



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco  
Departamento de Control Automático

# Ecuación de Hill Discreta.

Tesis que presenta

M. en C. José Guillermo Rodríguez Servín

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

En la Especialidad de

Control Automático

Director de la tesis: Dr. Joaquin Collado M.

# Índice general

Índice general	I
Resumen	III
Agradecimientos	IV
1. Introduccion	1
2. Preliminares	5
2.1. Teoría de Floquet. . . . .	5
2.2. Sistemas Hamiltonianos . . . . .	8
2.3. Ecuacion de Hill: caso en tiempo continuo. . . . .	11
2.3.1. Ecuación de Hill con retardo. . . . .	17
2.4. Metodos de discretizacion. . . . .	19
2.5. Soluciones de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes.	20
3. Resultados principales.	23
3.1. Discretizacion de sistemas hamiltonianos lineales. . . . .	24
3.1.1. Procedimiento de Rasvan. . . . .	24
3.1.2. Comparación de métodos de discretización. . . . .	25
3.1.3. Ejemplos. . . . .	28
3.2. Ecuacion de Hill discretizada. . . . .	32
3.2.1. Sin retardo. . . . .	32
3.2.2. Con retardo. . . . .	34
3.2.3. Ejemplos. . . . .	36
3.3. Ecuacion de Hill discreta. . . . .	40
3.3.1. Obtención de la ecuacion de Hill discreta . . . . .	40

3.3.2. Caracterización. . . . .	42
3.4. Computacion paralela . . . . .	51
3.5. Trabajo futuro/Sistemas no conservativos. . . . .	56
4. Conclusiones	59
Publicaciones	60
Bibliografía	61

# Resumen

En este trabajo se estudia la ecuación de Hill discreta, partiendo desde la discretización de la ecuación de Hill en tiempo continuo y los métodos válidos de discretización, hasta la obtención de la ecuación de Hill discreta. Se caracteriza la ecuación de Hill, se obtienen por primera vez gráficos de las lenguas de Arnold para la ecuación de Hill discreta y se comparan las propiedades de la ecuación de Hill discreta con su equivalente en tiempo continuo.

# Agradecimientos

Quiero agradecer al CONACYT por la beca otorgada, sin este apoyo no me hubiera sido posible continuar mis estudios.

Quiero agradecer a las Bibliotecas del CINVESTAV por su extenso y muy diverso catalogo de títulos disponibles para los estudiantes y profesores.

Quiero agradecer al Dr. Joaquín Collado, por su apoyo, sus comentarios y consejos, durante el trabajo de tesis.

Quiero agradecer a mi Esposa e hijos por tenerme paciencia y comprenderme por el tiempo que no les pude dedicar durante el doctorado y por el apoyo incondicional en los momentos difíciles.

Finalmente quiero agradecer a mi Madre por su apoyo durante toda mi formación.

# Capítulo 1

## Introducción

La resonancia paramétrica es un fenómeno que ocurre, cuando a un sistema oscilatorio se le varia periódicamente un parámetro, a esta variación se le llama excitación paramétrica, dependiendo de la amplitud y la frecuencia de la excitación, el sistema original se puede volver inestable o estable. Algunos ejemplos de resonancia paramétrica son:

- a) El espectrómetro de masas cuadrupolar, al ionizar una muestra de materia y variando la amplitud y la frecuencia de una corriente eléctrica que pasa a través de los polos, se deja pasar un átomo de masa y carga específica y atrapando a los demás, midiendo así las concentraciones de cada elemento.
- b) El péndulo de Kapitza es un péndulo invertido que mediante una excitación periódica en el punto de suspensión se puede estabilizar en su punto de equilibrio inestable.
- c) El columpio es básicamente un péndulo en la cual variando su centro de masa de manera periódica se produce inestabilidad provocando que se balancee cada vez más.
- d) El puente de Tacoma se inauguró en julio de 1940 siendo el tercer puente colgante más largo de Estados Unidos de América, sin embargo tan solo 4 meses después el puente colapsó debido a la resonancia entre una ráfaga de viento y el coeficiente de elasticidad del puente, provocando una oscilación inestable.

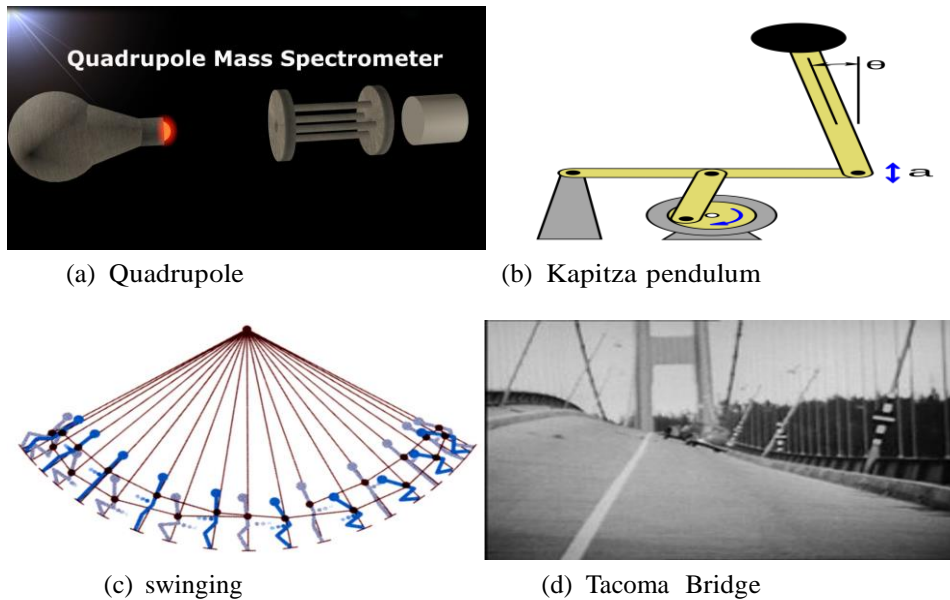


Figura 1.1: Ejemplos de resonancia paramétrica.

Estos fenómenos se pueden modelar con la ecuación de Hill  $\ddot{y} + (\alpha + \beta p(t))y(t) = 0$  donde  $p(t+T) = p(t)$  es una función periódica, la ecuación de Hill fue presentada en 1877 por George W. Hill en su trabajo “On the part of the motion of the lunar perigee”. Es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con una función periódica, usada para describir las variaciones de la órbita lunar, coincidiendo muy bien con la información disponible en la época, e inmediatamente ganó difusión. En el lapso entre que Hill obtuvo sus resultados y en que fue publicado, el teorema de Floquet fue publicado [16].

Sin embargo, ningún estudio de la ecuación de Hill se basó en los resultados de Floquet, hasta que en 1912 Hamel encontró que para alguna  $\beta$  suficientemente pequeña existe un  $\alpha_0$  tal que para todo  $\alpha \leq \alpha_0$  todas las soluciones de la ecuación de Hill son no oscilatorias y oscilatorias si  $\alpha > \alpha_0$  [33][39].

En 1928, Van der Pol y M. J. Strutt [40] publicaron las primeras lenguas de Arnold<sup>1</sup>, afirmando que las lenguas correspondían a la ecuación de Mathieu ( $p(t) = \cos(t)$ ), pero en realidad correspondían a las lenguas de Arnold de la ecuación de Meissner ( $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$ ).

Alrededor de 1940 la “era romántica” de la ecuación de Hill terminó. Desde finales de 1940 y hasta los 1960, dos académicos rusos Krein y Yakubovich, establecieron

<sup>1</sup>Aunque el nombre de Lenguas de Arnold fue usado hasta [6]

los fundamentos de los Hamiltonianos lineales con coeficientes periodicos [28] y [43]. Otras contribuciones importantes fueron hechas por Gelfand-Lidskii [19], Starzhinskii [37], Bolotin [9], Atkinson [7] y Eastham [15]; pero sobretodo, fue Lyapunov mismo, quien contribuyó aproximadamente con la mitad de su tesis doctoral “The problem of stability of Linear Periodic Systems” [29].

La teoría de Floquet nos da una factorización de la matriz de transición de estados, de sistemas lineales con coeficientes periodicos [26] [32], aún mas nos da herramientas para determinar la estabilidad de dicho sistema en términos de la matriz de Monodromía, es decir, La estabilidad del sistema está dada en términos de su matriz de transición de estados en un tiempo  $T$ , sin embargo en la mayoría de los casos la matriz de Monodromía no se puede obtener en forma cerrada, es por esto que existen varios métodos para aproximarla [1][14].

En la práctica cuando estamos interesados en calcular la matriz de Monodromía, el procedimiento normal es integrar el sistema durante un período y calcular la matriz de Monodromía, normalmente por algún método de integración numérica pero aún considerando al sistema como uno de tiempo continuo [9][25][42].

La ecuación de Hill sin disipación es un sistema Hamiltoniano y como tal nos interesa la discretización de sistemas Hamiltonianos sin embargo, al discretizar un sistema Hamiltoniano en tiempo continuo no todos los métodos de discretización nos dan como resultado un sistema Hamiltoniano discreto, contrario a lo que uno espera. Algunos autores no mencionan [3], [21], [41] o no dan mucha importancia a los métodos de discretización usados [4], o trabajan con sistemas Hamiltonianos ya discretos. Rasvan [34] usa el método de Euler para discretizar un sistema Hamiltoniano en tiempo continuo sin embargo el usa forward Euler para la ecuación de movimiento y backward Euler para la ecuación del momentum, no obstante esto no se siente natural, nosotros queremos aplicar el mismo método de discretización a todo el sistema.

En este trabajo discretizaremos la ecuación de Hill con y sin retardo mediante métodos de integración, haciendo uso de la técnica de Lifting podemos transformar la ecuación de Hill discretizada de un sistema discreto e invariante<sup>2</sup>, obtendremos su matriz de monodromía, sus condiciones de estabilidad y graficas de las lenguas de Arnold.

---

<sup>2</sup>Si el tiempo de discretización  $h$ , es tal que  $\exists k \in \mathbb{Z}_+ : T = kh$  y posteriormente usando el “Lifting technique”, obtenemos que la ecuación de Hill discretizada nos da un sistema discreto shift-invariant, pero de dimensiones  $2k \times 2k$



También se obtendrá el modelo de la ecuación de Hill discreta a partir de la formulación de Euler-Lagrange discreta, analizaremos la estabilidad paramétrica de la ecuación de Hill discreta y obtendremos las gráficas correspondientes de las lenguas de Arnold, así como algunas de sus propiedades.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se presentarán algunos resultados básicos e importantes relacionados a la ecuación de Hill [30] y la teoría de Floquet [10], así como de sistemas hamiltonianos, métodos de discretización y ecuaciones en diferencias.

### 2.1. Teoría de Floquet.

En esta sección hablaremos sobre la teoría de Floquet y de como nos dá condiciones de estabilidad para sistemas periódicos.

Dado un sistema descrito por una ecuación lineal ordinaria con coeficientes periódicos como

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \quad (2.1)$$

Las soluciones de (2.1) se pueden expresar en términos de la matriz de transición de estados  $\Phi(t, t_0)$ , la cual tiene las siguientes propiedades básicas, ver [10] o [12]:

- a)  $\Phi(t, t) = I_n \forall t \in \mathbb{R}$
- b)  $[\Phi(t, t_0)]^{-1} = \Phi(t_0, t)$
- c)  $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) \forall t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
- d)  $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0)$
- e)  $\forall y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ , la solución de (2.1) es  $y(t) = \Phi(t, t_0)y_0$

Usando estas propiedades, la teoría de Floquet nos dice:

**Teorema 2.1 Teorema de Floquet[2]**

Dado un sistema lineal periodico (2.1), si  $\Phi(t, t_0)$  es una matriz fundamental solucion de (2.1) entonces  $\Phi(t+T, t_0)$  es también una solucion de (2.1). Aún mas, existe una matriz invertible  $Q(t) = Q(t+T)$  con valor inicial  $Q(0) = I$  tal que

$$\Phi(t, t_0) = Q^{-1}(t) e^{B(t-t_0)} Q(t_0) \quad (2.2)$$

donde  $B$  es una matriz constante, no necesariamente real<sup>1</sup>.

Si hacemos  $t_0 = 0$  en (2.2) y por la propiedad a), tenemos  $Q^{-1}(0) = I_n$ , entonces obtenemos la versión de la teoría de Floquet más conocida.

**Corolario 1 (Floquet)** Dado el sistema (2.1), para  $t_0 = 0$  su matriz de transicion de estados satisface:

$$\Phi(t, 0) = Q^{-1}(t) e^{Bt} \quad (2.3)$$

donde  $Q(t+T) = Q(t)$  es una matriz periodica con el mismo período de (2.1) y  $B$  es una matriz constante.

Ahora si evaluamos (2.3) en  $t = T$  y tomando en cuenta que  $Q(T) = I_n$ , obtenemos la siguiente definición.

**Definicion 2.1** La matriz

$$M = \Phi(T, 0) = e^{BT} \quad (2.4)$$

es una matriz particularmente importante y es conocida como la **matriz de monodromía**.

**Observacion 1** La matriz de monodromía definida por (2.4) es dependiente del tiempo inicial  $t_0$ ; pero no su espectro. Es decir, sea  $M_{t_0} = \Phi(T + t_0, t_0)$  usando (2.2) para  $t = T + t_0$ ,  $\Phi(T + t_0, t_0) = Q^{-1}(T + t_0) e^{B(T+t_0)} Q(t_0) = Q^{-1}(t_0) e^{BT} Q(t_0) = Q^{-1}(t_0) M Q(t_0)$ . Esto muestra que  $\Phi(T + t_0, t_0) = M_{t_0}$  y  $M$  son similares y mientras que el uso de la matriz de monodromía se reduzca a su espectro, no hay diferencia en usar  $M$  o  $M_{t_0}$ .

Dos importantes consecuencias de la teoría de Floquet son: Reducibilidad y estabilidad.

<sup>1</sup>Ver Adrianova pp.17 [2], para condiciones necesarias y suficientes para las que una matriz  $S$ , tiene logaritmo real. Aún mas  $S^2$  siempre tiene un logaritmo real.

### Reducibilidad.

Dado el sistema (2.1), si hacemos el siguiente cambio de coordenadas  $\bar{z}(t) = T(t)y(t)$ , donde la matriz cuadrada  $n \times n$   $T(t)$  satisface:

- a)  $T(t)$  es diferenciable e invertible  $\forall t$ .
- b) Las matrices  $T(t)$ ,  $\dot{T}(t)$  y  $T^{-1}(t)$  son todas acotadas.

Entonces la matriz transformación  $T(t)$  es llamada una transformación de Lyapunov<sup>2</sup>.

**Definición 2.2** Un sistema lineal variante en el tiempo (no necesariamente periódico)  $\dot{y} = A(t)y$ , se dice que es “reducible” a un sistema invariante en el tiempo, si existe una transformación de Lyapunov lineal variante en el tiempo  $T(t)$  tal que  $\bar{z}(t) = T(t)y(t)$

$$\dot{\bar{z}} = T^{-1}(t)A(t)T(t) + T^{-1}(t)\dot{T}(t)\bar{z} \quad (2.5)$$

donde  $T^{-1}(t)A(t)T(t) + T^{-1}(t)\dot{T}(t) = R$  una matriz constante.

Cualquier sistema (2.1)  $T$ -periódico es reducible, este resultado es expresado en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2** Dado un sistema  $T$ -periódico  $\dot{y} = A(t)y$  el cambio de coordenadas  $\bar{z}(t) = P^{-1}(t)z(t)$  transforma el sistema en un sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{\bar{z}} = R\bar{z} \quad (2.6)$$

**Observación 2** Resulta que para sistemas lineales periódicos, existe una transformación lineal periódica que transforma el sistema periódico variante en el tiempo (2.1) en un sistema lineal invariante en el tiempo. Desafortunadamente este resultado, no es de mucha utilidad porque para efectuar este cambio de coordenadas necesitamos la solución del sistema (2.1).

### Estabilidad.

Recordemos la definición de estabilidad en el sentido de Lyapunov [29]:

<sup>2</sup>Esta transformación fué introducida por Lyapunov mismo [29].

**Definición 2.3** Un cero de la solución de  $\dot{y} = A(t)y$  es

- a) estable, si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $\|y(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|y(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0$ .
- b) asintóticamente estable si el cero de la solución es estable y  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

En nuestro sistema (2.13)  $\dot{y} = A(t)y$ , para  $t \geq 0$ ,  $t$  se puede expresar como:  $t = kT + \tau$ , donde  $k$  es un entero no-negativo y  $\tau \in [0, T)$ ; la solución de (2.13) para  $t_0 = 0$  y  $y(0) = y_0$  satisface:

$$\begin{aligned} y(t) &= \Phi(t, 0) y_0 \\ &= \Phi(kT + \tau, 0) y_0 \\ &= \Phi(kT + \tau, kT) \Phi(kT, (k-1)T) \Phi((k-1)T, (k-2)T) \cdots \Phi(T, 0) y_0 \\ &= \Phi(\tau, 0) \underbrace{\Phi(T, 0) \Phi(T, 0) \cdots \Phi(T, 0)}_{k \text{ veces}} y_0 \\ &= \Phi(\tau, 0) M^k y_0 \end{aligned}$$

Del último paso, podemos concluir que la ecuación de Hill (2.1) es

- a) estable:  $y(t)$  permanece acotada  $\forall t \geq 0$  si y solo si  $\sigma(M) \subset D_1$ ,  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  y si  $\lambda \in \sigma(M)$  y  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda$  es una raíz simple del polinomio mínimo de  $M$ .
- b) inestable si  $\exists \mu \in \sigma(M) : |\mu| > 1$  o si  $\sigma(M) \subset D_1$ ,  $\exists \mu : |\mu| = 1$ ,  $\mu$  no es una raíz simple del polinomio mínimo de  $M$ .

