

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

"Ecuación de Hill no Homogénea"

Tesis que presenta

Aurora Rodríguez Martínez

Para obtener el grado de

Doctor en ciencias

En la Especialidad de

Control Automático

Director de la Tesis: Joaquín Collado Moctezuma

Ciudad de México, México

Abril 2018.

Agradecimientos

Agradezco sinceramente a mi asesor, el Dr. Joaquín Collado, quien ha sido y será una persona fundamental en mi existencia, sus conocimientos, sabiduría y consejos los llevaré siempre conmigo. Sin duda, haberlo elegido a él como asesor fue una de las mejores decisiones en mi vida.

Quiero decir gracias al amor de mi vida, fuente inagotable de motivación y alegrías, espero que algún día pueda tener esa tenacidad y compromiso que solo tu sabes moldear. Gracias por todo Félix, gracias por llegar a mi vida y llenarla de felicidad, gracias por ser mi esposo adorado.

Agradezco a mis padres, mis ídolos y mis mejores amigos. Su fortaleza, apoyo, comprensión y cariño me han mantenido de pie durante años, los amo con todo mi corazón. También quiero agradecer a todos mis hermanos, en especial a tí Memito, quiero que sepas que tu serás mi fuente de inspiración de aquí en adelante, espero puedas sentirte orgulloso de mí.

Por último, agradezco enormemente al CONACyT por el soporte económico proporcionado a lo largo de todo el programa de doctorado, sin el cual, este trabajo simplemente no hubiera sido posible.

Resumen

El presente trabajo se divide en siete partes, en la primera hacemos una rápida revisión de la importancia de la ecuación de Hill homogénea y no homogénea basándose en sus múltiples aplicaciones, entonces se citan las contribuciones de trabajos previos destinados a la ecuación de Hill forzada. Posteriormente, se enlistan las propiedades mas sobresalientes de la ecuación que nos concierne, en uno y dos grados de libertad. En la tercera parte se presentan algunos métodos frecuentemente utilizados en el análisis de estabilidad de la ecuación de Hill.

El capítulo cuatro introduce con mas detalle la ecuación de Hill no homogénea en uno y dos grados de libertad, describe nuevos resultados obtenidos en sistemas de una dimensión y se explica el porqué estos resultados se extienden sólo parcialmente a sistemas de mas dimensiones; en esta parte se analiza como soluciones periódicas de la ecuación homogénea unidimensional se vuelven inestables al introducir una señal forzante bajo ciertas propiedades. La quinta sección describe dos aplicaciones de la ecuación de Hill forzada y un ejemplo de un sistema forzado que experimenta resonancia paramétrica y se encuentra estrechamente ligado a la ecuación de Hill. Finalmente, se mencionan las conclusiones y el trabajo futuro.

Abstract

The present work is divided into seven parts, in the first, we make a brief review of the importance of the homogeneous and non-homogeneous Hill equation based on its multiple applications, then we cite the contributions of previous studies destined to the forced Hill equation. Later, we list the most outstanding properties of the equation of our interest, in one and two degrees of freedom. In the third part, some methods frequently used in the stability analysis of the Hill equation are presented.

Chapter four introduces the Hill equation of one and two degrees of freedom in more detail, describes new results obtained in one-dimensional systems and explains why these results are extend only partially to systems of more dimensions; in this part we analyze how periodic solutions of the homogeneous uni-dimensional equation become unstable when introducing a forcing signal under certain properties. The fifth section describes two applications of the forced Hill equation and an example of a forced system that undergoes parametric resonance which is widely linked to the Hill equation. Finally, conclusions and future work are mentioned.

Índice general

Resumen Abstract			
1.	Ant	ecedentes matemáticos	5
	1.1.	Teoría de Floquet	5
		1.1.1. Reducibilidad	6
		1.1.2. Estabilidad \ldots	7
	1.2.	Sistemas Hamiltonianos	8
	1.3.	Resonancia paramétrica	10
2.	Pro	piedades y descripción general de la ecuación de Hill	13
	2.1.	Propiedades de la ecuación de Hill de un grado de libertad	13
		2.1.1. Multiplicadores de sistemas Hamiltonianos	16
		2.1.2. Solución de la ecuación de Meissner	17
		2.1.3. Ecuación de Hill con amortiguamiento	18
	2.2.	Propiedades de la ecuación de Hill de dos grados de libertad	19
		2.2.1. Reducción del polinomio característico	20
	2.3.	Generalización de la ecuación de Hill de uno y dos grados de libertad	23
		2.3.1. Ecuación de Hill de un grado de libertad vs. ecuación de Hill de dos grados	
		de libertad	25
3.	Mét	todos para el análisis de estabilidad de la ecuación de Hill	27
	3.1.	Determinantes infinitos	27
	3.2.	Teoría de perturbaciones	29
4.	Solı	iciones Periódicas en la Ecuación de Hill no homogénea	33
	4.1.	Ecuación de Hill no homogénea: un grado de libertad	33
		4.1.1. Antecedentes	33
		4.1.2. Análisis de estabilidad [25]	34
		4.1.3. Ecuación de Mathieu no homogénea con amortiguamiento	36
	4.2.	Ejemplo: péndulo de Kapitsa	39

	4.3. Soluciones kT -periódicas con $k \in \mathbb{R}$	42	
5.	Aplicaciones de la Ecuación de Hill no Homogénea 5.0.1. Giroscopios MEMS 5.0.2. Control de oscilaciones 5.0.3. Circuitos RLC cosechadores de energía	49 49 52 53	
6.	Conclusiones	57	
7.	Trabajo futuro	59	
8.	Apéndice8.1. Modelado del péndulo de Kapitsa forzado	61 61	
Re	Referencias		

Introducción

El estudio de sistemas con coeficientes periódicos ha ocupado por mas de un siglo el pensamiento de grandes investigadores como: Mathieu (1868), Floquet (1883), Hill (1886), Rayleigh (1887), Lyapunov (1892) y Poincaré (1899); sus trabajos pueden ser consultados en [1]-[6], respectivamente.

Los sistemas lineales oscilatorios con coeficientes periódicos, en general, dependen de dos parámetros físicos: la frecuencia natural del sistema de oscilaciones libres en ausencia de excitación (α) y la amplitud de la excitación periódica (β), la cual se asume pequeña. Los sistemas con disipación incluyen un tercer parámetro, el coeficiente de amortiguamiento δ . Si β y δ son cero, el sistema es un oscilador armónico, por ende, autónomo y conservativo.

Esta clase de sistemas experimenta un fenómeno de inestabilidad conocido como resonancia paramétrica, sus efectos sobre cualquier sistema físico son catastróficos, un claro ejemplo es el colapso estructural del puente de Tacoma Narrows (Estados Unidos) en 1940 [7].

En sistemas mecánicos la excitación paramétrica se presenta como cambios periódicos de rigidez, masa, carga y características geométricas, mientras que en los sistemas eléctricos, como el circuito paralelo LC, surge al variar periódicamente la capacitancia y/o la inductancia. La presencia de excitación paramétrica desestabiliza al sistema si el valor de la frecuencia de excitación ω es dos veces o cualquier múltiplo entero de la frecuencia natural del sistema α ; es decir, $\omega = 2\alpha$ o bien, $\omega = m\alpha, m \in \mathbb{N}$. Dos tipos de resonacia paramétrica son conocidos: resonancia simple, la frecuencia de excitación es cercana a fracciones específicas de la frecuencia natural, y resonancia combinada originada por la combinación de frecuencias naturales, esta última se presenta en sistemas con al menos dos grados de libertad. Podemos establecer como regla general, que cualquier objeto que almacene energía y varíe periódicamente puede producir resonancia paramétrica.

Originalmente, el término ecuación de Hill fue asignado a la clase de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden (un grado de libertad), homogéneas, con coeficientes reales y periódicos y con un único parámetro. Sin embargo, en la actualidad podemos encontrar un gran número de trabajos relacionados a la ecuación de Hill: *no* lineal, *no* homogénea, con dos o mas de un parámetro o con dos o mas grados de libertad.

El trabajo se centra principalmente en la ecuación de Hill introducida por Strutt [8]

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + [\alpha + \beta q(t)]x = 0, \tag{1}$$

en donde q(t) = q(t+T), es decir, es una función periódica con periodo fundamental T^1 .

A continuación, se presentan brevemente las distintas versiones de ecuación de Hill.

¹En este trabajo q(t) se asumirá continua a trozos, integrable de [0,T] y de promedio cero, es decir, $\int_0^T q(t)dt = 0$.



Figura 1: Diagrama de Ince-Strutt para la ecuación de Mathieu.

Ecuación de Mathieu

Se denota por

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos(\omega t)]x = 0, \tag{2}$$

es la ecuación tipo Hill más conocida debido al gran número de fenómenos dinámicos que representa, entre otros, describe las vibraciones transversales de una membrana elíptica tensa que se deriva de un problema de valores en la frontera de ecuaciones diferenciales parciales, tal como la ecuación de onda cuya frontera es una elipse y la modulación de una onda portadora de radio. Ejemplos y aplicaciones particulares se pueden consultar en [9, 10] y más recientemente en [11]. El diagrama de Ince-Strutt (también conocido como gráfico o diagrama de estabilidad), Fig. 1, representa zonas de estabilidad (blancas) e inestabilidad (grises) de la solución del sistema (2) determinadas por valores específicos de los parámetros α (eje horizontal) y β (eje vertical). Las zonas inestables reciben el nombre de Lenguas de Arnold² o lenguas de resonancia.

Ecuación de Meissner

Se caracteriza porque el término de excitación paramétrica en (1) es una función constante continua a trozos, por ejemplo, $q(t) = \text{sgn} [\cos(\omega t)]$. Aparece por primera vez en un problema relacionado con la inestabilidad en las barras laterales de locomotoras en 1918 [13]. La ecuación escalar de Meissner se puede resolver analíticamente (a diferencia de la ecuación de Mathieu); detalles adicionales se encuentran en [14]. Una propiedad interesante, que en general no se presenta en ecuaciones tipo Hill, es el cruce entre las fronteras de estabilidad para valores de $\beta \neq 0$, es decir, aparecen intervalos de inestabilidad de longitud cero paralelos al eje α en el diagrama de estabilidad, estos corresponden a parámetros en los cuales todas las soluciones del sistema son T o 2T periódicas. Este fenómeno se denomina *coexistencia* [15, 16], se puede observar a partir de la tercera lengua de Arnold en la Fig. 2. La ecuación de Meissner se puede utilizar para modelar el movimiento de iones en cuadrupolos magnéticos que a su vez son clave en los aceleradores de partículas tipo sincrotrón o en cuadrupolos eléctricos utilizados por espectrómetros de masas [15].

²El nombre de lenguas de Arnold se deriva de [12].



Figura 2: Lenguas de Arnold para la ecuación de Meissner. Observe un punto de coexistencia en $\alpha \approx 5$ y $\beta \approx 4$.

Ecuación de Lamé

En esta ecuación la excitacion paramétrica, q(t), es una función elíptica [17]. Al igual que la de Meissner, puede ser resuelta analíticamente, sin embargo el procedimiento es mucho mas complicado. Se define como

$$\ddot{x} + \left[\alpha + \left(-m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2(t,k)\right)\right] x = 0,$$
(3)

en donde $\beta = -m(m+1)k^2$ (la ecuación solo se puede resolver para estos valores), $m \in \mathbb{Z}, k^2$ (0 < k < 1) es llamado el módulo de sn(t, k) el cual es una función elíptica de Jacobi definida por $t = \int_0^{\operatorname{sn}(t,k)} \left[(1-x^2)(1-k^2x^2)\right]^{-1/2} dx$ [18]. La expresión (3) aparece en la teoría del potencial de un elipsoide [19], también surge en la mecánica cuántica como ecuaciones de pequeñas fluctuaciones sobre las soluciones clásicas de la ecuación de Schrödinger para diversos potenciales periódicos y anarmónicos [20].

Adicional a la lista anterior, en [16], se estudian la ecuación de Ince, Hermite, Whittaker-Hill y otras mas.

Es importante mencionar que las lenguas de Arnold de cualquier ecuación escalar tipo Hill no se intersectan, formalmente,

Lengua
$$(i) \cap$$
 Lengua $(j) = \phi \quad \forall \quad i \neq j,$

en donde, Lengua $(i) \triangleq \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \text{ perteneca a la } i - th \text{ lengua de Arnold}\}$, la cual incluye sus fronteras.

El objetivo principal de este trabajo está orientado al análisis de la ecuación de Hill no homogénea (4), tanto en el caso escalar como en el vectorial.

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)]x = f(t), \quad f(t) = f(t+T) \quad y \quad \int_0^T f(t)dt = 0.$$
 (4)

La motivación para su estudio se debe a la escasa información existente sobre el tema, a pesar de que sistemas dinámicos reales pueden ser perfectamente caracterizados por (4), el paradigma es el péndulo de Kapitsa forzado de uno y/o de dos grados de libertad (dos eslabones) al cual se le aplica una fuerza externa, f(t), sobre la masa, en el extremo del mecanismo. Otro ejemplo es un circuito LC sometido a una señal periódica externa en alguno de sus componentes, mientras que el valor almacenado en el otro componente (capacitancia o inductancia) está variando periódicamente. Dos aplicaciones recientes se presentan en el Capítulo 5.

Entre los trabajos que investigaron la ecuación de Hill no homogénea se encontran los resultados de Slane y Tragesser [21], quienes modificaron la teoría de Floquet para examinar analíticamente el comportamiento transitorio y en estado estacionario de un sistema no autónomo y no homogéneo. Younesian y otros [22] usaron la técnica de parámetros restringidos para buscar las soluciones periódicas y asintóticas en la ecuación de Mathieu forzada. Shadman y Mehri [23] trabajaron con el Teorema de punto fijo para investigar existencia de soluciones periódicas de la ecuación de Hill no homogénea. Kwong y Wong [24] usaron la teoría de Floquet para probar la conjetura de que todas las soluciones de la ecuación de Hill son oscilatorias en [0, ∞).

En esta tesis se presenta por primera vez la existencia de resonancia lineal en forma de *líneas delgadas*, dentro del diagrama de Ince-Strutt, estas surgen al forzar la ecuación de Hill con una señal periódica tal y como se muestra en la ecuación (4); tales lineas representan soluciones inestables del sistema. Un hecho atractivamente interesante se resume en que las mismas líneas delgadas también aparecen en el sistema homogéneo, bajo esta condición representan soluciones periódicas (y no soluciones inestables). La existencia de estas curvas ya habia sido confirmada en el trabajo realizado por Jazar [26], en donde se encontraron soluciones periódicas dentro de las zonas estables en el diagrama de estabilidad.

Publicaciones

Los siguientes artículos han sido preparados durante el doctorado:

Aceptados

- Aurora Rodriguez Martinez, Joaquin Collado. "On stabilidad of periodic solutions in nonhomogeneous Hill's equation", 12th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE) Mexico City, Mexico, October 28-30, IEEE, 2015.
- Aurora Rodriguez, Joaquin Collado. "Periodically forced Kapitza's pendulum", American Control Conference (ACC), Boston Marriott Copley Place, July 6-8, IEEE, pp. 2790-2794, 2016.

En revisión

• Periodic Solutions in Non-homogeneous Hill's Equation.

en Nonlinear Dynamics and Systems Theory.

Antecedentes matemáticos

En este capítulo se introducen los elementos matemáticos utilizados a través del texto, así como algunos conceptos fundamentales. En primer lugar se estudia la teoría de Floquet; herramienta principal para análisis de estabilidad en las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos. Posteriormente, se presentan algunas propiedades de los sistemas Hamiltonianos y su relación con matrices Hamiltonianas y simplécticas. Finalmente, se aborda el tema de matrices μ -simplécticas y algunos conceptos básicos de los tipos de resonancia.

1.1. Teoría de Floquet

Considere la siguiente representación en espacio de estados de una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes periódicos,

$$\dot{x} = A(t)x,\tag{1.1}$$

en donde A(t+T) = A(t) es una matriz de $n \times n$ con elementos continuos a trozos y periodo mínimo T > 0, es decir, A(t) es una matriz T-periódica.

Las soluciones del sistema (1.1) se pueden expresar en términos de la matriz de transición de estados, $\Phi(t, t_0)$.

Las propiedades de la matriz de transición de estados son [27]:

- $1 \ \Phi(t,t) = I_n \ \forall \ t \in \mathbb{R}$
- 2 $\Phi^{-1}(t,t_0) = \Phi(t_0,t)$
- 3 $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) \quad \forall t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
- $4 \quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0)$
- 5 $\forall x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, la solución general de (1.1) es $x(t) = \Phi(t, t_0) x_0$

Los detalles pueden ser consultados en [27] o [28].

Haciendo uso de las propiedades de la matriz de transición de estados, se obtiene el siguiente teorema,

Teorema 1.1. [Floquet] La matriz de transición de estados del sistema (1.1) satisface:

$$\Phi(t, t_0) = P^{-1}(t) e^{R(t-t_0)} P(t_0), \qquad (1.2)$$

en donde P(t+T) = P(t) es una matriz periódica de $n \times n$ del mismo periodo T que en (1.1) y Res una matriz constante de $n \times n$, puede ser compleja, aún cuando A(t) en (1.1) sea real. La matriz R en el Teorema (1.1) es real si y solo si los multiplicadores del sistema, los valores característicos de $\Phi(T, 0)$, son *no* negativos o cada divisor elemental correspondiente a multiplicadores negativos es de multiplicidad par [29]. No obastante, la matriz R del factor exponencial e^{2RT} que corresponde a la matriz de transición de estados $\Phi(2T, 0)$, siempre es real.

Considere $t_0 = 0$ en (1.2) y por la propiedad 1 de la matriz de transición de estados, $P^{-1}(0) = I_n$, lo que conlleva al siguiente Corolario,

Corolario 1.2. [Teorema de Floquet] La matriz de transición de estados del sistema (1.1), en $t_0 = 0$, satisface:

$$\Phi(t,0) = P^{-1}(t) e^{Rt}, \qquad (1.3)$$

en donde P(t+T) = P(t) es una matriz periódica de $n \times n$ del mismo periodo que el sistema (1.1), y R es una matriz constante de $n \times n$.

Evaluando (1.3) en t = T y tomando en consideración que P(t) es T-periódica, $P(T) = I_n$, entonces

$$M = \Phi(T, 0) = e^{RT}.$$
 (1.4)

La matriz constante M es ampliamente conocida como matriz de *Monodromía* y es de particular interés en el estudio de sistemas periódicos.

La matriz de Monodromía en (1.4) es dependiente del tiempo inicial t_0 , sin embargo su espectro¹ es independe de este, solo basta aplicar el Teorema 1.1.

Si $t = T + t_0$ en (1.2) y se nombra M_{t_0} a la matriz resultante, entonces

$$M_{t_0} = \Phi \left(T + t_0, t_0 \right) = P^{-1} \left(T + t_0 \right) e^{RT} P(t_0) = P^{-1} \left(t_0 \right) e^{RT} P(t_0) = P^{-1} \left(t_0 \right) M P(t_0),$$

observe que $M_{t_0} = \Phi (T + t_0, t_0)$ y M son matrices similares, lo que nos permite utilizar M_{t_0} o M indiferentemente siempre y cuando su uso esté limitado a su espectro.

