

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE
CONTROL AUTOMÁTICO

“Control por modos deslizantes para sistemas implícitos”

TESIS

Que presenta

DEBBIE CRYSTAL HERNÁNDEZ ZÁRATE

Para obtener el grado de

DOCTORA EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE

CONTROL AUTOMÁTICO

Directores de Tesis:

Dr. Fernando Castaños Luna

Dr. Alexander Poznyak Gorbatch

México, D.F.

Diciembre de 2015

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Abstract	XI
1. Introducción	1
1.1. Control por modos deslizantes	4
1.1.1. Clásico ejemplo didáctico	5
1.1.2. Diseño de un controlador por modos deslizantes clásico	6
1.1.3. Superficie de deslizamiento	8
1.1.4. Problemas en el control por modos deslizantes y sus respectivas so- luciones	9
1.1.5. Metodología del control por modos deslizantes	10
1.1.6. Control por modos deslizantes de orden superior	10
1.2. Sistemas implícitos	11
1.2.1. Ejemplos	12
1.2.2. Enfoque implícito del control por modos deslizantes	14
1.2.3. Sistemas implícitos perturbados	16
1.3. Motivación	16
1.4. Objetivos	18
1.4.1. General	18
1.4.2. Particulares	18
1.5. Contribuciones	18
1.6. Publicaciones	20
2. Preliminares	21
2.1. Control por modos deslizantes	21
2.1.1. Motivación	21
2.1.2. Método del control equivalente	22
2.1.3. Perturbaciones acopladas	23
2.1.4. Diseño de una superficie de deslizamiento de primer orden	24
2.1.5. Modos deslizantes integrales	26
2.1.6. Grado relativo	27

2.1.7.	Dinámica cero: dinámica de modo deslizante	28
2.1.8.	Matriz de transferencia	29
2.1.9.	Modos deslizantes de segundo orden	30
2.1.10.	Control por modos deslizantes de orden superior	31
2.1.11.	Homogeneidad	31
2.1.12.	Controlador Cuasi-continuo de orden arbitrario	32
2.1.13.	Exactitud	33
2.1.14.	Controladores por modos deslizantes continuos: algoritmo Super-Twisting	33
2.1.15.	Super-Twisting de Segundo Orden	34
2.1.16.	Super-Twisting de Tercer Orden	35
2.1.17.	Retroalimentación de dinámica cero y control por modos deslizantes	35
2.2.	Sistemas implícitos	37
2.2.1.	Regularidad	37
2.2.2.	Equivalencia estricta	38
2.2.3.	Formas de Weierstrass y de Cuasi-Weierstrass	39
2.2.4.	Forma estándar	40
2.2.5.	Solución	40
2.2.6.	Eigenvalores finitos	41
2.2.7.	Estabilidad	42
2.2.8.	Controlabilidad	42
2.2.9.	Estabilizabilidad	46
2.2.10.	Matriz de transferencia	47
2.2.11.	Equivalencia externa	49
3.	Diseño de superficies en modos deslizantes de orden superior	51
3.1.	Planteamiento del problema	51
3.2.	Generalización de la fórmula de Ackermann y Utkin	52
3.3.	Ejemplo: Pendubot	53
3.3.1.	Resultados de simulación	54
4.	Control por MDOS en un helicóptero de 3GdL	61
4.1.	Descripción de la planta	61
4.1.1.	Modelo no lineal y linealización	61
4.1.2.	Parámetros experimentales	64
4.2.	Resultados experimentales	65
5.	Modos deslizantes integrales para sistemas implícitos	71
5.1.	Planteamiento del problema	71
5.1.1.	Caso trivial	72
5.1.2.	Ejemplo	73
5.2.	Modos deslizantes integrales de orden superior	75
5.2.1.	Ejemplo	76

6. Diseño de la dinámica cero y estabilización de sistemas implícitos	79
6.1. Planteamiento del problema	79
6.2. Diseño de la salida	80
6.2.1. Caso trivial	80
6.2.2. Caso general	80
6.3. Estabilización asintótica	84
6.3.1. Ejemplo	86
7. Control por MDOS en sistemas implícitos C-controlables	89
7.1. Planteamiento del problema	89
7.2. Metodología del control por modos deslizantes de orden superior en sistemas implícitos C-controlables	90
7.2.1. Ejemplo	90
8. Conclusiones y trabajos futuros	95
8.1. Conclusiones	95
8.2. Trabajos futuros	98
A. Algebra lineal	99
A.1. Operaciones elementales y equivalencia	99
A.2. Polinomios invariantes y divisores elementales	100
A.2.1. Equivalencia de binomios matriciales	101
A.2.2. Forma de Weierstrass	101

Lista de figuras

1.1.1.Dinámica unidimensional de un bloque de masa.	5
1.1.2.Control por MD clásico. Diagrama de fase de la dinámica unidimensional de un bloque de masa.	7
1.2.1.Circuito RLC simple.	13
3.3.1.Pendubot. MDPO. Estado, variable de deslizamiento y señal de control. . .	55
3.3.2.MDPO. Orden de los errores.	56
3.3.3.Pendubot. MDSO. Estado, variable de deslizamiento y señal de control. . .	57
3.3.4.MDSO. Orden de los errores.	57
3.3.5.Pendubot. MDTO. Estado, variable de deslizamiento y señal de control. . .	58
3.3.6.MDTO. Orden de los errores.	59
4.1.1.Helicóptero de 3GdL. Diagrama de cuerpo Libre.	62
4.2.1.MDSO. STSO. Posición del helicóptero en grados.	66
4.2.2.MDSO. STSO. Señales de control.	67
4.2.3.MDSO. STSO. Variable de deslizamiento (elevación).	68
4.2.4.MDSO. STSO. Variable de deslizamiento (inclinación).	68
4.2.5.MDTO. STTO. Posición del helicóptero en grados.	69
4.2.6.MDTO. STTO. Señales de control.	69
4.2.7.MDTO. STTO. Variable de deslizamiento (elevación).	70
4.2.8.MDTO. STTO. Variable de deslizamiento (inclinación).	70
5.1.1.MDSO. STSO. Sistema implícito (5.4) en forma Weierstrass. Estado, control y perturbación.	74
5.2.1.MDSO. Controlador Twisting. Sistema implícito (5.8). Estado, control y perturbación.	78
6.3.1.Dinámica cero y estabilización. Sistema implícito en cascada (6.18). Estado, salida y señal de control	88
7.2.1.MDSO. STSO. Sistema implícito (7.3). Estado y variable de deslizamiento. .	91
7.2.2.MDSO. STSO. Sistema implícito (7.3). Acción de control y perturbación. .	92
7.2.3.MDTO. STTO. Sistema implícito (7.3). Estado y variable de deslizamiento. .	93
7.2.4.MDTO. STTO. Sistema implícito (7.3). Acción de control y perturbación. .	94

Agradecimientos

A mi mamá Meche.

A mi familia.

A Abraham.

A mis asesores: Dr. Fernando Castaños y Dr. Alexander Poznyak.

A mis revisores: Dr. Jorge Dávila, Dr. Francisco Javier Bejarano, Dr. Joaquín Collado y Dra. Sabine Mondié.

Al Dr. Leonid Fridman.

Al Consejo nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el financiamiento económico brindado durante período de este proyecto.

Resumen

En esta tesis abordamos la teoría de polinomios de matrices, específicamente binomios de matrices (abanicos), con el objetivo de aportar herramientas de análisis y diseño a la teoría del control por modos deslizantes. A su vez, buscamos dotar a los sistemas implícitos, descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias y/o algebraicas, de insensibilidad ante cierto tipo de perturbaciones/incertidumbres por medio de una estrategia de control por modos deslizantes. Cabe mencionar que la existencia y unicidad de la solución de sistemas implícitos requiere de un hecho llamado regularidad así como de cierto grado de diferenciabilidad por parte de la función de entrada, esto hace necesario el uso del control por modos deslizantes de orden superior.

Al concluir el trabajo de tesis se espera que ambas áreas de investigación, sistemas implícitos y modos deslizantes, se vean fortalecidas con los resultados obtenidos.

En resumen, los resultados obtenidos a la fecha son los siguientes:

1. Se obtuvo una fórmula para seleccionar la salida de un sistema explícito (descrito únicamente por ecuaciones diferenciales ordinarias) para un grado relativo arbitrario y dinámica cero deseada. Dicha fórmula puede utilizarse en la primera etapa de la metodología del control por modos deslizantes para sistemas explícitos, que consiste de dos etapas (previo a este trabajo sólo la segunda etapa contaba con un algoritmo para grado relativo arbitrario).
2. Se obtuvo una fórmula para elegir la salida de un sistema implícito para grado relativo prescrito y ceros de la función de transferencia deseados. Mostramos que para grado relativo estrictamente positivo, existe una transformación de coordenadas que lleva el sistema implícito a una forma reducida análoga a una forma normal bien conocida para sistemas explícitos (también llamada forma normal de Byrnes-Isidori). Para esta forma reducida se define la dinámica cero, y se logra la estabilización asintótica por medio de una retroalimentación estática de estado.
3. Respecto a los sistemas implícitos perturbados se proponen dos metodologías de control por modos deslizantes de orden superior. En la primera, para sistemas con grado relativo uno, la variable de deslizamiento se define mediante el concepto de modos deslizantes integrales (MDI). En la segunda, la cual funciona para sistemas con grado relativo uno o dos, la salida es diseñada usando la fórmula del resultado 2.

Para el diseño del control fue necesario el uso de controladores por modos deslizantes de orden superior en ambas metodologías.

4. Se verificó experimentalmente la fórmula a la que se hace referencia en el punto 1 aplicando control por modos deslizantes de orden superior en un helicóptero de tres grados de libertad.

Abstract

Matrix polynomial theory is studied in this thesis, specifically matrix binomials (pencil), with the goal of providing analysis and design tools to the sliding mode control theory for implicit systems. At the same time we seek to provide implicit systems (described by ordinary and/or algebraic differential equations) with insensibility to certain types of perturbations/uncertainties by means of a sliding mode control strategy. It is worth mentioning that the existence and uniqueness of the solution of implicit systems requires a property called regularity as well as a certain degree of differentiability of the input function, this motivates the use of higher-order sliding-mode control.

With this thesis it is expected that both investigation areas, implicit systems and sliding modes, are enhanced with the obtained results.

In brief, the obtained results to date are the following:

1. A formula to define the output of an explicit system (described only by ordinary differential equations) for an arbitrary relative degree and zero dynamics was achieved. This formula can be used at the first part of the sliding mode control for explicit systems methodology, consisting of two steps (prior to this work only in the second step one had an algorithm for arbitrary relative degree).
2. A formula to define the output of an implicit system for the desired relative degree and transfer function zeros was achieved. We show that for a strictly positive relative degree, there exists a coordinate transformation that carries the implicit system to a reduced form analogous to a well-known normal form for explicit systems (so-called Byrnes-Isidori normal form). This form enables us to define the zero dynamics and formulate results on the asymptotic stabilization by a state feedback.
3. Regarding perturbed implicit system two higher-order sliding-mode control methodology were proposed. In the first one, which works for systems with relative degree one, the sliding variable is defined by using the concept from integral sliding-mode theory. In the second, which works for system with relative degree one or two, the output is designed by using the formula from item 2. Higher-order sliding-mode control was necessary to design the control law in both methodologies.
4. It was verified experimentally the formula referenced in item 1 applying higher-order sliding-mode control on a three degrees of freedom helicopter.

Capítulo 1

Introducción

Al describir un sistema por medio de un modelo matemático, elegimos algunas variables (posición, velocidad, temperatura, corriente, voltaje, etc.) con el objetivo de definir el *estado* del sistema. Las relaciones entre las variables elegidas dan origen a un conjunto de ecuaciones diferenciales y/o algebraicas resultando algunas veces en un sistema implícito. Algunas referencias básicas acerca de sistemas implícitos, lineales y no lineales, variantes e invariantes, continuos y discretos son: [Luenberger, 1978; Campbell, 1980, 1982; Dai, 1989; Brenan et al., 1995; Duan, 2010]. En esta tesis abordamos el caso de sistemas implícitos lineales que son equivalentes a la llamada forma de Weierstrass [Gantmacher, 1964; Lewis, 1986]. La forma de Weierstrass de un sistema implícito es una reducción a una forma diagonal a bloques (los cuales están en la forma de Jordan), donde el sistema original queda dividido en dos subsistemas: uno que se puede representar mediante bloques integradores (llamado sistema lento) y otro que se puede representar mediante bloques diferenciadores (llamado sistema rápido). Si los bloques no están en la forma de Jordan, tal reducción es llamada forma de Cuasi-Weierstrass [Berger et al., 2012b]. Al obtener la solución de un sistema implícito en la forma de Weierstrass, la solución del subsistema rápido queda explícitamente determinada por la función de entrada y derivadas de la misma. Esto es, la existencia y unicidad de la solución del sistema implícito depende de que la función de entrada sea *consistente*. Los sistemas implícitos, dependiendo del grupo que los estudia, son también llamados sistemas generalizados, descriptores, algebraico-diferenciales, semi-estado; y su estudio es principalmente motivado por aplicaciones en circuitos eléctricos [Campbell and Rose, 1982] y sistemas mecánicos con restricciones [Brenan et al., 1995].

Por otra parte, el control por modos deslizantes (MD) ha mostrado ser útil para rechazar una amplia gama de perturbaciones e incertidumbres cuando es aplicado a sistemas explícitos (descritos únicamente por ecuaciones diferenciales ordinarias). En resumen, la

técnica del control por MD consiste en forzar las trayectorias del sistema a una variedad suave deseada (superficie de deslizamiento) en tiempo finito, y mantenerlas allí a partir de entonces a pesar de la presencia de la perturbación. Esto se logra mediante la introducción de una nueva variable (llamada variable de deslizamiento) que representa los objetivos de control (e.g., estabilidad) y el diseño de una ley de control (posiblemente discontinua) que asegure la convergencia de la variable de deslizamiento al origen en tiempo finito. Cuando dicho objetivo de control es logrado, se dice que el sistema está en dinámica deslizante [Shtessel et al., 2013]. La variable de deslizamiento es típicamente descrita por una función escalar del estado. Entonces, cuando el sistema está en dinámica deslizante se tiene un sistema explícito sujeto a una restricción algebraica, lo cual puede describirse como un sistema implícito. Esta pequeña conexión entre el control por MD y los sistemas implícitos motiva al desarrollo de esta tesis. En términos generales, en esta tesis se plantean dos objetivos. El primer objetivo es profundizar en el análisis del control por MD para así contribuir en la metodología de diseño para sistemas explícitos. En segundo objetivo es proponer una metodología del control por MD para dotar a los sistemas implícitos de robustez o insensibilidad ante cierto tipo de perturbaciones.

La reducción de sistemas explícitos e implícitos a formas diagonales o triangulares a bloques facilita la obtención y generalización de resultados teóricos y motiva al estudio de la teoría de matrices. En sistemas explícitos el objetivo es reducir una matriz, lo cual es posible mediante una transformación de similitud dada una matriz no singular. En sistemas implícitos el objetivo es reducir un par de matrices, lo cual es posible mediante una transformación de equivalencia dadas dos matrices no singulares. Está demostrado que la reducción de una matriz a una forma triangular es posible mediante una transformación de similitud unitaria (descomposición de Schur), pero ésta no siempre reduce una matriz a una forma diagonal [Gantmacher, 1964; Stewart and Guang Sun, 1990]. Por otra parte, un par de matrices se puede reducir a formas triangulares a bloques mediante una transformación de equivalencia dadas dos matrices unitarias (descomposición de Schur generalizada) [Stewart, 1972], pero, análogamente, esta transformación no siempre reduce un par de matrices a formas diagonales a bloques. Considerar transformaciones de similitud o equivalencia mediante matrices unitarias tiene importancia en el ámbito de la teoría de perturbaciones, que en el caso de matrices se plantea como: dada una matriz, o un par de matrices, ¿qué pasa con su estructura (eigenvalores, divisores elementales finitos o infinitos, valores singulares, valores singulares generalizados, etc.) cuando se somete a una perturbación? Una transformación de similitud o de equivalencia no unitaria puede incrementar el error, es decir, cambiar drásticamente la estructura de una matriz o de un

par de matrices respectivamente. Esto no sucede si la transformación es mediante matrices unitarias [Stewart and Guang Sun, 1990]. Por todo lo anterior, en esta tesis prescindimos de la forma de Weierstrass o Cuasi-Weierstrass para el análisis de los problemas a tratar.

Para sistemas explícitos de una entrada y una salida con grado relativo estrictamente positivo respecto a la salida, existe una transformación de coordenadas que nos permite reescribir el sistema original en una forma normal que consiste de dos subsistemas en cascada [Isidori, 1995; Terrell, 2009]. En esta forma normal se define la dinámica gobernada por el subsistema residual compatible con una salida idénticamente igual a cero, la cual es llamada *dinámica cero*. La generalización de dicha reducción para el caso de sistemas implícitos es presentada en [Berger et al., 2012a]. En el control por MD, mediante la interpretación de la variable de deslizamiento como una salida, es posible conectar la dinámica cero con la dinámica en modo deslizante y la noción de grado relativo con el orden del modo deslizante [Sira-Ramírez, 1990]. En esta tesis abordamos el problema de cómo elegir una salida virtual para sistemas explícitos así como para implícitos en función de una dinámica cero y un grado relativo deseados. Dado un sistema, inducir un grado relativo y una dinámica cero deseada puede aplicarse en el diseño de una salida tal que el sistema es de fase mínima y de grado relativo no mayor a uno, por lo tanto dicho sistema es equivalente por retroalimentación de estado a un sistema pasivo. Otra aplicación es en realizaciones mínimas para determinar la salida dados los ceros de la función de transferencia. Otra aplicación, que es la que se desarrolla en esta tesis, es en el control por modos deslizantes de orden superior (MDOS), donde la variable de deslizamiento se puede diseñar para un grado relativo arbitrario y dinámica deslizante deseada.

Esta tesis está organizada en ocho capítulos que se describen brevemente a continuación. El objetivo del Capítulo 2 es introducir la teoría básica para el desarrollo de la tesis, tanto del control por MD como de los sistemas implícitos. En los Capítulos 3 al 7 se presentan los resultados obtenidos durante el desarrollo de esta tesis. En el Capítulo 3 presentamos la fórmula de Ackermann y Utkin generalizada para el caso de sistemas explícitos. En el Capítulo 4 se reportan los resultados experimentales obtenidos al aplicar la fórmula propuesta en el Capítulo 3 en el control por MDOS de un helicóptero de tres grados de libertad. En el Capítulo 5 se presenta una metodología para el control por modos deslizantes integrales de orden superior en sistemas implícitos. En el Capítulo 6 extendemos la fórmula de Ackermann y Utkin generalizada del Capítulo 3 al caso de sistemas implícitos. Mediante el resultado obtenido en el Capítulo 6, en el Capítulo 7 proponemos una metodología del control por MDOS para una clase de sistemas implícitos. Las conclusiones y trabajos

futuros son presentados en el Capítulo 8.

El objetivo del resto de este capítulo es presentar las generalidades de las áreas que se estudian para establecer de forma más concisa la motivación y los objetivos de esta tesis. En la sección 1.1 introducimos la idea, los elementos y la metodología del control por MD. En la sección 1.2 presentamos algunos ejemplos que motivan el estudio de los sistemas implícitos. En la sección 1.2.2 explicamos con detalle la conexión entre ambas áreas de estudio. En la sección 1.2.3 se plantea el problema del diseño de una variable de deslizamiento para el caso de sistemas implícitos. En la última sección presentamos la motivación, los objetivos, las contribuciones y las publicaciones logradas durante el desarrollo de esta tesis.

1.1. Control por modos deslizantes

La técnica del control por MD fue desarrollada en la Unión Soviética a finales de 1950s; sus características más anunciadas son la insensibilidad ante cierto tipo de perturbaciones e incertidumbres y su fácil implementación; y los elementos de la teoría son los siguientes:

1. La planta perturbada.
2. Los objetivos de control (trayectoria deseada, estabilidad, etc.).
3. La entrada de control, la cual no es necesariamente discontinua.
4. Una o varias restricciones algebraicas del estado del sistema, las cuales representan los objetivos de control. Dichas restricciones representan una variedad suave en el espacio de estado del sistema.
5. Las superficies de deslizamiento, las cuales son especificadas por una o varias funciones escalares del estado.
6. Dichas funciones son nombradas variable o vector de deslizamiento (donde cada elemento es una variable de deslizamiento)
7. Cuando la variable o vector de deslizamiento es igual a cero se dice que las trayectorias del sistema quedan restringidas a una superficie de deslizamiento y la dinámica del sistema restringida a la superficie es llamada dinámica deslizante.
8. La estrategia del control, que consiste en mantener las trayectorias en la superficie de deslizamiento a pesar de la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres internas acopladas al control.

9. El control equivalente, el cual es una retroalimentación de estado que se determina considerando una superficie de deslizamiento ideal. El control equivalente puede no aplicarse, pero su existencia nos dice si es posible proponer un control por MD que permita alcanzar los objetivos de control.
10. Ya que la variable o vector de deslizamiento está en función del estado, es posible aplicar la noción de grado relativo cuando la variable o vector de deslizamiento se considera como una salida.

1.1.1. Clásico ejemplo didáctico

Considere un bloque de masa como el de la Figura 1.1.1. Eligiendo las variables de estado como $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ para la posición y la velocidad, respectivamente, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) , \quad (1.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) + w(x, t) , \quad (1.2)$$

donde $u(t)$ es la entrada de control y $w(t)$ representa las perturbaciones e incertidumbres desconocidas, las cuales satisfacen la cota $|w(x, t)| \leq w_0$, con $w_0 > 0$. El problema a resolver es diseñar una ley de control $u(x_1, x_2, t)$ que lleve las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a cero asintóticamente.

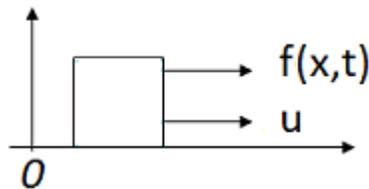


Fig. 1.1.1: Dinámica unidimensional de un bloque de masa.

Proponemos la siguiente dinámica deseada:

$$c_0 x_1(t) + \dot{x}_1(t) = 0 , \quad c_0 > 0 . \quad (1.3)$$

La ecuación (1.3) tiene la siguiente solución general:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-c_0 t} . \quad (1.4)$$

Dado que $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, la solución general para $x_2(t)$ es

$$x_2(t) = -c_0 x_1(0)e^{-c_0 t} . \quad (1.5)$$

Por lo tanto, cuando $x_1(t)$ y $x_2(t)$ satisfacen la restricción (1.3), tienden asintóticamente al origen a pesar de la presencia de la perturbación $w(x, t)$. La técnica del control por MD consiste en forzar la dinámica del sistema a esta dinámica deseada mediante la introducción de una nueva variable. Definiendo la variable $\sigma(t) = c_0x_1(t) + x_2(t)$. Es claro que, si $\sigma(t) = 0$, entonces la primer derivada de $\sigma(t)$ es

$$\dot{\sigma}(t) = c_0x_2(t) + u(t) + w(x, t) = 0. \quad (1.6)$$

Para cuando $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$, un control que satisface (1.6) es $u_{eq}(t) = -w(x, t) - c_0x_2(t)$.

La idea del control por MD es alcanzar (fase de alcance, *reaching phase* en inglés) en tiempo finito, y mantener la condición $\sigma(t) = 0$ a partir de entonces (fase de deslizamiento, *sliding phase* en inglés). El siguiente paso es proponer una ley de control apropiada que permita alcanzar el objetivo de control. Tradicionalmente se propone la ley de control $u(t) = -c_0x_2(t) - \rho_0 \text{sign}(\sigma(t))$, con $\rho_0 \geq w_0$.

Los elementos de la teoría del control por MD en este ejemplo son:

- La variable de deslizamiento $\sigma(t)$.
- El conjunto $\{(x_1, x_2) : \sigma(t) = c_0x_1(t) + x_2(t) = 0\}$, el cual es llamado superficie de deslizamiento.
- La entrada de control $u(t) = -x_2(t) - \rho_0 \text{sign}(\sigma(t))$, la cual es discontinua. Se dice que esta ley de control induce un modo deslizante de primer orden porque se satisface la restricción $\sigma(t) = 0$ durante la fase de deslizamiento.
- El control equivalente $u_{eq}(t) = -w(x, t) - c_0x_2(t)$.
- La dinámica de modo deslizante descrita por las ecuaciones (1.4) y (1.5).

Debido a que $\sigma(t)$ es definida como una combinación lineal de las variables de estado, puede ser vista como una salida. Ya que la variable de control aparece en la primera derivada de $\sigma(t)$ podemos decir que el sistema (1.1) es de grado relativo uno con respecto a la salida $\sigma(t)$.

La Figura 1.1.2 muestra el diagrama de fase cuando $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$.

1.1.2. Diseño de un controlador por modos deslizantes clásico

Considere el sistema

$$\dot{\sigma}(t) = u(t) + w(t), \quad (1.7)$$

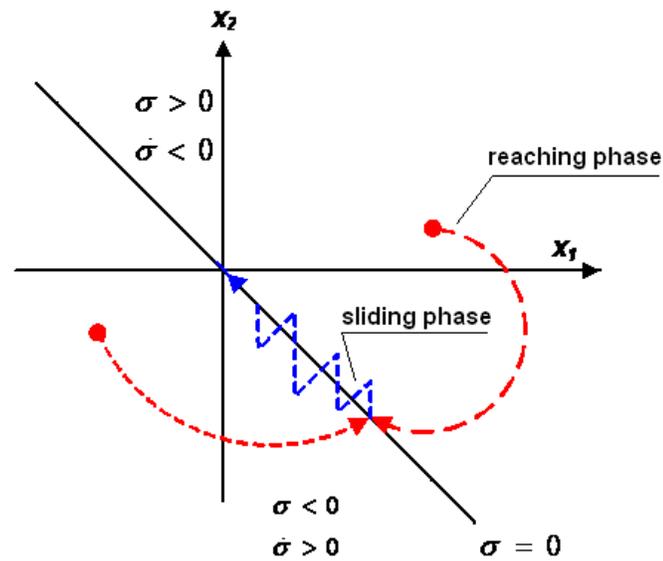


Fig. 1.1.2: Control por MD clásico. Diagrama de fase de la dinámica unidimensional de un bloque de masa.

donde $u(t)$ y $w(t) \in \mathbb{R}$ representan la entrada de control y la perturbación desconocida al tiempo t , respectivamente. El objetivo es llevar la salida $y(t) = \sigma(t)$ a cero en tiempo finito. Es claro que el sistema es de grado relativo uno con respecto a la salida $y(t)$. Suponga que la perturbación está acotada por una constante conocida w_0 , i.e., $|w(t)| \leq w_0$ para toda $t \geq 0$. Proponemos una función candidata de Lyapunov de la forma

$$V(t) = \frac{1}{2}\sigma(t)^2. \quad (1.8)$$

Calculando la derivada de Lie de $V(t)$ en la dirección las trayectorias del sistema ($\dot{\sigma}(t)$), obtenemos

$$\dot{V}(t) = \sigma(t)\dot{\sigma}(t) = \sigma(t)(u(t) + w(t)). \quad (1.9)$$

Con el propósito de lograr convergencia en tiempo finito se debe satisfacer que

$$\dot{V}(t) \leq -\nu V^{\frac{1}{2}}(t), \quad \nu > 0. \quad (1.10)$$

Integrando de 0 a t ambos lados de la desigualdad y despejando el tiempo t , tenemos que $V(t)$ alcanza el cero en el tiempo

$$t_r \leq \frac{2V^{\frac{1}{2}}(0)}{\nu}.$$

Por lo que, en el control por MD $u(t)$ es propuesta de tal forma que la desigualdad (1.10) se cumple. Proponiendo $u(t)$ como

$$u(t) = -\rho_0 \text{sign}(\sigma(t)), \quad \rho_0 \geq w_0 + \epsilon_0, \quad \epsilon_0 > 0, \quad (1.11)$$

donde

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ [-1, 1] & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases},$$

en (1.9) obtenemos

$$\dot{V}(t) = \sigma(t) (-\rho_0 \text{sign}(\sigma(t) + w(t))) \leq -|\sigma(t)|(\rho_0 - w_0). \quad (1.12)$$

De (1.10) tenemos

$$\dot{V}(t) \leq -\nu V^{\frac{1}{2}}(t) = -\frac{\nu}{\sqrt{2}} |\sigma(t)|, \quad \nu > 0. \quad (1.13)$$

Combinando (1.12) y (1.13) obtenemos

$$\dot{V}(t) \leq -|\sigma(t)|(\rho_0 - w_0) = -\frac{\nu}{\sqrt{2}} |\sigma(t)|.$$

Finalmente, ρ_0 es calculada como

$$\rho_0 = w_0 + \frac{\nu}{\sqrt{2}}.$$

Se dice que (1.11) induce un modo deslizante de primer orden ya que lleva la salida $\sigma(t)$ a cero en tiempo finito.

