



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACANTENCO
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO**

“Modelado de juegos Stackelberg no cooperativos con múltiples líderes y seguidores para cadenas de Markov controlables”

T E S I S

Que presenta

CÉSAR ULISES SOLÍS CERVANTES

Para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS

**EN LA ESPECIALIDAD DE
CONTROL AUTOMÁTICO**

Directores de la Tesis:

Dr. Alexander S. Poznyak Gorbach

Dr. Julio B. Clempner Kerik

México, D. F.

Agosto, 2015

Dedicatoria

Dedicado a mi madre, a mi hija, a mi esposa, a mis mentores que me guiaron a lo largo de la Maestría, amigos, compañeros de clase y demás personas que me brindaron su apoyo.

Agradecimientos

Agradezco de antemano al CONACyT por haberme brindado el apoyo económico suficiente para sostener a mi familia con la finalidad de desempeñarme en un posgrado de calidad en el CINVESTAV-IPN como institución de excelencia que me otorgó la oportunidad de cursar la Maestría, a mis asesores de tesis por ayudarme en la investigación del presente trabajo, y finalmente, pero no por ello menos importante, al personal del Departamento de Control Automático por su apoyo con los medios instrumentales y materiales para culminar la meta del posgrado que he cursado y que ahora concluyo.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Índice de figuras	V
Resumen	1
Abstract	2
Capítulo 1. Introducción	3
Síntesis	3
Antecedentes y trabajos relacionados	4
Resultados principales	6
Organización de la tesis	7
Capítulo 2. Preliminares	8
2.1. . Regularización de problemas no estrictamente convexos	8
2.2. . El principio de Lagrange	9
2.3. . Introducción a los algoritmos proximales	12
2.4. . Un bosquejo de Teoría de Juegos	13
2.5. . Juegos de Markov Controlables	14
Capítulo 3. Juegos no cooperativos tipo Stackelberg-Nash	17
3.1. . La solución para Stackelberg-Nash	17
3.2. . Regularizador de Tikhonov	20
3.3. . Implementación del principio de Langrange	22

<i>Índice general</i>	IV
3.4. . El método extra-proximal	22
3.4.1. . El formato proximal	22
3.4.2. . El formato extra-proximal	24
3.5. . Convergencia de los parámetros γ y δ	25
Capítulo 4. Implementación del algoritmo para dos líderes y dos seguidores	29
4.1. . Funciones de costo y notación	29
4.2. . El modelo Stackelberg-Nash líder-seguidor extra-proximal	36
4.3. . Implementación del <i>solucionador (solver)</i>	51
4.4. . Caminata aleatoria tomando como criterio la entropía de Kullback-Leibler	53
4.5. . Ejemplo de aplicación numérica	60
Capítulo 5. Conclusiones y trabajos futuros	71
Apéndice	73
Anexos	110
Bibliografía	111

Índice de figuras

4.5.1.. Convergencia del parámetro λ	66
4.5.2.. Convergencia del parámetro θ	67
4.5.3.. Convergencia de las estrategias para la agencia de seguridad 1.	67
4.5.4.. Convergencia de las estrategias para la agencia de seguridad 2.	68
4.5.5.. Convergencia de las estrategias para el ladrón 3.	68
4.5.6.. Convergencia de las estrategias para el ladrón 4.	69
4.5.7.. Realización por el algoritmo sin penalización.	69
4.5.8.. Realización por el algoritmo con penalización.	70

Resumen

En la esta tesis se presenta una formulación de un juego Stackelberg-Nash, en particular para un modelo de múltiples líderes y seguidores. Se propone una aproximación computacional para encontrar el punto de equilibrio basado en el método extra-proximal para una clase de juegos con cadenas de Markov finitas, controlables y con matrices de transición ergódicas. En este juego, cada uno de los líderes procede como en un juego tipo Nash con respecto de los demás líderes (seleccionando sus estrategias simultánea y no cooperativamente entre ellos). De igual forma, los seguidores proceden como en un juego tipo Nash respecto de los demás seguidores. Los líderes y los seguidores en conjunto están en un juego tipo Stackelberg: el modelo involucra dos juegos Nash restringidos por un juego Stackelberg, donde los líderes anticipan las jugadas de los seguidores. Para dar solución al problema se lleva éste a una forma estrictamente convexa por medio del regularizador de Tikhonov y se implementan los multiplicadores de Lagrange con la finalidad de tener todas las restricciones en un único funcional, se da solución al nuevo problema por el método extra-proximal y finalmente se hace una simulación de una realización para un ejemplo aplicado en la vida real.

Abstract

In this thesis we present a formulation of a Stackelberg-Nash game, specifically for a multiple leaders and followers model. A computational approach is proposed to find the equilibrium point based on the extra-proximal method for a kind of games with finite Markov chains, controllable and ergodic transition matrices. In this game, each leader plays a Nash game with respect to the other leaders (selecting their strategies simultaneous and non cooperatively among them). Likewise, the followers play a Nash game with respect to the other followers. Leaders and followers are playing jointly in a Stackelberg game: the model involves two Nash games restricted by a Stackelberg game where leaders anticipate the moves of the followers. To solve the problem it is taken to a strictly convex form by means of Tikhonov regularizator and the Langrange multipliers are implemented so all restrictions lie in a single functional, the new problem is solved by the extra-proximal method and finally a simulation is made for providing an example of real life application.

Capítulo 1

Introducción

Síntesis

El presente trabajo de tesis busca implementar un algoritmo que encuentre el equilibrio de un juego no cooperativo tipo Stackelberg con múltiples líderes y seguidores, por otro lado que determine el conjunto de estrategias óptimas, de modo que se minimicen las funciones de costo de cada jugador, tomando en cuenta que, existen jugadores líderes que siempre tienen la oportunidad de conocer la jugada que desarrollarán los jugadores seguidores en cada paso del juego.

Como ejemplo de aplicación de la teoría que se expondrá se tiene a dos agencias de seguridad y a dos ladrones que pueden ocupar cinco estados posibles de «posición», la idea central es determinar las estrategias óptimas que deben ejecutar de manera aleatoria, de modo que las agencias capturen a los ladrones en el menor tiempo posible, mientras que los ladrones amplíen dicho tiempo.

El concepto de equilibrio estándar empleado más comúnmente en teoría de juegos con múltiples jugadores es aquel dado por el equilibrio de Nash asumiendo que los jugadores siempre hacen una mejor «jugada» respecto de los demás jugadores ([36], [37]). Así, se describe un modelo matemático en el cual todos los jugadores compiten entre ellos simultáneamente uno contra otro en un juego no cooperativo. Sea pues, un juego estratégico en el cual existe un líder que mueve primero y posteriormente los seguidores, y así sucesivamente, entonces esta situación puede ser modelada como un juego de Stackelberg ([60], [61]). Un juego clásico de Stackelberg involucra un líder y un seguidor. Sin embargo, juegos con un pequeño número de jugadores compitiendo, son más comunes en la práctica.

Considérese un juego líder-seguidor que tiene varios líderes dominantes y varios seguidores

dominados. Específicamente, se modela un juego multi-líder-seguidor tipo Stackelberg donde ambos, líderes y seguidores están en un juego no cooperativo, respectivamente. Así por ejemplo, Solís et al. presentan el caso de un oligopolio; una compañía debe considerar el efecto de sus acciones en base al resto: las acciones de una firma mayor (jugador líder) causa reacciones en las otras firmas de la industria, sin embargo las firmas menores (jugadores seguidores) operan sin prácticamente afectar el ambiente de las otras firmas de la industria, esto es, si una compañía líder trata de disminuir sus precios respecto de los otros, entonces los demás líderes y seguidores responderán también bajando sus precios [59].

Se emplea el formato propuesto por Tanaka y Yokoyama [62] para modelar el problema de Nash-Stackelberg para líderes y seguidores. Esta aproximación excluye la condición de compatibilidad del conjunto de estrategias para cada jugador y permite la caracterización del punto de equilibrio en cada juego con n -jugadores ([18], [19]).

En general, en este tipo de juegos son problemas de optimización no convexos. Para resolver la existencia y caracterización de los equilibrios del juego se presenta una formulación original en términos de problemas de programación no lineal acoplados implementando el principio de Lagrange y empleando el método de regularización de Tikhonov. Por regularización refiérase al proceso de introducir información adicional con la intención de transformar un problema de optimización no convexa en uno que aproxime a otro que sí fuertemente convexo. Específicamente, la regularización de Tikhonov es un intercambio entre el ajuste de datos y una norma reducida de la solución, asegurando la convergencia de las funciones objetivo a una política óptima local.

Al momento de desarrollar una realización del juego estocástico, se introduce la divergencia de Kullback-Leibler [28] con la finalidad de tener un criterio de qué tan cerca están los líderes de los seguidores en términos de distribuciones de probabilidad, sirviendo de base para implementar dos realizaciones: la primera que consiste en una caminata aleatoria dadas las matrices de transición y las estrategias óptimas encontradas para cada jugador, y la segunda que incluye una penalización en los líderes por no haberse acercado a los seguidores.

Antecedentes y trabajos relacionados

Sherali et al. [51] desarrollaron un modelo de un líder con N seguidores donde estos últimos operan bajo la suposición de Cournot de la variación conjetural cero y el líder, llamado también

la firma Stackelberg, específicamente toma en cuenta la reacción de las firmas de Cournot a su salida proporcionando la existencia y unicidad de un equilibrio de Stackelberg-Nash-Cournot.

Sherali et al. [52] presentan un modelo con múltiples líderes Stackelberg y un análisis que demuestra como las firmas líderes pueden utilizar la curva de reacción de las firmas de seguidores, dando condiciones suficientes para algunas propiedades de convexidad y diferenciabilidad de esta función. Leyffer y Munson [30] examinan para juegos multi-líder-seguidor una variedad de fórmulas de optimización no lineal y complementos no lineales de problemas de equilibrio, con restricciones en éstos, distinguiendo dos grandes casos: problemas donde los líderes pueden tener costo-diferenciable y problemas con seguidores precio-consistente. Lu et al. [31] extienden el algoritmo de *ramifica y acota* para resolver el problema de decisión con un líder Stackelberg lineal binivel con múltiples seguidores por medio de un modelo de decisión multi-seguidor binivel referencial no cooperativo lineal. Lung y Dumitrescu [33] presentan un juego multijugador y proponen un concepto de dominación para detectar un equilibrio de Nash usando un algoritmo multi-objetivo evolutivo. Zhang et al. [74] proponen un conjunto de modelos para describir problemas multi-objetivos difusos, multi-seguidores (cooperativos) de programación binivel con un único líder donde las funciones envuelven coeficientes difusos y multi-objetivos en ambos niveles. De Miguel y Xu [10] estudian un oligopolio no cooperativo que consta de M líderes y N seguidores, mostrando la existencia y unicidad de un equilibrio Stackelberg-Nash-Cournot multi-líder estocástico y, proponiendo una aproximación computacional para encontrarlo, igualmente hacen un análisis de convergencia. Koh [23] introduce un algoritmo evolutivo para dar solución a una clase de problemas de juegos líder-seguidor jerárquicos conocidos como Problemas de Equilibrio con Restricciones en el Equilibrio donde los saldos de los líderes están restringidos no únicamente por las acciones de sus competidores sino también por el comportamiento de los seguidores a un nivel más bajo que se manifiesta en forma de restricción en el equilibrio. Sinha et al. [56] consideran un caso especial de modelo de competencia Stackelberg multi-líder-seguidor y multi-periodo con funciones de costos y demandas no lineales y variables de producción discretas empleando una estrategia evolutiva anidada computacionalmente intensiva para encontrar una solución óptima al modelo. Trejo et al. [66] presentan una aproximación para representar un modelo de juego teórico tipo Stackelberg defensa-ataque en el mundo real para un líder y N seguidores basado en el método extra-proximal.

Korzhyk et al. [25] mencionan que existe un reciente interés en dar aproximaciones vía teoría

de juegos a problemas de seguridad, centrando la mayoría de las investigaciones en el modelo de juego de Stackelberg para líderes y seguidores. Dentro de las mayores aplicaciones se encuentra el programa IRIS desarrollado para FAMS (Estados Unidos). Por otro lado, V. Conitzer [9] presenta diversos desarrollos de la Teoría de Juegos aplicados a seguridad con modelos multi-agentes con intereses muy distintos (pero no necesariamente opuestos). Igualmente se hace una referencia a la idea de jugar con estrategias mixtas y sus ventajas, por ejemplo: el personal de seguridad desearía que sus estrategias fueran impredecibles. En los años recientes, el grupo TEAMCORE de la Universidad del Sur de California ha desarrollado los sistemas ARMOR para el Aeropuerto Internacional de Los Ángeles (LAX) para programar los puestos de control en las vías de acceso al aeropuerto, así como unidades caninas [43]. Han comenzado a trabajar con la Guardia Costera de los Estados Unidos: su sistema PROTECT en el puerto de Boston para «aleatorizar» patrullas [53]. El modelo de Stackelberg subraya todas esas aplicaciones.

A. Smith et al. [57] presentan un acercamiento de la Teoría de Juegos a la seguridad en redes con múltiples defensores basados en modelos de juego tipo Stackelberg asociados a herramientas computacionales, con buenas consecuencias en el ramo de la seguridad.

Solís et al. [59] presentan una aplicación con múltiples líderes y seguidores para modelar un oligopolio con compañías no cooperativas líderes y otras seguidoras igualmente que no cooperan entre ellas, que intentan competir en el mercado de automóviles, entonces encuentran la solución óptima al problema. Los mismos autores [58] dan solución a un problema de múltiples líderes y seguidores modelando un juego no cooperativo de seguridad y teniendo como criterio de captura la divergencia de Kullback-Leibler entre los líderes y los seguidores, además, añaden dos simulaciones de caminata aleatoria: la primera basada en la solución del juego obtenidas las estrategias mixtas y la segunda en la misma solución pero con penalización en alguno de los líderes por no acercarse a alguno de los seguidores.

Resultados principales

En esta sección se presenta una enumeración de los resultados principales que se consiguen con el desarrollo de la presente tesis:

- Implementación de un juego tipo Stackelberg-Nash no lineal por medio del principio de La-

grange y aplicando la regularización de Tikhonov para garantizar convexidad fuerte y así aproximar la solución única.

- Demostración matemática de la convergencia de los parámetros que surgen por la implementación mencionada en el punto anterior.
- Se lleva el juego planteado al formato extra-proximal.
- Se resuelve el juego (hallar las estrategias óptimas así como el punto de equilibrio) para dos líderes y dos seguidores con estrategias y estados finitos.
- Simulación computacional del juego tomando como criterio la divergencia de Kullback-Leibler.
- Implementación de dos algoritmos: uno que produce la realización estocástica del juego, y otro donde existan penalizaciones cada vez que alguno de los líderes no logra alcanzar a alguno de los seguidores.

Organización de la tesis

En el capítulo 2 se desarrolla una serie de preliminares matemáticos, que servirán como base para el desarrollo de la presente tesis, entre los temas a tratar se encuentran los siguientes: cadenas de Markov, nociones básicas de teoría de juegos sin entrar mucho en tecnicismo matemático, y su aplicación a juegos de Markov controlables. El capítulo 3, tiene por objeto definir y desarrollar la teoría necesaria para resolver un juego generalizado tipo Stackelberg-Nash empleando el principio de Lagrange y el regularizador de Tikhonov con la finalidad de aplicar el algoritmo extra-proximal. El capítulo 4, busca llevar la teoría expuesta en el capítulo anterior a una aplicación práctica en un juego con dos líderes y dos seguidores, en este punto se hace referencia a una manera computacional de resolver el juego, como criterio de optimalidad para la realización estocástica se emplea la divergencia de Kullback-Leibler, además se implementan dos algoritmos: el primero que no contiene penalizaciones en los líderes, y otro donde sí hay penalizaciones cada vez que algún líder no alcanza a alguno de los seguidores. En el capítulo 5, se hace alusión a las conclusiones de la tesis así como los posibles trabajos futuros que podrían llevarse a cabo como continuación de la misma. Finalmente, en el Apéndice de la presente tesis se hace el agregado de los cálculos desarrollados para la implementación del algoritmo para dos líderes y dos seguidores.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Regularización de problemas no estrictamente convexos

Definición 2.1.1. Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *subconjunto convexo* si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que $t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y} \in D$.

Definición 2.1.2. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *convexa* si satisface la siguiente desigualdad:

$$f(t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y}) \leq tf(\mathbf{x}) + (1 - t)f(\mathbf{y}) \quad (2.1.1)$$

con $t \in [0, 1]$ y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ y $D \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto convexo.

Definición 2.1.3. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *estrictamente convexa* si la desigualdad anterior es estricta.

Definición 2.1.4. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *fuertemente convexa con módulo c* si:

$$f(t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y}) \leq tf(\mathbf{x}) + (1 - t)f(\mathbf{y}) - ct(1 - t)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \quad (2.1.2)$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, t \in (0, 1)$ y $c > 0$. Si no se especifica el módulo se considera $c = 1$.

Proposición 2.1.5. *Toda función fuertemente (estrictamente) convexa admite un punto mínimo (y es único).*

Demostración. Véase Bertsekas [5] o Luenberger [32]. □

La regularización de un problema de optimización consiste en transformar un problema no estrictamente convexo, en uno que sea fuertemente convexo o estrictamente. Al tener un problema

fuertemente convexo se garantiza la existencia y unicidad de un punto mínimo (véase proposición (2.1.5)), más aún, si el regularizador se elige adecuadamente el punto resultante coincidirá con el mínimo global del problema.

De este modo, si se tiene la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto convexo, entonces el problema de optimización:

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde se desea encontrar el mínimo global sabiendo que tiene multiplicidad de mínimos locales, entonces una manera de resolverlo sería sumando al problema original funciones estrictamente convexas (por ejemplo: la norma euclídeana al cuadrado) en términos de las variables de la función original, hasta que la función resultante sea estrictamente convexa, por ejemplo, en el caso polinomial:

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_n} \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \delta_1 \|x_1\|^2 + \delta_2 \|x_2\|^2 + \dots + \delta_n \|x_n\|^2\}$$

con $\delta_i \geq 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, que se llamarán factores de regularización ([63], [64]), de manera más general puede sumarse una función de la forma $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ con $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$. El nuevo mínimo encontrado evidentemente no corresponderá con el mínimo de la función original, sin embargo, si se elige un algoritmo iterativo que haga tender a cada δ_i a cero, el resultado coincidirá en el límite con el mínimo de la función original. Esta técnica es conocida como *regularizador de Tikhonov*, y los posibles algoritmos a implementar están basados en el método del gradiente (por ejemplo: métodos proximales y extra-proximales). Más adelante se determinará una manera de elegir el factor de regularización apropiadamente para las funciones que serán ocupadas en el presente trabajo.

2.2. El principio de Lagrange

El principio de Lagrange aplicado al presente trabajo consiste en agregar multiplicadores de Lagrange para transformar un problema de optimización (minimización) con restricciones tanto de igualdad como de desigualdad, en otro libre de ellas.

Considérese el problema de optimización siguiente:

$$\begin{cases} \text{mín}_{x \in D} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g_i(x) \leq 0 \\ \text{y} & h_j(x) = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

con $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, r$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto convexo.

