



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Observador Adaptativo de un Biorreactor
bajo el enfoque LMI**

T E S I S

QUE PRESENTA

Ing. Gerardo Arno Sonck Martínez

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de Control Automático

Director de Tesis:

Dr. Torres Muñoz Jorge Antonio

México, D.F.

Agosto, 2015

Agradecimientos

Agradezco profundamente y de todo corazón:

- A mi madre, cuyas auténticas canas soy la principal causa.
- A mi familia, por su apoyo incondicional que siempre me han otorgado sin esperar nada a cambio.
- A todos mis compañeros de generación y amigos de otras generaciones, que de una u otra forma han pasado a formar parte de mi.
- Al Dr. Jorge Antonio Torres Muñoz, por su paciencia a la hora de escucharme, sus consejos cuando andaba perdido y su apoyo durante todo este tiempo.
- A la Dra. Martha Rzedowski Calderón, quien sin estar obligada siempre estuvo al pendiente de mi.
- A la Dra, Sabine Mondié Cuzange y Dr. Fernando Castaños Luna por haber aceptado ser sinodales para la revisión y defensa del manuscrito.
- A la Dra. Alma Rosa Domínguez Bocanegra por ayudar a la revisión del manuscrito.
- Al Departamento de Control Automático y sus integrantes, que tan amablemente me brindaron su ayuda cuando así lo necesite.
- Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, por mantener un entorno apropiado para la investigación y desarrollo de futuros investigadores.
- Finalmente, pero no menos importantes, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo otorgado en el transcurso de mis investigaciones.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	2
1.1.1. Objetivo principal	2
1.1.2. Objetivos particulares	2
2. Fundamentos de Biorreactores	3
2.1. Modelos Dinámicos	3
2.2. Microorganismos y sus usos	4
2.3. Tipos de Biorreactores	5
2.3.1. Modelización matemática	5
2.3.2. Modos de operación	6
2.4. Modelado por balance de masa	7
2.4.1. Esquema de reacción	7
2.4.2. Ejemplo	8
2.5. Cinemática	9
2.5.1. Restricciones matemáticas	9
2.5.2. Tasa de crecimiento específico	11
3. Resultados Preliminares	13
3.1. Observadores de Alta Ganancia	13
3.1.1. Caso lineal	13
3.1.2. Caso No lineal	18
3.2. Observador Adaptativo <i>Estático</i>	21
3.2.1. Caso lineal	21
3.2.2. Caso No lineal	23
3.3. Problemática	25
3.4. Precedentes del uso de LMI en Observadores	28

4. Enfoque usando LMI	31
4.1. Observador	31
4.2. Cambio de variable	34
4.3. Comentarios	35
5. Diseño del Observador	37
5.1. Transformando un modelo de tratamiento de agua	37
5.2. Cálculo de Ganancias	40
5.3. Restricciones sobre la matriz P	44
6. Simulación Numérica	47
6.1. Valores obtenidos	47
6.2. Resultados de la simulación	49
6.3. Código	54
7. Conclusiones y Trabajos futuros	55

Índice de figuras

2.1. Modos de operación de biorreactores	7
6.1. Parámetros de la Matriz A	50
6.2. Condición (5.14)	51
6.3. Condición de Lipschitz	51
6.4. Bioreactor	52
6.5. Substrato	52
6.6. Perturbación	53
6.7. Errores	53

Abreviaturas

- HG.- Alta ganancia (del ingles High Gain)
- LMI.- Desigualdad matricial lineal (del ingles lineal Matrix Inequality)
- SPR.- Estricto positivo real (del ingles Strictly Positive Real)
- STF.- Forma triangular estricta (del ingles Strict Triangular Form)
- STR.- Reactor de tanque agitado (del ingles Stirred Tank Reactor)
- VFA.- Ácidos grasos volatiles (del ingles Volatile Fatty Acids)

Abstract

Adaptive version for a typical Luemberger observer (in the sense that it is a copy of the system plus a correction term) subjected to constant unknown disturbances in the input using a LMI approach is proposed. Adaptive feature is necessary due to the fact that input disturbances need to be identified. In turn, high gain technique seems to be unsuitable when using constant adaptive gains. The developed observers are then applied to a culture of microorganisms in a bioreactor, namely, to the model of the continuous culture of *Spirulina maxima*. It is a common practice that just the biomass (or substrate) concentration is directly measured as the output of the process for monitoring and control purposes. Here will be showed, both by theoretical analysis and numerical simulation, that the mentioned LMI adaptive observers offer a realistic option of online software sensors for substrate estimation.

Resumen

Usando LMI's, se propone una versión adaptable de un observador clásico tipo Luemberger (en el sentido de que es una copia del sistema más un termino de corrección) el cual esta afectado por una perturbación constante desconocida en la entrada. La intención de usar un observador adaptable es que la alta ganancia es susceptible a perturbaciones en la entrada. Posteriormente, el observador propuesto es implementado en el cultivo de un microorganismo (*Spirulina maxima*) en un biorreactor operado en modo continuo. Es una una practica común que solamente este disponible la concentración de biomasa (o sustrato) para medición por lo que se usa de salida del sistema con fines de monitoreo o control. Se mostrara de forma analítica y numérica que el observador adaptable descrito ofrece una solución realista para sensores virtuales en linea para la estimación del sustrato.

Capítulo 1

Introducción

Los estados de un sistema dinámico no siempre están disponibles, ya sea por que se carece de la capacidad tecnológica o esta no es viable, como consecuencia, el uso de observadores es común en diversas aplicaciones, lo que ha llevado al desarrollo de diferente tipos, desde el observador tipo Luemberger para sistemas lineales hasta su adaptación a sistemas específicos (por ejemplo alta ganancia para sistemas no lineales), así como también el uso de diferentes enfoques como modos deslizantes o en este caso, las desigualdades lineales matriciales LMI's.

En adición a esto, se espera que los observadores entreguen una estimación precisa de los estados reales de la planta sin importar perturbaciones que puedan surgir o dinámicas no modeladas. En el presente trabajo, se utilizara un enfoque por medio de LMI's para demostrar convergencia asintótica del error entre los estados estimados y los reales a pesar de la presencia de una perturbación constante en la entrada.

En la sección 2, se explica el modelado de sistemas biológicos a groso modo, lo cual permitirá al lector entender el origen del modelo propuesto. En la sección 3, se presentará el trasfondo de observadores adaptables estáticos y de alta ganancia, al final de la misma, se mostraran sus limitaciones. El enfoque usando LMI's será presentado en la sección 4 junto con su aplicación a un sistema de tratamiento de agua. El diseño del observador de este sistema se explica en la sección 5 mientras que los resultados de simulación serán presentados en la sección 6.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo principal

Desarrollar, con ayuda de LMI's, un observador de estados para un biorreactor que permita considerar dentro de su diseño una perturbación constante en la entrada. Esto por que el control en sistemas de este tipo suele ser en lazo abierto y consta de una dilución de sustrato, en la cual se pudo haber cometido un error de medición antes de dar inicio a la operación de la planta.

1.1.2. Objetivos particulares

- . Revisar las propiedades de los modelos matemáticos de biorreactores.
- . Análisis de observadores de alta ganancia para sistemas no lineales con incertidumbres: El caso de los observadores adaptables de ganancia fija.
- . Estudio de antecedentes del uso de LMI,s en observadores.
- . Diseño de un observador adaptable que sea capaz de rechazar una perturbación constante en la entrada para el modelo de un biorreactor.

Capítulo 2

Fundamentos de Biorreactores

2.1. Modelos Dinámicos

La mayoría de los modelos biológicos dependen de leyes empíricas, pero estas no siempre están disponibles o no han sido validadas, por lo que es importante identificar la confiabilidad de las leyes usadas en la construcción del modelo. El tipo y la estructura del modelo dependen del objetivo para el cual el modelo fue hecho. De hecho, un modelo se puede realizar con diferentes objetivos, los cuales tienen que ser identificados desde un principio. Un modelo puede ser usado para:

- Reproducir un comportamiento observado
- Explicar un comportamiento
- Predecir la evolución de un sistema
- Ayudar a entender los mecanismos de un sistema dado
- **Estudiar variables que no pueden ser medidas**
- Estimar parámetros de un sistema
- Actuar en un sistema para dirigir y controlar sus variables
- Detectar una anomalía en el funcionamiento del proceso
- etcétera

Los objetivos de modelado generalmente dan lugar a un formalismo para el diseño del modelo. Si queremos explicar la heterogeneidad espacial en un fermentador, será necesario recurrir a un modelo de parámetros distribuidos (generalmente descrito por ecuaciones en derivadas parciales). Si el objetivo es mejorar la producción de un metabolito durante las etapas de transición, será necesario representar la dinámica del sistema. De la misma manera, las herramientas que queramos utilizar para lograr el objetivo, nos guiarán en la elección del tipo de modelo (continuo / discreto, determinista / estocástico, etc.). Por otra parte, dentro de los límites de estos objetivos, el modelo también tiene que ser adaptado a los datos disponibles. De hecho, un modelo complejo que implica un gran número de parámetros, requerirá de una gran cantidad de datos a ser identificados y validados.

Por último, teniendo en cuenta la falta de leyes validadas en la biología, la etapa clave del modelado es la validación del modelo. De hecho, es fundamental que seamos capaces de mostrar, sobre la base de datos experimentales, que el modelo logra correctamente los objetivos asignados; se invita al lector a consultar [27] para una profunda reflexión sobre el modelado.

2.2. Microorganismos y sus usos

La fermentación microbiana es un proceso en el cual una población de microorganismos se cultivan utilizando ciertos elementos nutritivos en condiciones favorables (como luz, temperatura, pH, etc). Esto corresponde esquemáticamente a la transformación de sustancias en productos, resultantes de la actividad metabólica de las células. Los componentes principales de la reacción son:

- S_i Sustratos: Son el alimento del microorganismo, usualmente contienen fuentes de carbón como la glucosa, etanol, etc. y algunas veces nitrógeno (NO_3, NH_4 , etc.) y fósforo (PO_4 , etc.).
- X_i Biomasa microbiana. Algunos modelos utilizan la biomasa y otros la densidad de biomasa por unidad de volumen.
- P_i Productos finales: por ejemplo: aceites, queso y cerveza en el caso de alimentos agrarios; solventes, enzimas y aminoácidos en el caso de químicos; antibiótico, hormonas y vitaminas en el caso de medicinas; etanol y biogas para el caso de energía.

Cada tipo de microorganismo tiene características relacionadas con su herencia genética y su sistema regulatorio por lo que la fermentación puede tener varios usos, como:

- Crecimiento microbiano: Lo que interesa es el microorganismo, como ejemplo tenemos la levadura.
- Producción metabólica: La atención se centra en un producto del microorganismo, como el etanol o la penicilina.
- Consumo de sustrato: El objetivo aquí es procesar una sustancia, como ejemplo se encuentra el tratamiento de aguas.
- Estudio fenomenológico: se enfoca en el comportamiento de un microorganismo.

La mayoría de los procesos biotecnológicos desarrollados a nivel industrial, usan cultivos microbianos que están constituidos por una sola especie de microorganismo para la síntesis de un producto bien definido (cultivo puro). Sin embargo, en ciertos casos, se pueden hacer crecer varias especies simultáneamente, pero esto sólo es posible si no son demasiado competitivas.

2.3. Tipos de Biorreactores

2.3.1. Modelización matemática

Desde el punto de vista de la modelización matemática, los reactores biológicos se pueden dividir en dos clases principales:

- Reactores de tanque agitado o STR de sus siglas en inglés (stirred tank reactors). Estos se caracterizan por que el medio donde ocurre la reacción es homogéneo y la reacción es descrita por ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Reactores con un gradiente de concentración espacial, donde la reacción es descrita por ecuaciones en derivadas parciales.

2.3.2. Modos de operación

Los modos de operación de los biorreactores se caracterizan generalmente por los intercambios de líquido, es decir, por el tipo de suministro de sustrato aplicado al reactor. Se pueden distinguir tres modos principales:

- Modo discontinuo (o por lote) Todos los elementos nutritivos necesarios para el crecimiento biológico se introducen en el comienzo de la reacción. Ni adición o remoción se llevan a cabo. La reacción tiene lugar a volumen constante. Las únicas acciones posibles del operador se refieren específicamente a las variables ambientales como el pH, la temperatura o la velocidad de agitación. Se requiere pocos recursos para su implementación, garantiza la pureza del producto, Una desventaja es que casi no hay medios de control que hagan posible operar el fermentador para optimizar el uso de los microorganismos. También adolece de una desventaja importante: el suministro inicial de una alta cantidad de sustrato en general inhibe el crecimiento de microorganismos que lo consumen, lo que resulta en un retraso.

- Modo semi-continuo (o lote realimentado) En este modelo se agrega varios elementos nutritivos conforme los necesite el microorganismo. El producto es extraído en intervalos y se recomienda cuando es peligroso liberar materia toxica residual, tiene la ventaja que se puede evitar la inhibición del crecimiento debido a altas concentraciones de sustrato.

- Modo continuo (o chemostat) Es el más ampliamente usado en el tratamiento de aguas, el proceso continuo trabaja en estado estable para las condiciones de suministro fijos. Generalmente opera en lazo abierto y se puede usar para estudiar los fenómenos transitorios. Además, se pueden obtener producciones significativas en reactores de tamaño pequeño.

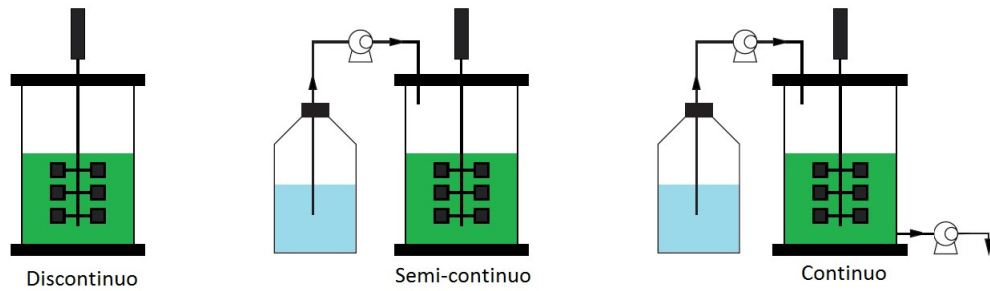


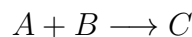
Figura 2.1: Modos de operación de biorreactores

2.4. Modelado por balance de masa

El modelado de sistemas biológicos es una tarea delicada porque no hay leyes que caracterizan la evolución de los microorganismos. Sin embargo, estos sistemas, al igual que todos los sistemas físicos, deben cumplir con normas, tales como la conservación de la masa, la electroneutralidad de soluciones, etc.

