



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Algunos comentarios sobre el Lema de Gronwall-Bellman para
sistemas afines en la entrada, enteros y fraccionarios**

Tesis que presenta

Lizbeth Sánchez Flores

Para Obtener el Grado de

MAESTRA EN CIENCIAS

En la Especialidad de

CONTROL AUTOMÁTICO

Director de la Tesis

Dr. Rafael Martínez Guerra

Zacatenco, Ciudad de México.

13 de septiembre de 2017.

Con todo mi cariño y amor a mis padres Isidra y Marcelo, por creer en mí, quererme y brindarme su apoyo incondicional. GRACIAS!

A mi compañero y amigo Juan Manuel, por su apoyo a lo largo de este tiempo y por contagiarme esas ganas de vivir al límite.

INTRODUCCIÓN

La estabilidad para sistemas dinámicos no lineales de orden fraccionario es un problema en que actualmente se trabaja para lograr establecer una teoría firme y establecer nuevos resultados.

Existen diversos métodos para estabilizar sistemas lineales de orden entero basados generalmente en técnicas para colocar los polos o en el uso de criterios para minimizar el error. El primer método de Lyapunov permite obtener una linealización de sistemas no lineales a la cual es posible aplicar los métodos existentes para sistemas lineales. En el caso de sistemas dinámicos de orden fraccionario no existe una formulación adecuada del método de Lyapunov, por lo que no es posible aplicar este enfoque a la teoría de control. Recientemente, Trigeassou propuso la aplicación del método de Lyapunov de sistemas fraccionarios lineales y no lineales mediante la definición de una función específica de Lyapunov.

Dado que la computación tradicional se basa en la diferenciación y la integración de orden entero, el concepto de computación fraccional tiene un enorme potencial para cambiar la forma en que vemos, modelamos y controlamos lo nos rodea. Varios estudios teóricos y experimentales muestran que algunos sistemas electroquímicos, térmicos y viscoelásticos se rigen por ecuaciones diferenciales con derivadas no enteras. Por lo tanto, el uso de modelos clásicos basados en una derivación de orden entero no es apropiado, para este propósito se han desarrollado modelos basados en ecuaciones diferenciales de orden no entero.

La razón principal para el uso de los modelos de orden entero fue la ausencia de métodos de solución para ecuaciones de orden fraccionario. En la actualidad se han propuesto diferentes métodos para la aproximación de la derivada y la integral de orden fraccionario que se pueden utilizar en diversas aplicaciones, especialmente en la teoría de control (nuevos controladores y modelos de sistemas fraccionarios), en la teoría de circuitos eléctricos, etc..

En este trabajo se enuncian resultados de estabilidad para sistemas lineales de orden fraccionario y se estudia la estabilización de sistemas no lineales de orden entero y fraccionario. Los sistemas contemplados en este trabajo para describir los sistemas en el tiempo se denominan sistemas no lineales de orden fraccionario afines en la entrada. En el caso lineal, el estudio de la dinámica requiere la noción de "polos" del sistema ya que la dinámica del mismo depende en gran medida de la ubicación de los polos. Estos polos se colocan por medio de una ley de control. En el caso de sistemas no lineales de orden fraccionario, los métodos de estabilización propuestos se basan en una generalización del lema de Gronwall-Bellman.

En 1918, T. Gronwall propuso la desigualdad de Gronwall-Bellman, (ver [4]) la cual es una herramienta importante en el estudio de conceptos como acotamiento, unicidad, estabilidad y otros aspectos del comportamiento cualitativo de soluciones de ecuaciones

diferenciales. Desde entonces, muchos autores han dado una serie de generalizaciones (ver [7], [10]), éstas han sido aplicadas significativamente en ecuaciones diferenciales e integrales tanto de orden entero como fraccionario.

En sistemas dinámicos no lineales (NL) de orden fraccionario existe poca teoría sobre estabilización utilizando desigualdades del tipo de Gronwall-Bellman. En 2011, N´doye (ver [9]) muestra algunos resultados para la estabilización de una clase particular de sistemas afines en la entrada y se han encontrado algunos problemas de tipo técnico en sus demostraciones. En este trabajo se pretende dar una corrección a dicha situación.

El presente trabajo esta organizado de la siguiente manera:

En la primera Parte se introducen algunos resultados sobre la función Mittag-Leffer y generalizaciones del Lema de Gronwall-Bellman que permiten mostrar la estabilidad exponencial de ciertos tipos de sistemas dinámicos NL.

La Parte II esta dividida en dos Capítulos; en el primero se presenta la estabilización para sistemas NL afines en la entrada de orden entero utilizando retroalimentación de estado estática (ver [9]). Estos resultados son comparados con los resultados obtenidos para un controlador dinámico. Por otro lado, en el segundo Capítulo se pretende extender el caso de sistemas no lineales afines en la entrada para el caso fraccionario y obtener condiciones necesarias que permitan garantizar la estabilidad exponencial.

Tanto para el caso de orden entero como fraccionario se muestran los resultados obtenidos mediante ejemplos numéricos ilustrativos.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	III
I Preliminares	1
Cálculo fraccionario	3
1.1 Función Gamma	3
1.2 Función mittag-Leffler	3
1.3 Derivada e integral fraccionaria	6
1.4 Transformada de Laplace	7
Sistemas fraccionarios	9
2.5 Sistemas dinámicos de orden fraccionario	9
2.6 Representación de estado	10
2.7 Estabilidad de sistemas fraccionarios lineales	10
Variantes del lema de Gronwall Bellman	13
II Estabilidad de Sistemas No Lineales Afines en la entrada	17
Sistemas de Orden Entero	19
4.8 Control por retroalimentacion de estado estática	19
4.8.1 Ejemplo numérico	20
4.9 Control por retroalimentación de estado dinámico	20
4.9.1 Ejemplo numérico	25
Sistemas de Orden Fraccionario	29
5.10 Control por retroalimentacion de estado estatica	30
5.10.1 Ejemplo numérico	32
5.11 Control por retroalimentacion de estado dinamica	32
5.11.1 Ejemplo numérico	37
Conclusiones	41

Parte I

Preeliminares

CÁLCULO FRACCIONARIO

A continuación se introducen algunos conceptos, propiedades y teoremas que serán útiles en el desarrollo de este trabajo.

1.1 FUNCIÓN GAMMA

La Función Gamma $\Gamma(z)$, fue desarrollada por Leonhard Euler, con el objetivo de generalizar la función factorial a valores no enteros

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds \quad (1)$$

donde $z \in \mathbb{C}$ con parte real $Re(z) > 0$. Una propiedad importante de la función Gamma es la siguiente

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z),$$

la cual permite obtener la función Gamma de un número entero positivo como

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

lo que muestra la relación de esta función con la función Factorial.

1.2 FUNCIÓN MITTAG-LEFFLER

Se sabe que la función exponencial juega un papel importante en la teoría de ecuaciones diferenciales de orden entero. La generalización de un parámetro de la función Mittag-Leffler se denota como:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (2)$$

la cual fue introducida por G. M. Mittag-Leffler. Al igual que la función exponencial para sistemas de orden entero, la función Mittag-Leffler de dos parámetros desempeña un papel muy importante en la teoría de Cálculo Fraccional y se define como

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0), \quad (3)$$

donde la función Gamma $\Gamma(z)$, esta definida por la Ecuación (1). Para $\beta = 1$, se tiene la siguiente relación

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z).$$

De la definición (3) se tiene la siguiente igualdad que muestra la relación que existe entre la Función Mittag-Leffler y la Función Exponencial

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$$

En la Figura 1 se representa la función $E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ para distintos valores de $\alpha \in (0,2]$. En la cual se aprecia que tiene caracter oscilatorio cuando $\alpha > 1$ y además para $\alpha = 1$ se recupera el caso entero pues $E_{1,1}(-t) = \exp(-t)$, mas aún para $0 < \alpha < 2$, la función $E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ tiende a cero a medida que t tiende a infinito, esta característica se debe a que la función de Mittag-Leffler de dos parámetros tiene una cota dinámica de acuerdo al Lema 1.1.

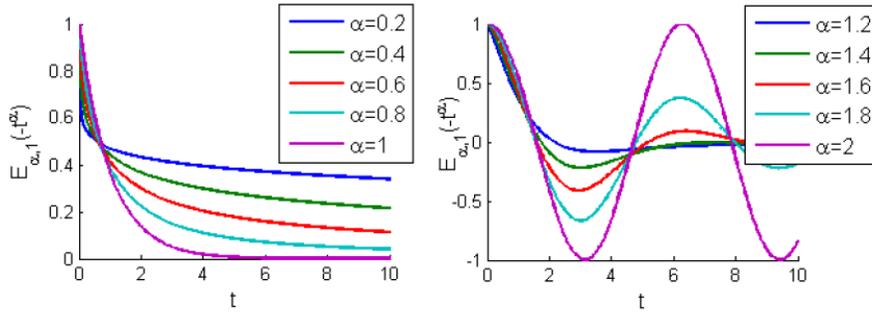


Figura 1: Funciones Mittag-Leffer $E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$

Podlubny propuso el Lema (ver [11]), que describe de manera general el comportamiento de la Función Mittag-Leffler de dos parámetros.