De las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (ver [27]) es posible transformar el problema anterior de minimización en uno algebraico con desigualdades de la forma:

$$\begin{cases} \nabla_x f(x^*) = \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla_x g_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \nabla_x h_j(x^*) \\ \text{sujeto a} & g_i(x^*) \leq 0 \\ \text{y} & h_j(x^*) = 0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

donde el operador ∇_x se define como:

$$\nabla_x \cdot := \begin{pmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

con $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, r$, $x^* \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ el punto crítico y $\mu_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$, lo anterior siempre que se cumplan las condiciones de regularidad siguientes:

1. Las funciones $g_i(x)$ y $h_j(x)$ tienen que ser diferenciables en una vecindad alrededor del punto x^* .
2. Las funciones $g_i(x)$ y $h_j(x)$ tienen que ser linealmente independientes entre ellas.
3. Si $g_i(x)$ y $h_j(x)$ son funciones afines entonces ninguna otra condición es necesaria.
4. Una condición de factibilidad dual es que $\mu_i \geq 0$ con $i = 1, 2, \dots, m$.

Es importante mencionar que las condiciones anteriores son de necesidad, para tenerlas también como de suficiencia es necesario agregar cierta información como las condiciones suficientes de segundo orden. Sin embargo, si la función objetivo es convexa entonces las condiciones de necesidad también lo son de suficiencia y luego, se estará en presencia de un punto mínimo (ver [13]). Si la condición 1 no se cumple será necesario emplear una versión subdiferencial de las

condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (ver [50]). Si la condición 2 no se cumple, será necesario reducir el conjunto de funciones a uno que sí sea linealmente independiente.

Es posible llegar a la siguiente definición de lagrangiano.

Definición 2.2.1. Sea $f(x)$ una función definida en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n con $x := (x_1, \dots, x_n)$; dadas m restricciones de la forma $g_i(x) \leq 0$ con $i = 1, 2, \dots, m$ y $h_j(x) = 0$ con $j = 1, 2, \dots, r$, entonces se define el lagrangiano como:

$$\mathcal{L}(x, \mu, \lambda) := f(x) - \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x) - \sum_{j=1}^r \lambda_j h_j(x) \quad (2.2.3)$$

Así, el problema (2.2.2) puede escribirse como:

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \mu^*, \lambda^*) = 0 \\ \text{sujeto a } g_i(x^*) \leq 0 \\ \text{y } h_j(x^*) = 0 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Como ya se mencionó, si la función objetivo $f(x)$ es convexa, entonces se habrá encontrado un punto mínimo local, si dicha función resulta no se convexa entonces será necesario introducir condiciones de segundo orden para verificar si x^* resulta ser un mínimo local, un máximo local o un punto silla (ver [34]). Se introduce el operador Hessiano, denotado por ∇_{xx}^2 , definido como:

$$\nabla_{xx}^2 := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

entonces, para verificar que sea un mínimo local, se debe cumplir que $\nabla_{xx}^2 f(x^*)$ sea una matriz definida positiva, es decir, que para cualquier vector $s \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ se cumple la desigualdad $s^T \nabla_{xx}^2 f(x^*) s > 0$.

2.3. Introducción a los algoritmos proximales

Esta sección no pretende desarrollar toda la teoría relacionada con este tipo de algoritmos, simplemente se busca dar un pequeño bosquejo meramente interpretativo. El lector interesado puede consultar [42] para un desarrollo más intensivo.

Definición 2.3.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa propia, se define el *epígrafe* como el conjunto:

$$\text{epi } f := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$$

es un conjunto convexo cerrado y no vacío.

Definición 2.3.2. Se define el *dominio efectivo* de f como:

$$\text{dom } f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$$

i.e., el conjunto de punto para los cuales f toma valores finitos.

Definición 2.3.3. Se define el *operador proximal*, denotado por $\text{prox}_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, como:

$$\text{prox}_f(v) := \arg \min_x \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - v\|_2^2 \right\}$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma euclideana.

La función minimizada en el lado derecho es fuertemente convexa y no infinita en todos lados, así se tiene un minimizador único para cada $v \in \mathbb{R}^n$.

Frecuentemente se puede encontrar en la literatura el operador proximal de una función escalada γf , donde $\gamma > 0$, el cual puede ser expresado como:

$$\text{prox}_{\gamma f}(v) := \arg \min_x \left\{ f(x) + \frac{1}{2\gamma} \|x - v\|_2^2 \right\}$$

El operador proximal puede ser interpretado como un tipo de paso de gradiente para la función f que puede tener puntos donde no es diferenciable o toma valores infinitos, esto es:

$$\text{prox}_{\gamma f}(v) \approx v - \gamma \nabla f(v)$$

cuando γ es pequeño y f es localmente diferenciable.

Los puntos fijos de operador proximal de f son precisamente los minimizadores (punto utópicos) de f . en otras palabras, $\text{prox}_{\gamma f}(x^*) = x^*$ ssí x^* minimiza a f , una manera iterativa de calcular dicho punto está dada por:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{hf}(x^k)$$

para $h > 0$ pequeño. Esto implica una cercana conexión entre los operadores proximales y la teoría del punto fijo, y se sugiere que los algoritmos proximales pueden ser interpretados como resolvedores de problemas de optimización por la búsqueda de puntos fijos de operadores apropiados.

Más adelante se describirá el algoritmo extra-proximal el cual, realiza una predicción previo al paso de refinamiento.

2.4. Un bosquejo de Teoría de Juegos

Con la presente sección no se busca dar una amplia referencia a esta teoría, ni mucho menos hacer un repertorio matemático de la misma, pues se considera que está fuera del alcance de la presente tesis, sin embargo, se hará una breve reseña a los conceptos principales y que se usan, con la finalidad de que el lector pueda comprender el sentido de los siguientes capítulos.

Definición 2.4.1. Un juego se compone de los siguientes elementos: los jugadores del juego, la información y acciones disponibles para cada jugador en algún punto de decisión, y las funciones costo y/o utilidad.

Lo que se desea calcular para un juego dado, por lo general es encontrar el punto de equilibrio del juego, es decir, las estrategias que deben emplear los jugadores de modo que, conforme se desarrolle el juego, ningún jugador pueda beneficiarse sin que sufra una desviación unilateral de su estrategia. Este equilibrio de estrategias define un punto de equilibrio para el juego, o en otras palabras, un estado estable del mismo.

Definición 2.4.2. A un juego se le llama *juego cooperativo* si los jugadores están dispuestos a formar compromisos vinculantes. En los juegos no cooperativos, estos vínculos no se establecen.

De los dos tipos de juegos, los juegos no cooperativos son capaces de modelar situaciones para los detalles más finos, produciendo resultados precisos. Juegos cooperativos se centran en el juego en general. Se han hecho esfuerzos considerables para vincular los dos enfoques [14].

Definición 2.4.3. Los *juegos de suma-cero* son un caso especial de juegos de suma constante, en el que las estrategias de los jugadores no pueden aumentar ni disminuir los recursos disponibles (en palabras más llanas, los beneficios de un jugador se consiguen solamente a expensas de los demás). Un *juego de suma no-cero* es aquel en que los jugadores sí pueden tener beneficios o pérdidas independientemente de los demás.

El Poker es un ejemplo de un juego de suma-cero (haciendo caso omiso de la posibilidad de corte de la casa), porque uno gana exactamente la cantidad de uno de los oponentes pierden.

Definición 2.4.4. Un *juego Nash* es un juego no cooperativo entre dos o más jugadores, en el cual se asume que cada jugador conoce las estrategias de equilibrio de los demás jugadores y ningún jugador tiene algo que ganar si cambia su estrategia.

Definición 2.4.5. Un *juego Stackelberg* o *modelo de liderazgo de Stackelberg* es un juego estratégico donde existe un jugador llamado líder que mueve primero (es el primero en ejecutar una acción) y posteriormente el resto de los jugadores seguidores mueven subsecuentemente.

2.5. Juegos de Markov Controlables

Definición 2.5.1. Una *Cadena de Markov* es una cuádrupla $MC := \{S, A, \Upsilon, \Pi\}$ donde S es un conjunto a lo sumo numerable de estados, $S \subseteq \mathbb{N}$ (si S es finito entonces se dice que la cadena de Markov es finita), dotado de una topología discreta; A es un conjunto de acciones, el cual es un espacio métrico [44]. Para cada $s \in S$, $A(s) \subset A$ es el conjunto no vacío de acciones admisibles en el estado $s \in S$.

Sin pérdida de generalidad se puede tomar $A = \cup_{s \in S} A(s)$; $\Upsilon := \{(s, a) | s \in S, a \in A(s)\}$ es el conjunto de pares estado-acción admisibles, el cual es un subconjunto medible de $S \times A$; $\Pi(k) = [\pi_{(i,j|k)}]$ es una matriz de transición estacionaria, donde:

$$\pi_{(i,j|k)} := P(s(n+1) = s_j | s(n) = s_i, a(n) = a_{(k)})$$

representa la probabilidad asociada con la transición del estado $s_{(i)}$ al estado $s_{(j)}$ bajo la acción $a_{(k)} \in A(s_{(i)})$ ($k = 1, \dots, M$) en el momento $n = 0, 1, \dots$. Resulta claro que los elementos de las matrices de transición son mayores o iguales a cero y la suma por filas es siempre uno.

Definición 2.5.2. Un estado en una cadena de Markov finita se dice *alcanzable* si a partir de un número de pasos $n_0 \in \mathbb{N}$ su probabilidad es mayor a cero.

Definición 2.5.3. Una cadena de Markov finita se dice *ergódica regular* (a partir de ahora simplemente se escribirá *ergódica* a menos que se diga lo contrario) si todos sus estados son alcanzables, en términos de las matrices de transición quiere decir que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual se cumple:

$$[\Pi_{i,j|k}^m]_{i,j} > 0$$

$$\forall i, j \in S \text{ y } m > n_0 \text{ con } m \in \mathbb{N}.$$

Definición 2.5.4. Un *vector de distribución estacionario* \mathbf{p} de una cadena de Markov satisface $\mathbf{p} = \Pi_{i,j|k} \mathbf{p}$.

Proposición 2.5.5. Toda cadena de Markov finita y ergódica tiene un único vector de distribución estacionario.

Definición 2.5.6. Una cadena de Markov se dice *controlable* si es posible seleccionar la distribución de probabilidad de las acciones (estrategias) asociadas a las matrices de transición de los estados.

Definición 2.5.7. Un *juego de Markov* consiste de $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ jugadores (denotados por $l = \overline{1, \mathcal{M} + \mathcal{N}}$) y empieza en el estado inicial $s^l(0)$ el cual se asume que es completamente detectable (al igual que el resto de los estados en el proceso). Cada jugador l tiene permitido aleatorizar con distribución $d_{(k|i)}^l(n)$, sobre las elecciones de acción pura $a_{(k)}^l \in A^l(s_{(i)}^l)$, $i = \overline{1, N_l}$ y $k = \overline{1, M_l}$.

En el caso ergódico, cuando todas las cadenas de Markov son ergódicas y controlables para cualquier estrategia estacionaria $d_{(k|i)}^l$ las distribuciones $P^l(s^l(n+1)=s_{(j_i)})$ convergen exponencialmente a sus límites $P^l(s = s_{(i)})$ satisfaciendo:

$$P^l(s^l(n+1) = s_{(j_i)}) = \sum_{i_l=1}^{N_l} \left[\sum_{k_l=1}^{M_l} \pi_{(i_l, j_i | k_l)}^l d_{(k_l | i_l)}^l \right] \cdot [P^l(s^l(n) = s_{(i_i)})] \quad (2.5.1)$$

La función de costo para cada jugador, depende de los estados y las acciones de todos los participantes, y están dadas por $W_{(i_1, k_1; \dots; i_{\mathcal{M}+\mathcal{N}}, k_{\mathcal{M}+\mathcal{N}})}^l$, así la *función de costo promedio* \mathbf{J}^l para cada jugador l bajo el régimen estacionario puede ser expresada como:

$$\mathbf{J}^l (c^1, \dots, c^{\mathcal{M}+\mathcal{N}}) := \sum_{i_1, k_1} \dots \sum_{i_{\mathcal{M}+\mathcal{N}}, k_{\mathcal{M}+\mathcal{N}}} W_{(i_1, k_1, \dots, i_{\mathcal{M}+\mathcal{N}}, k_{\mathcal{M}+\mathcal{N}})}^l \prod_{l=1}^{\mathcal{M}+\mathcal{N}} c_{(i_l, k_l)}^l \quad (2.5.2)$$

donde $c^l := \left[c_{(i_l, k_l)}^l \right]_{i_l=\overline{1, N_l}; k_l=\overline{1, M_l}}$ es una matriz con elementos:

$$c_{(i_l, k_l)}^l = d_{(k_l|i_l)}^l P^l (s^{(l)}=s_{(i_l)}) \quad (2.5.3)$$

que satisfacen:

$$c^{(l)} \in C_{adm}^{(l)} = \begin{cases} c^{(l)} : \sum_{i_l, k_l} c_{(i_l, k_l)}^l = 1, c_{(i_l, k_l)}^l \geq 0, \\ \sum_{k_l} c_{(j_l, k_l)}^l = \sum_{i_l, k_l} \pi_{(i_l, j_l|k_l)}^l c_{(i_l, k_l)}^l \end{cases} \quad (2.5.4)$$

donde

$$W_{(i_1, k_1, \dots, i_{\mathcal{M}+\mathcal{N}}, k_{\mathcal{M}+\mathcal{N}})}^l = \sum_{i_1, k_1} \dots \sum_{i_{\mathcal{M}+\mathcal{N}}, k_{\mathcal{M}+\mathcal{N}}} \left(\sum_{j_1} \dots \sum_{j_{\mathcal{M}+\mathcal{N}}} J_{(i_1, j_1, k_1, \dots, i_{\mathcal{M}+\mathcal{N}}, j_{\mathcal{M}+\mathcal{N}}, k_{\mathcal{M}+\mathcal{N}})}^l \prod_{l=1}^{\mathcal{M}+\mathcal{N}} \pi_{(i_l j_l|k_l)}^l \right)$$

Nótese que, por (2.5.3) se sigue que:

$$P^l (s^{(l)}=s_{(i_l)}) = \sum_{k_l} c_{(i_l, k_l)}^l \quad (2.5.5)$$

$$d_{(k_l|i_l)}^l = \frac{c_{(i_l, k_l)}^l}{\sum_{k_l} c_{(i_l, k_l)}^l}$$

En el caso ergódico $\sum_{k_l} c_{(i_l, k_l)}^l > 0$ para todo $l = \overline{1, \mathcal{M} + \mathcal{N}}$. El *objetivo individual* de cada participante es $\mathbf{J}^l(c^l) \rightarrow \min_{c^{(l)} \in C_{adm}^{(l)}} \cdot$. Obviamente, aquí se tiene una situación de conflicto que puede ser resuelto por el concepto de equilibrio de Nash-Stackelberg discutido más abajo en detalle.

Capítulo 3

Juegos no cooperativos tipo Stackelberg-Nash

3.1. La solución para Stackelberg-Nash

Para resolver la condición de Nash, para ambos, líderes y seguidores, se asegura que, si cada líder ha elegido una estrategia y ningún otro líder puede beneficiarse realizando un cambio en sus estrategias entonces el resto de las estrategias de los líderes permanecen sin cambios. Entonces, ellos maximizan la utilidad de los seguidores sujeto a que se satisfaga la restricción de Nash.

Introducimos las variables:

$$\begin{aligned} u^m &:= \text{col } c^{(m)}, \quad U^m := C_{adm}^{(m)} \quad (m = \overline{1, \mathcal{M}}) \\ v^l &:= \text{col } c^{(l)}, \quad V^l := C_{adm}^{(l)} \quad (l = \overline{1, \mathcal{N}}) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Considere un *juego suma no-cero* con \mathcal{M} líderes cuyas estrategias son denotadas por $u^m \in U^m$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}}$) y \mathcal{N} seguidores con estrategias $v^l \in V^l$ ($l = \overline{1, \mathcal{N}}$). Se denota por $u = (u^1, \dots, u^{\mathcal{M}}) \in U := \bigotimes_{m=1}^{\mathcal{M}} U^m$ la estrategia conjunta de los líderes y por $v = (v^1, \dots, v^{\mathcal{N}}) \in V := \bigotimes_{l=1}^{\mathcal{N}} V^l$ la estrategia conjunta de los seguidores. Se asume que los líderes anticipan las reacciones de los seguidores. Los líderes tratan de alcanzar uno de los equilibrios de Nash para las estrategias fijas w de los seguidores, esto es, para encontrar la estrategia conjunta $x^* = (x^{1*}, \dots, x^{\mathcal{M}*}) \in X$ que satisfaga para cualquier admisible $w \in W$, $u^m \in U^m$ y cualquier $m = \overline{1, \mathcal{M}}$ el sistema de desigualdades (*la condición de Nash*).

También, en este proceso los seguidores tratan de alcanzar uno de los equilibrios de Nash para las estrategias fijas x de los líderes, para encontrar la estrategia conjunta $w^* = (w^{1*}, \dots, w^{\mathcal{N}*}) \in$

W que se satisface para cualquier admisible $x \in X$, $w^l \in W^l$ y cualquier $l = \overline{1, \mathcal{N}}$ el sistema de desigualdades (*condición de Nash*).

Definición 3.1.1. El equilibrio de Nash $\bar{w} \in W$ para los seguidores puede ser expresado en el formato articulado [62] como sigue:

$$\max_{v \in W} g(v, \bar{w}) \leq 0 \quad (3.1.2)$$

$$g(v, w) := \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \left[\varphi_l(w^l, w^l) - \varphi_l(v^l, w^l) \right]$$

$$\varphi_l(w^l, w^l) := \min_{z^l \in W^l} \varphi_l(z^l, w^l) \quad (3.1.3)$$

$$v^l \in W^l, w \in W := \bigotimes_{l=1}^{\mathcal{N}} W^l$$

Observación 3.1.2. Sumando (3.1.3) implica (3.1.2). Y a la inversa, tomando $v^m = w^m$ para todo $m \neq l$ en (3.1.3), el cual es válido para cualquier admisible v^l , se obtiene (3.1.2).

Observación 3.1.3. Nótese que la condición $g(v, \bar{w}) \leq 0$ (3.1.2), es equivalente a:

$$\max_{v \in V} \{g(v, \bar{w})\} \leq 0$$

para cualquier $v \in V$ fijo y cualquier $x \in X$.

Definición 3.1.4. El equilibrio de Nash $\bar{x} \in X$ para los líderes puede ser expresado en formato articulado [62] como:

$$\max_{u \in X} f(u, \bar{x}) \leq 0 \quad (3.1.4)$$

$$f(u, x) := \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} [\psi_m(x^m, x^{\hat{m}}) - \psi_m(u^m, x^{\hat{m}})]$$

$$\psi_m(x^m, x^{\hat{m}}) := \min_{z^m \in X^m} \psi_m(z^m, x^{\hat{m}}) \quad (3.1.5)$$

$$u^m \in X^m, x \in X := \bigotimes_{m=1}^{\mathcal{M}} X^m$$

Sin embargo, líderes y seguidores están en un juego Stackelberg: el modelo involucra dos juegos Nash restringidos por un juego Stackelberg como a continuación se define.

