



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE
CONTROL AUTOMÁTICO

**Diseño de circuitos neuromorfos usando teoría de
singularidades**

TESIS

Que presenta

Ing. Carlos Antonio Tovar García

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

En la especialidad de

CONTROL AUTOMÁTICO

Directores de la tesis:

Dr. Fernando Castaños Luna

Dr. Alessio Franci

Ciudad de México

Agosto, 2016

Agradezco el apoyo brindado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado la beca No. 338296 durante el período de septiembre de 2014 a agosto de 2016 para la realización de mis estudios de maestría que concluyen con esta tesis, como producto final de la Maestría en Ciencias en la Especialidad de Control Automático que otorga el Departamento de Control Automático del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

*Dedicado a mis padres, hermanos
y a mis seres queridos por su incondicional apoyo.*

Agradecimientos

Quiero dar un sincero agradecimiento:

- A mi familia, donde lo más importante son los ánimos que me brindaron cuando decidí seguir este camino; por el apoyo que siempre me han ofrecido y que es indispensable en cada problemática que se presenta; por los consejos que alientan el alma en momentos difíciles y finalmente por su comprensión cuando he tomado decisiones improvisadas.
- A mis asesores de tesis, Dr. Fernando Castaños y Alessio Franci, por su paciencia al explicar detalladamente cada duda que se presentó, por sus enseñanzas y por darme la oportunidad de estudiar un tema tan interesante en este año del desarrollo de la tesis de maestría.
- A Blanca Yolanda Echartea Martínez, quién estuvo conmigo desde el inicio de la maestría apoyándome y dándome ánimos siempre que los necesitaba.
- A mis amigos y seres queridos, quienes siempre me han acompañado y me acompañarán en mi vida.

Resumen

Los circuitos neuromorfos son de gran interés en ingeniería, ya que al replicar comportamientos neuronales en circuitos eléctricos es prometedor el desarrollo de nuevas tecnologías. Actualmente, la comunidad científica construye este tipo de circuitos imitando los modelos neuronales existentes, lo que resulta en dispositivos con una gran cantidad de componentes electrónicos difíciles de sintonizar o poco robustos frente a perturbaciones o variabilidad en los componentes.

En este documento se presenta una nueva metodología sistemática para el diseño y construcción de un circuito neuromorfo a partir de las *singularidades* que organizan los distintos comportamientos neuronales. Como primer paso de esta construcción, se construye y analiza un circuito eléctrico organizado por la singularidad histéresis. Como segundo paso, con ayuda de la teoría geométrica de perturbaciones singulares, se prueba que, agregando otros componentes al circuito anterior, la salida tiene un comportamiento equivalente al *spike* neuronal. El principal resultado de esta metodología es un circuito neuromorfo que presenta un comportamiento neuronal básico minimizando el número de componentes eléctricos utilizados. Se verá que este dispositivo es la base para construir circuitos cuya respuesta presenta conductas neuronales más complejas como el *bursting*.

Abstract

Neuromorphic circuits are of great interest in engineering because the emulation of neural behaviors in electrical circuits promises some interesting new technologies. Nowadays, the scientific community builds these circuits imitating existing neural models. This results in devices with many electronic components that drift into tuning and robustness problems, in presence of disturbances or variability in the components.

In this thesis, we present a new constructive methodology to design and build neuromorphic circuits from the singularities organizing distinct neural behaviors. Firstly, we build and analyze an electronic circuit organized by the hysteresis. Secondly, we prove, using geometric singular perturbation theory, that, by adding more elements to the above circuit, the output becomes equivalent to neural spiking behavior. The main result of the methodology is a neuromorphic device exhibiting a simple neural behavior and minimizing the number of electronic components. This circuit is the basic element to realize, in neuromorphic devices, more complex neuronal behaviors like bursting.

Índice general

Resumen	ix
Abstract	xi
Introducción	1
1 Métodos singulares	11
1.1 Teoría de singularidades	11
1.1.1 Teorema de la Función Implícita y las Singularidades	12
1.1.2 Problema de reconocimiento	15
1.1.3 Teoría de despliegues	20
1.1.4 Teorema de clasificación	30
1.2 Teoría geométrica de perturbaciones singulares	31
1.2.1 Antecedentes matemáticos	32
1.2.2 Teoremas de Fenichel	34
1.2.3 Ejemplo: Modelo de Fitzhugh-Nagumo	37
2 Comportamientos no lineales organizados por singularidades	45
2.1 Singularidades construidas por no linealidades sigmoidales monótonas	46
2.1.1 Histéresis	47
2.1.2 Winged Cusp	50
2.2 Histéresis como estructura de comportamientos no lineales	54
2.2.1 Biestabilidad	55
2.2.2 Excitabilidad y Oscilaciones Relajadas	57
2.3 La Winged Cusp como estructura de comportamientos neuronales	60

2.3.1	Biestabilidad rest-spike	61
2.3.2	Bursting	63
3	Histéresis en un circuito eléctrico	67
3.1	Saturación básica como no linealidad sigmoideal	68
3.1.1	Análisis de mallas	70
3.1.2	Ecuaciones de Ebers-Moll	74
3.2	Histéresis en un circuito eléctrico	76
3.2.1	Análisis de mallas	78
3.3	Teoría de singularidades aplicada al circuito eléctrico	85
3.4	Comportamientos no lineales en el circuito eléctrico	93
	Discusión de los resultados	97
	Conclusión y trabajo futuro	99

Índice de figuras

1	Estructura general de una Neurona	3
2	Comportamientos neuronales básicos. En la izquierda el <i>spiking</i> del tipo periódico, el cual se describe como potenciales de acción sostenidos y generalmente se obtienen con entradas en un intervalo de corriente a la neurona. El comportamiento de la derecha es conocido como <i>bursting</i> y se describe como dos o más <i>spikes</i> seguidos de un periodo de inactividad, el mecanismo de bifurcación con el se obtiene este comportamiento es más complejo y se describe brevemente en el capítulo 2.	5
1.1	Conjunto $\{x, \lambda\}$ de la singularidad histerética	14
1.2	Conjunto $\{x, \lambda\}$ de la singularidad winged cusp	14
1.3	Diagrama de bifurcación no persistente en la histéresis.	26
1.4	Diagrama de bifurcación no persistente en la transcítica o isola.	26
1.5	Diagramas persistentes de la histéresis	29
1.6	Diagramas persistentes de la tridente	30
1.7	Nullclinas del sistema para $\alpha < 0$	39
1.8	Diagrama de fase singular para $\alpha < 0$. En líneas azules se presenta la trayectoria del sistema capa y en líneas verdes las del sistema reducido. Las dobles flechas azules representa que x es la variable rápida y la flecha verde, que y es la variable lenta.	40
1.9	Diagrama de fase completo para $\alpha < 0$	40
1.10	Nullclinas del sistema para $\alpha > 0$. Se observa que la nullclina del sistema $G_{Hys}(x, \lambda - y, \alpha)$ es un diagrama de bifurcación persistente de la histéresis, presentado en el Ejemplo 4.	41

1.11 Diagrama de fase singular para $\alpha > 0$. En líneas azules se presenta la trayectoria del sistema capa y en líneas verdes las del sistema reducido. Las dobles flechas azules representa que x es la variable rápida y la flecha verde, que y es la variable lenta. 42

1.12 Diagrama de fase completo para $\alpha > 0$. La línea de color rojo representa la solución numérica del modelo no lineal, donde se observa que cuando no se encuentra en alguna de las variedades $\mathcal{S}_0^{+,-}$ se converge rápidamente a una estas, según sea el caso. 43

1.13 Respuesta temporal del modelo cuando $\alpha > 0$ 44

2.1 No linealidad sigmoideal 47

2.2 Retroalimentación de la no linealidad sigmoideal 48

2.3 Ecuación $g_{hys}(x, \lambda)$ en diagrama de bloques 49

2.4 Ecuación $G_{hys}(x, \lambda, \beta)$ en diagrama de bloques 50

2.5 Función *bump* en diagrama de bloques 51

2.6 Función $g_{wcusp}(x, \lambda)$ en diagrama de bloques 52

2.7 Despliegue universal de la winged cusp 54

2.8 Diagrama de bloques de la Biestabilidad 55

2.9 Biestabilidad en un circuito organizado por la histéresis. Arriba se muestra el comportamiento dinámico para varias condiciones iniciales dadas. Abajo se muestra el comportamiento biestable (izquierda) cambiando drásticamente el valor de la entrada λ (derecha). 56

2.10 Diagrama de bloques del modelo (2.15) 57

2.11 Excitabilidad en un circuito organizado por la histéresis. 59

2.12 Oscilaciones Relajadas en un circuito organizado por la histéresis 60

2.13 Diagrama de bloques del modelo (2.17) 61

2.14	Biestabilidad rest-spike en un circuito organizado por la winged cusp. En la izquierda se muestran variaciones instantáneas en el parámetro de despliegue α . Como consecuencia, en la imagen de la derecha se muestra un cambio entre el punto fijo estable (actividad de reposo) y el ciclo límite (oscilaciones sostenidas).	62
2.15	Diagrama de fase de la biestabilidad rest-spike. En la Figura a) se da una condición inicial, de tal manera que la trayectoria del sistema se encuentre en la región de atracción del punto fijo estable. En los demás incisos se muestra lo que ocurre con esta trayectoria al variar α y como es que el sistema cambia del punto fijo estable al ciclo límite.	63
2.16	Diagrama de bloques del modelo (2.18)	64
2.17	Simulación de un modelo organizado por la singularidad winged cusp. En la Figura de la derecha se muestra la salida del sistema correspondiente a la entrada (derecha). Se observa que para un rango de valores de la entrada, el sistema presenta bursting y que al incrementar más la entrada, el comportamiento cambia del comportamiento bursting al spiking. . . .	65
3.1	Modelo eléctrico que presenta un comportamiento de saturación básica.	69
3.2	Mallas de corriente del circuito eléctrico.	70
3.3	Polaridades de los voltajes en cada malla.	71
3.4	Corrientes del circuito eléctrico.	73
3.5	Salida V_1 del circuito.	75
3.6	Datos de la implementación del circuito eléctrico real. Parte superior izquierda: señal de entrada triangular de amplitud 5 volts y frecuencia 1000 Hertz. Parte inferior izquierda: Señal de salida V_1 en el tiempo. Parte derecha: plano de fase de la señal de entrada contra la señal de salida. . .	76
3.7	Modelo Eléctrico presentando Histéresis.	77
3.8	Mallas del circuito eléctrico.	78
3.9	Polaridades de los voltajes de cada malla.	78
3.10	Corrientes del circuito eléctrico.	80

3.11 Salida V_x del circuito de la histéresis	84
3.12 Datos de la implementación del circuito eléctrico real. Parte superior izquierda: señal de entrada triangular de amplitud 5 volts y frecuencia 1000 Hertz. Parte inferior izquierda: Señal de salida V_x en el tiempo. Parte derecha: plano de fase de la señal de entrada contra la señal de salida. . .	85
3.13 Salida V_x del circuito para valores de R_{b2}	87
3.14 Diagrama de flujo del algoritmo.	91
3.15 Valor de P_{xx} para cada iteración del algoritmo.	92
3.16 Circuito eléctrico equivalente a añadir una dinámica lenta y una dinámica rápida al despliegue universal de la singularidad histéresis.	94
3.17 Excitabilidad en un circuito eléctrico.	95
3.18 Oscilaciones relajadas en un circuito eléctrico.	95

Introducción

El avance de la tecnología en las últimas décadas, ha permitido realizar tareas de cómputo muy complicadas en el área de la ingeniería, por ejemplo: elaborar algoritmos sofisticados para llevar a cabo tareas de control, sensado, creación de interfaces usuario-sistema, entre otras. Este progreso ha sido producto de un largo proceso de investigación, principalmente en el desarrollo de microprocesadores eficaces, más eficientes y con una mayor capacidad de procesamiento utilizando el mismo espacio del chip.

La creación de microprocesadores con estas características, ha sido un reto en temas de espacio, alimentación, disipación de energía, etcétera. Así, estos retos se vuelven una tarea muy difícil y costosa para las industrias, ya que por ejemplo, desean mantener válida la Ley de Moore que establece que la cantidad de transistores en un microprocesador se incrementa al doble cada dos años. Debido a esto, han surgido líneas de investigación que crean dispositivos de procesamiento que desafían la tecnología actual.

Una de estas líneas de investigación es la ingeniería neuromorfa, que tiene como objetivo construir circuitos eléctricos que realizan tareas complejas (que requieren una gran cantidad de cómputo con la tecnología actual) imitando la forma de operación de estructuras neuro-biológicas ubicadas en el sistema nervioso, por ejemplo: el cómputo neuronal, procesamiento sensorial, tareas realizadas por el sistema cognitivo, el aprendizaje, tareas motrices, entre otras.

Al ser la neurona el elemento principal de un circuito neuromorfo, en este documento se presenta el diseño y construcción de un circuito eléctrico que tiene un comportamiento neuronal básico, conocido como *spiking*. La idea sobre este circuito es obtener este comportamiento neuronal utilizando la menor cantidad de componentes electrónicos y se verá que esto se logra empleando como base la teoría de singularidades y la teoría

de perturbaciones singulares. Además, el lector observará que el circuito presentado en el documento es la base para crear comportamientos neuronales más complejos como el *bursting*. Antes de iniciar con el desarrollo de la tesis, se presentan algunos conceptos de los sistemas biológicos neuronales.

Antecedentes

La parte más importante del sistema nervioso es la neurona. En esta sección primeramente se habla sobre esta célula, de que elementos se compone, como es que logran comunicarse entre sí y que mecanismos tienen para llevar a cabo esta comunicación. Posteriormente, se habla sobre los comportamientos neuronales más importantes y finalmente, se menciona lo que son de los sistemas neuromorfos.

¿Qué es y para qué sirve una neurona?

La neurona es la célula principal que conforma al sistema nervioso, es similar a otras células del cuerpo humano pero tiene una diferencia peculiar de entre todas, la cual es, que está especializada en la transmisión de información a través del cuerpo. Las partes básicas de una neurona son: las dendritas, el cuerpo celular, el axón y la sinapsis. En la Figura 1 se muestra la ilustración de una neurona biológica y a continuación se describe brevemente la función de las partes que la conforman.

1. Las dendritas son extensiones que se ramifican desde el inicio de la neurona hasta el cuerpo celular, y se encargan de transmitir información provenientes de otras neuronas al cuerpo celular.
2. El cuerpo celular o soma, es donde las señales provenientes de las dendritas se unen. El soma y el núcleo de la neurona no juegan papel en la transmisión de la señal neuronal, en lugar de eso, son estructuras que sirven para mantener la célula y llevar a cabo su función.
3. El axón se encarga de transmitir la señal neuronal. Se extiende desde el cuerpo celular hasta las terminales finales del axón.

4. La sinapsis es la región de comunicación entre el axón de una neurona y las dendritas de otra.

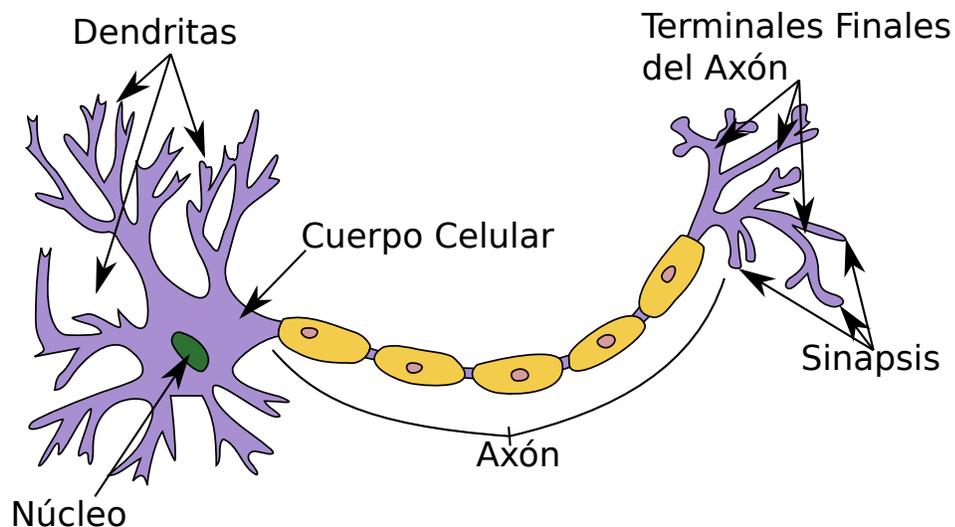


Figura 1: Estructura general de una Neurona

Existen diferentes tipos de neuronas responsables de varias tareas del cuerpo humano, por ejemplo: las neuronas sensoriales, son las que llevan información de células receptoras de los sensores al cerebro; las neuronas motoras, son las que transmiten información del cerebro a los músculos del cuerpo; las neuronas internas, son las responsables de la comunicación entre los diferentes tipos de neuronas del cuerpo, etcétera.

De las tareas enunciadas anteriormente, destaca la forma en que se comunican las neuronas ya que surge un comportamiento muy interesante en este proceso: dos neuronas de la misma especie pueden tener comportamientos muy diferentes y de igual manera, neuronas diferentes pueden tener el mismo comportamiento. Lo anterior motiva el estudio de la comunicación neuronal y ha sido demostrado por teóricos, que se debe principalmente a los mecanismos de comunicación que estas tengan. A estos tipos de mecanismos se les llamará mecanismos de bifurcación.

Se sabe que las neuronas se comunican por impulsos eléctricos llamados potenciales de acción. Un potencial de acción es un cambio repentino y transitorio del voltaje de la membrana neuronal, que se propaga a otras neuronas por medio del axón. La pregunta principal sobre los potenciales de acción es ¿cómo se generan?. A continuación, se explica de manera general como pueden generarse los potenciales de acción:

Por medio de las dendritas, específicamente en la sinapsis, las neuronas reciben entradas de miles de neuronas. Cada entrada produce una corriente llamada de transmembrana, la cual, cambia el potencial de la membrana neuronal. Esta corriente también produce potenciales llamados postsinápticos (PSPs). Pequeñas corrientes de entrada generan pequeños PSPs, que pueden hacer que la neurona permanezca inactiva; y grandes corrientes de entrada producen significantes PSPs, que pueden ser amplificados en los potenciales de acción. Cuando un potencial de acción es generado, el potencial de la membrana permite el paso del impulso eléctrico hacia el axón. Una clara conclusión del proceso anterior es que las neuronas no se activan por sí solas, sino que se accionan por medio de las entradas ocurridas en las sinapsis.

El comportamiento neuronal es comúnmente dividido en dos tipos: excitatorias e inhibitorias. El comportamiento excitador es aquel que incrementa la posibilidad de producir un potencial de acción, y el inhibidor es aquel que reduce la posibilidad de producir un potencial de acción. Estos comportamientos se observan en los experimentos de Hodgkin-Huxley [Hodgkin and Huxley, 1952], en donde, inyectando corriente directa de amplitud variante se pueden presentar potenciales de acción (espiguesos) repetitivos o inactividad de la neurona. Se dice que las neuronas son excitables, ya que comúnmente se encuentran en reposo, pero pueden presentar potenciales de acción en respuesta a ciertas formas de estimulación [Izhikevich, 2010].

Teniendo en mente lo que son los potenciales de acción neuronales, un mecanismo de bifurcación de excitabilidad se puede describir de la siguiente manera: cuando la amplitud de la corriente inyectada es pequeña, la neurona permanece en un estado inactivo; cuando la amplitud es grande, la neurona produce potenciales de acción continuos. De esta manera, cuando se cambia la amplitud de la corriente de pequeña a grande de forma instantánea aparece una bifurcación que, desde un punto de vista de sistemas dinámicos, corresponde al cambio de un punto de equilibrio estable a un ciclo límite atractor.

De lo anterior, se puede decir que el comportamiento de la neurona dependerá del tipo de bifurcación que se presente. Así, en esta tesis se estudian dos mecanismos de bifurcación que son las histéresis y la winged cusp, y son los que generan dos

comportamientos neuronales muy importantes: el potencial de acción (comúnmente llamado *spiking*) y el *bursting*. En la Figura 2 se muestra una forma común del *spiking* y el *bursting*.

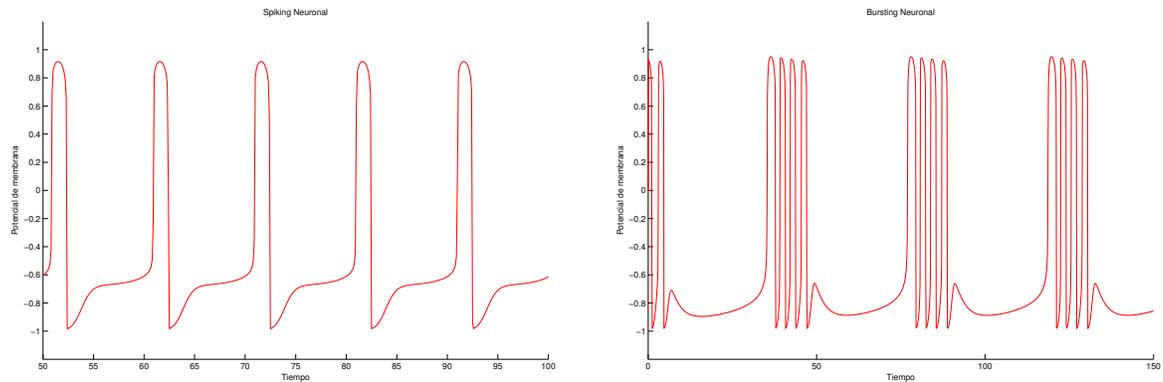


Figura 2: Comportamientos neuronales básicos. En la izquierda el *spiking* del tipo periódico, el cual se describe como potenciales de acción sostenidos y generalmente se obtienen con entradas en un intervalo de corriente a la neurona. El comportamiento de la derecha es conocido como *bursting* y se describe como dos o más *spikes* seguidos de un periodo de inactividad, el mecanismo de bifurcación con el se obtiene este comportamiento es más complejo y se describe brevemente en el capítulo 2.

La ingeniería neuromorfa

A pesar de que ya existían trabajos relacionados a los sistemas neuromorfos [Rosenblatt, 1958], [Fukushima et al., 1970], es Carver Mead quien por primera vez maneja este término en sus artículos, tomando como base el siguiente argumento [Mead, 1990]:

El echo de que se puedan construir dispositivos que implementen algunas operaciones básicas como las que realiza el sistema nervioso, dan la conclusión inevitable de que se pueden fabricar sistemas completos basados en sus principios organizados.

Así, es Carved Mead un pionero en la construcción de sistemas neuromorfos. Su trabajo se enfocó principalmente en la construcción de circuitos eléctricos con tareas de procesamiento de señales, basadas en la forma de operación de la retina del ojo humano.

Una pregunta que surge naturalmente es, ¿porqué construir circuitos neuromorfos?. La respuesta a esta cuestión parece ser fácil de contestar con la siguiente idea en mente: al estar basados los circuitos neuromorfos en los sistemas biológicos, estos heredan automáticamente una forma de operación que ha desarrollado la naturaleza por millones de años, donde quizá la propiedad más importante es el funcionamiento eficaz y eficiente utilizando la menor cantidad de energía posible.

Entonces la filosofía para la construcción de un circuito neuromorfos es, obtener la representación matemática (modelo) más aproximada a los principios de funcionamiento del elemento principal del sistema nervioso: la neurona, y de esta manera, obtener una cimentación sistemática y clara para el diseño de los circuitos.

Por lo tanto, la importancia de esta tesis se centra en mostrar una descripción matemática del comportamiento neuronal, que capture conductas neuronales fáciles de obtener al modificar parámetros, para posteriormente construir circuitos neuromorfos basados en estos modelos.

Una panorámica de las soluciones neuromorfas actuales

La construcción de circuitos neuromorfos puede clasificarse dependiendo la tarea que realizan, como por ejemplo: imitar los comportamientos de la neurona, procesamiento neuronal y redes de neuronas. En esta sección se describe brevemente el estado de la literatura sobre la construcción de circuitos electrónicos realizando estas tareas.