**Observación 3** Note que ambas propiedades, reducibilidad y estabilidad, para sistemas lineales  $T$ -periódicos pueden obtenerse a partir de la factorización de Floquet (2.3).

## 2.2. Sistemas Hamiltonianos

Dada una función diferenciable  $H(q, p)$ , llamada función hamiltoniana, depende de los vectores  $q$  y  $p$ , satisface las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \\ \dot{p} &= - \frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \end{aligned} \quad (2.7)$$

también llamado sistema hamiltoniano. La función hamiltoniana representa la energía del sistema y para el caso donde la función  $H(q, p)$  no depende explícitamente del tiempo, esta cantidad se mantiene constante a lo largo de las soluciones de (2.7); cuando esta propiedad se cumple el sistema es llamado conservativo. Los sistemas hamiltonianos (2.7) son siempre de orden par, es decir, de orden  $2n$  si  $q, p \in \mathbb{R}^n$ .

Consideremos ahora el caso cuando el sistema hamiltoniano no es conservativo, es decir la función hamiltoniana  $H(t, q, p)$  es una función del tiempo. En lo subsecuente consideraremos solo sistemas hamiltonianos lineales, en este caso la función hamiltoniana es una forma cuadrática, es decir,

$$H(t, q, p) = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}^T H(t) \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

donde  $H(t)$  es una matriz simétrica de  $2n \times 2n$ , en este caso el Sistema hamiltoniano (2.8) puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} H(t) \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

donde  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ . Note que  $J^{-1} = J^T = -J$  y  $J^2 = -I_{2n}$ .

**Definición 2.4 Matriz hamiltoniana [31]**

La matriz  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  es llamada hamiltoniana si

$$A^T J + J A = 0 \tag{2.10}$$

De  $A^T J + J A = 0$ , obtenemos  $A = J^{-1} -A^T J$ , es decir,  $A$  es similar a  $-A^T$  por lo tanto tienen el mismo espectro:

$$\sigma(A) = \sigma(-A^T) = \sigma(-A)$$

Hemos probado una propiedad importante de matrices hamiltonianas constantes, esto es, que su espectro es simétrico con respecto al eje imaginario.

**Teorema 2.3** Sea  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  una matriz hamiltoniana, entonces si  $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow -\lambda \in \sigma(A)$ . Equivalentemente el polinomio característico de una matriz hamiltoniana solo

tienen potencias pares o es un polinomio par.

**Definición 2.5 Matriz simpléctica [28]**

Una matriz  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  es simpléctica si

$$S^T J S = J \tag{2.11}$$

El determinante de una matriz simpléctica es +1, mas aún el conjunto de matrices simplécticas de un orden dado forman un grupo [31]. Una propiedad importante de los matrices simplécticas es que su espectro es simétrico con respecto al círculo unitario, de la definición y del hecho que una matriz simpléctica es siempre invertible, tenemos  $S^T = J S^{-1} J^{-1}$ , es decir,  $\sigma(S^T) = \sigma(S^{-1}) = \sigma(S) \Rightarrow$  si  $\lambda \in \sigma(S)$  entonces  $\lambda^{-1} \in \sigma(S)$ .

**Teorema 2.4** Sea  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  una matriz simpléctica, entonces si  $\lambda \in \sigma(S) \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(S)$ . Equivalentemente, el polinomio característico de una matriz simpléctica es recíproca, es decir,  $p_S(\lambda) = \lambda^{2n} p_S(\lambda^{-1})$

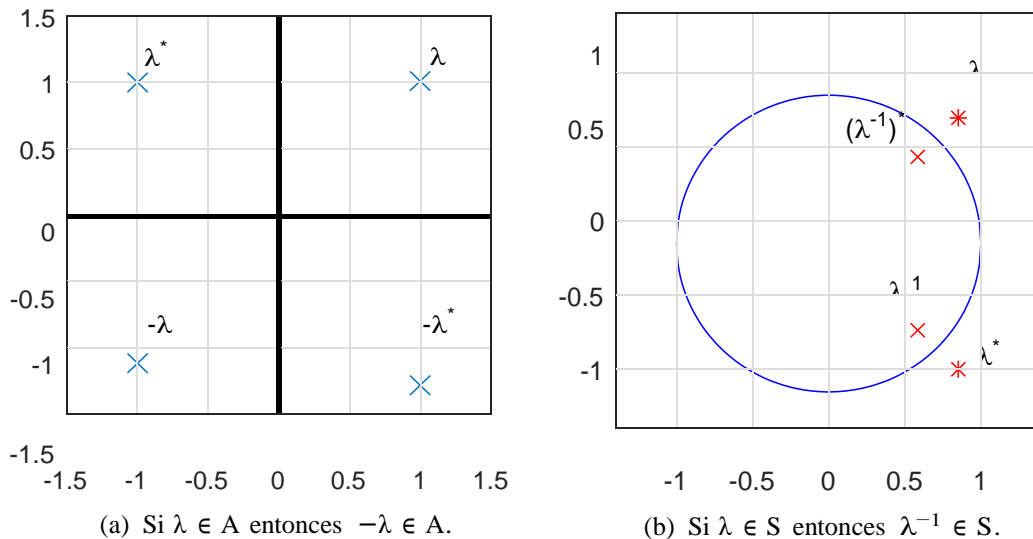


Figura 2.1: Eigenvalores de una matriz hamiltoniana y una matriz simplectica.

La Figura 2.1 muestra graficamente las propiedades de los teoremas 2.3 y 2.4.

**Definición 2.6** Un sistema en tiempo continuo  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  se dice sistema hamiltoniano si y solo si  $A$  es una matriz hamiltoniana [31].

Definición 2.7 Similarmente  $x_{k+1} = Bx_k$  es un sistema discreto hamiltoniano si y solo si B es una matriz simpléctica [5].

Teorema 2.5 [31] Sea I un intervalo en R la matriz fundamental  $\Phi(t, t_0)$  solución de un sistema lineal hamiltoniano

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \text{ es simpléctica } \forall t, t_0 \in I.$$

Observación 4 Un sistema hamiltoniano no puede ser estable asintóticamente, esto por el teorema 2.4 y el teorema 2.5; esta propiedad se cumple para todos los sistemas hamiltonianos, tiempo continuo o tiempo discreto, invariantes en el tiempo o no.

### 2.3. Ecuación de Hill: caso en tiempo continuo.

En esta sección presentamos la ecuación de Hill así como sus principales propiedades y al final mostraremos los diagramas de Ince-Strutt o lenguas de Arnold para mostrar la estabilidad de la ecuación de Hill en términos de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

Considere el siguiente sistema

$$\ddot{z}(t) + (\alpha + \beta p(t))z(t) = 0 \tag{2.12}$$

conocido como la ecuación de Hill, donde  $\alpha, \beta$  son constantes fijas,  $p(t) = p(t + T)$  es una función periódica con período T. El parámetro  $\alpha$  representa el cuadrado de la frecuencia natural para  $\beta = 0$ ; el parámetro  $\beta$  es la amplitud de la excitación paramétrica, y la función periódica  $p(t)$  es llamada la función de excitación.

Definiendo el vector de estado  $y = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}$  podemos reescribir el sistema (2.12) como

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \tag{2.13}$$

" #

donde  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(t)) & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A(t + T) = A(t)$

Recordemos ahora la ecuación de Hill (2.12) reescrita como  $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$ , donde  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(t)) & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A(t + T) = A(t)$

Lema 2.1 La ecuación de Hill (2.13) es un sistema hamiltoniano.

Prueba. De acuerdo con la definición 2.6 solo necesitamos probar que la matriz  $A(t)$  es una matriz hamiltoniana.



$$\begin{aligned}
 A^T(t)J &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(t)) & 0 \end{pmatrix} \\
 JA(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - (\alpha + \beta p(t)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$A^T(t)J + JA(t) = 0$$

**Teorema 2.6** La matriz de monodromía es simpléctica.

**Prueba.** Ya hemos probado que la ecuación de Hill (2.20) es un sistema hamiltoniano, de la definición 2.4 de la matriz de monodromía sabemos que

$$M = \Phi(T, 0) = e^{BT}$$

es una matriz de transición de estados en un intervalo  $[0, T]$ , por lo tanto usando el teorema 2.5, la matriz de monodromía es una matriz simpléctica..

Como consecuencia de este teorema, la ecuación de Hill solo puede ser estable o inestable.

**Definición 2.8** Los eigenvalores de la matriz de monodromía  $M$ , equivalentemente las raíces del polinomio característico  $p_M(\lambda)$ ,

$$p_M(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + 1 \quad (2.14)$$

son llamados multiplicadores de la ecuación de Hill (2.12) o (2.13), denotados por  $\lambda$

**Definición 2.9** Asociado a cada multiplicador  $\lambda$ , existe un número (infinito) de valores llamados exponentes característicos  $\mu$ , relacionados a un multiplicador por  $\lambda = e^{\mu T}$ .

Las raíces de  $p_m(\lambda)$  o de los multiplicadores de (2.12) son

---

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(\mathbf{M}) \pm \sqrt{\text{tr}^2(\mathbf{M}) - 4\det(\mathbf{M})}}{2} \quad (2.15)$$

- Si  $\text{tr}^2(M) < 4$  los multiplicadores son complejos conjugados y su módulo es  $|\lambda_{1,2}|^2 = \frac{\text{tr}^2(M)}{4} + \frac{4-\text{tr}^2(M)}{4} = 1$ . Es decir los dos eigenvalores son distintos y el sistema (2.12) es estable.
- Si  $\text{tr}^2(M) > 4$ , los multiplicadores son reales y recíprocos,  

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr}(M) + \sqrt{\text{tr}^2(M) - 4}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{\text{tr}(M) - \sqrt{\text{tr}^2(M) - 4}}{2}$$
. Note que  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(M)$  y  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2^{-1}$  por lo que si  $\lambda_1 > 1$  o  $\lambda_2 > 1$  (2.12) ser inestable.
- $\text{tr}^2(M) = 4$  los multiplicadores son reales e iguales a  $+1$  si  $\text{tr}(M) = -2$ , o los multiplicadores son iguales a  $-1$  es  $\text{tr}(M) = +2$ . En este caso la ecuacion de Hill si estable si y solo si  $M$  es una matriz diagonal o escalar, de otra manera la ecuacion de Hill (2.12) es inestable.

Los límites entre estabilidad e inestabilidad corresponde al ultimo caso, es decir, cuando  $|\text{tr}(M)| = 2$ . Es claro que  $M$  depende de los parametros  $\alpha, \beta$ . Definiendo [30]  $\varphi(\alpha, \beta)$ ,  $\text{tr}(M)$ , Hochstadt [23] fué el primero en reconocer propiedades importantes de  $\varphi(\alpha, \beta)$ .

**Teorema 2.7 (Hochstadt) [23]** La funcion  $\varphi(\alpha, \beta)$  para cualquier  $\beta$  constante, es una funcion entera de orden  $\frac{1}{2}$ . Las funciones  $\varphi(\alpha, \beta) \pm 2 = 0$  tienen un número infinito de raíces. Para cualquier  $\beta_0$ , y para  $\alpha_0$  suficientemente negativa,  $\varphi(\alpha_0, \beta_0)$  es positiva, por lo tanto al incrementar  $\alpha$  aparece la primera raíz de la ecuacion  $\varphi(\alpha, \beta) - 2 = 0$ , que corresponde a un multiplicador doble en  $+1$ , de aquí aparecen dos raíces (no necesariamente diferentes) en  $-1$ , luego dos raíces en  $+1$  y así indefinidamente.

Debido al teorema 2.7 de Hochstadt, hay dos secuencias infinitas:

$$\begin{aligned} &\lambda_{0,2}, \lambda_{1,2}, \lambda_{2,2}, \lambda_{3,2}, \lambda_{4,2}, \lambda_5, \dots \\ &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

La primera secuencia corresponde a las raíces de  $\varphi(\alpha, \beta) + 2 = 0$  y las segunda secuencia corresponde a  $\varphi(\alpha, \beta) - 2 = 0$ . Mas aún están entrelazadas como:

$$\lambda_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4, \lambda_3, \lambda_4, \bar{\lambda}_5, \bar{\lambda}_6, \dots \quad (2.17)$$

este hecho es ilustrado en la Figura 2.2

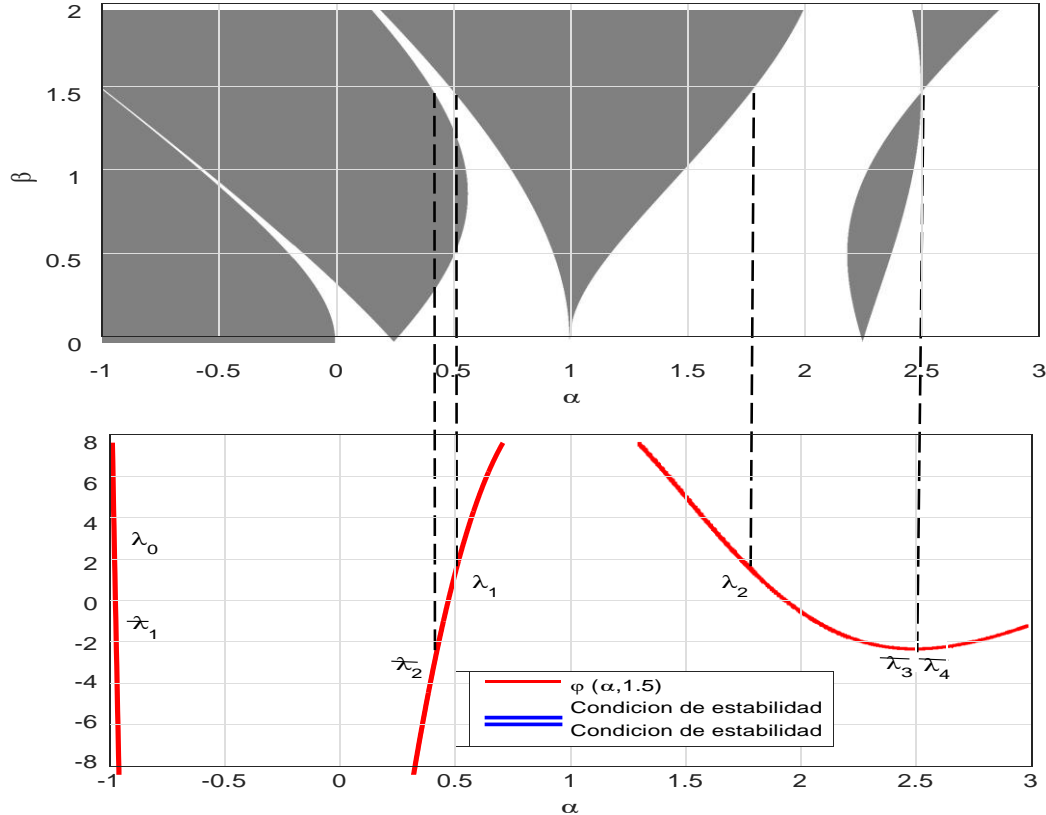


Figura 2.2: Para una  $\beta = 1,5$  constante,  $\varphi(\alpha, 1,5) = \text{tr}(M)$  que est solo en funcion de  $\alpha$ .

Para los valores de  $\alpha$  donde  $|\varphi(\alpha, 1,5)| > 2$  se muestran de color gris y corresponden a las regiones inestables.

Observacion 5 Las regiones inestables en la Figura 2.2 son conocidas como lenguas de Arnold [6], y estan etiquetadas de izquierda a derecha con  $0, 1, 2, 3, \dots$

Note que la frontera de la 0–ma lengua de Arnold tiene una solucion T–periodica dado que el discriminante  $\varphi(\alpha, \beta) - 2 = 0$  tiene una raíz de  $\alpha$  en su superficie, la primera lengua de Arnold tiene solución 2T–periodica, la segunda tiene solucion T–periodica y asi sucesivamente. De tal manera que existe una alternancia entre soluciones T–periodicas y soluciones 2T–periodicas, en las siguientes lenguas de Arnold.

Teorema 2.8 Las lenguas de Arnold asociadas a la ecuacion de Hill (2.12) inician en  $\alpha = \frac{k\pi^2}{T}$ .