Definición 3.1.5. Un juego con \mathcal{M} líderes y \mathcal{N} seguidores se dice estar en un **juego no cooperativo Stackelberg-Nash** si:

$$F(u^m, x^{\hat{m}}|w) = \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} [\psi_m(x^m, x^{\hat{m}}|w) - \psi_m(u^m, x^{\hat{m}}|w)]$$

tal que, para los líderes:

$$f_m(u^m, x^{\hat{m}}|w) \leq 0 \text{ para cualquier } u^m \in U^m \text{ y todo } m = \overline{1, \mathcal{M}} \quad (3.1.6)$$

$$f_m(u^m, x^{\hat{m}}|w) := \psi_m(x^m, x^{\hat{m}}|w) - \psi_m(u^m, x^{\hat{m}}|w)$$

donde $x^{\hat{m}}$ es una estrategia del resto de los líderes adjuntos a u^m , con:

$$x^{\hat{m}} := (u^1, \dots, u^{m-1}, u^{m+1}, \dots, u^{\mathcal{M}}) \in X^{\hat{m}} := \bigotimes_{q=1, q \neq m}^{\mathcal{M}} U^q$$

y

$$x^m := \arg \min_{u^m \in U^m} \psi_m(u^m, x^{\hat{m}}|w)$$

para los seguidores:

$$g_l(v^l, w^{\hat{l}}|x) \leq 0 \text{ para cualquier } v^l \in V^l \text{ y todo } l = \overline{1, \mathcal{N}} \quad (3.1.7)$$

$$g_l(v^l, w^{\hat{l}}|x) := \varphi_l(w^l, w^{\hat{l}}|x) - \varphi_l(v^l, w^{\hat{l}}|x)$$

donde $w^{\hat{l}}$ es una estrategia del resto de los seguidores adjuntos a v^l , con

$$w^{\hat{l}} := (v^1, \dots, v^{l-1}, v^{l+1}, \dots, v^{\mathcal{N}}) \in W^{\hat{l}} := \bigotimes_{q=1, q \neq l}^{\mathcal{N}} V^q$$

y

$$w^l := \arg \min_{v^l \in V^l} \varphi_l(v^l, w^{\hat{l}}|x)$$

La función de costo $\varphi_l(v^l, w^{\hat{l}}|x)$ del jugador l que juega la estrategia $v^l \in V^l$ mientras que el resto de los jugadores la estrategia $w^{\hat{l}} \in W^{\hat{l}}$.

Definición 3.1.6. Sean $\psi_m(u^m, x^{\hat{m}}|w)$ las funciones de costo de los líderes ($m = \overline{1, \mathcal{M}}$) y $\varphi_l(v^l, w^{\hat{l}}|x)$ las funciones de costo de los seguidores ($l = \overline{1, \mathcal{N}}$) donde $x \in X$ y $w \in W$. Una estrategia $x^* \in X$ de los líderes junto con la colección $w^* \in W$ de los seguidores se dice que es un *equilibrio de Stackelberg-Nash* si:

$$(x^*, w^*) \in \arg \min_{u \in U, x \in X} \max_{v \in V, w \in W} \{F(u, x|w) | g(v, w|x) \leq 0, f(u, x|w) \leq 0\} \quad (3.1.8)$$

3.2. Regularizador de Tikhonov

De las definiciones (3.1.5) y (3.1.8), considerando que las funciones de pérdida admiten ser convexas no estrictamente, un punto de equilibrio en el juego de los seguidores puede no ser único. Para probar la unicidad de un equilibrio se asocia el problema (3.1.5) con el llamado problema regularizado, es decir:

$$(x_\delta^*, w_\delta^*) \in \arg \min_{u \in U, x \in X} \max_{v \in V, w \in W} \{F_\delta(u, x|w) | g_\delta(v, w|x) \leq 0, f_\delta(u, x|w) \leq 0\}$$

$$F_\delta(u, x|w) := - \sum_{m=1}^M \psi_m(x^m, x^{\hat{m}}|w) - \psi_m(u^m, x^{\hat{m}}|w) + \frac{\delta}{2}(\|u\|^2 + \|x\|^2) \quad (3.2.1)$$

$$f_\delta(u, x|w) = f(u, x|w) - \frac{\delta}{2}(\|u\|^2 + \|x\|^2)$$

$$g_\delta(v, w|x) = g(v, w|x) - \frac{\delta}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

Ahora, la función $f_\delta(u, x|w)$ y la función adjunta $g_\delta(v, w|x)$ son fuertemente convexas, según la definición (2.1.4), si $\delta > 0$. La existencia de la solución a los problemas (3.1.5) y (3.2.1) se sigue del teorema del punto fijo de Kakutani, el cual es válido bajo condiciones de suavidad aceptables. Es evidente que, para $\delta = 0$, el problema (3.2.1) se convierte en el problema (3.1.5).

Observación 3.2.1. Dada la restricción del problema para los líderes, para cualquier valor fijo $u \in U$ y $w \in W$

$$\psi_{m,\delta}(x^m, x^{\hat{m}}|w) \leq \psi_{m,\delta}(u^m, x^{\hat{m}}|w)$$

se sigue que

$$\max_{x \in X} f_\delta(\bar{u}_\delta, x|w) = f_\delta(\bar{u}_\delta, \bar{x}_\delta|w) = \max_{u \in U} f_\delta(u, \bar{x}_\delta|w)$$

también, por la restricción del problema para los seguidores, para cualquier valor fijo $v \in V$ y $x \in X$

$$\varphi_{l,\delta}(w^l, w^{\hat{l}}|x) \leq \varphi_{l,\delta}(v^l, w^{\hat{l}}|x)$$

se sigue que

$$\max_{w \in W} g_\delta(\bar{v}_\delta, w|x) = g_\delta(\bar{v}_\delta, \bar{w}_\delta|x) = \max_{v \in V} g_\delta(v, \bar{w}_\delta|x)$$

3.3. Implementación del principio de Lagrange

El problema de programación no lineal (3.2.1) puede ser resuelto por la implementación del principio de Lagrange. Para hacerlo, considere una función de Lagrange de la forma:

$$\mathcal{L}_\delta(u, x, t, v, w, \lambda, \theta, \mu) = t - \mu(f_\delta(u, x|w) - t) + \theta(f_\delta(u, x|w) - t) + \lambda g_\delta(v, w|x) - \frac{\delta}{2}(\lambda^2 + \theta^2)$$

Es fácil ver que, si $\mu = 1$, la función de Lagrange no admite un mínimo en $t \in \mathbb{R}$ (se excluye este caso). Tomando $\mu = 1$ (excluyendo t en $\mathcal{L}_\delta(u, x, t, v, w, \lambda, \theta, 1)$), y reacomodando términos se logra:

$$\mathcal{L}_\delta(u, x, v, w, \lambda, \theta) := (\theta - 1)f_\delta(u, x|w) + \lambda g_\delta(v, w|x) - \frac{\delta}{2}(\lambda^2 + \theta^2) \quad (3.3.1)$$

En vista de la convexidad fuerte de (3.3.1) para $\delta > 0$, existe un $\lambda_\delta^* \geq 0$ tal que el siguiente punto silla mantiene las desigualdades (ver [45]):

$$\mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, x_\delta^*, v, w, \lambda, \theta) \leq \mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, x_\delta^*, v_\delta^*, w_\delta^*, \lambda_\delta^*, \theta_\delta^*) \leq \mathcal{L}_\delta(u, x, v_\delta^*, w_\delta^*, \lambda_\delta^*, \theta_\delta^*) \quad (3.3.2)$$

El vector $(u_\delta^*, x_\delta^*, v_\delta^*, w_\delta^*, \lambda_\delta^*, \theta_\delta^*)$ puede ser interpretado como la aproximación δ de la solución al problema (3.3.1). Entonces, se puede reescribir (3.2.1) usando (3.3.1) como sigue:

$$(u_\delta^*, x_\delta^*, v_\delta^*, w_\delta^*, \lambda_\delta^*, \theta_\delta^*) \in \arg \min_{u \in U, x \in X} \max_{v \in V, w \in W, \lambda \geq 0, \theta \geq 0} \{\mathcal{L}_\delta(u, x, v, w, \lambda, \theta)\} \quad (3.3.3)$$

3.4. El método extra-proximal

3.4.1. El formato proximal

En el *formato proximal* (ver [2]) la relación (3.1.8) puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} \lambda_\delta^* &= \arg \max_{\lambda \geq 0} \left\{ -\frac{1}{2} \|\lambda - \lambda_\delta^*\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, x_\delta^*, v_\delta^*, w_\delta^*, \lambda, \theta_\delta^*) \right\} \\ \theta_\delta^* &= \arg \max_{\theta \geq 0} \left\{ -\frac{1}{2} \|\theta - \theta_\delta^*\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, x_\delta^*, v_\delta^*, w_\delta^*, \lambda_\delta^*, \theta) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_\delta^* &= \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_\delta^*\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, x_\delta^*, v_\delta^*, w_\delta^*, \lambda_\delta^*, \theta_\delta^*) \right\} \\
x_\delta^* &= \arg \min_{x \in X} \left\{ \frac{1}{2} \|x - x_\delta^*\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, x, v_\delta^*, w_\delta^*, \lambda_\delta^*, \theta_\delta^*) \right\} \\
v_\delta^* &= \arg \max_{v \in V} \left\{ -\frac{1}{2} \|v - v_\delta^*\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, x_\delta^*, v, w_\delta^*, \lambda_\delta^*, \theta_\delta^*) \right\} \\
w_\delta^* &= \arg \max_{w \in W} \left\{ -\frac{1}{2} \|w - w_\delta^*\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, x_\delta^*, v_\delta^*, w, \lambda_\delta^*, \theta_\delta^*) \right\}
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

donde las soluciones u_δ^* , x_δ^* , v_δ^* , w_δ^* y λ_δ^* dependen de parámetros pequeños $\delta, \gamma > 0$.

Con el propósito de simplificar las restricciones del juego se definen las siguientes variables extendidas:

$$\tilde{x} := \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} \in \tilde{X} := X \times U, \quad \tilde{y} := \begin{pmatrix} v \\ w \\ \lambda \\ \omega \end{pmatrix} \in \tilde{Y} := V \times W \times \mathbb{R}^+$$

La función regularizada de Lagrange puede ser representada por:

$$\tilde{\mathcal{L}}_\delta(\tilde{x}, \tilde{y}) := \mathcal{L}_\delta(u, x, v, w, \lambda, \theta)$$

El punto de equilibrio que satisface las ecuaciones (3.4.1) puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_\delta^* &= \arg \min_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \left\{ \frac{1}{2} \|\tilde{x} - \tilde{x}_\delta^*\|^2 + \gamma \tilde{\mathcal{L}}_\delta(\tilde{x}, \tilde{y}_\delta^*) \right\} \\
\tilde{y}_\delta^* &= \arg \min_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \left\{ \frac{1}{2} \|\tilde{y} - \tilde{y}_\delta^*\|^2 + \gamma \tilde{\mathcal{L}}_\delta(\tilde{x}_\delta^*, \tilde{y}) \right\}
\end{aligned}$$

Ahora, se introduce la función regularizada y los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
\tilde{w} &= \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix} \in \tilde{X} \times \tilde{Y}, \quad \tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} \in \tilde{X} \times \tilde{Y} \\
\Theta_\delta(\tilde{w}, \tilde{v}) &:= \tilde{\mathcal{L}}_\delta(\tilde{w}_1, \tilde{v}_2) - \tilde{\mathcal{L}}_\delta(\tilde{v}_1, \tilde{w}_2)
\end{aligned}$$

Para $\tilde{w}_1 = \tilde{x}$, $\tilde{w}_2 = \tilde{y}$, $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_1^* = \tilde{x}_\delta^*$ y $\tilde{v}_2 = \tilde{v}_2^* = \tilde{y}_\delta^*$ se tiene:

$$\Theta_\delta(\tilde{w}, \tilde{v}) := \tilde{\mathcal{L}}_\delta(\tilde{x}, \tilde{y}_\delta^*) - \tilde{\mathcal{L}}_\delta(\tilde{x}_\delta^*, \tilde{y})$$

En estas variables, la relación (3.4.1) puede ser expresada en *formato corto* como:

$$\tilde{v}^* = \arg \min_{\tilde{w} \in \tilde{X} \times \tilde{Y}} \left\{ \frac{1}{2} \|\tilde{w} - \tilde{v}^*\|^2 + \gamma \Theta_\delta(\tilde{w}, \tilde{v}^*) \right\} \quad (3.4.2)$$

Finalmente, por el método proximal se tienen los siguientes pasos:

1. Primer paso:

$$\hat{v}_n = \arg \min_{\tilde{w} \in \tilde{X} \times \tilde{Y}} \left\{ \frac{1}{2} \|\tilde{w} - \tilde{v}_n\|^2 + \gamma \Theta_\delta(\tilde{w}, \tilde{v}^*) \right\}$$

2. Segundo paso:

$$\hat{v}_{n+1} = \arg \min_{\tilde{w} \in \tilde{X} \times \tilde{Y}} \left\{ \frac{1}{2} \|\tilde{w} - \tilde{v}_n\|^2 + \gamma \Theta_\delta(\tilde{w}, \tilde{v}^*) \right\}$$

3.4.2. El formato extra-proximal

El *método extra-proximal* para problemas de optimización condicionados (3.1.8) fue sugerido en [2]. Se diseña el método para un juegos Stackelberg-Nash estático en un formato general.

La versión iterada del formato general ($n = 0, 1, \dots$) del método extra-proximal con algunos valores iniciales fijos ($u_0 \in U$, $x_0 \in X$, $v_0 \in V$, $w \in W$, $\lambda_0 \geq 0$, y $\theta_0 \geq 0$) es como sigue:

1. El *primer medio-paso* (predicción):

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_n &= \arg \min_{\lambda \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|\lambda - \lambda_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w_n, \lambda, \bar{\theta}_n) \right\} \\ \bar{\theta}_n &= \arg \min_{\theta \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|\lambda - \lambda_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \theta) \right\} \\ \bar{u}_n &= \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\} \\ \bar{x}_n &= \arg \min_{x \in X} \left\{ \frac{1}{2} \|x - x_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\} \\ \bar{v}_n &= \arg \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\} \\ \bar{w}_n &= \arg \min_{w \in W} \left\{ \frac{1}{2} \|w - w_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

ó, en las variables extendidas:

$$\hat{v}_n = \arg \min_{\tilde{w} \in \tilde{Y} \times \tilde{X}} \left\{ \frac{1}{2} \|\tilde{w} - \tilde{v}_n\|^2 + \gamma \Psi_\delta(\tilde{w}, \tilde{v}_n) \right\} \quad (3.4.4)$$

2. El *segundo medio-paso* (básico):

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \arg \min_{\lambda \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|\lambda - \lambda_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \lambda, \bar{\theta}_n) \right\} \\ \theta_{n+1} &= \arg \min_{\theta \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|\lambda - \lambda_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \theta) \right\} \\ u_{n+1} &= \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\} \\ x_{n+1} &= \arg \min_{x \in X} \left\{ \frac{1}{2} \|x - x_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, x, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\} \\ v_{n+1} &= \arg \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, v, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\} \\ w_{n+1} &= \arg \min_{w \in W} \left\{ \frac{1}{2} \|w - w_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, w, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

ó, en el formato corto:

$$\tilde{v}_{n+1} = \arg \min_{\tilde{w} \in \tilde{Y} \times \tilde{X}} \left\{ \frac{1}{2} \|\tilde{w} - \tilde{v}_n\|^2 + \gamma \Psi_\delta(\tilde{w}, \hat{v}_n) \right\} \quad (3.4.6)$$

3.5. Convergencia de los parámetros γ y δ

Teorema 3.5.1. *Dentro de la clase de las siguientes sucesiones numéricas:*

$$\gamma_n = \frac{\gamma_0}{(n+n_0)^\gamma} \quad \gamma_0, n_0, \gamma > 0$$

$$\delta_n = \frac{\delta_0}{(n+n_0)^\delta} \quad \delta_0, \delta > 0$$

el tamaño de paso γ_n y el parámetro de regularización δ_n satisfacen las siguientes condiciones:

$$0 < \gamma_n \rightarrow 0, \quad 0 < \delta_n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \delta_n = \infty$$

$$\frac{\gamma_n}{\delta_n} \rightarrow \lambda \text{ suficientemente pequeño} \quad \frac{|\delta_{n+1} - \delta_n|}{\gamma_n \delta_n} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

para $\gamma + \delta \leq 1, \gamma \geq \delta, \gamma < 1$.

Demostración. Se sigue de los estimados que:

$$\gamma_n \delta_n = O\left(\frac{1}{n^{\gamma+\delta}}\right)$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} |\delta_{n+1} - \delta_n| &= O\left(\frac{1}{n^\delta} - \frac{1}{(n+1)^\delta}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{(n+1)^\delta} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\delta - 1\right]\right) \\ &= O\left(\frac{1}{(n+1)^\delta} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^\delta + o(1)\right]\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^\delta + 1}\right) \end{aligned}$$

y así:

$$\frac{|\delta_{n+1} - \delta_n|}{\gamma_n \delta_n} = O\left(\frac{1}{n^{1-\gamma}}\right)$$

□

Teorema 3.5.2. Sean u y x dos variables con componentes no negativos de los líderes. Entonces, dentro de la clase de las sucesiones numéricas se tiene que:

$$\gamma_n = \frac{\gamma_0}{(n+n_0)^\gamma} \quad \gamma_0, n_0, \gamma > 0$$

$$\delta_n = \frac{\delta_0}{(n+n_0)^\delta} \quad \delta_0, \delta > 0$$

del procedimiento dado en las ecuaciones (3.4.1) la razón de convergencia para los líderes está dada por:

$$\|u_n - u^{**}\| + \|x_n - x^{**}\| = O\left(\frac{1}{n^\varkappa}\right)$$

que es igual a:

$$\varkappa = \min\{\gamma - \delta; 1 - \gamma; \delta\} \quad (3.5.1)$$

Entonces, la razón máxima \varkappa^* de convergencia es:

$$\gamma = \gamma^* = 2/3 \quad \delta = \delta^* = 1/3 \quad (3.5.2)$$

Demostración. Se sigue que, para \varkappa_0 , la razón de convergencia está dada por:

$$\begin{aligned} r_n &= \|u_n - u^*(\delta_n)\| + \|x_n - x^*(\delta_n)\| \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\varkappa_0}}\right) \end{aligned}$$

con $\varkappa_0 = \min\{\gamma - \delta; 1 - \gamma; \delta\}$. De la dependencia lineal de la función de Lagrange regularizada sobre δ :

$$\begin{aligned} \|u_n - u^{**}\| + \|x_n - x^{**}\| &= r_n + O(\delta_n) \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\varkappa_0}}\right) + O\left(\frac{1}{n^\delta}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\min\{\varkappa_0; \delta\}}}\right) \end{aligned}$$

lo que implica (3.5.1). El valor máximo \varkappa de \varkappa^* es alcanzado cuando $\gamma - \delta = 1 - \gamma = \delta$, i.e., cuando (3.5.2) se cumple. \square

Capítulo 4

Implementación del algoritmo para dos líderes y dos seguidores

El presente capítulo tiene la finalidad de ejemplificar la teoría anteriormente expuesta, para un posterior desarrollo computacional del método.

A partir de ahora será considerado un juego Stackelberg con cuatro jugadores: dos líderes ($\mathcal{M} = \{1, 2\}$) y dos seguidores ($\mathcal{N} = \{3, 4\}$). La numeración es usada para referirse a los jugadores en ciertas expresiones en específico. Se asume que el número de estrategias y acciones que se pueden tomar es finito y fijo. En este punto, se emplea un algoritmo cuadrático que encuentra soluciones locales y particulares en cada paso de iteración del algoritmo extra-proximal.