Los dispositivos que intentan imitar los comportamientos de la neurona, como se comentó anteriormente, se construyen basándose en algún modelo matemático. Circuitos que pueden reproducir el comportamiento neuronal *spiking*, pueden encontrarse en [Patel and DeWeerth, 1997](utilizando 22 transistores), [Indiveri, 2003] (utilizando 20 transistores), [Nakada et al., 2005] (utilizando entre 20 y 30 transistores); los que pueden reproducir el comportamiento neuronal *bursting* se presentan en [Lee et al., 2004] (utilizando en su construcción principalmente amplificadores operacionales) y en [Nakada et al., 2004] (utilizando aproximadamente 20 transistores).

Un dispositivo que utiliza un total de 14 MOSFETs que imita los comportamientos:

spiking regular, *spiking* rápido, *chattering* y *bursting*, se muestra en [Wijekoon and Dudek, 2008] y es basado en un modelo neuronal propuesto en [Izhikevich, 2010]; un circuito neuromorfo con los comportamientos neuronales anteriores, sin el *bursting*, se puede encontrar en [Pickett et al., 2013] y es creado con dos elementos llamados memristores y basado en el modelo propuesto por Hodgkin-Huxley [Hodgkin and Huxley, 1952].

En [Jo et al., 2010] se presenta un dispositivo híbrido, compuesto por un memristor a nanoescala y una neurona CMOS (del inglés *complementary metal-oxide-semiconductor*), con una función muy interesante ya que puede cambiar el peso (propiedad que tiene una neurona de modificar la prioridad que le da a la entrada de otra neurona) de la sinapsis neuronal. Y para finalizar con este tipo de dispositivos, en [Cassidy et al., 2007] y [Cassidy and Andreou, 2008] se exhibe otra forma de construir circuitos neuromorfos, la cual es, programar el modelo de una neurona en un dispositivo digital, un FPGA. Así, logran construir un arreglo de 256 neuronas digitales, las cuales, operan aproximadamente 5000 veces más rápido que las neuronas biológicas.

Los sistemas neuromorfos de procesamiento sensorial, son circuitos que utilizan principios de cómputo neuronal para interactuar con el ambiente externo. Los primeros trabajos de Carved Mead [Mead and Mahowald, 1988], [Mead, 1989], [Mead, 1990], [Douglas et al., 1995], son ejemplos de circuitos de este tipo ya que su funcionamiento está basado en algunas capas de procesamiento de señales de la retina biológica. Otro trabajo similar se presenta en [Vogelstein et al., 2004].

Para finalizar con esta sección, se presentan algunos trabajos relacionados con los sistemas de realizan arreglos de neuronas, cuyo objetivo principal es diseñar y construir circuitos con una gran cantidad de neuronas que tengan la capacidad de realizar tareas o simulaciones de procesos muy complejos. Por ejemplo, el trabajo presentado en [Vogelstein et al., 2008] y [Tenore et al., 2004], presenta un arreglo de neuronas comunicadas entre sí, de tal manera que se pueda genera la forma de cálculo que realiza el Sistema Central Generador de Patrones, es decir, imitar la forma de locomoción del cuerpo humano; un dispositivo similar al anterior, pero que copia el tipo de aprendizaje del cerebro, se presenta en [Arthur and Boahen, 2004]. Sistemas completos compuestos de miles de neuronas de silicio se desarrollan en [Merolla and Boahen, 2006], [Vogelstein

et al., 2007] y [Benjamin et al., 2014].

Problema e Hipótesis de la Tesis

La problemática que se plantea para el desarrollo de la tesis es: ¿Pueden diseñarse y construirse circuitos eléctricos con comportamientos neuronales de manera fácil, sistemática y al mismo tiempo utilizar la menor cantidad posible de elementos eléctricos?

Se formula la siguiente hipótesis: el hecho de que los comportamientos neuronales estén dados por mecanismos de bifurcación, permite utilizar métodos singulares para crear un procedimiento sistemático para el análisis, diseño y construcción de un circuito neuromorfo con el comportamiento neuronal básico *spiking*, el cual se compone únicamente dos transistores, siete resistencias y un condensador. Además, este circuito es la base para la construcción de circuitos con comportamiento neuronales más complejos como el *bursting*.

Objetivo general y específicos

Objetivo general: (Tomando el término de centro organizador de la teoría singular [Golubitsky and Schaeffer, 1985]) Demostrar que el comportamiento estático de un circuito eléctrico formado por dos transistores y cinco resistencias, está organizado por la singularidad histéresis. Con lo anterior y agregando otros componentes al circuito, obtener un comportamiento neuronal *spiking*.

Objetivos específicos:

1. Estudiar como se aplica la teoría singular a modelos de sistemas que presentan bifurcaciones en su estructura.
2. Estudiar como se construyen de forma geométrica, las trayectorias de un modelo no lineal cuya estructura presenta diferentes escalas temporales fuertemente separadas.

3. Estudiar como a partir de los métodos singulares, es posible obtener una metodología sistemática que permita construir singularidades y sus despliegues universales a partir de elementos básicos, para posteriormente construir modelos que presenten comportamientos neuronales básicos.
4. Construir circuitos neuromorfos basados en modelos neuronales obtenidos por los métodos singulares.

Contribución de la Tesis

La principal contribución de la tesis es la prueba formal de que un circuito eléctrico compuesto por dos transistores y cinco resistencias, es equivalente a la singularidad histéresis y su despliegue universal. Este resultado permite identificar el diagrama de bifurcación que es estructura del *spiking* neuronal.

Así, algunos de los trabajos mencionados en la literatura pueden llevarse a cabo utilizando el circuito eléctrico presentado en esta Tesis y como consecuencia directa se reducirá el tamaño del circuito que contenga neuronas o será posible incluir más neuronas en el mismo espacio. De la contribución principal, se sabe que este circuito eléctrico será robusto ante pequeños cambios de valores de las resistencias, de los parámetros del transistor, etcétera.

El análisis que se desarrolla para la construcción de esta prueba, crea un procedimiento para fabricar circuitos equivalentes a singularidades, en particular, singularidades cuyos diagramas de bifurcación están presentes en la neurona.

Metodología

Las dos herramientas utilizadas para el desarrollo de esta tesis se conocen como métodos singulares y son: la teoría de singularidades y la teoría geométrica de perturbaciones singulares.

La teoría de singularidades se encarga del análisis de modelos de sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones. Esta teoría se caracteriza por su fácil aplicación a pesar del

arduo desarrollo de las pruebas de sus resultados.

La teoría geométrica de perturbaciones singulares estudia los sistemas dinámicos que tiene una estructura especial por la presencia de escalas de tiempo fuertemente separadas. Esta teoría construye de forma cualitativa las trayectorias del modelo utilizando los resultados llamados, Teoremas de Fenichel.

Para el análisis de los circuitos eléctricos se utiliza la metodología de mallas, las Ley de voltajes de Kirchhoff y como leyes constitutivas de los transistores, las ecuaciones de Ebers-Moll.

Estructura de la Tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, se estudian los métodos singulares necesarios para el desarrollo de la tesis. El primer método se llama teoría de singularidades, y presenta un enfoque más sencillo de estudiar modelos que tienen bifurcaciones. El segundo método es la teoría geométrica de perturbaciones singulares, y se encarga de construir trayectorias cualitativas de modelos de sistemas que tienen en su estructura, escalas temporales fuertemente separadas.

En el Capítulo 2, se estudia una metodología sistemática para construir comportamientos neuronales como el *spiking* y el *bursting*, utilizando métodos singulares. Para una fácil aplicación, esta construcción se presenta en diagramas de bloques.

Finalmente, en el Capítulo 3 se aplican las técnicas presentadas en el Capítulo 2 para construir un circuito eléctrico que tenga el comportamiento *spiking*, además, se prueba que el circuito eléctrico es organizado por la singularidad histéresis y que también es un despliegue universal de dicha singularidad.

Capítulo 1

Métodos singulares

En este capítulo se presentan dos herramientas importantes para explorar cualitativamente las trayectorias de ciertos tipos de sistemas no lineales. La primera es la teoría de singularidades, la cual estudia el cambio que sufren los puntos fijos de un sistema al variar uno o más parámetros, es decir, los problemas de bifurcación. La segunda es la teoría geométrica de perturbaciones singulares, que proporciona una idea sobre el comportamiento de sistemas dinámicos en presencia de escalas temporales fuertemente separadas.

1.1. Teoría de singularidades

Desde un punto de vista de sistemas dinámicos, una bifurcación es un cambio repentino en la estructura del campo vectorial cuando un parámetro del sistema es variado, comúnmente llamado *parámetro de bifurcación o de control*. Por ejemplo, el número de puntos fijos de un modelo puede cambiar drásticamente al modificar el parámetro de control.

El estudio de bifurcaciones empleando herramientas clásicas, resulta ser de gran utilidad cuando el sistema en cuestión es simple, por ejemplo, la bifurcación tridente $\dot{x} = x^3 - \lambda x$. Sin embargo, este análisis se vuelve más arduo a medida que el modelo de la aplicación crece, aumenta su complejidad o presenta perturbaciones, por ejemplo, el modelo neuronal " $I_{Na} + I_{leak}$ ": $C\dot{V} = I - g_L(V - V_L) - g_{Na}m_\infty(V)(V - V_{Na})$. Para más

información sobre el análisis de bifurcaciones desde un punto de vista clásico, se puede consultar [Strogatz, 2001].

Por otro lado, la teoría de singularidades ofrece un enfoque sencillo para abordar problemas de bifurcación, utilizando métodos que son fáciles de aplicar. En esta primera parte del capítulo, se tratará de convencer de la sencillez que ofrece este enfoque y se darán los detalles algebraicos necesarios para aplicarlo a modelos de sistemas reales, en particular, a la dinámica neuronal.

La sección está dividida en 4 subsecciones. En la primera se presenta el Teorema de la Función Implícita, el cual es considerado la columna vertebral de la teoría singular, y también se define lo que es una singularidad. Y en las siguientes tres subsecciones, se detallan las herramientas principales de la teoría: el problema de reconocimiento, la teoría de despliegues y el teorema de clasificación, las cuales permiten la conexión con los problemas de bifurcación.

1.1.1. Teorema de la Función Implícita y las Singularidades

El Teorema de la Función Implícita es la principal herramienta utilizada en la teoría singular, ya que como primer aplicación, define de manera formal el concepto de singularidad.

Este teorema se encarga de sistemas de ecuaciones de la forma

$$f_i(x, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ son las variables desconocidas y $\alpha = (\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ los parámetros. Se asume que el mapeo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave, es decir, diferenciable un número suficiente de veces. Para cualquier par $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1}$, sea $(df)|_{x, \alpha}$ la matriz Jacobiana de $n \times n$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, \alpha) \right), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Se trabajará en una vecindad de un punto fijo $(x_0, \alpha_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1}$, es decir, el análisis será local.

Teorema 1.1.1. (*Teorema de la Función Implícita*). Sea f como se definió anteriormente. Supóngase que $f(x_0, \alpha_0) = 0$ y que

$$\det(df)|_{(x_0, \alpha_0)} \neq 0. \quad (1.3)$$

Entonces existen vecindades U de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, V de $\alpha_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$ y una función $X : V \rightarrow U$ tal que para cada $\alpha \in V$, el sistema de ecuaciones (1.1) tiene una única solución $x = X(\alpha)$ en U , que satisface

$$f(X(\alpha), \alpha) = 0, \text{ con } X(\alpha_0) = x_0. \quad (1.4)$$

Demostración. [Taylor and Mann, 1983, Capítulo 8]. □

En la teoría de singularidades, se abordan principalmente problemas de bifurcación escalares, es decir, ecuaciones de la forma $g(x, \lambda) = 0$, donde $x \in \mathbb{R}$ es la variable de estado y $\lambda \in \mathbb{R}$ es el parámetro de bifurcación o entrada del sistema. Al conjunto $\{(x, \lambda) : g(x, \lambda) = 0\}$ se le conoce como diagrama de bifurcación de g . En los diagramas de bifurcación que se muestren posteriormente, el eje de las abscisas representa el parámetro de bifurcación y el eje de las ordenadas la variable de estado.

Denotemos por $g_x(x, \lambda)$ como la derivada de $g(x, \lambda)$ con respecto a x . Si en un punto (x_0, λ_0) la derivada $g_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$, por el teorema 1.1.1, $g(x, \lambda)$ puede ser resuelta de forma única en una vecindad de x como función de λ . Por otro lado si $g_x(x_0, \lambda_0) = 0$, el teorema 1.1.1 no aplica y entonces podemos definir:

Definición 1. Sea $g(x, \lambda) = 0$ una función escalar, es decir, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto (x_0, λ_0) satisfaciendo las siguientes condiciones (comúnmente llamadas de degenerancia para identificar una singularidad)

$$g(x_0, \lambda_0) = g_x(x_0, \lambda_0) = 0, \quad (1.5)$$

se le llama singularidad de $g(x, \lambda)$.

El Teorema de la Función Implícita es una condición necesaria para que $g(x, \lambda)$ posea una bifurcación en el punto (x_0, λ_0) (punto de bifurcación), esta condición es

$g_x(x_0, \lambda_0) = 0$. Sin embargo, observamos que en un punto de singularidad, el diagrama de bifurcación de g no posee necesariamente una bifurcación en el sentido clásico, por ejemplo considerar

- la singularidad histerética: $g(x, \lambda) = -x^3 + \lambda$, cuya gráfica se muestra en la Figura 1.1, y

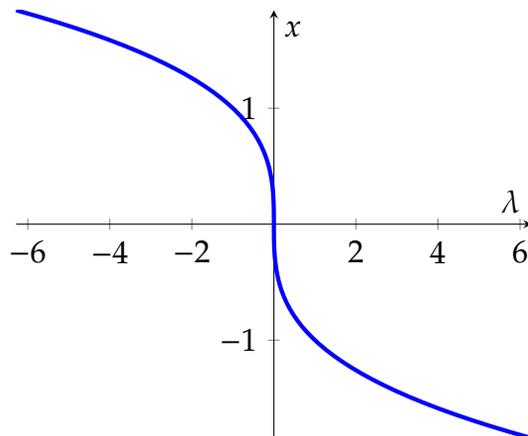


Figura 1.1: Conjunto $\{x, \lambda\}$ de la singularidad histerética

- la singularidad Winged Cusp: $g(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2$, cuya gráfica se muestra en la Figura 1.2.

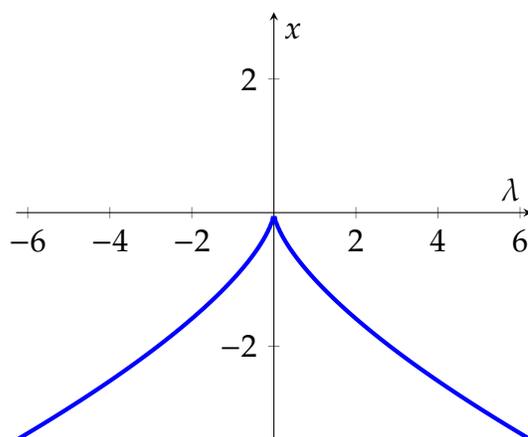


Figura 1.2: Conjunto $\{x, \lambda\}$ de la singularidad winged cusp

Ambos diagramas de bifurcación tienen exactamente una solución para cualquier λ , pero obviamente tienen una singularidad en el origen.

Podemos dar una lista de algunas *formas normales*, denotadas por $h(x, \lambda) = 0$, para distintos tipos de singularidades:

1. $h(x, \lambda) = \epsilon x^2 + \delta \lambda$ (Silla-Nodo);
2. $h(x, \lambda) = \epsilon(x^2 - \lambda^2)$ (Transcrítica);
3. $h(x, \lambda) = \epsilon(x^2 + \lambda^2)$ (Centro Isola);
4. $h(x, \lambda) = \epsilon x^3 + \delta \lambda$ (Histéresis);
5. $h(x, \lambda) = \epsilon x^3 + \delta \lambda x$ (Tridente);
6. $h(x, \lambda) = \epsilon x^3 + \delta \lambda^2$ (Winged Cusp).

El diagrama de bifurcación de estas formas normales es evidente, dada la sencillez de la expresión. Sin embargo, una pregunta natural es la siguiente.

Dado un problema de bifurcación general $g(x, \lambda) = 0$, ¿cómo se puede determinar de forma rigurosa y sencilla, que tipo de singularidad posee?. La próxima sección se encarga de responder a esta pregunta.

Por cuestiones de simplicidad de escritura de las ecuaciones, la teoría de singularidades es formulada en una vecindad del origen. Es decir, a lo largo del documento el punto singular $(x, \lambda) = (x_0, \lambda_0) = (0, 0)$ se denotará por $(x, \lambda) = (0, 0)$ o $x = \lambda = 0$.

1.1.2. Problema de reconocimiento

El problema de reconocimiento se encarga de responder a la pregunta formulada al final de la sección precedente. Su importancia se presenta cuando la función $g(x, \lambda)$, proveniente tal vez de un experimento, no proporciona suficiente información sobre su comportamiento, y en cambio, su equivalencia a una forma normal $h(x, \lambda)$ permite establecer, al menos localmente, la unión con las bifurcaciones.

Antes de presentar la solución del problema de reconocimiento, se enuncian varios conceptos que sirven para entender un poco las bases sobre las cuales se formaliza la idea sobre la resolución de esta problemática.

Definición 2. Se dice que dos mapeos suaves $g, h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, son equivalentes si están relacionados a través de la ecuación

$$S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)) = h(x, \lambda) \quad (1.6)$$

donde $S(x, \lambda) > 0$ y (X, Λ) es un difeomorfismo local que preserva la orientación de x y λ .

Puede observarse en la definición 2, que X es modificado por x y λ , pero Λ solamente por λ , lo cual es justificado por la naturaleza física del sistema, en donde λ actúa como el parámetro de control y x como la variable de estado.

Definición 3. Definimos a $n_g(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ por

$$n_g(\lambda) = \text{el número de soluciones de } g(x, \lambda) \text{ para un } \lambda \text{ dado.} \quad (1.7)$$

Una consecuencia importante de la equivalencia es la siguiente relación.

Proposición 1.1.2. Dos problemas de bifurcación equivalentes $h \sim g$, satisfacen

$$n_g(\Lambda(\lambda)) = n_h(\lambda). \quad (1.8)$$

Demostración. Por un lado supongamos que $g(x, \Lambda(\lambda)) = 0$, entonces

$$h(\tilde{x}, \lambda) = 0, \text{ con } \tilde{x} = X^{-1}(x, \lambda). \quad (1.9)$$

Por el otro lado, $h(x, \lambda) = 0$, entonces

$$g(\tilde{x}, \Lambda(\lambda)) = 0, \text{ con } \tilde{x} = X(x, \lambda). \quad (1.10)$$

□

Si un problema de bifurcación y una singularidad son equivalentes, entonces son difeomorfas, pero el converso no es cierto, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Sea $g(x, \lambda) = x^2 - \lambda^2$, $h(x, \lambda) = X(x, \lambda)^2 - \Lambda(x, \lambda)^2$, donde $X(x, \lambda) = x - \lambda$ y $\Lambda(x, \lambda) = x + \lambda$. Por el teorema de la función inversa, observamos que el mapeo $(x, \lambda) \mapsto (X(x, \lambda), \Lambda(x, \lambda))$ es difeomorfo, pues

$$D(X(x, \lambda), \Lambda(x, \lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

es no singular. Sin embargo,

$$h(x, \lambda) = (x - \lambda)^2 - (x + \lambda)^2 = -4x\lambda \neq g(x, \lambda). \quad (1.12)$$

Además, $n_g(\lambda) = 1$ en $\lambda = 0$ y $n_g(\lambda) = 2 \forall \lambda \neq 0$. Y $n_h(\lambda) = \infty$ en $\lambda = 0$. Por lo tanto, g y h tienen diferente número de soluciones en $\lambda = 0$, es decir, no son equivalente. \square

Ahora, el concepto de equivalencia es refinado de tal manera que el problema de reconocimiento sea fuerte, es decir, que establezca condiciones bajo las cuales un problema de bifurcación suave $g(x, \lambda)$ es fuertemente equivalente a una singularidad elemental dada.

Definición 4. Se dice que dos mapeos suaves $g, h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, son fuertemente equivalentes si existen funciones $S(x, \lambda)$ y $X(x, \lambda)$ que satisfacen

$$X(0, 0) = (0, 0), \quad X_x(x, \lambda) > 0, \quad S(x, \lambda) > 0, \quad (1.13)$$

y tales que la relación

$$g(x, \lambda) = S(x, \lambda)h(X(x, \lambda), \lambda) \quad (1.14)$$

se mantiene suficientemente cerca del origen.

Consideramos las siguientes formas normales:

$$a) h(x, \lambda) = \varepsilon x^k + \delta \lambda, \quad k \geq 2, \quad (1.15)$$

$$b) h(x, \lambda) = \varepsilon x^k + \delta \lambda x, \quad k \geq 3, \quad (1.16)$$

$$c) h(x, \lambda) = \varepsilon (x^2 + \delta \lambda^2), \quad (1.17)$$

$$d) h(x, \lambda) = \varepsilon x^3 + \delta \lambda^2. \quad (1.18)$$

En donde ε o λ son iguales a ± 1 . A continuación, se presenta el problema de reconocimiento para estas formas normales.

Proposición 1.1.3. *Un problema de bifurcación $g(x, \lambda)$ es fuertemente equivalente a $h(x, \lambda) = \varepsilon x^k + \delta \lambda$, con $k \geq 2$, sí y sólo sí en $x = \lambda = 0$*

$$g = \frac{\partial}{\partial x} g = \cdots = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{k-1} g = 0, \quad (1.19)$$

y

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k g, \quad \delta = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) g. \quad (1.20)$$

Demostración. [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Página 94]. □

Proposición 1.1.4. *Un problema de bifurcación $g(x, \lambda)$ es fuertemente equivalente a $h(x, \lambda) = \varepsilon x^k + \delta \lambda x$, con $k \geq 3$, sí y sólo sí en $x = \lambda = 0$*

$$g = \frac{\partial}{\partial x} g = \cdots = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{k-1} g = \frac{\partial}{\partial \lambda} g = 0, \quad (1.21)$$

y

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k g, \quad \delta = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x} \right) g. \quad (1.22)$$

Demostración. [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Página 95]. □

Proposición 1.1.5. *Un problema de bifurcación $g(x, \lambda)$ es fuertemente equivalente a $h(x, \lambda) = \varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2)$, sí y sólo sí en $x = \lambda = 0$*

$$g = g_x = g_\lambda = 0, \quad (1.23)$$

y

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(g_{xx}), \quad \delta = \operatorname{sgn}(\det(d^2g)), \quad (1.24)$$

donde d^2g es la matriz Hessiana de 2×2 de las segundas derivadas de g .

Demostración. [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Página 95]. \square

Proposición 1.1.6. *Un problema de bifurcación $g(x, \lambda)$ es fuertemente equivalente a la winged cusp, $h(x, \lambda) = \varepsilon^3 + \delta\lambda^2$, sí y sólo sí en $x = \lambda = 0$*

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = g_{\lambda x} = 0, \quad (1.25)$$

y

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(g_{xxx}), \quad \delta = \operatorname{sgn}(g_{\lambda\lambda}), \quad (1.26)$$

Demostración. [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Página 96]. \square

Ejemplo 2. El modelo más sencillo de la dinámica neuronal, presentado y analizado en [Izhikevich, 2010], es el siguiente

$$C\dot{x} = \lambda - g_L(x - E_L) - g_{N_a}m_\infty(x)(x - E_{N_a}) \quad \text{con} \quad (1.27)$$

$$m_\infty(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{V_{\frac{1}{2}} - x}{k}}},$$

donde x es el potencial de membrana de la neurona, λ es la corriente de entrada, g_{N_a} es la conductancia de membrana y C, g_L, E_L, E_{N_a}, k y $V_{\frac{1}{2}}$ son constantes dadas. Sean $C = 1, g_L = 1, E_L = -80, E_{N_a} = 60, k = 15, V_{\frac{1}{2}} = -20$ y $g_{N_a} = 0.9941$ con unidades adecuadas, mostrar que el modelo (1.27) es equivalente a una singularidad histerética en una vecindad de $(x_0, \lambda_0) = (-30.3532, 19.6467)$.

