CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

"Explosión de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas"

T E S I S

Que presenta

LILIANA PERALTA HERNÁNDEZ

Para Obtener el Grado de

DOCTORA EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
CONTROL AUTOMÁTICO

Director de Tesis: Dr. Jorge Alberto León Vázquez

México, D.F. JUNIO, 2015

Agradecimientos

A mi director de tesis, el Dr. Jorge Alberto León Vázquez por brindarme su invaluable apoyo en la realización de este trabajo. Agradezco su compromiso con mi formación académica al otorgarme su experiencia, tiempo y paciencia. Él ha inculcado en mi, a través del ejemplo, la responsabilidad y seriedad en el trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico otorgado a lo largo del programa doctoral.

Al Departamento de Control Automático y al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, por proporcionarme las facilidades para la realización de esta tesis.

Al proyecto CONACyT-220303 que tiene como responsable al Dr. Jorge Alberto León Vázquez.

Resumen

Cuando los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad t \geq 0,$$

no satisfacen la condición de crecimiento lineal, la ecuación puede tener una solución que explota en tiempo finito con probabilidad positiva, es decir, las trayectorias $X_\cdot(\omega)$ de la solución pueden "tender" a $\pm\infty$ cuando el parámetro t de la ecuación se aproxima a un tiempo aleatorio finito para algunas ω, el cual es llamado tiempo de explosión. Entre las aplicaciones de este tipo de ecuaciones se encuentra el modelado de las fallas en materiales sólidos por causa de fatiga (ver [42]), donde el tiempo de explosión corresponde al tiempo de ruptura del material. El lector puede consultar [7] y las referencias que ahí se encuentran para más aplicaciones de explosión.

En esta tesis será discutida la explosión en tiempo finito de soluciones de casos particulares de ecuaciones diferenciales estocásticas con coeficientes dependientes del tiempo para las cuales la prueba de Feller para explosiones y el criterio de Osgood no pueden ser utilizados. Primero daremos una extensión del criterio de Osgood y lo aplicaremos para estudiar el tiempo de explosión de la ecuación integral

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t a(s)b(X_s^\xi)ds + g(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

donde g es una función continua tal que

$$\limsup_{t\to\infty} \left(\inf_{0\leq h\leq \tilde{\eta}} g(t+h) \right) = \infty, \quad \tilde{\eta} > 0,$$

Además, usaremos un resultado elemental de comparación para encontrar cotas superiores e inferiores de las soluciones de (1). En el caso particular en el que g es una integral de Wiener obtenemos una extensión del criterio de Osgood por medio de la ley del logaritmo iterado.

También, para la ecuación (1) discutimos la distribución del tiempo de explosión. Para el caso autónomo, es decir, $b(s,x) = b(x)$ y $\sigma(s,x) = \sigma(x)$, probamos que bajo ciertas condiciones de la solución de una ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + b(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R},$$

esta solución puede ser relacionada con la distribución del tiempo de explosión de X. Para el caso no autónomo damos una generalización del resultado señalado por Feller en [9] el cual establece que la transformada de Laplace de la distribución del tiempo de explosión es una solución acotada de cierta ecuación diferencial ordinaria. Más adelante damos un criterio de Osgood para soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas semilineales de la forma

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s)X_s dW_s, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Aquí b es un campo aleatorio no negativo, no decreciente por componentes y continuo y σ es un proceso continuo y predecible. Además presentamos una generalización de la prueba de Feller cuando $\sigma \equiv 1$ para la ecuación (2).

Finalmente, presentamos un ejemplo de explosión para una ecuación diferencial estocástica autónoma con integral dada en el sentido hacia adelante, donde la condición inicial es una variable aleatoria anticipante. Recordemos que en este caso, al ser la condición inicial una variable aleatoria, la prueba de Feller para explosiones tampoco puede ser utilizada.

Abstract

When the coefficients of the stochastic differential equation

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad t \geq 0,$$

do not satisfy the condition of linear growth, the equation can have a solution that explodes in finite time with positive probability, i.e., the paths $X_{\cdot}(\omega)$ of the solution may "tend" to $\pm\infty$ as the parameter t of the equation approximates to a finite random time for some ω, which is called the blow up time. The modeling of failures in solids due to fatigue is an example of application for this type of equations (see [42]), where the time of explosion corresponds to the failure time of the material. The reader can consult [7] and references therein for applications of blow-up.

In this thesis we will discuss the explosion in finite time of solutions of particular cases of stochastic differential equations with time-dependent coefficients as well as for the solution of a semilinear stochastic differential equation with random coefficients for which the Feller's test for explosions and Osgood criterion can not be used. First, we will give an extension of Osgood criterion and we will apply it to study the explosion time of the integral equation

$$X_t^{\xi} = \xi + \int_0^t a(s)b(X_s^{\xi})ds + g(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

where g is a continuous function such that

$$\limsup_{t\to\infty} \left(\inf_{0\leq h\leq \tilde{\eta}} g(t+h) \right) = \infty, \quad \tilde{\eta} > 0.$$

and we will use an elemental comparison result to find upper and lower bounds of the solutions of (3). In the particular case when g is a Wiener integral we will obtain an extension of the Osgood criteria by means of iterated logarithm law.

We will also discuss the distribution of the blow up time of (3). For the autonomous case, namely $b(s,x) = b(x)$ and $\sigma(s,x) = \sigma(x)$, we will prove under certain conditions of the solution of the partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + b(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R},$$

that this solution is related to the distribution of the blow up time of X_t. For the non autonomous case we will give a generalization of the result pointed out by Feller in [9]

which states that the Laplace transformation of the distribution of the explosion time is a bounded solution of a certain ordinary differential equation. Then we give an Osgood's criterion for solutions of semilinear stochastic differential equations of the form

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s)X_s dW_s, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

here b is a non negative, non decreasing by components and continuos random field and σ is a predictable an continuos process. Also we present a generalization of the called Feller's test when $\sigma \equiv 1$ for the equation (4).

Finally, we present an example of explosion for an autonomous stochastic differential equation with integral given in the forward sense, where the initial condition is an anticipating random variable. Recall that in this case the Feller's test can not be used because the initial condition is a random variable.

Índice general

Introducción

Considere el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ y un movimiento browniano $(W_t)_{t\geq 0}$ definido en él. La filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisface las condiciones usuales. Sea la ecuación diferencial estocástica (EDE).

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1.1}$$

El proceso $\{\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s : t \in [0, T]\}$ es la clásica integral estocástica de Itô la cual está definida para procesos adaptados a la información con respecto a la cual W es un movimiento browniano. Es decir, es un proceso adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

En general, las soluciones de estas ecuaciones nos dicen como un fenómeno se desarrolla en el tiempo. Si los coeficientes b y σ satisfacen la propiedad de continuidad uniforme de Lipschitz para toda $t \in [0, T]$, entonces la solución X es única y si además satisfacen la condición de crecimiento lineal entonces X no explota en tiempo finito (ver por ejemplo §2.1 o [12], [33]). Algunos autores han desarrollado criterios para la no explosión de EDEs cuyos coeficientes no satisfacen la condición de crecimiento lineal (ver, por ejemplo Teorema 4.1 [17, p. 84] o [29], [30], [44]).

En esta tesis consideraremos el caso donde los coeficientes b y σ únicamente satisfacen la condición Lipschitz local, por lo tanto X puede explotar en tiempo finito con probabilidad positiva. Para el caso en el que b y σ no dependen del tiempo, es decir el caso autónomo, las condiciones para saber si un proceso explota o no en tiempo finito han sido desarrolladas más notablemente por William Feller (ver por ejemplo [23], [10]) y a partir de esto solo pocos resultados han sido desarrollados (el lector interesado puede consultar [26]). Recientemente, el creciente interés por las aplicaciones del fenómeno de explosión de ecuaciones diferenciales estocásticas ha motivado su estudio, por ejemplo, cuando b y σ en (1.1) son funciones potencia independientes del tiempo esta ecuación puede ser usada para modelar las fallas por fractura de algunos materiales (vea [42]), fuera del contexto estocástico, es decir cuando $\sigma \equiv 0$, esto es, en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, el criterio de explosión es conocido como criterio de Osgood (usted puede consultar [34]), para el caso de ecuaciones diferenciales parciales el estudio del fenómeno de explosión se originó con los trabajos de Kaplan [22] y Fujita [14] y es actualmente un área de investigación muy fructífera, véase, por ejemplo [18], [36]. Para el caso no autónomo las pruebas de Feller y Osgood ya no son de utilidad.

Una de las aportaciones de esta tesis es dar extensiones del criterio de Osgood para algunas ecuaciones con coeficientes dependientes del tiempo. En §3.2 consideraremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= a(t)b(y(t)), \quad t > t_0, \\ y(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

la cual es más general que la ecuación en la prueba original de Osgood y usaremos un resultado de comparación elemental (ver más adelante el Lema 26) para encontrar cotas superiores e inferiores de las soluciones de la ecuación integral no homogénea $X_t = \xi + \int_0^t a(s)b(X_s)ds + g(t)$, las cuales son soluciones de la ecuación diferencial ordinaria anterior, después en §3.3 el caso en el que el ruido g es una integral de Wiener es estudiado con la finalidad de obtener una extensión de la prueba de Osgood por medio de la ley de logaritmo iterado y un resultado de comparación. En la §4.1 también damos un extensión de la prueba de Osgood para un caso más general de la ecuación diferencial (1.2), es decir, $y(t) = x_0 + \int_0^t b(s, y(s))ds$. Posteriormente en la §4.3 se obtienen resultados para determinar la explosión en tiempo finito de la solución de una ecuación diferencial estocástica semilineal de la forma $X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s)X_s dW_s$ cuyos coeficientes son aleatorios y por lo tanto las pruebas de Feller y Osgood ya no son de utilidad.

Muchos trabajos han sido desarrollados con la finalidad de proporcionar condiciones que nos permitan conocer si la ecuación (1.1) explota o no. Sorprendentemente, la distribución del tiempo de explosión rara vez ha sido estudiada debido a que no es fácil de calcular (por ejemplo, ver [6] para consultar algunos esquemas numéricos usados para aproximar el tiempo de explosión). Una manera de hacer esto es usando ecuaciones lineales ordinarias de segundo orden. En efecto Feller [9] ha señalado que la trasformada de Laplace de esta distribución es una solución acotada de alguna ecuación ordinaria relacionada. En la §3.6 de esta tesis daremos una generalización de este resultado.

Por otro lado, existen fenómenos que ocurren en la naturaleza que no son bien representados con integrandos adaptados, por ejemplo, los coeficientes de la ecuación (1.1) pueden depender de toda la información que genera W como en los mercados financieros con información privilegiada (vea, por ejemplo [25]). La integral hacia adelante (ver Definición 27) es un extensión de la integral de Itô para el caso de integrandos anticipantes y coincide con la integral estocástica con respecto a W siempre que W es una semimartingala para la filtración $\mathcal{G}$. En la §5 presentamos un ejemplo de explosión para una ecuación autónoma donde la condición inicial es anticipante, por lo tanto usamos propiedades de la integral hacia adelante para calcular la distribución del tiempo de explosión de la ecuación $Y_t = W_1 + \int_0^t Y_s^3 ds + \int_0^t Y_s^2 d^- W_s, \quad t \geq 0$.

El contenido de esta tesis está organizado como sigue: en la Sección 2 damos los conceptos utilizados en el documento y una breve discusión de algunas definiciones y resultados necesarios para este trabajo. Algunas extensiones del criterio de Osgood se dan en las secciones 3.1, 3.2, 3.3 y 4.1, nuestro teorema de comparación para ecuaciones integrales es introducido en la sección 3.2. La relación entre ecuaciones diferenciales parciales y la explosión en tiempo finito es estudiada en la sección 3.4. En la sección 4.2 aplicamos la prueba de Feller para determinar si una ecuación diferencial estocástica semilineal explota en tiempo finito y en las secciones 4.2 y 4.3 analizamos el tiempo de explosión de una ecuación semilineal con coeficientes aleatorios y los casos $b \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, $\sigma \equiv 1$ y $\sigma \in [0, \infty)$, respectivamente. Finalmente, en la sección 5.1, calculamos la distribución del tiempo de explosión de una ecuación con condición inicial anticipante.

Preliminares

La propuesta de esta sección es describir los resultados básicos que serán usados para justificar y proponer el presente trabajo. Empezaremos con algunos definiciones y resultados conocidos.

2.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Consideremos la ecuación diferencial estocástica no autónoma escrita formalmente como

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad 0 < t \leq T, \\ X_0 &= x_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La interpretación de esta ecuación es

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Aquí W es un movimiento browniano definido sobre un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ equipado con una filtración $(\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ que satisface las condiciones usuales, es decir, todos los subconjuntos de conjuntos P-nulos son $\mathcal{F}$-medibles y P-nulos; la filtración es continua por la derecha, esto es, $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$ para todo $t \geq 0$. Los coeficientes $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones medibles llamadas coeficiente de deriva y difusión, respectivamente, y $x_0 \in \mathbb{R}$ es la condición inicial. En la ecuación (2.2), la integral estocástica está definida en el sentido de Itô (vea [20]) y supondremos que el lector está familiarizado con esta definición. El proceso $X = \{X_t : t \geq 0\}$ que resuelve (2.2) es llamado proceso de Itô y sus coeficientes satisfacen ciertas condiciones de regularidad, esto es, σ pertenece a la clase de procesos tales que: i) para $t \in (0, T]$ la relación $(s, \omega) \to \sigma_s(\omega)$ definida en $(0, t] \times \Omega$ es medible respecto a la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t$, donde $\mathcal{B}_{[0,t]}$ es la σ-álgebra de Borel sobre $[0, t]$, y ii) $P\left(\int_0^T \sigma_t^2 dt < \infty\right) = 1$ se satisfacen, mientras b pertenece a la clase de procesos tales que i) y ii') $P\left(\int_0^T |b_t|dt < \infty\right) = 1$ se cumplen.

Además, consideramos a $\mathcal{F}_{t_0}$ independiente de $\sigma\{W_t - W_{t_0} : t \geq t_0\}$. Esto significa que la condición inicial x_0 es una variable aleatoria independiente de $W_t - W_{t_0}$ para $t \geq t_0$. Si x_0 es constante con probabilidad 1 la independencia de $W_t - W_{t_0}$ se mantiene.

Ahora enunciaremos sin prueba la fórmula de Itô (ver [1], [38]) la cual es una herramienta importante del cálculo estocástico. En efecto, es la versión estocástica de la regla clásica de la cadena en el cálculo diferencial ordinario.

Teorema 1 (Fórmula de Itô) Sea g una función de clase $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ (es decir, g es diferenciable sobre $[0,T]$ y dos veces diferenciable sobre $\mathbb{R}$) y X es un proceso de Itô dado por

$$dX_t = u(t)dt + v(t)dW_t, \quad 0 < t \leq T. \tag{2.3}$$

Entonces el proceso $Y_t = g(t, X_t)$ es también un proceso de Itô definido sobre $[0,T]$, (es decir, tiene una representación de la forma (2.3)) con $Y_0 = g(0, X_0)$ y,

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2, \quad 0 < t \leq T$$

donde $(dX_t)^2$ es calculada usando la siguiente convención

$\times$	dW_t	dt
dW_t	dt	0
dt	0	0

Cuadro 2.1: Regla de multiplicación

Nota 2 Recordemos que (2.3) es una expresión simbólica que representa al proceso $X_t = x_0 + \int_0^t u(s)ds + \int_0^t v(s)dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$

Ejemplo 3 La ecuación diferencial estocástica,

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{t}{2},$$

tiene la interpretación simbólica

$$dW_t^2 = dt + 2W_t dW_t.$$

Otro resultado importante del Cálculo Estocástico es la fórmula de integración por partes, la cual es anunciada acontinuación.

Teorema 4 (Fórmula de integración por partes) Sean X, Y dos procesos de Itô sobre $\mathbb{R}$. Entonces

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t \cdot dY_t, \tag{2.4}$$

donde, en el último sumando usamos la convención del Cuadro 2.1.

Existencia y unicidad de soluciones

Otra cuestión importante sobre la ecuación (2.2) es bajo que condiciones ésta tiene solución, y si es única. Como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, la existencia de la solución está relacionada a las características de sus coeficientes.

El resultado con respecto a esta cuestión se expresa a continuación sin pruebas (el lector puede consultar [1, p.105]). Para resultados más generales ver por ejemplo Itô [19], Karatzas [23], McKean [27], Øksendal [33] o Protter [38].

Teorema 5 Considere la ecuación (2.1) donde x_0 es una variable aleatoria independiente de W_t para $t \geq 0$. También suponga que las funciones $b, \sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son medibles y satisfacen las siguientes propiedades: Existen constantes $k, K > 0$ tales que,

a) Continuidad de Lipschitz. Para todo $t \in [0,T]$ y $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k|x-y|.$$

b) Restricción de crecimiento. Para todo $t \in [0,T]$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2).$$

Entonces la ecuación (2.1) tiene una única solución continua X, con probabilidad 1, esto es, si X y Y son soluciones continuas de (2.1) con la misma condición inicial x_0, entonces

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t| > 0) = 0.$$

Nota 6 La condición de Lipschitz garantiza que existe a lo más una solución. Por ejemplo, la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} dX_t &= 3X_t^{2/3} dt, t > 0, \\ X_0 &= 0, \end{aligned}$$

tiene infinitas soluciones, esto es para cada $a > 0$ la solución es

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a, \\ (t-a)^3 & \text{si } t > a. \end{cases}$$

En esta ecuación el coeficiente $b(x) = 3x^{2/3}$ no cumple la condición de Lipschitz.

Por otro lado la restrición de crecimiento garantiza que la solución de (2.1) no explota antes del tiempo final T (ver Sección 2.2). Considere la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t^2 dt, \quad t > 0, \\ X_0 &= 1, \end{aligned}$$

que tiene la solución única $X_t = 1/(1-t)$ para $0 \leq t < 1$, la cual diverge cuando $t = 1$.

Nota 7 Si las funciones b y σ están definidas sobre $[0,\infty]\times\mathbb{R}$ y si se cumplen las hipótesis del Teorema 5 sobre cada subintervalo finito $[0,T]$ de $[0,\infty)$ entonces la ecuación (2.2) tiene una única solución *global* X definida sobre $[0,\infty)$.

En el *caso autónomo* (es decir, $b(t,x) = b(x)$ y $\sigma(t,x) = \sigma(x)$) tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} dX_t =& b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad t > 0, \\ X_0 =& x_0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde el valor inicial x_0 es una variable aleatoria independiente de $W_t - W_0$ para $t \geq 0$.

Corolario 8 La ecuación (2.5) tiene exactamente una solución continua X definida sobre el intervalo $[0,\infty)$ tal que $X_0 = x_0$ si existe una constante $K > 0$ tal que, para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|.$$

La restricción de crecimiento se sigue directamente de la condición de Lipschitz global cuando fijamos y a una constante real, es decir, $y = y_0$.

Con la finalidad de incluir coeficientes más generales en la ecuación (2.2) la hipótesis de la continuidad de Lipschitz puede ser debilitada. Es suficiente pedir que los coeficientes sean localmente Lipschitz, es decir, para cada subconjunto compacto $D \subset \mathbb{R}$ existe una constante L_D tal que, si $x, y \in D$,

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L_D|x - y|.$$

Sin embargo, la condición de crecimiento lineal continúa restringiendo el uso de ciertas funciones como coeficientes. Algunas condiciones generales que han sido introducidas para reemplazar esta restricción, pueden verse en el trabajo de Has'minskiĭ [17] o el libro de Karatzas y Shreve [23].

2.2. Explosión

Como mencionamos en la Nota 6, cuando los coeficientes de la ecuación (2.2) satisfacen la restricción de crecimiento aseguramos que su solución no explota antes del tiempo final T, por lo tanto, cuando no se cumple esta condición, se dice que la solución de la ecuación puede explotar en un tiempo finito. En un sentido intuitivo, el tiempo de explosión de un proceso está definido como el primer instante en el cual este alcanza un valor infinito en un tiempo finito. Por ejemplo, la función $(1-t)^{-1}$ explota al tiempo $t = 1$. Una situación similar ocurre con la solución de la ecuación diferencial estocástica (2.5), sin embargo, el tiempo de explosión es aleatorio.

