



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Sincronización de Sistemas Caóticos
Fraccionarios Inconmensurados**

Tesis

Que presenta

CLAUDIA ALEJANDRA PÉREZ PINACHO

Para Obtener el grado de
DOCTORA EN CIENCIAS

En la especialidad de
CONTROL AUTOMÁTICO

Director de Tesis
Dr. Rafael Martínez Guerra

Ciudad de México.

Agosto, 2018

Agradecimientos

A MI AMADO ESPOSO: Gracias por todo el amor y el apoyo que me has brindado, Quico, Max y Tú son la base de mi motivación día a día.

A MI PADRE: Gracias por estar siempre a mi lado, por tus consejos y enseñanzas. Gracias por confiar en mí y darme la oportunidad de culminar esta etapa.

A MI MADRE: Gracias por ser la amiga y compañera que me ha ayudado a crecer, gracias por estar conmigo en todo momento, por todo tu amor, gracias por estar pendiente de mí durante esta etapa.

A MI HERMANO: Porque estuviste ahí estos cuatro años apoyándome, por cada palabra de aliento, espero ser un buen ejemplo a seguir. Cumple todo lo que te propongas.

AL DR. RAFAEL MARTÍNEZ GUERRA: por su gran asesoría y dirección en este trabajo de investigación, gracias por la paciencia y los consejos brindados.

A TI ANA: Gracias por estar conmigo en una ciudad que no conocía, por todos estos años de amistad, sin ti habría tenido muchos momentos difíciles. Tú y tu familia son un tesoro para mí, los adoro.

AL CINVESTAV: por la fortaleza de trabajo que exige de nosotros sus alumnos y por los apoyos económicos brindados para congresos y estancias, de verdad, una excelente institución de calidad.

AL CONACYT: por el apoyo económico brindado a lo largo del programa de Doctorado.

Índice general

Resumen	xii
Abstract	xv
Introducción	xvii
1. Definiciones y Preliminares	1
1.1. Notación	1
1.2. Funciones especiales del cálculo fraccionario	1
1.2.1. Función gamma	1
1.2.2. Funciones de Mittag-Leffler	2
1.2.3. Regla de Leibniz	5
1.3. Operadores Fraccionarios	5
1.3.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville.	5
1.3.2. Derivada fraccionaria Riemann-Liouville.	6
1.3.3. Derivada fraccionaria de Caputo	8
1.3.4. Sistema lineales invariantes en el tiempo fraccionarios	8
2. Observador para Sistemas Fraccionarios Inconmensurados	11
2.1. Planteamiento del problema	12
2.2. Resultados Numéricos	18
2.2.1. Sistema de Rössler	18
2.2.2. Sistema de Chua-Hartley	21

2.2.3. Sistema Financiero	25
3. Sincronización generalizada de sistemas caóticos de orden fraccionario	29
3.1. Planteamiento del problema: caso conmensurado	30
3.1.1. Sincronización generalizada para sistemas caóticos fraccionarios con- mensurados	31
3.1.2. Resultado Numérico	37
3.2. Planteamiento del Problema en Fraccionario Inconmensurado	44
3.2.1. Conceptos Básicos	45
3.2.2. Sincronización generalizada para sistemas caóticos fraccionarios in- conmensurados (Primer Caso)	45
3.2.3. Análisis del problema	57
3.2.4. cuasi-Sincronización generalizada para sistemas caóticos fracciona- rios inconmensurados (Segundo Caso)	60
3.2.5. Resultados Numéricos	68
4. Sincronización Experimental de Sistemas Idénticos Acoplados por un Capacitor Fraccionario	81
4.1. Motivación	82
4.2. Planteamiento del Problema	87
4.2.1. Implementación Electrónica de Capacitores Fraccionarios	88
4.2.2. Modelo de los Circuitos de van der Pol acoplados	89
4.3. Implementación electrónica del Capacitor Fraccionario	92
4.3.1. Construcción del Capacitor Fraccionario	94
4.4. Experimentos en tiempo real	97
5. Conclusiones y Trabajo a Futuro	105
5.1. Conclusiones	105
5.2. Trabajo a Futuro	107
5.3. Publicaciones	108

Apéndices	112
A. Apéndice	112
A. Apéndices	113
A.1. Demostración de algunas propiedades de la función gamma	113
A.2. Ejemplo de la obtención de una derivada fraccionaria de Caputo	116
A.3. Solución de un sistema escalar lineal invariante en el tiempo fraccionario .	117
Referencias	120

Índice de figuras

1.1.	Función Mittag-Leffler $E_\alpha(-t)$ (a) $0 < \alpha < 1$,(b) $1 < \alpha < 2$	4
2.1.	(a) Gráfica de fase del sistema original fraccionario inconmensurado con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2 = 0$ y $x_3(0) = -5$, (b) Gráfica de fase del sistema esclavo fraccionario inconmensurado con condiciones iniciales $\hat{\eta}_1(0) = 100$ and $\hat{\eta}_3(0) = 200$	21
2.2.	(a) Sincronización de los sistemas fraccionario inconmensurado maestro-esclavo, estado x_1 vs. estimado η_1 , (b) Sincronización de los sistemas fraccionario inconmensurado maestro-esclavo, estado x_3 vs. estimado η_3	21
2.3.	(a) Sistema maestro fraccionario de orden inconmensurado con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3(0) = -1$, (b) Sistema esclavo fraccionario de orden inconmensurado con condiciones iniciales $\hat{\eta}_1(0) = -10$ y $\hat{\eta}_2(0) = 0$	25
2.4.	(a) Sincronización de sistemas fraccionarios de orden inconmensurado, estado x_2 vs. estimado η_2 , (b) Sincronización de sistemas fraccionarios de orden inconmensurado, estado x_3 vs. estimado η_3	25
2.5.	(a) Sistema maestro con condiciones iniciales $x_0 = (2, 3, 2)$, (b) Sistema esclavo con condiciones iniciales $\eta_1 = 20$, $\eta_2 = 30$	28
2.6.	(a) Estado x_1 vs. Estimado η_1 , (b) Estado x_2 vs. Estimado η_2	28
3.1.	SGF régimen	33
3.2.	Region Estable e Inestable de un sistema fraccionario. $q = \alpha$	36
3.3.	Sincronización en Coordenadas Transformadas (a) Lorenz y (b) Rössler.	43
3.4.	Trayectorias del error e_z	43

3.5. Sincronización Generalizada en Coordenadas Originales (a) Lorenz y (b) Rössler.	43
3.6. Sistemas caóticos fraccionarios inconmensurados de Rössler (a) Maestro con $x_R(0) = (0.5, 1.5, 0.1)$ (b) Esclavo $x_r(0) = (1, 0, -5)$	51
3.7. Sincronización de Sistemas Fraccionario Inconmensurados en Coordenadas Transformadas (a) Rössler maestro y (b) Rössler esclavo.	56
3.8. Sincronización Generalizada de Sistemas Fraccionario Inconmensurados en Coordenadas Originales (a) Rössler maestro y (b) Rössler esclavo.	57
3.9. Error de la SGFI (a) en coordendas transformadas (b) en coordenadas originales	57
3.10. Sistemas caóticos fraccionarios inconmensurados de Chua (a) Maestro con $x_C(0) = (0.6, 0.1, -0.6)$ (b) Esclavo $x_{ce}(0) = (0.1, 0.1, -0.2)$	59
3.11. régimen de la cSGFI	61
3.12. cSGFI para sistemas identicos de Chua en coordenadas transformadas (a) Chua-Hartley maestro, (b) Chua-Hartley esclavo.	73
3.13. cSGFI para sistemas identicos de Chua en coordenadas originales (a) Chua-Hartley maestro, (b) Chua-Hartley esclavo.	73
3.14. Error de cSGFI para sistemas identicos de Chua (a) coordenadas transformadas, (b) coordenadas originales.	74
3.15. cuasi-sincronización de sistemas fraccionarios inconmensurados diferentes en coordenadas transformadas (a) Chua-Hartley maestro, (b) Rössler esclavo.	79
3.16. cuasi-sincronización generalizada de sistemas fraccionarios inconmensurados diferentes en coordenadas originales (a) Chua-Hartley maestro, (b) Rössler esclavo.	79
3.17. Error de cSGFI para sistemas de Chua y Rössler (a) coordenadas transformadas, (b) coordenadas originales.	80
4.1. Trayectorias del Sistema Entero de Masa Resorte	83
4.2. Trayectorias del Sistema Fraccionario de Masa Resorte	83
4.3. Error de Sincronización (Sistema de Lü)	86

4.4. Circuito de van der Pol	89
4.5. Circuitos de van der Pol acoplados	90
4.6. Capacitor de orden Fraccionario	93
4.7. Capacitor Fraccionario propuesto por J. Valsa	94
4.8. Espacio de parámetros a y b de $0.1 \leq \alpha \leq 0.9$	96
4.9. Parámetros a y b de $0.91 \leq \alpha \leq 0.99$	96
4.10. Diagrama de Fase y Magnitud para distintos valores de α de la impedancia del circuito de Valsa	98
4.11. Sincronización con $C_0 = 0.33 \mu F$	99
4.12. Antisincronización con $C_0 = 0.33 \mu F$	101
4.13. Capacitores fraccionarios y osciladores acoplados	101
4.14. Experimento de $\alpha = 0.1$	102
4.15. Experimento de $\alpha = 0.5$	102
4.16. Experimento de $\alpha = 0.7$	102
4.17. Experimento de $\alpha = 0.90$	102
4.18. Experimento de $\alpha = 0.95$	103

Resumen

El presente trabajo de investigación plantea el problema de sincronización de sistemas caóticos de órdenes fraccionarios inconmensurados en una configuración maestro-esclavo con énfasis en el análisis de la estabilidad del error de sincronización. El problema se ataca mediante dos enfoques: sincronización basada en observación y sincronización generalizada.

En el primer enfoque se aborda una nueva metodología para un observador de orden reducido de modelo libre para sistemas fraccionarios inconmensurados, teniendo la ventaja de que para este tipo de observador no es necesaria una copia del sistema. En el segundo enfoque se estudian dos tipos de sincronización generalizada de los sistemas caóticos fraccionarios inconmensurados, una donde los sistemas son estrictamente idénticos y otra donde los sistemas son estrictamente diferentes, esta última se introduce como cuasi-sincronización generalizada para sistemas fraccionarios inconmensurados. Se presentan resultados numéricos para mostrar la efectividad de las metodologías propuestas.

Como complemento del trabajo de tesis se presenta brevemente un problema experimental del acoplamiento bidireccional de orden fraccionario entre dos osciladores no lineales de orden entero. En dicho acoplamiento del que se conoce la coexistencia de la sincronización de fase y anti-fase al utilizar un capacitor habitual, se contrastan estos resultados cuando el acoplamiento se realiza mediante cinco capacitores de distinto orden fraccionario.

Abstract

The present work introduces the problem synchronization of fractional order systems in a master-slave configuration with emphasis on the analysis of the stability of the synchronization error. The problem is attacked by two approaches: synchronization by means of observers and generalized synchronization.

In the first approach, a new methodology for a reduced-order observer of free model for incommensurate fractional systems is addressed, with the advantage that for this type of observer a copy of the system is not necessary. In the second approach, two types of generalized synchronization of the fractional chaotic systems are studied, one where the systems are strictly identical and the other where the systems are strictly different, the latter is introduced as generalized quasi-synchronization for incommensurate fractional order systems. Numerical results are presented to show the effectiveness of the proposed methodologies.

As an addition to this thesis work, a brief experimental problem is introduced as a fractional order bidirectional coupling scheme between nonlinear oscillators of integer order. The latter scheme from which is known the coexistence of phase and antiphase synchronization with an usual capacitor, it is contrasted when coupling is made from five different fractional order capacitors.

Introducción

En la actualidad, los problemas en teoría de control han tomado dos vertientes muy marcadas desde la introducción del cálculo fraccionario. Esta separación puede entenderse si se toma en cuenta que “las ecuaciones diferenciales, integrales y sistemas dinámicos de orden fraccionario pueden modelar matemáticamente los fenómenos de la naturaleza y la sociedad de manera más adecuada que aquellas restringidas al orden entero” [1]. Sin embargo, es claro que, la poca aceptación en la comunidad en general es consecuencia de la emergente cantidad de “extensiones” de resultados clásicos en su versión fraccionaria. A pesar de que el estudio del cálculo fraccionario lleva más de 300 años de su introducción, comenzó como un tópico de interés entre matemáticos y físicos teóricos; en teoría de control es un área relativamente nueva, muy poco explorada pero ciertamente con un futuro prometedor.

Una breve historia del cálculo fraccionario

El origen del cálculo fraccionario se remonta a finales del siglo XVII, casi a la par del desarrollo del cálculo diferencial e integral, cuando Isaac Newton y Gottfried Leibniz fundamentaron el concepto de derivada ordinaria. Fue a raíz de la introducción de la notación de Leibniz

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

que denota a la n -ésima derivada de la función f , cuando Guillaume de L'Hôpital el 30 de septiembre de 1695 escribió una carta a Leibniz cuestionándolo acerca de ¿Qué pasaría si n fuera $1/2$? [2]. Convirtiéndose así en la primera ocurrencia de lo que hoy se conoce

como cálculo fraccionario; nombre que se debe a que el número $1/2$ es una fracción y el cual se ha mantenido en uso desde entonces, aunque ahora es bien conocido que n no está restringido a tomar valores del conjunto de los números racionales sino también de los irracionales y los complejos.

Se conoce que en 1812, Pierre Simon Laplace escribió algunas expresiones para ciertas derivadas fraccionales [3]. Y en 1819, Sylvestre F. Lacroix fue el primero en desarrollar la expresión $d^{1/2}x = 2\sqrt{x}/\sqrt{\pi}$ utilizando el hecho que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, donde Γ es conocida como la función gamma cuya notación fue introducida por Adrien Marie Legendre [4]. Sin embargo, probablemente la primera aplicación del cálculo fraccionario tuvo lugar en 1823, cuando el matemático Niels Henrik Abel utilizó derivadas de orden arbitrario en la solución de una integral que surgió de la formulación de la tautócrona [5] (o mejor conocido como el problema de la curva isócrona). Este problema consiste en encontrar la forma de la curva en la que cualquier partícula en cualquier posición de la curva, al deslizarse sin rozamiento y con gravedad uniforme, invierte el mismo tiempo en llegar al punto más bajo de la curva, es decir, el tiempo en que tarda una partícula en descender hasta su posición final es el mismo y es independiente de su posición inicial. La integral con la que el trabajó fue

$$\int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt$$

ahora, es bien conocido que tiene la pinta de la integral de orden fraccionario utilizadas por Bernhard Riemann.

En 1832 comienza el primer estudio importante del cálculo fraccionario por Joseph Liouville a quien hoy en día le debemos la primera definición de derivada fraccionaria [6]. En 1850 con todos los avances del concepto de derivada fraccionaria, W. Center analizó la derivada de la unidad y observó diferencias entre las definiciones que existían acerca de la derivada de una constante, en donde la definición de Peacock daba que el resultado era diferente a cero, a menos que la constante fuera cero, mientras que la definición de Liouville daba que la derivada era cero. Partiendo de la premisa de que las dos definiciones de de-

rivada de una constante eran ciertas, ¿qué significa $(d/dx)^\theta 1$, cuando θ es una fracción? [7].

En 1847 Riemman desarrolló una teoría de operadores fraccionarios [8], inspirado en una generalización de la expansión de Taylor, obtuvo la siguiente definición de integral fraccionaria:

$$\frac{d^{-r}}{dx^{-r}}u(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_c^x (x-k)^{r-1}u(k)dk + \phi(x),$$

donde creyó correcto agregar una función complementaria $\phi(x)$ a la definición, y más adelante Liouville tomaría el trabajo de Riemann para realizar modificaciones en la integral (la función complementaria tomada para ser idénticamente cero y el límite inferior de integración c es normalmente cero) que se conocería como integral de Riemman-Liouville, que sería la primera definición de la integral iterada en cálculo fraccionario.

El estudio del cálculo fraccionario fue estudiado por grandes mentes matemáticas tales como Leonhard Euler [9], Joseph Louis Lagrange [10], Joseph Fourier [11] están entre los muchos que estudiaron el cálculo fraccionario y sus consecuencias matemáticas [12]. Muchos encontraron, usando su propia notación y metodología, definiciones que se ajustan al concepto de una integral o derivada de orden no entero.

Con la llegada del siglo XX y los nuevos descubrimientos matemáticos, muchos de los científicos que seguían trabajando en el área del cálculo fraccionario encontraron nuevas definiciones para la derivada e integral. Fue así como en 1967 M. Caputo dio una nueva definición de derivada fraccionaria donde la derivada de una constante toma la interpretación usual [13].

De lo anterior, las herramientas desarrolladas en el cálculo fraccionario tuvieron consecuencias importantes en el estudio de ecuaciones integrales de Vito Volterra (relacionadas con ecuaciones diferenciales de orden fraccionario) con un importante potencial que desembocó en las primeras aplicaciones del cálculo fraccionario en teoría de control. Éstas se

dieron a principios de los años 60 y hacían uso del operador integral fraccionario en el control de servomecanismos y de sistemas de saturación.

El fenómeno de sincronización

Son cerca de 30 años de esfuerzos para entender la sincronización del caos mediante diferentes metodologías. Algunos de estos resultados han sido inspirados en la física, la teoría de control y la teoría de estabilidad de Lyapunov. Todo comenzó con el interés de la comunidad científica en el área de la física para intentar entender estos problemas, claramente motivados por las posibles aplicaciones en comunicaciones seguras y encriptación de datos. En consecuencia, de ahí se derivan los primeros esfuerzos tanto teóricos como experimentales para explicar el fenómeno bajo el nombre de sincronización del caos.

Existen tres factores claves en los problemas de sincronización, a saber, es necesario conocer el tipo de configuración (acoplamiento unidireccional o bidireccional), tipo de acoplamiento (lineal o no lineal) y el tipo de sistemas involucrados (idénticos o diferentes, lineales o no lineales). Estos factores determinan en gran medida el tipo de fenómeno observado. De manera concisa, los fenómenos conocidos en este rubro, se presentan a continuación. La descripción de cada una de ellas se presenta en la manera en que se introdujo en la literatura.

Sincronización Completa. También conocida como sincronización idéntica, contempla el régimen donde las trayectorias de sistemas caóticos idénticos coinciden en el tiempo y en un mismo atractor caótico como resultado del acoplamiento o interacción entre los sistemas. En otras palabras, la distancia entre los estados de los sistemas acoplados tiende a cero asintóticamente manteniendo un comportamiento caótico en común [14]. Se considera a Pecora y Carroll como los pioneros la realización de la sincronización del caos, teniendo en cuenta que dados dos sistemas caóticos cuyas trayectorias que inician cercanas una de la otra, se despegan exponencialmente rápido una de la otra. Finalmente, estas últimas, se desenvuelven en un mismo

atractor caótico pero sus respectivas trayectorias no tienen correlación alguna. En 1990 Pecora y Carroll descubrieron [14] que, en la configuración maestro-esclavo y como consecuencia del acoplamiento mediante el reemplazamiento de alguna de los estados del sistema maestro en el sistema esclavo (del que se sabe que puede no existir ninguno), es posible encontrar un comportamiento síncrono robusto entre los dos sistemas, es decir, se obtiene comportamiento caótico en común sin importar la elección de sus condiciones iniciales. Es importante señalar que este fue el primer resultado con utilidad práctica al respecto [15].

Sincronización Generalizada. En una configuración maestro-esclavo, se revela el fenómeno de sincronización mediante la predicción del estado del sistema esclavo a través de un mapa funcional del estado del sistema maestro [16]. Este mapa define la variedad de sincronización y de ser estable esta última, se dice que los sistemas se encuentran sincronizados en este sentido generalizado. De tal manera que la distancia entre el estado del esclavo y el mapa del estado del maestro converge a cero de manera asintótica. El descubrimiento de este fenómeno por Rulkov et. al en 1995 [17] fue consecuencia de las observaciones de proyecciones de los atractores de los sistemas caóticos acoplados, dichas proyecciones aparentaban ser imágenes no lineales entre ellas. Además consideraban parcialmente la visión establecida por Afraimovich et al. en 1986 [18] de un régimen de sincronización sin restricciones en el acoplamiento que a su vez contemplaba la heterogeneidad de los sistemas [17].

Sincronización Proyectiva. En una configuración maestro-esclavo, el estado del sistema esclavo es directamente proporcional al estado del sistema maestro. Es decir la distancia entre los estados, donde el estado del maestro se encuentra escalado, converge a cero de manera asintótica. Introducida por Mainieri y Rehacek in 1999 [19], como consecuencia de las pequeñas diferencias en los parámetros de los sistemas, esta metodología surge al no encontrar la sincronización idéntica para cualquier señal de acoplamiento en la configuración maestro-esclavo mediante reemplazamiento parcial. El fenómeno observado consiste en que los estados del maestro y esclavo se encuentran relacionados en una proporción.

Sincronización de Fase. En una configuración bidireccional e inspirado en el fenómeno conocido como "enganche de fase" (del inglés phase-locked) en osciladores periódicos acoplados y de la extensión de la definición de fase y amplitud de un sistema caótico¹, este tipo de sincronización se refiere al caso en el que las fases de ambos sistemas son iguales mientras sus amplitudes son diferentes y sin correlación alguna [20, 21]. En este caso, asintóticamente, la distancia entre las fases escaladas de los sistemas caóticos es menor que una constante positiva. Introducido por Rosenblum, Pikovsky, y Kurths en 1996 [20], este fenómeno surge del estudio del acoplamiento entre osciladores caóticos de Rössler [20], posteriormente este fenómeno fue estudiado por Pikovsky, Rosenblum, Osipov, y Kurths en 1997 para el caso de forzamiento de los sistemas caóticos de Rössler y Lorenz a seguir una señal periódica [21].

Sincronización Retardada. En una configuración bidireccional, descubierto por Rosenblum, Pikovsky, y Kurths en 1997 [22], este fenómeno surge como una transición de la sincronización de fase al incrementar la ganancia de acoplamiento. Se dice que los osciladores se encuentran sincronizados en este sentido cuando sus estados son casi idénticos pero uno de ellos se encuentra atrasado respecto del otro. Es decir, la distancia entre los estados, donde uno de ellos se encuentra retrasado en el tiempo, converge a cero de manera asintótica.

Sincronización basada en Observadores La estructura de los observadores de estado contempla en su diseño la introducción de término correctivo en la copia del modelo matemático, el principio es la estimación de los estados del sistema caótico a través del conocimiento de su salida, este tipo de sincronización es bastante atractivo en la implementación de sistemas de comunicaciones seguras [23–27]. Este tipo de estructura se asemeja al tipo de introducción de los términos difusivos de acoplamiento en los problemas de sincronización de sistemas idénticos. Es decir, la distancia entre los estados del sistema caótico observado y el observador convergen asintóticamente a cero.

¹existen diferentes definiciones para la fase de un sistema caótico, para mas detalles consulte [22]

Los términos de disipación o acoplamiento difusivo son comúnmente encontrados en la literatura, estos se utilizan como términos correctivos que están en función del error de sincronización (e.g. la distancia entre las trayectorias de dos sistemas acoplados). Cuando la diferencia debida a este término disipativo es cero, se dice que el punto de equilibrio en la dinámica del error es asintóticamente estable. En este contexto, esto significa que la interacción debida al acoplamiento entre los sistemas produce la sincronización de los mismos, ciertamente en algún sentido.

Existen muchas formas de acoplar los sistemas caóticos, la complejidad del problema depende del tipo de acoplamiento que se utilice. Entre los más comunes en la literatura se encuentran el *reemplazamiento completo* [14], *reemplazamiento parcial* [28,29], *acoplamiento difusivo* o control por realimentación negativa [18,30,31], ver [26] para otras variantes, observadores de estado [23,32], “*control*” *activo* [33,34], también controladores diseñados con técnicas de *álgebra-diferencial* [35], *geometría-diferencial* [36,37] basadas en la linealización por realimentación, etc. Aunado a esto, los esfuerzos por explicar los fenómenos de sincronización en sistemas de orden entero se han extendido al caso fraccionario.

Cálculo fraccionario y sincronización del caos

Actualmente el cálculo fraccionario está presente en casi todas las áreas de ingeniería y ciencia, tales como, física, ingeniería eléctrica, robótica, sistemas de control, química, bioingeniería, entre otros, y una de las importantes áreas de aplicación para nuestro caso de estudio es la teoría del caos.

La teoría del caos es un campo que estudia el comportamiento de los sistemas dinámicos que son altamente sensibles a las condiciones iniciales, uno de ellos famosamente conocido como el efecto mariposa. El nombre de caos y el adjetivo de caótico son usados para describir el comportamiento temporal de un sistema de comportamiento aperiódico, aparentemente aleatorio o ruidoso. La palabra clave es aparentemente, bajo esta aparente aleatoriedad caótica se encuentra un orden determinado, dado por las ecuaciones que des-

criben al sistema. De acuerdo al teorema de Poincaré-Bendixson se conoce que el caos no puede ocurrir en sistemas no lineales continuos de orden menor a tres [38], esta afirmación se basa en el concepto usual de orden, como el número de estados en un sistema o integraciones del sistema.

Uno de los retos actuales, desde su introducción por Pecora y Carrol [14], es explicar la sincronización entre sistemas caóticos. La sincronización del caos aparece en muchos procesos naturales como la relación entre neuronas, los latidos del corazón entre otros. Cuyo estudio de mayor relevancia consiste en entender la sincronización entre sistemas caóticos diferentes con aplicaciones potenciales en comunicaciones seguras. Inspirado en esto y debido al descubrimiento de comportamientos caóticos en ecuaciones diferenciales de orden fraccionario [39,40], donde ahora se conoce que el modelo de un sistema caótico puede ser reordenado a tres ecuaciones diferenciales individuales que contienen derivadas del orden no entero (fraccionario), las extensiones al caso fraccionario sobre la sincronización de dichos sistemas han sido un área de gran interés entre la comunidad científica. El atractivo de estos sistemas es evidente, radica en el orden de la derivada como un nuevo parámetro de diseño.

Entre los esquemas para entender la sincronización del caos, de mayor interés dado que permite describir este fenómeno entre sistemas caóticos de naturaleza distinta se tiene la Sincronización Generalizada (SG). Este concepto, introducido en [41], en la cual existen claras extensiones al caso fraccionario de esta metodología denominadas como Sincronización Generalizada Fraccionaria (SGF) para una clase de sistemas [42–48], para el caso de Sincronización Generalizada para sistemas fraccionarios inconmensurados se ha trabajado en ello pero actualmente no se tienen muchos resultados [49–52] .

La existencia de observadores para sistemas fraccionarios ha puesto en evidencia otro enfoque interesante, ampliamente usado en sistemas de orden entero [53], para la solución del problema de sincronización de sistemas caóticos fraccionarios conmensurados [54–58]. Cabe mencionar que para el caso inconmensurado no existía ningún resultado hasta el trabajo actual presentado y publicado en [59].

Por último otros de los casos de sincronización de mayor interés es la sincronización por medio de un acoplamiento, en la cual dependiendo de las características del acoplamiento se podrán observar diferentes fenómenos de sincronización, este tipo de sincronización es estudiada de forma experimental en varios trabajos a lo largo del tiempo [60–65] que conlleva a resultados interesantes pero que aún no han sido estudiados para el caso fraccionario. Por tanto un estudio del caso fraccionario es propuesto para un acoplamiento de tipo capacitivo, que al igual que el caso anterior no existen resultados conocidos en la literatura.

Planteamiento del problema

No cabe duda que el orden de la derivada en los sistemas de orden fraccionario es un parámetro adicional que juega un papel interesante en el problema de sincronización, por lo tanto es importante realizar las siguientes observaciones. Primero, daremos una clasificación general de los sistemas de orden fraccionario que existen de acuerdo al orden de la derivada y la estructura de la ecuación diferencial fraccionaria asociada. Consideremos el siguiente sistema caótico de orden fraccionario α :

$$\begin{aligned} {}_{t_0}D_t^{\alpha_i}x_i(t) &= f_i(x(t), u), \quad x_i(t_0) = x_{0_i} \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq n$, o en su representación vectorial

$$\begin{aligned} {}_{t_0}D_t^\alpha \mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector estado, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función Lipschitz continua, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ son condiciones iniciales en $t_0 = 0$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ denota la salida disponible del sistema (salida disponible), $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función continua, y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es

el vector entrada. Donde ${}_t D_t^\alpha$ denota el operador derivada de orden $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ para $0 = \alpha_0 < \alpha_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$ el sistema (1) se le conoce como sistema de orden fraccionario **commensurado**, es decir, el orden de la derivada de la dinámica del sistema es el mismo para todos los estados del sistema.

Aquellos sistemas que no son commensurados se denominan **incommensurados**, es decir, el orden de la derivada de la dinámica del sistema es diferente en las dinámicas individuales en todos los estados de estos sistemas, es decir, $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n \neq \alpha$ y estos mismos no son múltiplos entre sí.

Consideremos dos sistemas a sincronizar en configuración maestro-esclavo en el que pueden clasificarse por: estructura dinámica idéntica o diferente y el orden fraccionario commensurado o incommensurado. Tomando en cuenta que al referirnos a estructura dinámica estamos tomando el lado derecho de la igualdad de una ecuación diferencial. Por ejemplo, consideremos los siguientes sistemas:

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)} &= f(x) \\ y^{(\alpha)} &= g(x) \end{aligned}$$

Siendo α el orden de la derivada fraccionaria, donde $0 < \alpha < 1$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$. En este caso, estamos hablando de sistemas de estructura dinámica diferente (i.e. $f \neq g$) de orden fraccionario commensurado, pero cuando tenemos:

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)} &= f(x) \\ y^{(\bar{\alpha})} &= f(y) \end{aligned}$$

Donde α y $\bar{\alpha}$ son los órdenes de derivada fraccionaria incommensurada y $\alpha \neq \bar{\alpha}$ donde $0 < \alpha, \bar{\alpha} < 1$. En este caso, se observan sistemas de estructura dinámica idéntica (i.e.

$f = g$) de orden fraccionario inconmensurado.

Así, las posibilidades de sincronización son, incluyendo pero no limitadas a, las cuatro situaciones típicas: estructura idéntica (in)conmensurada y estructura diferente dinámica (in)conmensurada. En teoría de control, el objetivo general en los problemas de sincronización consiste encontrar una dinámica del error de sincronización estable, entonces el estudio de la sincronización de sistemas equivale a estudiar la estabilidad asintótica del origen del error de sincronización. Estas nociones son similares para los sistemas de orden fraccionario con algunas diferencias sobresalientes que complican su estudio debido al parámetro extra, involucrado en la definición de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, correspondiente a los sistemas que se intentan sincronizar. Teniendo en mente que, como se mencionó anteriormente, las posibilidades de sincronización radican en conjunto en: la diferencia entre las estructuras dinámicas y el orden de la derivada; los esquemas de sincronización se pueden clasificar de acuerdo a la dinámica del error de sincronización. El objetivo común en la literatura existente es obtener una dinámica del error de sincronización lineal ya sea conmensurada o inconmensurada, esto es posible dado que los sistemas en cuestión tienen el mismo orden de derivada (e.g. $f \neq g$ y $\alpha = \bar{\alpha}$). Existen varios trabajos para comprender estos problemas [50–52] donde las herramientas necesarias para analizar la estabilidad del error de sincronización de orden fraccionario para estos casos típicos son los dados en los teoremas de Deng y Matignon [66, 67].

Por otro lado, supongamos que los sistemas maestro y esclavo poseen ordenes fraccionarios inconmensurados tales que $\alpha \neq \bar{\alpha}$, entonces, el estudio del error de sincronización es más complicado que los casos típicos descritos anteriormente. Para dar una idea más clara de este problema, asúmase el caso más simple cuando $f = g$ y el error $e = x - y$, el siguiente paso implica responder las siguientes preguntas, ¿Es posible obtener una dinámica del error de sincronización de orden fraccionario?, y si existe, hay una manera de analizar la estabilidad del error de sincronización. En este orden de ideas, es transparente que este planteamiento se complica si además nos encontramos con sistemas que satisfacen $f \neq g$. En las referencias anteriormente mencionadas, la estabilidad de la dinámica del error de

sincronización de orden fraccionario inconmensurado se traduce en un problema de estabilidad de un orden fraccionario conmensurado o incluso un sistema de orden entero, mediante un cambio de variables o en la utilización de sistemas dinámicamente iguales facilitando el análisis de estabilidad del error de sincronización y la sincronización perfecta de los sistemas pueda lograrse.

En este trabajo, el caso de estudio es la sincronización de sistemas de orden fraccionario inconmensurado con estructura diferente (i.e. $f \neq g$), en el sentido de que el orden fraccionario de los sistemas maestro y esclavo no son idénticos (i.e. $\alpha \neq \bar{\alpha}$), la ecuación para el error de sincronización se da en forma de una dinámica lineal de orden fraccionario inconmensurado con una perturbación dependiente del tiempo que veremos más adelante. Vale la pena mencionar que en este caso los Teoremas de Deng y Matignon ya no se pueden aplicar. Hasta donde se sabe, no se ha logrado una sincronización perfecta para sistemas de orden fraccionario inconmensurado para sistemas con estructuras estrictamente diferentes.

Objetivos

El **objetivo general** de esta tesis es el estudio de la sincronización de sistemas Caóticos Fraccionarios, específicamente, los inconmensurados, cuyas propiedades son similares a los sistemas fraccionarios conmensurados con algunas diferencias importantes que dificultan su análisis.

Los **objetivos particulares** son:

- Estudiar las propiedades, funciones y definiciones de los sistemas caóticos fraccionarios.

- Proponer un observador orden reducido de modelo libre para los sistemas caóticos fraccionarios inconmensurados.

- Introducir una metodología de sincronización generalizada para sistemas caóticos fraccionarios incommensurados.
- Realizar un ejemplo experimental de la sincronización de sistemas fraccionarios incommensurados.

Estructura de la tesis

Capítulo 1

En el capítulo 1 se presenta los preliminares y conceptos básicos para el manejo de los sistemas fraccionarios los cuales ayudaran a resolver el problema de la sincronización de los sistemas caóticos fraccionarios incommensurados.

Capítulo 2

En el capítulo 2 se presenta la metodología para realizar un observador de orden reducido de modelo libre para los sistemas caóticos fraccionarios incommensurados en una configuración maestro-esclavo. Se muestran tres ejemplos numéricos.

Capítulo 3

En el capítulo 3 se expone la sincronización generalizada de sistemas caóticos fraccionarios incommensurados, comenzando por un repaso de la sincronización generalizada para sistemas commensurados para después dar paso a la sincronización generalizada para sistemas incommensurados resaltando la diferencia entre sincronizar sistemas caóticos estrictamente idénticos y diferentes.