Prueba. Consideremos el caso donde  $\beta = 0$  en (2.13), entonces

$$\dot{y} = Ay$$

donde  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ , con la solucion general:

$$y(t) = e^{At} y(0)$$

Si se buscan soluciones periodicas:

$$y(t) = y(t + T) = e^{A(t+T)} y(0 + T) = e^{At} e^{AT} y(0) \Rightarrow e^{AT} = I$$

entonces:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\sqrt{\alpha}it} + e^{-\sqrt{\alpha}it}}{2} & \frac{e^{\sqrt{\alpha}it} - e^{-\sqrt{\alpha}it}}{2\sqrt{\alpha}} \\ -\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \frac{e^{\sqrt{\alpha}it} - e^{-\sqrt{\alpha}it}}{\sqrt{\alpha}} & \frac{e^{\sqrt{\alpha}it} + e^{-\sqrt{\alpha}it}}{2} \end{pmatrix}$$

entonces:

$$e^{AT} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\sqrt{\alpha}iT} + e^{-\sqrt{\alpha}iT}}{2} & \frac{e^{\sqrt{\alpha}iT} - e^{-\sqrt{\alpha}iT}}{2\sqrt{\alpha}} \\ -\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \frac{e^{\sqrt{\alpha}iT} - e^{-\sqrt{\alpha}iT}}{\sqrt{\alpha}} & \frac{e^{\sqrt{\alpha}iT} + e^{-\sqrt{\alpha}iT}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente:

$$e^{AT} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha}T) & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha}T) \\ -\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}T) & \cos(\sqrt{\alpha}T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde:

---

$$\begin{aligned}\cos \sqrt{\alpha T} &= 1 \\ \sqrt{\alpha T} &= k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

$\therefore$ , las lenguas de Arnold de cualquier ecuación de Hill (2.12) inician en:

$$\alpha = \frac{k\pi^2}{T}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

Cuando  $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$  la ecuación de Hill (2.12) es conocida como la ecuación de Meissner, con un período  $T = 2\pi$  los puntos donde nacen las lenguas dado el teorema anterior son  $\alpha: 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \dots$  como se muestran en la Figura 2.3

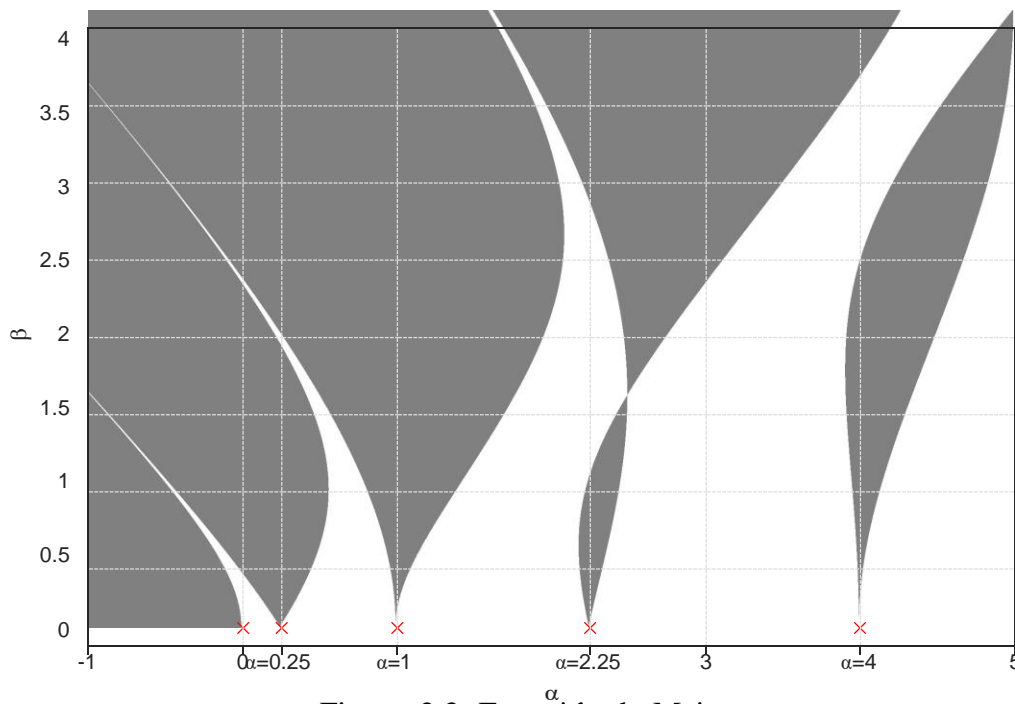


Figura 2.3: Ecuación de Meissner.

**Observación 6** Note que de acuerdo con (2.18) y el teorema 2.7 generalmente hay un número infinito de lenguas para la ecuación de Hill (2.12) en tiempo continuo.

**Criterio de No oscilación de la ecuación de Hill.**

Uno de los problemas clásicos relacionado a la ecuación de Hill, es el encontrar valores de  $\alpha, \beta$  para los cuales la ecuación de Hill (2.12) tiene o no soluciones periódicas.

Definicion 2.10 [33] La solucion de una ecuacion diferencial  $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$  como (2.13),

$$\text{donde } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(t)) & 0 \end{pmatrix}, A(t+T) = A(t), \text{ se dice que es no oscilatoria,}$$

si tiene cuando mucho un cero en  $(-\infty, +\infty)$ . Si tiene un numero infinito de ceros, sin puntos de acumulaci3n en  $(-\infty, +\infty)$ , se dice que es oscilatoria.

Lema 2.2 [33][39] Por cada valor fijo  $\beta$  de (2.12), existe un  $\alpha_0 = \alpha(\beta)$ , para el cual si

- $\alpha \leq \alpha_0$  todas las soluciones de (2.12) son no oscilatorias.
- $\alpha > \alpha_0$  todas las soluciones de (2.12) son oscilatorias.

### 2.3.1. Ecuaci3n de Hill con retardo.

Consideremos ahora el caso en donde a la ecuacion de Hill (2.12) le agregamos un retardo en el estado, es decir:

$$\ddot{z}(t) + \gamma \dot{z}(t) + (\alpha + \beta p(t))z(t) + \delta z(t-h) = 0 \tag{2.19}$$

La ecuacion de Hill con retardo, donde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  son constantes fijas,  $p(t) = p(t+T)$  es una funcion peri3dica con peri3do  $T$  y  $h$  es el retardo en el estado.

Sea  $C_h$  usado para denotar el espacio de funciones continuas de  $[-h, 0]$  a  $\mathbb{R}^n$ , con norma en  $C_h$  dada por  $\| \phi \| = \max \{ |\phi(s)| : -h \leq s \leq 0 \}$ .  $C_h$  es un espacio de Banach con respecto a esta norma [20].

Definiendo el vector de estado  $y = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}$  podemos reescribir el sistema (2.19) como

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + By(t-h) \tag{2.20}$$

$$\text{donde } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(t)) & -\gamma \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}$$

Definamos el mapeo peri3dico  $U : C_h \rightarrow C_h$  con respecto a (2.19) por

$$(U\phi)(s) = y(s+T) \tag{2.21}$$

donde  $y(s)$  es una solucion de (2.19) que satisface  $y(s) = \phi(s)$  para  $s \in [-h, 0]$ . Para  $T > h$ ,  $U$  es un operador compacto en  $C_h$ , cuyo espectro es a lo mucho contable con cero



como el único punto de acumulación posible [22]. El operador periodico  $U$ , también es llamado el operador de monodromía.

### Teoría de Floquet para ecuaciones diferenciales con retardo.

La teoría de Floquet para (2.19) ha sido desarrollada por Stokes [38]. Si  $\sigma(U)$  representa el espectro de  $U$ , entonces por cada  $\lambda \in \sigma(U)$ ,  $U\phi = \lambda\phi$  para algún  $\phi \in C_h$ ,  $\phi \neq 0$ , esto es, el espectro consiste solo de eigenvalores. Además, El espacio  $C_h$  se puede descomponer en la suma de dos subespacios invariantes

$$C_h = E(\lambda) \oplus K(\lambda) \quad (2.22)$$

donde  $E(\lambda)$  es de dimension finita y conformado por los eigenfunciones con respecto a  $\lambda$  de  $U$ . Si  $\{\psi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , es una base para  $E(\lambda)$  y sea  $\Psi$  la matriz con columnas  $\psi_j$  para  $j = 1, \dots, d$ , entonces existe una matriz  $\mathbf{M}$  tal que

$$U\Psi = \Psi\mathbf{M} \quad (2.23)$$

Así podemos pensar en  $C_h$  como una suma directa de subespacios contable  $E(\lambda_i)$  más un posible subespacio remanente,  $R$ . Esto es,

$$C_h = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus R \quad (2.24)$$

donde  $R$  es un conjunto “remanente” en que cualquier solución de (2.19) con condicion inicial en  $R$  decae más rapido que cualquier exponencial.

Por cada  $E(\lambda_i)$  existe un conjunto base  $\Psi_i$ , y una matriz  $\mathbf{M}(\lambda_i)$ . Si definimos un conjunto base al menos contable  $\{\Psi_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , entonces podemos pensar en  $U$  operando en  $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E(\lambda_i)$  siendo representado por una matriz infinito dimensional  $\mathbf{M}_{\infty}$ .

Sus eigenvalores son los multiplicadores característicos o de Floquet.

**Observacion 7** Como en el caso sin retardo, Si un multiplicador característico del sistema (2.20) tiene modulo mayor que uno entonces el sistema (2.20) será inestable.

**Observacion 8** La dificultad en el analisis de estabilidad de la ecuacion de Hill con retardo es que el operador monodromía generalmente no tiene una forma cerrada; consecuentemente, las condiciones de estabilidad no se pueden obtener en forma analítica.

## 2.4. Metodos de discretización.

En esta seccion hicimos una recapitulación de los métodos de discretización usados en esta tesis.

Considere el siguiente sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (2.25)$$

Cuando usamos un método de discretización se cambia  $t$  por  $kh$ , donde  $h$  es el intervalo de muestreo y  $k \in \mathbb{Z}$  es el tiempo discreto. Pero por notación el intervalo de muestreo va implícito en el tiempo discreto, es decir, escribiremos  $x_k$  en lugar de  $x(kh)$ .

Definición 2.11 La discretización de (2.25) por el método de forward Euler est definida por [17] [11]

$$x_{k+1} - x_k = hA_k x_k \quad (2.26)$$

donde  $A_k = A(kh)$

Definición 2.12 La discretización de (2.25) por el método de backward Euler est definida por [17] [11]

$$x_k - x_{k-1} = hA_k x_k \quad (2.27)$$

Definición 2.13 Método de Tustin [17]

La discretización de (2.25) por el método de Tustin está definida por

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= \frac{1}{2}hA_{k+1}x_{k+1} + \frac{1}{2}hA_k x_k \\ x_{k+1} &= \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2}hA_{k+1} \right)^{-1} \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2}hA_k \right) x_k \end{aligned} \quad (2.28)$$

Definición 2.14 Equivalencia de Polos-ceros <sup>3</sup>

Sea  $a$  un polo del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

la técnica de equivalencia de polos y ceros [17] consiste en asignar  $e^{ah}$  como un polo del sistema discreto.

<sup>3</sup>Incluso si el método menciona equivalencia de ceros, nosotros nos interesaremos solo en la equivalencia de polos porque el sistema que discretizaremos (2.13) no tiene las matrices  $B$ ,  $C$  que estan relacionadas con los ceros.

El retenedor de orden cero consiste en muestrear una señal en tiempo continuo y mantenerla durante el tiempo de muestreo, se define como:

**Definicion 2.15 Retenedor de orden Zero [17]**

La discretización del sistema (2.25) está definida por<sup>4</sup>

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(k+1, k) \mathbf{x}_k \quad (2.29)$$

donde  $\Phi(t, t_0)$  es la matriz de transición de estados de (2.25) [44].

## 2.5. Soluciones de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes.

En esta sección se da la estructura de la solución de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, ya que nos será de gran utilidad cuando analicemos la ecuación de Hill discreta.

**Definicion 2.16** El “operador shift”  $E$  está definido por

$$E y_k = y_{k+1}$$

donde  $k \in \mathbb{N}$

Considere la siguiente ecuación en diferencias lineal

$$u(k+n) + p_{n-1}u(k+n-1) + \cdots + p_0u(k) = 0 \quad (2.30)$$

donde  $p_0, \dots, p_{n-1}$  son constantes y  $p_0 = 0$ .

**Definicion 2.17** ■ El polinomio  $\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_0 = 0$  es llamado la “ecuación característica” para (2.30).

- Las soluciones  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}$  de la ecuación característica son las “raíces características”.

<sup>4</sup>Recuerde que incluso si nosotros escribimos  $\Phi(k+1, k)$  en realidad es  $\Phi(h(k+1), hk)$ .

Si usamos el operador shift  $E$  en la ecuación en diferencias 2.30. Toma la forma de su ecuación característica:

$$E^n + p_{n-1}E^{n-1} + \cdots + p_0 u(k) = 0$$

o

$$(E - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (E - \lambda_{n_1})^{\alpha_{n_1}} u(k) \quad (2.31)$$

donde  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n_1} = n$ .

Teorema 2.9 [27]

- Suponga que (2.30) tiene las raíces características  $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_1}$  con multiplicidades  $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}$  respectivamente. Entonces (2.30) tiene  $n$  soluciones independientes  $\lambda_1^k, \cdots, k^{\alpha_1-1} \lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, k^{\alpha_2-1} \lambda_2^k, \cdots, \lambda_{n_1}^k, \cdots, k^{\alpha_{n_1}-1} \lambda_{n_1}^k$ .
- Si las raíces características incluyen un par complejo conjugado  $\lambda = a \pm ib$ , Entonces las soluciones de (2.30) se pueden encontrar usando una forma polar  $\lambda = r e^{\pm i\theta} = r(\cos \theta \pm i \sin \theta)$  entonces

$$\lambda^k = r^t e^{\pm i\theta k} = r^t (\cos \theta \pm i \sin \theta)$$



# Capítulo 3

## Resultados principales.

El objetivo de esta tesis es obtener una versión discreta de la Ecuación de Hill y analizar que propiedades comparten y en que difieren.

Al comienzo de este trabajo de tesis empezamos discretizando la ecuación de Hill, sin embargo nos percatamos de que no todos los métodos de discretización entregaban resultados válidos. Es por esto que sabiendo que la ecuación de Hill sin disipación es un sistema hamiltoniano e inspirados por el trabajo de Rasvan en [34], en la sección 3.1 probamos y comparamos que métodos de discretización conservaban la estructura hamiltoniana y cuáles no.

En la sección 3.2 discretizamos la ecuación de Hill con y sin retardo y mediante la técnica de lifting obtuvimos su matriz de monodromía y sus condiciones de estabilidad.

Si bien la Ecuación de Hill discretizada de la sección 3.2 tiene algo de análisis en tiempo discreto, aun no es el resultado que buscamos, ya que se trata de una aproximación de un sistema en tiempo continuo. Es por esto que en la sección 3.3 mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas obtuvimos el modelo de la Ecuación de Hill discreta, analizamos sus propiedades y para el final de la sección las comparamos con la ecuación de Hill en tiempo continuo.

Finalmente en la sección 3.4 explicamos ¿Qué es el cómputo en paralelo?, sus ventajas, limitaciones y su repercusión en esta tesis.

### 3.1. Discretización de sistemas hamiltonianos lineales.

Inspirados por el procedimiento de Rasvan [34] donde usa dos métodos de discretización para discretizar un sistema hamiltoniano y con el objetivo de usar un solo método de discretización, en esta sección revisaremos que métodos preservan la estructura hamiltoniana.

Consideremos el siguiente sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda J H_x(t) = \lambda E x(t) \quad (3.1) \\ \text{donde } x &= \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^{2n}; y, z \in \mathbb{R}^n \\ H^T = H &= \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & D \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} B & D \\ -A & -B^T \end{pmatrix} \text{ y las matrices } A, B, D \text{ son de dimensiones} \\ &\text{compatibles, es decir, } A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

#### 3.1.1. Procedimiento de Rasvan.

Usando el método de discretización de Euler con paso de muestreo  $h$ , pero usando forward Euler en la primera ecuación y backward Euler en la segunda ecuación (3.1) [35], [34], obtendremos.

$$\begin{aligned} \frac{y((k+1)h) - y(kh)}{h} &= \lambda B y(kh) + \lambda D z(kh) \quad (3.2) \\ \frac{z(kh) - z((k-1)h)}{h} &= -\lambda A y(kh) - \lambda B^T z(kh) \end{aligned}$$

denotando  $y(kh) = y_k$ ,  $z(kh) = z_{k+1}$  y abusando de la notación, permítanos cambiar  $\lambda h$  por  $\lambda$

$$\begin{aligned} y_{k+1} - y_k &= \lambda B y_k + \lambda D z_{k+1} \\ z_{k+1} - z_k &= -\lambda A y_k - \lambda B^T z_{k+1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ y_{k+1} - y_k & & y_k \\ z_{k+1} - z_k & = \lambda J H & z_{k+1} \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{con } H = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & D \end{pmatrix}$$

$$y_{k+1} - \lambda D z_{k+1} = (I + \lambda B) y_k$$

$$I + \lambda B^T z_{k+1} = z_k - A y_k$$

$$\begin{pmatrix} I & -\lambda D \\ 0 & I + \lambda B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + \lambda B & 0 \\ -\lambda A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

$$x_{k+1} = C(\lambda) x_k$$

$$\text{donde } x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} I & -\lambda D & I + \lambda B & 0 \\ 0 & I + \lambda B^T & -\lambda A & I \end{pmatrix}$$

Lema 3.1 La matriz  $C(\lambda)$  es simpléctica [34][35].

### 3.1.2. Comparacion de métodos de discretización.

Considere el siguiente sistema hamiltoniano

$$\dot{x}(t) = JHx(t) = Ax(t) \tag{3.5}$$

donde  $H = H^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  y  $J$  como en (3.1).

A continuación vamos a analizar los métodos de discretización presentados en los preliminares buscando que se preserve la estructura hamiltoniana después de discretizar un sistema hamiltoniano lineal continuo e invariante en el tiempo.

Lema 3.2 El método de forward Euler no preserva la estructura hamiltoniana al discretizar un sistema hamiltoniano lineal de tiempo continuo e invariante en el tiempo (3.5).

**Prueba.** Aplicando el método forward Euler obtendremos  $x_{k+1} = Rx_k$ . Donde  $R = [I + hJH]$

$$\begin{aligned} R^T J R &= I + hH J^T J [I + hJH] \\ &= [J + hH][I + hJH] \\ &= J + HJH \end{aligned}$$



Lema 3.3 El método de backward Euler no preserva la estructura hamiltoniana al discretizar un sistema hamiltoniano lineal de tiempo continuo e invariante en el tiempo (3.5).