Lema 1.1. [11] Sean $0 < \alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ arbitrario, η tal que $0.5\alpha\pi < \eta < \min\{\pi, \pi\alpha\}$ y $M > 0$ una constante real, entonces

$$E_{\alpha,\beta}(z) \leq \frac{M}{1+z}, \quad \eta \leq |\arg(z)| \leq \pi, \quad |z| \geq 0$$

Por su parte Wu propuso el siguiente Corolario para una matriz de dimensión n , el cual sera de gran utilidad para mostrar la estabilidad de sistemas de orden fraccionario.

Corolario 1.2. [11] Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ arbitrario, η tal que $0.5\alpha\pi < \eta < \min\{\pi, \pi\alpha\}$ y $C > 0$ una constante real, entonces

$$\|E_{\alpha,\beta}(A)\| \leq \frac{C}{1+\|A\|}, \quad \eta \leq |\arg(\lambda_i(A))| \leq \pi, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4)$$

Demostración. Si la matriz A tiene diferentes valor propios, existe una transformación T no-singular tal que

$$\Lambda = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (5)$$

de donde

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha,\beta}(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T\Lambda T^{-1})^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
 &= T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} T^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} E_{\alpha,\beta}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\alpha,\beta}(\lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{\alpha,\beta}(\lambda_n) \end{bmatrix} \\
 &= TE_{\alpha,\beta}(\Lambda)T^{-1}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Aplicando la norma l_2 a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
 \|E_{\alpha,\beta}(A)\| &\leq \|T\| \|E_{\alpha,\beta}(\Lambda)\| \|T^{-1}\| \\
 &= \|T\| \|T^{-1}\| \frac{M}{1 + \|A\|},
 \end{aligned} \tag{7}$$

donde $M/(1 + \|A\|) \geq \max_{1 \leq i \leq n} (M_i / (1 + |\lambda_i|))$. Similarmente, si la matriz A tiene valores propios repetidos

$$J = P^{-1}AP = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r) \tag{8}$$

obteniendo así,

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha,\beta}(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P\Lambda P^{-1})^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
 &= P \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} P^{-1} \\
 &= PE_{\alpha,\beta}(J)P^{-1}.
 \end{aligned} \tag{9a}$$

Al aplicar la norma a ambos lados de (9), se tiene

$$\begin{aligned}
 \|E_{\alpha,\beta}(A)\| &\leq \|P\| \|E_{\alpha,\beta}(\Lambda)\| \|P^{-1}\| \\
 &= \|P\| \|P^{-1}\| \frac{M}{1 + \|A\|},
 \end{aligned} \tag{10}$$

Por lo tanto, resumiendo los dos casos anteriores se tiene

$$\|E_{\alpha,\beta}(A)\| \leq \frac{\theta}{1 + \|A\|}, \quad \eta \leq |\arg(\lambda_i(A))| \leq \pi, \quad 1 \leq i \leq n \tag{11}$$

donde $\theta = \max \{M, \|T\| \|T^{-1}\| M, \|P\|, \|P^{-1}\| M\}$. ■

1.3 DERIVADA E INTEGRAL FRACCIONARIA

A continuación se presentan algunos resultados y notaciones del cálculo elemental que servirán como punto de partida para enunciar algunas propiedades de los operadores de integración y derivación fraccionaria. Como se sabe que la n -ésima derivada de una función f está definida recursivamente por

$$D^n f(t) = D [D^{n-1} f(t)], \quad n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

En el mismo sentido la n -ésima integral esta definida como

$$I^n f(t) = \int_0^t I^{n-1} f(t) df, \quad (13)$$

y puede ser reducida a una integral de tipo convolución, este resultado es conocido como *Fórmula de Cauchy*, la cual es expresada por

$${}_{t_0} J_t^n x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau, \quad \tau > c, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (14)$$

Esta fórmula marco el inicio de la integral fraccionaria ya que de una forma natural se puede extender la validez de la fórmula anterior a valores reales positivos utilizando la función Gamma definida en la ecuación (1). Tomando en cuenta que $(n-1)! = \Gamma(n)$, e introduciendo el número real positivo α , se puede definir la integral fraccionaria de orden α como:

$${}_{t_0} J_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad (15)$$

A partir de la definición de integral fraccionaria (15) han surgido diferentes formulaciones para la derivada fraccionaria.

Estas formulaciones surgen como consecuencia del intento de recuperar la propiedad que se tiene en el caso de orden entero $D^n J^n = I$, es decir, que la derivada n -ésima constituye una inversa por la izquierda de la integral de orden n .

Observación 1.3. *A lo largo de este trabajo se utilizara la siguiente notación para la derivada fraccionaria propuesta por H.T. Davis [2]*

$${}_a D_t^\alpha f(t), \quad (16)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ denota la condición inicial, t es la variable a la cual se aplica el operador de derivación fraccionaria y el valor $\alpha \geq 0 \in \mathbb{R}$ denota el orden de derivación.

Existen diferentes definiciones para el operador de derivación fraccionaria que no son siempre equivalentes. Aquí se presentan dos definiciones que son comúnmente utilizadas.

La derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville es la más conocida. Esta definición se basa en la primitiva de la integral k -ésima de una función, que naturalmente se puede extender a un número real α y cuando este valor esta entre dos números enteros, $n-1 < \alpha < n$, recibe el nombre de Derivada Fraccional en el sentido de Riemann-Liouville y se define como la derivada entera de cierta integral fraccionaria

Definición 1.4 (Derivada de Riemann-Liouville). Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$). La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{C}(\operatorname{Re}(\alpha) \leq 0)$ de f se define, si existe, por

$${}^R D_t^\alpha f(t) = {}_{t_0} D^m J_t^{m-\alpha}(f(t)) = \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{t-\tau^{1-m+\alpha}} d\tau \right) \quad (17)$$

Observación 1.5. Cuando α es un número natural, $\alpha \in \mathbb{N}$, se tiene que $n = \alpha + 1$ y la derivada fraccionaria coincide con la derivada usual:

$$D_{t_0}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{\alpha+1} \left(I_{t_0}^{(\alpha+1)-\alpha} f \right) (t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{\alpha+1} (I_{t_0} f)(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^\alpha f(t). \quad (18)$$

En particular $D_{t_0}^0$ será el operador identidad, es decir, $D_{t_0}^0 f(t) = f(t)$.

La Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville juega un papel determinante en el desarrollo de la teoría de Cálculo Fraccionario, y se utiliza con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Sin embargo al tratar de obtener modelos matemáticos de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surge el problema de las condiciones iniciales también de orden fraccional. Este tipo de condiciones no son físicamente interpretables y presentan un obstáculo considerable a la hora de hacer uso del Cálculo Fraccionario. En 1967 Caputo [1] propone el operador de Derivada Fraccionaria de Caputo, que en contraste con el de Riemann-Liouville, emplea como condiciones iniciales derivadas de orden entero, es decir, valores iniciales que son físicamente interpretables a la manera tradicional, lo cual representa un avance práctico en el estudio de fenómenos físicos. Este operador corresponde a integrar en un orden fraccionario la derivada de orden entero de la función.

Definición 1.6 (Derivada de Caputo). Sea $\alpha \in \mathbb{C}(\operatorname{Re}(\alpha) \leq 0)$ y f función absolutamente continua, $f \in AC^n[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$), con $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$. La derivada fraccional como función de t de Caputo de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se define por

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{d^m f(\tau)}{d\tau^m} (t-\tau)^{m-\alpha-1} d\tau, \quad (19)$$

donde $m-1 \leq \alpha < m$, $\frac{d^m f(\tau)}{d\tau^m}$ es la m -ésima derivada de x en el sentido usual, $m \in \mathbb{N}$ y Γ representa la función Gamma definida en (1).

1.4 TRANSFORMADA DE LAPLACE

La Transformada de Laplace de una función $f(t)$ está definida por

$$F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\} = \int_0^{-st} f(t) dt. \quad (20)$$

En varios textos se mencionan y analizan las propiedades de la Transformada de Laplace aplicada a las definiciones de la derivada e integral de orden fraccionario; a continuación se mencionan algunas propiedades importantes.

La Transformada de Laplace de la Integral de Riemann-Liouville se describe como

$$\mathcal{L} \{ {}_0I_t^\alpha f(t) \} = s^{-\alpha} F(s), \quad \alpha \geq 0. \quad (21)$$

La Transformada de Laplace de la Derivada de Riemann-Liouville está dada por

$$\mathcal{L} \{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k ({}_0D_t^{\alpha-k-1} f(0)) \quad (22)$$

$$m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0,$$

donde ${}_0D_t^{\alpha-k-1} f(0)$ es el valor inicial de la derivada de orden $\alpha - k - 1$ de la función $f(\cdot)$, para $0 \leq k \leq m - 1$. Ahora bien, la transformada de Laplace de la Derivada de Caputo es

$$\mathcal{L} \{ {}_0^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} (D^{(k)} f(0)) \quad (23)$$

$$m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0,$$

donde $D^{(k)} f(0)$ es el valor inicial de la derivada de orden k de la función $f(\cdot)$, para $0 \leq k \leq m - 1$.

SISTEMAS FRACCIONARIOS

2.5 SISTEMAS DINÁMICOS DE ORDEN FRACCIONARIO

De la misma forma que en el Cálculo Ordinario, las ideas de derivación e integración de orden fraccionario conducen al concepto de ecuación diferencial. Una relación que involucra uno o más operadores fraccionarios aplicados a una función desconocida f , se conoce como Ecuación Diferencial de Orden Fraccionario (EDF). Gran parte de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias tienen una correspondencia fraccionaria más o menos natural. Por ejemplo, una EDF de orden α necesita $[Re(\alpha)] + 1$ condiciones iniciales para ser resuelta de manera única. Sin embargo surgen también notables diferencias, una de ellas es el hecho de que una misma EDF tiene diferentes significados según el operador fraccionario que se aplica, ya sea Riemann-Liouville, Caputo u algún otro.