Capítulo 4

En el capítulo 4 se realiza un ejemplo experimental de sincronización de dos osciladores de van der Pol por medio de distintos acoplamientos capacitivos. Los resultados son

mostrados por medio de un osciloscopio y puestos a discusión.

Capítulo 5

En el capítulo 5 se dan las conclusiones finales, el trabajo a futuro a realizar y las publicaciones realizadas a lo largo del trabajo de Posgrado.

Capítulo 1

Definiciones y Preliminares

1.1. Notación

El cálculo fraccionario es una generalización de la integración y la diferenciación de orden no entera, su operador fundamental es ${}_cD_t^\alpha$ donde c y t son límites de la operación y $\alpha \in \mathbb{R}$. El operador integro-diferencial se define como en [68]

$${}_cD_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_c^t (dt)^\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$$

También muy comúnmente usados como $x^{(\alpha)}$ para la derivada y $x^{(-\alpha)}$ para la integral.

1.2. Funciones especiales del cálculo fraccionario

1.2.1. Función gamma

Una de las funciones básicas del cálculo fraccionario es la función gamma de Euler $\Gamma(z)$, la cual generaliza la función factorial $n!$ y permite el uso de números no enteros e inclusive complejos.

Definición 1.2.1. *Función Gamma* La función gamma de Euler [69] es

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (1.1)$$

esta integral es convergente $\forall z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) > 0$.

En este trabajo se maneja el caso particular de $z \in \mathbb{R}^+$.

A continuación se indican algunas propiedades claves de la función Gamma.

Propiedades de la función gamma

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n + 1) = n!$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
5. $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 * 2 * 3 \dots (2n - 1)}{2^n} \sqrt{\pi}$
6. $\Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ $0 < z < 1$ y $z \in \mathbb{R}$

Las demostraciones de cada una de las propiedades de la función gamma se pueden consultar en el Apéndice A.1.

1.2.2. Funciones de Mittag-Leffler

La función de Mittag-Leffler (M-L) aparece como una función en la solución de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, que es el equivalente de la exponencial para ecuaciones diferenciales de orden entero, a continuación se presentan la definición y algunas de sus propiedades [70].

Definición 1.2.2. (*Función Mittag-Leffler*) Sea $\alpha > 0$. La función de Mittag-Leffler de un parámetro $E_\alpha(z)$ se define como

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.2)$$

Esta función fue introducida por Gösta Mittag-Leffler [71]. Inmediatamente notamos que cuando $\alpha = 1$

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

se obtiene la función exponencial.

A continuación se define una función más general de Mittag-Leffler :

Definición 1.2.3. Se tiene $\alpha, \beta > 0$. La función Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z)$ de dos parámetros:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.3)$$

En la Fig. 1.1 se puede observar el comportamiento de las soluciones de la función de Mittag-Leffler para una función $E_\alpha(-t)$, en la Fig 1.1 (a) y la Fig. 1.1 (b) respectivamente se observan las curvas para los diferentes valores de α . Como podemos ver cuando $\alpha < 1$ la soluciones tienden a un decaimiento exponencial, con $\alpha = 1$ se tiene un comportamiento exponencial, para $\alpha > 1$ se observa un comportamiento oscilatorio amortiguado y oscila completamente para $\alpha = 2$.

Observación 1. *Es evidente que la función de Mittag-Leffler de un parámetro puede definirse en términos de de la función Mittag-Leffler de dos parámetros mediante la relación*

$$E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$$

A continuación enunciaremos el siguiente teorema para la función M-L de dos parámetros [72]

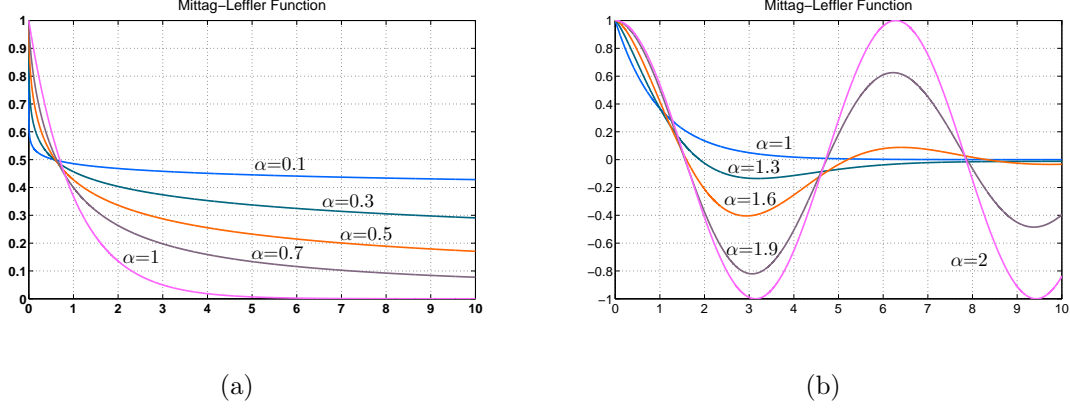


Figura 1.1: Función Mittag-Leffler $E_\alpha(-t)$ (a) $0 < \alpha < 1$,(b) $1 < \alpha < 2$.

Teorema 1.2.1. Si $0 < \alpha < 2$, β es un número complejo arbitrario y μ es un número real arbitrario tal que

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi, \alpha\} \quad (1.4)$$

entonces para una entero arbitrario $p \geq 1$ se tiene la siguiente expansión

$$E_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-p}) \quad (1.5)$$

con $|z| \rightarrow \infty$, $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$.

La prueba completa del Teorema se encuentra en la página 34 de [72].

Otro Teorema importante sobre la función de Mittag-Leffler tiene que ver con las funciones completamente monótonas [73].

Teorema 1.2.2. $E_{\alpha,\beta}(-x)$ es completamente monótona, es decir, $(-1)^n E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-x) \geq 0$ para $0 < \alpha \leq 2$ y $\beta \geq \alpha$, para todo $x \in (0, \infty)$ y $n \in \mathbb{N} \cup 0$.

Por último, tenemos una propiedad importante de (1.3) la cual se obtiene integrando la función término a término (ver [72])

$$\int_0^t \tau^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-k\tau^\alpha) d\tau = t^\beta E_{\alpha,\beta+1}(-kt^\alpha), \quad (\beta > 0) \quad (1.6)$$

1.2.3. Regla de Leibniz

La mayoría de las reglas de derivación que se tienen en las derivadas de órdenes enteras pueden extenderse al caso no entero. Sin embargo, debemos recordar que existen algunas excepciones, y una de las más importantes: la regla de Leibniz [68].

$$\frac{d^\alpha(f(t)g(t))}{dt^\alpha} \neq \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}g(t) + \frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha}f(t)$$

Existen reglas equivalentes, pero no son inmediatas ya que implican expansiones en serie y por lo tanto deben considerarse términos infinitos)

1.3. Operadores Fraccionarios

Existen una variedad de definiciones de la derivada y de la integral fraccionaria, tales como Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov (diferointegrales), M. Caputo entre otras. En el siguiente trabajo se maneja la representación de Riemann-Liouville y M. Caputo, que son las más utilizadas en la literatura del cálculo fraccionario.

A continuación se presentan las definiciones de los operadores fraccionarios mencionados con sus respectivas propiedades.

1.3.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

De acuerdo con la concepción de Riemann-Liouville, la noción de integral de orden fraccionaria es una consecuencia de la fórmula de Cauchy para integrales repetidas, expresándose de la siguiente manera (ver [74])

$$I_c^n f(t) = D_c^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_c^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

donde $t > c$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se puede observar que $I_c^n f(t)$ y sus derivadas de orden $1, 2, 3, \dots, n-1$ se vuelven cero para $t = c$.

De una manera natural, se puede extender la fórmula (1.7) al caso en que $n \in \mathbb{R}^+$. Tomando en cuenta que $(n-1)! = \Gamma(n)$, e introduciendo un número real positivo α , la integral fraccionaria de Riemann-Liouville se puede definir como sigue

Definición 1.3.1. (Integral fraccionaria de Riemann-Liouville [74]). *La integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de una función f se define*

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.8)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma explicada anteriormente.

Cuando tratamos con sistemas dinámicos es usual que $f(t)$ sea una función causal de t , por lo cual en la definición se puede manejar $c = 0$.

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.9)$$

donde $t > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.3.2. Derivada fraccionaria Riemann-Liouville.

La definición (1.8) no puede ser usada para la derivada de orden fraccionaria por una sustitución directa de α por $-\alpha$ ya que hay que proceder con cautela con el fin de garantizar la convergencia de las integrales que intervienen en la definición y para preservar las propiedades de la derivada ordinaria de orden entero.

Denotamos el operador derivada de orden $n \in \mathbb{N}$ por D^n , y el operador identidad como ID , entonces podemos verificar que

$$D^n I^n = ID, \quad I^n D^n \neq ID, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.10)$$

En consecuencia, se debe verificar si, D^α es inverso por la izquierda de I^α , para este propósito introduciremos un entero positivo m tal que $m - 1 < \alpha < m$, la definición de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville para $\alpha \in \mathbb{R}^+$ es dada a continuación.

Definición 1.3.2. (Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville [74]). *La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de una función f se define como*

$$D^m f(t) = D^m I^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \right] \quad (1.11)$$

Donde $m \in \mathbb{N}$.

Obsérvese que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville está en términos de una derivada de orden entero, además de una integral fraccionaria, esto tiene como consecuencia que la derivada fraccionaria tenga límites de derivación, lo cual es diferente a lo conocido en una derivada normal.

La definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville juega un papel muy importante en el cálculo fraccionario. Sin embargo, las demandas de la ciencia moderna y la ingeniería requieren una cierta revisión de lo bien establecido que están los enfoques matemáticos puros. Problemas aplicados requieren definiciones de derivadas fraccionarias, lo que permite la utilización de condiciones iniciales físicamente interpretables que contengan $f(a)$, $f^{(1)}(a)$, $f^{(2)}(a)$ y no cantidades fraccionarias. Las definiciones de Riemann-Liouville requieren

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow c} D_t^{\alpha-1} &= b_1 \\ \lim_{t \rightarrow c} D_t^{\alpha-2} &= b_2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

A pesar del hecho de que los problemas de valor inicial con tales condiciones iniciales se pueden resolver matemáticamente, sus soluciones son inútiles, puesto que no hay interpretación física conocida para tales condiciones iniciales.

1.3.3. Derivada fraccionaria de Caputo

La solución para el conflicto de Riemann-Liouville fue propuesta por M. Caputo, con la definición que él propone las condiciones iniciales toman el significado usual. La definición de Caputo se escribe como

Definición 1.3.3. (Derivada Fraccionaria de Caputo [13]). *La derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de una función f se define*

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t f^{(n)}(\tau) (t - \tau)^{n-\alpha-1} d\tau \quad (1.13)$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $n - 1 < \alpha < n$ y $f^{(n)}(\tau)$ es la derivada n -ésima de $f(\tau)$ en el sentido usual.

Esto quiere decir que si f es derivable n -veces se tiene

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{(n-\alpha)} \frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad (1.14)$$

Se puede observar que al igual que la derivada fraccionaria de Riemann Liouville, la derivada fraccionaria de Caputo está en términos de una integral fraccionaria, además de una derivada de orden entero. Esta definición para la derivada fraccionaria incorpora los valores iniciales de la función y sus derivadas de orden entero menor, es decir, condiciones iniciales que son físicamente interpretables de la manera tradicional.

En el Apéndice A.2. se encuentra un ejemplo de la aplicación de (1.13).

1.3.4. Sistema lineales invariantes en el tiempo fraccionarios

Un sistema lineal invariante en el tiempo fraccionario (LITF) de orden fraccionario puede ser descrito como una ecuación diferencial fraccionaria de la forma (ver [75])

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) \\ = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t), \end{aligned} \quad (1.15)$$

Su función de transferencia correspondiente de orden real inconmensurado tiene la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} = \frac{Q(s^{\beta_k})}{P(s^{\alpha_k})} \quad (1.16)$$

donde a_k ($k = 0, \dots, n$), b_k ($k = 0, \dots, m$) son constantes, α_k ($k = 0, \dots, n$) y β_k ($k = 0, \dots, m$) son números reales.

En particular, para los sistemas fraccionarios conmensurados, se tiene que $\beta_k = \alpha_k$, ($0 < \alpha < 1$), $\forall k \in \mathbb{N}\{0\}$, y la función de transferencia de (1.15) tiene la siguiente forma:

$$G(s) = K_0 \frac{\sum_{k=0}^M b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (s^\alpha)^k} = K_0 \frac{Q(s^\alpha)}{P(s^\alpha)} \quad (1.17)$$

con $N > M$, la función $G(s)$ se vuelve una función propia racional en la variable compleja s^α con la cual se puede expandir en fracciones parciales de la siguiente forma:

$$G(s) = K_0 \left[\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s^\alpha + \lambda_i} \right] \quad (1.18)$$

donde λ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) son las raíces del pseudo-polinomio $P(s^\alpha)$ o los polos del sistema que se suponen simples sin pérdida de generalidad. La solución analítica del sistema (1.18) se puede expresar como

$$G(s) = L^{-1} \left\{ K_0 \left[\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s^\alpha + \lambda_i} \right] \right\} = K_0 \sum_{i=1}^N A_i t^\alpha E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i t^\alpha) \quad (1.19)$$

donde $E_{\alpha, \alpha}$ es la función de Mittag-Leffler.

Veáse el Apéndice A.3. para ver la solución de un sistema escalar LITF.

Capítulo 2

Observador para Sistemas

Fraccionarios Inconmensurados

En general, la investigación sobre la sincronización se ha centrado en dos áreas. La primera está relacionada con el empleo de observadores de estado, por lo que la aplicación de interés principal radica en la sincronización de sistemas caóticos no lineales. Por otro lado, el uso de las leyes de control hace posible lograr la sincronización entre sistemas caóticos no lineales con diferentes estructuras y órdenes; ambos manejados con una configuración maestro-esclavo. Por lo tanto, el problema de sincronización del caos se puede plantear como un diseño de observador en el que la señal de acoplamiento se ve como la salida y el sistema esclavo como el observador.

En esta sección introducimos un observador de orden reducido de modelo libre para sistemas no lineales caóticos fraccionarios inconmensurados, conocido así ya que el sistema al tener n dimensiones y su salida ser un escalar o de dimensión w disponible, no necesita observar los n estados, sino sólo $n - w$ variables de estado, convirtiéndose así en un observador de $(n - w)$ -ésimo orden. Este observador de orden reducido utiliza la condición de observabilidad aplicada al problema de observación, que para el caso de sistemas fraccionarios inconmensurados se introducirá una nueva propiedad de observabilidad. La metodología propuesta consiste en manejar el esquema de maestro-esclavo y en definir

una función como un estado extra del sistema original (maestro). Esta función se da en términos de los estados, y la dinámica de este nuevo estado es desconocida. El sistema original se convierte entonces en un sistema extendido (conocido como inmersión), donde la dinámica del estado extra es desconocida y se supone que está acotada. Como no se conoce la dinámica de este nuevo estado, se propone un observador de orden reducido para la parte desconocida de los sistemas que será el sistema esclavo. La ventaja de este tipo de observador es que no se requiere una copia del sistema. El caso de estudio para observadores de orden reducido de modelo libre para sistemas enteros y fraccionarios conmensurados ya ha sido estudiado en [42, 76]

A continuación, planteamos el problema de la construcción de un observador de orden reducido de modelo libre para sistemas no lineales caóticos fraccionarios inconmensurados [59].

2.1. Planteamiento del problema

Consideremos el siguiente sistema fraccionario de orden:

$$\frac{d^{\alpha_k}}{dt^{\alpha_k}} x_k = f_k(x_1, \dots, x_n), 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.1)$$

donde α_k son números racionales entre 0 y 1.

Considere el sistema dado en (2.1) el cual será separado en dos sistemas dinámicos con los estados $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ y $\eta \in \mathbb{R}^{n-p}$, el primer sistema describe el estado conocido y el segundo sistema representa el estado desconocido, entonces el sistema (2.1) puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_j^{(\alpha_j)} &= \bar{f}_j(\bar{x}, \eta) \\
\eta_i^{(\alpha_i)} &= \Delta_i(\bar{x}, \eta) \\
y_{\bar{x}} &= h_{\bar{x}}(\bar{x})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $1 \leq j, i \leq n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$, $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función continua $1 \leq p < n$ y $f^T(x) = (\bar{f}^T(\bar{x}, \eta), \Delta^T(\bar{x}, \eta))$, $\bar{f} \in \mathbb{R}^p$, $\Delta \in \mathbb{R}^{n-p}$.

Ahora el problema es: ¿Cómo podemos estimar los η estados?. Esta pregunta surge de que si conocemos los η estados podemos usar las señales generadas por la medición de ellas mismas. Para poder resolver este problema vamos a introducir la siguiente propiedad de observabilidad.

Definición 2.1.1. (OAFI): Una variable de estado $\eta_i \in \mathbb{R}$ satisface la propiedad de observabilidad algebraica fraccionaria inconmensurada si está en función de la salida disponible y sus derivadas $y_{\bar{x}}$ es decir:

$$\eta_i = \phi_i(y_{(\bar{x})}, D^{\beta_1} y_{\bar{x}}, D^{\beta_2} D^{\beta_1} y_{\bar{x}}, \dots, D^{\beta_n} \dots D^{\beta_1} y_{\bar{x}}), 0 \leq \beta_1, \dots, \beta_n \leq 1 \tag{2.3}$$

donde $\phi_i : \mathbb{R}^{(n+1)q} \rightarrow \mathbb{R}$ y β_1 hasta β_n serán redefinidas de acuerdo al valor del orden fraccionario del sistema a analizar.

Si suponemos que los componentes del vector estado desconocido η son OAFI, entonces podemos describir nuestro problema en términos de un esquema de sincronización maestro-esclavo, el cual se define de la siguiente manera:

Consideremos el siguiente sistema maestro:

$$\eta_i^{(\alpha_i)} = \Delta_i(\bar{x}, \eta)$$

$$y_{\eta_i} = \eta_i = \phi_i(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\alpha_1)}, D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} y_{\bar{x}}, \dots, D^{\alpha_n} \dots D^{\alpha_1} y_{\bar{x}})$$

y consideremos la dinámica desconocida

$$\eta_i^{(\bar{\alpha}_i)} = \bar{\Delta}_i(\bar{x}, \eta)$$

donde $0 < \bar{\alpha}_i < 1$ es un número racional y $\bar{\Delta}_i(\bar{x}, \eta)$ es una dinámica desconocida que une al sistema maestro con el esclavo. Esta dinámica no es necesariamente del mismo orden que $\eta_i^{(\alpha_i)}$ y el sistema $\bar{\Delta}_i$ tiene el orden de derivación más alto respecto al sistema $\Delta_i(\bar{x}, \eta)$.

Ahora propongamos un observador de orden reducido para sistemas de orden fraccionario inconmensurado (OORFI) con orden $\bar{\alpha}_i$, entonces el sistema esclavo queda de la siguiente forma:

$$\hat{\eta}_i^{(\bar{\alpha}_i)} = k_{\hat{\eta}_i}(\eta_i - \hat{\eta}_i)$$

$$y_{\hat{\eta}_i} = \hat{\eta}_i$$

donde $y_{\hat{\eta}_i}$ denota la salida i -ésima del sistema y $k_{\hat{\eta}_i}$ un constante positiva.

En el esquema de sincronización maestro-esclavo, la salida del maestro representa la señal objetivo, mientras que la salida del esclavo es la señal respuesta. Por lo tanto, dado el sistema maestro y el sistema esclavo, se deben determinar ciertas condiciones para sincronizar la salida del esclavo con la salida del maestro.

Definimos el error de sincronización como:

$$e_i = y_{\eta_i} - y_{\hat{\eta}_i} = \eta_i - \hat{\eta}_i \tag{2.4}$$

Establecemos las siguientes hipótesis:

H1: η_i satisface la propiedad de OAFI para $i \in (p + 1, \dots, n)$

H2: $\bar{\Delta}_{p+1}$ es acotada, *i.e.*, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|\bar{\Delta}(X)\| \leq M, \forall X$ en un conjunto compacto Ω , donde $\bar{\Delta}(X) = (\bar{\Delta}_1, \dots, \bar{\Delta}_n)^T$

H3: $k_{\hat{\eta}_i} \in \mathbb{R}^+$

Proposición 2.1.1. *Considérese el sistema (2.1) el cual puede ser expresado como en (2.2), donde las condiciones dadas anteriormente se satisfacen. Entonces (2.4) converge asintóticamente a un conjunto cerrado $B_r(0)$, con $r = \frac{M}{k_{\hat{\eta}_i}}$, es decir, se logra la sincronización.*

Demostración. Definase el error de sincronización como:

$$e_i = y_{\eta_i} - y_{\hat{\eta}_i} = \eta_i - \hat{\eta}_i.$$

Tomando la derivada de orden fraccionario $\bar{\alpha}_i$ de (2.1)

$$\begin{aligned} e_i^{(\bar{\alpha}_i)} &= \eta_i^{(\bar{\alpha}_i)} - \hat{\eta}_i^{(\bar{\alpha}_i)} \\ &= \Delta_i(\bar{x}, \eta) - k_{\hat{\eta}_i}(y_{\eta_i} - \hat{\eta}_i) \\ &= \Delta_i(\bar{x}, \eta) - k_{\hat{\eta}_i}(e_i) \end{aligned}$$

La dinámica de orden fraccionario del error tiene la siguiente forma:

$$e_i^{(\bar{\alpha}_i)} = -k_{\hat{\eta}_i}e_i + \Delta_i(\bar{x}, \eta) = f_i(e_i, \bar{x}, \eta) \quad (2.5)$$

Note que el lado derecho de (2.5) es una función Lipschitz continua respecto a e_i , *i.e*

$$\begin{aligned} f_i(e_i, \bar{x}, \eta) - f_i(\bar{e}_i, \bar{x}, \eta) &= -k_{\hat{\eta}_i}e_i + \Delta_i(\bar{x}, \eta) + k_{\hat{\eta}_i}\bar{e}_i - \Delta_i(\bar{x}, \eta) \\ &= -k_{\hat{\eta}_i}(e_i - \bar{e}_i) \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|f_i(e_i, \bar{x}, \eta) - f_i(\bar{e}_i, \bar{x}, \eta)| \leq L|e_i - \bar{e}_i|$$

con $L = k_{\hat{\eta}_i}$.

Entonces, existe una única solución para el sistema (2.5), dado que $-k_{\hat{\eta}_i}e_i(t)+\Delta_i(x(t))$ es una función Lipschitz continua en e_i .¹ Solucionando (2.5) por medio de la ecuación integral y resolviendo mediante el método de aproximaciones sucesivas dado en [77], tenemos:

$$\begin{aligned} e_i(t) &= e_{i_0}E_{\bar{\alpha}_i,1}(-k_{\hat{\eta}_i}t^{\bar{\alpha}_i}) + \\ &+ \int_0^t (t-\tau)^{\bar{\alpha}_i-1}E_{\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_i}(k_{\hat{\eta}_i}(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i}) \Delta_i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $e_i(0) = e_{i_0}$. Usando la desigualdad del triángulo y la de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |e_i(t)| &= |e_{i_0}E_{\bar{\alpha}_i,1}(-k_{\hat{\eta}_i}t^{\bar{\alpha}_i}) + \int_0^t (t-\tau)^{\bar{\alpha}_i-1}E_{\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_i}(-k_{\hat{\eta}_i}(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i})\Delta_i(\bar{x}(\tau),\eta(\tau))d\tau| \\ &\leq |e_{i_0}E_{\bar{\alpha}_i,1}(-k_{\hat{\eta}_i}t^{\bar{\alpha}_i})| + \left| \int_0^t (t-\tau)^{\bar{\alpha}_i-1}E_{\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_i}(-k_{\hat{\eta}_i}(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i})\Delta_i(\bar{x}(\tau),\eta(\tau))d\tau \right| \\ &\leq |e_{i_0}||E_{\bar{\alpha}_i,1}(-k_{\hat{\eta}_i}t^{\bar{\alpha}_i})| + \int_0^t |(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i-1}E_{\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_i}(-k_{\hat{\eta}_i}(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i})\Delta_i(\bar{x}(\tau),\eta(\tau))|d\tau \\ &\leq |e_{i_0}||E_{\bar{\alpha}_i,1}(-k_{\hat{\eta}_i}t^{\bar{\alpha}_i})| + \int_0^t |(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i-1}E_{\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_i}(-k_{\hat{\eta}_i}(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i})||\Delta_i(\bar{x}(\tau),\eta(\tau))|d\tau \end{aligned}$$

Suponiendo $|\Delta_i(\bar{x}(\tau),\eta(\tau))| \leq M \in \mathbb{R}^+$,

$$|e_i(t)| \leq |e_{i_0}| |E_{\bar{\alpha}_i,1}(-k_{\hat{\eta}_i}t^{\bar{\alpha}_i})| + M \int_0^t |(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i-1}E_{\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_i}(-k_{\hat{\eta}_i}(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i})| d\tau$$

Las funciones

$$E_{\bar{\alpha}_i,1}(-k_{\hat{\eta}_i}t^{\bar{\alpha}_i}) \geq 0$$

y

$$(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i-1}E_{\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_i}(-k_{\hat{\eta}_i}(t-\tau)^{\bar{\alpha}_i}) \geq 0$$

son no negativas debido al Teorema 1.2.2 de la función de Mittag-Leffler que habla de funciones completamente monótonas y la hipótesis H3.

¹La ecuación (2.5) es no autónoma, pero la condición de Lipschitz asegura una única solución [77].

$$|e_i(t)| \leq |e_{i_0}| E_{\bar{\alpha}_i, 1}(-k_{\hat{\eta}_i} t^{\bar{\alpha}_i}) + M \int_0^t (t-\tau)^{\bar{\alpha}_i-1} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i}(-k_{\hat{\eta}_i} (t-\tau)^{\bar{\alpha}_i}) d\tau$$

Usando la propiedad de la integración término a término de la función M-L y el cambio de variable en la integral

$$\xi = t - \tau$$

$$\int_0^t (t-\tau)^{\bar{\alpha}_i-1} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i}(-k_{\hat{\eta}_i} (t-\tau)^{\bar{\alpha}_i}) d\tau$$

con $\xi = t - \tau$, $d\xi = -d\tau$ y $\tau \in [0, t]$

$$\begin{aligned} - \int_t^0 \xi^{\bar{\alpha}_i-1} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i}(-k_{\hat{\eta}_i} \xi^{\bar{\alpha}_i}) d\xi &= \int_0^t \xi^{\bar{\alpha}_i-1} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i}(-k_{\hat{\eta}_i} \xi^{\bar{\alpha}_i}) d\xi \\ &= t^{\bar{\alpha}_i} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i+1}(k_{\hat{\eta}_i} t^{\bar{\alpha}_i}) \end{aligned}$$

entonces tendríamos

$$|e_i(t)| \leq |e_{i_0}| E_{\bar{\alpha}_i, 1}(-k_{\hat{\eta}_i} t^{\bar{\alpha}_i}) + M t^{\bar{\alpha}_i} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i+1}(-k_{\hat{\eta}_i} t^{\bar{\alpha}_i})$$

Ahora, aplicando el límite cuando $t \rightarrow \infty$ y considerando $0 < \alpha \leq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e_i(t)| \leq |e_{i_0}| \lim_{t \rightarrow \infty} E_{\bar{\alpha}_i, 1}(-k_{\hat{\eta}_i} t^{\bar{\alpha}_i}) + M t^{\bar{\alpha}_i} \lim_{t \rightarrow \infty} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i+1}(-k_{\hat{\eta}_i} t^{\bar{\alpha}_i})$$

y usando el Teorema 1.2.1 con $\mu = 3\pi \frac{\bar{\alpha}_i}{4}$ y con H3,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |e_i(t)| &\leq |e_{i_0}| \lim_{t \rightarrow \infty} E_{\bar{\alpha}_i, 1}(-k_{\hat{\eta}_i} t^{\bar{\alpha}_i}) \\ &+ M \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\bar{\alpha}_i} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i+1}(-k_{\hat{\eta}_i} t^{\bar{\alpha}_i}) = \frac{M}{k_{\hat{\eta}_i}} \end{aligned}$$

□

2.2. Resultados Numéricos

En esta sección se presentan tres ejemplos en donde se comprueba la efectividad de la metodología propuesta anteriormente, introduciendo un observador de orden reducido para sistemas fraccionarios inconmensurados.

2.2.1. Sistema de Rössler

Considere el sistema de orden fraccionario de Rössler [68]:

$$\begin{aligned}x_1^{(\alpha_1)} &= -x_2 - x_3 \\x_2^{(\alpha_2)} &= x_1 + 0.63x_2 \\x_3^{(\alpha_3)} &= 0.2 + x_3(x_1 - 10)\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ es el vector estado, $\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 0.8$ y $\alpha_3 = 0.7$ y la salida del sistema se toma como $y = x_2$. El sistema (2.7) puede ser escrito como sigue

$$\begin{aligned}\bar{x}_2^{(\alpha_2)} &= \eta_1 + 0.63\bar{x}_2 \\ \eta_1^{(\alpha_1)} &= -\bar{x}_2 - \eta_3 \\ \eta_3^{(\alpha_3)} &= 0.2 + \eta_3(\eta_1 - 10)\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde $x_2 = \bar{x}_2$, $x_1 = \eta_1$, $x_3 = \eta_3$ y $y = \bar{x}_2$. Se puede observar que para (2.8)

$$\eta_1 = y^{(\alpha_2)} - 0.63y\tag{2.9}$$

$$\eta_3 = -y + 0.63y^{(\alpha_1)} - D^{\alpha_2}D^{\alpha_1}y\tag{2.10}$$

$\eta_3 = x_3$ y $\eta_1 = x_1$ cumplen con la propiedad OAFI.

Entonces los sistemas maestros están dados como:

$$\begin{aligned}\eta_1^{(\alpha_1)} &= -\bar{x}_2 - \eta_3 \\ y_{\eta_1} = \eta_1 &= y^{(\alpha_2)} - 0.63y\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\eta_3^{(\alpha_3)} = 0.2 + \eta_3(\eta_1 - 10) \quad (2.12)$$

$$y_{\eta_3} = \eta_3 = -y + 0.63y^{(\alpha_1)} - D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} y$$

y diseñando el sistema esclavo para (2.11) como el observador de orden reducido con el α_i como mayor orden de la derivada fraccionaria de la propiedad OAFI de (2.9)

Para este caso $\bar{\alpha}_i = \alpha_2$, entonces tenemos:

$$\hat{\eta}_1^{(\alpha_2)} = k_1(\eta_1 - \hat{\eta}_1) \quad (2.13)$$

y sustituyendo (2.9) en (2.13) obtenemos:

$$\hat{\eta}_1^{(\alpha_2)} = k_1(y^{(\alpha_2)} - 0.63y - \hat{\eta}_1) \quad (2.14)$$

Para evitar el orden de derivada fraccionaria, se propone un cambio de variable $\hat{\eta}_1 = \gamma_1 + k_1 y$ y de la ecuación (2.14) después de algunas manipulaciones tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_1^{(\alpha_2)} &= k_1(y^{(\alpha_2)} - 0.63y - \gamma_1 - k_1 y) \\ \gamma_1^{(\alpha_2)} - k_1 y^{(\alpha_2)} &= k_1(y^{(\alpha_2)} - 0.63y - \gamma_1 - k_1 y) \\ \gamma_1^{(\alpha_2)} &= k_1(-0.63y - \gamma_1 - k_1 y) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ahora, se diseñará el esclavo para (2.12), pero en este caso consideremos que x_1 aún es desconocida, entonces de (2.7) tenemos $x_2^{(\alpha_2)} = x_1 + 0.63x_2$ en la cual despejando x_1 y derivando obtenemos:

$$x_1^{(\alpha_1)} = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} x_2 - 0.63x_2^{(\alpha_1)} \quad (2.16)$$

Dado que el sistema es inconmensurado, la ecuación anterior muestra una derivada que depende de diferentes órdenes fraccionarios, sin embargo, es posible obtener un observador de orden reducido después de manipulaciones adicionales como se muestra a continuación.

De la primera ecuación de (2.7) y la ecuación (2.16) la siguiente expresión es obtenida:

$$x_3 = \eta_3 = -y + 0.63y^{(\alpha_1)} - D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}y \quad (2.17)$$

En este caso $\bar{\alpha}_i = D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}$ será la máxima derivada a tomar. Entonces, el sistema esclavo tiene la siguiente representación

$$D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}\hat{\eta}_3 = k_2(\eta_3 - \hat{\eta}_3)$$

$$D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}\hat{\eta}_3 = k_2(-y - D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}y + 0.63y^{(\alpha_1)} - \hat{\eta}_3) \quad (2.18)$$

Se introduce en (2.18) el cambio de variable $\hat{\eta}_3 = \beta_1 - k_2y$ para evitar el término $D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}y$, entonces tenemos:

$$D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}\beta_1 = k_2(-y + 0.63y^{(\alpha_1)} - \beta_1 + k_2y) \quad (2.19)$$

Finalmente, necesitamos evitar un término más, que es $y^{(\alpha_1)}$. Para alcanzar esta meta, proponemos otro cambio de variable: primero considere una nueva variable β_2 y sustituyendo el cambio de variable $\beta_1 = \beta_2^{(-\alpha_2)} + 0.63k_2y^{(-\alpha_2)}$ en (2.19); entonces, después de algunas manipulaciones es posible obtener lo siguiente

$$\begin{aligned} \beta_2^{(\alpha_1)} + 0.63k_2y^{(\alpha_1)} &= k_2(-y + 0.63k_2y^{(\alpha_1)} - \beta_2^{(-\alpha_2)} - 0.63k_2y^{(-\alpha_2)} + k_2y) \\ \beta_2^{(\alpha_1)} &= k_2(-y - \beta_2^{(-\alpha_2)} - 0.63k_2y^{(-\alpha_2)} + k_2y) \end{aligned}$$

Seleccionamos los parámetros del observador como $k_1 = 120$ y $k_2 = 7000$.

La Figura 2.1 muestra el diagrama de fase del sistema fraccionario incommensurado de Rössler y el diagrama de fase del sistema esclavo sincronizado. La Figura 2.2 muestra una comparación de estados x_1 y x_3 y sus estimados η_1 y η_3 .