Antes de definir formalmente lo que es el tiempo de explosión, es necesario introducir el concepto de tiempo de paro.

Definición 9 Una variable aleatoria $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ es llamada *tiempo de paro* con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si para todo $t \geq 0$ el conjunto $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Ejemplo 10 El tiempo de llegada de un proceso continuo $\{X_t, t \geq 0\}$ y adaptado (i.e., X_t es $\mathcal{F}_t - medible$) a un punto a, esto es

$$\tau_a = \operatorname{ínf}\{t > 0 : X_t = a\},$$

es un tiempo de paro si la filtración satisface las condiciones usuales.

Más generalmente, el tiempo de llegada de un proceso adaptado y continuo $\{X_t, t \geq 0\}$ a un conjunto de Borel es un tiempo de paro si la filtración $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ es continua por la derecha, (ver el Teorema 4.6 en [3]).

Definición 11 Sea $\tau_m := \operatorname{ínf}\{t > 0 : |X_t| > m\}$ con $m \in \mathbb{N}$, un tiempo de paro. Nos referimos a $\tau = \operatorname{lím}_{m\to\infty} \tau_m$ como el *tiempo de explosión* de la ecuación (2.5) con $X_{\tau^-} = \pm\infty$ casi seguramente (c.s. para abreviar) sobre $\{\tau < \infty\}$ y suponemos que $X_t = X_{\tau^-}$ si $\tau \leq t < \infty$ (vea MacKean [27]). En el caso no autónomo [38, p.303] el *tiempo de explosión* $\tau = \lim\limits_{m\to\infty} \tau_m$ es un tiempo de paro tal que (2.2) tiene un solución hasta este tiempo y $\limsup\limits_{t\uparrow\tau_\xi} |X_t| = \infty$.

Nota 12 Las soluciones pueden ser consideradas hasta el tiempo de explosión, es decir, una solución *local*.

Nota 13 La fórmula de Itô permanece válida hasta el tiempo de explosión. En efecto, primero debemos fijar un entero positivo m y aplicar la fórmula de Itô al proceso parado $X_{t\wedge\tau_m} = x + \int_0^t b(s, X_s)1_{]0,\tau_m]}(s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)1_{]0,\tau_m]}(s)dW_s$ (donde $t \wedge \tau_m$ significa el mínimo entre t y τ_m), luego entonces hacemos tender $m \to \infty$ (observemos que τ es el límite de la sucesión no decreciente de variables aleatorias τ_m). Aquí usamos que $\int_0^{\tau_m\wedge t} \sigma(s, X_s)dW_s = \int_0^t \sigma(s, X_s)1_{]0,\tau_m]}(s)dW_s$ debido a que τ_m es un tiempo de paro.

Ejemplo 14 Considere la ecuación

$$dX_t = -\frac{1}{2}\exp(-2X_t)dt + \exp(-X_t)dW_t, \;\; X_{t_0} = c.$$

Los coeficientes de esta ecuación no satisfacen ninguna restricción de crecimiento lineal para $x < 0$ y por lo tanto, existe posibilidad de explosión. Aplicando el Teorema de Itô 1 se puede ver que el proceso $X_t = \log(W_t - W_{t_0} + e^c)$ es la única solución local definida hasta el tiempo de explosión τ, donde $\tau = \text{ínf}\{t > t_0 : W_t - W_{t_0} = -e^c\} > 0$.

El siguiente teorema de McKean [27, p.54] nos da condiciones de existencia y unicidad para soluciones locales de ecuaciones autónomas de la forma (2.5) con coeficientes b y σ que pertenecen a $C^1(\mathbb{R})$.

Teorema 15 Sea $b, \sigma \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces la ecuación diferencial estocástica (2.5) tiene una única solución que está definida hasta el tiempo de explosión τ con $0 \le \tau \le \infty$ y $X_{\tau^-} = \pm\infty$ sobre $\{\tau < \infty\}$.

La idea de la prueba es elegir una sucesión adecuada de funciones $\{\psi_m : m \in \mathbb{N}\}$ tal que la composición de funciones $b \circ \psi_m$ y $\sigma \circ \psi_m$ sean funciones de pendiente acotada y por lo tanto cumplan la condición de Lipschitz sobre $\mathbb{R}$; también se debe cumplir que $X_t^{m-1} = X_t^m$ sobre $[0, \tau_{m-1}]$ donde $dX_t^m = (b\circ\psi_m)(X_t^m)dt + (\sigma\circ\psi_m)(X_t^m)dW_t$, $t > 0$. En este caso es suficiente demostrar que $X_t^{m-1} = X_t^m$ para $t < \tau_{m-1}$, $X_t 1_{\{t<\tau\}}$ es adaptado y $X_t = X_t^m$ para cada $m \in \mathbb{N}$ sobre $\{t < \tau\}$, y además $X_{\tau^-} = \pm\infty$ si $\tau < \infty$.

Nota 16 Como una consecuencia de la prueba del teorema anterior, el resultado permanece válido si los coeficientes de la ecuación (2.5) satisfacen la condición de Lipschitz local.

En las siguientes dos secciones, presentamos criterios para la explosión de ecuaciones diferenciales estocásticas autónomas que serán útiles para nuestro trabajo.

Prueba de Feller

Condiciones para la explosión en tiempo finito con probabilidad 1 de la solución X de (2.5) han sido desarrolladas, más notablemente por William Feller. La prueba de explosión de Feller establece las condiciones que deben cumplir los coeficientes b y σ de la ecuación. Primero definiremos las siguientes funciones. Sean

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_c^x \exp\left(-2\int_c^s \frac{b(r)dr}{\sigma^2(r)}\right) ds \quad \text{y} \\ v(x) &= \int_c^x p'(y)\int_c^y \frac{2dz}{p'(z)\sigma^2(z)} dy. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Donde $c \in (\ell, r)$ es un punto arbitrario pero fijo y ℓ y r serán definidos en el siguiente resultado.

Teorema 17 (Prueba de Feller) Suponga que $b, \sigma : (\ell, r) \to \mathbb{R}$ con $-\infty \leq \ell < r \leq \infty$ son funciones acotadas sobre intervalos compactos de (ℓ, r) cuyos extremos no están en $\{\ell, r\}$ y $\sigma^2(x) > 0$ $\forall x \in (\ell, r)$. El tiempo de explosión τ de la solución X del proceso (2.5) es finita con probabilidad 1 si y sólo si una de las siguientes condiciones se cumple:

i) $v(r) < \infty$ y $v(\ell) < \infty$,

ii) $v(r) < \infty$ y $p(\ell) = -\infty$, o

iii) $v(\ell) < \infty$ y $p(r) = \infty$.

La prueba puede ser encontrada en [23, p.348].

Criterio de Osgood

En el caso en el que el coeficiente de deriva b es positivo y continuo y el término de difusión es cero (es decir, $\sigma \equiv 0$), la ecuación (2.5) es una ecuación diferencial ordinaria para la cual el criterio de explosión es conocido como la prueba de Osgood [34]. El resultado es el siguiente.

Proposición 18 Sea v la solución de

$$\begin{aligned} dv(t) &= b(v(t))dt, \;\; t > 0, \\ v(0) &= a. \end{aligned}$$

El tiempo de explosión de esta ecuación definido como $T_e := \sup\{t > 0 : |v(t)| < \infty\}$ es finito si y sólo si

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{ds}{b(s)} < \infty,$$

además, $T_e = \int_a^{\infty} \frac{ds}{b(s)}$. Si introducimos la notación

$$B_a(x) = \int_a^x \frac{dz}{b(z)}, \quad x \in (a, \infty), \tag{2.7}$$

la solución esta dada por

$$v(t) = B_a^{-1}(t), \;\; 0 \le t < B_a(\infty).$$

Nota 19 El resultado anterior es válido si $b > 0$ en (c, ∞) para una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $a > c$.

En el caso en que b es no decreciente y positiva, y $\sigma \equiv 1$ la prueba de Feller es equivalente al criterio de Osgood. Este resultado fue probado en [26] y es presentado a continuación.

En el caso $\sigma \equiv 1$ las funciones en (2.6) pueden ser expresadas como sigue:

$$p(x) = \int_0^x \exp\left(-2\int_0^s b(r)dr\right) ds$$

y

$$v(x) = 2\int_0^x \frac{p(x) - p(y)}{p'(y)} dy.$$

Teorema 20 Sea $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ una función positiva, localmente Lipschitz y no decreciente. Entonces

(i) $p(-\infty) = -\infty$.

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{ds}{b(s)} < \infty$ si y sólo si $v(\infty) < \infty$.

En [26] el criterio de Osgood ha sido aplicado a soluciones de ecuaciones integrales de la forma

$$X_t = \xi + \int_0^t b(X_s)ds + g(t), \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

A continuación presentamos dicho resultado

Teorema 21 Considere la ecuación (2.8), donde sus coeficientes satisfacen:

a) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es una función positiva, localmente Lipschitz y no decreciente.

b) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función con límites por la derecha e izquierda tal que

$$\limsup_{t\to\infty} \left(\inf_{0\leq h\leq 1} g(t+h) \right) = \infty. \tag{2.9}$$

Entonces, la solución de la ecuación (2.8) explota en tiempo finito si y solo si

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{ds}{b(s)} < \infty.$$

En la Sección 3.2 presentamos una extensión del resultado anterior.

2.3. Teoremas de comparación

Los teoremas de comparación (ver, por ejemplo, [15], [35], [41]) juegan un rol importante en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y estocásticas. Estos establecen cuando un proceso es más grande o igual que otro con probabilidad uno. Este tipo de teoremas son utilizados en una amplia gama de problemas matemáticos, por ejemplo, para probar existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas con comportamiento asintótico [16].

En esta sección probamos dos teoremas útiles de comparación cuyas pruebas pueden ser encontradas en [28] y [46] respectivamente.

Teorema 22 Considere los procesos,

$$X_t^i = x_0^i + \int_{t_0}^t b^i(s, X_s^i)ds + \int_{t_0}^t \sigma^i(s, X_s^i)dW_s, \;\; t_0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2.$$

Supondremos que b^i y σ^i satisfacen las condiciones **a)** y **b)** del Teorema 5, y para cada $x \in \mathbb{R}$, $b^i(\cdot, x)$ y $\sigma^i(\cdot, x)$, son continuas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

I. Para todo $t_0 \geq 0$ si $x_0^1 \leq x_0^2$ entonces

$$P(X_t^1 \leq X_t^2, t \geq t_0) = 1,$$

II. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ entonces $b^1(t,x) \leq b^2(t,y)$ y $\sigma^1(t,x) = \sigma^2(t,y)$ para toda $t \geq 0$.

Teorema 23 Supongamos que se cumple lo siguiente:

(i) sea σ una función real y continua definida sobre el intervalo $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ tal que

$$|\sigma(x,t) - \sigma(t,y)| \leq \rho(|x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{2.10}$$

donde ρ es una función creciente y continua definida sobre $[0,\infty)$ tal que $\rho(0) = 0$ y

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{dy}{\rho^2(y)} dx = \int_0^1 \frac{y}{\rho^2(y)} dy = +\infty; \quad \text{y} \tag{2.11}$$

(ii) y sea b una función real continua definida sobre el intervalo $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ tal que

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq \kappa(|x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{2.12}$$

donde κ es un función creciente y continua definida en $[0,\infty)$ tal que $\kappa(0) = 0$ y

$$\lim_{x \downarrow 0} \left[\sup_{x \leq y \leq 1} \kappa(y) \int_y^1 \frac{du}{\rho^2(u)} \Big/ \int_x^1 \int_y^1 \frac{du}{\rho^2(u)} dy \right] = 0. \tag{2.13}$$

Considere los siguientes procesos:

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t b(s, X_s^\xi) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^\xi) dW_s, \quad \text{c.s. sobre } 0 \leq t < \zeta_1, \tag{2.14}$$

$$X_t^\eta = \eta + \int_0^t b(s, X_s^\eta) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^\eta) dW_s, \quad \text{c.s. sobre } 0 \leq t < \zeta_2, \tag{2.15}$$

donde ξ y η son dos variables aleatorias $\mathcal{F}_0$-medibles tales que

$$\zeta_1 = \sup \left\{ t;\ \sup_{s \in [0,t]} |x(s,\xi)| < +\infty \right\}$$

y

$$\zeta_2 = \sup\left\{t;\ \sup_{s\in[0,t]} |x(s,\eta)| < +\infty\right\}.$$

Entonces, la relación

$$\xi < \eta, \quad \text{c.s.} \tag{2.16}$$

implica

$$P(X_t^{\xi} < X_t^{\eta}, 0 \leq t < \zeta) = 1 \tag{2.17}$$

donde $\zeta = \zeta_1 \wedge \zeta_2$.

El siguiente resultado elemental de comparación será utilizado en la Sección 3.2 y el Capítulo 4 respectivamente.

Lema 24 Sea $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua no negativa y $\xi, c, T \in \mathbb{R}$ tales que $\xi > c$ y $T > 0$. También suponga que b es no decreciente y positiva en (c, ∞), y $x, y : [0, T] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas

(i) Si

$$y(t) \geq \xi + \int_0^t b(y(s))ds,\ t \in [0, T],$$

y

$$x(t) = \xi + \int_0^t b(x(s))ds,\ t \in [0, T],$$

entonces $y(t) \geq x(t)$, para todo $t \in [0, T]$.

(ii) Además, si suponemos que $y > c$ sobre $[0, T]$,

$$y(t) \leq \xi + \int_0^t b(y(s))ds,\ t \in [0, T],$$

y

$$x(t) = \xi + \int_0^t b(x(s))ds,\ t \in [0, T],$$

entonces $y(t) \leq x(t)$, para todo $t \in [0, T]$.

Demostración. Para el inciso **(i)** considere la solución x_{r_0} de

$$x_{r_0}(t) = \xi - r_0 + \int_0^t b(x_{r_0}(s))ds,\ \ t \in [0, T],$$

donde $\xi - r_0 > c$. Sea $N_{r_0} = \{t \in [0,T] : x_{r_0}(s) \leq y(s),\ \forall s \in [0,t]\}$. Observe que $0 \in N_{r_0}$ por lo tanto $N_{r_0} \neq \emptyset$. Como $b \geq 0$, entonces $x_{r_0} \geq \xi - r_0 > c$ sobre $[0,T]$. Usando que b es no decreciente en (c,∞) tenemos que se satisface $b(y(s)) \geq b(x_{r_0}(s))$ para $s \in N_{r_0}$. Vamos a demostrar que $T_{r_0} := \sup N_{r_0} < T$ no es posible. En efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\downarrow 0}(y(T_{r_0}+\epsilon)) - x_{r_0}(T_{r_0}+\epsilon) &\geq r_0 + \int_0^{T_{r_0}} [b(y(s)) - b(x_{r_0}(s))]\,ds \\ &\quad + \lim_{\epsilon\downarrow\epsilon}\int_{T_{r_0}}^{T_{r_0}+\epsilon} [b(y(s)) - b(x_{r_0}(s))]\,ds. \\ &\geq r_0 > 0.\end{aligned}$$

Entonces la continuidad de $y - x_{r_0}$ implica $T_{r_0} < \sup N_{r_0}$. Por lo tanto $x_{r_0} \leq y$ sobre $[0,T]$. Por otro lado, por la Proposición 18 tenemos

$$B_\xi^{-1}(t) = \lim_{r_0\downarrow 0} B_{\epsilon - r_0}^{-1}(t) = \lim_{r_0\downarrow 0} x_{r_0}(t) \leq y(t), \quad t \in [0,T].$$

Para obtener la primera igualdad , en la expresión anterior, hemos usado que la continuidad de $B_{\cdot}(t)$ implica la continuidad de $B_{\cdot}^{-1}(t)$.

Para el inciso **(ii)** se procede de igual manera que en el caso anterior, pero ahora consideramos la solución x_{r_0} de

$$x_{r_0} = \xi + r_0 + \int_0^t b((x_{r_0}(s)))ds, \ \ t \in [0,T],$$

donde $r_0 > 0$. □

Nota 25 En el Teorema 2.2.4 de [35] el lector interesado puede encontrar otra versión del Lema 24, donde se requiere que la función b sea monótona.

Considere las siguientes hipótesis:

H1: $a : (0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función continua tal que

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{t+\eta} a(s)ds > 0, \quad \text{para algún } \eta > 0.$$

H2: $b : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ es una función continua tal que existe $-\infty \leq l < \infty$ y $-\infty < r < \infty$ de modo que $b > 0$ y localmente Lipschitz sobre (l,∞), y $b : [r,\infty) \to (0,\infty)$ es no decreciente.

Lema 26 Sea $x_0 > r$ y $T > t_0$. Suponga que **H1** y **H2** se satisfacen, y que $u, v : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ son dos funciones continuas.

a) Si u y v son tales que

$$\begin{aligned} v(t) &> x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)b(v(s))ds, \quad t \in [t_0, T], \\ u(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)b(u(s))ds, \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

Entonces $v(t) \geq u(t)$, para todo $t \in [t_0, T]$.

b) Si

$$\begin{aligned} r < v(t) &< x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)b(v(s))ds, \quad t \in [t_0, T], \\ u(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)b(u(s))ds, \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

Entonces $v(t) \leq u(t)$, para todo $t \in [t_0, T]$.

Demostración. Comenzamos con el inciso a).
Sea $N = \{t \geq t_0 : b(u(s)) \leq b(v(s)),\ s \in [t_0, t]\}$. Como $t_0 \in N$, entonces la continuidad de v y u, junto con el hecho de que b es no decreciente sobre (r, ∞), nos conduce a demostrar que $\tilde{T} = \sup N > t_0$.
Si $\tilde{T} < T$ entonces

$$v(\tilde{T}) - u(\tilde{T}) > \int_{t_0}^{\tilde{T}} a(s)[b(v(s)) - b(u(s))]ds \geq 0,$$

lo cual es imposible debido a la definición de $\tilde{T}$.

Para el inciso b) consideremos $N^0 = \{t \geq t_0 : v(s) > r \quad \text{y} \quad b(v(s)) \leq b(u(s)),\ s \in [t_0, t]\}$ y procedamos como en el inciso anterior.

□

2.4. La integral hacia adelante

La integral anticipante nos permitirá integrar procesos no adaptados. Dichos procesos permiten modelar situaciones más generales que se presentan en la vida real

En secciones anteriores, hemos considerado la ecuación (2.2) con condición inicial determinista o independiente de $W_t - W_{t_0}$ (ver Teorema 5). La integral hacia adelante ("forward integral" en inglés) es un extensión de la integral de Itô en el caso de integrandos anticipantes y está definida como un límite en probabilidad. Esta integral está relacionada con el adjunto del operador derivada en el espacio de Wiener [32], por lo tanto podemos usar las técnicas del cálculo de variaciones o cálculo de Malliavin para obtener sus propiedades (ver Nualart [32] para detalles). La integral hacia adelante está definida como sigue.

Definición 27 Sea T un número real positivo y v un proceso medible con trayectorias integrables (es decir, $v_t(\omega)$ es integrable en $[0,T]$ para $\omega \in \Omega$). Decimos que v es integrable hacia adelante ($v \in$ Dom δ_T^-) si

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^T v_s \left(W_{(s+\epsilon)\wedge T} - W_s\right) ds$$

converge en probabilidad cuando $\epsilon \downarrow 0$. Este límite es denotado por $\int_0^T v_s d^- W_s$.

Nota 28 La familia $\{X_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de variables aleatorias converge en probabilidad a X, cuando $\epsilon \downarrow 0$, si para cada $\delta > 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} P(\omega \in \Omega : |X_\epsilon(\omega) - X(\omega)| > \delta) = 0.$$

Como fue señalado por Navarro [31], la integral hacia delante tiene la siguiente propiedad local. También la integral de Itô tiene esta propiedad (ver [38]), la cual es utilizada en la prueba del Teorema 15.

Lema 29 Sea u y v dos procesos medibles en Dom δ_T^- y $A \in \mathcal{F}$ tal que

$$u_t = v_t \quad \text{c.s. sobre} \quad A \times [0,T].$$

Entonces $\int_0^T u_s d^- W_s = \int_0^T v_s d^- W_s$ c.s. sobre A.