Comentario 1 Como podemos ver en este ejemplo la función de Lyapunov propuesta está en función de la variable de deslizamiento $\sigma(t)$, por lo tanto solo asegura la convergencia en tiempo finito de ésta. En sistemas de dos dimensiones, al aplicar el primer paso de la metodología del control por MD para inducir un modo deslizante de primer orden, es fácil elegir la variable de deslizamiento de tal manera que en modo deslizante las variables de estado tienden asintótica al origen (véase el ejemplo del bloque de masa). Para elegir la variable de deslizamiento en sistemas de mayor dimensión podemos usar la fórmula de Ackermann y Utkin (en el caso de sistemas de una entrada) para diseñar la variable de deslizamiento de tal manera que en dinámica deslizante las trayectorias convergen asintóticamente al origen (véase la Subsección 2.1.4 y [Ackermann and Utkin, 1998]).

1.1.3. Superficie de deslizamiento

Considere el sistema no lineal (afín al control)

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t)u(t), \quad (1.14)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ representan el estado y la entrada, respectivamente. Se asume que $f(x, t)$ y $g(x, t)$ son campos vectoriales ($f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) suaves

(infinitamente diferenciables). Sea $\sigma(x, t)$ la variable de deslizamiento. En el control por MD clásico una superficie de deslizamiento denotada como

$$S := \{x(t) \in \mathbb{R}^n : \sigma(x, t) = 0\},$$

define una variedad suave de dimensión $n - 1$ en \mathbb{R}^n . Esto significa que durante la dinámica deslizante el estado evoluciona en la variedad S , al menos localmente. Por lo que el control por modos deslizantes genera una dinámica de orden reducido. Si la ley de control es discontinua, entonces el sistema en lazo cerrado es descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias con el lado derecho discontinuo. La solución del sistema en lazo cerrado requiere del concepto propuesto por Filippov [Filippov, 1988].

1.1.4. Problemas en el control por modos deslizantes y sus respectivas soluciones

La principal desventaja del control por MD clásico es el fenómeno del castaño (chattering en inglés) originado por la conmutación de alta frecuencia por parte de la acción de control [Shtessel et al., 2013], sin embargo ésta es la principal motivación para el desarrollo de controladores por MDOS. En MDOS se busca llevar tanto la variable de deslizamiento como sus derivadas de alto orden a cero. Esto conlleva a que la variable de deslizamiento alcance el cero de manera más suave, delegando menos suavidad a sus derivadas. Otras desventajas son:

1. Que se asume todo el estado disponible.
2. Que durante la fase se alcance el sistema es sensible a perturbaciones, incluso a perturbaciones acopladas.
3. La incapacidad para rechazar perturbaciones no acopladas al control.

Para solucionar el problema 1 la idea principal es usar la salida para diseñar la variable de deslizamiento [Edwards and Spurgeon, 1995; Shtessel, 1997; Levant, 2003]. Para el problema 2 se ha propuesto el concepto de MDI [Utkin and Shi, 1996], donde se diseña una superficie de deslizamiento integral que garantiza que las trayectorias del sistema inician en la superficie de deslizamiento desde el tiempo inicial. En el problema 3 la idea principal es combinar control por MD con otras técnicas, por ejemplo, en [de Loza et al., 2013] se propone combinar el control por MD con observación por MDOS y en [Poznyak et al., 2003] se propone combinar control por MD con otras técnicas de control robusto. En [Poznyak et al., 2004; Castaños and Fridman, 2006] se proponen combinaciones de MDI con

otras técnicas de control robusto que resuelven los problemas 2 y 3 al mismo tiempo. En [Castaños and Fridman, 2006], con respecto al problema 3, se define una superficie integral mediante un conjunto de matrices que permite que la norma euclidiana de la perturbación equivalente sea mínima, esto es, no se amplifica con respecto a la norma de la perturbación no acoplada original.

1.1.5. Metodología del control por modos deslizantes

La metodología del control por MD consiste de dos etapas. En la primer etapa se diseña una variable de deslizamiento (que puede ser interpretada como una salida) en base a los objetivos de control (e.g., grado relativo deseado, estabilidad). En la segunda etapa se propone una ley de control (posiblemente discontinua) que se encarga de llevar y mantener las trayectorias del sistema en la superficie de deslizamiento [Shtessel et al., 2013].

El control por MD clásico se aplica a sistemas de grado relativo uno con respecto a la salida [Shtessel et al., 2013], y cuenta con una metodología completa ya que existen varios métodos para elegir la variable de deslizamiento, tanto en el caso de una entrada [Ackermann and Utkin, 1998; Shtessel et al., 2013] como en el de múltiples entradas [Draženović et al., 2012; Shtessel et al., 2013].

1.1.6. Control por modos deslizantes de orden superior

El control por MDOS se aplica a sistemas de grado relativo mayor o igual que uno con respecto a la salida. Como ya hemos visto en la Subsección 1.1.2, el control por MD clásico corresponde a un controlador por modos deslizantes de primer orden (MDPO). En el control por modos deslizantes de segundo orden (MDSO) la superficie de deslizamiento es una variedad suave de dimensión $n-2$ en \mathbb{R}^n , la cual resulta de la intersección de los planos $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$. Cuando dichas restricciones son alcanzadas, se dice que el controlador induce un MDSO (*2-sliding motion*, en inglés). En general, en el control por MD de grado relativo arbitrario r , una superficie de deslizamiento es una variedad suave de dimensión $n-r$ en \mathbb{R}^n , la cual resulta de la intersección de los planos $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = \dots = \sigma^{(r-1)}(t) = 0$. Cuando dichas restricciones son alcanzadas se dice que el controlador por MDOS induce un modo deslizante de r -ésimo orden (*r-sliding motion*, en inglés) [Shtessel et al., 2013].

En el control por MDOS (previo a este trabajo) la metodología estaba incompleta en el sentido de que no existía un método para diseñar la variable de deslizamiento. Para eludir el problema, en el control por MDOS se puede diseñar un controlador que induzca un modo deslizante de n -ésimo orden, con lo cual tenemos

1. El sistema es de grado relativo $r = n$ con respecto a la salida virtual $\sigma(t)$.

2. La superficie de deslizamiento es un punto, que resulta de la intersección de los planos $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = \dots = \sigma^{(n-1)}(t) = 0$.
3. No existe dinámica deslizante.

Respecto al segundo paso de la metodología del control por MDOS, existe una familia de controladores para grado relativo arbitrario que de manera robusta lleva a cero la variable de deslizamiento, asumiendo el conocimiento de $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ hasta $\sigma^{(r-1)}(t)$ (revisar [Levant, 2005b] para más detalles). En años recientes, se han hecho esfuerzos por desarrollar controladores por MD que proporcionen una señal continua que subsane el problema del castaño. Tal es el caso del controlador Super-Twisting (ST) que proporciona una señal absolutamente continua. El algoritmo Super-Twisting de segundo orden (STSO) propuesto en [Moreno and Osorio, 2012] se caracteriza por su aplicación en sistemas de grado relativo uno respecto a la salida, sin embargo garantiza la convergencia en tiempo finito de la variable de deslizamiento y su primer derivada. Una familia de controladores Super-Twisting se propone en [Kamal et al., 2014]. La prueba de estabilidad para el controlador Super-Twisting de tercer orden (STTO) está en revisión en la revista *Automatica*, pero el algoritmo ya ha sido probado experimentalmente en el problema de estabilización de un helicóptero de tres grados de libertad [Franco, 2014; Pérez, 2014].

Durante el desarrollo de esta tesis, hemos presentado una generalización de la fórmula de Ackermann y Utkin que funciona para grado relativo arbitrario y dinámica deslizante deseada [Hernández et al., 2013, 2014], la cual ha sido verificada experimentalmente en [Pérez, 2014].

Por ello, podemos enunciar los nuevos elementos de la teoría del control por MDOS como sigue:

1. El sistema es de grado relativo $r \leq n$ con respecto a la salida virtual $\sigma(t)$.
2. La superficie de deslizamiento es una variedad suave de dimensión $n - r$ en \mathbb{R}^n .
3. La ley de control garantiza un modo deslizante de r -ésimo orden.
4. La dinámica deslizante puede elegirse para $n - r$ eigenvalores deseados.

1.2. Sistemas implícitos

En esta sección presentamos algunos ejemplos que motivan el estudio de los sistemas implícitos.

1.2.1. Ejemplos

Sistemas en espacio de estado: matriz transferencia propia o impropia

Considere el siguiente sistema explícito en espacio de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) , \quad (1.15a)$$

$$y(t) = Cx(t) , \quad (1.15b)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y las matrices A , B , C son cuadradas de las dimensiones apropiadas. Mediante la transformada de Laplace obtenemos la siguiente matriz de transferencia estrictamente propia

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)B}{\det(sI - A)} .$$

Lo cual significa que $G(s)$ tiende a cero cuando $s \rightarrow \infty$. Agregando el término $Du(t)$ al lado derecho de la ecuación (1.15b), con $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$, la nueva matriz de transferencia es

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)} ,$$

la cual es propia. Esto es, si D es diferente de cero, entonces hay una relación directa entre la salida y la entrada.

Este caso puede estudiarse de manera más general con un sistema implícito en espacio de estado de la forma siguiente

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) ,$$

$$y(t) = Cx(t) ,$$

donde E es una matriz singular. Esto significa que la relación entrada-salida puede ser directa (restricción algebraica y matriz de transferencia propia), o la salida puede depender de derivadas de la entrada (restricciones con derivadores y matriz de transferencia impropia).

Algunos ejemplos incluyen los sistemas a gran escala interconectados y los robots con restricciones en el espacio de trabajo (véase [Brenan et al., 1995; Campbell and Rose, 1982; Rosenbrock and Pugh, 1974] para más ejemplos).

Clásico ejemplo didáctico: Circuito RLC

La Figura (1.2.1) muestra un circuito RLC simple que puede ser descrito mediante un sistema implícito lineal [Dai, 1989]. La fuente de voltaje se representa por $V(t)$, y R ,

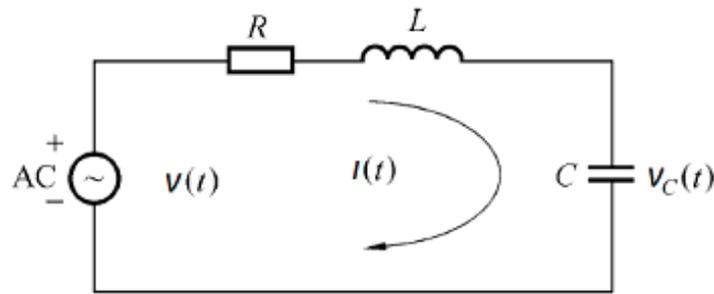


Fig. 1.2.1: Circuito RLC simple.

L y C representan la resistencia, la inductancia y la capacitancia, respectivamente. Sus respectivos voltajes son representados por $V_R(t)$, $V_L(t)$ y $V_C(t)$.

El circuito de la Figura (1.2.1) queda descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales (obtenidas al aplicar teoría circuitos):

$$L \frac{dI(t)}{dt} = V_L(t) , \quad (1.16a)$$

$$C \frac{dV_C(t)}{dt} = I(t) , \quad (1.16b)$$

$$RI(t) = V_R(t) , \quad (1.16c)$$

y por la ley de voltajes de Kirchhoff tenemos

$$V_L(t) + V_C(t) + V_R(t) = V(t) . \quad (1.17)$$

Eligiendo como estado $x(t) = [I(t) \ V_C(t) \ V_L(t) \ V_R(t)]^T$ y como entrada $u(t) = V(t)$, las ecuaciones (1.16a) a (1.17) pueden escribirse de forma implícita como sigue

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) , \quad (1.18)$$

con

$$E = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Es claro que, la matrix de lado izquierdo de este sistema implícito es singular, esto es, $\det E = 0$.

Eligiendo como salida $y(t) = V_C(t)$ resulta una función de transferencia propia. Eligiendo como salida $y(t) = I(t)$ resulta una función de transferencia estrictamente propia. Si hacemos algunas manipulaciones en las ecuaciones diferenciales obtenidas y elegimos el estado

como $x(t) = \begin{bmatrix} I(t) & \dot{I}(t) \end{bmatrix}^T$, obtenemos un sistema explícito de dos dimensiones (conocido ampliamente en la literatura de la teoría de circuitos) para el cual siempre se obtiene una función de transferencia estrictamente propia. Eligiendo en éste como salida $y(t) = I(t)$ las funciones de transferencia para ambas representaciones, explícita e implícita, coinciden. Es decir, si salida es $I(t)$ las representaciones explícita e implícita son equivalentes en algún sentido (e.g., equivalentes por función de transferencia, para más detalles ver la Subsección 2.2.11 y referencias contenidas). Este ejemplo es abordado para mostrar que la primera representación matemática que encontramos puede ser implícita, sin embargo, la representación final puede ser implícita o explícita según como se elija el estado. En este caso, ambos estados son fácilmente medibles. En el caso de que una o varias variables sean más difíciles (o imposible) de medir que otras, una opción puede ser implementar un algoritmo de identificación. Otra opción es abordar el problema directamente analizando la representación implícita.

1.2.2. Enfoque implícito del control por modos deslizantes

Considere el siguiente sistema explícito LIT de una entrada

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t), \quad (1.19a)$$

donde $v(t) = u(t) + w(t)$. Los vectores $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t)$ y $w(t) \in \mathbb{R}$ representan el estado, la entrada y la perturbación desconocida al tiempo t , respectivamente.

En sistemas explícitos una variable de deslizamiento normalmente se representa como una combinación lineal de los estados de la forma

$$\sigma(t) = cx(t), \quad (1.20)$$

donde c es un vector fila. Cuando el sistema está en modo deslizante ($\sigma(t) = 0$), el sistema explícito sujeto a una restricción algebraica se puede representar de manera implícita como sigue

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}_{eq}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u_{eq}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

donde $u_{eq}(t)$ es el control equivalente.

Considere el par (A, b) controlable y suponga que

$$c = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \end{bmatrix},$$

se ha elegido apropiadamente, según los objetivos de control. Ya que se asume que el par (A, b) es controlable, existe una transformación de coordenadas $x(t) = \hat{T}z(t)$ tal que en las

nuevas coordenadas obtenemos un sistema implícito de la forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{u}_{eq}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{b} \\ \hat{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ u_{eq}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

donde $\hat{A} = \hat{T}^{-1}A\hat{T}$, $\hat{b} = \hat{T}^{-1}b$ y $\hat{c} = c\hat{T}$ están en forma canónica controlable, es decir,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} \hat{c}_0 & \hat{c}_1 & \dots & \hat{c}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Se sabe que el polinomio característico de \hat{A} es $p_{\hat{A}}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$ [Gantmacher, 1964; Williams and Lawrence, 2007]. El polinomio característico de las matrices del sistema (1.22) está dado por

$$p_E(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} & -1 \\ -\hat{c}_0 & -\hat{c}_1 & \dots & -\hat{c}_{n-2} & -\hat{c}_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Sean i y j los índices por filas y por columnas, respectivamente. Es fácil ver que

$$p_E(\lambda) = (-1)^{(i+j)}(-1) \det (M_{(n,n+1)}) ,$$

donde el menor $M_{(n,n+1)}$ es

$$M_{(n,n+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ -\hat{c}_0 & -\hat{c}_1 & -\hat{c}_2 & \dots & -\hat{c}_{n-2} & -\hat{c}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ya que $i = n$ y $j = n + 1$, tenemos

$$p_E(\lambda) = (-1)^{(2n+1)}(-1) \det(M_{(n,n+1)}) = \det(M_{(n,n+1)}).$$

Es claro que el determinante del sistema implícito (1.22) es

$$p_E(\lambda) = \det(M_{(n,n+1)}) = -\hat{c}_{n-1}\lambda^{n-1} - \hat{c}_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - \hat{c}_1\lambda - \hat{c}_0. \quad (1.23)$$

Evidentemente, grado del polinomio $p_E(\lambda)$ es a lo más $n - 1$ dependiendo de los valores de c . Como veremos más adelante, este polinomio coincide con los ceros de la función de transferencia cuando consideramos $\sigma(t)$ como una salida, y con el polinomio característico del sistema reducido cuando consideramos $\sigma(t)$ como una salida idénticamente cero.

1.2.3. Sistemas implícitos perturbados

Uno de los problemas abordados en esta tesis es el control por modos deslizantes de sistemas implícitos LIT perturbados. Siguiendo la metodología del control por MD, primero diseñamos una superficie de deslizamiento. Cuando el sistema implícito se encuentra en modo deslizante, el sistema implícito está sujeto a una restricción algebraica, lo cual puede representarse como

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad (1.24a)$$

$$0 = cx(t), \quad (1.24b)$$

con $v(t) = u(t) + w(t)$ y $\text{rank } E < n$. El vector $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t)$ y $w(t) \in \mathbb{R}$ son el estado, la entrada de control y la perturbación al tiempo t , respectivamente.

El objetivo es diseñar la restricción algebraica dependiendo de los objetivos de control, como en el caso de sistemas explícitos, pero ahora para un sistema que ya tiene restricciones. Debido a que la matriz del lado izquierdo del sistema (1.24a) es singular, no podemos aplicar los métodos conocidos para sistemas explícitos. Cabe mencionar que la existencia y unicidad de la solución de un sistema implícito requiere de un cierto grado de diferenciablez por parte de la entrada. Esto descarta completamente el uso de un controlador por MD clásico para resolver este problema.

1.3. Motivación

En esta tesis queremos solventar algunas debilidades aprovechando algunas fortalezas de cada una de las áreas de investigación estudiadas, el control por MD y los sistemas

implícitos. Las debilidades y fortalezas abordadas son brevemente descritas a continuación.

Algunas fortalezas del control por MD son:

- Una familia completa de controladores por MD que robustamente lleva la variable de deslizamiento y sus derivadas de alto orden a cero (controlador Cuasi-continuo) [Levant, 2003].
- Un control por MDSO que mantiene las ventajas del control por MDPO al ser aplicado a sistemas con grado relativo uno, pero además provee una señal absolutamente continua, lo que atenúa el efecto de castaño (algoritmo Super-twisting) [Kamal et al., 2014; Moreno and Osorio, 2012].

Una debilidad del control por MD es:

- La ausencia de un método para diseñar la variable de deslizamiento para grado relativo, dinámica deslizante y grado de exactitud deseados.

Por otra parte, una fortaleza de los sistemas implícitos es:

- Una base fundada en la teoría de matrices, específicamente en el estudio de los binomios matriciales (abanico en español y pencil en inglés) [Gantmacher, 1964].

Y una debilidad de los sistemas implícitos es:

- La ausencia de técnicas de control por MD aplicado a sistemas implícitos perturbados.

Al intentar aplicar control por MD a sistemas implícitos, nos enfrentamos con el siguiente problema o reto:

- La existencia y unicidad de la solución de un sistema implícito requiere de cierto grado de diferenciabilidad por parte de la entrada, ya que una parte del estado del sistema implícito depende directamente de la entrada y derivadas de la entrada. Debido a esto, el uso de un controlador por MD clásico para resolver el problema queda descartado.

Actualmente, el control por MD puede contribuir a la solución de dicho problema para cierto tipo de sistemas implícitos, ya que:

- El control por MD cuenta con un controlador que provee una señal de control absolutamente continua por medio del algoritmo Super-Twisting.
- También se cuentan con otras técnicas de control por MD, como lo son el control por MDI y el control por MDOS.

1.4. Objetivos

1.4.1. General

El objetivo general de esta tesis es brindar beneficios a ambas áreas de investigación abordadas. Debido a las debilidades y fortalezas de cada una, creemos que se pueden beneficiar mutuamente. La teoría de sistemas implícitos, y más propiamente de abanicos, puede brindar herramientas para el análisis y diseño de controladores por MD. Por otra parte, el control por MD puede brindar robustez a los sistemas implícitos, además de facilidad de implementación.

1.4.2. Particulares

1. Proponer un método para diseñar una superficie de deslizamiento en un sistema explícito de una entrada para grado relativo prescrito y dinámica deslizante deseada con el objetivo de aplicar control por MDOS.
2. Extender el objetivo 1 al caso de sistemas implícitos de una entrada y de múltiples entradas.
3. Verificar experimentalmente al menos una de las metodologías propuestas ¹.

1.5. Contribuciones

Durante el desarrollo del tema de tesis, se han hecho las siguientes contribuciones:

1. Una fórmula de Ackermann y Utkin generalizada para sistemas explícitos de una entrada que funciona para grado relativo prescrito y dinámica deslizante deseada [Hernández et al., 2013, 2014].
2. Una superficie de deslizamiento integral para sistemas implícitos LIT de múltiples entradas [Castaños et al., 2012].
3. En [Castaños et al., 2014] abordamos el caso de sistemas implícitos con incertidumbre paramétrica no acoplada, donde se muestra, una vez más, que es posible combinar MDI con otras técnicas de control robusto. Bajo ciertos supuestos la incertidumbre se puede dividir en acoplada y no acoplada, de tal forma que es posible combinar el

¹Se logró verificar experimentalmente la metodología para sistemas explícitos.

resultado al que se hace referencia en el punto 2 con un resultado presentado en [Xu and Lam, 2006, p. 59].

4. Una fórmula para elegir una salida virtual en un sistema implícito de una entrada para grado relativo prescrito (negativo, cero o positivo) y ceros deseados (finitos e infinitos).
5. Una forma normal para sistemas implícitos de una entrada con grado relativo estrictamente positivo respecto a la salida, compatible con la salida idénticamente cero. La reducción propuesta consiste de tres subsistemas en cascada y es análoga a una forma normal para sistemas explícitos (que consiste de dos subsistemas en cascada).
6. Una metodología del control por MDOS (MDSO y MDTO) para una clase de sistemas implícitos.
7. La verificación experimental de la fórmula presentada en [Hernández et al., 2013, 2014] aplicada al control por MDOS de un helicóptero de tres grados de libertad (3-DOF) producido por Quanser Consulting, Inc. [QUANSER, 2014].

1.6. Publicaciones

1. Castaños, F., Hernández, D., and Fridman, L. “Integral sliding mode control for linear time-invariant implicit descriptions”. In Proc. Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, Dec. 2012, pp. 6442-6447.
2. Hernández, D., Castaños, F., and Fridman, L. “Pole-placement in higher-order sliding-mode control”. ArXiv e-prints, 2013.
3. Hernández, D., Castaños, F., and Fridman, L. “Pole-placement in higher-order sliding-mode control”. In Proc. The International Federation of Automatic Control, Cape Town, South Africa, Aug. 2014, pp. 1386-1391.
4. Castaños, F., Hernández, D., and Fridman, L. “Integral sliding mode control for linear time-invariant implicit descriptions”. *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 971-975, 2014.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo introducimos la teoría del control por MD aplicado a sistemas explícitos y la teoría de los sistemas implícitos regulares.

2.1. Control por modos deslizantes

2.1.1. Motivación

Considere el sistema LIT con múltiples entradas perturbado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(x, t), \quad (2.1)$$

donde los vectores $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ representan el estado y la entrada de control al tiempo t , respectivamente. Las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $1 \leq m \leq n$. La función $\varphi(x, t)$ representa la perturbación desconocida.

Considere el par (A, B) controlable y $m \geq 1$. El objetivo de control es llevar $x(t)$ a cero. En ausencia de perturbaciones (cuando $\varphi(x, t) \equiv 0$), el objetivo de control se logra mediante una retroalimentación de estado $u(t) = -Kx(t)$, con K elegida de tal manera que $A - BK$ es Hurwitz. Sea d_i un vector fila de dimensión i cuyo i -ésimo elemento es igual a uno y el resto de sus elementos son ceros. En el caso de una entrada ($m = 1$), K puede calcularse usando la fórmula de Ackermann [Chen, 1995; Williams and Lawrence, 2007]

$$K = d_n P^{-1} \alpha(A),$$

donde P es la matriz de controlabilidad del par (A, B) y $\alpha(\lambda)$ es el polinomio característico (Hurwitz) deseado del sistema en lazo cerrado. Por medio de la ley de control suave $u(t) = -Kx(t)$ no se logra el objetivo de control cuando $\varphi(x, t) \neq 0$. Si la perturbación es acotada

y entra por el mismo canal que la señal de control, entonces el problema puede resolverse mediante el control por MD [Utkin et al., 1999] donde una señal de control posiblemente discontinua¹ se encarga de rechazar la perturbación.

2.1.2. Método del control equivalente

Considere el sistema LIT de múltiples entradas

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) , \quad (2.2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $1 \leq m \leq n$, se definen como en el sistema (2.1). Considere la variable de deslizamiento

$$\sigma(t) = Cx(t) , \quad (2.3)$$

donde la matriz $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. El control por MD debe asegurar que las trayectorias del sistema alcancen la superficie de deslizamiento en tiempo finito y permanezcan allí a partir de entonces. Asumamos que esto se logra eligiendo propiadamente el control (1.11). Entonces, la derivada de la variable de deslizamiento satisface que

$$\dot{\sigma}(t) = CAx(t) + CBu_{eq}(t) = 0 .$$

Si la matriz (CB) es invertible, lo cual se conoce como condición de transversalidad [Sira-Ramírez, 1988], entonces el control equivalente se puede expresar de forma única como

$$u_{eq}(t) = -(CB)^{-1}CAx(t) .$$

Definición 2 [Utkin, 1992; Shtessel et al., 2013] *El control equivalente es una ley de control por retroalimentación de estado, suave, que asegura que después de la fase de alcance las trayectorias del sistema permanecen en la superficie de deslizamiento a partir de entonces, es decir, el control equivalente hace que la superficie de deslizamiento sea invariante.*

El sistema en lazo cerrado con el control equivalente puede escribirse de la siguiente manera

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - B(CB)^{-1}CAx(t) = [I - B(CB)^{-1}C] Ax = OAx . \quad (2.4)$$

Definición 3 [Kreyszig, 1978] *Una matriz cuadrada H es un operador de proyección si H es idempotente, i.e., $H^2 = H$.*

¹Soluciones de ecuaciones diferenciales con el lado derecho discontinuo deben entenderse en el sentido de Filippov.

Es fácil verificar que la matriz O en (2.4) satisface que $O^2 = O$.

Proposición 4 [Utkin, 1992; Shtessel et al., 2013] *El operador $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en (2.4) proyecta cualquier campo vectorial suave definido en el espacio \mathbb{R}^n a la variedad S . El espacio nulo del operador O es el subespacio expandido por B , esto es, $\text{span}\{B\}$.*

Para verificar la primer sentencia de la Proposición 4, debemos mostrar que la imagen bajo el operador O de cualquier campo vectorial en \mathbb{R}^n cae en la variedad S . Tenemos lo siguiente

$$CO = C [I - B(CB)^{-1}C] = C - CB(CB)^{-1}C = C - C = 0 ,$$

por lo tanto, C aniquila cada columna de O , de lo cual podemos concluir que la imagen bajo el operador O de cualquier campo vectorial en \mathbb{R}^n pertenecen al espacio nulo de C .

Cualquier campo vectorial en $\text{span}\{B\}$ puede ser expresado como $\beta_b B$ con $\beta_b \in \mathbb{R}$, por lo que tenemos

$$O\beta_b B = \beta_b [I - B(CB)^{-1}C] B = \beta_b [B - B(CB)^{-1}CB] = \beta_b [B - B] = 0 ,$$

lo que significa que cualquier campo vectorial en $\text{span}\{B\}$ pertenece al espacio nulo de O .

Esta propiedad de *invariancia* motiva el uso del control por MD en el caso de perturbaciones que entren por el mismo canal que la entrada de control [Shtessel et al., 2013].

2.1.3. Perturbaciones acopladas

Considere el sistema LIT con múltiples entradas perturbado (2.1). Considere $u(t)$ de la forma (1.11). En esta sección analizamos que condiciones se deben satisfacer para que una perturbación puedan rechazarse mediante $u(t)$ cuando la dinámica del sistema está gobernada por la dinámica de modo deslizante. Considere la variable de deslizamiento (2.3). Suponga que las trayectorias del sistema quedan restringidas a la superficie de deslizamiento $S = \{x(t) : \sigma(t) = 0\}$ de dimensión $n - 1$ en tiempo finito a pesar de la presencia de la perturbación $w(t, x)$. Considerando lo anterior, podemos afirmar que existe un control equivalente $u_{eq}(t)$ el cual mantiene las trayectorias del sistema sobre la superficie de deslizamiento y puede expresarse de manera unívoca como

$$u_{eq}(t) = -(CB)^{-1} (CAx(t) + C\varphi(x, t)) .$$

El sistema en lazo cerrado es

$$\dot{x}(t) = [I - B(CB)^{-1}C] (Ax(t) + \varphi(x, t)) . \quad (2.5)$$

Suponga la perturbación $\varphi(x, t) \in \text{span}\{B\}$ para toda t , i.e., existe una función escalar $w(x, t)$ tal que

$$\varphi(x, t) = Bw(x, t).$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} [I - B(CB)^{-1}C] \varphi(x, t) &= [I - B(CB)^{-1}C] Bw(x, t) \\ &= Bw(x, t) - Bw(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Por lo que, el sistema en lazo cerrado (2.5) queda como

$$\dot{x}(t) = [I - B(CB)^{-1}C] Ax(t).$$

Entonces, la superficie ideal de deslizamiento es invariante con respecto a la perturbación $\varphi(x, t)$ si y sólo si $\varphi(x, t) \in \text{span}\{B\}$. Más concretamente, la condición de acoplamiento se satisface cuando $\varphi(x, t) = Dw(x, t)$ y todas las columnas de D son combinaciones lineales de las columnas de B . Dicho requerimiento puede escribirse como

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & D \end{bmatrix} = \text{rank} B. \quad (2.6)$$

Este resultado se puede extender a sistemas no lineales [Draženović, 1969].