2.4.1. Esquema de reacción

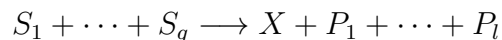
A nivel macroscópico, el esquema de reacción de un proceso bioquímico describe el conjunto de las principales reacciones biológicas y químicas. Adoptaremos el formalismo de [5] que es similar a la de la química, simplemente definiendo la transformación de dos reactivos A y B en un producto C en la forma siguiente:



Por convención, a diferencia de la química, no se consideran los coeficientes estequiométricos en estas reacciones. En general la velocidad de reacción corresponde a la tasa de crecimiento de la biomasa implícita.

Las principales reacciones de transformación de la masa en un bioproceso son los siguientes:

- crecimiento de los microorganismos y la biosíntesis.

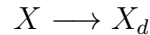


- síntesis de un producto a través de metabolismo primario.



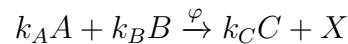
En este caso, la fabricación de productos no es dependiente del crecimiento bacteriano, sino que generalmente depende de las enzimas producidas por microorganismo.

- Mortandad.



donde, X_d corresponde a una biomasa muerta (mientras que X es la biomasa viva).

Sin embargo, esta ecuación solamente puede ser completada por la adición de la velocidad de reacción y coeficientes estequiométricos a ella. Es por ello que se va a preferir expresar el esquema de reacción en una forma más completa:



Donde φ es la velocidad de reacción, en este caso corresponde a la tasa de formación de biomasa. El ritmo de consumo de A es k_A , el de B es k_B mientras que el ritmo de producción de C es k_C . Entonces la tasa de producción de C es $K_C \varphi$ y las tasas de consumo de A y B son $k_A \varphi$ y $k_B \varphi$ respectivamente.

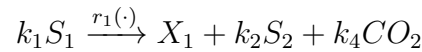
La elección del número de reacciones a tener en cuenta y los componentes que intervienen en estas reacciones es muy importante para el modelado. Se lleva a cabo basada en el conocimiento que tenemos sobre el proceso y las mediciones que podemos realizar. El esquema de reacción condicionará la estructura del modelo. Por lo tanto tienen que ser elegidos con cautela, teniendo en cuenta los objetivos del modelo y de la precisión que se espera. El número requerido de reacciones y el esquema de reacción puede ser determinada directamente a partir de un conjunto de datos experimentales [7, 6]. Se considera que el esquema de reacción resume la distribución de la masa y fluye entre varias reacciones que intervienen en el proceso, y que los coeficientes de rendimiento son constantes. A continuación se muestra un ejemplo de [10] para aterrizar estas ideas.

2.4.2. Ejemplo

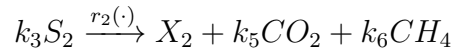
Se va a considerar un ejemplo con digestión anaeróbica. Este proceso de tratamiento de aguas residuales utiliza bacterias anaeróbicas para degradar la materia

orgánica (S_1). De hecho, es un proceso muy complejo, en el que un gran número de poblaciones bacterianas intervienen [26, 11]. Si el objetivo es el control de este ecosistema, necesitaremos un modelo relativamente simple. También vamos a limitarnos a considerar dos poblaciones bacterianas. Por lo tanto, se supone que la dinámica del sistema se pueden resumir en dos principales etapas:

- etapa de acidogénesis (velocidad de reacción $r_1(\cdot)$), durante el cual el sustrato S_1 es degradado por bacterias acidogénicas (X_1) y se transforma en ácidos grasos volátiles (S_2) y en CO_2 :



- etapa de metanogénesis (velocidad de reacción $r_2(\cdot)$), donde los ácidos grasos volátiles (VFA por sus siglas en inglés *volatile fatty acids*) son degradado en CH_4 y CO_2 por bacterias metanogénicas (X_2).



Las constantes k_1 , k_2 y k_4 representan los coeficientes estequiométricos asociados con el consumo del sustrato S_1 , la producción de VFA y CO_2 respectivamente en la etapa de acidogénesis. k_3 , k_5 y k_6 representan los coeficientes estequiométricos asociados a el consumo de VFA y la producción de CO_2 y CH_4 durante la etapa de metanogénesis.

Cabe señalar que este esquema de reacción no tiene ninguna realidad biológica ya que las biomazas X_1 y X_2 representan una flora de diferentes especies. Lo mismo sucede para los sustratos S_1 y S_2 que reúnen un grupo de compuestos heterogéneos. Hay muchos modelos para estos procesos que se pueden consultar en [17, 26, 24] para más detalles.

2.5. Cinemática

2.5.1. Restricciones matemáticas

Positividad de las variables

A priori, sabemos que existen un cierto número de limitaciones físicas que el modelo debe respetar: las variables deben permanecer positivas y son acotadas si las

entradas de masa al biorreactor lo son. Estas limitaciones físicas impondrán restricciones a la estructura de $r_i(\cdot)$. Algunas cantidades tienen que permanecer entre dos límites conocidos. A continuación se presenta una condición para garantizar que el modelo conserva esta propiedad.

Propiedad 1

Para cada variable de estado ξ_i , el campo $\frac{d\xi}{dt}$ en el eje $\xi_i = 0$ debe de apuntar hacia la parte aceptable del espacio, en otras palabras, la variable $\xi \in [L_{min}, L_{max}]$ debe de cumplir:

$$\begin{aligned} \xi = L_{min} &\Rightarrow \frac{d\xi}{dt} \geq 0 \\ \xi = L_{max} &\Rightarrow \frac{d\xi}{dt} \leq 0 \end{aligned}$$

Propiedad 2

La segunda limitación importante que tendrá que respetar la cinética de bioquímicos se relaciona con el esquema de reacción. La reacción no puede tener lugar si falta uno de los reactivos necesarios para la reacción considerada. Esto se explica en la siguiente propiedad

Si ξ_j es un reactivo de la reacción i , entonces ξ_j puede ser factorizada en r_i .

$$r_i(\xi, u) = \xi_j v_{ij}(\xi, u)$$

Por lo que se puede verificar $\xi_j = 0 \Rightarrow r_i(\xi, u) = 0$.

De la misma manera, para las reacciones asociadas con una biomasa X , también vamos a tener la misma propiedad. Por lo tanto, se escribirá una reacción de crecimiento

$$r_i(\xi, u) = \mu_i(\xi, u)X$$

El término μ_i es llamado tasa de crecimiento específico.

2.5.2. Tasa de crecimiento específico

La tasa de crecimiento específico depende fuertemente de las condiciones de operación y el medio reactivo. La expresión más utilizada es el modelo empírico de Monod [25]. que, para describir el crecimiento bacteriano, se utiliza la ley introducida al comienzo del siglo 20 por Michaëlis Menten para la cinética enzimática.

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{K_S + S}$$

Esta expresión, donde μ_{max} es la tasa de crecimiento específico máximo ($1/h$) y K_S la constante de saturación media (g/l), nos permite describir el fenómeno de crecimiento limitado por la falta de sustrato y la ruptura completa cuando el sustrato ya no esta disponible. Tengamos en cuenta que las analogías con la cinética enzimática se han utilizado a menudo para determinar un modelo de crecimiento [12, 30].

Además, los fenómenos de inhibición debido al exceso de sustrato se modelan generalmente por la expresión de Haldane, introducido para el caso de las reacciones enzimáticas, y retomado por Andrews [1] para el caso de reacciones biológicas:

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_i}}$$

donde K_i es la constante de inhibición (g/l).

Cabe señalar que se han establecido muchas otras relaciones algebraicas para describir éstas restricciones o fenómenos de inhibición, pero su uso sigue siendo marginal. De igual manera, algunos modelos tienen en cuenta la influencia de la concentración de microorganismos, co-metabolitos, temperatura, pH.(ver [9, 4, 31] para más ejemplos).

El caso del oxígeno es un poco diferente. De hecho, en el caso de procesos que funcionan en un ambiente aeróbico, el oxígeno corresponde a un co-sustrato de la reacción, y por lo tanto puede ser tratado como tal, es decir, interviene en la forma de un término tipo Monod en la expresión de tasa de crecimiento específico, lo que conduce a la siguiente expresión:

$$\mu = \mu_{max} \left(\frac{S}{K_S + S} \right) \left(\frac{O_2}{K_{O_2} + O_2} \right)$$

Con concentración de oxígeno disuelto 0_2 (g/l) y K_{O_2} la constante de saturación media para el oxígeno (g/l). Sin embargo, esta expresión se omite a menudo bajo la suposición de que el reactor está suficientemente aireado por lo que K_{O_2} es demasiado pequeño en comparación de la concentración de oxígeno disuelto presente en el reactor en circunstancias normales.

Capítulo 3

Resultados Preliminares

3.1. Observadores de Alta Ganancia

3.1.1. Caso lineal

Considere el sistema lineal (3.1).

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + bu, \quad y = c\tilde{x} \quad (3.1)$$

El cual se considera observable, por lo que es posible llevarlo a su forma de observabilidad (3.2).

$$\dot{x} = A_{ob}x + bu, \quad y = c_o x \quad (3.2)$$

$$A_{ob} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix}, \quad c_o = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

donde a_i son los coeficientes del polinomio característico de A , esto es:

$$\det(sI - A) = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$$

(3.2) Se puede expresar como en (3.3).

$$\dot{x} = A_o x + b_o g(x) + bu, \quad y = c_o x \quad (3.3)$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g(x) = -a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_{n-1}x_{n-1} - a_nx_n$$

Note que (3.3) es una cadena de integradores con un termino de perturbación en la última ecuación. Por este motivo, un caso más general será analizado, un sistema como el (3.3) pero en lugar de $g(x)$ se tendrá una perturbación aditiva acotada $v(t)$ (ver ecuación (3.4)).

$$\dot{x} = A_o x + b_o v(t) + bu, \quad y = c_o x \quad (3.4)$$

El observador propuesto esta en (3.5).

$$\dot{\hat{x}} = A_o \hat{x} + \Theta(r) l c_o (\hat{x} - x) + bu \quad (3.5)$$

$$\Theta(r) = \begin{bmatrix} r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r^n \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ l_n \end{bmatrix}, \quad r > 0$$

El error de observación $e = \hat{x} - x$ satisface:

$$\dot{e} = (A_o + \Theta(r) l c_o) e - b_o v(t) \quad (3.6)$$

$$A_o + \Theta(r) l c_o = \begin{bmatrix} r l_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ r^2 l_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r^{n-1} l_{(n-1)} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ r^n l_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Note que el polinomio característico de $(A_o + \Theta(r) l c_o)$ es:

$$\det(sI - A_o - \Theta(r) l c_o) = s^n - r l_1 s^{n-1} - \cdots - r^{(n-1)} l_{(n-1)} s - r^n l_n$$

Supongase que los valores propios de $(A_o + l c_o)$ son:

$$\lambda(A_o + lc_o) = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

Entonces los valores propios de $(A_o + \Theta(r)lc_o)$ son:

$$\lambda(A_o + lc_o) = r\alpha_1, r\alpha_2, \dots, r\alpha_n$$

Un ejemplo de eso se puede ver en (3.8) para el caso $n = 3$.

$$\begin{aligned} (s + r\alpha_1)(s + r\alpha_2)(s + r\alpha_3) &= \\ (s^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)rs + r^2\alpha_1\alpha_2)(s + r\alpha_3) &= \\ s^3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)rs^2 + (\alpha_1\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3)r^2s + \alpha_1\alpha_2\alpha_3r^3 & \end{aligned} \quad (3.8)$$

Si l es escogida de forma tal que $(A_o + lc_o)$ sea Hurwitz, entonces $(A_o + \Theta(r)lc_o)$ también sera Hurwitz para toda $r > 0$. Si se incrementa la ganancia r los valores propios de una matriz Hurwitz $(A_o + lc_o)$ serán movidos más hacia el semiplano izquierdo.