El dominio de la integral hacia adelante puede ser extendida como sigue:

Definición 30 Decimos que un proceso u es localmente integrable hacia adelante ($u \in$ Dom $\delta_{T,loc}^-$) sobre un conjunto medible $\Lambda \in \mathcal{F}$ si existe una sucesión $\{(u^{(n)}, \Lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Dom $\delta_T^- \times \mathcal{F}$, tal que:

i) $\Lambda_n \nearrow \Lambda$ c.s.

ii) $u = u^{(n)}$ c.s. sobre $\Lambda_n \times [0,T]$.

En este caso definimos

$$\int_0^T u_s d^- W_s := \int_0^T u_s^{(n)} d^- W_s \quad \text{sobre} \quad \Lambda_n.$$

Nota 31 Por el Lema 29, esta definición es independiente de la sucesión localizante $\{(\Lambda_n, u^{(n)}) : n \geq 1\}$.

Nota 32 Si en la Definición 30, Λ coincide con Ω entonces tenemos la definición dada por Navarro [31].

Presentamos la fórmula de sustitución para la integral hacia adelante (los detalles pueden ser consultados en [40], [31]).

Sea $\mathcal{R}$ un conjunto de procesos $X = \{X_t(u) : t \in [0,T], u \in \mathbb{R}\}$ los cuales son $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})-$medibles donde $\mathcal{P}$ es la $\sigma-$álgebra generada por los procesos predecibles, es decir, esta $\sigma-$álgebra es generada por todos los procesos adaptados y continuos por la izquierda.

Teorema 33 (Russo y Vallois [40]) Sea $X \in \mathcal{R}$, $q > 2$ y $\delta > 1$ tal que

i) $E\left(\int_0^T |X_s(0)|^q ds\right) < \infty$.

ii) Para cada $N > 0$ y $|u|$, $|y| \leq N$, tenemos

$$E\left(\int_0^T |X_s(u) - X_s(y)|^q ds\right) \leq C_N |u-y|^\delta,$$

para alguna $C_N > 0$.

Entonces la integral de Itô $\int_0^T X_s(u) dW_s$ tiene una versión continua en u y para cada variable aleatoria L la composición $X(L)$ pertence a Dom δ_T^- y

$$\int_0^T X_s(L) d^- W_s = \left(\int_0^T X_s(u) dW_s\right)_{u=L}.$$

Si suponemos que X pertenece a la clase

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 =&\{X \in \mathcal{R} : X(0) \in L^2([0,T]),\ \ X_t(u) \text{ es diferenciable en } \\ &u \ \ y \ \int_{-n}^{n}\int_0^T X_t'(u)^2 dtdu < \infty \ \ \forall n \in \mathbb{N}\},\end{aligned}$$

entonces la fórmula de sustitución para la integral hacia adelante se satisface.

Teorema 34 Sea $X \in \mathcal{R}_2$. Entonces para cada variable aleatoria L, $X(L)$ pertenece a Dom δ_T^- y

$$\int_0^T X_s(L)d^-W_s = \left(\int_0^T X_s(u)dW_s\right)_{u=L}.$$

La prueba de este resultado puede ser encontrada en [31, p.11].

El siguiente resultado de Russo y Vallois [40] muestra la relación entre la integral de Itô y la integral hacia adelante. Con el fin de exponer este resultado tenemos que recordar (ver [43]) que dada un función localmente integrable f (con respecto a la medida de Lebesgue), para casi toda $t \in [0,T]$, se cumple

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t} f(r)dr \to f(t) \ \ \text{cuando} \ \ \epsilon \downarrow 0. \tag{2.18}$$

Denotamos como $\mathcal{L}(f)$ al conjunto de $t \in [0,T]$ tales que (2.18) se satisface. Por otro lado si B es una $\mathcal{G}_t-$semimartingala, para alguna filtración $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$, entonces $B = W + A$ donde W es un $\mathcal{G}_t-$movimiento browniano y A es un proceso con trayectorias de variación acotada (ver [38]). Usaremos esta descomposición de B en el siguiente resultado.

Proposición 35 Suponga que $B = W + A$ es una $\mathcal{G}_t-$semimartingala. Sea X un proceso medible, acotado y adaptado a $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$ tal que

$$\int_0^T 1_{\mathcal{L}(X)^c}(s)d|A|_s = 0 \ \ \text{con probabilidad} \ \ 1.$$

Entonces $X \in \text{Dom}\delta_T^-$ y

$$\int_0^T X_s d^-B_s = \int_0^T X_s dB_s, \tag{2.19}$$

donde la integral de la derecha es la integral de Itô de X con respecto a la $\mathcal{G}_t-$semimartingala B.

Nota 36 La integral estocástica en el segundo término de la igualdad (2.19) es igual a $\int_0^T X_s dW_s + \int_0^T X_s dA_s$, donde $\int_0^T X_s dW_s$ es la integral de Itô de X con respecto a $\mathcal{G}_t-$movimiento browniano W y $\int_0^T X_s dA_s$ esta definida trayectoria por trayectoria.

Distribución del tiempo de explosión de ecuaciones diferenciales estocásticas

En esta sección, estudiamos la explosión en tiempo finito de las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales estocásticas gobernadas por un movimiento browniano y, particularmente, la distribución del tiempo de explosión para algunos casos particulares de ecuaciones no autónomas. Una manera de estudiar esto es usando ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden, en efecto, Feller [9] ha señalado que la transformada de Laplace de la distribución es una solución acotada de alguna ecuación diferencial ordinaria relacionada. Presentaremos una generalización de este resultado, ver Sección 3.6. Además, obtenemos una ecuación diferencial parcial tal que su solución acotada es la distribución del tiempo de explosión.

En el caso de la ecuación (2.2), es decir, el caso no autónomo, la prueba de Feller y el criterio de Osgood no son útiles. En esta tesis damos algunas extensiones del criterio de Osgood para este tipo de ecuaciones con coeficientes dependientes del tiempo.

3.1. Criterio de Osgood para algunas ecuaciones diferenciales estocásticas con coeficientes de difusión

A diferencia del criterio original de Osgood vamos a considerar un caso especial de una ecuación que incluye coeficiente de difusión y tanto éste como el coeficiente de deriva son dependientes del tiempo. Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$X_t^\xi = \xi + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(X_s^\xi)\sigma'(X_s^\xi)h^2(s)ds + \int_0^t \sigma(X_s^\xi)h(s)dW_s, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$. De aquí en adelante, $W = \{W_t : t \geq 0\}$ es un movimiento browniano.

Ahora supongamos que existen $-\infty \leq x_1 < x_2 \leq \infty$ tales que $\sigma \neq 0$ sobre (x_1, x_2). Sea $\xi \in (x_1, x_2)$ fijo y defina $\Psi_\xi : (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ como

$$\Psi_\xi(x) = \int_\xi^x \frac{dz}{\sigma(z)}.$$

Sea $l_\xi = \Psi_\xi(x_1) \wedge \Psi_\xi(x_2)$, el mínimo entre $\Psi_\xi(x_1)$ y $\Psi_\xi(x_2)$, y $r_\xi = \Psi_\xi(x_1) \vee \Psi_\xi(x_2)$, el máximo entre $\Psi_\xi(x_1)$ y $\Psi_\xi(x_2)$, y $Y_t = \int_0^t h(s)dW_s$, $t \geq 0$.

El siguiente teorema es nuestra primera extensión del criterio de Osgood.

Teorema 37 Sea $\tau_\xi = \text{ínf}\{t \geq 0 : Y_t \notin (l_\xi, r_\xi)\}$. Entonces, el proceso $X_t^\xi = \Psi_\xi^{-1}(Y_t)$, $0 \leq t < \tau_\xi$ es solución de la ecuación (3.1).

Nota 38 En este caso, τ_ξ es llamado el tiempo de explosión de la ecuación (3.1).

Demostración. Considere los tiempos de paro

$$\tau_\xi^k = \text{ínf}\{t > 0 : Y_t \notin (l_\xi + k^{-1}, r_\xi - k^{-1})\},$$

y el proceso parado $Y_{t\wedge\tau_\xi^k} = \int_0^t h(s)1_{]0,\tau_\xi^k]}(s)dW_s$. Aplicando el Teorema 1 (fórmula de Itô) con $f(x) = \Psi_\xi^{-1}(x)$, $x \in (l_\xi, r_\xi)$ tenemos

$$df(Y_{t\wedge\tau_\xi^k}) = f'(Y_{t\wedge\tau_\xi^k})h(t)1_{[0,\tau_\xi^k](t)}dW_t + \frac{1}{2}f''(Y_{t\wedge\tau_\xi^k})h^2(t)1_{[0,\tau_\xi^k]}(t)dt, \quad t > 0.$$

Es decir,

$$(Y_{t\wedge\tau_\xi^k}) - f(0) = \int_0^{t\wedge\tau_\xi^k} f'(Y_s)h(s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_\xi^k} f''(Y_s)h^2(s)ds, \quad t > 0.$$

Por lo tanto,

$$X_{t\wedge\tau_\xi^k} = \xi + \int_0^{t\wedge\tau_\xi^k} \sigma(X_s)h(s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_\xi^k} \sigma(X_s)\sigma'(X_s)h^2(s)ds \tag{3.2}$$

Finalmente tendiendo $k \to \infty$ en la ecuación (3.2) obtenemos el resutado. □

En caso de que uno o ambos extremos del intervalo (l_ξ, r_ξ) sean finitos el proceso Y podría no estar en el dominio de la función Ψ_ξ^{-1}, por lo tanto una consecuencia inmediata del Teorema 37 es el siguiente:

Corolario 39 Sea $\int_0^\infty h(s)^2 ds = \infty$. Entonces la solución de la ecuación (3.1) explota en tiempo finito si y solo si $l_\xi > -\infty$, o $r_\xi < \infty$. Además, si l_ξ y r_ξ son dos números reales. Entonces

$$P(\tau_\xi \in dt) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{r_\xi + k(r_\xi - l_\xi)}{\sqrt{2\pi}(H(t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{(r_\xi + k(r_\xi - l_\xi))^2}{2H(t)}\right) dt,$$

con $H(t) = \int_0^t h^2(s) ds$.

Demostración. Es bien conocido que existe un movimiento browniano $B = \{B_t : t \geq 0\}$ tal que $Y_t = B_{H(t)}$, $t \geq 0$, (ver, por ejemplo, Durrett [8]). Sea $\tilde{\tau}_\xi = \text{ínf}\{t > 0 : B_t \notin (l_\xi, r_\xi)\}$. Note que $B_{H(\tau_\xi)} = Y_{\tau_\xi} \in \{l_\xi, r_\xi\}$ implica que $\tilde{\tau}_\xi = H(\tau_\xi)$. Entonces $P(\tau_\xi \leq t) = P(\tilde{\tau}_\xi \leq H(t))$. Consecuentemente, la prueba se sigue de Borodin y Salminen [4, p.212]. $\square$

Nota 40 Suponga que, por ejemplo, $\sigma > 0$, $\Psi_\xi(x_1) = -\infty$ y $\Psi_\xi(x_2) < \infty$. Entonces, como una consecuencia inmediata de la prueba del Corolario 39, obtenemos que $\tau_\xi = \text{ínf}\{t : \int_0^t h(s) dW_s = \Psi_\xi(x_2)\}$ y

$$P(\tau_\xi \leq t) = \Phi\left(\frac{\Psi_\xi(x_2)}{\sqrt{H(t)}}\right), \tag{3.3}$$

donde

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2/2} dz.$$

Observe que obtenemos un resultado similar cuando σ es negativo o el intervalo tiene la forma (l_ξ, ∞).

Ahora consideremos los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 41 Sea $\sigma(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ y $\xi \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\Psi_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - \xi^{1-\alpha}), & \xi > 0,\ x \geq 0, \\ \frac{1}{1-\alpha}(|\xi|^{1-\alpha} - |x|^{1-\alpha}), & \xi < 0,\ x \leq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\Psi_\xi(-\infty) = \frac{|\xi|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{y} \quad \Psi_\xi(0) = \infty, \quad \text{para } \xi < 0,$$

y

$$\Psi_\xi(0) = -\infty \quad \text{y} \quad \Psi_\xi(\infty) = \frac{|\xi|^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, \quad \text{para } \xi > 0.$$

Por lo tanto, existe explosión en tiempo finito y

$$P(\tau_\xi \leq t) = \Phi\left(\frac{|\xi|^{1-\alpha}}{(\alpha-1)\sqrt{H(t)}}\right).$$

Ejemplo 42 Sea $\sigma(x) = e^{\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ y $\xi \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\Psi_\xi(x) = \frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha\xi} - e^{-\alpha x}),$$

$$\Psi_\xi(-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \alpha > 0, \\ \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\xi}, & \alpha < 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \Psi_\xi(\infty) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\xi}, & \alpha > 0, \\ \infty, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto deducimos que existe explosión por la izquierda para $\alpha < 0$ y existe explosión por la derecha para $\alpha > 0$. En este caso,

$$P(\tau_\xi \leq t) = \Phi\left(\frac{e^{-\alpha\xi}}{|\alpha|\sqrt{H(t)}}\right).$$

3.2. Una extensión del criterio de Osgood para ecuaciones integrales

En esta sección estudiamos la siguiente ecuación integral no autónoma

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t a(s)b(X_s^\xi)ds + g(t), \quad t \geq 0. \tag{3.4}$$

El tiempo de explosión, T_ξ^X, para esta ecuación está definida como sigue

$$T_\xi^X = \inf\{t \geq 0 : X_t^\xi \notin \mathbb{R}\}.$$

Para el desarrollo de los resultados sobre la explosión de la ecuación (3.4) pediremos que los coeficientes satisfagan las hipótesis **H1** y **H2** de la Sección 2.3 y la siguiente suposición:

H3: $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\inf_{0\leq h\leq\tilde{\eta}} g(t+h)\right) = \infty \quad \text{para alguna } \tilde{\eta} > 0.$$

Las mismas hipótesis serán de utilidad en la siguiente sección.

De aquí en adelante utilizaremos la convención

$$A_t(x) = \int_t^x a(z)dz, \quad t \geq 0 \text{ y } x \in (t, \infty),$$

y

$$B_\xi(x) = \int_\xi^x \frac{dz}{b(z)}, \quad x \in (l, \infty).$$

Comenzaremos con la siguiente generalización del criterio de Osgood.

Lema 43 Suponga que **H1** y **H2** se satisfacen y $x_0 > l$. Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= a(t)b(y(t)), \quad t > t_0, \\ y(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

a) Suponga que $B_{x_0}(\infty) \geq A_{t_0}(\infty)$, entonces

$$y(t) = B_{x_0}^{-1}(A_{t_0}(t)), \quad t \geq t_0.$$

b) Si $B_{x_0}(\infty) < A_{t_0}(\infty)$, entonces existe explosión en tiempo finito y el tiempo de explosión $T_{x_0}^y$ es igual a $A_{t_0}^{-1}(B_{x_0}(\infty))$.

Nota 44 Debido a las hipótesis **H1** y **H2** para la ecuación (3.5), y **H1-H3** para (3.4) con $x_0 > l$ y $\xi > l$, respectivamente, podemos concluir que estas ecuaciones tienen una única solución que puede explotar en tiempo finito. Esto se sigue de la Sección 2.1. Además este hecho será usado en la prueba del Teorema 45 sin ser mencionado.

Demostración. De (3.5) y el cambio de variable $z = y(s)$, vemos que

$$\int_{x_0}^{y(t)} \frac{dz}{b(z)} = \int_{t_0}^t a(s)ds,$$

y lo anterior implica $B_{x_0}(y(t)) = A_{t_0}(t)$.

Inciso a)
Si $A_{t_0}(\infty) \leq B_{x_0}(\infty)$ entonces para $t \geq t_0$ se cumple que $A_{t_0}(t) < B_{x_0}(\infty)$, por lo tanto, $y(t) = B_{x_0}^{-1}(A_{t_0}(t))$ para $t > t_0$ esta bien definido.

Inciso b)
En este caso tenemos que $B_{x_0}^{-1}(A_{t_0}(t))$ está solo definida para $t < A_{t_0}^{-1}(B_{x_0}(\infty)) < \infty$, por lo tanto existe $T_{x_0}^y$ tal que $B_{x_0}(\infty) = A_{t_0}(T_{x_0}^y)$ y entonces $T_{x_0}^y = A_{t_0}^{-1}(B_{x_0}(\infty))$. $\square$

A continuación, probaremos el teorema principal de esta sección por medio de los Lemas 26 y 43.

Teorema 45 Sea $\xi \in \mathbb{R}$. Suponga se cumplen **H1-H3**. Entonces el tiempo de explosión T_ξ^X de la solución X^ξ de (3.4) es finito si y solo si

$$\int_r^\infty \frac{ds}{b(s)} < \infty. \tag{3.6}$$

Demostración. Suponga que $T_\xi^X < \infty$. Como g es continua, entonces

$$\int_0^t a(s)b(X_s^\xi)ds \begin{cases} < \infty, & t < T_\xi^X, \\ = \infty, & t = T_\xi^X. \end{cases}$$

Por lo tanto, existe $t_0 \in (0, T_\xi^X)$ tal que

$$\xi + \int_0^{t_0} a(s)b(X_s^\xi)ds + \inf_{s\in[0,T_\xi^X]} g(s) > r,$$

y en consecuencia $X_t^\xi > r$ para $t \in [t_0, T_\xi^X]$.

Sea

$$M = \sup\{|g(t)| : 0 \leq t \leq T_\xi^X\} + \xi + \int_0^{t_0} a(s)b(X_s^\xi)ds.$$

Consideremos la ecuación integral

$$u(t) = (M+1) + \int_{t_0}^t a(s)b(u(s))ds, \quad t \geq t_0.$$

Por otra parte, se cumple,

$$r < X_t^\xi < M + 1 + \int_{t_0}^t a(s)b(X_s^\xi)ds, \quad t \in [t_0, T_\xi^X].$$

Por el caso b) del Lema 26 y $M > r$, $u(t)$ explota en tiempo finito. $T_{M+1}^u \leq T_\xi^X$ y el Lema 43 nos dice que $T_{M+1}^u = A_{t_0}^{-1}(B_{M+1}(\infty))$. De donde

$$\int_{M+1}^\infty \frac{ds}{b(s)} < \infty.$$

Como b es continua y positiva en $[r,\infty)$ se sigue (3.6).

Ahora supongamos que X^ξ no explota en tiempo finito. De las hipótesis **H1** y **H3**, podemos encontrar una sucesión $\{t_n : n\in\mathbb{N}\}$ tal que $t_n\uparrow\infty$ y

$$r+1<\xi+\inf_{0\le h\le\tilde{\eta}} g(t_n+h)\uparrow\infty,\ \text{ cuando } n\to\infty.$$

Observe que para $t\in[0,\tilde{\eta}]$

$$\begin{aligned}
X^\xi_{t+t_n} &= \xi+\int_0^{t_n} a(s)b(X^\xi_s)ds+\int_0^t a(s+t_n)b(X^\xi_{s+t_n})ds+g(t+t_n)\\
&\ge \xi+\int_0^t a(s+t_n)b(X^\xi_{s+t_n})ds+\inf_{0\le h\le\tilde{\eta}} g(t_n+h)\\
&> \xi+\inf_{0\le h\le\tilde{\eta}} g(t_n+h)-1+\int_0^t a(s+t_n)b(X^\xi_{s+t_n})ds.
\end{aligned}$$

Ahora considere la ecuación integral

$$u(t)=\xi+\inf_{0\le h\le\tilde{\eta}} g(t_n+h)-1+\int_0^t a(s+t_n)b(u(s))ds,\quad t\in[0,\tilde{\eta}].$$

Por el caso a) del Lema 26 concluimos que $u(t)\le X^\xi_{t+t_n}$ y del caso a) del Lema 43,

$$\int_{\xi+\inf_{0\le h\le\tilde{\eta}} g(t_n+h)-1}^\infty \frac{ds}{b(s)}\ge\int_0^\infty a(s+t_n)ds>\int_{t_n}^{t_n+\tilde{\eta}} a(s)ds.$$

Entonces la Hipótesis **H1** implica $\int_r^\infty \frac{ds}{b(s)}=\infty$. □

Finalmente, concluimos esta sección con el siguiente resultado, donde, en la ecuación (3.4), el ruido g es acotado.