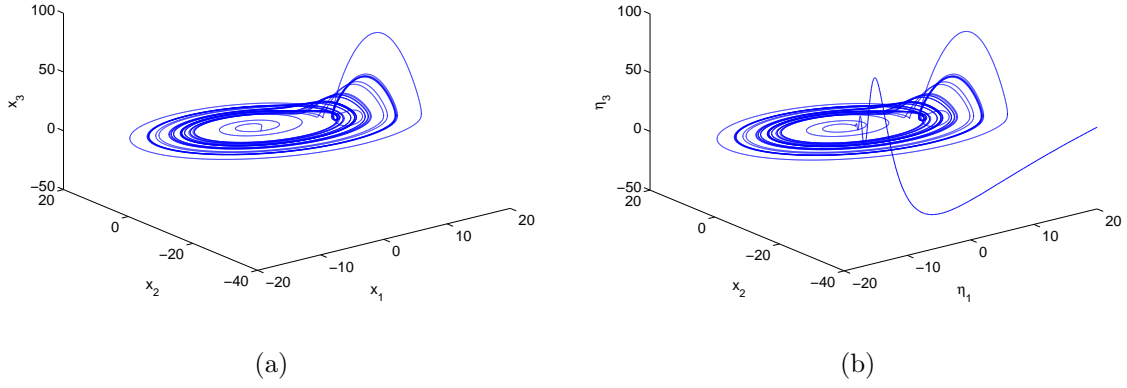


Figura 2.1: (a) Gráfica de fase del sistema original fraccionario incommensurado con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2 = 0$ y $x_3(0) = -5$, (b) Gráfica de fase del sistema esclavo fraccionario incommensurado con condiciones iniciales $\hat{\eta}_1(0) = 100$ and $\hat{\eta}_3(0) = 200$.

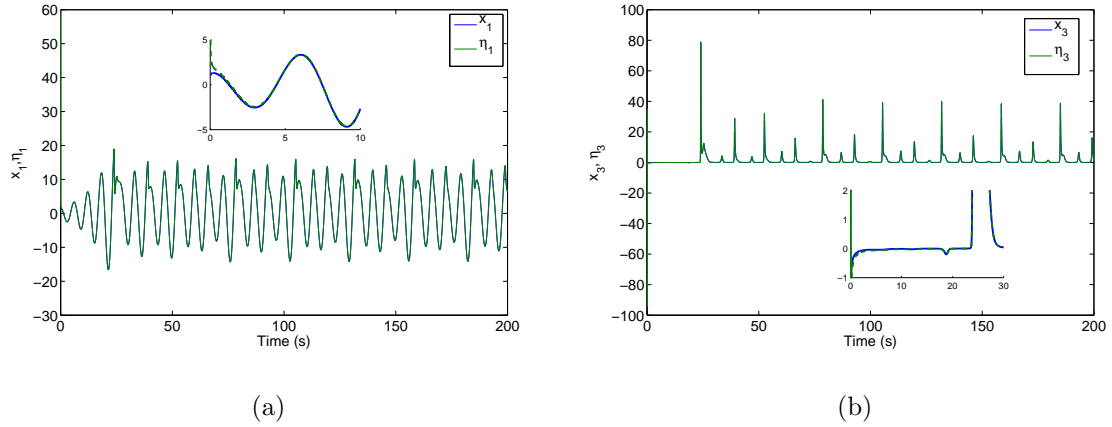


Figura 2.2: (a) Sincronización de los sistemas fraccionario incommensurado maestro-esclavo, estado x_1 vs. estimado η_1 , (b) Sincronización de los sistemas fraccionario incommensurado maestro-esclavo, estado x_3 vs. estimado η_3 .

2.2.2. Sistema de Chua-Hartley

Ahora consideremos el sistema fraccionario de Chua-Hartley [40] como sigue:

$$\begin{aligned}
x_1^{(\alpha_1)} &= ax_2 + \frac{ax_1}{7} - \frac{2ax_1^3}{7} \\
x_2^{(\alpha_2)} &= x_1 - x_2 + x_3 \\
x_3^{(\alpha_3)} &= -\beta x_2
\end{aligned} \tag{2.20}$$

donde $a = 12.75$, $\beta = \frac{100}{7}$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ es el vector estado, $\alpha_1 = 0.99$, $\alpha_2 = 0.91$ y $\alpha_3 = 0.95$ y tenemos la salida como $y = x_1$. El sistema (2.20) podemos reescribirlo como

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1^{(\alpha_1)} &= a\eta_2 + \frac{a\bar{x}_1}{7} - \frac{2a\bar{x}_1^3}{7} \\
\eta_2^{(\alpha_2)} &= \bar{x}_1 - \eta_2 + \eta_3 \\
\eta_3^{(\alpha_3)} &= -\beta\eta_2
\end{aligned} \tag{2.21}$$

donde $x_1 = \bar{x}_2$, $x_2 = \eta_2$, $x_3 = \eta_3$ y $y = x_1$. Para (2.21) son obtenidas las siguientes ecuaciones

$$\eta_2 = \frac{y^{(\alpha_1)}}{a} - \frac{y}{7} + \frac{2y^3}{7} \tag{2.22}$$

$$\eta_3 = \frac{D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} y}{a} - \frac{y^{(\alpha_2)}}{7} + \frac{2D^{\alpha_2} y^3}{7} - y + \frac{y^{(\alpha_1)}}{a} - \frac{y}{7} + \frac{2y^3}{7} \tag{2.23}$$

de (2.22) y (2.23) observamos que $\eta_2 = x_2$ y $\eta_3 = x_3$ son OAFI.

Se tienen los sistemas maestros de la siguiente forma:

$$\eta_2^{(\alpha_2)} = \bar{x}_1 - \eta_2 + \eta_3 \tag{2.24}$$

$$y_{\eta_2} = \eta_2 = \frac{y^{(\alpha_1)}}{a} - \frac{y}{7} + \frac{2y^3}{7}$$

$$\begin{aligned}
\eta_3^{(\alpha_3)} &= -\beta\eta_2 \\
y_{\eta_3} = \eta_3 &= \frac{D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} y}{a} - \frac{y^{(\alpha_2)}}{7} + \frac{2D^{\alpha_2} y^3}{7} - y + \frac{y^{(\alpha_1)}}{a} - \frac{y}{7} + \frac{2y^3}{7}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Ahora, diseñamos el sistema esclavo para (2.22) en este caso $\bar{\alpha}_i = \alpha_1$, entonces tenemos:

$$\hat{\eta}_2^{(\alpha_1)} = k_1(\eta_2 - \hat{\eta}_2) \quad (2.26)$$

y sustituyendo (2.22) en (2.26) obtenemos

$$\hat{\eta}_2^{(\alpha_1)} = k_1\left(\frac{y^{(\alpha_1)}}{a} - \frac{y}{7} + \frac{2y^3}{7} - \hat{\eta}_2\right) \quad (2.27)$$

Para evitar el orden de la derivada fraccionaria, proponemos un cambio de variable $\hat{\eta}_2 = \gamma_1 + \frac{k_1 y}{a}$ y de la ecuación (2.27) después de algunas manipulaciones obtenemos

$$\gamma_1^{(\alpha_1)} = k_1\left(-\frac{y}{7} + \frac{2y^3}{7} - \gamma_1 - \frac{k_1 y}{a}\right) \quad (2.28)$$

Ahora, estimamos el estado x_3 , pero en este caso consideremos el estado x_2 desconocido, entonces:

$$x_2^{(\alpha_2)} = \bar{x}_1 - \eta_2 + \eta_3 \quad (2.29)$$

Es posible obtener un observador de orden reducido como se muestra a continuación:

Para las ecuaciones (2.20) y (2.29) se obtiene la siguiente expresión

$$x_3 = \eta_3 = \eta_2^{(\alpha_2)} - y - \eta_2$$

$$\eta_3 = \frac{D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} y}{a} - \frac{y^{(\alpha_2)}}{7} + \frac{2D^{\alpha_2} y^3}{7} - y + \frac{y^{(\alpha_1)}}{a} - \frac{y}{7} + \frac{2y^3}{7} \quad (2.30)$$

En este caso $\bar{\alpha}_i = D^{\alpha_2} D^{\alpha_1}$ es el mayor orden de derivada. El sistema esclavo para (2.25) tiene la siguiente representación:

$$D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} \hat{\eta}_3 = k_2(\eta_3 - \hat{\eta}_3) \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} \hat{\eta}_3 = & k_2 \left(\frac{D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} y}{a} - \frac{y^{(\alpha_2)}}{7} + \frac{2D^{\alpha_2} y^3}{7} \right. \\ & \left. - y + \frac{y^{(\alpha_1)}}{a} - \frac{y}{7} + \frac{2y^3}{7} - \hat{\eta}_3 \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Introducimos (2.32) el cambio de variable $\hat{\eta}_3 = \beta_1 + \frac{k_2 y}{a}$ para evitar el término $D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} y$, entonces tenemos:

$$D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} \beta_1 = k_2 \left(-\frac{y^{(\alpha_2)}}{7} + \frac{2D^{\alpha_2} y^3}{7} - y + \frac{y^{(\alpha_1)}}{a} \right) - \frac{y}{7} + \frac{2y^3}{7} - \beta_1 - \frac{k_2 y}{a} \quad (2.33)$$

Finalmente, necesitamos evitar las derivadas $y^{(\alpha_1)}$ y $y^{(\alpha_2)}$. Para lograr este objetivo, proponemos el siguiente cambio de variable

$$\beta_1 = \beta_2^{(-\alpha_2)} - \frac{k_2 y^{(-\alpha_1)}}{7} + \frac{2k_2 y^{3(-\alpha_1)}}{7} + \frac{k_2 y^{(-\alpha_2)}}{a} \quad (2.34)$$

Sustituyendo el cambio (2.34) dentro de (2.19), después de algunas manipulaciones algebraicas finalmente tenemos:

$$\beta_2^{(\alpha_1)} = k_2 \left(-y \frac{-y}{7} + \frac{2y^3}{7} - \frac{k_2 y}{a} - \beta_1 \right) \quad (2.35)$$

Seleccionamos los parámetros del observador $k_1 = 100$ y $k_2 = 1000$.

En la Figura 2.3 se puede observar el sistema de Chua como el maestro y el sistema esclavo como el observador de orden reducido. Finalmente, los estados del sistema estimado convergen a los del sistema original, esto se muestra en la Figura 2.4.

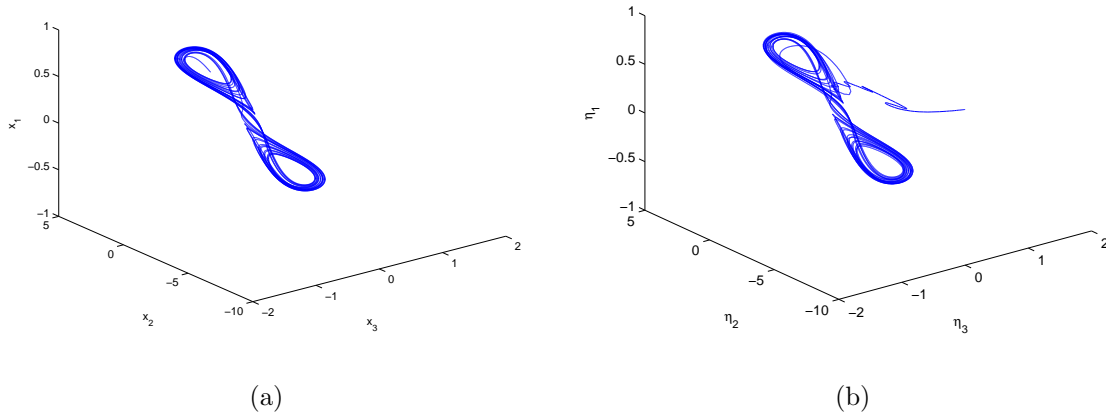


Figura 2.3: (a) Sistema maestro fraccionario de orden inconmensurado con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3(0) = -1$, (b) Sistema esclavo fraccionario de orden inconmensurado con condiciones iniciales $\hat{\eta}_1(0) = -10$ y $\hat{\eta}_2(0) = 0$.

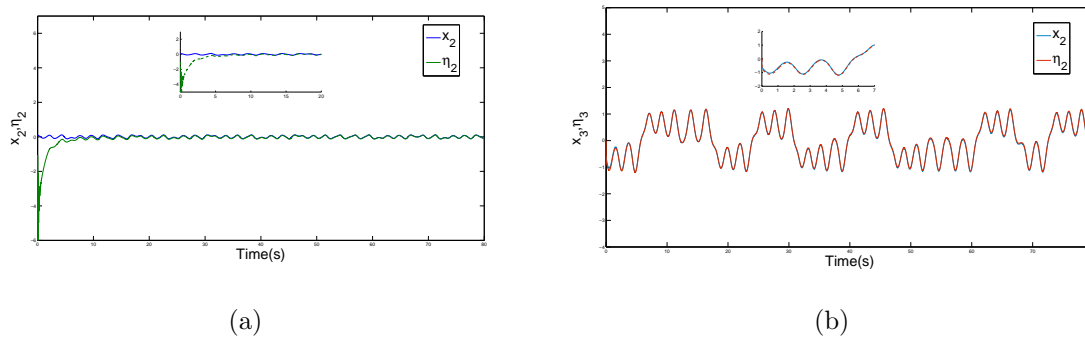


Figura 2.4: (a) Sincronización de sistemas fraccionarios de orden inconmensurado, estado x_2 vs. estimado η_2 , (b) Sincronización de sistemas fraccionarios de orden inconmensurado, estado x_3 vs. estimado η_3 .

2.2.3. Sistema Financiero

Por último tenemos el sistema financiero caótico fraccionario inconmensurado [78]

$$\begin{aligned}
x_1^{(\alpha_1)} &= x_3 + (x_2 - 3)x_1 \\
x_2^{(\alpha_2)} &= 1 - 0.1x_2 - x_1^2 \\
x_3^{(\alpha_3)} &= -x_1 - x_3,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

donde la tasa de interés, la demanda de inversión y el índice de precio están dados por x_1, x_2, x_3 respectivamente, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ es el vector estado, $\alpha_1 = 0.95$, $\alpha_2 = 0.98$ y $\alpha_3 = 0.99$ y la salida como $y = x_3$. El sistema (2.36) puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_3^{(\alpha_3)} &= -\eta_1 - \bar{x}_3 \\
\eta_1^{(\alpha_1)} &= \bar{x}_3 + (\eta_2 - 3)\eta_1 \\
\eta_2^{(\alpha_2)} &= 1 - 0.1\eta_2 - \eta_1^2,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

donde $x_3 = \bar{x}_3$, $x_1 = \eta_1$, $x_2 = \eta_2$ y $y = \bar{x}_3$. De (2.37) las siguientes ecuaciones se cumplen:

$$\eta_1 = -y^{(\alpha_3)} - y \tag{2.38}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{-y^{(\alpha_3)} - y} [D^{\alpha_1} D^{\alpha_3} y - y^{(\alpha_1)} - y + 3(-y^{(\alpha_3)} - y)] \tag{2.39}$$

para (2.38) y (2.39) podemos ver que $\eta_1 = x_1$ y $\eta_2 = x_2$ son OAFI.

Entonces los sistemas maestros quedan de la siguiente forma:

$$\eta_1^{(\alpha_1)} = \bar{x}_3 + (\eta_2 - 3)\eta_1 \tag{2.40}$$

$$y_{\eta_1} = \eta_1 = -y^{(\alpha_3)} - y$$

$$\eta_2^{(\alpha_2)} = 1 - 0.1\eta_2 - \eta_1^2 \tag{2.41}$$

$$y_{\eta_2} = \eta_2 = \frac{1}{-y^{(\alpha_3)} - y} [D^{\alpha_1} D^{\alpha_3} y - y^{(\alpha_1)} - y + 3(-y^{(\alpha_3)} - y)]$$

Ahora, diseñamos el sistema esclavo para (2.40), entonces tenemos:

$$\hat{\eta}_1^{(\alpha_3)} = k_1(\eta_1 - \hat{\eta}_1) \quad (2.42)$$

y sustituyendo (2.38) en (2.42) obtenemos:

$$\hat{\eta}_1^{(\alpha_3)} = k_1(-y^{(\alpha_3)} - y - \hat{\eta}_1) \quad (2.43)$$

Para evitar el orden de la derivada fraccionaria, se propone un cambio de variable $\hat{\eta}_1 = \gamma_1 - k_1 y$ y de la ecuación (2.43) se obtiene:

$$\gamma^{(\alpha_3)} = k_1(k_1 y - y - \gamma_1) \quad (2.44)$$

Para estimar x_2 existe un problema cuando $-y^{(\alpha_3)} - y = 0$, en ese momento la propiedad OAFI se pierde, para evitar esto, de (2.37) se usa un estimado:

$$\eta_2 = 10 - 10\eta_2^{(\alpha_2)} - 10\eta_1^2 \quad (2.45)$$

entonces, el sistema esclavo para (2.41) está dado por:

$$\hat{\eta}_2^{(\alpha_2)} = k_2(\eta_2 - \hat{\eta}_2) \quad (2.46)$$

sustituyendo (2.45) en (2.46) y después de algunas manipulaciones obtenemos el observador

$$\hat{\eta}_2^{(\alpha_2)} = \frac{1}{1 + 10k_2}(10k_2 - 10k_2\eta_1^2 - k_2\eta_2) \quad (2.47)$$

Finalmente las simulaciones muestran la efectividad del observador propuesto con la metodología nueva, las ganancias de las simulaciones son $k_1 = 100$ y $k_2 = 100$.

La Figura 2.5 muestra al sistema financiero y el observador de orden reducido como el esclavo. Para finalizar la sección, la Figura 2.6 muestra la convergencia de los estados estimados a los originales.

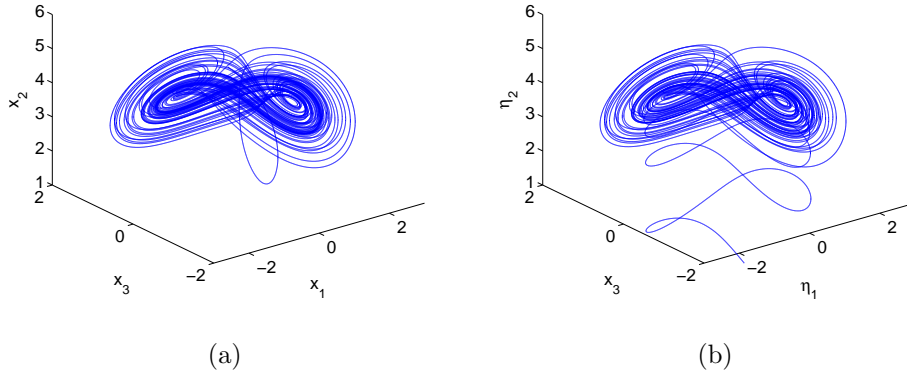


Figura 2.5: (a) Sistema maestro con condiciones iniciales $x_0 = (2, 3, 2)$, (b) Sistema esclavo con condiciones iniciales $\eta_1 = 20, \eta_2 = 30$.

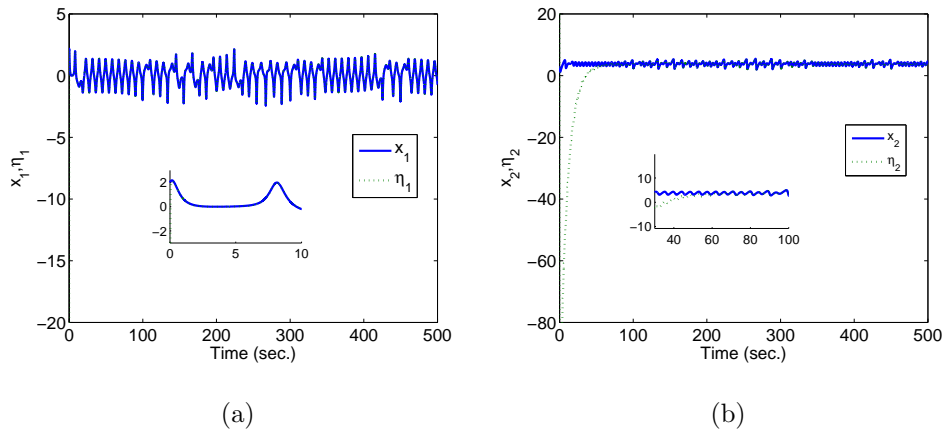


Figura 2.6: (a) Estado x_1 vs. Estimado η_1 , (b) Estado x_2 vs. Estimado η_2 .

Capítulo 3

Sincronización generalizada de sistemas caóticos de orden fraccionario

Existen muchas referencias indicadas de sincronización entre sistemas fraccionarios incommensurados [50–52], en las cuales la mayoría convierte el problema de estabilidad de la dinámica del error de orden fraccionario incommensurado en un problema de orden fraccionario commensurado o incluso en un sistema entero, mediante un cambio de variables o usando sistemas de estructura dinámica y orden fraccionario iguales. En este capítulo la sincronización difiere de los enfoques ya existentes, en el sentido de que el maestro y el esclavo son completamente diferentes, tanto en estructura dinámica como en el orden fraccionario de cada sistema.

Recordemos que la dinámica del error de sincronización está dada de la siguiente manera $e^{(\alpha)} = Z_{Maestro}^{(\alpha)} - Z_{Esclavo}^{(\alpha)}$, en donde, en el caso commensurado el orden de la derivada α corresponde al estado esclavo-maestro que se esté analizando en el momento, por tanto, en el caso incommensurado el orden α del maestro y el del esclavo son diferentes, entonces, el estudio del error de sincronización es más complicado que en los casos típicos, y surgen las siguientes preguntas. ¿Es posible obtener una dinámica del error de sincronización de orden fraccionario incommensurado? y si existe, ¿Hay una manera de analizar la estabili-

dad del error de sincronización?. En este capítulo, damos una respuesta a esta pregunta cuando se trata de sincronizar dos sistemas de orden fraccionario inconmensurado.

El capítulo se divide en tres secciones diferentes, la sincronización generalizada para sistemas caóticos fraccionarios conmensurados (SGF) [79] que servirá para retomar conceptos básicos de la SG fraccionaria conmensurada, la siguiente sección trata la sincronización generalizada para sistemas fraccionarios inconmensurados (SGFI) de estructura dinámica idéntica y mismo orden fraccionario, es decir, retomando lo de la introducción, $\alpha = \bar{\alpha}$ y $f = g$, con $\alpha, \bar{\alpha}$ de orden inconmensurado, y por último tendremos lo que llamaremos cuasi-sincronización generalizada de sistemas fraccionarios inconmensurados (cSGFI) para sistemas con estructura dinámica y orden fraccionario inconmensurado diferente ($\alpha \neq \bar{\alpha}$ y $f \neq g$).

3.1. Planteamiento del problema: caso conmensurado

Recordemos algunos conceptos básicos para la sincronización generalizada:

Definición 3.1.1 (OAF). La variable de estado $x_i \in \mathbb{R}$ satisface la propiedad de observabilidad algebraica fraccionaria (OAF) si el estado es función de las primeras $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ derivadas secuenciales de la salida disponible y y de la entrada u , respectivamente, i.e.,

$$x_i = \phi_i(y, y^{(\alpha)}, D^{(2\alpha)}y, \dots, D^{(r_1\alpha)}y, u, u^{(\alpha)}, D^{(2\alpha)}u, \dots, D^{(r_2\alpha)}u) \quad (3.1)$$

donde $\phi_i : \mathbb{R}^{(r_1+1)p} \times \mathbb{R}^{(r_2+1)m} \rightarrow \mathbb{R}$. □

Definición 3.1.2. Un sistema de orden fraccionario es Picard-Vessiot (PV) si y solo sí el espacio vectorial generado por las derivadas del conjunto $\{D^{(\mu\alpha)}\bar{y}, \mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ tiene dimensión finita, donde \bar{y} es el elemento primitivo diferencial.

Es decir, existe un elemento $\bar{y} \in \mathbb{R}$ y sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es el mínimo entero tal que $D^{(n\alpha)}\bar{y}$ es dependiente analíticamente de

$$\{\bar{y}, \bar{y}^{(\alpha)}, D^{(2\alpha)}\bar{y}, \dots, D^{([n-1]\alpha)}\bar{y}\}$$

entonces

$$D^{(n\alpha)}\bar{y} = -\mathcal{L}(\bar{y}, \bar{y}^{(\alpha)}, D^{(2\alpha)}\bar{y}, \dots, D^{([n-1]\alpha)}\bar{y}, \dots, u, u^{(\alpha)}, D^{(2\alpha)}u, \dots, D^{([\gamma-1]\alpha)}u) + D^{(\gamma\alpha)}u$$

con $n, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definiendo

$$\xi_i = D^{((i-1)\alpha)}\bar{y}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

se obtiene la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Fraccionaria (FCOGF) del sistema (1)

$$\begin{aligned} \xi_1^{(\alpha)} &= \xi_2 \\ \xi_2^{(\alpha)} &= \xi_3 \\ &\vdots \\ \xi_{n-1}^{(\alpha)} &= \xi_n \\ \xi_n^{(\alpha)} &= -\mathcal{L}(\xi_1, \dots, \xi_n, u, u^{(\alpha)}, D^{(2\alpha)}u, \dots, D^{([\gamma-1]\alpha)}u) + D^{(\gamma\alpha)}u \\ \bar{y} &= \xi_1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como consecuencia se establece el siguiente lema cuya prueba se deduce de lo anterior.

Lema 3.1.1. *Un sistema no lineal de orden fraccionario (1) es transformable a una FCOGF si y solamente si es PV. \square*

A continuación, presentamos la metodología para la Sincronización Generalizada para sistemas de orden Fraccionario Commensurado (SGF) [42].

3.1.1. Sincronización generalizada para sistemas caóticos fraccionarios commensurados

El problema de SGF se establece como sigue:

Considérese dos sistemas no lineales de orden fraccionario en la configuración maestro esclavo, donde el maestro está dado por

$$\begin{aligned} x_m^{(\alpha)} &= F_m(x_m, u_m) \\ y_m &= h_m(x_m) \end{aligned} \tag{3.3}$$

y sea el sistema esclavo

$$\begin{aligned}x_s^{(\alpha)} &= F_s(x_s, u_s(x_s, y_m)) \\y_s &= h_s(x_s)\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde $x_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $x_m \in \mathbb{R}^{n_m}$, $F_m : \mathbb{R}^{n_m} \times \mathbb{R}^{\bar{m}_m} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$, $F_s : \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{\bar{m}_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}$, $u_m \in \mathbb{R}^{\bar{m}_m}$, $u_s : \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{p_m} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{m}_s}$, $y_m \in \mathbb{R}^{p_m}$, $y_s \in \mathbb{R}^{p_s}$ y donde $h_s : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{p_s}$, $h_m : \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \mathbb{R}^{p_m}$ son funciones continuas, suponer como polinomios en sus argumentos F_s , F_m , h_s , h_m , con condiciones iniciales $x_{m0} = x_m(0)$ y $x_{s0} = x_s(0)$.

Note que la dinámica fraccionaria del sistema esclavo (3.4) depende de la salida y_m del sistema maestro (3.3).

Se presenta la definición de SGF.

Definición 3.1.3 (Sincronización Generalizada para sistemas de orden Fraccionario(SGF)).

Se dice que los sistemas maestro y esclavo están en estado de SGF si existe un elemento primitivo diferencial fraccionario tal que genera una transformación $H_{ms} : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$ con $H_{ms} = \Phi_s^{-1} \circ \Phi_m$, además existe una variedad algebraica $M = \{(x_s, x_m) | x_m = H_{ms}(x_s)\}$ y un conjunto compacto $B \subset \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_m}$ con $M \subset B$ tal que sus trayectorias con condiciones iniciales en B se acercan a M conforme $t \rightarrow \infty$.

En la Fig. 3.1 se puede ver una mejor representación de la Sincronización Generalizada Fraccionaria.

De la Definición 3.1.3 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.1.1. *Todos los sistemas de orden fraccionario están en estado de SGF si y solamente si es PV.* □

La SGF ocurre si existe un elemento primitivo diferencial fraccionario tal que genera un mapeo H_{ms} desde las trayectorias $x_m(t)$ del atractor en la variedad algebraica M del maestro hacia las trayectorias $x_s(t)$ en el espacio del esclavo \mathbb{R}^n , es decir, $H_{ms}(x_s(t)) = x_m(t)$.

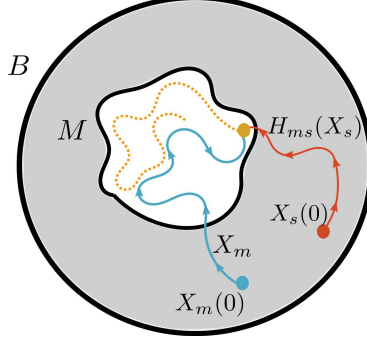


Figura 3.1: SGF régimen

Para sistemas idénticos el mapeo H_{ms} corresponde a la identidad. Para sistemas esclavo y maestro no idénticos, el mapeo es distinto de la identidad, lo cual complica la detección de la SGF.

La Definición 3.1.3 nos lleva al siguiente criterio:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| H_{ms}(x_s) - x_m \| = 0$$

La siguiente observación está relacionada con la forma general en la cual se puede elegir el elemento primitivo diferencial fraccionario.

Observación 2. *El elemento primitivo diferencial fraccionario se elige como*

$$y = \sum_i \alpha_i x_i + \sum_j \beta_j u_j, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$$

Puesto que la Definición de Sincronización Generalizada Fraccionaria menciona una transformación H_{ms} es necesario mencionar el siguiente Teorema

Teorema 3.1.1. [42] *Sean los sistemas (3.3) y (3.4) transformables a una FCOGF. Defínase las trayectorias del sistema maestro y esclavo en coordenadas transformadas, respectivamente, como $z_m := (z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n})'$ y $z_s := (z_{s_1}, z_{s_2}, \dots, z_{s_n})'$ con $z_{m_i} = D^{((i-1)\alpha)} \bar{y}_m$ y $z_{s_i} = D^{((i-1)\alpha)} \bar{y}_s$, para $1 \leq i \leq n$. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| z_m - z_s \| = 0$$

En otras palabras, la sincronización en el sistema de coordenadas transformadas se alcanza completamente y, en consecuencia, se obtiene la SGF en las coordenadas originales, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| H_{ms}(x_s) - x_m \| = 0$$

donde \bar{y}_m y \bar{y}_s son, respectivamente, los elementos primitivos diferenciales fraccionarios para los sistemas maestro y esclavo.

A continuación se demuestra la sincronización generalizada fraccionaria, en base a lo ya mencionado anteriormente.

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede escoger $u_m = 0 \in \mathbb{R}^{\bar{m}_m}$. Entonces el elemento primitivo diferencial fraccionario para el maestro se toma como

$$\bar{y}_m = \sum_i \alpha_{m_i} x_{m_i} = z_{m_1}, \quad \alpha_{m_i} \in \mathbb{R}$$

y para el sistema esclavo

$$\bar{y}_s = \sum_i \alpha_{s_i} x_{s_i} + \sum_j \beta_{s_j} u_{s_j}, \quad \alpha_{s_i}, \beta_{s_i} \in \mathbb{R}$$

lo cual nos lleva a la FCOGF del sistema (3.3),

$$\begin{aligned} z_{m_j}^{(\alpha)} &= z_{m_{j+1}}, \\ z_{m_n}^{(\alpha)} &= -\mathcal{L}_m(z_{m_1}, \dots, z_{m_n}) \end{aligned}$$

y a la FCOGF del sistema (3.4),

$$\begin{aligned} z_{s_j}^{(\alpha)} &= z_{s_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ z_{s_n}^{(\alpha)} &= -\mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + u_\gamma^{(\alpha)} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u_1 &= u_s \\ u_1 &= u_s^{(\alpha)} \\ &\vdots \\ u_\gamma &= D^{((\gamma-1)\alpha)} u_s \end{aligned}$$

luego se propone el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned} u_j^{(\alpha)} &= u_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq \gamma - 1 \\ u_\gamma^{(\alpha)} &= -\mathcal{L}_m(z_{m_1}, \dots, z_{m_n}) + \mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + \kappa(z_m - z_s) \end{aligned}$$

donde $z_m = (z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n})'$, $z_s = (z_{s_1}, z_{s_2}, \dots, z_{s_n})'$ y $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$.

Ahora la dinámica del error de sincronización $e_z = z_m - z_s$ está dado por el siguiente sistema aumentado

$$\begin{aligned} e_{z_j}^{(\alpha)} &= e_{z_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n - 1 \\ e_{z_n}^{(\alpha)} &= -\mathcal{L}_m(z_{m_1}, \dots, z_{m_n}) + \mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) - u_\gamma^{(\alpha)} \\ u_i^{(\alpha)} &= u_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \gamma - 1 \\ u_\gamma^{(\alpha)} &= -\mathcal{L}_m(z_{m_1}, \dots, z_{m_n}) + \mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + \kappa e_z \end{aligned}$$

entonces, se tiene que

$$e_z^{(\alpha)} = A e_z \tag{3.5}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & & -k_{n-1} & -k_n \end{pmatrix}$$

La estabilidad de la ecuación (3.5) se determina empleando el siguiente resultado para sistemas lineales de orden fraccionario.

Teorema 3.1.2. (Matignon [66]). Sea $\alpha < 2$ y $\bar{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. El sistema autónomo

$$x^{(\alpha)} = \bar{A}x \quad \text{con} \quad x(0) = x_0$$

es asintóticamente estable si y sólo si $[\arg(\lambda_i(\bar{A}))] \geq \alpha\pi/2$, donde $\lambda_i(\bar{A})$ es el i -ésimo valor propio de la matriz \bar{A} . □

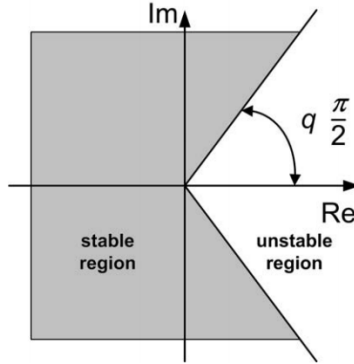


Figura 3.2: Region Estable e Inestable de un sistema fraccionario. $q = \alpha$

En Fig 3.2 se observa la región estable de un sistema fraccionario, que a diferencia del caso entero, esta clase de sistemas pueden tener polos del lado derecho del plano imaginario y ser estables.

Ahora, aplicando el Teorema 3.1.2, se tiene que la ecuación (3.5) es asintóticamente estable si las ganancias $\kappa = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ se eligen de manera que,

$$|\arg(\lambda_i(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

Observación 3. Como un caso particular del Teorema 3.1.2, para $0 < \alpha < 1$, toda matriz Hurwitz satisface la condición

$$|\arg(\lambda_i(A))| > \frac{\pi}{2} > \frac{\alpha\pi}{2}$$

□

3.1.2. Resultado Numérico

SGF Lorenz y Rössler

Considere dos sistemas caóticos fraccionarios: Lorenz y Rössler con subíndices correspondientes a Lorenz 'L' y a Rössler 'R', ambos del mismo orden $n_L = n_R = 3$, en una configuración maestro-esclavo.