**Prueba.** Aplicando el método forward Euler obtendremos  $x_k = R x_{k-1}$ . Donde  $R = [I - hJ H]^{-1}$

$$\begin{aligned}
 R^T J R &= [I - hH J^T]^{-1} J [I - hJ H]^{-1} \\
 &= [J - H [I - hJ^T H]^{-1} H]^{-1} [I - hJ H]^{-1} \\
 &= [J - H [I - hJ^T H]^{-1} H]^{-1} \\
 &\quad - [I - hH J]^{-1} H \\
 &\quad - H [I - hJ^T H]^{-1} J [I - hH J]^{-1} H
 \end{aligned}$$

Observacion 9 Los Lemas 3.2 y 3.3 nos dan una idea de porque Rasvan usa un método para la mitad de las ecuaciones y otro para la otra mitad.

Teorema 3.1 La discretización por el método de Tustin de (3.5) nos da un sistema hamiltoniano discreto.

**Prueba.** Usando el método de Tustin obtendremos

$$x_{k+1} = R x_k.$$

Donde  $R = [I - B]^{-1} [I + B] = [I + B] [I - B]^{-1}$ , porque funciones de la misma matriz conmutan [18] y  $B = \frac{1}{2} hA$

$$\begin{aligned}
 R^T J R &= [I - B]^{-1} [I + B]^T J [I + B] [I - B]^{-1} \\
 &= [I + B^T] [I - B^T]^{-1} [J + \frac{1}{2} hJ A] [I - B]^{-1} \\
 &= [I + B^T] [I - B^T]^{-1} [I - B^T] J [I - B]^{-1} \\
 &= [J + B^T J] [I - B]^{-1} \\
 &= J [I - B] [I - B]^{-1} = J
 \end{aligned}$$

**Teorema 3.2** La discretización por el método de equivalencia en polos y ceros de (3.5) nos da un sistema hamiltoniano.

**Prueba.** Cuando usamos el método de equivalencia en polos y ceros obtenemos  $x_{k+1} = R x_k$ .

Donde  $R = e^{Ah}$  y dado que, si  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}\}$  entonces

$\sigma e^A = e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_{2n}}$ , note que  $e^{Ah} = \Phi(k+1, k)$  es la matriz de transición de estados de (3.5), por lo tanto al usar el teorema 2.5 hemos probado que  $R$  es simpléctica.

**Teorema 3.3** La discretización por el retenedor de orden cero de (3.5) nos da un sistema hamiltoniano discreto.

**Prueba.** Después de aplicar el retenedor de orden cero obtendremos  $x_{k+1} = R x_k$ .

Donde  $R = e^{Ah}$  es la matriz de transición de estados de (3.5), y usando el teorema 2.5 vemos que  $R$  es simpléctica.

**Teorema 3.4** La discretización por el método de Runge-Kutta (RK) de orden 4 de (3.5) nos da un sistema hamiltoniano.

**Prueba.** El método de RK [11] prevé

$$K_n^i = f(t_n, X_n^j) \quad X_n^j = x_n + h \sum_{j=1}^4 a_{ij} K_n^j$$

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^4 b_i K_n^i$$

Obteniendo  $K_n^i$  y expresandola en términos de  $y_n$

$$x_{n+1} = \left[ \begin{array}{c} I + hA(nh) + \frac{1}{2}h^2 A^2(nh) \\ + \frac{1}{6}h^3 A^3(nh) + \frac{1}{24}h^4 A^4(nh) \\ \vdots \end{array} \right] x_n$$

obtenemos la formula de Runge-Kutta en su forma explicita

$R_n = I + hA(nh) + \frac{1}{2}h^2 A^2(nh) + \frac{1}{6}h^3 A^3(nh) + \frac{1}{24}h^4 A^4(nh)$ , dado que  $A$  es una matriz hamiltoniana  $A^T J = -JA$

$$R_n^T J R_n = J \left[ I - hA(nh) + \frac{1}{2}h^2 A^2(nh) - \frac{1}{6}h^3 A^3(nh) + \frac{1}{24}h^4 A^4(nh) \right] R_n$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}^T & \begin{aligned} & \mathbf{I} + h\mathbf{A} (nh) + \frac{1}{2}h^2\mathbf{A}^2 (nh) + \frac{1}{6}h^3\mathbf{A}^3 (nh) + \frac{1}{24}h^4\mathbf{A}^4 (nh) \\ & -h\mathbf{A} (nh) - h^2\mathbf{A}^2 (nh) - \frac{1}{2}h^3\mathbf{A}^3 (nh) - \frac{1}{6}h^4\mathbf{A}^4 (nh) - \frac{1}{24}h^5\mathbf{A}^5 (nh) \end{aligned} \\
 {}_n\mathbf{J}\mathbf{R}_n & = \mathbf{J} \begin{aligned} & + \frac{1}{2}h^2\mathbf{A}^2 (nh) + \frac{1}{2}h^3\mathbf{A}^3 (nh) + \frac{1}{4}h^4\mathbf{A}^4 (nh) + \frac{1}{12}h^5\mathbf{A}^5 (nh) + \frac{1}{48}h^6\mathbf{A}^6 (nh) \\ & - \frac{1}{6}h^3\mathbf{A}^3 (nh) - \frac{1}{6}h^4\mathbf{A}^4 (nh) - \frac{1}{12}h^5\mathbf{A}^5 (nh) - \frac{1}{36}h^6\mathbf{A}^6 (nh) - \frac{1}{144}h^7\mathbf{A}^7 (nh) \\ & + \frac{1}{24}h^4\mathbf{A}^4 (nh) + \frac{1}{24}h^5\mathbf{A}^5 (nh) + \frac{1}{48}h^6\mathbf{A}^6 (nh) + \frac{7}{144}h^7\mathbf{A}^7 (nh) + \frac{1}{242}h^8\mathbf{A}^8 (nh) \end{aligned} \\
 & = \mathbf{J} \mathbf{I} + \frac{1}{72}h^6\mathbf{A}^6 (nh) + \frac{1}{242}h^8\mathbf{A}^8 (nh) = \mathbf{J} \mathbf{I} + o(h^6)
 \end{aligned}$$

haciendo tender el paso de muestreo  $h$  a cero, podemos despreciar los términos  $o(h^6)$

R =	Métodos de discretizacion	¿Preserva la estructura hamiltoniana?
$[\mathbf{I} + h\mathbf{A}]$	forward Euler	No
$[\mathbf{I} - h\mathbf{A}]^{-1}$	backward Euler	No
$\mathbf{I} - \frac{1}{2}h\mathbf{A}^{-1} \mathbf{I} + \frac{1}{2}h\mathbf{A}$	Tustin	Si
$e^{A h}$	Equivalencia de polos y ceros	Si
$\Phi(k + 1, k) = e^{A h}$	Retenedor de orden cero	Si
$\mathbf{I} + h\mathbf{A} (nh) + \frac{1}{2}h^2\mathbf{A}^2 (nh) + \frac{1}{6}h^3\mathbf{A}^3 (nh) + \frac{1}{24}h^4\mathbf{A}^4 (nh)$	Runge Kutta orden 4	Si

Cuadro 3.1: Comparación de métodos de discretización.

### 3.1.3. Ejemplos.

Considere la siguiente ecuacion diferencial

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{3.6}$$

donde  $A$  es una matriz hamiltoniana.

Ejemplo 3.1 Sea  $A$  la matriz del sistema (3.6) con el siguiente espectro:

$\sigma(A) = \{2 \pm 2i, -2 \pm 2i, \pm 4i\}$ . La tabla 3.2 muestra los eigenvalores del sistema discretizado

$$x_{k+1} = R x_k$$

usando los métodos antes expuestos con el círculo unitario como referencia, y la Figura 3.1 su grafica.

Métodos de discretizacion	$\lambda_{1-2}$	$\lambda_{3-4}$	$\lambda_{5-6}$
forward Euler	$1.0126 \pm 0.0126i$	$1 \pm 0.0251i$	$0.9874 \pm 0.0126i$
backward Euler	$1.0126 \pm 0.0129i$	$0.9994 \pm 0.0251i$	$0.9874 \pm 0.0123i$
Tustin	$1.0251 \pm 0.0258i$	$0.9987 \pm 0.0502i$	$0.9749 \pm 0.0245i$
Equivalencia de polos y ceros	$1.0251 \pm 0.0258i$	$0.9987 \pm 0.0502i$	$0.9749 \pm 0.0245i$
Rasvan	$1.0251 \pm 0.0258i$	$0.9987 \pm 0.0502i$	$0.9749 \pm 0.0245i$
Runge-Kutta de orden 4	$1.0251 \pm 0.0258i$	$0.9987 \pm 0.0502i$	$0.9749 \pm 0.0245i$

Cuadro 3.2: Eigenvalores del sistema discretizado  $\lambda_i \in \sigma(R)$ .

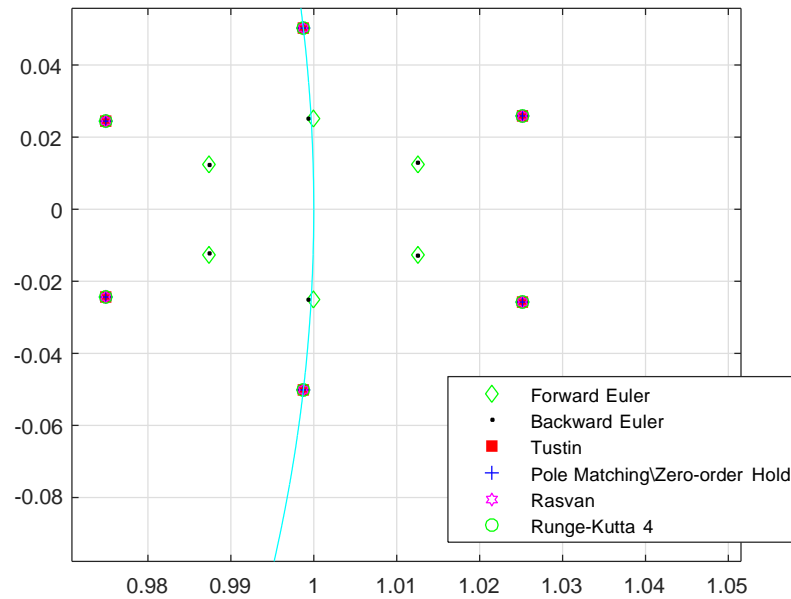


Figura 3.1: Eigenvalores del sistema hamiltoniano discreto del ejemplo 3.1.

**Ejemplo 3.2** Sea  $A$  la matriz del sistema (3.6) con el siguiente espectro:

$\sigma(A) = \{\pm 10i, \pm 20i, \pm 40i\}$ . Note que a diferencia del ejemplo anterior, aquí solo tenemos eigenvalores “estables” con parte real cero. Sin embargo en el sistema discreto

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{R}\mathbf{x}_k$$

el método forward Euler nos da un sistema discreto inestable y el método backward Euler nos da un sistema discreto asintóticamente estable. Aún mas, como era de esperarse, el procedimiento de Rasvan, el método de Tustin, asignación de polos<sup>1</sup> y Runge-Kutta 4 nos dan como resultado un sistema discreto “estable” pero con algunas diferencias entre Rasvan, Tustin, asignación de polos y Runge-Kutta 4, usando el mismo paso  $h$  [11], como vemos en la tabla 3.3 y la Figura 3.2.

Métodos de discretización	$\lambda_{1-2}$	$\lambda_{3-4}$	$\lambda_{5-6}$
forward Euler	$1.000 \pm 0.2513i$	$1.000 \pm 0.1257i$	$1.000 \pm 0.0628i$
backward Euler	$0.9961 \pm 0.0626i$	$0.9845 \pm 0.1237i$	$0.9406 \pm 0.2364i$
Tustin	$0.9921 \pm 0.1252i$	$0.9689 \pm 0.2474i$	$0.8812 \pm 0.4728i$
Equivalencia de polos y ceros	$0.9921 \pm 0.1253i$	$0.9686 \pm 0.2487i$	$0.8763 \pm 0.4818i$
Rasvan	$0.9921 \pm 0.1254i$	$0.9684 \pm 0.2493i$	$0.8737 \pm 0.4865i$
Runge-Kutta de orden 4	$0.9921 \pm 0.1253i$	$0.9686 \pm 0.2487i$	$0.8763 \pm 0.4815i$

Cuadro 3.3: Eigenvalores del sistema discretizado  $\lambda_i \in \sigma(\mathbf{R})$ .

<sup>1</sup>Cuando mencionamos asignación de polos, nos referimos al método de asignación de polos y ceros, además de incluir también el retenedor de orden cero ya que nos da el mismo sistema discreto.

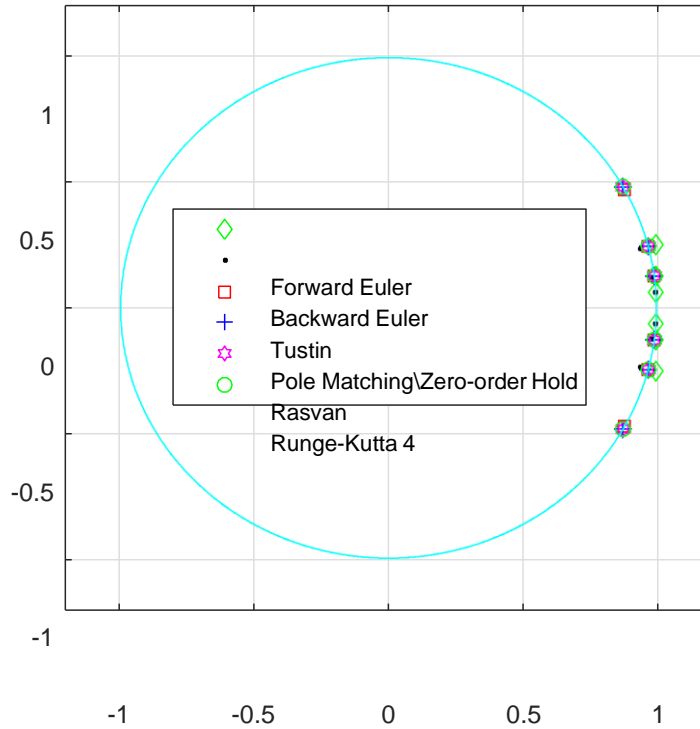


Figura 3.2: Eigenvalores del sistema hamiltoniano discreto del ejemplo 3.2.

La Figura 3.3 muestra un acercamiento de los eigenvalores discretos de la Figura 3.2

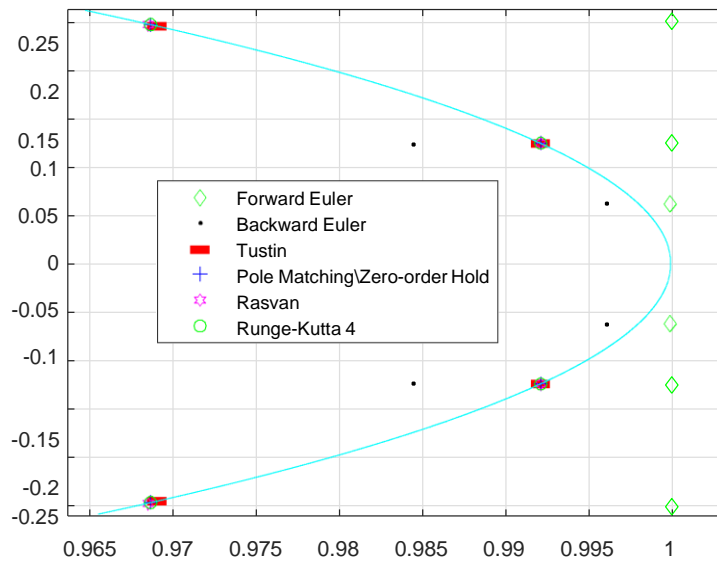


Figura 3.3: Acercamiento de los eigenvalores del sistema hamiltoniano discreto de la Figura 3.2.

La Figura 3.4 muestra las respuestas a una misma condición inicial del sistema hamiltoniano del ejemplo 3.2, para los métodos de discretización analizados previamente.

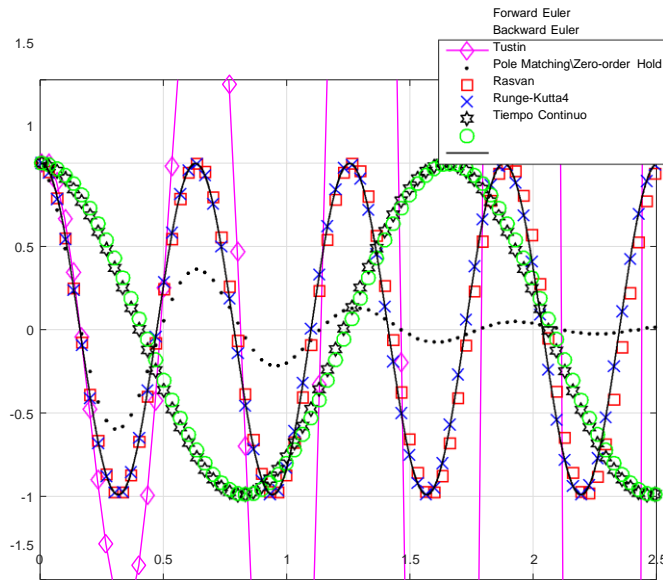


Figura 3.4: Comparación de los métodos de discretización y la respuesta en tiempo continuo.

## 3.2. Ecuación de Hill discretizada.

En esta sección se obtiene la Ecuación de Hill discretizada usando un método de discretización que preserve la estructura hamiltoniana, particularmente el método de Runge-Kutta de orden 4, para luego obtener su matriz de monodromía y las condiciones de estabilidad a partir de esta.

