo de la integral, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{\tau+h} \mu_i(\xi - \tau - h) Z(\xi) d\xi &= \mu_i(0) Z(\tau + h) - \mu_i(-h) Z(\tau) + \int_{\tau}^{\tau+h} \frac{\partial}{\partial \tau} \mu_i(\xi - \tau - h) Z(\xi) d\xi \\ &= \mu_i(0) Z(\tau + h) - \mu_i(-h) Z(\tau) - \int_{\tau}^{\tau+h} \frac{\partial}{\partial \xi} \mu_i(\xi - \tau - h) Z(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

realizando el cambio de variable $\theta = \xi - \tau - h$,

$$\mu_i(0) Z(\tau + h) - \mu_i(-h) Z(\tau) - \int_{-h}^0 \frac{\partial}{\partial \theta} \mu_i(\theta) Z(\tau + h + \theta) d\theta.$$

Evaluando en $\tau = 0$, se obtiene

$$\mu_i(0) Z(h) - \mu_i(-h) Z(0) - \int_{-h}^0 \mu_i'(\theta) Z(h + \theta) d\theta,$$

de (4.7a) y (4.21),

$$\begin{aligned} \mu_i(0) Y(0) - \mu_i(-h) Z(0) - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \int_{-h}^0 \mu_j(\theta) Y(\theta) d\theta \\ = \mu_i(0) Y(0) - \mu_i(-h) Z(0) - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} Q_j(0) = Q'_i(0). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\int_{-h}^0 \mu_i(\theta) \frac{d}{d\tau} Z(\tau - \theta) \Big|_{\tau=0} d\theta = \frac{d}{d\tau} \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta \Big|_{\tau=0},$$

se hace el cambio de variable $\xi = \tau - \theta$,

$$\frac{d}{d\tau} \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta = -\frac{d}{d\tau} \int_{\tau+h}^{\tau} \mu_i(\tau - \xi) Z(\xi) d\xi,$$

con la derivada bajo el signo integral, resulta

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau} \int_{\tau+h}^{\tau} \mu_i(\theta - \xi) Z(\xi) d\xi = -\mu_i(0) Z(\tau) + \mu_i(-h) Z(\tau + h) - \int_{\tau+h}^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \mu_i(\tau - \xi) Z(\xi) d\xi \\ = -\mu_i(0) Z(\tau) + \mu_i(-h) Z(\tau + h) + \int_{\tau+h}^{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \mu_i(\tau - \xi) Z(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

realizando el cambio de variable $\theta = \tau - \xi$,

$$-\mu_i(0) Z(\tau) + \mu_i(-h) Z(\tau + h) + \int_{-h}^0 \frac{\partial}{\partial \theta} \mu_i(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta.$$

Evaluando en $\tau = 0$, el resultado es

$$-\mu_i(0) Z(0) + \mu_i(-h) Z(h) + \int_{-h}^0 \mu'_i(\theta) Z(-\theta) d\theta,$$

de (4.7a) y (4.21), se obtiene

$$\begin{aligned} -\mu_i(0) Z(0) + \mu_i(-h) Y(0) + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \int_{-h}^0 \mu_j(\theta) Z(-\theta) d\theta \\ = -\mu_i(0) Z(0) + \mu_i(-h) Y(0) + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} R_j(0) = R'_i(0). \end{aligned}$$

Lo que significa que la derivada del sistema (4.22) también satisface las condiciones de frontera (4.23a)-(4.23d). Ahora se verifica que se cumpla

$$Y''(0) - Z''(h) = 0_n.$$

Es claro que

$$\begin{aligned} & Y''(0) - Z''(h) = \\ & = Y'(0)F(0) - Z'(0)F(-h) - F^T(-h)Y'(h) + F^T(0)Z'(h) - \sum_{i=1}^k [Q'_i(0)B_i + B_i^T R'_i(h)]. \end{aligned}$$

Lo cual puede ser reescrito como

$$Z'(h)F(0) - Z'(0)F(-h) - F^T(-h)Y'(h) + F^T(0)Y'(0) - \sum_{i=1}^k [Q'_i(0)B_i + B_i^T R'_i(h)] = 0_n, \quad (4.37)$$

donde

$$\begin{aligned} Z'(h)F(0) &= \left[F^T(-h)Y(h) - F^T(0)Z(h) + \sum_{i=1}^k B_i^T R_i(h) \right] F(0), \\ Z'(0)F(-h) &= \left[F^T(-h)Y(0) - F^T(0)Z(0) + \sum_{i=1}^k B_i^T R_i(0) \right] F(-h), \\ F^T(-h)Y'(h) &= F^T(-h) \left[Y(h)F(0) - Z(h)F(-h) - \sum_{i=1}^k Q_i(h)B_i \right], \\ F^T(0)Y'(0) &= F^T(0) \left[Y(0)F(0) - Z(0)F(-h) - \sum_{i=1}^k Q_i(0)B_i \right]. \end{aligned}$$

Entonces la expresión (4.37), se reduce a

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^k Q'_i(0)B_i - \sum_{i=1}^k B_i^T R'_i(h) + \sum_{i=1}^k B_i^T R_i(h)F(0) - \sum_{i=1}^k B_i^T R_i(0)F(-h) \\ & \quad + F^T(-h) \sum_{i=1}^k Q_i(h)B_i - F^T(0) \sum_{i=1}^k Q_i(0)B_i = 0_n. \end{aligned}$$

Agrupando términos, resulta

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k [Q'_i(0) - F^T(-h)Q_i(h) + F^T(0)Q_i(0)] B_i \\ & \quad + \sum_{i=1}^k B_i^T [R'_i(h) - R_i(h)F(0) + R_i(0)F(-h)] = 0_n, \quad (4.38) \end{aligned}$$

las expresiones entre corchetes son por definición de las matrices auxiliares son:

$$\begin{aligned} Q'_i(0) - F^T(-h)Q_i(h) + F^T(0)Q_i(0) \\ = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) [Z'(h+\theta) - F^T(-h)Y(h+\theta) + F^T(0)Z(h+\theta)] d\theta, \end{aligned}$$

$$R'_i(h) - R_i(h)F(0) + R_i(0)F(-h) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) [Y'(-\theta) - Y(-\theta)F(0) + Z(-\theta)F(-h)] d\theta.$$

Además

$$Z'(h+\theta) - F^T(-h)Y(h+\theta) + F^T(0)Z(h+\theta) = \sum_{j=1}^k B_j^T R_j(h+\theta),$$

$$Y'(-\theta) - Y(-\theta)F(0) + Z(-\theta)F(-h) = - \sum_{j=1}^k Q_j(-\theta) B_j^T.$$

Ahora se debe mostrar que

$$\int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Q_j(-\theta) d\theta = \int_{-h}^0 \mu_j(\theta) R_i(h+\theta) d\theta = \mathcal{I}_{ij}.$$

Del Corolario 4.1, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Q_j(-\theta) d\theta &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) \left[\int_{-h}^{\theta} \mu_j(\xi) Z(-\theta+h+\xi) d\xi + \int_{\theta}^0 \mu_j(\xi) Y(-\theta+\xi) d\xi \right] d\theta \\ &= \int_{-h}^0 \mu_j(\xi) \left[\int_{\xi}^0 \mu_i(\theta) Z(h+\xi-\theta) d\theta + \int_{-h}^{\xi} \mu_i(\theta) Y(\xi-\theta) d\theta \right] d\xi \\ &= \int_{-h}^0 \mu_j(\xi) R_i(h+\xi) d\xi. \end{aligned}$$

por lo tanto la expresión (4.38), es igual a

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k B_j^T \mathcal{I}_{ji} B_i - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k B_i^T \mathcal{I}_{ij} B_j = 0_n.$$

Se observa que las derivadas del sistema (4.22) también satisfacen el problema de valores en la frontera cuando $W = 0_n$. Y se puede decir que se cumple

$$Y^{(\sigma)}(0) = Z^{(\sigma)}(h), \quad \sigma \geq 0. \quad \blacksquare$$

El Lema 4.5 establece que la única solución del sistema de ecuaciones (4.22) sujeto a las condiciones de frontera (4.7), (4.23) admisible, cuando $W = 0_n$, es la solución trivial.

Teorema 4.2. [23]. *El sistema (4.14) admite una matriz de Lyapunov única asociada a una matriz simétrica positiva definida W si y solo si el sistema satisface la condición de Lyapunov.*

Demostración. Suficiencia: Dada una matriz positiva definida W , del Lema 4.4, se puede determinar la matriz de Lyapunov asociada a W si existe una solución del problema de valores en la frontera (4.22) y (4.7), (4.23). Aquí se demuestra que si el sistema cumple la condición de Lyapunov, entonces el problema de valores en la frontera tiene solución única.

El sistema (4.22) es lineal e invariante en el tiempo, para determinar una solución particular se deben conocer las matrices iniciales $Y_0 = Y(0)$, $Z_0 = Z(0)$, $Q_0 = Q(0)$, $R_0 = R(0)$, estas matrices tienen un total de $2n^2(1+k)$ componentes desconocidas, las condiciones de frontera (4.7), (4.23) generan un sistema de $2n^2(1+k)$ ecuaciones lineales escalares para las $2n^2(1+k)$ componentes desconocidas de las matrices iniciales. Este sistema de ecuaciones lineales escalares admite una solución única si y solo si la única solución del sistema para $W = 0_n$ es la solución trivial.

Por contradicción se supone que existe una solución (Y_0, Z_0, Q_0, R_0) diferente de la trivial del sistema algebraico descrito anteriormente para $W = 0_n$, por lo que las matrices iniciales generan una solución no trivial $(Y(\tau), Z(\tau), Q(\tau), R(\tau))$, $\tau \in [0, h]$, para el problema de valores en la frontera (4.22) y (4.7), (4.23) con $W = 0_n$. Esta solución no trivial tiene la forma

$$\begin{aligned} Y(\tau) &= \sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} \mathcal{O}_d(\tau), & Z(\tau) &= \sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} \mathcal{P}_d(\tau), \\ Q_i(\tau) &= \sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} \mathcal{T}_{id}(\tau), & R_i(\tau) &= \sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} \mathcal{V}_{id}(\tau), \end{aligned} \tag{4.39}$$

donde $i \in [1, k]$, s_0, s_1, \dots, s_ρ son valores propios distintos y $\mathcal{O}_d(\tau)$, $\mathcal{P}_d(\tau)$, $\mathcal{T}_{id}(\tau)$ y $\mathcal{V}_{id}(\tau)$ son polinomios con coeficientes matriciales. Por la suposición de que la solución es no trivial al menos uno de los polinomios $\mathcal{O}_d(\tau)$, sin pérdida de generalidad $\mathcal{O}_0(\tau)$, es no trivial puesto que de serlo entonces $Y(\tau) \equiv 0_n$ y por la igualdad (4.36) $Z(\tau) \equiv 0_n$. Sea el polinomio $\mathcal{O}_0(\tau)$ de grado l , tal que

$$\mathcal{O}_0(\tau) = \sum_{j=0}^l \tau^j \mathcal{O}_j, \quad \mathcal{O}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathcal{O}_l \neq 0_n.$$

Además

$$Z(\tau) = Y(\tau - h) = \sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} e^{-s_d h} \mathcal{O}_d(\tau - h).$$

Se puede observar que $\mathcal{P}_d \not\equiv 0_n$ y que también es de grado l y el coeficiente líder para \mathcal{P}_0 es