2.1.4. Diseño de una superficie de deslizamiento de primer orden

La variable de deslizamiento en el caso de una superficie de deslizamiento de primer orden puede elegirse mediante uno de los siguientes métodos:

1. Llevar el sistema a la llamada forma regular, donde el sistema queda dividido en dos subsistemas. Un subsistema que queda desacoplado de la entrada y la perturbación, pero que puede ser controlado por una parte del estado. El otro queda acoplado a la entrada de control y la perturbación. La superficie de deslizamiento es entonces diseñada para este último subsistema de menor dimensión [Shtessel et al., 2013].
2. Usar la fórmula de Ackermann y Utkin [Ackermann and Utkin, 1998], la cual nos permite diseñar la variable de deslizamiento para una dinámica deslizante deseada en sistemas de una entrada.
3. Usar la fórmula propuesta en [Draženović et al., 2012], la cual funciona para sistemas de múltiples entradas que están en la forma regular.

Forma regular

Considere el sistema LIT perturbado (2.1). Se asume lo siguiente:

Hecho 5 $\text{rank } B = m$.

Hecho 6 $\varphi(x, t) = Bw(x, t)$.

Hecho 7 *Se puede encontrar una cota superior para $w(x, t)$, i.e., $\|w(x, t)\| \leq \bar{w}(x, t)$, para toda x y t .*

Hecho 8 *El par (A, B) es controlable.*

De los Hechos 5 y 6, bajo la transformación de coordenadas $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = Tx$, con $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida como

$$T = \begin{bmatrix} B^\perp \\ B^\dagger \end{bmatrix}, \quad B^\dagger = (B^T B)^{-1} B^T, \quad B^\dagger B = I, \quad B^\perp B = 0,$$

donde $B^\perp \in \mathbb{R}^{n-m \times n}$ pertenece al espacio ortogonal de B y $B^\dagger \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la inversa por la izquierda (pseudo-inversa de Moore-Penrose) de B , obtenemos

$$\dot{z}_1(t) = A_{11}z_1(t) + A_{12}z_2(t) \tag{2.7a}$$

$$\dot{z}_2(t) = A_{21}z_1(t) + A_{22}z_2(t) + u(t) + \varphi_r(z_1, z_2, t), \tag{2.7b}$$

donde $z_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ y $z_2 \in \mathbb{R}^m$. La superficie de deslizamiento se elige de tal manera que

$$\sigma(t) = z_2(t) - Kz_1(t) = 0.$$

Como consecuencia, cuando las trayectorias del sistema quedan restringidas a la superficie de deslizamiento, obtenemos el siguiente sistema de orden reducido

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} + A_{12}K)z_1(t).$$

Debido al Hecho 8, el par (A_{11}, A_{12}) es controlable. Entonces la matriz K puede diseñarse mediante métodos de control de sistemas lineales de tal manera que podemos elegir $(n - m)$ eigenvalores por medio de K .

Fórmula de Ackermann y Utkin

Considere el sistema LIT perturbado de una entrada

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t); \quad v(t) = u(t) + w(t), \quad (2.8)$$

donde b es un vector columna, y el vector $x(t)$ y la matriz A se definen como en el sistema (2.2). Asuma que se satisfacen los Hechos 5 y 6. Sea P la matriz de controlabilidad del par (A, b) . Considere la variable de deslizamiento

$$\sigma(t) = cx(t). \quad (2.9)$$

Asumiendo el Hecho 8, el vector fila c puede ser diseñado mediante la fórmula de Ackermann y Utkin enunciada en el siguiente teorema [Ackermann and Utkin, 1998].

Teorema 9 [Utkin et al., 1999; Shtessel et al., 2013; Ackermann and Utkin, 1998] Si

$$c = d_n P^{-1} \beta(A), \quad (2.10)$$

con $\beta(\lambda) = \lambda^{n-1} + \beta_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0$, entonces las raíces del polinomio $\beta(\lambda)$ son los eigenvalores de la dinámica de modo deslizante en el plano $\sigma(t) = 0$.

El Teorema 9 nos dice que, por medio de la Fórmula (2.10), podemos elegir la variable de deslizamiento proponiendo el polinomio $\beta(\lambda)$ de grado $n - 1$ dados los eigenvalores deseados de la dinámica de modo deslizante. Si el polinomio propuesto es Hurwitz, entonces el sistema en dinámica deslizante es asintóticamente estable.

2.1.5. Modos deslizantes integrales

Los elementos de la técnica de control por MDI son los siguientes:

1. La ley de control que es expresada como la suma de un control nominal continuo y un control discontinuo.
2. El control nominal que es reponsable del desempeño del sistema nominal, i.e., el sistema no perturbado.
3. El control discontinuo, el cual se encarga de rechazar las perturbaciones y forzar el modo deslizante.
4. La superficie de deslizamiento, la cual depende de la condición inicial y asegura que las trayectorias del sistema inicien en la superficie deseada desde el primer instante, resolviendo así el problema de fase de alcance.

La idea principal del control por MDI es diseñar la variable de deslizamiento como una función lineal de la diferencia entre el valor actual del estado, considerando la perturbación, y el valor del estado sin considerar la perturbación.

Considere el sistema LIT perturbado (2.1). Asumiendo los Hechos 5, 6 y 7, la ley de control por MDI se diseña de la forma

$$u(t) = u_n(t) + u_p(t) , \quad (2.11)$$

donde u_n es el control nominal y u_p es el control discontinuo que asegura la existencia del modo deslizante. La variable de deslizamiento integral se define como [Utkin and Shi, 1996; Shtessel et al., 2013]:

$$\sigma(t) = G \left(x(t) - x(0) - \int_0^t (Ax(\tau) + Bu_n(\tau)) d\tau \right) ,$$

donde $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz que penaliza la diferencia entre el sistema nominal y el sistema perturbado y cumple que GB es una matriz no singular.

Se puede observar que $\sigma(0) = 0$, lo que significa que el sistema siempre inicia en la superficie de deslizamiento para cualquier condición inicial. La primer derivada de la variable de deslizamiento es

$$\dot{\sigma}(t) = GB(u_p(t) + \varphi(x, t)) .$$

Normalmente el control $u_p(t)$ se diseña como

$$u_p(t) = -\rho(x, t) \frac{(GB)^T \sigma(t)}{\|(GB)^T \sigma(t)\|} ,$$

donde $\rho(x, t)$ es una ganancia lo suficientemente grande para garantizar la existencia del modo deslizante.

2.1.6. Grado relativo

Sea un sistema LIT de la forma (2.8), para el cual se considera a la variable de deslizamiento (2.9) como una salida virtual. Entonces tenemos

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) , \quad (2.12a)$$

$$\sigma(t) = cx(t) . \quad (2.12b)$$

Se dice que el sistema (2.12) es de *grado relativo* r si $cA^k b = 0$, $0 \leq k < r - 2$ y $cA^{r-1} b \neq 0$.

Definición 10 [Isidori, 1995] *El grado relativo del sistema (2.12a) con respecto a la salida $\sigma(t)$ es el número de veces que se debe derivar la salida $\sigma(t)$ con respecto al tiempo t para se pueda obtener una expresión explícita de la entrada $u(t)$.*

Si el sistema (2.12) tiene grado relativo r , entonces es posible llevar al sistema (2.12) por medio de una transformación de coordenadas a una forma normal para una salida idénticamente cero [Isidori, 1995; Terrell, 2009].

2.1.7. Dinámica cero: dinámica de modo deslizante

Suponga que el sistema (2.12) tiene grado relativo r con respecto a la salida $\sigma(t)$. Entonces los vectores c, \dots, cA^{r-1} son linealmente independientes. Definiendo las variables $\xi_j(t) = cA^{j-1}x(t)$ para $1 \leq j \leq r$, es posible completar una transformación de coordenadas incorporando los elementos ξ_j faltantes, eligiendo los vectores fila linealmente independientes $b_1^\perp, \dots, b_{n-r}^\perp$, de tal manera que $b_i^\perp b = 0$ para $1 \leq i \leq n-r$. Entonces tenemos que

$$\begin{bmatrix} \eta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = Tx(t) = \begin{bmatrix} b_1^\perp \\ \vdots \\ b_{n-r}^\perp \\ c \\ \vdots \\ cA^{r-1} \end{bmatrix} x(t), \quad (2.13)$$

define una transformación de coordenadas (T es una matriz invertible) [Isidori, 1995, Prop. 4.1.3].

Bajo esta transformación el sistema (2.12) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r-1}(t) \\ \dot{\xi}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n \eta(t) + b_n \xi(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_r(t) \\ cA^r x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ cA^{r-1} b \end{bmatrix} u(t), \quad (2.14)$$

$$\sigma(t) = \xi_1(t). \quad (2.15)$$

La *dinámica cero* es la dinámica interna de sistema (2.12) que resulta cuando la salida es idénticamente cero. Ya que $cA^{r-1}b \neq 0$, la única retroalimentación de estado capaz de mantener la salida $\sigma(t)$ idénticamente cero (igual a cero para toda t) [Isidori, 1995],

también llamada retroalimentación de dinámica cero [Terrell, 2009], es:

$$u_{zd}(t) = -\frac{cA^r x(t)}{cA^{r-1}b}.$$

Haciendo $u(t) = u_{zd}(t) + u_s(t)$ obtenemos

$$\dot{\eta}(t) = A_n \eta(t) + b_n \xi(t), \quad (2.16a)$$

$$\dot{\xi}(t) = N_r \xi(t) + b_r u_s(t), \quad (2.16b)$$

donde $N_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ es una matriz nilpotente con índice de nilpotencia r (tiene unos en la superdiagonal y ceros en todos sus demás elementos) y $b_r^T = d_r$. Ya que el par (N_r, b_r) es controlable, $\xi(t)$ puede ser llevada a cero por una retroalimentación de estado de la forma $u_s(t) = -K\xi(t) = \begin{bmatrix} k_0 & \cdots & k_{r-1} \end{bmatrix} \xi(t)$, de tal manera que $N_r - b_r K$ es Hurwitz. Una condición inicial igual a cero para $\xi(t)$ implica que $\xi(t) = 0$ para toda t , y (2.14) se reduce a $\dot{\eta}(t) = A_0 \eta(t)$, la cual es la llamada *dinámica cero* del sistema (2.12). Finalmente, la retroalimentación de estado total necesaria para llevar la salida y el estado asintóticamente a cero queda de la forma

$$u(t) = -\frac{cA^r x(t) + \sum_{i=0}^{r-1} k_i \xi_{i+1}(t)}{cA^{r-1}b}, \quad (2.17)$$

donde las k_i 's son elegidas de tal manera que $\lambda^r + \sum_{i=0}^{r-1} k_i \lambda^i$ es un polinomio Hurwitz.

2.1.8. Matriz de transferencia

La matriz de transferencia de un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas (llamado sistema MIMO) está dada por [Williams and Lawrence, 2007]

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)B}{\det(sI - A)} = \frac{N(s)}{\delta(s)},$$

donde $N(s)$ y $\delta(s)$ son el numerador, el cual es una matriz de polinomios en s , y el denominador, el cual es un polinomio en s , después de cancelaciones polo-cero. Los sistemas lineales de una entrada y una salida (llamado sistema SISO por sus siglas en inglés), de la forma (2.12), tienen la siguiente función de transferencia ²

$$g(s) = c(sI - A)^{-1}b = c \frac{\operatorname{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} b = \frac{\eta(s)}{\delta(s)}, \quad (2.18)$$

donde los polinomios $\eta(s)$ y $\delta(s)$ son el numerador y denominador después de cancelaciones polo/cero. Los polos de la función de transferencia con las raíces de $\delta(s)$, y las raíces del polinomio $\eta(s)$ son llamados los ceros de la función de transferencia (ceros de transmisión).

²Ya no es matriz de transferencia debido a que el numerador ya no es una matriz sino un polinomio.

Definición 11 Una función de transferencia $g(s)$ es propia si $\deg(\delta(s)) \geq \deg(\eta(s))$, estrictamente propia si $\deg(\delta(s)) > \deg(\eta(s))$ impropia si $\deg(\delta(s)) < \deg(\eta(s))$. La función de transferencia $g(s)$ tiene grado relativo $r \in \mathbb{Z}$,

$$r = \deg(\delta(s)) - \deg(\eta(s)),$$

donde la función \deg representa el grado del polinomio respectivo.

Sabemos que $\deg(\det(sI - A)) = n$, mientras que los elementos de la matriz $\text{adj}(sI - A)$ son polinomios en s de grado menor o igual que $n-1$, por lo tanto la función de transferencia de un sistema SISO de la forma (2.12) es estrictamente propia.

Se sabe que los eigenvalores de A_n en (2.16a) coinciden con los ceros de la función de transferencia $g(s) = c(sI - A)^{-1}b$ [Isidori, 1995]. Si los ceros de $g(s)$ tienen parte real estrictamente menor que cero, entonces se dice que el sistema es de *fase mínima*. El término *dinámica de modo deslizante* usado en la literatura del control por MD se refiere a la dinámica cero del sistema cuando la variable de deslizamiento $\sigma(t)$ es vista como una salida virtual.

2.1.9. Modos deslizantes de segundo orden

Considere el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u(t) + w(t)), \quad (2.19)$$

con salida $\sigma(t) = \xi_1(t)$. De la definición de grado relativo, tenemos que $\sigma(t)$ es una salida de grado relativo dos ya que

$$\ddot{\sigma}(t) = u(t) + w(t).$$

El objetivo de control es llevar la salida $\sigma(t)$ a cero. Si las restricciones $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$ se cumplen para todo t mayor que un tiempo T finito y positivo, se dice que el sistema exhibe o presenta un MDSO.

Un ejemplo de un controlador por MDSO es el controlador Twisting [Levant, 1993], en el cual $u(t)$ tiene la forma siguiente:

$$u(t) = -k_1 \text{sign}(\sigma(t)) - k_2 \text{sign}(\dot{\sigma}(t)), \quad k_2 > w_0, \quad k_1 > k_2 + w_0. \quad (2.20)$$

Otro ejemplo es el control Cuasi-continuo de segundo orden (CCSO) [Levant, 1993, 2005b].

2.1.10. Control por modos deslizantes de orden superior

Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r-1}(t) \\ \dot{\xi}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \\ \vdots \\ \xi_r(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u(t) + w(t)), \quad (2.21)$$

$$\sigma(t) = \xi_1(t), \quad (2.22)$$

el cual es de grado relativo r , i.e.,

$$\sigma^{(r)} = u(t) + w(t). \quad (2.23)$$

Decimos que el sistema (2.21) presenta un modo deslizante de r -ésimo orden si las restricciones $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = \dots = \sigma^{(r-1)}(t) = 0$ se alcanzan en tiempo finito $T > 0$. Para un grado relativo prescrito r , es posible construir un control discontinuo que asegure la existencia de un MDOS por medio de un algoritmo recursivo [Levant, 2003, 2005b].

2.1.11. Homogeneidad

La homogeneidad es la propiedad por medio de la cual un objeto, llámese campo vectorial, funciones, polinomios, etc., se comporta consistentemente con respecto a operaciones de escalamiento o dilatación.

Considere una dilatación r_{\varkappa} definida de la forma:

$$r_{\varkappa} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (\varkappa^{r_1} x_1, \varkappa^{r_2} x_2, \dots, \varkappa^{r_n} x_n), \quad (2.24)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; r_1, r_2, \dots, r_n son números reales positivos (llamados pesos) y $\varkappa > 0$.

Definición 12 [Bacciotti and Rosier, 2001; Bhat and Bernstein, 2005] Un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (o inclusión diferencial) es llamado homogéneo de grado $\varsigma \in \mathbb{R}$ con dilatación (2.24) si $f(r_{\varkappa}x) = \varkappa^{\varsigma} r_{\varkappa} f(x)$.

Definición 13 [Bacciotti and Rosier, 2001; Bhat and Bernstein, 2005] Una función escalar $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada homogénea de grado $\varsigma \in \mathbb{R}$ con dilatación (2.24) si $V(r_{\varkappa}x) = \varkappa^{\varsigma} V(x)$.

La importancia de la homogeneidad reside en que la estabilidad asintótica de una inclusión diferencial homogénea de grado negativo es equivalente a su estabilidad en tiempo finito. Por ello, los controladores por modos deslizantes homogéneos proveen estabilidad en tiempo finito (para más detalles, véase [Levant, 2005a; Bhat and Bernstein, 2005]).

2.1.12. Controlador Cuasi-continuo de orden arbitrario

El siguiente algoritmo define una familia de controladores Cuasi-continuos de orden superior (CCOS) homogénea [Levant, 2005b; Shtessel et al., 2013] (aquí omitimos el argumento del tiempo, t , para facilitar la notación):

$$\begin{aligned}\Phi_{0,r} &= \sigma, \quad \Omega_{0,r} = |\sigma|, \quad \Psi = \frac{\Phi_{0,r}}{\Omega_{0,r}} = \text{sign}(\sigma) \\ \Phi_{i,r} &= \sigma^{(i)} + \beta_i \Omega_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r} \\ \Omega_{i,r} &= |\sigma^{(i)}| + \beta_i \Omega_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)}, \quad \Psi_{i,r} = \frac{\Phi_{i,r}}{\Omega_{i,r}}\end{aligned}\tag{2.25}$$

Si hacemos $u = \Psi_{i,r}$ en el algoritmo anterior, obtenemos los siguientes controladores Cuasi-continuos para grado relativo $r \leq 3$ [Levant, 2005b; Shtessel et al., 2013]:

1. $u = -\rho_0 \text{sign}(\sigma)$, (Cuasi-continuo de primer orden CCPO).
2. $u = -\rho_0 \frac{(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma))}{(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2})}$, (Cuasi-continuo de segundo orden CCSO).
3. $u = -\rho_0 \frac{\ddot{\sigma} + 2(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3})^{-1/2} + (\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \text{sign}(\sigma))}{|\ddot{\sigma}| + 2(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3})^{1/2}}$, (Cuasi-continuo de tercer orden CCTO).

Como se puede observar la implementación del control Cuasi-continuo de r -ésimo orden requiere de la medición de $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ hasta $\sigma^{(r-1)}(t)$, las cuales se pueden estimar por medio de diferenciadores robustos respecto al ruido basados en modos deslizantes [Levant, 2003; Shtessel et al., 2013].

Comentario 14 Cabe señalar que el método que proponemos en esta tesis para diseñar la variable de deslizamiento evita el uso de diferenciadores para estimar las derivadas de alto orden de $\sigma(t)$.

2.1.13. Exactitud

Un criterio de diseño para elegir el orden de controlador por modos deslizantes es la exactitud que provee ante dinámicas no modeladas y ante discretizaciones de la señal de control. Para evaluar la exactitud que provee un controlador por modos deslizantes según su orden, nos apoyamos en el siguiente teorema.

Teorema 15 [Levant, 2005b] *Considere que el valor de la señal de control es muestreada al tiempo t_i , con $t_{i+1} - t_i = \tau > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ constante ; $t \in [t_i, t_{i+1})$. Entonces el controlador (2.25) proporciona y mantiene en tiempo finito las siguientes desigualdades*

$$|\sigma| < \mu_0 \tau^r, \quad |\dot{\sigma}| < \mu_1 \tau^{r-1}, \quad \dots, \quad |\sigma^{(r-1)}| < \mu_{r-1} \tau, \quad (2.26)$$

para algunas constantes positivas $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{r-1}$.

Comentario 16 *La prueba del Teorema 15 es posible gracias a la propiedad de homogeneidad de los controladores por modos deslizantes (2.25) (véase [Levant, 2005b; Levant and Fridman, 2010] para más detalles).*

2.1.14. Controladores por modos deslizantes continuos: algoritmo Super-Twisting

El efecto de castaño que conlleva el uso de controladores MD causa problemas en aplicaciones prácticas. Esto motiva el desarrollo de controladores por MD que proporcionan una señal $u(t) \in \mathcal{C}^j$. Considere el sistema (2.21) y suponga j integradores en cascada con $u(t)$ de tal manera que el grado relativo del sistema se incrementa artificialmente mientras que el control es $j-1$ veces continuamente diferenciable. Para describir lo anterior, introducimos las nuevas variables de estado $\xi_{r+1}(t), \dots, \xi_{r+j+1}(t)$ cuya dinámica es descrita por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{r+1}(t) \\ \dot{\xi}_{r+2}(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r+j}(t) \\ \dot{\xi}_{r+j+1}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \xi_{r+2}(t) \\ \xi_{r+3}(t) \\ \vdots \\ \xi_{r+j+1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \zeta(t), \\ u(t) &= \xi_{r+1}(t), \end{aligned}$$

con $\zeta(t)$ la nueva variable de control, i.e.,

$$u^{(j)}(t) = \zeta(t). \quad (2.27)$$

Se sigue de (2.23) y (2.27) que

$$\sigma^{(r+j)}(t) = \zeta(t) + w^{(j)}(t). \quad (2.28)$$

Si se requiere del conocimiento de $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ hasta $\sigma^{(r+j-1)}(t)$ para implementar un control por MDOS que induzca un modo deslizante de $(r+j)$ -ésimo orden (e.g., con un controlador CCOS), entonces se puede reconstruir la perturbación $w(t)$ y sus derivadas $\dot{w}(t), \dots, w^{(j-1)}(t)$ como sigue

$$w(t)^{(i)} = \sigma^{(r+i)}(t) - u^{(i)}(t), \quad i = 0, \dots, j-1. \quad (2.29)$$

Lo que en el caso de $i = 0$ significa que es posible compensar la perturbación sin una entrada de control discontinuo. Y para un valor arbitrario de i significa que la perturbación y sus derivadas se pueden compensar sin inducir un modo deslizante de $(r+j)$ -ésimo orden. De esto podemos concluir que si se requiere que la entrada de control sea $(j-1)$ veces continuamente diferenciable, es necesario diseñar un control por MDOS que no requiera el conocimiento de $\sigma^{(r+i)}(t)$, $i = 0, \dots, j-1$. Una técnica de control por MDOS que satisface tales requerimientos para $i = 0$, i.e., $u(t) \in \mathcal{C}^0$ es el controlador Super-Twisting [Moreno and Osorio, 2012].

2.1.15. Super-Twisting de Segundo Orden

Considere el sistema de la forma

$$\dot{\sigma}(t) = h(t, \sigma, \dot{\sigma}) + g(t, \sigma, \dot{\sigma})u_1(t), \quad (2.30)$$

el cual es de grado relativo $r = 1$ con respecto a la salida $y(t) = \sigma(t)$, donde $g(t, \sigma, \dot{\sigma}) \neq 0$ es una función conocida afín a la entrada y $h(t, \sigma, \dot{\sigma})$ es una función que representa la perturbación e incertidumbre desconocidas, pero se conoce la cota $|\dot{h}(t, \sigma, \dot{\sigma})| \leq \Delta$.

El algoritmo STSO tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -k_3 |\sigma(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma(t)) + v_1(t), \\ \dot{v}_1(t) &= -k_4 \text{sign}(\sigma(t)), \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde las ganancias se calculan como $k_3 = 1,5\sqrt{\Delta}$ y $k_4 = 1,1\Delta$ [Moreno and Osorio, 2012].

El STSO tiene las siguientes características:

- Es un algoritmo por modos deslizantes de orden dos, ya que garantiza que $\sigma(t), \dot{\sigma}(t) \rightarrow 0$ en tiempo finito.

- Provee una señal continua, en consecuencia los efectos de castaño se atenúan.
- Para su implementación se requiere del conocimiento de $\sigma(t)$.
- Compensa teóricamente de forma exacta perturbaciones Lipschitz en las trayectorias del sistema.
- Es homogéneo y provee una exactitud correspondiente a un controlador por MDSO.

2.1.16. Super-Twisting de Tercer Orden

Considere el sistema de la forma

$$\ddot{\sigma}(t) = h(t, \sigma, \dot{\sigma}) + g(t, \sigma, \dot{\sigma})u(t) , \quad (2.32)$$

el cual es de grado relativo $r = 2$ con respecto a la salida $y(t) = \sigma(t)$, donde $g(t, \sigma, \dot{\sigma})$ y $h(t, \sigma, \dot{\sigma})$ representan y satisfacen las mismas condiciones del sistema (2.30). El algoritmo STTO tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} u_2(t) &= -k_5 |\phi(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\phi(t)) + v_2(t) , \\ \dot{v}_2(t) &= -k_7 \text{sign}(\phi(t)) , \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde $\phi(t) = \left(\dot{\sigma}(t) + k_6 |\sigma(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma(t)) \right)$ y las ganancias k_5 , k_6 y k_7 son positivas y se diseñan de tal manera que el controlador (2.33) garantiza que $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$, $\ddot{\sigma}(t) \rightarrow 0$ en tiempo finito [Franco, 2014; Kamal et al., 2014].

El STTO preserva las ventajas del STSO, pero además:

- Es un algoritmo por modos deslizantes de orden tres ya que garantiza que $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$, $\ddot{\sigma}(t) \rightarrow 0$ en tiempo finito.
- Para su implementación se requiere del conocimiento de $\sigma(t)$ y $\dot{\sigma}(t)$.
- Es homogéneo y provee una exactitud correspondiente a un controlador por MDTO.

2.1.17. Retroalimentación de dinámica cero y control por modos deslizantes

Considere el sistema LIT de una entrada perturbado (2.8). Con el objetivo de estabilizar el sistema a pesar de la presencia de la perturbación $w(t)$, aplicamos una estrategia de control por modos deslizantes de orden arbitrario. Entonces, diseñamos una variable de deslizamiento de la forma (2.9). Mediante la transformación de coordenadas (2.13), el

sistema toma la forma reducida (normal) (2.14). Para MDPO, en esta tesis proponemos una ley de control de la forma

$$u(t) = -\frac{cAx(t) + \rho_0 \text{sign}(\xi_1(t))}{cb}, \quad (2.34)$$

con $|w(t)| \leq w_0$ y $\rho_0 > w_0$. En la versión original del controlador por MDPO [Levant, 2003] sólo se aplica el término discontinuo $\rho_0 \text{sign}(\xi_1(t))$, el cual asegura que $\sigma(t) = \xi_1(t) \rightarrow 0$ en tiempo finito, dejando el término $\frac{cAx(t)}{cb}$ como una perturbación. Sin embargo, recuerde que el término $\frac{cAx(t)}{cb}$ en el caso no perturbado es la retroalimentación de estado (determinada unívocamente) que en la reducción del sistema de grado relativo uno con respecto a la salida $\sigma(t)$ lleva y mantiene la salida en cero para toda t [Isidori, 1995; Terrell, 2009]. En esta tesis consideramos este término en la ley de control con el objetivo de compensar la parte conocida y dejar que el término discontinuo se encargue del rechazo de la perturbación y de asegurar la existencia del modo deslizante. En este caso, si aplicamos la fórmula de Ackermann y Utkin [Ackermann and Utkin, 1998] (véase la Subsección 2.1.4) para diseñar el vector fila c eligiendo un polinomio Hurwitz, entonces aseguramos que el sistema en cuestión sea de fase mínima, lo cual implica que el estado converge al origen cuando la restricción $\sigma(t) = \xi_1(t) = 0$ se cumple.

Para grado relativo deseado $r = 2$ una opción es usar una ley de control de la forma

$$u(t) = -\frac{cA^2x(t) + k_1 \text{sign}(\xi_1(t)) + k_2 \text{sign}(\xi_2(t))}{cAb},$$

con $k_2 > w_0 \geq |w(t)|$ y $k_1 > k_2 + w_0$. El término discontinuo corresponde al controlador *Twisting*, el cual asegura la existencia de un MDSO al llevar $\sigma(t) = \xi_1(t)$ y $\dot{\sigma}(t) = \xi_2(t)$ a cero en tiempo finito a pesar de la presencia de la perturbación $w(t)$. Una vez más, el término $\frac{cA^2x(t)}{cAb}$ es agregado para compensar la parte conocida y dejar el trabajo de rechazar la perturbación al término discontinuo. Como término discontinuo podemos usar también el controlador CCSO mostrado en la Subsección 2.1.12.