Proposición 46 Suponga que las Hipótesis **H1** y **H2** se satisfacen. También suponga que g en la ecuación (3.4) es una función acotada y que $\xi+\inf_{s\ge0} g(s)>r$. Entonces, se cumple lo siguiente:

a) $\int_r^\infty (1/b(s))ds=\infty$ implica que la solución de la ecuación (3.4) no explota en tiempo finito.

b) $\int_r^\infty (1/b(s))ds<\infty$ implica que la solución de la ecuación (3.4) explota en tiempo finito y
$$T^X_\xi\in\left(A_0^{-1}(B_{\xi+\sup_{s\ge0} g(s)}(\infty)),A_0^{-1}(B_{\xi+\inf_{s\ge0} g(s)}(\infty))\right).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\xi + \inf_{s\geq 0} g(s) > r + \varepsilon$. Establezca

$$Z_t^\xi = \xi + \sup_{s\geq 0} g(s) + \varepsilon + \int_0^t a(s)b(Z_s^\xi)ds$$

y

$$Y_t^\xi = \xi + \inf_{s\geq 0} g(s) - \varepsilon + \int_0^t a(s)b(Y_s^\xi)ds.$$

Por el Lema 26 tenemos,

$$Y_t^\xi < X_t^\xi < Z_t^\xi, \quad t < T^Z_{\xi + \sup\limits_{s\geq 0} g(s) + \varepsilon}.$$

Entonces la prueba es una consecuencia inmediata del Lema 43, y las Hipótesis **H1** y **H2**. □

3.3. Ecuación diferencial estocástica con ruido integral de wiener aditivo

En esta sección estudiamos la ecuación (3.4) donde el ruido g es una integral de Wiener. Más precisamente, estudiamos la ecuación diferencial estocástica

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t a(s)b(X_s^\xi)ds + I_t, \tag{3.7}$$

donde $I_t = \int_0^t f(s)dW_s$ y $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función cuadrado integrable sobre $[0, M]$, para cualquier $M > 0$.

En el resto de esta sección utilizaremos la siguiente hipótesis:

H4 : $\int_0^\infty f^2(s)ds = \infty$ y

$$\sum_{n=[M]+1}^{\infty} \frac{1}{\Upsilon^p(n)} \left(\int_n^{n+2} f^2(s)ds \right)^{p/2} < \infty, \tag{3.8}$$

para algunas $M, p > 0$, donde

$$\Upsilon(t) = \sqrt{2\left(\int_0^t f^2(s)ds\right) \log\log\left(e^e \vee \int_0^t f^2(s)ds\right)}.$$

Nota 47 Observe que si f es tal que

$$t \mapsto \left(\int_0^{t+2} f^2(s)ds \right) \left(\int_0^t f^2(s)ds \right)^{-1} - 1,$$

es una función decreciente en $L^p([M,\infty))$ para alguna $M, p > 0$, entonces la condición (3.8) se sostiene. En efecto,

$$\sum_{n=[M]+1}^{\infty} \frac{1}{\Upsilon^p(n)} \left(\int_n^{n+2} f^2(s)ds \right)^{p/2} =$$

$$\sum_{n=[M]+1}^{\infty} \frac{1}{\left(2 \log\log \left(e^e \vee \int_0^n f^2(s)ds\right)\right)^{p/2}} \left(\frac{\int_0^{n+2} f^2(s)ds - \int_0^n f^2(s)ds}{\int_0^n f^2(s)ds)} \right)^{p/2}$$

$$\leq \sum_{n=[M]+1}^{\infty} \left(\frac{\int_0^{n+2} f^2(s)ds - \int_0^n f^2(s)ds}{\int_0^n f^2(s)ds)} \right)^{p/2}$$

$$= \sum_{n=[M]+1}^{\infty} \left(\left(\int_0^{n+2} f^2(s)ds \right) \left(\int_0^n f^2(s)ds \right)^{-1} - 1 \right)^{p/2},$$

lo anterior es finito debido al criterio de la integral.

Por otra parte, como una consecuencia del teorema de logaritmo iterado para martingalas localmente cuadrado integrables, podemos establecer lo siguiente:

Lema 48 Bajo el hecho de que $\int_0^\infty f^2(s)ds = \infty$, tenemos

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{I_t}{\Upsilon(t)} = 1 \quad \text{con probabilidad 1.} \tag{3.9}$$

Demostración. El resultado se sigue del Theorem 1.1 in Qing Gao [13]. □

El siguiente teorema es el principal resultado de esta sección.

Teorema 49 Suponga que se cumplen las Hipótesis **H1**, **H2** y **H4**. Entonces la ecuación diferencial estocástica (3.7) explota en tiempo finito con probabilidad 1 si y sólo si $\int_r^\infty \frac{ds}{b(s)} < \infty$.

Demostración. Primero observamos que, por el Teorema 45, sólo necesitamos mostrar que las trayectorias de I satisfacen la Hipótesis **H3** casi seguramente.

Por la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy (vea Teorema 3.5.1 en [8]) tenemos

$$E\left[\left(\sup_{s,t\in[n,n+2]}|I_t-I_s|\right)^p\right]\leq c_p\left(\int_n^{n+2}f^2(s)ds\right)^{p/2},$$

donde c_p es una constante que depende solo de p. Entonces, por (3.8),

$$E\left[\sum_{n=[M]+1}^{\infty}\left(\sup_{s,t\in[n,n+2]}\frac{|I_t-I_s|}{\Upsilon(n)}\right)^p\right]\ \leq\ c_p\sum_{n=[M]+1}^{\infty}\frac{1}{\Upsilon^p(n)}\left(\int_n^{n+2}f^2(s)ds\right)^{p/2}<\infty.$$

Por lo tanto, es suficiente probar que para $\omega\in\Omega$, $I(\omega)$ satisface **H3** para el cual existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{s,t\in[n,n+2]}\frac{|I_t(\omega)-I_s(\omega)|}{\Upsilon(n)}\leq\frac{1}{4},\quad\text{para } n\geq n_0$$

y (3.9) se satisface. Por lo tanto, podemos encontrar una sucesión $\{t_n : n\in\mathbb{N}\}$ tal que $t_n>n$ y

$$\frac{I_{t_n}(\omega)}{\Upsilon(t_n)}\geq\frac{1}{2}\quad\text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Finalmente, usando la propiedades establecidas en esta prueba, somos capaces de escribir, para $n\geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ínf}_{s\in[t_n,t_n+1]}I_s(\omega) &= I_{t_n}(\omega)+\operatorname*{ínf}_{s\in[t_n,t_n+1]}(I_s(\omega)-I_{t_n}(\omega))\\
&\geq I_{t_n}(\omega)+\operatorname*{ínf}_{s\in[t_n,t_n+1]}(-|I_s(\omega)-I_{t_n}(\omega)|)\\
&\geq I_{t_n}(\omega)-\left(\sup_{s,t\in[[t_n],[t_n]+2]}\frac{|I_s(\omega)-I_t(\omega)|}{\Upsilon([t_n])}\right)\Upsilon([t_n])\\
&\geq \frac{1}{2}\Upsilon(t_n)-\frac{1}{4}\Upsilon[[t_n])\geq\frac{1}{4}\Upsilon(t_n)\to\infty,
\end{aligned}$$

cuando $n\to\infty$. Aquí $[t]$ es la parte entera de t y, en la última desigualdad, hemos usado que Υ es una función no decreciente. □

Ahora, con la finalidad de establecer una consecuencia del Teorema 49, consideramos la ecuación

$$Y_t=\xi+\int_0^t\tilde{b}(s,Y_s)ds+I_t,\quad t\geq 0. \tag{3.10}$$

Aquí, para cada $T > 0$, la función $\tilde{b} : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ es localmente Lipschitz (uniformemente sobre $s \in [0,T]$), $\tilde{b}(\cdot, x)$ es continua, para $x \in \mathbb{R}$, e I satisface la Hipótesis **H4** con f continua. Recuerde de la Sección 2.1, que, en este caso, la ecuación (3.10) tiene un única solución que puede explotar en tiempo finito.

Corolario 50 Sean a y b funciones que satisfacen las Condiciones **H1** y **H2**, respectivamente. Suponga que $\xi \in \mathbb{R}$, b es localmente Lipschitz. Entonces,

a) Si $\int_r^\infty (1/b(x))dx = \infty$ y $\tilde{b}(s,x) \leq a(s)b(x)$ con $(s,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$. Obtenemos que la solución de la ecuación (3.10) no explota en tiempo finito.

b) Si $\int_r^\infty (1/b(x))dx < \infty$ y $a(s)b(x) \leq \tilde{b}(s,x)$ con $(s,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$. Obtenemos que la solución de la ecuación (3.10) explota en tiempo finito.

Demostración. Considere el caso a). Sean X^ξ y Y las soluciones de las ecuaciones (3.7) y (3.10), respectivamente. Entonces, del Teorema 22, obtenemos

$$P(Y_t \leq X_t^\xi, t \geq 0) = 1.$$

Por el Teorema 49, la solución X^ξ de la ecuación (3.7) no puede explotar en tiempo finito y la solución Y de (3.10) no puede tender a $-\infty$ en tiempo finito desde que $\tilde{b}$ es $\mathbb{R}_+$-valuada, I tiene trayectorias continuas y, consecuentemente, trayectorias acotadas sobre intervalos compactos de $[0,\infty)$. Por lo tanto Y no explota en tiempo finito.

Para el caso b) tenemos

$$P(X_t^\xi \leq Y_t, t \geq 0) = 1,$$

y entonces el Teorema 49 implica el resultado. □

Ejemplo 51 Tomar

$$\begin{aligned} a(x) &= x^\alpha, \quad x \in (0,\infty), \\ b(x) &= 8x^2 - 36x + 48, \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= x^\beta, \quad x \in (0,\infty), \ \beta > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} x^\alpha dx = \left\{ \begin{array}{cl} +\infty, & \alpha > 0, \\ 1 & \alpha = 0, \\ 0 & \alpha < 0 \end{array} \right.$$

y

$$\left(\int_0^{t+2} f^2(s)ds\right)\left(\int_0^t f^2(s)\right)^{-1} - 1 = \left(1+\frac{2}{t}\right)^{2\beta+1} - 1 \leq C\frac{1}{t}.$$

La última función pertenece a $L^p([1,\infty])$, para cualquier $p > 1$. Por lo tanto f satisface (3.8) debido a la Nota 47.

Por otro lado, es claro que $\int_\xi^\infty \frac{dx}{8x^2-36x+48} < \infty$ con $\xi > 0$. Entonces

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t s^\alpha(8(X_s^\xi)^2 - 36(X_s^\xi) + 48)ds + \int_0^t s^\beta dW_s,$$

explota en tiempo finito cuando $\alpha \geq 0$. Notemos que b no es necesariamente creciente como en [26] o [5]. Además, podemos mejorar el Teorema 49 en algunas casos particulares, ver [45].

Ejemplo 52 La función $Y_t \equiv 1$ es solución de

$$Y_t = 1 + \int_0^t (Y_s)^2 ds - t, \quad t \geq 0.$$

Aunque $\int_1^\infty (1/s^2)ds < \infty$, Y no explota en tiempo finito porque $g(t) = -t$ con $t \leq 0$ no satisface la Hipótesis **H3**.

Proposición 53 Sea f e I definidas como en la ecuación (3.7). Supongamos que se satisfacen **H1**, **H2** y $\int_0^\infty f^2(s)ds < \infty$. Entonces I es acotada con probabilidad 1 y, bajo la hipótesis de $\xi + \text{ínf}_{s\geq 0} I_s > r$, la ecuación diferencial estocástica (3.7) explota en tiempo finito si y solo si $B_{\xi + \underset{s\geq 0}{\text{ínf}} I_s}(\infty) < \infty$.

Nota 54 Observe que $\xi + \underset{s\geq 0}{\text{ínf}} I_s$ depende de ω.

Demostración. El resultado se sigue de [8] (Lema 3.4.7 y Teorema 3.4.9) y Proposición 46. $\square$

3.4. Una aproximación para obtener la distribución del tiempo de explosión de una ecuación diferencial estocástica

Ahora vamos a considerar la ecuación diferencial estocástica de la forma

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t b(s, X_s^\xi)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^\xi)dW_s, \quad t \geq 0. \tag{3.11}$$

Hasta ahora hemos discutido sobre las condiciones necesarias y suficientes para saber cuando la solución de algunas ecuaciones (ver (3.1), (3.4)) explotan en tiempo finito. Sorprendentemente, la distribución del tiempo de explosión rara vez ha sido estudiada. Con este trabajo proponemos un método para encontrar la distribución del tiempo de explosión τ_ξ de X^ξ.

3.5. El caso autónomo

En esta sección consideramos la ecuación diferencial estocástica

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t b(X_s^\xi)ds + \int_0^t \sigma(X_s^\xi)dW_s, \quad t \geq 0, \tag{3.12}$$

con $b, \sigma \in C^1(\mathbb{R})$ y $\xi \in \mathbb{R}$, en este caso, el Teorema 15 muestra que $X_\xi^{\tau_\xi} \in \{-\infty, \infty\}$ sobre $\{\omega : \tau_\xi(\omega) < \infty\}$. De ahora en adelante utilizaremos la convención

$$\tau_\xi^+ = \text{ínf}\{t > 0 : X_t^\xi = \infty\} \quad \text{y} \quad \tau_\xi^- = \text{ínf}\{t > 0 : X_t^\xi = -\infty\},$$

además $\text{ínf}\, \emptyset = \infty$. Por lo tanto, para $\omega \in \Omega$, $\tau_\xi^+(\omega) < \infty$ implica $\tau_\xi^- = \infty$.

El siguiente teorema establece que la solución de cierta ecuación diferencial parcial está relacionada con la distribución del tiempo de explosión de (3.12).

Teorema 55 Considere una función acotada $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface el siguiente problema de frontera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + b(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, & (3.13)\\ u(0,x) &= 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. & (3.14) \end{aligned}$$

a) Suponga que $u(t, \infty) = u(t, -\infty) = 1$. Entonces $P(\tau_\xi \leq t) = u(t, \xi)$.

b) $u(t,\infty)=1$ y $u(t,-\infty)=0$ implica que $P(\tau_\xi^+ \leq t)=u(t,\xi)$.

c) Si $u(t,\infty)=0$ y $u(t,-\infty)=1$, tenemos $P(\tau_\xi^- \leq t)=u(t,\xi)$.

Notas 56

1. El principio del máximo proporciona condiciones respecto a los coeficientes b y σ que garantizan que la solución de la ecuación (3.13) es acotada (ver Friedman [11]).

2. Es muy interesante observar que (3.13) está relacionada con la densidad de transición del proceso X^ξ, o relacionada a la solución fundamental del problema de Cauchy asociado (see [11]). Por otra parte, (3.14) y las condiciones en los incisos a)-c) son intuitivamente claras. De hecho, (3.14) establece que si comenzamos en un punto ($\xi \in \mathbb{R}$), entonces necesitamos algún tiempo para alcanzar la explosión. Otras condiciones significan que si comenzamos en el estado ($\pm\infty$), entonces el tiempo de explosión es menor que cualquier tiempo.

3. Observe que $P(\tau_\xi \leq t)=P(\tau_\xi^+ \leq t)+P(\tau_\xi^- \leq t)$ y que, por ejemplo en el inciso a), tenemos $P(\tau_\xi \leq \infty)=u(\infty,\xi)$.

4. Si X^ξ no explota en tiempo finito, entonces la ecuación (3.13)-(3.14) no tiene una solución acotada que satisfaga las condiciones establecidas en los casos a), b) o c).

Demostración. Considere los tiempos de paro $\tau_\xi^m = \inf\{t>0 : |X_t^\xi|>m\}$. Usando que u es una solución acotada de la ecuación (3.13), Aplicamos la fórmula de Itô al proceso parado $X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m}$ y la función $u(t-r,x)$ para $r\in[0,t)$ y obtenemos

$$d\left(u\left(t-(r\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m}\right)\right)=\left(-1_{[0,\tau_\xi^m]}(r)\frac{\partial u}{\partial r}(t-(r\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})+\right.$$
$$\left.1_{[0,\tau_\xi^m]}(r)b(X_r^\xi)\frac{\partial u}{\partial x}(t-(r\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})+\frac{1}{2}1_{[0,\tau_\xi^m]}(r)\sigma^2(X_r^\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t-(r\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})\right)dr$$
$$+1_{[0,\tau_\xi^m]}(r)\sigma(X_r^\xi)\frac{\partial u}{\partial x}(t-(r\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})dW_r.$$

Integrando en el intervalo $[0,r\wedge\tau_\xi]$ y usando que u es una solución de (3.13), tenemos

$$u(t-(r\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})=u(t,\xi)+\int_0^{r\wedge\tau_\xi^m}\sigma(X_s^\xi)\frac{\partial u}{\partial x}(t-s,X_s^\xi)dW_s.$$

Como u es acotada entonces la anterior integral estocástica es una martingala cuadrado integrable. Por lo tanto $E(\int_0^{r\wedge\tau_\xi^m}\sigma(X_s^\xi)\frac{\partial u}{\partial x}(t-s,X_s^\xi)dW_s)=0$, y

$$u(t,\xi)=E\left[u(t-(r\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})\right].$$

Tendiendo $r\uparrow t$, la continuidad de X^ξ y la propiedad de que u es acotada, junto con el teorema de convergencia dominada, nos permite escribir

$$\begin{aligned}
u(t,\xi) &= E\left[u(t-(t\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t\wedge\tau_\xi^m})\right]\\
&= E\left[u(t-(t\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t\wedge\tau_\xi^m}),\tau_\xi<t\right]+E\left[u(t-(t\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t\wedge\tau_\xi^m}),\tau_\xi=t\right]\\
&\quad +E\left[u(t-(t\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t\wedge\tau_\xi^m}),\tau_\xi>t\right]. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Sea $0<\epsilon<t$. Entonces

$$\begin{aligned}
u(t,\xi)-u(t-\epsilon,\xi) &= E\left[u(t-(t\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t\wedge\tau_\xi^m})-u(t-\epsilon-(t-\epsilon\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t-\epsilon\wedge\tau_\xi^m}),\tau_\xi<t\right]\\
&\quad +E\left[u(t-(t\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t\wedge\tau_\xi^m})-u(t-\epsilon-(t-\epsilon\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t-\epsilon\wedge\tau_\xi^m}),\tau_\xi=t\right]\\
&\quad +E\left[u(t-(t\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t\wedge\tau_\xi^m})-u(t-\epsilon-(t-\epsilon\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t-\epsilon\wedge\tau_\xi^m}),\tau_\xi>t\right]\\
&= E_1+E_2+E_3. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Nota que $E_3\to 0$ si $m\to\infty$ debido a que $u(0,x)=0$. También tenemos

$$\lim_{m\to\infty}E_1=E\left[u(t-\tau_\xi,X^\xi_{\tau_\xi})-u(t-\epsilon-(t-\epsilon\wedge\tau_\xi),X^\xi_{t-\epsilon\wedge\tau_\xi}),\tau_\xi<t\right],$$

y en consecuencia $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\lim_{m\to\infty}E_1=0$. De manera similar en E_2,

$$\lim_{m\to\infty}E\left[u(t-\epsilon-(t-\epsilon\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t-\epsilon\wedge\tau_\xi^m}),\tau_\xi=t\right]=E\left[u(0,X^\xi_{t-\epsilon}),\tau_\xi=t\right]=0,$$

por lo tanto, la continuidad de u, implica

$$\lim_{m\to\infty}E\left[u(t-(t\wedge\tau_\xi^m),X^\xi_{t\wedge\tau_\xi^m}),\tau_\xi=t\right]=0.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
u(t,\xi) &= E[u(t-\tau_\xi,X^\xi_{\tau_\xi}),\tau_\xi<t]+E[u(0,X^\xi_{\tau_\xi}),\tau_\xi=t]+E[u(0,X^\xi_t),\tau_\xi>t]\\
&= E[u(t-\tau_\xi,X^\xi_{\tau_\xi}),\tau_\xi<t]. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Ahora consideremos el caso a).

$$\begin{aligned}
u(t,\xi) &= E[u(t-\tau_\xi,\pm\infty),\tau_\xi<t]\\
&= P(\tau_\xi<t).
\end{aligned}$$

La continuidad de u implica $u(t,\xi) = \lim_{\epsilon\to 0} u(t+\epsilon,\xi) = P(\tau_\xi \leq t)$.