Se propone el sistema de Lorenz como el sistema maestro [68].

$$\begin{aligned}x_{1L}^{(\alpha)} &= a_L(x_{2L} - x_{1L}) \\x_{2L}^{(\alpha)} &= b_L x_{1L} - x_{2L} - x_{1L}x_{3L} \\x_{3L}^{(\alpha)} &= -c_L x_{3L} + x_{1L}x_{2L}\end{aligned}\tag{3.6}$$

Con parámetros $a_L = 10$, $b_L = 28$, $c_L = 8/3$, $\alpha = 0.993$ y el elemento primitivo diferencial $y_L = x_{1L}$.

Se toma al sistema de Rössler como el esclavo, determinado por las siguientes ecuaciones [80]

$$\begin{aligned}x_{1R}^{(\alpha)} &= -(x_{2R} + x_{3R}) \\x_{2R}^{(\alpha)} &= x_{1R} + a_R x_{2R} \\x_{3R}^{(\alpha)} &= 0.2 + x_{3R}(x_{1R} - 10)\end{aligned}\tag{3.7}$$

Los parámetros $a_R = 0.25$, $\alpha = 0.993$ y con el elemento primitivo como $y_R = x_{2R} + u_1$.

Obtenemos la siguiente transformación de coordenadas para así poder obtener la FCOGF.

$$\Phi_L(x_L) = \begin{bmatrix} z_{1L} \\ z_{2L} \\ z_{3L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_L \\ y_L^{(\alpha)} \\ D^{(2\alpha)}y_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1L} \\ a_L x_{2L} - a_L x_{1L} \\ a_L(b_L + a_L)x_{1L} - a_L(1 + a_L)x_{2L} - a_L x_{1L}x_{3L} \end{bmatrix}\tag{3.8}$$

Cuya inversa se determina de la siguiente manera

$$\Phi_L^{-1}(z_L) = \begin{bmatrix} x_{1L} \\ x_{2L} \\ x_{3L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{1L}(z_L) \\ \tilde{\phi}_{2L}(z_L) \\ \tilde{\phi}_{3L}(z_L) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$= \begin{bmatrix} z_{1L} \\ \frac{z_{2L} + a_L z_{1L}}{a_L} \\ \varphi(z_L) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

en donde

$$\varphi(z_L) = \frac{z_{3L} - a_L(b_L + a_L)z_{1L} + a_L(1 + a_L)(z_{1L} + \frac{z_{2L}}{a_L})}{-a_L z_{1L}} \quad (3.11)$$

Para la Eq. (3.11) es claro que para poder estimar en todo momento el estado x_{3L} es necesario que $z_1 \neq 0$ como no lo podemos asegurar $\forall t$, se define la función característica

$$\aleph = \begin{cases} 1 & \text{si } |z_{1L}| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } |z_{1L}| > \varepsilon \end{cases}$$

Sea $v = \aleph(\varepsilon - z_{1L}) + z_{1L}$

entonces

$$\text{Si } |z_{1L}| \leq \varepsilon \Rightarrow \aleph = 1 \text{ esto es } v = \varepsilon$$

$$\text{Si } |z_{1L}| > \varepsilon \Rightarrow \aleph = 0 \text{ esto es } v = z_{1L}$$

Esto con el fin de evitar las singularidades del estado x_{3L} .

Retomando el procedimiento se tiene que en coordenadas transformadas, la dinámica del sistema maestro de Lorenz es

$$z_L^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} z_{1L}^{(\alpha)} \\ z_{2L}^{(\alpha)} \\ z_{3L}^{(\alpha)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_L x_{2L} - a_L x_{1L} \\ a_L(b_L + a_L)x_{1L} - a_L(1 + a_L)x_{2L} - a_L x_{1L}x_{3L} \\ \Psi_L(x_L) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Donde $\Psi_L(x_L) = (a_L b_L + a_L^2)(a_L x_{2L} - a_L x_{1L}) - (a_L + a_L^2)(b_L x_{1L} - x_{2L} - x_{1L}x_{3L}) - a_L x_{3L}(a_L x_{2L} - a_L x_{1L}) - a_L x_{1L}(-c_L x_{2L} + x_{1L}x_{2L})$.

Se puede observar que (3.12) esta expresada en su FCOGF.

De igual manera se procede con el sistema esclavo de Rössler.

El sistema en coordenadas transformadas queda de la siguiente forma

$$\Phi_R(x_R) = \begin{bmatrix} z_{1R} \\ z_{2R} \\ z_{3R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_R \\ y_R^{(\alpha)} \\ D^{(2\alpha)}y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2R} + u_1 \\ x_{1R} + a_R x_{2R} + u_2 \\ a_R x_{1R} + (a_R^2 - 1)x_{2R} - x_{3R} + u_3 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La inversa del sistema transformado queda de la siguiente forma

$$\Phi_R^{-1}(z_R) = \begin{bmatrix} x_{1R} \\ x_{2R} \\ x_{3R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{1R}(z_R) \\ \tilde{\phi}_{2R}(z_R) \\ \tilde{\phi}_{3R}(z_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_R(z_{1R} - u_1) + z_{2R} - u_2 \\ z_{1R} - u_1 \\ -z_{1R} + a_R z_{2R} - z_{3R} + u_1 - a_R u_2 + u_3 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

La dinámica del sistema esclavo de Rössler se escribe

$$z_R^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} z_{1R}^{(\alpha)} \\ z_{2R}^{(\alpha)} \\ z_{3R}^{(\alpha)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1R} + a_R x_{2R} + u_2 \\ a_R x_{1R} + (a_R^2 - 1)x_{2R} - x_{3R} + u_3 \\ \Psi_R(x_R) + \bar{u} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

en donde

$$\Psi_R(x_R) = ((a_R^2 - 1) - x_{3R})x_{1R} + ((a_R^2 - 1)a - a)x_{2R} + (10 - a_R)x_{3R} - 0.2 \quad (3.16)$$

Se observa que (3.15) se encuentra expresada en su FCOGF.

Entonces se tiene que el sistema de Rössler aumentado y controlado en coordenadas transformadas se representa como

$$\begin{bmatrix} z_{1R}^{(\alpha)} \\ z_{2R}^{(\alpha)} \\ z_{3R}^{(\alpha)} \\ u_1^{(\alpha)} \\ u_2^{(\alpha)} \\ u_3^{(\alpha)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2R} \\ z_{3R} \\ \Psi_R(x_R) + \bar{u} \\ u_2 \\ u_3 \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} u_1^{(\alpha)} &= u_2 \\ u_2^{(\alpha)} &= u_3 \\ u_3^{(\alpha)} &= \bar{u} \end{aligned} \quad (3.18)$$

son señales de control que necesitan ser diseñadas para lograr la sincronización entre las trayectorias de los sistemas (3.8) y (3.13), de tal forma que el objetivo del control es encontrar \bar{u} tal que las trayectorias del sistema esclavo (3.8) sigan a las trayectorias del sistema maestro (3.13), es decir, encontrar una \bar{u} , tal que $(z_{1R}, z_{2R}, z_{3R}) \longrightarrow (z_{1L}, z_{2L}, z_{3L})$ conforme $t \longrightarrow \infty$.

El error de sincronización en coordenadas transformadas e_z , se define como

$$e_z = \begin{bmatrix} e_{z1} \\ e_{z2} \\ e_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1L} - z_{1R} \\ z_{2L} - z_{2R} \\ z_{3L} - z_{3R} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

La dinámica del error viene dada por

$$e_z^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} e_{z1}^{(\alpha)} \\ e_{z2}^{(\alpha)} \\ e_{z3}^{(\alpha)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \Psi_L(x_L) - \Psi_R(x_R) - \bar{u}(x_R, y_L) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Por tanto, la transformación H_{LR} se calcula a partir de (3.9) y (3.14)

$$H_{LR} = \phi_L^{-1} \circ \phi_R = \phi_L^{-1} \begin{bmatrix} x_{2L} + u_1 \\ x_{1L} + a_R x_{2R} + u_2 \\ a_R x_{1R} + (a_R^2 - 1)x_{2R} - x_{3R} + u_3 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

La ley de control se define

$$\bar{u}(x_R, y_L) = u_3^{(\alpha)} = \Psi_L(x_L) - \Psi_R(x_R) - k e_z \quad (3.22)$$

En donde $k = [k_1 \ k_2 \ k_3]$.

La dinámica del error de sincronización está dada por, $e_z^{(\alpha)} = A e_z$ donde $0 < \alpha < 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

De acuerdo a la Observación 3, se debe verificar que A es Hurwitz. Se sabe que una matriz es Hurwitz si y sólo si , las raíces de su polinomio característico $\det(sI - A)$ tiene partes reales negativas.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_1 & k_2 & s + k_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

El polinomio característico

$$s^2(s + k_3) + k_1 + k_2s = s^3 + k_3s^2 + k_2s + k_1 \quad (3.25)$$

Si la matriz A es estable entonces todos los coeficientes k_i del polinomio característico deben ser estrictamente positivos.

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz a (3.25) cuando

$$\begin{aligned} k_1 &> 0 \\ k_2 &> \frac{k_2}{k_3} \\ k_3 &> 0 \end{aligned}$$

concluimos $\|e_z\| \rightarrow 0$ en $t \rightarrow \infty$.

Por el Teorema de Matignon [66], para $0 < \alpha < 1$, toda matriz Hurwitz satisface la condición

$$|\arg(\lambda_i(A))| > \frac{\pi}{2} > \frac{\alpha\pi}{2}$$

Por tanto, el sistema autónomo es asintóticamente estable.

La figura 3.3 muestra la sincronización en coordenadas transformadas con $k = [100, 200, 100]$, la figura 3.4 muestra el error de sincronización en coordenadas transformadas y en la Figura 3.5 se muestra la SGF en coordenadas originales.

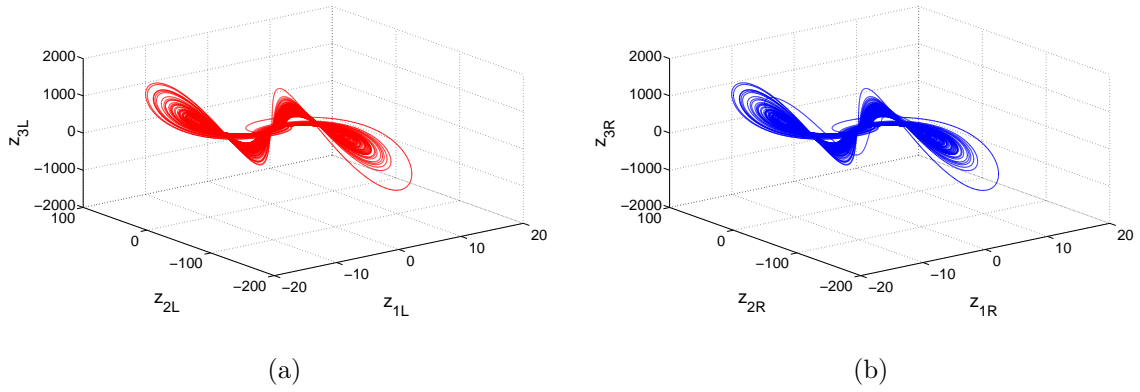


Figura 3.3: Sincronización en Coordenadas Transformadas (a) Lorenz y (b) Rössler.

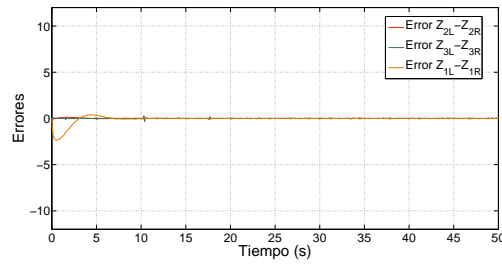


Figura 3.4: Trayectorias del error e_z

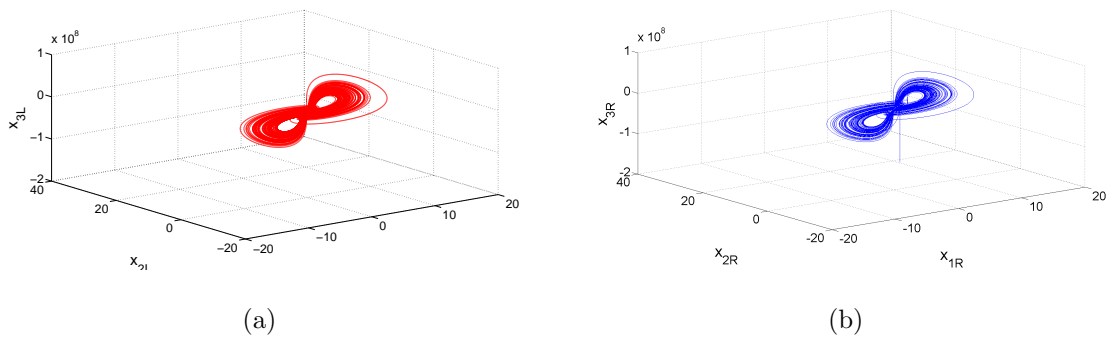


Figura 3.5: Sincronización Generalizada en Coordenadas Originales (a) Lorenz y (b) Rössler.

Como se puede observar para el análisis de estabilidad de la dinámica del error de sincronización se usó el Teorema de Matignon que es, hasta la fecha exclusivamente pa-

ra sistemas fraccionarios conmensurados, el problema se vuelve complicado cuando en la dinámica del error al tener sistemas fraccionarios inconmensurados no se sabe que orden de derivada fraccionaria hay que tomar y aún así teniendo un orden α inconmensurado es imposible usar el Teorema de Matignon, por esto es interesante el estudio de este tipo de sistemas.

A continuación presentamos el caso SG para el caso fraccionario inconmensurado.

3.2. Planteamiento del Problema en Fraccionario Inconmensurado

Ahora, que hemos visto el caso de SGF para sistemas conmensurados vamos a introducir el caso de Sincronización Generalizada para sistemas fraccionarios inconmensurados (SGFI) .

Para el problema de SGFI, vamos a tomar en cuenta dos casos, el caso cuando $\alpha \neq \bar{\alpha}$ y $\alpha = \bar{\alpha}$, donde α corresponde al vector de orden de derivada fraccionaria inconmensurada del maestro y $\bar{\alpha}$ al vector de orden de derivada fraccionaria inconmensurada del esclavo. Nos daremos cuenta que a pesar de que dos sistemas ya sea de estructura dinámica idéntica o diferentes y orden de derivada fraccionaria inconmensurada igual, la metodología a usar para el análisis de estabilidad dependerá mucho del elemento primitivo diferencial, dando así diferentes resultados.

Primero vamos a introducir los siguientes conceptos derivados del caso conmensurado que nos serán de ayuda para desarrollar la metodología del caso inconmensurado

3.2.1. Conceptos Básicos

Para este caso se maneja la propiedad de observabilidad algebraica fraccionaria incommensurada mencionada en la Definición 2.1.1.

A continuación, se introduce una nueva definición para sistemas PV.

Definición 3.2.1. El sistema de orden fraccionario incommensurado es Picard-Vessiot (PV) si el espacio vectorial generado por el conjunto de derivadas $\{D^{\alpha_n}, \dots, D^{\alpha_0}\bar{y}\}$ es de dimensión finita, donde $0 \leq n, 0 \leq \alpha_k \leq 1, 0 \leq k \leq n, \bar{y}$ es el elemento primitivo diferencial fraccionario incommensurado.

Lema 3.2.1. *Un sistema no lineal de orden fraccionario incommensurado (1) es transformable a la FCOGFI:*

$$\begin{aligned} z_j^{(\alpha_j)} &= z_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ z_n^{(\alpha_n)} &= -\mathcal{L}(z, u, \dots, D^{\alpha_{n-1}} \dots D^{\alpha_1} u) + D^{\alpha_n} \dots D^{\alpha_1} u \\ \bar{y} &= z_1 \end{aligned} \tag{3.26}$$

si y sólo si es PV donde \bar{y}_i es el elemento primitivo fraccional incommensurado. \square

A continuación presentaremos la siguiente metodología para sincronizar sistemas incommensurados de estructura dinámica y orden fraccionario incommensurado idénticos.

3.2.2. Sincronización generalizada para sistemas caóticos fraccionarios incommensurados (Primer Caso)

Considere la configuración maestro-esclavo para dos sistemas no lineales de orden fraccionarios incommensurados de la forma (1), sea el sistema maestro representado por:

$$\begin{aligned} x_M^{(\alpha)} &= F_M(x_M, u_M) \\ y_M &= h_M(x_M) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Y el sistema esclavo:

$$\begin{aligned}x_S^{(\bar{\alpha})} &= F_S(x_S, u_S(x_S, y_M)) \\y_S &= h_S(x_S)\end{aligned}\tag{3.28}$$

Donde $x_S \in \mathbb{R}^n$, $F_S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{m}_S} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F_M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{m}_M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_M \in \mathbb{R}^n$, $h_S, h_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $u_M \in \mathbb{R}^{\bar{m}_M}$, $u_S \in \mathbb{R}^{\bar{m}_S}$, $u_S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{m}_S}$, $y_M, y_S \in \mathbb{R}$, F_S, F_M, h_S, h_M tienen argumentos de tipo polinomial, con condiciones iniciales $x_{M0} = x_M(0)$ y $x_{S0} = x_S(0)$; con los subíndices M como el sistema maestro y S como el sistema esclavo, el orden fraccionario $\bar{\alpha}$ es igual a α por tanto manejaremos al maestro y esclavo como una sola α teniendo en cuenta que es un orden fraccionario inconmensurado.

Introducimos una nueva definición de la SG para sistemas fraccionarios inconmensurados que dependerá de la existencia del elemento primitivo diferencial fraccionario inconmensurado como sigue:

Definición 3.2.2. *Sincronización Generalizada para sistemas Fraccionarios Inconmensurados (SGFI).* Se dice que los sistemas maestro y esclavo están en estado de *SGFI* si existe un elemento primitivo diferencial fraccionario inconmensurado tal que genere una transformación $H_{MS} : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$ con $H_{MS} = \phi_M^{-1} \circ \phi_S$ así también existe una variedad algebraica $M = \{(x_S, x_M) | x_M = H_{MS}(x_S)\}$ y un conjunto compacto $B \subset \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_m}$ con $M \subset B$ tal que sus trayectorias con condiciones iniciales en B se acercan a M conforme $t \rightarrow \infty$.

De la Definición 3.2.2 y el Lema 3.2.1 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.2.2. *Todos los sistemas de orden fraccionario se encuentran en estado de SGFI si y solamente si son PV.* □

Sin pérdida de generalidad suponga que se escoge $u_m = 0 \in \mathbb{R}^{\bar{m}_n}$. Entonces el elemento primitivo diferencial fraccionario inconmensurado para el maestro se toma como:

$$\bar{y}_M = \sum_j \alpha_{M_j} x_{M_j} =: z_{M_1}, \quad \alpha_{M_j} \in \mathbb{R}$$

y para el sistema esclavo, como:

$$\bar{y}_S = \sum_j \alpha_{S_j} x_{S_j} + \sum_k \beta_{S_k} u_{S_k} =: z_{S_1}, \quad \alpha_{S_j}, \beta_{S_k} \in \mathbb{R}$$

De acuerdo con el Lema 3.2.1, la FCOGFI del sistema (3.27) es la siguiente:

$$\begin{aligned} z_{M_j}^{(\alpha_j)} &= z_{M_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ z_{M_j}^{(\alpha_n)} &= -\mathcal{L}_M(z_{M_1}, z_{M_2}, \dots, z_{M_n}) \end{aligned}$$

y la FCOGFI correspondiente al sistema (3.28) es,

$$\begin{aligned} z_{S_j}^{(\alpha_j)} &= z_{S_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ z_{S_j}^{(\alpha_n)} &= -\mathcal{L}_s(z_{S_1}, z_{S_2}, \dots, z_{S_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + u_\gamma^{(\alpha_n)} \end{aligned}$$

donde, naturalmente la ley de control dinámica se expresa como una cadena de integra-dores:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_S \\ u_2 &= u_S^{(\alpha_1)} \\ u_3 &= D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} u_S \\ &\vdots \\ u_\gamma &= D^{\alpha_{\gamma-1}} \dots D^{\alpha_1} u_S \end{aligned}$$

Ahora, considere que la dinámica del error de sincronización $e_z = z_M - z_S$ está dada por el sistema:

$$\begin{aligned} e_{z_j}^{(\alpha_j)} &= e_{z_{j+1}} \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ e_{z_n}^{(\alpha_n)} &= -\mathcal{L}_M(z_{M_1}, z_{M_2}, \dots, z_{M_n}) + \mathcal{L}_S(z_{S_1}, z_{S_2}, \dots, z_{S_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) - u_\gamma^{(\alpha_n)} \\ u_j^{(\alpha_j)} &= u_{j+1} \quad 1 \leq j \leq \gamma-1 \\ u_\gamma^{(\alpha_n)} &= -\mathcal{L}_M(z_{M_1}, z_{M_2}, \dots, z_{M_n}) + \mathcal{L}_S(z_{S_1}, z_{S_2}, \dots, z_{S_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + K e_z \end{aligned}$$

donde $K = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n)$, $k_i > 0$ con $i = 1, \dots, n$ y $e_z = (e_{z_1} \ e_{z_2} \ \dots \ e_{z_n})^T$. Por lo tanto,

$$e_z^{(\alpha)} = Ae_z \tag{3.29}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \end{pmatrix}$$

Como mencionamos anteriormente, se puede observar que la dinámica del error es lineal y que para este caso, el Teorema de estabilidad de Matignon no puede ser aplicado debido a que el vector de orden fraccionario α cada elemento es diferente entre sí, por tanto, la estabilidad de la ecuación (3.29) se determina utilizando el siguiente resultado sobre sistemas lineales de orden fraccionario inconmensurado.

Teorema 3.2.3. [67] *Considere el siguiente sistema lineal n -dimensional de orden fraccionario:*

$$\begin{aligned} \frac{D^{(\alpha_1)}x_1(t)}{dt^{(\alpha_1)}} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{D^{(\alpha_2)}x_2(t)}{dt^{(\alpha_2)}} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{D^{(\alpha_n)}x_n(t)}{dt^{(\alpha_n)}} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde α_i es un número racional entre 0 y 1. Suponga que M es el mínimo común múltiplo de los denominadores u_i de α_i donde $\alpha_i = v_i/u_i$, $(u_i, v_i) = 1$, $u_i, v_i \in \mathbb{Z}^+$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Defínase

$$\Delta(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda^{M\alpha_1} - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda^{M\alpha_2} - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda^{M\alpha_n} - a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Entonces la solución trivial del sistema (3.30) es globalmente asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov si todas sus raíces λ de la ecuación $\det(\Delta(\lambda)) = 0$ satisfacen $|\arg(\lambda)| > \pi/2M$. $\Delta(\lambda)$ es la matriz característica y $\det(\Delta(\lambda)) = 0$ es el polinomio característico del sistema (3.31).

Esto tiene como resultado el siguiente Teorema y principal resultado de esta sección.

Teorema 3.2.4. *Sean los sistema (3.27) y (3.28) transformables a una FCOGFI. Defínase a $z_M = (z_{M_1}, z_{M_2}, \dots, z_{M_n})^T$ y a $z_S = (z_{S_1}, z_{S_2}, \dots, z_{S_n})^T$ como las trayectorias del sistema maestro y esclavo en coordenadas transformadas, respectivamente, con $z_{M_k} = D^{\alpha_{k-1} \dots D^{\alpha_0}} \bar{y}_M$ y $z_{S_k} = D^{\alpha_{k-1} \dots D^{\alpha_0}} \bar{y}_S$ para $1 \leq k \leq n$. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_M - z_S\| = 0.$$

Es decir, los sistemas en coordenadas transformadas se sincronizan completamente y, en

consecuencia, se obtiene la SGFI en coordenadas originales, o equivalentemente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| x_M - H_{MS}(x_S) \| = 0,$$

donde \bar{y}_M y \bar{y}_S son los elementos primitivos diferenciales fraccionarios para los sistemas maestro y esclavo, respectivamente.

Resultado Numéricos

SGFI Rössler y Rössler

A continuación se presentan dos sistemas particulares de Rössler fraccionarios incommensurados actuando como maestro R y esclavo r.

Se propone el siguiente sistema de Rössler [80] como maestro:

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1} &= -x_{2R} - x_{3R} \\ x_2^{\alpha_2} &= x_{1R} + a_R x_{2R} \\ x_3^{\alpha_3} &= 0.2 + x_{3R}(x_{1R} - 10) \end{aligned} \tag{3.32}$$

con $a_R = 0.63$, y el orden de la derivada fraccionaria como $\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 0.8$, $\alpha_3 = 0.7$ y el elemento primitivo diferencial fraccionario como $y_R = x_{2R}$.

Y el sistema esclavo de Rössler [80] como

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1} &= -x_{2r} - x_{3r} \\ x_2^{\alpha_2} &= x_{1r} + a_r x_{2r} \\ x_3^{\alpha_3} &= 0.2 + \bar{x}_{3r}(x_{1r} - 10) \end{aligned} \tag{3.33}$$

con $a_r = 0.53$, y el orden de la derivada fraccionaria como $\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 0.8$, $\alpha_3 = 0.7$ y el elemento primitivo diferencial fraccionario como $y_r = x_{2r} + u_1$.

La Figura (3.6) muestra el comportamiento caótico de (3.32) y de (3.33), maestro y esclavo respectivamente.

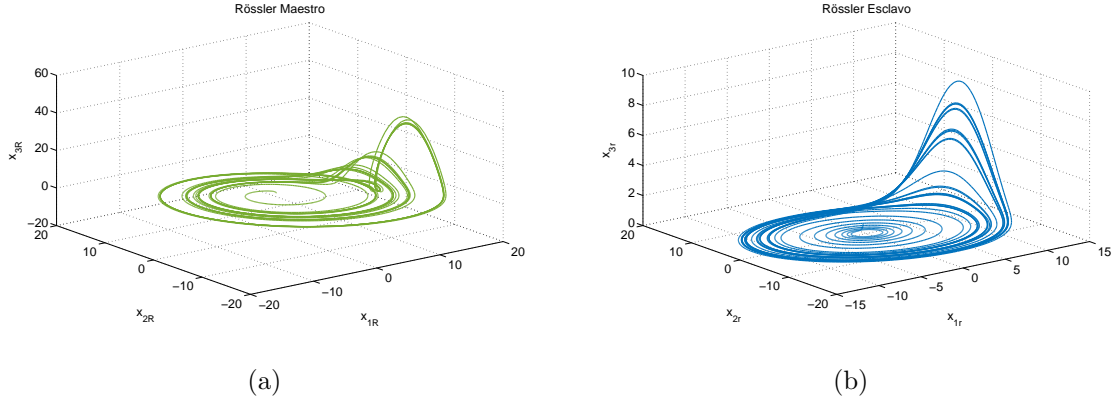


Figura 3.6: Sistemas caóticos fraccionarios incommensurados de Rössler (a) Maestro con $x_R(0) = (0.5, 1.5, 0.1)$ (b) Esclavo $x_r(0) = (1, 0, -5)$

Ahora del sistema maestro (3.32), obtenemos la siguiente transformación de coordenadas:

$$\Phi_R(x_R) = \begin{bmatrix} z_{1R} \\ z_{2R} \\ z_{3R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_R \\ D^{\alpha_2} y_R \\ D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2R} \\ x_{1R} + 0.63x_{2R} \\ -x_{2R} - x_{3R} + D^{\alpha_1}(0.63x_{2R}) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Cuya inversa se determina de la siguiente manera

$$\Phi_R^{-1}(z_R) = \begin{bmatrix} x_{1R} \\ x_{2R} \\ x_{3R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2R} - 0.63z_{1R} \\ z_{1R} \\ -z_{3R} - z_{1R} + D^{\alpha_1} 0.63z_{1R} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$= \begin{bmatrix} D^{\alpha_2} y_R - 0.63y_R \\ y_R \\ -D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} y_R - y_R + D^{\alpha_1} 0.63y_R \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Como podemos observar el sistema (3.35) cumple con la propiedad de IFAO, ya que la variable x_R se puede expresar en la salida y_R , sus derivadas fraccionarias y entrada disponible que en este caso $u_M = 0$.

Ahora, se tiene que en coordenadas transformadas, la dinámica del sistema maestro de Rössler es

$$z_R^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} z_{1R}^{(\alpha_2)} \\ z_{2R}^{(\alpha_1)} \\ z_{3R}^{(\alpha_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2R} \\ z_{3R} \\ \Psi_R(x_R) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Donde $\Psi_R(x_R) = -0.2 - x_{3R}(x_{1R} - 10) - D^{\alpha_3}x_{2R} + D^{\alpha_3}D^{\alpha_1}0.63x_{2R}$

Se puede observar que (3.37) esta expresada en su FCOGFI.

Ahora analizaremos el sistema esclavo de Rössler (3.33), obtenemos la siguiente transformación de coordenadas:

$$\Phi_r(x_r) = \begin{bmatrix} z_{1r} \\ z_{2r} \\ z_{3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_r \\ D^{\alpha_2}y_r \\ D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2r} + u_1 \\ x_{1r} + 0.53x_{2r} + u_2 \\ -x_{2r} - x_{3r} + D^{\alpha_1}(0.53x_{2r}) + u_3 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Cuya inversa se determina de la siguiente manera

$$\Phi_r^{-1}(z_r) = \begin{bmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ x_{3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2r} - 0.63z_{1r} + 0.63u_1 - u_2 \\ z_{1r} - u_1 \\ -z_{3r} - z_{1r} + u_1 + D^{\alpha_1}0.63(z_{1r} - u_1) + u_3 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$= \begin{bmatrix} D^{\alpha_2}y_r - 0.63y_r + 0.63u_1 - u_2 \\ y_r \\ -D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}y_r - y_r + D^{\alpha_1}0.63y_r + D^{\alpha_1}0.63u_1 + u_1 + u_3 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Como podemos observar el sistema (3.39) cumple con la propiedad de IFAO, ya que la variable x_R se puede expresar en la salida y_R , sus derivadas fraccionarias y de la entrada u_R .

Ahora, se tiene que en coordenadas transformadas, la dinámica del sistema maestro de Rössler es

$$z_r^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} z_{1r}^{(\alpha_2)} \\ z_{2r}^{(\alpha_1)} \\ z_{3r}^{(\alpha_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2r} \\ z_{3r} \\ \Psi_r(x_r) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Donde $\Psi_r(x_r) = -D^{\alpha_3}x_{2r} - 0.2 - x_{3r}(x_{1r} - 10) + D^{\alpha_3}D^{\alpha_1}0.63x_{2r} + u_3^{(\alpha_3)}$

Se puede observar que (3.41) esta expresada en su FCOGFI.

Entonces se tiene que el sistema de Rössler aumentado y controlado en coordenadas transformadas se representa como

$$\begin{bmatrix} z_{1r}^{(\alpha_2)} \\ z_{2r}^{(\alpha_1)} \\ z_{3r}^{(\alpha_3)} \\ u_1^{(\alpha_2)} \\ u_2^{(\alpha_1)} \\ u_3^{(\alpha_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2r} \\ z_{3r} \\ \Psi_r(x_r) + \bar{u} \\ u_2 \\ u_3 \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

donde

$$\begin{aligned}
u_1^{(\alpha_2)} &= u_2 \\
u_2^{(\alpha_1)} &= u_3 \\
u_3^{(\alpha_3)} &= \bar{u}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

son señales de control que necesitan ser diseñadas para lograr la sincronización entre las trayectorias de los sistemas (3.32) y (3.33), de tal forma que el objetivo del control es encontrar \bar{u} tal que las trayectorias del sistema esclavo (3.33) sigan a las trayectorias del sistema maestro (3.32), es decir, encontrar una \bar{u} , tal que $(z_{1r}, z_{2r}, z_{3r}) \rightarrow (z_{1R}, z_{2R}, z_{3R})$ conforme $t \rightarrow \infty$.

El error de sincronización en coordenadas transformadas e_z , se define como

$$e_z = \begin{bmatrix} e_{z1} \\ e_{z2} \\ e_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1R} - z_{1r} \\ z_{2R} - z_{2r} \\ z_{3R} - z_{3r} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

La dinámica del error viene dada por

$$e_z^{(\alpha_R)} = \begin{bmatrix} e_{z1}^{(\alpha_2)} \\ e_{z2}^{(\alpha_1)} \\ e_{z3}^{(\alpha_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \Psi_R(x_R) - \Psi_r(x_r) - \bar{u}(x_r, y_R) \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Por tanto, la transformación H_{Rr} se calcula a partir de $\Phi_r(x_r)$ (3.38) y $\Phi_R(z_R)$ (3.35)

$$H_{LR} = \phi_L^{-1} \circ \phi_R = \phi_L^{-1} \begin{bmatrix} x_{2L} + u_1 \\ x_{1L} + a_R x_{2R} + u_2 \\ a_R x_{1R} + (a_R^2 - 1)x_{2R} - x_{3R} + u_3 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

La ley de control se define

$$\bar{u}(x_R, y_L) = u_3^{(\alpha)} = \Psi_L(x_L) - \Psi_R(x_R) - ke_z \quad (3.47)$$

En donde $k = [k_1 \ k_2 \ k_3]$.

La dinámica del error de sincronización está dada por,

$$e_z^{(\alpha)} = Ae_z \quad (3.48)$$

donde $0 < \alpha < 1$ y $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Debido al que el teorema de Matignon esta hecho para casos conmensurados, usaremos el Teorema 3.2.3 que es usado para analizar la estabilidad de sistemas lineales fraccionarios inconmensurados.

Análogamente de (3.30) tendríamos

$$\begin{aligned} e_z^{\alpha_2} &= z_{1R} - z_{1r} \\ e_z^{\alpha_1} &= z_{2R} - z_{2r} \\ e_z^{\alpha_3} &= \Psi_R(x_R) - \Psi_r(x_r) - \bar{u}x_r, y_R \end{aligned} \quad (3.50)$$

en donde $M = 10$ que es el mínimo común múltiplo entre todas las α 's, $\alpha_1 = 9/10$, $\alpha_2 = 8/10$, $\alpha_3 = 7/10$ entonces tenemos:

$$\begin{pmatrix} \lambda^{10(0.8)} & -1 & 0 \\ 0 & \lambda^{10(0.9)} & -1 \\ k_1 & k_2 & \lambda^{10(0.7)} + k_3 \end{pmatrix}$$

Obteniendo su polinomio característico

$$\lambda^{24} + k_3\lambda^{17} + k_2\lambda^8 + k_1 \quad (3.51)$$

por medio de un método numérico obtenemos las K 's correspondientes a la ecuación característica para que (3.48) sea estable $K = [1900, 1800, 1400]$.