$P_l = e^{-s_0 h} O_l$. Por otro lado

$$Q_i(\tau) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(\tau + \theta) d\theta = \sum_{d=0}^l e^{s_d \tau} \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) e^{s_d \theta} \mathcal{O}_d(\tau + \theta) d\theta,$$

$$R_i(\tau) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta = \sum_{d=0}^l e^{s_d \tau} \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) e^{-s_d \theta} \mathcal{P}_d(\tau - \theta) d\theta,$$

por lo tanto $\deg(\mathcal{T}_{id}) \leq l$, $\deg(\mathcal{V}_{id}) \leq l$ y los coeficientes líderes para \mathcal{T}_{i0} , \mathcal{V}_{i0} son

$$T_{il} = \int_{-h}^0 \mu_i e^{s_0 \theta} d\theta O_l, \quad V_{il} = e^{-s_0 h} \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) e^{-s_0 \theta} d\theta O_l,$$

respectivamente. Sustituyendo las expresiones (4.39) en (4.4) y (4.33) puesto que se considera $W = 0_n$, se obtiene

$$\sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} \mathcal{O}_d(\tau) = \sum_{d=0}^{\rho} \int_{-h}^0 e^{s_d(\tau+\theta)} \mathcal{O}_d(\tau + \theta) F(\theta) d\theta,$$

$$\sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} \mathcal{P}_d(\tau) = \sum_{d=0}^{\rho} \int_{-h}^0 e^{s_d(\tau-\theta)} F^T(\theta) \mathcal{P}_d(\tau - \theta) d\theta,$$

respectivamente. Estas expresiones son equivalentes a

$$\sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} \mathcal{O}_d(\tau) = \sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} \int_{-h}^0 e^{s_d \theta} \mathcal{O}_d(\tau + \theta) F(\theta) d\theta,$$

$$\sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} e^{-s_d h} \mathcal{O}_d(\tau - h) = \sum_{d=0}^{\rho} e^{s_d \tau} e^{-s_d h} \int_{-h}^0 e^{-s_d \theta} F^T(\theta) \mathcal{O}_d(\tau - h - \theta) d\theta.$$

Dado que los valores propios s_d , $d = 0, 1, \dots, \rho$ son distintos, entonces para cada d se cumple

$$\mathcal{O}_d(\tau) = \int_{-h}^0 e^{s_d \theta} \mathcal{O}_d(\tau + \theta) F(\theta) d\theta,$$

$$e^{-s_d h} \mathcal{O}_d(\tau - h) = e^{-s_d h} \int_{-h}^0 e^{-s_d \theta} F^T(\theta) \mathcal{O}_d(\tau - h - \theta) d\theta,$$

si se considera $d = 0$ y se agrupan los términos correspondientes a τ^l , las ecuaciones anteriores se convierten en

$$O_l = O_l \int_{-h}^0 F(\theta) e^{s_0 \theta} d\theta,$$

$$e^{-s_0 h} O_l = e^{-s_0 h} \int_{-h}^0 F^T(\theta) e^{-s_0 \theta} d\theta O_l,$$

equivalentemente

$$O_l \left[I_n - \int_{-h}^0 F(\theta) e^{s_0 \theta} d\theta \right] = 0_n,$$

$$\left[I_n - \int_{-h}^0 F^T(\theta) e^{-s_0 \theta} d\theta \right] e^{-s_0 h} O_l = 0_n.$$

Por el supuesto de que $O_l \neq 0_n$, se tiene

$$\det \left[I_n - \int_{-h}^0 F(\theta) e^{s_0 \theta} d\theta \right] = 0,$$

$$\det \left[I_n - \int_{-h}^0 F^T(\theta) e^{-s_0 \theta} d\theta \right] = 0.$$

Es claro que tanto s_0 como $-s_0$ son valores propios del sistema (4.14) lo que significa que no satisface la condición de Lyapunov, esto es una contradicción que prueba que la única solución con $W = 0_n$ es la solución trivial.

Necesidad: Ahora se hace la suposición de que el sistema (4.14) no satisface la condición de Lyapunov, es decir, tanto s_0 como $-s_0$ pertenecen a Λ . Entonces existen vectores no nulos $\gamma, \nu \in \mathbb{C}^n$, tales que

$$\nu^T \left[I_n - \int_{-h}^0 F(\theta) e^{s_0 \theta} d\theta \right] = 0, \quad \left[I_n - \int_{-h}^0 F(\theta) e^{-s_0 \theta} d\theta \right]^T \gamma = 0.$$

En este caso se debe mostrar que existe una solución no trivial del problema de valores en la frontera con $W = 0_n$. Para verificar esto se define

$$Y(\tau) = e^{s_0 \tau} \gamma \nu^T, \quad Z(\tau) = e^{s_0(\tau-h)} \gamma \nu^T.$$

Es evidente que $Y(\tau) = Z(\tau + h)$, por lo tanto, puesto que $W = 0_n$ del Lema 4.5,

$$Y(0) = Z(h), \quad Y'(0) = Z'(h).$$

Del Lema 4.4, la solución no trivial genera la siguiente matriz de Lyapunov no nula asociada a $W = 0_n$

$$U_0(\tau) = \frac{1}{2} [Y(\tau) + Z^T(h - \tau) + P + \tau K_0^T W K_0] = \frac{1}{2} [e^{s_0 \tau} \gamma \nu^T + e^{-s_0 \tau} \nu \gamma^T].$$

Ahora se supone que para una matriz $W > 0$ existe una $U(\tau)$. Entonces la matriz $U_0(\tau) + U(\tau)$ también es una matriz de Lyapunov asociada a W . Lo que contradice el teorema y muestra que la suposición de que el sistema no satisface la condición de Lyapunov es incorrecta. ■

4.5. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un problema de valores en la frontera para un sistema integral con un retardo y un kernel con una estructura particular, se establecieron cuatro posibles combinaciones para elegir las condiciones de frontera de las matrices auxiliares. Finalmente se demostró que la matriz de Lyapunov existe y es única siempre y cuando el sistema integral cumpla la condición de Lyapunov.

Capítulo 5

Construcción de la matriz de Lyapunov

En este capítulo se describe la construcción de la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ asociada a $W > 0$ por el método semi-analítico descrito en [23], que consiste en la solución de un sistema libre de retardo sujeto a condiciones de frontera de tipo mixto. La construcción se realiza para sistemas con cuatro tipos de kernel: Constante, exponencial, polinomial y finalmente para un caso más general que engloba a los casos anteriores.

5.1. Kernel Constante

En este caso el sistema (4.14) tiene la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 Ax(t+\theta) d\theta, \quad (5.1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces este caso se resuelve por el sistema de ecuaciones del Lema 4.1 pues al tener un kernel constante su derivada es cero y las ecuaciones (4.6a) y (4.6b) se reducen de tal forma que

$$\frac{d}{d\tau}U(\tau) = U(\tau)A - Z(\tau)A, \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{d\tau}Z(\tau) = A^T U(\tau) - A^T Z(\tau) - WK_0. \quad (5.3)$$

Las ecuaciones (5.2) y (5.3) toman la forma vectorial siguiente

$$\frac{d}{d\tau}X(\tau) = LX(\tau) + M, \quad (5.4)$$

donde

$$X(\cdot) = \begin{bmatrix} y(\cdot) \\ z(\cdot) \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} A^T \otimes I_n & -A^T \otimes I_n \\ I_n \otimes A^T & -I_n \otimes A^T \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0_{n^2 \times 1} \\ -\text{vec}(WK_0) \end{bmatrix}.$$

La solución de (5.4) es

$$X(\tau) = e^{L\tau} X(0) + \int_0^\tau e^{L(\tau-s)} ds M. \quad (5.5)$$

Las condiciones de frontera (4.7a) y (4.7b) en forma vectorial son

$$N_1 X(0) - N_2 X(h) - G \int_0^h X(\theta) d\theta = 0_{2n^2 \times 1}, \quad (5.6)$$

donde

$$N_1 = \begin{bmatrix} I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n \\ I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0_n \otimes 0_n & I_n \otimes I_n \\ 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n \\ 0_n \otimes 0_n & A^T \otimes I_n \end{bmatrix}.$$

Reemplazando la solución (5.5) en (5.6) se obtiene

$$N_1 X(0) - N_2 \left\{ e^{Lh} X(0) + \int_0^h e^{L(h-s)} ds M \right\} - G \int_0^h \left\{ e^{L\theta} X(0) + \int_0^\theta e^{L(\theta-s)} ds M \right\} d\theta = 0_{2n^2 \times 1},$$

por lo tanto las condiciones iniciales están dadas por

$$X(0) = C^{-1} D, \quad (5.7)$$

donde

$$C = N_1 - N_2 e^{Lh} - G \int_0^h e^{L\theta} d\theta,$$

$$D = N_2 \int_0^h e^{L(h-s)} ds M + G \int_0^h \int_0^\theta e^{L(\theta-s)} ds d\theta M.$$

Finalmente la matriz de Lyapunov asociada a W se determina reemplazando las condiciones iniciales (5.7) en la ecuación (5.5) y usando técnicas de desvectorización.

A continuación se muestran ejemplos donde se obtiene la matriz de Lyapunov con el método descrito.

Ejemplo 5.1. En este primer ejemplo se considera un sistema escalar de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 ax(t+\theta) d\theta,$$

donde $a = 7$ y $h = 0.5$. Se construye la matriz de Lyapunov en el intervalo $\tau \in [-h, h]$ asociada a $W = 1$, el resultado se observa en la Figura 5.1.

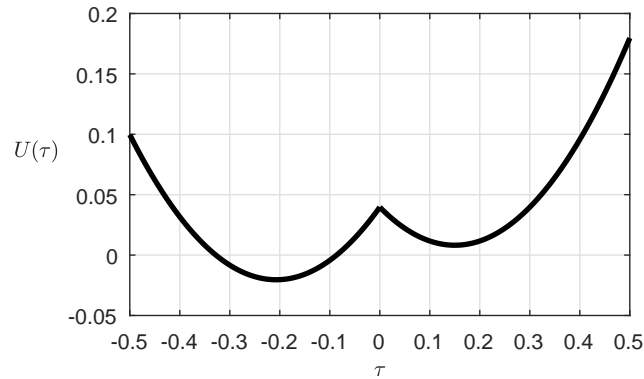


Figura 5.1. Matriz de Lyapunov del ejemplo 5.1.

Ejemplo 5.2. Ahora se construye la matriz de Lyapunov en el intervalo $[-h, h]$ para un sistema matricial, por lo tanto la matriz de Lyapunov que se construye esta asociada a $W = I_2$, el sistema es de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 Ax(t+\theta) d\theta,$$

donde $h = 1$ y

$$A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.7 \\ -0.7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.2.

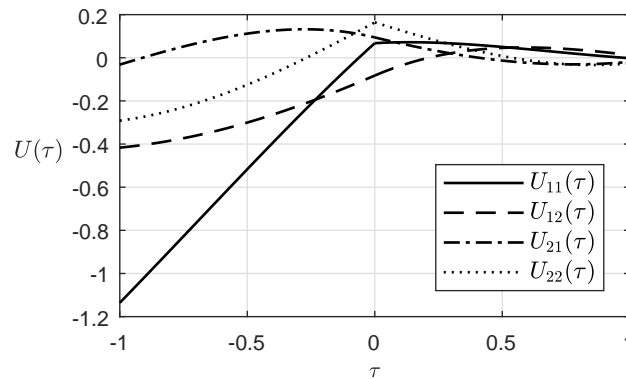


Figura 5.2. Componentes de la matriz de Lyapunov del ejemplo 5.2.

Ejemplo 5.3. Continuando con un caso de kernel constante matricial tal que $h = 1$, $W = I_2$ y

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

La construcción de la matriz resultante se muestra en la Figura 5.3.

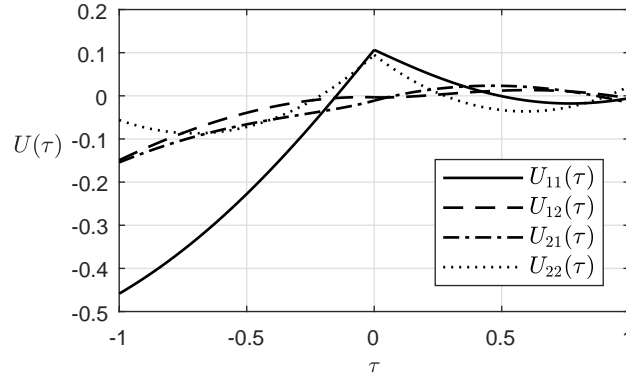


Figura 5.3. Componentes de la matriz de Lyapunov del ejemplo 5.3.