Sea $\dot{x} = 0$, entonces el conjunto de puntos fijos está dado por

$$g(x, \lambda) = \lambda - g_L(x - E_L) - g_{N_a} m_\infty(x)(x - E_{N_a}). \quad (1.28)$$

Aplicando la Proposición 1.1.3 con $k = 3$ a (1.28) en $(x_0, \lambda_0) = (-30.3532, 19.6467)$, se obtiene

$$\begin{aligned} g &= \lambda_0 - g_L(x_0 - E_L) - g_{N_a} m_\infty(x_0)(x_0 - E_{N_a}) = 0, \\ g_x &= -g_L - g_{N_a} \frac{\partial}{\partial x} [m_\infty(x_0)(x_0 - E_{N_a})] = 0, \\ g_{xx} &= -g_{N_a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [m_\infty(x_0)(x_0 - E_{N_a})] = 0, \\ \varepsilon &= \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} g(x_0, \lambda_0) \right) = -1, \\ \delta &= \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} g(x_0, \lambda_0) \right) = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto el modelo (1.27) es equivalente a una singularidad histerética en una vecindad de $(x_0, \lambda_0) = (-30.3532, 19.6467)$. \square

1.1.3. Teoría de despliegues

En la subsección anterior, se mostró que para obtener la equivalencia entre un problema de bifurcación $g(x, \lambda)$ y una singularidad $h(x, \lambda)$, basta con calcular únicamente un número finito de derivadas de g en el punto singular. Esta equivalencia es el primer paso para analizar bifurcaciones utilizando el enfoque singular, ya que como se mencionó anteriormente, una forma normal es más sencilla de estudiar cualitativamente. El segundo paso en el estudio de problemas de bifurcación, se refiere a las bifurcaciones imperfectas.

Las bifurcaciones imperfectas, sugieren que el diagrama de bifurcación de una forma normal, $h(x, \lambda)$, se rompe o deforma bajo pequeñas perturbaciones, por ejemplo, la bifurcación tridente perturbada $\dot{x} = x^3 - \lambda x + \epsilon$. En esta subsección, se busca caracterizar estas perturbaciones de tal manera que puedan capturarse en un modelo más general, del cual, sea posible construir todos los diagramas de bifurcación.

De lo anterior, surge la segunda pregunta de la teoría singular: Dado un problema de bifurcación $g(x, \lambda) = 0$, fuertemente equivalente a una singularidad $h(x, \lambda)$ cerca de $x = \lambda = 0$, ¿es posible caracterizar y predecir todos los diagramas de bifurcación, módulo equivalencia, del problema de bifurcación perturbado $g(x, \lambda) + \epsilon p(x, \lambda)$, para un ϵ pequeño y una función $p(x, \lambda)$ suave?. ¡La respuesta es sí!, y la solución se conoce como la teoría de despliegues.

La teoría de despliegues comprende de dos objetivos principales: en el primero se construye una familia de k parámetros $G(x, \lambda, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}^k$, de tal manera que sea equivalente a cualquier perturbación de la forma $g(x, \lambda) + \epsilon p(x, \lambda)$; el segundo explora el modelo $G(x, \lambda, \alpha)$ en el espacio de parámetros \mathbb{R}^k , con el fin de enumerar todos los diagramas de bifurcación que surgen al variar cada parámetro. Con el fin de abordar el primer objetivo, se inicia con algunos conceptos básicos de la teoría de despliegues.

Definición 5. *Un despliegue con k -parámetros de $g(x, \lambda)$, es una función $G(x, \lambda, \alpha)$ con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$, tal que*

$$G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda). \quad (1.29)$$

A los parámetros α se les conoce como parámetros de despliegue.

Por ejemplo, a partir de la definición se dice que $G(x, \lambda, \epsilon) = g(x, \lambda) + \epsilon p(x, \lambda)$ es un despliegue de $g(x, \lambda)$ con un parámetro. Ahora, veamos que relaciones se pueden establecer cuando se tienen dos o más despliegues de varios parámetros.

Si se tienen dos despliegues, $G(x, \lambda, \alpha)$ $\alpha \in \mathbb{R}^k$ y $H(x, \lambda, \beta)$ $\beta \in \mathbb{R}^l$, de g y se supone que para toda $\beta \in \mathbb{R}^l$ se puede encontrar un mapeo $A : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$H(x, \lambda, \beta) \sim G(x, \lambda, A(\beta)), \quad (1.30)$$

se dice que G exhibe todos los comportamientos de H , módulo equivalencia. Esta relación se formaliza en la siguiente definición.

Definición 6. *Sean $G(x, \lambda, \alpha)$ y $H(x, \lambda, \beta)$ dos despliegues de $g(x, \lambda)$. Decimos que $H(x, \lambda, \beta)$ factoriza a través de $G(x, \lambda, \alpha)$ si existen funciones suaves $S(x, \lambda, \beta)$, $X(x, \lambda, \beta)$, $\Lambda(\lambda, \beta)$ y $A(\beta)$,*

que satisfacen

$$X(x, \lambda, 0) = x, \quad \Lambda(\lambda, 0) = \lambda, \quad S(x, \lambda, 0) = 1 \text{ y } A(0) = 0, \quad (1.31)$$

tales que

$$H(x, \lambda, \beta) = S(x, \lambda, \beta)G(X(x, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), A(\beta)). \quad (1.32)$$

Existen casos especiales de despliegues G de g que contienen todas las perturbaciones $g(x, \lambda) + \epsilon p(x, \lambda)$, es decir, cualquier otro despliegue de g puede factorizar a través de G . Lo que se resume en la siguiente definición.

Definición 7. Un despliegue G de g se dice *versal*, si cualquier otro despliegue de g factoriza a través de G . Un despliegue versal se dice *universal*, si depende de un número mínimo de parámetros de despliegue. El número mínimo de parámetros de despliegue, $k \in \mathbb{Z}_+$, por el cual un despliegue es universal, se llama la *codimensión* de g .

Un despliegue universal de g , es una familia de funciones de k -parámetros $G(x, \lambda, \alpha)$ que satisface $G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda)$ y tiene la siguiente propiedad: para cualquier perturbación $p(x, \lambda)$, hay un valor de α tal que $g + \epsilon p$ es equivalente a $G(x, \lambda, \alpha)$.

Una consecuencia importante de lo anterior, es que no ocurrirían comportamientos nuevos al introducir más parámetros a un despliegue universal, ya que la codimensión de g dice el número exacto de parámetros requeridos para describir las perturbaciones de un problema de bifurcación. El siguiente lema, da una forma sencilla de calcular la dimensión de g .

Lema 1.1.7. La codimensión de g es igual al número de condiciones de degenerancia en el problema de reconocimiento para $g - 2$ (sin contar las que se necesitan para identificar una singularidad, es decir $g = g_x = 0$).

Una lista de despliegues universales para las formas normales de singularidades, para las cuales se ha dado la solución del problema de reconocimiento, se muestra en la tabla 1.1.

Forma Normal ($\epsilon = \pm 1, \delta = \pm 1$)	Nombre	Codim.	Despliegue universal $H(x, \lambda, \alpha)$
$\epsilon x^2 + \delta \lambda$	Silla-Nodo	0	-
$\epsilon(x^2 + \delta \lambda^2)$	Transcrítica ó Isola	1	$\epsilon(x^2 + \delta \lambda^2 + \alpha)$
$\epsilon x^3 + \delta \lambda$	Histéresis	1	$\epsilon x^3 + \delta \lambda + \alpha x$
$\epsilon x^2 + \delta \lambda^3$	Cúspide Asimétrica	2	$\epsilon x^2 + \delta \lambda^3 + \alpha + \beta \lambda$
$\epsilon x^3 + \delta \lambda x$	Tridente	2	$\epsilon x^3 + \delta \lambda x + \alpha + \beta x^2$
$\epsilon x^4 + \delta \lambda$	Quartic Fold	2	$\epsilon x^4 + \delta \lambda + \alpha x + \beta x^2$
$\epsilon x^2 + \delta \lambda^4$	-	3	$\epsilon x^2 + \delta \lambda^4 + \alpha + \beta \lambda + \gamma \lambda^2$
$\epsilon x^3 + \delta \lambda^2$	Winged Cusp	3	$\epsilon x^3 + \delta \lambda^2 + \alpha + \beta x + \gamma \lambda x$
$\epsilon x^4 + \delta \lambda x$	-	3	$\epsilon x^4 + \delta \lambda x + \alpha + \beta \lambda + \gamma x^2$
$\epsilon x^5 + \delta \lambda$	-	3	$\epsilon x^5 + \delta \lambda + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$

Cuadro 1.1: Despliegues universales de formas normales de singularidades

La construcción de un despliegue universal es un procedimiento estándar de la teoría singularidades. Los detalles sobre el algoritmo de construcción pueden consultarse en [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Capítulo 3]. Claramente, el despliegue universal de una singularidad dada no es único. Sin embargo, podemos elegir la forma “más sencilla” de este despliegue de forma análoga a como elegimos las formas normales.

Hasta este punto, se conocen los despliegues universales de singularidades elementales o, como puede observarse en la tabla 1.1, formas normales de codimensión igual o menor a tres. Surge entonces, la inquietud de cómo saber si un despliegue de un problema de bifurcación es universal. Tener esta pregunta es totalmente válida ya que en aplicaciones (problemas reales), los modelos se presentan con un gran número de parámetros, es decir, se pueden escribir de la forma $G(x, \lambda, \alpha)$. Surge así otra herramienta útil en aplicaciones de la teoría singular, denominada como el problema de reconocimiento para despliegues universales.

Supongamos que se tiene un despliegue $G(x, \lambda, \alpha)$ de $g(x, \lambda)$, donde g es fuertemente equivalente a una forma normal $h(x, \lambda)$. La pregunta del problema de reconocimiento para despliegues universales es: ¿el modelo $G(x, \lambda, \alpha)$ es un despliegue universal de

$g(x, \lambda)$?. La respuesta a esta pregunta puede encontrarse de manera muy sencilla, en términos de álgebra lineal. A continuación se presentan algunos ejemplos de solución al problema de reconocimiento para despliegues universales. Recordar que el subíndice representa la derivada parcial con respecto a la variable correspondiente.

Proposición 1.1.8. *Supóngase que $g(x, \lambda)$ es equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda$, y sea $G(x, \lambda, \alpha)$ un despliegue de g de un parámetro. Entonces G es un despliegue universal de g sí y sólo sí*

$$\det \begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (1.33)$$

en $x = \lambda = \alpha = 0$.

Demostración. [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Página 136]. □

Proposición 1.1.9. *Sea $G(x, \lambda, \alpha, \beta)$ un despliegue de dos parámetros de $g(x, \lambda)$ equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda x$. Entonces G es un despliegue universal de g sí y sólo sí*

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (1.34)$$

en $x = \lambda = \alpha = \beta = 0$.

Demostración. [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Página 138]. □

Proposición 1.1.10. *Sea $G(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma)$ un despliegue de tres parámetros de $g(x, \lambda)$ equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda^3$. Entonces G es un despliegue universal de g sí y sólo sí*

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xxx} & g_{xx\lambda} \\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\lambda} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\lambda} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (1.35)$$

en $x = \lambda = \alpha = \beta = \gamma = 0$.

Demostración. [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Página 139]. \square

Ejemplo 3. Tomando a g_{N_a} como parámetro de despliegue α en el modelo (1.27) de la dinámica neuronal, mostrar que

$$G(x, \lambda, \alpha) = \lambda - g_L(x - E_L) - g_{N_a} m_\infty(x)(x - E_{N_a}) \quad (1.36)$$

es un despliegue universal de la singularidad histéresis en el punto de singularidad $(x_0, \lambda_0, \alpha) = (-30.3532, 19.6467, 0.9941)$.

Del ejemplo 2 recordemos que para $g_{N_a} = 0.9941$, $g(x, \lambda) \sim h(x, \lambda) = -x^3 + \lambda$. Entonces utilizando la proposición 1.1.8 se calcula la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} \\ G_\alpha & g_{\alpha x} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m_\infty(x_0 - E_{N_a}) & -\frac{\partial}{\partial x}[m_\infty(x_0)(x_0 - E_{N_a})] \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}[m_\infty(x_0)(x_0 - E_{N_a})] = 1.0058 \neq 0, \end{aligned}$$

en $(x_0, \lambda_0, \alpha) = (-30.3532, 19.6467, 0.9941)$. Por lo tanto el modelo (1.36) es un despliegue universal de la singularidad histerética, con g_{N_a} como parámetro de despliegue. \square

El segundo objetivo de la teoría de despliegues, consiste en explorar el espacio de parámetros \mathbb{R}^k del despliegue universal, con el fin de enumerar todos los posibles diagramas de bifurcación que se pueden obtener al variar cada parámetro. Esto es posible ya que los todos diagramas de bifurcación de $g(x, \lambda) + \epsilon p(x, \lambda)$ son, módulo equivalencia, los del despliegue universal $G(x, \lambda, \alpha)$, el cual es más fácil de analizar.

La idea principal sobre esto, es mostrar que ciertos diagramas de bifurcación de G permanecen sin cambio ante pequeñas perturbaciones, es decir, son equivalentes. A un diagrama de bifurcación con esta propiedad se le llama diagrama persistente.

Definición 8. Una bifurcación es persistente si su diagrama de bifurcación no cambia cualitativamente bajo pequeñas perturbaciones, es decir, $g(x, \lambda) + \epsilon p(x, \lambda) \sim g(x, \lambda) \forall p(x, \lambda)$ y ϵ pequeña.

En otras palabras, la definición dice que si un despliegue $G(x, \lambda, \alpha^*)$ es persistente, entonces existe una vecindad V de α^* , tal que $\forall \alpha \in V$ se cumple lo siguiente

$$G(x, \lambda, \alpha) \sim G(x, \lambda, \alpha^*). \quad (1.37)$$

En realidad, puede ser complicado abordar el problema estudiando los diagramas persistentes. Entonces el análisis se enfocará en buscar comportamientos de no persistencia en el espacio de R^k . Las fuentes más genéricas de no persistencia son las tres bifurcaciones de codimensión 1:

- Histéresis: $\pm x^3 \pm \lambda$. Un ejemplo de la no persistencia se muestra en la Figura 1.3.

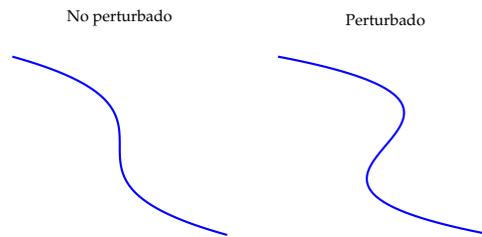


Figura 1.3: Diagrama de bifurcación no persistente en la histéresis.

- Transcrítica e Isola: $\pm x^2 \pm \lambda^2$. Un ejemplo de la no persistencia se muestra en la Figura 1.4.

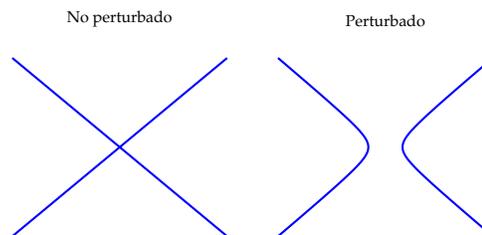


Figura 1.4: Diagrama de bifurcación no persistente en la transcrítica o isola.

También existen comportamientos de no persistencia no locales llamados puntos doble silla-nodo. Utilizando la solución del problema de reconocimiento, es posible definir subconjuntos en el espacio de despliegues donde se encuentran estos fenómenos no persistentes, lo cual se muestra en la siguiente definición.

Definición 9.

1. $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } G = G_x = G_\lambda = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha)\}$.
2. $\mathcal{H} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } G = G_x = G_{xx} = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha)\}$.
3. $\mathcal{D} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists(x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x_1 \neq x_2, \text{ tal que } G = G_x = 0 \text{ en } (x_i, \lambda, \alpha), i = 1, 2\}$.
4. $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{D} = \text{Conjunto de transición}$.

Una observación importante sobre la definición anterior se muestra a continuación:

1. Si $\alpha^* \in \mathcal{B}$, el diagrama de bifurcación de $G(x, \lambda, \alpha^*)$ posee una bifurcación transcritical o una isola.
2. Si $\alpha^* \in \mathcal{H}$, el diagrama de bifurcación de $G(x, \lambda, \alpha^*)$ posee una bifurcación histéresis.
3. Si $\alpha^* \in \mathcal{D}$, el diagrama de bifurcación de $G(x, \lambda, \alpha^*)$ posee una doble silla-nodo.
4. Si $\alpha^* \notin \Sigma$, el diagrama de bifurcación es persistente.

La forma de encontrar los conjuntos \mathcal{B} , \mathcal{H} y \mathcal{D} ó el conjunto de transición Σ , es resolver dos de las ecuaciones para x y λ como función de α . Entonces, al sustituir el resultado en la tercer ecuación, se obtiene una ecuación simple para α . Este proceso puede introducir singularidades en las soluciones y ciertas desigualdades para los valores de los α 's.

Es también natural esperar que si $g(x, \lambda)$ y su despliegue universal $G(x, \lambda, \alpha)$ son mapas polinomiales, entonces el conjunto Σ también está definido por igualdades y desigualdades polinomiales. Así, se resulta el siguiente teorema.

Teorema 1.1.11. *Sea $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo polinomial de codimensión finita y sea $G(x, \lambda, \alpha)$ un despliegue universal también polinomial. Entonces el conjunto de transición Σ es una variedad semi-algebraica en \mathbb{R} de codimensión 1.*

Se enuncia ahora un lema que será útil para encontrar el conjunto de transición de varios despliegues universales.

Lema 1.1.12. Si $h(x)$ es un polinomio de grado 3 o menor tal que $h = h_x = 0$ en dos puntos distintos x_1 y x_2 , entonces $h \equiv 0$.

Demostración. [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Página 146]. □

A continuación se presentan dos ejemplos: la singularidad histéresis y la tridente. Utilizando el despliegue universal, se encuentra el conjunto de transición y se dibujan los diagramas persistentes.

Ejemplo 4. Para el despliegue universal de la histéresis $H(x, \lambda, \alpha) = -x^3 - \lambda + \alpha x$, encontrar el conjunto de transición y dibujar todos los diagramas persistentes.

Desde que $H(x, \lambda, \alpha)$ tiene grado 3, por el Lema 1.1.12 el conjunto $\mathcal{D} = \emptyset$. Por lo que sólo basta con calcular \mathcal{B} y \mathcal{H} .

Para $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } H = H_x = H_\lambda = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha)\}$.

$$H = -x^3 - \lambda + \alpha x = 0$$

$$H_x = -3x^2 + \alpha = 0$$

$$H_\lambda = -1 = 0.$$

Lo que resulta $\mathcal{B} = \emptyset$.

Para $\mathcal{H} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } H = H_x = H_{xx} = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha)\}$.

$$H = -x^3 - \lambda + \alpha x = 0$$

$$H_x = -3x^2 + \alpha = 0$$

$$H_{xx} = -6x = 0.$$

Entonces se obtiene que $\mathcal{H} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = 0\}$. Por lo tanto $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{D} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = 0\}$. En la Figura 1.5 se muestran los diagramas persistentes de la singularidad histéresis en el espacio de parámetros \mathbb{R} .

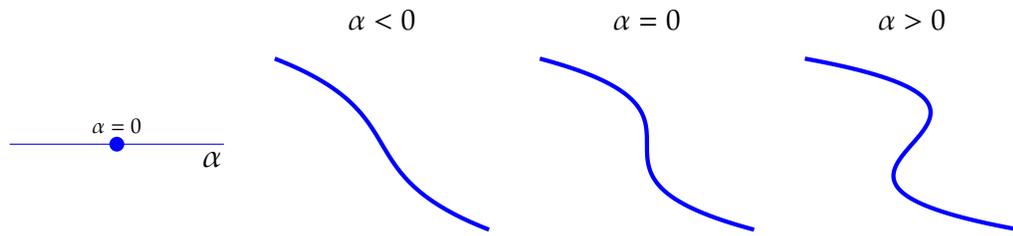


Figura 1.5: Diagramas persistentes de la histéresis

□

Ejemplo 5. Para el despliegue universal de la tridente $H(x, \lambda, \alpha) = x^3 - \lambda x + \alpha + \beta x$, encontrar el conjunto de transición y dibujar todos los diagramas persistentes.

Desde que $H(x, \lambda, \alpha)$ tiene grado 3, por el Lema 1.1.12 el conjunto $\mathcal{D} = \emptyset$. Por lo que sólo basta con calcular \mathcal{B} y \mathcal{H} .

Para $\mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \exists(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } H = H_x = H_\lambda = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha, \beta)\}$.

$$H = x^3 - \lambda x + \alpha + \beta x = 0$$

$$H_x = 3x^2 - \lambda + 2\beta x = 0$$

$$H_\lambda = -x = 0.$$

Lo que resulta $\mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = 0\}$.

Para $\mathcal{H} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \exists(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } H = H_x = H_{xx} = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha, \beta)\}$.

$$H = x^3 - \lambda x + \alpha + \beta x = 0$$

$$H_x = 3x^2 - \lambda + 2\beta x = 0$$

$$H_{xx} = -6x + 2\beta.$$

Resolviendo se obtiene que $\mathcal{H} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \frac{\beta^3}{27}\}$. Por lo tanto $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{D} = \{\alpha = 0\} \cup \{\alpha = \frac{\beta^3}{27}\}$. En la Figura 1.6 se muestran los diagramas persistentes de la singularidad tridente en el espacio de parámetros \mathbb{R}^2 .

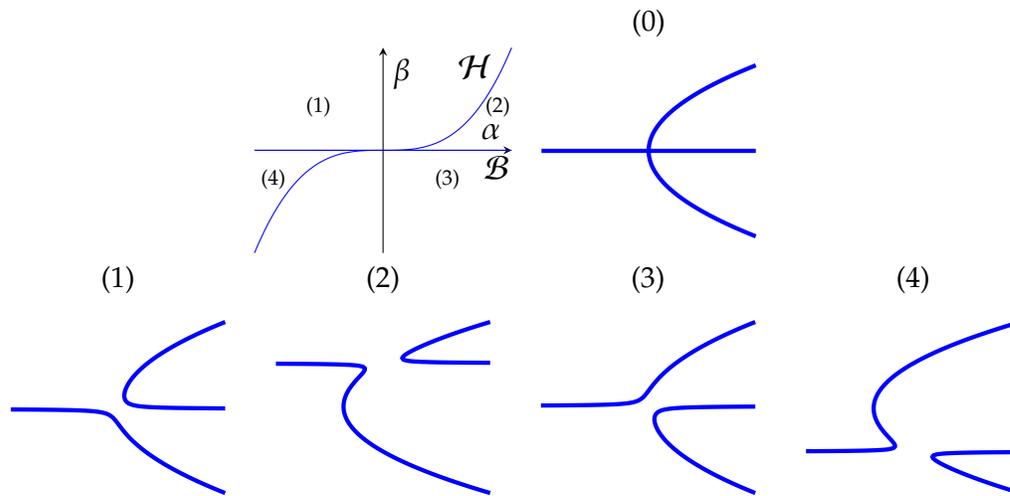


Figura 1.6: Diagramas persistentes de la tridente

□

Para concluir, se menciona que en [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Página 205] hay una tabla de variedades de transición y diagramas persistentes para los demás despliegues universales de la tabla 1.1.

1.1.4. Teorema de clasificación

El propósito de esta sección es unir las herramientas anteriores con el fin de clasificar todos los problemas de bifurcación de codimensión tres o menor. En la subsección anterior, se mostró en la tabla 1.1 once singularidades o formas normales cuya codimensión es menor o igual a tres, a éstas se les llamará bifurcaciones elementales. Una lista de bifurcaciones elementales de codimensión menor o igual a siete, se puede encontrar en [Keyfitz, 1986].