Dos consecuencias se derivan del Teorema de Floquet: reducibilidad y estabilidad.

1.1.1. Reducibilidad

Sea el sistema (1.1) y el siguiente cambio de coordenadas z(t) = T(t) x(t), en donde la matrix T(t) de dimensión $n \times n$ satisface:

- T(t) es diferenciable e invertible $\forall t y$
- Las matrices T(t), \dot{T} y $T^{-1}(t)$ son acotadas.

La matriz de transformación T(t) que satisface las condiciones de arriba, es llamada Transformación de Lyapunov.

Se puede decir de manera informal que el sistema $\dot{x} = A(t)x$ en sus coordenadas originales x o en las coordenadas transformadas z preserva la propiedad de estabilidad si la matriz T(t), la cual relaciona ambas coordenadas, es una Transformación de Lyapunov. Propiedades de esta transformación se describen en [27, 29, 30].

Definición 1.3. Un sistema variante en el tiempo $\dot{x} = A(t)x$ se dice reducible, si existe una transformación de Lyapunov lineal y variante en el tiempo T(t) tal que z(t) = T(t)x(t) y

$$\dot{z} = \left[T^{-1}(t)A(t)T(t) + T^{-1}(t)\dot{T}(t)\right]z$$

en donde $\left[T^{-1}(t)A(t)T(t) + T^{-1}(t)\dot{T}\right] = R$ es una matriz constante.

Todo sistema de la forma (1.1) es reducible, esto se expresa formalmente con el siguiente Teorema:

¹El espectro de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, denotado por $\sigma(A)$, es el conjunto de todos sus eigenvalores.

Teorema 1.4. Sea $\dot{x} = A(t)x$ un sistema lineal *T*-periódico, el cambio de coordenadas $z(t) = P^{-1}(t)x(t)$ transforma el sistema lineal variante en el tiempo a un sistema lineal **invariante** en el tiempo, es decir,

 $\dot{z} = Rz,$

en donde R es la misma matriz que aparece en la ecuación (1.3).

En resumen, el Teorema anterior nos dice que todo sistema descrito por (1.1) tiene una transformación lineal y periódica que lo transforma a un sistema invariante en el tiempo, el cual preserva la estabilidad. Desafortunadamente, el uso de esta transformación es cuestionable en el sentido práctico, puesto que su implementación requiere de la solución del sistema para el cambio de coordenadas, sin embargo es bastante útil en problemas de análisis.

1.1.2. Estabilidad

Recordemos la definición de estabilidad en el sentido de Lyapunov, ver [5] o [31],

Definición 1.5. La solución cero de $\dot{x} = A(t)x$ se dice

- Estable, $si \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $||x(t_0)|| < \delta \Rightarrow ||x(t)|| < \varepsilon \forall t \ge t_0$.
- Inestable, si no es estable.
- Asintóticamente estable si la solución cero es estable y δ puede ser elegido tal que $||x(t_0)|| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$

La solución del sistema $\dot{x} = A(t)x$ con $t = kT + \tau \ge 0, k \in \mathbb{Z}_+, \tau \in [0, T), t_0 = 0$ y $x(0) = x_0$ satisface,

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t,0)x_0 \\ &= \Phi(kT+\tau,0)x_0 \\ &= \Phi(kT+\tau,kT)\Phi\left(kT,(k-1)T\right)\Phi\left(kT,(k-1)T\right)\cdots\Phi\left(T,0\right)x_0 \\ &= \Phi(\tau,0)\underbrace{\Phi(T,0)\Phi(T,0)\cdots\Phi(T,0)}_{k-veces}x_0 \\ &= \Phi(\tau,0)M^kx_0 \end{aligned}$$

de la última expresión se puede concluir:

- Estabilidad, x(t) se mantiene acotada $\forall t \ge 0$ si y solo si $\sigma(M) \subset \overline{D}_1 \stackrel{\circ}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ y si $\lambda \in \sigma(M)$ y $|\lambda| = 1$, λ es una raíz simple del polinomio de M.
- Inestabilidad, $x(t) \to \infty$ si y solo si $\exists \lambda \in \sigma(M)$ tal que $|\lambda| > 1$ o $\sigma(M) \subset \overline{D}_1$ y $\exists |\lambda| = 1$ siendo una raíz múltiple del polinomio mínimo de M.
- Estabilidad asintótica, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ si y solo si $\sigma(M) \subset \overset{\circ}{D}_1 \stackrel{\circ}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$
- Una condición necesaria para la existencia de soluciones T-periódicas es que uno o varios $\lambda \in \sigma(M)$ tengan $\lambda = 1$.

Análogamente, es posible concluir estabilidad a partir de los valores característicos ρ (exponentes característicos) de la matriz R anunciada en (1.3), es decir,

- Estabilidad, x(t) se mantiene acotada $\forall t \in \mathbb{R}$ si y solo si $\operatorname{Re}\{\sigma(R)\} \leq 0^2$ y $\operatorname{Re}\{\sigma(R)\} = 0$ es una raíz simple del polinomio mínimo de R.
- Inestabilidad, $x(t) \to \infty$ si y solo si $\operatorname{Re}\{\sigma(R)\} \ge 0$ y $\operatorname{Re}\{\sigma(R)\} = 0$ es una raíz múltiple del polinomio mínimo de R.
- Estabilidad asintótica, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ si y solo si $\operatorname{Re}\{\sigma(R)\} > 0$.
- Una condición necesaria para la existencia de soluciones T-periódicas es que uno o varios $\rho \in \sigma(R)$ tengan parte puramente imaginaria (parte real igual a cero).

La relación existente entre los eigenvalores de la matriz de Monodromía y el espectro de la matrix R está dada por $e^{\rho T} = \lambda$.

Dos resultado generales para sistemas periódicos se formulan a continuación:

Teorema 1.6. [32] Suponga que la matriz de Monodromía tiene n valores característicos distintos, $\lambda_i, i = 1, 2, 3, ..., n$. Entonces (1.1) tiene n soluciones linealmente independientes de la forma

$$x_i = p_i^{-1}(t)e^{\rho_i t}$$

en donde $p_i(t)$ son funciones vectoriales con periodo T.

Teorema 1.7. [32] Sea el sistema (1.1) en donde A(t) tiene periodo mínimo T y sean sus multiplicadores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Entonces

$$\lambda_1 \lambda_2, \dots, \lambda_n = exp\left(\int_0^T tr\{A(s)\}ds\right),$$

contando un multiplicador repetido según su multiplicidad.

Se debe resaltar que la *reducibilidad* de sistemas lineales periódicos a sistemas lineales invariantes y la *estabilidad* en los sistemas lineales periódicos se pueden formular gracias a la factorización de Floquet dada por (1.3). Mas aún, el comportamiento de $x(t) \forall t$ puede deducirse del conocimiento de x(t) en $[t_0, t_0 + T]$ durante un periodo.

1.2. Sistemas Hamiltonianos

Sea $\mathcal{H}(q, p)$ una función diferenciable, llamada función Hamiltoniana o Hamiltoniano, el cual depende de los vectores q, p y del tiempo; satisface las siguientes ecuaciones:

$$\dot{q} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,p)}{\partial p}\right)^{\top}$$

$$\dot{p} = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,p)}{\partial q}\right)^{\top}$$
(1.5)

a este par se le denomina sistema Hamiltoniano.

El hamiltoniano representa la energía del sistema, si esta función no depende explícitamente del tiempo, la energía se conserva a lo largo de las soluciones de (1.5) y el sistema Hamiltoniano es llamado *conservativo*. Esta propiedad garantiza la existencia de una primera integral. Los sistemas Hamiltonianos (1.5) siempre son de orden par, es decir 2n dimensional si $q, p \in \mathbb{R}^n$, ver [33, 34] para un análisis profundo de este tipo de sistemas.

 $^{^2\}mathrm{Re}$ denota la parte real de su argumento, en este caso, la parte real del espectro de R.

Aquí consideraremos funciones Hamiltonianas que dependen del tiempo $\mathcal{H}(t,q,p)$, por lo tanto, son no conservativas; así mismo se estudian sistemas lineales Hamiltonianos, lo que conlleva a una función Hamiltoniana de forma cuadrática y homogénea de la forma,

$$\mathcal{H}\left(t,q,p\right) = \left[\begin{array}{c}q\\p\end{array}\right]^{\top} H\left(t\right) \left[\begin{array}{c}q\\p\end{array}\right]$$

en donde H(t) es una matrix simétrica de $2n \times 2n$, en este caso el sistema Hamiltoniano (1.5) puede ser expresado como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = JH(t) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix},$$
$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$
(1.6)

en donde

Note que $J^{-1} = J^{\top} = -J$ y $J^2 = -I_{2n}$.

Finalmente, si el sistema Hamiltoniano es T-periódico, entonces $H(t+T) = H(t) = H^{\top}(t)$. Apartir de ahora asumiremos que esta relación se satisface.

Definición 1.8. [34] Una matriz de orden par, $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, es llamada matriz Hamiltoniana si A = JH, en donde H es una matriz simétrica, equivalentemente,

$$JA + A^{\dagger}J = 0 \tag{1.7}$$

De (1.7) se obtiene que $A = J^{-1} (-A^{\top}) J$, es decir, A es similar a $-A^{\top}$ y en consecuencia tienen el mismo espectro:

$$\sigma(A) = \sigma(-A^{\top}) = \sigma(-A),$$

esto demuestra que la propiedad clave de las matrices Hamiltonianas constantes consiste en que su espectro es simétrico con respecto al eje imaginario.

Teorema 1.9. Sea $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ una matriz Hamiltoniana, si $\lambda, \overline{\lambda} \in \sigma(A) \Longrightarrow -\lambda, -\overline{\lambda} \in \sigma(A)$. Esto es equivalente a que el polinomio característico de un matriz Hamiltoniana tiene únicamente potencias pares, o bien, su polinomio característico es par.

Otra propiedad que se sigue del Teorema anterior, es que la traza de una matriz Hamiltoniana siempre es cero.

Las matrices Hamiltonianas están estrechamente relacionadas a las matrices simplécticas.

Definición 1.10. [34] Una matrix cuadrada, real y de orden par, $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ $(n \in \mathbb{N})$, se dice que es una matrix simpléctica si

$$S^{\top}JS = J,$$

J se define como en (1.6).

El determinante de una matriz simpléctica es +1. La propiedad mas importante de una matriz simpléctica constante, es que su espectro es simétrico con respecto al círculo unitario. La prueba se obtiene de la definición y del hecho de que una matriz simpléctica siempre es invertible; entonces $S^{\top} = JS^{-1}J^{-1}$, es decir, $\sigma(S^{\top}) = \sigma(S^{-1}) = \sigma(S) \Rightarrow \text{si } \lambda \in \sigma(S) \therefore \lambda^{-1} \in \sigma(S)$. Esto se expresa formalmente como sigue,

Teorema 1.11. Sea $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ una matriz simpléctica, si $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(A)$. De forma equivalente, el polinomio característico de una matriz simpléctica es auto-recíproco [34] o palíndromo [35], es decir, $p_S(\lambda) = \lambda^{2n} p_S(\lambda^{-1})$

La relación de las matrices Hamiltonianas con las matrices simplécticas en un sistema Hamiltoniano se establece en el siguiente Teorema,

Teorema 1.12. Un sistema Hamiltoniano lineal variante en el tiempo (no necesarimente periódico) $H(t) = H^{\top}(t)$, se puede expresar como $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = JH(t) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$, en donde su matriz de transición de estados es simpléctica.

Es muy importante notar que un sistema Hamiltoniano invariante en el tiempo no puede ser asintóticamente estable, debido a la simetría de sus valores característicos con respecto al eje imaginario. Esta aseveración se extiende a todos los sistemas Hamiltonianos variantes o invariantes en el tiempo.

Otra propiedad interesante de los sistemas Hamiltonianos se basa en que los sistemas arbitrarios 2n-dimensional requieren 2n - 1 primeras integrales para obtener una ecuación diferencial de primer orden 1-dimensional, la cual puede ser integrada por cuadraturas para finalmente integrar al sistema completo. El Teorema de *Liouville* asegura que un sistema Hamiltoniano 2n-dimensional es integrable si se conocen únicamente sus n primeras integrales independientes en involución [33, 34]. Esta es una gran noticia, puesto que el esfuerzo se reduce a la mitad del trabajo.

Definición 1.13. [34] Una matriz $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es llamada simpléctica con multiplicador μ o μ -simpléctica si

$$S^{\dagger}JS = \mu J$$

en donde $\mu \in (0, 1]$ es una constante no cero. Claramente si $\mu = 1$, la matriz es simpléctica.

Las matrices μ -simplécticas son no singulares.

Lema 1.14. Para $\mu > 0$, $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es μ -simpléctica si y solo si det $[S] = \mu$.

Los eigenvalores de una matriz μ -simpléctica, $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, son simétricos con respecto al círculo de radio $\sqrt[2n]{\mu}$.

1.3. Resonancia paramétrica

La ecuación

$$\ddot{x} + \left[\alpha + \beta q(t)\right] x = 0$$

describe un tipo de inestabilidad que surge principalmente cuando existe una relación directa entre la frecuencia natural³ $\omega_0 = \alpha$ y la frecuencia de exitación paramétrica⁴ ω . La resonancia paramétrica surge cuando $\omega = 2\omega_0$, o bien, se puede generalizar a $\omega = 2\omega_0/n$, $n \in \mathbb{Z}_+$; en sistemas disipativos el efecto de amortiguamiento se vuelve mas significativo conforme n se incrementa. La forma mas destacada de resonancia paramétrica es cuando n = 1, se le conoce como *el principio de la resonancia subarmónica*. Para ilustrar el concepto de resonancia paramétrica, se analiza el comportamiento del simple circuito en paralelo LC, Fig. 1.1, tomado de [15]. Este sistema se puede modelar por la ecuación de Hill de segundo orden, en donde q(t) = v(t) es la carga en el capacitor. Las separación de las placas del capacitor cambian periodicamente afectando el valor de la capacitancia; se asume que cierta energía se introduce al circuito en un tiempo anterior, esta oscila entre la capacitancia y la inductancia en un rango determinado por su frecuencia natural $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. La Fig. 1.1a, muestra el intercambio de energía entre el capacitor y el inductor.

Cuando la diferencia de potencial en el capacitor es cero, toda la energía en la red se encuentra almacenada en el inductor, por otra parte cuando la diferencia de potencial en el capacitor es máxima, este acapara toda la energía del sistema. Si las placas del capacitor se separan repentinamente

 $^{{}^{3}}$ Es la frecuencia de oscilaciones libres en la cual el sistema oscilará sin ninguna influencia externa aparte del impulso inicial que dió origen al movimiento.

⁴Variación explícita dependiente del tiempo de un parámetro en un sistema dinámico.



Figura 1.1: Circuito con capacitancia variable (izquierda). a) Voltaje del capacitor sin bombeo. b) Variación de capacitancia. c) Amplificación del voltaje en el capacitor debido al bombeo del mismo (derecha).

(posiblemente mediante un dispositivo mecánico) cuando la diferencia de potencial es máximo (positivo o negativo), entonces la capacitancia decrementa instantaneamente, observe la Fig. 1.1b. El trabajo que se realizó en contra del campo al separar las placas del capacitor, se sumará a la energía total del circuito, en ese instante de tiempo y debido a que toda la energía está almacenada en la capacitancia, este aumento se verá reflejado como un incremento o amplificación del potencial en el capacitor, como es ilustrado en la Fig. 1.1c. Las restricciones dinámicas impiden que el voltaje en el capacitor se incremente de un solo salto como se muestra en la imagen, sin embargo, una vez que se ha incrementado, el capacitor describe una nueva señal sinusoidal de mayor amplitud que aquella, anterior al cambio en la capacitancia.

Cuando la tensión del capacitor pasa a través cero, las placas del capacitor regresan a su posición inicial, sin variar la energía total del circuito, porque en ese instante toda la energía esta concentrada en el inductor; esto permite separar nuevamente las placas del capacitor cuando esta cargado con su siguiente máximo voltaje, de tal manera que la energía en el circuito sufrirá otro incremento de energía. El proceso se repite en cada máximo de tensión en el capacitor y la capacitancia se reestablece cada que la tensión es cero. Consecuentemente, la energía se suma al circuito periódicamente y produce una continua amplificación de voltage en el capacitor (y en todos los demás componentes). En un sistema con pérdidas (por ejemplo al agregar resistencia) la amplificación aparentemente ilimitada se restringe.

Al variar la capacitancia en un rango igual a dos veces la frecuencia de la tensión del capacitor (es decir, dos veces la frecuencia resonante del sistema) podemos experimentar oscilaciones crecientes en sistemas sin pérdidas. Sin embargo, oscilaciones crecientes también aparecen en sistemas disipativos si suficiente energía es introducida. Estas oscilaciones crecientes se traducen en inestabilidad.

El fenómeno descrito se observa también al variar la inductancia en lugar de la capacitancia. En otras palabras, el efecto paramétrico dependen de perturbar la frecuencia natural (o de resonancia) mediante la variación de un parámetro que almacene energía. Para saber si un sistema en particular exhibirá resonancia paramétrica, sólo es necesario inspeccionar la frecuencia natural y variar un paramétro que almacene energía. Es importante notar que tal elección se debe hacer con base en el estudio de la frecuencia natural, ya que algunos parámetros que almacenan energía no contribuyen

a determinar la frecuencia natural (la masa de la bola de un péndulo, por ejemplo) y por ende no experimentarán comportamiento paramétrico al ser perturbados periodicamente.

Propiedades y descripción general de la ecuación de Hill

2.1. Propiedades de la ecuación de Hill de un grado de libertad

En esta sección se presentan algunas propiedades importantes de la ecuación de Hill escalar o de un grado de libertad. Primeramente, se abordará el concepto fundamental de la *traza* de la matriz de Monodromía y sus implicaciones en las fronteras de estabilidad que aparecen en el diagrama de Ince-Strutt. Posteriormente, se establecen los conceptos de estabilidad débil y fuerte así como el Teorema *Krein-Gelfand-Lidskii*, los cuales dependen de los multiplicadores característicos de sistemas Hamiltonianos. Además, se resuelve analíticamente una ecuación tipo Hill cuya señal de excitación paramétrica es discontinua. Finalmente, se estudia la dinámica de la ecuación de Mathieu con fuerzas disipativas.

Considere una vez mas la ecuación de Hill

$$\ddot{y} + \left[\alpha + \beta q\left(t\right)\right] y = 0, \tag{2.1}$$

con las propiedades ya establecidas en la introducción.

Conviene mencionar que cualquier ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = 0$$

en donde los coeficientes a(t) y b(t) son funciones *T*-periódicas, siempre se puede transformar en una expresión de la forma (2.1) a través de $y = e^{-\frac{1}{2}\int a(\tau)d\tau}z^1$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad se puede considerar la ecuación (2.1) para efectos de análisis. Note que esta transformación, en general, *no* es una transformación de Lyapunov [36].