Ahora que ya se tienen las definiciones y conceptos principales de Cálculo Fraccionario en este Capítulo se muestra un análisis de los sistemas descritos por EDF.

Es posible formular las ecuaciones que forman un sistema dinámico de orden fraccionario, lineal, monovariante e invariante en el tiempo, de la forma

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k} u(t). \quad (24)$$

En la ecuación anterior se pueden considerar dos casos particulares: los sistemas de orden conmensurable y los sistemas de orden racional, los cuales se definen como sigue:

Definición 2.7. *Un sistema es de orden conmensurable si queda descrito por una ecuación diferencial donde todos los órdenes de derivación son múltiplos enteros de un orden base, α . Es decir, sistemas para los que se cumple que*

$$\alpha_k, \beta_k = k\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (25)$$

Así, la ecuación diferencial (24) se puede reescribir de la forma

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t). \quad (26)$$

Definición 2.8. *El sistema es de orden racional si es orden conmensurable y además cumple que $\alpha = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{Z}^+$.*

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 24, considerando que $x(t) \in \mathbb{R}$ y condiciones iniciales nulas, se obtiene la representación entrada-salida de los sistemas fraccionarios. Para el caso de modelos continuos la función de transferencia del sistema es de la forma

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{\beta_k}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{\alpha_k}}. \quad (27)$$

2.6 REPRESENTACIÓN DE ESTADO

Representación espacio-estado de la forma

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{x} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned} \quad (28)$$

donde $\alpha = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$ es el vector de entradas, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ el vector de estados, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ vector de salidas, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ es la matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matriz de salida y $D \in \mathbb{R}^{p \times l}$.

Cabe mencionar que para sistemas fraccionarios de orden conmensurable se pueden obtener representaciones de estado equivalentes a las comúnmente utilizadas para sistemas de orden entero definiendo $D^\alpha x_k = x_{k+1}$, para $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Uno de los problemas que plantea la representación de estados de los sistemas fraccionarios es la falta de una definición física de las variables de estado. Si bien hay representaciones de estado para los sistemas de orden entero en las cuales las variables de estado no tienen correspondencia con magnitudes físicas definidas y medibles, cualquiera de ellas puede reducirse a otra en la cual sí la tengan. Así, vemos que el problema de la interpretación de las variables de estado está relacionado con la posibilidad de medir las magnitudes físicas asociadas, y hasta el momento no se han dado soluciones satisfactorias para los sistemas fraccionarios.

2.7 ESTABILIDAD DE SISTEMAS FRACCIONARIOS LINEALES

Es bien sabido que la estabilidad es una propiedad muy importante de los sistemas dinámicos, la cual ha sido estudiada en diferentes dominios. Por ejemplo, estabilidad BIBO (bounded input- bounded output) o la estabilidad externa en el *dominio del tiempo*. Otro dominio muy importante es el dominio de frecuencia en el cual se transforma el plano s en el plano complejo $G_0(j\omega)$ para analizar la estabilidad y donde dicha transformación esta definida por la función de transferencia en lazo abierto. Sin embargo, para el análisis de estabilidad de sistemas fraccionarios no es posible utilizar directamente las herramientas algebraicas que se tiene para sistemas de orden entero. Por ejemplo, el criterio de Ruth-Hurwitz no es aplicable a sistemas de orden fraccionario puesto que no se tiene un polinomio característico sino un pseudopolinomio característico con potencias racionales

$$P(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}.$$

Es importante notar que $P(s)$ es una *función multivaluada* de la variable compleja s cuyo dominio puede verse como una superficie de Riemann, este tipo de superficies suele dividirse en subconjuntos denominados hojas de Riemann, la hoja definida por $k = -1$ es denominada la hoja principal y denotada por:

$$s = |s| e^{j\phi}, \quad -\pi < \phi < \pi. \quad (29)$$

La definición de hoja principal de Riemann supone un corte a lo largo de \mathbb{R}^- , preserva las propiedades hermíticas de las raíces y se corresponde con el valor principal de Cauchy de la integral correspondiente a la transformación inversa de Laplace, es decir, aquél que se obtiene directamente aplicando el Teorema de Residuos. A las raíces que están en dicha hoja se les denomina raíces relevantes. Los sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI) de orden entero son estables si todas las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa. Para el caso fraccionario este hecho difiere.

Hechas la consideraciones previas del apartado anterior, se pueden establecer las condiciones de estabilidad de sistemas fraccionarios.

Considere el sistema LTI de orden conmensurable que se presenta en (30)

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \quad 0 < \alpha < 2 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (30)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vector de entrada y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ vector de salida, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^n$ matriz de control, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ matriz de observación, y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la condición inicial del sistema.

Definición 2.9. [6] *Estabilidad Interna*

El sistema autónomo $D^\alpha x(t) = Ax(t)$ se dice estable si y solo si

$$\forall x_0 \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall t \geq 0, \quad \|x(t)\| < M.$$

Además se dice asintóticamente estable si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

Con respecto a la estabilidad interna del sistema (30), Matignon en 1996 plantea el siguiente Teorema

Teorema 2.10. [6] *El sistema fraccionario lineal de orden conmensurable e invariante en el tiempo (30) es:*

- *Asintóticamente estable si y solo si $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ $\lambda_i \in \sigma(A)$, $1 \leq i \leq n..$ En este caso las componentes decaen a cero como $t^{-\alpha}$.*
- *Estable si y solo si es asintóticamente estable, o si los valores propios críticos que satisfacen $|\arg(\lambda_i)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ tienen multiplicidad geométrica uno.*

Observación 2.11. *Un sistema lineal definido por una matriz de evolución de estados A puede resultar inestable para sistemas de orden entero pero ser estable para algún $\alpha < 1$ ya que como se muestra en la Figura 2, se amplía el sector en el plano complejo en que se pueden ubicar los valores propios de la matriz A para que el sistema sea estable.*

En cuanto a estabilidad externa, también conocida como estabilidad BIBO, se tienen los resultados [6].

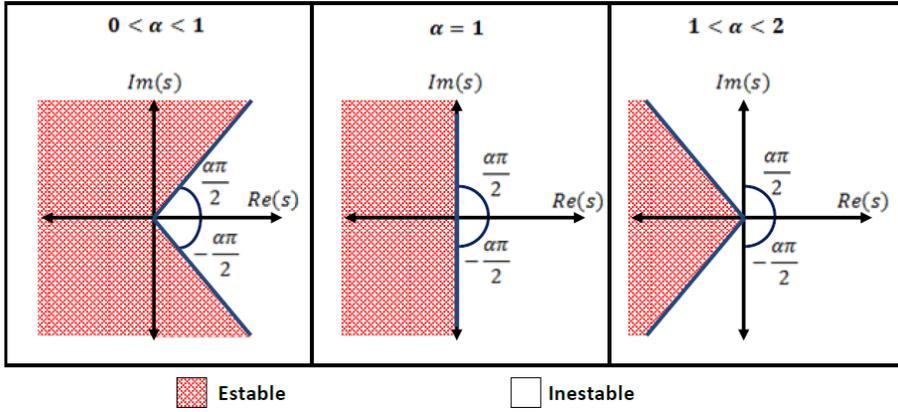


Figura 2: Dominio de estabilidad de Sistemas Fraccionarios LTI.

Definición 2.12. [6] *Estabilidad Externa.* Un sistema es BIBO estable si y solo si para una entrada acotada la salida del sistema también lo es

$$u(t) \in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow y(t) \in \mathcal{L}^\infty. \quad (31)$$

Teorema 2.13. [6] Si la tripleta (A, B, C^T) es mínima (es decir controlable y observable) se tiene que el sistema (30) es BIBO estable si y sólo si $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$.

Para los sistemas fraccionarios lineales de orden racional no conmensurable en [3] se propone una formulación de tal manera que al aumentar el número de estados del sistema, la formulación lo transforma a un sistema de orden conmensurable y se obtienen condiciones para su estabilidad.

Una condición suficiente y necesaria para la estabilidad de sistemas fraccionarios de la forma (30) mediante LMI esta dada por el siguiente lema:

Lema 2.14. Un sistema fraccionario de la forma (30) es estable si existe una matriz $P = P^T > 0$ tal que:

$$\begin{bmatrix} (AP - PA^T) \text{sen}(\theta) & (AP - PA^T) \text{cos}(\theta) \\ (PA^T - AP) \text{cos}(\theta) & (AP + PA^T) \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

donde $\theta = \pi - \alpha\frac{\pi}{2}$.

VARIANTES DEL LEMA DE GRONWALL BELLMAN

En 1953, R. Bellman menciona en su libro "Stability Theory of Differential Equations", que las desigualdades de Gronwall de tipo integral de una variable para funciones reales desempeñan un papel muy la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales. Lo cual es aplicable también para EDF.

El objetivo principal de esta sección es presentar algunas variantes de las desigualdades de Gronwall, más específicamente aquellas que se desprenden del Lemma de Gronwall-Bellman y que bajo los supuestos adecuados garantizan la estabilidad del sistema mediante retroalimentación de estado estática y dinámica, todo esto para sistemas dinámicos.