Para el caso b) la prueba es similar. De la igualdad (3.17) obtenemos

$$\begin{aligned} u(t,\xi) &= E\left[u(t-\tau_\xi, X^\xi_{\tau_\xi}), \tau_\xi < t, \tau^+_\xi < \tau^-_\xi\right] \\ &\quad + E\left[u(t-\tau_\xi, X^\xi_{\tau_\xi}), \tau_\xi < t, \tau^-_\xi < \tau^+_\xi\right] \\ &= P(\tau^+_\xi \leq t). \end{aligned}$$

Finalmente, el caso c) se prueba de manera semejante. De esta forma la prueba está completa. □

Ejemplo 57 **i)** En el ejemplo 41 con $h \equiv 1$, considere

$$\bar{u}(t,\xi) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\xi^{1-\alpha}}{(\alpha-1)\sqrt{t}}\right), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0, \end{cases}$$

y

$$\underline{u}(t,\xi) = \begin{cases} 0, & \xi > 0, \\ \Phi\left(\frac{|\xi|^{1-\alpha}}{(\alpha-1)\sqrt{t}}\right), & \xi \leq 0. \end{cases}$$

$\bar{u}$ y $\underline{u}$ satisfacen los casos b) y c) del Teorema 55, respectivamente. En particular, si $\xi > 0$, entonces $\bar{u}(\infty,\xi) = 1$, por lo tanto tenemos explosión positiva. Este fenómeno es explicado por Milian (vea Teorema 1 en [28]) debido a que la solución involucrada es un proceso no negativo cuando $\xi > 0$.

ii) Para $\beta > 0$, la ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{a^2}{2} e^{2\beta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \beta a^2 e^{2\beta x} \frac{\partial u}{\partial x}(t,x), \\ u(0,x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

tiene la solución,

$$u(t,x) = \exp\left(-\frac{e^{-2\beta x}}{2(\alpha\beta)^2 t}\right).$$

Como $u(t,\infty) = 1$ y $u(t,-\infty) = 0$, entonces la distribución del tiempo de explosión para la ecuación diferencial estocástica

$$X^x_t = x + \int_0^t a^2 \beta e^{2\beta X^x_s} ds + \int_0^t a e^{\beta X^x_s} dW_s$$

está dada por

$$P(\tau_\xi \leq t) = \exp\left(-\frac{e^{-2\beta x}}{2(a\beta)^2 t}\right)$$

debido a que $P(\tau_\xi^+ < \infty) = 1$.

Nota 58 No es difícil ver que los Ejemplos 41 y 42 son soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), entonces conjeturamos que la distribución del tiempo de explosión es la solución de tal EDP. Si esto es cierto, entonces tenemos el siguiente criterio de explosión: Existe explosión en tiempo finito si y sólo si la correspondiente EDP tiene una solución acotada. Además, este criterio podría ser aplicado en más dimensiones y para procesos no autónomos (ver [11]).

3.6. La transformada de Laplace de la distribución del tiempo de explosión

Finalmente, en esta sección indicaremos como podemos calcular la transformada de Laplace de la distribución del tiempo de explosión τ_ξ de la solución de la ecuación (3.10). Esto significa que suponemos que la ecuación

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t b(s, X_s^\xi)ds + I_t, \quad t \geq 0, \tag{3.18}$$

tiene una única solución que puede explotar en tiempo finito, donde b toma valores en $\mathbb{R}^+$ e $I_t = \int_0^t f(s)dW_s$. Note que si $\omega \in \Omega$ es tal que $\tau_\xi(\omega) < \infty$, entonces $X_t^\xi > \xi + \inf_{0 \leq s \leq \tau_\xi(\omega)} I_t(\omega)$ con $t \leq \tau_\xi(\omega)$, y como consecuencia $\int_0^{\tau_\xi(\omega)} b(s, X_s^\xi) = \infty$. Por lo tanto, $X_{\tau_{\xi^-}} = \infty$, sobre $[\tau_\xi < \infty]$, y $\tau_\xi = \tau_\xi^+$.

Comenzaremos con un resultado auxiliar.

Lema 59 Sea $\lambda > 0$ y τ_ξ el tiempo de explosión de la solución de la ecuación (3.18). Entonces

$$E\left(e^{-\lambda\tau_\xi}\right) = \lambda \int_0^\infty P(\tau_\xi \leq u)e^{-\lambda u}du.$$

Demostración. Vamos a denotar la distribución de τ_ξ por F_{τ_ξ}. Entonces

$$E\left(e^{-\lambda\tau_\xi}\right) = \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda s}F_{\tau_\xi}(ds) = \lambda \int_{(0,\infty)} \left(\int_s^\infty e^{-\lambda u}du\right) F_{\tau_\xi}(ds).$$

El teorema de Fubini implica

$$E\left(e^{-\lambda\tau_\xi}\right)=\lambda\int_0^\infty\left(\int_{(0,u]}F_{\tau_\xi}(ds)\right)e^{-\lambda u}du=\lambda\int_0^\infty F_{\tau_\xi}(u)e^{-\lambda u}du.$$

Así la prueba queda completa. $\square$

Ahora podemos establecer el resultado principal de esta sección.

Teorema 60 Considere $\lambda>0$, τ_ξ el tiempo de explosión de la solución de (3.18) y una función acotada $u:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que es la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{1}{2}f^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)-\lambda u(t,x),\quad t>0\quad \text{y}\quad x\in\mathbb{R},\\ &u(t,\infty)=1.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Entonces, $\lambda\int_0^\infty P(\tau_\xi\le u)e^{-\lambda u}du=u(0,\xi)$.

Demostración. Como en la prueba del Teorema 55 definimos los tiempos de paro $\tau_\xi^m=\text{ínf}\{t>0:|X_t^\xi|>m\}$, y aplicamos la fórmula de Itô a los procesos $X^\xi_{t\wedge\tau_\xi^m}$ y la función $e^{-\lambda t}u(t,x)$ para $t>0$.

$$\begin{aligned}d\left(e^{-\lambda(r\wedge\tau_\xi^m)}u\left(r\wedge\tau_\xi^m,X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m}\right)\right)=\Bigg\{e^{-\lambda(r\wedge\tau_\xi^m)}\Bigg(&1_{[0,\tau_\xi^m]}(r)\frac{\partial u}{\partial r}(r\wedge\tau_\xi^m,X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})+\\ &1_{[0,\tau_\xi^m]}(r)b(r,X_r^\xi)\frac{\partial u}{\partial x}(r\wedge\tau_\xi^m,X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})\\ &+\frac{1}{2}1_{[0,\tau_\xi^m]}(r)f^2(r)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(r\wedge\tau_\xi^m,X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})-\lambda 1_{[0,\tau_\xi^m]}u(r\wedge\tau_\xi^m,X_{r\wedge\tau_\xi^\xi})\Bigg)\Bigg\}dr\\ &+1_{[0,\tau_\xi^m]}(r)e^{-\lambda(r\wedge\tau_\xi^m)}f(r)\frac{\partial u}{\partial x}(r\wedge\tau_\xi^m,X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})dW_r,\end{aligned}$$

integrando sobre el intervalo $[0,r\wedge\tau_\xi]$

$$e^{-\lambda(r\wedge\tau_\xi^m)}u(r\wedge\tau_\xi^m,X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})=u(0,\xi)+\int_0^{r\wedge\tau_\xi^m}e^{-\lambda s}f(s)\frac{\partial u}{\partial x}(s,X_s^\xi)dW_s.$$

Puesto que u es una función acotada, entonces la integral estocástica anterior es una martingala cuadrado integrable. Por lo tanto $E(\int_0^{r\wedge\tau_\xi^m}e^{-\lambda s}f(s)\frac{\partial u}{\partial x}(s,X_s^\xi)dW_s)=0$, y

$$u(0,\xi)=E\left(u(r\wedge\tau_\xi^m,X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})\exp(-\lambda(r\wedge\tau_\xi^m)\right).$$

Ahora podemos completar la prueba de este resultado combinando el Lema 59 y los argumentos usados en la última parte de la prueba del Teorema 55.

$$\begin{aligned} u(0,\xi) =& E\left(u(r\wedge\tau_\xi^m, X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})\exp(-\lambda(r\wedge\tau_\xi^m), \tau^\xi \leq r\right) \\ &+ E\left(u(r\wedge\tau_\xi^m, X^\xi_{r\wedge\tau_\xi^m})\exp(-\lambda(r\wedge\tau_\xi^m), \tau^\xi > r\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

En efecto primero tendemos $m \uparrow \infty$, y después $r \uparrow \infty$. □

En algunos casos tenemos el recíproco del Teorema 60. Por ejemplo, considere la ecuación diferencial estocástica

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t \left(g\left(X_s^\xi\right) + a - b\right) ds + cW_t, \quad t \geq 0, \tag{3.21}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > b$ y $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$. Entonces la ecuación diferencial ordinaria asociada es

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{2}w''(x) + (g(x) + a - b)\, w'(x) - \lambda w(x) &= 0, \quad t > 0, \\ w(\infty) &= 1. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Por lo tanto, si X^ξ explota en tiempo finito entonces (3.22) tiene una solución acotada, de hecho es la trasformada de Laplace del tiempo de explosión (ver [9]). Entonces la solución de

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + (g(x-bt)+a)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) - \lambda u(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &u(t,\infty) = 1. \end{aligned}$$

está dada por $u(t,x) = w(x - bt)$.

Un criterio de Osgood para una ecuación diferencial estocástica semilineal

La propuesta de esta sección es dar una extensión del criterio de Osgood para la explosión en tiempo finito de la solución X de la ecuación diferencial estocástica semilineal

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t b(s, X_s^\xi)ds + \int_0^t \sigma(s)X_s^\xi dW_s,\ t \geq 0.$$

Aquí b es un campo aleatorio no negativo, no decreciente por componentes y continuo (es decir, b es una variable aleatoria que toma valores en un espacio de las funciones continuas de $\mathbb{R}$) y σ es un proceso continuo y predecible.

4.1. Una extensión del criterio de Osgood para ecuaciones no autónomas

El siguiente resultado extiende el criterio original de Osgood (ver Proposición 18) para el caso en el que la función b tiene dependencia del tiempo.

Proposición 61 Sea $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua no negativa. Supongamos además que b es positiva y no decreciente por componentes en el conjunto $[0, \infty) \times (c, \infty)$ con $c \in \mathbb{R}$. Entonces la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= b(t, y(t)), \quad t > 0, \\ y(0) &= \xi, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $\xi > c$, explota en tiempo finito si y solo si

$$\int_\xi^\infty \frac{ds}{b(a, s)} < \infty,$$

para alguna $a > 0$.

Demostración. Vamos a suponer que el tiempo de explosión de la ecuación (4.1) es finito, (es decir, $T_\xi^y < \infty$) y consideremos la ecuación

$$v(t) = \xi + \int_0^t b(T_\xi^y, v(s))ds, \quad t \geq 0.$$

Por otro lado como $b(\cdot, x)$ es no decreciente se satisface que

$$y(t) \leq \xi + \int_0^t b(T_\xi^y, y(s))ds, \quad t < T_\xi^y.$$

En efecto la solución y de la ecuación (4.1) es no decreciente debido a que $b \geq 0$, y por lo tanto $y > c$ sobre $[0, T_\xi^y)$. El inciso (ii) del Lema 24 nos permite concluir que el tiempo de explosion, T_ξ^v, de v es finito y por lo tanto el criterio de Osgood (vea Proposición 18) implica que

$$\int_\xi^\infty \frac{ds}{b(T_\xi^y, s)} < \infty.$$

Recíprocamente, ahora supongamos que $T_\xi^y = \infty$. Sea $a > 0$. Usando que $b \geq 0$ y $b(\cdot, x)$ es no decreciente se cumple

$$y(t) \geq \xi + \int_a^t b(s, y(s))ds \geq \xi + \int_a^t b(a, y(s))ds, \quad t \geq a.$$

Consecuentemente el hecho de que $b(t, \cdot)$ es no decreciente y el inciso (i) del Lema 24 implican que la solución de

$$u(t) = \xi + \int_0^t b(a, u(s))ds, \quad t \geq 0$$

no explota en tiempo finito debido a que $\xi \leq u(t) \leq y(t + a)$ para cada $t \geq 0$. Entonces el criterio de Osgood nos permite concluir que

$$\int_\xi^\infty \frac{ds}{b(a, s)} = \infty.$$

Así, la demostración está completa. $\square$

4.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas semilineales

En esta sección estudiaremos la ecuación diferencial estocástica semilineal

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t b(s, X_s^\xi)ds + \int_0^t \sigma(s) X_s^\xi dW_s, \quad t \geq 0, \tag{4.2}$$

donde la condición inicial ξ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_0-$medible y, en lo que resta de esta sección, los coeficientes b y σ satisfacen las siguientes hipóstesis:

H5: $b : (\Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ es un campo aleatorio no negativo y continuo con probabilidad uno. Aquí $\mathcal{P}$ es la $\sigma-$álgebra predecible y $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la $\sigma-$álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$.

H6: $\sigma : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es un proceso continuo y predecible.

Un caso particular de la prueba de Feller

Como primer paso, en esta parte de la tesis, analizaremos el caso autónomo de la ecuación (4.2), es decir, cuando $\sigma \equiv 1$ y $b(t,x) = b(x)$. Estudiaremos la ecuación

$$Z_t^\xi = \xi + \int_0^t b(Z_s^\xi)ds + \int_0^t Z_s^\xi dW_s, \quad t \geq 0. \tag{4.3}$$

Aquí $\xi > 0$ es un número real y $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua no negativa.

Comenzaremos definiendo la siguiente función

$$\widetilde{b}(x) = \frac{b(x)}{x}, \quad x > 0.$$

Teorema 62 Suponga que $\widetilde{b} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente tal que $\widetilde{b} > 1/2$. Entonces, el tiempo de explosión T_ξ^Z de la solución de la ecuación (4.3) es finita con probabilidad 1 si y solo si

$$\int_\xi^\infty \frac{ds}{2b(s) - s} < \infty.$$

Nota 63 Note que $2b(s) - s > 0$ si $\widetilde{b}(s) > \frac{1}{2}$.

Demostración. Sean $\tau_\xi^m = \text{ínf}\{t > 0 : |Z_t^\xi| > m\}$, para $m \in \mathbb{R}_+$, tiempos de paro. Aplicando la fórmula de Itô (en particular, la fórmula (2.4)) a los procesos parados

$$R^\xi_{\tau_\xi^m \wedge t} = Z^\xi_{\tau_\xi^m \wedge t} \exp\left(-W_{t\wedge\tau_\xi^m} + \frac{\tau_\xi^m \wedge t}{2}\right), \quad t > 0, \tag{4.4}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} d(R^{\xi}_{\tau^m_\xi \wedge t}) =& \exp\left(-W_{\tau^m_\xi \wedge t} + \frac{\tau^m_\xi \wedge t}{2}\right) b(Z^{\xi}_t) 1_{[0,\tau^m_\xi]}(t)dt \\ &+ \exp\left(-W_{\tau^m_\xi \wedge t} + \frac{\tau^m_\xi \wedge t}{2}\right) 1_{[0,\tau^m_\xi]}(t) \left(Z^{\xi}_t - Z^{\xi}_{\tau^m_\xi \wedge t}\right) dW_t \\ &+ \exp\left(-W_{\tau^m_\xi \wedge t} + \frac{\tau^m_\xi \wedge t}{2}\right) 1_{[0,\tau^m_\xi]}(t) \left(Z^{\xi}_{\tau^m_\xi \wedge t} - Z^{\xi}_t\right) dt. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Si tendemos $m \uparrow \infty$ en la ecuación (4.5) se obtiene

$$d(R^{\xi}_t) = \exp\left(-W_t + \frac{t}{2}\right) b(Z^{\xi}_t)dt, \quad t < T^Z_\xi,$$

o en su representación integral

$$R^{\xi}_t = \xi + \int_0^t e^{-W_s + \frac{s}{2}} b\left(e^{W_s - \frac{s}{2}} R^{\xi}_s\right) ds, \quad t < T^Z_\xi.$$

Si usamos el hecho de que b es no negativa entonces vemos que

$$Z^{\xi}_t = \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right) R^{\xi}_t > 0, \quad t \geq 0. \tag{4.6}$$

Ahora somos capaces de demostrar el resultado usando el caso ii) del Teorema 17, es decir, la prueba de Feller para explosiones con $l = 0$, $r = \infty$ y $c = \xi$. A partir de la monotonicidad de $\widetilde{b}$ tenemos que

$$\begin{aligned} p(0) &= -\int_0^\xi \exp\left(2\int_s^\xi \widetilde{b}(r)\frac{dr}{r}\right) ds \\ &\leq -\int_0^\xi \exp\left(2\widetilde{b}(s)\int_s^\xi \frac{dr}{r}\right) ds \\ &= -\int_0^\xi \left(\frac{\xi}{s}\right)^{2\widetilde{b}(s)} ds. \end{aligned}$$

Usando que $\xi/s \geq 1$ y $2\widetilde{b}(s) - 1 > 0$, se concluye que

$$p(0) \leq -\int_0^\xi \frac{\xi}{s} ds = -\infty.$$

Por lo tanto de la prueba de Feller, es suficiente mostrar que $v(\infty) < \infty$ si y solo si $\int_\xi^\infty (2b(s) - s)^{-1} ds < \infty$. Usando la definición de la función v, vea (2.6), vemos que

$$
\begin{aligned}
v(\infty) &= \int_\xi^\infty \int_\xi^y \frac{2}{z^2} \exp\left(-2\int_\xi^y \widetilde{b}(r)\frac{dr}{r} + 2\int_\xi^z \widetilde{b}(r)\frac{dr}{r} \right) dzdy \\
&= \int_\xi^\infty \int_\xi^y \frac{2}{z^2} \exp\left(-2\int_z^y \widetilde{b}(r)\frac{dr}{r} \right) dzdy \\
&\geq \int_\xi^\infty \int_\xi^y \frac{2}{z^2} \exp\left(-2\widetilde{b}(y) \ln\left(\frac{y}{z}\right) \right) dzdy \\
&= 2\int_\xi^\infty y^{-2\widetilde{b}(y)} \int_\xi^y \frac{dz}{z^{2-2\widetilde{b}(y)}} dy \\
&= 2\int_\xi^\infty \left\{ \frac{1}{2b(y)-y} - \frac{\xi^{2\widetilde{b}(y)-1} y^{1-2\widetilde{b}(y)}}{2b(y)-y} \right\} dy. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Al ser la función $2\widetilde{b}-1$ no decreciente, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int_\xi^\infty \frac{\xi^{2\widetilde{b}(y)-1} y^{1-2\widetilde{b}(y)}}{2b(y)-y} dy &= \xi^{-1} \int_\xi^\infty \frac{1}{2\widetilde{b}(y)-1} \left(\frac{\xi}{y}\right)^{2\widetilde{b}(y)} dy \\
&\leq \frac{\xi^{-1}}{2\widetilde{b}(\xi)-1} \int_\xi^\infty \left(\frac{\xi}{y}\right)^{2\widetilde{b}(y)} dy \\
&\leq \frac{\xi^{-1}}{2\widetilde{b}(\xi)-1} \int_\xi^\infty \left(\frac{\xi}{y}\right)^{2\widetilde{b}(\xi)} dy \\
&= \frac{1}{(2\widetilde{b}(\xi)-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Las últimas dos desigualdades se concluyen a partir de que $\xi/y < 1$ y $\widetilde{b}$ es no decreciente. Por lo tanto (4.7) implica que $\int_\xi^\infty (2b(s)-s)^{-1} ds < \infty$ if $v(\infty) < \infty$.