Si definimos un vector de estados como $x \triangleq \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$, la ecuación (2.1) se puede escribir en variables de estado:

$$\dot{x} = A(t)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta q(t) & 0 \end{bmatrix} x = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{J} \begin{bmatrix} \alpha + \beta q(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{H(t)} \right\} x$$
(2.2)

en donde J se define como en (1.6) para n = 1; y $H(t + T) = H(t) = H^{\top}(t)$ satisface la condición para sistemas Hamiltonianos lineales. Entonces, la matriz de transición de estados de la ecuación de Hill con la estructura en (2.2) es una matriz simpléctica para todo tiempo t.

¹Note que esta no es una transformación de Lyapunov.

Consecuentemente, su matriz de Monodromía M también es simpléctica y su polinomio característico $p_M(\lambda)$ se expresa como

$$p_M(\lambda) = \lambda^2 - tr(M)\lambda + 1 \tag{2.3}$$

Definición 2.1. Los eigenvalores de la matriz de Monodromía M o raíces del polinomio característico $p_M(\lambda)$, se denominan multiplicadores característicos, multiplicadores de Floquet o simplemente multiplicadores de la ecuación (2.1) o (2.2) y se denotan por λ . Para sistemas Hamiltonianos son simétricos con respecto al círculo unitario.

Definición 2.2. Todo multiplicador característico λ esta estrechamente asociado a los eigenvalores, ρ , de la matriz R en (1.3); se les denomina exponentes característicos de Floquet o simplemente exponentes característicos. La relación entre ellos esta dada por

$$\lambda = e^{\rho T}.$$

Es importante notar que los multiplicadores característicos son unívocamente determinados, pero no los exponentes característicos, puesto que a la parte imaginaria de cada expenente se le puede sumar el término $2\pi i/T$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$

Las raíces de $p_M(\lambda)$ son:

$$\lambda_{1,2}=rac{\mathrm{tr}\left(M
ight)\pm\sqrt{\mathrm{tr}^{2}\left(M
ight)-4}}{2}$$

- Si tr² (M) < 4, los multiplicadores característicos son complejos conjugados y su módulo es $|\lambda_{1,2}|^2 = \frac{\operatorname{tr}^2(M)}{4} + \frac{4 \operatorname{tr}^2(M)}{4} = 1$. Los dos eigenvalores son diferentes, por lo tanto, el polinomio característico y el polinomio mínimo de M son el mismo. Este caso corresponde a un sistema estable.
- Si $\operatorname{tr}^2(M) > 4$, los multiplicadores son reales y recíprocos, $\lambda_1 = \left(\operatorname{tr}(M) + \sqrt{\operatorname{tr}^2(M) 4}\right)/2$ y $\lambda_2 = \left(\operatorname{tr}(M) - \sqrt{\operatorname{tr}^2(M) - 4}\right)/2$. Es claro que $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(M)$ y $\lambda_1\lambda_2 = 1$, entonces $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$. Si alguno de los multiplicadores es mayor que uno, por ejemplo $\lambda_1 > 1$, el sistema es inestable.
- Si tr² (M) = 4, los multiplicadores característicos son reales e iguales; +1 $(\lambda_{1,2} = +1)$ o -1 $(\lambda_{1,2} = -1)$ dependiendo de si tr(M) = +2 o si tr(M) = -2, respectivamente. En este caso la ecuación de Hill es estable si y solo si la matriz de Monodromía es diagonal o *escalar*, en cualquier otro caso es inestable.

Las fronteras de estabilidad-inestabilidad corresponden a este último ítem, es decir, cuando |tr(M)| = 2.

Es claro que la matriz de Monodromía depende de los parámetros α, β . Hochstadt fue el primero en vislumbrar la importancia de la función $\phi(\alpha, \beta) := \operatorname{tr}(M)$ y obtener sus propiedades mas importantes [37].

Otro hecho fundamental relacionado al último caso (cuando la tr² (M) = 4) son los denominados puntos de coexistencia, [15, 16], los cuales surgen con la presencia de dos soluciones periódicas linealmente independientes de la ecuación de Hill; las soluciones son *T*-periódicas cuando los multiplicadores son +1 y 2*T*-periódicas cuando los multiplicadores son -1.

La ecuación de Meissner presenta varios puntos de coexistencia, gráficamente este fenómeno se observa cuando el ancho de las lenguas de Arnold se reducen a un solo punto (en dirección del eje α) en su diagrama de estabilidad. La Fig. 2 muestra diferentes puntos de coexistencia, uno de ellos localizado en $\alpha \approx 2.5$ y $\beta \approx 1.5$. La ecuación de Mathieu no tiene puntos de coexistencia [38].



Figura 2.1: Para una constante $\beta = 1$, $\phi(\alpha, 1) = \operatorname{tr}(M)$ es una función que solo depende de α . Los valores que satisfacen $|\phi(\alpha, 1)| > 2$, son proyectados sobre el eje α y corresponden a regiones inestables.

Teorema 2.3. [Hochstadt] La función $\phi(\alpha, \beta) = \operatorname{tr}(M)$ para cualquier β constante, es una función entera de orden 1/2. La función $\phi(\alpha, \beta) \pm 2 = 0$ tiene un número infinito de raíces. Para cualquier β_0 y para cualquier α_0 suficientemente negativa, $\phi(\alpha_0, \beta_0)$ es positiva, por lo tanto al incrementar α aparece la primera raíz para la ecuación $\phi(\alpha, \beta) - 2 = 0$, la cual corresponde a un doble multiplicador en +1 y de aquí surgen dos raíces (no necesariamente diferentes) en -1, entonces dos raíces en +1 y así sucesivamente hasta el infinito.

Del Teorema de Hochstadt se derivan dos secuencias infinitas:

$$egin{aligned} \lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\ldots \ \overline\lambda_1,\overline\lambda_2,\overline\lambda_3,\overline\lambda_4,\overline\lambda_5,\ldots \end{aligned}$$

La primera secuencia corresponde a las raíces de $\phi(\alpha, \beta) + 2 = 0$ y la segunda corresponde a $\phi(\alpha, \beta) - 2 = 0$. Mas aún, estas secuencias se entrelazan de la siguente manera:

$$\lambda_0, \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \lambda_1, \lambda_2, \overline{\lambda}_3, \overline{\lambda}_4, \lambda_3, \lambda_4, \overline{\lambda}_5, \overline{\lambda}_6, \ldots$$

Este hecho se ilustra en la Fig. 2.1. Observe que para valores en donde $\phi(\alpha, \beta_0) \in [-2, 2]$ los multiplicadores están sobre el círculo unitario y para valores que satisfacen $|\phi(\alpha, \beta_0)| > 2$, los eigenvalores son ambos positivos o ambos negativos y uno es el recíproco del otro.

Si para algún valor $\alpha = \alpha_1$ ambos multiplicadores están en -1 y se incrementa este valor hasta el punto $\alpha = \alpha_2$ en el cuál ambos multiplicadores están en +1; el camino del multiplicador del punto -1 al punto +1 es a través de arcos sobre el círculo unitario. La trayectoria de -1 a +1 no puede ser directamente sobre el eje real, puesto que en 0 se violaría la condición de *no singularidad* de la matriz de Monodromía. Esta propiedad se cumple para cualquier grado de libertad siempre que el sistema sea Hamiltoniano. Sin embargo, aún en el caso de sistemas no Hamiltonianos la matriz de Monodromía siempre es no singular, puesto que esta se define como la matriz de transición de estados evaluada al final de un periodo.

2.1.1. Multiplicadores de sistemas Hamiltonianos

Considere el siguiente sistema Hamiltoniano lineal con coeficientes periódicos

$$\dot{x} = JH(t) x \qquad H(T+t) = H(t) = H^{+},$$
(2.4)

en donde J fue definida en (1.6) y $H(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es una matriz real y simétrica. Debido a su naturaleza, los sistemas Hamiltonianos no pueden exhibir estabilidad asintótica. Un sistema Hamiltoniano se dice *estable* si todas sus soluciones se mantienen acotadas en $(-\infty, +\infty)$, equivalentemente, todos sus multiplicadores están sobre el círculo unitario y son raíces simples del polinomio mínimo de M. Sin embargo, estas condiciones no son suficientes para que todas las soluciones del sistema se mantengan acotadas bajo perturbaciones suficientemente pequeñas, para ello se requiere la siguiente definición:

Definición 2.4. Suponga que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que todas las soluciones de cualquier ecuación

 $\dot{x} = J\widetilde{H}(t) x \qquad \widetilde{H}(T+t) = \widetilde{H}(t) = \widetilde{H}^{\top},$

 $en \ donde$

$$\left\|\widetilde{H}\left(t\right)-H\left(t\right)\right\|<\varepsilon$$

son acotadas en $(-\infty, +\infty)$. Entonces, el sistema (2.4) se dice que es fuertemente estable.

La condición de estabilidad *fuerte* para sistemas Hamiltonianos fue formulada hace mas de 50 años. La suficiencia fue probada por Krein [39] y la necesidad por Gelfand y Lidskii [40].

Otra definición asociada a los sistemas Hamiltonianos, específicamente a la geometría simpléctica de los sistemas Hamiltonianos [38] es *el producto interno indefinido*.

Definición 2.5. Dado un espacio vectorial de orden par y de dimensión 2n, el producto interno estándar $(x, y) := y^T x$; y cualquier matriz Hermítica no singular $G \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, es posible definir el producto interno indefinido como (x, y) := (Gx, y).

Aquí se usará G = iJ; recuerde que dada una matriz anti-Hermítica J, definida en (1.6), el producto iJ es una matriz Hermítica [30, 38].

Para cualquier multiplicador λ sobre el círculo unitario, su vector característico asociado es tal que $(v_{\lambda}, v_{\lambda}) \neq 0$. Si $(v_{\lambda}, v_{\lambda}) > 0$, λ es llamado multiplicador de Primera Clase; si $(v_{\lambda}, v_{\lambda}) < 0$, a λ se le denomina multiplicador de Segunda Clase, ver [38]. Si $|\lambda| \neq 1$, extendiendo la definición de multiplicador de primera clase para $\lambda : |\lambda| < 1$ y multiplicador de segunda clase para $\lambda : |\lambda| > 1$. Entonces todos los multiplicadores son de primera o segunda clase. Para un sistema Hamiltoniano de dimensión 2n, n multiplicadores son de primera clase y los otros n son de segunda clase ².

La propiedad clave es que los multiplicadores, incluyendo su clase, son funciones continuas con respecto a variaciones continuas en las funciones Hamiltonianas, en nuestro caso, variaciones en la matriz simétrica H(t), [39, 38]. En consecuencia, si dos multiplicadores coinciden sobre el círculo unitario y ambos son de la misma clase, estos no pueden salirse del círculo porque se estaría violando la continuidad de la clase de los multiplicadores.

Finalmente, para formular el Teorema de Gelfand-Lidskii-Krein, se requiere de la siguiente definición,

Definición 2.6. Un multiplicador λ con multiplicidad algebraica r, se dice que es definido de primera o segunda clase si (q, q) es del mismo signo para toda q asociado a λ .

Teorema 2.7. [Krein-Gelfand-Lidskii] El sistema Hamiltoniano periódico lineal $\dot{x} = JH(t)x$ es fuertemente estable si y solo si todos los multiplicadores estan sobre el círculo unitario y aquellos con multiplicidad algebraica mayor que uno, estan definidos o todos son de la misma clase.

²Si se incrementa el Hamiltoniano, es decir, $\tilde{H}(t) - H(t) > 0$ y λ es un multiplicador aislado sobre el círculo unitario asociado a H(t), cuando H(t) se incrementa a $\tilde{H}(t)$, λ se mueve sobre el círculo unitario a $\tilde{\lambda}$, entonces si arg $\tilde{\lambda} > \arg \lambda$, el multiplicador λ se dice que es un Multiplicador de Primera Clase y si arg $\tilde{\lambda} < \arg \lambda$, el multiplicador λ es un Multiplicador de Segunda Clase [38].

2.1.2. Solución de la ecuación de Meissner

La ecuación de Hill (escalar) se puede resolver analíticamente en únicamente cuatro casos particulares [15], si

- 1) q(t) es un tren de impulsos.
- 2) q(t) es constante a trozos.
- 3) q(t) es piezo-lineal.
- 4) q(t) son funciones elípticas.

En este apartado se trabajará sobre el caso 2) en donde $q(t) = \operatorname{sgn}(\cos t)$ y corresponde a la ecuación de Meissner. Obtener su matriz de Monodromía de forma analítica es una tarea sencilla. Una formulación detallada se puede consultar en [14].

Para $\alpha > \beta \ge 0$, se tiene:

$$M = \begin{bmatrix} \cos(a\pi) & \frac{1}{a}\sin(a\pi) \\ -a\sin(a\pi) & \cos(a\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(b\pi) & \frac{1}{b}\sin(b\pi) \\ -b\sin(b\pi) & \cos(b\pi) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\pi b\cos\pi a - \frac{b}{a}(\sin\pi b\sin\pi a) & \frac{1}{b}(\sin\pi b\cos\pi a) + \frac{1}{a}(\cos\pi b\sin\pi a) \\ -(\sin\pi b\cos\pi a)b - (\cos\pi b\sin\pi a)a & (\cos\pi b\cos\pi a) - \frac{a}{b}(\sin\pi b\sin\pi a) \end{bmatrix}$$

en donde $a = \sqrt{|\alpha - \beta|}$ y $b = \sqrt{\alpha + \beta}$ y su traza es:

$$tr(M) = 2\cos \pi b \cos \pi a - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\sin \pi b \sin \pi a$$

entonces la condición |tr(M)| = 2, se reduce a:

$$\left| 2\cos \pi b \cos \pi a - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \sin \pi b \sin \pi a \right| = 2.$$

Para conocer los puntos en donde nacen las lenguas de Arnold en el eje α , hacemos $\beta = 0$ en la expresión |tr(M)| = 2, entonces se obtiene,

$$\left|2\left(\cos\pi\sqrt{\alpha}\cos\pi\sqrt{\alpha}\right) - 2\left(\sin\pi\sqrt{\alpha}\sin\pi\sqrt{\alpha}\right)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|2\cos2\pi\sqrt{\alpha}\right| = 2 \Leftrightarrow 2\pi\sqrt{\alpha} = k\pi$$

finalmente,

$$\alpha = \frac{k^2}{4}$$
 para $k = 0, 1, 2, \dots$

Las lenguas de resonancia pueden ser etiquetadas con un número, es decir, la k-ésima lengua toca al eje α en $\frac{k^2}{4}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ En los límites de cada lengua de orden par hay por lo menos una solución *T*-periódica, similarmente, en los límites de cada lengua de orden impar hay por lo menos una solución 2*T*-periódica.

La Fig. 2 muestra el diagrama de Ince-Strutt de la ecuación de Meissner (ecuación de Hill con $q(t) = \text{sgn}(\cos t)$). Note que apartir de la tercera lengua de Arnold aparecen intervalos de longitud cero paralelos al eje α , como ya se mencionó, estos puntos representan el fenónmeno de coexistencia y corresponden a parámetros en los cuales todas las soluciones son *T*-periódicas o 2-T periódicas dependiendo si pertenecen a una lengua de orden par o a una lengua de orden impar respectivamente. Es importante resaltar que estos puntos son excepcionales³.

 $^{^{3}}$ Chulaevsky [41] justifica el hecho de que los puntos de coexistencia son excepcionales desde un punto de vista topológico.

Otra característica fundamental no solo de la ecuación de Meissner sino de la ecuación de Hill en general, es la propiedad de *no intersección*, se refiere a que las lenguas de Arnold (en un grado de libertad) no se intersectan, formalmente:

Lengua $(i) \cap$ Lengua $(j) = \phi \quad \forall \quad i \neq j,$

en donde, Lengua $(i) \triangleq \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \text{ perteneca a la } i - th \text{ lengua de Arnold}\}$, la cual incluye sus fronteras.

2.1.3. Ecuación de Hill con amortiguamiento

En la ecuación (2.1) la presencia de amortiguamiento viscoso, incluso un valor pequeño, es suficiente para estabilizar todos los valores de (α, β) que satisfacen $\alpha \ge \alpha_0 > 0$ y $|\beta| < \alpha$, en donde α_0 es una constante (no necesariamente pequeña). Es decir, el amortiguamiento suprime las lenguas estrechas inestables que ocurren para grandes valores de α en las regiones en donde $|\beta| < \alpha$. Valores mayores de disipación imposibilitan el fenómeno de resonancia paramétrica.

Por otra parte, la mejora de rendimiento en sistemas físicos o mecánicos frecuentemente requieren de fuerzas disipativas pequeñas. En este caso, intervalos críticos de la frecuencia de excitación son altamente sensibles a la relación entre la amplitud de la excitación y el parámetro de amortiguamiento. Esta dependencia predomina en el fenómeno de desestabilización del sistema debido a fuerzas disipativas infinitamente pequeñas en caso de combinación de resonancias (para sistemas de mas de dos grados de libertad).

Considere la ecuación de Mathieu con amortiguamiento

$$\ddot{y} + \delta \dot{y} + [\alpha + \beta \cos(t)]y = 0, \qquad (2.5)$$

cuya representación en espacio de estados es

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\alpha - \beta \cos(t) & -\delta \end{bmatrix} x = A(t)x$$
(2.6)

en donde $x = \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}^{\top}$.

Los multiplicadores característicos de A(t) satisfacen (ver Teorema 1.7)

$$\lambda_1 \lambda_2 = \exp\left(\int_0^T tr\{A(\tau)\}d\tau\right) = \exp\left(-\int_0^T \delta d\tau\right) = e^{-\delta T}$$

 λ_1 y λ_2 son soluciones del polinomio característico de la matriz de Monodromía de la forma

$$\overline{p}_M(\lambda) = \lambda^2 - \phi(\alpha, \beta, \delta) + e^{-\delta T} = 0.$$
(2.7)

Las dos soluciones de (2.7) son

$$\lambda_{1,2} = \left(\phi \pm \sqrt{\phi^2 - 4e^{-\delta T}}\right)/2.$$

Para distintos valores de λ_1 y λ_2 , la ecuación (2.6) tiene dos soluciones linealmente independientes de la forma (vea Teorema 1.6)

$$x_i = p_i(t)e^{\rho_i t} \qquad i = 1, 2$$

en donde $e^{\rho_i T} = \lambda_i$, (i = 1, 2) y $p_i(t)$ son funciones de periodo T.

De (2.7), la solución general de y, la primer componente de x es dada por

$$y = c_1 q_1(t) e^{\rho_1 t} + c_2 q_2(t) e^{\rho_2 t}$$
(2.8)

en donde c_1 y c_2 son constantes, $q_1(t)$ y $q_2(t)$ tienen periodo mínimo T. La estabilidad de (2.5) se determina por el comportamiento de y en (2.8). Los exponentes característicos pueden ser complejos de modo que $x \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$ ocurrirá en ambos casos $\operatorname{Re}(\rho_1) < 0$ y $\operatorname{Re}(\rho_2) < 0$. Equivalentemente, $|\lambda_1 < 1|$ y $|\lambda_2 < 1|$. Existen tres casos por considerar:



Figura 2.2: Ecuación de Mathieu con amortiguamiento.