Lema 3.15. *Lema estandar de Gronwall-Bellman.*

Sean

- f, g y k funciones definidas de $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e integrables localmente,
- $g \geq 0$ y $k \geq 0$,
- $g \in \mathcal{L}_\infty$,
- g, k es integrable localmente en \mathbb{R}^+ .

Si $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisface la siguiente desigualdad

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t k(\tau)u(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0 \quad (33)$$

entonces

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t k(\tau)f(\tau) \exp \int_\tau^t k(s)g(s)dsd\tau, \quad \forall t \geq 0. \quad (34)$$

H. Movljankulov y A. Filatov [8] demostraron el Teorema 3.16, que da paso a una generalización que será enunciada más adelante y cuyo papel en la demostración de estabilidad para sistemas de orden fraccionario es trascendental.

Teorema 3.16. *Sea $x(t)$ una función real, continua y no negativa tal que*

$$x(t) \leq c + \int_0^t k(t,s)x(s)ds, \quad c > 0, \quad (35)$$

donde $k(t,s)$ es una función continuamente diferenciable en t y continua en s , con $k(t,s) \geq 0$ para $t > s \geq 0$. Entonces

$$x(t) \leq c \exp \left(\int_0^t \left(k(s,s) + \int_0^s \frac{\partial k}{\partial s}(s,r)dr \right) ds \right). \quad (36)$$

Para mostrar la estabilidad de sistemas no lineales afines en la entrada de orden entero (definidos mas adelante), la siguiente generalización [9], da una cota para las soluciones de dichos sistemas.

Lema 3.17. *Generalización del Lemma de Gronwall-Bellman.*

Sean las funciones ψ , φ , b y k continuas y no negativas en el intervalo, $J = [\alpha, \beta]$, n un entero positivo, $n \geq 2$ y la función φ/b no decreciente. Si,

$$\psi(t) \leq \varphi(t) + b(t) \int_{\alpha}^t k(s) \psi^n(s) ds, \quad t \in J, \quad (37)$$

entonces

$$\psi(t) \leq \varphi(t) \left\{ 1 - (n-1) \int_{\alpha}^t k(s) b(s) \varphi^{n-1}(s) ds \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (38)$$

$$\alpha \leq t \leq \beta_n,$$

donde $\beta_n = \sup \{t \in J : (n-1) \int_{\alpha}^t k b \varphi^{n-1} ds < 1\}$.

Para el caso de sistemas no lineales afines en la entrada de orden fraccionario es necesario utilizar una generalización un tanto diferente, no es posible aplicar la generalización dada en el Lema 3.17, puesto que existiría una inconsistencia.

Teorema 3.18. *Sea ψ una función continua y no negativa y $k(t, s)$ una función continuamente diferenciable en la variable t continua en la variable s , además $k(t, s) \geq 0$ para $t \geq s \geq t_0$. Si*

$$\psi(t) \leq c + \int_{t_0}^t k(t, s) \psi^n(s) ds, \quad c > 0, \quad (39)$$

entonces

$$\psi(t) \leq \left[c^{-(n-1)} - (n-1) \left\{ \int_0^t \left[k(t, t) + \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} k(s, r) dr \right] ds \right\} \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (40)$$

La demostración se puede consultar en [10].

Un resultado que será de gran utilidad para demostrar la estabilidad de sistemas dinámicos afines en la entrada, controlados mediante una retroalimentación de estado dinámica, es el siguiente

Lema 3.19. *Sean las funciones ψ , φ , b y k continuas y no negativas en el intervalo, $J = [\alpha, \beta]$, n un entero positivo, $n \geq 2$ y la función φ/b no decreciente. Si,*

$$\psi(t) \leq \varphi(t) + \int_{\alpha}^t k_1(s) \psi^n(s) + k_2 \psi^m(s) ds, \quad t \in J, \quad (41)$$

entonces

$$\psi(t) \leq \varphi(t) \left[1 - (n+m-2) \int_{\alpha}^t k_1(s) \varphi^{n-1}(s) + k_2(s) \varphi^{m-1}(s) ds \right]^{\frac{1}{n+m-2}} \quad (42)$$

$$\alpha \leq t \leq \beta_n,$$

donde

$$\beta_n = \sup t \in J : (n + m - 2) \int_{\alpha}^t k\varphi^{n-1} + k\varphi^{m-1} ds < 1.$$

Parte II

Estabilidad de Sistemas No Lineales Afines en la entrada

SISTEMAS DE ORDEN ENTERO

En la primera parte de esta sección se analizan las condiciones que garantizan la estabilidad exponencial para sistemas de la forma (43) controlados por una retroalimentación de estado estática. En la segunda se presentan las condiciones que garantizan la estabilidad exponencial de sistemas de la forma (43) con una retroalimentación de estado dinámica.

En este trabajo se consideran sistemas no lineales (SNL) afines en la entrada de orden entero de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^n g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{43}$$

donde A, B, C , son matrices constantes, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $y \in \mathbb{R}^p$ denota el vector de salida y $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada.

4.8 CONTROL POR RETROALIMENTACION DE ESTADO ESTÁTICA

El siguiente Teorema fue enunciado y demostrado por N'Doye (ver [9]) para SNL afines en la entrada de orden entero controlados por una retroalimentación de estado estática. Este teorema es enunciado con la finalidad de comparar las hipótesis y resultados que se obtienen para sistemas controlados por retroalimentación de estado dinámica.

Teorema 4.20. *Considere que los SNL afines en la entrada, de la forma (43) satisfacen las siguientes condiciones*

- Para $i = 1, \dots, m$, existe un entero $q \geq 1$, tal que

$$\|g_i(x(t))\| \leq \mu_i \|x(t)\|^q, \tag{44}$$

donde μ_i son constantes positivas y $g_i(0) = 0$. Se define $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i$.

- El par (A, B) es estabilizable.

entonces el sistema (43) que es controlado mediante una retroalimentación de estado estática, $u(t) = Kx(t)$, es exponencialmente estable si existe K tal que todos los valores propios de la matriz $(A + BK)$ tiene parte real negativa y la condición inicial satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} 0 &< \|x_0\| \leq \epsilon_0, \\ \epsilon_0^q &< \frac{|\omega|}{\mu \|L\| M^{q+1}}, \end{aligned} \tag{45}$$

las constantes $M > 0$ y $\omega < 0$ están dadas por la desigualdad:

$$\| \exp((A + BK)t) \| < M \exp(\omega t), \quad \forall t \geq 0.$$

Ademas, la norma del estado, $x(t)$, esta acotada por

$$\|x(t)\| \leq \frac{\epsilon_0 M \exp(\omega t) \|x_0\|}{\left(1 - \frac{M^{q+1} \mu \|L\| \epsilon_0^q \|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}}. \quad (46)$$

La demostración se encuentra en [9].

4.8.1 Ejemplo numérico

Para el caso de retroalimentación de estado estática se considera el sistema definido por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + G(x) + u \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (47)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0] \quad (48)$$

A continuación se calculan las constantes necesarias para calcular numéricamente una cota para la $\|x\|$ dada por (46).

La desigualdad $\|g_1(x)\| = \|A_1 x\| \leq \mu \|x\|^q$,¹ se satisface para las constantes $\mu = 2$ y $q = 1$, ya que $\|A_1\| \leq 2$. Y haciendo $K = [-1 \quad -2]$, los valores propios de la matriz $(A_0 + BK)$ son $\lambda_{c1} = -3$ y $\lambda_{c2} = -4$. La Figura 3 muestra el comportamiento del sistema con el control $u = Kx$. Dado que la matriz $(A_0 + BK)$ tiene valores propios con parte real negativa es posible encontrar constantes M y ω , tales que se satisface la desigualdad $\| \exp^{(A+BK)t} \| < M e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$, en este ejemplo dichas constantes son $M = 1$ y $\omega = -3$. Finalmente el intervalo para la condición inicial queda determinado al sustituir los valores de las constantes requeridas en la ecuación (45), obteniendo

$$\|x_0\| \leq \frac{|\omega|}{2\mu M^{q+1} \|L\|} \leq 12. \quad (49)$$

Ahora que se han calculado todas las constantes necesarias es posible calcular numéricamente una cota para $\|x\|$, el resultado se ilustra en la Figura 4.

4.9 CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADO DINÁMICO

La forma de los SNL afines dada por (43) permite realizar un cambio de variable (ver [5]) para llevar al sistema (43) a la forma (50), la cual permite diseñar el control dinámico que será utilizado en esta subsección.