En general, para grado relativo arbitrario r proponemos un controlador de la forma

$$u(t) = -\frac{cA^r x(t) + f(\xi(t))}{cA^{r-1}b}, \quad (2.35)$$

donde el término discontinuo debe asegurar la existencia de un modo deslizante de r -ésimo orden al llevar $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = \dots = \sigma^{(r-1)}(t)$ a cero en tiempo finito. El término $f(\xi(t))$ se puede diseñar mediante el algoritmo (2.25), de la Subsección 2.1.12 (véase [Levant, 2003] para más detalles).

2.2. Sistemas implícitos

En la sección anterior presentamos las generalidades del control por MDOS aplicadas a sistemas descritos únicamente por ecuaciones diferenciales ordinarias. Abordamos el problema de llevar a cero la variable de deslizamiento como el problema de llevar a cero una salida virtual, lo cual nos permite profundizar en el estudio del control por MD. Recordemos que, en sistemas explícitos el grado relativo es el número de veces que se debe diferenciar la salida para que aparezca explícitamente la entrada. Al respecto, el método del control equivalente consiste en derivar sucesivamente la variable de deslizamiento y sustituir el estado hasta encontrar una expresión explícita de un control (control equivalente) que no se aplica pero nos indica si es posible lograr el modo deslizante requerido. En esta sección introducimos la teoría de los sistemas implícitos, donde esa diferenciación y sustitución no es posible ya que el estado del sistema depende directamente de la entrada y derivadas de ésta. En esta sección consideramos un sistema implícito con una salida dada con el fin de después usar los resultados teóricos para cuando el objetivo es diseñar una variable en función del estado, como en el caso del control por MD.

Considere un sistema de la forma siguiente

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) , \quad (2.36a)$$

$$y(t) = Cx(t) , \quad (2.36b)$$

donde el vector $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ representa la entrada de control y $y(t) \in \mathbb{R}^m$ representa la salida. Las matrices $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $1 \leq m \leq n$ y la matriz $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. El caso más general es considerar $\text{rank } E \leq n$. Si E es no singular el sistema se reduce trivialmente a un sistema explícito. En esta sección nos enfocamos al caso cuando E es singular, con $\text{rank } E = n_0 < n$, para el cual se dice que (2.36) es un sistema implícito.

En esta tesis nos enfocamos al estudio de sistemas implícitos que satisfacen la condición de regularidad, en cuyo caso el sistema implícito es equivalente a la forma de Weierstrass [Gantmacher, 1964]. A continuación se introduce la teoría necesaria para abordar el problema planteado.

2.2.1. Regularidad

Definición 17 [Gantmacher, 1964] Para cualesquiera dos matrices $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, el abanico $\lambda E - A$ se dice regular si existen dos constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tal que

$$\det(\alpha E - \beta A) \neq 0 .$$

o equivalentemente, el polinomio $\det(\lambda E - A)$, para $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, no es idénticamente cero.

De la definición 17, el abanico $\alpha E - \beta A$ con E igual a la matriz identidad es regular para $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

Definición 18 [Dai, 1989] *Un sistema implícito de la forma (2.36a) es llamado regular si el abanico $sE - A$ es regular.*

El sistema (2.36) tiene solución única para cualquier par admisible de entrada y condición inicial si $sE - A$ es regular [Luenberger, 1978; Yip and Sincovec, 1981; Lewis, 1986].

2.2.2. Equivalencia estricta

Se dice que dos abanicos regulares son estrictamente equivalentes si tienen los mismos divisores elementales finitos e infinitos ³ [Gantmacher, 1964] (ver el Apéndice A). Dos sistemas son estrictamente equivalentes (equivalentes en el sentido de Rosenbrock) si sus abanicos (regulares) son estrictamente equivalentes [Rosenbrock, 1974].

Sea la matriz del sistema (2.36), también llamada matriz de Rosenbrock, como sigue

$$P(s) = \begin{bmatrix} sE - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Definición 19 [Rosenbrock, 1974] *Dos sistemas implícitos de la forma (2.36) son estrictamente equivalentes si sus matrices asociadas (E, A, B, C) y $(\bar{E}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ están relacionadas de la siguiente manera*

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\bar{E} - \bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix},$$

donde L y R son matrices singulares.

Algunas propiedades que se preservan bajo una transformación de equivalencia estricta son:

1. Dimensión del sistema.
2. Polinomio característico, cuando las matrices son cuadradas, por lo tanto tienen los mismos polos.

³En sistemas explícitos equivalencia estricta corresponde a la definición de similitud en cuyo caso dos matrices son similares si tiene los mismos divisores elementales, y todos los divisores elementales son finitos.

3. Función de transferencia.

Equivalencia en el sentido de Rosenbrock es una equivalencia en el sentido de Kalman, pero en este caso existen ceros finitos e infinitos. En [Rosenbrock, 1974] se presenta un análisis comparativo de los ceros infinitos de desacoplamiento de entrada y de salida (infinite i.d.c., o.d.c., i.o.d.c, por sus siglas en inglés) del sistema implícito (2.36) con matriz de Rosenbrock (2.37) relacionados con los ceros finitos de desacoplamiento de entrada y de salida de un sistema cuya matriz de Rosenbrock es

$$P(s) = \begin{bmatrix} E - sA & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

2.2.3. Formas de Weierstrass y de Cuasi-Weierstrass

El siguiente lema se deriva del Teorema 61 (ver el Apéndice A)

Lemma 20 [Gantmacher, 1964] *El abanico $sE - A$ es regular si y sólo si existen dos matrices L y R tal que*

$$LER = \bar{E} = \text{diag}(I, N_q), \quad LAR = \bar{A} = \text{diag}(A_s, I),$$

donde $n_1 + n_2 = n$, $A_s \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ y $N_q \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ es una matriz nilpotente con índice de nilpotencia q .

Del Lema 20, para cualquier sistema implícito regular existen dos matrices no singulares L y R tal que bajo la transformación de coordenadas $x(t) = Rz(t)$ y multiplicando (2.36) por el lado izquierdo por L , el sistema (2.36) siempre puede ser transformado a una forma diagonal a bloques, llamada forma de Weierstrass (cuando los bloques están en la forma de Jordan) [Dai, 1989] o Cuasi-Weierstrass (cuando los bloques no están en la forma de Jordan) [Berger et al., 2012b]), como sigue:

$$\dot{x}_s = A_s x_s(t) + B_s u(t), \quad (2.39a)$$

$$N_q \dot{x}_f(t) = x_f(t) + B_f u(t), \quad (2.39b)$$

$$y(t) = C_s x_s(t) + C_f x_f(t), \quad (2.39c)$$

donde $z(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) & x_f(t) \end{bmatrix}^T$ es el estado, $x_s(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ y $x_f(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ son llamados sub-estados. Ya que q es el índice de nilpotencia del abanico $sE - A$, el sistema (2.36) es referenciado como un sistema regular con índice q .

El subsistema (2.39a) es llamado subsistema finito o lento y el subsistema (2.39b) es llamado el subsistema infinito o rápido.

2.2.4. Forma estándar

Definición 21 [Nikoukhan et al., 1987] Un abanico regular $s\bar{E} - \bar{A}$ está en forma estándar si existen escalares κ_1 y κ_2 tal que

$$\kappa_1 \bar{E} + \kappa_2 \bar{A} = I ,$$

donde I es la matriz identidad.

El abanico $sI - A$, correspondiente a un sistema explícito, está en forma estándar ya que podemos elegir $\kappa_1 = 1$ y $\kappa_2 = 0$. Mas aún, para cualquier abanico regular $sE - A$ siempre existe un escalar μ tal que $\det(\mu E - A) \neq 0$. Por lo que, bajo la transformación de coordenadas $x = Rz$ con R igual a la matriz identidad y multiplicando (2.36) por el lado izquierdo por la matriz

$$L = (\mu E - A)^{-1} , \quad (2.40)$$

cualquier sistema regular puede transformarse a una forma estándar [Nikoukhan et al., 1987]. De (2.40), se puede verificar que con esta transformación de equivalencia

$$\mu \bar{E} - \bar{A} = I . \quad (2.41)$$

Por lo que el abanico $s\bar{E} - \bar{A}$ está en forma estándar con $\kappa_1 = \mu$ y $\kappa_2 = -1$. Además, el sistema implícito

$$\bar{E}\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) , \quad (2.42a)$$

$$y(t) = Cx(t) , \quad (2.42b)$$

es llamado la forma estándar del sistema regular (2.36) [Nikoukhan et al., 1987]. Es claro que, en la forma estándar la transformación de coordenadas preserva el estado $x(t)$.

2.2.5. Solución

Para obtener la solución de un sistema implícito se recurre a la forma de Weierstrass. En la forma de Weierstrass la solución se obtiene para cada subsistema, el lento y el rápido. La solución del sistema lento, el cual está en forma explícita, se obtiene directamente de resultados bien conocidos para sistemas explícitos [Chen, 1995]. Para la solución del sistema lento existen dos procedimientos: en el primero se usa un enfoque temporal (derivada convencional). En el segundo se usa un enfoque frecuencial (derivada distribucional o funciones generalizadas), el cual se aplica a funciones cuya derivada en el sentido clásico no existe. En este último procedimiento, al recuperar la solución en el dominio del tiempo

mediante la transformada inversa de Laplace, aparecen términos impulsivos debido a las condiciones iniciales del estado y de la entrada (para más detalles véase [Verghese et al., 1981; Cobb, 1984; Campbell, 1980]). Sin embargo, asumiendo la existencia y unicidad de la solución, las soluciones obtenidas mediante cada procedimiento coinciden. En esta tesis nos enfocamos en el estudio de sistemas que tienen solución única por lo que usamos en enfoque temporal.

Solución del sistema rápido

La solución de (2.39b) se obtiene derivando sucesivamente (2.39b) con respecto del tiempo y pre-multiplicando por N_q , como sigue:

$$\begin{aligned} N_q \dot{x}_f(t) &= x_f(t) + B_f u(t) \\ N_q^2 \ddot{x}_f(t) &= N_q \dot{x}_f(t) + N_q B_f \dot{u}(t) \\ &\vdots \\ N_q^q x_f^{(q)}(t) &= N_q^{q-1} x_f^{(q-1)}(t) + N_q^{q-1} B_f u^{(q-1)}(t). \end{aligned}$$

Sumando todas las ecuaciones y ya que $N_q^q = 0$ resulta

$$x_f(t) = \sum_{i=0}^{q-1} N_q^i B_f u^{(i)}(t). \quad (2.43)$$

Es claro que el conjunto de *condiciones iniciales consistentes* depende del valor inicial de la entrada, esto es

$$x_f(0) = - \sum_{i=0}^{q-1} N_q^i B_f u^{(i)}(0). \quad (2.44)$$

Como podemos ver, el subestado x_f tiene solución única si $u(t)$ es suficientemente suave. Es claro que, el conjunto de *funciones de entrada admisibles* debe pertenecer al conjunto de funciones j veces continuamente diferenciables. Más concretamente,

$$u \in \mathcal{C}^j, \quad j = \max \{i \in \{0, \dots, q-1\} : N^{i+1} B_f = 0\},$$

donde 0 es la matriz cero de las dimensiones adecuadas.

2.2.6. Eigenvalores finitos

El polinomio característico del par de matrices (E, A) se calcula como sigue [Duan, 2010]

$$f(s) = \det(sE - A) = a_n \prod_{i=1}^{n_1} (s - s_i), \quad (2.45)$$

donde $a_n \in \mathbb{R}$ es constante. El conjunto de eigenvalores finitos del par de matrices (E, A) es igual al conjunto de eigenvalores del subsistema lento, esto es $\Lambda(E, A) = \Lambda(I, A_s) = \{s_1, s_2, \dots, s_{n_1}\}$. El par de matrices (I, A_s) es denotado como (A_s)

Ya que los sistemas (2.36), (2.39) y (2.42) son estrictamente equivalentes tenemos:

$$\Lambda(E, A) = \Lambda(A_s) = \Lambda(\bar{E}, \bar{A}).$$

2.2.7. Estabilidad

La propiedad de estabilidad de un sistema implícito depende solo de la estabilidad del subsistema lento. A continuación se enuncian las deficiones y teoremas principales respecto a estabilidad.

Definición 22 [Dai, 1989; Duan, 2010] *El sistema implícito (2.36a) es asintóticamente estable si existen escalares $\zeta, \psi > 0$ tal que cuando $u(t) \equiv 0$ para $t > 0$, $x(t)$ satisface que*

$$\|x(t)\|_2 \leq \zeta e^{-\psi t} \|x(0)\|_2, \quad t > 0.$$

Ya que $u(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{u}(t) \equiv 0 \Rightarrow \dots$, de (2.39b) es claro que $x_f(t) \equiv 0$ para $t > 0$. Entonces, la estabilidad de (2.36a) depende solo de la estabilidad del sistema lento.

Teorema 23 [Lewis, 1986] *El sistema implícito (2.36) es asintóticamente estable si y sólo si*

$$\Lambda(E, A) = \Lambda(A_s) \subset \mathbb{C}^-,$$

donde \mathbb{C}^- representa el semi-plano complejo izquierdo abierto.

2.2.8. Controlabilidad

La controlabilidad del sistema implícito (2.36) se puede estudiar asumiendo que el sistema está en la forma de Weierstrass y estudiando la controlabilidad de cada subsistema. Pero los resultados se extienden a un enfoque directo, donde no se asume que el sistema está en la forma de Weierstrass [Dai, 1989; Duan, 2010]. Mediante el enfoque temporal surgen los conceptos de R-controlabilidad (controlabilidad del subsistema lento) y controlabilidad en el infinito (controlabilidad del subsistema rápido) [Yip and Sincovec, 1981]. Mediante el enfoque frecuencial permanece el concepto de R-controlabilidad y surge el

concepto de I-controlabilidad [Verghese et al., 1981], el cual generaliza en concepto de controlabilidad en el infinito. Sin embargo, asumiendo el par admisible condiciones iniciales y función de entrada, los dos conceptos coinciden. En [Cobb, 1984] se muestra un estudio comparativo de la controlabilidad para cada enfoque, temporal y frecuencial. En el enfoque temporal hay restricciones en las condiciones iniciales y en la entrada, entonces podemos decir que este enfoque es más restrictivo. Por lo tanto, controlabilidad en el infinito implica I-controlabilidad, pero no al revés. Sin embargo, en el enfoque frecuencial se desarrolla un resultado que relaciona la I-controlabilidad con la capacidad de asignar polos en el infinito mediante una retroalimentación de estado.

Definición 24 [Dai, 1989; Duan, 2010] *Para cualquier sistema implícito de la forma (2.39), un vector $x_r \in \mathbb{R}^n$ es un estado alcanzable si existe una condición inicial $x_0 = x(0)$, una entrada admisible $u(t) \in \mathcal{C}^{q-1}$, y algún $t_1 > 0$ tal que*

$$x(t_1) = \begin{bmatrix} x_s(t_1) \\ x_f(t_1) \end{bmatrix} = x_r .$$

Sea $X_r(x_0)$ el conjunto de estados alcanzables al tiempo t desde una condición inicial $x_0 \in X_0$, entonces $X_r(0)$ denota el conjunto de estados alcanzables desde $x_0 = 0$. Para cualquier par de matrices (A, B) definimos

$$\mathbf{C}(A, B) = \text{Image} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} .$$

Teorema 25 [Dai, 1989; Duan, 2010; Yip and Sincovec, 1981] *Para cualquier sistema implícito de la forma (2.39), tenemos*

$$X_r(0) = \mathbf{C}(A_s, B_s) \oplus \mathbf{C}(N_q, B_f) \subseteq \mathbb{R}^n , \quad \forall t > 0 ,$$

donde “ \oplus ” es la operación de suma directa en el espacio vectorial \mathbb{R}^n .

Definición 26 [Dai, 1989; Duan, 2010] *El sistema implícito de la forma (2.39) es completamente controlable (C-controlable) si, para cualquier $t_1 > 0$ prescrito, $x(0) \in \mathbb{R}^n$ y $x_r \in \mathbb{R}^n$, existe una entrada de control admisible $u(t) \in \mathcal{C}^{j-1}$, con $1 \leq j \leq q$, tal que $x(t_1) = x_r$.*

Teorema 27 [Dai, 1989; Duan, 2010] *El sistema (2.39) es C-controlable si y sólo si $\mathbf{C}(A_s, B_s) \oplus \mathbf{C}(N_q, B_f) = \mathbb{R}^n$.*

Definición 28 [Dai, 1989; Duan, 2010] *El sistema implícito (2.39) con índice q es R-controlable si, para cualquier $t_1 > 0$ prescrito, $x_s(0) \in \mathbb{R}^{n_1}$ y $x_r \in X_r$, existe una entrada de control admisible $u(t) \in \mathcal{C}^{j-1}$, con $1 \leq j \leq q$ tal que $x(t_1) = x_r$.*

Teorema 29 [Dai, 1989; Duan, 2010] *El sistema (2.39) es R-controlable si y sólo si $\mathbf{C}(A_s, B_s) = \mathbb{R}^{n_1}$.*

De la definición 26, C-controlabilidad es una generalización de controlabilidad en los sistemas explícitos. En sistemas implícitos, C-controlabilidad implica R-controlabilidad, pero al revés no. En sistemas explícitos C-controlabilidad y R-controlabilidad son equivalentes. Los principales resultados acerca de controlabilidad se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 30 [Cobb, 1984]:

(1) *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) *El sistema implícito (2.39) es R-controlable.*
- (ii) *El subsistema (2.39a) es C-controlable.*
- (iii) $\text{rank} \begin{bmatrix} B_s & A_s B_s & \cdots & A_s^{n-1} B_s \end{bmatrix} = n_1$.
- (iv) $\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A_s & B_s \end{bmatrix} = n_1, \forall s \in \mathbb{C}, s \text{ finito}$.
- (v) $\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}, s \text{ finito}$.

(2) *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) *El subsistema (2.39b) es C-controlable.*
- (ii) $\text{rank} \begin{bmatrix} B_f & N_q B_f & \cdots & N_q^{q-1} B_f \end{bmatrix} = n_2$.
- (iii) $\text{rank} \begin{bmatrix} N_q & B_f \end{bmatrix} = n_2$.
- (iv) $\text{rank} \begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = n$.

(3) *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) *El sistema implícito (2.39) es C-controllable.*
- (ii) *Los subsistemas (2.39a) y (2.39b) son C-controlables.*
- (iii) $\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}, s \text{ finito}, \text{ y } \text{rank} \begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = n$.

El punto (1), del Teorema 30, establece las condiciones de controlabilidad de los polos finitos, mientras el punto (2) establece las condiciones de controlabilidad en el infinito [Rosenbrock, 1974]. Los puntos (1v) y (2iv) forman el criterio directo de controlabilidad en sistemas implícitos.

I-controlabilidad

Ya que en el enfoque frecuencial se consideran condiciones iniciales arbitrarias y/o entradas no admisibles, lo cual da origen a términos impulsivos, la siguiente definición es motivada por el caso en el que dichos términos impulsivos son nulos.

Definición 31 [Dai, 1989] *Si la respuesta de estado de un sistema implícito para una condición inicial arbitraria no contiene términos impulsivos, entonces el sistema implícito es llamado libre de impulsos.*

El siguiente teorema establece las condiciones que determinan la I-controlabilidad de un sistema implícito

Teorema 32 [Cobb, 1984] *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1) *El sistema implícito (2.39) es I-controlable.*
- (2) *El subsistema (2.39b) es I-controlable.*
- (3) $\mathbf{C}(N_q, B_f) + \text{Ker } N_q = \mathbb{R}^{n^2}$.
- (4) *Existe una matriz $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $\deg(sE - (A - BK)) = \text{rank } E$.*

Definición 33 [Dai, 1989; Duan, 2010] *El sistema (2.39) se dice que es fuertemente controlable (S-controlable) si es R-controlable e I-controlable.*

Es claro que la controlabilidad en el infinito [Rosenbrock, 1974] implica I-controlabilidad [Verghese et al., 1981]). Del punto (4), del Teorema 32, I-controlabilidad es equivalente a la posibilidad de asignar $\text{rank } E$ polos finitos por medio de una retroalimentación de estado $u(t) = Kx(t)$, con $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ [Cobb, 1984; Verghese et al., 1981]. Si el sistema en lazo cerrado tiene $\text{rank } E$ polos finitos significa que el abanico $sE - (A + BK)$ tiene divisores elementales infinitos simples o, en otras palabras, la matriz N_q del sistema en lazo cerrado en la forma de Weierstrass (2.39) tiene eigenvalores cero de multiplicidad geométrica uno [Gantmacher, 1964], i.e., N_q es la matriz cero. Si $N_q = 0$, entonces una entrada admisible pertenece al conjunto de las funciones continuas y el sistema en lazo cerrado es libre de impulsos.

En resumen, R-controlabilidad más controlabilidad en el infinito es igual a C- controlabilidad. Por otra parte, R-controlabilidad más I-controlabilidad es igual a S-controlabilidad. Finalmente, C-controlabilidad implica S-controlabilidad, pero lo inverso no se cumple.

Controlabilidad de sistemas implícitos en forma estándar

Considere la función $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\pi(s) = \frac{1}{\mu - s}, \quad (2.46)$$

con μ definida en (2.40).

Teorema 34 [Duan, 2010] *Sea (2.36) un sistema implícito en forma estándar. Para $\tau = \pi(s)$, tenemos que*

1. *El sistema implícito (2.36) es C-controlable si y sólo si*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \tau I - E & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall \tau \in \mathbb{C}, \tau \text{ finito.}$$

2. *El sistema implícito (2.36) es R-controlable si y sólo si*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \tau I - E & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall \tau \in \mathbb{C}, \tau \neq 0, \tau \text{ finito,}$$

lo cual es equivalente a que los polos no controlables están en cero.

Del Teorema 34, la controlabilidad de un sistema implícito en forma estándar puede ser tratado como la controlabilidad de un sistema explícito con al menos un eigenvalor en cero no controlable.

2.2.9. Estabilizabilidad

Definición 35 [Dai, 1989; Duan, 2010] *El sistema implícito (2.36) es estabilizable si existe una retroalimentación de estado $u(t) = -Kx(t)$ tal que el sistema en lazo cerrado*

$$E\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (2.47)$$

es estable.

El siguiente teorema evoca al criterio de Popov-Belevitch-Hautus (PBH) para estabilizabilidad en sistemas explícitos.

Teorema 36 [Dai, 1989, p. 71–72] *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1) *El sistema (2.36a) es estabilizable.*
- (2) *El subsistema (2.39a) es estabilizable.*

(3) $\text{rank}[sE - A \quad B] = n$ para todo $s \in \bar{\mathbb{C}}^+$ finito.

(4) $\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A_s & B_s \end{bmatrix} = n_1$ para todo $s \in \bar{\mathbb{C}}^+$.

donde $\bar{\mathbb{C}}^+$ es el semi-plano complejo derecho cerrado.

El punto 3, del Teorema 36, es un criterio directo de estabilizabilidad de sistemas implícitos [Dai, 1989, p. 71]. Comparando los Teoremas 36 y 30, resulta el siguiente corolario:

Corolario 37 [Dai, 1989, p. 72] *El sistema implícito (2.36a) es estabilizable si es R-controlable, pero lo inverso no es cierto.*

2.2.10. Matriz de transferencia

El sistema implícito (2.36) tiene la siguiente matriz de transferencia [Dai, 1989]

$$G(s) = C(sE - A)^{-1}B = C \frac{\text{adj}(sE - A)}{\det(sE - A)} B. \quad (2.48)$$

De la misma manera que en el caso de sistemas explícitos de una entrada y una salida, la función de transferencia de un sistema implícito de una entrada y una salida está dada por $g(s) = c(sE - A)^{-1}b = \frac{\eta(s)}{\delta(s)}$, donde los polinomios $\eta(s)$ y $\delta(s)$ son el numerador y el denominador después de cancelaciones polo-cero, y cuyas raíces son los polos y los ceros de la función de transferencia (ceros de transmisión del sistema), respectivamente.

Matriz de transferencia de sistemas en la forma de Weierstrass

Bajo transformaciones de equivalencia estricta la matriz de transferencia se preserva, por lo que para el sistema (2.36) tenemos que

$$G(s) = C(sE - A)^{-1}B = C_s(sI - A_s)^{-1}B_s + C_f(sN - I)^{-1}B_f = G_{sp}(s) + P(s),$$

donde G_{sp} es una matriz de transferencia estrictamente propia que corresponde al subsistema (2.39a), y $P(s)$ es una matriz polinomial correspondiente a la matriz de transferencia del subsistema (2.39b) [Rosenbrock, 1974; Dai, 1989; Duan, 2010]. En el caso de una entrada y una salida, tenemos

$$g(s) = c(sE - A)^{-1}b = c_s(sI - A_s)^{-1}b_s + c_f(sN - I)^{-1}b_f = g_{sp}(s) + p(s),$$

donde g_{sp} es una función de transferencia estrictamente propia que corresponde al subsistema lento y $p(s)$ es un polinomio en s con coeficientes escalares que corresponde a

la función de transferencia del subsistema rápido. Al sumar $g(s)$ y $p(s)$ para obtener la función de transferencia total del sistema implícito, es claro que $p(s)$ influye en los ceros de la función de transferencia, obteniendo así una función de transferencia impropia. Si el abanico $sE - A$ tiene índice $q = 1$, entonces el polinomio $p(s)$ es de grado cero, esto es, $p(s)$ es un escalar y la función de transferencia es propia. En [Aplevich, 1991], un sistema implícito se llama propio si no tiene polos al infinito de multiplicidad geométrica mayor que uno.

En el caso SISO si la salida sólo depende del subestado x_1 , entonces la función de transferencia es estrictamente propia, i.e., si $c_f = 0$, entonces el subsistema lento no juega ningún papel en la función de transferencia, no así en caso contrario. Esto es, en la forma de Weierstrass las variables dinámicas y no dinámicas no se distinguen unas de otras. Esto motiva el uso de otras representaciones equivalentes que no dividan a la función de transferencia, es decir, que contemplen todas las variables que intervienen en la relación entrada-salida.

Matriz de transferencia de sistemas en forma estándar

El siguiente teorema relaciona la matriz de transferencia de un sistema implícito en forma estándar con la matriz de transferencia de un sistema explícito.

Teorema 38 [Dai, 1989] Sea $G(s)$ la función de transferencia del sistema implícito (2.36) en forma estándar. Considere la función π definida en la ecuación (2.46). Entonces

$$G(s) = C(sE - A)^{-1}B = \tau C(\tau I - E)^{-1}B, \quad \tau = \pi(s). \quad (2.49)$$

donde μ se define en (2.40).

La función π es llamada una transformación en la escala del tiempo en [Dai, 1989]. De la ecuación (2.49) tenemos que

$$G(s) = \tau C \frac{\text{adj}(\tau I - E)}{\det(\tau I - E)} B. \quad (2.50)$$

El Teorema 38 nos dice que podemos mapear los polos y ceros de un sistema implícito a los polos y ceros de un sistema explícito auxiliar, cuya matriz de transferencia tiene un factor τ . Nótese que en el sistema auxiliar en el caso de una entrada y una salida, dado que E es singular, se tiene al menos un polo en cero, el cual se cancela con el factor τ del numerador. Por otra parte, los elementos de la matriz $\text{adj}(\tau I - E)$ son polinomios en τ de grado a lo más $n - 1$. Entonces, el sistema explícito auxiliar puede tener una función de transferencia estrictamente propia o propia. Esto último es posible cuando hay una relación directa

entre la entrada y la salida. Además, tenemos que para $g(s)$ $0 \leq \deg(\delta(s)) = n_1 \leq n - 1$ y $0 \leq \deg(\eta(s)) \leq n - 1$. Lo cual coincide con el hecho de que en sistemas implícitos la función de transferencia puede ser estrictamente propia, propia o impropia.

2.2.11. Equivalencia externa

Además de equivalencia estricta, existen otros tipos de equivalencia como lo son: equivalencia entrada-salida, equivalencia fuerte, equivalencia por transferencia, equivalencia externa, equivalencia completa, etc., (ver [Kuijper and Schumacher, 1991] para más detalles). Las diferencias entre los tipos de equivalencia recaen en que para algunas equivalencias se considera la salida, en otras no; algunas consideran la existencia de una matriz de transferencia, otras no; algunas mantienen invariantes los modos no controlables y otras los modos no observables. Suele pasar que cierto tipo de equivalencia es nombrada de diferente manera según el autor. Equivalencia externa fue introducida por Willems [Willems, 1983] para sistemas explícitos y se desarrolla en [Schumacher, 1988; Kuijper and Schumacher, 1991; Bonilla and Malabre, 1997] para sistemas implícitos. Este tipo de equivalencia es algo entre equivalencia por transferencia y equivalencia estricta. Si un sistema implícito tiene función de transferencia estrictamente propia, entonces una realización por equivalencia de transferencia sería un sistema explícito de menor dimensión, dejando fuera los modos en el infinito no controlables (que se preservan bajo equivalencia externa). Pero equivalencia estricta no considera la salida, por lo tanto deja invariantes los modos no observables (que son variantes bajo equivalencia externa). Esto es, no todos los sistemas que tengan la misma función de transferencia son externamente equivalentes, o de otra forma, equivalencia externa implica equivalencia por transferencia, pero no al revés. Por otra parte, los sistemas que difieran sólo en los modos no observables son externamente equivalentes, pero no estrictamente equivalentes, o de otra forma, equivalencia estricta implica equivalencia externa. Entonces, dada la función de transferencia de un sistema implícito, bajo equivalencia externa es posible encontrar un sistema implícito equivalente que preserve la función de transferencia.