5.2. Kernel Exponencial

Ahora se considera un kernel $F(\theta) = e^{A\theta}$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$x(t) = \int_{-h}^0 e^{A\theta} x(t + \theta) d\theta, \quad (5.8)$$

entonces la ecuación (4.6a) se reduce a

$$\frac{d}{d\tau} Y(\tau) = Y(\tau) - Z(\tau) e^{-Ah} - \int_{-h}^0 Y(\tau + \theta) e^{A\theta} d\theta A.$$

Por la propiedad dinámica de la matriz de Lyapunov (4.4) la ecuación anterior se reescribe como

$$\frac{d}{d\tau} Y(\tau) = Y(\tau) [I - A] - Z(\tau) e^{-Ah}. \quad (5.9)$$

De la ecuación (4.6b), se obtiene

$$\frac{d}{d\tau} Z(\tau) = e^{-A^T h} Y(\tau) - Z(\tau) + A^T \int_{-h}^0 e^{A^T \theta} Z(\tau - \theta) d\theta - W K_0. \quad (5.10)$$

Para simplificar el término integral de (5.10), se toma $Y^T(h - \tau)$, aplicando las propiedades simétrica (2.14) y dinámica (2.18),

$$Z(\tau) - P - (\tau - h) K_0^T W K_0 = \int_{-h}^0 e^{A^T \theta} Y^T(h - \tau + \theta) d\theta,$$

aplicando la propiedad simétrica (2.14) en la ecuación anterior

$$Z(\tau) - P - (\tau - h) K_0^T W K_0 = \int_{-h}^0 e^{A^T \theta} [Z(\tau - \theta) - P - (\tau - h - \theta) K_0^T W K_0] d\theta.$$

Agrupando términos semejantes,

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \int_{-h}^0 e^{A^T \theta} Z(\tau - \theta) d\theta - \left[\int_{-h}^0 e^{A^T \theta} d\theta - I \right] P \\ &\quad + \int_{-h}^0 e^{A^T \theta} \theta d\theta K_0^T W K_0 - (\tau - h) \left[\int_{-h}^0 e^{A^T \theta} d\theta - I \right] K_0^T W K_0. \end{aligned}$$

Reemplazando la condición inicial (2.3), la ecuación anterior se reduce a

$$Z(\tau) = \int_{-h}^0 e^{A^T \theta} Z(\tau - \theta) d\theta - K_0^{-T} P + \int_{-h}^0 e^{A^T \theta} \theta d\theta K_0^T W K_0 - (\tau - h) W K_0,$$

entonces

$$\int_{-h}^0 e^{A^T \theta} Z(\tau - \theta) d\theta = Z(\tau) + K_0^{-T} P - \int_{-h}^0 e^{A^T \theta} \theta d\theta K_0^T W K_0 + (\tau - h) W K_0.$$

Usando el resultado anterior en (5.10), se obtiene

$$\frac{d}{d\tau} Z(\tau) = e^{-A^T h} Y(\tau) + [A^T - I] Z(\tau) + \omega(\tau). \quad (5.11)$$

donde

$$\omega(\tau) = A^T K_0^{-T} P - A^T \int_{-h}^0 e^{A^T \theta} \theta d\theta K_0^T W K_0 + (\tau - h) A^T W K_0 - W K_0.$$

En este caso gracias a las manipulaciones algebraicas anteriores se ha logrado mantener un sistema de 2 ecuaciones diferenciales y con esto evitar usar el sistema (4.22) con $2 + 2k$ ecuaciones.

Ahora vectorizando las ecuaciones (5.9) y (5.11) con los productos Kronecker,

$$\frac{d}{d\tau} X(\tau) = LX(\tau) + M(\tau), \quad (5.12)$$

donde

$$X(\cdot) = \begin{bmatrix} y(\cdot) \\ z(\cdot) \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} (I_n - A^T) \otimes I_n & -e^{-A^T h} \otimes I_n \\ I_n \otimes e^{-A^T h} & I_n \otimes (A^T - I_n) \end{bmatrix}, \quad M(\tau) = \begin{bmatrix} 0_{n^2 \times 1} \\ \text{vec}(\omega(\tau)) \end{bmatrix}.$$

La solución de la ecuación (5.12) esta dada por

$$X(\tau) = e^{L\tau} X(0) + \int_0^\tau e^{L(\tau-s)} M(s) ds. \quad (5.13)$$

La forma vectorizada de las condiciones de frontera (4.7a) y (4.7b) es

$$N_1 X(0) - N_2 X(h) - \int_0^h G(\theta) X(\theta) d\theta = 0_{2n^2 \times 1}, \quad (5.14)$$

donde

$$N_1 = \begin{bmatrix} I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n \\ I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0_n \otimes 0_n & I_n \otimes I_n \\ 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n \end{bmatrix}, G(\theta) = \begin{bmatrix} 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n \\ 0_n \otimes 0_n & e^{A^T(\theta-h)} \otimes I_n \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo la solución (5.13) en (5.14), se obtiene

$$N_1 X(0) - N_2 \left\{ e^{Lh} X(0) + \int_0^h e^{L(h-s)} M(s) ds \right\} - \int_0^h G(\theta) \left\{ e^{L\theta} X(0) + \int_0^\theta e^{L(\theta-s)} M(s) ds \right\} d\theta = 0_{2n^2 \times 1},$$

se concluye que las condiciones iniciales estén determinadas por

$$X(0) = C^{-1}D, \quad (5.15)$$

donde

$$C = N_1 - N_2 e^{Lh} - \int_0^h G(\theta) e^{L\theta} d\theta,$$

$$D = N_2 \int_0^h e^{L(h-s)} M(s) ds + \int_0^h G(\theta) \int_0^\theta e^{L(\theta-s)} M(s) ds d\theta.$$

La matriz de Lyapunov se determina por la solución (5.13) con las condiciones iniciales (5.15) y desvectorizando para recuperar esta matriz.

En los ejemplos que se muestran a continuación se ha construido la matriz de Lyapunov para diferentes sistemas con kernel exponencial.

Ejemplo 5.4. Se tiene un sistema escalar de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 e^{a\theta} x(t+\theta) d\theta,$$

donde $a = 2$, $W = 1$ y $h = 1$. La Figura 5.4 muestra los resultados obtenidos con el método semi-analítico descrito anteriormente.

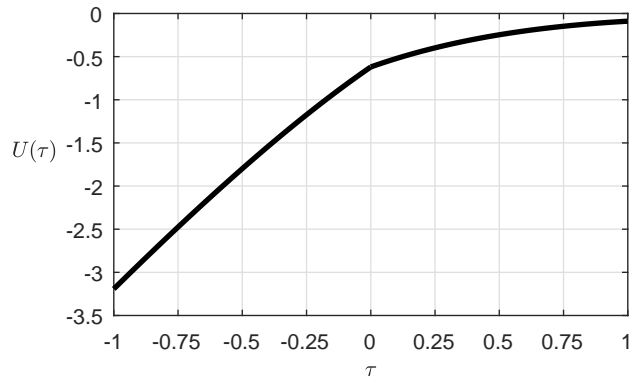


Figura 5.4. Matriz de Lyapunov del ejemplo 5.4.

Ejemplo 5.5. En este ejemplo se considera un sistema

$$x(t) = \int_{-h}^0 e^{A\theta} x(t + \theta) d\theta$$

con $h = 1$, $W = I_2$ y

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

La Figura 5.5 muestra las componentes de la matriz de Lyapunov obtenidas con el método semi-analítico.

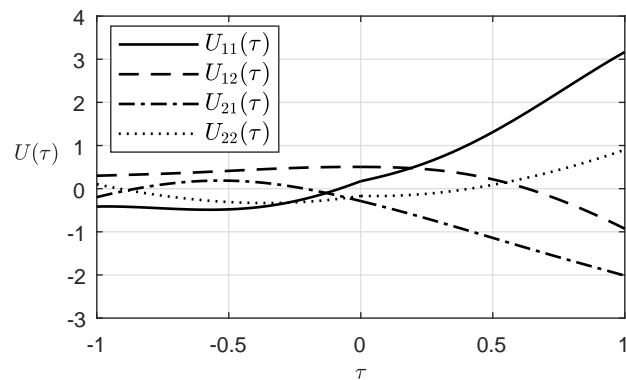


Figura 5.5. Componentes de la matriz de Lyapunov del ejemplo 5.5.

Ejemplo 5.6. En este ejemplo se tiene un sistema con kernel exponencial matricial donde $h = 0.5$, $W = I_2$ y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que la matriz A es nilpotente de grado 2 entonces la matriz exponencial se puede expresar como

$$e^{A\theta} = I_2 + A\theta,$$

por lo que en este caso la exponencial coincide con un polinomio primer grado. La Figura 5.6 muestra la matriz de Lyapunov en el intervalo $[-h, h]$.

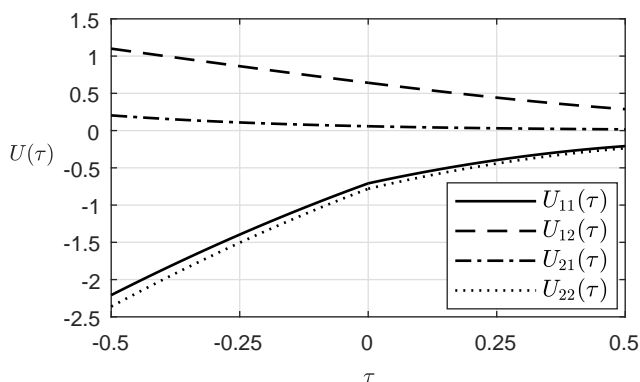


Figura 5.6. Componentes de la matriz de Lyapunov del ejemplo 5.6.

Ejemplo 5.7. Nuevamente se tiene un sistema con kernel exponencial matricial donde la matriz A es nilpotente de grado 2, tal que

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix},$$

con $W = I_2$ y retardo $h = 0.5$. La construcción de la matriz de Lyapunov genera los resultados mostrados en la Figura 5.7.

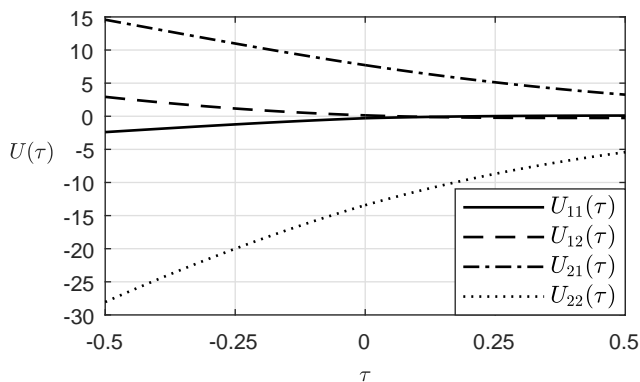


Figura 5.7. Componentes de la matriz de Lyapunov del ejemplo 5.7.