4.1. Funciones de costo y notación

Las funciones de costo individuales de los líderes y de los seguidores se definen como sigue:

Funciones de costo para los líderes:

$$\mathbf{J}^1 \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)}, c_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) := \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \left(c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) \quad (4.1.1)$$

$$\mathbf{J}^2 \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)}, c_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) := \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \left(c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) \quad (4.1.2)$$

Funciones de costo para los seguidores:

$$\mathbf{J}^3 \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)}, c_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) := \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \left(c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) \quad (4.1.3)$$

$$\mathbf{J}^4 \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)}, c_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) := \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \left(c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) \quad (4.1.4)$$

Considerando para los líderes que:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^1 \left(\overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}, \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \mid c_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) &\leq \mathbf{J}^1 \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \mid c_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) \\ \mathbf{J}^2 \left(\overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}, \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \mid c_{(i_4, k_4)}^{(4)}, c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \right) &\leq \mathbf{J}^2 \left(\overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}, \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \mid c_{(i_4, k_4)}^{(4)}, c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \right) \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \psi_m(x^m, x^{\hat{m}} \mid w) &= \mathbf{J}^1 \left(\overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}, \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \mid c_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) + \mathbf{J}^2 \left(\overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}, \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \mid c_{(i_4, k_4)}^{(4)}, c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \right) \\ &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\ &\quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \psi_m(u^m, x^{\hat{m}} \mid w) &= \mathbf{J}^1 \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \mid c_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \right) + \mathbf{J}^2 \left(c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \mid c_{(i_4, k_4)}^{(4)}, c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \right) \\ &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\ &\quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Para el cálculo del equilibrio de Nash, se define la función $f_\delta(u, x|w)$ como:

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \psi_m(u^m, x^m|w) = \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} [\psi_m(x^m, x^{\hat{m}}|w) - \psi_m(u^m, x^{\hat{m}}|w)]$$

$$x_m = (x^m, x^{\hat{m}})$$

$$u_m = (u^m, x^{\hat{m}})$$

$$f_\delta(u, x|w) = \sum_m f_m(u_m, x_m|w)$$

$$u = (u_1^T, \dots, u_n^T)^T, x = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T$$

$$w = col \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right\|$$

$$x = \left(\begin{array}{c} col \left\| \begin{array}{c} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\| \\ col \left\| \begin{array}{c} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\| \\ col \left\| \begin{array}{c} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\| \\ col \left\| \begin{array}{c} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\| \end{array} \right), u = \left(\begin{array}{c} col \left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\| \\ col \left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\| \\ col \left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\| \\ col \left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\| \end{array} \right)$$

$$f_\delta(u, x|w) =$$

$$\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} +$$

$$\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} -$$

$$\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} -$$

$$\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} -$$

(4.1.7)

Para $n = 0, 1, \dots$ se definen los vectores:

$$u_n := \begin{pmatrix} \text{col } c^{(1)}(n) \\ \text{col } c^{(2)}(n) \end{pmatrix}$$

$$x_n := x^{\hat{m}} = \begin{pmatrix} \text{col } c^{(\hat{1})}(n) \\ \text{col } c^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix}$$

$$x^m := \begin{pmatrix} \text{col } \hat{c}^{(1)}(n) \\ \text{col } \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{col arg } \min_{z \in C_{adm}^{(1)}} \mathbf{J}^{(1)}(c^{(4)}(n), c^{(3)}(n), z, c^{(\hat{2})}(n)) \\ \text{col arg } \min_{z \in C_{adm}^{(2)}} \mathbf{J}^{(2)}(c^{(4)}(n), c^{(3)}(n), c^{(\hat{1})}(n), z) \end{pmatrix}$$

$$v_n := \begin{pmatrix} \text{col } c^{(3)}(n) \\ \text{col } c^{(4)}(n) \end{pmatrix}$$

$$w_n := w^{\hat{l}} = \begin{pmatrix} \text{col } c^{(\hat{3})}(n) \\ \text{col } c^{(\hat{4})}(n) \end{pmatrix}$$

$$w^l := \begin{pmatrix} \text{col } \hat{c}^{(3)}(n) \\ \text{col } \hat{c}^{(4)}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{col arg } \min_{z \in C_{adm}^{(3)}} \mathbf{J}^{(3)}(z, c^{(\hat{4})}(n), c^{(1)}(n), c^{(2)}(n)) \\ \text{col arg } \min_{z \in C_{adm}^{(4)}} \mathbf{J}^{(4)}(c^{(\hat{3})}(n), z, c^{(1)}(n), c^{(2)}(n)) \end{pmatrix}$$

Considerando para los seguidores que:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^3 \left(\hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})} \mid c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) &\leq \mathbf{J}^3 \left(c_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}, \mid c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) \\ \mathbf{J}^4 \left(\hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}, c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}, \mid c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) &\leq \mathbf{J}^4 \left(c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}, c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}, \mid c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \varphi_l(w^l, w^{\hat{l}}|x) &= \mathbf{J}^3 \left(\overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}, c_{(i_4, k_4)}^{(4)} | c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) + \mathbf{J}^4 \left(\overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}, c_{(i_3, k_3)}^{(3)} | c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) = \\
 &\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\
 &\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

y

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \varphi_l(w^l, w^{\hat{l}}|x) &= \mathbf{J}^3 \left(c_{(i_3, k_3)}^{(3)}, \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} | c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) + \mathbf{J}^4 \left(c_{(i_4, k_4)}^{(4)}, \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} | c_{(i_1, k_1)}^{(1)}, c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right) = \\
 &\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\
 &\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Para el cálculo del equilibrio de Nash, se define la función $g_\delta(v, w|x)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} g_l(v_l, w_l|x) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \left[\varphi_l(w^l, w^{\hat{l}}|x) - \varphi_l(v^l, w^{\hat{l}}|x) \right] \\
 w_l &:= (w^l, w^{\hat{l}}) \\
 v_l &:= (v^l, w^{\hat{l}}) \\
 g_\delta(v, w|x) &:= \sum_l g_l(v_l, w_l|x) \\
 v &:= (v_1^T, \dots, v_n^T)^T, \quad w := (w_1^T, \dots, w_n^T)^T \\
 x &:= \text{col} \left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\|
 \end{aligned}$$

$$w := \begin{pmatrix} \text{col} \left\| \begin{array}{c} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \\ \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \\ \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right\| \\ \text{col} \left\| \begin{array}{c} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \\ \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \\ \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right\| \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} \text{col} \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \\ c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \\ c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right\| \\ \text{col} \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \\ c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \\ c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right\| \end{pmatrix}$$

$$g(v, w|x) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

El problema regularizado para (4.1.1) está dado por:

$$\begin{aligned} f_\delta(u, x|w) = & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\ & \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\|^2 \right) \end{aligned}$$

y para (4.1.10) se tiene:

$$\begin{aligned}
 g_\delta(v, w|x) = & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right\|^2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Aplicando el principio de Lagrange con la función lagrangiana:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\delta(u, x, v, w, \lambda) = & -F_\delta(u, x|w) + \theta f_\delta(u, x|w) + \lambda g_\delta(v, w|x) - \frac{\delta}{2} (\lambda^2 + \theta^2) = \\
 & (\theta - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right] + \\
 & \lambda \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \right. \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right] + \\
 & (\theta - 1) \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} \end{array} \right\|^2 \right) - \\
 & \lambda \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})} \end{array} \right\|^2 \right) - \frac{\delta}{2} (\lambda^2 + \theta^2)
 \end{aligned}$$

4.2. El modelo Stackelberg-Nash líder-seguidor extra-proximal

El procedimiento para resolver el punto de equilibrio de Stackelberg-Nash líder-seguidor por el método extra-proximal está descrito en el Apéndice de manera completa y a detalle, en esta sección únicamente se expresarán los resultados principales con la finalidad de presentarle facilidades visuales al lector, reduciendo operaciones elementales.

El método se describe por los siguientes pasos iterados:

1. Primer paso-medio

- Cálculo para $\bar{\lambda}_n$:

$$\bar{\lambda}_n = \arg \min_{\lambda \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_n)^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w_n, \lambda, \theta_n) \right\}$$

calculando se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_n = & [\lambda_n + \\
 & \frac{\gamma}{1 + \gamma \delta} \left(\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \Big]_+$$

- Similarmente para $\bar{\theta}_n$:

$$\bar{\theta}_n = \arg \min_{\theta \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|\theta - \theta_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \theta) \right\}$$

se obtiene:

$$(1 - \delta\gamma) \theta = \left(\theta_n + \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \right] \right) \cdot \frac{1}{(1 + \delta\gamma)}$$

- Para \bar{u}_n :

$$\bar{u}_n = \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

entonces

$$\frac{1}{2} (u - u_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right] + \\
 & \quad \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right] + \\
 & \quad \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \\
 & \quad \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Para la programación cuadrática sean:

$$\begin{aligned}
 Q1_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q2_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q3_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q4_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n)
 \end{aligned}$$

y se definen las siguientes matrices:

$$J_{(l1, l2)} := Q1_{(l1, l2)} - Q2_{(l1, l2)} + Q3_{(l1, l2)} - Q4_{(l1, l2)}$$

$$H := \begin{pmatrix} (1 + (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \delta) I_{\frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2} \times \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2}} & \gamma \bar{\lambda}_n J_{(l1, l2)}^\top \\ \gamma \bar{\lambda}_n J_{(l1, l2)} & (1 + (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \delta) I_{\frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2} \times \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2}} \end{pmatrix}$$

$$f := - \begin{pmatrix} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) + c_{(i_0, k_0)}^{(0)}(n) \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \end{pmatrix}$$

- Cálculo para \bar{x}_n :

$$\bar{x}_n = \arg \min_{x \in X} \left\{ \frac{1}{2} \|x - x_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(x - x_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left\{ \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right\} + \\
 & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Por la programación cuadrática se obtienen las siguientes matrices:

$$H := \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \cdot I_{N_1 M_1 + N_2 M_2 \times N_1 M_1 + N_2 M_2}$$

$$f := \left(\begin{array}{l} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \end{array} \right) -$$

$$\left(\begin{array}{l} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \end{array} \right) -$$

$$\left(\begin{array}{l} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{array} \right)$$

- Cálculo para \bar{v}_n :

$$\bar{v}_n = \arg \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

entonces, se tiene:

$$\frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) =$$

$$\left(\frac{1}{2} + \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \right) \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 -$$

$$\gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) + \right.$$

$$\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} -$$

$$\left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Por la programación cuadrática se tiene:

$$\begin{aligned}
 Q1_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \\
 Q2_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \\
 Q3_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\
 Q4_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n)
 \end{aligned}$$

y se obtienen las siguientes matrices:

$$J_{(l_1, l_2)} := -\gamma (\bar{\theta}_n - 1) [Q1_{(l_1, l_2)} - Q2_{(l_1, l_2)}] - \gamma (\bar{\theta}_n - 1) [Q3_{(l_1, l_2)} - Q4_{(l_1, l_2)}]$$

$$H := \begin{pmatrix} (1 + \gamma \bar{\lambda}_n \delta) I_{\frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2} \times \frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2}} & J_{(l_1, l_2)} \\ J_{(l_1, l_2)}^\top & (1 + \gamma \bar{\lambda}_n \delta) I_{\frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2} \times \frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2}} \end{pmatrix}$$

$$f := \begin{pmatrix} \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \end{pmatrix}$$

- Cálculo para \bar{w}_n :

$$\bar{w}_n = \arg \min_{w \in W} \left\{ \frac{1}{2} \|w - w_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

Así, se logra:

$$H := \left(\frac{1}{2} + \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \right) \cdot I_{N_3 M_3 + N_4 M_4 \times N_3 M_3 + N_4 M_4}$$

$$f := - \begin{pmatrix} \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \dot{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \dot{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix}$$

2. Segundo medio-paso

- Cálculo para $\bar{\lambda}_n$:

$$\bar{\lambda}_n = \arg \min_{\lambda \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_n)^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \lambda, \bar{\theta}_n) \right\}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_n = & [\lambda_n + \\
 & \gamma (\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{l} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{l} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \cdot \frac{1}{(1 + \gamma \delta)}] +
 \end{aligned}$$

- Cálculo para $\bar{\theta}_n$:

$$\bar{\theta}_n = \arg \min_{\theta \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|\theta - \theta_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \theta) \right\}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (1 - \delta \gamma) \theta = & \left(\theta_n + \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \right. \\
 & W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \left. \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{l} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{l} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] \right) \cdot \frac{1}{(1 + \delta \gamma)}
 \end{aligned}$$

- Cálculo para \bar{u}_n :

$$\bar{u}_n = \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(u - u_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\ & \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\ & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{\hat{c}(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{\hat{c}(2)}(n) + \right. \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{\hat{c}(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{\hat{c}(2)} - \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{\hat{c}(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{\hat{c}(2)}(n) - \\ & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{\hat{c}(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{\hat{c}(2)} \right] + \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{\hat{c}(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{\hat{c}(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{\hat{c}(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{\hat{c}(2)} + \right. \\ & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{\hat{c}(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{\hat{c}(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{\hat{c}(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{\hat{c}(2)} - \\ & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{\hat{c}(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{\hat{c}(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{\hat{c}(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{\hat{c}(2)} - \\ & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{\hat{c}(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{\hat{c}(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{\hat{c}(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{\hat{c}(2)} \right] + \\ & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{\hat{c}(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{\hat{c}(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{\hat{c}(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{\hat{c}(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{\hat{c}(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{\hat{c}(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2) \end{aligned}$$

Por la programación cuadrática se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Q1_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q2_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q3_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q4_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n)
 \end{aligned}$$

y se obtienen las siguientes matrices:

$$J_{(l1, l2)} := Q1_{(l1, l2)} - Q2_{(l1, l2)} + Q3_{(l1, l2)} - Q4_{(l1, l2)}$$

$$H := \begin{pmatrix} (1 + (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \delta) I_{\frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2} \times \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2}} & \gamma \bar{\lambda}_n J_{(l1, l2)}^\top \\ \gamma \bar{\lambda}_n J_{(l1, l2)} & (1 - (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \delta) I_{\frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2} \times \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2}} \end{pmatrix}$$

$$f := - \begin{pmatrix} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) + \bar{c}_{(i_0, k_0)}^{(0)}(n) \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \bar{c}_{(i_0, k_0)}^{(0)}(n) \end{pmatrix}$$

■ Cálculo para \bar{x}_n :

$$\bar{x}_n = \arg \min_{x \in X} \left\{ \frac{1}{2} \|x - x_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, x_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(x - x_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, x, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left\{ \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right\} + \\
 & \quad \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \\
 & \quad \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Por la programación cuadrática se obtienen las siguientes matrices:

$$H := \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \cdot I_{N_1 M_1 + N_2 M_2 \times N_1 M_1 + N_2 M_2}$$

$$f := \left(\begin{array}{l} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \dot{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \dot{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \end{array} \right) - \\
 \left(\begin{array}{l} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \end{array} \right) \\
 - \left(\begin{array}{l} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right)$$

- Cálculo para \bar{v}_n :

$$\bar{v}_n = \arg \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, v, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

entonces, se tiene:

$$\frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, v, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 \left(\frac{1}{2} + \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \right) \left\| \left(\begin{array}{l} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right) \right\|^2 - \left(\begin{array}{l} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{l} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left\| \left(\begin{array}{l} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right) \right\|^2 - \\
 \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \dot{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \dot{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \right. \\
 \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Por la programación cuadrática se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Q1_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\
 Q2_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\
 Q3_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\
 Q4_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n)
 \end{aligned}$$

y se obtienen las siguientes matrices:

$$J_{(l_1, l_2)} := -\gamma (\bar{\theta}_n - 1) [Q1_{(l_1, l_2)} - Q2_{(l_1, l_2)}] - \gamma (\bar{\theta}_n - 1) [Q3_{(l_1, l_2)} - Q4_{(l_1, l_2)}]$$

$$H := \begin{pmatrix} (1 + \gamma \bar{\lambda}_n \delta) I_{(\frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2} \times \frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2})} & J_{(l_1, l_2)} \\ J_{(l_1, l_2)}^\top & (1 + \gamma \bar{\lambda}_n \delta) I_{(\frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2} \times \frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2})} \end{pmatrix}$$

$$f := \begin{pmatrix} \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \end{pmatrix}$$

- Cálculo para \bar{w}_n :

$$\bar{w}_n = \arg \min_{w \in W} \left\{ \frac{1}{2} \|w - w_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, w, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

y así se tiene:

$$H := \left(\frac{1}{2} + \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \right) \cdot I_{N_3 M_3 + N_4 M_4 \times N_3 M_3 + N_4 M_4}$$

$$f = - \begin{pmatrix} \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix}$$

4.3. Implementación del *solucionador (solver)*

Se restringe la expresión (2.5.2) para el conjunto admisible y el caso estacionario con las restricciones establecidas en (2.5.4). Una condición necesaria y suficiente para $c_{(i_l|k_l)}^{(l)}$ para que sea un punto de equilibrio de Stackelberg-Nash es que la solución del siguiente QPP (*Quadratic Programming Problem* - Problema de Programación Cuadrática):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{(c^0, \dots, c^N)}^l(n) &\rightarrow \min_{c_{(i_l|k_l)}^{(l)}} \\ \text{sujeto a: } c_{(i_l|k_l)}^{(l)} &\in S^{(N_l M_l)} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Considérese el problema:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} X^T H X + C^T X &\rightarrow \min_X \\ \text{tal que } AX \leq b, \quad AX &= b \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

donde $0 \leq X \leq 1$, $A^l \in \mathbb{R}^{N_l+1 \times (N_l M_l)}$ y

$$b^l \in \mathbb{R}^{N_l+1}$$

El vector $C^T = C_{(N|M)}$ (2.5.4) es definido como:

$$\begin{aligned} c_{(1|1)} &= W_{(1|1)}^l, c_{(2|1)} = W_{(2|1)}^l, \dots, c_{(N|1)} = W_{(N|1)}^l, \\ \dots, c_{(1|M_l)} &= W_{(1|M_l)}^l, \dots, c_{(N_l|M_l)} = W_{(N_l|M_l)}^l \end{aligned}$$

esto es, $C_{(N|M)}$ es equivalente a los $W_{(i_1, k_1, \dots, i_N, k_N)}^l$ ordenados por columnas.