¹ $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T * A)}$, $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

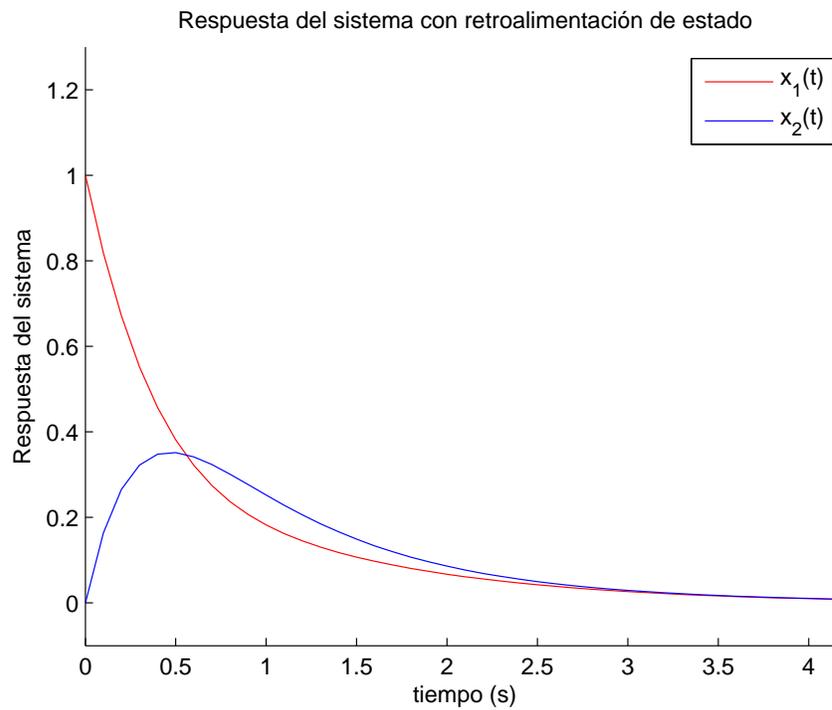


Figura 3: Comportamiento de la solución $x(t)$, con condición inicial $x_0 = [1 \ 0]$, donde se puede ver que las soluciones son exponencialmente estables al utilizar el control $u = Kx$

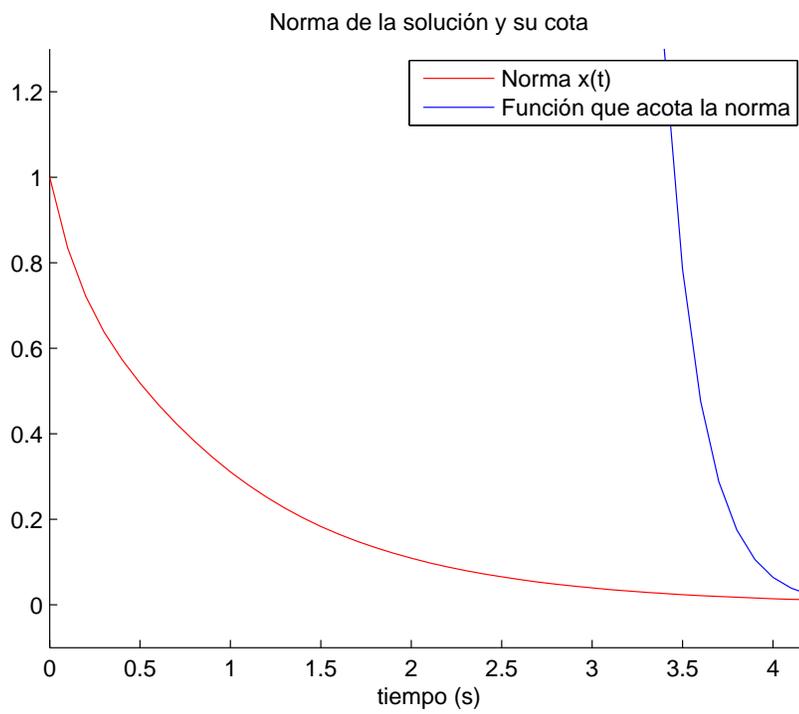


Figura 4: Comportamiento de la norma de $x(t)$ y cota numérica encontrada teóricamente para $\|x\|$, donde se nota claramente que la $\|x\|$ se encuentra completamente acotada.

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= \psi(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) + \bar{u} \\
 u_1 &= u, \\
 \dot{u}_1 &= u_2 \\
 \dot{u}_2 &= u_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{u}_n &= \bar{u} = -\psi(z, u_1, u_2, \dots, u_n) = \bar{K}z.
 \end{aligned} \tag{50}$$

El Control \bar{u} es definido como en (50) y el vector de ganancias \bar{K} , es tal que la matriz

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_n
 \end{bmatrix} \tag{51}$$

tiene valores propios con parte real negativa.

Regresando al sistema original (43) y al aplicar el control dinámico, \bar{u} diseñado en la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + G(x)u + Bu, \\
 u_1 &= u, \\
 \dot{u}_1 &= u_2 \\
 \dot{u}_2 &= u_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{u}_n &= \bar{u}.
 \end{aligned} \tag{52}$$

El siguiente Teorema establece condiciones suficientes para garantizar la estabilidad exponencial de las trayectorias para el caso de SNL afines en la entrada de la forma (52).

Teorema 4.21. *Los sistemas de la forma (52) que satisfacen:*

- *La parte no lineal, $G(x)$, esta acotada de la siguiente manera*

$$\|G(x)\| \leq \mu \|x\|^q. \tag{53}$$

- *El control u es acotado por $\|u\| \leq \rho \|x\|^p$, y al menos sus n primeras derivadas son acotadas.*
- *La matriz A tiene todos sus valores propios con parte real negativa.*

Son sistemas exponencialmente estables si existe K tal que la matriz dada en la ecuación (51) tiene valores propios con parte real negativa y la condición inicial del sistema (52) satisface la siguiente desigualdad

$$0 < \|\bar{x}_0\| \leq \epsilon_0, \quad (54)$$

para ϵ_0^{2p+q-2} tal que la siguiente función, $v(\epsilon_0)$, es mayor a 1

$$\begin{aligned} v(\epsilon_0) = & (2p + q - 2) \left[(M\epsilon_0)^{p-1} \int_0^t MB\rho \exp((p-1)\tau\omega) d\tau \right] + \\ & + (2p + q - 2) \left[(M\epsilon_0)^{q+p-1} \int_0^t M\mu\rho \exp((q+p-1)\tau\omega) d\tau \right] \end{aligned} \quad (55)$$

las constantes $M > 0$ y $\omega < 0$ están dadas por la desigualdad:

$$\|\exp((A)t)\| < M \exp(\omega t), \quad \forall t \geq 0.$$

Ademas, la norma del estado, $x(t)$, esta acotada por

$$\|x(t)\| \leq \frac{\epsilon_0 M \exp(\omega t) \epsilon_0}{\left(1 - \frac{M^{q+1} \mu \epsilon_0^q \epsilon_0^{q-1}}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q-1}}}. \quad (56)$$

Demostración

La solución del sistema (52) esta dada por

$$x(t) = \exp(A(t)) x_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau)) u(\tau) [B + G(x)] d\tau. \quad (57)$$

Aplicando la norma a ambos lados de la igualdad y sustituyendo las cotas para las funciones $\exp(At)$, $G(x)$ y la condición inicial se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \leq & M \exp(\omega t) \epsilon_0 + \\ & + \int_0^t M \exp(\omega t) \exp(-\omega \tau) [\|B\| \rho \|x\| + \mu \rho \|x\|^{q+p}] d\tau, \end{aligned} \quad (58)$$

equivalentemente se tiene

$$\begin{aligned} \|x\| \exp(-\omega t) \leq & M \epsilon_0 + \\ & + MB\rho \int_0^t \exp((p-1)\omega\tau) \|x\|^p \exp(-p\omega\tau) d\tau + \\ & + M\mu\rho \|u\| \int_0^t \exp((q+p-1)\omega\tau) \exp(-(q+p)\omega\tau) \|x\|^q d\tau, \end{aligned} \quad (59)$$

Por ultimo aplicando el Lema 3.19 para las funciones

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \|x\| \exp(-\omega\tau) \\ \varphi(t) = & M \epsilon_0 \\ k_1(t) = & MB\rho \mu \exp((p-1)\omega\tau) \\ k_1(t) = & M\mu\rho \exp((q+p-1)\omega\tau) \end{aligned} \quad (60)$$

y dado que ϵ_0 satisface la desigualdad (55), la expresión para la cota de las soluciones $x(t)$ es

$$\|x\| \leq \frac{\epsilon_0 \exp(\omega t) \epsilon_0}{(1 - \nu(\epsilon_0))^{1/(2p+q-1)}} \quad (61)$$

■

4.9.1 Ejemplo numérico

A continuación se ilustran los resultados obtenidos para la estabilidad exponencial con un ejemplo particular de la forma (52).

El sistema transformado obtenido para (47) está dado a partir de $y = x_1 = z_1$. La transformación que resulta es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \psi(z_1, z_2, u) + \dot{u} \\ \dot{u} &= -\psi(z_1, z_2, u) + kz \end{aligned} \quad (62)$$

Los valores para las constantes requeridas son calculados análogamente al caso de retroalimentación de estado estática y los valores que resultan son: $\mu = 2$, $q = 2$, $p = 2$, $M = 1$ y $\omega = -3$. Sustituyendo estos valores en (55) y posteriormente en la desigualdad (56) se obtiene una función que acota la norma de la solución, $\|x\|$,

$$\|x(t)\| \leq \frac{x_0 \exp(-3t) 0.53}{(1 - \nu(\epsilon_0))^{1/4}}.$$

donde la condición inicial satisface

$$\|x_0\| \leq \epsilon_0 = 0.53 \quad (63)$$

En las Figuras 7 y 8 se observan los resultados de las simulaciones obtenidas en MatLab.