En la Figura 3.7 y en la Figura 3.8 observamos la SGFI en coordenadas transformadas y originales, en la Figura 3.9 podemos apreciar los errores de SGFI para coordenadas transformadas y originales.

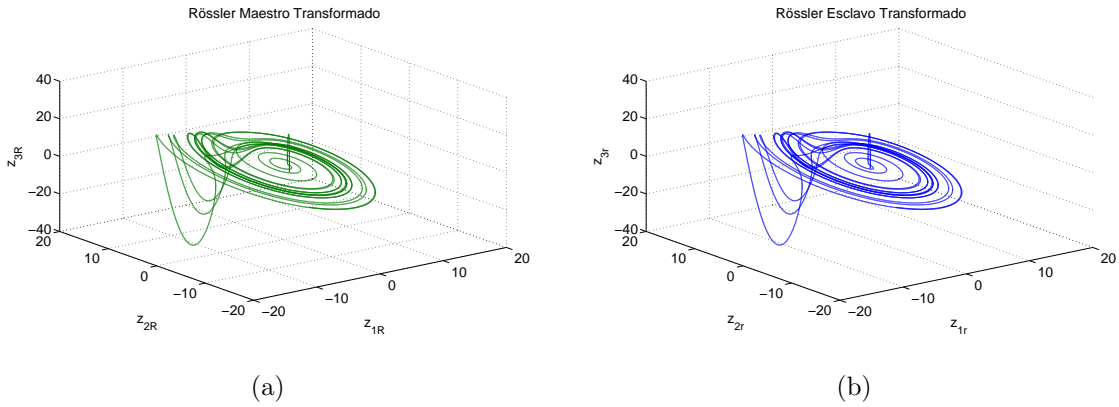


Figura 3.7: Sincronización de Sistemas Fraccionario Inconmensurados en Coordenadas Transformadas (a) Rössler maestro y (b) Rössler esclavo.

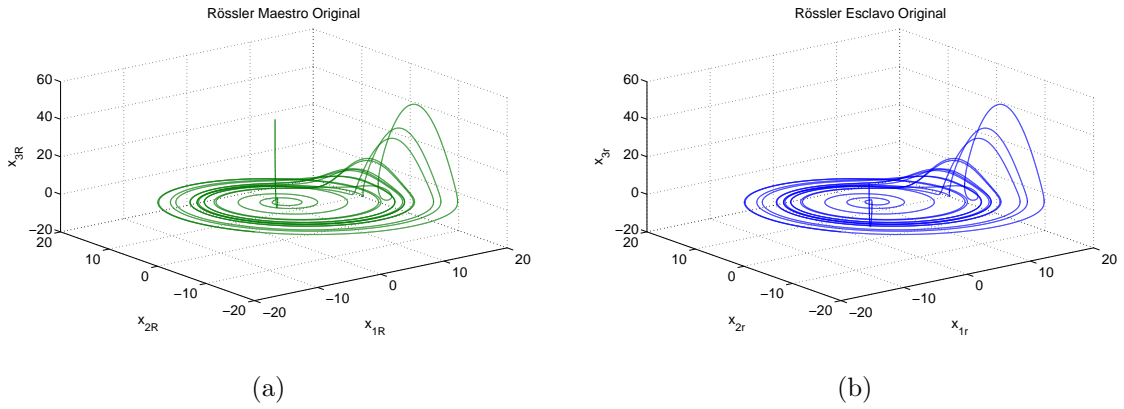


Figura 3.8: Sincronización Generalizada de Sistemas Fraccionario Inconmensurados en Coordenadas Originales (a) Rössler maestro y (b) Rössler esclavo.

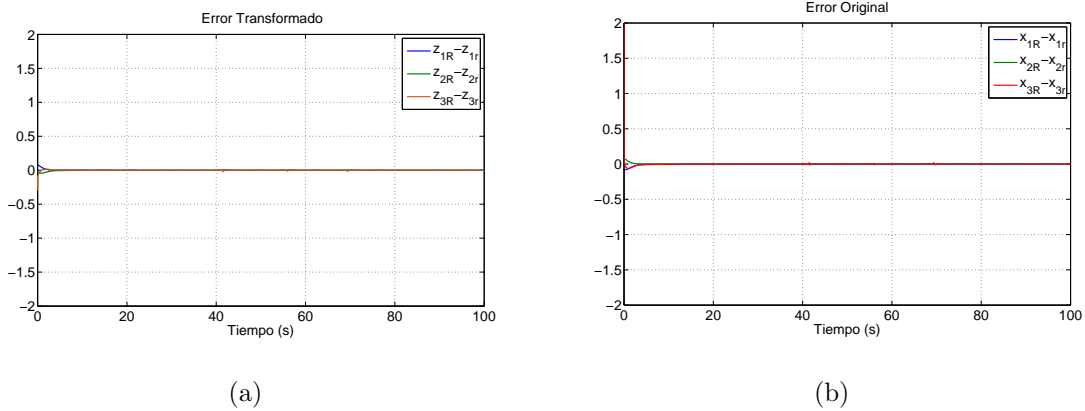


Figura 3.9: Error de la SGFI (a) en coordendas transformadas (b) en coordenadas originales

3.2.3. Análisis del problema

Como se observo en la subsección anterior la problemática de la SGFI se resuelve optando por otro Teorema de análisis de estabilidad del error, pero esto solamente funciona cuando los sistemas tienen el mismo orden de derivada inconmensurada y así mismo la salida disponible del sistema.

Suponga el siguiente caso, dos sistemas fraccionarios Chua-Hartley de estructura dinámi-

ca y orden fraccionario inconmensurado idénticos, pero ahora la salida disponible será diferente entre ambos, entonces

Maestro [68]:

$$\begin{aligned}
x_{1C}^{(\alpha_1)} &= a_C x_{2C} + \frac{a_C x_{1C}}{7} - \frac{2a_C x_{1C}^3}{7} \\
x_{2C}^{(\alpha_2)} &= x_{1C} - x_{2C} + x_{3C} \\
x_{3C}^{(\alpha_3)} &= -\beta_C x_{2C} \\
y_C &= x_{1C}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Donde el orden de la derivada es $\alpha_1 = 0.99$, $\alpha_2 = 0.91$, $\alpha_3 = 0.95$, $a_C = 12.75$ y $\beta_C = 100/7$.

Esclavo [81]:

$$\begin{aligned}
x_{1ce}^{(\alpha_1)} &= a x_{2ce} + \frac{a x_{1ce}}{7} - \frac{2a x_{1ce}^3}{7} \\
x_{2ce}^{(\alpha_2)} &= x_{1ce} - x_{2ce} + x_{3ce} \\
x_{3ce}^{(\alpha_3)} &= -\beta_{ce} x_{2ce} \\
y_{ce} &= x_{3ce} + u_1
\end{aligned} \tag{3.53}$$

En donde $a_{ce} = 10.19$ y $\beta_{ce} = 10.39$. En la Figura 3.10 se pueden observar las diferencias entre ambos sistemas.

resumiendo rápidamente el problema, tendríamos la siguiente transformación en coordenadas para el maestro

$$\Phi_C(x_C) = \begin{bmatrix} z_{1C} \\ z_{2C} \\ z_{3C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_C \\ D^{\alpha_1} y_C \\ D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1C} \\ a_C x_{2C} + a_C \frac{x_{1C}}{7} - \frac{2a_C x_{1C}^3}{7} \\ a_C (x_{1C} - x_{2C} + x_{3C} + D^{\alpha_2} \frac{a_C x_{1C}}{7} - D^{\alpha_2} \frac{2a_C x_{1C}^3}{7}) \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

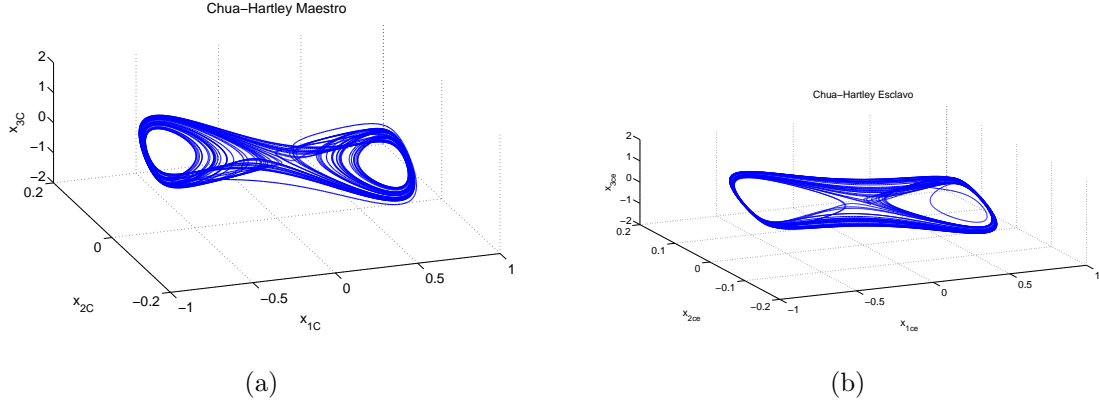


Figura 3.10: Sistemas caóticos fraccionarios incommensurados de Chua (a) Maestro con $x_C(0) = (0.6, 0.1, -0.6)$ (b) Esclavo $x_{ce}(0) = (0.1, 0.1, -0.2)$

y para el esclavo

$$\Phi_{ce}(x_{ce}) = \begin{bmatrix} z_{1ce} \\ z_{2ce} \\ z_{3ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{ce} \\ D^{\alpha_3} y_{ce} \\ D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} y_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{3ce} + u_1 \\ -\beta_{ce} x_{2ce} + u_2 \\ -\beta_{ce}(x_{1ce} - x_{2ce} + x_{3ce}) + u_3 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

en este punto nos podemos dar cuenta que el orden de la derivada de la salida disponible correspondiente a cada sistema son diferentes, de aquí es intuitivo que el error $e_{z1} = z_{1C} - z_{1ce}$ podría tener dos dinámicas diferentes, ya sea el α del maestro o del esclavo, entonces en este punto nos encontramos con un problema distinto al visto anteriormente. Esto debido a que la salida disponible del esclavo se toma diferente a la del maestro. Lo mismo pasaría, si los dos sistemas fueran de estructura diferente (Rössler y Chua), aún con el mismo orden α incommensurado, si la salida disponible es diferente el procedimiento cambia y más aún cuando son casos de sistemas de estructura y orden fraccionario diferente.

Por tanto, es importante diferenciar los sistemas a sincronizar y ver que el caso más simple para sincronizar sistemas incommensurados es cuando estos son idénticos y su salida disponible es la misma, es decir, $\alpha = \bar{\alpha}$ y $y_M = y_S$. Entonces ¿Qué pasa cuando

estos sistemas son completamente diferentes?. A continuación introduciremos la siguiente metodología para analizar la sincronización de sistemas fraccionarios inconmensurados estrictamente diferentes.

3.2.4. cuasi-Sincronización generalizada para sistemas caóticos fraccionarios inconmensurados (Segundo Caso)

Considere los siguientes sistemas no lineales de orden fraccionario inconmensurado en configuración maestro-esclavo.

El sistema maestro:

$$\begin{aligned}x_M^{(\alpha)} &= F_M(x_M, u_M) \\ y_M &= h_M(x_M, u_M)\end{aligned}\tag{3.56}$$

y el sistema esclavo:

$$\begin{aligned}x_S^{(\bar{\alpha})} &= F_S(x_S, u_S(x_S, y_M)) \\ y_S &= h_S(x_S, u_S(x_S, y_M))\end{aligned}\tag{3.57}$$

donde $x_S \in \mathbb{R}^n$, $F_S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{m}_S} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F_M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{m}_M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_M \in \mathbb{R}^n$, $h_S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{m}_S} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{m}_M} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_M \in \mathbb{R}^{\bar{m}_M}$, $u_S \in \mathbb{R}^{\bar{m}_S}$, $u_S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{m}_S}$, $y_M, y_S \in \mathbb{R}$, F_S, F_M, h_S, h_M son polinomios en sus argumentos, con condiciones iniciales $x_{M0} = x_M(0)$ y $x_{S0} = x_S(0)$ y el orden fraccionario $\bar{\alpha}$ no necesariamente es igual α .

Introducimos una nueva definición cuasi-Sincronización Generalizada para sistemas Fraccionarios Inconmensurados (cSGFI) el cual depende del Lema 3.2.1.

Definición 3.2.3. Sea $t_0 \geq 0$ el tiempo inicial. Se dice que los sistemas maestro y esclavo están en estado de cSGFI con cota ϵ si existe $T := T(\epsilon) \geq t_0$ y además existen salidas tal que genere una transformación $H_{MS} : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$ con $H_{MS} = \phi_M^{-1} \circ \phi_S$ tanto como existe una variedad algebraica $M_q = \{(x_S, x_M) \mid \|x_M - H_{MS}(x_S)\| \leq \epsilon\}$ y un conjunto compacto

$B \subset \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_m}$ con $M_q \subset B$ tal que las trayectorias con condiciones iniciales en B están en la vecindad de M_q para $t \geq T$.

En la Fig. (3.11) se puede observar una mejor representación de la cSGFI

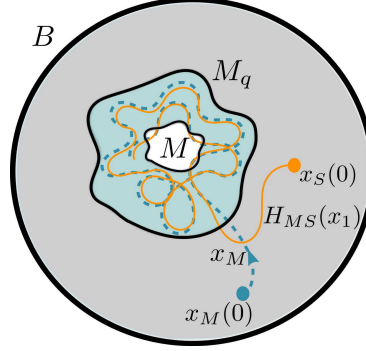


Figura 3.11: régimen de la cSGFI

En el caso de sistemas caóticos de orden fraccionario inconmensurado estrictamente diferentes, es bien entendido que la definición de SGFI carece de sentido. Del Lema 3.2.1 es claro que podemos obtener una Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Fraccionaria Inconmensurada (FCOGFI) para el sistema maestro y el sistema esclavo, de esas formas canónicas es posible obtener un controlador dinámico inconmensurado para la cSGFI.

Esto se resume en el siguiente Teorema

Teorema 3.2.5. *Sean los sistemas (3.56) y (3.57) son transformables a una FCOGFI. Definamos $z_M = (z_{M_1}, z_{M_2}, \dots, z_{M_n})^T$ y $z_S = (z_{S_1}, z_{S_2}, \dots, z_{S_n})^T$ como las trayectorias del maestro y el esclavo en coordenadas transformadas, respectivamente, con $z_{M_i} = D^{\alpha_i-1} \dots D^{\alpha_1} y_M$ and $z_{S_i} = D^{\bar{\alpha}_i-1} \dots D^{\bar{\alpha}_1} y_S$ para $1 \leq i \leq n$. Además, asumiendo que H1 y H2 se cumplen. Entonces, la solución de la dinámica del error converge asintóticamente a un conjunto compacto $B_r(0)$, with $r = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{r}_i$ y $\bar{r}_i = \sum_{l=1}^n |\lambda_l|^{i-1} \frac{\bar{g}_l}{|\lambda_l|}$. En otras palabras, la cSGFI se cumple.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponga $u_m = 0 \in \mathbb{R}^{\bar{m}_n}$, y tome el elemento

primitivo fraccional inconmensurado para el sistema maestro como

$$y_M = \sum_i \alpha_{M_i} x_{M_i} =: z_{M_i}$$

donde $\alpha_{M_i} \in \mathbb{R}$.

para el sistema esclavo

$$y_S = \sum_i \alpha_{S_i} x_{S_i} + \sum_i \beta_{S_i} u_{S_i} =: z_{S_i},$$

donde $\alpha_{S_i}, \beta_{S_i} \in \mathbb{R}$.

De acuerdo al Lema 3.2.1, obtenemos la FCOGFI del sistema (3.56)

$$\begin{aligned} z_{M_j}^{(\alpha_j)} &= z_{M_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ z_{M_n}^{(\alpha_n)} &= -\mathcal{L}_M(z_{M_1}, z_{M_2}, \dots, z_{M_n}) \end{aligned}$$

y la FCOGFI del sistema (3.57),

$$\begin{aligned} z_{S_j}^{(\bar{\alpha}_j)} &= z_{S_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ z_{S_n}^{(\bar{\alpha}_n)} &= -\mathcal{L}_s(z_{S_1}, z_{S_2}, \dots, z_{S_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + u_\gamma^{(\bar{\alpha}_\gamma)} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u_1 &= u_S \\ u_2 &= u_S^{(\bar{\alpha}_1)} \\ u_3 &= D^{\bar{\alpha}_2} D^{\bar{\alpha}_1} u_S \\ &\vdots \\ u_\gamma &= D^{\bar{\alpha}_{\gamma-1}} \dots D^{\bar{\alpha}_1} u_S \end{aligned}$$

Considere la dinámica del error de sincronización $e_z = z_M - z_S$ dado por el sistema

$$\begin{aligned} e_{z_j}^{(\bar{\alpha}_j)} &= e_{z_{j+1}} + \mathcal{G}_j(z_{M_{j+1}}, z_{M_j}^{(\bar{\alpha}_j)}) \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ e_{z_n}^{(\bar{\alpha}_n)} &= z_{M_n}^{(\bar{\alpha}_n)} + \mathcal{L}_s(z_{S_1}, z_{S_2}, \dots, z_{S_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) - u_\gamma^{(\bar{\alpha}_n)} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{G}_j(z_{M_{j+1}}, z_{M_j}^{(\bar{\alpha}_j)}) := z_{M_j}^{(\bar{\alpha}_j)} - z_{M_{j+1}}$ para $1 \leq j \leq n-1$.

Entonces, podemos reescribir la dinámica del error como un sistema aumentado

$$\begin{aligned}
e_{z_j}^{(\bar{\alpha}_j)} &= e_{z_{j+1}} + \mathcal{G}_j(z_{M_{j+1}}, z_{M_j}^{(\bar{\alpha}_j)}) \quad 1 \leq j \leq n-1 \\
e_{z_n}^{(\bar{\alpha}_n)} &= z_{M_n}^{(\bar{\alpha}_n)} + \mathcal{L}_s(z_{S_1}, z_{S_2}, \dots, z_{S_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) - u_\gamma^{(\bar{\alpha}_n)} \\
u_{\bar{j}}^{(\bar{\alpha}_{\bar{j}})} &= u_{\bar{j}+1} \quad 1 \leq \bar{j} \leq \gamma-1 \\
u_\gamma^{(\bar{\alpha}_n)} &= z_{M_n}^{(\bar{\alpha}_n)} + \mathcal{L}_s(z_{S_1}, z_{S_2}, \dots, z_{S_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + Ke_z
\end{aligned}$$

donde $k = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n)$, $k_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$ y $e_z = (e_{z_1} \ e_{z_2} \ \dots \ e_{z_n})^T$.

Entonces, tenemos

$$e_z^{(\bar{\alpha})} = Ae_z + \mathcal{G}_{z_M} \quad (3.58)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \end{pmatrix}$$

y

$$\mathcal{G}_{z_M} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(z_{M_2}, z_{M_1}^{(\bar{\alpha}_1)}) \\ \mathcal{G}_2(z_{M_3}, z_{M_2}^{(\bar{\alpha}_2)}) \\ \vdots \\ \mathcal{G}_{n-2}(z_{M_{n-1}}, z_{M_{n-2}}^{(\bar{\alpha}_{n-2})}) \\ \mathcal{G}_{n-1}(z_{M_n}, z_{M_{n-1}}^{(\bar{\alpha}_{n-1})}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con el fin de analizar la solución de (3.58) considere las siguiente hipótesis:

H1: Suponga que A es una matriz de Hurwitz con $\lambda_i(A) \neq \lambda_j(A)$.

H2: \mathcal{G}_j es acotado, i.e., $\exists g_j \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|\mathcal{G}_j(z_{M_{j+1}}, z_{M_j}^{(\bar{\alpha}_j)})| \leq g_j$$

para $1 \leq j \leq n-1$.

Remarca 3.2.6. Si el orden de la derivada fraccionaria coincide con $\alpha = \bar{\alpha}$ (maestro y esclavo respectivamente) el término $\mathcal{G}_j(z_{M_{j+1}}, z_{M_j}^{(\bar{\alpha}_j)})$ es cero para toda j . Entonces, está claro que la estabilidad asintótica de la solución cero de la ecuación (3.58) se obtiene directamente del teorema de Deng [67] para todo número racional $0 < \alpha = \bar{\alpha} < 1$.

Remarca 3.2.7. Dada la matriz Hurwitz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con valores propios diferentes, i.e., $\lambda_i(A) \neq \lambda_j(A)$ existe la transformación lineal $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $D = V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donde la matriz V es la matriz de Vandermonde dada por

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-3} & \lambda_2^{n-3} & \lambda_3^{n-3} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-3} & \lambda_n^{n-3} \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_n^{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

con el polinomio característico asociado $p(\lambda) = \prod_i^n (\lambda - \lambda_i) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + \lambda^n$. Y su inversa $V^{-1} = \Delta^{-T}V^T H$ donde $\Delta = \text{diag}(\dot{p}(\lambda_1), \dots, \dot{p}(\lambda_n))$, $\dot{p}(\lambda_i)$ son derivadas evaluadas de $p(\lambda)$ respecto a $\lambda = \lambda_i$ para $1 \leq i \leq n$ y H es la matriz de Hankel dada por

$$H = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & 1 \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{n-2} & p_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ p_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde los coeficientes de $p(\lambda)$ son $p_{i-1} = k_i$ para $1 \leq i \leq n$ (para mayores detalles de la inversa de Vandermonde consulte [82]).

Remarca 3.2.8. Dado que las trayectorias de un sistema caótico están acotadas, podemos elegir g_j como el $\sup_{1 \leq j \leq n-1} \mathcal{G}_j(\cdot)$ para cada z_{M_j} con $1 \leq j \leq n-1$.

Asuma que V es invertible, tomando la derivada de $\bar{e}_z = V^{-1}e_z$ en las trayectorias de (3.58) obtenemos

$$\bar{e}_z^{(\bar{\alpha})} = D\bar{e}_z + \bar{\mathcal{G}}_{z_M} \quad (3.60)$$

donde $\bar{\mathcal{G}}_{z_M} = V^{-1}\mathcal{G}_{z_M}$

$$\bar{\mathcal{G}}_{z_M} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{G}}_1 \\ \bar{\mathcal{G}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathcal{G}}_{n-2} \\ \bar{\mathcal{G}}_{n-1} \\ \bar{\mathcal{G}}_n \end{pmatrix}$$

con

$$\bar{\mathcal{G}}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-j} p_{j+k-1} \lambda_i^{k-1} + \lambda_i^{n-j} \right)}{\dot{p}(\lambda_i)} \mathcal{G}_j \quad (3.61)$$

para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$. Note que para los valores propios complejos, λ_i pueden ser remplazados por su complejo conjugado en (3.61). Para la hipótesis H2 podemos establecer lo siguiente

H2': $\bar{\mathcal{G}}_i$ es acotada, existe $\bar{g}_i \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|\bar{\mathcal{G}}_i| \leq \bar{g}_i = \sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\sum_{k=1}^{n-j} p_{j+k-1} \lambda_i^{k-1} + \lambda_i^{n-j}}{\dot{p}(\lambda_i)} \right| g_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

Entonces, obtenemos de (3.60) lo siguiente

$$\bar{e}_{z_i}^{(\bar{\alpha}_i)} = \lambda_i \bar{e}_{z_i} + \bar{\mathcal{G}}_i, \quad \bar{e}_{z_i}(0) = \bar{e}_{z_i}(0), \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.62)$$

Note que (3.62) es un problema de valor inicial para ecuaciones diferenciales fraccionaria no homogéneas bajo condiciones iniciales cero con el operador de Caputo , dado que $\bar{f}(\bar{e}_{z_i}, z_M) := \lambda_i \bar{e}_{z_i} + \bar{\mathcal{G}}_i(z_M)$ es una función Lipschitz continua respecto a \bar{e}_{z_i} , esto quiere decir, que existe una solución única para (3.62) (véase [77]).

Podemos calcular la solución de (3.62) como sigue

$$\begin{aligned} \bar{e}_{z_i}(t) &= \bar{e}_{z_{i0}} E_{\bar{\alpha}_i, i}(\lambda_i t^{\bar{\alpha}_i}) \\ &+ \int_0^t (t - \tau)^{\bar{\alpha}_i - 1} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i}(\lambda_i (t - \tau)^{\bar{\alpha}_i}) \bar{\mathcal{G}}_i(z_M(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

donde $\bar{e}_{z_{i0}} = \bar{e}_{z_i}(0)$. Usando la desigualdad del Triángulo y de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |\bar{e}_{z_i}^-(t)| &\leq |\bar{e}_{z_{i0}} E_{\bar{\alpha}_i, 1}(\lambda_i t^{\bar{\alpha}_i})| \\ &+ \bar{g}_i \int_0^t |(t - \tau)^{\bar{\alpha}_i - 1} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i}(\lambda_i (t - \tau)^{\bar{\alpha}_i})| d\tau \end{aligned}$$

Debido a el Teorema 1.2.2 de la función Mittag-Leffler (M-L) y $\lambda_i < 0$ tenemos que $(t - \tau)^{\bar{\alpha}_i - 1} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i}(\lambda_i (t - \tau)^{\bar{\alpha}_i})$ y $E_{\bar{\alpha}_i, 1}(\lambda_i t^{\bar{\alpha}_i})$ son no negativos, entonces

$$\begin{aligned} |\bar{e}_{z_i}^-(t)| &\leq |\bar{e}_{z_{i0}}| E_{\bar{\alpha}_i, 1}(\lambda_i t^{\bar{\alpha}_i}) \\ &+ \bar{g}_i \int_0^t (t - \tau)^{\bar{\alpha}_i - 1} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i}(\lambda_i (t - \tau)^{\bar{\alpha}_i}) d\tau \end{aligned} \tag{3.63}$$

y de la integración término a término de M-L en (1.6)

$$|\bar{e}_{z_i}^-(t)| \leq |\bar{e}_{z_{i0}}| E_{\bar{\alpha}_i, 1}(\lambda_i t^{\bar{\alpha}_i}) + \bar{g}_i t^{(\bar{\alpha}_i)} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i + 1}(\lambda_i t^{\bar{\alpha}_i})$$

note que, si $t \rightarrow \infty$, de (3.63) con $\mu = 3\pi \frac{\bar{\alpha}_i}{4}$ usando el Teorema 1.2.1.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{e}_{z_i}^-(t)| &\leq |\bar{e}_{z_{i0}}| \lim_{t \rightarrow \infty} E_{\bar{\alpha}_i, 1}(\lambda_i t^{\bar{\alpha}_i}) \\ &+ \bar{g}_i \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\bar{\alpha}_i} E_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i + 1}(\lambda_i t^{\bar{\alpha}_i}) = \frac{\bar{g}_i}{|\lambda_i|} \end{aligned}$$

Entonces, el sistema (3.62) converge asintóticamente a un conjunto compacto $\{\bar{e}_{z_i} \mid |\bar{e}_{z_i}| \leq \bar{g}_i/|\lambda_i|\}$.

Esto nos permite obtener un límite para el vector de error en coordenadas transformadas.

Asumimos $e_z = V\bar{e}_z$, entonces:

$$e_{z_i} = \sum_{l=1}^n \lambda_l^{i-1} \bar{e}_{z_l} \quad 1 \leq i \leq n$$

usando la desigualdad del Triángulo y el límite cuando $t \rightarrow \infty$, tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e_{z_i}| \leq \bar{r}_i := \sum_{l=1}^n |\lambda_l|^{i-1} \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{e}_{z_l}|$$

Finalmente, se cumple lo siguiente ¹

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_z\|_{\infty} \leq r$$

Entonces la solución de (3.58) converge asintóticamente a un conjunto compacto $B_r(0)$

con $r = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{r}_i$

□

Remarca 3.2.9. *No es difícil ver que cuando $\alpha \neq \bar{\alpha}$:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(z_M, z_S)\|_{M_z} \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_z\|_{\infty} \leq \sqrt{\frac{n}{2}} r$$

y cuando $\alpha = \bar{\alpha}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(z_M, z_S)\|_{M_z} = 0$$

donde

$$\|(z_M, z_S)\|_{M_z} := \inf_{(\hat{z}_M, \hat{z}_S) \in M_z} \{ \|(z_M, z_S) - (\hat{z}_M, \hat{z}_S)\| \},$$

con

$$M_z := \{(z_M, z_S) \mid z_M = z_S\}.$$

¹Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_{\infty} := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$

Del lema 3.2.1 y Teorema 3.2.5 podemos establecer el siguiente resultado.

Corolario 3.2.10. *Todo sistema fraccionario incommensurado está en estado de cSGFI si y sólo si son PV.*

Demostración. La prueba es inmediata y omitida. □

3.2.5. Resultados Números

cSGFI Chua-Hartley y Chua-Hartley

Retomando el problema anterior, donde tenemos (3.52) y (3.53) con sus transformaciones en coordenadas z (3.54) y (3.55) respectivamente.

Se tiene que la transformación inversa del sistema maestro (3.52) es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{1C} \\ x_{2C} \\ x_{3C} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{1C} \\ \frac{z_{2C}}{a_C} + \frac{-z_{1C} + 2z_{1C}^3}{7} \\ \frac{z_{3C}}{a_C} - z_{1C} + \frac{z_{2C}}{a_C} - \frac{z_{1C} + 2z_{1C}^3}{7} - D^{\alpha_2} \left(\frac{z_{1C}}{7} \right) + D^{\alpha_2} \left(\frac{2z_{1C}^3}{7} \right) \end{pmatrix} \\ &= \phi_C^{-1}(z_C) \end{aligned}$$

De la cual su FCOGFI es

$$\begin{aligned} z_C^{(\alpha)} &= \begin{pmatrix} z_{1C}^{(\alpha_1)} \\ z_{2C}^{(\alpha_2)} \\ z_{3C}^{(\alpha_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{2C} \\ z_{3C} \\ \psi_C(x_C) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_C x_{2C} + \frac{a_C x_{1C}}{7} - \frac{2a_C x_{1C}^3}{7} \\ a_C(x_{1C} - x_{2C} + x_{3C}) + D^{\alpha_2} \left(\frac{a_C x_{1C}}{7} \right) - D^{\alpha_2} \left(\frac{2a_C(x_{1C})^3}{7} \right) \\ a_C x_{1C}^{(\alpha_3)} - a_C x_{2C}^{(\alpha_3)} - a_C \beta_C x_{2C} + D^{\alpha_3} D^{\alpha_2} \left(\frac{a_C x_{1C}}{7} \right) - D^{\alpha_3} D^{\alpha_2} \left(\frac{2a_C(x_{1C})^3}{7} \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.64)$$

para el sistema esclavo (3.53) tenemos la transformación inversa como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{1ce} \\ x_{2ce} \\ x_{3ce} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{-z_{3ce} - z_{2ce} + u_2 + u_3}{\beta_{ce}} - z_{1ce} + u_1 \\ \frac{-z_{2ce} + u_2}{\beta_{ce}} \\ z_{1ce} - u_1 \end{pmatrix} \\ &= \phi_{ce}^{-1}(z_{ce}) \end{aligned}$$

De la cual su FCOGFI es

$$\begin{aligned} z_{ce}^{(\bar{\alpha})} &= \begin{pmatrix} z_{1ce}^{(\bar{\alpha}_3)} \\ z_{2ce}^{(\bar{\alpha}_2)} \\ z_{3ce}^{(\bar{\alpha}_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{2ce} \\ z_{3ce} \\ \psi_{ce}(x_{ce}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta_{ce}x_{2ce} + u_2 \\ -\beta_{ce}(x_{1ce} - x_{2ce} + x_{3ce}) + u_3 \\ \Psi_{ce}(x_{ce}) + u_3^{(\bar{\alpha}_1)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde $\Psi_{ce}(x_{ce}) = -\beta_{ce}(a_{ce}x_{2ce} + \frac{a_{ce}x_{1ce}}{7} - \frac{2a_{ce}x_{1ce}^3}{7} - x_{2ce}^{(\bar{\alpha}_1)} + x_{3ce}^{(\bar{\alpha}_1)})$ entonces se tiene que el sistema esclavo aumentado y controlado de Chua-Hartley es

$$\begin{bmatrix} z_{1ce}^{(\bar{\alpha}_3)} \\ z_{2ce}^{(\bar{\alpha}_2)} \\ z_{3ce}^{(\bar{\alpha}_1)} \\ u_1^{(\bar{\alpha}_3)} \\ u_2^{(\bar{\alpha}_2)} \\ u_3^{(\bar{\alpha}_1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2ce} \\ z_{3ce} \\ \Psi_{ce}(x_{ce}) + \bar{u} \\ u_2 \\ u_3 \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

donde

$$\begin{aligned}
u_1^{(\bar{\alpha}_3)} &= u_2 \\
u_2^{(\bar{\alpha}_2)} &= u_3 \\
u_3^{(\bar{\alpha}_1)} &= \bar{u}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

A continuación vamos a analizar el error de sincronización $e_{zi} = z_{iC} - z_{ice}$, normalmente en el caso conmensurado tendríamos un sistema parecido a (3.29), por el contrario para el caso inconmensurado tenemos

$$\begin{aligned}
e_{z1}^{(\bar{\alpha}_3)} &= z_{1C}^{(\bar{\alpha}_3)} - z_{1ce}^{(\bar{\alpha}_3)} \\
e_{z2}^{(\bar{\alpha}_2)} &= z_{2C}^{(\bar{\alpha}_2)} - z_{2ce}^{(\bar{\alpha}_2)} \\
e_{z3}^{(\bar{\alpha}_1)} &= z_{3C}^{(\bar{\alpha}_1)} - z_{3ce}^{(\bar{\alpha}_1)}
\end{aligned}$$

donde realizando manipulaciones para cada elemento de la dinámica del error tenemos

$$\begin{aligned}
e_{z1}^{(\bar{\alpha}_3)} &= z_{1C}^{(\bar{\alpha}_3)} - z_{1ce}^{(\bar{\alpha}_3)} \\
&= z_{1C}^{(\bar{\alpha}_3)} - z_{2ce} + z_{2C} - z_{2C} \\
&= e_{z2} + \underbrace{z_{1C}^{(\bar{\alpha}_3)} - z_{2C}}_{\mathcal{G}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{z2}^{(\bar{\alpha}_2)} &= z_{2C}^{(\bar{\alpha}_2)} - z_{2ce}^{(\bar{\alpha}_2)} \\
&= z_{2C}^{(\bar{\alpha}_2)} - z_{3ce} + z_{3C} - z_{3C} \\
&= e_{z3} + \underbrace{z_{2C}^{(\bar{\alpha}_2)} - z_{3C}}_{\mathcal{G}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{z3}^{(\bar{\alpha}_1)} &= z_{3C}^{(\bar{\alpha}_1)} - z_{3ce}^{(\bar{\alpha}_1)} \\
&= z_{3C}^{(\bar{\alpha}_1)} - \Psi_{ce}(x_{ce}) - u_3^{(\bar{\alpha}_1)}
\end{aligned}$$

resumiendo

$$\begin{aligned}
e_{z1}^{(\bar{\alpha}_3)} &= e_{z2} + \mathcal{G}_1 \\
e_{z2}^{(\bar{\alpha}_2)} &= e_{z3} + \mathcal{G}_2 \\
e_{z3}^{(\bar{\alpha}_1)} &= z_{3C}^{(\bar{\alpha}_1)} - \Psi_{ce}(x_{ce}) - u_3^{(\bar{\alpha}_1)}
\end{aligned}$$

Tomando el control $u_3^{(\bar{\alpha}_1)} = z_{3C}^{(\bar{\alpha}_1)} - \Psi_{ce}(x_{ce}) + Ke$ donde $k = (k_1 \ k_2 \ k_3)$, $k_1, k_2, k_3 > 0$ y $e = (e_{z1} \ e_{z2} \ e_{z3})^T$ entonces tenemos de (3.58)

$$\begin{pmatrix} e_{z1}^{(\bar{\alpha}_3)} \\ e_{z2}^{(\bar{\alpha}_2)} \\ e_{z3}^{(\bar{\alpha}_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{z1} \\ e_{z2} \\ e_{z3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

con ganancias $k = (130 \ 490 \ 199)$ y condiciones iniciales $z_{C0} = (0.1, 0, 0.1)$ y $z_{ce0} = (0.6, 0.1, -0.6)$. Estimamos la cotas numéricamente \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 como $g_1 = 0.8$ y $g_2 = 0.30$ respectivamente. Dado que tenemos los valores propios como $\lambda_1 = -196.50$, $\lambda_2 = -0.3024$ y $\lambda_3 = -2.1878$ su matriz correspondiente de Vandermonde como

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

donde podemos observar que para este caso el polinomio característico de la matriz de Vandermonde es $p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + p_3\lambda^3$ y el polinomio característico de la matriz compañera es $p(\lambda) = k_1 + k_2\lambda + k_3\lambda^2 + \lambda^3$ y ya que $p_{1-i} = k_i$ se tiene la matriz de Hankel como

$$V = \begin{pmatrix} 490 & 199 & 1 \\ 199 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y como $\dot{p}(\lambda_i) = k_2 + 2k_3\lambda_i + 3\lambda_i^2$ con esto se tendría

$$\dot{p}(\lambda_1) = k_2 + 2k_3\lambda_1 + 3\lambda_1^2$$

$$\dot{p}(\lambda_2) = k_2 + 2k_3\lambda_2 + 3\lambda_2^2$$

$$\dot{p}(\lambda_3) = k_2 + 2k_3\lambda_3 + 3\lambda_3^2$$

donde

$$diag \Delta = \begin{pmatrix} \dot{p}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \dot{p}(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{p}(\lambda_3) \end{pmatrix}$$

con esto es posible obtener $V^{-1} = \Delta^{-1}V^T H$.