5.3. Kernel Polinomial

En este caso el sistema (4.14) tiene kernel de la forma

$$F(\theta) = \sum_{i=0}^k \theta^i A_i, \quad A_i \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

es decir,

$$x(t) = \sum_{i=0}^k \int_{-h}^0 \theta^i A_i x(t+\theta) d\theta. \quad (5.16)$$

Las ecuaciones (4.6a) y (4.6b) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} Y(\tau) &= Y(\tau) A_0 - Z(\tau) \left[\sum_{i=0}^k (-h)^i A_i \right] - \sum_{i=1}^k \int_{-h}^0 Y(\tau+\theta) [i\theta^{i-1} A_i] d\theta, \\ \frac{d}{d\tau} Z(\tau) &= \left[\sum_{i=0}^k (-h)^i A_i^T \right] Y(\tau) - A_0^T Z(\tau) + \sum_{i=1}^k \int_{-h}^0 [i\theta^{i-1} A_i^T] Z(\tau-\theta) d\theta - WK_0, \end{aligned}$$

respectivamente. Esta vez las matrices $Y(\tau+\theta)$ y $Z(\tau-\theta)$ a diferencia del caso anterior no pueden ser reducidas a través de manipulaciones algebraicas. Es por esta razón que en este caso se utiliza el sistema de ecuaciones del Lema 4.2, esto quiere decir que en este caso si se trabaja con las matrices auxiliares.

$$\begin{aligned} Q_i(\tau) &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(\tau+\theta) d\theta, \\ R_i(\tau) &= \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(\tau-\theta) d\theta, \end{aligned}$$

donde $\mu_i(\theta) = \theta^{i-1}$. Por lo tanto el sistema de ecuaciones diferenciales (4.22) se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} Y(\tau) &= Y(\tau) A_0 - Z(\tau) \left[\sum_{i=0}^k (-h)^i A_i \right] - \sum_{i=1}^k i Q_i(\tau) A_i, \\ \frac{d}{d\tau} Z(\tau) &= \left[\sum_{i=0}^k (-h)^i A_i^T \right] Y(\tau) - A_0^T Z(\tau) + \sum_{i=1}^k i A_i^T R_i(\tau) - WK_0, \\ \frac{d}{d\tau} Q_i(\tau) &= \mu_i(0) Y(\tau) - \mu_i(-h) Z(\tau) - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} Q_j(\tau), \quad i \in [1, k], \\ \frac{d}{d\tau} R_i(\tau) &= \mu_i(-h) Y(\tau) - \mu_i(0) Z(\tau) + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} R_j(\tau), \quad i \in [1, k]. \end{aligned}$$

Claramente ahora se tiene un sistema de $2 + 2k$ ecuaciones matriciales. Por otro lado, las condiciones de frontera (4.7a) y (4.7b) se mantienen, pero adicionalmente se debe elegir un

par de condiciones de frontera de (4.23a)-(4.23d). Se toma el par (4.23a), (4.23c). Usando los productos de Kronecker el sistema de ecuaciones diferenciales toma la forma

$$\dot{X}(\tau) = LX(\tau) + M, \quad (5.17)$$

donde

$$X(\cdot) = \begin{bmatrix} y(\cdot) \\ z(\cdot) \\ q_1(\cdot) \\ \vdots \\ q_k(\cdot) \\ r_1(\cdot) \\ \vdots \\ r_k(\cdot) \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0_{n^2 \times 1} \\ -\text{vec}(WK0) \\ 0_{n^2 \times 1} \\ \vdots \\ 0_{n^2 \times 1} \\ 0_{n^2 \times 1} \\ \vdots \\ 0_{n^2 \times 1} \end{bmatrix},$$

$L =$

$$\begin{bmatrix} A_0^T \otimes I_n & -\bar{A}^T \otimes I_n & -\hat{A}_1^T \otimes I_n & \cdots & -\hat{A}_k^T \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ I_n \otimes \bar{A}^T & -I_n \otimes A_0^T & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & I_n \otimes \hat{A}_1^T & \cdots & I_n \otimes \hat{A}_k^T \\ \mu_1^0 I_n \otimes I_n & -\mu_1^{-h} I_n \otimes I_n & -\alpha_{11} I_n \otimes I_n & \cdots & -\alpha_{1k} I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_k^0 I_n \otimes I_n & -\mu_k^{-h} I_n \otimes I_n & -\alpha_{k1} I_n \otimes I_n & \cdots & -\alpha_{kk} I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ \mu_1^{-h} I_n \otimes I_n & -\mu_1^0 I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & \alpha_{11} I_n \otimes I_n & \cdots & \alpha_{1k} I_n \otimes I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_k^{-h} I_n \otimes I_n & -\mu_k^0 I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & \alpha_{k1} I_n \otimes I_n & \cdots & \alpha_{kk} I_n \otimes I_n \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = \sum_{i=0}^k (-h)^i A_i, \quad \hat{A}_i = iA_i, \quad \mu_i^\theta = \mu_i(\theta).$$

La solución del sistema (5.17) es

$$X(\tau) = e^{L\tau} X(0) + \int_0^\tau e^{L(\tau-s)} ds M. \quad (5.18)$$

Es claro de (5.18) que para construir la matriz de Lyapunov se necesita conocer las condiciones iniciales $X(0)$, para determinarlas se hace uso de las forma vectorizada de las condiciones de frontera, de manera que

$$\begin{aligned} N_1 X(0) - N_2 X(h) - \int_0^h G_1(\theta) X(\theta) d\theta - \int_{-h}^0 G_2(\theta) X(h+\theta) d\theta \\ - \int_{-h}^0 G_3(\theta) X(-\theta) d\theta = 0_{2n^2(k+1) \times 1}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$G_3(\theta) = \begin{bmatrix} 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ 0_n \otimes 0_n & \mu_1(\theta) I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_n \otimes 0_n & \mu_k(\theta) I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo (5.18) en (5.19), se obtiene

$$\begin{aligned} N_1 X(0) - N_2 \left\{ e^{Lh} X(0) + \int_0^h e^{L(h-s)} ds M \right\} - \int_0^h G_1(\theta) \left\{ e^{L\theta} X(0) + \int_0^\theta e^{L(\theta-s)} ds M \right\} d\theta \\ - \int_{-h}^0 G_2(\theta) \left\{ e^{L(h+\theta)} X(0) + \int_0^{h+\theta} e^{L(h+\theta-s)} ds M \right\} d\theta \\ - \int_{-h}^0 G_3(\theta) \left\{ e^{-L\theta} X(0) - \int_{-\theta}^0 e^{L(-\theta-s)} ds M \right\} d\theta = 0_{2n^2(k+1) \times 1}. \end{aligned}$$

De donde es claro que las condiciones iniciales son

$$X(0) = C^{-1}D, \quad (5.20)$$

donde

$$\begin{aligned} C &= N_1 - N_2 e^{Lh} - \int_0^h G_1(\theta) e^{L\theta} d\theta - \int_{-h}^0 G_2(\theta) e^{L(h+\theta)} d\theta - \int_{-h}^0 G_3(\theta) e^{-L\theta} d\theta, \\ D &= N_2 \int_0^h e^{L(h-s)} ds M + \int_0^h G_1(\theta) \int_0^\theta e^{L(\theta-s)} ds d\theta M \\ &\quad + \int_{-h}^0 G_2(\theta) \int_0^{h+\theta} e^{L(h+\theta-s)} ds d\theta M - \int_{-h}^0 G_3(\theta) \int_{-\theta}^0 e^{-L(\theta+s)} ds d\theta M. \end{aligned}$$

Para determinar la matriz de Lyapunov se sustituyen las condiciones iniciales determinadas con (5.20) en la solución (5.18).

De esta construcción se recupera fácilmente la del caso de kernel constante ya que se puede decir que es un polinomio de grado 0 además las matrices auxiliares se vuelven matrices nulas por lo que el sistema de $2k + 2$ ecuaciones matriciales se reduce al sistema de 2 ecuaciones matriciales del caso constante.

Ejemplo 5.8. Se construye la matriz de Lyapunov para un sistema con kernel polinomial de grado $k = 1$. El sistema es

$$x(t) = \int_{-h}^0 [a_0 + a_1\theta] x(t+\theta) d\theta,$$

donde $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ y $h = 0.8$. Se resuelve un sistema de $2k + 2$ ecuaciones, es decir, en este caso ya que $k = 1$ se resuelve un sistema de 4 ecuaciones, con lo que se obtiene la matriz de Lyapunov asociada a $W = 1$ cuyo resultado se muestra en la Figura 5.8.

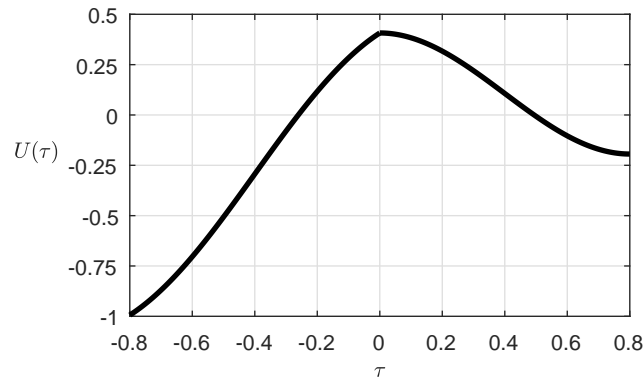


Figura 5.8. Matriz de Lyapunov del ejemplo 5.8.

Ejemplo 5.9. Ahora se tiene un sistema con kernel polinomial de segundo grado de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 [a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2] x(t + \theta) d\theta,$$

donde $a_0 = 7$, $a_1 = 12$, $a_2 = 1$ y $h = 1$. La matriz de Lyapunov descrita en la Figura 5.9 está asociada a $W = 1$.

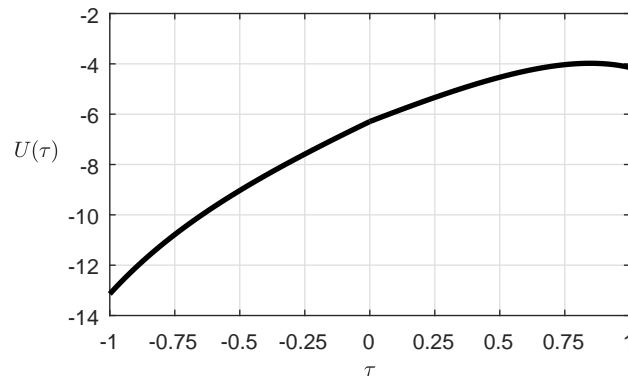


Figura 5.9. Matriz de Lyapunov del ejemplo 5.9.

Ejemplo 5.10. Considerando un sistema con kernel polinomial matricial de grado $k = 1$

$$x(t) = \int_{-h}^0 [A_0 + A_1\theta] x(t + \theta) d\theta,$$

donde $h = 0.5$ y

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es claro que debido a que la matriz A_1 es nilpotente de grado 2, entonces, este polinomio es igual a

$$A_0 + A_1\theta = e^{A_1\theta},$$

el resultado obtenido se observa en la Figura 5.10 y como es de esperar coincide con la Matriz de Lyapunov obtenida en el ejemplo 5.6.

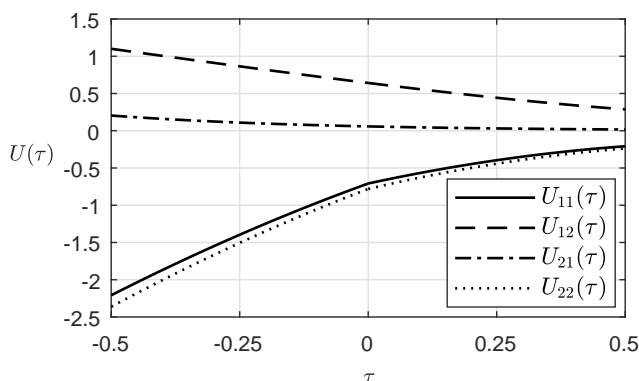


Figura 5.10. Componentes de la matriz de Lyapunov del ejemplo 5.10.

Ejemplo 5.11. Nuevamente considerando un polinomio matricial de primer grado ($k = 1$) igual que en el ejemplo anterior donde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix},$$

ya que de nuevo A_1 es nilpotente de grado 2, entonces el kernel de este sistema es igual a un kernel exponencial de la forma $e^{A_1\theta}$, la matriz de Lyapunov en la Figura 5.11 es igual a la determinada en el ejemplo 5.7 con la construcción para un kernel exponencial.

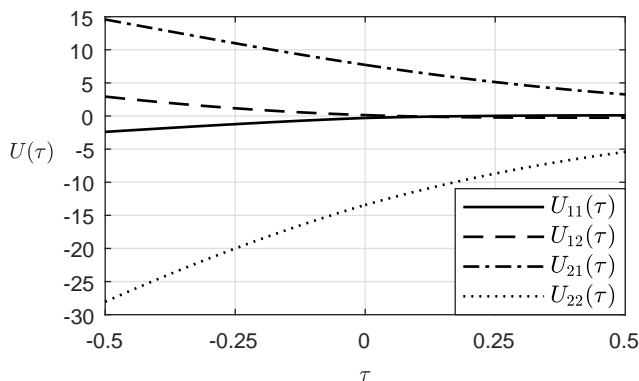


Figura 5.11. Componentes de la matriz de Lyapunov del ejemplo 5.11.