El vector b^l es definido como:

$$b^l = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{N_l+1}$$

N_l veces

Se construye la matriz $A^l \in \mathbb{R}^{N_l \times (N_l M_l)}$ usando las restricciones de ergodicidad definidas en (2.5.4):

$$0 = \sum_{k_l=1}^{M_l} \left(\sum_{i_l=1}^{N_l} \pi_{(i_l j_l | k_l)}^{(l)} c_{(i_l | k_l)}^{(l)} - c_{(j_l | k_l)}^{(l)} \right) \quad (4.3.3)$$

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} j_l = 1 & \quad \sum_{k_l=1}^{M_l} \left(\sum_{i_l=1}^{N_l} \pi_{(i_l j_l | k_l)}^{(l)} c_{(i_l | k_l)}^{(l)} - c_{(1 | k_l)}^{(l)} \right) = 0 \\ j_l = 2 & \quad \sum_{k_l=1}^{M_l} \left(\sum_{i_l=1}^{N_l} \pi_{(i_l j_l | k_l)}^{(l)} c_{(i_l | k_l)}^{(l)} - c_{(2 | k_l)}^{(l)} \right) = 0 \\ & \quad \dots \\ j_l = N_l & \quad \sum_{k_l=1}^{M_l} \left(\sum_{i_l=1}^{N_l} \pi_{(i_l j_l | k_l)}^{(l)} c_{(i_l | k_l)}^{(l)} - c_{(N_l | k_l)}^{(l)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Desarrollando las fórmulas de (4.3.4) para \mathcal{N} jugadores y multiplicando por $c_{(i_l | k_l)}^{(l)}$ para cada componente (4.3.4) se logra:

$$BL^{(l)} = \left[\pi_{(j_l, i_l | k_l)}^{(l)} - \delta_{(j_l, i_l)} \right]_{j_l=1, \dots, N_l; i_l=1, \dots, N_l} =$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{(1,1|1)}^{(l)} - 1 & \dots & \pi_{(N_l,1|M_l)}^{(l)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pi_{(N_l,1|1)}^{(l)} & \dots & \pi_{(N_l,N_l|M_l)}^{(l)} - 1 \end{bmatrix}$$

donde $\delta_{(j_l, i_l)}$ es la delta de Kronecker, entonces $A_{eq} \in \mathbb{R}^{(\sum_{l=1}^{\mathcal{N}} N_l + \mathcal{N}) \times (\sum_{l=1}^{\mathcal{N}} N_l \times M_l)}$ es definida como:

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} BL^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & BL^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & BL^{(M_l)} \\ [1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [1] & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [1] \end{bmatrix}$$

donde $[1] = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{(1 \times N_l M_l)}$ y $b_{eq} \in \mathbb{R}^{(\sum_{i=1}^N N_i + (N))}$ es como sigue:

$$b_{eq} = \left(0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \right)^\top$$

4.4. Caminata aleatoria tomando como criterio la entropía de Kullback-Leibler

Se introduce ahora una caminata aleatoria basada en la divergencia de Kullback-Leibler. Para el ejemplo de aplicación, que será expuesto más abajo, se considera un modelo donde los defensores (agencias de policía) intentan atrapar a los atacantes (ladrones) mientras ambos pasan de un estado a otro definido por un MDP ergódico. La ergodicidad del MDP permite a los jugadores saltar arbitrariamente entre los estados: un salto tan grande entre los estados corresponde a un atajo entre dos lugares.

La meta de los defensores es capturar a los atacantes en el menor número de pasos posible, pero los atacantes intentarán maximizar el número de pasos antes de que sean atrapados. En este sentido, se estudian las estrategias de los defensores tanto como las de los atacantes sobre el valor esperado del mencionado número de pasos. Para el defensor se investigan dos modelos: en el primero el defensor tiene su trayectoria discreta y finita definida por un MDP ergódico, en otro modelo se añadirán penalizaciones dependiendo de qué tanto se desvíen de la posición de los atacantes.

Las estrategias de los jugadores se calculan resolviendo el juego tipo Stackelberg por medio del método extra-proximal como se ha descrito. Para la realización, una vez fijadas las estrategias de los defensores y de los atacantes, se emplea la entropía de Kullback-Leibler y en base a ella se desarrolla la caminata aleatoria. Considere un jugador frente a un entorno dinámico que evoluciona como un proceso Markov controlado, ya con las estrategias fijas. El proceso de fijar las estrategias está dado por el método extra-proximal solución del juego tipo Stackelberg. Entonces, el punto de partida para los defensores es una política de Markov estacionaria dada por $d_{(k_l|i_l)}^l = c_{i_l, k_l}^l / \sum_{k_l} c_{i_l, k_l}^l$ (ver Ec. 2.5.5). Se pretende mejorar c_{i_l, k_l}^l seleccionando la política con la mejor probabilidad.

Definición 4.4.1. Se define la entropía de Kullback-Leibler o entropía relativa (ver [45]) entre la distribución calculada $d_{(k_l|i_l)}^l$ y la distribución óptima $d_{(k_l|i_l)}^{l*}$, como:

$$L(d_{(k_l|i_l)}^l || d_{(k_l|i_l)}^{l*}) := \sum_{i_l}^{N_l} d_{(k_l|i_l)}^{l*} \log \frac{d_{(k_l|i_l)}^{l*}}{d_{(k_l|i_l)}^l} \quad (4.4.1)$$

Definición 4.4.2. De la misma forma, es posible simetrizar la entropía anterior, así se define la forma simétrica de Kullback-Leibler (ver [38]) para las distribuciones ya descritas, como:

$$KL(d_{(k_l|i_l)}^l || d_{(k_l|i_l)}^{l*}) := \frac{L(d_{(k_l|i_l)}^l || d_{(k_l|i_l)}^{l*}) + L(d_{(k_l|i_l)}^{l*} || d_{(k_l|i_l)}^l)}{2} \quad (4.4.2)$$

Se emplea la entropía relativa para comparar la distribución inducida por la ley de control dada por $d_{(k_l|i_l)}^l$ a un modelo de referencia dado por todas las posibles estrategias óptimas que conducen a la estrategia óptima $d_{(k_l|i_l)}^{l*}$. Este acercamiento, matemáticamente puede ser expresado como sigue:

$$d_{(k_l^*|i_l)}^{l*} = \delta_{k_l^*(i_l), i_l} \quad (4.4.3)$$

donde $\delta_{k_l^*(i_l), i_l}$ es el símbolo de Kronecker, $k_l^*(i_l)$ es un índice que cumple:

$$k_l^*(i_l) := \min_{k_l \in M_l} KL(d_{(k_l|i_l)}^l || d_{(k_l|i_l)}^{l*}) \quad (4.4.4)$$

Similarmente, se tiene un punto de partida para los atacantes con una política de Markov estacionaria dada por $d_{(k_m|i_m)}^m = c_{i_m, k_m}^m / \sum_{k_m} c_{i_m, k_m}^m$, entonces, si se procede como antes se logra:

$$k_m^*(i_m) := \min_{k_m \in M_m} KL(d_{(k_m|i_m)}^m || d_{(k_m|i_m)}^{m*}) \quad (4.4.5)$$

Estos y los siguientes resultados están basados en los Teoremas y Corolarios que a continuación se enuncian (para su demostración véase [7]).

Teorema 4.4.3. Para algún estado $j_0 \in (1, \dots, N)$ de una cadena de Markov estacionaria con matriz de transición $\mathbf{\Pi}$ y algún $n > 0$, $\xi \in (0, 1)$ para todo $i \in \mathcal{G}$ con:

$$\pi_{(ij_0)}(n) := P(s(n) = s_{(j_0)} | s(0) = s_{(i)}) \geq \xi. \quad (4.4.6)$$

Entonces, para cualquier distribución inicial $P \{s(0) = s_{(i)}\}$ y cualesquiera $i, j = 1, \dots, N$ existe el límite:

$$p_{(j)}^* := \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_{(ij)}(t)$$

tal que para cualquier $t \geq 0$ este límite es alcanzable con una **razón exponencial**, acotada por:

$$|\pi_{(ij)}(t) - p_{(j)}^*| \leq (1 - \xi)^t = e^{-\alpha t}$$

donde $\alpha := |\ln(1 - \xi)|$.

Corolario 4.4.4. Dado $\pi_{(ij_0)}(n) = (\mathbf{\Pi}^n(ij_0))^T$ para verificar la propiedad (4.4.6) es suficiente elevar a la n -ésima potencia la matriz $\mathbf{\Pi}$, en un momento dado cuando todos los elementos de al menos una fila serán positivos.

Corolario 4.4.5. Para la política óptima (4.4.3) la correspondiente cadena de Markov homogénea con matriz de transición $\mathbf{\Pi}^*$ será ergódica si la potenciación de $\mathbf{\Pi}^*$ a la n cuando todos los elementos de al menos una fila serán positivos.

Definición 4.4.6. Para una cadena de Markov homogénea y finita con matriz de transición $\mathbf{\Pi} = [\pi_{(ij)}]_{i,j=1,\dots,N}$ el parámetro $k_{erg}(n_0)$ definido como:

$$k_{erg}(n_0) := 1 - \frac{1}{2} \max_{i,j=1,\dots,N} \sum_{m=1}^N |(\tilde{\pi}_{(im)}(n_0)) - (\tilde{\pi}_{(jm)}(n_0))| \in [0, 1)$$

se dice que es el coeficiente de ergodicidad de esta cadena de Markov al momento n_0 , donde:

$$(\tilde{\pi}_{(im)}(n_0)) = P \{ s(n_0) = s(m) \mid s(1) = s(i) \} = (\mathbf{\Pi}^{n_0}(im))$$

es la probabilidad de que evolucione desde un estado inicial $s_1 = s(i)$ al estado $s_{n_0} = s(m)$ después de n_0 transiciones.

Lema 4.4.7. El coeficiente de ergodicidad $k_{erg}(n_0)$ puede ser estimado como:

$$k_{erg}(n_0) \geq \min_{i=1,\dots,N} \max_{j=1,\dots,N} \tilde{\pi}_{(ij)}(n_0)$$

Observación 4.4.8. Si todos los elementos $\tilde{\pi}_{(ij)}(n_0)$ de la matriz de transición $\mathbf{\Pi}^{n_0}$ son positivos, entonces el coeficiente de ergodicidad $k_{erg}(n_0)$ es también positivo. Note que existen cadenas de Markov ergódicas con elementos $\tilde{\pi}_{(ij)}(n_0)$ iguales a cero, pero con coeficiente de ergodicidad $k_{erg}(n_0)$.

Proposición 4.4.9. Si para una cadena de Markov finita que es controlable por una política local óptima (4.4.3), la cota inferior estimada del coeficiente de ergodicidad:

$$\chi_{erg} := \min_{n_0} \max_{j=1,\dots,N} \min_{i=1,\dots,N} \tilde{\pi}_{(ij)}^*(n_0)$$

es estrictamente positiva, esto es $\chi_{erg} > 0$, entonces las siguientes propiedades se cumplen:

1. Existe una única distribución estacionaria dada por:

$$\mathbf{p}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_n$$

2. La convergencia de la distribución del estado actual al estacionario es exponencial como sigue:

$$|\mathbf{p}_n(i) - \mathbf{p}^*(i)| \leq C \exp\{-Dn\}$$

$$C = \frac{1}{1 - \chi_{erg}^l}, \quad D = \frac{1}{n_0^{l*}} \ln C,$$

$$n_0^* = \arg \min_{n_0} \left[\max_{j=1, \dots, N} \min_{i=1, \dots, N} \tilde{\pi}_{(ij)}^*(n_0) \right]$$

Observación 4.4.10. El teorema (4.4.3) asegura que Π^* tiene una única distribución invariante positiva en cualquier parte P^* y, esta es equivalente a la existencia de algún n_0 , tal que $\pi_{(ij)}^*(n_0) > 0$.

Observación 4.4.11. El teorema (4.4.9) garantiza que la convergencia hacia P^* es exponencial (esto es $\pi_{(ij)}^*(n_0)$ es geoméricamente ergódica).

Durante la caminata aleatoria (realización) los jugadores no tienen información sobre las decisiones hechas por los oponentes y así no se conoce su posición en el MDP. La única interacción entre los jugadores ocurre cuando el juego termina: en el momento en que un defensor «captura» a un atacante en algún paso de la realización el defensor y el atacante, ambos se encuentran localizados en el mismo estado del MDP. Por lo tanto, las decisiones de ambos jugadores no dependen una de la otra.

Formalmente, dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) (Ω es un espacio muestral; \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos medibles (eventos) de Ω ; y P es una medida de probabilidad sobre \mathcal{F} ([45])), se introduce la *condición de captura* al tiempo n (el defensor y el atacante están localizados en el mismo estado) como sigue:

$$\sum_{j=1}^N \chi(\alpha : s^l(n) = s_j \wedge s^m(n) = s_j) =$$

$$\sum_{j=1}^N \chi(\alpha : s^l(n) = s_j) \chi(\alpha : s^m(n) = s_j), \alpha \in \Omega$$

donde $\alpha \in \Omega$ es una trayectoria.

Ahora, el evento de captura de todos los atacantes está dado por:

$$\sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N \chi(\alpha : s^l(n) = s_j) \chi(\alpha : s^m(n) = s_j) \quad (4.4.7)$$

Una matriz de transición de Markov dada y fijada $\pi_{(i_l, j_l | k_l)}^l$, entonces los estados de transición inducidos por la estrategia $d_{(k_l^* | i_l)}^{l*}$ son gobernados por la ley de probabilidad condicional:

$$\Pi_{i_l j_l}^{l*}(d^*) = \sum_{k_l=1}^{M_l} \pi_{i_l j_l | k_l}^l d_{(k_l^* | i_l)}^{l*}$$

Entonces, considerando que:

$$P\{\alpha : A \in \mathcal{F}\} = E\{\chi(\alpha : A \in \mathcal{F})\}$$

Tenemos que la probabilidad total P_n a un estado j al tiempo n para todos los defensores y atacantes está dada por:

$$P_n = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N P_n\{\alpha : s^l(n) = s_j\} P_n\{\alpha : s^m(n) = s_j\}$$

donde

$$P_{j,n}^l\{\alpha : s^l(n) = s_{j_l}\} =$$

$$\sum_{i_l=1}^{N_l} \sum_{k_l=1}^{M_l} \pi_{i_l j_l | k_l}^l d_{(k_l^* | i_l)}^{l*} P_{n-1}^l\{\alpha : s^l(n-1) = s_{i_l}\}$$

y

$$P_{j,n}^m\{\alpha : s^m(n) = s_{j_m}\} =$$

$$\sum_{i_m=1}^{N_m} \sum_{k_m=1}^{M_m} \pi_{i_m j_m | k_m}^m d_{(k_m^* | i_m)}^{m*} P_{n-1}^m\{\alpha : s^m(n-1) = s_{i_m}\}$$

Ahora, definiendo:

$$\Pi_{i_l j_l}^{l*} = \sum_{k_l=1}^{M_l} \pi_{i_l j_l | k_l}^l d_{(k_l^* | i_l)}^{l*}$$

y

$$\Pi_{i_m j_m}^{m*} = \sum_{k_m=1}^{M_m} \pi_{i_m j_m | k_m}^m d_{(k_m^* | i_m)}^{m*}$$

se tiene

$$P_n^l \{ \alpha : s_n^l = s_{j_l} \} = \sum_{i_l=1}^{N_l} \Pi_{i_l j_l}^{l*} P_{n-1}^l \{ \alpha : s^l(n-1) = s_{i_l} \}$$

y

$$P_n^m \{ \alpha : s_n^m = s_{j_m} \} = \sum_{i_m=1}^{N_m} \Pi_{i_m j_m}^{m*} P_{n-1}^m \{ \alpha : s^m(n-1) = s_{i_m} \}$$

Entonces, la probabilidad P_n satisface la siguiente relación:

$$P_n = \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \sum_{i_l=1}^{N_l} \sum_{i_m=1}^{N_m} [\Pi_{i_l j_l}^{l*} P_{n-1}^l \{ s_{i_l} \}] [\Pi_{i_m j_m}^{m*} P_{n-1}^m \{ s_{i_m} \}]$$

Teorema 4.4.12. *La probabilidad de que el vector-estado P_n converja al estado j al tiempo n está dada por el teorema de Weierstrass.*

Demostración. Sean $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ dos cadenas de Markov y sean X y Y las dos variables aleatorias asociadas $P_n^l \{ \alpha : s_n^l = s_{j_l} \} = P_n^l \{ X = s_{j_l} \}$ y $P_n^m \{ \alpha : s_n^m = s_{j_m} \} = P_n^m \{ Y = s_{j_m} \}$, respectivamente. Porque, $P_n^l \{ \alpha : s_n^l = s_{j_l} \}$ y $P_n^m \{ \alpha : s_n^m = s_{j_m} \}$ convergen, entonces se puede suponer que $\{X_n\}$ converge a X y $\{Y_n\}$ converge a Y en distribución cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $\{X_{\omega(n)} Y_{\alpha(n)}\}$ una subsucesión de $\{X_n Y_n\}$. Necesitamos probar que una subsucesión converge a XY . Dado que $\{X_n\}$ converge a X en probabilidad, existe ζ tal que $\{X_{\omega(\zeta(n))}\}$ converge a X por el teorema de Weierstrass. Así, $\{Y_n\}$ converge a Y en probabilidad, existe ξ tal que $\{Y_{\omega(\zeta(\xi(n)))}\}$ converge a Y . Entonces, se tiene que $\{X_{\omega(\zeta(\xi(n)))} Y_{\omega(\zeta(\xi(n)))}\}$ converge a XY . Resultando que la probabilidad del vector-estado P_n converge. \square

La componente del estado controlado es un MDP estándar. Los pasos discretos están indiza-

dos por $n = 0, 1, \dots$. Se asume que el estado inicial al paso 0 está fijado y denotado por $s^l(0)$ para cada líder, y $s^m(0)$ para cada seguidor. En el n -ésimo paso, se desarrolla el siguiente algoritmo.

Algoritmo 4.1 Algoritmo para generar caminata aleatoria.

mientras(no condición de captura (Ec. (4.4.7)))

para cada líder seleccionar un estado aleatorio s^l de P_n^l

para cada seguidor seleccionar un estado aleatorio s^m de P_n^m

 Fijar los estados s^l y s^m , y dibujar

fin

Con la finalidad de comparar el algoritmo anterior respecto de alguno otro donde se añaden penalizaciones a los líderes por no haber alcanzado a alguno de los seguidores, se diseña un algoritmo modificado de modo que si algún líder no alcanza a un seguidor entonces, en el siguiente paso el líder no puede estar en el mismo estado que algún seguidor (penalización).

Algoritmo 4.2 Algoritmo para generar caminata aleatoria con penalización en los líderes.

mientras(no condición de captura (Ec. (4.4.7)))

para cada líder seleccionar un estado aleatorio s^l de P_n^l

para cada seguidor seleccionar un estado aleatorio s^m de P_n^m

Si distancia($s^l(n+1), s^m(n+1)$) > distancia($s^l(n), s^m(n)$)

 seleccionar un estado aleatorio s^l tal que $s^l \neq s^m$.

 Fijar los estados s^l y s^m , y dibujar

fin

Es claro que ambos algoritmos describen una trayectoria para cada jugador de estados finitos pero estocástica, es decir, que el siguiente estado para cada jugador se estima en función de una distribución de probabilidad dada por la matriz de Markov correspondiente y según la estrategia fijada. Lo anterior significa que las realizaciones para cualquiera de los algoritmos es aleatoria, luego, es posible que se obtengan mejores resultados para uno que para el otro o viceversa.

4.5. Ejemplo de aplicación numérica

Como ejemplo de aplicación numérica, se consideran dos agencias de seguridad que no comparten información entre ellas pero no por ello son contrarias, y dos ladrones independientes bajo

un juego de seguridad tipo Stackelberg no cooperativo, en el cual la realización es una caminata aleatoria basada en la divergencia de Kullback-Leibler. Cada jugador admite un espacio de cinco estados y puede aplicar dos tipos de acciones diferentes. La idea fundamental es que las agencias de seguridad atrapen a los ladrones, estas agencias no cooperan entre ellas, es decir, no hay ningún intercambio de información o beneficio mutuo, similarmente ocurre con los ladrones. Se puede vislumbrar a los estados como puntos en un mapa por los que viajan tanto las agencias como los ladrones y ningún otro lugar será válido, finalmente cada jugador tiene disponibles exclusivamente dos acciones a tomar en base a la posición en que se encuentran. Si una agencia atrapa a alguno de los ladrones entonces ambos, la agencia y el ladrón atrapado se detienen en ese estado hasta que la otra agencia capture al ladrón restante o caiga éste en el mismo estado donde se ubica la primera agencia.