Por una transformación de similitud $e_z = V\bar{e}_z$ como V es invertible y aplicando la derivada fraccionaria del esclavo tenemos que $\bar{e}_z^{(\bar{\alpha})} = V^{-1}e_z^{(\bar{\alpha})}$

$$\begin{aligned} \bar{e}_z^{(\bar{\alpha})} &= V^{-1}(Ae_z + \mathcal{G}_{zC}) \\ &= V^{-1}AV\bar{e}_z + V^{-1}\mathcal{G}_{zC} \\ &= D\bar{e}_z + \underbrace{V^{-1}\mathcal{G}_{zC}}_{\bar{\mathcal{G}}_i} \end{aligned}$$

por tanto tendríamos $\bar{e}_{z_i}^{(\bar{\alpha}_i)} = \lambda_i\bar{e}_{z_i} + \bar{\mathcal{G}}_i$, lo cual facilita el análisis de la estabilidad del error término a término.

Finalmente calculando las cotas $\bar{\mathcal{G}}_1, \bar{\mathcal{G}}_2$ y $\bar{\mathcal{G}}_3$ como $\bar{g}_1 = 1x10^{-7}, \bar{g}_2 = 3.6$ y $\bar{g}_3 = 0.1329$, tenemos que el error e_i está acotado por el conjunto compacto $B_r(0)$ con $r = 3.74$.

En la Figura 3.12 se muestra la cSGFI en coordenadas transformadas.

Las variables originales pueden ser obtenidas por medio de la transformación $H_{ms} = \Phi_C^{-1} \circ \Phi_{ce}$, en la Figura 3.13 se muestra la cSGFI en coordenadas originales. Por último en la Figura 3.14 se muestra el error de cSGFI en coordenadas transformadas y originales.

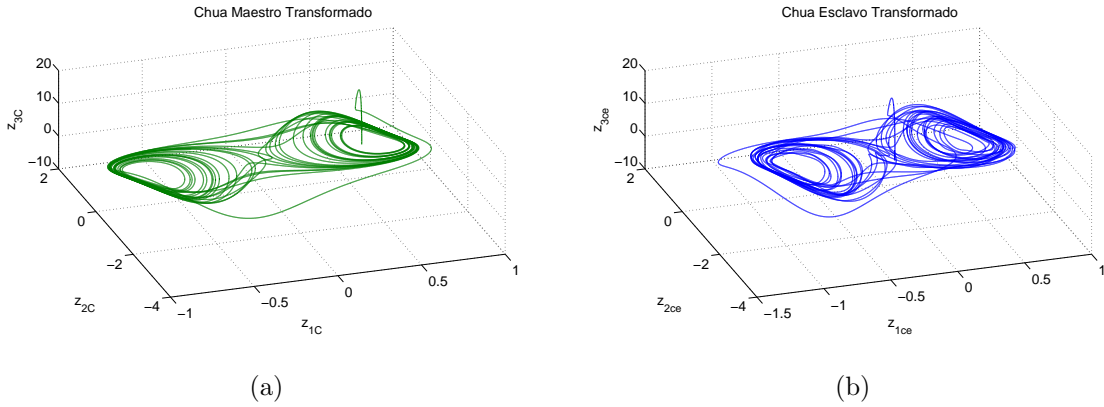


Figura 3.12: cSGFI para sistemas identicos de Chua en coordenadas transformadas (a) Chua-Hartley maestro, (b) Chua-Hartley esclavo.

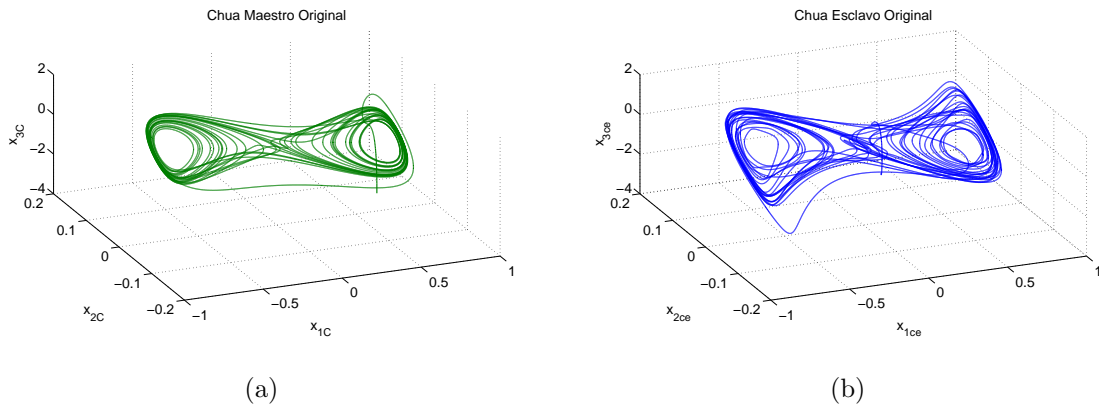


Figura 3.13: cSGFI para sistemas identicos de Chua en coordenadas originales (a) Chua-Hartley maestro, (b) Chua-Hartley esclavo.

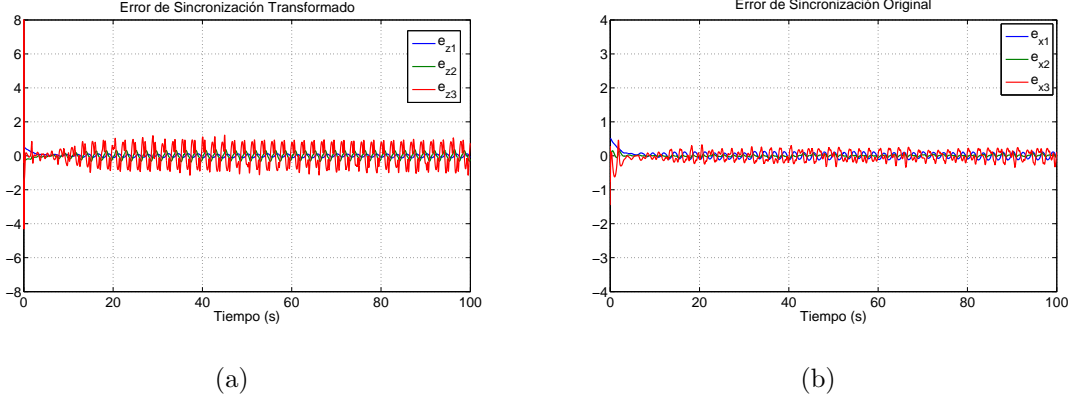


Figura 3.14: Error de cSGFI para sistemas identicos de Chua (a) coordenadas transformadas, (b) coordenadas originales.

Para finalizar el capítulo se presenta un último ejemplo de cSGFI para el caso de estructura dinámica y orden incommensurado diferentes, es decir, $(f \neq g)$ y $(\alpha \neq \bar{\alpha})$.

cSGFI Chua-Hartley y Rössler

Considere el sistema Chua-Hartley de orden fraccionario incommensurado [68] como el sistema maestro:

$$\begin{aligned}
 x_{1C}^{(\alpha_1)} &= a_C x_{2C} + \frac{a_C x_{1C}}{7} - \frac{2a_C x_{1C}^3}{7} \\
 x_{2C}^{(\alpha_2)} &= x_{1C} - x_{2C} + x_{3C} \\
 x_{3C}^{(\alpha_3)} &= -\beta_C x_{2C} \\
 y_C &= x_{1C}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

donde $\alpha = \begin{pmatrix} 0.94 & 0.98 & 0.92 \end{pmatrix}$, con $a_C = 12.75$, $\beta_C = 100/7$, el elemento primitivo diferencial fraccionario es escogido de la salida disponible del sistema $y_C = x_{1C}$.

Considérese el esclavo el sistema caótico de Rössler de orden fraccionario incommensurado dado en [80]:

$$\begin{aligned}
x_{1R}^{(\bar{\alpha}_{1R})} &= -x_{2R} - x_{3R} \\
x_{2R}^{(\bar{\alpha}_{2R})} &= x_{1R} + 0.63x_{2R} \\
x_{3R}^{(\bar{\alpha}_{3R})} &= 0.2 + x_{3R}(x_{1R} - 10) \\
y_R &= x_{2R}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

donde $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.7 \end{pmatrix}$, el elemento primitivo diferencial fraccionario es $y_R = x_{2R} + u_1$.

entonces, la transformación en coordenadas del sistema maestro (3.69) está dada por

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_{1C} \\ z_{2C} \\ z_{3C} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_C \\ D^{\alpha_1} y_C \\ D^{\alpha_2} D^{\alpha_1} y_C \end{pmatrix} = \phi_C(x_C) \\
&= \begin{pmatrix} x_{1C} \\ a_C x_{2C} + \frac{a x_{1C}}{7} - \frac{2a_C x_{1C}^3}{7} \\ a_C(x_{1C} - x_{2C} + x_{3C}) + \frac{D^{\alpha_2} a_C x_{1C}}{7} - \frac{D^{\alpha_2} 2a_C (x_{1C})^3}{7} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Las variables originales puede ser obtenidas de su transformación inversa, ya que satisfacen la condición OAFI, esto quiere decir

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{1C} \\ x_{2C} \\ x_{3C} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{1C} \\ \frac{z_{2C}}{a_C} - \frac{z_{1C}}{7} + \frac{2z_{1C}^3}{7} \\ \frac{z_{3C}}{a_C} - z_{1C} + \frac{z_{2C}}{a_C} - \frac{z_{1C}}{7} + \frac{2z_{1C}^3}{7} - \frac{z_{1C}^{(\alpha_2)}}{7} + \frac{2z_{1C}^{3(\alpha_2)}}{7} \end{pmatrix} \\
&= \phi_C^{-1}(z_C)
\end{aligned}$$

de la ecuación (3.71) obtenemos la FCOGFI.

$$\begin{aligned}
z_C^{(\alpha)} &= \begin{pmatrix} z_{1C}^{(\alpha_1)} \\ z_{2C}^{(\alpha_2)} \\ z_{3C}^{(\alpha_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{2C} \\ z_{3C} \\ \psi_C(x_C) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_C x_{2C} + \frac{a_C x_{1C}}{7} - \frac{2a_C x_{1C}^3}{7} \\ a_C(x_{1C} - x_{2C} + x_{3C}) + \frac{a_C x_{1C}^{(\alpha_2)}}{7} - D^{\alpha_2} \frac{2a_C(x_{1C})^3}{7} \\ a_C x_{1C}^{(\alpha_3)} - a_C x_{2C}^{(\alpha_3)} - a_C \beta x_{2C} + D^{\alpha_3} D^{\alpha_2} \left(\frac{a_C x_{1C}}{7} \right) - D^{\alpha_3} D^{\alpha_2} \left(\frac{2a_C(x_{1C})^3}{7} \right) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

y para el sistema esclavo su transformación en coordenadas

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_{1R} \\ z_{2R} \\ z_{3R} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_R \\ y_R^{(\bar{\alpha}_2)} \\ y_R^{(\bar{\alpha}_1)} \end{pmatrix} = \phi_R(x_R) \\
&= \begin{pmatrix} x_{2R} + u_1 \\ x_{1R} + 0.63x_{2R} + u_2 \\ -x_{2R} - x_{3R} + 0.63x_{2R}^{(\bar{\alpha}_1)} + u_3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

como satisfacen la propiedad de OAFI obtenemos su transformación inversa

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{1R} \\ x_{2R} \\ x_{3R} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{2R} - 0.63z_{1R} + 0.63u_1 - u_2 \\ z_{1R} + u_1 \\ -z_{3R} - z_{1R} + u_1 + 0.63(z_{1R} - u_1)^{(\bar{\alpha}_1)} + u_3 \end{pmatrix} \\
&= \phi_R^{-1}(z_R)
\end{aligned}$$

entonces, la FCOGFI del sistema (3.70) está dada por

$$\begin{aligned}
z_R^{(\bar{\alpha})} &= \begin{pmatrix} z_{1R}^{(\bar{\alpha}_2)} \\ z_{2R}^{(\bar{\alpha}_1)} \\ z_{3R}^{(\bar{\alpha}_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{2R} \\ z_{3R} \\ \psi_R(x_R) + u_3^{(\bar{\alpha}_3)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{1R} + 0.63x_{2R} + u_2 \\ -x_{2R} - x_{3R} + 0.63x_{2R}^{(\bar{\alpha}_1)} + u_3 \\ -x_{2R}^{(\bar{\alpha}_3)} - 0.2 - x_{3R}(x_{1R} - 10) + D^{\bar{\alpha}_3} D^{\bar{\alpha}_1} 0.63x_{2R} + u_3^{(\bar{\alpha}_3)} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

de acuerdo a la metodología propuesta, considere el error de sincronización

$$e_{zi} = z_{iC} - z_{iR}, \quad 1 \leq i \leq 3 \tag{3.75}$$

i.e.,

$$e_{z1} = z_{1C} - z_{1R}$$

$$e_{z2} = z_{2C} - z_{2R}$$

$$e_{z3} = z_{3C} - z_{3R}$$

Tomando la derivada de Caputo $\bar{\alpha}_i$ de (3.75), tenemos

$${}_0D_t^{\bar{\alpha}_i} e_{zi} = e_i^{(\bar{\alpha}_i)} = z_{iC}^{(\bar{\alpha}_i)} - z_{iR}^{(\bar{\alpha}_i)}$$

para $\bar{\alpha}_i$ en el orden en que transformamos las coordenadas del sistema esclavo. La dinámica del error de sincronización es la siguiente:

$$e_{z1}^{(\bar{\alpha}_2)} = e_{z2} + \mathcal{G}_1$$

$$e_{z2}^{(\bar{\alpha}_1)} = e_{z3} + \mathcal{G}_2$$

$$e_{z3}^{(\bar{\alpha}_3)} = z_{3C}^{(\bar{\alpha}_3)} - \Psi_R - u_3^{(\bar{\alpha}_3)}$$

donde $\mathcal{G}_1 := z_{1C}^{(\bar{\alpha}_2)} - z_{2C}$ y $\mathcal{G}_2 := z_{2C}^{(\bar{\alpha}_1)} - z_{3C}$.

Tomando $u_3^{(\bar{\alpha}_3)} = z_{3C}^{(\bar{\alpha}_3)} - \Psi_R + ke$, donde $k = (k_1 \ k_2 \ k_3)$, $k_1, k_2, k_3 > 0$ y $e = (e_{z1} \ e_{z2} \ e_{z3})^T$, entonces:

$$\begin{pmatrix} e_{z1}^{(\bar{\alpha}_2)} \\ e_{z2}^{(\bar{\alpha}_1)} \\ e_{z3}^{(\bar{\alpha}_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{z1} \\ e_{z2} \\ e_{z3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

escogiendo ganancias como $k = (170 \ 476 \ 150)$ con condiciones iniciales $z_{C0} = (6 \ 1 \ -6)$ y $z_{R0} = (5 \ 1 \ -6)$. Podemos estimar numéricamente las cotas para \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 como $g_1 = 0.4994$ y $g_2 = 1.1642$ respectivamente. Dado que $\lambda_1 = -146.764$, $\lambda_2 = -0.41$, $\lambda_3 = -2.825$ son valor propios distintos y su matriz V correspondiente es

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

es no singular, (3.76) puede ser expresada de la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_{z1}^{(\bar{\alpha}_2)} \\ \bar{e}_{z2}^{(\bar{\alpha}_1)} \\ \bar{e}_{z3}^{(\bar{\alpha}_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_{z1} \\ \bar{e}_{z2} \\ \bar{e}_{z3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{G}}_1 \\ \bar{\mathcal{G}}_2 \\ \bar{\mathcal{G}}_3 \end{pmatrix}$$

donde

$$\bar{\mathcal{G}}_i = \frac{(k_2 + k_3 \lambda_i + \lambda_i^2) \mathcal{G}_1 + (k_3 + \lambda_3) \mathcal{G}_2}{k_2 + 2k_3 \lambda_i + 3\lambda_i^2}, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (3.77)$$

Por consiguiente, podemos calcular las cotas para $\bar{\mathcal{G}}_1$, $\bar{\mathcal{G}}_2$, y $\bar{\mathcal{G}}_3$ como $\bar{g}_1 = 0.0002$, $\bar{g}_2 = 1.0784$ y $\bar{g}_3 = 0.5792$ respectivamente. Finalmente, concluimos que el error e_{zi} es acotado para todo i en un conjunto compacto $B_r(0)$, con $r = 2.8356$.

En las Figuras 3.15 y 3.16 se muestran los sistemas en estado de cSGFI para el maestro y el esclavo y en la Figura 3.17 se muestran los errores de sincronización tanto en coordenadas transformadas como en originales.

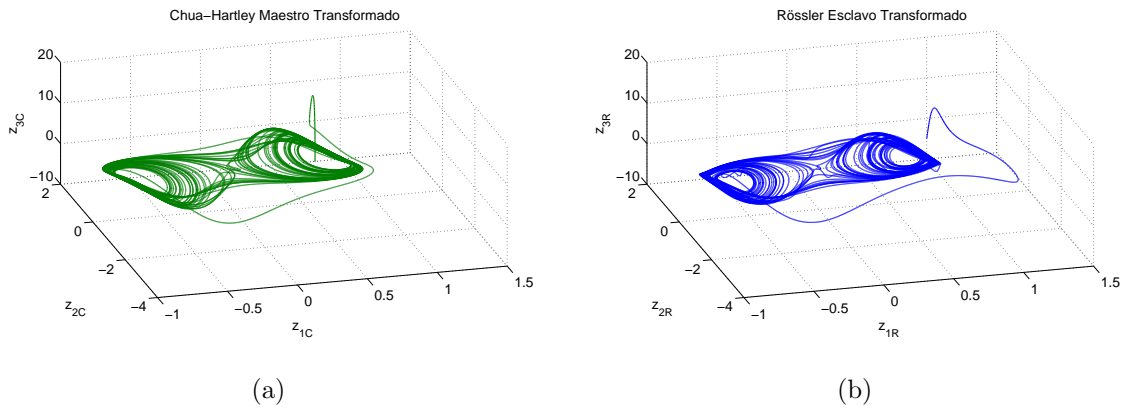


Figura 3.15: cuasi-sincronización de sistemas fraccionarios incommensurados diferentes en coordenadas transformadas (a) Chua-Hartley maestro, (b) Rössler esclavo.

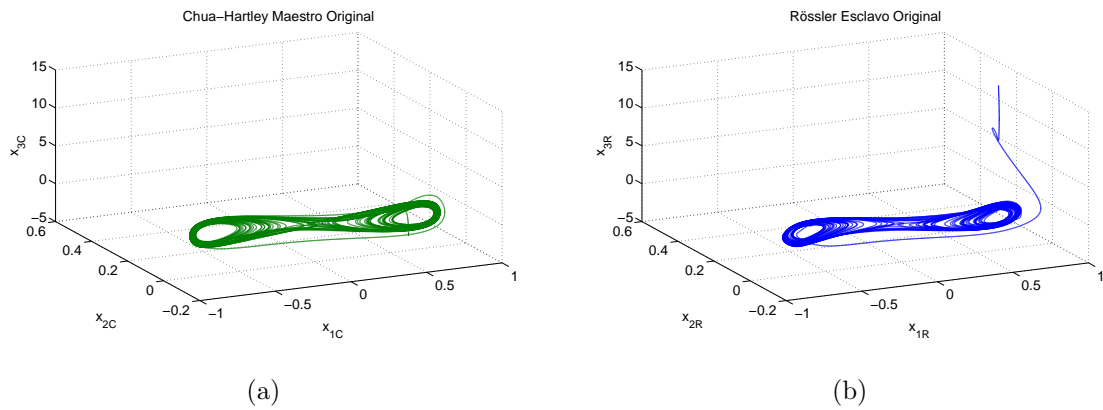
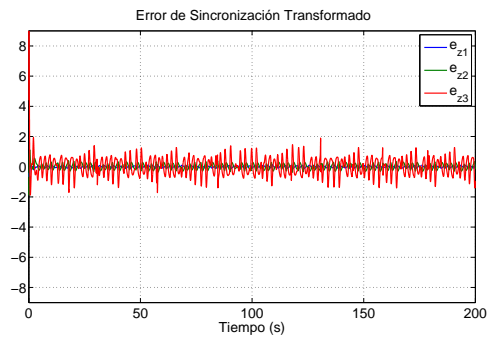
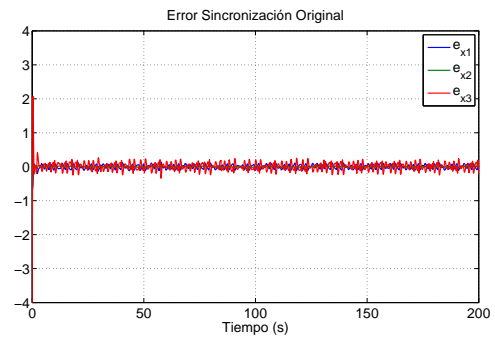


Figura 3.16: cuasi-sincronización generalizada de sistemas fraccionarios incommensurados diferentes en coordenadas originales (a) Chua-Hartley maestro, (b) Rössler esclavo.



(a)



(b)

Figura 3.17: Error de cSGFI para sistemas de Chua y Rössler (a) coordenadas transformadas, (b) coordenadas originales.

Capítulo 4

Sincronización Experimental de Sistemas Idénticos Acoplados por un Capacitor Fraccionario

En este capítulo se plantea un problema de sincronización de osciladores de orden entero acoplados por una dinámica lineal de orden fraccionario. La presentación contiene los resultados experimentales que muestran una aplicación del cálculo fraccionario en la sincronización de sistemas de orden entero. Debido a esta configuración los sistemas acoplados corresponden a la clasificación de sistemas de orden fraccionario inconmensurados.

En el problema de sincronización de dos sistemas acoplados existen diversos métodos para ello. En vista de los casi inexistentes resultados sobre la estabilidad de sistemas de orden fraccionario inconmensurado, un par de problemas importantes y escasamente estudiados por su complejidad en la literatura fueron expuestos en los dos capítulos anteriores. En ellos, la importancia del operador de derivada giró entorno al orden fraccionario como un parámetro fijo que permitiese la existencia de un comportamiento caótico en los sistemas. De una manera diferente, en este capítulo se hace hincapié en la importancia que tiene el orden del operador fraccionario tanto en los sistemas como en la sincronización de los mismos. En concreto se presenta el caso de estudio experimental de la sincronización de dos circuitos de van der Pol de orden entero acoplados mediante un capacitor de orden

fraccionario, este último mejor conocido como fractor.

4.1. Motivación

A lo largo del trabajo de tesis se ha podido observar que la idea básica del Cálculo Fraccionario está relacionada con los conceptos básicos del cálculo estándar, específicamente la pregunta que nos hacemos es ¿Cómo afecta el cambio a un operador de derivada fraccionaria en los sistemas dinámicos?, además de ¿Cómo se hace notar esta característica en el problema de sincronización?. Para contestar estas preguntas, considérense el siguiente par de ejemplos numéricos cuya descripción también resalta preguntas abiertas en el estudio de estos sistemas.

Ejemplo 1. (Oscilador armónico simple no amortiguado)

Sea un sistema ideal muy simple como un sistema mecánico compuesto por una masa colgada de un resorte sin fricción, un sistema eléctrico como un circuito LC sin pérdida, etc., su modelo matemático normalizado corresponde al de un oscilador armónico simple:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde ω^2 es la frecuencia natural de oscilación. Se conoce que el comportamiento de este sistema, fuera de su punto de equilibrio, describe trayectorias sinusoidales (véase Fig. 4.1).

Es claro que al no existir amortiguamiento en el sistema, las trayectorias oscilan entorno a su punto de equilibrio. Ahora si reemplazamos el operador de derivada por el de orden fraccionario de Caputo, se obtiene la siguiente dinámica del oscilador armónico simple de orden fraccionario.

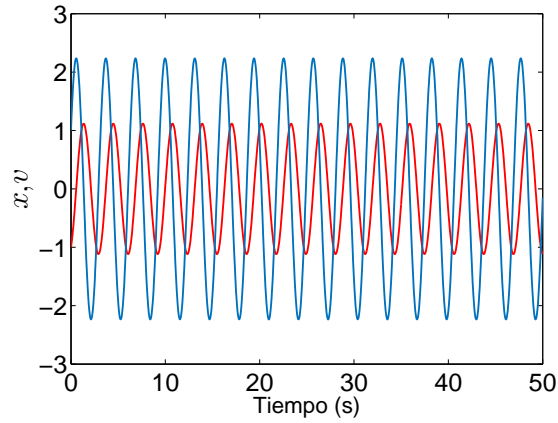


Figura 4.1: Trayectorias del Sistema Entero de Masa Resorte

$$x^{(\alpha)} = v \quad (4.2)$$

$$v^{(\alpha)} = -\omega^2 x$$

donde $0 < \alpha < 1$. Note que, al introducir el operador de orden fraccionario $\alpha = 0.9$ y aún cuando este no se encuentra muy alejado de la unidad, el comportamiento de las trayectorias del oscilador armónico simple de orden fraccionario (4.2) cambian drásticamente en comparación al caso entero (véase Fig. 4.2).

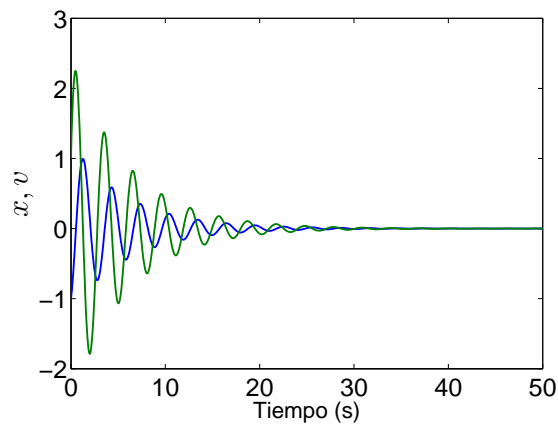


Figura 4.2: Trayectorias del Sistema Fraccionario de Masa Resorte

Como se puede observar, el orden de derivada fraccionaria añade amortiguamiento al

oscilador armónico simple, sus trayectorias dejan de oscilar a manera que el tiempo incrementa (algo que no sucedía en el caso entero). Es importante resaltar que entender esta diferencia, que se debe a la introducción de un parámetro extra u orden fraccionario en el operador de derivada, es crucial en el estudio de la estabilidad estructural de estos sistemas. En este caso en particular, el operador fraccionario convierte al oscilador armónico simple no amortiguado en un sistema disipativo. ¿Es acaso que el orden de derivada puede ser visto como un parámetro de bifurcación que puede cambiar las propiedades de estabilidad de los sistemas? De ser así, estos sistemas merecen un estudio más profundo y de mayor interés por parte de la comunidad científica. \triangle

Es importante tener cuidado al elegir el orden fraccionario de derivada, puesto que en muchos sistemas, este puede afectar el comportamiento de los sistemas caóticos eliminando su comportamiento peculiar y característico. Por tanto, para encontrar el orden fraccionario de derivada adecuado es posible consultar las condiciones necesarias de caoticidad de dichos sistemas [40]. Anteriormente, observamos como el orden de la derivada fraccionaria afecta a los sistemas lineales, pero ahora veamos como el operador fraccionario puede llegar a afectar en la sincronización de sistemas caóticos.

Ejemplo 2. (Sincronización unidireccional de un par de sistemas caóticos [84])

Sean dos sistemas idénticos de Lü de orden fraccionario, mismos que se encuentran acoplados mediante un término correctivo del tipo difusivo. En esta configuración el sistema maestro está dado por

$$\begin{aligned}
 x^{(\alpha)} &= a(y - x) \\
 y^{(\alpha)} &= bx - kxz \\
 z^{(\alpha)} &= -cz + hx^2
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

con su sistema esclavo correspondiente

$$\begin{aligned}
\hat{x}^{(\alpha)} &= a(\hat{y} - \hat{x}) - k_1(\hat{x} - x) \\
\hat{y}^{(\alpha)} &= b\hat{x} - k\hat{x}\hat{z} - k_2(\hat{y} - y) \\
\hat{z}^{(\alpha)} &= -c\hat{z} + h\hat{x}^2 - k_3(\hat{z} - z)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde se eligen $a = 10$, $b = 40$, $c = 2.5$, $k = 1$ y $h = 4$, dejando α como un parámetro libre. Lo que se pretende mostrar es como afecta variar el orden de derivada α en la sincronización de estos sistemas. Para ello, analizemos las trayectorias del error de sincronización

$$\begin{aligned}
e_1 &= x - \hat{x} \\
e_2 &= y - \hat{y} \\
e_3 &= z - \hat{z}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

que satisfacen el siguiente sistema de orden fraccionario

$$\begin{aligned}
e_1^{(\alpha)} &= a(e_2 - e_1) - k_1e_1 \\
e_2^{(\alpha)} &= be_1 - k(e_1z + \hat{x}e_3) - k_2e_2 \\
e_3^{(\alpha)} &= -ce_3 + h(\hat{x} + x)e_1 - k_3e_3
\end{aligned} \tag{4.6}$$

De acuerdo a [83], es posible asegurar la sincronización de dichos sistemas si se eligen las ganancias iguales $k_1 = k_2 = k_3$ y de manera que estas sean mayores o iguales al máximo exponente de Lyapunov del sistema maestro. A continuación se realizan simulaciones numéricas para diferentes valores de $\alpha = 0.90, 0.95, 0.98$ cuyos máximos exponentes de Lyapunov están dados por $\lambda = 0.981, 1.508, 1.632$ [83], respectivamente. Tomaremos la libertad de elegir y fijar $k_1, k_2, k_3 = 1.508$, de este modo se espera observar sincronización en los primeros dos casos y que exista alguna deficiencia en esta característica en el último. En la Fig. 4.3 se pueden observar los resultados del acoplamiento, donde se muestra que los errores de sincronización convergen asintóticamente a cero. Sin embargo de acuerdo al valor de α elegido, es posible notar algunas diferencias significativas.