Si realizamos un cambio de variable (con $\psi > 0$).

$$\zeta = \psi\Theta(r)^{-1}e = \psi \begin{bmatrix} r^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r^{-n} \end{bmatrix} e = \begin{bmatrix} \psi \frac{e_1}{r} \\ \psi \frac{e_2}{r^2} \\ \vdots \\ \psi \frac{e_n}{r^n} \end{bmatrix}$$

se obtiene:

$$\dot{\zeta} = \psi\Theta(r)^{-1}(A_o + \Theta(r)lc_o)\psi^{-1}\Theta\zeta - \psi\Theta^{-1}b_o v(t)$$

note que:

$$\begin{aligned} \Theta(r)^{-1}A_o\Theta(r) &= rA_o \\ C_o\Theta(r) &= rC_o \end{aligned}$$

por lo que:

$$\dot{\zeta} = r(A_o + \Theta(r)lc_o)\zeta - \psi\Theta^{-1}b_ov(t)$$

Dado que $(A_o + \Theta(r)lc_o)$ es Hurwitz, entonces para cualquier matriz simétrica positiva definida $Q = Q^T > 0$ existe una matriz simétrica definida positiva $P = P^T > 0$ que es solución la ecuación algebraica de Lyapunov (3.9).

$$(A_o + lc_o)^T P + P(A_o + lc_o) = -Q \quad (3.9)$$

Para la función candidata de Lyapunov:

$$V(\zeta) = \zeta^T P \zeta,$$

cuya derivada a lo largo de las soluciones del error de estimación es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta) &= r\zeta^T [(A_o + lc_o)^T P + P(A_o + lc_o)] \zeta - 2\psi\zeta^T P\Theta^{-1}b_ov(t) \\ &\quad \Downarrow \\ \dot{V}(\zeta) &= -r\zeta^T Q \zeta - 2\psi\zeta^T P\Theta^{-1}b_ov(t) \end{aligned}$$

Se supondrá que la perturbación es acotada, esto es:

$$\|v(t)\| \leq v_\infty, \quad \forall t \geq t_0$$

Como resultado (suponiendo $r > 1$) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta) &\leq -r\lambda_{\min}(Q)\|\zeta\|^2 + 2\psi\lambda_{\max}(P)\|\zeta\|r^{-n}v_\infty \\ &\quad \Downarrow \\ \dot{V}(\zeta) &\leq -r\gamma V(\zeta) + 2\psi \frac{\lambda_{\max}(P)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} r^{-n} v_\infty \sqrt{V(\zeta)} \end{aligned}$$

donde:

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$$

Introduciendo la función $W = \sqrt{V(\zeta)}$ se sigue que:

$$\dot{W} = \frac{\dot{V}(\zeta)}{2\sqrt{V(\zeta)}} \leq \frac{1}{2} - r\gamma W + \psi \frac{\lambda_{max}(P)}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}} r^{-n} v_\infty$$

Usando el principio de comparación

$$W \leq e^{-\frac{1}{2}r\gamma(t-t_0)} W_{(t_0)} + \psi \frac{\lambda_{max}(P)}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}} \frac{2(r^{-n})v_\infty}{r\gamma} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}r\gamma(t-t_0)} \right)$$

Pero recuerde que $W = \sqrt{V} = \sqrt{\zeta^T P \zeta} \geq \sqrt{\lambda_{min}(P)} \|\zeta\|$ como consecuencia de esto $W_{(t_0)} = \sqrt{V_{(\zeta_{t_0})}} \leq \sqrt{\lambda_{max}(P)} \|\zeta_{t_0}\|$, Por lo que:

$$\|\zeta\| \leq c_p e^{-\frac{1}{2}r\gamma(t-t_0)} \|\zeta_{t_0}\| + \frac{2c_p^2}{r\gamma} r^{-n} V_\infty, \quad \forall t \geq t_0$$

$$\text{donde } c_p = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}.$$

Mientras que para la variable de error original, ($\zeta = \psi \Theta(r)^{-1} e$) se obtienen las siguientes desigualdades.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n} \psi \|e(t)\| &\leq \|\psi \Theta(r)^{-1} e(t)\| \\ &\leq c_p e^{-\frac{1}{2}r\gamma(t-t_0)} \frac{1}{r} \psi \|e_{t_0}\| + \psi \frac{2c_p^2}{r\gamma} r^{-n} V_\infty \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que:

$$\|e\| \leq c_p e^{-\frac{1}{2}r\gamma(t-t_0)} r^{n-1} \|e_{t_0}\| + \frac{2c_p^2}{r\gamma} V_\infty, \quad \forall t \geq t_0$$

Este resultado implica que la velocidad de convergencia del error de observación se incrementa al incrementar r , también el efecto de la perturbación $V_{(t)}$ es atenuado al incrementar la ganancia r . Finalmente, la cota del error inicial (cuando $t \rightarrow t_0$) también crece con r , a esto se le conoce como *Peaking Phenomenon!*

3.1.2. Caso No lineal

Ahora considere el sistema no lineal con una sola salida afín a la entrada conocida expresado de la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}$.

Suponga que:

- El mapeo de observabilidad de orden $n - 1$, cuando $u = 0$

$$\mathcal{O}_{n-1}(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

- es un diffeomorfismo global.
- es globalmente Lipschitz.
- El sistema es globalmente observable para cualquier entrada (uniformemente observable) lo que es una propiedad bastante fuerte para sistemas no lineales.

Gauthier mostró en [14, 15] que la transformación:

$$\xi = T(x) = \mathcal{O}_{n-1}(x)$$

lleva el sistema a la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_o \xi + \varphi(\xi, u) \\ y &= c_o \xi \end{aligned}$$

Donde:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\xi, u) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1, u) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2, u) \\ \varphi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, u) \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi, u) \end{bmatrix},$$

$$c_o = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

Si $\varphi(\xi, u)$ es globalmente Lipschitz y el sistema (3.10) es uniformemente observable, entonces el observador (3.11) converge exponencialmente cuando $(A_o + lc_o)$ es Hurwitz, si r es lo suficientemente grande. La velocidad de convergencia es proporcional a r . También, la demostración de esto es similar a la anterior.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}} &= A_o \hat{\xi} + \varphi(\hat{\xi}, u) + \Theta(r)lc_o(\hat{\xi} - \xi) \\ \hat{x} &= \mathcal{O}_{n-1}^{-1}(\hat{\xi})\end{aligned}\quad (3.11)$$

El error de estimación es:

$$\dot{e} = (A_o + \Theta(r)lc_o)e - v(t) \quad (3.12)$$

donde

$$v(t) = \varphi(\xi + e, u) - \varphi(\xi, u)$$

Para la variable de error transformada ($\zeta = \psi\Theta(r)^{-1}e$).

$$\dot{\zeta} = L(A_o + lc_o)\zeta - \psi\Theta^{-1}v(t)$$

La derivada de la función tipo Lyapunov $V(\zeta) = \zeta^T P \zeta$ es:

$$\dot{V}(\zeta) = -r\zeta^T Q \zeta - 2\psi\zeta^T P \Theta - (r)^{-1}v(t)$$

Recuerde que se supuso que cada componente del vector $\varphi(\xi, u)$ es globalmente Lipschitz, uniformemente observable, esto es, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ existe una constante positiva k_i , independiente de (ξ, u) , tal que para toda ξ, z se cumple:

$$|\varphi_i(\xi_1 + z_1, \dots, \xi_i + z_i) - \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_i, u)| \leq k_i \left\| \begin{bmatrix} z_1 & \dots & z_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\|$$

En adición a esto, los componentes de $\psi\Theta(r)^{-1}[\varphi(\xi + \psi^{-1}\Theta(r)\zeta, u) - \varphi(\xi, u)]$ satisfacen:

$$\begin{aligned}\frac{\psi}{r^i} \left| \varphi \left(\xi_1 + \frac{r}{\zeta}, \dots, \xi_i + \frac{r^i}{\zeta_i}, u \right) - \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_i) \right| \leq \\ k_i \frac{\psi}{r^i} \left\| \psi^{-1}\Theta(r) \begin{bmatrix} \zeta_1 & \dots & \zeta_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \right\|\end{aligned}$$

Para $r > 1$, y con la norma Euclideana se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\psi}{r^i} \left\| \psi^{-1} \Theta(r) \begin{bmatrix} \zeta_1 & \cdots & \zeta_i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \right\| &= \frac{\psi}{r^i} \left\| \begin{bmatrix} r & & & & & \\ & \psi & & & & \\ & & r^i & & & \\ & & & \psi & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}^T \right\| \\
&= \frac{\psi}{r^i} \sqrt{\left(\frac{r}{\psi} \zeta_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{r^i}{\psi} \zeta_i\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\zeta_1}{r^{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{\zeta_2}{r^{i-2}}\right)^2 + \cdots + \zeta_i^2} \\
&\leq \sqrt{\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_i^2} = \left\| \begin{bmatrix} \zeta_1 & \cdots & \zeta_i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

Esto significa que:

$$\left\| \psi \Theta(r)^{-1} v(t) \right\| \leq k \|\zeta\|, \quad k = \max_{0 \leq i \leq n} \{k_i\}$$

Como consecuencia se obtiene:

$$\dot{V}(\zeta) = -r\zeta^T Q \zeta - 2\psi\zeta^T P \Theta_{(r)}^{-1} v(t) \leq -[r\lambda_{\min}(Q) - 2k\lambda_{\max}(P)] \|\zeta\|^2 \leq -(r\gamma - 2k)V(\zeta)$$

donde:

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$$

Usando el principio de comparación se obtiene:

$$V(\zeta) \leq e^{-\left(r - \frac{2k}{\gamma}\right)\gamma(t-t_0)} V(\zeta_0)$$

Lo que significa que escogiendo $r > r_0 = \frac{2k}{\gamma}$ garantiza estabilidad asintótica, lo cual siempre es posible ya que P , Q , y k son independiente de r , de aquí se sigue:

$$\lambda_{\min}(P) \|\zeta\|^2 \leq V(\zeta) \leq e^{-\gamma(r-r_0)(t-t_0)} \lambda_{\max}(P) \|\zeta_{t_0}\|^2$$

↓

$$\|\zeta\| \leq c_p e^{-\frac{\gamma}{2}(r-r_0)(t-t_0)} \|\zeta_{t_0}\|$$

donde $c_p = \frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}$.

Para la variable de error original $\zeta = \psi\Theta(r)^{-1}e$ se tiene:

$$\|e\| \leq c_p e^{-\frac{\gamma}{2}(r-r_0)(t-t_0)} r^{n-1} \|e_{t_0}\|$$

Como en el resultado anterior, esto implica que la velocidad de convergencia del error de observación se incrementa al incrementar la ganancia r , es más, los efectos de la perturbación del sistema $\varphi(\xi, u)$ son superados con una ganancia lo suficientemente grande ($r > r_0$). Finalmente, los límites del error inicial (cuando $t \rightarrow t_0$) también se incrementa con r , este es conocido como *Peaking Phenomenon!*.

3.2. Observador Adaptativo *Estático*

Se utiliza el término *estático* para resalta el hecho de que las ganancias del observador son constantes, ya que existen metodologías donde estas ganancias varían con el tiempo.

3.2.1. Caso lineal

Considere el sistema lineal (3.13).

$$\dot{x} = Ax + bu + p\delta, \quad y = cx \quad (3.13)$$

Donde $x, b, p \in \mathbb{R}^n$ son vectores columna, mientras que y, u, δ son una salida escalar, entrada escalar y un parámetro de perturbación constante. El par (A, c) es detectable y existe un vector columna de ganancias $l \in \mathbb{R}^n$ tales que:

$$A + lc$$

es Hurwitz.

Un observador adaptativo esta dado por la expresión siguiente,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= [A + lc]\hat{x} + lc x + bu + p\phi, & e &:= \hat{x} - x, \\ \dot{\phi} &= -ce. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como consecuencia, el error e tiene la dinámica (3.15)

$$\dot{e} = [A + lc]e + p\epsilon, \quad \epsilon = \phi - \delta \quad (3.15)$$

Pero recuerde que δ es constante, por lo que:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\phi}$$

Note que (3.15) tiene la forma de un sistema lineal, donde ϵ juega el papel de señal de control, también podemos suponer que existe una señal de salida $y_e = c_o e$, donde $c_o = [1 \ \cdots \ 0]$. El vector de ganancias l se puede elegir de tal forma que la matriz $[A + lc]$ sea Hurwitz, pero se requiere verificar que (3.15) sea asintóticamente estable. Para lo cual se propone la siguiente función definida positiva,

$$V_L = \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{2}e^T P e \quad (3.16)$$

Donde P es la solución de la ecuación de Lyapunov:

$$P[A + lc] + [A + lc]^T P = -Q, \quad P = P^T > 0 \quad \& \quad Q = Q^T > 0$$

Lo que significa que:

$$\frac{dV_L}{dt} = \left(\frac{1}{2}\right) e^T \left[[A + lc]^T P + P [A + lc] \right] e + e^T P p \epsilon + \dot{\epsilon} \epsilon$$

lo anterior implica que

$$\frac{dV_L}{dt} < [e^T P p + \dot{\epsilon}] \epsilon = [e^T P p + \delta] \epsilon = [e^T P p - c e] \epsilon, \quad \forall e \neq 0.$$

Si $Pp = c^T$, entonces la derivada respecto del tiempo de V_L sería definida negativa. En adición a esto, (3.16) sería una función de Lyapunov, por lo que usando el teorema de LaSalle, se podría mostrar que $\phi \rightarrow \delta$ con forme $t \rightarrow \infty$ de la siguiente manera: $\dot{\epsilon} = [A + lc]e|_{e=0} + p\epsilon = p\epsilon \Rightarrow \epsilon = 0 \Rightarrow \delta - \phi = 0 \Rightarrow \phi = \delta$. Como consecuencia, las ganancias l deben ser restringidas de tal forma que (3.17) se mantenga.

$$[A + lc]^T P + P[A + lc] = -Q, \quad Pp = C^T \quad (3.17)$$

Debido al hecho de que solamente P está restringida, es posible extender la búsqueda de l de la siguiente forma:

$$[A + lc]^T P + P[A + lc] < 0, \quad Pp = C^T \quad (3.18)$$

Esto es una variación del lema de Kalman *Kalman-Yakubovich-Popov*.

Teorema 1 (Kalman-Yakubovich-Popov) *Considere una matriz de función de transferencia $G(s) = c(sI - A)^{-1}b + D$ de dimensión $p \times p$, donde el par (A, B) es controlable y el par (A, c) es observable. Entonces $G(s)$ es estrictamente positiva real (SPR de sus siglas en inglés) si y solo si existen $P = P^T > 0$, L y W , y una constante positiva ξ tales que:*

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -L^T L - \xi P \\ Pb &= c^T - L^T W \\ W^T W &= D + D^T \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para ver su demostración consulte [18].

Regresando a (3.15), se puede apreciar que $D = 0$, por lo que $W = 0$. Es más, se puede suponer que existe una matriz $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} > L^T L + \xi P$ de forma tal que (3.19) se puede reescribir como (3.18).

Por otra parte, un sistema EPR debe satisfacer:

$$\operatorname{Re}\{c(j\omega I - A - lc)^{-1}b\} > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty) \quad (3.20)$$

R. Marino y P. Tommei en [23] proponen una forma de escoger l para un tipo específico de sistemas de tal forma que la condición (3.20) se mantiene. Esto se discutirá más adelante.

Debido al hecho de que $\phi(t)$ es un termino adaptable, (3.14) es un observador adaptable.

3.2.2. Caso No lineal

Consideraremos sistemas no lineales con una salida con un parámetro constante desconocido (3.21).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x, u) + \sum_{i=1}^p \theta_i q_i(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $h(0) = 0$, $g(x, 0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Nos restringiremos a sistemas que son transformables por

difeomorfismos δ -independientes en un sistema observable lineal con términos de inyección de salida dependientes de δ .

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_o z + \gamma(y, u) + p\beta^T(y, u, t)\theta \\ y &= c_o z\end{aligned}\tag{3.22}$$

con:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma(y, u) = \begin{bmatrix} \gamma_1(y, u) \\ \gamma_2(y, u) \\ \vdots \\ \gamma_n(y, u) \end{bmatrix},$$

$$c_o = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

Donde $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}$, γ es una función suave que mapea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p = [p_1, \dots, p_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es un vector con $p_1 > 0$ tal que el polinomio $b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n$ es Hurwitz, β es una función continua que mapea de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$. Para ver que condiciones son necesarias para transformar un sistema de (3.21) a (3.22), la cual es llamada forma *observador adaptable*, vea [23].