### 3.2.1. Sin retardo.

Haciendo uso del método de Runge-Kutta (RK) de orden 4 [11] y haciendo la consideración de que el sistema continuo (2.13)

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t)$$

permanece constante entre cada instante de muestreo  $h$ , obtendremos el siguiente sistema discreto:



$$y_{n+1} = A_n y_n \tag{3.7}$$

donde  $A_n = I + hA(nh) + \frac{1}{2}h^2 A''(nh) + \frac{1}{6}h^3 A'''(nh) + \frac{1}{24}h^4 A^{(4)}(nh)$ ,

$A(nh) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(nh)) & 0 \end{pmatrix}$ . Seleccionando  $h = \frac{T}{K}$ ,  $K \in \mathbb{Z}$ , tal que  $A_n$  sea una

funcion periodica también, es decir,  $A_{n+K} = A_n$ .

**Teorema 3.5** Considere el siguiente sistema periodico de tiempo discreto

$$y_{n+1} = A_n y_n \quad A_{n+K} = A_n \tag{3.8}$$

El sistema (3.8) es equivalente a un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo [36].

$$x_{n+1} = \bar{A} x_n \quad \text{h} \quad \mathbf{i}_0$$

**Prueba.** Definamos el siguiente vector de estado  $x_n = \begin{pmatrix} y_{Kn} \\ y_{Kn+1} \\ \dots \\ y_{Kn+K-1} \end{pmatrix}$ , entonces podemos transformar (3.8) en<sup>2</sup>

$$\begin{pmatrix} y_{K(n+1)} \\ y_{K(n+1)+1} \\ \vdots \\ y_{K(n+1)+K-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{K-1} \cdots A_1 A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_0 A_{K-1} \cdots A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{K-2} \cdots A_0 A_{K-1} & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{Kn+0} \\ y_{Kn+1} \\ \vdots \\ y_{Kn+K-2} \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{y_{K(n+1)+K-1}}{z} \right\}_{x_{(n+1)}} \quad \left| \frac{z}{\bar{A}} \right\| \quad \left| \frac{y_{Kn+K-1}}{z} \right\}_{x_n}$$

$$x_{(n+1)} = \bar{A} x_n \tag{3.9}$$

donde  $\bar{A}$  es una matriz diagonal a bloques constante.

**Corolario 2** Sea  $M = \Phi(K, 0) = A_{K-1} A_{K-2} \cdots A_1 A_0$  la matriz de monodromía del sistema (3.8), entonces el sistema (3.8) es:

<sup>2</sup>Este procedimiento es conocido como “lifting technique” [36].

- estable:  $y(t)$  permanece acotada  $\forall t \geq 0$  si y solo si  $\sigma(M) \subset \overline{D}_1$ ,  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  y si  $\lambda \in \sigma(M)$  y  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda$  es una raíz simple del polinomio mínimo de  $M$ .
- inestable si existe  $\mu \in \sigma(M) : |\mu| > 1$  o si  $\sigma(M) \subset \overline{D}_1$ , y existe  $\mu : |\mu| = 1$ ,  $\mu$  no es una raíz simple del polinomio mínimo de  $M$ .

Prueba.

$$\det(\lambda I - \overline{A}) = \prod_{i=1}^n \det(\lambda I - \overline{A}_{ii})$$

pero por otro lado

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A_{K-1} \cdots A_0) &= \det(\lambda I - A_0 A_{K-1} \cdots A_1) \\ &= : \\ &= \det(\lambda I - A_{K-2} \cdots A_0 A_{K-1}) \end{aligned}$$

que implica que

$$\sigma(A_{K-1} \cdots A_1 A_0) = \sigma(A_0 A_{K-1} \cdots A_1) = \cdots = \sigma(A_{K-2} \cdots A_0 A_{K-1})$$

Por lo tanto la estabilidad del sistema (3.8) está dada por los valores característicos de la matriz  $M = A_{K-1} \cdots A_1 A_0$ .

### 3.2.2. Con retardo.

Ahora discretizaremos la ecuación de Hill con retardo (2.20)

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B y(t-h)$$

usando el método de RK. Dado que tenemos un sistema lineal con retardo constante podemos usar casi la misma fórmula de RK [8]:

$$\begin{aligned}
 Y_n &= f(t_n, Y_n, Y_{n-m}) \\
 Y_n &= y_n + h \sum_{j=1}^4 a_{ij} K_n^j \\
 y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^4 b_i K_n^i \\
 &= y_n + h (b_1 K_n^1 + b_2 K_n^2 + b_3 K_n^3 + b_4 K_n^4)
 \end{aligned}$$

Haciendo un proceso similar al caso sin retardo obtenemos el siguiente sistema discreto

$$y_{n+1} = \bar{A}_n y_n + \bar{B}_n y_{n-m} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_n &= I + hA_{nh} + \frac{1}{2} h^2 A_{nh}^2 + \frac{1}{6} h^3 A_{nh}^3 + \frac{h^4}{24} A_{nh}^4 \\
 \bar{B}_n &= h + \frac{1}{2} h^2 A_{nh} + \frac{1}{6} h^3 A_{nh}^2 + \frac{1}{24} h^4 A_{nh}^3 + B
 \end{aligned}$$

donde (3.10) es la formula explicita de RK para discretizar un sistema lineal en tiempo continuo con retardo constante (2.20),  $A_{nh} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(nh)) & 0 \end{pmatrix}$ . Seleccionando  $\frac{h}{K} = \frac{T}{K}$ ,  $K \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\bar{A}_n$  y  $\bar{B}_n$  seran una funcion periodica, es decir,  $\bar{A}_{n+K} = \bar{A}_n$ ,  $\bar{B}_{n+K} = \bar{B}_n$ .

**Teorema 3.6** Considere el siguiente sistema discreto con retardo:

$$y_{n+1} = A_n y_n + B_n y_{n-m} \quad A_{n+K} = A_n \quad B_{n+K} = B_n \tag{3.11}$$

El sistema (3.11) es equivalente a un sistema lineal e invariante en el tiempo:

$$x_{(n+1)} = \bar{A} x_n$$

**Prueba.** Definamos el siguiente vector de estado

$$\hat{y}_n = \begin{pmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$y_{n-1} \quad y_{n-2} \quad \dots \quad y_{n-m}$$

y

 $i_0$ 

,

ento

nces

pode

mos

trans

for

mar

el

siste

ma

discreto con retardo (3.11) en:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_n \\ \vdots \\ y_{n-m+2} \\ y_{n-m+1} \\ y_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & 0 & \cdots & 0 & B_n \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{n-m+1} \\ y_{n-m} \end{bmatrix} \\
 & \left| \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\hat{y}_{n+1}} \{z\} \right| \left| \underbrace{\hspace{3cm}}_{\hat{A}_n} \{z\} \right| \left| \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\hat{y}_n} \{z\} \right|
 \end{aligned}$$

Obtenemos el sistema

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{A}_n \hat{y}_n \tag{3.12}$$

donde  $\hat{A}_{n+K} = \hat{A}_n$ , por lo tanto podemos aplicar el teorema 3.5 para transformar (3.12) en un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo

$$x_{(n+1)} = \bar{A}x_n$$

Corolario 3 Sea  $M = \Phi(K, 0) = \hat{A}_{K-1} \hat{A}_{K-2} \cdots \hat{A}_1 \hat{A}_0$  la matriz de monodromía del sistema (3.12). Entonces el sistema (3.11) es

- asintóticamente estable si

$$\sigma(M) \subset \overset{\circ}{D}_1, \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

- estable:  $y(t)$  permanece acotada  $\forall t \geq 0$  si y solo si  $\sigma(M) \subset \bar{D}_1, \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  y si  $\lambda \in \sigma(M)$  y  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda$  es una raíz simple del polinomio mínimo de  $M$ .
- Inestable si existe  $\mu \in \sigma(M) : |\mu| > 1$  o si  $\sigma(M) \subset \bar{D}_1$ , existe  $\mu : |\mu| = 1$ , y  $\mu$  no es una raíz simple del polinomio mínimo de  $M$ .

### 3.2.3. Ejemplos.

Ejemplo 3.3 Considere el siguiente sistema:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \tag{3.13}$$

donde  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(t)) & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha, \beta$  son constantes. Con  $\gamma = 0$  y la función periodica  $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$ .

El procedimiento para graficar las lenguas de Arnold, consiste en:

- fijar un punto  $(\alpha, \beta)$  y usando el método de Runge-Kutta para discretizar el sistema (3.13) y al usar el corolario 2 para analizar su estabilidad.
- si es inestable se grafica un punto gris.
- haciendo un barrido en  $\alpha$  y  $\beta$ , repitiendo para cada par  $(\alpha, \beta)$  los pasos anteriores, obtenemos las lenguas de Arnold.

como se muestra en la Figura 3.5; siendo indistinguible (graficamente) la obtencion de las lenguas de Arnold del sistema original (3.13), de su sistema discretizado.

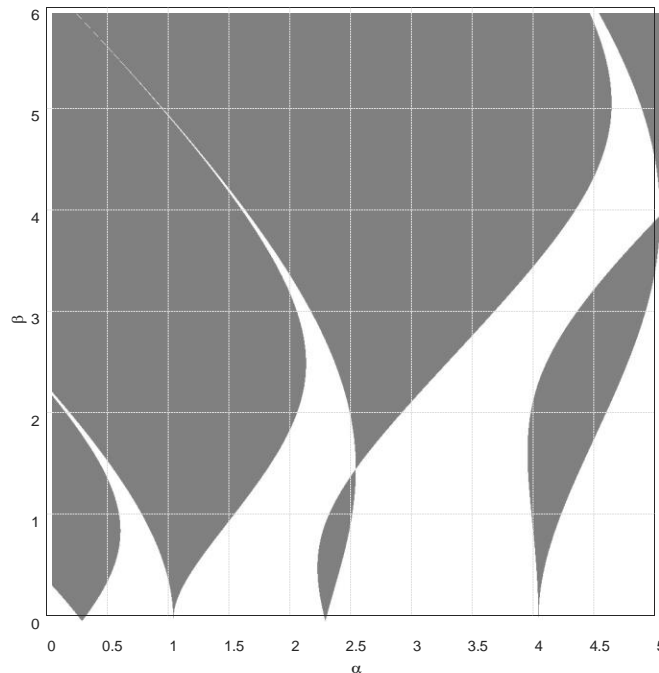


Figura 3.5: Lenguas de Arnold de  $\ddot{z}(t) + [\alpha + \beta p(t)] z(t) = 0$  con  $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$ ,  $K = 270$ .



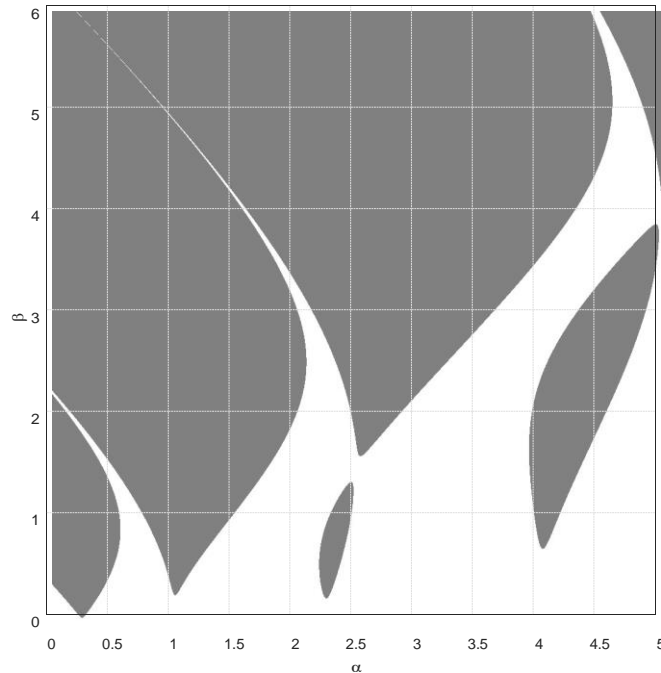


Figura 3.6: Lenguas de Arnold de  $\ddot{z}(t) + \gamma\dot{z}(t) + [\alpha + \beta p(t)]z(t) = 0$  con  $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$ ,  $K = 270$ ,  $\gamma = 0,03$ .

Para mostrar los efectos de la disipacion, tomemos el mismo sistema (3.13) y la misma funcion periodica  $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$  pero con  $\gamma = 0,03$ , la Figura 3.6 muestra la estabilidad paramétrica de la ecuacion de Hill con disipacion.

Note que como era de esperarse, al tener disipacion las zonas de inestabilidad se hacen mas pequeñas.

**Ejemplo 3.4** Considere la ecuación de Hill con retardo

$$\ddot{y}(t) = A(t)y(t) + By(t - mht) \tag{3.14}$$

donde  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(t)) & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  son constantes,  $m \in \mathbb{Z}$  y

$h$  es el tiempo de muestreo. Para obtener la grafica de estabilidad paramétrica se fija un valor de  $\delta = 0,1$ , se hace un barrido en el par  $(\alpha, \beta)$  y usando el método de Runge-Kutta para discretizar el sistema (3.13) y el corolario 3 para analizar su estabilidad.

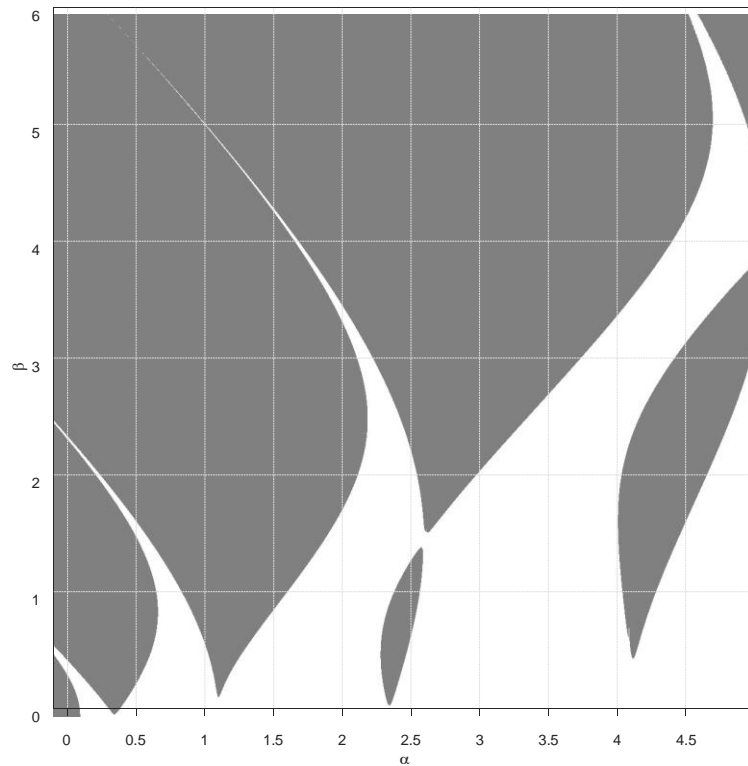


Figura 3.7: Lenguas de Arnold de  $\ddot{z}(t) + (\alpha + \beta p(t)) z(t) + \delta z(t - mh) = 0$  con  $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$ ,  $\delta = 0,1$ ,  $m = 12$ ,  $K = 270$ .

**Observación 10** Note que la Figura 3.6 y 3.7 tienen cualitativamente la misma estabilidad paramétrica, esto sucede porque cuando el retardo es suficientemente pequeño, el retardo aproxima a la primera derivada, es decir

$$\ddot{z}(t) + (\alpha + \beta p(t)) z(t) + \delta z(t - mh) \pm \delta z(t) = 0$$

$$\ddot{z}(t) + \underbrace{\alpha - \frac{\delta}{h}}_{\bar{\alpha}} z(t) + \beta p(t) z(t) + \underbrace{\frac{-h\delta}{1 - e^{-\gamma h}}}_{\gamma} \frac{z(t) - z(t-h)}{h} = 0$$

$$\ddot{z}(t) + \gamma \dot{z}(t) + [\bar{\alpha} + \beta p(t)] z(t) = 0$$

**Observación 11** El proceso de calcular las lenguas de Arnold puede ser paralelizado, es decir, cada punto del mapa  $\alpha$  vs  $\beta$  puede ser calculada independientemente de sus vecinos, por lo tanto se puede usar procesamiento en paralelo para calcular las lenguas de Arnold.

### 3.3. Ecuación de Hill discreta.

Podemos encontrar mención de la ecuación de Hill discreta en [13], sin embargo en el trabajo de Chulaevsky, la ecuación de Hill discreta se obtiene a partir de la linealización de la ecuación de Schrodinger discreta. Nosotros optamos por obtener el modelo del oscilador armónico discreto mediante Euler Lagrange discreto y al agregarle una perturbación periodica (igual que en tiempo continuo) obtenemos de manera alternativa la ecuación de Hill discreta.

Ya con la ecuación de Hill discreta, daremos por primera vez graficas de sus lenguas de Arnold, obtendremos una ecuación que para  $\beta = 0$  dice en que puntos de  $\alpha$  nacen las lenguas de Arnold, daremos prueba de la versión discreta del criterio de no oscilación y terminaremos esta sección comparando las propiedades de la ecuación de Hill discreta con su versión en tiempo continuo.

#### 3.3.1. Obtención de la ecuación de Hill discreta

Reordemos el Lagrangiano en tiempo continuo

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - V(q) \quad (3.15)$$

donde  $M = M^T > 0$  es la matriz de inercia,  $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$  y  $V(q)$  es una función potencial.