• $\phi^2 > 4e^{-\delta T}$, λ_1 y λ_2 son ambos reales y positivos o ambos reales y negativos de acuerdo al signo de ϕ , en ambos casos $\lambda_2 < \lambda_1$. Si ambos son positivos, entonces la solución períodica es estable si

$$\lambda_1 = \left(\phi \pm \sqrt{\phi^2 - 4e^{-\delta T}}\right)/2 < 1 \text{ o } \phi < 1 + e^{-\delta T}.$$

Para $\delta > 0$, este límite inferior es siempre mayor que $2e^{-(T/2)\delta}$. Similarmente, si $\phi < -2e^{-(T/2)\delta}$, entonces los límites de estabilidad son $\phi = -2e^{-(T/2)\delta}$ y $\phi = -1 - e^{-T\delta}$.

- $\phi^2 > 4e^{-\delta T}$, en este caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}\phi = \pm e^{-(T/2)\delta} = \mu$, es decir, si $\mu = e^{-(T/2)\delta}$, entonces $\rho = -\frac{1}{2}\delta$ y si $\mu = -e^{-(T/2)\delta}$, entonces $\operatorname{Re}(\rho) = -\frac{1}{2}\delta$. En ambos casos la solución es estable.
- $\phi^2 < 4e^{-\delta T}$, λ_1 y λ_2 son complejos conjugados dados por $\frac{1}{2} (\phi \pm i\theta)$ en donde $\theta = \sqrt{4e^{-T\delta} \phi^2}$, por lo tanto el sistema es estable si $|\phi| < 2$.

En la Fig. 2.2 se aprecia el efecto del amortiguamiento; hay un incremento en las zonas de estabilidad debido al levantamiento de las lenguas de Arnold sobre el eje α , la elevación de las lenguas es inversamente proporcional a su anchura cuando $\delta = 0$ [42].

2.2. Propiedades de la ecuación de Hill de dos grados de libertad

En esta sección se presentan algunas cualidades de la ecuación de Hill de dos grados de libertad. Información específica se puede consultar en [43]-[48]. Al final del apartado se mencionan algunos problemas abiertos y otros inexplorados concernientes a la ecuación de Hill, así como una comparativa entre los sistemas de uno y dos grados de libertad.

La ecuación de Hill de dos grados de libertad se determina por:

$$\ddot{y} + [\alpha A + \beta Bq(t)] y = 0, \quad y(t) \in \mathbb{R}^2,$$
(2.9)

en donde $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y (α, β) son parámetros definidos como en el caso escalar.

Análogamente, como en un grado de libertad, se define $x := \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}^{\top} \in \mathbb{R}^4$. Expresando (2.9) en espacio de estados:

$$\dot{x} = A(t)x = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -\alpha A - \beta Bq(t) & 0 \end{bmatrix} x = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{bmatrix}}_{J} \begin{bmatrix} \alpha A + \beta Bq(t) & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}}_{H(t)} \right\} x$$

Para que el sistema anterior sea un sistema Hamiltonian $(H(t) = H^{\top}(t))$, se debe cumplir que $A = A^{\top} y B = B^{\top}$.

Sin pérdida de generalidad se puede asumir a la matriz A diagonal cuyas entradas (positivas) representan el cuadrado de las dos frecuencias naturales del sistema, en ausencia de excitación paramétrica.

Note que ahora se tienen *cuatro* multiplicadores característicos, puesto que la matriz de Monodromía $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Los multiplicadores son simétricos con respecto al eje real porque la matriz M es real y simétricos con respecto al círculo unitario porque la matriz de transición de estados es simpléctica.

En este caso, los multiplicadores característicos pueden abandonar el círculo unitario de tres formas distintas, es decir,

- 1) un par de eigenvalores se salen del círculo en el punto +1,
- 2) un par de eigenvalores dejan el círculo en el punto -1 y
- 3) dos pares conjugados de eigenvalores dejan el círculo unitario en cualquier punto $1 \measuredangle \theta, \theta \in (0, \pi)^4$.

Los dos primeros incisos 1) y 2) también se presentan en el caso escalar, mientras que el tercero es propio de sistemas de dos o mas grados de libertad, se le denomina *Colisión de Krein* de los multiplicadores. La Fig. 2.3 ilustra los tres casos mencionados.

2.2.1. Reducción del polinomio característico

Debido a la naturaleza simpléctica de la matriz de Monodromía, su polinomio característico es simétrico (auto-recíproco) y toma la forma

$$p_M(\lambda) = \lambda^4 - A\lambda^3 + B\lambda^2 - A\lambda + 1.$$
(2.10)

En el artículo [49] se introdujo una nueva variable, $\bar{\rho} = \lambda + \lambda^{-1}$, en esta variable el polinomio característico de la matriz de Monodromía se reduce a un polinomio de grado 2, representado por:

$$Q(\bar{\rho}) = \bar{\rho}^2 - A\bar{\rho} + B - 2, \qquad (2.11)$$

en donde los coeficientes A y B se definen detalladamente en [49]. Los eigenvalores correspondientes son

$$\bar{\rho}_{1,2} = \frac{1}{2} \left[A \pm \left(A^2 - 4B + 8 \right)^{1/2} \right],$$

y los eigenvalores del polinomio original, $p_M(\lambda)$, se pueden recuperar con la siguiente expresión

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\bar{\rho} \pm i \left(4 - \bar{\rho}^2 \right)^{1/2} \right].$$
 (2.12)

La propiedad de simetría derivada de la naturaleza de los Hamiltonianos es una cualidad bastante útil y poderosa, puesto que nos permite reducir el orden del análisis del sistema a únicamente la mitad.

⁴Se usa $r \measuredangle \theta$ para representar un número complejo con módulo r y argumento θ .



Figura 2.3: Coordenadas en donde los multiplicadores de sistemas Hamiltonianos de dos grados de libertad pueden abandonar el círculo unitario. Observe que para salir del círculo en los puntos ± 1 , solo se requiere de dos multiplicadores, sin embargo, abandonar el círculo en $1 \measuredangle \theta$, para $\theta \neq 0$ o π , implica que los cuatro multiplicadores deben satisfacer la configuración mostrada.

Las fronteras de transición (las cuáles definen la manera en la cuál los multiplicadores pueden abandonar el círculo unitario) se obtienen en [49], al sustituir $\bar{\rho} = \pm 2$ en (2.11) o $\lambda = \pm 1$ en (2.10), estas definen dos líneas y una parábola dadas por:

a)
$$\lambda = +1$$
 $B = +2A - 2$
b) $\lambda = -1$ $B = -2A - 2$ (2.13)

c) Colisión de Krein $B = A^2/4 + 2$

En la Fig. 2.4 aparecen las funciones a) -c), en el plano (A, B). Adicionalmente, se muestran las posibles posiciones de los multiplicadores en cada zona. El área en blanco, encerrada por las dos rectas a) y b) y la parábola c) representa la única region de estabilidad; los eigenvalores de (2.10) están sobre el círculo unitario para ciertos valores A, B. En la frontera de B = +2A - 2(B = -2A - 2) hay al menos una solución T-periódica (2T-periódica). En la frontera de la parábola $B = A^2/4 + 2$ existe un par de multiplicadores en algún punto sobre el círculo unitario, excepto en ± 1 y se tiene dos soluciones periódicas de cualquier periodo en general.

Considere la ecuación de Mathieu de dos grados de libertad en espacio de estados que se formula a continuación

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -\alpha A - \beta Bq(t) & 0 \end{bmatrix} x$$
(2.14)

en donde las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y la función periódica es $q(t) = \cos(t)$

La Fig. 2.5 muestra las lenguas de Arnold de (2.14) de acuerdo a la relación de colores descrita en la Fig. 2.4.

Gracias a Broucke [50], se puede calcular explícitamente la posición de los multiplicadores sobre el círculo unitario que dan lugar a cada área de color que divide las lenguas de Arnold de la ecuación de Mathieu (o de cualquier otro mapeo simpléctico).

Las regiones de inestabilidad surgen cuando algún par de multiplicadores coincide en el punto +1 o -1 y posteriormente abandonan el círculo unitario (tal como sucede en la ecuación de Hill de un grado de libertad), pero cada par de multiplicadores está asociado a la frecuencia natural



Figura 2.4: Zonas de estabilidad-inestabilidad para el polinomio (2.11). Blanco representa estabilidad; rojo para algún $\lambda < -1$; verde para algún $\lambda > 1$; amarillo para algún $\lambda < -1$ y otro $\lambda > 1$; rosa para dos multiplicadores < 1; cian para dos multiplicadores > 1. Azul para dos multiplicadores no reales fuera del círculo unitario.



Figura 2.5: Lenguas de Arnold para la ecuación de Mathieu de dos grados de libertad (2.14) con $q(t) = \cos(t)$. Las regiones azules corresponden a *lenguas de combinación*.

de alguno de los dos subsistemas, por lo tanto, hay dos posibles formas de salir del círculo en los puntos ± 1 ; las lenguas de resonancia que cada par de multiplicadores genera independientemente se llaman *lenguas principales*, también se conocen como resonancia simple, y en términos de frecuencia surgen cuando

$$\Omega = \frac{2\omega_j}{k} \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots$$

en donde Ω es la frecuencia de q(t) y ω_j es la frecuencia natural de cada subsistema. Si $A = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ y la frecuencia de q(t) es $\Omega = 1$ en (2.14), entonces $\alpha_1 = \omega_1^2/\Omega^2$ y $\alpha_2 = \omega_2^2/\Omega^2$.

Por otra parte los multiplicadores, a diferencia del caso escalar, también pueden dejar el círculo unitario en cualquier otro punto $1 \measuredangle \theta$ para algún $\theta \in (0, \pi)$, estas colisiones de Krein originan zonas inestables conocidas como *lenguas de Arnold de combinación* o resonancia de combinación y satisfacen lo siguiente

$$\Omega = rac{\omega_i \pm \omega_j}{k}$$
 $i, j = 1, 2, \quad i > j$ $k = 1, 2, \ldots,$

el signo + o - define las llamadas lenguas de combinación de suma o de diferencia respectivamente. Una explicación mas completa se encontra en [38].

Observación 2.8. Es importante resaltar que en el caso de dos grados de libertad las lenguas de Arnold están vinculadas con cada una de las frecuencias naturales de los subsistemas, en consecuencia (y en general) las lenguas asociadas a un subsistema se superponen a las del otro. No obstante, las lenguas de resonancia se pueden intersectar para ciertas frecuencias naturales racionalmente independientes.

2.3. Generalización de la ecuación de Hill de uno y dos grados de libertad

A pesar de que la ecuación de Hill ha sido estudiada por más de un siglo, todavía existen aspectos inexplorados o parcialmente estudiados. En esta parte se extiende una modesta lista de algunos de ellos, empezando con la ecuación de Hill escalar,

$$\ddot{x} + \left[\alpha + \beta q(t)\right] x = 0,$$

suponga que la señal de excitación q(t) ya no es periódica sino quasi-periódica o almost-periódica. En este sentido, el análisis se torna complicado puesto que ya no se puede disponer del Teorema de Floquet⁵.

Recordemos que una función q(t) es periódica si se puede representar en forma de una suma infinita de funciones armónicas, es decir, en una serie de Fourier (que además converge)

$$q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j(k\omega_0)t},$$

en donde ω_0 es la frecuencia fundamental y $k\omega_0$ son sus armónicos que se relacionan racionalmente (son conmensurables).

Una función q(t) es quasi-periódica si se puede representar como la suma de un número finito de funciones periódicas cuyas frecuencias son *no* conmensurables, es decir, no están relacionadas racionalmente, por ejemplo: $q(t) = \sin t + \sin \pi t$.

Una función q(t) es almost-periódica, si admite una serie de Fourier generalizada convergente, de la forma:

$$q\left(t\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\varpi_k t}$$

⁵De las dos consecuencias del Teorema de Floquet (capítulo 2): reducibilidad y estabilidad solo se preserva una parte de la reducibilidad, la factorización proveniente de la estabilidad no es posible cuando q(t) no es periódica.

en donde la secuencia $\{\ldots, c_{k-1}, c_k, c_{k+1}, \ldots\} \in \ell_2^{-6}$, esta condición garantiza la convergencia. Para dos grados de libertad la ecuación de Hill promete un mayor número de posibles extensiones

o generalizaciones que se mencionan conforme a su nivel de complejidad de menor a mayor.

Sea el siguiente sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -\alpha A - \beta Bq(t) & 0 \end{bmatrix} x.$$

la representación en variables de estado de la ecuación de Hill en dos grados de libertad.

- En el sistema (2.3) se preserva la excitación q(t) como una señal *T*-periódica, pero la matriz *B* ya no es simétrica. Es posible analizar la estabilidad del sistema (todavía periódico) utilizando teoría de Floquet, sin embargo la matriz de Monodromía deja de ser simpléctica; se mantiene la misma condición de estabilidad (todos los multiplicadores deben estar sobre el círculo unitario), no hay resultados sobre estabilidad fuerte y se desconoce como los multiplicadores característicos abandonan el círculo unitario.
- La función q(t) no es *T*-periódica, puede ser *quasi*-periódica o *almost*-periódica. No se puede aplicar el Teorema de Floquet, no hay matriz de Monodromía y en consecuencia no existe una condición analítica que determine estabilidad basada en multiplicadores de Floquet.
- q(t) no es *T*-periódica, puede ser *quasi*-periódica o *almost*-periódica, pero además *B* no es simétrica (una combinación de los dos casos anteriores). El sistema ya no es ni Hamiltoniano ni *T*-periódico. No se puede aplicar ninguna herramienta establecida a lo largo de este trabajo. Escasos trabajos están destinados a este problema.
- La dimensión del sistema representado en espacio de estados es impar, el sistema ya no puede ser Hamiltoniano, es decir,

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = A(t+T), \quad x(t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

el sistema sigue siendo periódico por lo que es posible aplicar el Teorema de Floquet, pero para sistemas estables o acotados siempre hay un multiplicador real en +1 o en -1, se desconoce como salen del círculo unitario y todas las otras implicaciones relacionadas.

Finalmente, se plantea la relación existente entre la ecuación de Hill [16] y la teoría de Sturm-Liouville SL [52].

En el caso escalar, podemos escribir la ecuación de Hill como el problema estándar de SL como sigue,

$$\ddot{y} + \beta q(t)y = -\alpha y \tag{2.15}$$

$$y(0) = y(T), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(T)$$
 (2.16)

$$y(0) = -y(T), \quad \dot{y}(0) = -\dot{y}(T)$$
 (2.17)

en donde (2.15) es la ecuación de Hill escrita de manera diferente, (2.16) y (2.17) son condiciones de frontera. Esta clase de estructuras en el campo de las ecuaciones diferenciales recibe el nombre de problema de valor de frontera o problema de condición de frontera.

De las expresiones anteriores surgen dos casos interesantes [53] or [16]:

- a) Al considerar (2.15) y las condiciones de frontera (2.16) se obtienen las fronteras *T*-periódicas de las lenguas de Arnold.
- b) La ecuación (2.15) mas las condiciones de frontera (2.17) permiten recuperar las fronteras 2T-periódicas de las lenguas de Arnold.

⁶Una secuencia {... $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}...$ } doble infinito pertenece a ℓ_2 si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 = M < \infty$. Ver [51].
Con respecto a la ecuación de Hill de dos grados de libertad se tiene una situación diferente; con las condiciones de frontera (2.16) y (2.17) se consiguen las fronteras de las lenguas de Arnold principales, no obstante, no hay forma de especificar valores de frontera para las lenguas de combinación.

2.3.1. Ecuación de Hill de un grado de libertad vs. ecuación de Hill de dos grados de libertad

Para finalizar el capítulo, se presenta una tabla comparativa entre la ecuación de Hill de un grado de libertad y de dos grados de libertad:

Propiedad	Ec. Hill 1 grado de libertad	Ec. Hill 2 grados de libertad
Puntos en donde los multipli- cadores salen del círculo uni- tario	+1 y -1	$1\measuredangle\theta,\theta\in[0,\pi]$
Intersección de las lenguas de Arnold	no se intersectan	generalmente se intersectan para grandes valores de β
Fronteras de las lenguas de Arnold	pueden corresponder a solu- ciones T o $2T$ -periódicas	pueden corresponder a solu- ciones T o $2T$ -periódicas, T y 2T-periódicas o a alguna solu- ción no conmensurable con T
Existencia de lenguas de com- binación	no	si
Equivalencia con el problema de Sturm-Liouville	si	no

Métodos para el análisis de estabilidad de la ecuación de Hill

En esta sección se presentan los métodos mas utilizados para el análisis de estabilidad en la ecuación de Hill de un grado de libertad.

3.1. Determinantes infinitos

La estabilidad de la ecuación de Hill inicialmente se estudió utilizando la técnica de determinantes infinitos desde 1877.

Hill utilizó esta técnica, por primera vez, en su memoria [3]. Posteriormente, Poincaré determinó las condiciones bajo las cuáles los determinantes convergen (condiciones que satisfacen la formulación original de Hill [54]).

El método descansa sobre la suposición de la existencia de soluciones $x_i = p_i^{-1}(t)e^{\rho_i t}$ obtenidas de la Teoría de Floquet, ver Corolario (1.3) o mas específicamente, Teorema (1.6). Es importante resaltar que los exponentes característicos $\rho = \ln(\lambda)/T$ son los ceros de los determinantes infinitos correspondientes a la ecuación de Hill [55].

El objetivo es encontrar valores de α y β para los cuales existen soluciones T y 2T-periódicas. Hallar dichos parámetros es equivalente a encontrar las fronteras entre las regiones estables e inestables en el diagrama de Ince-Strutt.

Considere la ecuación de Mathieu

$$\ddot{x} + \left[\alpha + \beta \cos(t)\right] x = 0, \tag{3.1}$$

y asuma que su solución está determinada por la siguiente serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j(k\omega_0)t},$$

en donde $\omega_0 = 1$ al suponer $T = 2\pi$. Sustituyendo esta solución y cos $t = 1/2 \left(e^{jt} + e^{-jt} \right)$ en (3.1), se tiene que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\beta c_{k+1} + 2 \left(\alpha - k^2 \right) c_k + \beta c_{k-1} \right] e^{jkt} = 0 \ \forall t$, entonces,

$$\beta c_{k+1} + 2 (\alpha - k^2) c_k + \beta c_{k-1} = 0, \quad k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots \quad \alpha \neq k^2,$$

esta ecuación se puede expresar como:

$$\gamma_k c_{k+1} + c_k + \gamma_k c_{k-1} = 0 \quad \gamma_k = \frac{\beta}{2(\alpha - k^2)}, \quad k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots,$$
 (3.2)

observe que $\gamma_k = \gamma_{-k}$. El conjunto infinito de ecuaciones lineales homogéneas, en la expresión anterior, tiene solución no cero para la secuencia $\{c_k\}$ si los coeficientes del determinante infinito [18], conocido como determinante de Hill¹, son cero, es decir,

 γ_1	1	γ_1	0	0		
 0	γ_0	1	γ_0	0	• • •	= 0
 0	0	γ_1	1	γ_1	• • •	

Se puede asegurar la convergencia del determinante si se cumple la condición de $\gamma_k = O(k^{-2})$ en (3.2). Esta ecuación es equivalente a $\phi(\alpha, \beta) = 2$.