Se presentan los dos algoritmos descritos: sin penalización, con una caminata aleatoria pura y otro con penalización donde cada vez que una agencia se aleja de alguno de los ladrones, entonces se le penaliza impidiéndole en el siguiente paso atrapar a alguno de los ladrones.

A continuación, se dan algunas matrices con la finalidad de ejemplificar el ejercicio propuesto.

Para el jugador 1 (agencia de seguridad líder 1) se tienen las siguientes matrices de transición:

$$\pi_{i,j|1}^1 = \begin{pmatrix} 0.0355 & 0.2862 & 0.4883 & 0.1765 & 0.0135 \\ 0.2022 & 0.2239 & 0.2218 & 0.1964 & 0.1557 \\ 0.1347 & 0.2191 & 0.2627 & 0.2322 & 0.1513 \\ 0.0266 & 0.1744 & 0.3972 & 0.3149 & 0.0868 \\ 0.0485 & 0.2539 & 0.4269 & 0.2307 & 0.0400 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{i,j|2}^1 = \begin{pmatrix} 0.0034 & 0.3856 & 0.5981 & 0.0128 & 0.0000 \\ 0.0012 & 0.0661 & 0.4641 & 0.4196 & 0.0489 \\ 0.0008 & 0.0280 & 0.2311 & 0.4835 & 0.2565 \\ 0.3709 & 0.4004 & 0.1874 & 0.0380 & 0.0033 \\ 0.0000 & 0.1524 & 0.8456 & 0.0019 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

y sus matrices de costo dadas por:

$$u_{i,j|1}^1 = \begin{pmatrix} 1.9760 & 14.540 & 1.6870 & 2.0160 & 8.8210 \\ 8.3740 & 17.400 & 13.420 & 5.3700 & 13.990 \\ 23.310 & 0.7292 & 11.180 & 28.680 & 3.7520 \\ 2.7550 & 5.8440 & 23.320 & 0.0775 & 4.4250 \\ 0.0567 & 1.2830 & 3.9680 & 5.5300 & 2.2910 \end{pmatrix}$$

$$u_{i,j|2}^1 = \begin{pmatrix} 14.990 & 10.320 & 1.106 & 0.3276 & 12.340 \\ 8.2450 & 40.910 & 2.596 & 4.1400 & 26.900 \\ 15.510 & 1.7660 & 3.227 & 1.7000 & 6.3680 \\ 1.2940 & 5.5870 & 13.77 & 0.1247 & 34.270 \\ 8.6810 & 4.9620 & 4.775 & 0.9690 & 5.9770 \end{pmatrix}$$

Para el jugador 2 (agencia de seguridad líder 2) se tienen las siguientes matrices de transición:

$$\pi_{i,j|1}^2 = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0406 & 0.3321 & 0.4902 & 0.1307 & 0.0063 \\ 0.0000 & 0.0973 & 0.9026 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0387 & 0.1861 & 0.3693 & 0.3030 & 0.1028 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{i,j|2}^2 = \begin{pmatrix} 0.2180 & 0.2179 & 0.2082 & 0.1901 & 0.1658 \\ 0.5494 & 0.3717 & 0.0743 & 0.0044 & 0.0000 \\ 0.3362 & 0.6112 & 0.0523 & 0.0002 & 0.0000 \\ 0.1994 & 0.2630 & 0.2560 & 0.1840 & 0.0975 \\ 0.0000 & 0.0493 & 0.9506 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

y sus matrices de costo dadas por:

$$u_{i,j|1}^2 = \begin{pmatrix} 13.900 & 7.9190 & 0.5454 & 9.4050 & 15.740 \\ 9.5080 & 9.6610 & 6.7310 & 3.0330 & 11.290 \\ 8.4060 & 0.7702 & 2.3330 & 0.2384 & 21.990 \\ 1.8530 & 3.0000 & 7.9370 & 6.4760 & 9.8030 \\ 1.9280 & 3.0430 & 1.6350 & 8.4420 & 11.090 \end{pmatrix}$$

$$u_{i,j|2}^2 = \begin{pmatrix} 10.73 & 21.180 & 1.4630 & 12.100 & 6.274 \\ 2.020 & 4.6930 & 16.170 & 7.0010 & 5.547 \\ 6.317 & 10.590 & 3.9680 & 1.1660 & 8.848 \\ 6.518 & 10.950 & 1.0330 & 6.9030 & 42.16 \\ 2.558 & 5.5410 & 16.140 & 12.840 & 3.527 \end{pmatrix}$$

Para el jugador 3 (ladrón seguidor 3) se tienen las siguientes matrices de transición:

$$\pi_{i,j|1}^3 = \begin{pmatrix} 0.3252 & 0.6738 & 0.0009 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.2537 & 0.2690 & 0.2301 & 0.1588 & 0.0884 \\ 0.1794 & 0.5070 & 0.2820 & 0.0308 & 0.0006 \\ 0.0000 & 0.5580 & 0.4420 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0814 & 0.1631 & 0.2451 & 0.2764 & 0.2339 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{i,j|2}^3 = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0120 & 0.9880 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0754 & 0.1825 & 0.2827 & 0.2807 & 0.1787 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.4430 & 0.4248 & 0.1216 & 0.0103 & 0.0002 \\ 0.1323 & 0.1824 & 0.2219 & 0.2381 & 0.2253 \end{pmatrix}$$

y sus matrices de costo dadas por:

$$u_{i,j|1}^3 = \begin{pmatrix} 5.786 & 1.236 & 10.800 & 1.5900 & 2.2510 \\ 16.41 & 5.597 & 0.5513 & 15.960 & 11.750 \\ 6.154 & 17.56 & 6.8520 & 0.3075 & 4.0160 \\ 8.708 & 5.884 & 6.6560 & 11.060 & 1.9600 \\ 9.552 & 1.529 & 9.5310 & 7.5010 & 0.4429 \end{pmatrix}$$

$$u_{i,j|2}^3 = \begin{pmatrix} 1.871 & 9.110 & 4.5420 & 1.121 & 0.8692 \\ 1.727 & 1.029 & 7.0360 & 2.088 & 16.130 \\ 5.389 & 2.466 & 2.2470 & 3.112 & 0.1918 \\ 8.575 & 1.218 & 0.0794 & 1.703 & 13.890 \\ 3.914 & 1.385 & 1.5690 & 4.198 & 3.6200 \end{pmatrix}$$

Para el jugador 4 (ladrón seguidor 4) se tienen las siguientes matrices de transición:

$$\pi_{i,j|1}^4 = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0003 & 0.0448 & 0.4781 & 0.4767 \\ 0.0000 & 0.0092 & 0.9908 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0289 & 0.5403 & 0.4307 \\ 0.1961 & 0.1993 & 0.2013 & 0.2020 & 0.2014 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.4113 & 0.5887 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{i,j|2}^4 = \begin{pmatrix} 0.0028 & 0.1074 & 0.5265 & 0.3355 & 0.0277 \\ 0.0000 & 0.0004 & 0.9990 & 0.0006 & 0.0000 \\ 0.1900 & 0.3093 & 0.2914 & 0.1590 & 0.0502 \\ 0.1136 & 0.3106 & 0.3607 & 0.1779 & 0.0372 \\ 0.0004 & 0.0560 & 0.5228 & 0.3962 & 0.0244 \end{pmatrix}$$

y sus matrices de costo dadas por:

$$u_{i,j|1}^4 = \begin{pmatrix} 11.170 & 1.045 & 1.1860 & 6.3970 & 5.5890 \\ 1.6140 & 2.752 & 3.7430 & 13.100 & 1.0900 \\ 2.4410 & 0.288 & 0.9389 & 1.4300 & 3.0970 \\ 1.2230 & 0.688 & 5.6590 & 0.9245 & 3.8470 \\ 2.8400 & 3.390 & 0.1207 & 0.4042 & 0.9877 \end{pmatrix}$$

$$u_{i,j|2}^4 = \begin{pmatrix} 0.2464 & 6.5820 & 0.3505 & 5.064 & 0.4686 \\ 12.870 & 0.9165 & 1.8720 & 4.487 & 7.8890 \\ 1.7220 & 0.0231 & 2.8250 & 4.989 & 5.4150 \\ 7.2420 & 2.1560 & 4.8270 & 3.792 & 2.7750 \\ 4.5950 & 1.7550 & 2.2740 & 3.432 & 3.5980 \end{pmatrix}$$

Se puede ver la convergencia del parámetro λ en la figura (4.5.1) y del parámetro θ en la figura (4.5.2). Las figuras (4.5.3) y (4.5.4) muestran la convergencia de las estrategias para la agencia de seguridad 1 y 2, respectivamente. Las figuras (4.5.5) y (4.5.6) muestran la convergencia de las estrategias de los ladrones 3 y 4, respectivamente. Finalmente, el punto de equilibrio resultante está dado por:

$$d_{i|k}^1 = \begin{pmatrix} 0.1014 & 0.8986 \\ 0.0550 & 0.9449 \\ 0.0281 & 0.9719 \\ 0.0382 & 0.9618 \\ 0.0976 & 0.9024 \end{pmatrix}$$

$$d_{i|k}^2 = \begin{pmatrix} 0.1266 & 0.8734 \\ 0.0552 & 0.9448 \\ 0.9846 & 0.0154 \\ 0.6360 & 0.3640 \\ 0.5000 & 0.5000 \end{pmatrix}$$

$$d_{i|k}^3 = \begin{pmatrix} 0.7662 & 0.2338 \\ 0.1099 & 0.8901 \\ 0.0801 & 0.9199 \\ 0.3153 & 0.6847 \\ 0.5000 & 0.5000 \end{pmatrix}$$

$$d_{i|k}^4 = \begin{pmatrix} 0.1527 & 0.8473 \\ 0.1313 & 0.8687 \\ 0.9464 & 0.0536 \\ 0.9695 & 0.0305 \\ 0.9709 & 0.0291 \end{pmatrix}$$

La realización de la caminata aleatoria se muestra en las figuras (4.5.7) y (4.5.8) sin penalización y con ésta, respectivamente, según los algoritmos arriba ya descritos.

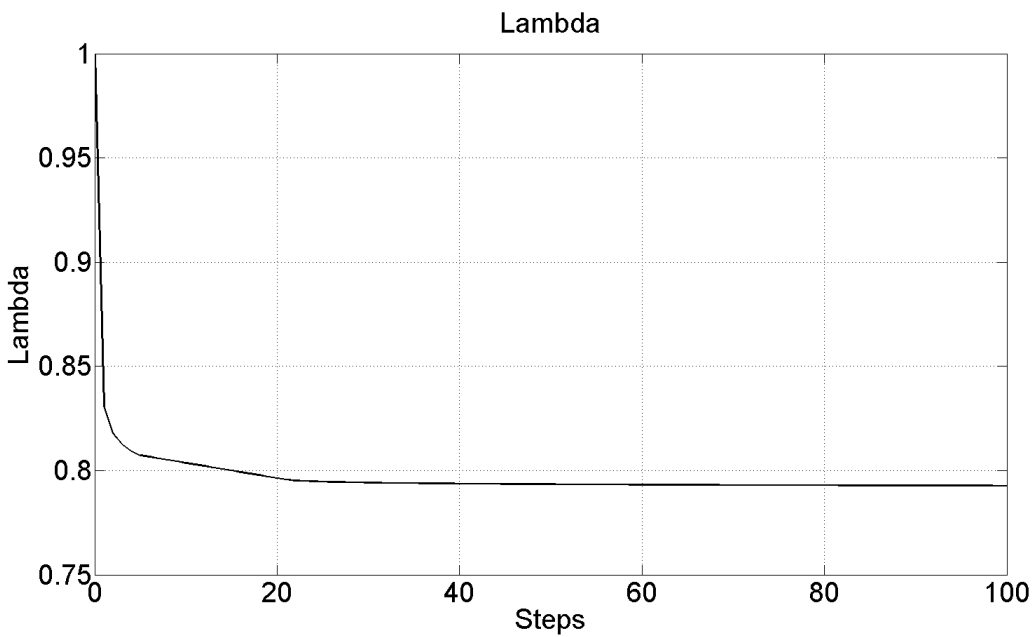


Figura 4.5.1. Convergencia del parámetro λ .

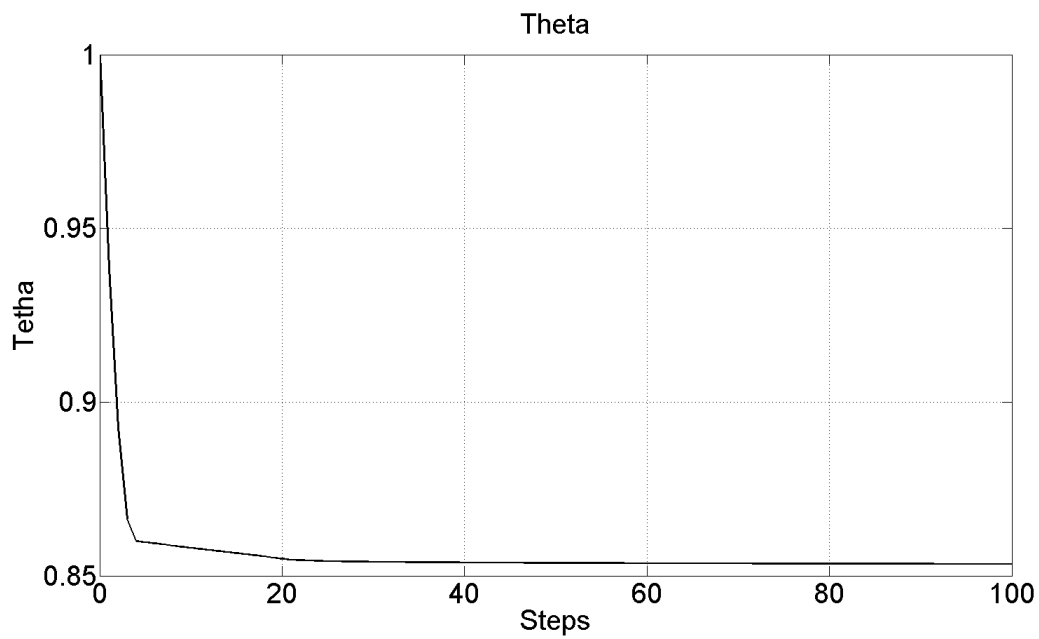


Figura 4.5.2. Convergencia del parámetro θ .

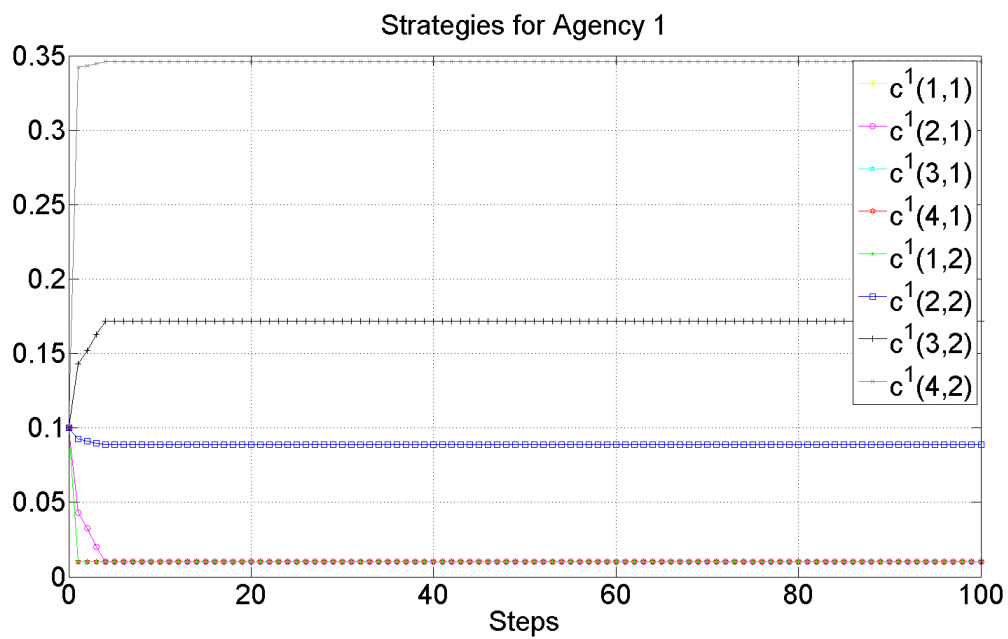


Figura 4.5.3. Convergencia de las estrategias para la agencia de seguridad 1.



Figura 4.5.4. Convergencia de las estrategias para la agencia de seguridad 2.

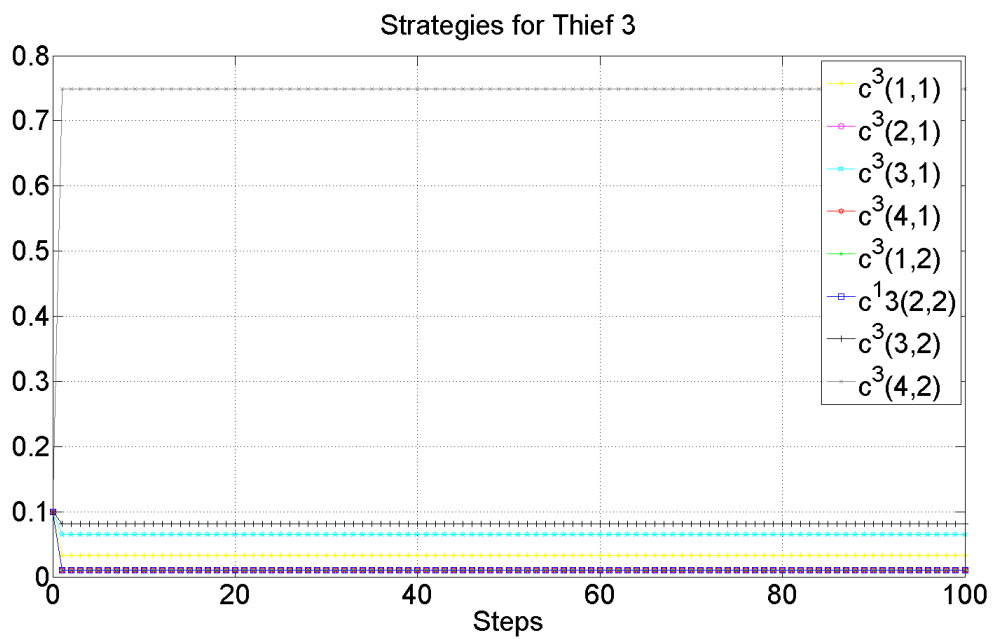


Figura 4.5.5. Convergencia de las estrategias para el ladrón 3.