Dado un sistema de la forma observador adaptable (3.22), si $\beta(y, u, t)$ es uniformemente acotada para toda (y, u) acotada, entonces el sistema (3.23) es un observador adaptable global para (3.22), donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\delta} \in \mathbb{R}^P$, Γ es una matriz definida positiva y $l = [l_1, \dots, l_n]^T$ esta dado por (3.24) (ver [21]).

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= [A_o + lc_o]\hat{x} + \gamma(y, u) + p\beta^T(y, u, t)\phi - ly \\ \dot{\hat{\phi}} &= \Gamma\beta(y, u, t)(y - c_o\hat{x})\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$l = \frac{1}{p_1}(A_o p + \lambda p)\tag{3.24}$$

donde λ es un número arbitrario positivo real.

La ecuación de error es:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= [A_o + lc_o]e + p\beta^T(y, u, t)\epsilon, \quad \epsilon = \phi - \delta \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\Gamma\beta(y, u, t)c_o e\end{aligned}\tag{3.25}$$

Debido a la restricción sobre p y por virtud de (3.24) es posible escribir

$$p_1(s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n) = (s + \lambda)(p_1 s^n + \cdots + p_n)$$

lo que significa que

$$c_o(sI - A_o - lc_o)^{-1}b = \frac{p_1}{s + \lambda} \quad (3.26)$$

Esto por que hay $n - 1$ cancelaciones de polos y ceros. La matriz $[A_o + lc_o]$ es Hurwitz por que $\lambda > 0$ y por la suposición de que el polinomio $(p_1s^n + \dots + p_n)$ es Hurwitz. Es más, la tripleta $([A_o + lc_o], p, c_o)$ satisface (3.20) y como consecuencia, se puede aplicar (3.18). La demostración de esta proposición es una aplicación directa del teorema B.2.2 de [23, p. 366] con $\beta(y, u, t)$ considerada como γ y $\Gamma = \Lambda$.

3.3. Problemática

Hasta el momento tenemos que un observador de alta ganancia o HG (de sus siglas en ingles) nos permite atenuar los efectos de perturbaciones en los estados tales como las dinámicas no modeladas o los términos de alto orden de una linealización por series de Taylor, esto nos sugiere que podemos utilizar un observador HG con un termino de adaptación para lidiar con una perturbación constante, ya que podríamos aplicar una transformación al sistema de tal modo que obtengamos una forma *observador adaptable*, más una perturbación en los estados. De esta forma la alta ganancia lidiaría con la perturbación en los estados mientras que la parte adaptable lidiaría con la perturbación constante.

Considere el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, u, t) + p\beta^T(y, u, t)\delta \\ y &= cx, \quad c_o = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_q \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

Donde $f(x, u, t)$ depende de x de una forma triangular estricta o STF de sus siglas en ingles (Strictly Triangular Form).

Trataremos de unir los conceptos anteriormente mencionados. Primero suponga que p es tal que $p_1 > 0$, y $p_1s^{n-1} + \dots + p_{n-1}s + p_n$ es un polinomio Hurwitz, lo

cual es bastante restrictivo para el caso de los sistemas de tratamiento de agua. En este caso, usando el enfoque de Marino-Tomei, se tiene que existe $Q = Q^T > 0$ y $P = P^T > 0$ tales que escogiendo ganancias

$$l = \frac{1}{p_1}(Ap + \lambda p)$$

donde λ es un número arbitrario positivo real, se cumple

$$[A + lc]^T P + P[A + lc] = -Q < 0, \quad Pp = c^T$$

El problema crucial es como usar esta propiedad en conjunto con HG, donde se usan ganancias $\Theta(r)$ con $r > 0$ grande. Recuerde que $\Theta(r) = \text{diag}\{r, r^2, \dots, r^n\}$. Se utilizara la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \Theta(r) &= \text{diag}\{1, r^1, \dots, r^{n-1}\} & A(r) &= [A + r\Theta(r)lc] \\ P(r) &= \Theta(r)^{-1}P\Theta(r)^{-1} & \Theta(r)^{-1}A(r)\Theta(r) &= r[A + lc] \end{aligned}$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} A(r)^T P(r) + P(r)A(r) &= A(r)^T \Theta(r)^{-1}P\Theta(r)^{-1} + \Theta(r)^{-1}P\Theta(r)^{-1}A(r) = \\ &= \Theta(r)^{-1}[\Theta(r)A(r)\Theta(r)^{-1}P + P\Theta(r)^{-1}A(r)\Theta(r)]\Theta(r)^{-1} = \\ &= \Theta(r)^{-1}[r[A + lc]^T P + Pr[A + lc]]\Theta(r)^{-1} = -r\Theta(r)^{-1}Q\Theta(r)^{-1} \end{aligned}$$

Esto atenuaría la influencia de los terminos STF, pero la parte adaptable requiere que la matriz $P(r)$ satisfaga:

$$P(r)p = c^T \Leftrightarrow P\Theta(r)^{-1}p = \Theta(r)c^T$$

Como $c = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ se puede ver que $\Theta(r)c^T = c^T$ por lo que se necesitaría que:

$$P\Theta(r)^{-1}p = \Theta(r)c^T \Leftrightarrow P [p_1 \ r^{-1}p_2 \ \dots \ r^{1-n}p_n]^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

Pero recuerde que inicialmente se había escogido P de forma tal que se cumpliera $Pp = c^T$, lo cual puede ser fácilmente contradictorio.

Se puede tratar de resolver esto de la siguiente manera. Note que $p_1 > 0$ y $p_1s^{n-1} + \dots + p_{n-1}s + p_n$ es un polinomio Hurwitz si y solo si $p_1 > 0$ y $p_1s^{n-1} + p_2rs^{n-2} + \dots + p_{n-1}r^{n-2}s + p_nr^{n-1}$ es un polinomio Hurwitz para toda $r > 0$. De hecho se cumple que

$$p_1s^{n-1} + p_2r^{-1}s^{n-2} + \dots + p_{n-1}r^{2-n}s + p_nr^{n-1} = [p_1(sr)^{n-1} + p_2(rs)^{n-2} + \dots + p_{n-1}(rs) + p_n]r^{1-n}$$

Por lo que las raíces del segundo polinomio son las mismas que del primero pero multiplicadas por $r > 0$. Ahora considere que escogemos ganancias de la siguiente manera:

$$l^r = \frac{1}{p_1} (A\Theta(r)^{-1}p + r^{-1}\lambda\Theta(r)^{-1}p)$$

Donde λ es cualquier numero positivo real. Entonces existen matrices simétricas definidas positivas P_r y Q_r tales que:

$$[A + l^r c]^T P_r + P_r [A + l^r c] = -Q_r < 0$$

$$P_r \Theta(r)^{-1} p = c^T \Leftrightarrow P_r [p_1 \quad r^{-1}p_2 \quad \dots \quad r^{1-n}p_n]^T = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

Con dicha selección se cumple:

$$\begin{aligned} p_1(s^n + l_1^r s^{n-1} + \dots + l_n^r) &= (s + r^{-1}\lambda)(p_1s^{n-1} + p_2r^{-1}s^{n-2} + \dots + p_nr^{1-n}) \\ &= ((sr) + \lambda)(p_1(rs)^{n-1} + p_2(rs)^{n-2} + \dots + p_n)r^{-n} \end{aligned}$$

Esto significa que:

$$l_1^r = l_1r^{-1}, \quad l_2^r = l_2r^{-2}, \dots, l_n^r = l_nr^{-n} \tag{3.28}$$

$$p_1(s^n + l_1s^{n-1} + \dots + l_n) = (s + \delta)(p_1s^{n-1} + \dots + p_n)$$

Esto demuestra que podemos asignar ganancias l^r para cualquier $r > 0$ y la condición SPR se conserva, pero estas ganancias se vuelven pequeñas con r grande, lo que contrarresta el uso de HG por lo que regresamos a ganancias normales l_1, \dots, l_n . En otras palabras, *no es posible combinar de forma directa alta ganancia con un observador estático adaptable*, [8].

3.4. Precedentes del uso de LMI en Observadores

Varios fundamentos de teoría de control se pueden expresar como una desigualdad matricial lineal (ver [3]), Para el caso de observadores también se han desarrollado trabajos donde se requiere que una LMI tenga solución para garantizar que la dinámica de los errores converja a cero, el ejemplo más fácil de visualizar es la ecuación de Lyapunov.

Estos procedimientos se han extendido para diversas problemáticas, por ejemplo, en [16] se diseñó un observador robusto para controlar un motor de inducción sin sensores basado en una ecuación diferencial linealizada y una LMI. La ecuación dinámica del motor está formulada en una forma muy especial de clases de sistemas no lineales que son lineales en *feed forward* y no lineales en *feedback*. Las condiciones de estabilidad y las ganancias del observador se obtienen resolviendo la LMI correspondiente. En [32] se usa un observador adaptativo que se basa en la metodología para la detección de fallas y se implementa en el control de posición de un satélite. En [29] se propone una técnica de LMI para diseñar un observador para sistemas no lineales Lipschitz. El diseño ofrece mayor número de grados de libertad en comparación de la estructura clásica de ganancias estáticas. Otro observador diseñado en base a LMI's para una clase de sistemas dinámicos no lineales Lipschitz se puede encontrar en [34]. Donde el teorema de valor medio para derivadas permite que los errores no lineales de la dinámica sean transformados a un sistema lineal de parámetros variables. Los autores introducen una condición general tipo Lipschitz en la matriz Jacobiana para el sistema diferenciable. Para asegurar convergencia asintótica del error entre los estados reales y estimados, se expresan condiciones suficientes en forma de LMI's. Sin embargo, para valores grandes de la constante de Lipschitz, las condiciones de estabilidad se pueden volver inviables.

En cuanto a sistemas con perturbaciones podemos encontrar diversos trabajos, por ejemplo en [28] se consideran perturbaciones tanto en los parámetros para cierto tipo de sistemas así como perturbación en las ganancias, como resultado se llega que si es posible resolver una LMI, entonces la dinámica del error es asintóticamente estable. Por otra parte, tenemos a [19] donde se proponen sistemas lineales con una matriz de perturbación variante en el tiempo que afecta a los estados y un vector que también es variante en el tiempo pero que afecta a la salida, al igual que en el artículo anterior se requiere resolver una LMI para encontrar las ganancias del observador y del control. Otro trabajo donde se tratan sistemas lineales de este tipo es [33] donde se utiliza un observador para un sistema con entrada desconocida con el

objetivo de detectar fallas, en este trabajo se consideran perturbaciones externas así como internas. Siguiendo con esta clase de observadores (de entrada desconocida), tenemos a [22] que comienza con el caso lineal donde consideran perturbaciones e incertidumbres y posteriormente se extienden a sistemas no lineales donde su función no lineal satisface la condición de Lipschitz, finalmente se muestran resultados experimentales aplicando el observador desarrollado a un eslabón de un brazo robótico. En cuanto a aplicaciones tenemos a [20] donde se desarrolla un observador para estimar perfiles de altas temperaturas presentes en los componentes de vehículos espaciales, el modelo es cuasi lineal y aunque en realidad es un sistema de parámetros distribuidos se considera un número finito de estados correspondientes a un número de puntos finitos donde interesa conocer la temperatura, nuevamente se recurre a la suposición de que existe solución de una LMI para demostrar convergencia.

Como se pudo apreciar, el uso de LMI es ampliamente usado, sobre todo en conjunto con una función de Lyapunov ya que ayuda a expresar condiciones de convergencia, pero recuerde que cualquier condición obtenida de esta forma se vuelve solamente suficiente ya que el no encontrar solución de la LMI no significa que no exista.

Capítulo 4

Enfoque usando LMI

En este capítulo se presenta la contribución principal de este trabajo. La motivación es encontrar una extensión adecuada de observadores adaptables para el caso de sistemas no lineales donde la ganancia de la ley de adaptación sea constante. Como se mencionó anteriormente este problema ya ha sido abordado en la literatura, sin embargo las soluciones encontradas son parciales en el sentido que requieren condiciones que son difíciles de satisfacer como en el caso de Marino y Tomei. A continuación se presenta un resultado que permite diseñar observadores adaptables para una clase de sistemas no lineales de manera que se puede emplear un enfoque de LMI's.

4.1. Observador

La idea principal esta motivada por el hecho de que dada la naturaleza no lineal del ritmo de crecimiento de cultivos de un microorganismo, nos permite pensar acerca de un cambio de variables de tal manera que la perturbación en la entrada afecte de forma constante. Supongamos que el sistema (4.1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.1}$$

se puede transformar a la forma de (4.2), entonces tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2 *Sea un sistema no lineal dinámico como en (4.2).*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + (u + \delta)p \\ y &= cx\end{aligned}\tag{4.2}$$

Se dice que (4.3) es un observador estático de (4.2) si la LMI presentada en (4.4) tiene solución.

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f(\bar{z}) + (u + \phi)p + lc(z - x) \\ \dot{\phi} &= -c(z - x)\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\bar{z}_i &= \begin{cases} x_i & \text{si esta disponible} \\ z_i & \text{en otro caso} \end{cases} \\ [A + lc]^T P + P[A + lc] &< -2Pk - Q < 0 \\ Pp = C^T, \quad P = P^T > 0, \quad Q = Q^T > 0\end{aligned}\tag{4.4}$$

Donde A es una linealización parcial por medio de series de Tylor de $f(x)$ y k es una constante de Lipschitz para el caso especial de $\|f(z) - f(x) + Ax - Az\| \leq k\|z - x\|$.

Demostración 1 Primero note que el sistema (4.2) es equivalente a:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + (u + \delta)p + f(x) - Ax \\ y &= cx\end{aligned}$$

Recuerde que si $f(x)$ es Lipschitz se debe cumplir $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k_1\|x_1 - x_2\|$ en especial $\|f(z) - f(x)\| \leq k_1\|z - x\|$, por otra parte, Ax también es Lipschitz por lo que se debe cumplir el caso particular $\|Ax - Az\| \leq k_2\|z - x\|$. Por lo que la suma de $f(x) + Ax$ cumple $\|f(z) - f(x) + Ax - Az\| \leq k\|z - x\|$ donde $k = k_1 + k_2$. Como Ax es una aproximación de $f(x)$, entonces $f(z) - f(x) + Ax - Az \approx 0$, esto nos permite utilizar una k pequeña.