Calculando la primera variación de  $\int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt$

$$\begin{aligned} \delta \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt &= \int_0^T \left( \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \int_0^T \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \cdot \delta q dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right|_0^T \cdot \delta q \end{aligned}$$

y asumiendo que las variaciones admisibles en las partes terminales se anulan, es decir:  $\delta q(T) = \delta q(0) = 0$ , obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = 0 \quad (3.16)$$

y para el Lagrangiano (3.15) obtenemos la ecuación de Newton

$$M \ddot{q} = -\nabla V(q)$$

Lagrangiano en tiempo discreto.

Como se verá más adelante la mecánica variacional discreta se obtiene de hacer un procedimiento similar al caso de tiempo continuo, en lugar de usar posición  $q$  y velocidad  $\dot{q}$  vamos a usar dos posiciones y un tiempo de muestreo  $\Delta t \in \mathbb{R}$ . Estas posiciones deben de ser vistas como dos puntos en una curva en un tiempo  $\Delta t$ , es decir,  $q_0 \approx q(0)$  y  $q_1 \approx q(\Delta t)$ .

De tal manera que usando forward Euler para aproximar la primera derivada en (3.15) obtendremos el lagrangiano discreto:

$$L_d(q_0, q_1, \Delta t) = \Delta t \left[ \frac{1}{2} \frac{(q_1 - q_0)^T (q_1 - q_0)}{\Delta t} - V(q_0) \right] \quad (3.17)$$

Calculando la primera variación de  $\sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}, \Delta t)$

$$\begin{aligned} \delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}, \Delta t) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial L_d}{\partial q_k}(q_k, q_{k+1}, \Delta t) \cdot \delta q_k + \frac{\partial L_d}{\partial q_{k+1}}(q_k, q_{k+1}, \Delta t) \cdot \delta q_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial L_d}{\partial q_{k+1}}(q_{k-1}, q_k, \Delta t) + \frac{\partial L_d}{\partial q_k}(q_k, q_{k+1}, \Delta t) \cdot \delta q_k \\ &\quad + \frac{\partial L_d}{\partial q_0}(q_0, q_1, \Delta t) \cdot \delta q_0 + \frac{\partial L_d}{\partial q_N}(q_{N-1}, q_N, \Delta t) \cdot \delta q_N \end{aligned}$$

Y asumiendo que las variaciones admisibles en las partes terminales se anulan, es decir:  $\delta q_0 = \delta q_N = 0$ , obtenemos

Las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas

$$\frac{\partial L_d}{\partial q_{k+1}}(q_{k-1}, q_k, \Delta t) + \frac{\partial L_d}{\partial q_k}(q_k, q_{k+1}, \Delta t) = 0 \quad (3.18)$$

y para el lagrangiano discreto (3.17)

$$\frac{\partial L_d}{\partial q_{k+1}}(q_{k-1}, q_k, \Delta t) = M \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t} \frac{\partial L_d}{\partial q_k}(q_k, q_{k+1}, \Delta t)$$

$$, \Delta t) = - \frac{M + (\delta) \nabla V}{\underline{q_{k+1}} (q_k)} \frac{-q_k}{\Delta t}$$

Obtenemos el equivalente discreto de la ecuación de Newton:

$$M \frac{q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}}{(\Delta t)^2} = -\nabla V(q_k) \quad (3.19)$$

Ahora considere el caso escalar  $M = m$ ,  $q_k \in \mathbb{R}^1$  y sea  $V(q_k) = \frac{1}{2}bq_k^2$  de (3.19) obtenemos el modelo discreto del sistema masa resorte u oscilador armónico:

$$q_{k+1} + \frac{(\Delta t)^2}{m}b - 2q_k + q_{k-1} = 0 \quad (3.20)$$

Observación 12 Note que la “aceleración discreta” en (3.19), corresponde al método de discretización, diferencias centradas de segundo orden [11].

### 3.3.2. Caracterización.

Haciendo  $\alpha = \frac{(\Delta t)^2}{m}b - 2$  y agregando  $\beta p(k) q_{k+1}$ , término que corresponde a la excitación paramétrica en el caso continuo, al oscilador armónico (3.20), donde  $\beta \in \mathbb{R}$  es una constante y  $p(k + K) = p(k)$  es una secuencia con período  $K$  y de promedio cero, es decir,  $\sum_{k=0}^{K-1} p(k) \equiv 0$ , obtendremos la siguiente ecuación en diferencias:

$$q_{k+2} + (\alpha + \beta p(k)) q_{k+1} + q_k = 0 \quad (3.21)$$

en lo subsecuente conocida como la “Ecuación de Hill discreta” [13], donde  $p(k + K) = p(k)$ ,  $K \in \mathbb{Z}$  es una secuencia de período  $K$ .

Como en el caso de tiempo continuo, definiendo el vector de estado  $y_k = \begin{bmatrix} h \\ q_{k+1} \\ q_k \end{bmatrix}$  podemos reescribir la ecuación (3.21) como

$$\text{donde } A_k = \begin{bmatrix} -(\alpha + \beta p(k)) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{k+K} = A_k. \quad (3.22)$$

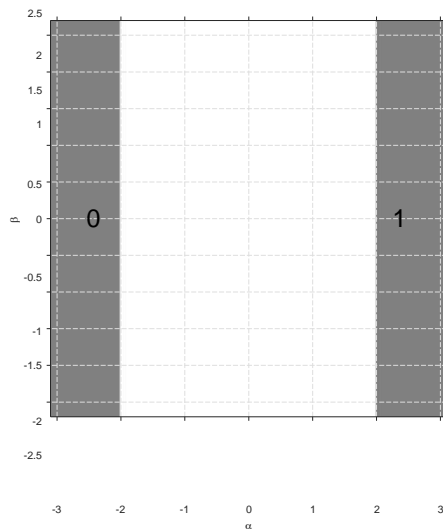
Observación 13 Note que  $A_k$  es una matriz simpléctica, es decir,

$$A_k^T J A_k = J$$

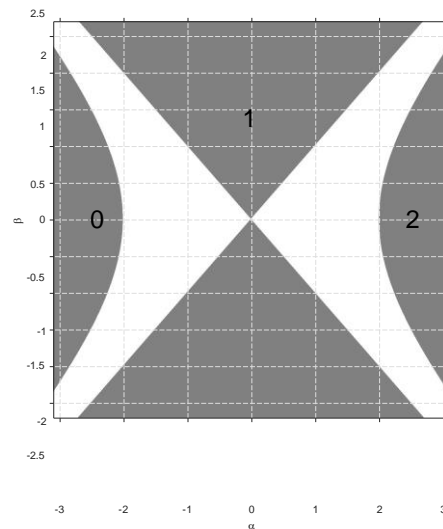
donde  $J = \begin{matrix} & & \# \\ & 0 & I \\ -I & & 0 \end{matrix} \therefore (3.22)$  es un sistema hamiltoniano [31].

Observacion 14 Note que dado que  $A_{k+K} = A_k$  es periodica podemos usar el teorema 3.5 y el corolario 2 para determinar la estabilidad de (3.22).

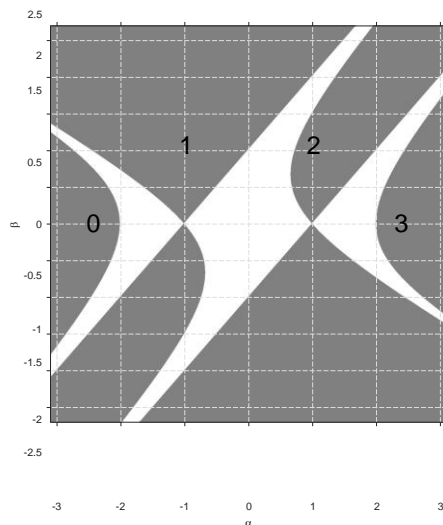
Ejemplo 3.5 Considere la ecuacion de Hill discreta  $q_{k+2} + (\alpha + \beta p(k)) q_{k+1} + q_k = 0$  como en (3.21), en las siguientes figuras se muestra la estabilidad paramétrica o lenguas de Arnold de la ecuación de Hill discreta para diferentes secuencias paródicas  $p$  con período  $K = 1$  hasta  $K = 6$ .



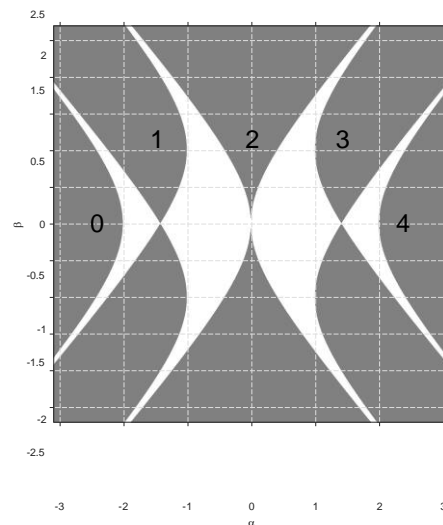
(a)  $p(k) = \{1\}, K = 1.$



(b)  $p(k) = \{1, -1\}, K = 2.$



(c)  $p(k) = \{1, -1, 0\}, K = 3.$



(d)  $p(k) = \{-1, 1, -1, 1\}, K = 4.$

---

Figura 3.8: Estabilidad paramétrica de  $q_{k+2} + (\alpha + \beta p(k)) q_{k+1} + q_k = 0$ .



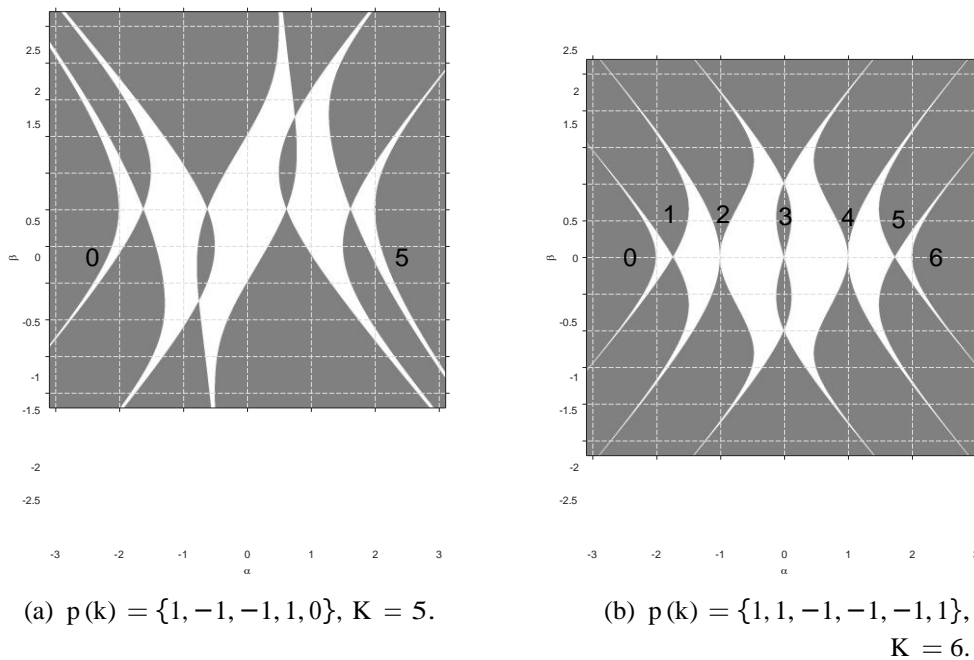


Figura 3.9: Estabilidad paramétrica de  $q_{k+2} + (\alpha + \beta p(k)) q_{k+1} + q_k = 0.$

Así como en el caso de tiempo continuo, las zonas blancas muestran las zonas estables y las zonas grises son las zonas inestables o lenguas de Arnold, y están etiquetadas de izquierda a derecha con  $0, 1, \dots, K - 1$  y  $K.$

**Observación 15** Para  $K$  par hay simetría con respecto de los 2 ejes; para  $K$  impar la simetría con respecto a  $\beta = 0$  se conserva, pero aparece una simetría con respecto al origen.

**Observación 16** Note que en el caso de tiempo continuo generalmente hay un número infinito de lenguas, sin embargo esto no es cierto en el caso discreto, generalmente solo tenemos  $K + 1$  lenguas.

**Teorema 3.7** Las lenguas de Arnold de la ecuación de Hill discreta  $y_{k+1} = A_k y_k$  como en (3.22) donde  $A_k = \begin{pmatrix} -(\alpha + \beta p(k)) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{k+K} = A_k,$  empiezan en:

$$l_0(-\alpha) + l_1(-\alpha) + l_2(-\alpha) + \dots + l_{K-1}(-\alpha) = 2 \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 \text{donde } i &= \begin{cases} 1 & \text{si } K \text{ es par} \\ 0 & \text{si } K \text{ es impar} \end{cases} \\
 l_0 &= 1 \\
 l_1 &= -(K) \\
 l_2 &= -\frac{(K)(K-1)}{2!} - \frac{(K-2)}{1!} l_1 \\
 l_3 &= -\frac{(K)(K-1)(K-2)}{3!} - \frac{(K-2)(K-3)}{2!} l_1 - \frac{(K-4)}{1!} l_2 \\
 &\dots \\
 l_{\frac{K-i}{2}} &= -\frac{(K)(K-1)\dots(K-i)}{\frac{K-i}{2}!} l_1 \\
 &\quad - \frac{(K-2)\dots(K-i-2)}{\frac{K-i}{2}!} l_2 - \dots - \frac{2+i}{i!} l_{(\frac{K-i}{2}-1)}
 \end{aligned}$$

**Prueba.** Estamos buscando soluciones  $K$ -periódicas de  $y_{k+1} = A_k y_k$ , es decir

$$y_k = y_{k+K} = \Phi(k + K, 0) y_0 = \Phi(k + K, K) \Phi(K, 0) y_0 = \Phi(k, 0) M y_0$$

Dado que las lenguas empiezan en  $\beta = 0$ , analicemos  $M$  para  $\beta = 0$ .

$$\begin{aligned}
 M &= A_{K-1} A_{K-2} \dots A_0|_{\beta=0} = \tilde{A}^K \\
 \text{donde } \tilde{A} &= \begin{pmatrix} -\alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\sigma \tilde{A} = \lambda_1 = -\alpha - \sqrt{4 - \alpha^2}, \lambda_2 = -\alpha + \sqrt{4 - \alpha^2},$$

dado que  $M$  es una matriz simpléctica de dimensiones  $2 \times 2$ , su polinomio característico es como sigue:

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr } \tilde{A}^K \lambda + 1$$

Por lo tanto las lenguas de Arnold empiezan en la frontera de estabilidad  $\text{Tr } \tilde{A}^K = 2$  y dado que  $\sigma \tilde{A}^K = \lambda_1^K, \lambda_2^K$  se sigue

$$\text{Tr } \tilde{A}^K = \lambda_1^K + \lambda_2^K \tag{3.24}$$

---

Note que  $-\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$ , por lo que al sustituir en (3.24) obtenemos el polinomio en

(3.23).

Ejemplo 3.6 Para un período  $K = 5$ 

$$\text{Tr } \tilde{A}^5 = -\alpha^5 - l_1\alpha^3 - l_2\alpha \quad (3.25)$$

con  $l_1 = -5$ ,  $l_2 = -\frac{5 \cdot 4}{2} - 3(-5) = 5$ , entonces

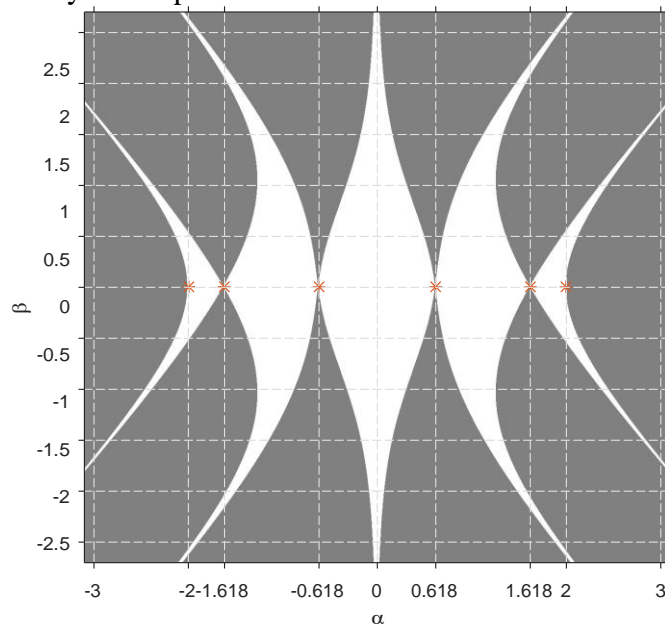
$$-\alpha^5 + 5\alpha^3 - 5\alpha = 2$$

tiene las raíces periódicas en  $\alpha = \{-2, -0.618, -0.618, 1.618, 1.618\}$  y

$$-\alpha^5 + 5\alpha^3 - 5\alpha = -2$$

tiene las raíces anti-periódicas en  $\alpha = \{-1.618, -1.618, 0.618, 0.618, 2\}$ 

Observación 17 Observe que las fronteras de las lenguas de Arnold son  $K$ -periódicas y  $2K$ -periódicas; empezando con una frontera  $K$ -periódica y alternando entre soluciones  $K$ -periódicas y  $2K$ -periódicas.

Figura 3.10:  $p(k) = \{-1, -1, 0, 1, 1\}$ ,  $K = 5$ .

**Observación 18** Note que todas las lenguas de Arnold con el mismo período  $K$  empiezan en los mismos puntos, esto porque la ecuación (3.23) es independiente de la secuencia periódica  $p(k)$  usada.