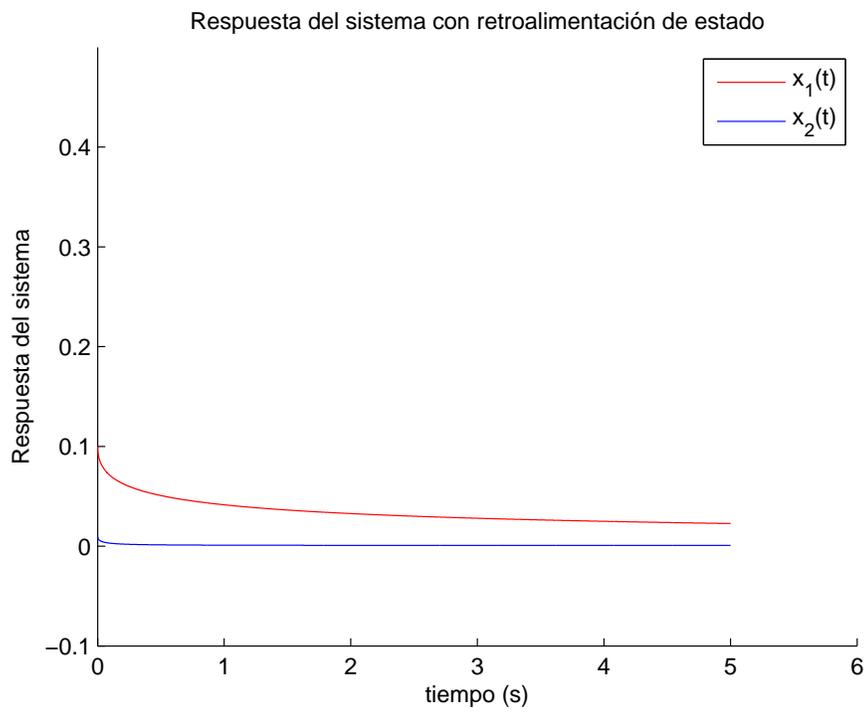


Figura 5: Comportamiento de las soluciones del sistema, con condición inicial $x_0 = [0,1 \quad 0,01]$, con el control $u = Kx$

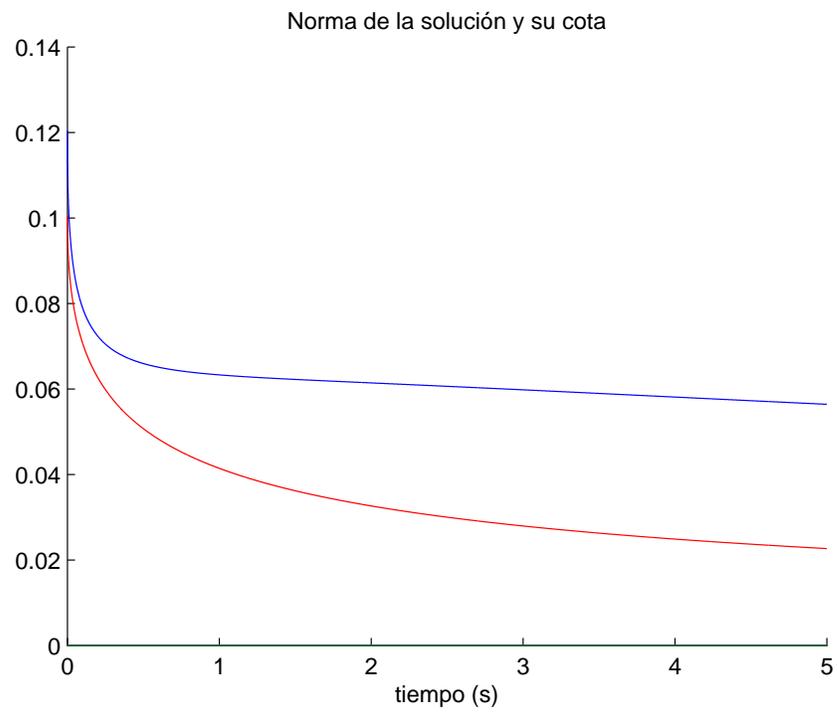


Figura 6: En color rojo se muestra el comportamiento de la norma de la solución, $\|x(t)\|$, y en color azul la cota obtenida teóricamente.

SISTEMAS DE ORDEN FRACCCIONARIO

En este trabajo se estudian sistemas descritos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^n g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (64)$$

Donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ el control, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ vector de salida, A, B y C son matrices constantes de dimensiones adecuadas.

Los sistemas no lineales afines en la entrada fraccionarios descritos en (64) satisfacen las siguientes condiciones:

Hipótesis 5.22. 1. Las funciones no lineales $g_i(x(t))$ son medibles y $g_i(0) = 0$, para $i = 1, \dots, m$.

2. Para todo $i = 1, \dots, m$ existe un entero $q \geq 1$, tal que

$$\|g_i(x(t))\| \leq \mu_i \|x(t)\|^q, \quad (65)$$

donde μ_i son constantes positivas.

3. El par (A, B) es estabilizable.

4. El par C, A es detectable.

En el resto del trabajo la variable μ esta definida como:

$$\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i \quad (66)$$

Para las simulaciones numéricas se utilizan sistemas bilineales de la forma:

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= A_0x(t) + \sum_{i=1}^n u_i A_i x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (67)$$

los cuales son un caso particular de sistemas afines no lineales fraccionarios.

Los teoremas mencionados en este capítulo serán utilizados para demostrar los siguientes teoremas referentes a la estabilización de sistemas afines no lineales fraccionarios.

5.10 CONTROL POR RETROALIMENTACION DE ESTADO ESTÁTICA

El siguiente teorema establece condiciones para la estabilidad exponencial de sistemas de orden fraccionario de la forma (64), en su demostración se realiza una modificación a los resultados propuestos con anterioridad, por N'Doye [9].

Teorema 5.23. *Suponga que el sistema (64) satisface*

- Para toda $i = 1, \dots, m$, existe un entero, $q \geq 1$, tal que

$$\|g_i(x(t))\| \leq \mu_i \|x(t)\|^q, \quad (68)$$

donde μ_i son constantes positivas y $g_i(0) = 0$. Al igual que en el caso entero $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i$.

- El par (A, B) es estabilizable.

Entonces el sistema (64) controlado por una retroalimentación de estado, $u(t) = Kx(t)$, es asintóticamente estable si la matriz, $W = A + BK$, cumple $|\arg(\lambda(W))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ y la condición inicial satisface

$$\|x_0\| < \left(\frac{\alpha \|W\|}{2\mu \|L\| \theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (69)$$

Además la norma de la solución está acotada por

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|W\| t^\alpha}}{\left(1 - \frac{2\mu \theta^{q+1} \|L\| \|x_0\|^q}{\alpha \|W\|} \left(1 - \frac{1}{1 + \|W\| (\frac{t}{2})} \right) \right)^{\frac{1}{q}}}, \quad (70)$$

donde la matriz θ está dada por el Corolario 1.2.

Demostración

Usando la ley de control dada por la retroalimentación de estado estática, $u(t) = Kx(t)$, y aplicando la transformada de Laplace al sistema (64), con $C = I_n$, se tiene

$$X(s) = (I_n s^\alpha - W)^{-1} \left(s^{\alpha-1} x_0 + \mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^m g_i(x(t)) (Lx(t))_i \right) \right), \quad (71)$$

donde $W = (A + BL)$. Por hipótesis existe K tal que $|\arg(\lambda_i(W))| > \alpha \frac{\pi}{2}$. Ahora bien, aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (71) resulta

$$x(t) = E_{\alpha,1}(Wt^\alpha) x_0 + \int_0^t \left[(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(W(t-\tau)^\alpha) \left(\sum_{i=1}^m g_i(x(\tau)) (Lx(\tau))_i \right) \right] d\tau. \quad (72)$$

Aplicando la norma a ambos lados de la igualdad anterior y posteriormente utilizando el resultado del Corolario 1.2 se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|Wt^\alpha\|} + \\ &+ \int_0^t \frac{\mu\theta \|L\| \|t - \tau\|^{\alpha-1}}{1 + \|W(t - \tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^{q+1} d\tau \end{aligned} \quad (73)$$

reacomodando términos la desigualdad anterior es equivalente a

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|W\| t^\alpha} + \\ &+ \int_0^t \frac{\mu\theta \|L\| (t - \tau)^{\alpha-1}}{1 + \|W(t - \tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^{q+1} d\tau. \end{aligned}$$

es claro que el término $\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|W\| t^\alpha}$ de la desigualdad anterior es acotado por una constante positiva, digamos R , por lo tanto

$$\|x(t)\| \leq R + \int_0^t \frac{\mu\theta \|L\| (t - \tau)^{\alpha-1}}{1 + \|W(t - \tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^{q+1} d\tau. \quad (74)$$

Ahora es posible aplicar el Teorema 3.18 para obtener la desigualdad deseada, donde:

$$\begin{aligned} k(t, \tau) &= \frac{\mu\theta \|L\| (t - \tau)^{\alpha-1}}{1 + \|W(t - \tau)^\alpha\|} \\ n &= q + 1 \\ c &= R. \end{aligned}$$

Cabe señalar que N'doye [9] omite el hecho de que la función k depende de dos variables, por lo que la generalización utilizada no es la apropiada. De aquí tenemos la siguiente modificación a la ecuación, esto es:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \left[R^{-(n-1)} - (n-1) \left(\int_0^t \left[k(t, t) + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} k(s, r) dr \right] dr \right) \right]^{1/(n-1)} \end{aligned} \quad (75)$$

por la forma de la función $k(t, \tau)$ se tiene $k(t, t) = 0$ y $\int_0^s \frac{\partial}{\partial s} k(s, r) dr = k(s, r)$, sustituyendo en (91) resulta

$$\|x(t)\| \leq \left[R^{-(n-1)} - (n-1) \left\{ \int_0^t k(t, \tau) d\tau \right\} \right]^{1/(n-1)} \quad (76)$$

■

A continuación se da un ejemplo numérico que ilustra el resultado del Teorema 5.23.