Ejemplo 5.12. Ahora se tiene un sistema con kernel polinomial matricial de segundo grado, tal que

$$x(t) = \int_{-h}^0 [A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2] x(t + \theta) d\theta,$$

donde $h = 0.8$ y

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La Figura 5.12 muestra la matriz de Lyapunov asociada a $W = I_2$ en el intervalo $[-h, h]$.

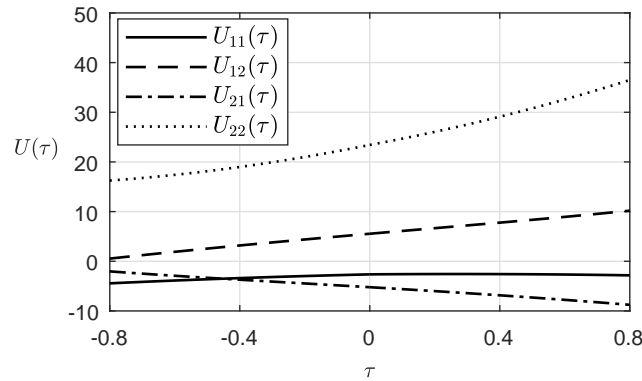


Figura 5.12. Componentes de la matriz de Lyapunov del ejemplo 5.12.

Este caso permite extender a un caso con un kernel más general con funciones exponenciales por ejemplo. La construcción para esta clase de sistemas se muestra a continuación.

5.4. Kernel más General

Para este caso se considera un kernel con una forma más general como se muestra a continuación

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^k \eta_i(\theta) A_i, \quad A_i \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

donde las $\eta_i(\theta)$ son funciones escalares. Entonces el sistema (4.14) es de la forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \int_{-h}^0 \eta_i(\theta) A_i x(t + \theta) d\theta. \quad (5.21)$$

Las ecuaciones (4.6a) y (4.6b) se reescriben como

$$\frac{d}{d\tau} Y(\tau) = Y(\tau) \left[\sum_{i=1}^k \eta_i(0) A_i \right] - Z(\tau) \left[\sum_{i=1}^k \eta_i(-h) A_i \right] - \sum_{i=1}^k \int_{-h}^0 \eta_i'(\theta) Y(\tau + \theta) A_i d\theta,$$

$$\frac{d}{d\tau}Z(\tau) = \left[\sum_{i=1}^k \eta_i(-h) A_i^T \right] Y(\tau) - \left[\sum_{i=1}^k \eta_i(0) A_i^T \right] Z(\tau) + \sum_{i=1}^k \int_{-h}^0 \eta_i'(\theta) A_i^T Z(\tau - \theta) d\theta - WK_0,$$

respectivamente. Al igual que en el caso del kernel polinomial se usa el sistema de ecuaciones del Lema 4.2 que incluye las matrices auxiliares

$$Q_i(\tau) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Y(\tau + \theta) d\theta,$$

$$R_i(\tau) = \int_{-h}^0 \mu_i(\theta) Z(\tau - \theta) d\theta,$$

donde $\mu_i(\theta) = \dot{\eta}_i(\theta)$. Por lo tanto el sistema de ecuaciones diferenciales (4.22) tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}Y(\tau) &= Y(\tau) \left[\sum_{i=1}^k \eta_i(0) A_i \right] - Z(\tau) \left[\sum_{i=1}^k \eta_i(-h) A_i \right] - \sum_{i=1}^k Q_i(\tau) A_i, \\ \frac{d}{d\tau}Z(\tau) &= \left[\sum_{i=1}^k \eta_i(-h) A_i^T \right] Y(\tau) - \left[\sum_{i=1}^k \eta_i(0) A_i^T \right] Z(\tau) + \sum_{i=1}^k A_i^T R_i(\tau) - WK_0, \\ \frac{d}{d\tau}Q_i(\tau) &= \mu_i(0) Y(\tau) - \mu_i(-h) Z(\tau) - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} Q_j(\tau), \quad i \in [1, k], \\ \frac{d}{d\tau}R_i(\tau) &= \mu_i(-h) Y(\tau) - \mu_i(0) Z(\tau) + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} R_j(\tau), \quad i \in [1, k]. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de kernel polinomial se tiene un sistema de $2+2k$ ecuaciones matriciales y las condiciones de frontera (4.7a) y (4.7b) y nuevamente se elige el par (4.23a) y (4.23c) como condiciones de frontera para las matrices auxiliares. Usando los productos de Kronecker el sistema dinámico se reescribe como

$$\dot{X}(\tau) = LX(\tau) + M, \tag{5.22}$$

donde

$$X(\cdot) = \begin{bmatrix} y(\cdot) \\ z(\cdot) \\ q_1(\cdot) \\ \vdots \\ q_k(\cdot) \\ r_1(\cdot) \\ \vdots \\ r_k(\cdot) \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0_{n^2 \times 1} \\ -\text{vec}(WK_0) \\ 0_{n^2 \times 1} \\ \vdots \\ 0_{n^2 \times 1} \\ 0_{n^2 \times 1} \\ \vdots \\ 0_{n^2 \times 1} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} \tilde{F}_0^T \otimes I_n & -\tilde{F}_{-h}^T \otimes I_n & -A_1^T \otimes I_n & \cdots & -A_k^T \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ I_n \otimes \tilde{F}_{-h}^T & -I_n \otimes \tilde{F}_0^T & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & I_n \otimes A_1^T & \cdots & I_n \otimes A_k^T \\ \mu_1^0 I_n \otimes I_n & -\mu_1^{-h} I_n \otimes I_n & -\alpha_{11} I_n \otimes I_n & \cdots & -\alpha_{1k} I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_k^0 I_n \otimes I_n & -\mu_k^{-h} I_n \otimes I_n & -\alpha_{k1} I_n \otimes I_n & \cdots & -\alpha_{kk} I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ \mu_1^{-h} I_n \otimes I_n & -\mu_1^0 I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & \alpha_{11} I_n \otimes I_n & \cdots & \alpha_{1k} I_n \otimes I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_k^{-h} I_n \otimes I_n & -\mu_k^0 I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & \alpha_{k1} I_n \otimes I_n & \cdots & \alpha_{kk} I_n \otimes I_n \end{bmatrix},$$

$$\tilde{F}_\theta = \sum_{i=1}^k \eta_i(\theta) A_i, \quad \mu_i^\theta = \mu_i(\theta).$$

La solución de (5.22) es

$$X(\tau) = e^{L\tau} X(0) + \int_0^\tau e^{L(\tau-s)} ds M. \quad (5.23)$$

Para construir la matriz de Lyapunov se necesita conocer las condiciones iniciales $X(0)$, para determinarlas se hace uso de la forma vectorizada de las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} N_1 X(0) - N_2 X(h) - \int_0^h G_1(\theta) X(\theta) d\theta - \int_{-h}^0 G_2(\theta) X(h+\theta) d\theta \\ - \int_{-h}^0 G_3(\theta) X(-\theta) d\theta = 0_{2n^2(k+1) \times 1}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde

$$N_1 = \begin{bmatrix} I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & I_n \otimes I_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & I_n \otimes I_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & I_n \otimes I_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & 0_n \otimes 0_n & 0_n \otimes 0_n & \cdots & I_n \otimes I_n \end{bmatrix},$$

Sustituyendo (5.18) en (5.19), se obtiene

$$\begin{aligned} N_1 X(0) - N_2 \left\{ e^{Lh} X(0) + \int_0^h e^{L(h-s)} ds M \right\} - \int_0^h G_1(\theta) \left\{ e^{L\theta} X(0) + \int_0^\theta e^{L(\theta-s)} ds M \right\} d\theta \\ - \int_{-h}^0 G_2(\theta) \left\{ e^{L(h+\theta)} X(0) + \int_0^{h+\theta} e^{L(h+\theta-s)} ds M \right\} d\theta \\ - \int_{-h}^0 G_3(\theta) \left\{ e^{-L\theta} X(0) - \int_{-\theta}^0 e^{L(-\theta-s)} ds M \right\} d\theta = 0_{2n^2(k+1) \times 1}. \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales son

$$X(0) = C^{-1}D, \quad (5.25)$$

donde

$$C = N_1 - N_2 e^{Lh} - \int_0^h G_1(\theta) e^{L\theta} d\theta - \int_{-h}^0 G_2(\theta) e^{L(h+\theta)} d\theta - \int_{-h}^0 G_3(\theta) e^{-L\theta} d\theta,$$

$$\begin{aligned} D = N_2 \int_0^h e^{L(h-s)} ds M + \int_0^h G_1(\theta) \int_0^\theta e^{L(\theta-s)} ds d\theta M \\ + \int_{-h}^0 G_2(\theta) \int_0^{h+\theta} e^{L(h+\theta-s)} ds d\theta M - \int_{-h}^0 G_3(\theta) \int_{-\theta}^0 e^{-L(\theta+s)} ds d\theta M. \end{aligned}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales (5.25) en la solución (5.23) se obtiene la matriz de Lyapunov del sistema (5.21).

La construcción para esta clase de sistemas engloba las construcciones anteriores pues es claro que se permite considerar sistemas con kernel constante, exponencial y además también es posible usar un kernel polinomial y esto se muestra en la construcción de los ejemplos a continuación.

Ejemplo 5.13. Sea una ecuación integral escalar de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 [\sin(\pi\theta) a_1 + \cos(\pi\theta) a_2] x(t+\theta) d\theta,$$

donde $h = 1$, $a_1 = 2$ y $a_2 = 5$. Utilizando el método descrito anteriormente se obtiene la matriz de Lyapunov asociada a $W = 1$ y mostrada en la Figura 5.13.

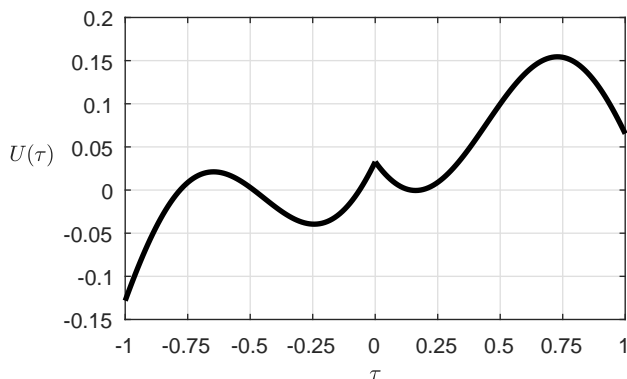


Figura 5.13. Matriz de Lyapunov del ejemplo 5.13.

Ejemplo 5.14. Puesto que ahora es posible considerar sistemas con un kernel más complejo, se ilustra la construcción de la matriz de Lyapunov para el sistema que se muestra a continuación

$$x(t) = \int_{-h}^0 [a_1 + \theta a_2 + \theta^2 a_3 + \cos(\pi\theta) a_4 + \sin(\pi\theta) a_5 + e^{-\theta} a_6] x(t + \theta) d\theta,$$

donde $h = 1$, $a_1 = a_2 = 4$, $a_3 = a_6 = 1$, $a_4 = -3$, $a_5 = 2$. La matriz de Lyapunov asociada a $W = 1$ se observa en la Figura 5.14. Es claro que la construcción de la matriz de Lyapunov de este ejemplo engloba a todas las anteriores.