Para el problema de control por modos deslizantes aplicado a sistemas implícitos asumimos regularidad y queremos diseñar una variable de deslizamiento tal que el sistema sea de grado relativo estrictamente positivo con respecto a la variable de deslizamiento considerada como una salida virtual. Por ello, formulamos la siguiente proposición basada en un resultado acerca de representaciones mínimas bajo equivalencia externa desarrollado en [Bonilla and Malabre, 1997, Lem. 2] para descripciones implícitas, esto es, sin asumir regularidad. Asumiendo regularidad, el problema de encontrar un sistema externamente

equivalente se simplifica.

Proposición 39 *Considere el sistema implícito (2.36), regular, con grado relativo estrictamente positivo con respecto a la salida. Existen dos matrices unitarias (ortogonales) R_{EE} y L_{EE} tal que el sistema*

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + B_1v(t) , \quad (2.51a)$$

$$E_{21}\dot{x}_1(t) + N_q\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t)B_2v(t) , \quad (2.51b)$$

$$y(t) = C_1x_1(t) , \quad (2.51c)$$

donde $L_{EE}ER_{EE} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ E_{21} & N_q \end{bmatrix}$, $L_{EE}AR_{EE} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $L_{EE}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, $CR_{EE} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = R_{EE} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, N_q es una matriz nilpotente con índice de nilpotencia q y A_{22} es invertible, tiene las siguientes características:

1. Es externamente equivalente al sistema (2.36).
2. La función de transferencia está dada por

$$g(s) = C(sE - A)^{-1}B = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 .$$

3. El subsistema (2.51b) contiene derivadores que no intervienen en la relación entrada-salida.

La prueba del Teorema 39 es directa de la definición de equivalencia externa (separa los modos no observables). Mediante matrices unitarias es posible reducir el sistema a una forma triangular. Y ya que la función de transferencia tiene grado relativo estrictamente positivo, el subsistema que preserva los modos controlables y observables es explícito. Además, ya que equivalencia externa preserva los modos infinitos controlables/no controlables, N_q es nilpotente con índice de nilpotencia q , por lo que A_{22} es invertible [Gantmacher, 1964].

Capítulo 3

Diseño de superficies en modos deslizantes de orden superior

Ya que los ceros de la función de transferencia de cualquier sistema LIT coinciden con los eigenvalores de la dinámica cero, el problema de diseñar una salida de un sistema SISO para ceros deseados puede interpretarse como el problema de asignación de polos de la dinámica cero. En este capítulo presentamos la generalización de la fórmula de Ackermann y Utkin para diseñar una variable de deslizamiento con grado relativo prescrito y dinámica deslizante deseada en un sistema LIT de una entrada.

3.1. Planteamiento del problema

Considere el sistema LIT de una entrada perturbado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + \varphi(x, t), \quad (3.1a)$$

donde los vectores $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t)$ y $\varphi(x, t) \in \mathbb{R}$, representan el estado, la entrada de control y la perturbación desconocida al tiempo t , respectivamente.

Bajo los Hechos 6 y 7 (acoplamiento y cota por parte de la perturbación), recordemos que la metodología del control por MD consta de los siguientes pasos:

1. Encontrar una variable de deslizamiento (de acuerdo a los objetivos de control)

$$\sigma(t) = cx(t), \quad (3.1b)$$

con $\sigma(t) \in \mathbb{R}$, tal que $\sigma(t) \equiv 0$ implies $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

2. Diseñar una ley de control que asegure la existencia del modo deslizante, i.e., $\sigma(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ o cuando $t \rightarrow T$, $T > 0$.

Hemos dicho que para grado relativo deseado r arbitrario, es posible construir un controlador por MDOS que asegura un modo deslizante de r -ésimo orden a pesar de la presencia de perturbaciones acopladas a la entrada de control (véase la Sección 2.1). El objetivo es proporcionar una fórmula que se pueda utilizar en el primer paso de la metodología del control por MDOS.

3.2. Generalización de la fórmula de Ackermann y Utkin

Asumiendo controlabilidad del par (A, b) (Hecho 8), el siguiente teorema nos brinda una herramienta para el primer paso de la metodología del control por MDOS, al proveer una fórmula para diseñar la variable de deslizamiento para grado relativo r arbitrario y dinámica deslizante deseada.

Teorema 40 *Generalización de la fórmula de Ackermann y Utkin. Si*

$$c = d_n P^{-1} \gamma(A), \quad (3.2)$$

con $\gamma(\lambda) = \lambda^{n-r} + \gamma_{n-r-1} \lambda^{n-r-1} + \dots + \gamma_1 \lambda + \gamma_0$, entonces $\sigma(t)$ es de grado relativo r y las raíces de $\gamma(\lambda)$ son los eigenvalores de la dinámica deslizante en la intersección de los planos $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = \dots = \sigma^{(r-1)}(t) = 0$.

Prueba. Para la prueba, asumimos temporalmente que el sistema está en forma canónica controlable con matrices \hat{A} y \hat{B} . Para verificar la fórmula (3.2), mostraremos que para

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{P}^{-1} \gamma(\hat{A}), \quad (3.3)$$

el numerador de $g(s) = \hat{c}(sI - A)^{-1} b$ es igual a $\gamma(s)$.

Se sabe que, para un sistema en forma canónica controlable, \hat{P} tiene la forma especial siguiente [Williams and Lawrence, 2007]:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1},$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Ya que \hat{A} está en forma canónica controlable, tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{A}^{n-2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{A}^{n-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se sigue de (3.3), (3.4) y (3.5) que

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-r-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Debido a que \hat{A} y \hat{c} están en forma canónica controlable, la función de transferencia tiene la forma siguiente [Chen, 1995, Cap. 6]

$$g(s) = \frac{s^{n-r} + \gamma_{n-r-1}s^{n-r-1} + \cdots + \gamma_1s + \gamma_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}.$$

Es claro que, el grado relativo es igual a r . Ya que el numerador es igual a $\gamma(s)$, los eigenvalores de la dinámica deslizante coinciden con las raíces de $\gamma(s)$.

Recuperando el caso general, considere la transformación de similitud $x = Tz$ con $T = P\hat{P}^{-1}$. Ya que $c = \hat{c}T^{-1}$, entonces

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{P}^{-1} \gamma(\hat{A}) T^{-1}.$$

Finalmente, debido a que $\hat{A} = T^{-1}AT$, $\hat{P}^{-1} = P^{-1}T$ y $\gamma(\hat{A}) = T^{-1}\gamma(A)T$, recuperamos la fórmula (3.2) como es deseado.

El Teorema 48 nos dice que en modo deslizante, las raíces de $\gamma(\lambda)$ son los eigenvalores de la dinámica cero. Entonces, eligiendo un polinomio Hurwitz para $\gamma(\lambda)$ aseguramos que (3.1) es de fase mínima, lo cual implica que los estados convergen al origen cuando las restricciones $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = \cdots = \sigma(t)^{(r-1)} = 0$ se cumplen.

3.3. Ejemplo: Pendubot

El sistema pendubot está formado por dos eslabones rígidos interconectados. El pendubot es un sistema subactuado ya que tiene dos grados de libertad, pero solo tiene actuador en la primer articulación. Considere el siguiente modelo linealizado de un pendubot real [Fantoni and Lozano, 2002, Cap. 5, p. 53 – 72]:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 37,7 & -57,7 & 0 & 0 \\ -82,4 & 247,7 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ -69,1 \end{bmatrix} (u(t) + w(t)), \quad (3.6)$$

con $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, donde x_1 y x_2 representan el ángulo (con respecto a la horizontal) y la velocidad angular del primer eslabón, mientras que x_3 y x_4 representan el ángulo (con respecto al primer eslabón) y la velocidad angular del segundo eslabón, respectivamente. El sistema es controlable y su polinomio característico es $p_p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 16,38)(\lambda - 16,38)(\lambda + 4,14)(\lambda - 4,14)$. El objetivo es rechazar perturbaciones que satisfacen la cota $|w(t)| \leq 1$.

3.3.1. Resultados de simulación

Modos deslizantes de primer orden

El objetivo es diseñar un controlador por MDPO que induzca una dinámica de modo deslizante con eigenvalores $z_i = -16$, $i = 1, 2$ y $z_3 = -5$. Al aplicar la Fórmula (3.2) con $\gamma(\lambda) = (\lambda + 16)^2(\lambda + 5)$ obtenemos

$$c = [-2,6249 \quad -1,2950 \quad -0,6286 \quad -0,1964].$$

Entonces, el sistema (3.6) es de grado relativo uno con respecto a la salida $\sigma(t) = cx(t)$, lo cual se puede verificar mediante la función de transferencia siguiente

$$g(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{(s + 16)^2(s + 5)}{(s + 16,38)(s - 16,38)(s + 4,14)(s - 4,14)}.$$

Considere la perturbación y la condición inicial siguientes:

$$w(t) = \sin(10t) \text{ y } x_0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T.$$

Para forzar la restricción $\sigma(t) = 0$ en tiempo finito, aplicamos la ley de control (2.34) con $\rho_0 = 10$. La Figura 3.3.1 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando la señal de control es muestreada cada $\tau = 0,001$ segundos. Se puede observar que una vez alcanzada la superficie de deslizamiento, el estado converge exponencialmente a cero a pesar de la perturbación $w(t)$.

Para verificar la exactitud que se logra según el orden del modo deslizante, el objetivo de verificar que las desigualdades establecidas en el Teorema 15 se cumplen. Para

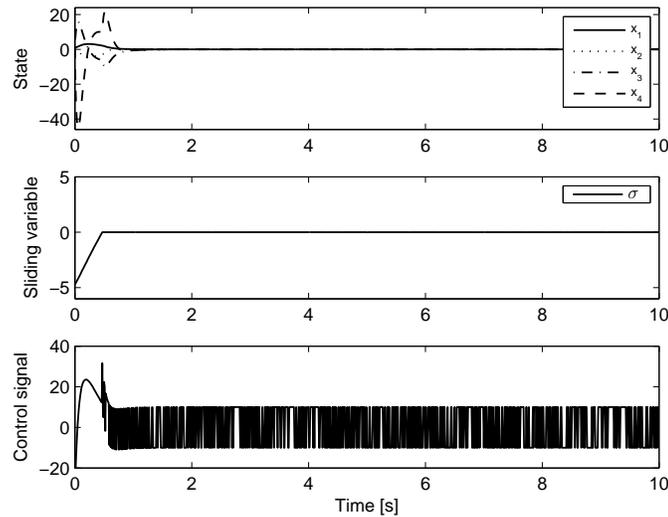


Fig. 3.3.1: Pendubot. MDPO. Estado, variable de deslizamiento y señal de control.

esto, tomamos las desigualdades (2.26) y aplicamos la función logaritmo (la base no es importante) a ambos lados de las desigualdades. Obtenemos para cada una lo siguiente:

$$y < ax + b, \quad (3.7)$$

donde $y = \log |\sigma|^{(i)}$ es la variable dependiente, $a = r - i$ es la pendiente, $b = \log(\mu_i)$ es la ordenada en el origen y $x = \log(\tau)$ es la variable independiente, con $i = 0, \dots, r - 1$. Para verificar que el orden del error $|\sigma^{(i)}|$ en función de τ es $r - i$, el sistema en lazo cerrado es simulado para varios valores de τ . Graficamos el máximo error después de la fase de alcance, esto es, $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\sigma^{(i)}|$. Después se realiza un ajuste por mínimos cuadrados para estimar la pendiente $r - i$.

La Figura 3.3.2 muestra el orden del error para la variable de deslizamiento en función del periodo de muestreo. Ya que $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\sigma(t)| = 1$, se verifica lo establecido en el Teorema 15.

Modos deslizantes de segundo orden

Suponga que ahora queremos diseñar un MDSO cuya dinámica deslizante tenga los eigenvalores $z_i = -16$, $i = 1, 2$. Nuevamente, aplicando la Fórmula (3.2) con $\gamma(\lambda) = (\lambda + 16)^2$ obtenemos

$$c = \begin{bmatrix} -0,3947 & -0,1287 & -0,0468 & -0,0135 \end{bmatrix}.$$

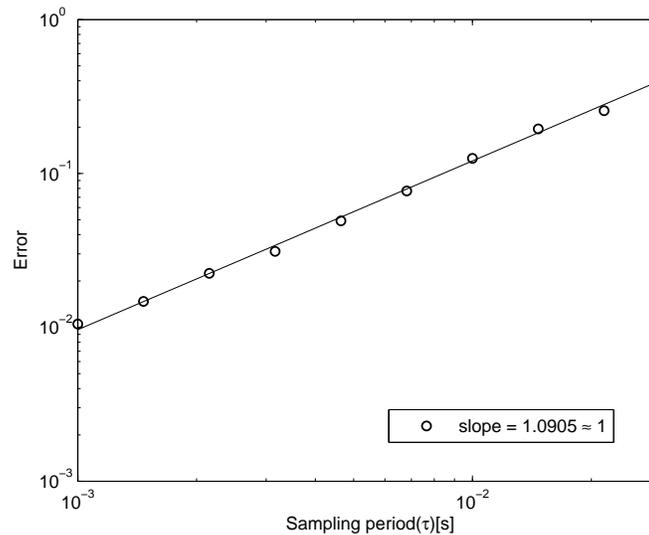


Fig. 3.3.2: MDPO. Orden de los errores.

Ahora tenemos que el sistema (3.6) es de grado relativo dos con respecto a la salida $\sigma(t) = cx(t)$, lo cual se puede verificar mediante la función de transferencia siguiente

$$g(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{(s + 16)^2}{(s + 16,38)(s - 16,38)(s + 4,14)(s - 4,14)}.$$

Para asegurar la existencia de un MDSO ($\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$ en tiempo finito), aplicamos la ley de control (2.35) donde $f(\xi)$ es un controlador CCSO con $\rho_0 = 10$, con lo que resulta (aquí omitimos el argumento t para facilitar la notación):

$$u = -\frac{1}{cAb} \left(cA^2x + 10 \frac{(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma))}{(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2})} \right). \quad (3.8)$$

La Figura 3.3.3 muestra los resultados de simulación para la perturbación, la condición inicial y los periodos de muestreo usadas en el MDPO. Una vez más, el estado converge exponencialmente al origen una vez que se satisface la restricción $\sigma(t) = 0$.

La Figura 3.3.4 muestra la exactitud alcanzada, para $\sigma(t)$ (círculo) y $\dot{\sigma}(t)$ (cuadrado) como función del periodo de muestreo, para varios periodos de muestreo. Ya que $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\sigma(t)| = 2$ y $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\dot{\sigma}(t)| = 1$, las desigualdades (2.26) del Teorema 15 se cumplen.

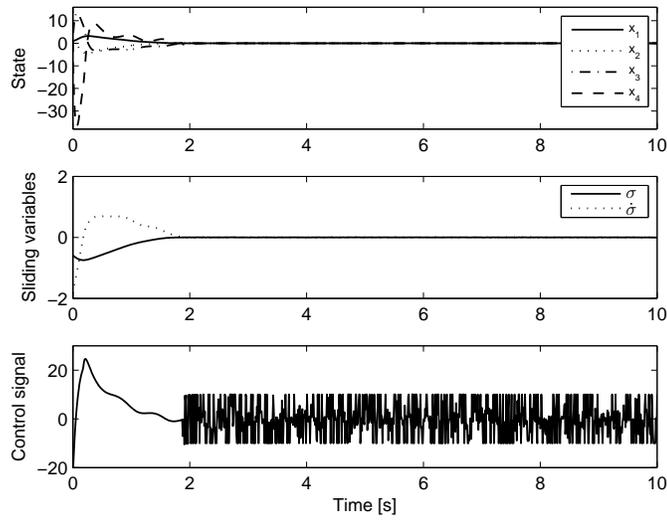


Fig. 3.3.3: Pendubot. MDSO. Estado, variable de deslizamiento y señal de control.

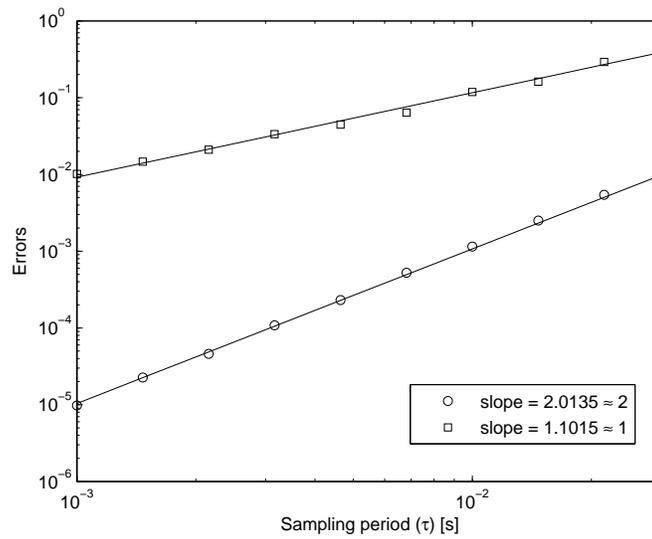


Fig. 3.3.4: MDSO. Orden de los errores.

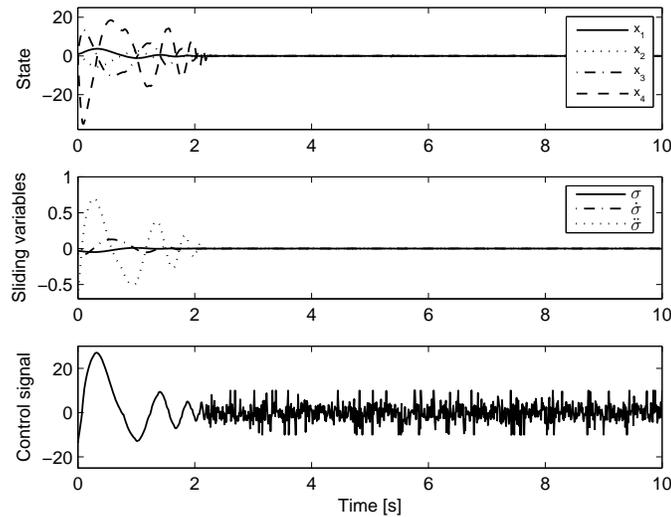


Fig. 3.3.5: Pendubot. MDTO. Estado, variable de deslizamiento y señal de control.

Modos deslizantes de tercer orden

Finalmente, considere el problema de diseñar un MDTO cuya dinámica tenga el eigenvalor $z_1 = -16$. Aplicando la Fórmula (3.2) con $\gamma(\lambda) = \lambda + 16$ obtenemos

$$c = \begin{bmatrix} -0,0234 & -0,0068 & -0,0015 & -0,0004 \end{bmatrix}.$$

Para c de esta forma, el sistema (3.6) es de grado relativo tres con respecto a la salida $\sigma(t) = cx(t)$, lo cual se puede verificar mediante la función de transferencia siguiente

$$g(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{s + 16}{(s + 16,38)(s - 16,38)(s + 4,14)(s - 4,14)}.$$

Para inducir las restricciones $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = \ddot{\sigma}(t) = 0$ en tiempo finito, aplicamos el control (2.35) donde $f(\xi)$ es un CCTO con $\rho_0 = 10$, entonces la ley de control resultante es (omitimos la variable temporal para facilitar la notación):

$$u = -\frac{1}{cA^3b} \left(cA^3x + 10 \frac{\ddot{\sigma} + 2(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3})^{-1/2} + (\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \text{sign}(\sigma))}{|\ddot{\sigma}| + 2(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3})^{1/2}} \right) \quad (3.9)$$

La Figura 3.3.1 muestra los resultados de simulación para la perturbación, la condición inicial y periodos de muestreo de los casos anteriores. Nuevamente, el estado converge exponencialmente al origen una vez que alcanza la superficie.

La Figura 3.3.6 muestra el orden del error para σ (círculo), $\dot{\sigma}$ (cuadrado) y $\ddot{\sigma}$ (triángulo) como función del periodo de muestreo. Ya que $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\sigma(t)| = 3$, $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\dot{\sigma}(t)| = 2$ y $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\ddot{\sigma}(t)| = 1$, las desigualdades (2.26) del Teorema 15 se cumplen.

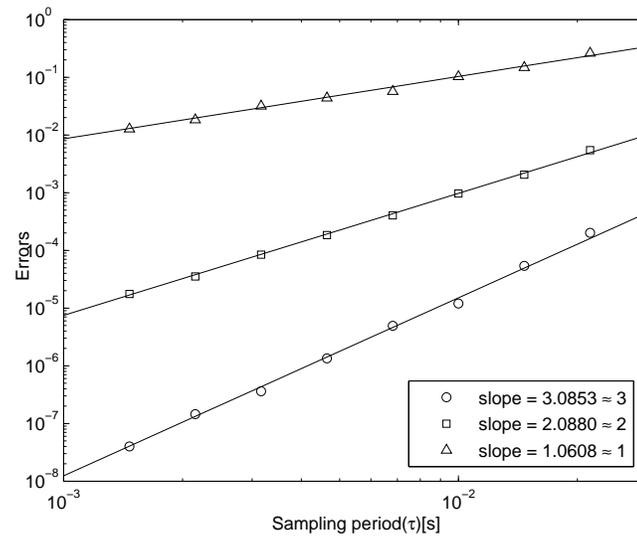


Fig. 3.3.6: MDTO. Orden de los errores.

Capítulo 4

Control por MDOS en un helicóptero de 3GdL

En esta sección presentamos los resultados experimentales obtenidos al aplicar la metodología propuesta para el control por MDOS en un helicóptero de tres grados de libertad (3GdL). La fórmula de Ackermann y Utkin se aplica para grado relativo uno y dos (véase el Capítulo 3), y dinámica de modo deslizante deseada. Las trayectorias del sistema convergen a la superficie debido a la implementación de un controlador STSO y STTO.

4.1. Descripción de la planta

El helicóptero de 3GdL es un sistema subactuado que consiste de una base sobre la cual se encuentra montado un brazo. El brazo sostiene en uno de sus extremos el cuerpo del helicóptero y por el otro un contrapeso M_w . El cuerpo del helicóptero consta de dos propulsores que controlan el vuelo, a través de las señales de control u_f y u_b que son proporcionales a las fuerzas de sustentación F_f y F_b , respectivamente. El diagrama de cuerpo libre se presenta en la Figura 4.1.1, donde se pueden observar los movimientos angulares realizados por la planta.

4.1.1. Modelo no lineal y linealización

Consideramos un modelo no lineal del helicóptero de 3GdL tomado del manual del fabricante Quanser [QUANSER, 2014]

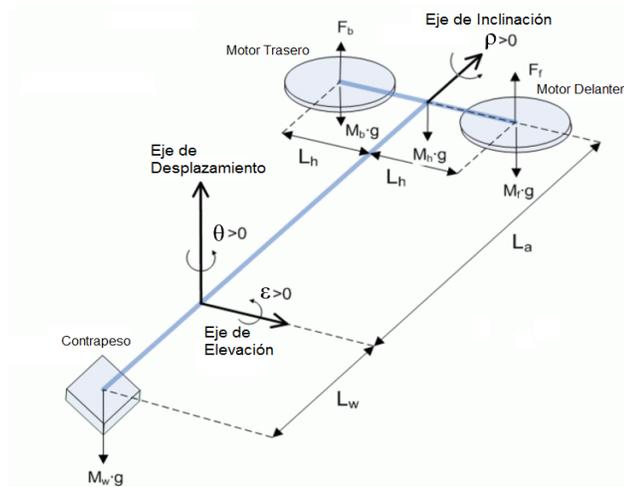


Fig. 4.1.1: Helicóptero de 3GdL. Diagrama de cuerpo Libre.

$$\ddot{\epsilon}(t) = \frac{1}{J_e} (l_a K_f u_+(t) + g(M_w L_w - L_a M_h)) , \quad (4.1a)$$

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{l_h K_f}{J_\rho} u_-(t) , \quad (4.1b)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-l_a K_p}{J_\theta} \text{sen}(\rho(t)) , \quad (4.1c)$$

donde $u_+(t) = u_f(t) + u_b(t)$ y $u_-(t) = u_f(t) - u_b(t)$. Los parámetros constantes del modelo son:

- $J_e = 0,91 \text{ Kg}m^2$: Momento de inercia sobre el eje de elevación.
- $J_\rho = 0,0364 \text{ Kg}m^2$: Momento de inercia sobre el eje de inclinación.
- $J_\theta = 0,91 \text{ Kg}m^2$: Momento de inercia sobre el eje de desplazamiento.
- $K_p = 0,686 \text{ N}$: Fuerza requerida para mantener el helicóptero en vuelo.
- $K_f = 0,1188 \frac{\text{N}}{\text{V}}$: Constante de fuerza-empuje del propulsor.
- $M_h = 1,15 \text{ Kg}$: Masa del helicóptero.
- $M_w = 1,87 \text{ Kg}$: Masa del contrapeso.
- $l_a = 0,66 \text{ m}$: Distancia entre el eje de desplazamiento y el cuerpo del helicóptero.
- $l_h = 0,177 \text{ m}$: Distancia entre el eje de inclinación y cada propulsor.

- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$: Aceleración debido a la gravedad.

Una aproximación lineal del modelo (4.1) para pequeñas variaciones en el ángulo de inclinación ρ y considerando los efectos de la gravedad sobre el cuerpo del helicóptero, la barra y el contrapeso como dinámicas no modeladas, pero acotadas, resulta

$$\ddot{\epsilon}(t) = \frac{1}{J_\epsilon} K_f l_a u_+(t) + w_+(t) , \quad (4.2a)$$

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{1}{J_\rho} K_f l_h u_-(t) + w_-(t) , \quad (4.2b)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-1}{J_\theta} K_p l_a \rho(t) . \quad (4.2c)$$

Mediante la aplicación de controladores de la familia Super-Twisting, podemos rechazar perturbaciones de la forma $w_+(t) = w_f(t) + w_b(t)$ y $w_-(t) = w_f(t) - w_b(t)$, tales que $\|w_+(t)\| \leq \bar{w}_{0+}$ y $\|w_-(t)\| \leq \bar{w}_{0-}$, y, además, $\|\dot{w}_+(t)\| \leq \bar{w}_{1+}$ y $\|\dot{w}_-(t)\| \leq \bar{w}_{1-}$.

Dinámica del error

El objetivo de control es *desplazar* al helicóptero y *elevarlo*. Para llevar al sistema a posiciones angulares deseadas ϵ_d y θ_d , se expresa el modelo lineal en términos del error de regulación. Tomando en cuenta que en este sistema la dinámica no actuada corresponde al desplazamiento θ , se obtienen las representaciones en espacio de estado de los errores de regulación respectivos.