La dinámica del error esta dada por:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= [A + lc]e + f(\bar{z}) - f(x) + Ax - Az + \epsilon p, \quad e = z - x \\ \epsilon &= \delta - \phi \Rightarrow \dot{\epsilon} = -ce\end{aligned}\tag{4.5}$$

Se puede ver que (4.5) es asintóticamente estable usando la función de Lyapunov descrita en (4.6).

$$V_L = \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{2}e^T P e\tag{4.6}$$

Su derivada respecto al tiempo es:

$$\frac{dV_L}{dt} = e^T P [A + lc] e + e^T P [\mathcal{O}(z) - \mathcal{O}(x)] + e^T P p \epsilon + \dot{\epsilon} \epsilon$$

Donde $\mathcal{O}(x) = f(x) - Ax$.

De aquí se deduce:

$$\begin{aligned} \frac{dV_L}{dt} &= \frac{1}{2} e^T [[A + lc]^T P + P[A + lc]] e + e^T P [\mathcal{O}(z) - \mathcal{O}(x)] + [e^T P p + \dot{\epsilon}] \epsilon \\ &\quad \Downarrow \\ \frac{dV_L}{dt} &< \frac{1}{2} e^T [[A + lc]^T P + P[A + lc]] e + e^T P k e + [e^T P p + \dot{\phi}] \epsilon \\ &\quad \Downarrow \\ \frac{dV_L}{dt} &< \frac{1}{2} e^T [[A + lc]^T P + P[A + lc] + 2kP] e + [e^T P p + c\epsilon] \epsilon \\ &\quad \Downarrow \\ \frac{dV_L}{dt} &< -\frac{1}{2} e^T Q e + [e^T c^T - c\epsilon] \epsilon \\ &\quad \Downarrow \\ \frac{dV_L}{dt} &< [c\epsilon - c\epsilon] \epsilon = 0, \quad \forall e \neq 0 \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $e \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Para demostrar que también ϵ converge a cero se usa el teorema de LaSalle. Primero considere la variable aumentada $[e, \epsilon]^T$ vemos que tenemos que probar que por el principio de LaSalle que el conjunto $[0, \epsilon]^T$ es invariante. La dinámica de este conjunto es:

$$\dot{\epsilon} = p\epsilon; \quad \epsilon = 0$$

Por lo que para cualquier $\epsilon \neq 0$ la condición $e = 0$ deja de cumplirse, por lo que el conjunto $[0, \epsilon]^T$ es invariante. Es más, $\phi \rightarrow \delta$ conforme $t \rightarrow \infty$, por lo que (4.3) es llamado observador adaptativo con un parámetro de identificación desconocido.

Podemos notar que el resultado anterior es valido para una clase relativamente restringida de sistemas no lineales. Sin embargo, para los modelos de biorreactores es adecuado por las propiedades invocadas en 2.5.1. De hecho, el cálculo de las ganancias de inyección de salida en el observador se puede ver como un paso intermedio de diseño ya que, como se vera más adelante, es posible regresar al sistema en las variables originales. En este sentido, se puede decir que se esta proponiendo una metodología novedosa de diseño para sistemas no lineales del tipo 4.1.

4.2. Cambio de variable

En esta sección se considera el caso de los sistemas no lineales afines en la entrada, ya que la dinámica de un biorreactor generalmente corresponde a esta descripción que debe ser considerada para propósitos del diseño de observadores. La idea de base es suponer que existe un cambio de variables adecuado tal que el sistema propuesto pueda ser llevado a la forma particular de sistemas dada en (4.2).

Sea un sistema no lineal como en (4.7)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= cx \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donde $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$ y cumple:

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_2) \\ \vdots \\ g_n(x_n) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Es posible definir un cambio de variable de la siguiente manera:

$$\dot{z}_i = \frac{\dot{x}_i}{g_i(x_i)}$$

Siempre y cuando exista la integral de \dot{z}_i y que esta sea un isomorfismo $\varphi(\cdot)$ en una región de \mathbb{R} . En este caso, utilizamos el término integral en el sentido de que al derivar z_i obtenemos $\frac{\dot{x}_i}{g_i(x_i)}$.

En general la condición anterior puede ser bastante restrictiva para sistemas no lineales, sin embargo, para los modelos de bioprocesos no lo es tanto. La mayor parte del tiempo las variables de un bioproceso (por ejemplo un biorreactor) se mantienen positivas, si bien es cierto que se puede obtener un equilibrio con todas las variables en cero, este en general se evita ya que deja de tener utilidad. Esto hace que normalmente $g_i(x_i)$ se conserve en la misma región sin cruzar por el cero.

Recuerde que utilizamos la matriz A como la linealización parcial de $f(x)$ para poder utilizar una k pequeña, con el cambio de variables propuesto, es probable que se requiera de una matriz diferente, esto debido a que la propiedad de observabilidad del par (A, c) se puede perder. Note que para el caso $n = 2$ y $c = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \end{bmatrix}$ esto

no sucede, primero por que el observador propuesto utiliza el estado x_1 ya que su lectura esta disponible por lo que la matriz A consta de ceros en la primera columna. Por otra parte, si la matriz A del sistema original era observable, entonces la primera fila tenia dependencia de x_2 , al realizar el despeje de esta fila no es posible la cancelación de dicho termino ya que $g_1(x_1)$ solo depende de x_1 , por lo que la matriz de observabilidad sigue siendo de la forma:

$$O = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & 0 \\ 0 & c_1 \bar{a}_{12} \end{bmatrix}$$

Donde \bar{a}_{22} es el elemento 22 de la matriz \bar{A} obtenida de linealizar parcialmente el sistema transformado, mientras que \bar{c}_1 es $\varphi(c_1)$, esto por que la salida del sistema original era $y = cx$ que después de cambio de variable es $y = c\varphi(z)^{-1}$, si definimos una nueva salida como $\bar{y} = \varphi(y)$ tenemos que $\bar{y} = \varphi(c)\varphi(\varphi(z)^{-1}) = \bar{c}z$.

Note que pedimos que $g(x)$ fuera como en (4.8), pero cada fila de $g(x)$ pudiera tener dependencia de una x diferente a su fila, el problema es que pudiera no existir solución analítica para el sistema de ecuaciones obtenido.

4.3. Comentarios

Primero es necesario mencionar que la ecuación (4.4) es un caso particular del lemma de Meyer-Kalman-Yacubovich [23, p. 362], que establece que cualquier sistema estricto positivo real satisface dicha igualdad, con la diferencia de que $2kP = qq^t$ donde q es un vector real. Aquí lo utilizamos como una desigualdad ya que nos interesa que existan P , l , Q y k que satisfagan esto a lo largo del comportamiento de la planta. La idea es verificar que las ganancias son adecuadas para todos los puntos donde se podría linealizar la planta. En segundo lugar hay que notar que la debilidad de utilizar LMI's es que solo se pueden resolver de forma numérica, es decir, si no se encuentra solución no significa que no exista, esto hace que sea una condición suficiente más no necesaria. Finalmente cabe mencionar que otra forma de mostrar estabilidad de (4.5) es por medio del rediseño de Lyapunov. Utilizando este método se puede llegar a que la ley de control necesaria para estabilizar la parte no lineal de (4.5) es una constante (esto por que la planta esta acotada), cosa que cubrirá la parte adaptable de (4.3).

Capítulo 5

Diseño del Observador

5.1. Transformando un modelo de tratamiento de agua

Uno de los principales objetivos y resultados de este trabajo es el estudio y la estimación de los estados del modelo de planta de tratamiento de aguas residuales sin conocer de manera exacta el valor constante del factor de dilución de la entrada de sustrato. Después se consideraran algunos factores de dilución variable en el tiempo del sustrato de entrada como un control activo. Por lo tanto, la perturbación desconocida constante entra en el sistema a través del mismo canal que la entrada controlada y conocida.

Más específicamente, un sistema de aguas residuales consisten en un biorreactor donde se producen reacciones químicas y bioquímicas entre organismos vivos y sustancias. El proceso puede ser anaeróbico o aeróbico y un gran número de procesos biotecnológicos están formados por tales sistemas. Una forma de modelar un proceso biológico no estructurado es por balance de masa, donde la regla para la tasa de crecimiento juega un papel fundamental, [13]. Entre varias formulaciones posibles la llamada fórmula de Monod es una de las más populares debido a su simplicidad y coherencia con la saturación de crecimiento debido a la disponibilidad de sustrato.

Para ser más precisos, vamos a denotar la biomasa x y el sustrato s . Luego el balance de masa en un cultivo continuo se describe típicamente por el siguiente modelo:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x\mu(s) - x(u + \delta) \\ \dot{s} &= -a_3^{-1}x\mu(s) + (a_4 - s)(u + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

aquí, la razón de crecimiento de Monod esta dado por:

$$\mu(s) = \frac{a_1 s}{a_2 + s} \quad (5.2)$$

Donde el parámetro a_1 es la tasa de crecimiento máximo, a_2 representa la constante de saturación de Monod, a_3 es el coeficiente de rendimiento y finalmente a_4 es la concentración del sustrato de entrada. La entrada de control es considerada como la razón de dilución $u(t)$ que alimenta al biorreactor y el canal de entrada está afectado por el factor de dilución desconocido constante $\delta > 0$.

En lo que sigue se supondrá que $s < a_4$. Podemos observar que dicha condición es invariante, partiendo de dicha condición no se puede cruzar el valor $s = a_4$. Por otro lado, si comenzamos con $s > a_4$, después de cierto tiempo se llegara a $s < a_4$, a menos que $x \equiv 0$. Es claro que $x = 0$ se debe de evitar ya que esta condición no puede ser modificada de ninguna manera. Resumiendo, es razonable restringir sus valores al conjunto $x > 0$ y $0 \leq s < a_4$.

Para verificar que este modelo es valido, se debe cumplir las dos propiedades descritas en la sección 2.5.1, la segunda no hace falta demostrarla ya que no se considera ningún producto que requiera de la biomasa o el sustrato para su formación, mientras que para la primera establecemos el siguiente teorema.

Teorema 3 (Invariancia y Cerradura) *Considere el sistema en (5.1), las siguientes propiedades se cumplen:*

- (I) *El cuadrante positivo $\mathcal{O}^+ := \{x > 0, s > 0\}$ es invariante en el tiempo con respecto al sistema (5.1) para cualquier señal de entrada integrable $u(t)$ y perturbación constante δ .*
- (II) *Toda solución del sistema (5.1) que inicia en el cuadrante positivo \mathcal{O}^+ es acotada para cualquier señal de entrada integrable $u(t)$ y perturbación δ .*

Demostración 2 *Para probar (I) es suficiente verificar el lado derecho de la cota del cuadrante positivo. Note que $x = 0$ es invariante debido a la primera ecuación. Por otra parte, en el conjunto $s = 0$ se tiene $\dot{s} \geq 0$. Para probar (II), se introducen las nuevas coordenadas:*

$$\tilde{x} = x + a_3s - a_3a_4, \quad \tilde{s} = s$$

Entonces la ecuación se transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= -(u + \delta)\tilde{x} \\ \dot{\tilde{s}} &= -a_3^{-1}(\tilde{x} - a_3\tilde{s} + a_3a_4)\mu(\tilde{s}) + (a_4 - \tilde{s})(u + \delta) \end{aligned}$$

Ahora considere la función $V = \frac{1}{2}\tilde{x}^2$, entonces $\dot{V} = -(u + \delta)\tilde{x}^2$. Esto significa que cualquier trayectoria que inicie en el punto \tilde{x}_0, \tilde{s}_0 en $t = 0$ se mantiene para $t \geq 0$ dentro del conjunto donde $|\tilde{x}| \leq \tilde{x}_0$ para cualquier señal de control integrable y perturbación constante. Este último conjunto en coordenadas originales es la franja formada por dos líneas paralelas con la línea $x + sa_3 = 0$. Note que la intersección de cualquier franja de esta clase y el cuadrante positivo está obviamente acotado para cualquier $a_3 > 0$, por lo que la cerradura de la trayectoria se sigue de (I).

Teniendo presente las propiedades establecidas en el teorema anterior, es posible proponer un cambio de variables x_1 y x_2 definidas como:

$$x_1 = \log(x), \quad x_2 = \log(a_4 - s)$$

De aquí se deduce:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\dot{x}}{x} & \dot{x}_2 &= \frac{-\dot{s}}{a_4 - s} \\ x &= \exp(x_1) & s &= a_4 - \exp(x_2) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &= \frac{a_1s}{a_2 + s} - (u + \delta) \\ \frac{-\dot{s}}{a_4 - s} &= \frac{x}{a_3(a_4 - s)} \cdot \frac{a_1s}{a_2 + s} - (u + \delta) \end{aligned}$$

sustituyendo x y s podemos reescribir (5.1) como en (5.3)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{a_1 a_4 - a_1 \exp(x_2)}{a_2 + a_4 - \exp(x_2)} - (u + \delta) \\ \dot{x}_2 &= \frac{\exp(x_1)}{a_3 \exp(x_2)} \frac{a_1 a_4 - a_1 \exp(x_2)}{a_2 + a_4 - \exp(x_2)} - (u + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Se puede apreciar que (5.3) no esta en la forma observador adaptable (3.22). Es más, se observa que $p = [-1 \ -1]^T$, por lo que no se cumple $p_1 > 0$. Como consecuencia, no es posible usar el enfoque de Marino-Tomei [23]. Esto se hizo intencionalmente ya que podíamos satisfacer las condiciones de Marino-Tomei con las variables $x_1 = -\log(x)$, $x_2 = -\log(a_4 - s)$ las cuales fueron obtenidas con el método de la sección 4.2.