Mediante una relación recurrente se puede llegar a aproximaciones de $k \times k$,

 $DH_{m,k}$ tienem+k+1renglones y columnas. Expandiendo el primer renglón: $DH_{m,k}=DH_{m-1,k}-\gamma_m\gamma_{m-1}DH_{m-2,k}.$

Definiendo $E_k = DH_{k,k}, P_k = DH_{k-1,k}, Q_k = DH_{k-2,k}$ y si m = k, k+1, k+2 sucesivamente en (3.3) se tiene

$$E_k = P_k - \gamma_k \gamma_{k-1} Q_k$$
$$P_{k+1} = E_k - \gamma_{k+1} \gamma_k P_k$$
$$Q_{k+2} = P_{k+1} - \gamma_{k+2} \gamma_{k+1} E_k.$$

Haciendo algunos cálculos se tiene,

$$E_{k+2} = (1 - \gamma_{k+1}\gamma_{k+2})E_{k+1} - \gamma_{k+1}\gamma_{k+2}(1 - \gamma_{k+1}\gamma_{k+2})E_n + \gamma_k^2\gamma_{k+1}^3\gamma_{k+2}E_{k-1}, \text{ para } k \le 1.$$

Para resolver esta ecuación en diferencias se necesita el valor de E_0 , E_1 y E_2 , dados por

$$\begin{split} E_0 &= 1 \quad E_1 = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 \\ \gamma_0 & 1 & \gamma_0 \\ 0 & \gamma_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2\gamma_0\gamma_1, \\ E_2 &= \begin{vmatrix} 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_0 & 1 & \gamma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix} = (\gamma_1\gamma_2 - 1)(\gamma_1\gamma_2 - 1 + 2\gamma_0\gamma_1) \end{split}$$

En [18] se prueba que la secuencia de determinantes $\{E_k\}$ es convergente.

Se resuelven las ecuaciones $E_i = 0$ para α , con β fijo, conforme $i = 1, 2, ..., \alpha$. Observe en (3.2), que si $\alpha \approx 1, 2^2, 3^2, ...$ hay problemas de convergencia, para evitarlo se reescalan los renglones en

 $^{^{1}}$ En este caso el determinante es tridiagonal: tiene ceros en todas partes excepto en la diagonal principal y en las diagonales inmediatamente arriba y abajo de ésta.

E y así se eliminan los denominadores $\alpha - k^2$. Ahora se consideran los ceros de

$$\begin{split} L_1(\alpha,\beta) &= \begin{vmatrix} 2(\alpha-1^2) & \beta & 0 \\ \beta & 2\alpha & \beta \\ 0 & \beta & 2(\alpha-1^2) \end{vmatrix} = 2^3 \alpha (\alpha-1^2)^2 E_1, \\ L_2(\alpha,\beta) &= \begin{vmatrix} 2(\alpha-2^2) & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 2(\alpha-1^2) & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 2\alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 2(\alpha-1^2) & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 2(\alpha-2^2) \end{vmatrix} = 2^5 \alpha (\alpha-1^2)^2 (\alpha-2^2)^2 E_2, \end{split}$$

y así sucesivamente. La evaluación de los tres primeros determinantes conducen a:

$$\begin{split} L_1(\alpha,\beta) &= 4(\alpha-1) \left(-2\alpha + 2\alpha^2 - \beta^2 \right) \\ L_2(\alpha,\beta) &= 2 \left(16 - 20\alpha + 4\alpha^2 - \beta^2 \right) \left(16\alpha - 20\alpha^2 + 4\alpha^3 + 8\beta^2 - 3\alpha\beta^2 \right) \\ L_3(\alpha,\beta) &= 8 \left(-72 + 98\alpha - 28\alpha^2 + 2\alpha^3 + 5\beta^2 - \alpha\beta^2 \right) \left(-288\alpha + 392\alpha^2 - 112\alpha^3 + 8\alpha^4 - 144\beta^2 + 72\alpha\beta^2 - 8\alpha^2\beta^2 + \beta^4 \right), \end{split}$$

se puede ver de los determinantes $L_i(\alpha, 0)$ que $L_i(\alpha, 0) = 0$ si $\alpha_l = l^2$ para $l \leq i$, estos son los valores críticos en donde nacen las lenguas de Arnold T-periódicas. Analógamente, este procedimiento conduce a las soluciones o fronteras 2T-periódicas $(T = 4\pi)$.

Se debe remarcar que el determinante de Hill es fuertemente convergente para pequeños valores de α y β , bajo estas condiciones pueden ofrecer buenas estimaciones de los exponentes característicos y de estabilidad. Por otra parte, para α y β significativamente mas grandes que la unidad, es necesario calcular determinantes bastante grandes (demandando recursos poderosos de cómputo y tiempo de cálculo). Además, éstos pueden diverger en un inicio antes de converger aceptablemente.

3.2. Teoría de perturbaciones

En esta sección se mencionarán algunos métodos analíticos para encontrar las soluciones de sistemas dinámicos variantes en el tiempo en general, lineales, no lineales, de cualquier grado de libertad e incluso podrían utilizarse en problemas que involucran ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, nuestro interés se limita a sistemas periódicos descritos por la ecuación de Hill escalar. Se presenta el análisis de la ecuación de Mathieu utilizando las series de *Poincaré-Lindstedt* a modo de ejemplo.

Teoría de perturbaciones consiste en el cálculo del valor de una función de interés asociada a un problema dependiente de un parámetro ϵ a partir del conocimiento de su valor para $\epsilon = 0$, bajo esta condición ($\epsilon = 0$) el análisis debe ser simple, o por lo menos explícito y riguroso, mientras que para $\epsilon \neq 0$, pequeño, se intenta expresándolo como la suma de una serie de potencias en ϵ y ésta será la solución.

La teoría de perturbaciones es, frecuentemente la única manera de aproximarse a las propiedades de los sistemas cuyas ecuaciones no se pueden 'resolver explícitamente'.

El descubrimiento de planetas, de comportamientos caóticos, los avances de la teoría del campo cuántico en electrodinámica y la unificación de las fuerzas elementales se deben en gran parte a la teoría de perturbaciones.

Algunos de los métodos en la Teoría de perturbaciones son:

- Expansión directa
- Solución exacta
- Poincaré-Lindstedt

- Renormalización
- Multiples escalas
- Promediación
- Variación de parámetros

Para detalles específicos de estos métodos, ver [56]

Para obtener las fronteras de las lenguas de Arnold de la ecuación (3.1) se aplicará el método de Poincaré-Lindstedt. La naturaleza del método impone valores pequeños de $|\beta|$.

Suponga que las curvas de transición están determinadas por,

$$\alpha = \alpha(\beta) = \alpha_0 + \beta \alpha_1 + \beta^2 \alpha_2, \dots$$
(3.4)

y las soluciones correspondientes:

$$x(t) = x_0(t) + \beta x_1(t) + \beta^2 x_2(t), \dots$$
(3.5)

en donde x_0, x_1, x_2, \ldots tienen periodo fundamental T o 2T.

Sustituyendo (3.4) y (3.5) en (3.1) y los coeficientes de idénticas potencias en β se igualan a cero, se obtiene,

$$\ddot{x}_0 + \alpha_0 x_0 = 0 \tag{3.6}$$

$$\ddot{x}_1 + \alpha_0 x_1 = -(\alpha_1 + \cos(t))x_0 \tag{3.7}$$

$$\ddot{x}_2 + \alpha_0 x_2 = -\alpha_2 x_0 - (\alpha_1 + \cos(t)) x_1 \tag{3.8}$$

$$\ddot{x}_3 + \alpha_0 x_3 = -\alpha_3 x_0 - \alpha_2 x_1 - (\alpha_1 + \cos(t)) x_2 \tag{3.9}$$

y así sucesivamente.

De la expresión $\alpha_0 = \frac{k^2}{4}$, k = 0, 1, 2, ... en el capítulo *Ecuación de Meissner* podemos saber en donde surgen las soluciones *T*-periódicas así como las 2*T*-periódicas.

Consideremos los casos para k = 0 y k = 1:

1) k = 0, implica que $\alpha_0 = 0$, por lo tanto $\ddot{x}_0 = 0$ y la solución de (3.6) es

$$x_0 = A_0,$$

asumimos que la constante $A_0 \neq 0$. Sustituyendo x_0 en (3.7), entonces $\ddot{x}_1 = -(\alpha_1 + \cos(t))A_0$, la cuál tiene soluciones periódicas solamente sí $\alpha_1 = 0$, se sigue que

$$x_1 = A_0 \cos(t),$$

observe que es suficiente que arse únicamente con la solución particular². Ahora, sustituimos $x_0 \neq x_1 \neq (3.8)$ se convierte en,

$$\ddot{x}_2 = -A_0 \alpha_2 - \frac{1}{2} A_0 - A_0 \cos^2(t) = -A_0 \alpha_2 - \frac{1}{2} A_0 - \frac{1}{2} A_0 \cos(2t),$$

genera soluciones T y 2T-periódicas solo si $\alpha_2 + \frac{1}{2}A_0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{2}A_0$. Por lo tanto,

$$x_2 = \frac{1}{8}A_0\cos(2t).$$

²La inclusión de soluciones complementarias no agrega generalidad y se pueden mezclar más constantes arbitrarias.

Finalmente, x_i , i = 0, 1, 2 en (3.9),

$$\ddot{x}_3 = -\alpha_3 x_0 - \alpha_0 A_0 \cos(t) - \frac{1}{8} A_0 \cos(t) \cos(2t) = A_0 \left[-\alpha_3 - \left(\alpha_2 + \frac{1}{16} \right) \cos(t) - \frac{1}{16} \cos(3t) \right].$$

Note que las soluciones serán periódicas solo si $\alpha_3 = 0$. Entonces para $|\beta|$ pequeñas,

$$\alpha = -\frac{1}{2}\beta^2 + O\left(\beta^4\right),$$

la cuál es una aproximación a la primera lengua de Arnold de la ecuación de Mathieu, ver Fig. 1, en la introducción.

La solución T-periódica es

$$x(t) = A_0 \left[1 + \beta \cos(t) + \frac{1}{8} \beta^2 \cos(2t) \right] + O(\beta^3).$$

b) k = 1, entonces $\alpha_0 = \frac{1}{4}$, y $x_0 = A_0 \cos(t/2) + B_0 \sin(t/2)$. De (3.7),

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = -(\alpha_1 + \cos(t)) \left[A_0 \cos(t/2) + B_0 \sin(t/2)\right] = -A_0(\alpha_1 + 1/2) \cos(t/2) - B_0(\alpha_1 - 1/2) \sin(t/2) - A_0/2 \cos(3t/2) - B_0/2 \sin(3t/2)$$
(3.10)

Hay soluciones 2*T*-periódicas si cualquiera, $B_0 = 0$, $\alpha_1 = -1/2$, o $A_0 = 0$, $\alpha_1 = 1/2$. Consideremos ambos casos:

1. $B_0 = 0$, $\alpha_1 = -1/2$. La solución particular de (3.10) es $x_1 = A_0/4\cos(3t/2)$. x_1 en (3.8) resulta en

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{4}x_2 = -(\alpha_2 + 1/8)A_0\cos(t/2) + A_0/8\cos(3t/2) - A_0/8\cos(5t/2).$$

Los términos seculares pueden ser eliminados (términos responsables de un crecimiento no acotado) definiendo $\alpha = -1/8$. Por lo tanto una curva de transición en $\alpha = 1/4$, $\beta = 0$ es

$$\alpha = 1/4 - \beta/2 - \beta^2/8 + O\left(\beta^3\right).$$
(3.11)

2. $A_0 = 0, \alpha_1 = 1/2$. De (3.10), $x_1 = B_0/4\sin(3t/2)$, sustituyendo en (3.8),

$$\ddot{x}_2 + 1/4x_2 = -(\alpha_2 + 1/8)B_0\sin(t/2) - B_0/8\sin(3t/2) - B_0/8\sin(5t/2).$$

Los término seculares se eliminan con $\alpha_2 = -1/8$, y se obtiene la otra curva de transición,

$$\alpha = 1/4 + \beta/2 - \beta^2/8 + O(\beta^3).$$
(3.12)

Las curvas de transición definidas por (3.11) y (3.12) son una aproximación de las fronteras de las lenguas de Arnold en $\alpha = 1/4$ y $\beta = 0$, mostradas en la Fig. 1, en la introducción.

De forma análoga se pueden obtener las lenguas que nacen en $\alpha = 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, \dots$ y $\beta = 0$.

Soluciones Periódicas en la Ecuación de Hill no homogénea

4.1. Ecuación de Hill no homogénea: un grado de libertad

4.1.1. Antecedentes

Como se ha mencionado a lo largo del trabajo, el número de sistemas dinámicos descritos por la ecuación de Hill es grande, y estos fenómenos son tan diversos que explican desde sistemas mecánicos relativamente simples, como son: la estabilidad en las barras laterales de locomotoras (en su época), el movimiento de barras, vigas o tubos sometidos a fuerzas axiales periódicas, hasta temas mas complicados relacionados a la astronomía y la mécanica cuántica. No obstante, a pesar de la amplia gama de investigaciones designadas a esta ecuación, la cantidad de trabajos que involucran la ecuación de Hill *no homogénea* es escasa, esta es la razón que motivó el desarrollo de esta tesis de investigación.

La ecuación de Hill en su versión no homogénea se representa por,

$$\ddot{x} + \left[\alpha + \beta q(t)\right] x = f(t) \tag{4.1}$$

Algunas de las investigaciones destinadas a la ecuación (4.1) fueron desarrolladas por: Slane y Tragesser [21], ellos analizaron una clase de sistemas *casi* periódicos descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales con puntos de equilibrio desconocidos, por lo que linealizaron alrededor de un movimiento de referencia periódico obteniendo así una ecuación diferencial lineal excitada paramétricamente no autónoma e inhomogénea; entonces modificaron la Teoría de Floquet para examinar analíticamente el comportamiento transitorio y en estado estacionario del sistema. Descubrieron que el comportamiento general preestablecido por la Teoría de Floquet para sistemas homogéneos, solo cambiaba para el caso de multiplicadores semi-simples que son idénticamente igual a uno. En otras palabras, demostraron que los puntos de coexistencia, estables en el sistema homogéneo, se vuelven inestables en (4.1) cuando f(t) es una señal periódica. También establecieron que la solución completa del sistema periódico no homogéneo converge a un estado estacionario con el mismo rango exponencial (determinado por el exponente característico de Floquet) con que lo hace el sitema periódico homogéneo cuando es evaluado en un periodo.

Younesian y otros [22] usaron la técnica de parámetros restringidos para encontrar las soluciones π y 2π periódicas del péndulo sujeto a un soporte el cuál se mueve a lo largo de una trayectoria tipo mariposa, descrito por la ecuación de Mathieu no homogénea, $\ddot{u} + [\delta + 2\varepsilon \cos(2t)] u = 2\varepsilon \sin(2t)$. Adicionalmente, explotaron el método de múltiples escalas para obtener analíticamente la estabilidad-

inestabilidad de las curvas de transición en el plano (δ, ε). Demostraron que hay dos tipos de soluciones no acotadas en las regiones de inestabilidad, oscilatorias y no oscilatorias.

Shadman y Mehri [23], probaron mediante el teorema de punto fijo la existencia de soluciones periódicas en la ecuación de Hill homogénea y posteriormente extendieron este resultado (en el mismo artículo) a la ecuación de Hill no homogénea

$$\ddot{x} + p(t)x = f(t), \quad p(t+T) = p(t), \quad f(t+T) = f(t) \quad y \quad T > 0,$$
(4.2)

en donde p(t) y f(t) son funciones continuas. Es válido resaltar que encontraron soluciones periódicas en sistemas de dos grados de libertad, es decir para ecuaciones de Hill-Mathieu acopladas. Además, usaron el criterio de Lyapunov [57] para mostrar la estabilidad y el carácter periódico de las soluciones (caso homogéneo).

La idea se basa en la suposición de que existen constantes m, M tal que $0 < m \le p(t) \le M \le \frac{8}{w^2}$, entonces (4.2) tiene una solución *T*-periódica.

Kwong y Wong [24] aplicaron la teoría de Floquet para probar la suposición de que todas las soluciones de la ecuación de Hill no homogénea, $\ddot{y} + cq(t)y = f(t)$, $c \neq 0$ $t \geq 0$ (específicamente $\ddot{y} + c\sin(t)y = \cos(t)$, $c \neq 0$ $t \geq 0$), son oscilatorias en el intervalo $[0, \infty)$. Su método está fuertemente limitado al hecho de que las ambas señales, $q(t) \neq f(t)$ deben tener el mismo periodo además del valor de la constante c, es decir, para que todas las soluciones sean oscilatorias se debe cumplir $|c| \geq \frac{25}{72}\sqrt{15} \approx 1,3448.$

4.1.2. Análisis de estabilidad [25]

De acuerdo a la Teoría de Floquet, la matriz de transición de estados $\Phi(t,T)$ satisface,

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T).$$

Por lo tanto, para cada solución x(t) de (4.1) con condición inicial x(0) = v, en donde v es un eigenvector de la matriz de Monodromía $\Phi(T)$ asociado al eigenvalor λ , se preserva la siguiente relación,

$$x(t+T) = \lambda x(t).$$

De la expresión anterior se sigue la subsecuente cadena de igualdades

$$x(t+T) = \lambda x(t)$$
$$x(t+2T) = \lambda^2 x(t)$$
$$\vdots$$
$$x(t+kT) = \lambda^k x(t),$$

y a su vez, se puede ver fácilmente que soluciones kT-periódicas se obtienen cuando $\lambda^k = 1$.

Con el objetivo de encontrar los valores de λ que generen soluciones de periodo kT, hacemos uso de su forma polar,

$$x(t+kT) = \lambda^k x(t) = r^k e^{jk\theta} x(t).$$

La ecuación (4.1) es Hamiltoniana [38] y, como ya se ha mencionado, la matriz de transición de estados de un sistema Hamiltoniano es simpléctica [34], entonces $r^k = 1$ siempre que $\lambda^k \equiv 1$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $e^{jk\theta} = \cos(k\theta) + j\sin(k\theta) = 1$, se sigue que $k\theta = \pm 2n\pi$ en donde $n \in \mathbb{Z}$. Nótese que n se puede despreciar puesto que representa giros de 2π radianes. Entonces, la *condición de ángulo* para soluciones kT-periódicas es,

$$\theta = \pm \frac{2\pi}{k} \tag{4.3}$$



Figura 4.1: Círculo unitario: Muestra las posiciones de los multiplicadores caracteríticos que corresponden a soluciones kT-periódicas asociadas a las líneas delgadas desplegadas en el diagrama de estabilidad de la ecuación de Mathieu no homogénea.

(ver Fig. 4.1).