Teorema 1.1.13. (*Teorema de clasificación*) Sea $g(x, \lambda)$ tal que $g(x, \lambda) = g_x(x, \lambda) = 0$ en $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$ y $\text{codimensión}(g) \leq 3$, entonces $g(x, \lambda)$ es fuertemente equivalente a una de las bifurcaciones elementales.

La prueba de este teorema es constructiva, y se forma enumerando todas las posibles combinaciones de las derivadas de g que aparecen para problemas de bifurcación.

Demostración. [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Página 200]. □

A continuación se presentan varias consecuencias y observaciones del teorema de clasificación, las cuales están directamente ligadas a problemas de bifurcación reales.

Este teorema provee mucha información sobre los posibles diagramas de bifurcación que pueden ser encontrados en la naturaleza con mayor facilidad, es decir, hay una gran probabilidad de que los diagramas de bifurcación persistentes de una de las bifurcaciones elementales, sean observados al tratar con un problema experimental.

De lo anterior se puede deducir, cual es la singularidad que organiza al sistema que se está estudiando. Viceversa, si observamos un diagrama de bifurcación que no se encuentra en los diagramas de bifurcación persistentes de las bifurcaciones elementales, se sabe entonces que el modelo del sistema tendrá una codimensión más alta.

Si todos los comportamientos experimentales o numéricos de un modelo que se esté estudiando, presentan todos los diagramas persistentes de una singularidad o bifurcación elemental, se dice que está singularidad es el *centro organizador* del modelo. Este término será muy utilizado en lo que resta del documento.

1.2. Teoría geométrica de perturbaciones singulares

La teoría geométrica de perturbaciones singulares, es un método cualitativo que aproxima soluciones en el espacio de fase de sistemas no lineales que presentan estructuras con múltiples escalas de tiempo. Las escalas de tiempo que se presentan comúnmente son las lentas y las rápidas.

En esta sección se presenta una breve introducción a este método. Por lo que, si quiere profundizar sobre el tema se puede consultar [Jones, 1995] o el trabajo de Neil Fenichel [Fenichel, 1972].

Antes de enunciar los teoremas principales o los teoremas de Fenichel de la teoría, es necesario presentar el contexto matemático sobre el cual funciona la teoría, el cual es desarrollado en la primer subsección. En la segunda subsección se presentan los teoremas de Fenichel y, finalmente, se muestra un ejemplo donde se analiza un sistema con esta metodología.

1.2.1. Antecedentes matemáticos

Se consideran ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, \epsilon) \\y' &= \epsilon g(x, y, \epsilon),\end{aligned}\tag{1.38}$$

donde $(\cdot)' = \frac{d}{dt}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$ y $\epsilon \in \mathbb{R}$. El sistema anterior puede reescribirse utilizando un cambio de variable $\tau = \epsilon t$, visto como un cambio en la escala de tiempo, como

$$\begin{aligned}\epsilon \dot{x} &= f(x, y, \epsilon) \\ \dot{y} &= g(x, y, \epsilon),\end{aligned}\tag{1.39}$$

donde $(\cdot) = \frac{d}{d\tau}$. Para ϵ pequeños, observese que t actúa como una variable rápida, mientras que τ como una variable lenta. Ambos sistemas son equivalentes para toda $\epsilon > 0$, y se conocen como el sistema rápido (1.38) y el sistema lento (1.39).

Los teoremas que serán aplicados a este tipo de sistemas, son los enunciados por Fenichel en [Fenichel, 1972], los cuales requieren ciertas hipótesis (denotadas por H) sobre (1.38) y (1.39). La primer hipótesis que se tiene es la siguiente

H 1. Las funciones f, g se asumen C^∞ en un conjunto $U \times I$, donde $U \subset \mathbb{R}^N$ es abierto con $N = n + l$, y $0 \subset I \subset \mathbb{R}$.

Tomando $\epsilon = 0$, los sistemas (1.38) y (1.39) pierden su equivalencia, dando dos sistemas con propiedades estructurales totalmente diferentes. Para (1.38) resulta

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, 0) \\y' &= 0,\end{aligned}\tag{1.40}$$

y se le conoce como la dinámica capa y se observa que mientras x varía, y permanece constante, entonces a x se le llama la variable rápida. De igual manera, tomando $\epsilon = 0$ en (1.39) se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= f(x, y, 0) \\ \dot{y} &= g(x, y, 0),\end{aligned}\tag{1.41}$$

al cual se le conoce como la dinámica reducida. Esta dinámica puede entenderse como el flujo definido en el conjunto $\{(x, y) : f(x, y, 0) = 0\}$ por $\dot{y} = g(x, y, 0)$.

De lo anterior, se tiene el comportamiento de cada sistema. El sistema capa tiene un continuo de puntos críticos, al cual, por ejemplo si son estables, la solución converge rápidamente; mientras que el sistema reducido, dice como es el flujo lento en este conjunto de equilibrios. Juntando la información anterior obtenemos un comportamiento global no trivial. En otras palabras, para (1.40) el flujo sobre $f(x, y, 0)$ es trivial, mientras que para (1.41) no lo es, pero no está definido fuera de este conjunto.

El objetivo de la teoría geométrica de perturbaciones singulares es unir ambos comportamientos cuando $\epsilon = 0$, y tratar de predecir el comportamiento de (1.38) o (1.39) cuando $\epsilon \neq 0$.

Definición 10. Al conjunto $f(x, y, 0) = 0$ se le conoce como *variedad crítica* y se denota por

$$\mathcal{S}_0 = \{(x, y) : f(x, y, 0) = 0\}. \quad (1.42)$$

Generalmente (lejos de singularidades), \mathcal{S}_0 es una variedad suave de dimensión l . Se toma un conjunto con esta característica $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{S}_0$, tal que las direcciones normales corresponden a valores propios no neutrales.

Definición 11. La variedad \mathcal{M}_0 es *normalmente hiperbólica* con respecto a (1.40) si $\forall (x, y) \in \mathcal{M}_0$ el Jacobiano de (1.40), es decir,

$$J_{(1.40)} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

posee exactamente l valores propios con parte real cero.

Una consecuencia de la definición 11 y por el Teorema de la Función Implícita, es que \mathcal{M}_0 puede escribirse como $\mathcal{M}_0 = \{(x, y) : x = h_0(y)\}$, es decir, \mathcal{M}_0 es dada como la gráfica de una función x en términos de y .

Definición 12. Un conjunto \mathcal{M} es localmente invariante para (1.38) y (1.39) si hay una vecindad V , tal que las trayectorias no pueden dejar \mathcal{M} sin dejar también V . En otras palabras, $\forall x \in \mathcal{M}$ existe una $\tau > 0$ tal que

$$\phi(x, t) \in \mathcal{M} \forall t \in [-\tau, \tau]. \quad (1.44)$$

Con estas definiciones es posible enunciar, las siguientes hipótesis

H 2. La variedad \mathcal{M}_0 es una variedad compacta, posiblemente con bordes y normalmente hiperbólica con respecto a (1.40).

H 3. La variedad \mathcal{M}_0 es dada como la gráfica de una función $h_0(y) \in C^\infty$ para $y \in K$, donde K es un conjunto compacto simplemente conectado, cuya frontera es una subvariedad C^∞ $(l - 1)$ dimensional.

1.2.2. Teoremas de Fenichel

El primer Teorema de Fenichel asegura la existencia de una variedad que es una perturbación de \mathcal{M}_0 . Esta variedad perturbada, será conectada con el comportamiento de (1.38) y (1.39) cuando $\epsilon \neq 0$.

Teorema 1.2.1. (Primer Teorema de Fenichel) Bajo las hipótesis H1 y H2, existe un $\bar{\epsilon} > 0$ tal que para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}]$, existe una variedad \mathcal{M}_ϵ difeomorfa a \mathcal{M}_0 y $O(\epsilon)$ -cerca a \mathcal{M}_0 tal que

- \mathcal{M}_ϵ es localmente invariante para (1.38).
- \mathcal{M}_ϵ es C^r para todo $r \in \mathbb{N} \subset \epsilon$.

Demostración. [Jones, 1995]. □

La variedad \mathcal{M}_ϵ será llamada la variedad lenta, y debe notarse que por continuidad también es normalmente hiperbólica y es localmente invariante debido posiblemente, a la presencia de la frontera y a que las trayectorias de \mathcal{M}_ϵ pueden salir esta. Es por lo

anterior, que se puede llevar a cabo la conexión del comportamiento sobre \mathcal{M}_ϵ con el del sistema (1.38).

Utilizando las hipótesis H1, H2 y H3, se puede reformular el Primer Teorema de Fenichel en término de funciones.

Teorema 1.2.2. *Existe un $\bar{\epsilon} > 0$, tal que para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}]$ hay una función $h_\epsilon(y)$ tal que $\mathcal{M}_\epsilon = \{(x, y) : x = h_\epsilon(y)\}$ es localmente invariante para (1.38), donde $h_\epsilon(y)$ es C^r para todo $r \in \mathbb{N} \subset \epsilon$.*

Demostración. [Jones, 1995]. □

Así, sustituyendo $h_\epsilon(y)$ en (1.38) se observa que las ecuaciones se desacoplan de x , es decir, se obtiene una ecuación para la variación de la variable y

$$y' = \epsilon g(h_\epsilon(y), y, \epsilon). \quad (1.45)$$

Desde que la variedad \mathcal{M}_ϵ está escrita en función de y , la ecuación (1.45) describe el flujo sobre esta. De igual manera, esto pasa en el caso reescalado

$$\dot{y} = g(x, h_\epsilon(y), \epsilon). \quad (1.46)$$

Tomando el límite $\epsilon = 0$ en (1.46), se observa que naturalmente describe el flujo sobre la variedad \mathcal{M}_0 . Por lo tanto, (1.45) y (1.46) son una pequeña perturbación de (1.40) y (1.41).

El segundo teorema de Fenichel asegura la existencia de las variables estables e inestables de la variedad lenta, es decir, la variedad \mathcal{M}_ϵ posee variedades locales estables y locales inestables, que son perturbaciones de las variedades estables e inestables de \mathcal{M}_0 . Debido a que \mathcal{M}_0 es normalmente hiperbólica, tiene sentido hablar de las variedades estables e inestables.

Definición 13. *Sea $V_0 \in \mathcal{M}_0$, y sean $\mathcal{W}_{loc}^s(V_0)$ y $\mathcal{W}_{loc}^u(V_0)$ su variedades estable e inestable con respecto a la dinámica capa (1.40). Entonces se define a las variedades estables e inestables*

de \mathcal{M}_0 como

$$\mathcal{W}^{s,u}(\mathcal{M}_0) = \cup_{V_0 \in \mathcal{M}_0} \mathcal{W}^{s,u}(V_0). \quad (1.47)$$

Observe que $\mathcal{W}^{s,u}(\mathcal{M}_0)$ son variedades suaves e invariantes con respecto a (1.40).

Teorema 1.2.3. (Segundo Teorema de Fenichel) Bajo las hipótesis H1, H2 y H3, existe un $\bar{\epsilon}$ tal que para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}]$, existen variedades $\mathcal{W}_{loc}^{s,u}(\mathcal{M}_\epsilon)$ que están $O(\epsilon)$ -cerca de $\mathcal{W}_{loc}^{s,u}(\mathcal{M}_0)$ respectivamente. Además, son localmente invariantes para (1.38) y (1.39), y $(C)^r$ en (x, y, ϵ) para toda $r \in \mathbb{N}$.

Demostración. [Jones, 1995]. □

El comportamiento sobre \mathcal{M}_ϵ no puede decirse igual al de \mathcal{M}_0 , ya que no es un conjunto de equilibrios. Sin embargo, se puede decir que el flujo sobre $\mathcal{W}^s(\mathcal{M}_\epsilon)$ decaerá a \mathcal{M}_ϵ exponencialmente, con la advertencia de que el decaimiento existirá siempre y cuando el flujo se mantenga en una vecindad D . Lo anterior se detalla en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.4. Sea $d(., .)$ la distancia Euclidiana, entonces

- Existen $k_s > 0$ y $\alpha_s > 0$ reales, tales que si $V \in \mathcal{W}^s(\mathcal{M}_\epsilon)$ y un flujo $\phi_{(1.38)}(V, [0, T]) \in \mathcal{W}^s(\mathcal{M}_\epsilon)$, $T > 0$, entonces

$$d(\phi(V, t), \mathcal{M}_\epsilon) \leq k_s e^{\alpha_s t}, \forall t \in [0, T]. \quad (1.48)$$

- Existen $k_u > 0$ y $\alpha_u > 0$ reales, tales que si $V \in \mathcal{W}^u(\mathcal{M}_\epsilon)$ y un flujo $\phi_{(1.38)}(V, [0, T]) \in \mathcal{W}^u(\mathcal{M}_\epsilon)$, $T < 0$, entonces

$$d(\phi(V, t), \mathcal{M}_\epsilon) \leq k_u e^{\alpha_u t}, \forall t \in [0, T]. \quad (1.49)$$

Demostración. [Jones, 1995]. □

1.2.3. Ejemplo: Modelo de Fitzhugh-Nagumo

Uno de los modelos más importantes en el estudio de la dinámica neuronal, fué presentado por Hodgkin-Huxley en [Hodgkin and Huxley, 1952]. Este modelo explica como se generan los potenciales de acción en el axón de una neurona de un calamar gigante. Para lograr esto, Hodgkin-Huxley propusieron un modelo de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, que describen como las conductancias y las corrientes dependen del potencial de membrana de la neurona.

Los posibles comportamientos neuronales modelados por estas ecuaciones son: la excitabilidad y la generación periódica de potenciales de acción.

Debido al complejo análisis que requiere el modelo de Hodgkin-Huxley, Richard Fitzhugh propone en [Fitzhugh, 1961] un modelo reducido que resulta ser más sencillo. Sin embargo, este modelo reproduce solamente el comportamiento cualitativo, pero explica geoméricamente todos los comportamientos del modelo de Hodgkin-Huxley, dejando por un lado los aspectos fisiológicos de la neurona.

En su artículo, Fitzhugh lleva a cabo el análisis del modelo utilizando un enfoque de análisis clásico, pero se mostrará que se puede llegar al mismo resultado e incluso dar más información, utilizando los métodos singulares estudiados en este capítulo. Después de cambios de variables, el modelo propuesto por Fitzhugh puede escribirse como:

$$x' = -\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{b}(I - y) \quad (1.50)$$

$$y' = \epsilon(x - y), \quad (1.51)$$

donde I es la corriente aplicada al axón, $b > 0$ y $0 < \epsilon \ll 1$.

Viendo a x como la variable de estado y a $\bar{\lambda} = I - y$ como el parámetro de bifurcación, es claro que el lado derecho de (1.50), es el despliegue universal de la histéresis. Por lo tanto, podemos reescribir el modelo de Fitzhugh como un caso particular de esta familia de sistemas

$$x' = G_{Hys}(x, \lambda - y, \alpha) \quad (1.52)$$

$$y' = \epsilon(x - y), \quad (1.53)$$

donde $G_{Hys}(x, \lambda - y, \alpha) = -x^3 + \alpha x + (\lambda - y)$. Esta escritura es más conveniente, ya que podemos caracterizar todos los posibles comportamientos de (1.52) y (1.53), y en particular el comportamientos de (1.50) y (1.51).

Tomando $\epsilon = 0$, la dinámica capa resulta

$$x' = G_{Hys}(x, \lambda - y, \alpha) \quad (1.54)$$

$$y' = 0,$$

y la dinámica reducida

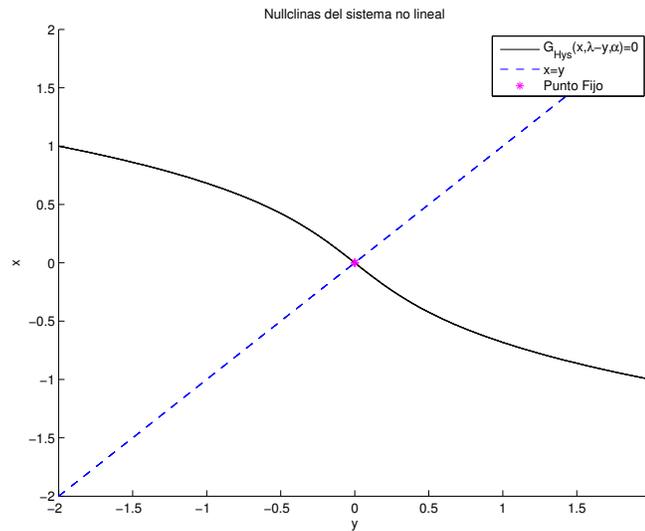
$$0 = G_{Hys} \quad (1.55)$$

$$\dot{y} = x - y.$$

Del ejemplo 4, recordamos que la singularidad tiene dos diagramas persistentes dependiendo del valor de α . Para ambos casos, se estudian las variedades críticas y su hiperbolicidad para poder dibujar el diagrama de fase singular y el diagrama de fase del sistema original.

Para $\alpha < 0$:

En este caso, en la Figura 1.7 se muestra las nullclinas correspondientes en el plano de fase.

Figura 1.7: Nullclinas del sistema para $\alpha < 0$

La variedad crítica \mathcal{S}_0 del sistema capa-reducido es:

$$\mathcal{S}_0 = \{(x, y) : G_{Hys}(x, \lambda - y, \alpha) = 0\}. \quad (1.56)$$

Para estudiar la hiperbolicidad normal de la variedad crítica obtenemos la derivada con respecto a x

$$G_{Hys,x} = -3x^2 + \alpha < 0, \quad (1.57)$$

entonces \mathcal{S}_0 es normalmente hiperbólica $\forall \alpha$ y atractiva en todos los puntos.

Por lo tanto se puede predecir el comportamiento sobre \mathcal{S}_0 como sigue: cada solución del sistema (1.54) converge a \mathcal{S}_0 , una vez en esta variedad las trayectorias del sistema (1.55) satisfacen

$$\dot{y} = \begin{cases} \dot{y} < 0 & \text{sí } y > x \\ \dot{y} > 0 & \text{sí } y < x. \end{cases}$$

Con la información anterior, es posible dibujar el diagrama de fase singular, el cual es mostrado en la Figura 1.8.

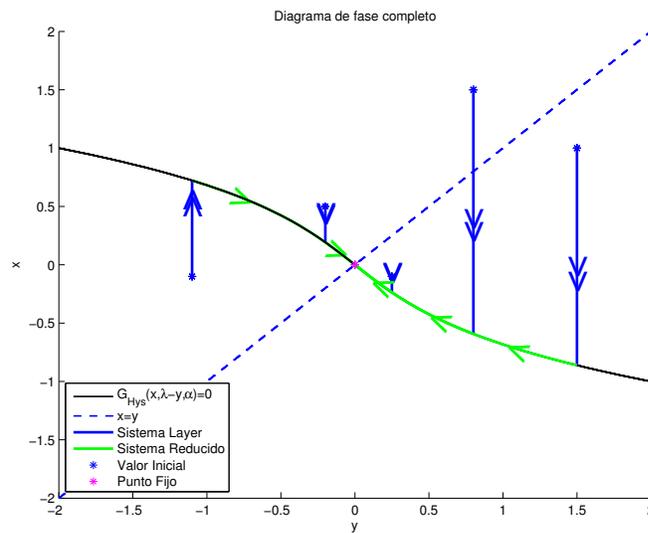


Figura 1.8: Diagrama de fase singular para $\alpha < 0$. En líneas azules se presenta la trayectoria del sistema capa y en líneas verdes las del sistema reducido. Las dobles flechas azules representa que x es la variable rápida y la flecha verde, que y es la variable lenta.

Finalmente, en la Figura 1.9 se muestra el diagrama de fase completo para $\epsilon \neq 0$. Se observa que para toda λ y $\alpha < 0$, las trayectorias convergen al punto fijo P (punto de intersección de las dos nulclinas). Por lo tanto se concluye que el punto fijo es globalmente asintóticamente estable.

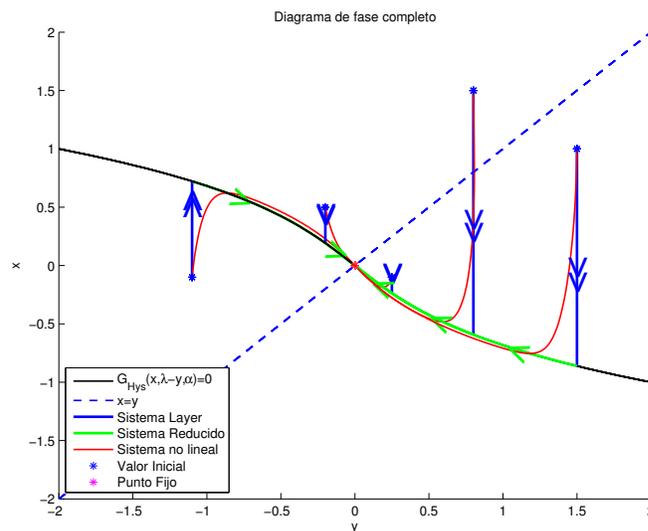


Figura 1.9: Diagrama de fase completo para $\alpha < 0$

Para $\alpha > 0$:

En la Figura 1.10 se muestran las nullclinas del modelo no lineal cuando $\alpha > 0$.

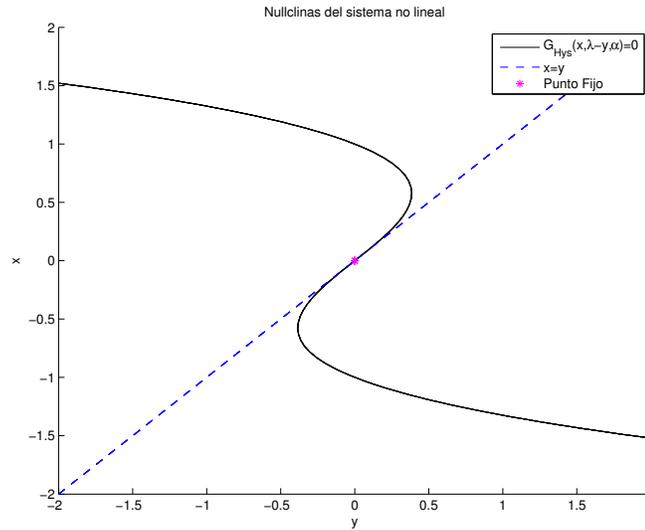


Figura 1.10: Nullclinas del sistema para $\alpha > 0$. Se observa que la nullclina del sistema $G_{Hys}(x, \lambda - y, \alpha)$ es un diagrama de bifurcación persistente de la histéresis, presentado en el Ejemplo 4.

La variedad crítica \mathcal{S}_0 es la misma que el caso anterior, pero veamos que sucede con la hiperbolicidad normal, al derivar con respecto a x obtenemos

$$G_{Hys,x} = -3x^2 + \alpha, \quad (1.58)$$

se observa que la derivada tiene tres distintos valores dependiendo del valor de x , es decir,

$$G_{Hys,x} = \begin{cases} G_{Hys,x} < 0 & \text{para todo } |x| > \pm \sqrt{\frac{\alpha}{3}}, \\ G_{Hys,x} > 0 & \text{para todo } |x| < \pm \sqrt{\frac{\alpha}{3}}, \\ G_{Hys,x} = 0 & \text{para } x = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{3}}. \end{cases}$$

Por lo tanto, la variedad crítica no es normalmente hiperbólica para $x = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{3}}$, mientras que los conjuntos

$$\mathcal{S}_0^+ = \mathcal{S}_0 \cap \{x > \sqrt{\frac{\alpha}{3}}\} \quad (1.59)$$

$$\mathcal{S}_0^- = \mathcal{S}_0 \cap \{x < -\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\}, \quad (1.60)$$

son normalmente hiperbólicos y atractivos, y la rama

$$\mathcal{S}_0^u = \mathcal{S}_0 \cap \{-\sqrt{\frac{\alpha}{3}} < x < \sqrt{\frac{\alpha}{3}}\}, \quad (1.61)$$

es normalmente hiperbólica y repulsiva.