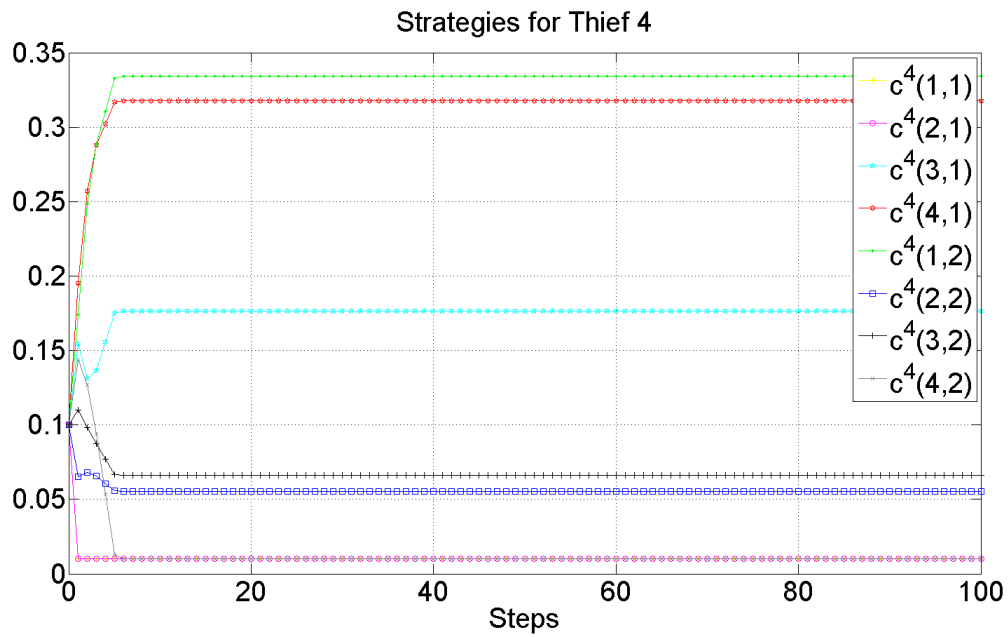


Figura 4.5.6. Convergencia de las estrategias para el ladrón 4.

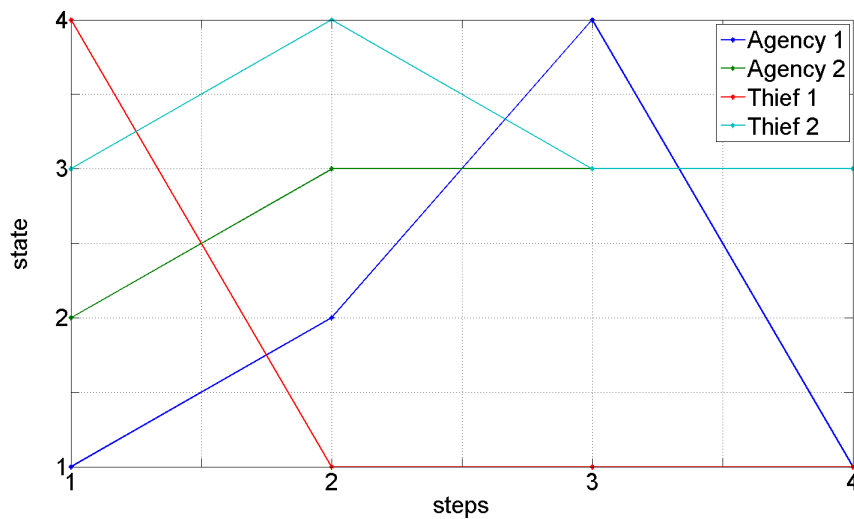


Figura 4.5.7. Realización por el algoritmo sin penalización.

Resulta notorio de las figuras de la caminata aleatoria, que la trayectoria dada por el algoritmo-

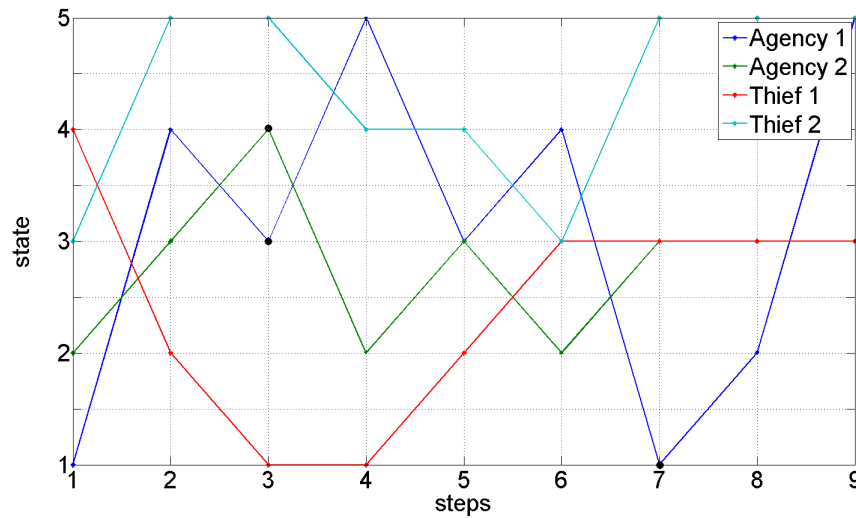


Figura 4.5.8. Realización por el algoritmo con penalización.

mo con penalización contiene más pasos para atrapar a los ladrones, sin embargo, es importante mencionar que esto no ocurre siempre así, pues cada realización es un proceso estocástico dependiente de las matrices de transición de cada uno de los jugadores y de las estrategias que seleccionen.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos futuros

- Se ha presentado una nueva formulación de un modelo de Stackelberg para múltiples líderes y seguidores para \mathcal{M} líderes y \mathcal{N} seguidores. Para resolver dicha formulación, es decir, encontrar el punto de equilibrio del juego, así como las estrategias óptimas para cada uno de los jugadores, se empleó el algoritmo extra-proximal, el cual es una aproximación al mencionado punto, ya que su cálculo directo no siempre es posible. Para determinar el equilibrio de Nash para los líderes y los seguidores se implementó el *formato articulado* propuesto por Tanaka [62]. Se formuló el juego Stackelberg como un conjunto de problemas de programación no lineal acoplados, donde se implementa el principio de Lagrange y el método de regularización de Tikhonov, lo que permite transformar un problema de programación no lineal no necesariamente convexo en uno que sí es fuertemente convexo (o estrictamente convexo), pudiendo resolverse con técnicas de optimización convexa. El juego Stackelberg se resuelve por medio de algoritmos de programación cuadrática a partir del problema regularizado, donde ya se demostró que, cuando los parámetros de regularización convergen, entonces la solución tiende a la del problema original.
- Se probó matemáticamente la razón de convergencia de los parámetros γ y δ correspondientes a la función de Lagrange y la regularización de Tikhonov, respectivamente; con ello se garantiza que si se resuelven los problemas convexos, en cada paso de iteración se hace una aproximación a la solución del problema original.
- La formulación descrita fue aplicada a un problema relativamente práctico donde se describen agencias de seguridad como jugadores líderes no cooperativos y ladrones como jugadores seguidores igualmente no cooperativos, con la lógica del juego como ya se describió en su momento. Aquí se hace evidente la convergencia del algoritmo extra-proximal para el problema

regularizado y basado en el principio de Lagrange, pues los parámetros respectivos tienden a estabilizarse en un valor determinado que, como se garantizó teóricamente, resulta en el punto de equilibrio del juego Stackelberg. Este enfoque, llevado a la realidad, podría proporcionar una metodología simple que serviría para que un agente de seguridad con acciones y recursos limitados pueda combatir delincuentes (se asume que éstos también tienen acciones y recursos limitados).

- Como una proyección a futuro es imperante mencionar que, para dar solución al juego tipo Stackelberg se empleó un solucionador basado en programación cuadrática, esto fue así con la finalidad de hacer más rápidos los cálculos computacionales, sin embargo, si se hubiere deseado implementar un juego con más de cuatro jugadores, esta metodología se tendría que cambiar por algoritmos de tipo gradiente, lo que sería una generalización a este tipo de juegos.
- Se propone implementar a futuro, el desarrollo de tales algoritmos como un trabajo a futuro, teniendo en cuenta que, conforme se añaden jugadores la complejidad computacional crece exponencialmente tanto en recursos de memoria, como en un aumento del tiempo de procesamiento (número de operaciones fundamentales por paso de iteración), por tal motivo no fue posible hacerlo en la presente tesis, sin embargo, sería conveniente que se cuente con los elementos tecnológicos suficientes para llevar a cabo esta empresa.
- A modo de conclusión, y ya para finalizar, se hace la mención importante de que el algoritmo extra-proximal permitió hacer una especie de aceleración en la estimación del punto de equilibrio (solución del juego), ya que en un primero paso se hace una predicción y en el paso siguiente se mejora dicha solución, siendo un algoritmo que hace más eficientes los cálculos, por tal motivo es sugerente implementarlo e incluso mejorarlo y extenderlo a otro tipo de aplicaciones más allá de la presente teoría.

Apéndice

El procedimiento para resolver el punto de equilibrio de Stackelberg-Nash líder-seguidor por el método extra-proximal consta de la siguiente implementación de reglas iteradas:

1. Primer paso-medio

- Cálculo para $\bar{\lambda}_n$:

$$\bar{\lambda}_n = \arg \min_{\lambda \geq 0} \left\{ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_n)^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w_n, \lambda, \theta_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_n)^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w_n, \lambda, \theta_n) = \\ & \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_n)^2 - \\ & (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma \lambda \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \\
 & \quad (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \\
 & \quad \lambda \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\lambda^2 + \theta^2)
 \end{aligned}$$

tomando la derivada respecto de λ se tiene:

$$\lambda - \lambda_n -$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \\
 & \quad \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] - \gamma \delta \lambda = 0
 \end{aligned}$$

reordenando:

$$\begin{aligned} \lambda(1 + \gamma\delta) = \lambda_n + \\ \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \check{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\ \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \check{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \\ \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] \end{aligned}$$

finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_n = [\lambda_n + \\ \frac{\gamma}{1+\gamma\delta} \left(\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \check{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\ \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \check{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ \left. \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right) \right]_+ \end{aligned}$$

- Cálculo para $\bar{\theta}_n$:

$$\bar{\theta}_n = \arg \min_{\theta \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|\theta - \theta_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \theta) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\theta - \theta_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \theta) = \\
& \frac{1}{2} (\theta - \theta_n)^2 - \\
& \gamma \left[(\theta - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \\
& \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \\
& (\theta - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
& \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
& \quad (\theta - 1) \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \\
& + \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
& \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
& \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
& \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
& \quad \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] \\
& \quad \left. - \frac{\delta}{2} (\lambda^2 + \theta^2) \right]
\end{aligned}$$

tomando la derivada respecto de θ se tiene:

$$\begin{aligned}
 & (\theta - \theta_n) - \\
 & \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \\
 & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{matrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{matrix} \right\|^2 + \left\| \begin{matrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{matrix} \right\|^2 \right) \right] + \delta\gamma\theta = 0
 \end{aligned}$$

reordenando:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \delta\gamma)\theta = \\
 & \theta_n + \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \\
 & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{matrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{matrix} \right\|^2 + \left\| \begin{matrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{matrix} \right\|^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

finalmente se obtiene:

$$(1 - \delta\gamma)\theta =$$

$$\begin{aligned} & \left(\theta_n + \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \right. \\ & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \left. \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \right] \right) \cdot \frac{1}{(1 + \delta\gamma)} \end{aligned}$$

- Cálculo para \bar{u}_n :

$$\bar{u}_n = \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

donde:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (u - u_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\ & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\ & \gamma \left[(\bar{\theta}_n - 1) \left\{ \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \right. \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \left. \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right\} + \right. \\ & \quad \bar{\lambda}_n \left\{ \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\ & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right\} + \\ & (\bar{\theta}_n - 1) \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \\ & \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2) \end{aligned}$$

dado

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (u - u_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\ & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\ & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \\ & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right] + \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \left\{ \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \check{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right\} + \\
 & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(u - u_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, x_n, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \check{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) + \right. \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \check{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right] + \\
 & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Para la programación cuadrática sean:

$$\begin{aligned}
 Q1_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q2_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \\
 Q3_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q4_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n)
 \end{aligned}$$

Se usa el siguiente algoritmo para combinar los índices de las matrices presentadas arriba y obteniendo un arreglo de dimensión $\frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2} \times \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2}$ reduciendo el tamaño de las matrices para realizar el producto matricial.

Algoritmo 5.1 Combinación de índices $\bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n$ y \bar{u}_n .

```

l1 = 0;
l2 = 0;
para cada  $i_1 = 1 : N_1$ 
  para cada  $k_1 = 1 : M_1$ 
    l1 = l1++;
    para cada  $i_2 = 1 : N_2$ 
      para cada  $k_2 = 1 : M_2$ 
        l2 = l2++;
         $Q_{(l1,l2)} = Q_{(i_1,k_1;i_2,k_2)}$ ;
      fin
    fin
  l2 = 0;
fin
fin

```

Finalmente, para la programación cuadrática se definen las siguientes matrices:

$$J_{(l1,l2)} := Q1_{(l1,l2)} - Q2_{(l1,l2)} + Q3_{(l1,l2)} - Q4_{(l1,l2)}$$

$$H := \begin{pmatrix} (1 + (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \delta) I_{\frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2} \times \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2}} & \gamma \bar{\lambda}_n J_{(l1,l2)}^\top \\ \gamma \bar{\lambda}_n J_{(l1,l2)} & (1 + (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \delta) I_{\frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2} \times \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2}} \end{pmatrix}$$

$$f := - \begin{pmatrix} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3,k_3} \sum_{i_4,k_4} \sum_{i_1,k_1} W_{(i_3,k_3;i_4,k_4;i_1,k_1;i_2,k_2)}^{(2)} c_{(i_3,k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4,k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1,k_1)}^{(\hat{1})}(n) + c_{(i_0,k_0)}^{(0)}(n) \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3,k_3} \sum_{i_4,k_4} \sum_{i_2,k_2} W_{(i_3,k_3;i_4,k_4;i_1,k_1;i_2,k_2)}^{(1)} c_{(i_3,k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4,k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_2,k_2)}^{(\hat{2})}(n) + c_{(i_1,k_1)}^{(1)}(n) \end{pmatrix}$$

- Cálculo para \bar{x}_n :

$$\bar{x}_n = \arg \min_{x \in X} \left\{ \frac{1}{2} \|x - x_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (x - x_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\ & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\ & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \overset{\circ}{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} - \\ & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \left\{ \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\ & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \overset{\circ}{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right\} + \\ & \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \end{aligned}$$

$$\gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)$$

entonces:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(x - x_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x, v_n, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\ & \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\ & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} + \right. \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} - \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} - \\ & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \left\{ \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\ & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2) \end{aligned}$$

Por la programación cuadrática se obtienen las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} H & := \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \cdot I_{N_1 M_1 + N_2 M_2 \times N_1 M_1 + N_2 M_2} \\ f & := \left(\begin{array}{l} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \dot{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \dot{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \end{array} \right) - \\ & \left(\begin{array}{l} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \end{array} \right) \\ & - \left(\begin{array}{l} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{array} \right) \end{aligned}$$

- Cálculo para \bar{v}_n :

$$\bar{v}_n = \arg \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 - \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

entonces, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v, w_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \right) \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 - \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Por la programación cuadrática se tiene:

$$\begin{aligned}
 Q1_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\
 Q2_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\
 Q3_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\
 Q4_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n)
 \end{aligned}$$

Usando el siguiente algoritmo para combinar los índices de las matrices presentadas arriba y obteniendo un arreglo de dimensión $\frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2} \times \frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2}$ reduciendo el tamaño de las matrices para implementar el producto.

Algoritmo 5.2 Combinación de índices \bar{x}_n y \bar{v}_n .

l1 = 0;

l2 = 0;

para cada $i_3 = 1 : N_3$

para cada $k_3 = 1 : M_3$

 l1 = l1++;

para cada $i_4 = 1 : N_4$

para cada $k_4 = 1 : M_4$

 l2 = l2++;

$Q_{(l1, l2)} = Q_{(i_3, k_3; i_4, k_4)}$;

fin

fin

 l2 = 0;

fin

fin

Para la programación cuadrática se obtienen las siguientes matrices:

$$J_{(l_1, l_2)} := -\gamma (\bar{\theta}_n - 1) [Q1_{(l_1, l_2)} - Q2_{(l_1, l_2)}] - \gamma (\bar{\theta}_n - 1) [Q3_{(l_1, l_2)} - Q4_{(l_1, l_2)}]$$

$$H := \begin{pmatrix} (1 + \gamma \bar{\lambda}_n \delta) I_{\frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2} \times \frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2}} & J_{(l_1, l_2)} \\ J_{(l_1, l_2)}^\top & (1 + \gamma \bar{\lambda}_n \delta) I_{\frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2} \times \frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2}} \end{pmatrix}$$

$$f := \begin{pmatrix} \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \end{pmatrix}$$

- Cálculo para \bar{w}_n :

$$\bar{w}_n = \arg \min_{w \in W} \left\{ \frac{1}{2} \|w - w_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|w - w_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\ & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 - \\ & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \dot{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \dot{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \dot{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})} c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

entonces, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|w - w_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, x_n, v_n, w, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \right) \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})} \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 - \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
& \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
& \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
& \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
& \quad \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \\
& \quad \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
\end{aligned}$$

Finalmente, se logra

$$\begin{aligned}
H &= \left(\frac{1}{2} + \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \right) \cdot I_{N_3 M_3 + N_4 M_4 \times N_3 M_3 + N_4 M_4} \\
f &:= - \left(\begin{aligned} & \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{aligned} \right) + \\
& \left(\begin{aligned} & \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{aligned} \right) \\
& \quad - \begin{pmatrix} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Segundo medio-paso

- Cálculo para $\bar{\lambda}_n$:

$$\bar{\lambda}_n = \arg \min_{\lambda \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_n)^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta (\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \lambda, \bar{\theta}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_n)^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \lambda, \bar{\theta}_n) = \\
 & \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_n)^2 - \\
 & (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \\
 & \gamma \lambda \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \\
 & (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \\
 & \lambda \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \Big] - \gamma \frac{\delta}{2} (\lambda^2 + \theta^2)
 \end{aligned}$$

tomando la derivada respecto de λ se tiene:

$$\lambda - \lambda_n - \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{matrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{matrix} \right\|^2 + \left\| \begin{matrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{matrix} \right\|^2 \right) \right] - \gamma \delta \lambda = 0$$

Reordenando:

$$\lambda(1 + \gamma \delta) = \lambda_n + \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{matrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{matrix} \right\|^2 + \left\| \begin{matrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{matrix} \right\|^2 \right) \right]$$

finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_n = & [\lambda_n + \\ & \gamma \left(\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \\ & \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \cdot \frac{1}{(1+\gamma\delta)} \right] + \end{aligned}$$

- Cálculo para $\bar{\theta}_n$:

$$\bar{\theta}_n = \arg \min_{\theta \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|\theta - \theta_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \theta) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\theta - \theta_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \theta) = \\ & \frac{1}{2} (\theta - \theta_n)^2 - \\ & \gamma \left[(\theta - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \\ & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \\ & \quad (\theta - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \quad \left. W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\theta - 1) \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \\
 & + \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \\
 & \quad \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] \\
 & \quad - \frac{\delta}{2} (\lambda^2 + \theta^2) \Big]
 \end{aligned}$$

tomando la derivada respecto a θ se tiene:

$$\begin{aligned}
 & (\theta - \theta_n) - \\
 & \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \right. \\
 & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \\
 & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] + \delta \gamma \theta = 0
 \end{aligned}$$

Reordenando:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \delta \gamma) \theta = \\
 & \theta_n + \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \\ & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \end{aligned}$$

finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} & (1 - \delta\gamma) \theta = \\ & \left(\theta_n + \gamma \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right. \right. \\ & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \left. \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \right] \right) \cdot \frac{1}{(1 + \delta\gamma)} \end{aligned}$$

- Cálculo para \bar{u}_n :

$$\bar{u}_n = \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (u - u_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\ & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\ & \gamma \left[(\bar{\theta}_n - 1) \left\{ \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \} + \\
 & \bar{\lambda}_n \left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \} + \\
 & (\bar{\theta}_n - 1) \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \\
 & \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \Big] - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}$$

dado

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} (u - u_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left\{ \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \check{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \check{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) c_{(i_1, k_1)}^{(1)} c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right\} + \\
 & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ c_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ c_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} (u - u_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, \bar{x}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \check{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \check{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{\bar{c}}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \right] + \\
 & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Por la programación cuadrática se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Q1_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \overset{\circ}{\bar{c}}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q2_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q3_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \overset{\circ}{\bar{c}}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \\
 Q4_{(i_1, k_1; i_2, k_2)} &= \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n)
 \end{aligned}$$

Usando el siguiente algoritmo para combinar los índices de las matrices presentadas arriba y obteniendo un arreglo de dimensión $\frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2} \times \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2}$, como se hizo con anterioridad.