De este modo, los valores de λ se determinan para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$k = 1, \ \theta = 2\pi \qquad \qquad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \{1,1\}$$

$$k = 2, \ \theta = \pi \qquad \qquad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \{-1,-1\}$$

$$k = 3, \ \theta = \frac{2\pi}{3} \qquad \qquad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \left\{-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$k = 4, \ \theta = \frac{\pi}{2} \qquad \qquad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \{j,-j\}$$

$$\vdots$$

De manera inmediata se observa que el sistema (4.1) tiene soluciones kT-periódicas cuando los multiplicadores de Floquet satisfacen (4.3) para ciertos valores de α y β .

Observación 4.1. Conforme k se incrementa, las soluciones kT-periódicas se acercan mas a las soluciones T-periódicas, conversamente si el valor de k disminuye las soluciones se alejan de las trayectorias con período T y se acercan a las 2T-periódicas. Esta hecho se puede apreciar principalmente en la Fig. 4.1, pero también se observa en las Figuras 4.6 y 4.11.

A partir de ahora se considera la posterior ecuación de Mathieu no homogénea para futuros análisis,

$$\ddot{x} + \left[\alpha + \beta \cos(\omega_0 t)\right] x = \sum_{i=1}^r \gamma_i \cos(\omega_i t), \qquad (4.4)$$

en donde $T_i = 2\pi/\omega_i$ y ω_i son las frecuencias del componente forzante para $i = 0, 1, \ldots, r$. Consecuentemente, $T_0 \equiv T$. Los sistemas representados por esta ecuación son capaces de exhibir resonancia lineal (o típica) de manera análoga a como lo hacen los sistemas lineales con parámetros constantes en donde la resonancia toma lugar cuando la frecuencia de cualquier componente de la señal forzante coincide con la frecuencia de las soluciones periódicas del sistema homogéneo.

Proposición 1. La resonancia lineal en (4.4) surgirá cuando cualquier i-ésimo término forzante en la sumatoria tenga periodo $T_i = k_i T_0$, para algún $k_i \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ y para ciertos valores de α y β .

Por consiguiente, se tiene que $k_i = \omega_0/\omega_i$ y se deduce la *nueva* condición de fase,

$$\theta_i = 2\pi \frac{\omega_i}{\omega_0},\tag{4.5}$$

para curvas T_i -periódicas.

Se puede determinar del análisis previo que las nuevas curvas T_i -periódicas (líneas delgadas) son resonantes o inestables en el sentido clásico de resonancia, es decir, la respuesta en el tiempo del sistema a la entrada periódica (bajo las condiciones ya descritas) crecerá linealmente cuando los parámetros (α, β) se encuentren sobre cualquier punto de estas curvas. A partir de ahora esas líneas extremadamente delgadas serán llamadas *líneas de resonancia lineal* o mas corto, *líneas de resonancia*.

Note que la resonancia paramétrica aparece cuando el sistema es evaluado en cualquier punto (α, β) dentro de las lenguas de Arnold (zonas obscuras) en el diagrama de Ince-Strutt, y en esta región, la amplitud de la respuesta tiene un rango de crecimiento exponencial.

En presencia de algún componente con periodo T_0 en la entrada del sistema, las fronteras Tperiódicas de las lenguas de Arnold se vuelven inestables, esta afirmación concuerda con la postulada en [21]. Similarmente, al forzar con una señal $2T_0$ -periódica, las curvas de transición de periodo 2Tdejan de ser estables.

Observación 4.2. En general, las fronteras de las lenguas de Arnold son inestables, los únicos puntos estables corresponden a puntos de coexisrencia [16], que son los puntos en donde el ancho de la lengua se reduce a **cero**, o bien, en donde dos lenguas de Arnold se cruzan, ver Fig. 4.11, coordenadas (2,5,1,5) y (5,4).

4.1.3. Ecuación de Mathieu no homogénea con amortiguamiento

El objetivo de esta sección es caracterizar la ecuación de Mathieu forzada cuando se le agregan fuerzas disipativas.

Considere la expresión,

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \left[\alpha + \beta \cos(\omega_0 t)\right] x = \sum_{i=1}^r \gamma_i \cos(\omega_i t), \qquad (4.6)$$

para algún $\delta > 0$. Y sea,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -[\alpha + \beta \cos(t)] & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sum_{i=1}^r \gamma_i \cos(\omega_i t),$$
(4.7)

su representación en espacio de estados.

En [21], se afirma que el comportamiento de la ecuación de Mathieu homogénea y no homogénea es *esencialmente* el mismo, excepto cuando los multiplicadores característicos son raíces simples del polinomio mínimo de la matrix de Monodromía (caso inusual), se analiza solo la parte homogénea de (4.7), entonces se tiene,

$$\dot{x}_h = A(t)x_h, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -[\alpha + \beta \cos(t)] & -\delta \end{bmatrix}.$$
(4.8)



Figura 4.2: Respuesta en el tiempo de la ecuación de Mathieu no homogénea con parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = 1,5$.

La matriz de Monodromía para el sistema anterior es representada por:

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} X_{1h}(T) & X_{2h}(T) \\ \dot{X}_{1h}(T) & \dot{X}_{2h}(T) \end{bmatrix},$$
(4.9)

у

$$M(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando la fórmula de Ostrogradskii-Jacobi-Liouville [29]

$$\det[M(T)] = \det[M(0)]e^{\int_0^T tr[A(u)]du},$$
(4.10)

se puede ver que si $\delta > 0$

 $\det[M(T)] = e^{-\delta T} < 1,$

puesto que

$$\det[M(0)] = 1 \quad \text{and} \quad tr[A(t)] = -\delta.$$

Para obtener los multiplicadores de Floquet y determinar la estabilidad de (4.8), es necesario calcular el polinomio característico de M.

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - tr(M)\lambda + \det[M]$$

= $\lambda^2 - [X_{1h}(T) + \dot{X}_{2h}(T)]\lambda + \rho^2,$ (4.11)

en donde $\rho^2 = e^{-\delta T}$.

Recordemos de la Definición (1.13) que una matriz es ρ -simpléctica si

$$S^{+}JS = \rho J$$

en donde $\rho \in (0, 1]$ es una constante no cero.

Proposición 2. La matriz de Monodromia $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es ρ^2 -simpléctica $\Leftrightarrow \det[M] = \rho^2$.

Im λ_1 λ_1 λ_2 Re Re

Figura 4.3: Multiplicadores característicos de la ecuación de Mathieu con amortiguamiento sobre el círculo de radio ρ cuando son complejos ($\{\lambda_1, \lambda_2\}$) o sobre el eje real cuando son reales ($\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\}$). Note que el círculo de radio ρ es menor que la unidad.

Demostración. (\Rightarrow) M es ρ^2 -simpléctica $\Rightarrow M^T J M = \rho^2 J$

$$det[M^T J M] = (det[M])^2 = \rho^4 = det[\rho^2 J]$$

$$\Rightarrow det[M] = \rho^2.$$

Obviando las 'raíces negativas' como es usual [34]. (
 (
 $\leftarrow) \, \det[M] = \rho^2$ if

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

entonces, M es ρ^2 -simpléctica $\Leftrightarrow M^T J M = \rho^2 J \Leftrightarrow M^T J = \rho^2 J M^{-1}$

$$M^T J = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

por otra parte

$$\rho^2 J M^{-1} = \frac{\rho^2}{\rho^2} \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & a\\ -d & b \end{bmatrix} = M^T J.$$

Note que si $\rho = 1$, M is simplemente simpléctica.

Observación 4.3. Todos los valores característicos complejos de $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ están sobre el círculo de radio ρ .

Demostración. Si
$$\lambda_1 \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda_2 = \overline{\lambda}_1$$
, entonces $\lambda_1 \overline{\lambda}_1 = \|\lambda_1\|^2 = \rho^2 \Rightarrow \|\lambda_1\| = \rho$.

Del análisis previo, se puede ver que los multiplicadores característicos $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in \mathbb{C}$, están sobre un círculo de radio ρ en la región estable, es decir, dentro del círculo unitario, observe la Fig. 4.3.

Las lenguas de Arnold de la ecuación de Mathieu forzada con distintos coeficientes de amortiguamiento se ilustra en la Fig. 4.4. Observe que las líneas de resonancia lineal desaparecen, esto se debe a que los multiplicadores de Floquet que estaban sobre el círculo de radio 1 en la Fig. 4.1 (los causantes, bajo ciertas condiciones, de resonancia) fueron trasladado al círculo de radio ρ en la



Figura 4.4: Gráfico de estabilidad del péndulo de Kapitsa forzado: $\ddot{x} + \delta \dot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = \sum_{i=3}^{7} \cos(t/i)$, para diferentes valores de disipación.



Figura 4.5: Péndulo de Kapitsa.

Fig. 4.3. En otras palabras el efecto de fuerzas disipativas se traduce en mover a los multiplicadores característicos del disco unitario a su interior.

El término de amortiguamiento, es bien sabido, reduce las zonas inestables asociadas con resonancia paramétrica, entre mayor sea el valor de δ las lenguas de Arnold son mas pequeñas y se desplazan cada vez mas hacia arriba, como se muestra en la Fig. 4.4.

4.2. Ejemplo: péndulo de Kapitsa

Se conoce como péndulo de Kapitsa al péndulo simple cuyo punto de suspensión varía vertical y periódicamente; el principal reto desde el punto de vista de la teoría de control consiste en la estabilización dinámica de la posición invertida, es decir, el punto de equilibrio superior, se sabe que se puede estabilizar mediante vibraciones rápidas y pequeñas; si suponemos que $p(t) = A \cos(\omega t)$ en la Fig. 4.5, entonces se estabiliza la posición de equilibrio superior cuando se satisface $A\omega > \sqrt{2gl}$, g es la aceleración de la gravedad. Esta condición fue descubierta, utilizando teoría de perturbaciones, por Piotr Kapitsa [58].



Figura 4.6: Diagrama de estabilidad para el péndulo de Kapitsa forzado: $\ddot{x} + \delta \dot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = \sum_{i=3}^{7} \cos(t/i), \ \delta = 0.$

La Fig. 4.5 muestra un diagrama simple del péndulo de Kapitsa, en donde la barra l se considera sin masa y rígida, m es una masa pequeña, g es la constante gravitacional, q(t) es la función de excitación, en este caso es una función armónica y (x, y) son las coordenadas originales del sistema.

La expresión que define la dinámica del péndulo con excitación paramétrica es la ecuación de Mathieu $\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] = f(t)$, se deriva directamente de las ecuaciones de *Euler-Lagrange*. La obtención del modelo se puede consultar a detalle en el apéndice A.

Resultados numéricos [59]

Puesto que la ecuación de Mathieu caracteriza al péndulo invertido linealizado, resulta válido considerar la siguiente expresión para el correspondiente caso forzado,

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = f(t).$$

A continuación se utilizan dos señales f(t) diferentes para analizar el comportamiento del péndulo de Kapitsa, dando lugar a los sistemas:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = \sum_{i \in \{3, 5, 9, 14\}}^{7} \cos\left(\frac{t}{i}\right)$$
(4.12)

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \left[\alpha + \beta \operatorname{sgn}\left(\sin(t)\right)\right] x = \sum_{i \in \{3, 5, 9, 14\}} \cos\left(\frac{t}{i}\right)$$
(4.13)

Note que en (4.13) la señal periódica sgn[sin(t)] es aplicada al punto de suspensión del péndulo dando lugar a la ecuación de Meissner no homogénea.

La Fig. 4.6 muestra el diagrama de estabilidad del péndulo forzado, como en (4.12). Las líneas de resonancia o soluciones kT-periódicas para $k \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$, se aprecian en las líneas punteadas. Observe que a estas líneas están asociadas con un par de multiplicadores sobre el círculo unitario, ver Fig. 4.1.

Es crucial resaltar que las líneas de resonancia 3T, 5T, 9T y 14T-periódicas (a cada una le corresponde un par de multiplicadores sobre el círculo 4.1) son soluciones 'estables' del sistema homogéneo porque se encuentran en las zonas de estabilidad (no pertenecen a las lenguas de Arnold). No obstante, cuando este sistema recibe una entrada con el mismo periodo que el de cualquiera de



Figura 4.7: Respuesta del péndulo de Kapitsa sin señal forzante: $\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = 0, \alpha = 3$ y $\beta = 2$.



Figura 4.8: Respuesta del péndulo de Kapitsa forzado: $\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = \cos\left(\frac{t}{3}\right)$, $\alpha = 3$ and $\beta = 2$.



Figura 4.9: Respuesta del péndulo de Kapitsa sin señal forzante: $\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = \cos(t/3,2),$ $\alpha = 3 \text{ y } \beta = 2.$

las líneas de resonancia, por ejemplo 5T, entonces, esta señal 5T-periódica entrará en resonancia y exhibirá un comportamiento 'inestable'.

La Fig. 4.7 exhibe el comportamiento periódico (estable) del péndulo de Kapitsa no forzado en las coordenadas (α, β) = (3,2) en el diagrama Ince-Strutt, este punto pertenece a una señal 3T-periódica.

Las Figuras 4.8 and 4.9 muestran las respuestas en el tiempo del sistema forzado, con los mismos valores (α, β) . La primera imagen ilustra la resonancia lineal, la cuál aparece debido a la coincidencia de la solución 3*T*-periódica (en el sistema no homogéneo) y la señal forzante (coseno) del mismo periodo. En la segunda gráfica se aprecia que la coincidencia entre periodos se pierde (puesto que el periodo del coseno es T = 3,2), en consecuencia la inestabilidad lineal también desaparece.

El efecto del amortiguamiento juega un papel esencial en la estabilidad-inestabilidad del péndulo invertido, puesto que reduce el área de resonancia paramétrica en relación a el valor de δ (mayor disipación mayor área estable). Con respecto a la resonancia lineal, ésta se desvanece incluso con un valor muy pequeño de δ , por lo tanto, las líneas de resonancia desaparecen del gráfico de estabilidad. Este hecho es una consecuencia directa de la observación 4.3.

La Fig. 4.10 despliega la amplitud de la respuesta en el tiempo de (4.12) para (α, β) = (3,2) y $\delta = \{0,01,0,1\}.$

La Fig. 4.11 muestra el péndulo invertido forzado descrito por (4.13), las líneas de resonancia en este sistema siguen el mismo principio como en los dos casos anteriores.

Observación 4.4. En [64] pág. 289, aparece un diagrama similar a la ecuación de Mathieu no homogénea para $\alpha \in [-0,8,0,6]$ y $\beta \in [0,1,5]$ y también se dibujan ciertas líneas parecidas a lo que en este trabajo llamamos líneas resonantes, sin embargo, no se presenta algún tipo de análisis. El contenido es puramente numérico.

Comentario: esta es la primera vez que se presentan dos tipos de resonancia sobre el diagrama de Ince-Strutt: a) resonancia paramétrica y b) resonancia lineal.

4.3. Soluciones kT-periódicas con $k \in \mathbb{R}$

En esta sección se analiza el sistema:

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta p(t)] x = q(t),$$



Figura 4.10: Diferentes amplitudes para soluciones 3*T*-periódicas de: $\ddot{x} + \delta \dot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = \sum_{i=3}^{7} \cos(t)$, con $\delta = 0.01$, $\delta = 0.1$ respectivamente y $(\alpha, \beta) = (3.5, 3.5)$.



Figura 4.11: Diagrama de estabilidad del péndulo de Kapitsa forzado : $\ddot{x} + \delta \dot{x} + [\alpha + \beta \operatorname{sgn}(\sin(t))] x = \sum_{i \in \{3,5,9,14\}} \cos(t/i), \ \delta = 0.$



Figura 4.12: Posición de los multiplicadores asociados a soluciones eT, $3T \ge \pi T$ -periódicas. Éstos corresponden a líneas delgadas en el diagrama de estabilidad de la ecuación de Mathieu forzada con señales con periodo no conmensurable con el de la excitación paramétrica.

en donde p(t) = p(t + T) y q(t) = q(t + T) con T y T no commensurables. Para ser mas específicos se estudian los sistemas:

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = \cos(\pi T), \quad \mathcal{T}_1 = 2$$
(4.14)

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = \cos(eT), \quad \mathcal{T}_2 = \frac{2\pi}{e}$$
(4.15)

en donde $e \approx 2,7182818$ es el número de Euler y $\pi \approx 3,1415926$, ambos pertenecen a los números irracionales. \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 son periodos fundamentales de las señales forzantes (4.14) y (4.15) respectivamente. Puesto que el período mínimo del término de exitación paramétrica es $T = 2\pi$, se puede ver directamente que T y \mathcal{T}_1 no son conmensurables, así como tampoco los son T y \mathcal{T}_2 .

Usando la expresión de condición de ángulo (4.3) para determinar la posición de los multiplicadores de FLoquet sobre el círculo unitario, se tiene que:

$$k = \pi, \ \theta = \frac{2\pi}{\pi} \qquad \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = \{-0,4161 \pm j0,9092\} \\ k = e, \ \theta = \frac{2\pi}{e} \qquad \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = \{-0,6747 \pm j0,7380\}$$

La Fig. 4.12 muestra las posiciones de los multiplicadores de señales piT, 3T y eT-periódicas. Los multiplicadores que corresponden a la solución 3T-periódica se dibujan solo como referencia para ubicar a los que pertenecen a periodos irracionales.

El comportamiento referido como soluciones periódicas (en la ecuación de Hill homogénea) o resonancia lineal (en la ecuación de Hill no homogénea) se preserva a pesar de que la señal forzante y la excitación paramétrica son *no* conmensurables, es decir, soluciones kT-periódicas pueden surgir con k no necesariamente entero, siempre que los eigenvalores de la matriz de Monodromía estén sobre el círculo unitario, y esas soluciones resonaran si un término forzante, con el mismo periodo es aplicado al sistema.

Las líneas de resonancia correspondientes a períodos eT, $3T \ge \pi T$ (las cuáles también son mostradas sobre el disco unitario arriba) están dibujadas en el diagrama de Ince-Strutt, Fig. 4.13.

La Fig. 4.14 traza las trayectorias x(t) de la solución de (4.14) cuando $\alpha = 2$ y $\beta = 1,8$, el cuál es un punto localizado sobre una de las líneas πT -periódicas en el gráfico de stabilidad (Figure 4.13), claramente esas trayectorias describen resonancia lineal o inestabilidad provocada por la señal forzante.



Figura 4.13: Diagrama de estabilidad del péndulo de Kapitsa forzado: $\ddot{x} + \delta \dot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = \cos(et), \cos(3t)$ and $\cos(\pi t)$. $\delta = 0$.



Figura 4.14: Respuesta en el tiempo del péndulo de Kapitsa forzado: $\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)] x = \cos(\pi t)$, $\alpha = 2$ y $\beta = 1,8$.

Ecuación de Hill no homogénea: dos grados de libertad

En esta parte se pretende hacer una extensión de los resultados obtenidos en la sección anterior, dicho de otra manera, se estudia el comportamiento de la ecuación de Mathieu en dos grados de libertad cuando se le aplica una fuerza externa periódica, en este caso, una señal armónica simple. Se descubrirá que ciertas propiedades intrínsecas en la ecuación de un grado de libertad *no* se pueden extender a su homóloga en dos grados de libertad.