Error de desplazamiento:

El desplazamiento θ se controla con el ángulo de inclinación ρ , el objetivo es que el error de desplazamiento e_θ definido como

$$e_\theta(t) = \theta(t) - \theta_d , \quad (4.3)$$

donde θ_d es un valor a regular constante, tienda a cero conforme $t \rightarrow \infty$. La señal de referencia para el ángulo de inclinación, necesaria para regular el desplazamiento, se obtiene a partir de un algoritmo PID de la forma

$$\rho_r(t) = k_p e_\theta(t) + k_d \dot{e}_\theta(t) + k_i \int_0^t e_\theta dt . \quad (4.4)$$

Error de Inclinación:

Considerando el error de inclinación e_ρ en función del error de seguimiento de la señal

(4.4), esto es, $e_\rho(t) = \rho(t) - \rho_r$, la dinámica del error de inclinación es

$$\dot{e}_\rho(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_\rho} e_\rho(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_h K_f}{J_\rho} \end{bmatrix}}_{b_\rho} (u_-(t) + w_-(t)) - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{perturbación}} \ddot{\rho}_r(t), \quad (4.5)$$

con

$$e_\rho(t) = \begin{bmatrix} e_{\rho_1}(t) \\ e_{\rho_2}(t) \\ e_{\rho_3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t (\rho - \rho_r) dt \\ \rho(t) - \rho_r(t) \\ \dot{\rho}(t) - \dot{\rho}_r(t) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Error de elevación:

Para el error de elevación $e_\varepsilon(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_d$, donde ε_d es un valor a regular constante, la dinámica del error es

$$\dot{e}_\varepsilon(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_\varepsilon} e_\varepsilon(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_a K_f}{J_\varepsilon} \end{bmatrix}}_{b_\varepsilon} (u_+(t) + w_+). \quad (4.7)$$

con

$$e_\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} e_{\varepsilon_1}(t) \\ e_{\varepsilon_2}(t) \\ e_{\varepsilon_3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t (\varepsilon - \varepsilon_r) dt \\ \varepsilon(t) - \varepsilon_r \\ \dot{\varepsilon}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

4.1.2. Parámetros experimentales

Suponiendo que $e_\rho \rightarrow 0$ rápidamente, la dinámica de desplazamiento toma la forma

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-1}{J_\theta} K_p l_a \rho_r(t),$$

la cual tiene la función de transferencia

$$g_\theta(s) = \frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{\frac{K_p l_a k_p}{J_\theta} s + \frac{K_p l_a k_i}{J_\theta}}{s^3 + \frac{K_p l_a k_d}{J_\theta} s^2 + \frac{K_p l_a k_p}{J_\theta} s + \frac{K_p l_a k_i}{J_\theta}},$$

si la ganancia integral es pequeña, el comportamiento será el de un sistema de segundo orden. Para un tiempo de pico $t_p = 8$ [s] y amortiguamiento $\zeta = 0,748$, las ganancias para el controlador PID (4.4) resultan

$$k_d = \frac{2\zeta w_n J_\theta}{K_p l_a} = 2,405; \quad k_p = \frac{J_\theta w_n^2}{K_p l_a} = 1,124; \quad k_i = 0,0976.$$

con $w_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \zeta^2}} = 0,634$. Sustituyendo los valores de los parámetros reales de la planta, se tiene

$$A_\rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_\rho = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,577 \end{bmatrix}, \quad A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,086 \end{bmatrix}.$$

Se consideran las siguientes perturbaciones

$$\begin{aligned} w_f(t) &= 0,5 + 0,2\text{sen}(t) + 0,2\text{cos}(2t), \\ w_b(t) &= -0,5 + 0,2\text{cos}(t) + 0,2\text{sen}(2t), \end{aligned}$$

por lo que $w_-(t)$ y $w_+(t)$ son acotadas y sus derivadas con respecto al tiempo están acotadas por $\bar{w}_{1+} = \bar{w}_{1-} = 0,8$.

4.2. Resultados experimentales

Modos deslizantes de segundo orden

Proponemos que la dinámica de modo deslizante para el error de elevación tenga los eigenvalores $\lambda_{\varepsilon_1} = -3$ y $\lambda_{\varepsilon_2} = -2$, y la dinámica de modo deslizante para el error de inclinación tenga los eigenvalores $\lambda_{\rho_1} = -0,8$ y $\lambda_{\rho_2} = -0,5$. Aplicando la fórmula de Ackermann y Utkin del Teorema 9 [Ackermann and Utkin, 1998] con los polinomios $\gamma_\varepsilon(\lambda) = (\lambda^2 + 5\lambda + 6)$ y $\gamma_\rho(\lambda) = \lambda^2 + 1,3\lambda + 0,4$, obtenemos

$$c_\varepsilon = \begin{bmatrix} 69,635 & 58,029 & 11,606 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c_\rho = \begin{bmatrix} 0,692 & 2,250 & 1,731 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el sistema (4.7) es de grado relativo uno con respecto a la salida $\sigma_\varepsilon = c_\varepsilon e_\varepsilon$, y el sistema (4.5) es de grado relativo uno con respecto a la salida $\sigma_\rho = c_\rho e_\rho$, lo cual se puede verificar mediante las respectivas funciones de transferencia

$$g_\varepsilon(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3} \quad \text{y} \quad g_\rho(s) = \frac{s^2 + 1,3s + 0,4}{s^3}.$$

Para asegurar que exista un MDSO en cada sistema (elevación e inclinación), se implementa un controlador STSO. La Tabla 4.2.1 muestra el valor de las ganancias utilizadas, las cuales fueron estimadas y después verificadas mediante simulación.

La Figura 4.2.1 muestra la regulación del ángulo de elevación $\varepsilon_d = 2$ [grad] y el ángulo de desplazamiento $\theta_r = 30$ [grad], así como el seguimiento de la trayectoria ρ_r por parte del ángulo de inclinación. Las condiciones iniciales fueron muy cercanas a cero para todas las variables de estado. La Figura 4.2.2 muestra las señales de control proporcionadas por el controlador STSO. En las Figuras 4.2.3 y 4.2.4 se pueden observar las variables de deslizamiento del error de elevación y el error de inclinación, respectivamente.

Tabla 4.2.1: Ganancias del STSO

Elevación	Inclinación
$k_{3\varepsilon} = 2,372$	$k_{3\rho} = 2,372$
$k_{4\varepsilon} = 2,75$	$k_{4\rho} = 2,75$

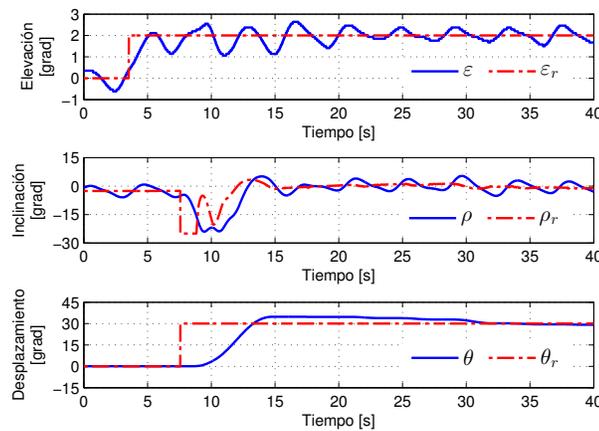


Fig. 4.2.1: MDSO. STSO. Posición del helicóptero en grados.

Modos deslizantes de tercer orden

Ahora, proponemos una dinámica de modo deslizante para el error de elevación que tiene un eigenvalor $\lambda_\varepsilon = -6$, y una dinámica de modo deslizante para el error de inclinación que tiene un eigenvalor $\lambda_\rho = -1,5$. Entonces, aplicando la fórmula de Ackermann y Utkin del Teorema 9 con los polinomios $\gamma_\varepsilon(\lambda) = (\lambda + 6)$ y $\gamma_\rho(\lambda) = (\lambda + 1,5)$, obtenemos

$$c_\varepsilon = \begin{bmatrix} 69,635 & 11,606 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c_\rho = \begin{bmatrix} 2,597 & 1,731 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema (4.7) es de grado relativo dos con respecto a la salida $\sigma_\varepsilon = c_\varepsilon e_\varepsilon$, y el sistema (4.5) es de grado relativo dos con respecto a la salida $\sigma_\rho = c_\rho e_\rho$, lo cual se puede verificar mediante las respectivas funciones de transferencia

$$g_\varepsilon(s) = \frac{s + 6}{s^3} \quad \text{y} \quad g_\rho(s) = \frac{s + 1,5}{s^3}.$$

Para asegurar la existencia de un MDTO se implementó un controlador STTO [Franco, 2014]. La Tabla 4.2.2 muestra el valor de las ganancias utilizadas para los controladores.

La Figura 4.2.5 muestra la regulación del ángulo de elevación $\varepsilon_d = 2$ [grad] y el ángulo de desplazamiento $\theta_r = 30$ [grad], así como el seguimiento de la trayectoria ρ_r por parte del ángulo de inclinación.

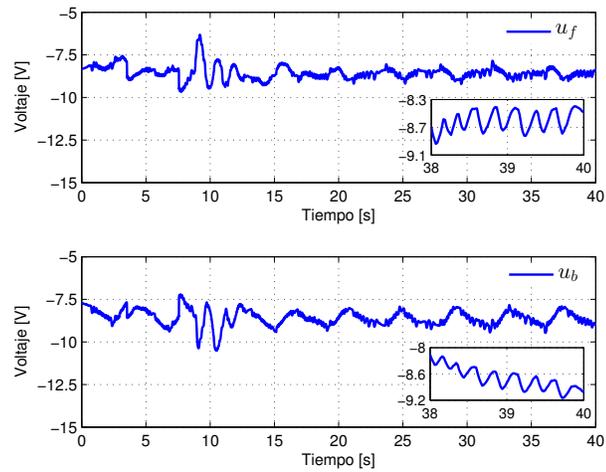


Fig. 4.2.2: MDSO. STSO. Señales de control.

Tabla 4.2.2: Ganancias

Elevación	Inclinación
$k_{5\varepsilon_1} = 2,5$	$k_{5\rho} = 2$
$k_{6\varepsilon_2} = 2$	$k_{6\rho} = 2$
$k_{7\varepsilon_3} = 0,8$	$k_{7\rho} = 0,8$

La Figura 4.2.6 muestra las señales de control proporcionadas por el controlador STTO. En las Figuras 4.2.7 y 4.2.8 se pueden observar las variables de deslizamiento del error de elevación y el error de inclinación, respectivamente.

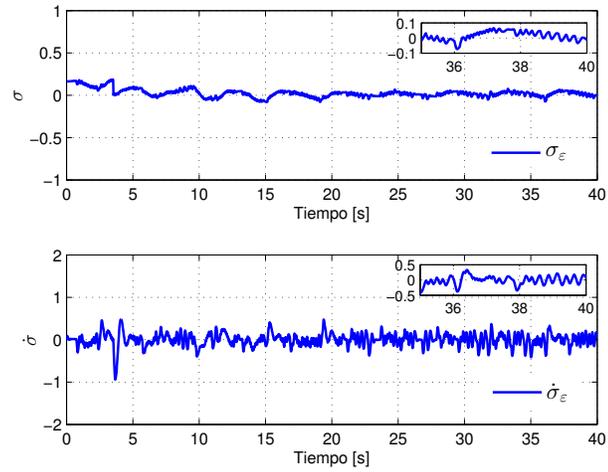


Fig. 4.2.3: MDSO. STSO. Variable de deslizamiento (elevación).

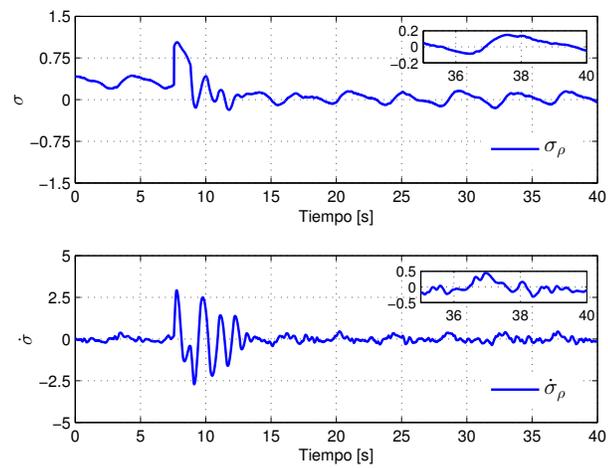


Fig. 4.2.4: MDSO. STSO. Variable de deslizamiento (inclinación).

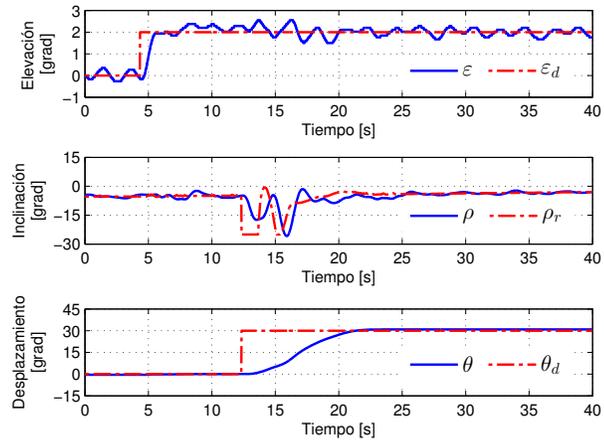


Fig. 4.2.5: MDTO. STTO. Posición del helicóptero en grados.

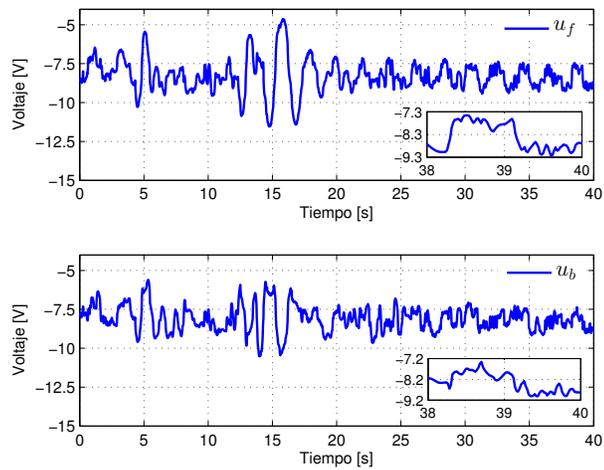


Fig. 4.2.6: MDTO. STTO. Señales de control.

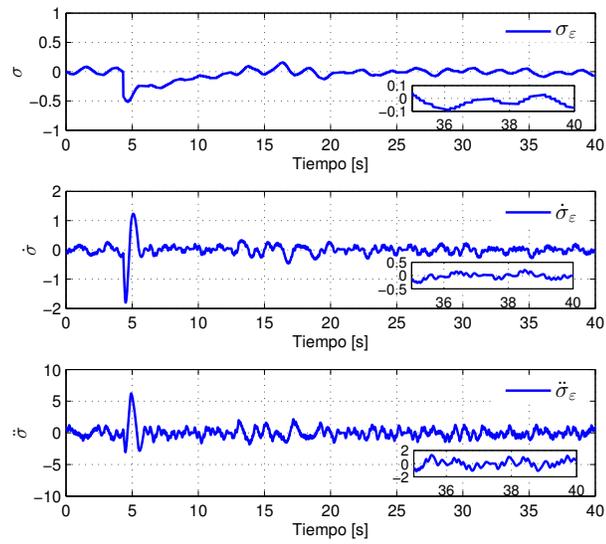


Fig. 4.2.7: MDTO. STTO. Variable de deslizamiento (elevación).

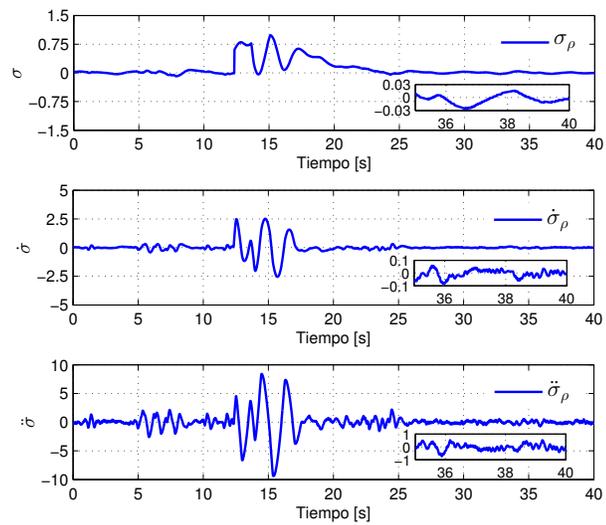


Fig. 4.2.8: MDTO. STTO. Variable de deslizamiento (inclinación).

Capítulo 5

Modos deslizantes integrales para sistemas implícitos

Las trayectorias de un sistema implícito están restringidas naturalmente a una variedad; por otra parte, el control por MD restringe las trayectorias del sistema a una superficie en tiempo finito mediante una ley de control. Recordemos que en modos deslizantes existe el problema de la fase de alcance. La técnica del control por MDI consiste en definir una variable de deslizamiento de tal manera que las trayectorias del sistema inician en la superficie deseada desde el tiempo inicial. En este capítulo, mostramos que, asumiendo regularidad y estabilizabilidad, es posible definir una superficie de deslizamiento integral para sistemas implícitos. En sistemas implícitos de índice mayor que uno y que no son C-controlables, es necesario aplicar una ley de control que proporcione la suavidad requerida por las entradas. En el caso de sistemas implícitos de índice uno, podemos usar el controlador STSO.

5.1. Planteamiento del problema

Considere un sistema implícito perturbado de la forma

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(x, t), \quad (5.1)$$

donde los vectores $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $\varphi(x, t) \in \mathbb{R}^p$ representan el estado, la entrada de control y la perturbación desconocida, respectivamente. Las matrices E , A , B son de las dimensiones apropiadas con $\text{rank } E = n_0 < n$.

El objetivo es diseñar una ley de control que establezca el sistema (5.1) a pesar de la presencia de la perturbación. Asumimos los Hechos 6 y 7 (acoplamiento y cota por parte de la perturbación), y lo siguiente por parte del sistema implícito:

Hecho 41 *El abanico $\lambda E - A$ es regular (ver la Definición 17).*

Del Hecho 41, bajo un cambio adecuado de base, el sistema implícito (5.1) puede descomponerse en la siguiente forma:

$$\dot{x}_s(t) = A_s x_s(t) + B_s(u(t) + w(t)) , \quad (5.2a)$$

$$N_q \dot{x}_f(t) = x_f(t) + B_f(u(t) + w(t)) . \quad (5.2b)$$

Del sistema implícito 5.2, el siguiente hecho es impuesto por el sistema para la existencia y unicidad de la solución:

Hecho 42 *Sea q el índice de nilpotencia de N_q en (5.2b). La perturbación desconocida $w(t)$ es \mathcal{C}^j y satisface la cota $\|w^{(j)}(t)\| \leq \bar{w}_j$ para toda $t \geq 0$ y para algunas $\bar{w}_j \geq 0$ conocidas, con $0 \leq j \leq q - 1$.*

Además, para la construcción del controlador asumimos lo siguiente:

Hecho 43 *El sistema implícito (5.1) no perturbado ($w(t) = 0$) es estabilizable (ver la Definición 35).*

Dividimos el control en dos partes como sigue

$$u(t) = u_n(t) + u_p(t) ,$$

donde $u_n(t)$ es una retroalimentación de estado lineal responsable de estabilizar el sistema nominal (el sistema implícito sin perturbación) y $u_p(t)$ es una ley de control encargada de rechazar la perturbación $w(t)$.

5.1.1. Caso trivial

Considere un sistema implícito dado en la forma (5.2). Suponga que $\text{rank } B_s = m$, lo cual implica que $n_1 \geq m$. En este caso, podemos despreciar el subsistema (5.2b) y aplicar técnicas conocidas para diseñar la variable de deslizamiento en sistemas explícitos perturbados (ver la Sección 2.1). Como segundo paso, para diseñar la ley de control se toma en cuenta el grado de suavidad requerido para la solución de (5.2b).

Proponemos el siguiente procedimiento para estabilizar (5.2) robustamente:

1. Elegir la matriz $C_s \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ de tal manera que $C_s B_s$ es no singular y las trayectorias del subsistema (5.2a) restringidas a la superficie de deslizamiento $S = \{x(t) : \sigma(t) = (C_s B_s)^{-1} C_s x_s(t) = 0\}$ tienden al origen ¹.

¹En el caso de múltiples entradas, la matriz C_s puede elegirse, si el subsistema (5.2a) es estabilizable y $\text{rank } B_s = m$ mediante la transformación del subsistema (5.2a) a la forma regular. En el caso de que $m = 1$ se puede recurrir a la fórmula de Ackermann y Utkin (ver la Subsección 2.1.4).

2. Hacer $u_n(t) = -(C_s B_s)^{-1} C_s A_s x_s(t)$. La derivada de la variable de deslizamiento resulta

$$\dot{\sigma}(t) = (C_s B_s)^{-1} C_s (A_s x_s(t) + B_s (C_s B_s)^{-1} C_s A_s x_s(t) + B_s u_p(t) + D_s w(t)),$$

lo cual se reduce a

$$\dot{\sigma}(t) = u_p(t) + w(t). \quad (5.3)$$

3. Proponer $u_p(t) \in \mathcal{C}^j$ que asegure un modo deslizante de $(2+j)$ -ésimo orden, esto es, que asegure el cumplimiento de las restricciones $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = \dots = \sigma^{(j+1)} = 0$, sin el conocimiento de $\dot{\sigma}$ hasta $\sigma^{(j+1)}$ ², con $0 \leq j \leq q-1$.

Dado que se asume que el sistema implícito está en la forma de Weierstrass, para la cual la solución del subistema rápido depende de las entradas y está dada por (2.43) (Sección 2.2), es claro que si $u_p(t)$ rechaza la perturbación $w(t)$, entonces la ley de control estabiliza robustamente ambos subsistemas (lento y el rápido).

5.1.2. Ejemplo

Considere el siguiente sistema implícito

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t) + w(t), \quad (5.4a)$$

$$0 = x_2(t) + u(t) + w(t). \quad (5.4b)$$

El cual se puede escribir en la forma (5.1) con

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que

$$\det(sE - A) = -(s-1),$$

por lo tanto, es un sistema regular que, como es fácil ver, está en la forma de Weierstrass con $n_1 = n_2 = 1$, $N_q = 0$, $A_s = 1$, $B_s = 1$, $B_f = 1$ y $q = 1$. Ya que $N_q^0 B_f = 1$, entonces la solución de (5.4) requiere una entrada $u(t) \in \mathcal{C}^j$, con $j = 0$. Ya que (5.4) tiene un eigenvalor finito $s = 1 \in \bar{\mathbb{C}}^+$, el sistema es inestable. Sin embargo, es claro que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 = n,$$

²Para $j = 0$, el controlador Super-Twisting resuelve el problema

para todo eigenvalor finito $s \in \bar{\mathbb{C}}^+$ del sistema, por lo tanto es estabilizable. Además se tiene que $\text{rank } B_s = m = 1$, entonces podemos aplicar los pasos 1 a 3 para estabilizar robustamente el sistema.

Si hacemos $C_s = 1$, las condiciones del paso 1 se satisfacen y obtenemos $\sigma(t) = x_1(t)$. En el paso 2 obtenemos $u_n(t) = -x_1(t)$. Entonces podemos proponer una ley de control que estabilice robustamente el sistema ante perturbaciones que satisfagan la cota $\|w(t)\| \leq \bar{w}_0$.

Resultados de simulación

Considere una condición inicial $x_1(0) = 1$ y una perturbación $w(t) = \sin(t)$, por lo tanto $\bar{w}_0 = 1$. Para asegurar un MDSO, proponemos $u_p(t)$ como un controlador STSO (2.31) con $k_3 = 1,1$ y $k_4 = 0,9$, entonces la ley de control total resulta:

$$u(t) = -x_1(t) - 1,1 |\sigma(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma(t)) + \int_0^t (-0,9 \text{sign}(\sigma(\tau))) d\tau . \quad (5.5)$$

La Figura 5.1.1 muestra los resultados de simulación. Se puede observar que x_1 y x_2 llegan al origen en tiempo finito.

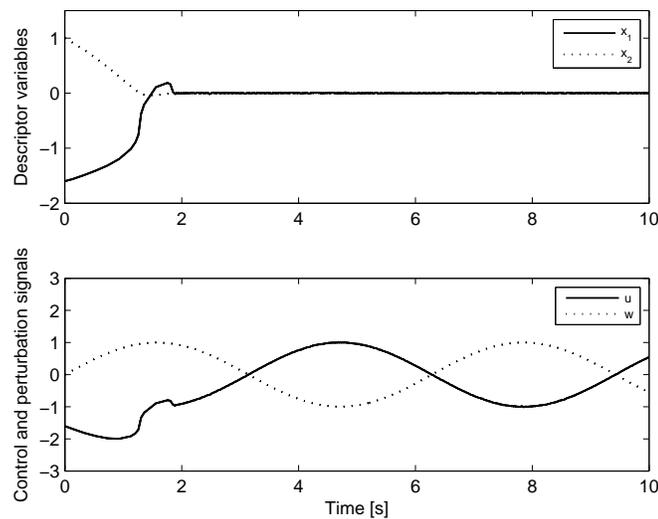


Fig. 5.1.1: MDSO. STSO. Sistema implícito (5.4) en forma Weierstrass. Estado, control y perturbación.

Nota 44 *Este procedimiento requiere que el sistema (5.1) se transforme a la forma de Weierstrass. Para solventar este problema, nuestra contribución principal es proponer una superficie de deslizamiento integral.*

5.2. Modos deslizantes integrales de orden superior

En esta sección proponemos una superficie de deslizamiento integral ³ que es adecuada para el caso de sistemas implícitos perturbados. Lo que concierne al diseño de los controladores que llevan las trayectorias del sistema a la superficie de deslizamiento se presenta más adelante.

Teorema 45 *Considere el sistema implícito (5.1). Asumiendo los Hechos 41 (regularidad), 43 (estabilizabilidad) y 6 (acoplamiento), divida el control como $u(t) = u_n(t) + u_p(t)$. Elija el control nominal $u_n(t) = -Kx(t)$ de tal manera que $\Lambda(E, A - BK) \subset \mathbb{C}^-$ y defina la variable de deslizamiento integral como*

$$\sigma(t) = B^+ \left[Ex(t) - \int_0^t ((A - BK)x(\tau)) d\tau \right], \quad (5.6)$$

donde B^+ es la pseudo-inversa de B . Entonces, la variable de deslizamiento:

1. *Satisface*

$$\dot{\sigma}(t) = u_p(t) + w(t). \quad (5.7)$$

2. *Es una salida de fase mínima.*

Prueba. La implicación 1 se obtiene directamente de derivar (5.6) con respecto al tiempo. La restricción $\sigma(t) \equiv 0$ implica que $\dot{\sigma}(t) = u_p(t) + w(t) \equiv 0$, esto es, $u_p(t) = -w(t)$. Con este control, el sistema en lazo cerrado es $E\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$, el cual es estable por construcción ya que los eigenvalores finitos de $(E, A - BK)$ se eligen con parte real negativa. Con esto se prueba la implicación 2.

Para diseñar la ley de control por MD debemos tomar en cuenta lo siguiente:

1. La variable de deslizamiento es de grado relativo $r = 1$,
2. El control $u_p(t)$ debe pertenecer al conjunto de las funciones j veces continuamente diferenciables, entonces el controlador debe inducir un modo deslizante de $(2 + j)$ -ésimo orden sin el conocimiento de $\dot{\sigma}$ hasta $\sigma^{(j+1)}$.
3. Sabemos que, si el sistema implícito es de índice uno, entonces se requiere $u(t) \in \mathcal{C}^0$. Para rechazar la perturbación el control debe inducir un MDSO. Si el término fuera de la integral de la variable de deslizamiento es igual a cero, entonces la variable de

³Véase [Utkin and Shi, 1996; Castaños and Fridman, 2006; Castaños et al., 2012] para más detalles en el caso explícito.

deslizamiento está definida únicamente bajo el signo de una integral y por lo tanto su derivada $\dot{\sigma}(t)$ es función únicamente del estado. Por lo que para inducir un MDSO podemos implementar un controlador Twisting (el cual requiere del conocimiento de $\sigma(t)$ y $\dot{\sigma}(t)$) bajo el signo de una integral. En caso contrario, si el término que está fuera de la integral es diferente de cero, podemos usar el controlador Super-Twisting.

5.2.1. Ejemplo

Considere el sistema implícito perturbado

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) , \quad (5.8a)$$

$$0 = x_1(t) + u(t) + w(t) , \quad (5.8b)$$

$$0 = x_2(t) + x_3(t) + u(t) + w(t) , \quad (5.8c)$$

el cual puede escribirse en la forma (5.1) con

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Tenemos que

$$\det(sE - A) = 1 ,$$

por lo que podemos concluir que el sistema (5.8) es regular con $n_1 = 0$ y $n_2 = 3$. Ya que este sistema no tiene parte dinámica debido a que solo tiene eigenvalores infinitos, entonces, por definición, es estable. Además

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 = n, \quad \forall s.$$

Por lo tanto el sistema es estabilizable. Ya que el sistema no está en la forma de Weierstrass no podemos aplicar los pasos 1 a 3 del caso trivial. Proponiendo una retroalimentación de estado $u_n(t) = -Kx(t)$ con $K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, obtenemos

$$\det(sE - (A - BK)) = \det \left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = s + 1 ,$$

lo cual significa que con esta retroalimentación de estado el sistema tiene un polo finito $s_1 = -1$, i.e., es estable. Además, el sistema en lazo cerrado tiene rank E polos finitos (lo cual es de esperarse ya que es controlable en el infinito) por lo tanto es libre de impulsos, i.e., tiene índice $q = 1$. Entonces la solución de (5.4) requiere de una entrada $u(t) \in \mathcal{C}^0$. Podemos proponer una ley de control que establezca robustamente el sistema ante perturbaciones que satisfagan la cota $\|w(t)\| \leq \bar{w}_0$ mediante un control que induzca un MDSO.