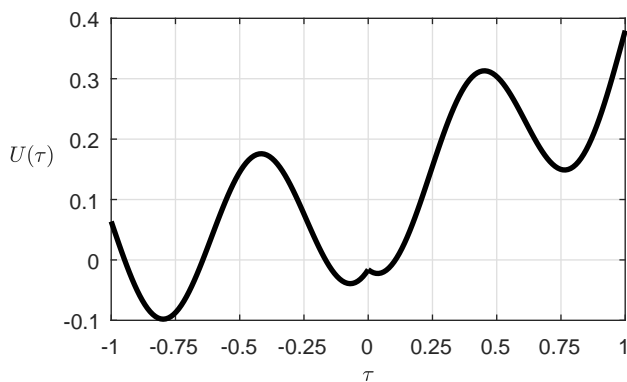


Figura 5.14. Matriz de Lyapunov del ejemplo 5.14.

Ejemplo 5.15. Ahora se considera el sistema integral matricial que se muestra a continuación

$$x(t) = \int_{-h}^0 [\sin(\pi\theta) A_1 + \cos(\pi\theta) A_2] x(t + \theta) d\theta,$$

donde $h = 1$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ -0.3 & 0 \end{bmatrix}.$$

La Figura 5.15 muestra la matriz de Lyapunov asociada a $W = I_2$ y obtenida con el método semi-analítico.

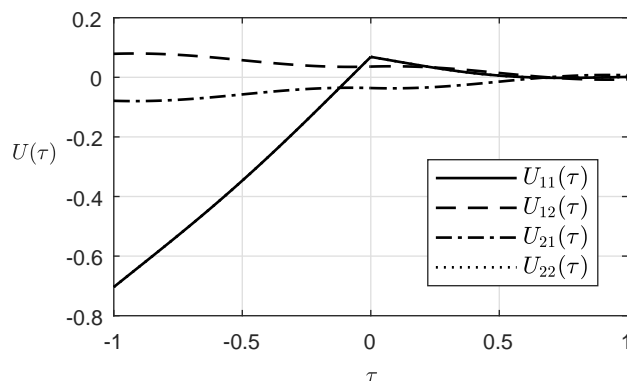


Figura 5.15. Componentes de la matriz de Lyapunov del ejemplo 5.15.

5.5. Conclusiones

En este capítulo se presentó el método semi-analítico que permite construir la matriz de Lyapunov del sistema (4.14) para cuatro tipos de funciones como kernel, este es un resultado importante pues es obligatorio construir la matriz de Lyapunov para verificar las condiciones de estabilidad.

Capítulo 6

Ejemplos

En este capítulo se muestran ejemplos utilizando los resultados obtenidos en la construcción de la matriz de Lyapunov empleando el método semi-analítico descrito en el capítulo anterior para generar mapas de estabilidad empleando las condiciones necesarias y suficientes y comparando los resultados de este enfoque con las fronteras obtenidas por el análisis frecuencial D-Particiones.

6.1. Análisis D-Particiones

En esta sección se describe el método D-Particiones utilizado en el desarrollo de los ejemplos presentados.

El análisis D-Particiones es un método gráfico frecuencial y que consiste en obtener las fronteras de estabilidad del sistema en el espacio de parámetros de interés. En todos los puntos dentro de una región formada por las fronteras, el número de raíces inestables se mantiene constante por lo que si un punto es estable/inestable entonces todos los puntos son estables/inestables. Debido a esta propiedad es posible dibujar las fronteras ya que el método detecta los cruces de las raíces del sistema por el eje imaginario [2].

- Obtener la ecuación característica en función de la variable compleja s y los parámetros del sistema p_k , $k = 1, 2, \dots$
- Establecer un par de parámetros de interés (p_i, p_k) , $i, k = 1, 2, \dots$, $i \neq k$, mientras que el resto de parámetros se fija en algún valor.
- Se evalúa la ecuación característica en $s = 0$.
- De la expresión resultante $p(0)$, se despeja a conveniencia para dejar uno de los parámetros en función del otro ya sea $p_i(p_k)$ o $p_k(p_i)$, con esta expresión se obtienen las primeras fronteras en el espacio de parámetros (p_i, p_k) .
- Se evalúa la ecuación característica en $s = j\omega$, donde $j = \sqrt{-1}$.

- Se separan las partes real e imaginaria de $p(j\omega)$.
- De las expresiones resultantes se busca dejar los parámetros en función de la frecuencia de forma $p_i(\omega)$ y $p_k(\omega)$, con estas expresiones se obtienen las fronteras restantes para completar el mapa.
- Se verifica la estabilidad de cada región formada por las fronteras, basta con tomar un punto de cada región y verificar su estabilidad, se puede determinar por ejemplo la positividad de la parte real de las raíces de la ecuación característica $p(s)$, para esta tarea se puede hacer uso de la herramienta QPmR.

Lema 6.1. *La ecuación característica de un sistema integral con retardo esta definida por*

$$p(s) = \det \left[I - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) e^{s\theta} d\theta \right]. \quad (6.1)$$

Demostración. Tomando la transformada de Laplace de

$$\mathcal{L} \left\{ x(t) - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 e^{a\theta} x(t+\theta) d\theta \right\} = 0.$$

Por definición se obtiene la transformada de Laplace del primer termino

$$\mathcal{L} \{x(t)\} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha x(t) e^{-st} dt = x(s). \quad (6.2)$$

La transformada de Laplace del segundo termino es

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) x(t+\theta) d\theta \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) x(t+\theta) d\theta e^{-st} dt,$$

cambiando el orden de las integrales

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) x(t+\theta) d\theta \right\} = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha x(t+\theta) e^{-st} dt d\theta.$$

Haciendo el cambio de variable $\delta = t + \theta$, se obtiene

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) x(t+\theta) d\theta \right\} = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha x(\delta) e^{-s(\delta-\theta)} d\delta d\theta,$$

separando la exponencial y sacando la parte que no depende de δ de la integral, la ecuación anterior se transforma en

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) x(t+\theta) d\theta \right\} = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) e^{s\theta} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha x(\delta) e^{-s\delta} d\delta d\theta.$$

Por la definición (6.2), se llega a

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) x(t+\theta) d\theta \right\} = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) e^{s\theta} d\theta x(s),$$

entonces

$$\mathcal{L} \left\{ x(t) - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) x(t+\theta) d\theta \right\} = x(s) - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) e^{s\theta} d\theta x(s),$$

que es lo mismo que

$$x(s) - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) e^{s\theta} d\theta x(s) = 0.$$

Por lo tanto

$$p(s) = \det \left[I - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 F_j(\theta) e^{s\theta} d\theta \right]. \quad \blacksquare$$

6.2. Mapas de Estabilidad

En los siguientes ejemplos se validan la construcción de la matriz de Lyapunov y las condiciones de estabilidad, se busca la región de estabilidad en un espacio de parámetros (p_1, p_2) donde p_1 y p_2 son parámetros del sistema. Para construir el mapa de estabilidad se verifican las condiciones de estabilidad en cada punto del espacio de parámetros, es decir, se construye la matriz de Lyapunov y se verifica la positividad de la matriz a bloques

$$\mathcal{K}_r = \begin{bmatrix} L(\tau_1, \tau_1) & L(\tau_1, \tau_2) & L(\tau_1, \tau_3) & \cdots & L(\tau_1, \tau_r) \\ * & L(\tau_2, \tau_2) & L(\tau_2, \tau_3) & \cdots & L(\tau_2, \tau_r) \\ * & * & L(\tau_3, \tau_3) & \cdots & L(\tau_3, \tau_r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & L(\tau_r, \tau_r) \end{bmatrix},$$

donde $r \geq 2$, los elementos $*$ se obtienen transponiendo los bloques correspondientes, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r \in (0, h]$. Se elige $\tau_i, i = \overline{1, r}$ como

$$[\tau_1 \quad \tau_2 \quad \cdots \quad \tau_r] = \left[\frac{1}{r}H \quad \frac{2}{r}H \quad \cdots \quad H \right].$$

Los resultados se muestran en las figuras correspondientes, los puntos que satisfacen las condiciones de estabilidad se marcan con un punto negro mientras que las líneas sólidas describen las fronteras obtenidas del análisis D-Particiones de la ecuación característica.

Ejemplo 6.1. Considérese el sistema escalar con kernel constante

$$x(t) = \int_{-h}^0 ax(t + \theta) d\theta,$$

cuya ecuación característica es

$$p(s) = \frac{s - a + ae^{-hs}}{s}.$$

El análisis de estabilidad para $r = 2$ se presenta en la Figura 6.1. La línea sólida es resultado del análisis D-Particiones y además representa el retardo crítico $ha = 1, a > 0$ que fue obtenido en [18]. Claramente, la región de estabilidad obtenida es correcta.

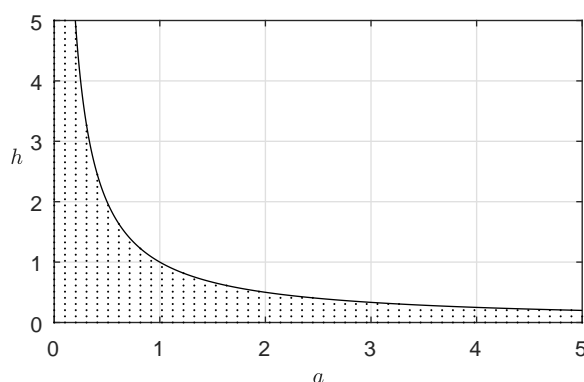


Figura 6.1. Región de estabilidad del ejemplo 6.1 con $r = 2$.

Usando el programa QPmR es posible determinar las raíces de la ecuación característica, en la Figura 6.2 se observa el lugar de las raíces del sistema en un punto dentro de la zona de estabilidad y uno fuera de ella, esta es otra forma de verificar que la regiones de estabilidad obtenidas con las condiciones de estabilidad presentadas arrojan resultados correctos.

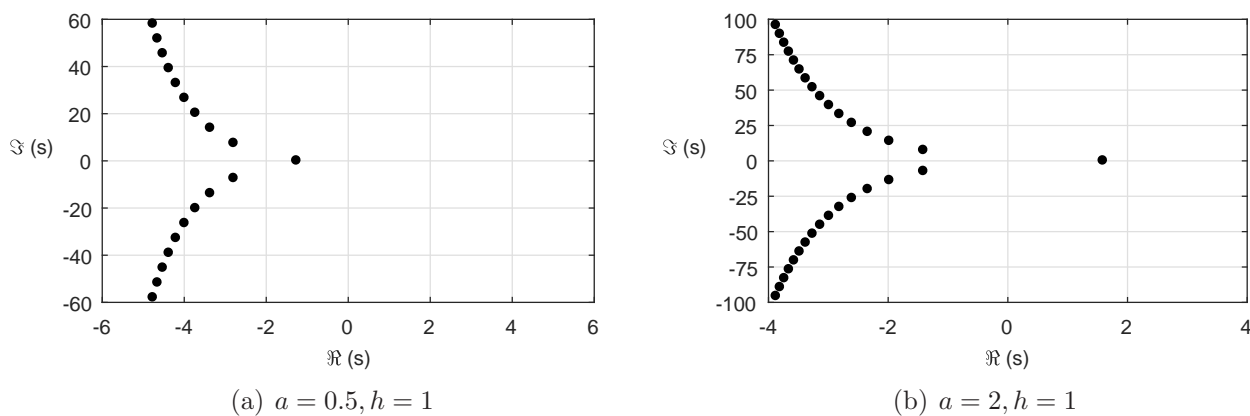


Figura 6.2. Raíces del Ejemplo 6.1 en un punto estable (a) y uno inestable (b).

Ejemplo 6.2. Se tiene el siguiente sistema con kernel exponencial

$$x(t) = \int_{-h}^0 e^{a\theta} x(t + \theta) d\theta,$$

cuya ecuación característica esta descrita por

$$p(s) = \frac{s + a + e^{-h(s+a)} - 1}{s + a}.$$

La región de estabilidad obtenida al verificar las condiciones de estabilidad para dos valores diferentes de r se muestra en la Figura 6.3 donde se puede observar la necesidad y suficiencia de estas, pues al incrementar el valor de r los puntos dispersos fuera de la zona de estabilidad se desvanecen.