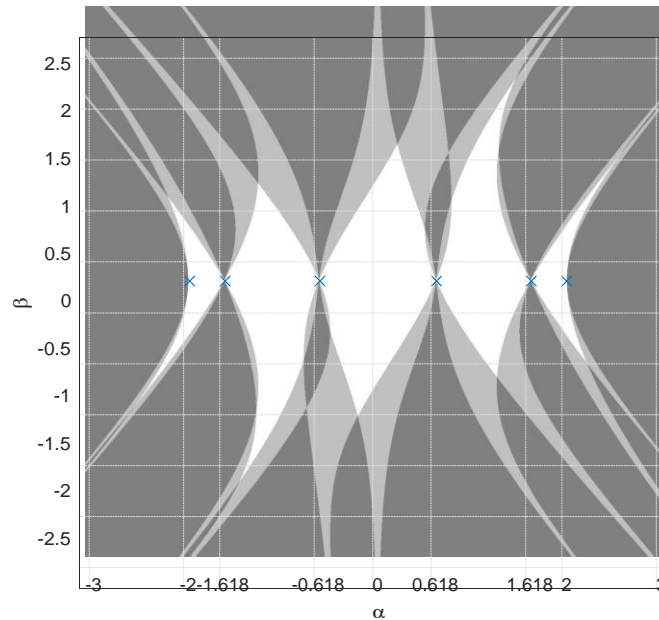


Figura 3.11: Sobreposición de la Figura 3.10 con la Figura 3.9 (a).

**Criterio de No oscilación para la ecuación de Hill discreta.**

Unos de los problemas clásicos relacionado a la ecuación de Hill, es el encontrar valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  para los cuales la ecuación de Hill (2.12) tiene o no soluciones periódicas.

**Definición 3.1** La solución de la ecuación en diferencias (3.21) se dice que es no oscilatoria si tiene cuando mucho un cambio de signos en la solución de (3.21).

**Teorema 3.8** Por cada valor fijo  $\beta$  of (3.21), existe un  $\alpha_0 = \alpha(\beta)$ , para el cual si

- $\alpha \leq \alpha_0$  todas las soluciones de (3.21) son no oscilatorias.
- $\alpha > \alpha_0$  todas las soluciones de (3.21) son oscilatorias.

Aún más, todas la soluciones no oscilatorias de (3.21) caen en la lengua 0-ésima de Arnold.

**Prueba.** Consideremos primero el caso con  $\beta = 0$

$$q_{k+2} + \alpha q_{k+1} + q_k = 0 \quad (3.26)$$

$$E^2 + \alpha E + 1 \quad q_k = 0 \quad (3.27)$$

con las siguientes soluciones generales:

- para  $\alpha < -2$  la solución general de (3.26) es No oscilatoria

$$q_k = C \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}^{-k} + D \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}^k$$

- para  $\alpha = -2$  la solución general de (3.26) es No oscilatoria

$$q_k = C 1^k + D k 1^k$$

- para  $-2 < \alpha < 2$  y la solución general de (3.26) es oscilatoria

$$q_k = C r^k e^{i\theta_k} + D r^k e^{-i\theta_k}$$

donde  $r$  es la magnitud de  $\lambda$ , por lo tanto  $r = 1$ .

- para  $\alpha = 2$  la solución general de (3.26) es oscilatoria

$$q_k = C (-1)^k + D k (-1)^k$$

- para  $\alpha > 2$  la solución general de (3.26) es oscilatoria

$$q_k = C \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}^{-k} + D \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}^k$$

donde  $C, D$  son constantes, de aquí vemos que  $\alpha_0 = -2$ .

Volvamos al caso con  $\beta = 0$ .

Dado el corolario 2 la ecuación (3.21) es equivalente a un sistema lineal invariante con el mismo espectro de la matriz de monodromía  $M$  por lo tanto las soluciones de (3.21) son como siguen

---

Sea  $\lambda \in \sigma(M)$  y  $\alpha + \beta p(k)$  tales que:

- para  $\lambda > 1$  y dado que  $M$  es una matriz simpléctica y por el teorema 2.4 la solución general de (3.21) será inestable no oscilatoria.

$$q_k = C\lambda^k + D \lambda^{-1 k}$$

- para  $\lambda > 1$  por el teorema 2.4 la solución general de (3.21) será inestable no oscilatoria.

$$q_k = C1^k + Dk1^k$$

- para  $\lambda = a + ib$  la solución general de (3.21) será estable oscilatoria

$$q_k = Cr^k e^{i\theta_k} + Dr^k e^{-i\theta_k}$$

- para  $\lambda = -1$  por el teorema 2.4 la solución general de (3.21) será inestable oscilatoria.

$$q_k = C(-1)^k + Dt(-1)^k$$

- para  $\lambda < -1$  por el teorema 2.4 y dado que  $\lambda$  es negativa, la solución general de (3.21) será inestable oscilatoria.

$$q_k = C(\lambda)^k + D \lambda^{-1 k}$$

donde  $C, D$  son constantes, note que la lengua 0-ésima de Arnold cae en el caso donde  $\lambda \geq 1$ , es decir, todas las soluciones no oscilatorias de (3.21) caen en la lengua 0-ésima de Arnold.

Hemos probado uno de nuestros resultados principales:

**Teorema 3.9** Dada la ecuación (3.21), una ecuación de Hill discreta, con un coeficiente  $K$ -periódico  $p(k)$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots, K - 1$ , entonces (3.21) es no oscilatoria si y solo si  $(\alpha, \beta)$  pertenece a la lengua 0-ésima de Arnold.

**Ejemplo 3.7** Para ilustrar este resultado, usaremos las lenguas de Arnold de la Figura 3.9(d) del ejemplo 3.5, entonces la Figura 3.12 muestra las soluciones  $q_k$  a lo largo del



tiempo, para puntos  $(\alpha, \beta)$  dentro de cada una de las zonas de estabilidad e inestabilidad, con la misma condición inicial  $y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

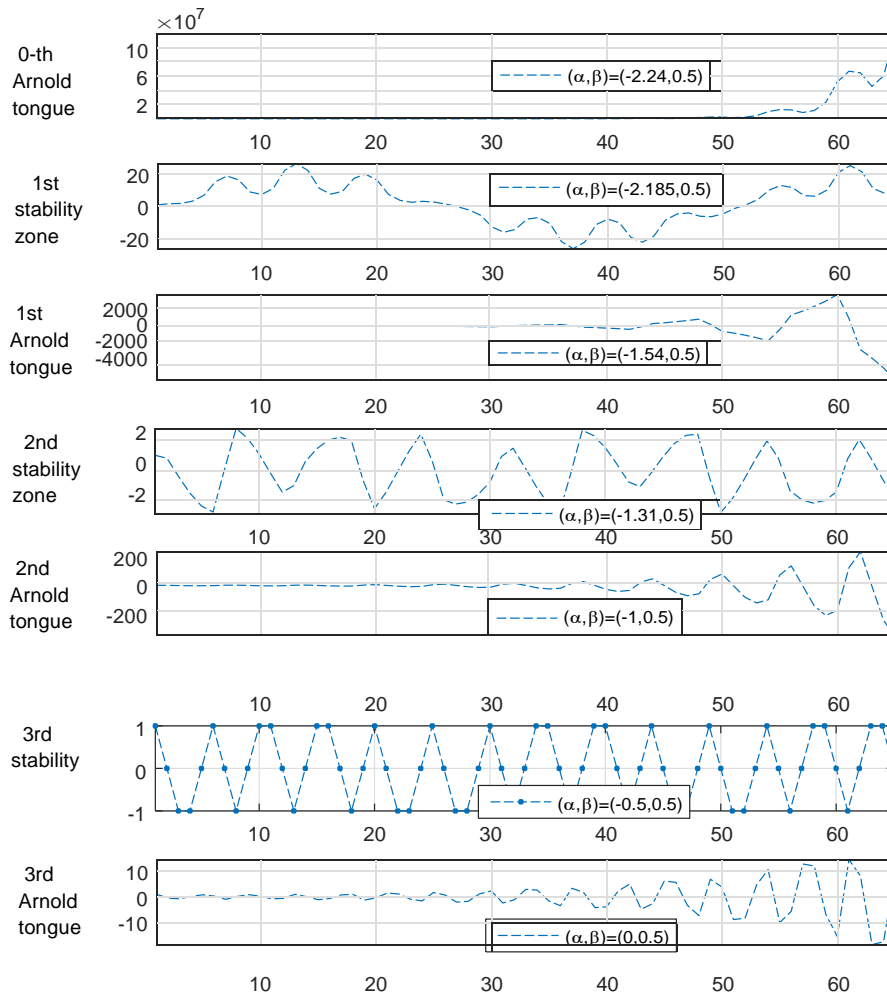


Figura 3.12: Soluciones de la ecuación de Hill discreta (3.22) para una secuencia  $p(k) = \text{sign} \cos \frac{2\pi}{6}k$  con período  $K = 6$ .

En la Figura 3.12 podemos ver que solo la 0-ésima lengua de Arnold tiene solución no oscilatoria.

En la siguiente tabla se encuentran las propiedades obtenidas alrededor de la ecuación de Hill discreta y su comparación con la ecuación de Hill en tiempo continuo.

	Ecuacion de Hill en tiempo continuo	Ecuacion de Hill discreta
¿Es un sistema hamiltoniano?	si	si
¿Su matriz de monodromía es simpléctica?	si	si
Número de lenguas de Arnold	generalmente $\infty$	$K + 1$
Las lenguas de Arnold empiezan en	$\alpha = \frac{k\pi}{T}^2$ $k = 0, 1, 2, \dots$	$\sum_{j=0}^{K-i} I_j (-\alpha)^{K-2j} = 2$ $I_j$ y $i$ como en el teorema 3.7
¿Alternancia de soluciones periodicas / anti-periodicas en las fronteras de las lenguas de Arnold?	si	si
¿La 0-ésima lengua de Arnold tiene solución no oscilatoria ?	si	si

Cuadro 3.4: Comparación de propiedades de la ecuación de Hill.

### 3.4. Computacion paralela

La computacion paralela es cuando se ejecutan de manera simultanea varias instrucciones, mientras que un programa normal, usa un núcleo del CPU y se ejecuta de manera secuencial (se ejecuta una instruccion a la vez), un programa en paralelo usa varios recursos para ejecutar instrucciones simultaneamente.

¿Cómo funciona?

El paquete de computacion paralela de MatLab nos ofrece 2 opciones:

- La primera es la instrucción `parfor`, la cual permite usar de manera simultaneamente los núcleos de nuestro CPU. Los procesadores actuales tienen 4 u 8 núcleos, por lo que un programa que use `parfor` con un CPU de 8 núcleos se ejecuta 8 veces mas rapido.

- La segunda opción es el uso de la GPU<sup>3</sup>. Similarmente que con la instrucción `parfor`, podemos usar de manera simultánea los núcleos de nuestra GPU, con la diferencia que las GPUs tienen de manera interna un arreglo en malla de cientos de procesadores de propósito específico, por ejemplo si nuestra GPU tiene un arreglo de 200x200 procesadores nuestro programa se ejecutará 40000 veces más rápido que uno secuencial.

El proceso de calcular y dibujar lenguas de Arnold, requiere que para cada punto  $\alpha, \beta$  se calcule la matriz de monodromía y sus condiciones de estabilidad, por lo que es un proceso paralelizable, simplemente se le asigna un punto de  $\alpha, \beta$  diferente a cada núcleo de la GPU, como se ejemplifica en la siguiente Figura donde comparamos el procesamiento secuencial contra el procesamiento en paralelo.

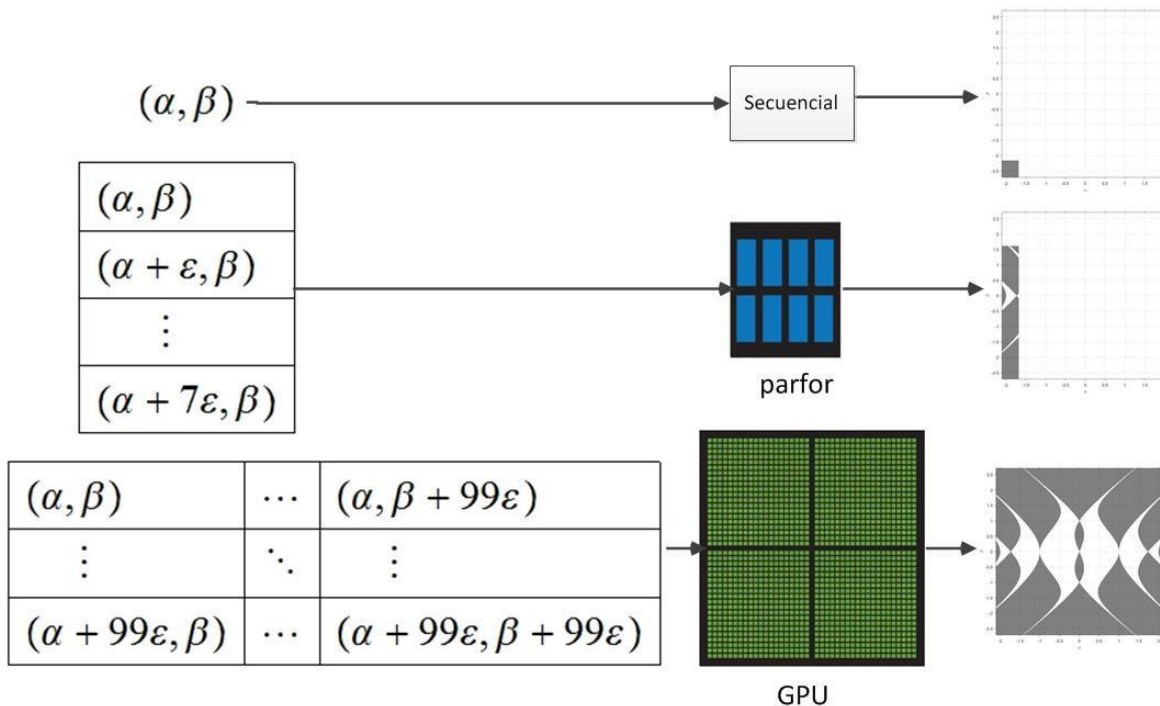


Figura 3.13: Comparativa de los diferentes métodos de cómputo.

Sin embargo al momento de escribir esta tesis, el cómputo usando la GPU en MatLab no permite la creación, operación u indexación de matrices y vectores, lo que significa

<sup>3</sup>Unidad de procesamiento gráfico por sus siglas en inglés, que es utilizada principalmente en videojuegos o aplicaciones 3D interactivas para el suavizado de bordes. La tarjeta gráfica, está formada físicamente por la unidad de procesamiento gráfico (GPU), una unidad de memoria de alta velocidad y una unidad de enfriamiento.

que nuestros algoritmos necesitan reescribirse de tal manera que solo se efectúen operaciones escalares. Otro problema es que la función eig de MatLab no está implementada para su uso con GPU por lo que es necesario recurrir a alternativas para determinar la estabilidad de la matriz de monodromía. Por ejemplo, la matriz de monodromía  $M$  tanto de la ecuación de Hill discretizada, como de la ecuación de Hill discreta son matrices simplécticas de dimensiones  $2 \times 2$  por lo que su polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(M)\lambda + 1$$

Por lo tanto la ecuación de Hill discreta será estable si  $\text{Tr}(M) \leq 2$  o inestable si  $\text{Tr}(M) > 2$ .

Considere la siguiente ecuación

$$q_{k+2} + (\alpha A + \beta B p(k)) q_{k+1} + q_k = 0 \quad (3.28)$$

donde  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , denotada como la ecuación de Hill discreta de grado dos, definiendo el vector de estado  $y_k = \begin{pmatrix} q_{k+1} \\ q_k \end{pmatrix}$  podemos reescribir la ecuación (3.28) como

$$\begin{aligned} \text{donde } A_k = & \begin{pmatrix} -(\alpha A + \beta B p(k)) & -I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad A_{k+K} = A_k. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Similar al caso escalar, la matriz de monodromía es

$$M = \Phi(K, 0) = \bar{A}_{K-1} \bar{A}_{K-2} \cdots \bar{A}_1 \bar{A}_0$$

con la diferencia de que esta, es de dimensiones  $4 \times 4$ , además si  $A$  y  $B$  son matrices simétricas la matriz  $A$  es simpléctica por lo tanto también la matriz de monodromía es una matriz simpléctica. Resultados como los expuestos en [24] se pueden usar reducir el orden del polinomio de la matriz de monodromía, ya que esta es una matriz simpléctica, es decir, reducir el orden del polinomio

$$p_M(\lambda) = \lambda^4 - C\lambda^3 + D\lambda^2 - C\lambda + 1 \quad (3.30)$$

donde  $C = \text{tr}(M)$ ,  $2B = (\text{tr}(M))^2 - \text{tr}(M^2)$ , a la mitad

$$Q_M(\rho) = \rho^2 - C\rho + B - 2$$

y obtener las siguientes condiciones de estabilidad:

Lema 3.4 [24] La matriz de monodromía es espectralmente estable si y solo si, las siguientes condiciones se satisfacen simultaneamente:

$$\begin{aligned} D &\geq 2C - 2 \\ D &\geq -2C - 2 \\ D &\leq \frac{C^2}{4} + 2 \\ D &\leq 6 \end{aligned}$$

Adicionalmente dependiendo de la región en la que se encuentren  $C$  y  $D$ , ser la forma de los eigenvalores de la matriz de monodromía como se aprecia en la Figura 3.14.