5.2. Cálculo de Ganancias

Primero, note que (5.3) se puede expresar de una forma más simplificada:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ f_1(x_2)f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} + (u + \delta) \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

donde:

$$f_1(x_2) = \frac{a_1 a_4 - a_1 \exp(x_2)}{a_2 + a_4 - \exp(x_2)}, \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{\exp(x_1)}{a_3 \exp(x_2)}$$

Ahora considere el observador estático:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z_2) \\ f_1(z_2)f_2(x_1, z_2) \end{bmatrix} + (u + \phi) \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} (z_1 - x_1) \quad (5.5)$$

$$\dot{\phi} = \beta(z)ce$$

Como se menciona anteriormente tenemos que encontrar ganancias tales que la propiedad EPR se mantenga a lo largo del trabajo de la planta. También se demostró que sus estados están acotados en una región lo que significa que la dinámica del error también esta acotada, ver teorema 3. Primero, debemos definir el error, $e = z - x$, así como la dinámica del error de observación, es decir $\dot{e} = \dot{z} - \dot{x}$. Sustituyendo (4.2) y (3.23) obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= f(\bar{z}) + (u + \phi)p + lc(z - x) - f(x) - (u + \delta)p - Az + Ax \\ &\Downarrow \\ \dot{e} &= A\bar{z} - Ax + [f(\bar{z}) - A\bar{z} - f(x) + Ax] + (\phi - \delta)p + lce\end{aligned}$$

Donde A es una linealización parcial por series de Taylor.

Agrupando términos semejantes llegamos a:

$$\dot{e} = [A + lc]e + (\phi - \delta)p + \mathcal{O}(e)$$

Note que A esta formada de las derivadas parciales de $f(x)$ y $\mathcal{O}(\cdot)$ corresponde a $[f(\bar{z}) - A\bar{z} - f(x) + Ax]$. La matriz A tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} \\ 0 & f_{22} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}f_{12} &= \frac{\partial f_1(x_2)}{\partial x_2} \\ f_{22} &= \frac{\partial f_1(x_2)f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}\end{aligned}$$

Esto nos ayudara a encontrar cotas de los elementos de A . Para ello desarrollamos f_{12} y f_{22} .

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1(x_2)}{\partial x_2} &= \frac{-a_1 \exp(x_2)(a_2 + a_4 - \exp(x_2)) - (-\exp(x_2))(a_1 a_4 - a_1 \exp(x_2))}{(a_2 + a_4 - \exp(x_2))^2} \\ &\Downarrow \\ &= \frac{-a_1 \exp(x_2)(a_2 + a_4 - \exp(x_2) - a_4 - \exp(x_2))}{(a_2 + a_4 - \exp(x_2))^2} \\ &\Downarrow \\ &= \frac{-a_1 a_2 \exp(x_2)}{(a_2 + a_4 - \exp(x_2))^2}\end{aligned}$$

Recuerde que $x_2 = \ln(a_4 - s)$ por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1(\ln(a_4 - s))}{\partial \ln(a_4 - s)} &= \frac{-a_1 a_2 (a_4 - s)}{(a_2 + a_4 - a_4 + s)^2} \\ &\Downarrow \\ &= \frac{-a_1 a_2 (a_4 - s)}{(a_2 + s)^2}\end{aligned} \tag{5.6}$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= \frac{0 - a_3 \exp(x_2)(\exp(x_1))}{(a_3 \exp(x_2))^2} \\ &\Downarrow \\ &= \frac{-\exp(x_1)}{a_3 \exp(x_2)} \end{aligned}$$

Como $x_1 = \ln(x)$ y $x_2 = \ln(a_4 - s)$ deducimos que

$$\frac{\partial f_2(\ln(x), \ln(a_4 - s))}{\partial \ln(a_4 - s)} = \frac{-x}{a_3 \exp(a_4 - s)}$$

Con esto en mente tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1(\ln(a_4 - s)) f_2(\ln(x), \ln(a_4 - s))}{\partial \ln(a_4 - s)} = \\ &\frac{\partial f_1(\ln(a_4 - s))}{\partial \ln(a_4 - s)} * f_2(\ln(x), \ln(a_4 - s)) + \frac{\partial f_2(\ln(x), \ln(a_4 - s))}{\partial \ln(a_4 - s)} f_1(\ln(a_4 - s)) \\ &= \frac{-a_1 a_2 (a_4 - s)}{(a_2 + s)^2} \frac{x}{a_3 (a_4 - s)} + \frac{-x}{a_3 (a_4 - s)} \frac{a_1 s}{a_2 + s} \\ &= \frac{-a_1 x}{a_3 (a_4 - s)} \left(\frac{s}{a_2 + s} + \frac{a_2 (a_4 - s)}{(a_2 + s)^2} \right) \\ &= \frac{-a_1 x}{a_3 (a_4 - s)} \left(\frac{s(a_2 + s) + a_2 (a_4 - s)}{(a_2 + s)^2} \right) \\ &= \frac{-a_1 x}{a_3 (a_4 - s)} \left(\frac{a_2 s + s^2 + a_2 a_4 - a_2 s}{(a_2 + s)^2} \right) \\ &= \frac{-a_1 x}{a_3 (a_4 - s)} \left(\frac{a_2 a_4 + s^2}{(a_2 + s)^2} \right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ahora se requiere obtener cotas de (5.6) y (5.7). Primero observe que (5.6) depende de s quien puede tomar un valor máximo de a_4 y uno mínimo de 0, pero recuerde que el primer valor lo tenemos que evitar, ya que (5.7) entraría en singularidad, por un lado tenemos.

$$\lim_{s \rightarrow 0} f_{12} = \frac{-a_1 a_2 (a_4 - 0)}{(a_2 + 0)^2} = \frac{-a_1 a_2 a_4}{a_2^2} = \frac{-a_1 a_4}{a_2}$$

Suponga ahora que $s \leq a_4 - \alpha$ para alguna $\alpha > 0$. Esta es una suposición natural ya que s debe de estar por lo menos un pequeño margen α alejado del valor singular a_4 . Por esto tenemos que evaluar el limite de f_{12} cuando $s \rightarrow a_4 - \alpha$, esto es:

$$\lim_{s \rightarrow a_4 - \alpha} f_{12} = \frac{-a_1 a_2 (a_4 - a_4 + \alpha)}{(a_2 + a_4 - \alpha)^2} = \frac{-a_1 a_2 \alpha}{(a_2 + a_4 - \alpha)^2}$$

Los dos limites obtenidos son negativos, pero hay que encontrar cual corresponde a una cota inferior y cual a una superior, para esto hay que tener en mente que $0 < s < a_4 - \alpha \Rightarrow \alpha < a_4 \Rightarrow -a_4 < -\alpha$, de aquí se obtiene:

$$\frac{-a_1 a_4}{a_2} = \frac{-a_1 a_2 a_4}{a_2^2} < \frac{-a_1 a_2 a_4}{(a_2 + a_4 - \alpha)^2} < \frac{-a_1 a_2 \alpha}{(a_2 + a_4 - \alpha)^2}$$

Con esto podemos determinar que f_{12} se encuentra contenida de la siguiente manera:

$$-\frac{a_1 a_4}{a_2} < f_{12} < -\frac{a_1 a_2 \alpha}{(a_2 + a_4 - \alpha)^2}$$

Continuaremos con los limites de (5.7), quien también depende de x , esta variable tiene un valor mínimo de cero, que debe evitarse ya que no hay manera de cambiarlo una ves alcanzado pero no causa singularidades, y uno máximo que es intrínseco de la planta. También observe que que si $x \rightarrow 0$ también $f_{22} \rightarrow 0$ independientemente de que valor tome s , cuando $x \rightarrow \max\{x\}$ se obtiene.

$$\lim_{x \rightarrow \max\{x\}} f_{22} = \frac{-a_1 \max\{x\}}{a_3 (a_4 - s)} \left(\frac{a_2 a_4 + s^2}{(a_2 + s)^2} \right)$$

De aquí se tienen dos casos, cuando $s \rightarrow 0$ y cuando $s \rightarrow a_4 - \alpha$, del primero se tiene

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \max\{x\} \\ s \rightarrow 0}} f_{22} = \frac{-a_1 \max\{x\}}{a_3 a_4} \left(\frac{a_2 a_4}{a_2^2} \right) = \frac{-a_1 \max\{x\}}{a_2 a_3}$$

Mientras que del segundo se tiene

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \max\{x\} \\ s \rightarrow a_4 - \alpha}} f_{22} = \frac{-a_1 \max\{x\}}{a_3 \alpha} \left(\frac{a_2 a_4 + (a_4 - \alpha)^2}{(a_2 + a_4 - \alpha)^2} \right) > \frac{-a_1 a_4 \max\{x\}}{a_3 \alpha} \left(\frac{a_2 + a_4}{a_2^2} \right)$$

Al igual que en el caso anterior, tenemos dos límites negativos pero en este caso también tenemos uno superior bien definido, que es el cero, aun así es imperioso saber cual es más negativo, para ello se hace lo siguiente

$$\frac{-a_1 a_4 \max\{x\}}{a_3 \alpha} \left(\frac{a_2 + a_4}{a_2^2} \right) < -\frac{a_1 a_4 \max\{x\} (a_2 + a_4)}{a_3 a_4 a_2^2} < \frac{a_1 a_2 \max\{x\}}{a_3 a_2^2} = \frac{a_1 \max\{x\}}{a_2 a_3}$$

Por lo tanto, f_{22} esta delimitado de la siguiente forma

$$\frac{-a_1 a_4 \max\{x\}}{a_3 \alpha} \left(\frac{a_2 + a_4}{a_2^2} \right) < f_{22} < 0$$

La dinámica del error de la parte lineal esta dada por (5.8).

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} c_1 l_1 & f_1(t) \\ c_1 l_2 & f_2(x_1, t) \end{bmatrix} e + \epsilon \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\epsilon = \delta - \phi \Rightarrow \dot{\epsilon} = \beta(z) c e, \quad c = [1 \ 0]$$

Usando toda la teoría previa se sabe que una condición suficiente para tener un observador adaptativo es resolver la siguiente LMI:

$$\begin{bmatrix} c_1 l_1 & f_{12} \\ c_1 l_2 & f_{22} \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} c_1 l_1 & f_{12} \\ c_1 l_2 & f_{22} \end{bmatrix} < -2Pk - Q < 0 \quad (5.9)$$

restringida a

$$f_{12} \in \left\{ -\frac{a_1 a_4}{a_2}, -\frac{\alpha a_1 a_2}{(a_2 + a_4 - \alpha)^2} \right\}, \quad f_{22} \in \left\{ \frac{-a_1 a_4 \max\{x\}}{a_3 \alpha} \left(\frac{a_2 + a_4}{a_2^2} \right), 0 \right\}$$

$$P \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = c^T$$

$$P = P^T, \quad P > 0$$

5.3. Restricciones sobre la matriz P

Como se menciono anteriormente, $Pp = c^T$ se puede ver como una restricción sobre P . Note que para usar el metodo de Marino Tomei era necesario que $c =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, pero usando una LMI esta restriccion se puede relajar a $c = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \end{bmatrix}$, donde $c_1 \neq 0 \in \mathbb{R}$. Esto ayuda a extender la zona de búsqueda de (5.9), pero primero veamos la forma de P .

$$P \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

De aquí se obtienen la dos siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} -P_1 - P_2 &= c_1 \\ -P_2 - P_3 &= 0 \end{aligned}$$

De aquí se puede encontrar P_1 y P_3 en relación a P_2

$$\begin{aligned} P_1 &= -P_2 - c_1 \\ P_3 &= -P_2 \end{aligned}$$

Por lo que P tiene la siguiente forma

$$P = \begin{bmatrix} -P_2 - c_1 & P_2 \\ P_2 & -P_2 \end{bmatrix}$$

A primera vista se nota que P_2 tiene que ser negativa para que P sea definida positiva, también $-P_2 - c_1 > 0 \Rightarrow -P_2 > c_1$ lo cual parece posible, de acuerdo al criterio de Silvester, la determinante de P también tiene que ser positiva, esto es:

$$(-P_2 - c_1)(-P_2) - P_2^2 > 0 \Rightarrow P_2^2 + P_2c_1 - P_2^2 > 0 \Rightarrow P_2c_1 > 0$$

Como P_2 es negativa, entonces c_1 también tiene que serlo para que pueda existir una P definida positiva. Por simplicidad utilizaremos $c_1 = -1$, pero de no encontrar solución para (5.9) podemos utilizar una c_1 diferente y probar nuevamente.

Siguiendo en nuestra búsqueda de condiciones para la existencia de solución de (5.9), proseguimos con desarrollar la matriz $[[A + lc]^T P + P[A + lc]]$.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_2 + 1 & P_2 \\ P_2 & -P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_2 + 1 & P_2 \\ P_2 & -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 & f_{12} \\ -l_2 & f_{22} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} l_1P_2 - l_1 - l_2P_2 & -l_1P_2 + l_2P_2 \\ -P_2f_{12} + f_{12} + f_{22}P_2 & f_{12}P_2 - f_{22}P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1P_2 - l_1 - l_2P_2 & -f_{12}P_2 + f_{12} + P_2f_{22} \\ -l_1P_2 + l_2P_2 & f_{12}P_2 - f_{22}P_2 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 2P_2(l_1 - l_2) - 2l_1 & P_2(l_2 - l_1) + P_2(f_{22} - f_{12} + f_{12}) \\ P_2(l_2 - l_1) + P_2(f_{22} - f_{12} + f_{12}) & 2P_2(f_{12} - f_{22}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Que es definida negativa, por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 2(P_2(l_2 - l_1) + l_1) & P_2(l_1 - l_2 + f_{12} - f_{22}) - f_{12} \\ P_2(l_1 - l_2 + f_{12} - f_{22}) - f_{12} & 2P_2(f_{22} - f_{12}) \end{bmatrix} > 0 \quad (5.11)$$

De (5.11) se aprecia que se debe cumplir

$$f_{12} > f_{22} \quad (5.12)$$

y también

$$(P_2(l_2 - l_1) + l_1) > 0 \quad (5.13)$$

La primera condición (5.12) es propia de la planta y no tenemos control sobre ella, la segunda (5.13) nos da una pista de las posibles combinaciones de valores que pueden tener las ganancias, por ejemplo, si $l_1 > 0$ y $l_2 < 0$ se satisface (5.13), pero también si $l_1 > 0$, $l_2 > 0$ y $l_1 > l_2$ cumplen con (5.13). Existen otras posibles soluciones pero ya dependen del valor P_2 encontrado y las ganancias. Ahora aplicaremos el criterio de Schur para determinar que (5.11) sea definida positiva, este nos pide que los elementos de la diagonal principal sean positivos y que también (5.14) sea positiva, es decir

$$\begin{aligned} \text{Constraint} = \\ 2(P_2(l_2 - l_1) + l_1) - \frac{(P_2(l_1 - l_2 + f_{12} - f_{22}) - f_{12})^2}{2P_2(f_{22} - f_{12})} > 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Note que la utilidad de esta última desigualdad es que toda vez que se determinen ciertas ganancias del observador, entonces es posible verificar si la condición anterior se cumple para considerarlas como adecuadas.