Entonces, para $\lambda = 0$ y $0 < \alpha < 1$ el plano de fase singular es, cualitativamente, el mostrado en la Figura 1.11.

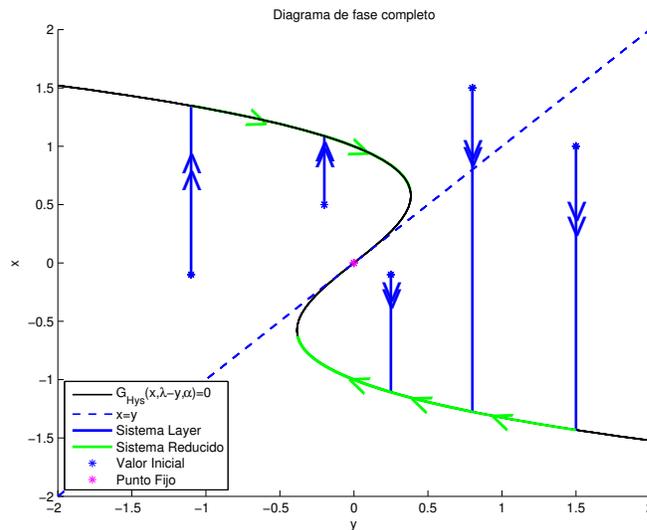


Figura 1.11: Diagrama de fase singular para $\alpha > 0$. En líneas azules se presenta la trayectoria del sistema capa y en líneas verdes las del sistema reducido. Las dobles flechas azules representa que x es la variable rápida y la flecha verde, que y es la variable lenta.

Así, se pueden aplicar los Teoremas de Fenichel para $\mathcal{S}_0^{+,-,u}$, pero no se puede decir algo cerca de los puntos en donde \mathcal{S}_0 no es normalmente hiperbólica. En los puntos en donde ocurre esto, es necesario realizar una desingularización o *blow-up*, de tal manera

que surgan puntos hiperbólicos donde si aplica la teoría de Fenichel y así, sea posible seguir con la construcción de las trayectorias.

La desingularización para sistemas dinámicos singularmente perturbados, en donde la variedad crítica \mathcal{S}_0 tiene una singularidad transcítica o tridente, es realizada en [Krupa and Szmolyan, 2001]. Debido a que es un tema muy extenso, la desingularización sobre el punto en donde \mathcal{S}_0 no es normalmente hiperbólica, no se realizará para el modelo de Fitzhugh-Nagumo. Sin embargo, es posible predecir la trayectoria, la cual se muestra en la Figura 1.12.

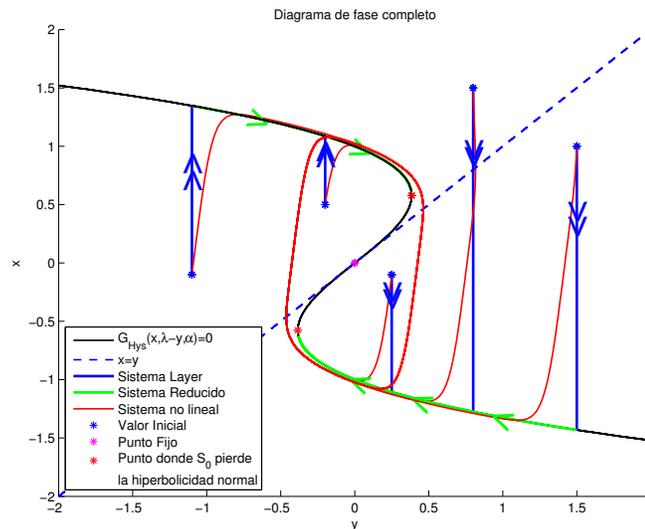


Figura 1.12: Diagrama de fase completo para $\alpha > 0$. La línea de color rojo representa la solución numérica del modelo no lineal, donde se observa que cuando no se encuentra en alguna de las variedades $\mathcal{S}_0^{+,-}$ se converge rápidamente a una estas, según sea el caso.

Se observa en la Figura 1.12 que para cualquier condición inicial, las trayectorias del sistema convergen hacia un ciclo límite atractor. La respuesta temporal del modelo se presenta en la Figura 1.13, donde se pueden observar claramente las oscilaciones no lineales las cuales son cualitativamente similares a las presentadas en [Fitzhugh, 1961] y al *spiking* neuronal.

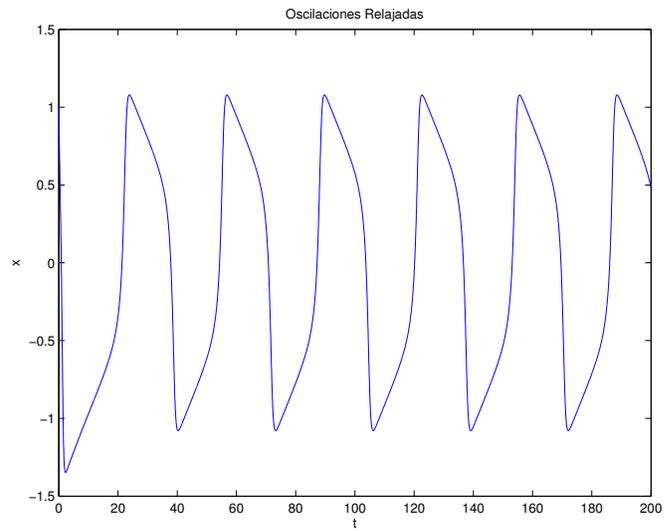


Figura 1.13: Respuesta temporal del modelo cuando $\alpha > 0$.

Capítulo 2

Comportamientos no lineales organizados por singularidades

Este Capítulo establece una conexión entre los métodos singulares presentados en el Capítulo 1 y la construcción de modelos reducidos que presenten comportamientos no lineales. En otras palabras, se desea modelar sistemas con comportamientos complejos utilizando interconexiones de subsistemas simples basados en singularidades.

La idea detrás de esta construcción, es utilizar la teoría de singularidades para demostrar que los comportamientos no lineales como: la biestabilidad y los comportamientos neuronales como el *spiking* y el *bursting*, están organizados por una singularidad, la cual puede formarse por la interconexión de funciones sigmoideas monótonas. Añadiendo dinámicas de primer orden a las singularidades formadas y utilizando la teoría geométrica de perturbaciones singulares, nos aseguramos de que tales comportamientos no lineales estén presentes en el modelo.

En particular, la realización de modelos más compactos con comportamientos neuronales, nos dirige directamente a pensar en el diseño y construcción de circuitos neuromorfos basados en estos modelos, ya que se desea que comportamientos básicos como el *spiking* y complejos como el *bursting*, puedan capturarse fácilmente en un circuito eléctrico utilizando la menor cantidad posible de elementos eléctricos.

Al enfocarse en la construcción de circuitos neuromorfos, dos centros organizadores son gran importancia: la histéresis y la winged cusp. Por un lado la histéresis, ya que

es la singularidad presente en los modelos más comunes que presentan *spiking*, por ejemplo el modelo de FitzHugh ([Fitzhugh, 1961]). Y por otro lado la *winged cusp*, ya que es el centro organizador de comportamientos complejos como el *bursting* [Franci et al., 2014].

El contenido de este capítulo es presentado en [Franci and Sepulchre, 2014] y se ordena de la siguiente manera: en la primera sección, se construyen las singularidades histéresis y *winged cusp* como la interconexión de funciones no lineales sigmoidales monótonas. En la sección dos, primeramente se agrega una dinámica lenta de la salida al despliegue universal de la *winged cusp*, para así obtener el comportamiento de biestabilidad y posteriormente se agrega una dinámica lenta a la misma configuración para obtener la excitabilidad y las oscilaciones relajadas, cabe mencionar que ambos comportamientos son equivalentes al *spike* neuronal. Y finalmente, en la última sección se agregan dinámicas de primer orden como sigue: una lenta y una rápida al despliegue universal de la *winged cusp*, para lograr el comportamiento llamado biestabilidad *rest-spike*. A la configuración anterior, se le añade una dinámica ultra-lenta de la salida y así conseguir el *bursting*.

2.1. Singularidades construidas por no linealidades sigmoidales monótonas

Esta sección está dividida esencialmente en dos partes, las cuales se explicarán brevemente a continuación.

En la primera parte se busca construir la singularidad histerética y su despliegue universal, utilizando una interconexión de una función sigmoideal monótona. Primeramente, esta interconexión da como resultado una ecuación $g_{hys}(x, \lambda)$, para la cual se prueba que es fuertemente equivalente a la singularidad histerética y posteriormente se muestra que al introducir un parámetro β a la ecuación, se convierte en un despliegue universal $G_{hys}(x, \lambda, \beta)$.

En la segunda parte, se realiza una conexión en serie de una función no-monótona y el

modelo obtenido de la histéresis, de tal manera que se obtenga un segundo modelo g_{wucusp} , que es fuertemente equivalente a la singularidad winged cusp y que introduciendo tres parámetros a la ecuación, se genera un despliegue universal $G_{wucusp}(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma)$.

Antes de comenzar con la construcción de estos circuitos, definamos la función sigmoideal monótona.

Definición 14. (No linealidad sigmoideal) Sea $S(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. El comportamiento estático sigmoideal está definido por

$$-x + S(\lambda) = 0, \tag{2.1}$$

donde x es la salida, λ la entrada y S satisface las siguientes propiedades:

- a) $S(-\lambda) = -S(\lambda)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (S es impar);
- b) $S^{(1)}(\lambda) > 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (S es monótona);
- c) $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} S^{(1)}(\lambda) = 0$ (S es una saturación);
- d) $S^{(1)}(\lambda) \in (0, 1] \forall \lambda$, con $S^{(1)}(0) = 1$;
- e) $\text{sgn}(S^{(2)}(\lambda)) = -\text{sgn}(\lambda) \forall \lambda \neq 0$,

donde $S^{(n)} := \frac{d^n S}{d\lambda^n}$, para $n \geq 0$.

Las funciones sigmoideales se encuentran frecuentemente en sistemas ingenieriles, físicos y el particular en sistemas biológicos neuronales. Las funciones más comunes de este tipo son: sigmoides, saturaciones, la tangente hiperbólica, etcétera. El diagrama de bloques de esta función se muestra en la Figura 2.1.

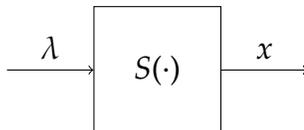


Figura 2.1: No linealidad sigmoideal

2.1.1. Histéresis

Recordemos que la forma normal de la histéresis es la siguiente

$$h_{hys}(x, \lambda) = \epsilon x^3 + \delta \lambda, \quad (2.2)$$

y su despliegue universal

$$H_{hys}(x, \lambda, \beta) = \epsilon x^3 + \delta \lambda + \beta x. \quad (2.3)$$

Con el objetivo de formar la singularidad histéresis, veamos que una retroalimentación positiva de la no linealidad sigmoideal está dada por la siguiente ecuación:

$$-x + S(x) = 0, \quad (2.4)$$

cuyo diagrama de bloques se muestra en la Figura 2.2.

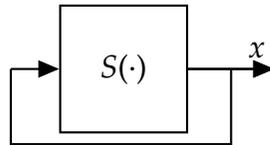


Figura 2.2: Retroalimentación de la no linealidad sigmoideal

La expansión de Taylor alrededor del 0 hasta el grado 3, de la función sigmoideal retroalimentada

$$\begin{aligned} -x + S(x) &= -x + \left(S(0) + S^{(1)}(0)x + \frac{1}{2}S^{(2)}(0)x^2 + \frac{1}{6}S^{(3)}(0)x^3 + \mathcal{O}(x^5) \right) \\ &= \frac{1}{6}S^{(3)}(0)x^3 + \mathcal{O}(x^5), \end{aligned} \quad (2.5)$$

sugiere que se puede obtener una equivalencia fuerte con la forma normal (2.2), utilizando una retroalimentación en la no linealidad monótona más el parámetro de bifurcación. Por lo que, la forma de una ecuación con esta característica es

$$g_{hys}(x, \lambda) = -x + S(x + \lambda) = 0, \quad (2.6)$$

cuyo diagrama de bloques es el mostrado en la Figura 2.3.

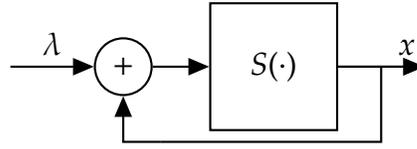


Figura 2.3: Ecuación $g_{hys}(x, \lambda)$ en diagrama de bloques

Para verificar si en efecto, la ecuación $g_{hys}(x, \lambda)$ es fuertemente equivalente a la forma normal de $h_{hys}(x, \lambda)$, se utiliza la proposición 1.1.3 del problema de reconocimiento. De esta manera, surge la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *La ecuación $g_{hys}(x, \lambda) = -x + S(x + \lambda)$ es fuertemente equivalente a la singularidad histéresis (2.2).*

Demostración. Aplicando la Proposición 1.1.3 con $k = 3$ a $g_{hys}(x, \lambda) = -x + S(x + \lambda)$, en $(x, \lambda) = (0, 0)$ y utilizando las propiedades de la función sigmoide, se obtiene

$$\begin{aligned} g_{hys}(0, 0) &= S(0) = 0, \\ g_{hys,x}(0, 0) &= -1 + S^{(1)}(0) = 0, \\ g_{hys,xx}(0, 0) &= S^{(2)}(0) = 0, \\ \varepsilon &= \text{sgn}(g_{hys,xxx}(0, 0)) = \text{sgn}(S^{(3)}(0)) = -1, \\ \delta &= \text{sgn}(g_{hys,\lambda}(0, 0)) = \text{sgn}(S^{(1)}(0)) = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación $g_{hys}(x, \lambda)$ es equivalente a una singularidad histerética en una vecindad de $(x, \lambda) = (0, 0)$. □

El siguiente paso es obtener el despliegue universal de la ecuación $g_{hys}(x, \lambda)$. Desde que la histéresis es de codimensión 1, entonces basta con agregar de forma adecuada un parámetro de despliegue a la ecuación $g_{hys}(x, \lambda)$, resultando lo siguiente:

$$G_{hys}(x, \lambda, \beta) = -x + S(x + \lambda + \beta x). \tag{2.7}$$

La principal pregunta sobre $G_{hys}(x, \lambda, \beta)$, es si es universal. Utilizando la proposición

1.1.8 del problema de reconocimiento para despliegues universales, se verifica si en efecto es un despliegue universal.

Proposición 2.1.2. *La ecuación $G_{hys}(x, \lambda, \beta) = -x + S(x + \lambda + \beta x)$ es un despliegue universal de la singularidad histéresis (2.2), con β como parámetro de despliegue.*

Demostración. Para $\beta = 0$, se tiene que $G_{hys}(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda)$ es fuertemente equivalente a $h(x, \lambda) = x^3 + \lambda$. Para mostrar que $G_{hys}(x, \lambda, \beta)$ es un despliegue universal, basta con mostrar que el siguiente determinante es diferente de cero en el punto $(x, \lambda, \beta) = (0, 0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} \\ G_\beta & G_{\beta x} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} S^{(1)}(x + \lambda + \beta x) & (1 + \beta)S^{(2)}(x + \lambda + \beta x) \\ xS^{(1)}(x + \lambda + \beta x) & S^{(1)}(x + \lambda + \beta x) + x(1 + \beta)S^{(2)}(x + \lambda + \beta x) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} S^{(1)}(0) & S^{(2)}(0) \\ 0 & S^{(1)}(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto el modelo $G_{hys}(x, \lambda, \beta)$ es un despliegue universal de la singularidad histérica y su diagrama de bloques se muestra en la Figura 2.3. □

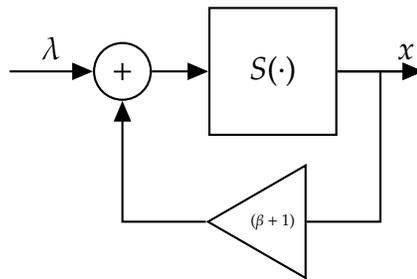


Figura 2.4: Ecuación $G_{hys}(x, \lambda, \beta)$ en diagrama de bloques

2.1.2. Winged Cusp

Recordemos que la forma normal de la winged cusp es

$$h_{wcusp}(x, \lambda) = \epsilon x^3 + \delta \lambda^2, \tag{2.8}$$

y su despliegue universal

$$H_{wucusp}(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma) = \epsilon x^3 + \delta \lambda^2 + \alpha + \beta x + \gamma x \lambda. \quad (2.9)$$

Se observa que la singularidad winged cusp, es parecida a la singularidad histéresis por una diferencia en el parámetro de bifurcación, mientras que en la winged cusp aparece a la potencia dos en la histéresis a la potencia uno. De esta manera, (2.8) puede construirse utilizando la retroalimentación de la función sigmoideal (para la parte cúbica) y una entrada que juegue el papel del parámetro de bifurcación al cuadrado. Lo anterior se logra, introduciendo la no linealidad no monótona llamada *bump*, a la entrada de g_{hys} .

Definición 15. La no linealidad no monótona *bump*, está definida como

$$B_\delta(\lambda) = S(\lambda + \delta) - S(\lambda - \delta) - 2S(\delta), \text{ con } \delta \neq 0. \quad (2.10)$$

Por las propiedades de S y para valores de δ pequeños, se tienen las siguientes propiedades

- a) $B_\delta(0)=0$;
- b) $B_\delta^1(0)=0$;
- c) $B_\delta^2(0)=2S^2(\delta) \neq 0$.

El diagrama de bloques de la función *bump*, se muestra en la Figura 2.5.

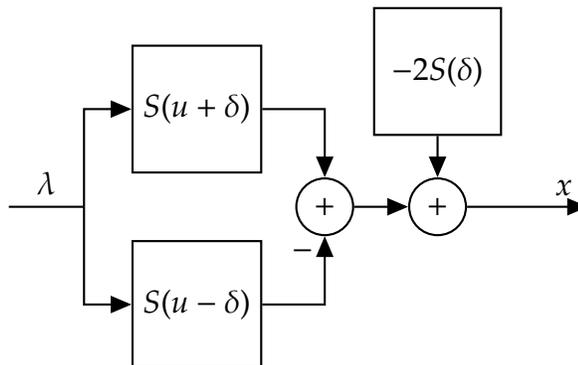


Figura 2.5: Función *bump* en diagrama de bloques

Expandiendo en series de Taylor hasta el grado 3 la función *bump*, se obtiene

$$B_\delta(\lambda) = 2S^{(2)}\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad (2.11)$$

lo que resulta el término que se desea agregar. Por lo tanto, realizando la conexión del *bump* con g_{hys} se obtiene la siguiente ecuación

$$g_{wcusp}(x, \lambda) = -x + S(B_\delta(\lambda) + x). \quad (2.12)$$

Proposición 2.1.3. Para δ suficientemente pequeña, la ecuación $g_{wcusp}(x, \lambda) = -x + S(B_\delta(\lambda) + x)$ es fuertemente equivalente a la singularidad *winged cusp*.

Demostración. Aplicando la Proposición 1.1.6 a $g_{wcusp}(x, \lambda) = -x + S(B_\delta(\lambda) + x)$, en $(x, \lambda) = (0, 0)$, utilizando las propiedades de la función sigmoideal y de la función *bump* se obtiene

$$\begin{aligned} g_{wcusp}(0, 0) &= S(B_\delta(0)) = 0, \\ g_{wcusp,x}(0, 0) &= -1 + S^{(1)}(B_\delta(0)) = 0, \\ g_{wcusp,xx}(0, 0) &= S^{(2)}(B_\delta(0)) = 0, \\ g_{wcusp,\lambda}(0, 0) &= S^{(1)}(B_\delta(0))B_\delta^{(1)}(0) = 0, \\ g_{wcusp,\lambda x}(0, 0) &= S^{(2)}(B_\delta(0))B_\delta^{(1)}(0) = 0, \\ \varepsilon &= \text{sgn}(g_{wcusp,xxx}(0, 0)) = \text{sgn}(S^{(3)}(0)) = -1, \\ \delta &= \text{sgn}(g_{wcusp,\lambda\lambda}(0, 0)) = \text{sgn}(2S^{(2)}(\delta)) = -\text{sgn}(\delta) = -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación $g_{wcusp}(x, \lambda)$ es equivalente a la singularidad *winged cusp* en una vecindad de $(x, \lambda) = (0, 0)$ y su diagrama de bloques se muestra en la Figura 2.6. \square

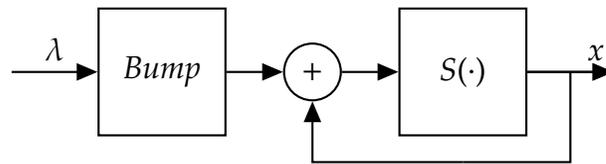


Figura 2.6: Función $g_{wcusp}(x, \lambda)$ en diagrama de bloques

Desde que la singularidad *winged cusp* tiene codimensión 3, sólo se necesita agregar

3 parámetros a la ecuación $g_{w\text{cusp}}$ para formar el despliegue universal. Estos tres parámetros se introducen en $g_{w\text{cusp}}(x, \lambda)$ de la siguiente manera: el parámetro de despliegue α , se obtiene simplemente sumándolo a la entrada de la función sigmoideal, el parámetro β se coloca en la retroalimentación de la función sigmoideal y el parámetro γ multiplicado por $x\lambda$ se logra realimentando un parámetro desde la salida hasta la entrada. Así, resulta la siguiente ecuación:

$$G_{w\text{cusp}}(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma) = -x + S\left(B_\delta(\lambda + \frac{1}{2}\gamma x) + \alpha + (1 + \beta)x\right). \quad (2.13)$$

Proposición 2.1.4. *Para δ suficientemente pequeña, la ecuación $G_{w\text{cusp}}(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma) = -x + S\left(B_\delta(\lambda + \frac{1}{2}\gamma x) + \alpha + (1 + \beta)x\right)$ es un despliegue universal de la singularidad winged cusp.*

Demostración. Para $\alpha, \beta, \gamma = 0$, se tiene que $G_{w\text{cusp}}(x, \lambda, 0, 0, 0) = g_{w\text{cusp}}(x, \lambda) = -x + S(B_\delta(\lambda) + x)$ es fuertemente equivalente a $h(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2$ en $(x, \lambda) = (0, 0)$. Para mostrar que $G_{w\text{cusp}}(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma)$ es un despliegue universal en , basta con mostrar que el siguiente determinante es diferente de cero en el punto $(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0, 0, 0)$, entonces

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xxx} & g_{xx\lambda} \\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\lambda} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\lambda} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2S^{(2)}(\delta) & 0 & -2S^{(2)}(\delta) \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S^{(2)}(\delta) \end{pmatrix} \\ = -2S^{(2)}(\delta) \neq 0.$$

Por lo tanto el modelo $G_{w\text{cusp}}(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma)$ es un despliegue universal de la singularidad winged cusp y su diagrama de bloques se muestra en la Figura 2.7. □

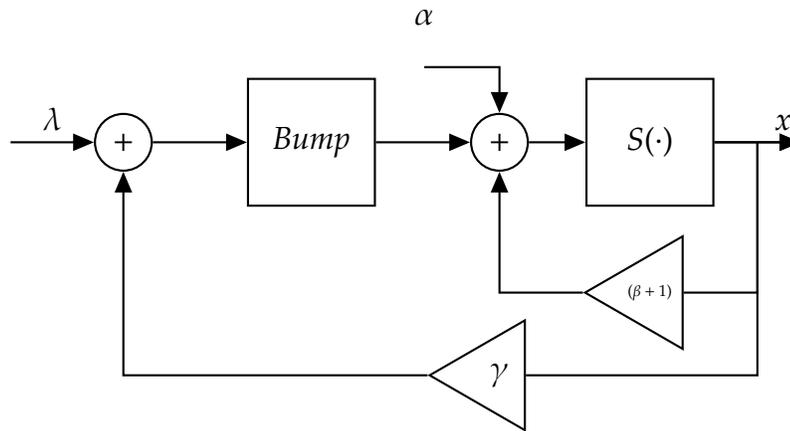


Figura 2.7: Despliegue universal de la winged cusp

2.2. Histéresis como estructura de comportamientos no lineales

Hasta este punto, se han construido dos singularidades a partir de funciones sigmoideas monótonas: la singularidad histerética y la winged cusp. El comportamiento de estas singularidades es estático, es decir, son funciones que describen el estado estacionario de alguna ecuación diferencial.