5.10.1 Ejemplo numérico

Sea el sistema no lineal de orden fraccionario, dado por

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= A_0 x + A_1 u x + B \\ x(0) &= x_0 \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned} \quad (77)$$

con

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Para calcular numéricamente la cota de la norma de $x(t)$ para el sistema (92) es necesario calcular las constantes especificadas por el Teorema anterior, en primer lugar con una ganancia $K = [-1, -1]$ la matriz $W = A_0 + BL$ satisface $|\arg(\lambda(W))| > \alpha \frac{\pi}{2}$, de la desigualdad $\|A_1(x(t))\| \leq \mu \|x(t)\|^q$ se satisface haciendo $\mu = 3$ y $q = 1$, por otro lado $\|W\| = 2$, por la desigualdad dada en el Corolario 1.2 se obtiene $\Theta = 1$. Dadas las constantes anteriores es posible encontrar un intervalo para la condición inicial

$$\|x_0\| < \left(\frac{\alpha \|W\|}{2\mu \|L\| \theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}} < 0.14 \quad (79)$$

5.11 CONTROL POR RETROALIMENTACION DE ESTADO DINAMICA

Al igual que para el caso de orden entero, para sistemas de orden fraccionario de la forma (64) es posible proponer una transformación para el sistema (64) y llevarlo a la forma

$$\begin{aligned} D^\alpha z_1 &= z_2 \\ D^\alpha z_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ D^\alpha z_n &= \psi(x, u) + \bar{u} \\ u_1 &= u, \\ D^\alpha z_1 &= u_2 \\ D^\alpha z_2 &= u_3 \\ &\vdots \\ D^\alpha z_n &= \bar{u} = -\psi(z, u_1, u_2, \dots, u_n) = -\bar{K}z \end{aligned} \quad (80)$$

Con vector de ganancias, \bar{K} , es definido por

$$\kappa = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_n \end{bmatrix} \quad (81)$$

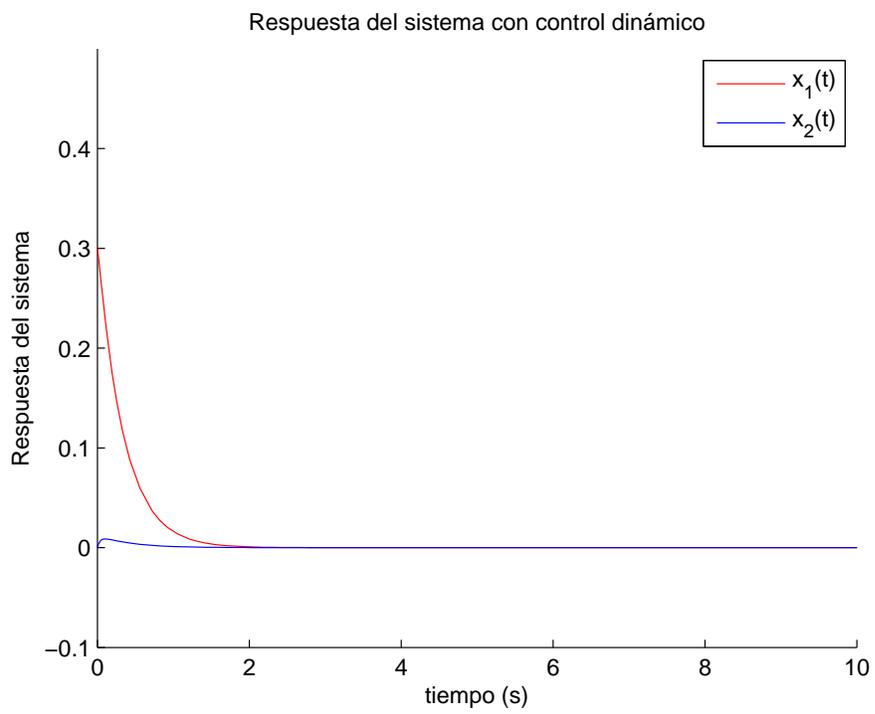


Figura 7: Comportamiento de la solución del sistema, controlada mediante control dinámico

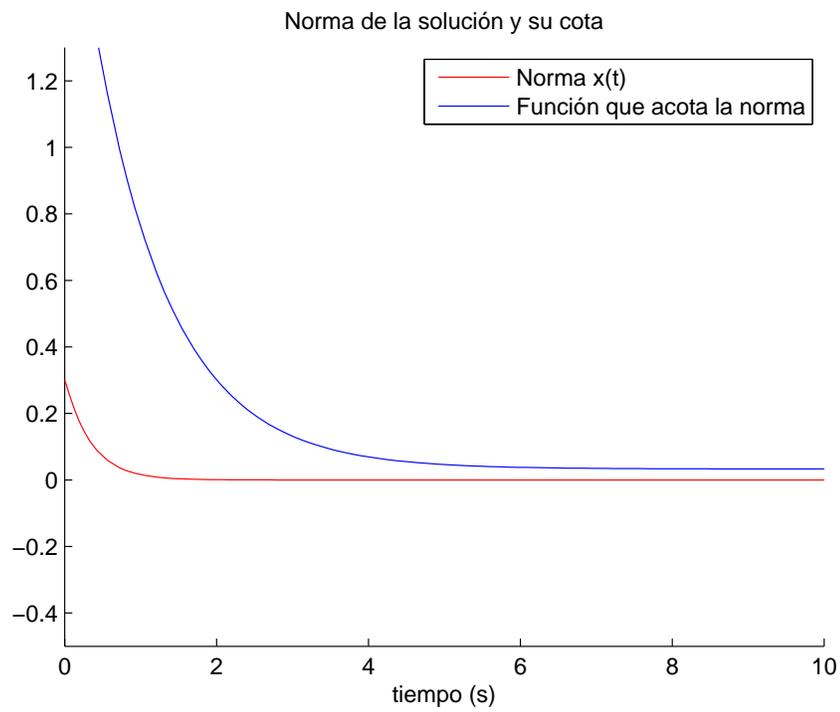


Figura 8: En azul se tiene la grafica de la cota teorica (ver (56)) para la solución del sistema (52).

tal que los valores propios satisfacen que $|\arg(\lambda_i(\kappa))| > \alpha \frac{\pi}{2}$. Sustituyendo el control dinámico en el sistema original, resulta el sistema siguiente

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= Ax + G(x)u + Bu, \\ u_1 &= u, \\ D^\alpha u_1 &= u_2 \\ D^\alpha u_2 &= u_3 \\ &\vdots \\ D^\alpha u_n &= \bar{u} = -\psi(x, u_1, u_2, \dots, u_n) + \bar{K}x. \end{aligned} \tag{82}$$

Teorema 5.24. *Suponga que el sistema (82) satisface las siguientes hipótesis*

- Existe un entero, $q \geq 1$, tal que

$$\|G(x)\| \leq \mu \|x(t)\|^q, \tag{83}$$

donde μ es una constante positiva y $g_i(0) = 0$.

- La matriz A satisface $|\arg(\lambda_i(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.
- El par (A, B) es estabilizable.
- El control, $u(t)$, es acotado por una función de la forma: $\rho \|x\|^p$ y al menos sus primeras n derivadas son acotadas.

El sistema (82) es exponencialmente estable si existe \bar{K} tal que el sistema (80) es estable y la condición inicial satisface

$$\|x_0\| < \epsilon_0 \tag{84}$$

La constante ϵ_0 es tal que la siguiente desigualdad se cumple para todo $t > 0$

$$\begin{aligned} v(t, \epsilon_0) &= 1 - (q + p - 2) \int_0^t \left(\frac{\theta \epsilon_0}{1 + \|A\| t^\alpha} \right)^{(q+p-1)} \frac{\rho \mu \theta (t - \tau)^{\alpha-1}}{1 + \|A\| (t - \tau)^\alpha} - \\ &- (q + p - 2) \int_0^t \left(\frac{\theta \epsilon_0}{1 + \|A\| t^\alpha} \right)^{(p-1)} \frac{B \rho \theta (t - \tau)^{\alpha-1}}{1 + \|A\| (t - \tau)^\alpha} > 0. \end{aligned} \tag{85}$$

Además la norma de la solución está acotada por

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \epsilon_0}{1 + \|A\| t^\alpha}}{v(t, \epsilon_0)^{1/(2p+q-2)}} \tag{86}$$

donde la constante θ está dada por el Corolario 1.2.