Capítulo 6

Simulación Numérica

6.1. Valores obtenidos

Los parámetros del modelo nominal fueron tomados de la información experimental de un cultivo de *Spirulina maxima* que es una microalga azul verdosa capaz de remover ciertos contaminantes producidos por actividades domésticas e industriales como fosfatasa y nitratos, ver [2]. Para ser preciso, los parámetros nominales, condiciones iniciales, la tasa de dilución (perturbada) u , estado inicial, los valores calculados de la LMI y las ganancias del observador son como se muestran a continuación:

1) Parámetros nominales

a_1	a_2	a_3	a_4	$max(x)$
0.027	25	0.2899	205	534.75

2) Condiciones iniciales del sistema.

$x_1(0) = z_1(0)$	$x_2(0)$	$z_2(0)$
3.5553	3.9703	3.6376

3) Resultados de la LMI para $\alpha = 0,1$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1,4 \times 10^{-6} \\ 0 & -3,985 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1,0001 & -0,0001 \\ -0,0001 & 0,0001 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$
$$k = 3,985, \quad Q = \begin{bmatrix} 5,5807 & -4,6284 \times 10^{-5} \\ -4,6284 \times 10^{-5} & 0,0001 \end{bmatrix}$$

4) Entrada y perturbaciones

	$t : 0 - 400h$	$t : 400 - 800h$	$t : 800 - 1200h$
$u(t)$	0.015	0.015	0.015
$\delta(t)$	0	0.0015	-0.0015

5) Dinámica del observador

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z_2) \\ f_1(z_2)f_2(x_1, z_2) \\ \dot{\phi} = -ce \end{bmatrix} + (u + \phi)p + lce \quad (6.2)$$

donde

$$c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} 6,7753 \\ 2,4401 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para la simulación numérica realizamos nuevamente el cambio de coordenadas ya que el cálculo de la función $\exp(\cdot)$ presenta una sensibilidad numérica considerable. Por otro lado, también se ahorra el costo computacional de regresar los estados estimados a las coordenadas originales. De (6.2) y sabiendo que $\dot{x} = x\dot{x}_1$ y $\dot{s} = -(a_4 - s)\dot{x}_2$ tenemos.

$$\begin{aligned}
\hat{x}\dot{z}_1 &= \hat{x} \frac{a_1 a_4 - a_1 x p(x_2)}{a_2 + a_4 - \exp(x_2)} - \hat{x}(u + \phi) + \hat{x} l_1 c_1 (z_1 - x_1) \\
-(a_4 - \hat{s})\dot{z}_2 &= -(a_4 - \hat{s}) \frac{\exp(x_1)}{a_3 \exp(x_2)} \frac{a_1 a_4 - a_1 x p(x_2)}{a_2 + a_4 - \exp(x_2)} + \dots \\
&\quad \dots (a_4 - \hat{s})(u + \phi) - (a_4 - \hat{s}) l_2 c_1 (z_1 - x_1) \\
&\quad \Downarrow \\
\dot{\hat{x}} &= \hat{x} \frac{a_1 a_4 - a_1 a_4 + a_1 \hat{s}}{a_2 + a_4 - a_4 + \hat{s}} - \hat{x}(u + \phi) + \hat{x} l_1 c_1 (\log(\hat{x}) - \log(x)) \\
\dot{\hat{s}} &= -(a_4 - \hat{s}) \frac{x}{a_3 (a_4 - \hat{s})} \frac{a_1 a_4 - a_1 a_4 + a_1 \hat{s}}{a_2 + a_4 - a_4 + \hat{s}} + (a_4 - \hat{s})(u + \phi) - \dots \\
&\quad \dots (a_4 - \hat{s}) l_2 c_1 (\log(\hat{x}) - \log(x)) \\
&\quad \Downarrow \\
\dot{\hat{x}} &= \hat{x} \frac{a_1 \hat{s}}{a_2 + \hat{s}} - \hat{x}(u + \phi) + \hat{x} l_1 c_1 (\log(\hat{x}) - \log(x)) \\
\dot{\hat{s}} &= -\frac{x}{a_3} \frac{a_1 \hat{s}}{a_2 + \hat{s}} + (a_4 - \hat{s})((u + \phi) - l_2 c_1 (\log(\hat{x}) - \log(x)))
\end{aligned}$$

6.2. Resultados de la simulación

El software usado para la simulación numérica fue MatLab, se utilizo el solver ode113 con una tolerancia relativa de 1×10^{-6} y una tolerancia absoluta de 1×10^{-4} , mientras que para resolver la LMI fue usado Yalmip como interprete y Sedumi como solver.

Como se comentó en el capítulo anterior, necesitamos que se cumplan tres condiciones para que pueda existir una matriz P y Q tales que cumplan la desigualdad (4.4), la primera (5.12) es propia de la planta y se puede ver que se cumple en la Figura (6.1), la segunda (5.13) dependen de los valores de las ganancias y el comportamiento de la planta no influye, en cambio, la tercera condición (5.14) depende de los valores calculados en la LMI y el comportamiento de la planta, recuerde que las ganancias calculadas son adecuadas para un punto de operación, donde se realizó la

linealización. Pero si la desigualdad (5.14) se cumple con estas ganancias calculadas conforme opera la planta, entonces estas ganancias serán adecuadas durante todo el funcionamiento de la planta. Afortunadamente cumplen, esto se puede apreciar en la Figura (5.14).

Por otra parte, se supuso que la función $f(x) - Ax$ cumpliera con la condición de Lipschitz, en particular con la diferencia entre el estado observado y los reales, es decir $\|f(z) - Az - f(x) - Ax\| \leq k\|\bar{z} - x\|$ o de manera equivalente $\|\mathcal{O}(z) - \mathcal{O}(x)\| \leq k\|\bar{z} - x\|$, esta suposición se puede verificar en la Figura (6.3) donde se uso la norma $\|\cdot\|_\infty$, pero recuerde que existe una equivalencia de la constante de Lipschitz bajo diferentes normas, es decir, si cumple con una norma también cumple bajo otra norma.

El comportamiento normal del biorreactor se puede apreciar en la Figura (6.4), mientras que el estado observado contra el real se puede ver en la Figura (6.5). Por otro lado, la perturbación real y la estimada se muestran en la Figura (6.6). Finalmente, los errores se muestran en la figura (6.7).

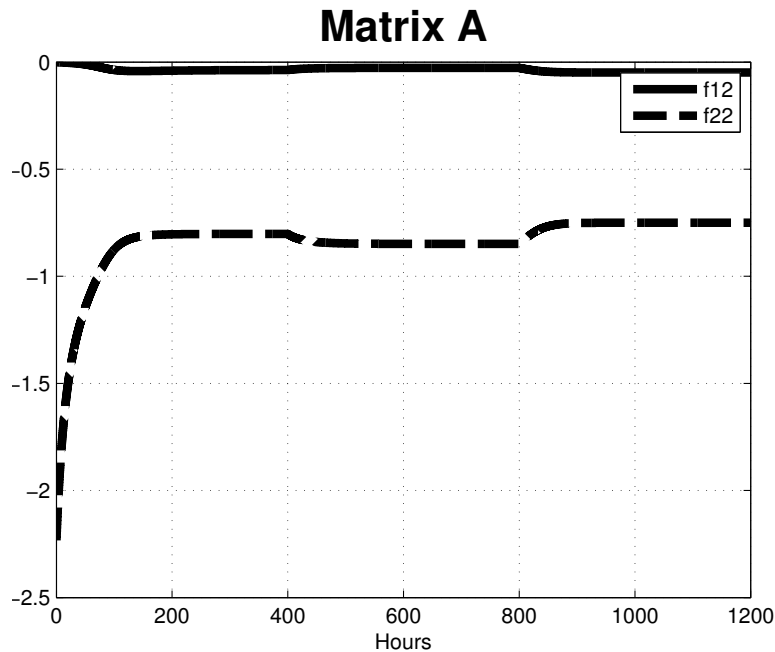


Figura 6.1: Parámetros de la Matriz A

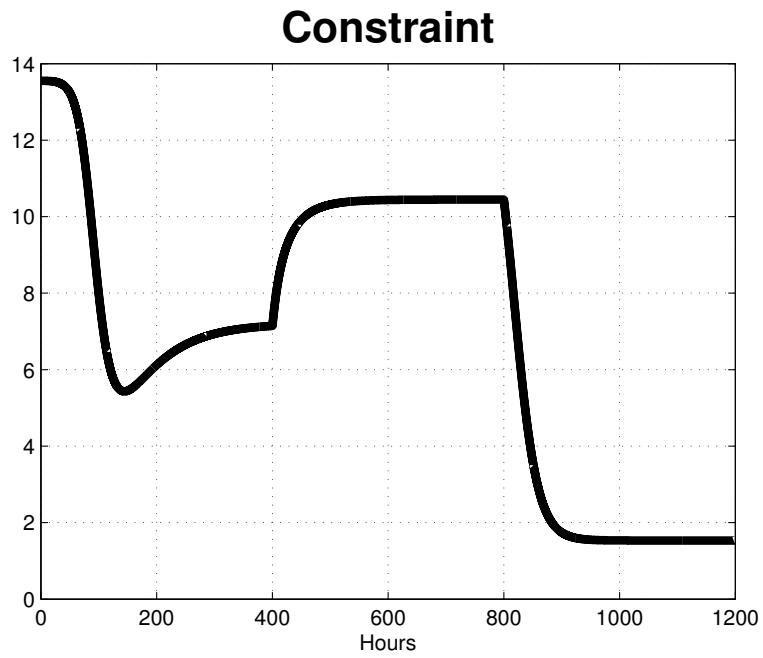


Figura 6.2: Condición (5.14)