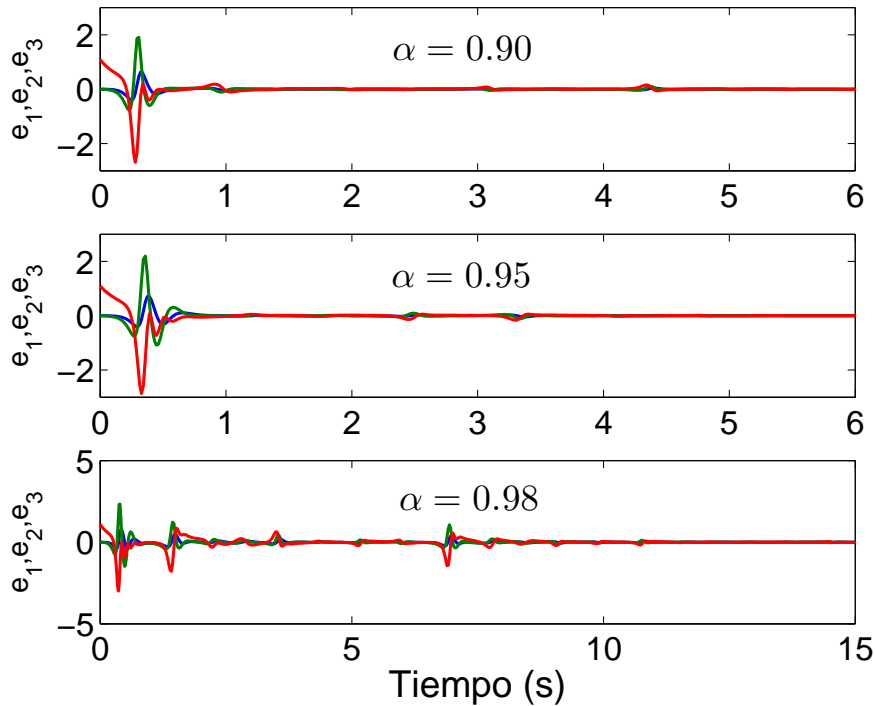


Figura 4.3: Error de Sincronización (Sistema de Lü)

Note que el orden de la derivada afecta a la dinámica del error de sincronización y por ende a su solución. Como consecuencia esto determina la convergencia del error de sincronización al origen. Cualitativamente, para $\alpha = 0.90$ se obtiene la convergencia más rápida entre todas las demás pero presenta ligeros sobretiros como el tiempo incrementa, en cambio para $\alpha = 0.95$ es un poco más lento sin presentar oscilaciones considerables alrededor del cero, como se esperaba en estos dos casos. Por último para $\alpha = 0.98$ parece ser el más lento y con mayor dificultad de mantenerse en el cero, esto puede ser consecuencia de que las ganancias utilizadas son menores al máximo exponente de Lyapunov para este caso. Este ejemplo revela la existencia de algunos valores críticos en las ganancias de acoplamiento para ciertos valores del orden de la derivada. Las condiciones referentes a los exponentes de Lyapunov en [83] se tomaron como referencia ya que no existen condiciones suficientes al respecto, las condiciones utilizadas en este ejemplo provienen de condiciones necesarias para la sincronización (exponentes de Lyapunov). Este ejemplo sugiere una relación entre el acoplamiento y el orden de derivada, y aún más importante

revela lo siguiente: ¿bajo qué condiciones suficientes se puede lograr la sincronización de estos sistemas? lo cual no ha sido esclarecido a la fecha. \triangle

Para una mejor representación del efecto del operador de derivada fraccionaria, se reporta en la siguiente sección otro caso de sincronización y de interés particular en este capítulo. Los dos ejemplos anteriormente mencionados son un problema abierto a la fecha y que se encuentran fuera del alcance de una implementación experiemntal. A pesar de ello se sugiere un problema tangible, donde los sistemas acoplados son circuitos de orden entero (completamente realizables y con un significado físico aceptable), del que además se conocen resultados sobre la sincronización de los mismos con acoplamientos comunes como lo es en el caso del uso de elementos pasivos. El objetivo principal es observar su comportamiento cuando el acoplamiento es de tipo fraccionario y utilizar α como un parametro que modifique dicho acoplamiento.

4.2. Planteamiento del Problema

Se ha reportado en la literatura [60–62] sobre la coexistencia entre sincronización de antifase y fase de osciladores de van der Pol (véase Fig. 4.4) mediante un acoplamiento con capacitor de orden entero para diferentes condiciones iniciales y con una resistencia de acoplamiento, respectivamente. De manera que es interesante estudiar el caso en el que un capacitor de orden fraccionario o fractor es el acoplamiento (para valores distintos de α) e indagar sobre la existencia de una interpolación entre los dos estados de sincronización de fase y antifase mediante el uso de estos elementos. La motivación principal de este experimento es conocer ¿qué sucede con la sincronización de dos sistemas caóticos idénticos ($f = g$) enteros al reemplazar el acoplamiento capacitivo o resistivo entero mediante un acoplamiento capacitivo fraccionario?.

4.2.1. Implementación Electrónica de Capacitores Fraccionarios

Las implementaciones electrónicas de capacitores de orden fraccionario fueron sugeridas e investigadas primeramente por G.E. Carlson y A. Halijak en 1964 [85].

El punto de partida del nuevo modelo del capacitor fraccionario o fractor se basa en la ley empírica de Curie [86], i.e., una constante de voltaje U_0 aplicado a un tiempo $t = 0$ produce una corriente

$$i(t) = \frac{U(0)}{h_1 t^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1, t > 0) \quad (4.7)$$

donde h_1 es una constante relacionada con la capacitancia del condensador y el tipo de dieléctrico y α es otra constante relacionada con las pérdidas del capacitor (cuanto menores son las pérdidas, este valor es cercano a 1).

La función de transferencia que relaciona el voltaje y la corriente a través del capacitor de orden fraccionario es

$$H(s) = C_\alpha s^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

donde C_α se conoce como la fractancia. Es decir, en el dominio de la frecuencia la impedancia del capacitor es:

$$Z(s) = \frac{1}{C_\alpha s^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (4.8)$$

Tomando en cuenta que la impedancia es la razón entre el voltaje y la corriente en el dominio de la frecuencia, es claro que para condiciones iniciales nulas, este elemento (4.8) puede describirse con el operador de derivada de Caputo mediante la siguiente expresión:

$$C_{0\alpha} v^{(\alpha)}(t)_{C_\alpha} = i(t), \quad (4.9)$$

donde $v(t)$ corresponde al voltaje del fractor C_α . Esta extensión de la teoría tradicional del capacitor puede ser muy útil en vista de leyes empíricas tipo (4.7) en diferentes campos de la ciencia e ingeniería. Para nuestro caso, en la implementación electrónica de estos

elementos.

En este contexto, podemos pensar en una aplicación de sistemas de orden fraccional, bajo la premisa de que estos elementos pueden implementarse electrónicamente, especialmente con elementos de fase constante (CPE) también conocidos como fractores. El fractor es un elemento electrónico que posee una impedancia descrita por $Z(s) = 1/C_\alpha s^\alpha$, donde $C_\alpha = [F/sec^{1-\alpha}]$ es la fractancia y $s^{-\alpha} = (j\omega)^{-\alpha} = \omega^{-\alpha}(\cos(-\alpha\frac{\pi}{2}) + j \sin(-\alpha\frac{\pi}{2}))$ (cuya fase es una constante de valor $\phi = -\alpha\frac{\pi}{2}$). Note que para valores de alpha en los extremos, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, el comportamiento ideal del fractor es el de un resistor y un capacitor usual, respectivamente.

4.2.2. Modelo de los Circuitos de van der Pol acoplados

Las ecuaciones típicas del oscilador de van der Pol con una no linealidad de tercer orden pueden derivarse del circuito en la Fig. 4.4:

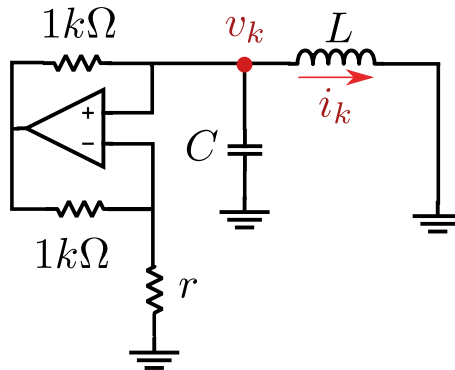


Figura 4.4: Circuito de van der Pol

$$\begin{aligned} C\dot{v} &= -i_k + g_1 v_k - g_3 v_k^3 \\ L\dot{i} &= v_k \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $i(v_k) = -g_1 v_k + g_3 v_k^3$ con $k = 1, 2$, C , L corresponden al valor de capacitancia e inductancia y los valores de g_1 y g_3 son dependientes de las resistencias de $1k\Omega$ y r .

Una manera interesante de acoplar dos sistemas de van der Pol surge al utilizar un resistor (R), un capacitor (C_0) o en nuestro caso de estudio un capacitor fraccionario (C_α) como se muestra en la Fig. 4.5. En el caso de los capacitores, y desde una perspectiva de control, este tipo de acoplamiento recibe el nombre de acoplamiento dinámico.

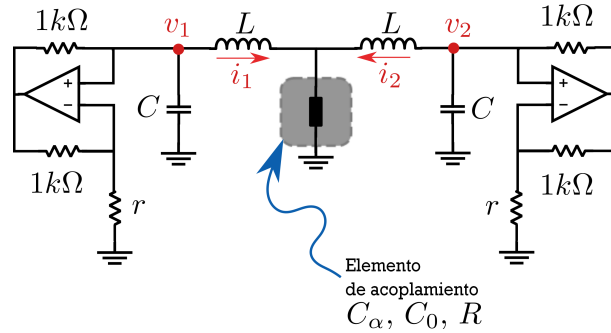


Figura 4.5: Circuitos de van der Pol acoplados

Como se mencionó anteriormente, los dos primeros tipos de acoplamientos han sido estudiados en la literatura. En [60] por medio de una resistencia variable y en [61, 62] por medio de un capacitor. Los fenómenos de sincronización observados mediante estos tipos de acoplamiento son anti-sincronización de fase para el caso del resistor (R) y la coexistencia de antisincronización y sincronización de fase para el caso del capacitor (C_0). Intuitivamente esto es claro, en el caso del resistor (R) la corriente que pasa a través del mismo se minimiza para mantener las oscilaciones y en el otro caso el retraso temporal que introduce el capacitor (C_0) tiene como consecuencia la sincronización o antisincronización de los osciladores solo para ciertas condiciones iniciales. A partir de las observaciones anteriores es interesante estudiar estos comportamientos cuando el acoplamiento es un elemento en el que se puede ajustar la fase del mismo, es decir, un fractor.

Considérese el caso donde los dos osciladores de van der Pol están acoplados por medio de un capacitor de orden fraccionario C_α . En este trabajo consideramos el caso de sincronización por medio de un acoplamiento de capacitor de orden fraccionario. De la figura anterior, tomando en cuenta (4.9) no es difícil obtener el siguiente modelo para $k, j = 1, 2$,

$k \neq j$, con el operador de derivada de Caputo de orden α

$$\begin{aligned}
 C\dot{v} &= -i_k + g_1 v_k - g_3 v_k^3 \\
 L\dot{i} &= v_k - v_{C_\alpha} \\
 C_\alpha v_{C_\alpha}^{(\alpha)} &= i_k + i_j
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

donde C, L corresponden al valor de capacitancia e inductancia y C_α corresponde al valor de fractancia.

Considerando el caso del primer oscilador, se tiene el modelo siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 &= -\frac{1}{C}i(v_1) - \frac{1}{C}i_1 = \frac{1}{C}g_1 v_1 - \frac{1}{C}g_3 v_1^3 - \frac{1}{C}i_1 \\
 \dot{i}_1 &= \frac{1}{L}(v_1 - v_{C_\alpha}) \\
 v_{C_\alpha}^{(\alpha)} &= \frac{1}{C_\alpha}(i_1 + i_2)
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Dado que la regla de la cadena no se cumple para operadores fraccionarios se realiza los siguientes cambios de variables que facilitan la simulación numérica del modelo. Note que no se realiza ningún cambio en la variable de tiempo t .

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \alpha x_1 \\
 v_1 &= \beta y_1 \\
 v_{C_0} &= \delta z
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

con

$$\begin{aligned}
 c_g &= \frac{\delta}{\alpha L} \\
 \beta &= \sqrt{\frac{g_1}{g_3}} \\
 \delta &= \frac{\alpha}{c_0} \\
 \alpha &= \sqrt{\frac{g_1 c}{g_2 L}}
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Finalmente las ecuaciones “normalizadas” de estado del circuito son las siguientes:

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1 - c_g z \quad (4.15)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \epsilon(y_1 - y_1^3) - x_1 \quad (4.16)$$

$$\frac{dz}{dt^n} = x_1 + x_2 \quad (4.17)$$

donde c_g corresponde a la ganancia de acoplamiento y ϵ es el parámetro de bifurcación usual en el sistema de van der Pol. Por otra parte, es importante destacar que este modelo corresponde a un conjunto de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario inconmensurado, lo cual complica su análisis debido a la falta de resultados de estabilidad en esta dirección. Las simulaciones numéricas se omiten, dado que estas concuerdan con los experimentos en tiempo real y cuya presentación no es de interés en este capítulo.

En las secciones siguientes se construyen dos circuitos oscilatorios de ciclo límite de van der Pol. Dentro de la comunidad electrónica existe un gran interés en la sincronización de este tipo de sistemas, esto es una consecuencia de las aplicaciones tecnológicas interesantes de los osciladores electrónicos. De este modo, la aplicación del cálculo fraccionario en la existencia de un comportamiento que interpole el uso de resistores y capacitores en los acoplamientos de estos sistemas se convierte en un problema interesante. A continuación planteamos el problema de diseño de un capacitor fraccionario donde también se construyen cinco fractores con diferente orden $\alpha = 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95$, respectivamente.

4.3. Implementación electrónica del Capacitor Fraccionario

El primer ejemplo de un circuito electrónico relacionado con el cálculo fraccionario es el fractor, un circuito eléctrico con las propiedades de redes de elementos pasivos como resistencias y capacitancias. El término de fractor fue sugerido por A. Le Méhauté [88] para denotar elementos de orden fraccionario cuya impedancia se determina por arreglos de elementos eléctricos pasivos. Una implementación muy similar a la sugerida por G.E. Carlson y A. Halijak [85], consiste en la cadena de fractores implementados mediante n

resistencias-capacitores en pares conectados en cadena como se puede observar en la Fig. 4.7

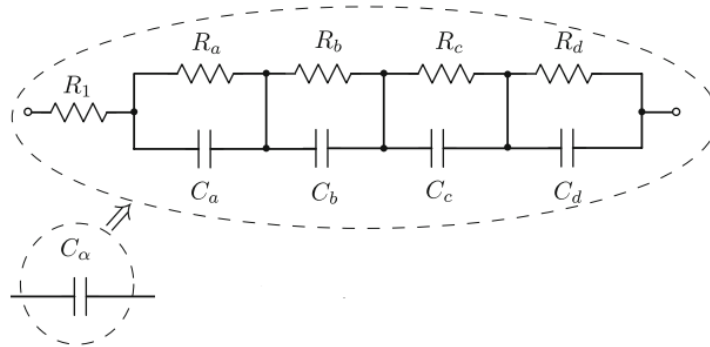


Figura 4.6: Capacitor de orden Fraccionario

Este modelo ampliamente utilizado en la literatura, que además de la dificultad que presenta el diseño con valores comerciales de elementos pasivos, necesita de una implementación precisa de alto orden (conexión en cadena de muchos elementos). Esto limita su utilidad práctica en casos como el nuestro.

El siguiente modelo de capacitor fraccionario que está conformado por un número pequeño de resistencias y capacitores ofrece cualquier ángulo de fase de impedancia entre -90° y 0° , introducido en [89] fue mejorado para su implementación práctica confiable en [90]. Este modelo mostrado en la Fig. 4.7 se describe de manera breve a continuación.

Considere la red de entrada de admitancia

$$Z(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{U(j\omega)} = \sum_{k=1}^m \frac{j\omega b^{k-1}}{1 + j\omega(ab)^{k-1}R_1C_1}$$

donde el valor promedio de las diferencias de fase entre corriente y voltaje es

$$\phi_{cv} = 90 \frac{\log a}{\log(ab)}$$

y cuya elección de parámetros a y b define directamente la fase del ángulo ϕ_{cv} y el orden α

El modelo propuesto por J. Valsa [90] tiene una respuesta altamente satisfactoria si el número de ramas compuesto por un capacitor y un resistor es $n = 5$. La diferencia con [89] radica en las cuestiones prácticas que hacen necesario mantener n tan bajo como sea posible, por tanto, la solución a este problema se resuelve al agregar una nueva resistencia R_p y una nueva capacitancia C_p con una $n = 5$. Es decir, si tomamos $n = 5$ sin la introducción de R_p y C_p la fase no se mantendría constante, en cambio con R_p y C_p el resultado es bastante satisfactorio (una fase constante con una n pequeña). En la Fig. 4.7 se muestra la configuración del circuito de Valsa.

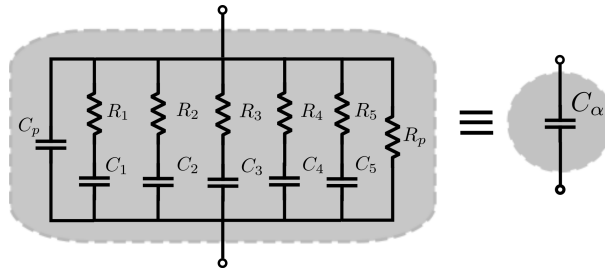


Figura 4.7: Capacitor Fraccionario propuesto por J. Valsa

Este modelo cuenta 6 resistencias y 6 capacitores para $n = 5$. Además puede ser usado para realizaciones prácticas de integradores y diferenciadores fraccionarios analógicos, osciladores fraccionarios, redes caóticos o para simulaciones analógicas de control de sistemas fraccionarios [90].

4.3.1. Construcción del Capacitor Fraccionario

En la construcción de los capacitores fraccionarios se utiliza el siguiente algoritmo que sigue los siguientes pasos:

- Elección libre de C_1 y R_1

- Basados en el ángulo de fase ϕ_{cv} y la amplitud se encuentran el espacio de parámetros a y b
- Una vez obtenidos los valores de a y b se obtienen cada uno los resistores y capacitancias $R_k = R_1 a^{k-1}$ y $C_k = C_1 b^{k-1}$ donde $k = 1, 2, \dots, n$
- Calcular los valores de corrección $C_p = C_1 \frac{b^n}{1-b}$ y $R_p = R_1 \frac{1-a}{a}$.
- Obtener el análisis de fase y magnitud por medio del Bode para verificar que los valores obtenidos son satisfactorios.

En la Fig. 4.8 se puede observar el espacio de parámetros, donde las curvas de derecha a izquierda correponden al orden α de 0.1 hasta 0.9, respectivamente.

El cálculo del espacio de parámetros a y b dependen del orden de la derivada y este se obtiene por medio de la programación del algoritmo de [90] en Matlab. Este espacio de parámetros sirve para la obtención de valores de resistencias y capacitancias necesarios para la construcción de los capacitores fraccionarios.

En la Fig. 4.9 se puede observar de derecha a izquierda los valores de 0.91 hasta 0.99 con un paso de 0.1.

En la Tabla 4.1 se pueden observar la selección de valores en el espacio de parámetros necesarios para la obtención de valores de resistencia y capacitancias de acuerdo al algoritmo de Valsa para la construcción de los capacitores fraccionarios.

Con la elección de los parámetros a y b , los valores ideales obtenidos se muestran en la Tabla 4.2.

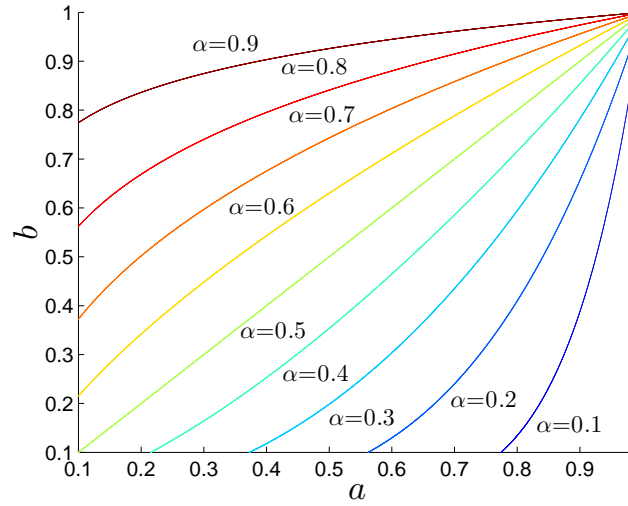


Figura 4.8: Espacio de parámetros a y b de $0.1 \leq \alpha \leq 0.9$

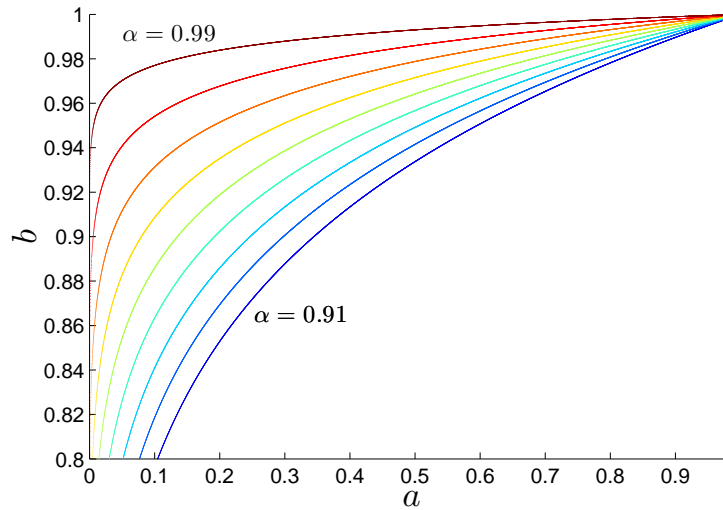


Figura 4.9: Parámetros a y b de $0.91 \leq \alpha \leq 0.99$

Dado que los valores ideales y los valores comerciales pueden diferir un poco, los valores utilizados en la implementación se muestran a continuación. En la tabla 4.3 se pueden observar los valores comerciales utilizados en la práctica para la construcción de los capacitores fraccionarios.

Parámetro	0.1	0.5	0.7	0.90	0.95	0.99
a	0.8748	0.3	0.1249	0.1869	0.0778	0.1041
b	0.3	0.3	0.41	0.83	0.8742	0.9774

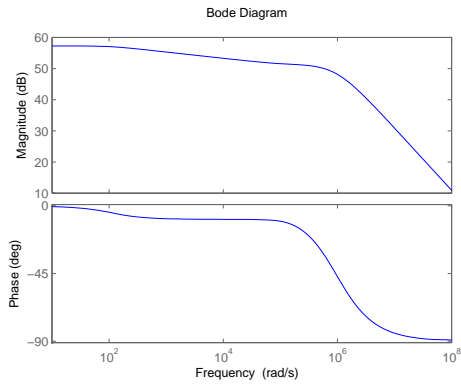
Cuadro 4.1: Espacio de parámetros a y b , para α entre 0.1 y 0.99.

Mediante un diagrama de Bode, se obtuvo la fase y amplitud de los factores con los valores comerciales de capacitancia y resistencia, esto con el objetivo de observar cualitativamente que las fases se mantienen constantes y conocer mediante las magnitudes los valores de fractancia. Las gráficas del diagrama de bode se muestran en la Fig. 4.10.

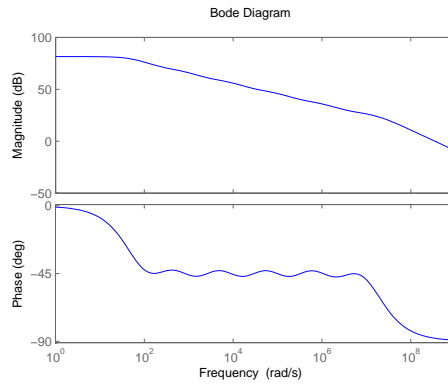
Como se puede observar en los diagramas de Bode, las aproximaciones de los diferentes valores de capacitores fraccionarios son satisfactorias, por tanto se procede a la construcción del experimento.

4.4. Experimentos en tiempo real

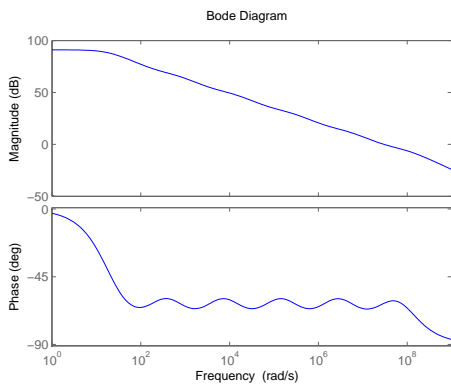
En esta sección se muestran los resultados obtenidos de la validación del algoritmo explicado anteriormente, en primer lugar se realiza el circuito experimental de dos osciladores de van der Pol acoplados por un capacitor, el capacitor de acoplamiento con valor de $0.33 \mu F$. Los valores medidos corresponden al voltaje en el capacitor C (véase Fig. 4.5). Se sabe que si dos trayectorias de sistemas diferentes son iguales en todo el tiempo, el plano de fase compuesto por ambas tiene forma de una línea recta con pendiente positiva de 45° , es decir, las trayectorias se encuentran sincronizadas en fase (sincronización de fase, desfase de 0°). Por otra parte, si la línea recta tiene una pendiente negativa de -45° se dice que se encuentran sincronizadas en antifase (antisincronización de fase) con un desfase de $\pm 90^\circ$. Sin embargo, puede no ser el caso de ninguna de las anteriores pero aún observarse el fenómeno de sincronización donde las fases de las trayectorias se encuentran enganchadas, esto puede verse en las mediciones de un osciloscopio como elipses fijas cuyo eje mayor puede tener cualquier pendiente. La inexistencia de sincronización se puede ver en el osciloscopio como las elipses contrayéndose y rotando sin quedar fijas eventualmente,



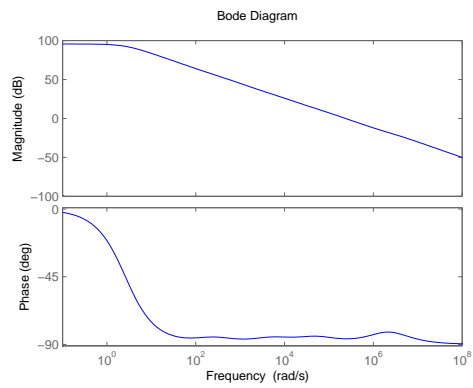
(a) Diagrama de Bode $\alpha = 0.1$



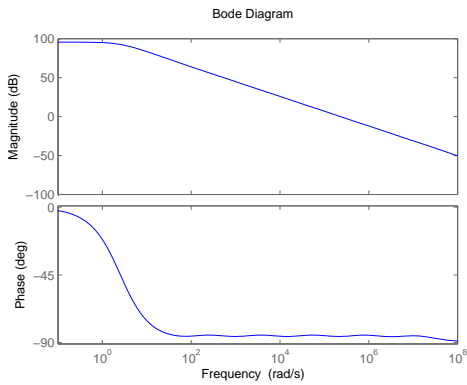
(b) Diagrama de Bode $\alpha = 0.5$



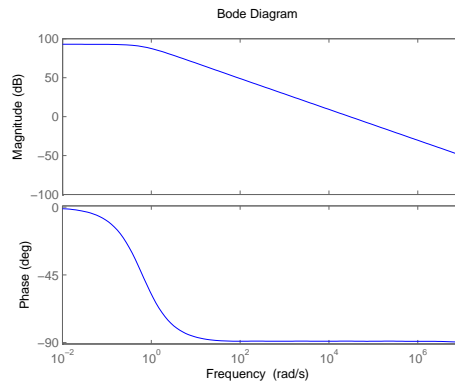
(c) Diagrama de Bode $\alpha = 0.7$



(d) Diagrama de Bode $\alpha = 0.90$



(e) Diagrama de Bode $\alpha = 0.95$



(f) Diagrama de Bode $\alpha = 0.99$

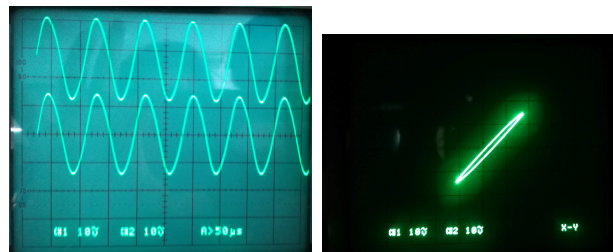
Figura 4.10: Diagrama de Fase y Magnitud para distintos valores de α de la impedancia del circuito de Valsa

Resistance (Ideal)	0.1	0.5	0.7	0.90	0.95	0.99
R_1	5.2K Ω	5.2K Ω	5.2K Ω	5.2K Ω	5.2K Ω	5.2K Ω
R_2	4.54K Ω	1.56K Ω	649 Ω	971 Ω	396 Ω	540 Ω
R_3	3.97K Ω	460 Ω	81.1 Ω	181 Ω	30.9 Ω	56 Ω
R_4	3.8K Ω	140.4 Ω	10.1 Ω	33.9 Ω	2.4 Ω	5.4 Ω
R_5	3.04K Ω	4.21 Ω	1.3 Ω	6.3 Ω	2 Ω	0.6 Ω
R_p	744 Ω	12.3K Ω	36.433K Ω	22.62K Ω	60.45K Ω	44.7K Ω
Capacitance (Ideal)						
C_1	0.82 μ F	0.82 μ F	0.82 μ F	0.82 μ F	0.82 μ F	0.82 μ F
C_2	0.2460 μ F	0.2460 μ F	0.336 μ	0.68 μ F	0.716 μ F	0.8015 μ F
C_3	0.0738 μ F	0.0738 μ F	0.137 μ	0.574 μ F	0.626 μ F	0.78 μ F
C_4	0.0221 μ F	0.0221 μ F	56.5nF	0.468 μ F	0.5478 μ F	0.7657 μ F
C_5	0.0066 μ F	0.0066 μ F	23.2nF	0.389 μ F	0.478 μ F	0.7483 μ F
C_p	0.027 μ F	0.027 μ F	0.0161 μ F	1.9 μ F	3.328 μ F	32.3 μ F

Cuadro 4.2: Valores de resistencias y capacitancias ideales.

donde el plano de fase se ve como un recuadro con su contorno e interior completamente relleno.

En la Fig. 4.11 se puede observar la sincronización de los osciladores de van der Pol.



(a) Voltajes v_1 y v_2

(b) v_1 vs. v_2

Figura 4.11: Sincronización con $C_0 = 0.33 \mu F$

En la Fig. 4.12 se puede observar la antisincronización de los osciladores de van Der Pol con el mismo valor de capacitancia de $0.33 \mu F$. Las mediciones corresponden al voltaje en los capacitores C , i.e., voltaje en el nodo v_k .

Resistencias (Comerciales)	0.1	0.5	0.7	0.90	0.95	0.99
R_1	5.1K Ω	5.1K Ω	5.1K Ω	5.1K Ω	5.1K Ω	5.1K Ω
R_2	4.7K Ω	1.5K Ω	680 Ω	910 Ω	500 Ω	560 Ω
R_3	3.9K Ω	470 Ω	82 Ω	180 Ω	30 Ω	56 Ω
R_4	3.9K Ω	150 Ω	10 Ω	33 Ω	1 Ω	10 Ω
R_5	3.3K Ω	1 Ω	1 Ω	10 Ω	1 Ω	1 Ω
R_p	820 Ω	12K Ω	39K Ω	22K Ω	60K Ω	47K Ω
Capacitancia (Comerciales)						
C_1	0.82 μ F	0.82 μ F	0.82 μ F	0.82 μ F	0.82 μ F	0.82 μ F
C_2	0.25 μ F	0.25 μ F	0.33 μ	0.68 μ F	0.68 μ F	0.82 μ F
C_3	0.068 μ F	0.068 μ F	0.12 μ	0.56 μ F	0.68 μ F	0.82 μ F
C_4	0.022 μ F	0.022 μ F	56nF	0.47 μ F	0.56 μ F	0.68 μ F
C_5	6800pF	6800pF	22nF	0.39 μ F	0.47 μ F	0.68 μ F
C_p	1000pF	1000pF	0.012 μ F	2 μ F	3.3 μ F	33 μ F

Cuadro 4.3: Valores comerciales de resistencias y capacitancias.

Como se pudo observar en las figuras anteriores el experimento realizado en [61] es satisfactorio, por lo tanto, para un capacitor entero como acoplamiento se tiene la sincronización y la antinsincronización de fase.

Ahora, se presentan los resultados experimentales de la construcción de los capacitores fraccionarios observados desde un osciloscopio con los valores obtenidos por medio del algoritmo dado. La Tabla 4.3 muestra los valores de los elementos usados necesarios para la construcción. En la Fig 4.13 se puede observar la implementación electrónica de los capacitores fraccionarios diseñados además de los dos circuitos acoplados de van der Pol (en la parte inferior izquierda).

En la Fig. 4.14, Fig. 4.15 y Fig. 4.16 se muestran los resultados para los capacitores fraccionarios de orden $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 0.7$, respectivamente. En ellas se puede observar el fenómenos de antisincronización de fase.

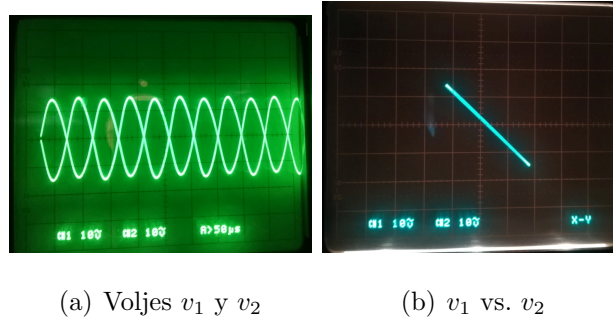


Figura 4.12: Antisincronización con $C_0 = 0.33\mu F$

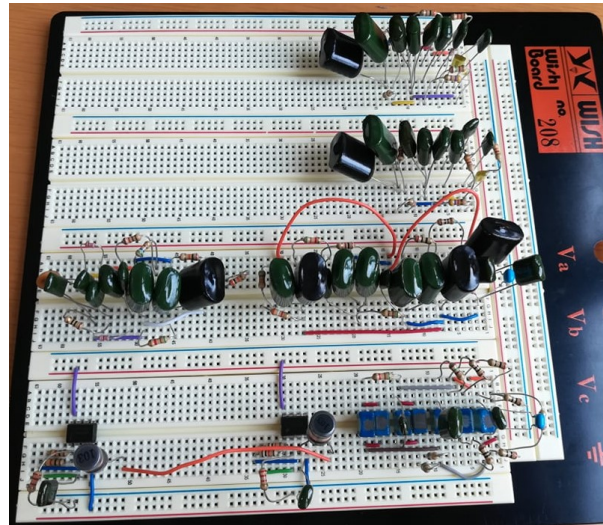
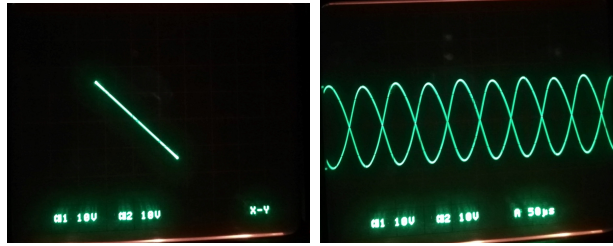


Figura 4.13: Capacitores fraccionarios y osciladores acoplados

En la Fig. 4.17 y Fig. 4.18 se muestran los capacitores fraccionarios de orden $\alpha = 0.9$ y de $\alpha = 0.95$, respectivamente. Se puede observar un comportamiento conocido como enganchamiento de fase que es un tipo de sincronización del cual se habla en el capítulo introductorio.

Note que los experimentos sugieren que el fenómeno de sincronización de fase aparenta presentarse para valores α muy cercanos a 1.