En esta sección, se agregan filtros de primer orden al despliegue universal G_{hys} obtenido anteriormente, de tal manera que se obtengan comportamientos dinámicos no lineales. Estos comportamientos dinámicos son obtenidos directamente por las propiedades cualitativas de las singularidades, que son dadas por las relaciones entre el estado, el parámetro de bifurcación y los parámetros de despliegue.

La función $S(\cdot)$ que será utilizada a partir de esta sección será la tangente hiperbólica, es decir, $S(\cdot) = \tanh(\cdot)$.

La sección está dividida en dos partes. En la primer parte se construye el comportamiento biestable introduciendo una dinámica a la singularidad histerética. Y en la segunda parte se obtienen las oscilaciones relajadas y la excitabilidad agregando otra dinámica al sistema que es biestable, lo cual resulta en un sistema con dos escalas de tiempo.

2.2.1. Biestabilidad

La biestabilidad es un comportamiento no lineal que se presenta cuando se tiene dos puntos fijos estables, comúnmente separados por uno inestable. Este comportamiento se construye agregando un filtro de primer orden a la salida del comportamiento estático $G_{hys}(x, \lambda, \beta) = 0$. Así, se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = -x + \tanh(x + \lambda + \beta x). \quad (2.14)$$

En diagrama de bloques, la biestabilidad se observa al agregar la función de transferencia $H_f(s) := \frac{1}{\epsilon_f s + 1}$ con $0 < \epsilon_f \ll 1$, a la salida del diagrama de bloques de $G_{hys}(x, \lambda, \beta) = 0$. Esta modificación se muestra en la Figura 2.8.

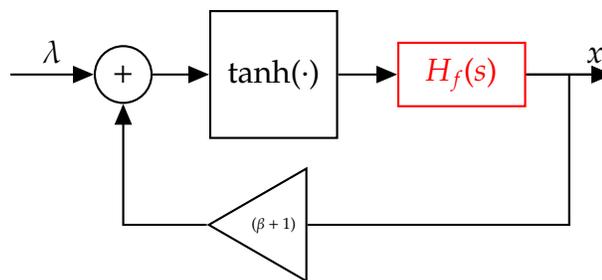


Figura 2.8: Diagrama de bloques de la Biestabilidad

Desde que el conjunto de puntos fijos de (2.14) está dado por $G_{hys}(x, \lambda, \beta) = 0$, entonces se tienen tres posibles comportamientos dependiendo del valor de β , los cuales se detallan a continuación.

1. Para $\beta < 0$. El diagrama de bifurcación tiene un único punto fijo, el cual se puede probar que es globalmente asintóticamente estable, para toda λ . Por lo tanto para toda condición inicial, la solución converge al punto fijo. A este comportamiento se le llama mono-estabilidad.
2. Para $\beta = 0$. Se tiene la bifurcación histéresis.
3. Para $\beta > 0$. Surge un comportamiento más interesante. Para varios valores de λ , el diagrama de bifurcación tiene un único punto fijo estable, mientras que para otros valores de λ hay tres puntos fijos, dos estables y uno inestable. Para el caso en

donde hay un único punto fijo estable, el comportamiento convergerá a este para toda condición inicial. Para el caso de los tres puntos fijos, la rama de equilibrios inestables será la que separará el comportamiento, si la condición inicial está por abajo de la rama inestable, la solución convergerá al punto fijo de abajo y viceversa, ver Figura 2.9 en la parte de arriba. Lo importante de esta configuración, es que controlando el valor del parámetro λ es posible moverse de ramas de equilibrios estables. A este comportamiento se le conoce como biestabilidad y se muestra en la Figura 2.9 en la parte de abajo con $\beta = 0.5$.

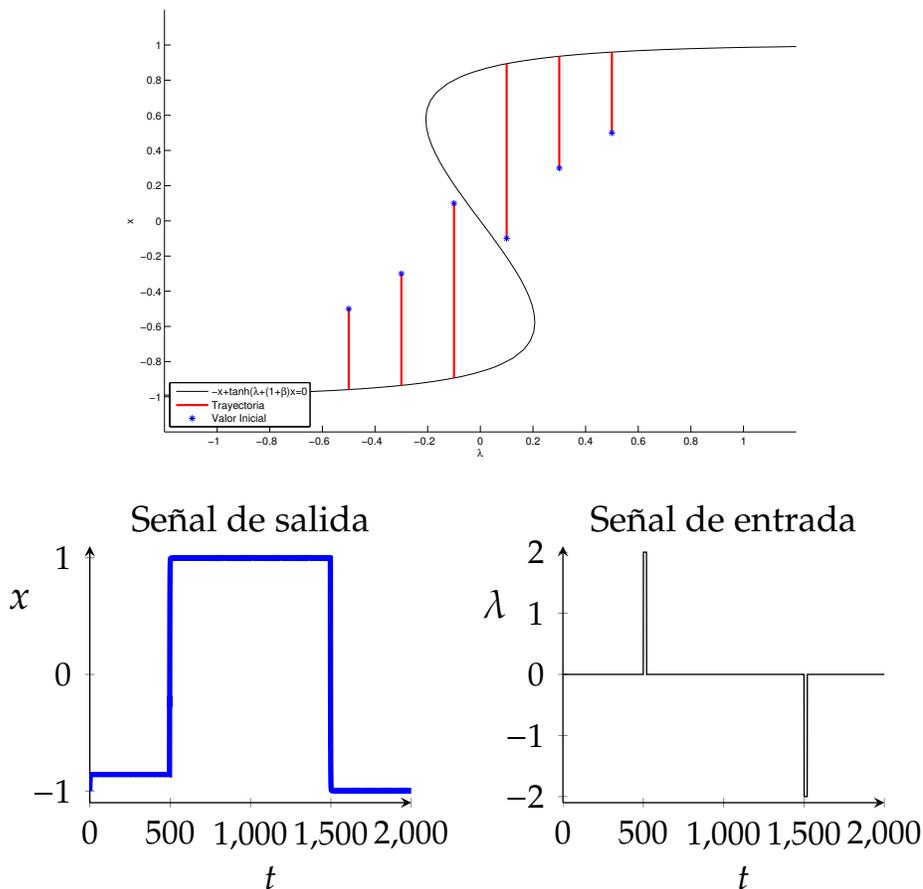


Figura 2.9: Biestabilidad en un circuito organizado por la histéresis. Arriba se muestra el comportamiento dinámico para varias condiciones iniciales dadas. Abajo se muestra el comportamiento biestable (izquierda) cambiando drásticamente el valor de la entrada λ (derecha).

2.2.2. Excitabilidad y Oscilaciones Relajadas

Utilizando la configuración presentada en la subsección anterior, pero realizando una retroalimentación negativa de una dinámica lenta de la salida hacia la entrada, se convierte un comportamiento biestable en excitabilidad o en oscilaciones relajadas. En otras palabras, oscilaciones no lineales se presentan cuando una retroalimentación del estado modula lentamente la entrada del despliegue universal de la histéresis. La descripción anterior, se representa con el siguiente modelo en el espacio de estados

$$\begin{aligned}\epsilon_f \dot{x} &= -x + \tanh(x + (\lambda - y) + \beta x) \\ \dot{y} &= x - y.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Recordando lo estudiado en el Capítulo 1, se sabe que el sistema (2.15) se caracteriza por tener dos escalas de tiempo. La representación en diagrama de bloques de (2.15) se muestra en la Figura 2.10, donde $H_s(s) := \frac{1}{s+1}$.

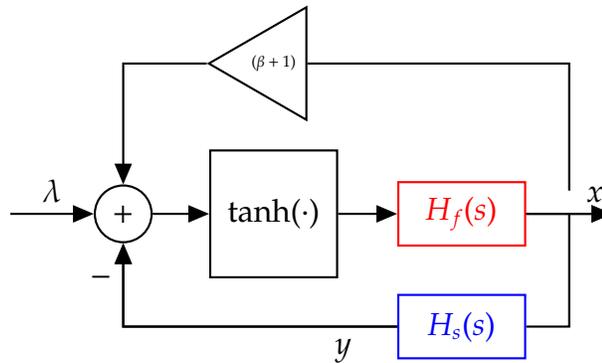


Figura 2.10: Diagrama de bloques del modelo (2.15)

Los puntos fijos de (2.15), están dados por las intersecciones de $G_{hys}(x, \lambda, \beta) = 0$ y $x = y$. Por lo tanto, el comportamiento del sistema está nuevamente organizado por la singularidad histéresis.

La pregunta ahora es, ¿cómo se comporta el sistema (2.15) para valores del parámetro de despliegue β , del parámetro de bifurcación λ y del parámetro ϵ_f ?. Para tratar de responder esta pregunta, se menciona primero que ocurre con el parámetro de despliegue β .

Como se ha estudiado anteriormente, el despliegue universal de la histéresis tiene dos diagramas de bifurcación persistentes dependiendo del valor de β . A continuación se detalla lo que ocurre con el modelo (2.15) al variar β .

- Para $\beta < 0$. Se tiene un único punto fijo global y asintóticamente estable.
- Para $0 < \beta < 1$. Se tiene un único punto fijo para todo λ . En este caso surgen dos comportamientos interesantes.
 - Si el punto fijo pertenece a la rama estable, entonces se tiene el comportamiento de excitabilidad.
 - Si el punto fijo pertenece a la rama inestable, entonces se tienen oscilaciones relajadas.
- Para $\beta > 1$ y λ pequeños. Se tiene nuevamente bi-estabilidad, donde los puntos fijos estables se encuentran separados por la rama inestable.

El parámetro de bifurcación λ , es el parámetro que se tiene libre desde que actúa como la entrada al sistema. Entonces, bajo la configuración de $0 < \beta < 1$ el parámetro de bifurcación ayudará a moverse del punto fijo estable al punto fijo inestable.

Y finalmente, se tiene el parámetro $\epsilon_f > 0$. Cuando $\epsilon_f = 0$, la estructura del sistema (2.15) se rompe totalmente y surgen dos nuevos sistemas el capa y el reducido, de los cuales la variedad crítica es

$$\mathcal{S}_{\lambda,\beta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + \tanh((\lambda - y) + (1 + \beta)x)\}. \quad (2.16)$$

La variedad crítica $\mathcal{S}_{\lambda,\beta}$ es un despliegue universal de la histéresis tomando como parámetro de bifurcación a $\bar{\lambda} = \lambda - y$.

El comportamiento del sistema dinámico cuando $\epsilon_f = 0$, fue brevemente explicado en el Capítulo 1 para el modelo de FitzHugh-Nagumo. Y también se observó que el mismo comportamiento persiste cualitativamente, para $\epsilon_f > 0$. De esta manera se tiene el siguiente teorema.

2.2. HISTÉRESIS COMO ESTRUCTURA DE COMPORTAMIENTOS NO LINEALES 59

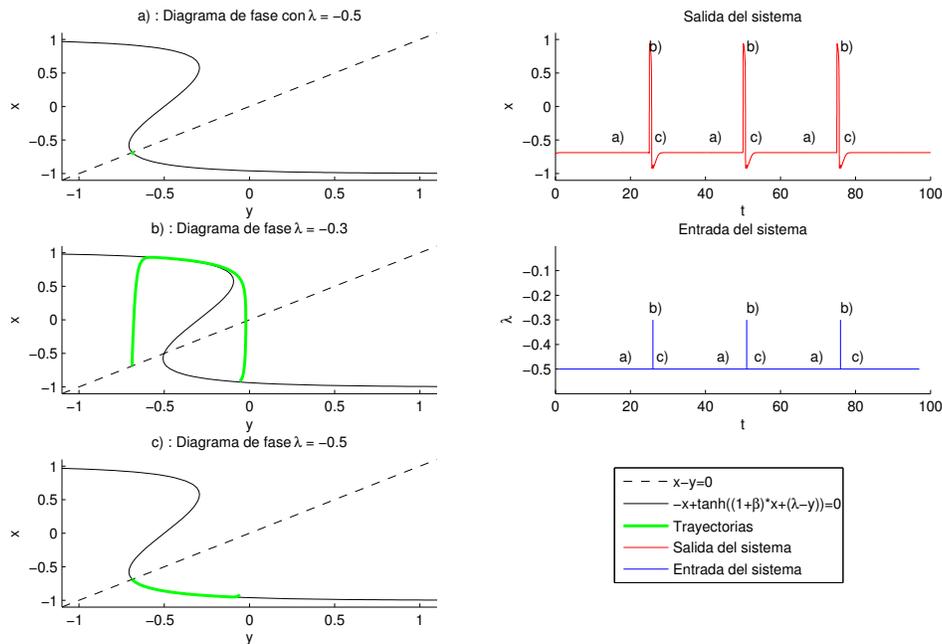


Figura 2.11: Excitabilidad en un circuito organizado por la histéresis.

Teorema 2.2.1. *Considere el sistema (2.15). Para toda $0 < \beta < 1$, existen $\bar{\epsilon}, \bar{\lambda} > 0$, tales que, para todo $|\lambda| < \bar{\lambda}$, existe un único punto fijo inestable rodeado por un ciclo límite casi global exponencialmente estable.*

Demostración. Varias versiones de la prueba se pueden encontrar en [Krupa and Szmolyan, 2001], [Grasman, 1987, Capítulo 2] o [Mishchenko, 2013, Capítulo 3]. \square

Utilizando el Teorema anterior, en la Figura 2.11 se presenta una simulación que tiene un comportamiento excitatorio. Se utiliza un parámetro $\beta = 0.5$, $\epsilon_f = 0.01$ y una señal de entrada λ que simula pequeñas perturbaciones. En la izquierda de la Figura 2.11 se muestran los diferentes comportamientos del plano de fase del sistema (2.15), en el cual se muestran en color negro las nullclínicas y el color verde las trayectorias del sistema. En la parte superior derecha de la Figura 2.11 se muestra la respuesta temporal del sistema y en la parte central derecha la señal de entrada. Se puede observar que el sistema pasa del estado de reposo a un spike para después regresar al estado de reposo, fenómeno neuronal conocido como la excitabilidad.

Ahora, se utiliza la misma configuración utilizada en la excitabilidad, con la diferencia que la señal de entrada λ sea una rampa desde -1 a 1. En la Figura 2.12, se muestra que en un intervalo de la señal de entrada la trayectoria del sistema son oscilaciones relajadas.

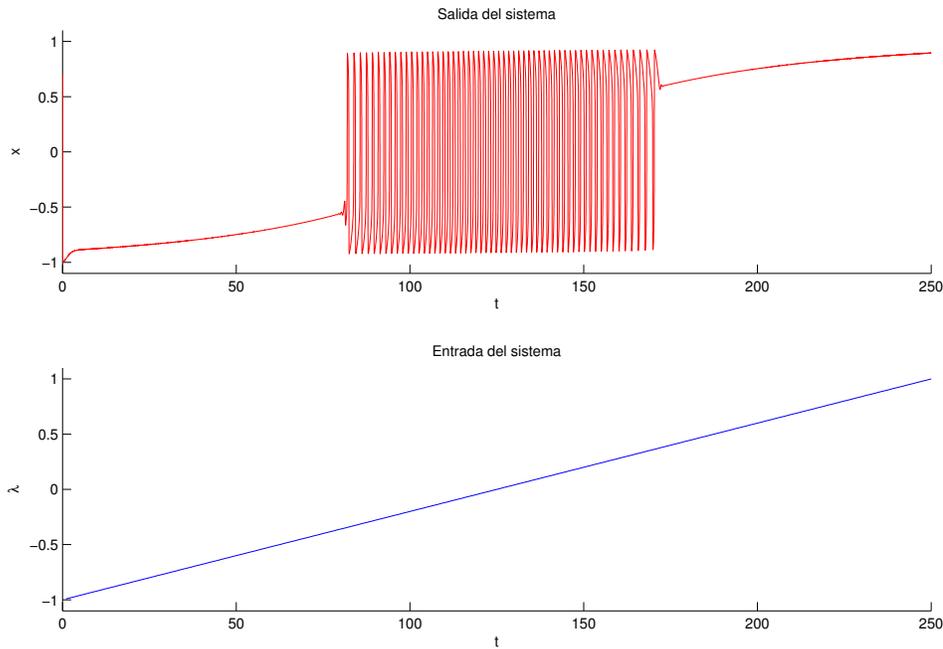


Figura 2.12: Oscilaciones Relajadas en un circuito organizado por la histéresis

2.3. La Winged Cusp como estructura de comportamientos neuronales

Al igual que en la sección anterior, se agregan filtros de primer orden pero esta vez al despliegue universal G_{wccusp} , de tal manera que se obtengan principalmente comportamientos neuronales como la biestabilidad rest-spike y el bursting.

La sección está organizada de la siguiente manera: en la primer parte, se construye el comportamiento biestable rest-spike introduciendo una dinámica lenta-rápida a la singularidad winged cusp. Y en la segunda parte, se obtiene el bursting agregando adicionalmente una dinámica ultra lenta al sistema lento-rápido.

2.3.1. Biestabilidad rest-spike

Utilizando la misma construcción que la dinámica rápida-lenta en la sección anterior, se modifica el despliegue universal de la histéresis por el de la winged cusp, es decir, resulta el siguiente modelo

$$\begin{aligned} \epsilon_f \dot{x} &= -x + \tanh(x + B_\delta(\lambda + y + \frac{\gamma}{2}x) + \beta x + \alpha) \\ \dot{y} &= x - y. \end{aligned} \tag{2.17}$$

La representación en diagrama de bloques de (2.17) se muestra en la Figura 2.13, donde $H_s(s)$ y $H_f(s)$ son las funciones de transferencia que se han utilizado anteriormente.

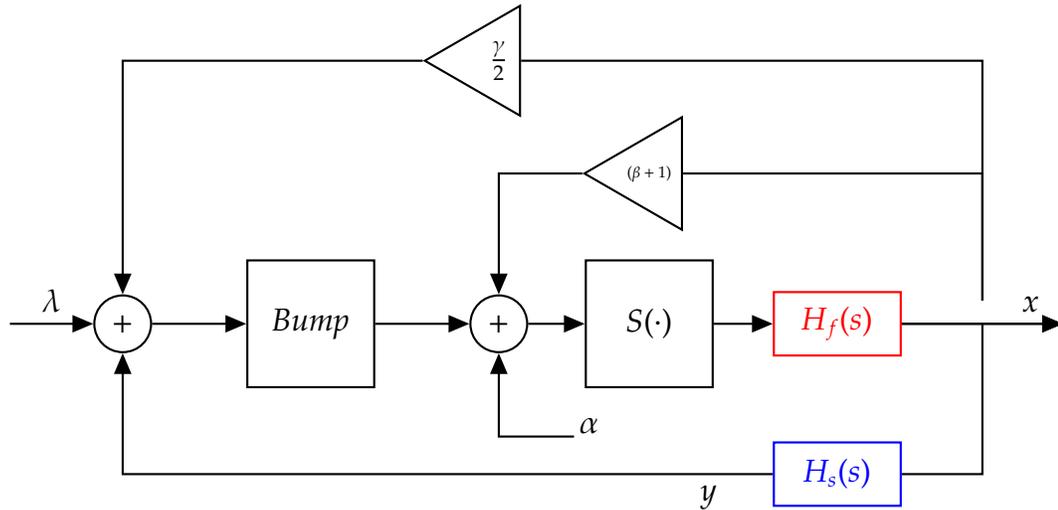


Figura 2.13: Diagrama de bloques del modelo (2.17)

La biestabilidad rest-spike es un comportamiento en donde si el sistema se encuentra en reposo y al variar de forma transitoria un parámetro, el sistema entra en spikes sostenidos y de igual forma, en estado de spikes sostenidos por otra variación transitoria del mismo parámetro, el sistema vuelve al reposo (Figura 2.14).

El comportamiento biestabilidad rest-spike, se da para un conjunto de parámetros de despliegue $\alpha, \gamma, \beta > 0$ y para una señal de entrada λ , para los cuales el modelo (2.17) exhibe la coexistencia de un punto fijo estable, un punto silla y un ciclo límite exponencialmente estable. La región de atracción entre el punto fijo estable y el ciclo límite estable, se encuentra separada por la variedad estable del punto silla.

En la Figrua 2.14, se muestra la simulación con $\lambda = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\delta = 1$, $\gamma = 0.5$ y se observa que la variación del parámetro es sobre α . Las perturbaciones en el parámetro α , inducen un cambio entre el punto fijo estable y el ciclo límite (observar que las variaciones de α se relacionan con los incisos de la Figura 2.15). En la Figrua 2.15 se muestran los diferentes retratos de fase de (2.17), en donde también es posible observar con detalle lo que ocurre en el espacio de parámetros de despliegue al variar α . En particular, se observa la transición entre dos diagramas persistentes de la winged cusp para lograr el comportamiento rest-spike bi-estable.

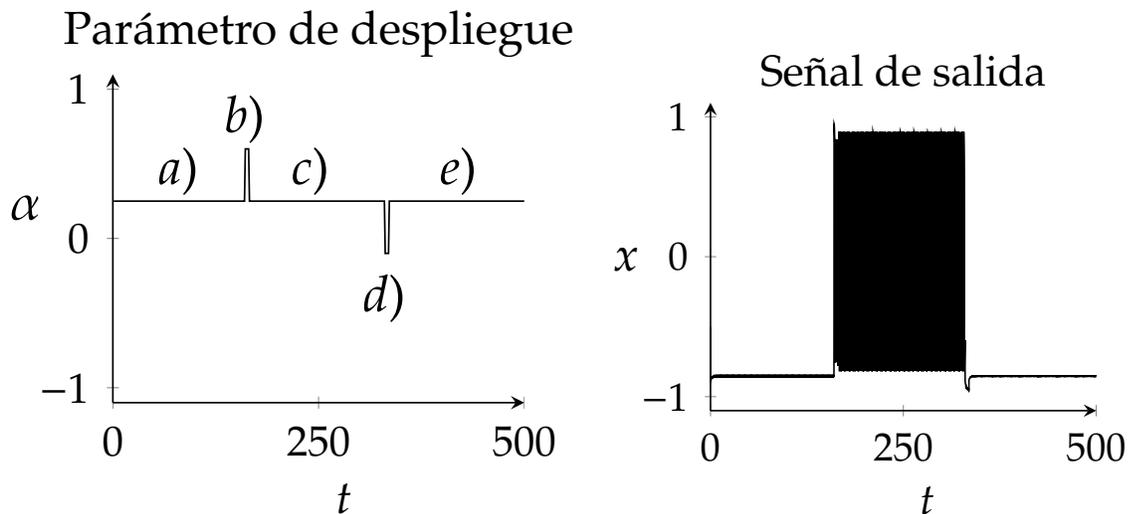


Figura 2.14: Biestabilidad rest-spike en un circuito organizado por la winged cusp. En la izquierda se muestran variaciones instantáneas en el parámetro de despliegue α . Como consecuencia, en la imagen de la derecha se muestra un cambio entre el punto fijo estable (actividad de reposo) y el ciclo límite (oscilaciones sostenidas).