Tenemos que $B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B^+E = 0$. Del Teorema 45, la variable de deslizamiento se define como

$$\sigma(t) = -B^+ \int_0^t ((A - BK)x(\tau))d\tau = - \int_0^t (-x_1(\tau) - x_2(\tau))d\tau .$$

Y su derivada es

$$\dot{\sigma}(t) = x_1(t) + x_2(t) = u_p(t) + w(t) .$$

Considere una condición inicial $x_1(0) = 1$ y una perturbación $w(t) = \sin(t)$, entonces $\bar{w}_0 = 1$. Para garantizar la existencia de un MDSO, proponemos usar el controlador Twisting (2.20). La ley de control total resulta

$$u(t) = u_n(t) + u_p(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + \int_0^t (-8 \operatorname{sign}(\sigma(\tau)) - 6 \operatorname{sign}(\dot{\sigma}(\tau))) d\tau .$$

Sustituyendo la variable de deslizamiento, tenemos

$$u(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + \int_0^t \left(-8 \operatorname{sign} \left(\int_0^{\tau_1} (x_1(\tau_2) + x_2(\tau_2)) d\tau_2 \right) - 6 \operatorname{sign}(x_1(\tau_1) + x_2(\tau_1)) \right) d\tau_1 .$$

La Figura 5.2.1 muestra los resultados de simulación. Podemos ver que $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ convergen asintóticamente al origen.

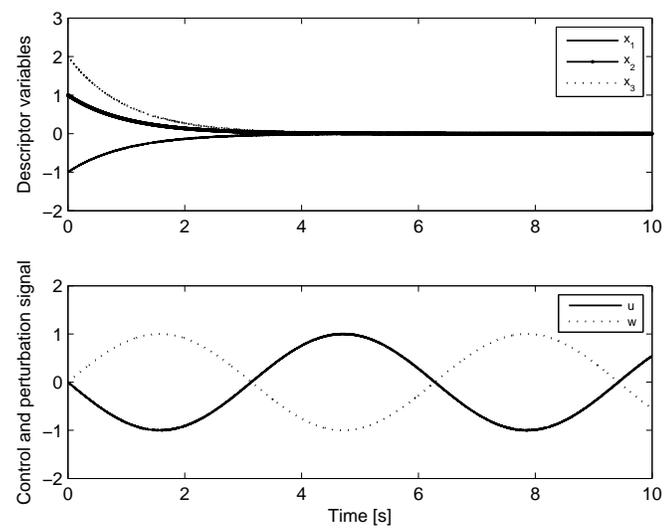


Fig. 5.2.1: MDSO. Controlador Twisting. Sistema implícito (5.8). Estado, control y perturbación.

Capítulo 6

Diseño de la dinámica cero y estabilización de sistemas implícitos

En este capítulo presentamos una fórmula para elegir una salida en un sistema implícito LIT, regular, de una entrada para grado relativo prescrito y ceros deseados. Para cuando el grado relativo es estrictamente positivo, proponemos una transformación de coordenadas que nos permite formular resultados sobre la estabilización asintótica del sistema mediante retroalimentación de estado.

6.1. Planteamiento del problema

Considere el sistema implícito LIT de una entrada

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) , \quad (6.1a)$$

donde el vector $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}$ representan en estado y la entrada de control al tiempo t , respectivamente. Las matrices del sistema son constantes de las dimensiones apropiadas con $\text{rank } E = n_0 < n$.

Queremos elegir la salida $y \in \mathbb{R}$

$$y(t) = cx(t) , \quad (6.1b)$$

con c un vector fila, de tal manera que el sistema tiene grado relativo deseado con respecto a y , y la función de transferencia tiene los ceros (ceros de transmisión) deseados. También queremos encontrar la ley de control por retroalimentación de estado que lleva y mantiene la salida en cero.

Para resolver el problema, asumimos los Hechos 41 (regularidad), 42 (diferenciabilidad por parte de las entradas) y, adicionalmente, lo siguiente:

Hecho 46 *El sistema implícito (6.1a) es R -controlable (ver la definición 28 y el Teorema 30).*

6.2. Diseño de la salida

6.2.1. Caso trivial

Considere un sistema implícito dado en la forma de Weierstrass o Cuasi-Weierstrass (2.39). En este caso, si elegimos la salida en función del subestado $x_1(t)$, i.e., haciendo $c_f = 0$, entonces podemos olvidarnos del subsistema (2.39b) y elegir c_s mediante la fórmula propuesta en el Capítulo 3 de esta tesis, y reportada en [Hernández et al., 2014], la cual nos permite diseñar c_s para un grado relativo prescrito, $r \leq n_1$ en este caso, y dinámica cero deseada del subsistema (2.39a). Con esto, el sistema original tendrá grado relativo estrictamente positivo y ceros deseados.

Nota 47 *Una vez más, la desventaja de este procedimiento es la transformación del sistema implícito a la forma de Weierstrass o de Cuasi-Weierstrass, la cuales son diagonales.*

6.2.2. Caso general

Considere un sistema implícito de la forma (6.1). Del Teorema 34, la controlabilidad de (6.1) está relacionada con la controlabilidad de un sistema explícito con matrices (E, b) . Sea P la matriz de controlabilidad del par (E, b) , con $\text{rank}(P) = l$. Sea z un entero tal que $1 \leq z \leq l - 1$. En esta sección mostramos que es posible asignar m ceros finitos en la función de transferencia mediante una fórmula que se propone. Sea $\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_i$, donde $\Gamma_f = \{s_1, \dots, s_z\}$ y $\Gamma_i = \{\infty_{z+1}, \dots, \infty_{l-1}\}$ representan el conjunto de ceros finitos y el conjunto de ceros al infinito deseados, respectivamente. Definimos los siguientes polinomios:

$$\gamma(\tau) = \tau^{(l-1)-z} \gamma^f(\tau), \quad (6.2)$$

donde

$$\gamma^f(\tau) = \tau^z (\eta^f \circ \pi^{-1}(\tau)) = (\gamma_0 + \gamma_1 \tau + \dots + \gamma_z \tau^z) \quad \text{y} \quad \eta^f(s) = \prod_{i=1}^z (s - s_i).$$

Los polinomios $\eta^f(s)$ y $\gamma^f(\tau)$ son de grado z . Las raíces de $\eta^f(s)$ son los ceros finitos deseados (Γ_f) y las raíces de $\gamma^f(\tau)$ son sus respectivas imagenes abajo la transformación π (ver la ecuación 2.46). El polinomio $\gamma(\tau)$ es de grado $l - 1$ y sus raíces son las imagenes bajo la transformación π de los ceros finitos e infinitos deseados (Γ).

Teorema 48 *Sea*

$$c = \begin{bmatrix} d_l & 0_{n-l} \end{bmatrix} Q^{-1} \gamma(E), \quad (6.3)$$

con

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_l & q_{l+1} & \cdots & q_n \end{bmatrix},$$

y γ definida en (6.2). Los vectores $\{q_1, \dots, q_l\}$ corresponden a l columnas linealmente independientes de la matriz de controlabilidad del par (E, b) y el resto de las columnas de Q se eligen arbitrariamente de tal manera que Q es no singular. Entonces, los ceros de la función de transferencia del sistema implícito (6.1) son los elementos del conjunto Γ_f .

Prueba. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que el sistema (6.1) está en forma estándar. Entonces, bajo la transformación π los polos y ceros del sistema implícito se mapean a polos y ceros de un sistema explícito (véase Teorema 38 y [Dai, 1989; Hsu and Chang, 1996]). La idea es trabajar con dicho sistema explícito auxiliar y aplicar las herramientas conocidas para finalmente recuperar la función de transferencia del sistema implícito mediante la transformación inversa de π .

Considere el sistema explícito auxiliar

$$\dot{\xi}(t) = E\xi(t) + bu(t), \quad (6.4)$$

$$y = c\xi(t). \quad (6.5)$$

Del Hecho 46, tenemos

$$\text{rank } P = \text{rank} \begin{bmatrix} b & Eb & \cdots & E^{n-1}b \end{bmatrix} = l \leq n.$$

Entonces es posible seleccionar l columnas linealmente independientes de la matriz P y arbitrariamente elegir los vectores columna q_{l+1}, \dots, q_n de tal manera que la matriz de dimensión n

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_l & q_{l+1} & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

es no singular.

La transformación $\xi = Q\bar{\xi}$ lleva el sistema auxiliar (6.4) a la forma

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = \bar{E}\bar{\xi}(t) + \bar{b}u(t), \quad (6.6a)$$

$$y = \bar{c}\bar{\xi}(t), \quad (6.6b)$$

con

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_c \\ \xi_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} E_c & E_{12} \\ 0 & E_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} c_c & c_{\bar{c}} \end{bmatrix},$$

conocida como descomposición controlable/no controlable de Kalman [Chen, 1995; Williams and Lawrence, 2007]. El par (E_c, b_c) define un subsistema controlable de dimensión l con estado ξ_c , matriz de controlabilidad P_c y función de transferencia

$$\hat{g}(\tau) = c(\tau I - E)^{-1}b = \bar{c}(\tau I - \bar{E})^{-1}\bar{b} = c_c(\tau I - E_c)^{-1}b_c, \quad (6.7)$$

mientras que el sistema residual contiene los modos no controlables, por lo tanto no figuran en la función de transferencia [Chen, 1995; Williams and Lawrence, 2007]. También se tiene que

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{b} & \bar{E}\bar{b} & \cdots & \bar{E}^{n-1}\bar{b} \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} b & Eb & \cdots & E^{n-1}b \end{bmatrix} = Q^{-1}P,$$

lo que significa que la controlabilidad es invariante ante transformaciones de similitud.

Dada la estructura triangular, la matriz de controlabilidad del sistema (6.6) está dada por

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} b_c & E_c b_c & \cdots & E_c^{l-1} b_c & E_c^l b_c & \cdots & E_c^{n-1} b_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_c & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con $P_C = \begin{bmatrix} b_c & E_c b_c & \cdots & E_c^{l-1} b_c \end{bmatrix}$ y $\text{rank}(\bar{P}) = \text{rank}(P_c) = l$. Para esta descomposición controlable y no controlable, construimos \bar{Q} eligiendo las primeras l columnas l.i. y las columnas restantes las elegimos arbitrariamente de tal manera que \bar{Q} sea no singular. Sin pérdida de generalidad podemos elegir \bar{Q} de la siguiente forma:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} P_c & * \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Nuestro objetivo es mostrar que si elegimos

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} d_l & 0_{n-l} \end{bmatrix} \bar{Q}^{-1} \gamma(\bar{E}), \quad (6.8)$$

el numerador de $g(s) = \pi(s)\hat{g}(\pi(s))$ es igual a $\eta^f(s)$.

Ya que el par (E_c, b_c) es controlable, por la forma de Ackerman-Utkin generalizada, presentada en el Capítulo 3 de esta tesis, tenemos

$$\bar{c}_c = d_l P_c^{-1} \gamma(\bar{E}_c). \quad (6.9)$$

Ya que el resto de valores de \bar{c} no influyen en la función de transferencia, podemos asignar arbitrariamente el resto de sus valores como sigue

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} c_c & * & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

Lo que es igual a extender la fórmula como sigue:

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} d_l & 0_{n-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_c & * \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \gamma(\bar{E}) = \begin{bmatrix} d_l & 0_{n-l} \end{bmatrix} \bar{Q}^{-1} \gamma(\bar{E}). \quad (6.10)$$

De (6.9), sabemos que la función de transferencia es

$$\hat{g}(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\det(\tau I - \bar{E}_c)}.$$

Es claro que el polinomio característico de \bar{E} y \bar{E}_c están relacionados por

$$\det(\tau I - \bar{E}) = \tau^{n-l} \det(\tau I - \bar{E}_c),$$

donde $\det(\tau I - \bar{E}_c) = \tau^l + e_{l-1}\tau^{l-1} + \dots + e_1\tau + e_0$ corresponde a los l modos controlables y el término τ^{n-l} corresponde a los modos no controlables, los cuales están en cero (ver el Teorema 34). Entonces tenemos

$$\hat{g}(\tau) = \frac{\tau^{n-l}\gamma(\tau)}{\det(\tau I - \bar{E})} = \frac{\tau^{n-1-z}\gamma^f(\tau)}{\det(\tau I - \bar{E})}.$$

Para el caso general, sin asumir la forma canónica controlable/no controlable de Kalman, considere una transformación de similitud inversa $\bar{\xi} = Q^{-1}\xi$. Ya que $E = Q\bar{E}Q^{-1}$ y $b = Q\bar{b}$, se tiene

$$\bar{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (6.11)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{b} & \bar{E}\bar{b} & \dots & \bar{E}^{l-1}\bar{b} & \bar{q}_l & \dots & \bar{q}_n \end{bmatrix}^{-1} \quad (6.12)$$

$$= \begin{bmatrix} Q^{-1}b & Q^{-1}Eb & \dots & Q^{-1}E^{l-1}b & Q^{-1}q_l & \dots & Q^{-1}q_n \end{bmatrix}^{-1} \quad (6.13)$$

$$= QQ^{-1}. \quad (6.14)$$

Debido a que $c = \bar{c}Q^{-1}$ y $\gamma(\bar{E}) = Q^{-1}\gamma(E)Q$, tenemos

$$c = \begin{bmatrix} d_l & 0_{n-l} \end{bmatrix} \bar{Q}^{-1}Q^{-1}\gamma(E)QQ^{-1} = \begin{bmatrix} d_l & 0_{n-l} \end{bmatrix} Q^{-1}\gamma(E). \quad (6.15)$$

Con lo cual recuperamos la ecuación (6.3).

De la ecuación (6.7), la función de transferencia del sistema (6.4) es

$$\hat{g}(\tau) = \frac{\tau^{n-1-z}\gamma^f(\tau)}{\det(\tau I - E)}.$$

De la ecuación (2.49), del Teorema 38, la función de transferencia del sistema (6.1) es

$$g(\pi^{-1}(\tau)) = \frac{\tau^{n-z}\gamma^f(\tau)}{\det(\tau I - E)}.$$

Y de la ecuación (6.2), tenemos

$$g(\pi^{-1}(\tau)) = \frac{\tau^{n-z} (\tau^z (\eta_d \circ \pi^{-1}(\tau)))}{\det(\tau I - E)} = \frac{\tau^n (\eta_d \circ \pi^{-1}(\tau))}{\det(\tau I - E)}.$$

Sustituyendo $I = \mu E - A$, obtenemos

$$g(\pi^{-1}(\tau)) = \frac{\tau^n (\eta_d \circ \pi^{-1}(\tau))}{\det(\tau(\mu E - A) - E)} = \frac{\tau^n (\eta_d \circ \pi^{-1}(\tau))}{\tau^n \det((\mu - \frac{1}{\tau})E - A)}.$$

Debido a que $s = \pi^{-1}(\tau) = \mu - \frac{1}{\tau}$, tenemos

$$g(s) = \frac{\eta^f(s)}{\det(sE - A)} = \frac{\eta^f(s)}{\delta(s)},$$

como se desea probar.

Comentario 49 Usando la fórmula (6.3), del Teorema 48, es posible elegir la salida de un sistema implícito, regular, de una entrada de tal manera que el sistema es de grado relativo estrictamente negativo (si z se puede elegir de tal manera que $z > n_1$), igual a cero (si z se puede elegir de tal manera que $z = n_1$), más aun, de grado relativo estrictamente positivo (si m se puede elegir de tal manera que $z < n_1$). En el último caso, el grado relativo del sistema es $r = n_1 - z > 0$. En la siguiente sección estudiamos el problema de estabilización por retroalimentación de estado en sistemas implícitos con grado relativo estrictamente positivo respecto a la salida, compatible con ésta última siendo idénticamente cero.

6.3. Estabilización asintótica

Considere un sistema implícito dado en la forma (2.51), la cual es posible obtener para el sistema implícito (6.1) bajo transformaciones de equivalencia externa, con la salida definida de tal manera que el sistema tiene grado relativo estrictamente positivo respecto a la salida. De la proposición 39, el subsistema (2.51a)-(2.51c) es un sistema explícito de dimensión n_1 que preserva la función de transferencia. Queremos encontrar una retroalimentación de estado que estabilice el sistema cuando la salida es idénticamente cero. En esta sección aplicamos resultados teóricos conocidos de sistemas explícitos [Isidori, 1995; Terrell, 2009] para resolver el problema planteado.

Olvidándonos por un momento del subsistema (2.51b), considere el sistema explícito (2.51a)-(2.51c). Ya que $g(s)$ tiene grado relativo $r > 0$, los vectores $c_1, c_1 A_{11}, \dots, c_1 A_{11}^{r-1}$ son linealmente independientes. Si $r < n_1$, entonces es posible encontrar $n_1 - r$ vectores fila linealmente independientes para contruir una matriz $B_1^\perp \in \mathbb{R}^{(n_1-r) \times n_1}$ tal que $B_1^\perp b_1 = 0$.

Entonces podemos definir la siguiente transformación de coordenadas para el subsistema (2.51a)-(2.51c)

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \Phi_1 x_1(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_1 A_{11}^{r-1} \\ B_1^\perp \end{bmatrix} x_1(t).$$

Es posible definir, trivialmente, una transformación de coordenadas para el sistema completo de la forma

$$\Phi_m \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

bajo la cual el subsistema de dimensión n_1 (2.51a)-(2.51c) queda de la forma [Isidori, 1995; Terrell, 2009]

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r-1}(t) \\ \dot{\xi}_r(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_r(t) \\ c_1 A_{11}^r x_1(t) \\ A_n \eta(t) + b_n \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1 A_{11}^{r-1} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (6.17a)$$

$$y(t) = \xi_1(t). \quad (6.17b)$$

Haciendo $u(t) = u_{zd}(t) + u_s(t)$ en el sistema (6.17), donde

$$u_{zd}(t) = \frac{c_1 A_{11}^r x_1(t)}{c_1 A_{11}^{r-1} b_1}$$

es la única entrada capaz de mantener la salida (6.17b) igual cero para toda t (véase la Subsección 2.1.7), el sistema implícito en lazo cerrado en las nuevas coordenadas es

$$\dot{\xi}(t) = N_r \xi(t) + b_{s1} u_s(t), \quad (6.18a)$$

$$\dot{\eta}(t) = A_n \eta(t) + b_{s2} \xi(t), \quad (6.18b)$$

$$N_q \dot{x}_2(t) = A_{22} x_2(t) + b_{f1} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + b_{f2} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + u_s(t), \quad (6.18c)$$

$$y(t) = \xi_1(t), \quad (6.18d)$$

donde N_r es una matriz nilpotente de dimensión $r \times r$ con índice de nilpotencia r (contiene unos en la primer superdiagonal y ceros en todos sus demás elementos), $b_{s1}^T = d_r$, $b_{f1} = (A_{21} - E_{21} A_{11}) \Phi^{-1}$ y $b_{f2} = (b_2 - E_{21} b_1) \frac{c_1 A_{11}^r \Phi^{-1}}{c_1 A_{11}^{r-1} b_1}$.

Si $u_s(t)$ lleva $\xi(t)$ asintóticamente a cero, entonces el subsistema (6.18b) se ve reducido al subsistema, de dimensión $n_1 - r$

$$\dot{\eta}(t) = A_n \eta(t), \quad (6.19)$$

el cual en sistemas explícitos es llamado subsistema de dinámica cero o simplemente dinámica cero [Isidori, 1995; Terrell, 2009]. Es claro que este subsistema es asintóticamente estable si y sólo si A_n es Hurwitz. Dado que los eigenvalores de A_n coinciden con los ceros de la función de transferencia del subsistema explícito (2.51a)-(2.51c) y por lo tanto del sistema implícito original, entonces esta dinámica es asintóticamente estable si y sólo si $g(s)$ no tiene ceros en $\bar{\mathbb{C}}^+$.

Proposición 50 (*Estabilización asintótica por retroalimentación de estado*) Considere el sistema implícito reducido (6.18) del sistema (6.1). Si la dinámica cero (6.19) es asintóticamente estable, esto es, A_n es Hurwitz, entonces el sistema implícito (6.18) es estabilizado asintóticamente por la retroalimentación de estado $u_s(t) = -K_s \xi(t)$ si es posible elegir K_s de tal manera que $(N_n - b_{s1} K_s)$ es Hurwitz.

La prueba de la Proposición 50 sigue de resultados sobre estabilidad asintótica en sistemas explícitos en cascada y de la solución del subsistema (2.43) (de la forma de Weierstrass). Se sabe que, si el sistema (6.19) es asintóticamente estable, entonces (6.18a)-(6.18b) se estabiliza asintóticamente mediante $u_s(t) = -K_s \xi(t)$ cuando $(N_n - b_{s1} K_s)$ es Hurwitz [Isidori, 1995; Terrell, 2009]. Por lo que, si $\xi(t)$ y $\eta(t)$ tienden asintóticamente a cero, entonces (6.18c) se reduce a $N_q \dot{x}_2(t) = A_{22} x_2(t) + u_f(t)$, con $u_f(t)$ en función de $(\xi(t), \eta(t))$. Debido a que N_q es nilpotente con índice de nilpotencia q y A_{22} es invertible, premultiplicando por A_{22} ambos lados de la ecuación, el subsistema (6.18c) es estrictamente equivalente al subsistema (2.39b) con solución (2.43). Debido a que $u_f(t)$ tiende a cero asintóticamente y dada la solución (2.43), entonces $x_2(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. De aquí que el sistema implícito reducido (6.18) es asintóticamente estabilizado por retroalimentación de estado.

6.3.1. Ejemplo

Considere el sistema implícito

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t), \quad (6.20a)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_2(t), \quad (6.20b)$$

$$x_3(t) = u(t). \quad (6.20c)$$

Este sistema implícito tiene la forma(6.1a) con

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que $\det(sE - A) \equiv 1$, entonces este sistema implícito es regular con $n_1 = 0$ y $n_2 = 3$, y más aun tiene la forma (2.39b) con índice de nilpotencia $q = 3$. Ya que $\text{rank} \begin{bmatrix} E & b \end{bmatrix} = 3$, el sistema implícito (6.1a) es C-controlable. Entonces es posible asignar $\text{rank} \bar{E} = 2$ polos finitos por medio de una retroalimentación de estado. Podemos elegir por ejemplo $u(t) = -Kx(t) + u_2(t)$ con $K = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, para obtener el sistema implícito en lazo cerrado

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(t), \quad (6.21)$$

con polinomio característico $\det(sE - (A + BK)) = s^2 + 3s + 2$. Entonces, en el sistema en lazo cerrado $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ y $q = 1$. Eligiendo L y R como en (2.40) para satisfacer (2.41) con $\mu = 0$, obtenemos un sistema implícito en forma estándar (2.42) con

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar $\begin{bmatrix} \bar{b} & \bar{E}\bar{b} & \bar{E}^2\bar{b} \end{bmatrix} = l = 3$. Ya que $q = 1$ en el sistema en lazo cerrado, tenemos que $j = 0$. Ahora, queremos elegir una salida de la forma (6.1b) para una dinámica cero con un eigenvalor $z_1 = -1,5$. Aplicando la Fórmula (6.3) con $\eta^f(s) = s + 1,5$, esto es, con

$$\gamma(\tau) = \tau^2 \left(-\frac{1}{\tau} + 1,5 \right) = \tau(1,5\tau - 1),$$

obtenemos

$$c = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el sistema (6.21) es de grado relativo uno con respecto a la salida $\sigma(t) = cx$, lo cual se verifica mediante la siguiente función de transferencia

$$g(s) = c(sE - A)^{-1}b = \frac{2(s + 1,5)}{(s^2 + 3s + 2)}.$$

Mediante una transformación de equivalencia externa (véase la Proposición 39) con las matrices unitarias (ortogonales)

$$L_{EE} = \begin{bmatrix} 0 & -0,7 & 1,0 \\ 0 & -3,0 & 1,7 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad R_{EE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0,52 & 0,85 & 0 \\ 0,85 & 0,52 & 0 \end{bmatrix},$$

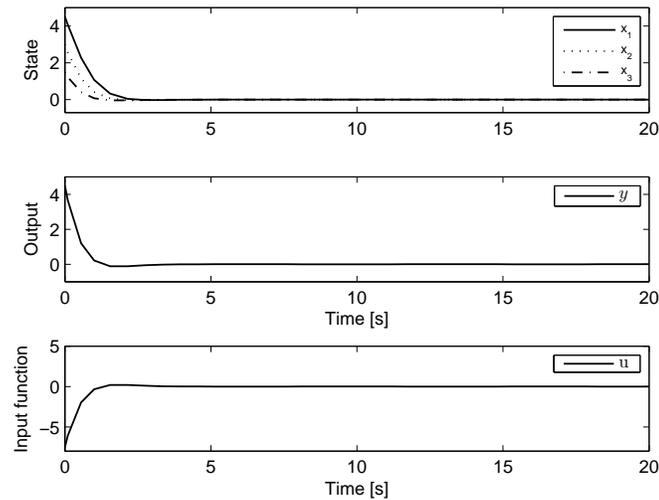


Fig. 6.3.1: Dinámica cero y estabilización. Sistema implícito en cascada (6.18). Estado, salida y señal de control

obtenemos un sistema implícito externamente equivalente de la forma (2.51), con

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1,3 & -0,1 \\ -3,1 & -1,7 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0,52 \\ 0,85 \end{bmatrix}, \quad b_2 = -1, \\ c_1 = \begin{bmatrix} 3,6 & 0,15 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = 0.$$

Para el cual se tiene que

$$g(s) = c_1(sI - A_{11})^{-1}b_1 = \frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2}.$$

Entonces, el control que lleva la salida en cero y estabiliza asintóticamente el sistema en cascada de la forma (6.18) es

$$u_2(t) = -\frac{c_1 A_{11} x_1 + K \xi(t)}{c_1 b_1},$$

con $K = 2$. La Figura 7.2.1 muestra los resultados obtenidos para una condición inicial $\begin{bmatrix} x_2(0) & x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$. Se observa que el estado y la salida tienden asintóticamente a cero.

Capítulo 7

Control por MDOS en sistemas implícitos C-controlables

En este capítulo mostramos una aplicación de los resultados obtenidos en el Capítulo 6 en el área del control por modos deslizantes para sistemas implícitos, asumiendo C-controlabilidad.

7.1. Planteamiento del problema

Considere el sistema implícito LIT perturbado de una entrada

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t); \quad v(t) = u(t) + w(t), \quad (7.1)$$

donde los vectores $x(t)$, $u(t)$, y las matrices del sistema se definen como en el sistema implícito no perturbado (6.1) del Capítulo 6, mientras que $w(t)$ representa la perturbación desconocida, pero acotada.

Considere por un momento un sistema implícito 7.1 tiene índice $q \geq 1$, esto significa que una entrada admisible debe pertenecer al conjunto de las funciones j veces continuamente diferenciables, con $0 \leq j \leq q - 1$. Suponga que, con el objetivo de aplicar control por MD para llevar x a cero en tiempo finito a pesar de la presencia de la perturbación $w(t)$, diseñamos una variable de deslizamiento de la forma 6.1b tal que el sistema es de grado relativo positivo con respecto a la salida 6.1b. En este caso, la idea de desarrollar controladores por MDOS que provean una señal de control $u \in \mathcal{C}^j$ tiene sentido, dado los requerimientos por parte de la entrada para la existencia y unicidad de la solución del sistema implícito perturbado. Sin embargo, MDOS por ahora cuenta con controladores que proveen señales absolutamente continuas.

Hecho 51 *El sistema implícito (7.1) es C-controlable (ver la definición 26 y el Teorema 30).*

7.2. Metodología del control por modos deslizantes de orden superior en sistemas implícitos C-controlables

Respecto a los sistemas implícitos con índice $q = 1$, lo cual siempre es posible asumiendo el Hecho 51, proponemos la siguiente metodología del control por MDOS:

1. Diseño de la variable de deslizamiento. Aplicar la Fórmula (6.3) del Teorema 48 para grado relativo $r = 1$ ($r = 2$) y polinomio deseado de orden $n_1 - 1$ ($n_1 - 2$), cuyas raíces son los eigenvalores deseados de la dinámica deslizante, la cual se elige estable.
2. Diseño de la ley de control. Encontrar un sistema de la forma (2.51) externamente equivalente al sistema implícito (7.1) y diseñar una ley de control como sigue

$$u(t) = u_n(t) + u_p(t) = -\frac{c_1 A_{11}^r x_1(t) + f(\sigma)}{c_1 A^{r-1} b_1}, \quad (7.2)$$

donde $f(\sigma) \in \mathcal{C}^0$ es un controlador STSO (STTO).

7.2.1. Ejemplo

Considere el sistema implícito perturbado

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) \quad (7.3a)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_2(t) \quad (7.3b)$$

$$x_3(t) = u(t) + w(t). \quad (7.3c)$$

Este sistema para $w(t) = 0$ coincide con el sistema implícito no perturbado (6.20).