Por otro lado, por el Teorema de Fubini

$$
\begin{aligned}
v(\infty) &\le \int_\xi^\infty \int_\xi^y \frac{2}{z^2} \exp\left(-2\widetilde{b}(z)\int_z^y \frac{dr}{r}\right) dzdy \\
&= \int_\xi^\infty \int_\xi^y \frac{2}{z^2} \left(\frac{y}{z}\right)^{-2\widetilde{b}(z)} dzdy \\
&= 2\int_\xi^\infty z^{2\widetilde{b}(z)-2} \int_z^\infty y^{-2\widetilde{b}(z)} dydz \\
&= 2\int_\xi^\infty \frac{z^{-1}}{2\widetilde{b}(z)-1} dz \\
&= 2\int_\xi^\infty \frac{dz}{2b(z)-z}.
\end{aligned}
$$

Como consecuencia, $v(\infty) < \infty$ si $\int_\xi^\infty (2b(s)-s)^{-1} dz < \infty$. $\square$

Una generalización de la prueba de Feller

Ahora vamos a considerar la siguiente ecuación diferencial estocástica no autónoma

$$
Y_t^\xi = \xi + \int_0^t b(s, Y_s^\xi) ds + \int_0^t Y_s^\xi dW_s, \quad t \ge 0. \tag{4.8}
$$

Donce ξ está definida como en la ecuación (4.2) y recordemos que la función b satisface la Condición **H5**.

Usaremos la notación

$$
\bar{b}(\omega, t, x) = \frac{b(\omega, t, e^x)}{e^x}, \quad (\omega, t, x) \in \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}.
$$

Ahora presentamos una generalización del Teorema 62.

Teorema 64 Sea $c \ge 0$ y suponga que con probabilidad 1 la función $\bar{b} : \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface:

(i) para cada $x \in \mathbb{R}$, $\bar{b}(\cdot, x) : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es no decreciente, es decir, no decreciente en la componente tiempo,

(ii) para cada $t \in [0, \infty)$, $\bar{b}(t, \cdot) : \Omega \times (c, \infty) \to \mathbb{R}$ es no decreciente, es decir, no decreciente en la componente espacio,

(iii) para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, $\bar{b}(t, x) \ge 1/2$ y, para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times (c, \infty)$, $\bar{b}(t, x) > 1/2$.

Entonces, para casi toda ω_0 en

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega : & W_\cdot(\omega) \text{ es continua}, b(\omega,\cdot), \bar{b}(\omega,\cdot)\\ & \text{satisfacen las hipótesis anteriores y } \xi(\omega) > 0\},\end{aligned}$$

la solución $Y_\cdot^{\xi}(\omega_0)$ de la ecuación (4.8) explota en tiempo finito si y solo si

$$\int_\theta^\infty \frac{ds}{2b(\omega_0, a, s) - s} < \infty, \quad \text{for all } \theta > e^c, \tag{4.9}$$

para alguna $a > 0$.

Notas 65 **(a)** Note que a depende de ω_0.

(b) Si con probabilidad 1, $\bar{b}(t,x) > 1/2$ para cada $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$, entonces (4.9) es equivalente a

$$\int_\xi^\infty \frac{ds}{2b(\omega_0, a, s) - s} < \infty.$$

Demostración. Usando el caracter local de la integral de Itô podemos suponer $\xi > 0$. Considere los tiempos de paro $\tau_\xi^m = \inf\{t > 0 : |Y_t^\xi| > m\}$. Aplicamos el Teorema 1 como en (4.4) a los procesos

$$R^\xi_{\tau_\xi^m \wedge t} = Y^\xi_{\tau_\xi^m \wedge t} \exp\left(-W_{t\wedge\tau_\xi^m} + \frac{\tau_\xi^m \wedge t}{2}\right), \quad t > 0, \tag{4.10}$$

y usando que $b \geq 0$ obtenemos que R es un proceso no decreciente tal que

$$R_t^\xi = \xi + \int_0^t e^{-W_s + \frac{s}{2}} b(s, e^{W_s - \frac{s}{2}} R_s^\xi) ds, \quad 0 \leq t < T_\xi^Y. \tag{4.11}$$

Entonces concluimos que $Y^\xi > 0$ y que el proceso

$$Z_t^{\log\xi} = \log(Y_t^\xi), \quad 0 \leq t < T_\xi^Y, \tag{4.12}$$

está bien definido además $T^Z_{\log\xi} = T^Y_\xi$. Podemos aplicar de nuevo la fórmula de Itô al proceso

$$Y^\xi_{\tau_\xi^m \wedge t} = \xi + \int_0^t b(s, Y_s^\xi) 1_{]0,\tau_\xi^m]} ds + \int_0^t Y_s^\xi 1_{]0,\tau_\xi^m]} dW_s, \ \ 0 \leq t < T_\xi^Y,$$

y la función $\log(y)$. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} Z_t^{\log(\xi)} &= \log(\xi) + \int_0^t \frac{b(s, e^{Z_s^{\log(\xi)}})}{e^{Z_s^{\log(\xi)}}} ds + W_t - \frac{t}{2} \\ &= \log(\xi) + \int_0^t \bar{b}(s, Z_s^{\log(\xi)}) ds + W_t - \frac{t}{2}, \quad 0 \le t < T^Z_{\log(\xi)}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ahora fijamos $\omega_0 \in \widetilde{\Omega}$ y primero suponemos que $T^Y_\xi(\omega_0) < \infty$. Como $Y^\xi(\omega_0) > 0$ concluimos que $Y(\omega_0)$ explota a $+\infty$, y entonces $T^Z_{\log(\xi)}(\omega_0) < \infty$ y $Z^{\log(\xi)}(\omega_0)$ explota a $+\infty$. Por lo tanto podemos encontrar $T \in (0, T_Z^{\log(\xi)})$ tal que

$$Z_t^{\log(\xi)}(\omega_0) > c, \text{ para todo } t \in [T, T^Z_{\log(\xi)}(\omega_0)),$$

y reescribir la ecuación (4.13) como

$$\begin{aligned} Z_{T+t}^{\log(\xi)}(\omega_0) =& Z_T^{\log(\xi)}(\omega_0) + W_{T+t}(\omega_0) - W_T(\omega_0) \\ &+ \int_T^{T+t} \left\{ \bar{b}(\omega_0, s, Z_s^{\log(\xi)}) - \frac{1}{2} \right\} ds, \ t \in [0, T^Z_{\log(\xi)} - T). \end{aligned}$$

Utilizando la notación $y(t) = Z_{T+t}^{\log(\xi)}(\omega_0)$ tenemos

$$\begin{aligned} y(t) =& Z_T^{\log(\xi)}(\omega_0) + W_{T+t}(\omega_0) - W_T(\omega_0) \\ &+ \int_0^t \left\{ \bar{b}(\omega_0, s+T, y(s)) - \frac{1}{2} \right\} ds, \ t \in [0, T^Z_{\log(\xi)} - T). \end{aligned}$$

Al ser $\bar{b}$ no decreciente en la componente tiempo obtenemos la siguiente desigualdad

$$y(t) \le M + \int_0^t \left\{ \bar{b}(\omega_0, T^Z_{\log(\xi)}, y(s)) - \frac{1}{2} \right\} ds, \ t \in [0, T^Z_{\log(\xi)} - T),$$

donde

$$M = Z_T^{\log(\xi)}(\omega_0) + 2 \sup\{|W_t(\omega_0)| : t \in [0, T^Z_{\log(\xi)}]\} + c.$$

Ahora consideremos la ecuación integral

$$x(t) = M + \int_0^t \left\{ \bar{b}(\omega_0, T^Z_{\log(\xi)}, x(s)) - \frac{1}{2} \right\} ds, \ t \ge 0.$$

Del caso **(ii)** del Lema 24 concluimos que $T^x_M \le T^Z_{\log(\xi)}(\omega_0)$. Como $M > c$ la prueba de Osgood (vea Nota 19) implica que

$$2 \int_M^\infty \frac{ds}{2\bar{b}(\omega_0, T^Z_{\log(\xi)}, s) - 1} = 2 \int_{e^M}^\infty \frac{ds}{2b(\omega_0, T^Z_{\log(\xi)}, s) - s} < \infty$$

y por lo tanto la continuidad de b nos permite concluir que

$$\int_{\theta}^{\infty} \frac{ds}{2b(\omega_0, T^Z_{\log(\xi)}, s) - s} < \infty, \text{ for all } \theta > e^c.$$

Ahora vamos a suponer que $T^Y_\xi(\omega_0) = \infty$ y sea $a > 0$ una constante fija. Como antes $Y^\xi(\omega_0) > 0$ y el proceso (4.12) está bien definido además $T^Z_{\log(\xi)}(\omega_0) = \infty$. Por la ley del logaritmo iterado (vea por ejemplo, Teorema 4.3 en [26]) podemos encontrar un sucesión $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $a \leq t_n \uparrow \infty$ y

$$\text{ínf}\{W_{h+t_n}(\omega_0) : 0 \leq h \leq 1\} \uparrow \infty, \text{ if } n \to \infty. \tag{4.14}$$

De la ecuación (4.13) junto con las hipótesis que la función $\bar{b}$ satisface, se tiene

$$\begin{aligned} Z^{\log(\xi)}_{t+t_n}(\omega_0) \geq & \log(\xi)(\omega_0) + \int_0^{t_n} \left(\bar{b}(\omega_0, s, Z^{\log(\xi)}_s(\omega_0)) - \frac{1}{2} \right) ds + \text{ínf}\{W_{h+t_n}(\omega_0) : 0 \leq h \leq 1\} \\ & + \int_{t_n}^{t+t_n} \left(\bar{b}(\omega_0, s, Z^{\log(\xi)}_s(\omega_0)) - \frac{1}{2} \right) ds \\ \geq & \log(\xi)(\omega_0) + \text{ínf}\{W_{h+t_n}(\omega_0) : 0 \leq h \leq 1\} \\ & + \int_{t_n}^{t+t_n} \left(\bar{b}(\omega_0, a, Z^{\log(\xi)}_s(\omega_0)) - \frac{1}{2} \right) ds \\ = & \tilde{m}_n + \int_0^t \{\bar{b}(\omega_0, a, Z^{\log(\xi)}_{s+t_n}(\omega_0)) - \frac{1}{2}\} ds, \text{ for } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Observe que (4.14) implica que $\tilde{m}_n > c$ para n suficientemente grande. De esta manera el caso (i) del Lema 24 implica que el tiempo de explosión $T^u_{\tilde{m}_n}$ de la ecuación

$$u(t) = \tilde{m}_n + \int_0^t \{\bar{b}(\omega_0, a, u(s)) - \frac{1}{2}\} ds, \text{ for } t \geq 0,$$

es más grande que 1. En consecuencia

$$2 \int_{\tilde{m}_n}^{\infty} \frac{ds}{2\bar{b}(\omega_0, a, s) - 1} \geq 1.$$

Entonces de (4.14) concluimos que

$$\int_{\theta}^{\infty} \frac{ds}{2b(\omega_0, a, s) - s} = \infty, \text{ for all } \theta > e^c.$$

Por lo tanto la prueba está completa. □

Dentro del contexto de esta sección, el siguiente resultado es una extensión de la prueba clásica de Osgood.

Proposición 66 Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria y suponga que la función $b : \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface, con probabilidad uno, las siguientes propiedades

(i) b es no decreciente por componentes y satisface ,

(ii) para cada $(t,x) \in [0,\infty) \times (c,\infty)$, $b(t,x) > 0$.

Para casi todo ω_0 en

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega : & W.(\omega) \text{ es continuo, } b(\omega,\cdot) \text{ satisface} \\ & \text{las hipótesis anteriores y } \xi(\omega) > c\},\end{aligned}$$

Si la solución $Y^{\xi}(\omega_0)$ de (4.8) explota en tiempo finito, entonces

$$\int_{\theta}^{\infty} \frac{ds}{b(\omega_0,a,s)} < \infty, \text{ para toda } \theta > c,$$

para alguna $a > 0$.

Demostración. Por hipótesis $T_{\xi}^{Y}(\omega_0) < \infty$. La continuidad de $W.(\omega_0)$ implica que

$$m = \text{ínf}\{e^{W_s(\omega_0)-\frac{s}{2}} : s \in [0, T_{\xi}^{Y}(\omega_0)]\} > 0.$$

Como el procesos $R^{\xi}(\omega_0)$, vea (4.11), explota a $+\infty$, existe un tiempo $T \in (0, T_{\xi}^{Y}(\omega_0))$ tal que

$$R_s^{\xi}(\omega_0) > \frac{c}{m}, \text{ para } s \in [T, T_{\xi}^{Y}(\omega_0)). \tag{4.15}$$

De (4.11) obtenemos

$$\begin{aligned}R_{T+t}^{\xi}(\omega_0) =& R_T^{\xi}(\omega_0) + \int_T^{T+t} e^{-W_s(\omega_0)+\frac{s}{2}} b(s, e^{W_s(\omega_0)-\frac{s}{2}} R_s^{\xi}(\omega_0))ds \\ =& R_T^{\xi}(\omega_0) + \int_0^t e^{-W_{s+T}(\omega_0)+\frac{s+T}{2}} b(s+T, e^{W_{s+T}(\omega_0)-\frac{s+T}{2}} R_{s+T}^{\xi}(\omega_0))ds \\ & \text{for } t \in [0, T_{\xi}^{Y} - T).\end{aligned}$$

Por la condición (4.15) y $s \in [0, T_{\xi}^{Y} - T)$

$$c < mR_{s+T}^{\xi}(\omega_0) \le e^{W_{T+s}(\omega_0)-\frac{T+s}{2}} R_{s+T}^{\xi}(\omega_0) \le MR_{s+T}^{\xi}(\omega_0) \tag{4.16}$$

donde

$$M = R_T^{\xi}(\omega_0) + \exp\left(\sup\{|W_t(\omega_0)| : t \le T_{\xi}^{Y}(\omega_0)\} + \frac{T_{\xi}^{Y}(\omega_0)}{2}\right) + c + 1.$$

Como b es no decreciente por componentes obtenemos

$$R^{\xi}_{T+t}(\omega_0) \leq M + \int_0^t Mb(T^Y_\xi(\omega_0), MR^{\xi}_{T+s}(\omega_0))ds, \;\; t \in [0, T^Y_\xi - T).$$

Si definimos $y(t) = MR^{\xi}_{T+t}(\omega_0)$ de la desigualdad previa llegamos a

$$y(t) \leq M^2 + \int_0^t M^2 b(T^Y_\xi(\omega_0), y(s))ds, \;\; t \in [0, T^Y_\xi - T).$$

Consideremos la ecuación integral

$$x(t) = M^2 + \int_0^t M^2 b(\omega_0, T^Y_\xi(\omega_0), x(s))ds, \;\; t \geq 0.$$

La desigualdad (4.16) implica que $y > c$ en $[0, T^Y_\xi - T)$, y es claro que $M^2 > c$, por lo tanto por el caso (ii) del Lema 24 concluimos que

$$x(t) \geq MR^{\xi}_{T+t}(\omega_0), \text{ para toda } t \in [0, T^Y_\xi - T),$$

y aplicando la prueba de Osgood se tiene que

$$\int_{M^2}^{\infty} \frac{ds}{M^2 b(\omega_0, T^Y_\xi(\omega_0), s)} < \infty.$$

El resultado se concluye de la continuidad de b y la hipótesis **(ii)**. $\square$

Ejemplo 67 Considere la ecuación

$$Z_t = 1 + \frac{1}{2}\int_0^t (Z_s)^2 ds + \int_0^t Z_s dW_s, \;\; t \geq 0. \tag{4.17}$$

Sea $\tau^m_\xi = \text{ínf}\{t > 0 : |Z_t| > m, m \in \mathbb{N}\}$. Como en la prueba del Teorema 62 aplicamos la fórmula de integración por partes (2.4) a los procesos parados

$$R^{\xi}_{\tau^m_\xi \wedge t} = Z^{\xi}_{t\wedge\tau^m_\xi} \exp\left(-W_{t\wedge\tau^m_\xi} + \frac{t \wedge \tau^m_\xi}{2}\right), \quad t < T^Z_\xi$$

y concluimos que

$$Z_t = \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right) R_t > 0, \quad t < T^Z_\xi. \tag{4.18}$$

Por lo tanto podemos usar el Teorema 17 (es decir, la prueba de Feller) para observar el comportamiento explosivo de Z sobre el intervalo $(0, \infty]$. De la funciones en (2.6) obtenemos

$$
\begin{aligned}
p(0) = & -\int_0^1 \exp(1-s)ds \\
=& 1-e > -\infty,
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
v(0) =& 2\int_0^1 \int_y^1 \frac{\exp(1-y)}{\exp(1-z)z^2} dzdy \\
=& 2\int_0^1 \int_y^1 \frac{\exp(z-y)}{z^2} dzdy \\
\geq & 2\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{z^2} dzdy \\
=& 2\int_0^1 \frac{1}{y} dy - 2 = \infty.
\end{aligned}
$$

En consecuencia la solución Z de la ecuación (4.17) no explota en tiempo finito con probabilidad positiva. Sin embargo

$$
\int_\theta^\infty \frac{dr}{r^2} < \infty, \text{ for all } \theta > 0,
$$

no contradice la implicación inversa de la Proposición 66 debido a que

$$
\int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \infty, \tag{4.19}
$$

como será discutido en la Proposición 68.

Como veremos más adelante la implicación inversa de la Proposición 66 es obtenida cuando la correspondiente integral diverge, lo cual no es similar al caso (4.19).

Proposición 68 Supongamos que la función $\bar{b} : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface, con probabilidad uno, las siguientes propiedades

(i) $\bar{b}$ es no decreciente por componentes,

(ii) para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$, $b(t, x) > 0$.

Para casi toda ω_0 en

$$\widetilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega : W_\cdot(\omega) \text{ es continua, } b(\omega,\cdot), \bar{b}(\omega,\cdot) \\ \text{satisfacen las hipótesis anteriores y } \xi(\omega) > 0\}.$$

Entonces la solución $Y^\xi(\omega_0)$ del proceso (4.8) explota en tiempo finito si

$$\int_0^\infty \frac{ds}{b(\omega_0,a,s)} < \infty$$

para alguna $a > 0$.

Demostración. Supongamos que $T_\xi^Y(\omega_0) = \infty$. Para $a > 0$ y el proceso (4.12) obtenemos

$$\begin{aligned} Z_{t+a}^{\log\xi} &= \log\xi(\omega_0) + W_{t+a}(\omega_0) - \frac{t+a}{2} + \int_0^a \bar{b}(\omega_0,s,Z_s^{\log\xi}(\omega_0))ds \\ &\quad + \int_a^{t+a} \bar{b}(\omega_0,s,Z_s^{\log\xi}(\omega_0))ds \\ &\geq \log\xi(\omega_0) + W_{t+a}(\omega_0) - \frac{t+a}{2} + \int_0^t \bar{b}(\omega_0,a,Z_{s+a}^{\log\xi}(\omega_0))ds,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Si renombramos el proceso Z_{t+a} por X_t tenemos

$$X_t(\omega_0) \geq m_n + \int_0^t \bar{b}(\omega_0,a,X_s(\omega_0))ds,\ t \in [0,n],$$

donde

$$m_n = \log\xi(\omega_0) - \sup_{t\in[0,n]} |W_{t+a}(\omega_0)| - \frac{n+a}{2}.$$

De manera similar al resultado anterior definimos el proceso

$$x(t) = m_n + \int_0^t \bar{b}(\omega_0,a,x_s(\omega_0))ds,\ t \geq 0.$$

Aplicando el Lema 24 y la prueba de Osgood (vea Proposición 18) podemos establecer las siguientes desigualdades

$$\int_0^\infty \frac{ds}{b(\omega_0,a,s)} \geq \int_{\exp(m_n)}^\infty \frac{ds}{b(\omega_0,a,s)} = \int_{m_n}^\infty \frac{ds}{\bar{b}(\omega_0,a,s)} \geq n.$$

Finalmente el resultado es obtenido cuando $n \to \infty$. □

4.3. Resultados principales

Ahora presentamos los resultados principales de este capítulo.

Teorema 69 Suponga que la función $b : \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface, con probabilidad uno, las siguientes propiedades

(i) b es no decreciente por componentes y satisface **H5**,

(ii) para cada $(t,x) \in [0,\infty) \times (0,\infty)$, $b(t,x) > 0$.