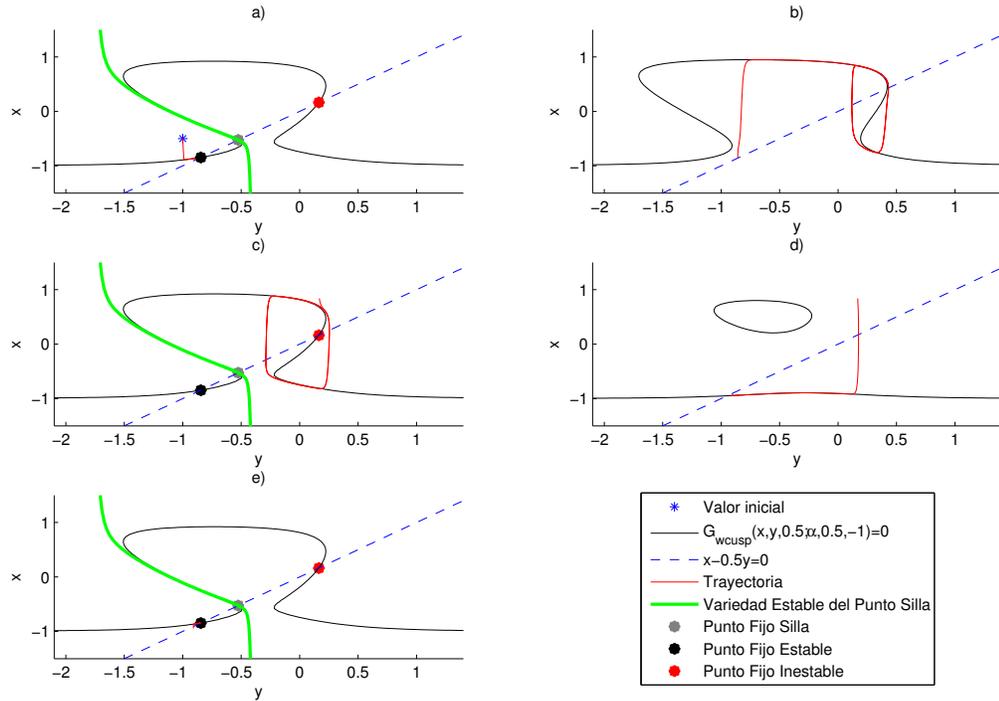


Figura 2.15: Diagrama de fase de la biestabilidad rest-spike. En la Figura a) se da una condición inicial, de tal manera que la trayectoria del sistema se encuentre en la región de atracción del punto fijo estable. En los demás incisos se muestra lo que ocurre con esta trayectoria al variar α y como es que el sistema cambia del punto fijo estable al ciclo límite.

2.3.2. Bursting

Para concluir con la sección, el bursting se genera agregando a la configuración del rest-spike una dinámica ultra lenta de la salida del modelo, con la diferencia que esta dinámica modula al parámetro de despliegue α y de esta forma, alternar entre el estado de reposo y spiking continuos. Entonces, resulta el siguiente modelo

$$\begin{aligned}
 \epsilon_f \dot{x} &= -x + \tanh((1 + \beta)x + B_\delta(\lambda + y + \frac{\gamma}{2}x) + \alpha - z) \\
 \dot{y} &= x - y \\
 \dot{z} &= (x + \bar{z}_{us})k_u \epsilon_u - z \epsilon_u,
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

donde k_u , \bar{z}_{us} y $\epsilon_u \gg 1$ son constantes reales. Al agregar una dinámica ultra lenta al modelo que presenta rest-spike, el modelo (2.18) resulta tener tres escalas de tiempo.

La representación en diagrama de bloques de (2.18) se muestra en la Figura 2.16, donde

$$H_u(s) = \frac{k_u}{\epsilon_u s + 1}.$$

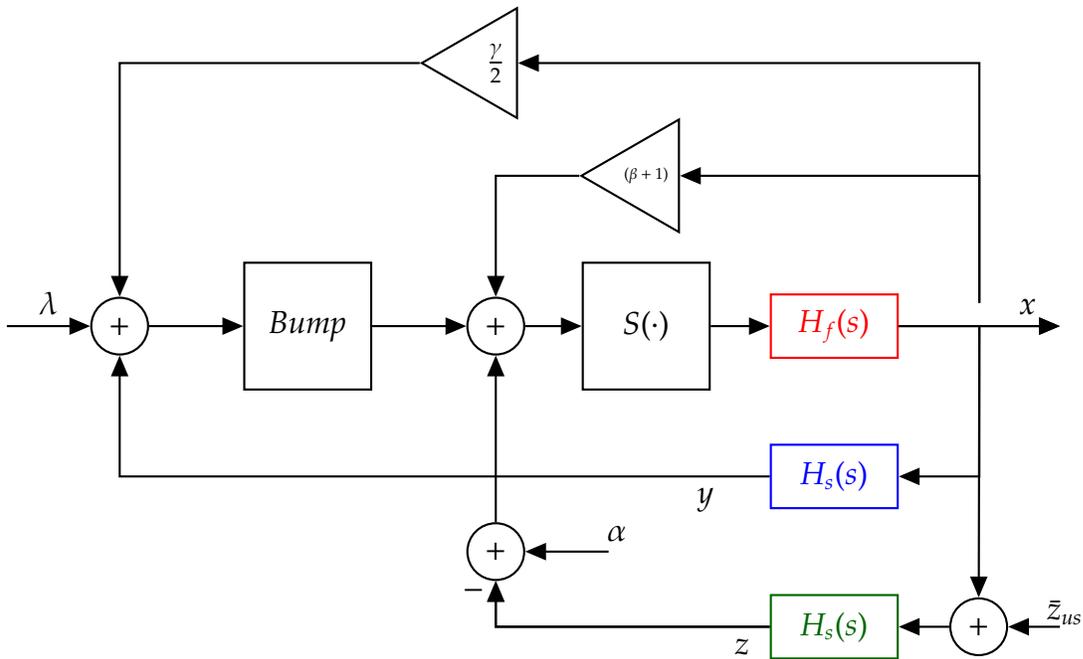


Figura 2.16: Diagrama de bloques del modelo (2.18)

En la Figura 2.17, se muestra la simulación de (2.18) con $\alpha = 0.22$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 1$, $k_u = 2.5$, $\bar{z}_{us} = 0.5$, $\epsilon_f = 0.0075$, $\epsilon_u = 75$ y la señal de entrada λ es un rampa unitaria.

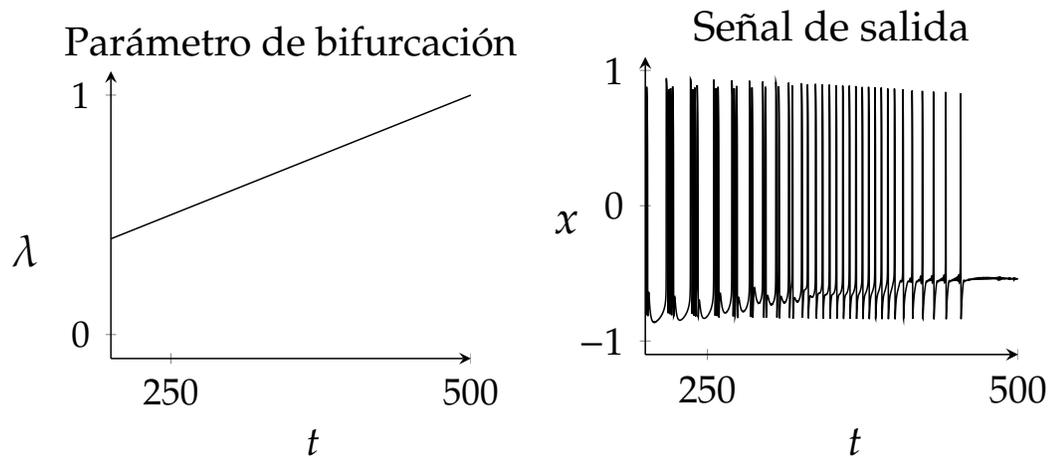


Figura 2.17: Simulación de un modelo organizado por la singularidad winged cusp. En la Figura de la derecha se muestra la salida del sistema correspondiente a la entrada (derecha). Se observa que para un rango de valores de la entrada, el sistema presenta bursting y que al incrementar más la entrada, el comportamiento cambia del comportamiento bursting al spiking.

Para más información sobre estos comportamientos, consultar [Franci and Sepulchre, 2014] y [Franci et al., 2014].

Capítulo 3

Histéresis en un circuito eléctrico

En el Capítulo 2 se presentó una metodología sistemática para construir comportamientos no lineales, a partir de interconexiones de una función sigmoideal. Se demostró además, que estos comportamientos son organizados por singularidades.

Como primer paso de esta metodología, se mostró que la singularidad histéresis y su despliegue universal, se obtienen con una retroalimentación positiva de la salida a la entrada de la función sigmoideal. En el segundo paso, al bloque obtenido se le agrega la función *bump* y otras retroalimentaciones, de tal manera que se obtenga la singularidad *winged cusp* y su despliegue universal. Finalmente, se agregan dinámicas de primer orden a los despliegues universales para así obtener los comportamientos no lineales deseados.

Desde un punto de vista de sistemas eléctricos, esta metodología sugiere que si se tiene un circuito eléctrico con propiedades semejantes a las de la función sigmoideal, entonces es posible construir circuitos con los comportamientos no lineales presentados en el Capítulo 2, en particular, surge el interés por construir circuitos neuromorfos con *spiking* y *bursting*.

En este Capítulo se presenta la construcción de un circuito eléctrico, cuya salida tiene un comportamiento similar a los diagramas de bifurcación persistentes del despliegue universal de la singularidad histéresis. Por el Teorema de Clasificación del Capítulo 1, es válido intentar demostrar que el circuito eléctrico está organizado por una singularidad de codimensión menor o igual a tres. Para esto, se desarrolla un algoritmo basado en

el problema de reconocimiento que realiza una búsqueda de parámetros, de tal manera que se pruebe que el circuito eléctrico presenta la singularidad histéresis. Se prueba también, que el modelo del circuito eléctrico es un despliegue universal de la histéresis. Finalmente, se agrega un condensador eléctrico el cual es similar a agregar una dinámica de primer orden a la histéresis, de tal manera que se obtenga la excitabilidad y las oscilaciones relajadas.

El contenido del Capítulo se ordena de la siguiente manera: en la primer sección se obtiene el modelo de un circuito eléctrico con un transistor npn, presentando las características de una función sigmoideal. En la segunda sección se realiza una interconexión del circuito anterior, resultando un circuito eléctrico con dos transistores cuya salida tiene un comportamiento persistente del despliegue universal de la histéresis. La sección tres presenta un algoritmo recursivo basado en el problema de reconocimiento de la singularidad histéresis, el cual demuestra que el modelo del circuito con dos transistores tiene una respuesta equivalente a la histéresis. Además, se prueba que el modelo del circuito es un despliegue universal de la histéresis. Finalmente, en la última sección se muestra la implementación del circuito eléctrico, el la cual se observa la excitabilidad y las oscilaciones relajadas al agregar un condensador eléctrico de forma adecuada.

3.1. Saturación básica como no linealidad sigmoideal

El comportamiento de una saturación básica, puede realizarse con un transistor npn en una configuración base emisor como se muestra en la Figura 3.1, donde el voltaje de salida o voltaje V_1 presentará este comportamiento.

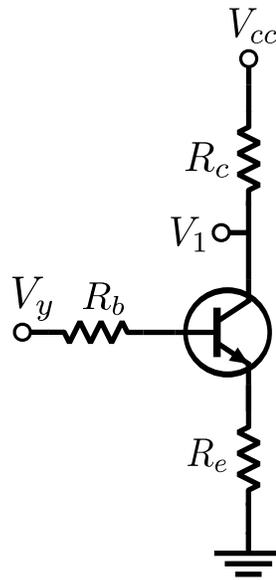


Figura 3.1: Modelo eléctrico que presenta un comportamiento de saturación básica.

En esta sección se presenta el análisis del circuito eléctrico de la Figura 3.1, utilizando las ecuaciones de Ebers-Moll como relaciones constitutivas del transistor [Sedra and Smith, 2004, Capítulo 5], la metodología de corrientes de mallas y la ley de voltajes de Kirchhoff.

El objetivo principal de este análisis es, describir el comportamiento del circuito para un voltaje de entrada dado, V_y , y para un conjunto de resistencias fijas: R_b , R_c y R_e , donde el voltaje de salida V_1 presenta a simple vista algunas características de la no linealidad sigmoideal. Para lograr esto, basta con encontrar un conjunto de ecuaciones que relacionen el voltaje de alimentación, el voltaje de entrada y las resistencias del circuito con los corrientes del transistor, ya que con estas corrientes es posible especificar, en cualquier sitio, el comportamiento del circuito eléctrico.

Existen métodos convencionales para realizar la tarea anterior, pero en este documento se utilizará la metodología para construir las ecuaciones no lineales de Ebers-Moll, las cuales dan un modelo más aproximado de los efectos reales del transistor. Como primer paso en la construcción de estas ecuaciones, se requiere conocer los voltajes de base-colector y base-emisor.

Los voltajes de base-colector y base-emisor se encuentran con el análisis de mallas, los cuales, pueden ser expresados en función de voltajes de entrada: V_{cc} y V_y ; de las

resistencias del circuito: R_b , R_c y R_e ; y de las corrientes del transistor: i_b , i_c y i_e .

Una vez que se tiene expresiones para los voltajes de base-colector y base-emisor, es posible construir el modelo de Ebers-Moll, el cual, permitirá detallar con precisión el comportamiento del circuito en cualquier punto, en particular, el voltaje de salida V_1 .

Para iniciar con la construcción de este conjunto de ecuaciones, primeramente se realiza el análisis de mallas correspondiente al circuito de la Figura 3.1.

3.1.1. Análisis de mallas

El circuito de la Figura 3.1 es reacomodado en la Figura 3.2, de tal manera que puedan observarse más fácilmente las mallas presentes. En cada malla resultante, se definirá una corriente en el sentido de las manecillas del reloj.

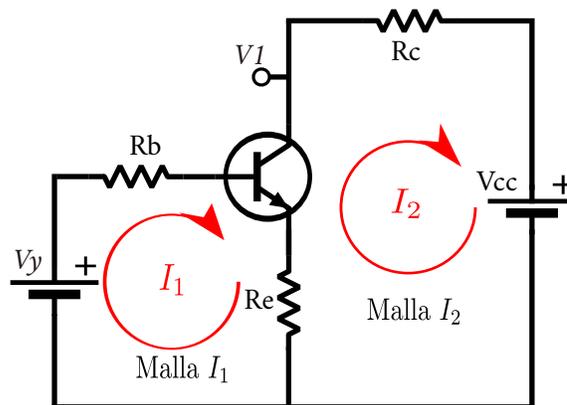


Figura 3.2: Mallas de corriente del circuito eléctrico.

Una vez identificadas las corrientes de malla, el siguiente paso es indicar las polaridades de todos los voltajes dentro de cada malla. Las polaridades de los voltajes de las resistencias son determinadas por la dirección de cada corriente de malla, así, el signo del voltaje será positivo en donde la corriente de malla entra a la resistencia y negativo por donde sale. En la Figura 3.3 se muestran las polaridades de los voltajes presentes en cada malla, donde se observa que las polaridades de los voltajes de las fuentes de CD (Corriente Directa) y de los voltajes presentes en el transistor son fijados automáticamente.

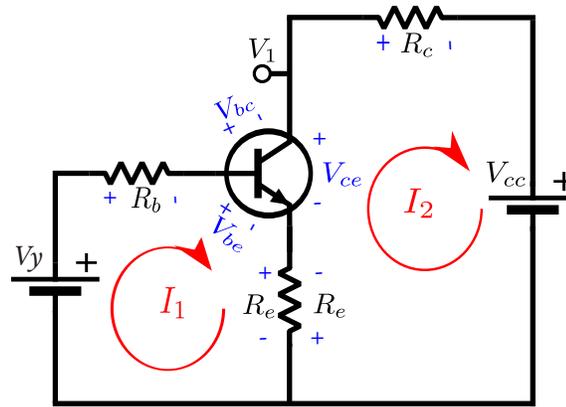


Figura 3.3: Polaridades de los voltajes en cada malla.

Enseguida se aplica la ley de voltajes de Kirchoff para cada malla, iniciando en el punto que se desee y continuando por la malla en el sentido especificado por la corriente de malla correspondiente.

Malla I_1

Comenzando en la parte superior izquierda de la malla I_1 se obtiene la siguiente ecuación:

$$-R_b I_1 - V_{be} - R_e(I_1 - I_2) + V_y = 0. \quad (3.1)$$

Despejando V_{be} de la ecuación (3.1), se obtiene el voltaje de base-emisor:

$$V_{be} = V_y - (R_b + R_e)I_1 + R_e I_2. \quad (3.2)$$

Malla I_2

De manera similar, iniciando en la parte superior izquierda de la malla I_2 se obtiene la siguiente ecuación:

$$-R_c I_2 - V_{cc} - R_e(I_2 - I_1) + V_{ce} = 0. \quad (3.3)$$

Se puede observar que en la ecuación (3.3) no aparece el voltaje de base-colector, es decir, el voltaje V_{bc} . Para esto, se aplica la siguiente igualdad:

$$V_{ce} = V_{be} - V_{bc}. \quad (3.4)$$

Sustituyendo (3.4) en (3.3) y ahora sí despejando el voltaje V_{bc} , se obtiene:

$$V_{bc} = -V_{cc} + V_{be} + R_e I_1 - (R_c + R_e) I_2. \quad (3.5)$$

Es fácil ver que en la ecuación (3.5) aparece el voltaje V_{be} , dado por (3.2), entonces se sustituye y finalmente resulta:

$$V_{bc} = -V_{cc} + V_y - R_b I_1 - R_c I_2. \quad (3.6)$$

Para efectos de análisis y simplicidad, las ecuaciones (3.2) y (3.6) se pueden escribir como un mapeo

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$: (I, \theta) \mapsto V = \begin{bmatrix} V_y \\ -V_{cc} + V_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_b + R_e & -R_e \\ R_b & R_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

donde $I = [I_1, I_2]$, $\theta = [V_y, R_b, R_c, R_e, V_{cc}]$ y $V = [V_{be}, V_{bc}]$.

Relación entre corrientes de transistor y de mallas

Es claro que en (3.7) no aparecen las corrientes del transistor sino las corrientes de malla, por esta razón, es necesario encontrar una relación entre las corrientes de malla y las del transistor. Una forma de encontrar esta relación, es buscando igualdades entre estas dos corrientes analizando la Figura 3.4.

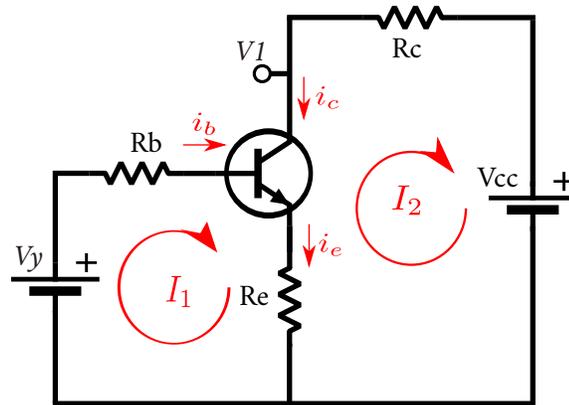


Figura 3.4: Corrientes del circuito eléctrico.

De la Figura 3.4 se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} i_b &= I_1 \\ i_c &= -I_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Reescribiendo (3.8) como una función

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ : I &\mapsto i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $i = [i_b, i_c]$. Para obtener el mapeo que relaciona las corrientes de malla con las corrientes del transistor, de (3.9) se obtiene la función inversa

$$\begin{aligned} f_2^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ : i &\mapsto I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b \\ i_c \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Finalmente, realizando la composición entre (3.10) y (3.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
f_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
: (i, \theta) &\mapsto V = f_1(f_2^{-1}(i), \theta) = \begin{bmatrix} V_y \\ -V_{cc} + V_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_b + R_e & R_e \\ R_b & -R_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b \\ i_c \end{bmatrix}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Una vez teniendo la descripción de los voltajes base-colector y base-emisor del transistor del circuito de la Figura 3.1 como se presenta en (3.11), es posible construir las ecuaciones de Ebers-Moll, las cuales se describen a continuación.

3.1.2. Ecuaciones de Ebers-Moll

Las ecuaciones de Ebers-Moll son un modelo general para describir un transistor BJT en cualquiera de sus modos posibles de operación. Este modelo relaciona el voltajes de base-emisor y el voltaje base-colector con las corrientes de emisor, base y colector. En este documento, se consideran únicamente las ecuaciones para las corrientes de base y de colector (de nuestro interés). Estas ecuaciones se pueden expresar como una función

$$\begin{aligned}
f_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
: (i, V) &\mapsto i = \begin{bmatrix} \frac{I_s}{\beta_f} (e^{\frac{V_{be}}{V_T}} - 1) + \frac{I_s}{\beta_R} (e^{\frac{V_{bc}}{V_T}} - 1) \\ I_s (e^{\frac{V_{be}}{V_T}} - 1) - \frac{I_s}{\alpha_R} (e^{\frac{V_{bc}}{V_T}} - 1) \end{bmatrix}, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

donde I_s , β_f , V_T , α_R y β_R son parámetros dados del transistor.

Finalmente se realiza la composición de (3.12) y (3.11), resultando

$$\begin{aligned}
f_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
: (i, \theta) &\mapsto i = f_3(i, f_1(f_2(i), \theta)). \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Finalmente, se reescribe (3.13) como una ecuación que será de utilidad para encontrar una solución numérica:

$$\Phi_{sat}(i, \theta) := i - f_3(i, f_1(f_2(i), \theta)) = 0. \quad (3.14)$$

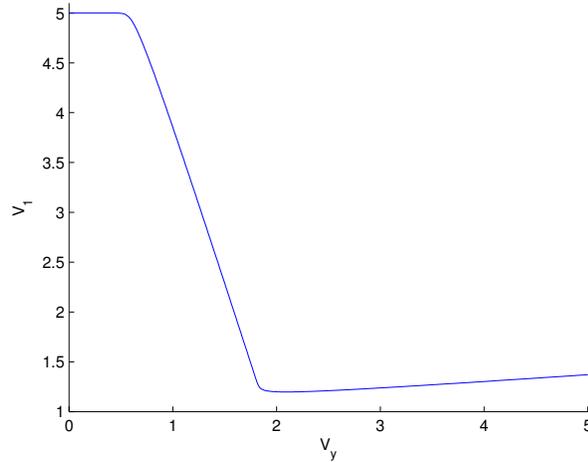


Figura 3.5: Salida V_1 del circuito.

Solución numérica de la ecuación $\Phi_{sat}(i, \theta) = 0$

Para concluir con esta sección, se realiza la solución numérica del sistema de ecuaciones (3.14), de tal manera que se pueda calcular el comportamiento en cualquier lugar del circuito. Así, el sistema de ecuaciones se resuelve para i_b e i_c con la función *fsolve* de *Matlab* para un conjunto de parámetros fijos y un voltaje de entrada entre 0 y 5 volts.

En la Figura 3.5 se muestra la salida del voltaje V_1 en función del voltaje V_y . En otras palabras, una vez teniendo la solución de la ecuación $\Phi_{sat}(i, \theta)$ se calcula la siguiente expresión

$$V_1 = V_{cc} - V_c = V_{cc} - i_c R_{c'} \quad (3.15)$$

para cada valor del voltaje de entrada.

Los parámetros utilizados en la simulación son: $V_{cc} = 5$ V, $I_s = 14.34$ fA, $\beta_f = 255.9$, $V_T = 0.0257$ V, $\alpha_R = 0.859$, $\beta_R = 6.092$, $R_b = 2400$ Ω , $R_c = 820$ Ω y $R_e = 240$ Ω , donde los parámetros del transistor corresponden a los de un transistor BJT 2n2222.

Y a manera de comparación, en la Figura 3.6 se muestra la salida del circuito eléctrico real utilizando los mismos componentes que en la simulación.