Modos deslizantes de segundo orden

Para llevar $x(t)$ a cero a pesar del efecto de la perturbación $w(t)$, queremos aplicar un control por MDOS. Usamos los resultados obtenidos en el ejemplo de la Subsección 6.3.1 para el paso 1 de la metodología propuesta en este capítulo. Para el paso 2 proponemos la ley de control

$$u(t)_2 = u_{zd} + u_p(t) = -\frac{c_1 A_1 x_1(t) + k_3 |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + \int_0^t k_4 \text{sign}(\sigma(\tau)) d\tau}{c_1 b_1},$$

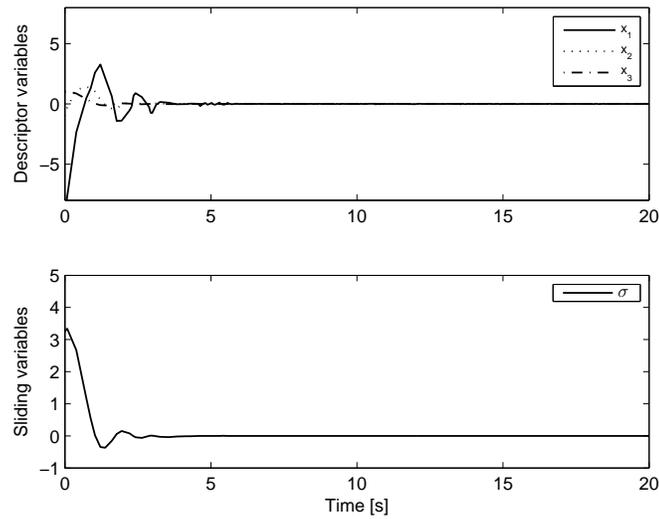


Fig. 7.2.1: MDSO. STSO. Sistema implícito (7.3). Estado y variable de deslizamiento.

donde $u_p(t)$ corresponde a un controlador Super-Twisting de segundo orden (2.31), con $\sigma(t) = c_1 x_1(t)$ y las ganancias del STSO son $k_3 = 7$, $k_4 = 2$. Las Figuras 7.2.1 y 7.2.2 muestran los resultados de simulación para una condición inicial $\begin{bmatrix} x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ y una perturbación $\omega(t) = \sin(t)$. Ya que $\dot{w}(t) = \cos(t)$, podemos asumir $\|\dot{w}(t)\| \leq \bar{\omega}_1 = 1$. Se observa que el estado y la variable de deslizamiento alcanzan el origen a pesar de la presencia de la perturbación $w(t)$.

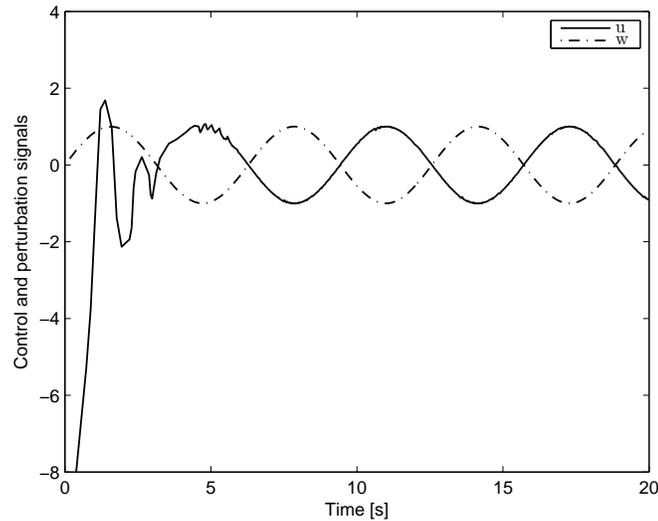


Fig. 7.2.2: MDSO. STSO. Sistema implícito (7.3). Acción de control y perturbación.

Modos deslizantes de tercer orden

Con el objetivo de aplicar un MDTO, aplicamos la Fórmula (6.3) con un polinomio $\gamma^f(s) = 1$, i.e., $\gamma(\tau) = \tau^2$, con lo cual obtenemos

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dando como resultado la función de transferencia

$$g(s) = c(sE - A)^{-1}b = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}.$$

Usando las mismas matrices L_{EE} y R_{EE} , obtenemos las mismas matrices para el sistema externamente equivalente, con la única diferencia en

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1,7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para asegurar un MDTO con $j = 0$ y $r = 2$, proponemos una ley de control

$$u(t) = u_{zd}(t) + u_p(t) = - \frac{c_1 A_{11}^2 x_1(t) + k_5 |\phi|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\phi) + \int_0^t k_7 \text{sign}(\phi) d\tau}{c_1 A_{11} b_1},$$

donde $u_p(t)$ corresponde a un controlador Super-Twisting de tercer orden (2.33) [Franco, 2014; Kamal et al., 2014], con $\sigma(t) = c_1 x_1(t)$, $\dot{\sigma}(t) = c_1 A_{11} x_1(t)$, y las ganancias del STTO $k_5 = 3,9$, $k_6 = 0,1$ y $k_7 = 1,9$. Las Figuras 7.2.3 y 7.2.4 muestran los resultados

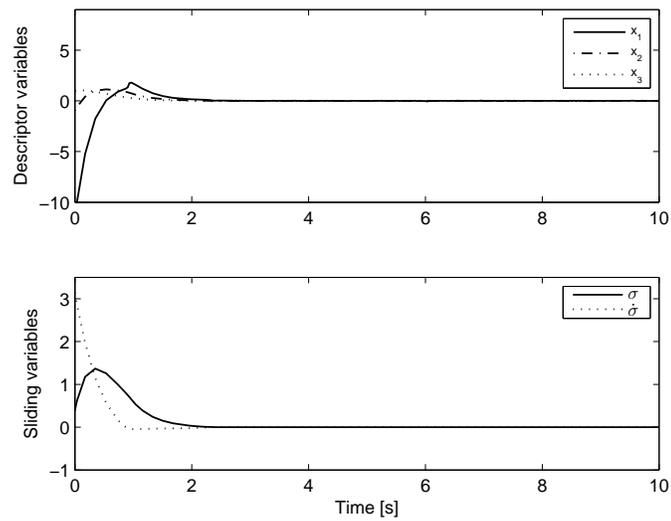


Fig. 7.2.3: MDTO. STTO. Sistema implícito (7.3). Estado y variable de deslizamiento.

de simulación para una condición inicial y una perturbación como en el MDSO anterior. Se observa nuevamente que el estado y la variable de deslizamiento alcanzan el origen irrespectivamente de la perturbación $w(t)$.

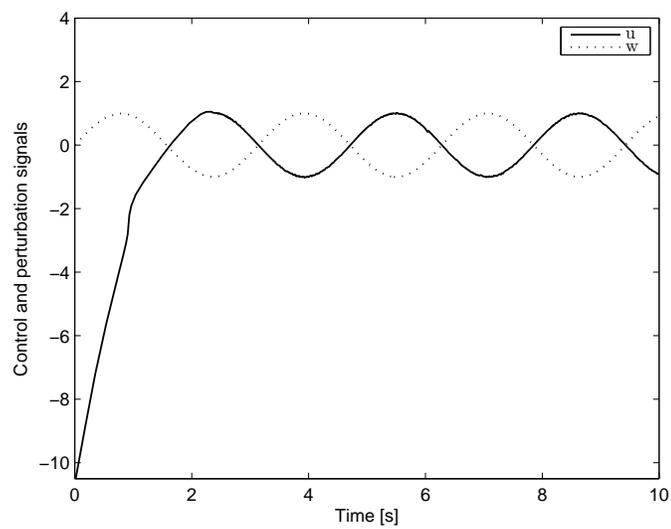


Fig. 7.2.4: MDTO. STTO. Sistema implícito (7.3). Acción de control y perturbación.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajos futuros

8.1. Conclusiones

1. Mediante el control por modos deslizantes se logra estabilidad robusta al forzar una restricción algebraica en los sistemas explícitos. Por ello la aplicación del control por modos deslizantes en el problema de estabilización robusta en sistemas que naturalmente incluyen restricciones algebraicas tiene sentido.
2. Los sistemas implícitos de alto índice requieren de una entrada suficientemente suave para garantizar la existencia y unicidad de la solución. Hoy en día, los controladores por modos deslizantes se encuentran limitados en ese aspecto, ya que fuerzan una restricción algebraica por medio de una señal discontinua o absolutamente continua (en el caso del controlador ST). Esto motiva al desarrollo de controladores por modos deslizantes que, con la finalidad de contribuir en la robuztes de sistemas implícitos, provean una señal de control con cierto grado de diferenciabilidad.
3. Ya que una parte del estado del sistema implícito depende directamente de la entrada y derivadas de la entrada, el uso de un controlador por modos deslizantes clásico para resolver el problema de estabilización robusta queda descartado. Esto motiva el uso de controladores por MDOS que alivien el efecto de castaño.
4. Para sistemas implícitos con índice igual a uno fue posible proponer una metodología del control por modos deslizantes de orden superior mediante el uso del controlador ST, el cual proporciona una señal absolutamente continua reduciendo el efecto de castaño.
5. No es posible proporcionar una entrada de control con cierto grado de diferenciabilidad mediante el uso del algoritmo Cuasi-continuo de orden arbitrario con integra-

dores en cascada, ya que este requiere de las derivadas de alto orden de la variable de deslizamiento. El camino entonces prescindir de las derivadas de alto orden, tal como lo hace el algoritmo Super-Twisting.

6. Sistemas que incluyen naturalmente restricciones algebraicas los podemos encontrar en sistemas a gran escala interconectados, circuitos eléctricos, robots con restricciones en el espacio de trabajo, sistemas propios (cuya salida depende directamente de la entrada), realizaciones de funciones de transferencia propias o impropias, entre otros.
7. El estudio de sistemas implícitos requiere de un estudio más profundo de la teoría de matrices, en comparación con el requerido para sistemas explícitos. Incrementar nuestro conocimiento de la teoría de matrices, y más propiamente de los sistemas implícitos, nos da herramientas para el análisis directo de las ecuaciones algebro-diferenciales con el objetivo de incrementar la velocidad de diseño y la habilidad de analizar sistemas más complejos.
8. En cuanto a resultados, primero hemos presentado una generalización de la fórmula de Ackermann y Utkin, la cual permite completar la metodología de diseño del control por modos deslizantes de orden superior. Con esta fórmula se facilita el diseño del controlador para grado relativo y dinámica deslizante deseada, según lo requiera la aplicación o el problema que se desarrolle.
9. Como criterio de diseño para elegir el orden del modo deslizante, hemos presentado una comparación de la exactitud alcanzada por las variables de deslizamiento cuando la señal de control es muestreada. De los resultados obtenidos mediante simulación, podemos concluir que a medida que incrementamos el orden del modo deslizante más compleja es la implementación del controlador, pero mayor exactitud se alcanza en la superficie de deslizamiento (cuando la señal de control es muestreada) y más simples son las ecuaciones de la dinámica deslizante.
10. Se verificó experimentalmente la fórmula de Ackermann y Utkin generalizada propuesta en el Capítulo 3. De lo que concluimos que, la fórmula propuesta facilita el diseño de la variable de deslizamiento y evita el uso de un diferenciador para estimar las derivadas de alto orden necesarias para la implementación del modo deslizante de orden superior.
11. Hemos propuesto una superficie de deslizamiento integral para sistemas implícitos, asumiendo regularidad y estabilizabilidad, que preserva las características de superficies de deslizamiento integrales para sistemas en explícitos (e.g., dependencia del

estado y de la condición inicial, y solución al problema de fase de alcance). Para usar la fórmula no se requiere del cálculo de la forma de Weierstrass o Cuasi-Weierstrass del sistema.

12. Hemos presentado una fórmula para elegir una salida en sistemas implícitos, asumiendo regularidad y R-controlabilidad, de tal manera que el sistema es de grado relativo prescrito y ceros deseados. La fórmula propuesta no requiere de cálculo de la forma de Weierstrass o de Cuasi-Weierstrass del sistema.
13. Se mostró que, usando la fórmula a la que se hace referencia en el punto 12 para elegir una salida en sistemas implícitos, es posible diseñar una salida para grado relativo estrictamente positivo y dinámica cero deseada. Para este caso se presentó una forma normal del sistema original compatible con la salida idénticamente cero, donde es posible abordar, fácilmente, el problema de estabilidad asintótica por retroalimentación de estado.
14. Se propone una metodología del control por modos deslizantes de orden superior, sumiendo C-controlabilidad, en sistemas implícitos. Para la parte del diseño de la variable de deslizamiento se propone usar la fórmula a la que se hace referencia en el punto 13. Para la parte del diseño del controlador se propone usar un controlador de la familia Super-Twisting. Mostramos resultados de simulación usando los controladores Super-Twisting de segundo orden y de tercer orden.

8.2. Trabajos futuros

Como trabajos futuros, consideremos lo siguiente problemas:

1. Regularización. En el caso de descripciones implícitas (el abanico es singular), proponer una retroalimentación por salida tal que la descripción en lazo cerrado es un sistema implícito (abanico regular). Para más información consultar [Duan, 2010, chap. 5].
2. Diseño por salida. En todos los problemas abordados en esta tesis se asume que el estado está disponible para diseñar la variable de deslizamiento o para retroalimentación de estado. Es posible relajar esta condición y asumir que sólo la salida está disponible. Para más información consultar [Edwards and Spurgeon, 1995; Shtessel, 1997; Isidori, 1995; Terrell, 2009].
3. Diseño por salida cuando la salida es tal que el sistema es de fase no mínima o débilmente mínima. Para más información consultar [Ríos et al., 2014].
4. Extender los resultados obtenidos a sistemas implícitos no lineales de índice uno.
5. Desarrollar controladores por modos deslizantes para sistemas implícitos lineales de alto índice.
6. Formas normales de sistemas implícitos no lineales de alto índice.
7. Considerar los problemas de observación/identificación de entradas desconocidas en descripciones implícitas mediante observación por MDOS. Para más información consultar [de Loza et al., 2013; Shtessel et al., 2013; Duan, 2010].

Apéndice A

Algebra lineal

En este apartado, introducimos algunas definiciones y conceptos básicos en el estudio de polinomios de matrices (véase [Gantmacher, 1964] para más detalles).

Definición 52 [Gantmacher, 1964] Una matriz polinomial, es una matriz rectangular $A(\lambda)$ cuyos elementos son polinomios en λ

$$A(\lambda) = \|a_{ik}\| = \left\| a_{ik}^{(0)}\lambda^l + a_{ik}^{(1)}\lambda^{l-1} + \cdots + a_{ik}^{(l)} \right\|, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n.$$

donde l es el grado mayor de los polinomios $a_{ik}(\lambda)$.

Definición 53 [Gantmacher, 1964] Un polinomio de matrices $A(\lambda)$ es un polinomio en λ con coeficientes matriciales:

$$A(\lambda) = A_0\lambda^l + A_1\lambda^{l-1} + \cdots + A_{l-1}\lambda + A_l$$

donde $A_j = \|a_{ik}^{(j)}\|$ para $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, l$.

A.1. Operaciones elementales y equivalencia

Sobre un polinomio de matrices $A(\lambda)$ se pueden aplicar las siguientes operaciones elementales:

1. Multiplicación por cualquier fila (columna) por un número $c \neq 0$.
2. Suma de cualquier fila (columna) con cualquier otra fila (columna), multiplicada por un polinomio arbitrario $b(\lambda)$.
3. Intercambio de filas (columnas).

Definición 54 [Gantmacher, 1964] Dos matrices polinomiales $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ son equivalentes si

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda),$$

donde $L(\lambda)$ es el producto L_i , $i = 1, \dots, p$, operaciones elementales por la izquierda y $R(\lambda)$ corresponde a las operaciones elementales por la derecha. De tal manera que tenemos $L(\lambda) = L_p L_{p-1} \dots L_1$ y análogamente para $R(\lambda)$.

A.2. Polinomios invariantes y divisores elementales

Sea $A(\lambda)$ una matriz polinomial de rango r , i.e., la matriz tiene menores de orden r que no son idénticamente cero, y todos los menores de orden mayor que r son idénticamente cero en λ . Sea $D_j(\lambda)$ el máximo común divisor de todos los menores de orden j en $A(\lambda)$ ($j = 1, \dots, r$). Entonces, en la serie $D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \dots, D_1(\lambda), D_0(\lambda) \equiv 1$, cada polinomio es divisible por el anterior inmediato.

Definición 55 [Gantmacher, 1964] Los polinomios $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ definidos como

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, \quad i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \dots, \quad i_r = D_1(\lambda),$$

son llamados los polinomios invariantes de la matriz rectangular $A(\lambda)$.

Los polinomios invariantes $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ pueden representarse por factores irreducibles sobre un campo F como :

$$i_1 = (\phi_1(\lambda))^{a_1} (\phi_2(\lambda))^{a_2} \dots (\phi_s(\lambda))^{a_s} \quad (\text{A.1})$$

$$i_2 = (\phi_1(\lambda))^{b_1} (\phi_2(\lambda))^{b_2} \dots (\phi_s(\lambda))^{b_s} \quad (\text{A.2})$$

$$\vdots = \vdots \quad (\text{A.3})$$

$$i_r = (\phi_1(\lambda))^{r_1} (\phi_2(\lambda))^{r_2} \dots (\phi_s(\lambda))^{r_s} \quad (\text{A.4})$$

para $a_k \geq b_k \geq \dots \geq r_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, s$. Aquí $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \dots, \phi_s(\lambda)$ son todos los factores irreducible distintos sobre el campo F .

Definición 56 [Gantmacher, 1964] Todas las potencias en $\phi_1(\lambda)^{a_1}, \dots, \phi_s(\lambda)^{r_s}$, distintas de 1, son llamados los divisores elementales de la matriz $A(\lambda)$ en el campo F .

A.2.1. Equivalencia de binomios matriciales

Sean $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ dos binomios de matrices, también llamados abanicos, de la forma

$$A(\lambda) = \lambda A_0 + A_1, \quad B(\lambda) = \lambda B_0 + B_1. \quad (\text{A.5})$$

Teorema 57 [Gantmacher, 1964] *Si dos binomios de matrices de la forma (A.7), con $\det(A_0) \neq 0$ y $\det(B_0) \neq 0$, son equivalentes, entonces son estrictamente equivalentes, i.e., en la relación de igualdad*

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda), \quad (\text{A.6})$$

las matrices $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ pueden ser reemplazadas por matrices no singulares constantes P y Q .

Teorema 58 [Gantmacher, 1964] *Dos abanicos regulares de la forma (A.7), con $\det(A_0) \neq 0$ y $\det(B_0) \neq 0$, son estrictamente equivalentes si tienen los mismos divisores elementales en el campo F .*

De acuerdo con todo lo anterior es posible tener dos abanicos regulares de la forma (A.7) tal que $\det(A_0) = 0$ (incluso con $\det(A_0) = \det(B_0) = 0$).

Considere los siguientes abanicos regulares

$$\lambda A_0 + A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda B_0 + B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Es claro que cada abanico tiene solo un divisor elemental finito $\lambda - 1$. Pero estos abanicos no son estrictamente equivalentes ya que A_0 y B_0 tienen rangos 2 y 1, respectivamente.

Teorema 59 [Gantmacher, 1964] *Dos abanicos regulares $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ son estrictamente equivalentes si y sólo si tienen los mismos divisores elementales finitos e infinitos.*

Comentario 60 *En el caso de abanicos singulares véase [Gantmacher, 1964].*

A.2.2. Forma de Weierstrass

Sean

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{p_s}, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_s = n_1, \quad (\text{A.8a})$$

$$(\alpha_1)^{q_1}, (\alpha_1)^{q_2}, \dots, (\alpha_1)^{q_f}, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_f = n_2. \quad (\text{A.8b})$$

los divisores elementales finitos e infinitos del abanico regular $\lambda A_0 + A_1$. La matriz diagonal a bloques

$$J = \{J_1, J_2, \dots, J_s\},$$

corresponde a los divisores elementales finitos (A.8a), y la matriz diagonal a bloques

$$N_J = \{N_{J_1}, N_{J_2}, \dots, N_{J_f}\},$$

corresponde a los divisores elementales infinitos (A.8b).

Teorema 61 [Gantmacher, 1964] *Cualquier abanico regular puede ser reducido (bajo una transformación estrictamente equivalente) a la siguiente forma canónica*

$$\{\lambda I + J, \lambda N + I\} = \{\lambda I + J_1, \dots, \lambda I + J_s, \lambda N_{J_1} + I, \dots, \lambda N_{J_f} + I\}, \quad (\text{A.9})$$

donde los bloques $\lambda I + J_i$ corresponden a los bloques de Jordan de los divisores elementales finitos (A.8a) y los bloques $\lambda N_{J_i} + I$ corresponden a los bloques de Jordan de los divisores elementales infinitos (A.8b).

La matriz diagonal a bloques (A.9) es llamada la forma de Weierstrass del abanico regular $\lambda A_0 + A_1$ con divisores elementales (A.8), donde

$$N_{J_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz de dimensión q_i correspondiente al divisor elemental infinito $\alpha_1^{q_i}$ y J_i tiene la forma conocida para matrices (polinomio de matrices de grado cero).

Considere el abanico $\lambda A_0 + A_1$, de dimensión $n \times n$, con $\det A_0 = 0$. Sea $\lambda = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$, del Teorema 61 el abanico $\alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1$ es estrictamente equivalente a

$$\{\alpha_0 I + \alpha_1 J, \alpha_0 N + \alpha_1 I\}.$$

El bloque $\alpha_0 I + \alpha_1 J$ pierde rango para $\lambda = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$, o para $\lambda = \alpha_0$ y $\alpha_1 = 1$. Mientras que, el bloque $\alpha_0 N + \alpha_1 I$ pierde rango para $\alpha_1 = 0$, entonces $\lambda = \infty$, o cuando $\alpha_0 = 1$ y α_1 es un eigenvalor de la matriz N , ya que N es a matriz nilpotente $\alpha_1 = 0$ es un eigenvalor de N con multiplicidad algebraica n_2 .

Bibliografía

- Ackermann, J. and Utkin, V. (1998). Sliding mode control design based on ackermann's formula. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2):234–237.
- Aplevich, J. (1991). *Implicit linear systems*. Lecture notes in control and information sciences. Springer-Verlag.
- Bacciotti, A. and Rosier, L. (2001). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer-Verlag, New York, 2 edition.
- Berger, T., Ilchmann, A., and Reis, T. (2012a). Zero dynamics and funnel control of linear differential-algebraic systems. *Mathematics of Control, Signals & Systems*, 24(3):219–263.
- Berger, T., Ilchmann, A., and Trenn, S. (2012b). The quasi-weierstrasform for regular matrix pencils. *Linear Algebra and its Applications*, 436(10):4052–4069.
- Bhat, S. P. and Bernstein, D. S. (2005). Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Math. Control Signals Systems*, 17(2):101–127.
- Bonilla, M. and Malabre, M. (1997). Structural matrix minimization algorithm for implicit descriptions. *Automatica*, 33(4):705–710.
- Brenan, K., Campbell, S., and Petzold., L. (1995). *The Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Campbell, S. L. (1980). *Singular Systems of Differential Equations*. Pitman Publishing Co, London.
- Campbell, S. L. (1982). *Singular Systems of Differential Equations II*. Pitman Publishing Co, New York.

- Campbell, S. L. and Rose, N. J. (1982). A second order singular linear system arising in electric power systems analysis. *International Journal of Systems Science*, 13(1):101–108.
- Castaños, F. and Fridman, L. (2006). Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5):853–858.
- Castaños, F., Hernández, D., and Fridman, L. (2014). Integral sliding mode control for linear time-invariant implicit descriptions. *Automatica*, 50(3):971–975.
- Castaños, F., Hernández-Zárate, D., and Fridman, L. (2012). Integral sliding-mode control for linear time-invariant implicit descriptions. In *Proc. conference on decision and control*, pages 6442–6447, Maui, Hawaii.
- Chen, C.-T. (1995). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Inc.
- Cobb, D. (1984). Controllability, observability and duality in singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(12):1076–1082.
- Dai, L. (1989). *Singular Control Systems*. Springer-Verlag.
- de Loza, A. F., Bejarano, F. J., and Fridman, L. (2013). Unmatched uncertainties compensation based on high-order sliding mode observation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 23(7):754–764.
- Draženović, B. (1969). The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, 5(3):287–295.
- Draženović, B., Milosavljević, C., Veselić, B., and Gligić, V. (2012). Comprehensive approach to sliding subspace design in linear time invariant systems. In *Proc. of the Variable Structure Systems Workshop*, pages 473–478, Mumbai, India.
- Duan, G.-R. (2010). *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. Advances in Mechanics and Mathematics, New York.
- Edwards, C. and Spurgeon, S. K. (1995). Sliding mode stabilization of uncertain systems using only output information. *International Journal of Control*, 62(5):1129–1144.
- Fantoni, I. and Lozano, R. (2002). *Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer-Verlag, London.

- Filippov, A. F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Franco, H. (2014). Control por modos deslizantes de tercer orden para un helicóptero de prueba de tres grados de libertad. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Gantmacher, F. (1964). *The Theory of Matrices*, volume I and II. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI.
- Hernández, D., Castaños, F., and Fridman, L. (2013). Pole-placement in higher-order sliding-mode control. *ArXiv e-prints*.
- Hernández, D., Castaños, F., and Fridman, L. (2014). Pole-placement in higher-order sliding-mode control. In *Proc. of the International Federation of Automatic Control*, pages 1386–1391, Cape Town, South Africa.
- Hsu, L. and Chang, F. (1996). The generalized ackermann’s formula for singular systems. *Systems & Control Letters*, 27(2):117–123.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London U.K.
- Kamal, S., Chalanga, A., Moreno, J., Fridman, L., and Bandyopadhyay, B. (2014). Higher order super-twisting algorithm. In *Proc. of the Variable Structure Systems Workshop*, pages 1–5.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- Kuijper, M. and Schumacher, J. (1991). Minimality of descriptor representations under external equivalence. *Automatica*, 27(6):985–995.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6):1247–1263.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9/10):924–941.
- Levant, A. (2005a). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823–830.

- Levant, A. (2005b). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11):1812–1816.
- Levant, A. and Fridman, L. M. (2010). Accuracy of homogeneous sliding modes in the presence of fast actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(3):810–814.
- Lewis, F. L. (1986). A survey of linear singular systems. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 5(1):3–36.
- Luenberger, D. G. (1978). Time-invariant descriptor systems. *Automatica*, 14(5):473–480.
- Moreno, J. A. and Osorio, M. (2012). Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4):1035–1040.
- Nikoukhan, R., Willsky, A., and Levy, B. (1987). Boundary-value descriptor systems: well-posedness, reachability and observability. *International Journal of Control*, 46(5):1715–1737.
- Pérez, U. (2014). Métodos de diseño de superficies de deslizamiento para controladores por modos deslizantes de orden superior. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Poznyak, A., Fridman, L., and Bejarano, F. (2004). Mini-max integral sliding-mode control for multimodel linear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(1):97–102.
- Poznyak, A. S., Shtessel, Y., and Gallegos, C. (2003). Min-max sliding-mode control for multimodel linear time varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(12):2141–2150.
- QUANSER (2014). *3DOF Helicopter Reference Manual*.
- Ríos, H., Efimov, D., Dávila, J., Rassi, T., Fridman, L., and Zolghadri, A. (2014). Non-minimum phase switched systems: Hosm-based fault detection and fault identification via volterra integral equation. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, 28:13721397.
- Rosenbrock, H. H. (1974). Structural properties of linear dynamical systems. *International Journal of Control*, 20(2):191–202.
- Rosenbrock, H. H. and Pugh, A. C. (1974). Contributions to a hierarchical theory of systems. *International Journal of Control*, 19(5):845–867.

- Schumacher, J. (1988). Transformations of linear systems under external equivalence. *Linear Algebra and its Applications*, 102:1–33.
- Shtessel, Y. (1997). Nonlinear output tracking in conventional and dynamic sliding manifolds. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(9):1282–1286.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2013). *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser.
- Sira-Ramírez, H. (1988). Differential geometric methods in variable-structure control. *International Journal of Systems Science*, 48(4):1359–1390.
- Sira-Ramírez, H. (1990). Structure at infinity, zero dynamics and normal forms of systems undergoing sliding motions. *International Journal of Systems Science*, 21(4):665–674.
- Stewart, G. and Guang Sun, J. (1990). *Matrix Perturbation Theory*. Computer science and scientific computing. Academic Press.
- Stewart, G. W. (1972). On the sensitivity of the eigenvalue problem $Ax = \lambda Bx$. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 9(4):669–686.
- Terrell, W. (2009). *Stability and Stabilization: An Introduction*. Princeton University Press.
- Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Optimization and Control Problems*. Springer, New York.
- Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (1999). *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis, London, U.K.
- Utkin, V. and Shi, J. (1996). Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. In *Proc. Conference on Decision and Control*, pages 4591–4596, Kobe, Japan.
- Verghese, G. C., Lévy, B. C., and Kailath, T. (1981). A generalized state-space for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):811–831.
- Willems, J. (1983). Input-output and state-space representations of finite-dimensional linear time-invariant systems. *Linear Algebra and its Applications*, 50:581–608.
- Williams, R. and Lawrence, D. (2007). *Linear state-space control systems*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.
- Xu, S. and Lam, J. (2006). *Robust Control and Filtering of Singular Systems*. Springer-Verlag, Berlin.

Yip, E. and Sincovec, R. (1981). Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(3):702–707.