Sea X^ξ la solución de la ecuación (4.2) y ω_0 en

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega :& W_\cdot(\omega) \text{ es continua}, b(\omega,\cdot),\\ &\qquad \text{satisface las hipótesis anteriores y } \xi(\omega) > 0\}.\end{aligned}$$

Si $X^\xi_\cdot(\omega_0)$ explota en tiempo finito, entonces

$$\int_\theta^\infty \frac{ds}{b(\omega_0,a,s)} < \infty, \text{ para toda } \theta > 0$$

para alguna $a > 0$.

Demostración. Por la fórmula de Itô tenemos

$$\begin{aligned}X_t^\xi =& \xi \exp\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right)\\ &+ \int_0^t \exp\left(\int_s^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_s^t \sigma^2(s)ds\right) b(s,X_s^\xi)ds, \quad t < T_\xi^X.\end{aligned}$$

Sea

$$g(t) = \exp\left(-\int_0^t \sigma(s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right), \quad t \geq 0, \tag{4.20}$$

y $Y_t^\xi = g(t)X_t^\xi$. Por lo tanto

$$Y_t^\xi = \xi + \int_0^t g(s)b(s,f(s)Y_t^\xi)ds, \quad t < T_\xi^X, \tag{4.21}$$

donde

$$f(t) = \frac{1}{g(t)}, \quad t \geq 0.$$

Para $\omega_0 \in \widetilde{\Omega}$, la continuidad de g y $b(\omega_0, \cdot)$ implican que (4.21) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} y'(t) &= g(\omega_0, t) b(\omega_0, t, f(\omega_0, t) y(t)), \ t > 0, \\ y(0) &= \xi(\omega_0), \end{aligned} \tag{4.22}$$

donde $y(t) = Y_t^{\xi}(\omega_0)$, $t \geq 0$.

Puesto que $b \geq 0$ obtenemos $f(\omega_0, t) y(t) \geq f(\omega_0, t)\xi > 0$. Entonces (4.22), la hipótesis (ii) y el cambio de variable $s = y(r)$ implican

$$\begin{aligned} \int_0^t g(\omega_0, s) ds &= \int_0^t \frac{y'(\omega_0, r) dr}{b(\omega_0, r, f(\omega_0, r) y(r))} \\ &= \int_{\xi(\omega_0)}^{Y_t^{\xi}(\omega_0)} \frac{ds}{b(\omega_0, y^{-1}(s), f(\omega_0, y^{-1}(s)) s)} \\ : &= G(\omega_0, t). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Por hipótesis $T_{\xi(\omega_0)}^{Y(\omega_0)} < \infty$ donde $T_{\xi(\omega_0)}^{Y(\omega_0)}$ está definido como en la Proposición 18. A partir de que b es no decreciente por componentes, $y^{-1}(t) < T_{\xi(\omega_0)}^{Y(\omega_0)}$ y $t \geq \xi(\omega_0)$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\xi(\omega_0)}^{\infty} \frac{ds}{b(\omega_0, T_{\xi(\omega_0)}^{Y(\omega_0)}, sM)} &\leq \int_{\xi(\omega_0)}^{Y^{\xi}_{T_{\xi(\omega_0)}^{Y^{\xi}(\omega_0)}}} \frac{ds}{b(\omega_0, y^{-1}(s), s f(\omega_0, y^{-1}(s)))}, \\ &= G\left(\omega_0, T_{\xi(\omega_0)}^{Y(\omega_0)}\right) < \infty, \end{aligned}$$

con

$$M = \sup\left\{ f(\omega_0, y^{-1}(s)) : s \geq \xi(\omega_0) \right\} \leq \sup\left\{ f(\omega_0, r) : r \in \left[0, T_{\xi(\omega_0)}^{Y(\omega_0)}\right] \right\}.$$

Con lo anterior la prueba queda completa.

□

En lo que sigue usaremos la siguiente notación.

$$\Lambda(t) = \int_0^t \sigma^2(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Los siguientes teoremas son, en cierto sentido, el resultado inverso del teorema anterior.

Teorema 70 Supongamos que las hipotesis del Teorema 69 se satisfacen. Sea $\omega_0 \in \widetilde{\Omega}$ tal que $\Lambda(\omega_0, \infty) < \infty$ y $X_t^{\xi}(\omega_0)$ es finito para toda $t \geq 0$, donde X está definido por (4.2). Entonces,

$$\int_{\theta}^{\infty} \frac{ds}{b(\omega_0, a, s,)} = \infty, \text{ para toda } \theta > 0,$$

para alguna $a > 0$.

Nota 71 El Teorema 3.4.9 de [8] implica que el conjunto

$$\left\{\omega \in \Omega : \int_0^{\cdot} \sigma(s) dW_s \text{ es acotado sobre } \mathbb{R}^+\right\}$$

coincide con $\{\omega \in \Omega : \Lambda(\omega, \infty) < \infty\}$ redefiniendo σ sobre un conjunto de probabilidad cero.

Demostración. Sea ω_0 como en el enunciado del teorema. Entonces (4.20) y (4.23) implican

$$\begin{aligned} G(\omega_0, \infty) &= \int_0^\infty \exp\left(-\left(\int_0^s \sigma(r)dW_r\right)(\omega_0) + \frac{1}{2}\int_0^s \sigma^2(\omega_0, r)dr\right) ds \\ &\geq \int_0^\infty \exp\left(-\left(\int_0^s \sigma(r)dW_r\right)(\omega_0)\right) ds \\ &\geq \int_0^\infty \exp\left(-\sup_{u\geq 0}\left|\left(\int_0^u \sigma(r)dW_r\right)(\omega_0)\right|\right) ds = \infty. \end{aligned} \tag{4.24}$$

En la última igualdad hemos usado la Nota 71.

Observe que debido a que $b > 0$ y $X_t^\xi(\omega_0)$ es finita para toda $t \geq 0$, entonces $Y(\omega_0)$ es creciente (esto es, el proceso dado en (4.21)) por lo tanto el $\lim_{t\to\infty} Y_t(\omega_0)$ existe, de esta manera de (4.23) y (4.24) se cumple que

$$\int_{\xi(\omega_0)}^{\lim_{t\to\infty} Y_t^\xi(\omega_0)} \frac{ds}{b(\omega_0, y^{-1}(s), sf(\omega_0, y^{-1}(s)))} = \infty. \tag{4.25}$$

Como $b(\omega_0, \cdot) > 0$ y continua sobre el conjunto $[0, \infty) \times (0, \infty)$ podemos concluir que el $\lim_{t\to\infty} Y_t(\omega_0) = \infty$. Sea $a > 0$. De (4.25) obtenemos

$$\begin{aligned} \infty &= \int_{\xi(\omega_0)}^\infty \frac{ds}{b(\omega_0, y^{-1}(s), sf(\omega_0, y^{-1}(s)))} \\ &= \int_{\xi(\omega_0)}^{Y_a(\omega_0)} \frac{ds}{b(\omega_0, y^{-1}(s), sf(\omega_0, y^{-1}(s)))} + \int_{Y_a(\omega_0)}^\infty \frac{ds}{b(\omega_0, y^{-1}(s), sf(\omega_0, y^{-1}(s)))}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\infty = \int_{Y_a(\omega_0)}^\infty \frac{ds}{b(\omega_0, y^{-1}(s), sf(\omega_0, y^{-1}(s)))} \leq \int_{Y_a(\omega_0)}^\infty \frac{ds}{b(\omega_0, a, ms)},$$

donde

$$\begin{aligned} m &= \text{ínf}\{f(\omega_0, r) : r \geq 0\} \\ &\geq \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda(\omega_0, \infty)\right) \exp\left(-\sup_{t\geq 0}\left|\left(\int_0^t \sigma(r)dW_r\right)(\omega_0)\right|\right). \end{aligned}$$

De la nota 71 concluimos que $m > 0$ y entonces obtenemos el resultado. □

Teorema 72 Suponga que, con probabilidad 1, las siguientes hipótesis se satisfacen:

(i) $\sigma^2 > 0$ sobre $(0, \infty)$ y $\Lambda(\infty) = \infty$,

(ii) la función $\hat{b} : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como

$$\hat{b}(\omega, t, x) = \frac{b(\omega, \Lambda^{-1}(t), e^x)}{\sigma^2(\Lambda^{-1}(t))e^x}, \tag{4.26}$$

es no decreciente por componentes,

(iii) para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$, $b(t, x) > 0$.

Entonces, para casi toda ω_0 en

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega : & W_\cdot(\omega) \text{ es continua}, \ \hat{b}(\omega, \cdot), \ b(\omega, \cdot) \\ & \text{satisfacen las hipótesis anteriores y } \xi(\omega) > 0\}, \end{aligned}$$

la solución $X^\xi_\cdot(\omega_0)$ de (4.2) explota en tiempo finito si

$$\int_0^\infty \frac{ds}{b(\omega_0, a, s)} < \infty$$

para alguna $a > 0$.

Demostración. Del Teorema 3.4.4 en [8] sabemos que existe un movimiento Browniano $\tilde{B} = \{\tilde{B}_t : t \geq 0\}$ tal que

$$\int_0^t \sigma(s)dW_s = \tilde{B}_{\Lambda(t)}, \quad t \geq 0.$$

Esto nos permite escribir (4.21) como

$$Y^\xi_t = \xi + \int_0^t e^{-\tilde{B}_{\Lambda(s)} + \frac{\Lambda(s)}{2}} b(s, e^{\tilde{B}_{\Lambda(s)} - \frac{\Lambda(s)}{2}} Y^\xi_s)ds, \quad t \geq 0.$$

Aplicando el cambio de variable $u = \Lambda(s)$ al proceso anterior y estableciendo el proceso $Z_t^\xi = Y_{\Lambda^{-1}(t)}^\xi$ obtenemos

$$Z_t^\xi = \xi + \int_0^t \frac{e^{-\tilde{B}_s + \frac{s}{2}}}{\sigma^2(\Lambda^{-1}(s))} b(\Lambda^{-1}(s), e^{\tilde{B}_s - \frac{s}{2}} Z_s^\xi) ds, \quad t \geq 0.$$

Finalmente aplicando la fórmula de Itô (vea ecuación (2.4)) al proceso $\tilde{Z}_t^\xi = Z_t^\xi e^{\tilde{B}_t - t/2}$ obtenemos

$$\tilde{Z}_t^\xi = \xi + \int_0^t \frac{b(\Lambda^{-1}(s), \tilde{Z}_s^\xi)}{\sigma^2(\Lambda^{-1}(s))} ds + \int_0^t \tilde{Z}_s^\xi d\tilde{B}_s, \quad t \geq 0. \tag{4.27}$$

El resultado se obtiene de aplicar la Proposición 68 al proceso (4.27).

□

Nota 73 Sea $c \geq 0$ y suponga que con probabilidad 1 la función $\hat{b}$ definida en (4.26) satisface las hipótesis (i) a (iii) del Teorema 64. Entonces, para toda $\omega_0 \in \widetilde{\Omega}$ la solución $X_\cdot(\omega_0)$ de la ecuación (4.2) explota en tiempo finito si y solo si

$$\int_\theta^\infty \frac{ds}{2b(\omega_0, c_1, s) - c_2 s} < \infty, \text{ para toda } \theta > e^c,$$

para algunas constantes c_1 y c_2.

Ecuación Diferencial Estocástica con condición inicial anticipante

Hasta ahora hemos considerado la ecuación (2.2) en el sentido de Itô. Es decir, la integral estocástica $\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$ es la integral estocástica clásica. Como ya hemos señalado la integral de Itô está definida para procesos adaptados a la información para la cual W es un movimiento browniano. La idea de esta integral ha sido extendida para procesos más generales conocidos como semimartingalas (ver [3]). Sin embargo, no todos los fenómenos que ocurren en la naturaleza están bien representados con integrandos adaptados. Como se observó en §2.4 la integral hacia delante, dada por Russo y Vallois [40], es también una extensión de la integral de Itô y además coincide con la integral estocástica con respecto a W sobre los procesos acotados y $\mathcal{G}$-adaptados siempre que W es una semimartingala para una filtration $\mathcal{G}$.

En esta parte de la tesis presentamos un ejemplo de explosión para una ecuación diferencial estocástica autónoma donde la condición inicial es anticipante, por lo tanto la prueba de Feller no puede ser usada aquí, adicionalmente, la integral dada es en el sentido hacia adelante.

5.1. Explosión de una ecuación con condición inicial anticipante

En el resto de esta tesis trabajaremos con una ecuación diferencial estocástica donde la condición inicial es la variable aleatoria anticipante W_1. Es decir, nos ocupamos de la ecuación diferencial anticipante

$$Y_t = W_1 + \int_0^t Y_s^3 ds + \int_0^t Y_s^2 d^- W_s, \quad t \geq 0. \tag{5.1}$$

En lo sucesivo, desarrollaremos algunos resultados útiles con la finalidad de demostrar a través de la fórmula de sustitución para la integral hacia adelante (ver Teorema 34) que podemos construir una solución para la ecuación diferencial estocástica (5.1). Para tal propuesta primero consideraremos la ecuación integral estocástica no anticipante

$$X_t^x = x + \int_0^t (X_s^x)^3 ds + \int_0^t (X_s^x)^2 dW_s, \ \ t > 0, \tag{5.2}$$

donde los coeficientes de este proceso no satisfacen la condición de crecimiento lineal, sin embargo ellos satisfacen la condición de Lipschitz local y por lo tanto el Teorema 1 implica que la ecuación (5.2) tiene una única solución local.

$$X_t^x = \left(\frac{1}{x} - W_t\right)^{-1}, \tag{5.3}$$

la cual está definida hasta el tiempo de explosión $\lambda = \inf\{t > 0 : W_t = \frac{1}{x}\}$.

Con la finalidad de evitar problemas aplicando la fórmula de sustitución para la integral hacia adelante para el proceso (5.3) construiremos las siguientes funciones. Para $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$, sean φ_m, $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R})$ dos funciones acotadas que satisfacen

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{m}}, \quad x \leq \frac{2}{\sqrt{m}} \\ x, \quad x \in \left(\frac{3}{\sqrt{m}}, m\right) \\ m+1, \quad x \geq m+1, \end{cases}$$

$$\psi_m(x) = \begin{cases} -m-1, \quad x \leq -m-1 \\ x, \quad x \in \left(-m, -\frac{3}{\sqrt{m}}\right) \\ -\frac{2}{\sqrt{m}}, \quad x \geq -\frac{2}{\sqrt{m}}. \end{cases}$$

Es claro que $\varphi_m(x)$, $|\psi_m(x)| > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. La existencia de estas funciones se sigue de [24] (Lemas 2.13 y 2.14). Por consiguiente, las integrales estocásticas de Itô

$$\int_0^t \left(\varphi_m\left(u - W_s\right)\right)^{-2} dW_s \ \ \text{y} \ \ \int_0^t \left(\psi_m\left(u - W_s\right)\right)^{-2} dW_s$$

están bien definidas y por lo tanto el Teorema 34 implica que las integrales hacia adelante

$$\int_0^t \left(\varphi_m\left(\frac{1}{W_1} - W_s\right)\right)^{-2} d^-W_s \ \ \text{y} \ \ \int_0^t \left(\psi_m\left(\frac{1}{W_1} - W_s\right)\right)^{-2} d^-W_s \tag{5.4}$$

también están bien definidas. En efecto, los campos aleatorios $(\psi_m(u - W_s))^{-2}$ y $(\varphi_m(u - W_s))^{-2}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 34, es decir, para $(\varphi_m(u - W_s))^{-2}$ tenemos

$$\int_{-n}^n \int_0^T \left(\frac{d}{du}(\varphi_m(u - W_t))^{-2}\right)^2 dtdu \leq \int_{-n}^n \int_0^T \frac{m^3 C^2}{2^4} dtdu < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \text{y} \ C > 0,$$

y

$$\left(\int_0^T |\left(\varphi_m(-W_t)\right)^{-2}|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\frac{m^2 T}{4} \right)^{1/2} < \infty$$

de manera similar podemos concluir lo mismo para $(\psi_m\,(u - W_s))^{-2}$.

Ahora estamos listos para probar los siguientes resultados con la finalidad de encontrar la solución de la ecuación anticipante (5.1).

Teorema 74 Sea $T > 0$. Entonces, el proceso $\left(\frac{1}{W_1} - W_\cdot\right)^{-2}$ pertenece a Dom $\delta^-_{t,loc}$ sobre $\Lambda_T = \left[\frac{1}{W_1} - \sup_{0\leq s\leq T} W_s > 0, W_1 > 0\right]$, para cualquier $t \in (0, T]$. Además,

$$X_t^{W_1} = W_1 + \int_0^t (X_s^{W_1})^3 ds + \int_0^t (X_s^{W_1})^2 d^- W_s, \quad t \leq T,$$

sobre Λ_T, donde $X_\cdot^x = (\frac{1}{x} - W_\cdot)^{-1}$.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. Considere el siguiente conjunto

$$\Lambda_m = \left\{ \frac{1}{W_1} - \sup_{0\leq s\leq T} W_s \geq \frac{3}{\sqrt{m}}, \frac{1}{W_1} - m \leq \inf_{0\leq s\leq T} W_s, W_1 > 0 \right\}. \tag{5.5}$$

Note que,

$$\varphi_m\left(\frac{1}{W_1} - W_s\right) = \left(\frac{1}{W_1} - W_s\right) \quad \text{sobre} \quad \Lambda_m \times [0, t] \quad \text{c.s.}, \quad t \leq T.$$

Además, (5.2), (5.3) y el Teorema 34 permiten concluir

$$\begin{aligned}
&1_{\Lambda_m}\int_0^t \left(\varphi_m\left(\frac{1}{W_1}-W_s\right)\right)^{-2} d^-W_s\\
&= \left(1_{\left\{x-m\leq \inf\limits_{0\leq s\leq t} W_s,\ x-\sup\limits_{0\leq s\leq t} W_s\geq \frac{3}{\sqrt{m}},\ \frac{1}{x}\in(0,\infty)\right\}}\int_0^t (\varphi_m(x-W_s))^{-2}\, dW_s\right)_{x=\frac{1}{W_1}}\\
&= \left(1_{\left\{x-m\leq \inf\limits_{0\leq s\leq t} W_s,\ x-\sup\limits_{0\leq s\leq t} W_s\geq \frac{3}{\sqrt{m}},\ \frac{1}{x}\in(0,\infty)\right\}}\int_0^t (x-W_s)^{-2}\, dW_s\right)_{x=\frac{1}{W_1}}\\
&= \left(1_{\left\{x-m\leq \inf\limits_{0\leq s\leq t} W_s,\ x-\sup\limits_{0\leq s\leq t} W_s\geq \frac{3}{\sqrt{m}},\frac{1}{x}\in(0,\infty)\right\}}\left\{X_t^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-\int_0^t (X_s^{\frac{1}{x}})^3 ds\right\}\right)_{x=\frac{1}{W_1}}\\
&= 1_{\Lambda_m}\left(X_t^{W_1}-W_1-\int_0^t (X_s^{W_1})^3 ds\right),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del teorema de Fubini.

Finalmente, cuando $\Lambda_m \nearrow \Lambda_T$ c.s., $\left\{\left(\varphi_m\left(\frac{1}{W_1}-W_s\right),\Lambda_m\right) : m\geq 3\right\}$ es una sucesión localizante para el proceso $\left(\frac{1}{W_1}-W_\cdot\right)^{-2}$ en Λ_T. Con lo que la prueba queda concluida. □

Similarmente, necesitamos un resultado para considerar el caso en el cual la variable aleatoria W_1 toma valores negativos.

Teorema 75 Sea $T>0$. Entonces, el proceso $\left(\frac{1}{W_1}-W_s\right)^{-2}$ pertenece a Dom $\delta^-_{t,loc}$ sobre el conjunto $\Lambda'_T=\left[\frac{1}{W_1}-\inf_{0\leq s\leq T} W_s<0, W_1<0\right]$, para cualquier $t\leq T$. Además,

$$X_t^{W_1}=W_1+\int_0^t \left(X_s^{W_1}\right)^3 ds+\int_0^t \left(X_s^{W_1}\right)^2 d^-W_s,\quad t\leq T,$$

sobre Λ'_T, con $X_\cdot^x=(\frac{1}{x}-W_\cdot)^{-1}$.