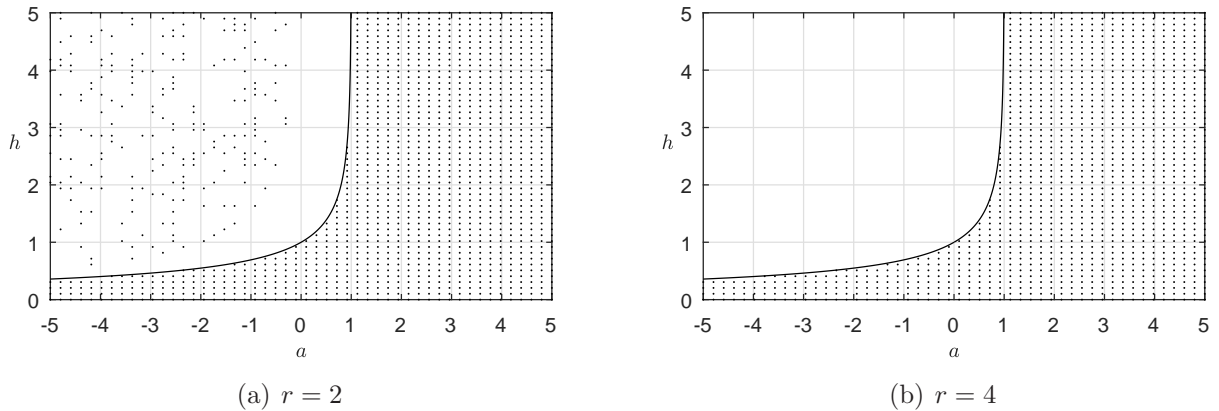


Figura 6.3. Región de estabilidad del ejemplo 6.2 con diferentes valores de r .

Ejemplo 6.3. En este ejemplo el kernel del sistema es polinomial y escalar de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 [a_0 + a_1\theta] x(t + \theta) d\theta,$$

donde $h = 1$, en esta ocasión el espacio de parámetros elegido es (a_0, a_1) . La ecuación característica de este sistema es

$$p(s) = \frac{s^2 + (a_0 e^{-sh} - a_1 h e^{-sh} - a_0) s - a_1 e^{-sh} - a_1}{s^2}.$$

Usando el método descrito para la construcción de la matriz de Lyapunov en el caso de kernel polinomial, en la Figura 6.4 se puede observar como al incrementar el valor de r las condiciones necesarias se vuelven necesarias y suficientes pues en cada incremento la región de estabilidad se aproxima más la definida por el método frecuencial.

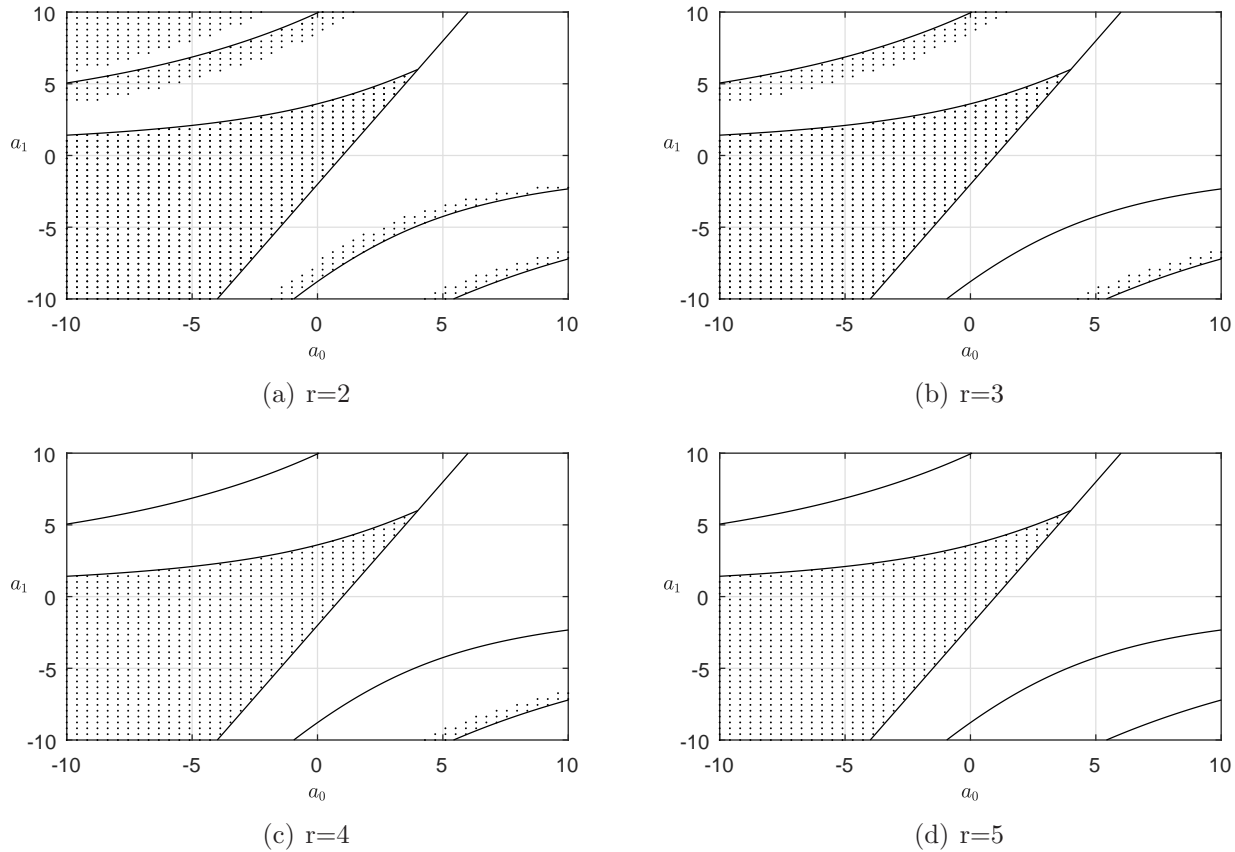


Figura 6.4. Región de estabilidad del ejemplo 6.3 al incrementar el valor de r .

Ejemplo 6.4. Sea un sistema con un kernel de funciones exponenciales de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 [\sin(\pi\theta) a_1 + \cos(\pi\theta) a_2] x(t + \theta) d\theta,$$

donde $h = 3$, el espacio de parámetros elegido es (a_1, a_2) . De (6.1) se determina que la ecuación característica es

$$p(s) = \frac{s^2 + \pi^2 - e^{-hs} (a_1 (-\pi e^{hs} + s \sin(\pi h) + \pi \cos(\pi h)) + a_2 (s e^{hs} - s \cos(\pi h) + \pi \sin(\pi h)))}{s^2 + \pi^2}.$$

La Figura 6.5 muestra la región de estabilidad obtenida con las condiciones necesarias y suficientes junto a las fronteras obtenidas por el análisis D-particiones de la ecuación característica. Al igual que en el ejemplo anterior se observa como al incrementar el valor de r la zona de estabilidad se va reduciendo hasta llegar a un valor donde la zona permanece constante, es decir se encuentra la r para la cual las condiciones se vuelven necesarias y suficientes.

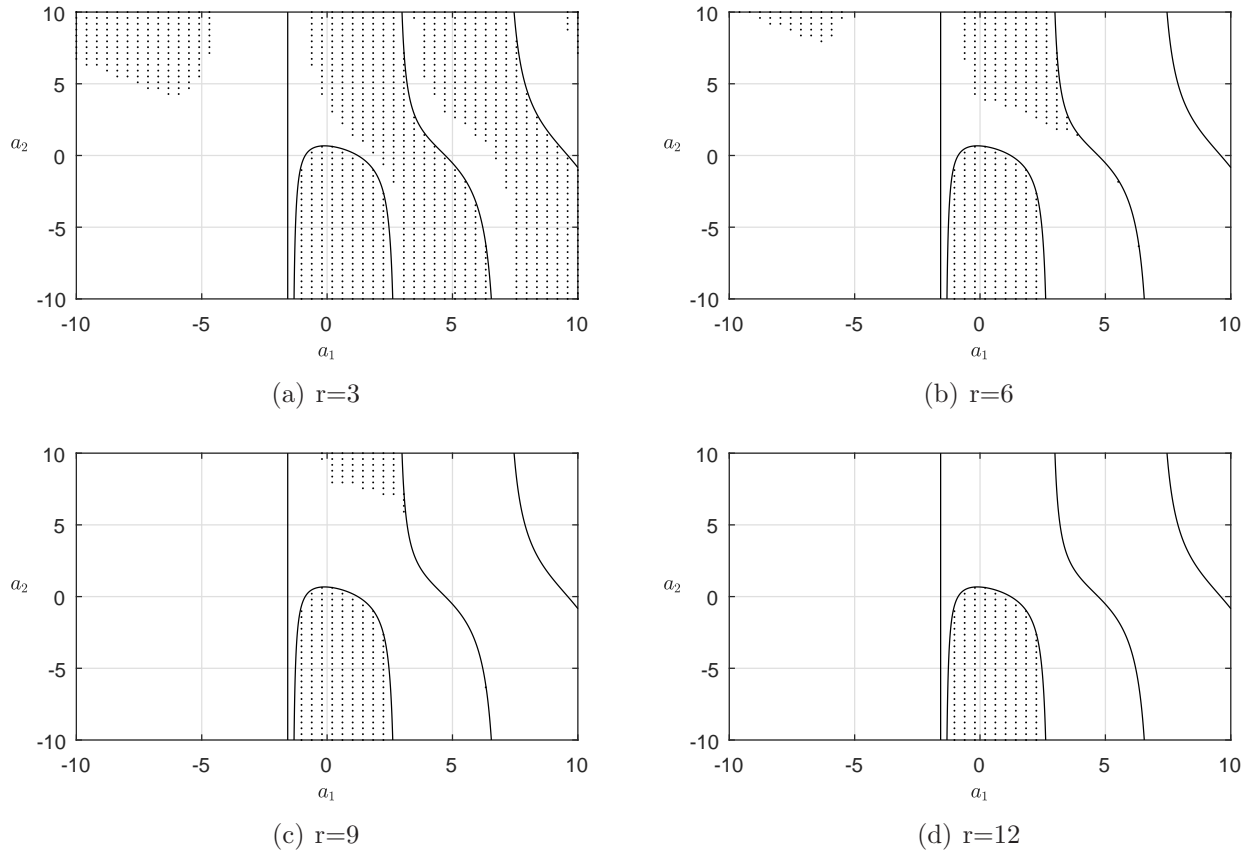


Figura 6.5. Región de estabilidad del ejemplo 6.4 con diferentes valores de r .

Ejemplo 6.5. En este caso se considera un sistema integral multivariable con kernel constante

$$x(t) = \int_{-h}^0 Ax(t+\theta) d\theta,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -13 & 2+a \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica para este sistema es

$$p(s) = \frac{s^2 + (2-a)(1-e^{-sh}) + (5-4a)(e^{-sh}-1)^2}{s^2}.$$

La Figura 6.6 muestra la región de estabilidad para $r = 2$ y sus respectivas fronteras obtenidas por el análisis D-Particiones de la ecuación característica.

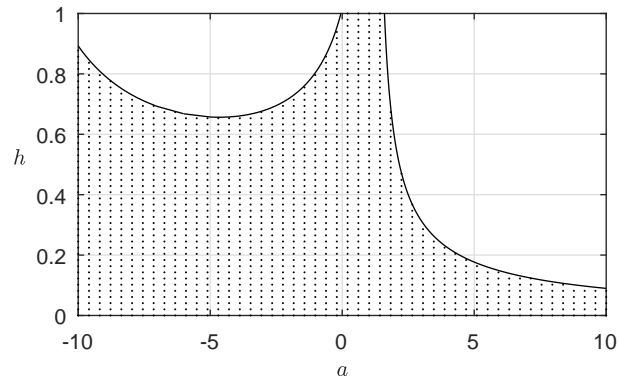


Figura 6.6. Región de estabilidad del ejemplo 6.5 con $r = 2$.