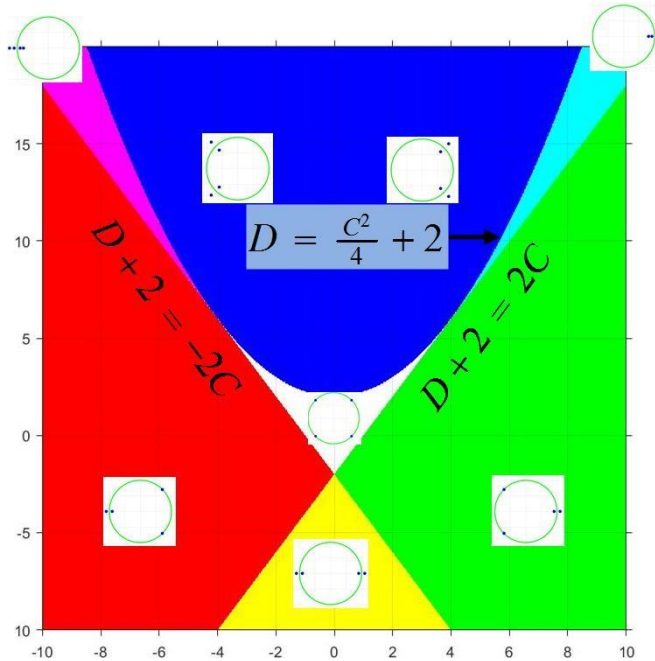


Figura 3.14: Estabilidad espectral de la matriz de monodromía.

Para las matrices  $A = \begin{matrix} " & \# \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$  y  $B = \begin{matrix} " & \# \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$  y la secuencia

$p(k) = \{1, 1, -1, -1, -1, 1\}$  podemos obtener las lenguas de Arnold de la ecuación de Hill discreta de grado dos, como se aprecia en la Figura 3.15.

**Observacion 19** Todos los resultados de esta tesis se programaron haciendo uso de la GPU, cuentan con una interfaz grafica como se ve en la Figura 3.16 y tardan alrededor de 10 segundos en calcular y graficar las lenguas de Arnold, cuando al principio de mi doctorado tardaban aproximadamente 20 horas en calcular y graficar la misma figura.

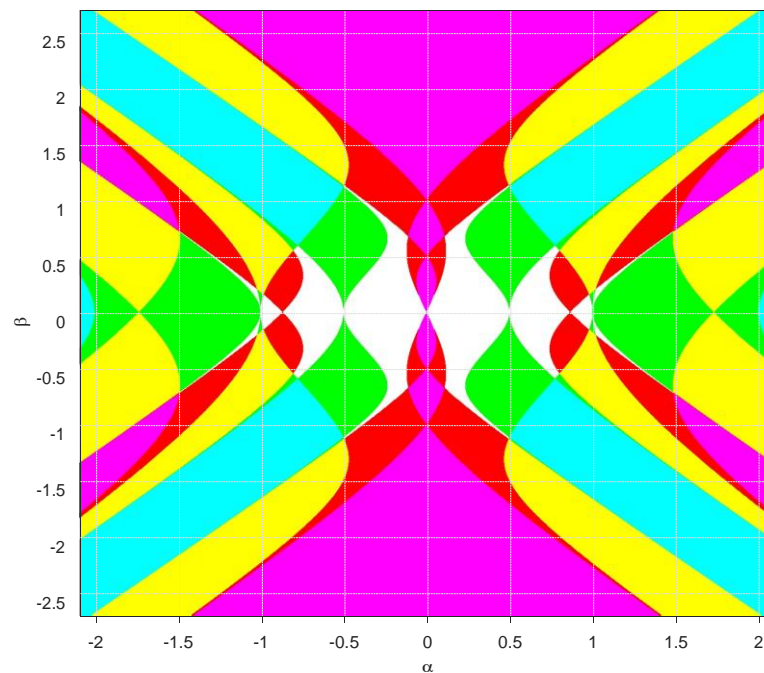


Figura 3.15: Lenguas de Arnold de  $q_{k+2} + (\alpha A + \beta B p(k)) q_{k+1} + q_k = 0$  con  $p(k) = \{1, 1, -1, -1, -1, 1\}$ ,  $K = 6$ .

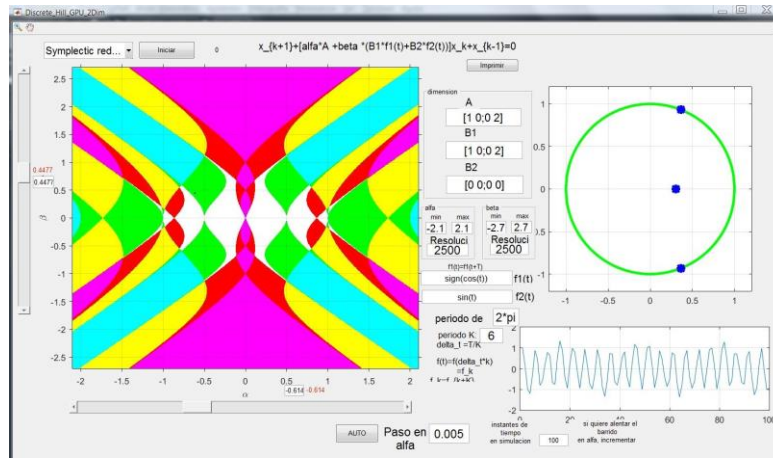


Figura 3.16: Interfaz grafica .

### 3.5. Trabajo futuro/Sistemas no conservativos.

En esta sección se obtiene el modelo del oscilador armonico con disipación discreto pero se deja para un trabajo futuro el definir la ecuacion de Hill discreta con disipación y con este modelo introducir control para reducir las áreas de inestabilidad de las lenguas de Arnold.

El principio integral de Lagrange-d'Alembert (tiempo continuo) está dado por

$$\delta \int_{Z} L(q(t), \dot{q}(t)) dt + \int_{Z} F(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \delta q dt = 0 \tag{3.31}$$

donde  $F(q(t), \dot{q}(t))$  es una fuerza arbitraria,  $\delta$  representa una variación que desaparece en los puntos finales. Usando integracion por partes obtenemos el equivalente a las ecuaciones de Euler-Lagrange forzadas:

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) + F(q(t), \dot{q}(t)) = 0 \tag{3.32}$$

Definamos El Principio integral de Lagrange-d'Alembert discreto como

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) + \sum_{k=0}^{N-1} F_d^-(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_k + F_d^+(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_{k+1} = 0 \tag{3.33}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} F_d^-(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_k + F_d^-(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_{k+1} = \sum_{k=1}^{N-1} F_d^-(q_{k-1}, q_k) + F_d^-(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_k + F_d^-(q_0, q_1) \cdot \delta q_0 + F_d^-(q_{N-1}, q_N) \cdot \delta q_N$$

para todas las variaciones  $\{\delta q_k\}_{k=0}^N$  que desaparecen en los puntos finales, (3.33) es equivalente a las Ecuaciones de Euler-Lagrange forzado discreto

$$\frac{\partial L_d}{\partial q_{k+1}}(q_{k-1}, q_k, \Delta t) + \frac{\partial L_d}{\partial q_k}(q_k, q_{k+1}, \Delta t) + F_d^+(q_{k-1}, q_k) + F_d^-(q_k, q_{k+1}) = 0 \quad (3.34)$$

donde  $L_d$  es el lagrangiano discreto y  $F_d^+$ ,  $F_d^-$  son las fuerzas discretas derecha e izquierda.

Sea  $F(q) = R\dot{q}(t)$  la fuerza de disipación en tiempo continuo, Entonces la fuerza de disipación discreta  $F_d^+$  y  $F_d^-$  son

$$F_d^- = F \frac{q_{k+1} - q_k}{\Delta t} = R \frac{q_{k+1} - q_k}{\Delta t}$$

$$F_d^+ = F \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t} = R \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t}$$

considere el caso escalar  $M = m$ ,  $R = r$ ,  $q_k \in \mathbb{R}^1$  y sea  $V(q_k) = \frac{1}{2}bq_k^2$  en (3.34) obtenemos

$$q_{k+1} + \frac{(\Delta t)^2}{m} b - 2 q_k + q_{k-1} + \frac{r}{\Delta t} q_{k+1} - \frac{r}{\Delta t} q_{k-1} = 0$$

$$q_{k+1} + \frac{\frac{(\Delta t)^2}{m} b - 2}{1 + \frac{\Delta t}{m} r} q_k + \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{m} r} q_{k-1} = 0$$



el modelo del oscilador armónico con disipación discreto.

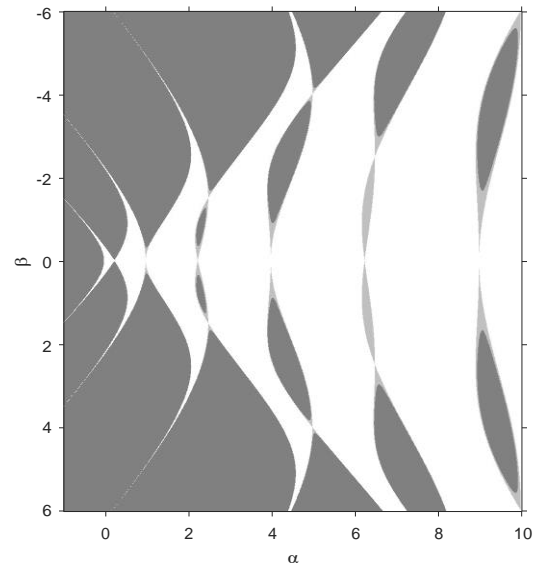


Figura 3.17: Lenguas de Arnold de  $\ddot{z}(t) + \gamma \dot{z}(t) + (\alpha + \beta p(t)) z(t) = 0$ , con la función periódica  $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$ .

En la Figura 3.17 se muestran con gris claro la estabilidad paramétrica de la ecuación de Hill sin disipación  $\gamma = 0$  y con gris oscuro la estabilidad paramétrica de la ecuación de Hill con  $\gamma = 0,0467$ .

# Capítulo 4

## Conclusiones

La matriz de monodromía de la ecuación de Hill sin disipación<sup>1</sup> es una matriz simplectica tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, como consecuencia la ecuación de Hill solo puede ser estable o inestable, es decir, soluciones asintóticamente estables no son posibles.

Cuando se discretiza la ecuación de Hill es importante usar métodos de discretización que preserven la estructura hamiltoniana o integradores simplecticos, de otra manera las lenguas de Arnold obtenidas no corresponderán a las lenguas de tiempo continuo.

Partiendo de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtuvo la ecuación de Hill discreta, las lenguas de Arnold de la ecuación de Hill discreta tienen un número finito de lenguas ( $K + 1$  lenguas) a diferencia de la ecuación de Hill en tiempo continuo tiene generalmente un número infinito de lenguas. Todas las soluciones no oscilatorias de la ecuación de Hill discreta (también en tiempo continuo) están en la lengua 0-ésima de Arnold.

---

<sup>1</sup> No se menciona en este trabajo pero incluso con disipación la matriz de monodromía es  $\mu$ -simplectica.

# Publicaciones

- José Guillermo Rodríguez Servín, Joaquin Collado M. On the Discretization of Linear Continuous Hamiltonian Systems. Computing Science and Automatic Control (CCE), 2015 12th International Conference on Electrical Engineering
- José Guillermo Rodríguez Servín, Joaquin Collado M. Nonoscillation Criteria for Discrete Hill equation. Computing Science and Automatic Control (CCE), 2017 14th International Conference on Electrical Engineering
- José Guillermo Rodríguez Servín, Joaquin Collado M. Arnold Tongues for Discrete Hills Equation. Applied Mathematics, Vol. 8, num. 12, 1859-1882, (2017), <https://doi.org/10.4236/am.2017.812133>.

# Bibliografía

- [1] Abramov, A. A., and Kurochkin, S. V. Calculation of solutions to the Mathieu equation and of related quantities. *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 47, 3 (2007), 397–406.
- [2] Adrianova, L. Introduction to Linear Systems of Differential Equations. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, 1995.
- [3] Agarwal, R., Ahlbrandt, C., Bohner, M., and Peterson, A. C. Discrete linear hamiltonian systems: A survey. *Dynamic Systems and Applications* 8 (1999), 307–333.
- [4] Ahlbrandt, C. D. Equivalence of discrete euler equations and discrete hamiltonian systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 180, 2 (1993), 498 – 517.
- [5] Ahlbrandt, C. D., and Peterson, A. C. Discrete Hamiltonian Systems: Difference Equations, Continued Fractions, and Riccati Equations. Texts in the Mathematical Sciences. Springer US, 1996.
- [6] Arnol'd, V. I. Remarks on the perturbation theory for problems of Mathieu type. *Russian Mathematical Surveys* 38, 4 (1983), 215–233.
- [7] Atkinson, F. V., and Weiss, G. H. Discrete and continuous boundary problems. *Physics Today* 17 (1964), 84.
- [8] Bellen, A., and Zennaro, M. Numerical methods for delay differential equations. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Clarendon Press, Oxford, 2003.

- [9] Bolotin, V., and Armstrong, H. The dynamic stability of elastic systems. *American Journal of Physics* 33, 9 (1965), 752–753.
- [10] Brockett, R. W. *Finite Dimensional Linear Systems (Decision & Control)*. John Wiley and Sons, Inc., 1970.
- [11] Butcher, J. C. *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods*. Wiley-Interscience publication. J. Wiley, 1987.
- [12] Chen, C.-T. *Linear system theory and design*, third ed. Oxford University Press, 1999.
- [13] Chulaevsky, V. *Almost periodic operators and related nonlinear integrable systems*. Manchester University Press, 1989.
- [14] Coisson, R., Vernizzi, G., and Yang, X. Mathieu functions and numerical solutions of the Mathieu equation. In *Open-source Software for Scientific Computation (OSSC), 2009 IEEE International Workshop on (2009)*, IEEE, pp. 3–10.
- [15] Eastham, M. S. P. *The spectral theory of periodic differential equations*. Scottish Academic Press, London, 1973.
- [16] Floquet, G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 12 (1883), 47–88.
- [17] Franklin, G. F., Workman, M. L., and Powell, J. D. *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1997.
- [18] Gantmacher, F. R. *The Theory of Matrices*, vol. 1. Chelsea, 1959.
- [19] Gel'fand, I., and Lidskii, V. On the structure of the regions of stability of linear canonical systems of differential equations with periodic coefficients, in *Israel Mathematical Journal*, 10, 3-40 (English Translation: *AMS Translations, Series 2*, 2, 143-181).
- [20] Gilsinn, D. E., Potra, F. A., et al. Integral operators and delay differential equations. *Journal of Integral Equations and Applications* 18, 3 (2006), 297–336.

- [21] Guseinov, G., and Kaymakalan, B. Lyapunov inequalities for discrete linear hamiltonian systems. *Computers & Mathematics with Applications* 45, 69 (2003), 1399 – 1416. *Advances in Difference Equations*.
- [22] Halanay, A. *Differential equations: Stability, oscillations, time lags*, vol. 23. Academic Press, 1966.
- [23] Hochstadt, H. Functiontheoretic properties of the discriminant of hill's equation. *Mathematische Zeitschrift* 82, 3 (1963), 237–242.
- [24] Howard, J. E., and MacKay, R. S. Linear stability of symplectic maps. *Journal of Mathematical Physics* 28, 5 (1987), 1036–1051.
- [25] Insperger, T., and Stepan, G. *Semi-Discretization for Time-Delay Systems: Stability and Engineering Applications*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2011.
- [26] Jikuya, I., and Hodaka, I. A Floquet-like factorization for linear periodic systems. In *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on (2009)*, IEEE, pp. 6432–6437.
- [27] Kelley, W., and Peterson, A. *Difference Equations: An Introduction with Applications*. Harcourt/Academic Press, 2001.
- [28] Krein, M. G. *Foundations of Theory of  $\lambda$ -zones of Stability of a Canonical System of Liner Differential Equations with Periodic Coefficients (english translation)*. AMS Translations 120 (1983), 1–70.
- [29] Lyapunov, A. M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control* 55, 3 (1992), 531–773.
- [30] Magnus, W., and Winkler, S. *Hill's equation*. Courier Corporation, 2013.
- [31] Meyer, K. R., Hall, G. R., and Offin, D. C. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, second ed. Springer, 2009.
- [32] Montagnier, P., Paige, C. C., and Spiteri, R. J. Real Floquet factors of linear time-periodic systems. *Systems & control letters* 50, 4 (2003), 251–262.

- [33] Moore, R. A. The least eigenvalue of Hill's equation. *Journal d'Analyse Mathématique* 5, 1 (1956), 183–196.
- [34] Răsvan, V. Discrete time linear periodic hamiltonian systems and applications. In *Advances in Automatic Control*. Springer, 2004, pp. 297–313.
- [35] Răsvan, V. Stability zones for discrete time hamiltonian systems. *CDDE 2000* (2000), 563–573.
- [36] Rugh, W. *Linear System Theory*. Prentice Hall, 1996.
- [37] Staržinskiĭ, V. Survey of works on conditions of stability of the trivial solution of a system of linear differential equations with periodic coefficients. American Mathematical Society, 1955.
- [38] Stokes, A. A Floquet theory for functional differential equation. *Proceedings of The National Academy of Sciences* 48, 8 (1962), 1330–1334.
- [39] Swanson, C. A. *Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations*, vol. 48. Elsevier, 2000.
- [40] van der Pol, B., and Strutt, M. On the stability of the solutions of Mathieu's equation. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 5, 27 (1928), 18–38.
- [41] Wang, D. On symplectic difference schemes for Hamiltonian systems. Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1990.
- [42] Wang, X., and Hale, J. K. On monodromy matrix computation. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 190, 18 (2001), 2263–2275.
- [43] Yakubovich, V. A., and Starzhinskiĭ, V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients*, vol. 2. Wiley, 1975.
- [44] Zabczyk, J. *Mathematical Control Theory An Introduction*, second ed. Birkhauser, 1995.