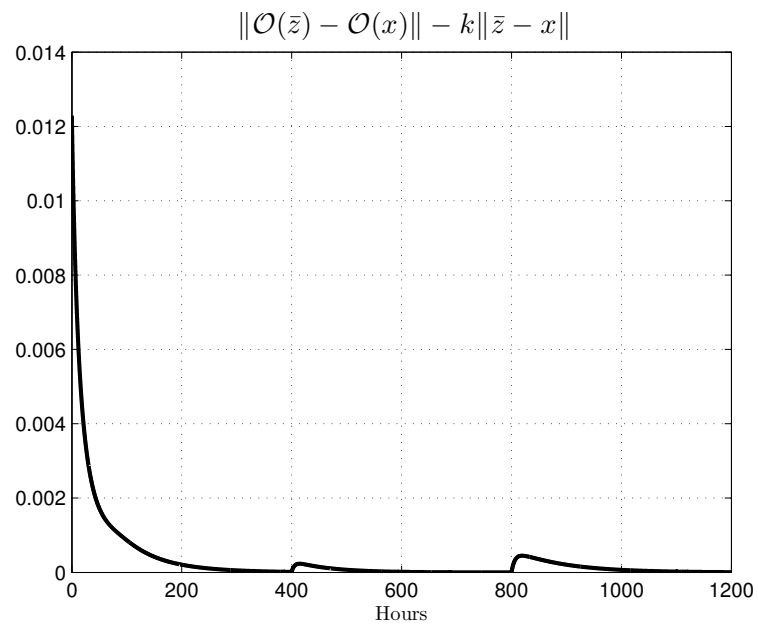


Figura 6.3: Condición de Lipschitz

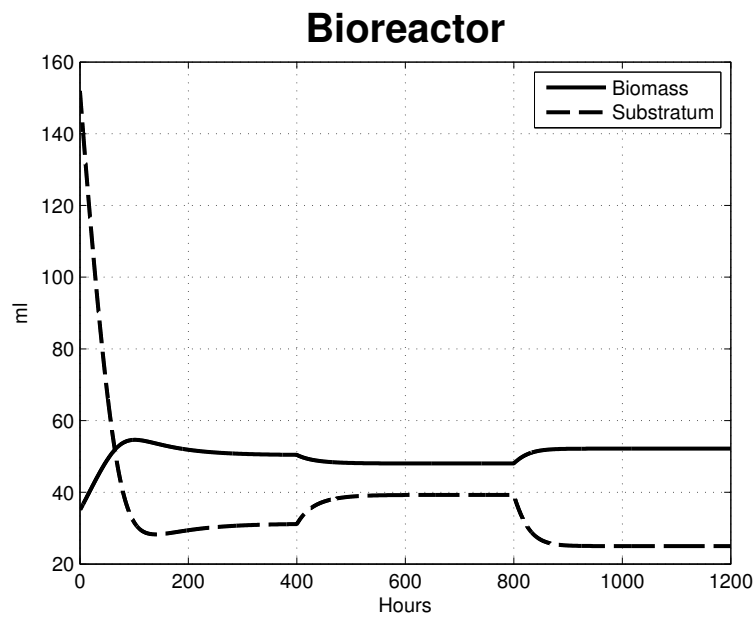


Figura 6.4: Bioreactor

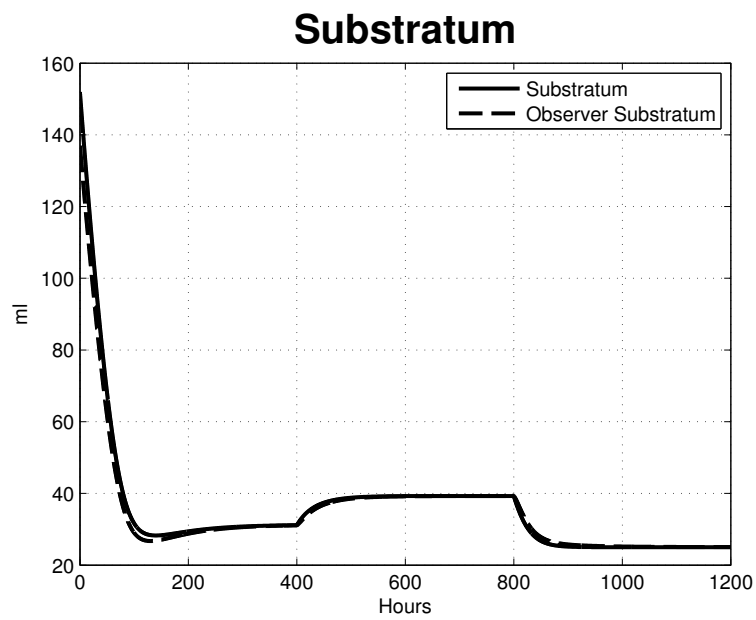


Figura 6.5: Substrato

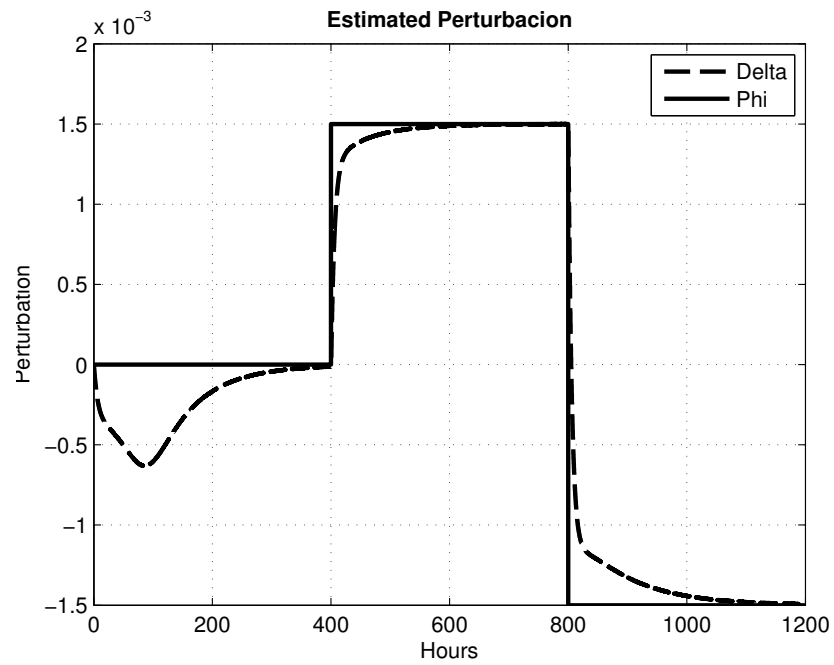


Figura 6.6: Perturbación

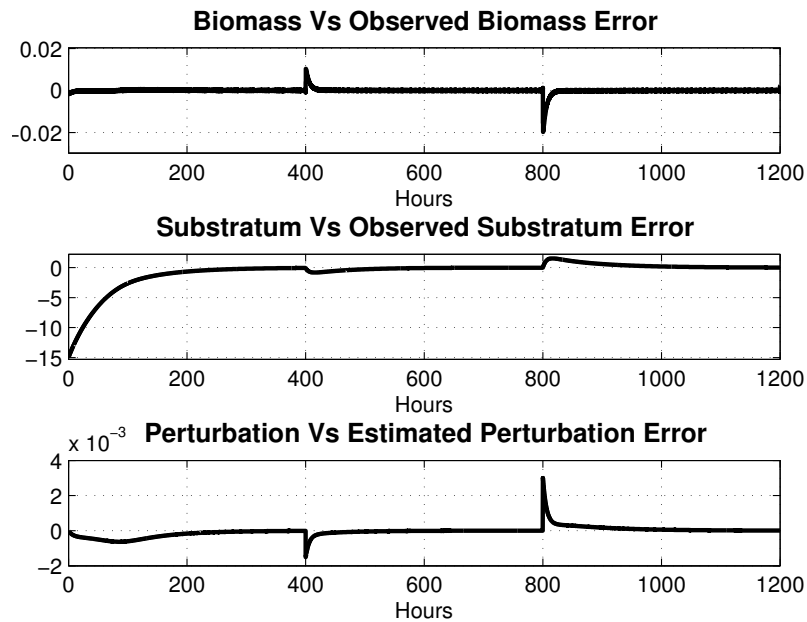


Figura 6.7: Errores

6.3. Código

El código usado es:

```

u = 0.015;
delta1 = 0.1*u; delta2 = -0.1*u; % Perturbaciones constantes
x0 = 35; % Biomasa Inicial
s0 = 152; % Sustrato Inicial
tf=1200; tspan=0:0.001:1200; % Tiempo de simulacion
option=odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-6); % Configurando Solver
% Resolviendo Ecuacion Diferencial
fg=@(t,x) [a1*x(1)*x(2)/(a2+x(2))-x(1)*(u+delta1*((400<=t)&...
            (t<800))+delta2*((800<=t)&(t<1200))); % Biomasa Real
            -a1*x(1)*x(2)/(a3*(a2+x(2)))+(a4-x(2))*(u+delta1*((400...
            <=t)&(t<800))+delta2*((800<=t)&(t<1200))); % Sustrato Real
            a1*x(3)*x(4)/(a2+x(4))+(Csol(1)*Lsol(1)*(log(x(3))...
            -log(x(1)))-(u+x(5)))*x(3); % Biomasa Observada
            -a1*x(1)*x(4)/(a3*(a2+x(4)))+(-Csol(1)*Lsol(2)*(log...
            (x(3))-log(x(1)))+(u+x(5)))*(a4-x(4)); % Sustrato Observado
            -Csol(1)*(log(x(3))-log(x(1)))]; % Phi
[t,x]=ode113(fg,tspan,[x0,s0,x0,3.6376,0],option);
f12 = -a1*a2*(a4-x(:,2))./(a2+x(:,2)).^2;
f22 = (x(:,1)./(a3*(a4-x(:,2))))*(-2*a2*x(:,2)-...
        x(:,2).^2)./(a2+x(:,2)).^2;
Hope = 2.*(Xsol(1,2).*(Lsol(2)-Lsol(1))+Lsol(1))-(Xsol(1,2).*...
        (Lsol(1)-Lsol(2)+f12-f22)-f12).^2./(2*Xsol(1,2).*(f22-f12));
%% Terminos de Orden Superior
x1 = log(x(:,1));
x2 = log(a4-x(:,2));
gx2 = log(a4-x(:,4));
Osup1 = (a1.*a4-a1.*exp(x2))./(a2+a4-exp(x2))-Asol(1,2).*x2;
Osup2 = (exp(x1)./(a3.*exp(x2))).*(a1.*a4-a1.*exp(x2))./...
        (a2+a4-exp(x2))-Asol(2,2).*x2;
gOsup1 = (a1.*a4-a1.*exp(gx2))./(a2+a4-exp(gx2))-Asol(1,2).*gx2;
gOsup2 = (exp(x1)./(a3.*exp(gx2))).*(a1.*a4-a1.*exp(gx2))./...
        (a2+a4-exp(gx2))-Asol(2,2).*gx2;
Osup = [Osup1 Osup2];
gOsup = [gOsup1 gOsup2];
Normx = x1;
NormOsup = Osup1;
for i=1:1:size(t)
    NormOsup(i) = norm(gOsup(i,:)-Osup(i,:),Inf);
    Normx(i) = norm([x1(i) gx2(i)]-[x1(i) x2(i)],Inf);
end

```

Capítulo 7

Conclusiones y Trabajos futuros

En esta tesis se aborda el problema del diseño de observadores adaptables de ganancia "fija" para el caso de sistemas no lineales que presentan perturbaciones constantes en la entrada. La filosofía de trabajo se basa en la posibilidad de transformar un sistema no lineal general en otro que tenga la propiedad de presentar el efecto de las entradas de control (y perturbaciones) a travez de un vector constante de manera que se puede extender y potenciar la búsqueda de soluciones de ganancia del observador por medio de las herramientas de LMI's. Dicho estudio es motivado por la necesidad de abordar un problema práctico de relevancia que consiste en la observación de un estado desconocido en un sistema experimental de tratamiento de aguas residuales junto con el desconocimiento de la razón de dilución de entrada del sustrato de alimentación. Se muestar que el uso de los observadores propuestos en biorreactores es posible debido a la naturaleza de los modelos de los mismos. El enfoque basado en LMI's permite la búsqueda de una solución numérica en un conjunto de parámetros relativamente amplio. Por otra parte, dado que los métodos numéricos usados para resolver una LMI permiten maximizar alguna variable, se puede pensar en redefinir el problema y agregar alta ganancia, el problema seria que esto quitaría robustez ante las no linealidades, ya que en el presente trabajo se busco solución con la consigna de encontrar la k más grande posible, si reescribimos la LMI agregando el parámetro r y pedimos maximizar este termino, pudiera no cumplirse la condición (5.14) en todo el funcionamiento de la planta, sino posiblemente solo en una pequeña región de operación. En este sentido, se hace hincapié en que estas son solo condiciones suficientes, por lo que se podría pensar en buscar solución maximizando el parámetro r y que por suerte no afecten demasiado las no linealidades. En contra partida, el enfoque presentado ofrece la ventaja de poder considerar una linelización o matriz A diferente, siempre y cuando se conserve la propiedad de ob-

servabilidad del par (A, c) , esto con el fin de buscar un sistema $f(x) - Ax$ con una constante de Lipschitz más pequeña que la obtenida al buscar solución de la LMI propuesta. Finalmente, ya que el observador propuesto es adaptativo, significa que cualquier dinámica no modelada o parámetro mal identificado que cumpla con la matching condition y se pueda expresar como una perturbación constante, entonces podrá ser identificado con el fin de poder rechazar su influencia en el sistema bajo estudio.

Bibliografía

- [1] J. F. Andrews. A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrate. *Biotechnology and Bioengineering*, 10:707–723, 1968.
- [2] Domínguez A.R., Torres J.A., Carmona R., and Aguilar R. Estudio teórico práctico de la remoción de contaminantes presentes en el río de los remedios, estado de México (in Spanish). *Ingeniería hidráulica en México*, 24:81–91, 2009.
- [3] Stephen B., Laurent El G., E. Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994.
- [4] J.E. Bailey and D.F. Ollis. *Biochemical Engineering Fundamentals*. McGraw-Hill, 1986.
- [5] G. Bastin and D. Dochain. *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier, 1990.
- [6] O. Bernard and G. Bastin. Identification of reaction networks for bioprocesses: determination of a partially unknown pseudo-stoichiometric matrix. *Bioprocess and Biosystems Engineering*, 27:293–301, 2005.
- [7] O. Bernard and G. Bastin. On the estimation of the pseudo-stoichiometric matrix for macroscopic mass balance modelling of biotechnological processes. *Mathematical Biosciences*, 193:51–77, 2005.
- [8] Sergej Č. Comunicación personal, Noviembre 2014.
- [9] Denis D. *On line Parameter Estimation, Adaptive State Estimation and Control of Fermentation Processes*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, Belgium, 1986.
- [10] Denis D. *Automatique des bioprocédés*. ISTE Ltd, 2001.

- [11] C. Delbes, R. Moletta, and J.-J. Godon. Bacterial and archaeal 16s rdna and 16s rrna dynamics during an acetate crisis in an anaerobic digester ecosystem. *FEMS Microbiology Ecology*, 35:19–26, 2001.
- [12] L. Edelstein. *Mathematical Models in Biology*. Random House, 1988.
- [13] Mairet F., Bernard O., Masci P., Lacour T., and Sciandra A. Modeling neutrallipid production by the microalga *Isochrysis aff. galbana* under nitrogen limitation. *Bioresource Technology*, pages 142–149, 2011.
- [14] J-P Gauthier and G. Bornard. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:922–926, 1981.
- [15] J-P Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems. applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37:875–880, 1992.
- [16] M. Hasegawa. Robust adaptive observer design based on γ -positive real problem for sensorless Induction-Motor drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 53:76–85, 2006.
- [17] D. T. Hill and C.L. Barth. A dynamic model for simulation of animal waste digestion. *Journal of the Water Pollution Control Association*, 10:2129–2143, 1977.
- [18] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hal, 2002.
- [19] Chang H. L. Robust observer-based control of systems with state perturbations via LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(8):1365–1370, 2004.
- [20] Massimiliano M. An LMI approach to the design of a robust observer with application to a temperature control problem for space vehicle testing. *Automatica*, 37:1979–1987, 2001.
- [21] Ricardo M. Adaptive observers for single output nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(9):1054–1058, 1990.
- [22] Sharifuddin M., G. Chakraborty, and Kingshook Bhattacharyya. LMI approach to robust unknown input observer design for continuous systems with noise and uncertainties. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 8(2):210–219, 2010.

- [23] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*. Prentice Hall, 1995.
- [24] R. Moletta, D. Verrier, and G. Albagnac. Dynamic modelling of anaerobic digestion. *Water Research*, 20:427–434, 1986.
- [25] J. Monod. *Recherches sur la Croissance des Cultures Bactériennes*. PhD thesis, Hermann, Paris, 1942.
- [26] F. E. Mosey. Mathematical modelling of the anaerobic digestion process: regulatory mechanisms for the formation of short-chain volatile acids from glucose. *Water Science and Technology*, 15:209–232, 1983.
- [27] Alain P. *Modélisation en biologie et écologie*. Aléas, 1994.
- [28] Mahdi P. and Vahid J. M. A nonlinear adaptive resilient observer design for a class of Lipschitz systems using LMI. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 30:1401–1415, 2011.
- [29] M. Pourgoli, V. J. Majd, and M R Aghamohammadi. Montazer-Gaem gas unit synchronous generator's parameter identification using SSFR tests. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 3:423–431, 2008.
- [30] L. A. Segel. *Modeling Dynamic Phenomena in Molecular and Cellular Biology*. Cambridge University Press, 1984.
- [31] G.N. Stephanopoulos, A.A. Aristidou, and J. Nielsen. *Metabolic Engineering. Principles and Methodologies*. Academic Press, 1998.
- [32] J. Wang, B. Jiang, and P. Shi. Adaptive observer based fault diagnosis for satellite attitude control systems. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 4(8):1921–1930, 2008.
- [33] J. Zarei and S. Ahmadizadeh. LMI-Based unknown input observer design for fault detection. In *2nd International Conference on Control, Instrumentation and Automation*, pages 1130–1135, 2011.
- [34] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. I. Bara. Observers for a class of Lipschitz systems with extensions to H_∞ performance analysis. *Systems & Control Letters*, 57:18–27, 2008.