Considere la ecuación de Mathieu no homogénea en dos grados de libertad,

$$\ddot{x} + \left[\alpha A + \beta B p(t)\right] x = h(t), \tag{4.16}$$

en donde $p(t) = p(t+T) \in \mathbb{R}$ es una función periódica, $h(t) = h(t+T) \in \mathbb{R}^2$ es la señal forzante, ambas con valor promedio cero, $x \in \mathbb{R}^2$, $A = A^{\top} > 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B = B^{\top} > 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son parámetros que representan las mismas cantidades que en el caso uni dimensional.

Se requiere que las matrices A y B sean simétricas y positivas definidas para asegurar que el sistema (4.16) sea Hamiltoniano. Anteriormente, se estableció que la matriz de transición de estados de un sistema Hamiltoniano es simpléctica y en consecuencia, también lo es la matriz de Monodromía, M. La propiedad fundamental de este grupo de matrices no singulares es que si $\lambda \in \sigma(M)$, entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(M)$ [34].

Considere las matrices (sin pérdida de generalidad podemos asumir que A es diagonal),

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_4 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2\\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}$$

la representación en espacios de estados de (4.16) es,

$$\dot{x}_{1} = x_{3}$$

$$\dot{x}_{2} = x_{4}$$

$$\dot{x}_{3} = -\left[\alpha a_{1} + \beta b_{1} p(t)\right] x_{1} - \left[\beta b_{2} p(t)\right] x_{2} + h_{3}(t)$$

$$\dot{x}_{4} = -\left[\alpha a_{4} + \beta b_{4} p(t)\right] x_{2} - \left[\beta b_{2} p(t)\right] x_{1} + h_{4}(t)$$

$$(4.17)$$

Si definimos $\tilde{h}_3(t) = -[\beta b_2 p(t)] x_2$ y $\tilde{h}_4(t) = -[\beta b_2 p(t)] x_1$ como pequeñas perturbaciones del sistema. Entonces, (4.17) se puede reformular como dos subsistemas diferentes, en donde

$$\dot{x}_{1} = x_{3}$$

$$\dot{x}_{3} = -\left[\alpha_{1} + \beta_{1}p(t)\right]x_{1} + \tilde{h}_{3}(t) + h_{3}(t)$$

$$\alpha_{1} = \alpha a_{1} \qquad \beta_{1} = \beta b_{1}$$

$$(4.18)$$

es el primer subsistema con $\alpha_1 = \alpha a_1, \, \beta_1 = \beta b_1; \, \mathbf{y}$

$$\dot{x}_{2} = x_{4}$$

$$\dot{x}_{4} = -\left[\alpha_{2} + \beta_{2}p(t)\right]x_{2} + \tilde{h}_{4}(t) + h_{4}(t)$$
(4.19)

$$\alpha_{2} = \alpha a_{4} \qquad \beta_{2} = \beta b_{4}$$

es el segundo. Aquí, $\alpha_2 = \alpha a_4$ y $\beta_2 = \beta b_4$

Ejemplo numérico

Para discernir el comportamiento de (4.16) asignemos los siguientes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 3 & 0,01 \\ 0,01 & 3 \end{bmatrix}$$



Figura 4.15: Diagrama de estabilidad para la ecuación de Mathieu de dos grados de libertad. Lenguas grises se asocian al subsistema 1, las rayadas al subsistema 2 y las más delgadas son lenguas de combinación.



Figura 4.16: Posibles posiciones de los multiplicadores de Floquet en un sistema Hamiltoniano de dos grados de libertad. Los primeros tres círculos representan soluciones inestables, el cuarto, soluciones estables.

$$h(t) = h_3(t) = h_4(t) = \sum_{i \in \{3,...,7\}} \cos(t/i) \quad y \quad \tilde{h}_3 = \tilde{h}_4 \approx 0$$

con los cuáles se genera, numéricamente, el diagrama (4.15).

Debido a que el valor de b_2 , el elemento responsable del acoplamiento, es muy pequeño ($b_2 = 0,01$), el diagrama de estabilidad (4.15) es realmente parecido al que representaría la superposición de los sistemas (4.18), (4.19) desacoplados (cuando $\tilde{h}_i = 0, i = 1, 2$).

En el gráfico de estabilidad de los dos subsistemas se advierte que las lenguas de Arnold no coinciden aún cuando el valor de acoplamiento es muy pequeño, por lo tanto, tampoco existe concordancia entre las líneas de resonancia de un subsistema y de otro, es decir, bajo estas circunstancias no hay forma en que los multiplicadores correspondientes a cada subsistemas se empaten sobre el círculo unitario. En consecuencia, en sistemas de dos grados de libertad no existen soluciones periódicas como las hubo en el caso escalar.

Sin embargo, si bien es cierto que las lineas resonantes no representan periodicidad en la ecuación de Hill homogénea de dos grados de libertad, siguen preservando su carácter de inestabilidad (resonancia lineal) cuando una señal forzante posee el mismo 'periodo' que éstas líneas vistas de manera independiente para cada subsistema.

Recuerde que en la ecuación de Hill de dos dimensiones existen cuatro multiplicadores característicos sobre el plano complejo. La estabilidad de las soluciones depende de su posición. Análogo al caso de una dimensión, por la teoría de Floquet, las soluciones del sistema son estables si los cuatro multiplicadores están sobre el círculo unitario, en cualquier otro caso son inestables, tal y como se puede ver en la Fig. 4.16.



Figura 4.17: La resonancia lineal ocurre cuando los multiplicadores de Floquet (círculos) coinciden con los armónicos de la señal forzante (asteriscos).



Figura 4.18: Respuesta en el tiempo

Suponga que $h(t) = \cos(t/3) + \cos(t/4) + \cos(t/8)$, las señales armónicas de h(t) son señales 3T, 4T y 8T periódicas, son los asteriscos sobre el círculo en la Fig. 4.17. Para todos los valores de (α, β) que estén sobre alguna línea de resonancia $(3T, 4T \ y \ 8T$ -periódicas) el sistema entrará en resonancia en el sentido clásico.

Gráficamente, cuando alguno de los cuatro multiplicadores de Floquet (círculos pequeños) en la Fig. 4.17 coincida con al menos un armónico de h(t), el sistema resonará.

Dicho de otra manera, cuando al menos una de las frecuencias forzantes y la frecuencia ω_0 de p(t) satisfacen la condición (4.5), el sistema (4.16) exhibirá inestabilidad. La Fig. 4.18 describe la respuesta en el tiempo del sistema, cuando los multiplicadores característicos superponen la señal 4T-periódica. Observe que, efectivamente, la resonancia es lineal.

5

Aplicaciones de la Ecuación de Hill no Homogénea

Algunos sistemas de creciente interés se pueden caracterizar de forma natural por la ecuación de Hill inhomogénea, entre estos se encuentran los sistemas microelectromecánicos MEMS o nanoelectromecánicos NEMS. En este grupo destacan los giroscopio MEMS, giroscopios de rango, que miden la velocidad angular (en lugar de dirección) y se usan en la estabilidad, orientación y navegación de sistemas. Por otra parte, cuando se desea controlar la amplitude de las oscilaciones de las soluciones en la ecuación de Hill homogénea, la inclusión de un término forzante se torna inherente. Además, la dinámica de dispositivos cosechadores de energía¹ mediante resonancia paramétrica se describe por medio de ecuaciones diferenciales forzadas de segundo orden.

5.0.1. Giroscopios MEMS

Los giroscopios se usan para determinar la orientación de ciertos dispositivos, se encuentran en la mayoría de los sistemas de navegación autónoma y se utilizan ampliamente en robótica para balancear autómatas o en automoviles para la estabilización de recorrido y detección de vuelco. También se encuentran en una amplia gama de aplicaciones militares.

La clase de giroscopios MEMS utilizan estructuras vibratorias y el principio de Coriolis² para detectar velocidad angular o ángulo de rotación. Mientras el giroscopio esta en funcionamiento experimenta dos modos de operación. El modo primario, es el modo de vibración mediante el cual la estructura vibrante es sometida a resonancia debido a una fuerza de excitación paramétrica; al aplicar un rango de rotación, la fuerza inercial de Coriolis induce otro modo de vibración sobre la misma estructura, en consecuencia las oscilaciones principales son afectadas, lo que se traduce en un cambio en la aceleración, y por lo tanto en un cambio de dirección, este se conoce como modo secundario. El eje de rotación es ortogonal a la velocidad del modo primario para maximizar la fuerza de Coriolis. La amplitud de respuesta del modo secundario es proporcional al rango de rotación aplicado. Detalles adicionales se pueden consultar en [60].

La Fig. $(5.1)^3$ ilustra la clase de giroscopios que utilizan un anillo como elemento inercial. Observe que una estructura de suspensión sostiene al anillo de radio a, anchura b y grosor d. Tanto el mecanismo de actuación que hace vibrar al anillo como el dispositivo que detecta las vibraciones inducidas por la fuerza de Coriolis en el modo secundario, son electrostáticos.

¹Son dispositivos que extraen y aprovechan la energía de fuentes externas tales como: energía solar, energía térmica, energía eólica, energía cinética o fluctuaciones en el campo electromagnético de la tierra.

²La aceleración de Coriolis es una aceleración aparente que surge en un marco de referencia giratorio, es proporcional a la tasa de rotación.

³Obtenida de [60].



Figura 5.1: Giroscopio de anillo MEMS.

Los ocho electrodos del giroscopio están separados una distancia h_0 del anillo y pueden verse como placas capacitivas planas con un hueco de aire entre ellas. Un potencial fijo de corriente directa $V_{dc} = 25V$ es suministrado al anillo para proporcionar un votaje de polarización común a los electrodos de sensado. Los electrodos en el plano activan y sensan el modo primario de vibración, este se puede describir como un modo de vibración radial de flexión de orden *dos*, es decir, $\cos(2\sigma)$. Por otra parte, el modo secundario de vibración, también en el plano, es de la forma $\sin(2\sigma)$ y es excitado por la fuerza de Coriolis al rotar el anillo alrededor del eje Z.

Modelado del modo primario de un giroscopio MEMS

El movimiento del modo primario de vibración de un giroscopio de anillo MEMS ha sido modelado por la ecuación de Hill no homogénea en [60] y se expresa como

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + [\kappa + K(t)]q(t) = F(t),$$
(5.1)

en donde x(t) es la coordenada generalizada asociada con el modo primario, $m = \rho A a \pi \left(1 + 1/n^2\right)$ es la masa generalizada, $\kappa = \left[E I_z \pi/a^3\right] \left[(1 - n^2)^2\right]$ es la rigidez generalizada,

$$K(t) = \frac{\varepsilon_0 a d}{h_0^3} \sum_{k=1}^p U_k^2(t) \left(\alpha + \frac{\cos(2n\delta_k)\sin(2n\alpha)}{2n} \right)$$
(5.2)

es la rigidez electrostática y

$$F(t) = \frac{\varepsilon_0 ad}{nh_0^2} \sum_{k=1}^p U_k^2(t) \left(\frac{\cos(n\delta_k)\sin(n\alpha)}{n}\right)$$
(5.3)

es el término forzante asociado a la activación electrostática; $K(t) \ge F(t)$ se proporcionan en [61].

El término $U_k(t)$ indica las contribuciones de voltaje en el k-ésimo electrodo debido a la señal de excitación paramétrica $\eta \sin(\omega t)$ sobre el electrodo de accionamiento y el voltaje de polarización V_{dc} sobre el anillo MEMS. El voltaje a través de la 'placas' capacitivas, entre el anillo polarizado y el electrodo de actuación es (para una señal senoidal) de la forma $\eta \sin(\omega t) - V_{dc}$. La contribución del voltaje de excitación de todos los p electrodos generan la fuerza total electrostática K(t)x(t) + F(t).

La rigidez eletrostática K(t) se puede modular periódicamente variando la amplitud η y la frecuencia ω de la señal de excitación aplicada al electrodo de accionamiento. Entonces, la resonancia paramétrica ocurre cuando se modula el parámetro de rigidez 'efectiva' en el sistema $\kappa - K(t)$ en

la ecuación (5.1) asegurando que la frecuencia de excitación ω se relaciona a la frecuencia natural ω_{α} de la vibración del modo actuado por la condición

$$\omega \approx 2\omega_{\alpha}/l, \ l = 1, 2, 3 \dots \tag{5.4}$$

y asegurando que la amplitud de excitación η sea mayor o igual que el umbral de amplitud definido por la frontera de estabilidad. Cuando l = 1 en (5.4) se obtiene la resonancia paramétrica simple.

Se asume que la solución del sistema (5.1) es de la forma

$$x(t) = e^{\rho} \left[A \cos(\omega t/2) + B \sin(\omega t/2) \right], \qquad (5.5)$$

en donde ω es la frecuencia de la excitación paramétrica y ρ es el exponente característico a ser determinado; A y B se determinan por las condiciones iniciales. La suposición de (5.5) es posible gracias a la Teoría de Floquet y a la técnica utilizada en [62].⁴

Sustituyendo (5.5) en (5.1) y aplicando el método de balance armónico comparando los coeficientes con frecuencia $\omega/2$ se obtiene

$$e^{\rho} \left(\rho^2 M_1 + \rho M_2 + M_3\right) Jr = 0, \tag{5.6}$$

en donde

$$M_{1} = I_{4}$$

$$M_{2} = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{\alpha} & \omega \\ -\omega & 2\xi\omega_{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$M_{3} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = \omega_{\alpha}^{2} - \omega^{2}/4 - (D/2) \left(V_{dc}^{2}\pi + \eta^{2}S\right)$$

$$m_{12} = \xi\omega_{\alpha}\omega + DSV_{dc}\eta$$

$$m_{21} = -\xi\omega_{\alpha}\omega + DSV_{dc}\eta$$

$$m_{22} = m_{11}$$

$$J_{r} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$D = \varepsilon_{0}ad/mh_{0}^{3}$$

$$S = \pi/16 + 1/\left(4\sqrt{2}\right)$$

Mediante la transformación $J_r = \rho R$ se obtiene

$$(Z - \rho I_4)L = 0, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & M_1 \\ -M_3 & -M_2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} J_r \\ R \end{bmatrix},$$

el problema estándar de eigenvalores en ρ .

La combinación de excitación paramétrica y una señal armónica forzante, hacen posible la amplificación de los modos del sistema y/o de la respuesta a la velocidad angular del giroscopio de anillo con el objetivo de mejorar algunos indicadores de rendimiento tales como el factor de escala⁵ (o sensibilidad) y el rendimiento señal-ruido del giroscopio.

⁴Para determinar la estabilidad de la resonancia paramétrica simple, l = 1 en (5.4), se asume una solución periódica con solo dos términos en la forma de una serie de Fourier truncada y entonces se usa el método de balance armónico para obtener la relación entre la frecuencia de la excitación paramétrica y la amplitud de la excitación paramétrica.

⁵El factor de escala es definido como la cantidad de cambio en la señal de salida por unidad de cambio del rango de rotación, es expresado en $V/(^{\circ}/S)$ (volts por grado por segundo).

Notación de esta sección

- $ho \, {
 m densidad}$
- a radio del anillo
- Aárea de sección transversal
- Emodulo elástico del silicon
- $I_z \ bd^3/12$
- d grosor del anillo
- ε_0 perme
abilidad al vacío
- h_0 hueco capacitivo entre el anillo y cada electrodo
- $U_k(t)$ contribución de voltaje en el electrodo 'k'
 - 2α longitud de arco de los electrodos
 - δ_k posición angular del electrodo 'k'
 - pnúmero de electrodos
 - σ posición angular con respecto al modo
 - \boldsymbol{m} masa modal generalizada
 - ξ razón de amortiguamiento.

5.0.2. Control de oscilaciones

Considere la expresión

$$\ddot{x} + \omega^2 \left[1 + \varepsilon \cos(2\omega t + \varphi) \right] x = f(t),$$

en donde f(t) es suficientemente suave y es evaluada en los reales positivos.

Si hacemos $\alpha = \omega^2$ y $\beta = \omega^2 \varepsilon$ recuperamos nuestra ecuación de Mathieu no homogénea con una ligera variación indicada por la incorporación del ángulo φ .

Por medio del cambio de los valores de ε y φ sobre un número finito de intervalos de tiempo, es posible controlar la amplitud de las oscilaciones de las soluciones del sistema

$$\ddot{x} + \omega^2 \left[1 + \varepsilon \cos(2\omega t + \varphi)\right] x = 0, \tag{5.7}$$

para que se aproximen a la función forzante f(t), ver [63].

El control de oscilaciones considera las siguientes suposiciones: $f(t) \in \mathcal{C}^1$ para todo $t \in [0, T]$ en donde T es el tiempo final del control,

$$\left|\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\log f(t)\right| \ll 1 \tag{5.8}$$

у

$$\left|\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}f(t)\right| \ll 1 \tag{5.9}$$

El algoritmo que describe cómo las soluciones de (5.7) pueden ser controladas variando los valores de ε y φ sobre intervalos de tiempo de longitud H, se basa en la resonancia paramétrica y puede ser consultado en [63].

El objetivo es conducir a una solución x(t) que satisfaga $\sqrt{x(t)^2 + \dot{x}(t)^2/\omega^2} \approx f(t)$ para todo $t \in [0,T]$. Pare este fin, se aproxima f(t) por una función exponencial a pedazos, en donde cada pedazo tiene una anchura $H := M/\omega$, M es una constante.

La condición (5.9) asegura que f(t) cambia muy poco en un intervalo de longitud H, por lo tanto se puede aproximar correctamente por una función lineal a pedazos, en donde cada pedazo tiene una anchura H.

De la condición (5.8) se tiene que

$$\left|\frac{\log f(t+H) - \log f(t)}{\omega H}\right| \ll 1$$

es decir, si $f(t+H)/f(t) = \exp(\varepsilon \omega H/4)$, entonces la elección de φ (ver corolario 15, en [Tao2016]) causa un decremento en la amplitud de la oscilación de $\approx f(nH)$ en el paso $n a \approx f((n+1)H)$ en el paso n+1 (o un incremento por razones similares). Más aún, debido a que $\varepsilon \omega H/4 = \varepsilon M/4 \ll 1$, la envolvente de $f(nH) \exp(\varepsilon \omega (\tau - nH)/4), \tau \in [nH, (n+1)H]$ es cercana a una aproximación lineal a pedazos de $f(\tau)$. El algoritmo garantiza que el error de aproximación en un paso anterior no afectará al error actual.

Las condiciones (5.8) y (5.9) se satisfacen si se escoge ω suficientemente grande y $f(t) \in C^1$. Esto se debe a el Teorema de Weierstrass y la compacidad del intervalo [0, T]. En otras palabras, siempre que la función deseada f(t) sea diferenciable, esta se puede aproximar por la envolvente de las oscilaciones de muy altas frecuencias.

5.0.3. Circuitos RLC cosechadores de energía

Un ejemplo de dispositivos cosechadores de energía son los circuitos RLC acoplados parametricalmente al campo electromagnético de la tierra del cual, mediante resonancia paramétrica, se extrae energía contenida en oscilaciones muy pequeñas (milivolts). $n \operatorname{RLC} (n \in \mathbb{Z}_+)$ circuitos acoplados apropiadamente a través de sus inductancias o capacitancias pueden extraer energía si la resistencia de cada circuito es menor que $n\kappa$, en donde κ es un umbral proporcional al campo electromagnético⁶, esto hecho se demuestra en [Molei2016].