Ejemplo 6.6. En este ejemplo el sistema con kernel multivariable exponencial es

$$x(t) = \int_{-h}^0 e^{A\theta} x(t + \theta) d\theta,$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

su ecuación característica esta dada por

$$p(s) = -\frac{e^{-h(\sqrt{a}+s+2)} \left(e^{h(\sqrt{a}-s-2)} - \sqrt{a} + s + 1 \right) \left((\sqrt{a} + s + 1) e^{h(\sqrt{a}+s+2)} + 1 \right)}{a - (s + 2)^2}.$$

Los resultados de las pruebas de estabilidad con $r = 6$ y las correspondientes fronteras determinadas por el método D-Particiones se describen en la Figura 6.7.

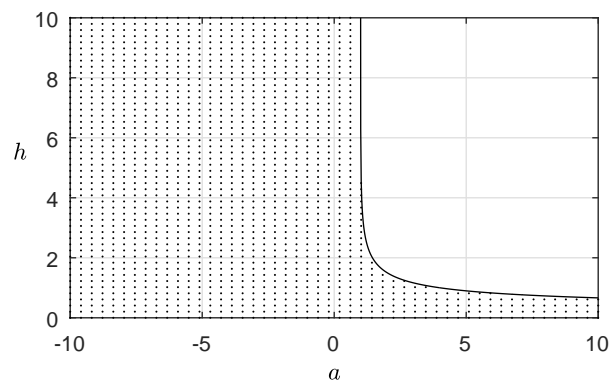


Figura 6.7. Región de estabilidad del ejemplo 6.6 con $r = 6$.

Ejemplo 6.7. Nuevamente se tiene un sistema con kernel exponencial

$$x(t) = \int_{-h}^0 e^{A\theta} x(t + \theta) d\theta,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz anterior es nilpotente de grado 2, es decir $A^2 = 0$ entonces la matriz exponencial de A se puede expresar como

$$e^{A\theta} = I + A\theta.$$

La ecuación característica del sistema es

$$p(s) = \frac{(s + e^{-sh} - 1)^2}{s^2}.$$

El retardo crítico en este sistema es $h^* = 1$ como se muestra en [18] mientras que en [21] se demuestra que es exponencialmente estable cuando $h < 1$. La Figura 6.8 muestra las fronteras y los puntos donde se cumplen las condiciones de estabilidad para $r = 6$. El resultado obtenido coincide con los resultados antes mencionados.

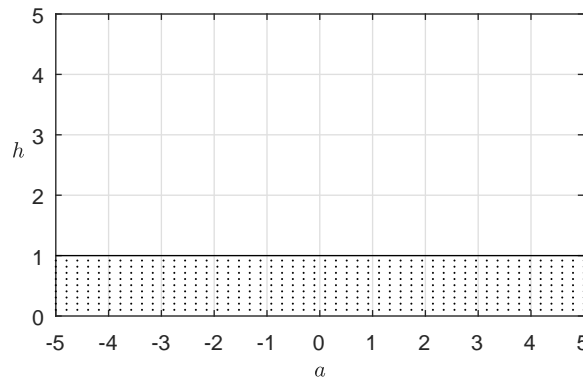


Figura 6.8. Región de estabilidad del ejemplo 6.7 con $r = 6$.

Ejemplo 6.8. Ahora se considera un sistema con kernel polinomial matricial de primer grado, tal que

$$x(t) = \int_{-h}^0 [A_0 + A_1\theta] x(t + \theta) d\theta,$$

donde $h = 2$,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica es

$$p(s) = \frac{e^{-2hs} (a (e^{hs} - 1) ((s - 1)e^{hs} + (h - 1)s + 1) + s^2 e^{hs} (b (e^{hs} - 1) + s e^{hs}))}{s^3}.$$

La región de estabilidad para $r = 8$ y las fronteras determinadas con el análisis D-Particiones se muestra en la Figura 6.9.

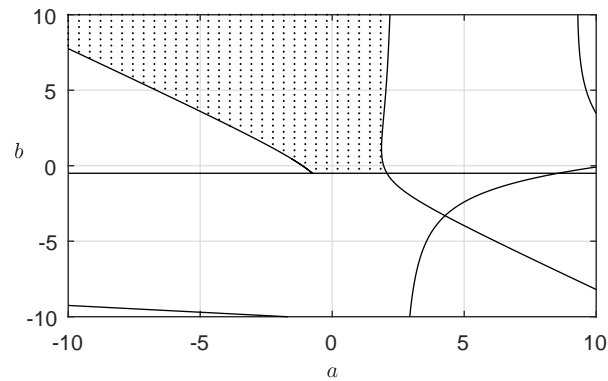


Figura 6.9. Región de estabilidad del ejemplo 6.8 con $r = 8$.

6.3. Conclusiones

Los ejemplos presentados en este capítulo permiten observar que las condiciones obtenidas son correctas, se observa que efectivamente existe un valor de r para el cual las condiciones se vuelven necesarias y suficientes pues las zonas punteadas se mantienen dentro de las zonas estables verificadas con el programa QPmR y delimitadas por las fronteras determinadas por D-Particiones.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se han presentado condiciones necesarias y suficientes dependientes de la matriz de Lyapunov para sistemas integrales con retardo. Las principales contribuciones se listan a continuación:

- Generalización de los conceptos y definiciones básicos presentados en [24]. Los conceptos de matriz fundamental, fórmula de Cauchy, matriz de Lyapunov y sus propiedades se han generalizado para un sistema integral con varios retardos no necesariamente conmensurados.
- Obtención de condiciones necesarias y suficientes. Gracias a la aproximación de funciones iniciales por medio de la matriz fundamental y al teorema de inestabilidad se presentaron las condiciones de estabilidad dependientes de la matriz de Lyapunov y que consisten en verificar la positividad de una matriz simétrica de r^2 bloques donde existe un valor de r para el cual las condiciones son necesarias y suficientes.
- Prueba de existencia y unicidad de la matriz de Lyapunov. Para sistemas integrales con un solo retardo y un kernel de funciones con una estructura particular se definen matrices auxiliares y un sistema de ecuaciones libre de retardo junto a un nuevo grupo de condiciones de frontera. Se demostró que la solución de este sistema es la matriz de Lyapunov, existe y es única.
- Construcción de la matriz de Lyapunov por el método semi-analítico. Partiendo de un sistema libre de retardo sujeto a condiciones de frontera se presenta un método para construir la matriz de Lyapunov de sistemas con un solo retardo y cuatro diferentes tipos de kernel; constante, matriz exponencial, polinomial y kernel de funciones más general.
- Ejemplos. Para validar los resultados de construcción de la matriz de Lyapunov y las condiciones de estabilidad se realizaron ejemplos para obtener zonas de estabilidad en un plano de parámetros de interés, los resultados obtenidos se comparan con los obtenidos en trabajos similares y por otros métodos, en particular D-Particiones y lugar de las raíces con el programa QPmR.

Trabajo a futuro

Algunos de los posibles caminos a seguir en un futuro incluyen:

- Extender la teoría presentada a sistemas de la forma

$$x(t) = A_0 x(t) + \int_{-h}^0 F(\theta) x(t + \theta) d\theta.$$

- Uso de la teoría de sistemas integrales con retardo en aplicaciones de control.
 - Extensión y aplicación a predictores.
 - Optimizar la construcción de la matriz de Lyapunov y de la matriz a bloques \mathcal{K}_r .
-

Referencias

- [1] E. Fridman, *Introduction to Time-Delay Systems Analysis and Control*, ser. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser, 2014.
- [2] C. C. Castillo, *Contribución al estudio de la Matriz de Lyapunov*. CINVESTAV-IPN, 2015, tesis de Doctorado.
- [3] Neimark J., “D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials,” *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 13, pp. 349–380, 1949.
- [4] Krasovskii N. N., “On the application of the second method of lyapunov for equations with time delays,” *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 20, pp. 315–327, 1956.
- [5] Razumikhin S. B., “An application of lyapunov’s method to a problem on the stability of linear time-delay systems with lag,” *Automation and Remote Control*, vol. 21, pp. 740–748, 1960.
- [6] K. Gu and S.-I. Niculescu, “Additional dynamics in transformed time-delay systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pp. 572–575, 2000.
- [7] D. Melchor-Aguilar, V. Kharitonov, and R. Lozano, “Stability conditions for integral delay systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 20, no. 1, pp. 1–15, 2010.
- [8] V. Kharitonov and M.-A. D., “On delay-dependent stability conditions,” *System and Control Letters*, vol. 40, pp. 71–76, 2000.
- [9] V. Kharitonov and D. Melchor Aguilar, “Additional dynamics for general class of time-delay systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 1060–1064, 2003.
- [10] A. Manitus and A. Olbrot, “Finite spectrum assignment problem for systems with delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, no. 4, pp. 541–553, 1979.
- [11] I. Karafyllis and M. Krstic, *Predictor Feedback for Delay Systems: Implementations and Approximations*, ser. System & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser, 2017.

-
- [12] S. Mondié, M. Dambrine, and O. Santos, “Approximation of control laws with distributed delays: A necessary condition for stability,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 34, no. 13, pp. 431 – 436, 2001.
- [13] J. Hale and S. Verduyn-Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, ser. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag New York, 1993.
- [14] S.-I. Niculescu, *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. Springer-Verlag London Berlin Heidelberg, 2001, lecture Notes in Control and Information Sciences 269.
- [15] J. Karafyllis and M. Krstic, “Stability of integral delay equations and stabilization of age-structured models,” *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, vol. 23, pp. 1667–1714, 2017.
- [16] D. Bresch-Pietri and N. Petit, “Implicit integral equations for modeling systems with a transport delay,” in *Recent Results on Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Springer International Publishing, 2016, pp. 3–21.
- [17] J. Karafyllis and M. Krstic, “On the relation of delay equations to first-order hyperbolic partial differential equations,” *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, vol. 20, no. 3, pp. 894–923, 2014.
- [18] G. Ochoa, D. M. Aguilar, and S. Mondié, “Critical parameters of integral delay systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, no. 7, pp. 1094–1105, 2015.
- [19] D. M. Aguilar, “On stability of integral delay systems,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 217, no. 7, pp. 3578–3584, 2010.
- [20] Z. Li, B. Zhou, and Z. Lin, “On exponential stability of integral delay systems,” *Automatica*, vol. 49, no. 11, pp. 3368–3376, 2013.
- [21] S. Mondié and D. M. Aguilar, “Exponential stability of integral delay systems with a class of analytic kernels,” *Automatic Control, IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 2, pp. 484–489, 2012.
- [22] H. Arismendi-Valle and D. Melchor-Aguilar, “Numerical computation of lyapunov matrices for integral delay systems,” *International Federation of Automatic Control (IFAC)*, pp. 13 884–13 889, 2017.
- [23] V. L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*, ser. Control Engineering. Birkhäuser, 2013.
- [24] S. I. D. V. George, *Necessary Stability Conditions for Integral Delay Systems in Terms of the Lyapunov Matrix*. CINVESTAV-IPN, 2018, tesis de Maestría.
-

-
- [25] A. V. Egorov, “A new necessary and sufficient stability condition for linear time-delay systems,” in *19th World Congress of IFAC*, Cape Town, South Africa, August 2014, pp. 11 018–11 023.
- [26] C. Cuvas and S. Mondié, “Necessary stability conditions for delay systems with multiple pointwise and distributed delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 7, pp. 1987–1994, 2016.
- [27] I. V. Medvedeba and A. P. Zhabko, “Constructive method of linear systems with delay stability analysis,” in *11th IFAC workshop on time delay systems*, Grenoble, France, 2013, pp. 1–6.
- [28] A. V. Egorov, “A finite necessary and sufficient stability condition for linear retarded type systems,” in *55th Conference on Decision and Control*, December 2016, pp. 3155–3160.
- [29] A. N. Aliseyko, “Lyapunov matrices for a class of systems with exponential kernel,” *Vestnik of Saint Petesburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, vol. 13, pp. 228–240, 2017, en ruso.
- [30] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press, 1991.
-