Demostración

Aplicando la transformada de Laplace al sistema (82), se tiene

$$\begin{aligned}
X(s) = (I_n s^\alpha - A)^{-1} & \left(s^{\alpha-1} x_0 + \right. \\
& \left. + \mathcal{L}(G(x(t))u + Bu) \right), \tag{87}
\end{aligned}$$

Por hipótesis $|\arg(\lambda_i(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$. Ahora bien, aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (87) resulta

$$\begin{aligned}
x(t) = E_{\alpha,1}(At^\alpha) x_0 + \int_0^t & \left[(t-\tau)^{\alpha-1} \right. \\
& \left. E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^\alpha) (G(x(\tau))u + Bu) \right] d\tau. \tag{88}
\end{aligned}$$

Aplicando la norma a ambos lados de la igualdad anterior y utilizando el resultado del Corolario 1.2 se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| \leq & \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|At^\alpha\|} + \\
& + \int_0^t \frac{\mu\theta \|t-\tau\|^{\alpha-1}}{1 + \|A(t-\tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^q d\tau + \\
& + \int_0^t \frac{B\rho\theta \|t-\tau\|^{\alpha-1}}{1 + \|A(t-\tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^p d\tau, \tag{89}
\end{aligned}$$

reacomodando términos de la desigualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| \leq & \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|A\| t^\alpha} + \\
& + \int_0^t \frac{\mu\theta (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|A(t-\tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^q d\tau + \\
& + \int_0^t \frac{B\rho\theta (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|A(t-\tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^p d\tau.
\end{aligned}$$

es claro que el término $\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|A\| t^\alpha}$ de la desigualdad anterior es acotado por una constante positiva, digamos R , por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| \leq R + \int_0^t \frac{\mu\theta \|L\| (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|W(t-\tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^q d\tau + \\
+ \int_0^t \frac{B\rho\theta (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|A(t-\tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^p d\tau. \tag{90}
\end{aligned}$$

Ahora es posible aplicar el Teorema 3.19 para obtener la desigualdad deseada, donde:

$$k_1(t, \tau) = \frac{\mu\theta \|L\| (t - \tau)^{\alpha-1}}{1 + \|A(t - \tau)^\alpha\|}$$

$$k_2(t, \tau) = \frac{B\rho\theta \|L\| (t - \tau)^{\alpha-1}}{1 + \|A(t - \tau)^\alpha\|}$$

$$c = R.$$

como resultado se tiene:

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta\epsilon_0}{1 + \|A\|t^\alpha}}{\nu(t, \epsilon_0)^{1/(2p+q-2)}} \quad (91)$$

■

Se ilustra el resultado anterior mediante el siguiente ejemplo

5.11.1 Ejemplo numérico

Sea el sistema no lineal de orden fraccionario, dado por

$$D^\alpha x = A_0x + A_1ux + B$$

$$x(0) = x_0 \quad 0 < \alpha < 1 \quad (92)$$

con

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Las constantes que resultan para este ejemplo son, $\mu = 3$, $q = 1$, obtenidas de la desigualdad (83). De la desigualdad da por el Corolario 1.1 se tiene $\theta = 1$.

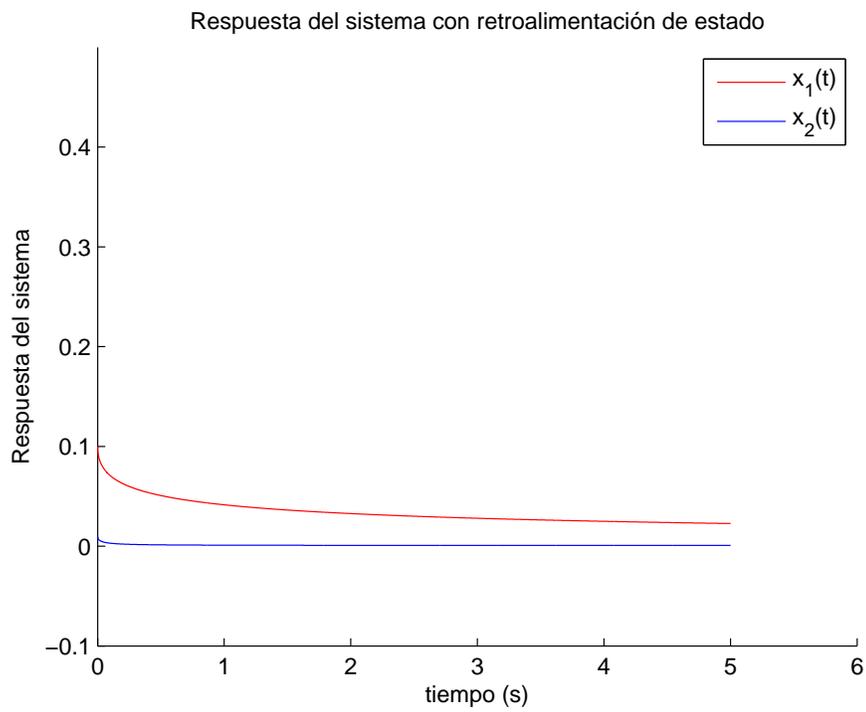


Figura 9: Comportamiento de las soluciones del sistema, con condición inicial $x_0 = [0,1 \quad 0,01]$, con el control $u = Kx$

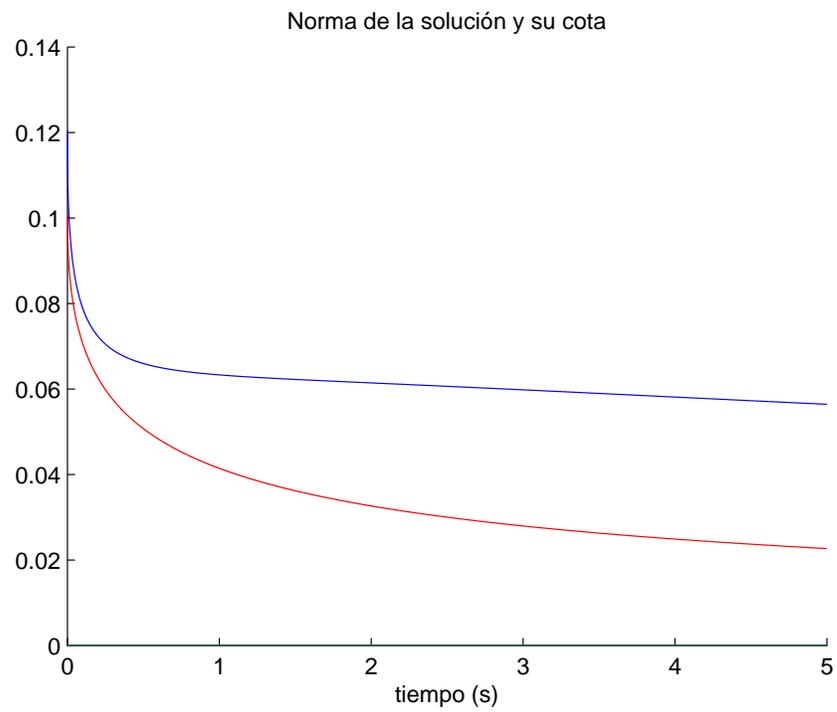


Figura 10: En color rojo se muestra el comportamiento de la norma de la solución, $\|x(t)\|$, y en color azul la cota obtenida teóricamente.

CONCLUSIONES

A continuación se resumen los resultados obtenidos en este trabajo de tesis que se consideran mas relevantes.

1. En el primer capítulo se hace una recopilación con mayor detalle de algunos temas de la teoría de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, ya que dicha teoría aún se encuentra en construcción y es muy fácil encontrar resultados ambiguos o que no están completamente sustentados teóricamente. Además se ilustra por qué la teoría para ecuaciones diferenciales de orden entero no se puede aplicar directamente a ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y más aún que los resultados para el caso fraccionario sólo son validos en la mejor de las situaciones para valores $0 \leq \alpha \leq 2$.
2. Se muestra que es posible encontrar una cota para sistemas fraccionarios no lineales afines en la entrada, controlados por una entrada dinámica y al mismo tiempo queda como posible trabajo a futuro relajar las hipótesis propuestas. De igual manera como trabajo futuro se puede plantear este mismo problema para el caso de sistemas variantes en el tiempo.
3. Se concluye que para sistemas no lineales afines en la entrada de orden entero y fraccionario, para los casos de retroalimentación de estado estática y retroalimentación dinámica, es posible encontrar una cota de tipo exponencial para las soluciones de dichos sistemas mediante el uso de diferentes generalizaciones del Lema de Gronwall-Bellman.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Michele Caputo. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539, 1967.
- [2] Harold Thayer Davis. *The theory of linear operators from the standpoint of differential equations of infinite order*. Number 72. Principia Press Bloomington USA, 1936.
- [3] Weihua Deng, Changpin Li, and Qian Guo. Analysis of fractional differential equations with multi-orders. *Fractals*, 15(02):173–182, 2007.
- [4] Thomas Hakon Gronwall. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. *Annals of Mathematics*, pages 292–296, 1919.
- [5] Rafael Martínez-Guerra and Christopher Diego Cruz-Ancona. *Algorithms of Estimation for Nonlinear Systems: A Differential and Algebraic Viewpoint*. Springer, 2017.
- [6] Denis Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Computational engineering in systems applications*, volume 2, pages 963–968. IMACS, IEEE-SMC Lille, France, 1996.
- [7] DS Mitrinović, JE Pečarić, and AM Fink. Inequalities of Gronwall type of a single variable. In *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*, pages 353–400. Springer, 1991.
- [8] H Movljankulov and A Filatov. Ob odnom priblizennom metode postroenija rešenii integral'nyh uravnenii, tr. *ta Kibern. AN UzSSR, Taškent*, 12:11–18, 1972.
- [9] Ibrahima N'Doye. *Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I; Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca, 2011.
- [10] BG Pachpatte. Inequalities applicable to retarded volterra integral equations. *Tamkang Journal of Mathematics*, 35(4):285–292, 2004.
- [11] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Academic press, 1998.