El efecto de oscilaciones periódicas sobre el capacitor (o inductor) en un circuito RLC se puede describir por la ecuación $\ddot{x} + [\alpha + \beta p(t)] x = 0$, en donde $\alpha = \tilde{C}$ para alguna \tilde{C} , $\beta = -\tilde{C}\eta$, $\eta \ll 1$ y $p(t) = \cos(2\omega t)$. Si $\omega = \omega_0$, ω_0 es la frecuencia natural, y $2R\tilde{C} < \eta/\omega$, entonces la energía introducida en el circuito mediante resonancia paramétrica sobrepasa la disipación que la resistencia R produce y la energía almacenada crece exponencialmente haciendo posible la extracción de energía. Por ejemplo, la ionosfera de la tierra puede verse como un dieléctrico con frecuencias específicas de resonancia, esta capa produce oscilaciones pequeñas de las mismas frecuencias en el campo electromagnético del ambiente, estas oscilaciones podrían resultar en variaciones periódicas de los parámetros del circuito. Por lo tanto, la cosecha de energía es factible si de alguna manera la frecuencia natural del circuito es sintonizada en valores apropiados para inducir resonancia paramétrica.

Acoplamiento de los circuitos RLC

La Fig. (5.2) ilustra la manera en que *n* circuitos RLC se acoplan a través de un supercondensador cuya estructura es muy parecida a una película o rollo fotográfico, en donde sus capas conductivas (electrodos) y sus capas dieléctricas (aire) se enrollan alternadamente, generando una fuerza electromotriz que depende de la suma de las corrientes en todos los circuitos, que a su vez permanecen independientes. Debido a la electrostricción⁷ el campo eléctrico del ambiente introduce una pequeña variación periódica en las placas conductoras del supercondensador, las cuales se estirarán o comprimirán de acuerdo al valor del campo lo que se traduce como un cambio en la capacitancia del circuito. Asumiendo simetría con respecto a permutaciones en los electrodos del

 $^{^{6}}$ Esto representa un problema en la implementación, debido a que la amplitud de las fluctuaciones paramétricas inducidas suele ser muy pequeña para compensar el efecto disipativo de la resistencia, es necesario acoplar un número demasiado grande de circuitos para poder extraer energía.

⁷La electrostricción es una propiedad de los materiales dieléctricos que consiste en su deformación bajo la influencia de un campo eléctrico.



Figura 5.2: Dos circuitos RLC acoplados. En la parte derecha se muestra la estructura del supercondensador; los dieléctricos entre cada placa no se muestran en la imagen.

supercondensador, la diferencia de voltage, V, a través de este satisface

$$C(t)\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} I_i,$$
(5.10)

Además

$$C_i \frac{dV_{C,i}}{dt} = I_i, \qquad L_i \frac{I_i}{dt} = V_{L,i}, \qquad R_i I_i = V_{R.i},$$

en donde $C(t) = \tilde{C} [1 - \eta \cos(2\omega t)]$ para algún $\eta \ll 1$; $I_i, V_{C,i}, V_{L,i}, V_{R,i}$ son la corriente, el voltaje através del capacitor, del inductor y del resistor del *i*-ésimo sub-circuito, respectivamente.

Aplicando la segunda ley de Kirchoff $V + V_{C,i} + V_{L,i} + V_{R,i} = 0$ se tiene

$$\frac{1}{C(t)} = \sum_{i=1}^{n} I_i + \frac{1}{C} = I_i + L_i \frac{d^2 I_i}{dt^2} + R_i \frac{I_i}{dt} = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Este modelo es idealizado, asume que las fluctuaciones electromagnéticas son sostenidas, bajo esta consideración se escogen η y ω .

Super resonancia paramétrica

Por simplicidad se consideran sub-circuitos idénticos, esto es, $C_i = C$, $L_i = L$ y $R_i = R$. Sea $\varepsilon = \eta / (L\tilde{C})$, por tanto, $1/(LC(t)) = 1/(L\tilde{C}) + \varepsilon \cos(2\omega t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, y sea el vector de estados $x = [I_1, \dot{I}_1, I_2, \dot{I}_2, \dots, I_n, \dot{I}_n]$, entonces el sistema se describe como,

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon P(t)x + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2}\right), \qquad (5.11)$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} B & D & \dots & D \\ D & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & D \\ D & \dots & D & B \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} Q & Q & \dots & Q \\ Q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q \\ Q & \dots & Q & Q \end{bmatrix};$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/(LC) - 1/(L\tilde{C}) & -L/R \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/(L\tilde{C}) & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos(2\omega t) & 0 \end{bmatrix}$$

En [63], Tao y Owhadi demostraron usando la técnica de homogenización temporal de EDO's⁸ lineales que la solución del sistema crece exponencialmente si se satisface que $\omega = \sqrt{1/(LC) + n/(L\tilde{C}) - R^2/(4L^2)}$ y además $\varepsilon \frac{n}{\omega} > 2\frac{R}{L}$, es decir, $\eta \frac{n}{\tilde{C}\omega} > 2R$. La cual se satisface cuando el número de circuitos acoplados n es suficientemente grande.

8 Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Conclusiones

- Se obtuvo por primera vez en el diagrama de Ince-Strutt: resonancia paramétrica y resonancia lineal.
- Si existe amortiguamiento, desaparece la resonancia lineal.
- Se comprobó que aparecen lineas de resonancia kT-periódicas, en donde k no necesariamente es entero, puede ser cualquier número real.
- Para sistemas de n grados de libertad sin amortiguamiento, en el diagrama de Ince-Strutt aparece simultáneamente resonancia paramétrica y resonancia lineal; esta última sólo con cada uno de los subsistemas.

Trabajo futuro

• Sea el sistema

$$\dot{x} = A(t)x \quad A(t) \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \tag{7.1}$$

siendo A la matriz de estados relacionada a la ecuación de Hill de dos grados de libertad. Se desea encontrar una transformación T tal que convierta el sistema

$$A = \begin{bmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{bmatrix}$$

 $\mathbf{e}\mathbf{n}$

$$B = \begin{bmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ 0 & B_3(t) \end{bmatrix}$$

de tal modo que el sistema (7.1) quede desacoplado, es decir,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

de esta forma el problema se puede resolver directamente.

Se conjetura que el elemento B_3 está asociado a las lenguas principales de un sub sistema, B_1 a las lenguas principales del segundo sub sistema y B_2 a las lenguas de combinación.

• Por otra parte, algunos problemas que quedan pendientes son:

En un grado de libertad

$$\ddot{x} + \left[\alpha + \beta q(t)\right] x = f(t) \tag{7.2}$$

- a) Analizar la ecuación cuando q(t) es quasi o almost periódica.
- b) $q(t) \neq f(t)$ quasi o almost periódicas.

En dos grados de libertad

Sea,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -\alpha A - \beta Bq(t) & 0 \end{bmatrix} x,$$
(7.3)

la representación en variables de estados.

- a) Estudiar el sistema (7.3) cuando la matriz B no es simétrica.
- b) q(t) es quasi o almost periódica.
- c) La dimensión del sistema (7.3) es impar.
Apéndice

8.1. Modelado del péndulo de Kapitsa forzado

Considere el péndulo mostrado en la Fig. 4.5. La barra de longitud l se considera rígida y sin masa, la masa m se supone puntual, g es la constante gravitacional, φ es el ángulo entre la barra y el eje x, q(t) es la excitación paramétrica y f(t) es una fuerza periódica externa que actúa directamente sobre la masa.

Por motivos prácticos evitaremos escribir la dependencia del tiempo en las subsecuentes ecuaciones. La posición de la masa y su velocidad estan dadas por

$$\begin{aligned} x &= l\cos(\varphi), \qquad y = l\sin(\varphi) + q \qquad \mathbf{y} \\ \dot{x} &= -l\sin(\varphi)\dot{\varphi}, \quad \dot{y} = l\cos(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{q} \end{aligned}$$

respectivamente. Calculando la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ (v es la velocidad) y la energía potencial U = mgh (h es la altura) se obtiene:

$$\begin{split} K &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\cos(\varphi)\dot{\varphi}\dot{q} + \dot{q}^2) \qquad \text{y} \\ U &= mg(l\sin(\varphi) - q). \end{split}$$

La dinámica del sistema debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange, es decir,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

en donde

$$L = K + U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + ml\cos(\varphi)\dot{\varphi}\dot{q} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgq + mgl\sin(\varphi)$$

es el Lagrangiano.

Derivando y reacomodando términos se tiene que $\ddot{\varphi} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{\ddot{q}}{l}\right)\cos(\varphi) = 0$, ahora linealizamos alrededor del punto de equilibrio superior para obtener

$$\ddot{\varphi} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{\ddot{q}}{l}\right)\varphi = 0,$$

que representa la ecuación de Mathieu cuando $q = A \cos(\omega t)$, es decir,

$$\ddot{\varphi} + [\alpha \omega^2 + \beta \omega^2 \cos(\omega t)]\varphi = 0$$

en donde $\alpha = -\frac{g}{l\omega^2}$ y $\beta = -\frac{A}{l}$. El siguiente cambio de variables $\omega t = \tau \left(\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\omega^2 d^2}{d\tau^2}\right)$, determina la ecuación de Mathieu normalizada, $\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + [\alpha + \beta \cos(\tau)]\varphi = 0.$ Cuando al sistema se le aplica una fuerza externa, como la que se muestra en la Fig. 4.5,

representada por f(t), entonces tenemos la ecuación de Mathieu no homogénea (o forzada) denotada por:

$$\ddot{\varphi} + [\alpha + \beta \cos(t)]\varphi = f(t).$$

Bibliografía

- E. Mathieu. Memoire sur le Mouvement Vibratoire d'une Membrane de Forme Elliptique. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, volume 13, pages 137–203, 1868.
- [2] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. In Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, volume 12, pages 47–88, 1883.
- [3] G. W. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica*, 8(1):1–36, 1886.
- [4] J. W. Strutt. On the Maintenance of Vibrations by Forces of Double Frequency, and on the Propagation of Waves Through a Medium Endowed with a Periodic Structure. *Philosophical Magazine*, 24(5):145–159, 1887.
- [5] A. M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. International Journal of Control, 55(3):531-773, 1992. Also Taylor and Francis (1992) from the original PhD Thesis submitted in Kharkov, 1882.
- [6] H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Tome 3, Paris, 1899.
- [7] B. G. Pittel and V. A. Yakubovich. A mathematical analysis of the stability of suspension bridge based on the example of the Tacoma bridge (Russian). Vestnik Leningrad Univ., 24:80– 20, 1969.
- [8] M. J. O. Strutt Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hillscher EigenwertLyapunov like equationaufgaben 2. Ordnung. Math. Z., 49:593-643, 1937.
- [9] S. Lubkin and J. J. Stoker. Stability of columns and strings under periodically varying forces. Quarterly of Applied Mathematics, 1:215–236, 1943.
- [10] N. W. McLachlan. Theory of Application of Mathieu Functions, Oxford university press, Oxford, 1947.
- [11] R. Lawrence. Applications of the Mathieu equation. American Journal of Physics, 64(1):39–44, 1996.
- [12] V. I. Arnold. Remarks on the perturbation theory for problems of Mathieu type. Russian Mathematical Surveys, 38(4):215-233, 1983.

- [13] E. Meissner. Ueber Schüttelerscheinungen in Systemen periodisch veränderlicher Elastizität. Bauztg, 72:95–98, 1918. (In German).
- [14] A. P. Seyranian and A. A. Mailybaev. Multiparameter stability theory with mechanical applications, volume 13, World Scientific, Singapore, 2003.
- [15] J. A. Richards. Analysis of periodically time-varying systems, Springer, New York, 1983.
- [16] W. Magnus and S. Winkler. *Hill's Equation*, Interscience-John Wiley, New York, 1966.
- [17] K. R. Meyer. Jacobi Elliptic Functions from a Dynamical Systems Point of View. Mathematical Association of America, 108(8):729–737, 2001.
- [18] E. T. Whittaker and G. N. Whatson. A Course of Modern Analysis, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
- [19] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi. *Higher transcendental functions*, volume 3, Bateman Manuscript Project, New York, 1955.
- [20] H.J.W. Müller-Kirsten. Introduction to Quantum Mechanics Schrödinger Equation and Path Integral, 2nd ed., World Scientific, New Jersey, London, 2012.
- [21] J. Slane and S. Tragesser. Analysis of Periodic Nonautonomous Inhomogeneous Systems. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 11(2):183–198, 2011.
- [22] D. Younesian, E. Esmailzadeh and R. Sedaghati. Asymptotic solutions and stability analysis for generalized non-homogeneous Mathieu equation. *Communications in Nonlinear Science* and Nedumerical Simulation, 12:58–71, 2007.
- [23] D. Shadman and B. Mehri. A non-homogeneous Hill's equation. Applied Mathematics and Computation, 167:68–75, 2005.
- [24] M. K. Kwong and J. S. W. Wong. On the oscillation of Hill's equations under periodic forcing. Journal of Mathematical and Applications, 320:37–55, 2006.
- [25] A. Rodríguez and J. Collado. On stability of periodic solutions in non-homogeneous Hill's equation. Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, 2015.
- [26] G. N. Jazar. Stability chart of parametric vibrating systems using energy-rate method. International Journal of Non-Linear Mechanics, 39:1319–1331, 2004.
- [27] R. W. Brockett. Finite Dimensional Linear Systems, John Wiley and Sons, New York, 1969.
- [28] C. T. Chen. Linear System Theory and Design, 3rd ed., Oxford University Press, New York Oxford, 1999.
- [29] L. Y. Adrianova. Introduction to Linear Systems of Differential Equations, American Mathematical Society, 1995.
- [30] F. R. Gantmacher. The Theory of Matrices volume 2, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.
- [31] H. K. Khalil. Nonlinear Systems, 3rd ed., Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [32] D. W. Jordan and P. Smith. Nonlinear Ordinary Differential Equations, 4th ed. Oxford University Press, USA, 2007.

- [33] V. I. Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd ed., Springer-Verlag, translated by K. Vogtmann and A. Weinstein, New York, Berlin etc. 1989.
- [34] K. Meyer, G.Hall and D. Offin. Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem, 2nd ed., Springer, USA, 2008.
- [35] D. Kalman. Uncommon Mathematical Excursions Polynomia and Related Realms, 2nd ed., Dolciani Mathematical Expositions, USA, 2009.
- [36] C. Hayashi. Forced oscillations in non-linear systems, Nippon Printing and Publishing Company, Japan, 1953.
- [37] H. Hochstadt. Function theoretic properties of the discriminant of Hill's equation. Mathematische Zeitschrift, 82(3):237-242, 1963.
- [38] V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients volume 1 and volume 2, Halsted Press, Jerusalen, 1975.
- [39] M. G. Krein. Fundamental aspects of the theory of zones of stability of a canonical system of linear differential equations with periodic coefficients. To the Memory of A.A. Andronov, [in Russian]. *Izd. Akad. Nauk SSSR*, Moscow, 414–498. English Translation: *Amer.Math. Soc.* Transl. (2), 120, 1–70, 1955.
- [40] I. M. Gelfand and V. B. Lidskii. On the structure of the regions of stability of linear canonical systems of differential equations with periodic coefficients. *Amer. Math. Soc.*, Transl. (2), 8, 143–181, 1958.
- [41] V. A. Chulaevsky. Almost periodic operators and related nonlinear integrable systems, Manchester University Press, Manchester and New York, 1989.
- [42] R. A. Meyers. Mathematics of Complexity and Dynamical Systems, Springer, New York, 2009.
- [43] C. S. Hsu. On a Restricted Class of Coupled Hill's Equations and Some Applications. Journal of Applied Mechanics., 28(4):551–556, 1961.
- [44] J. Hansen. Stability diagrams for coupled Mathieu-equations. Ingenieur-Archiv., 55(6):463– 473, 1985.
- [45] G. M. Mahmoud. Stability regions for coupled Hill's equations. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications., 242(1-2):239-249, 1997.
- [46] A. Vitt and G. Gorelik. Oscillations of an Elastic Pendulum as an Example of the Oscillations of Two Parametrically Coupled Linear Systems. Met Éireann, The Irish Metereological Service, 1999. Traslated from the Russian: Zhurnal Tekhnicheskoy Fisiki., 3(2-3):294–307, 1933.
- [47] H. Landa, M. Drewsen, B. Reznik and A. Retzker. Classical and quantum modes of coupled Mathieu equations. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical., 45, 455305 (20pp), 2012.
- [48] H. Razavi, R.Gupta, F. C. Adams and A. M. Bloch. Stability of a Class of Coupled Hill's Equations and the Lorentz Oscillator Model. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems., 15(2):1104–1123, 2016.
- [49] J. E. Howard and R.S. MacKay. Linear stability of symplectic maps. Journal of mathematical physics., 28(5):1036-1051, 1987.

- [50] R. Broucke. Stability of periodic orbits in the elliptic, restricted three-body problem. AIAA Journal., 7(6):1003-1009, 1969.
- [51] C. Corduneanu. Almost Periodic Oscillations and Waves, Springer, New York, 2009.
- [52] E. A.Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*, Tata McGraw Hill, New Delhi, 1955.
- [53] M. S. P. Eastham. The spectral theory of periodic differential equations, Scottish Academic Press, London, 1973.
- [54] H. Poincaré. Sur les Déterminants d'Ordre Infini. Bull. SOC. Math., France 14:77–90, 1886.
- [55] R. Denk. Hill's Equation Systems and Infinite Determinants. Mathematische Nachrichten, 175:47–60, 1995.
- [56] A. H. Nayfeh. Introduction to perturbation techniques, John Wiley and Sons, Inc., New York, Chichester, etc., 1993.
- [57] H. Hochstadt. A stability criterion for Hill's equation. American Mathematical Society, 13(4):601-603, 1962.
- [58] P. L. Kapitsa. Dynamical stability of the pendulum when its point of suspension vibrates. Sov. Phys JETP (in Russian), 21(5):588–597, 1951. English Translation: In Collected works of P. L. Kapitsa 2, 1965.
- [59] A. Rodríguez and J. Collado. Periodically forced Kapitza's pendulum. American Control Conference, 2790–2794, 2016.
- [60] K. M. Harish, B. J. Gallacher, J. S. Burdess and J. A. Neasham. Simple parametric resonance in an electrostatically actuated microelectromechanical gyroscope: theory and experiment. *American Mathematical Society*, 222(C):43–52, 2008.
- [61] B. J. Gallacher, J. Hedley, J. S. Burdess, A. J. Harish, A. Richard and D. O. King. Electrostatic correction of structural imperfections present in a microring gyroscope. J. Microelectromech Syst., 14(2):221–234, 2005.
- [62] W. Szemplinska-Stupnicka. The generalized harmonic balance method for determining the combination resonance in the parametric dynamic systems. J. Sound Vibr., 58(3):347–361, 1978.
- [63] M. Tao and H. Owhadi. Temporal Homogenization of Linear ODEs, with Applications to Parametric Super-Resonance and Energy Harvest. Arch. Rational Mech. Anal., 220:261–296, 2016.
- [64] E. I. Butikov. Simulations of Oscillatory Systems, CRC Press, New York, 2015.