Algoritmo 5.3 Combinación de índices $\bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n$ y \bar{u}_n .

```

l1 = 0;
l2 = 0;
para cada  $i_1 = 1 : N_1$ 
  para cada  $k_1 = 1 : M_1$ 
    l1 = l1++;
    para cada  $i_2 = 1 : N_2$ 
      para cada  $k_2 = 1 : M_2$ 
        l2 = l2++;
         $Q_{(l1,l2)} = Q_{(i_1,k_1;i_2,k_2)}$ ;
      fin
    fin
  l2 = 0;
fin
fin

```

Finalmente, por la programación cuadrática se obtienen las siguientes matrices:

$$J_{(l1,l2)} := Q1_{(l1,l2)} - Q2_{(l1,l2)} + Q3_{(l1,l2)} - Q4_{(l1,l2)}$$

$$H := \begin{pmatrix} (1 + (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \delta) I_{\frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2} \times \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2}} & \gamma \bar{\lambda}_n J_{(l1,l2)}^\top \\ \gamma \bar{\lambda}_n J_{(l1,l2)} & (1 - (\bar{\theta}_n - 1) \gamma \delta) I_{\frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2} \times \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{2}} \end{pmatrix}$$

$$f := - \begin{pmatrix} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3,k_3} \sum_{i_4,k_4} \sum_{i_1,k_1} W_{(i_3,k_3;i_4,k_4;i_1,k_1;i_2,k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3,k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4,k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1,k_1)}^{(\hat{1})}(n) + \bar{c}_{(i_0,k_0)}^{(0)}(n) \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3,k_3} \sum_{i_4,k_4} \sum_{i_2,k_2} W_{(i_3,k_3;i_4,k_4;i_1,k_1;i_2,k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3,k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4,k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_2,k_2)}^{(\hat{2})}(n) + \bar{c}_{(i_0,k_0)}^{(0)}(n) \end{pmatrix}$$

- Cálculo para \bar{x}_n :

$$\bar{x}_n = \arg \min_{x \in X} \left\{ \frac{1}{2} \|x - x_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, x, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (x - x_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, x, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\ & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\ & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} + \right. \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \left\{ \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\ & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\ & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right\} + \\ & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \\ & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(x - x_n)^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, x, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})} - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left\{ \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \right\} + \\
 & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})} \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Por la programación cuadrática se obtienen las siguientes matrices:

$$H := \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \right) \cdot I_{N_1 M_1 + N_2 M_2 \times N_1 M_1 + N_2 M_2}$$

$$f := \left(\begin{array}{l} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \end{array} \right) - \\ \left(\begin{array}{l} \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \end{array} \right) \\ - \left(\begin{array}{l} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right)$$

- Cálculo para \bar{v}_n :

$$\bar{v}_n = \arg \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, v, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

donde

$$\frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, v, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\ \frac{1}{2} \left\| \left(\begin{array}{l} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right) \right\|^2 - \\ \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\ \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\ \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|v - v_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, v, \bar{w}_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \right) \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 - \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
& \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \hat{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
& \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \hat{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
& \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
& \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
& \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) + \\
& \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
\end{aligned}$$

Por la programación cuadrática se obtiene:

$$\begin{aligned}
Q1_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \hat{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \\
Q2_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(\hat{2})}(n) \\
Q3_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \hat{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} \\
Q4_{(i_3, k_3; i_4, k_4)} &= \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(\hat{1})}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n)
\end{aligned}$$

Usando el siguiente algoritmo para combinar los índices de las matrices presentadas y obteniendo un arreglo de dimensión $\frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2} \times \frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2}$ reduciendo el tamaño de las matrices para implementar el producto matricial.

Algoritmo 5.4 Combinación de índices \bar{x}_n y \bar{v}_n .

```

l1 = 0;
l2 = 0;
para cada  $i_3 = 1 : N_3$ 
  para cada  $k_3 = 1 : M_3$ 
    l1 = l1++;
    para cada  $i_4 = 1 : N_4$ 
      para cada  $k_4 = 1 : M_4$ 
        l2 = l2++;
         $Q_{(l1,l2)} = Q_{(i_3,k_3;i_4,k_4)}$ ;
      fin
    fin
  fin
  l2 = 0;
fin
fin

```

Finalmente, por la programación cuadrática se obtienen las siguientes matrices:

$$J_{(l1,l2)} := -\gamma (\bar{\theta}_n - 1) [Q1_{(l1,l2)} - Q2_{(l1,l2)}] - \gamma (\bar{\theta}_n - 1) [Q3_{(l1,l2)} - Q4_{(l1,l2)}]$$

$$H := \begin{pmatrix} (1 + \gamma \bar{\lambda}_n \delta) I_{(\frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2} \times \frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2})} & J_{(l1,l2)} \\ J_{(l1,l2)}^\top & (1 + \gamma \bar{\lambda}_n \delta) I_{(\frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2} \times \frac{N_3 M_3 + N_4 M_4}{2})} \end{pmatrix}$$

$$f := \begin{pmatrix} \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(\hat{3})}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(\hat{4})}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \end{pmatrix}$$

- Cálculo para \bar{w}_n :

$$\bar{w}_n = \arg \min_{w \in W} \left\{ \frac{1}{2} \|w - w_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, w, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|w - w_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, w, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) = \\
 & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 - \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \dot{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \dot{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \dot{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \dot{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Entonces, se tiene:

$$\frac{1}{2} \|w - w_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \bar{v}_n, w, \bar{\lambda}_n, \bar{\theta}_n) =$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \right) \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 - \\
 & \gamma (\bar{\theta}_n - 1) \left[\sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \dot{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)} \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \dot{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)} - \\
 & \quad \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(1)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(2)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \left[\sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \dot{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \dot{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \right] - \\
 & \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\theta}_n - 1) \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \\ \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \\
 & \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \gamma \frac{\delta}{2} (\bar{\lambda}_n^2 + \bar{\theta}_n^2)
 \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene:

$$H := \left(\frac{1}{2} + \gamma \bar{\lambda}_n \frac{\delta}{2} \right) \cdot I_{N_3 M_3 + N_4 M_4 \times N_3 M_3 + N_4 M_4}$$

$$\begin{aligned}
 f = & - \left(\begin{array}{l} \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)} \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right) + \\
 & \left(\begin{array}{l} \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(4)} \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \\ \gamma \bar{\lambda}_n \sum_{i_1, k_1} \sum_{i_2, k_2} \sum_{i_3, k_3} \sum_{i_4, k_4} W_{(i_3, k_3; i_4, k_4; i_1, k_1; i_2, k_2)}^{(3)} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \bar{c}_{(i_1, k_1)}^{(1)}(n) \bar{c}_{(i_2, k_2)}^{(2)}(n) \end{array} \right) \\
 & - \left(\begin{array}{l} \bar{c}_{(i_3, k_3)}^{(3)}(n) \\ \bar{c}_{(i_4, k_4)}^{(4)}(n) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Anexos

Durante el desarrollo del presente trabajo de tesis se obtuvieron los siguientes artículos científicos, que fueron sometidos y ahora se encuentran en proceso de revisión para ser publicados:

1. C. Solis, J. B. Clempner and A. S. Poznyak. Modeling Multi-Leader-Follower Non-Cooperative Stackelberg Games (sometido): [58].
2. C. Solis, J. B. Clempner, A. S. Poznyak. Non-cooperative multiple agents Stackelberg security games handling a Kullback-Leibler divergence random walk (sometido): [59].

Bibliografía

- [1] Adelson-Velsky, G. M. Algorithms for games. Springer-Verlag 1988.
- [2] A. S. Antipin, "An Extraproximal Method for Solving Equilibrium Programming Problems and Games", Computational Mathematics and Mathematical Physics 45, 11, 1893-1914, 2005.
- [3] Y. Bachrach, M. Draief, and S. Goyal. Security games with contagion, 2012. A ser sometido.
- [4] R. Bellman. A Markovian Decision Process. Journal of Mathematics and Mechanics 6, 1957.
- [5] Bertsekas, Dimitri (2003). Convex Analysis and Optimization. Athena Scientific.
- [6] Camerer, Colin (2003), Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interaction, Russell Sage Foundation, ISBN 978-0-691-09039-9.
- [7] J. B. Clempner and A. S. Poznyak. Stackelberg security games: Computing the shortest-path equilibrium. Expert Systems With Applications, 42(8):3967–3979, 2015.
- [8] Combettes, Patrick L.; Pesquet, Jean-Christophe (2011). Springer's Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering 49. pp. 185–212.
- [9] V. Conitzer. Computing Game-Theoretic Solutions and Applications to Security. Proceedings of the Twenty-Sixth AAAI Conference on Artificial Intelligence.
- [10] De Miguel V., Xu H. A Stochastic multiple-leader Stackelberg model: analysis, computation, and application. Operations Research. 57, 1220-35, 2009.
- [11] Doob, J. L. (1953). Stochastic Processes. Wiley.
- [12] Dresher, M. Advances in game theory. Princeton University Press 1964.
- [13] Hanson, M. A. (1999). "Invexity and the Kuhn-Tucker Theorem". J. Math. Anal. Appl. 236 (2): 594–604.
- [14] Harold Houba, Wilko Bolt. Credible Threats in Negotiations. A Game-theoretic Approach. Chapter 4. The Nash Program. ISBN 978-1-4020-7183-6.
- [15] Harsanyi, J. C. (1974). "An Equilibrium-Point Interpretation of Stable Sets and a Proposed Alternative Definition". Management Science.

- [16] He, X., Prasad, A., Sethi, S.P., and Gutierrez, G. (2007) A Survey of Stackelberg Differential Game Models in Supply and Marketing Channels, *Journal of Systems Science and Systems Engineering (JSSSE)*, 16(4), December 2007, 385-413. Disponible en: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1069162
- [17] Hodges, Wilfred. *Building models by games*. Cambridge University Press, 1985.
- [18] I. Ekeland, Nonconvex minimization problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 3, 1, 443-474, 1979.
- [19] I. Ekeland, On the variational principle, *J. Math. Anal. Appl.* 47, 324-353, 1974.
- [20] S. I. Grossman. *Elementary Linear Algebra*. McGraw Hill.
- [21] X. Guo and O. Hernández-Lerma. *Continuous-Time Markov Decision Processes*, Springer, 2009.
- [22] Karlin, Samuel & Taylor, Howard M. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press. ISBN 0-12-684887-4.
- [23] Koh A. An evolutionary algorithm based on Nash dominance for equilibrium Problems with equilibrium constraints. *Applied Soft Computing*. 12, 1, 161-73, 2012.
- [24] V. N. Kolokoltsov, O.A. Malafeyev. *Understanding Game Theory*. World Scientific 2010.
- [25] D. Korzhyk, Z. Yin, C. Kiekintveld, V. Conitzer and M. Tambe. Stackelberg vs. Nash in Security Games: An Extended Investigation of Interchangeability, Equivalence, and Uniqueness. *Journal of Artificial Intelligence Research* 41 (2011) 297-327
- [26] Kuhn, H. W. *Contributions to the theory of games*. Princeton University Press, 1950.
- [27] Kuhn, H. W.; Tucker, A. W. (1951). "Nonlinear programming". *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*. Berkeley: University of California Press. pp. 481–492. MR 47303
- [28] Kullback, S.; Leibler, R.A. (1951). "On information and sufficiency". *Annals of Mathematical Statistics* 22 (1): 79–86. doi:10.1214/aoms/1177729694. MR 39968.
- [29] Landweber, L. (1951): An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. *Amer. J. Math.* 73, 615–624
- [30] Leyffer S. and Munson T. Solving multi-leader-follower games. Preprint Argonne National Laboratory, vol. ANL/MCS-P1243-0405, Apr. 2005.
- [31] Lu J. ,Shi C. , Zhang G. , Ruan D. An extended branch and bound algorithm for bilevel multi-follower decision making in a referential-uncooperative situation. *International Journal of Information Technology and Decision-Making*. 6, 2, 371-388, 2007.
- [32] Luenberger, David (1969). *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley & Sons.
- [33] Lung R. I., Dumitrescu D. Computing Nash equilibria by means of evolutionary computation. *International Journal of Computers Communications and Control* 2008;3, 364-368.
- [34] Marsden J., Tromba A. *Vector Calculus*. Macmillan Higher Education.

- [35] Mertens, J. F. & Neyman, A. (1981). "Stochastic Games". *International Journal of Game Theory* 10 (2): 53–66. doi:10.1007/BF01769259.
- [36] J. F. Nash. Equilibrium points in N -person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 48-49, 1950.
- [37] J. F. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54,286-295, 195.
- [38] Johnson and Sinanovic. Symmetrizing the Kullback-Leibler distance. Rice University: Computer and Information Technology Institute.
- [39] A. A. Markov "Распространение закона бол'ших чисел на величины, зависящие друг от друга". *Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obshchestva pri Kazanskom universitete*, 2-ya seriya, tom 15, pp. 135–156, 1906.
- [40] Ogata K. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall; 5 edition (September 4, 2009).
- [41] Papoulis, Athanasios & Pillai, S. Unnikrishna (2001). *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math. ISBN 0-07-281725-9.
- [42] Neal Parikh, Stephen Boyd (2013). *Proximal Algorithms*. Foundations and Trends in Optimization.
- [43] Pita, J.; Jain, M.; Western, C.; Portway, C.; Tambe, M.; Ordóñez, F.; Kraus, S.; and Parachuri, P. 2008. Deployed ARMOR protection: The application of a game-theoretic model for security at the Los Angeles International Airport. *AAMAS* , 125–132.
- [44] A. S. Poznyak, K. Najim and E. Gomez-Ramirez. *Self-learning control of finite Markov chains*. New York: Marcel-Dekker. 2000.
- [45] A. S. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers*. Vol. I. Deterministic Systems. Elsevier, Amsterdam, 2008.
- [46] M. L. Puterman. *Markov Decision Processes*. Wiley, 1994.
- [47] M. L. Puterman and Shin M. C. Modified Policy Iteration Algorithms for Discounted Markov Decision Problems, *Management Science* 24, 1978.
- [48] Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- [49] J. B. Rosen, "Existence and uniqueness of equilibrium points for concave N -persons games". *Econometrica* 33, pp. 520-534, 1965.
- [50] Ruszczyński, Andrzej (2006). *Nonlinear Optimization*. Princeton, NJ: Princeton University Press. ISBN 978-0691119151. MR 2199043.
- [51] Sherali H. D. ,Soyster A. L. ,Murphy F.H. Stackelberg–Nash–Cournot equilibria: Characterizations and computations. *Operations Research*. 31, 2, 253–76, 1983.
- [52] Sherali H. D. A multiple leader Stackelberg model and analysis . *Operations Research*. 32, 2, 390-404, 1984.

- [53] Shieh, E.; An, B.; Yang, R.; Tambe, M.; Baldwin, C.; Di-Renzo, J.; Maule, B.; and Meyer, G. 2012. PROTECT: A deployed game theoretic system to protect the ports of the United States. AAMAS .
- [54] M. Simaan and J.B. Cruz, Jr., On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 11, No. 5, May 1973, pp. 533-555.
- [55] M. Simaan and J.B. Cruz, Jr., Additional Aspects of the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 11, No. 6, June 1973, pp. 613-626.
- [56] A. Sinha, P. Malo, A. Frantsev, and K. Deb, Finding optimal strategies in a multi-period multi-leader-follower stackelberg game using an evolutionary algorithm," *Computers Operation Research*, 41, 374-385, 2014. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2013.07.010>.
- [57] A. Smith, Y. Vorobeychik, and J. Letchford. Multi-Defender Security Games on Networks. Sandia National Laboratories, Livermore CA.
- [58] C. Solis, J. B. Clempner and A. S. Poznyak. Modeling Multi-Leader-Follower Non-Cooperative Stackelberg Games (sometido).
- [59] C. Solis, J. B. Clempner, A. S. Poznyak. Non-cooperative multiple agents Stackelberg security games handling a Kullback-Leibler divergence random walk (sometido).
- [60] H. Van Stackelberg. *The Theory of Market Economy*. Oxford University Press, 1952.
- [61] H. von Stackelberg. *Market Structure and Equilibrium: 1st Edition Translation into English*, Bazin, Urch & Hill, Springer 2011.
- [62] K. Tanaka and K. Yokoyama, "On ϵ -Equilibrium Point in a Noncooperative N-person Game", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 160, 413-423, 1991.
- [63] Tikhonov, Andrey Nikolayevich (1943). [On the stability of inverse problems]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* 39 (5): 195-198.
- [64] Tikhonov, A. N.; V. Y. Arsenin (1977). *Solution of Ill-posed Problems*. Washington: Winston & Sons. ISBN 0-470-99124-0.
- [65] K. K. Trejo, J. B. Clempner, and A. S. Poznyak. Computing the stackelberg/nash equilibria using the extra-proximal method: Convergence analysis and implementation details for markov chains games. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 25(2), 2015. To be published.
- [66] K. Trejo, J. Clempner and A. Poznyak. A Stackelberg Security Game With Random Strategies Based on The Extraproximal Theoretic Approach. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 37, 145-153, 2015.
- [67] J. Tsai, S. Rathi, C. Kiekintveld, F. Ordonez, and M. Tambe. Iris - a tool for strategic security allocation in transportation networks. In *Eighth International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems - Industry Track*, pages 37-44, 2009.

- [68] P. Varakantham, H. C. Lau, and Z. Yuan. Scalable randomized patrolling for securing rapid transit networks. In Proceedings of the Conference for Innovative Applications for Artificial Intelligence (IAAI), pages 1563–1568, Bellevue, Washington, USA, 2013.
- [69] Vieille, N. (2002). "Stochastic games: Recent results". Handbook of Game Theory. Amsterdam: Elsevier Science. pp. 1833–1850. ISBN 0-444-88098-4.
- [70] Weibull, Jörgen W. Evolutionary game theory. MIT, 1995.
- [71] Wio, S. Horacio, Deza, R. Roberto & Lopez, M. Juan (2012). An Introduction to Stochastic Processes and Nonequilibrium Statistical Physics. World Scientific Publishing. ISBN 978-981-4374-78-1.
- [72] R. Yang, C. Kiekintveld, F. Ordonez, M. Tambe, and R. John. Improving resource allocation strategy against human adversaries in security games. In Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), pages 458–464, Barcelona, Catalonia, Spain, 2011.
- [73] Z. Yin and M. Tambe. A unified method for handling discrete and continuous uncertainty in bayesian stackelberg games. In Proceedings of the Eleventh International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS), pages 234–242, Valencia, Spain, 2012.
- [74] Zhang G., Lu J., Gao Y. Fuzzy bilevel programming: multi-objective and multi-follower with shared variables. International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge. 16,105-33, 2008.