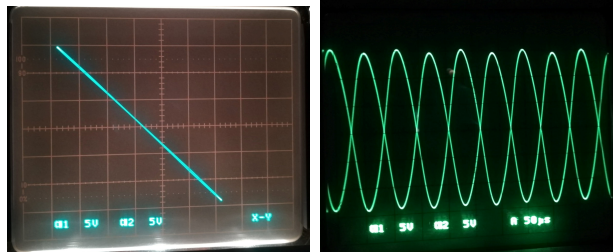
Estas observaciones sugieren un estudio más completo sobre este tipo de acoplamiento. Podríamos tomar α y a la fractancia como parámetros de bifurcación y así indagar más al respecto. Cabe mencionar que no existen resultados útiles al momento para poder dar una solución analítica al problema. La elaboración de los mismos se proponen como trabajo a futuro.



(a) v_1 vs. v_2

(b) Voltajes v_1 y v_2

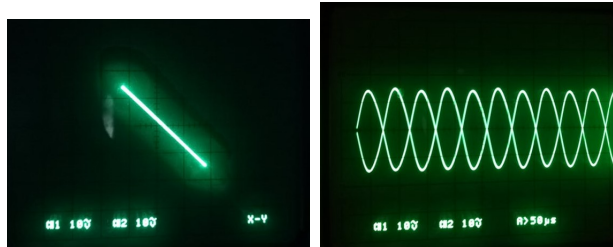
Figura 4.14: Experimento de $\alpha = 0.1$



(a) v_1 vs. v_2

(b) Voltajes v_1 y v_2

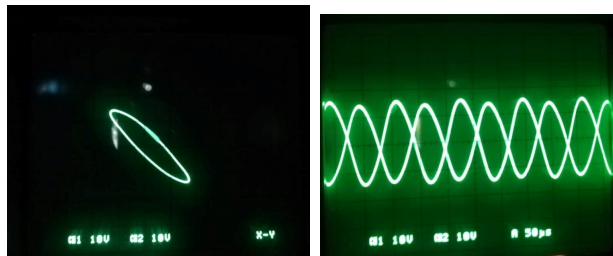
Figura 4.15: Experimento de $\alpha = 0.5$



(a) v_1 vs. v_2

(b) Voltajes v_1 y v_2

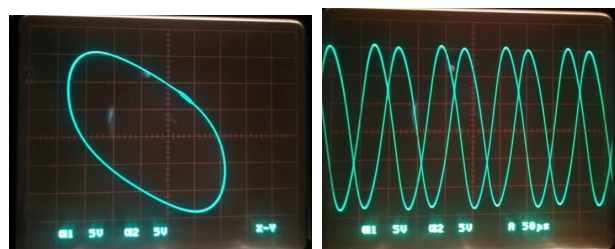
Figura 4.16: Experimento de $\alpha = 0.7$



(a) v_1 vs. v_2

(b) Voltajes v_1 vs. v_2

Figura 4.17: Experimento de $\alpha = 0.90$



(a) v_1 vs. v_2

(b) Voltajes v_1 y v_2

Figura 4.18: Experimento de $\alpha = 0.95$

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo a Futuro

Esta tesis introduce nuevas metodologías constructivas para el estudio de la sincronización de sistemas no lineales de orden incommensurado. Las contribuciones principales estriban en resultados teóricos sobre la sincronización y también plantean nuevas líneas de investigación que proponen un estudio práctico en este tipo de problemas.

Lo expuesto a lo largo del trabajo de tesis deriva en las siguientes conclusiones y propuestas de trabajo a futuro.

5.1. Conclusiones

El estudio en los problemas de osciladores acoplados radica en el análisis de la estabilidad del error de sincronización. El objeto de estudio de esta tesis es la definición de la dinámica de este error y el análisis de la estabilidad de sus trayectorias cuando los sistemas involucrados contienen operadores de orden fraccionario incommensurado.

En el presente trabajo se plantean tres tipos de sincronización para sistemas fraccionarios incommensurados: sincronización basada en observación, cuasi-sincronización generalizada y un novedoso ejemplo de sincronización experimental. Las contribuciones teóricas de este trabajo se presentan a continuación:

- La introducción de nuevos conceptos algebraicos para sistemas fraccionarios inconmensurados tales como: la propiedad de observabilidad algebraica fraccionaria inconmensurada, las formas canónicas de observabilidad fraccionaria inconmensurada y el elemento primitivo diferencial fraccionario inconmensurado.
- Una nueva metodología para la construcción de un observador de modelo libre y orden reducido para sistemas fraccionarios inconmensurados.
- El diseño de una nueva ley de control dinámica para la sincronización de sistemas caóticos con diferentes estructuras y órdenes de derivadas.
- La introducción de una nueva definición para la sincronización de estos sistemas, denominada como cuasi-sincronización generalizada fraccionaria inconmensurada.
- La construcción de una dinámica del error de sincronización y el análisis de la estabilidad de su trayectoria.

Para el caso de sincronización por medio de observador se puede concluir en el análisis del error que éste es acotado por una bola que dependa de las ganancias del observador.

Para el caso de sincronización generalizada se puede observar que el caso conmensurado el error de sincronización es asintóticamente estable, mientras que en el caso inconmensurado se presenta un fenómeno de cuasi-sincronización, es decir, el error de sincronización se encuentra dentro de un compacto.

En ambos casos debido a la naturaleza e interacción entre sistemas de orden inconmensurado se observa que el error de sincronización converge asintóticamente a una bola cerrada y acotada (conjunto compacto) de la que se sabe que su radio es inversamente

proporcional a la ganancia de acoplamiento.

En general los problemas que involucran sistemas fraccionarios están fuera del alcance de una implementación experimental, la contribución práctica de esta tesis se presenta en un ejemplo tangible que consta de la sincronización de osciladores no lineales de orden entero mediante un acoplamiento fraccionario. Los resultados experimentales son los siguientes:

- El acoplamiento de dos circuitos de van der Pol acoplados mediante un capacitor fraccionario.
- La implementación electrónica de capacitores fraccionarios.
- Cálculo de los valores comerciales de elementos pasivos para la construcción de capacitores fraccionarios.

En este caso se pueden observar dos fenómenos de sincronización, la antisincronización y el enganchamiento de fase, en donde ambos dependerán del valor del orden de la derivada fraccionaria. Cabe destacar que comparado con el caso puramente entero, para los valores fraccionarios cercanos a 0 se esperaba el fenómeno de antisincronización y para casos cercanos a 1 se esperaba la sincronización.

5.2. Trabajo a Futuro

La primera línea de continuación de este trabajo de investigación es proponer el uso de algoritmos numéricos para sistemas fraccionarios por medio de métodos como Adams-Bashforth-Moulton para la simulación numérica de sistemas fraccionarios más complicados.

Durante el desarrollo de esta tesis se ha presupuesto la cuasi-sincronización de sistemas fraccionarios inconmensurados, teniendo el análisis de estabilidad del sistema en coordenadas transformadas. Sin embargo, se requiere de un análisis de la estabilidad del sistema en coordenadas originales.

Finalmente, se necesita del desarrollo de un análisis de estabilidad del ejemplo experimental de la sincronización de dos osciladores de van der Pol por medio de un capacitor fraccionario. Un correcto estudio de este problema desembocaría en grandes contribuciones al significado físico de los operadores fraccionarios.

5.3. Publicaciones

- Libros

1. R. Martínez-Guerra, C. A. Pérez-Pinacho & G. C. Gómez-Cortés, “*Synchronization of integral and fractional order chaotic systems*”, Springer, 2015.
2. R. Martínez-Guerra, C.A. Pérez-Pinacho, “*Advances in Synchronization of Coupled Fractional Order Systems: Fundamentals and Methods*”, Springer, 2018.

- Revistas

1. R. Martínez-Guerra, C. A. Pérez-Pinacho, G.C. Gómez-Cortés, J.C. Cruz-Victoria, & J. L. Mata-Machuca. “*Experimental Synchronization by means of Observers*”, Journal of applied research and technology, vol. 12, no.1, pp. 52-62, 2014.
2. R. Aguilar-López, R. Martínez-Guerra, & C. A. Perez-Pinacho, “*Nonlinear observer for synchronization of chaotic systems with application to secure data transmission*”, The European Physical Journal Special Topics, vol. 223, no.8,

pp. 1541-1548, 2014.

3. C. Aguilar-Ibañez, R. Martínez-Guerra, C.A. Pérez-Pinacho, E. García-Canseco, & M. S. Suarez-Castañon, “*A solution for the generalized synchronization of a class of chaotic systems based on output feedback*”, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
4. J. C. Cruz-Victoria, R. Martínez-Guerra, C. A. Pérez-Pinacho & G. C. Gómez-Cortés, “*Synchronization of nonlinear fractional order systems by means of PI^{α} reduced order observer*”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 262, pp. 224-231, 2015.
5. R. Martínez-Guerra, C.A. Pérez-Pinacho, G.C. Gómez-Cortés & J. C. Cruz-Victoria, “*Synchronization of incommensurate fractional order system*”, *Applied Mathematics and Computation*, vol.262, pp. 260-266, 2015.
6. R. Martínez-Guerra, C. D. Cruz-Ancona & C. A. Pérez-Pinacho, “*Generalized multi-synchronization viewed as a multi-agent leader-following consensus problem*”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 282 , pp. 226-236, 2016.
7. C. D. Cruz-Ancona, R. Martínez-Guerra & C.A. Pérez-Pinacho, “*Generalized multi-synchronization: A leader-following consensus problem of multi-agent systems*”, *Neurocomputing*, vol. 233, pp. 52-60, 2017.

■ **Congresos**

1. R. Martínez-Guerra, C.A. Pérez-Pinacho & G.C. Gómez-Cortés, “*A New Observer for a Class of Incommensurate Fractional Order Systems*”, XXI Congreso

- de la Asociación Chilena de Control Automático, Santiago, Chile, 2014.
2. R. Martínez-Guerra, C.A. Pérez-Pinacho & G.C. Gómez-Cortés, An “*Observer for a Class of Incommensurate Fractional Order Systems*”, XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA, Cancún, Quintana Roo, México, 2014.
 3. R. Martinez-Guerra, C.D. Cruz-Ancona, & C.A. Pérez-Pinacho, “*Generalized synchronization via multi-agent systems*”, 12th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, IEEE, Ciudad de México, México, 2015.
 4. C. Aguilar-Ibanez, R. Martínez-Guerra, C.A. Pérez-Pinacho, M. Suarez-Castañon, M. Moreno-Armendariz & J. Mendoza-Mendoza, “*Master-slave synchronization for a chaotic system by means of I&I observer*”, 12th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, IEEE, Ciudad de México, México, 2015.
 5. R. Martínez-Guerra, C. D. Cruz-Ancona & C. A. Pérez-Pinacho, “*Fractional Observers for a Class of Fractional Commensurate Systems*”, Conferencia: Third Mexican Workshop in Fractional Calculus, at Zacatecas, Zacatecas México, September 11-16, 2016
 6. R. Martínez-Guerra, C. A. Pérez-Pinacho & C. D. Cruz-Ancona, “*Sincronización Generalizada Mediante Control Dinámico de Sistemas Caóticos de Orden Fraccionario Inconmensurado*”, Congreso Nacional de Control Automático de la Asociación de México de Control Automático, Cuernavaca, Morelos, 2015.
 7. C.A. Pérez-Pinacho, R. Martínez-Guerra, C. D. Cruz-Ancona, “*Fractional ge-*

neralized quasi-synchronization of incommensurate fractional order oscillators”,
The 2017 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications,
Cancún, Quintana Roo, México, 2017.

8. C.D. Cruz-Ancona, R. Martínez-Guerra, C.A. Pérez-Pinacho, “ *Generalized multi-synchronization of chaotic systems via dynamical control laws: stability of synchronization manifold*”, The 2017 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications, Cancún, Quintana Roo, México, 2017.

Apéndice A

Apéndices

A.1. Demostración de algunas propiedades de la función gamma

Prueba 1 (Propiedad 1):

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} \quad (\text{A.1})$$

Se demuestra la propiedad 1. \square

Prueba 2 (Propiedad 2):

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} t^{z+1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \quad (\text{A.2})$$

Utilizando la integración por partes, siendo $u = t^z$ y $dv = e^{-t} dt$. Por tanto $du = zt^{z-1}$ y $v = -e^{-t}$.

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.3})$$

Se puede observar con facilidad que el primer término es 0, mientras que el otro término, sacando la z de la integral sería igual a $z\Gamma(z)$ \square .

Prueba 3 (Propiedad 3):

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n - 1)\Gamma(n - 1) \\ &= n(n - 1)(n - 2)\Gamma(n - 2) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= n(n - 1)(n - 2)\dots\Gamma(1) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Esto es $\Gamma(n + 1) = n!$ \square .

Prueba 4 (Propiedad 4):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.5})$$

Se demuestra la propiedad 4 \square .

Prueba 5 (Propiedad 5):

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 * 2 * 3 \dots (2n - 1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(z - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(z - \frac{3}{2}\right) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z - \frac{3}{2}\right) \left(z - \frac{5}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

(A.6)

$$= \left(\frac{2z - 1}{2}\right) \left(\frac{2z - 3}{2}\right) \left(\frac{2z - 5}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

(A.7)

de donde:

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 * 2 * 3 \dots (2z - 1)}{2^z} \sqrt{\pi}$$

(A.8)

Se demuestra la propiedad 5 \square .

Prueba 6 (Propiedad 6):

$$\Gamma(1 - z) \Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \Gamma(1 - z) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt * \int_0^\infty e^{-s} s^{-z} ds \\ &\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)} t^{z-1} s^{-z} dt ds \end{aligned} \quad (A.9)$$

Haciendo $u = t + s$, $v = \frac{t}{s}$, $t = \frac{uv}{1+v}$, $s = \frac{u}{1+v}$. Se tiene que el jacobiano de la transformación viene dado por:

$$\frac{\partial(t, s)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$= -\frac{u}{(1+v)^2} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{uv}{1+v}\right)^{z-1} \left(\frac{u}{1+v}\right)^{-z} \left| \frac{\partial(t, s)}{\partial(u, v)} \right| dudv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{uv}{1+v}\right)^{z-1} \left(\frac{u}{1+v}\right)^{-z} \frac{u}{(1+v)^2} dudv \\ &= \int_0^\infty e^{-u} v^{z-1} \frac{1}{1+v} dudv \\ &= \int_0^\infty e^{-u} du \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v} dv \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Resolviendo las integrales se tiene $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen}\pi z}$ \square .

A.2. Ejemplo de la obtención de una derivada fraccionaria de Caputo

Sea $a = 0$, $\alpha = 1/2$ y $f(t) = t$. Aplicando la derivada fraccionaria de Caputo.

$$D^{(1/2)}t = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau$$

Tomando en cuenta las propiedades de la función gamma y sustituyendo $u := (t-\tau)^{1/2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
D^{1/2}t &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d(t-\tau) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{1}{u} d(u^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2u}{u} d(u) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t} - 0)
\end{aligned}$$

Entonces

$$D^{(1/2)}t = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

A.3. Solución de un sistema escalar lineal invariante en el tiempo fraccionario

Considere el sistema escalar de orden fraccionario con operador de derivada de Caputo.

$$x^{(\alpha)}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0$$

suponiendo la solución del tipo

$$x(t) = a_0 + a_1 t^\alpha + a_2 t^{2\alpha} + \dots + a_k t^{k\alpha} \quad (\text{A.13})$$

Vamos a encontrar los coeficientes de la expansión en serie de potencias.

En el instante inicial $t = 0$, la expansión en serie de potencias tiene como resultado

$$x(0) = a_0,$$

aplicando la derivada de Caputo a la expansión en serie de potencias y utilizando la propiedad

$$D^\alpha t^\sigma = \frac{\Gamma(\sigma + 1)}{\Gamma(\sigma + 1 - \alpha)} t^{\sigma - \alpha},$$

tenemos

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(t) &= 0 + a_1 \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(1)} + a_2 \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha \\ &+ \dots + a_k \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(1 + (k - 1)\alpha)} t^{\alpha(k-1)} = ax(t) \end{aligned}$$

para $t = 0$, tenemos

$$a_1 = ax(0) \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha + 1)} = a \frac{x(0)}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

aplicando derivadas sucesivas a (A.13) y sustituyendo $t = 0$, encontramos los coeficientes a_n , $n = 1, \dots, k, \dots$, de modo que

$$\begin{aligned} x^{(2\alpha)}(t) &= 0 + a_2 \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(1)} \\ &+ \dots + a_k \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(1 + (k - 1)\alpha)} \frac{\Gamma(1 + \alpha(k - 1))}{\Gamma(1 + \alpha(k - 2))} t^{\alpha(k-2)} + \dots \\ &= ax^{(\alpha)}(t) = a * ax(t) = a^2 x(t) \end{aligned}$$

si $t = 0$,

$$a_2 = \frac{a_2 x(0)}{\Gamma(2\alpha + 1)}$$

para el término k -ésimo

$$\begin{aligned} x^{(k\alpha)}(t) &= a_k \Gamma(k\alpha + 1) t^0 = a_k \Gamma(k\alpha + 1) = ax^{((k-1)\alpha)}(t) \\ &= a * a^{k-1} x(t) = a^k x(t) \end{aligned}$$

si $t = 0$,

$$a_k = \frac{a^k x(0)}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

Finalmente, sustituyendo todos los términos en la serie :

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0) + a \frac{x(0)}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + a^2 \frac{x(0)}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha} + \dots \\ &+ \frac{a^k x(0)}{\Gamma(k\alpha + 1)} t^{k\alpha} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} x(0)\end{aligned}$$

note que la expresión anterior corresponde a una función de Mittag-Leffler

$$x(t) = E_{\alpha,1}(at^\alpha)x(0)$$

que es solución de $x^{(\alpha)}(t) = ax(t)$.

Bibliografía

- [1] J. A. Tenreiro Machado, K. Virginia, “*The Chronicles of Fractional Calculus*”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 20, no. 2, pp. 307-336, 2017.
- [2] Keith B. Oldham, & Jerome Spanier, “*The Fractional Calculus: Theory and applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*”, Dover, 1974.
- [3] Pierre Simon de Laplace, “*Théorie analytique des probabilités*”, vol. 7. Courcier, 1820.
- [4] Silvestre Francois Lacroix, “*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*”, vol. 1. JBM Duprat, 1797.
- [5] N.H Abel, “*Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*” . Oeuvres complètes, vol. 1: pp. 11-18, 1823.
- [6] J. Liouville, “*Mémoire sur le Calcul des différentielles à indices quelconques*”, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, vol 13, Section 21 pp. 71-162, 1832.
- [7] William Center, “*On the Value of $(d/dx)^\theta x^0$ When θ is a Positive Proper Fraction*”, *Cambridge & Dublin Math. Journal* 3, pp. 163-169, 1848.
- [8] Bernhard Riemman, “*Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation*”, *Gesammelte Werke* 62, 1876.
- [9] L. Euler, “*De progressionibus Transcendentibus, seu Quarum Termini Algebraice Dari Nequeunt*”, *Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitance*, vol 5, pp. 38-57, 1738.

- [10] Joseph Louis Lagrange, “*Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation & à l’intégration des quantités variables*”, Académie royale des sciences et belles lettres, 1772.
- [11] Fourier, Joseph, “*Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier*”, Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.
- [12] Nishimoto Katsuyuki, “*An Essence of Nishimoto’s Fractional Calculus (Calculus in the 21st Century): Integrations and Differentiations of Arbitrary Order*”, Descartes Press Company, 1991.
- [13] Bonilla, B., Kilbas, A. A., and Trujillo, J. J., “*Cálculo Fraccionario y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias*”, Uned, Madrid, 2003.
- [14] L. Pecora & T. Carrol, “*Synchronization in chaotic systems*”, Phys. Rev. Lett., vol. 64, pp. 821-824, 1990.
- [15] Carrol, T. L. & Pecora, L. M., “*Synchronizing Chaotic Circuits*”, IEEE Trans. on circ. and sys., vol. 38, no. 4, pp. 453-456, 1991.
- [16] Kocarev, L. & Parlitz, U., “*Generalized Synchronization, Predictability, and Equivalence of Unidirectionally Coupled Dynamical Systems*”, Phys. Rev. Lett., vol. 76, no. 11, pp. 1816-1819, 1996.
- [17] Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., & Tsimring, L.S., “*Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems*”, Phys. Rev. E, vol. 51, no. 2, pp. 980-994, 1995.
- [18] Afraimovich, V. S., Verichev, N.N., y Rabinovich, M.I., “*Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems*”, Institute of Applied Physics, Academy of Sciences of the USSR.tiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Radiofizika, vol. 29, no. 9, pp. 1050-1060, 1986.
- [19] Mainieri, R., y Rhacek, J., “*Projective Synchronization In Three-Dimensional Chaotic Systems*”, Phys. Rev. Lett., vol. 82, no. 15, pp. 3042-3045, 1999.

- [20] Rosenblum, M.G. , Pikovsky, A.S., y J. Kurths, J., Phase “*Synchronization of Chaotic Oscillators*”, Phys. Rev. Lett., vol. 76, no. 11, pp. 1804-1807, 1996.
- [21] Pikovsky, A.S., Rosenblum, M.G., Sipov, G.V., y Kurths, J., “*Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving*”, Phys. D., vol. 104, pp. 219-238, 1997.
- [22] Rosenblum, M.G., Pikovsky, A.S., y Kurths, J., “*From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators*”, Phys. Rev. Lett., 78(22): 4193–4196, 1997.
- [23] Nijmeijer, H. y Mareels, I. M. Y., “*An observer looks at synchronization*”, IEEE Tras. on Circ. and Sys.-I:Fundamental theory and applications, vol. 44, no. 10, pp. 882–890, 1997.
- [24] Grassi, G. y Mascolo, S., “*Nonlinear observer design to synchronize hyperchoatic systems via a scalar signal*”, IEEE Tras. on Circ. and Sys.-I:Fundamental theory and applications, vol. 44, no. 19, pp. 1011-1014, 1997.
- [25] Morgül, Ö, y Solak, E., “*Observer based synchronization of chaotic systems*”, Phys. Rev. E., vol. 54, no. 5, pp. 4803-4810, 1996.
- [26] Pecora, L.M., Carroll, R.L., Johnson, G.A., y Mar, D.J., “*Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applicatons*”, Chaos, vol. 7, no. 4, 520-543, 1997.
- [27] Ushio, T., “*Synthesis of synchronized chaotic systems based on observers*”, Inter. J. of Bifurcations and Chaos, vol. 9, no. 3, pp. 541-546, 1999.
- [28] K. Cuomo & A. V. Oppenheim, “*Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications*”, Phys. Rev. Lett, vol. 71, no. 1, pp. 65, 1993.
- [29] K. Cuomo, A. V. Oppenheim y S. H. Strogatz, “*Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications*”, IEEE TRans. Circuits Sys., vol. 40, pp. 626-633, 1993.

- [30] RulKov, N. F., Volkoskii, A. R., Rodriguez-Lozano, A., Del Rio, E., & Velarde, M. G., “*Mutual synchronization of chaotic self-oscillators with dissipative coupling*”. International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 2, no.3, pp. 669-676, 1992.
- [31] J. K. Hale, “*Diffusive coupling, dissipation, and synchronization*”, J. Dyn. Diff. Eqns., vol. 9, no. 1, pp. 1-52, 1997.
- [32] P. So, E. Ott & W. P. Dayawansa, “*Observing chaos: Deducing and tracking the state of a chaotic system from limited observation*”, Phys. Rev. E., vol. 49, no. 4, pp. 2650-2660, 1994.
- [33] Er-Wei Bai & Karl E. Lonngren, “*Synchronization of Two Lorenz Systems using Active Control*”, Chaos, Solitons & Fractals, vol. 8, no. 1, pp. 51-58, 1997.
- [34] H. N. Agiza, M. T. Yassen, “*Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems using active control*”, Phys. Lett. A, vol. 278, pp. 191-197, 2001.
- [35] Rafael Martínez-Guerra, Claudia A. Pérez-Pinacho and Gian Carlo Gómez-Cortés, “*Synchronization of Integral and Fractional Order Chaotic Systems: A Differential Algebraic and Differential Geometric Approach With Selected Application in Real-Time*”, Springer, 2015.
- [36] J. G. Barajas Ramírez, K. P. Cuéllar Galarza & R. Femat, “*Generalized synchronization of strictly different systems: Partial-state synchrony*”, Chaos, Solitons & Fractals, vol. 45, pp. 193-204, 2012.
- [37] A. Isidori, L. Marconi, G. Casadei, “*Robust Output Synchronization of a Network of Heterogeneous Nonlinear Agents Via Nonlinear Regulation Theory*”, IEEE Trans. on Autom. Control, vol. 59, no. 10, pp. 2680-2691, 2014.
- [38] Strogatz, Steven H. “*Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*”. Westview press, 2014.

- [39] Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri, “*A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems*”, Physics Letters A 367, pp. 102-113, 2007.
- [40] Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri, “*Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems*”, Physica D 237 , pp. 2628-2637, 2008.
- [41] B.R. Hunt, E. Ott, J.A. Yorke, “*Diferentiable generalized synchronization of chaos*”, Phys Rev E ; vol. 55, no. 4, pp. 029, 1997.
- [42] Martínez-Guerra, Rafael, G. C. Gómez-Cortés, & C. A. Pérez-Pinacho, “*Synchronization of integral and fractional order chaotic systems*”, Springer, 2015.
- [43] Wu, Xiangjun, Darong Lai, and Hongtao Lu, “*Generalized synchronization of the fractional-order chaos in weighted complex dynamical networks with nonidentical nodes*”, Nonlinear Dynamics, vol. 69, no. 1-2, pp. 667-683, 2012.
- [44] Deng, Weihua, “*Generalized synchronization in fractional order systems*”, Physical Review E, vol. 75, no. 5, pp. 056201, 2007.
- [45] Ouannas, A., Azar, A. T., Ziar, T., & Radwan, A. G., “*Generalized synchronization of different dimensional integer-order and fractional order chaotic systems*”, Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems. Springer, Cham, pp. 671-697, 2017.
- [46] Wang, Ming-Jun, and Xing-Yuan Wang, “*Generalized synchronization of fractional order chaotic systems*”, International Journal of Modern Physics B, vol. 25, no. 9, pp. 1283-1292, 2011
- [47] Wang, Tianshu, & Xingyuan Wang, “*Generalized synchronization of fractional order hyperchaotic lorenz system*”, Modern Physics Letters B, vol. 23, no. 17, pp. 2167-2178, 2009.

- [48] Ping, Zhou, Cheng Xue-Feng, & Zhang Nian-Ying, “*Generalized synchronization between different fractional-order chaotic systems*”, Communications in Theoretical Physics, vol. 50 no. 4, pp. 931, 2008.
- [49] Liang, H., Wang, Z., Yue, Z., & Lu, R, “*Generalized synchronization and control for incommensurate fractional unified chaotic system and applications in secure communication*”, Kybernetika, vol. 48, no. 2 pp. 190-205, 2012
- [50] A. Razminia, V.J. Majd, D. Baleanu, “*Chaotic incommensurate fractional order Rössler system: active control and synchronization*”, Advances in Difference Equations, pp. 1-12, 2011.
- [51] J.W. Wang, Y.B Zhang, “*Synchronization in coupled nonidentical incommensurate fractional-order systems*”, Physics Letters A, pp. 202-207, 2009
- [52] S.S. Delshad, M.M. Asheghan, M.H. Beheshti, “*Synchronization of N-coupled incommensurate fractional-order chaotic systems with ring connection*”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation , pp. 3815-3824, 2011.
- [53] Nijmeijer, Henk, and Iven MY Mareels, “*An observer looks at synchronization*”, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental theory and applications vol. 44. no. 10, pp. 882-890, 1997.
- [54] Matignon, Denis, and Brigitte d’Andrea-Novel, “*Observer-based controllers for fractional differential systems*”. Decision and Control, Proceedings of the 36th IEEE Conference on. Vol. 5, 1997.
- [55] Chen, Yangquan, Blas M. Vinagre, & Igor Podlubny, “*Fractional order disturbance observer for robust vibration suppression*”, Nonlinear Dynamics vol. 38 no. 1-4, pp. 355-367, 2004.
- [56] Lan, Y-H., H-X. Huang, & Yong Zhou, “*Observer-based robust control of a $(1 \leq a < 2)$ fractional-order uncertain systems: a linear matrix inequality approach*”, IET control theory & applications, vol. 6, no. 2 , pp. 229-234, 2012.

- [57] Dzieliński, Andrzej, & Dominik Sierociuk, “*Observer for discrete fractional order state-space systems*”, IFAC Proceedings Volumes, vol. 39, no. 11, pp. 511-516, 2006.
- [58] N’doye, Ibrahima, et al, “*Observer-based control for fractional-order continuous-time systems*”, Decision and Control, Proceedings of the 48th IEEE Conference on. IEEE, 2009.
- [59] Martínez-Guerra, R., Pérez-Pinacho, C. A., Gómez-Cortés, G. C., & Cruz-Victoria, J. C., “*Synchronization of incommensurate fractional order system*”, Applied Mathematics and Computation, vol. 262, pp. 260-266, 2015.
- [60] Moro, Seiichiro, Yoshifumi Nishio, & Sinsaku Mori, “*Synchronization phenomena in oscillators coupled by one resistor*”, IEICE transactions on fundamentals of electronics, communications and computer sciences, vol. 78, no. 2, pp.244-253, 1995.
- [61] Shimada, A., Uwate, Y., Nishio, Y., & Xin, J, “*Synchronization Phenomena of Two Simple RC Chaotic Circuits Coupled by a Capacitor*”, Journal of Signal Processing, vol. 17, no. 4, pp. 99-102, 2013.
- [62] Suezaki, T. “*Mutual synchronization of two oscillators*”, Trans. IECE, vol. 48, no. 9, pp. 1551-1557, 1965.
- [63] Oliveira, L. B., Filanovsky, I. M., Allam, A., & Fernandes, J. R. , “*Synchronization of two LC-oscillators using capacitive coupling*”, Circuits and Systems, ISCAS, IEEE International Symposium on IEEE, 2008.
- [64] Gu, Q., Xu, Z., Kim, J., Ko, J., & Chang, M. F., “*Three-dimensional circuit integration based on self-synchronized RF-interconnect using capacitive coupling*”, VLSI Technology, Digest of Technical Papers, Symposium on. IEEE, 2004.
- [65] Nishio, Yoshifumi, and Akio Ushida. “*Quasi-synchronization phenomena in chaotic circuits coupled by one resistor*”, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 43, no.6, pp. 491-496, 1996

- [66] Matignon D, “*Stability result on fractional differential equations with applications to control processing*”, in Proc. IMACS-SMC Proceedings, Lille, France, pp. 963-968, 1996.
- [67] Deng, Weihua, Changpin Li, & Jinhua Lü, “*Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays*”, Nonlinear Dynamics, pp. 409-416, 2007.
- [68] Riccardo Caponetto, Giovanni Dongola., “*Fractional Order Systems, Nonlinear Science*”, Series A., vol.72, pp. 20-24 2010.
- [69] Sarabia, José; Villalobos, Alfredo; García, Glenny, “*La función Gamma*”, Rev. Academia Canaria de Ciencias, pp. 123-132, 1998.
- [70] Diethelm, Kai, and Neville J. Ford, “*Analysis of fractional differential equations*”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.265, no.2, pp. 229-248, 2002.
- [71] Mittag-Leffler, G.M, “*Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$* ”. C. R. Acad. Sci. Paris (Ser. II) 137, pp. 554–558, 1903.
- [72] Podlubny I., “*Fractional differential equations*”, Academic Press, San Diego, 1999.
- [73] K.S. Miller, S.G. Samko, “*Completely monotonic functions, Integral Transforms and Special Functions*”, Integr. Transf. and Spec. Funct, vol. 12, no. 4, pp. 389-402, 2001.
- [74] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu-Batlle, V., “*Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*”. Springer Science & Business Media, 2010.
- [75] Petras, Ivo, “*Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*”, Springer Science & Business Media, 2011.
- [76] Martínez-Guerra, R., Cruz-Victoria, J. C., Gonzalez-Galan, R., & Aguilar-Lopez, R., “*A new reduced-order observer design for the synchronization of Lorenz systems*”, Chaos Solitons & Fractals , vol.28, no.2 , pp.511-517, 2006.

- [77] Kilbsa, A. A., Hari M. Srivastava & J. J. Trujillo, “*Theory and Applications of Fractional Differential Equations*”, 2006.
- [78] W.C. Chen, “*Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system*”, *Chaos Solitons & Fractals*, vol.36, no.5, pp. 1305-1314, 2008.
- [79] Martínez-Martínez, R., Mata-Machuca, J. L., Martínez-Guerra, R., León, J. A., & Fernández-Anaya, G, “*Synchronization of nonlinear fractional order systems*”, *Applied Mathematics and Computation*, vol.218, no.7, pp. 3338-3347, 2011.
- [80] Li, C., & Chen, G., “*Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations*”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol.341, pp. 55-61, 2004.
- [81] Tom T. Hartley, Carl F. Lorenzo, H. Killory Qammer, “*Chaos in a fractional order Chua’s system. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*”, vol. 42, no. 8, pp. 485-490, 1995.
- [82] Uwe Luther, Karla Rost, “*Matrix exponentials and inversion of confluent Vandermonde matrices*”, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, vol. 18, pp. 91-100, 2004.
- [83] Wang, Xing-yuan; wang, Ming-jun, “*Dynamic analysis of the fractional-order Liu system and its synchronization*”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 17, no. 3, pp. 033106, 2007.
- [84] Lu, J.G. Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization. *Physics Letters A*, 354, pp. 305–311, 2006.
- [85] Carlson, G., and C. Halijak, “*Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process*”, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. 11, no.2, 210-213, 1964.
- [86] M. J . Curie, “*Recherches sur La Conductibilit Des Corps Cristallises*”, *Annales de chimie et de physique*, ser. 6, vol. 18, pp. 203-269, 1889.

- [87] S. Westerlund and L. Ekstam, “*Capacitor Theory, IEEE Trans. on Dielectrics and Electrical Insulation*”, vol. 1, no. 5, pp. 826-839, 1994.
- [88] A. Le Mehaute and G. Crepy, “*Introduction to transfer and motion in fractal media: the geometry of kinetics, solid state Ionics*”, vol. 9, pp.17-30, 1983.
- [89] Machado, J. A, “*Discrete-time fractional-order controllers*, Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 4, pp. 47-66, 2001.
- [90] Valsa, Juraj and Jiri Vlach, “*RC models of a constant phase element*”, International Journal of Circuit Theory and Applications, vol. 41, no. 1, pp. 59-67, 2013.