Demostración. Procedamos de la misma manera que en la prueba anterior, pero considerando el conjunto

$$\Lambda'_m=\left\{\frac{1}{W_1}-\inf_{0\leq s\leq T} W_s\leq\frac{-3}{\sqrt{m}},\frac{1}{W_1}+m\geq \sup_{0\leq s\leq T} W_s, W_1<0\right\}$$

y notemos que,

$$\psi_m\left(\frac{1}{W_1}-W_s\right)=\left(\frac{1}{W_1}-W_s\right)\quad\text{sobre}\quad \Lambda'_m\times[0,t]\quad\text{c.s.},\quad t\leq T.$$

□

Como una consecuencia inmediata de los Teoremas 74 y 75, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 76 Sea $T>0$. Entonces, el proceso $\left(\frac{1}{W_1}-W_s\right)^{-2}$ pertenece a Dom $\delta^-_{t,loc}$ sobre el conjunto

$$\Gamma_T=\left[\frac{1}{W_1}-\sup_{0\leq s\leq T}W_s>0,W_1>0\right]\bigcup\left[\frac{1}{W_1}-\inf_{0\leq s\leq t}W_s<0,W_1<0\right],$$

para cualquier $t\leq T$. Además,

$$X_t^{W_1}=W_1+\int_0^t\left(X_s^{W_1}\right)^3ds+\int_0^t\left(X_s^{W_1}\right)^2d^-W_s,$$

sobre Γ_T, con $X_\cdot^x=(\frac{1}{x}-W_\cdot)^{-1}$.

Demostración. Primero construimos las siguientes funciones. Para $m\in\mathbb{N},m\geq 3$, sean ρ_m, $\tilde{\rho}_m\in C^\infty(\mathbb{R})$ dos funciones acotadas que satisfacen

$$\rho_m(x)=\begin{cases}1, & \frac{1}{m}\leq x\leq\frac{\sqrt{m}}{3}\\ 0, & x\leq\frac{1}{m+1}\\ 0, & x\geq\frac{\sqrt{m}}{2}\end{cases}$$

$$\tilde{\rho}_m(x)=\begin{cases}1, & \frac{-\sqrt{m}}{3}\leq x\leq\frac{-1}{m}\\ 0, & x\leq\frac{-\sqrt{m}}{2}\\ 0, & x\geq\frac{-1}{m+1}\end{cases}$$

y consideremos los conjuntos

$$\tilde{\Lambda}_m=\left\{\frac{1}{W_1}-\sup_{0\leq s\leq T}W_s\geq\frac{3}{\sqrt{m}},\frac{1}{W_1}-m\leq\inf_{0\leq s\leq T}W_s,\frac{\sqrt{m}}{3}\geq W_1\geq\frac{1}{m}\right\}$$

y

$$\tilde{\Lambda}'_m=\left\{\frac{1}{W_1}-\inf_{0\leq s\leq T}W_s\leq\frac{-3}{\sqrt{m}},\frac{1}{W_1}+m\geq\sup_{0\leq s\leq T}W_s,\frac{-\sqrt{m}}{3}\leq W_1\leq\frac{-1}{m}\right\}$$

Ahora note que

$$\left(\varphi_m\left(\frac{1}{W_1}-W_s\right)\rho_m\left(W_1\right)+\psi_m\left(\frac{1}{W_1}-W_s\right)\tilde{\rho}_m\left(W_1\right)\right)=\left(\frac{1}{W_1}-W_s\right)$$

$$\text{sobre }\ \tilde{\Lambda}_m\cup\tilde{\Lambda}'_m\times[0,t]\ \text{ c.s.},\ \ t\leq T.$$

Como $\Lambda_m\cup\Lambda'_m\nearrow\Gamma_T$ c.s. y usando los Teoremas 74 y 75 $\left\{\left(\left(\varphi_m\rho_m(W_1)+\psi_m\rho'_m(W_1)\right)\left(\frac{1}{W_1}-W_s\right),\Gamma_m\right):m\geq 3\right\}$ es una sucesión localizante para el proceso $\left(\frac{1}{W_1}-W_\cdot\right)^{-2}$ sobre Γ_T. □

5.2. Función de distribución del tiempo de explosion

Bajo los argumento dados en §5.1 tenemos que la solución local de la ecuación (5.1) es

$$X_t^{W_1}=\left(\frac{1}{W_1}-W_t\right)^{-1},\tag{5.6}$$

hasta el tiempo de explosión $\tau=\text{ínf}\{t>0:W_1W_t=1\}$. Observemos que en este caso τ es una variable aleatoria, en efecto, el conjunto

$$\begin{aligned}\{\tau\leq r\}&=[\text{ínf}\{t>0:W_1W_t=1\}\leq r,W_1>0]\cup[\text{ínf}\{t>0:W_1W_t=1\}\leq r,W_1<0]\\&=\left[\sup_{0\leq t\leq r}W_t-\frac{1}{W_1}\geq 0,W_1>0\right]\cup\left[\inf_{0\leq t\leq r}W_t-\frac{1}{W_1}\leq 0,W_1<0\right],\end{aligned}\tag{5.7}$$

es medible al ser unión de conjuntos medibles. Sin embargo, no es un tiempo de paro ya que $\{\tau\leq t\}$ no es $\mathcal{F}_t$-medible.

Procederemos a calcular la distribución de τ.

Proposición 77 La distribución del tiempo de explosion τ es

$$P(\tau\leq r)=\begin{cases}2\displaystyle\int_0^\infty\left\{g(x)\int_{-\infty}^{\left(\frac{2r}{x}-rx-\frac{1}{x}\right)/\sqrt{r(1-r)}}f(y)dy+\int_{\left(\frac{1}{x}-rx\right)/\sqrt{r(1-r)}}^{\infty}f(y)dy\right\}f(x)dx, & \text{si } 0<r<1,\\ 2\displaystyle\int_0^1\left\{g(x)+2(1-g(x))\int_{\left(\frac{1}{x}-x\right)/\sqrt{r-1}}^{\infty}f(y)dy\right\}f(x)dx+2\int_1^\infty f(x)dx, & \text{si } r\geq 1.\end{cases}$$

donde $f(u)=e^{-u^2/2}/\sqrt{2\pi}$ y $g(u)=\exp(-\frac{2}{u}(\frac{1}{u}-u))$, $u>0$.

Demostración. Considere $r > 0$ y $\tilde{W} = -W$.

$$
\begin{aligned}
P(\tau \leq r) =& \int_{\mathbb{R}} P\left(\text{ínf}\left\{t > 0 : W_1 W_t = 1\right\} \leq r \middle| W_1 = x\right) P\left(W_1 \in dx\right) \\
=& \int_{-\infty}^{0} P\left(\text{ínf}\left\{t > 0 : W_t = \frac{1}{x}\right\} \leq r \middle| W_1 = x\right) P\left(W_1 \in dx\right) \\
&+ \int_{0}^{\infty} P\left(\text{ínf}\left\{t > 0 : W_t = \frac{1}{x}\right\} \leq r \middle| W_1 = x\right) P\left(W_1 \in dx\right) \\
=& \int_{-\infty}^{0} P\left(\inf_{0 \leq t \leq r} W_t \leq \frac{1}{x} \middle| W_1 = x\right) P\left(W_1 \in dx\right) \\
&+ \int_{0}^{\infty} P\left(\sup_{0 \leq t \leq r} W_t \geq \frac{1}{x} \middle| W_1 = x\right) P\left(W_1 \in dx\right) \\
=& \int_{-\infty}^{0} P\left(\sup_{0 \leq t \leq r} \tilde{W}_t \geq -\frac{1}{x} \middle| \tilde{W}_1 = -x\right) P\left(W_1 \in dx\right) \\
&+ \int_{0}^{\infty} P\left(\sup_{0 \leq t \leq r} W_t \geq \frac{1}{x} \middle| W_1 = x\right) P\left(W_1 \in dx\right) \\
=& 2\int_{0}^{\infty} P\left(\sup_{0 \leq t \leq r} W_t \geq \frac{1}{x} \middle| W_1 = x\right) P\left(W_1 \in dx\right).
\end{aligned}
$$

Para la justificación de la segunda igualdad se utiliza (5.7) junto con la propiedad **CE10** de Pfeiffer [37, p. 462] . De los Teoremas 2.1 and 2.2 de [2] obtenemos, para $r < 1$,

$$
\begin{aligned}
P(\tau \leq r) =& 2\int_{0}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x} - x\right)\right) \int_{-\infty}^{\left(\frac{2r}{x} - xr - \frac{1}{x}\right)/\sqrt{r(1-r)}} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \right. \\
&+ \left. \int_{\left(\frac{1}{x} - xr\right)/\sqrt{r(1-r)}}^{-\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \right\} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx,
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

y, para $r > 1$,

$$
\begin{aligned}
P(\tau \leq r) =& 2\int_{0}^{1} \left\{ \exp\left(-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x} - x\right)\right) \right. \\
&+ 2\left(1 - \exp\left(-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x} - x\right)\right)\right) \left. \int_{\left(\frac{1}{x} - x\right)/\sqrt{r-1}}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \right\} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&+ 2\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Finalmente la demostración se termina de la continuidad a la derecha de las funciones de distribución. □

Nota 78 Note que la función $P(\tau \leq r)$ es continua en $r = 1$, en efecto por convergencia dominada y para $0 < r < 1$ se cumple

$$
\begin{aligned}
\lim_{r \to 1^-} P(\tau \leq r) =& 2 \int_0^\infty f(x) g(x) \lim_{r \to 1^-} \int_{-\infty}^{\left(\frac{2r}{x} - rx - \frac{1}{x}\right)/\sqrt{r(1-r)}} f(y) dy dx \\
&+ 2 \int_0^\infty f(x) \lim_{r \to 1^-} \int_{\left(\frac{1}{x} - rx\right)/\sqrt{r(1-r)}}^{\infty} f(y) dy dx \\
=& 2 \int_0^1 f(x) g(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy dx + 2 \int_1^\infty f(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy dx \\
=& 2 \int_0^1 f(x) g(x) dx + 2 \int_1^\infty f(x) dx,
\end{aligned}
$$

y para $1 < r$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{r \to 1^+} P(\tau \leq r) =& 2 \int_0^1 \Big\{ g(x) + 2(1 - g(x)) \lim_{r \to 1^+} \int_{\left(\frac{1}{x} - x\right)/\sqrt{r-1}}^{\infty} f(y) dy \Big\} f(x) dx \\
&+ 2 \int_1^\infty f(x) dx \\
=& 2 \int_0^1 g(x) f(x) dx + 2 \int_1^\infty f(x) dx.
\end{aligned}
$$

Conclusiones

En este trabajo ha sido demostrado que el criterio de explosión conocido como prueba de Osgood puede ser extendido para algunos casos de ecuaciones diferenciales estocásticas no autónomas con ruido aditivo y en particular trabajamos con la ecuación integral no homogenea

$$X_t = \xi + \int_0^t a(s)b(X_s)ds + g(t),$$

para el caso donde g es una función continua que satisface que el

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\inf_{0\leq h\leq\tilde{\eta}} g(t+h)\right) = \infty \quad \text{para algún } \tilde{\eta} > 0.$$

Para probar lo anterior usamos la ecuación diferencial ordinaria (3.5) que es más general que la utilizada en la prueba original de Osgood. Es importante enfatizar que el deshacerse del termino de difusión es la característica principal que nos permitió hacer estas extensiones y para lograrlo nos auxiliamos del Lema de comparación 26. En la Sección 3.3 aplicamos la ley del logaritmo iterado para probar que las trayectorias de la integral de Wiener son algunos ejemplos de funciones que satisfacen esta propiedad.

Con respecto al tiempo de explosión fue muy importante la utilización de la fórmula de Itô para conseguir los siguientes objetivos: la distribución del tiempo de explosión de la solución de la ecuación

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t b(X_s^\xi)ds + \int_0^t \sigma(X_s^\xi)dW_s, \quad t \geq 0, \tag{6.1}$$

fue encontrada al relacionarla con cierta solución de la ecuación diferencial parcial (3.13)-(3.14); y para la ecuación diferencial estocástica no autónoma

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t b(s, X_s^\xi)ds + I_t, \quad t \geq 0$$

donde $I_t = \int_0^t f(s)dW_s$, se generalizó un resultado de Feller que nos dice que la transformada de Laplace de la distribución del tiempo de explosión es una solución acotada de la ecuación (3.19). Además la fórmula de Itô nos permitió encontrar la solución de la ecuación (3.1) para la cual se obtuvo la distribución de su tiempo de explosión.

En el capítulo 4 hemos aplicado la prueba clásica de Feller a la ecuación diferencial estocástica semilineal (4.3) para encontrar criterios de explosión. Principalmente usamos la fórmula de Itô, el Lema 24 y el criterio original de Osgood para extender este mismo resultado a una ecuación diferencial estocástica semilineal de la forma

$$X_t^\xi = \xi + \int_0^t b(s, X_s^\xi)ds + \int_0^t \sigma(s)X_s^\xi dW_s, \quad t \geq 0,$$

donde los coeficientes son aleatorios. En particular, b es un campo aleatorio y σ es un proceso continuo y predecible.

Finalmente en el último capítulo de esta tesis se construyó la solución, para un ejemplo específico, de una ecuación diferencial estocástica donde la condición inicial es la variable aleatoria W_1 y además la integral estocástica involucrada es en el sentido hacia adelante. La herramienta principal para encontrar la solución de esta ecuación diferencial anticipante es la fórmula de sustitución (ver Teoremas 33 and 34).

Bibliografía

[1] Arnold L., *Differential Equations: Theory and Application*, John Wiley & Sons, New York (1974).

[2] Beghin L., Orsingher E., *On the maximum of the generalized brownian bridge*, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 39, No. 2, (1999).

[3] Bojdecki T., *Teoría General de Procesos e Integración Estocástica*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 6, Soc. Mat. Mex., (1995).

[4] Borodin A. N., Salminen P., *Handbook of Brownian Motion-Facts and Formulae*, Second Edition, Birkhäuser, (2002).

[5] Ceballos-Lira M.J., Macías-Díaz J.E., Villa J., *A generalization of Osgood's test and a comparison criterion for integral equations with noise*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2011, No. 05, 1–8, (2011).

[6] Dávila J., Bonder J.F., Rossi J.D., Groisman P., Sued M., *Numerical analysis of stochastic differential equations with explosions,* Stoch. Anal. Appl. 23, no. 4, 809-825. (2005).

[7] de Pablo A., Ferreira R., Quirós F., Vázquez J.L., *Blow-up. El problema matemático de explosión para ecuaciones y sistemas de reacción-difusión,* Bol. Soc, Esp. Mat. Apl. 32, 75-111, (2005).

[8] Durrett R. *Stochastic Calculus: A Practical Introduction*, CRC Press. (1996).

[9] Feller W. *Diffusion processes in one dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. 77, 1-31, (1954).

[10] Feller W. *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations*, Ann. Math. 468-519, (1952).

[11] Friedman A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Dover, (1964).

[12] Friedman A., *Stochastic Differential Equations and Applications*, Vol. 1 and 2. New York: Academic Press, (1975).

[13] Fu Qing Gao, *Laws of the Iterated Logarithm for Locally Square Integrable Martingales*, Acta Mathematica Sinica, English Series, Vol. 25, No. 2, 209–222, (2009).

[14] Fujita H., *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. A. Math 16, 105-113, (1966).

[15] Geiß C., Manthey R., *Comparison theorems for stochastic differential equations in finite and infinite dimensions,* Stochastic Processes and their Application, 53, 23-35, (1994).

[16] Gradinaru M., Offret Y., *Existence and asymptotic behavior of some time-inhomogeneous diffusions,* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. Volume 49, Number 1, 182-207, (2013).

[17] Has'minskiĭ R. Z., *Stochastic stability of differential equations*, Sijthoff & Noordhoff, (1980).

[18] Hu B. *Blow-up. Theories for Semilinear Parabolic Equations*, Springer, New York, (2011)

[19] Itô K., *Lectures on Stochastic Processes*, Tata Institute of Fundamental Research. Bombay, (1961).

[20] Itô K., *Stochastic integral*, Proc. Imperial Acad. Tokyo 20, 519-524, (1944).

[21] Kahale N., *Analytic crossing probabilities for certain barriers by brownian motion*, The Annals of Applied Probability, Vol. 18, No. 4, 1424-1440, (2008).

[22] Kaplan S., *On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations*, Comm. on pure and App. Math. 16, no. 3, 305-330, (1963).

[23] Karatzas I., Shreve S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, (1998).

[24] Lee John M., *Introduction to smooth manifolds,* University of Washington, (2000).

[25] León, J.A., Navarro R. A., Nualart D., *An anticipating calculus approach to the utility maximization of an insider*, Math. Finance 13 (1), 171–185, (2003).

[26] León, J.A. and Villa, J., *An Osgood criterion for integral equations with applications to stochastic differential equations with an additive noise*, Statistics & Probability Letters 81, no. 4, 470-477, (2011).

[27] MacKean H.P., Jr., *Stochastic Integrals*, Academic Press, (1969).

[28] Milian (Kraków), *Stochastic viability and a comparison theorem*, Colloquium Mathematicum, Vol. LXVIII (1995).

[29] Narita K., *No explosion criteria for stochastic differential equation*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 34, No. 2 (1982).

[30] Narita K., *Remarks on non explosion theorem for stochastic differential equations*, Kodai Math J. 5, 395-401, (1982).

[31] Navarro R. A., *Dos modelos estocásticos para transacciones con información privilegiada en mercados financieros y dependencia con memoria larga en tiempos de ocupación*, Tesis de doctorado, CINVESTAV IPN (2004).

[32] Nualart D., *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer-Verlag, (1995).

[33] Øksendal B., *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications,* 6th ed. Berlin: Springer, (2007).

[34] Osgood W. F., *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedigung Monatsh*, Math. Phys. (Vienna) 9, no. 1, 331-345. (1898).

[35] Pachpatte, B. G., *Inequalities for Differential and Integral Equations,* Academic Press, (1998).

[36] Perez A., Villa J., *Blow-up for a system with time-dependent generators,* ALEA 7, 207-2015, (2010).

[37] Pfeiffer P. E., *Probability for Applications,* Springer-Verlag, (1989).

[38] Protter, P., *Stochastic Integration and Differential Equations,* Second Edition. Springer–Verlag, (2004).

[39] Rogers and Williams, *Diffusion, Markov Processes and Martingales. Volume 2: Itô Calculus,* Cambridge University press, (2004).

[40] Russo F. and Vallois P., *Forward, backward and summetric stochastic integration*, Springer-Verlag, (1993).

[41] Shige P., Xeuhong Z., *Necessary and sufficient condition for comparison theorem of 1- dimensional stochastic differential equations*, Stochastic Process. Appl. Vol.116, No. 3, pp. 370–380, (2006).

[42] Sobczyk K., Spencer B.F. Jr., *Random fatigue: From data to theory*. Academic Press Inc., Boston, MA, (1992).

[43] Stein Elias M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, (1970).

[44] Taniguchi T., *On sufficient conditions for non explosion of solutions to stochastic differential equations journal of mathematical analysis and applications* 153, 549-561, (1990).

[45] Villa J., *Un ejemplo de explosión en ecuaciones diferenciales estocásticas con ruido aditivo*, Aportaciones Matemáticas SMM, Comunicaciones **44**, 187–194. (2011).

[46] Yamada T., Ogura Y., *On the Strong Comparison Theorems for Solutions of Stochastic Differential Equations*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 53, 3-19 (1981).

Publicaciones ligadas a la tesis

Jorge A. León, Liliana Peralta, José Villa-Morales, *On the Distribution of Explosion Time of Stochastic Differential Equations*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, third series, Vol. 19, no. 2, p.p 125-138, Octubre (2013).

Jorge A. León, Liliana Peralta, José Villa-Morales, *An Example of Explosion of a Stochastic Differential Equation with Random Initial Condition*, Aportaciones Matemáticas. Modelos en Estadística y Probabilidad III. Vol 47, Octubre (2014).

Jorge A. León, Liliana Peralta, *Some Feller and Osgood type criteria for semilinear stochastic differential equations.* Sometido.