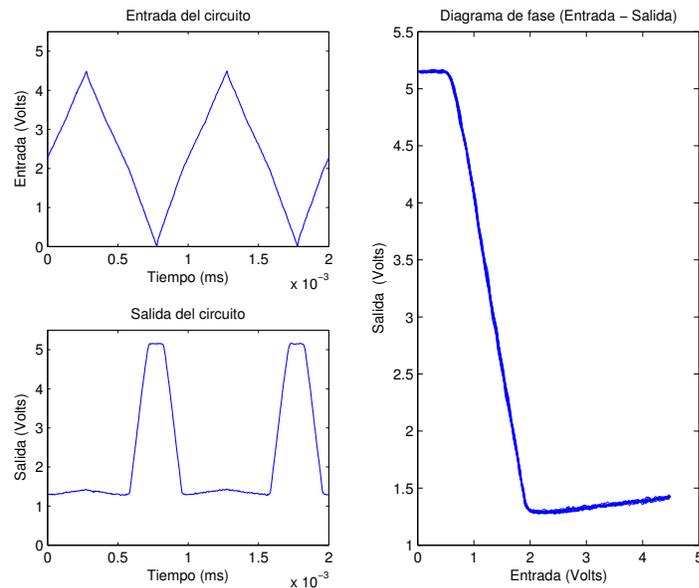


Figura 3.6: Datos de la implementación del circuito eléctrico real. Parte superior izquierda: señal de entrada triangular de amplitud 5 volts y frecuencia 1000 Hertz. Parte inferior izquierda: Señal de salida V_1 en el tiempo. Parte derecha: plano de fase de la señal de entrada contra la señal de salida.

El comportamiento de la Figura 3.5 y de la Figura 3.6 es conocido como saturación básica, y nos sugiere que el circuito de la Figura 3.1 es un buen candidato para formar la singularidad histéresis, ya que presenta varias características que a simple vista tiene la función sigmoideal como son: saturación y monótonicidad.

3.2. Histéresis en un circuito eléctrico

Teniendo un sistema eléctrico similar a la no linealidad sigmoideal, el siguiente paso es buscar una configuración de un circuito eléctrico equivalente a la retroalimentación positiva, es decir, formar la singularidad histéresis y su despliegue universal.

Un circuito eléctrico con esta característica es analizado en [Castaños and Franci, 2015] y se muestra en la Figura 3.7, el cual está formado por dos transistores y cinco resistencias. El voltaje de entrada es V_s , el de alimentación es V_{cc} y el de salida V_x .

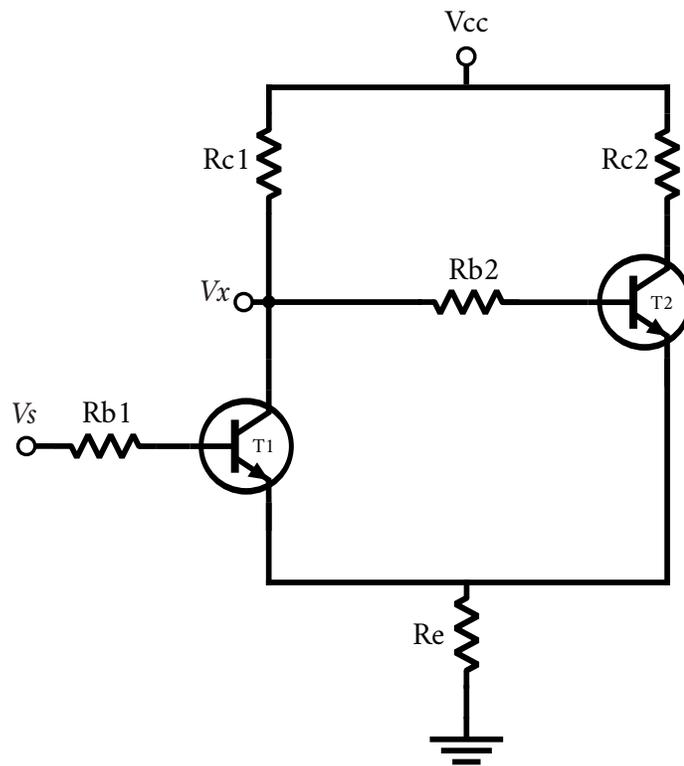


Figura 3.7: Modelo Eléctrico presentando Histéresis.

Al igual que en la sección anterior, aquí se detalla el análisis del circuito de la Figura 3.7. Esto es, construir un conjunto de ecuaciones que describan el comportamiento del sistema para un voltaje de entrada dado y valores fijos de las resistencias, con la diferencia de que alguna de las resistencias puede actuar como el parámetro de despliegue de la singularidad histéresis.

Para iniciar con la construcción del conjunto de ecuaciones, se obtienen los voltajes de base-emisor y base-colector presentes en cada transistor, utilizando nuevamente el análisis de mallas y la ley de voltajes de Kirchhoff.

Finalmente, utilizando los voltajes anteriores se construyen las ecuaciones de Ebers-Moll, y así, poder detallar el comportamiento del circuito en cualquier punto, el particular, el voltaje de salida V_x .

3.2.1. Análisis de mallas

Para tener una visión más clara de las mallas presentes, el circuito de la Figura 3.7 es reacomodado en la Figura 3.8, dando como resultado un total de cuatro mallas, donde a cada una se le define una corriente en el sentido de las manecillas del reloj.

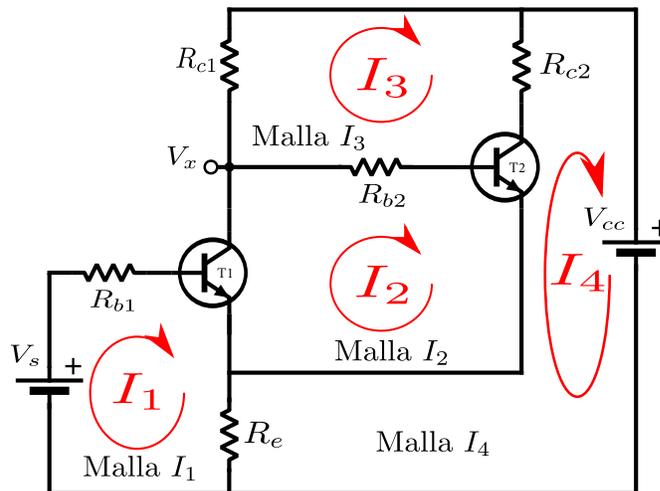


Figura 3.8: Mallas del circuito eléctrico.

Una vez identificadas las mallas, el siguiente paso es indicar las polaridades de los voltajes de las resistencias de cada malla, los cuales, serán determinados de igual forma que el circuito de la sección anterior. En la Figura 3.9, se muestran todas las polaridades de los voltajes de las resistencias, de las fuentes de CD y de los voltajes presentes en los transistores.

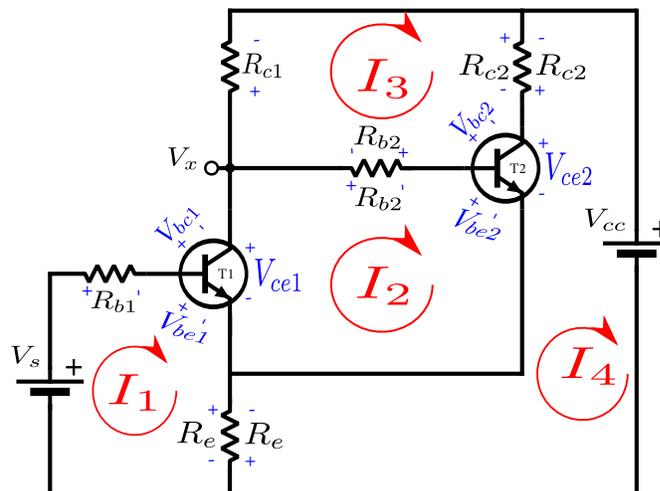


Figura 3.9: Polaridades de los voltajes de cada malla.

Con las mallas y los voltajes correspondientes señalados, entonces se aplica la ley de voltajes de Kirchhoff para cada malla, iniciando en el lugar deseado en dirección de la corriente de malla correspondiente.

Malla I_1

Comenzando en la parte inferior izquierda de la malla I_1 , se obtiene el voltaje base-emisor del primer transistor:

$$V_{be1} = V_s - (R_{b1} + R_e)I_1 + R_e I_4. \quad (3.16)$$

Malla I_3

Iniciando en la parte inferior izquierda de la malla I_3 , se obtiene el voltaje base-colector del segundo transistor:

$$V_{bc2} = -R_{b2}I_2 + (R_{c2} + R_{c1} + R_{b2})I_3 - R_{c2}I_4. \quad (3.17)$$

Malla I_4

Iniciando en la parte superior derecha de la malla I_4 y realizando algunas sustituciones, se obtiene el voltaje base emisor del transistor dos:

$$V_{be2} = V_{cc} - R_e I_1 - R_{b2}I_2 + (R_{c1} + R_{b2})I_3 + R_e I_4. \quad (3.18)$$

Malla I_2

Finalmente, comenzando en la parte superior izquierda de la malla I_2 se obtiene el último voltaje requerido, es decir, el voltaje base colector del primer transistor

$$V_{bc1} = -V_{cc} + V_s - R_{b1}I_1 - R_{c1}I_3. \quad (3.19)$$

Las ecuaciones (3.16), (3.17), (3.18) y (3.19) se pueden reescribir como una función

$$f_1 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$: (I, \theta) \mapsto V = \begin{bmatrix} V_s \\ -V_{cc} + V_s \\ V_{cc} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{b1} + R_e & 0 & 0 & -R_e \\ R_{b1} & 0 & R_{c1} & 0 \\ R_e & R_{b2} & -(R_{c1} + R_{b2}) & -R_e \\ 0 & R_{b2} & -(R_{c2} + R_{c1} + R_{b2}) & R_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

donde $I = [I_1, I_2, I_3, I_4]$, $\theta = [V_s, R_{b2}, R_{c2}, R_{b1}, R_{c1}, R_e, V_{cc}]$ y $V = [V_{be1}, V_{bc1}, V_{be2}, V_{bc2}]$.

Relación entre corrientes de transistor y de mallas

Nuevamente se observa que en (3.20) no aparecen las corrientes deseadas del transistor, por lo tanto, es necesario encontrar una relación entre las corrientes de malla y las corrientes del transistor. Para esto, en la Figura 3.10 se muestran todas las corrientes presentes en el circuito, incluidas las corrientes de malla.

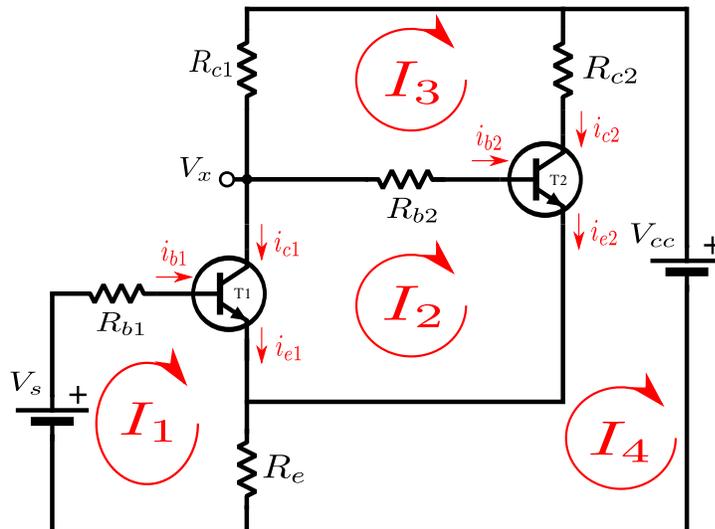


Figura 3.10: Corrientes del circuito eléctrico.

De la Figura 3.10 se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 i_{b1} &= I_1 \\
 i_{c1} &= -I_2 \\
 i_{b2} &= I_2 - I_3 \\
 i_{c2} &= I_3 - I_4.
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

El conjunto de relaciones (3.21), se reescribe como una función

$$\begin{aligned}
 f_2 : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
 : I \mapsto i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix},
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

donde $i = [i_{b1}, i_{c1}, i_{b2}, i_{c2}]$. Observamos que en (3.22) es posible despejar las corrientes de malla en función de las corrientes del transistor, es decir, se obtiene la función inversa de 3.22:

$$\begin{aligned}
 f_2^{-1} : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
 : i \mapsto I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{b1} \\ i_{c1} \\ i_{b2} \\ i_{c2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

Finalmente, realizando la composición de (3.23) y (3.20) se obtiene:

$$\begin{aligned}
f_1 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^7 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
: (i, \theta) \mapsto V = f_1(f_2^{-1}(i), \theta) &= \begin{bmatrix} V_s \\ -V_{cc} + V_s \\ V_{cc} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} R_{b1} + R_e & R_e & R_e & R_e \\ R_{b1} & -R_{c1} & -R_{c1} & 0 \\ R_e & R_{c1} + R_e & R_{c1} + R_{b2} + R_e & R_e \\ 0 & R_{c1} & R_{c1} + R_{b2} & -R_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{b1} \\ i_{c1} \\ i_{b2} \\ i_{c2} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Una vez teniendo la descripción de los voltajes base-colector y base-emisor de los dos transistores del circuito de la Figura 3.7 como se muestran en la ecuación (3.24), se obtienen las ecuaciones de Ebers-Moll.

Ecuaciones de Ebers-Moll

Las ecuaciones Ebers-Moll para el circuito de la Figura 3.7, se pueden expresar como una función

$$\begin{aligned}
f_3 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
: (i, V) \mapsto i &= \begin{bmatrix} \frac{I_s}{\beta_f} (e^{\frac{V_{bc1}}{V_T}} - 1) + \frac{I_s}{\beta_R} (e^{\frac{V_{bc1}}{V_T}} - 1) \\ I_s (e^{\frac{V_{bc1}}{V_T}} - 1) - \frac{I_s}{\alpha_R} (e^{\frac{V_{bc1}}{V_T}} - 1) \\ \frac{I_s}{\beta_f} (e^{\frac{V_{bc2}}{V_T}} - 1) + \frac{I_s}{\beta_R} (e^{\frac{V_{bc2}}{V_T}} - 1) \\ I_s (e^{\frac{V_{bc2}}{V_T}} - 1) - \frac{I_s}{\alpha_R} (e^{\frac{V_{bc2}}{V_T}} - 1) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Realizando la composición de (3.25) y (3.24), se modifica la función f_3 de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
f_3 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^7 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
: (i, \theta) \mapsto i &= f_3(i, f_1(f_2(i), \theta)).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Finalmente, para efectos de análisis del circuito de la Figura 3.7 y de solución numérica, se reescribe (3.26) como la siguiente ecuación

$$\Phi(i, \theta) = i - f_3(i, f_1(f_2(i), \theta)) = 0. \quad (3.27)$$

Solución numérica de la ecuación $\Phi(i, \theta) = 0$

Para concluir con esta sección se realiza la solución numérica de (3.27). El sistema de ecuaciones (3.27) se resuelve para i_{b1} , i_{b2} , i_{c1} e i_{c2} con la función *fsolve* de *Matlab*, para un conjunto de parámetros fijos y un voltaje de entrada entre 0 y 5 volts.

En la Figura 3.11 se muestra la salida del voltaje V_x en función del voltaje de entrada V_s , donde V_x se calcula por la expresión

$$V_x = V_{cc} - V_{c1} = V_{cc} - (I_{b2} + I_{c1})R_{c1}, \quad (3.28)$$

para cada valor del voltaje de entrada.

Los parámetros del transistor utilizados en la simulación son los mismos que los de la sección anterior. El valor de las resistencias utilizadas es: $R_{b1} = 2400 \Omega$, $R_{c1} = 820 \Omega$, $R_{b2} = 6000 \Omega$, $R_{c2} = 240 \Omega$ y $R_e = 240 \Omega$.

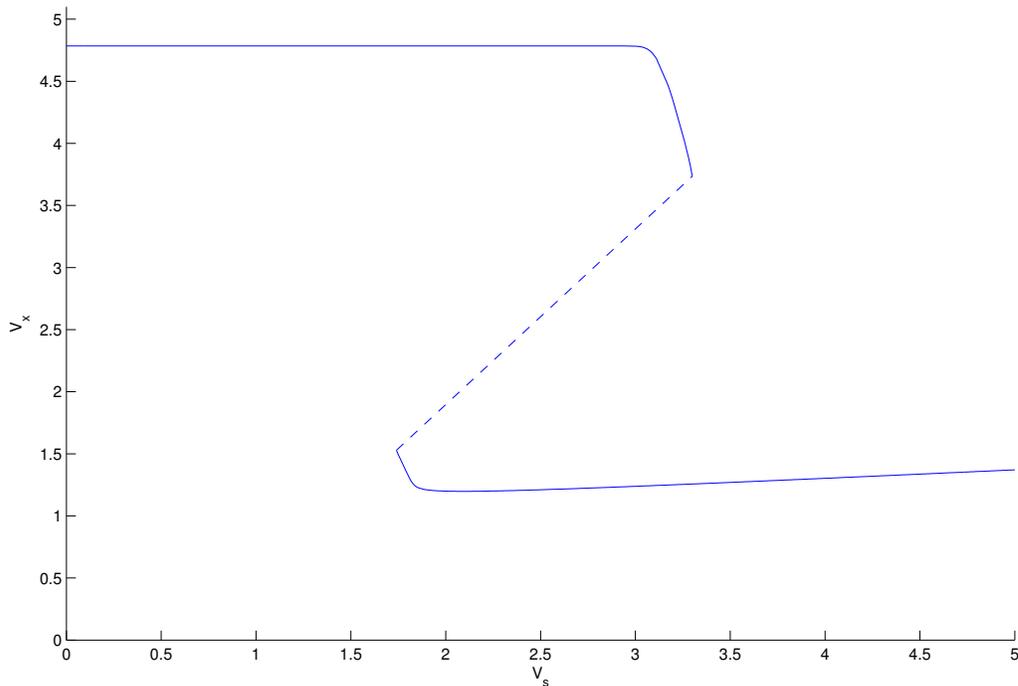


Figura 3.11: Salida V_x del circuito de la histéresis

De la misma manera que en la saturación básica, a manera de comparación, en la Figura 3.12 se muestra la salida del circuito eléctrico real utilizando los mismos componentes que en la simulación.

Observamos que el comportamiento de la Figura 3.11 es similar a un diagrama de bifurcación persistente para la singularidad histéresis, mostrados en el Capítulo 1. Por lo tanto, utilizando el Teorema de Clasificación, en la siguiente sección se desarrolla un algoritmo recursivo, basado en el problema de reconocimiento, que demuestra que el circuito de la Figura 3.7 presenta la singularidad histéresis y que tomando a la resistencia R_{b2} como parámetro de despliegue, el circuito es también un despliegue universal de la histéresis.

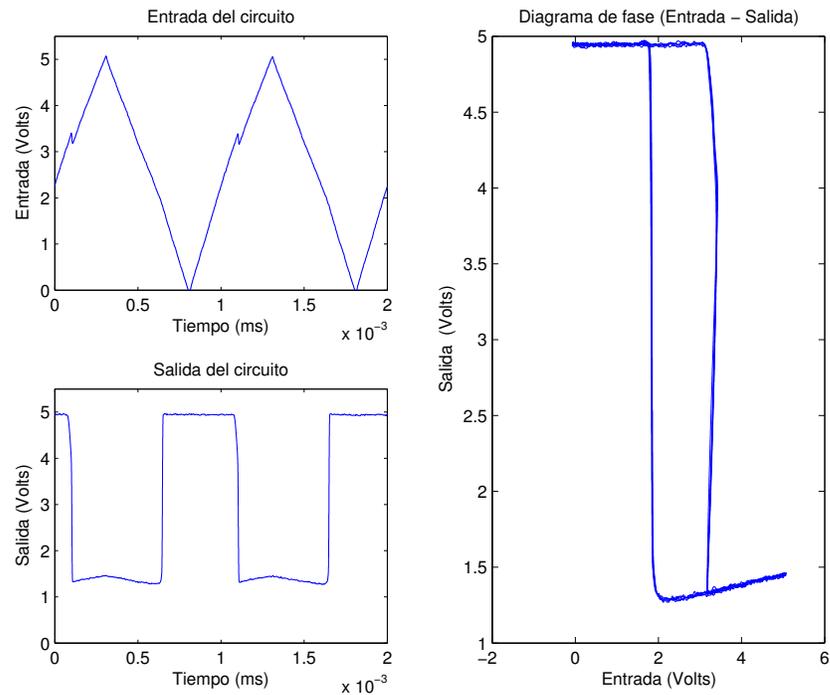


Figura 3.12: Datos de la implementación del circuito eléctrico real. Parte superior izquierda: señal de entrada triangular de amplitud 5 volts y frecuencia 1000 Hertz. Parte inferior izquierda: Señal de salida V_x en el tiempo. Parte derecha: plano de fase de la señal de entrada contra la señal de salida.

3.3. Teoría de singularidades aplicada al circuito eléctrico

La ecuación $\Phi(i, \theta) = 0$, será objeto de estudio durante el desarrollo de esta sección recordando que $i = [i_{b1}, i_{c1}, i_{b2}, i_{c2}]$ es el vector de variables desconocidas y $\theta = [V_s, R_{b2}, R_{c2}, R_{b1}, R_{c2}, R_e, V_{CC}]$ el vector de parámetros.

En la sección anterior se observó que la salida del circuito de la Figura 3.7, tiene un diagrama de bifurcación persistente de la histéresis. Entonces, surge la inquietud de identificar si algún parámetro $\Phi(i, \theta) = 0$ actúa como parámetro de despliegue, de tal manera que al manipularlo obtengamos como salida la histéresis perfecta. En otras palabras, se busca demostrar que en efecto la singularidad histéresis es centro organizador del comportamiento del circuito eléctrico, aplicando a $\Phi(i, \theta) = 0$ el problema de reconocimiento y la teoría de despliegues.

De los capítulos anteriores, recordamos que la teoría singular se ha formulado para

problemas de bifurcación escalares, es decir, mapeos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $g(x, \lambda) = 0$ y mapeos $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $G(x, \lambda, \alpha) = 0$. Por lo tanto, a simple vista las herramientas de esta teoría no se pueden aplicar directamente al conjunto de ecuaciones (3.27), donde $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

Por lo anterior, la primer problemática que se presenta al iniciar la sección es la siguiente: dado un mapeo suave $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ¿cómo podemos aplicar las herramientas de la teoría singular formuladas para $g(x, \lambda)$ y $G(x, \lambda, \alpha)$, al conjunto de ecuaciones $\Phi(i, \theta) = 0$?, donde i son las variables de estado, $\theta_0 = \lambda = V_s$ el parámetro de bifurcación, algún elemento de θ_{1-k} el parámetro de despliegue y los elementos restantes de θ son parámetros auxiliares.

En los siguientes párrafos se escribirá $\Phi(i, \theta) = 0$ como $\Phi(i, \lambda; \theta_{1-k}^*) = 0$, donde θ_{1-k}^* denota que los parámetros se matienen fijos.

Para comenzar a abordar el problema formulado anteriormente, a continuación se presentan dos suposiciones importantes. Como primer suposición, se considera que la función $\Phi(i, \lambda; \theta_{1-k}^*)$ en un punto $(i_0, \lambda_0; \theta_{1-k}^*)$ es igual a cero, es decir, $\Phi(i_0, \lambda_0; \theta_{1-k}^*) = 0$. Sea $L = d\Phi(i, \lambda; \theta_{1-k}^*)|_{(i_0, \lambda_0; \theta_{1-k}^*)}$ una matriz Jacobiana de dimensiones $n \times n$. Si el $\text{rango}(L) = n$, entonces por el teorema de la función implícita el conjunto de ecuaciones 3.27 puede resolverse de manera única para i en función de θ , es decir, en este caso no degenerado no puede ocurrir una bifurcación. De lo anterior, la segunda suposición considera el mínimo caso degenerado cuando el $\text{rango}(L) = n - 1$, donde si puede ocurrir una bifurcación.

Las dos suposiciones anteriores, permiten solucionar el primer problema planteado utilizando una herramienta conocida como la reducción de Lyapunov-Schmidt, la cual es una aplicación muy inteligente del Teorema de la Función Implícita para reducir el problema de múltiples soluciones como Φ , en una función escalar de $k + 1$ parámetros $P(x, \theta)$, donde $P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$. En la sección 3 de [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Capítulo I], se presenta una introducción de la reducción de Lyapunov-Schmidt aplicada a un conjunto de ecuaciones con un caso mínimo de degenerancia.

La reducción de Lyapunov-Schmidt presenta un inconveniente al momento de tratar con el modelo de un sistema real, el cual es, que en muchos problemas de aplicación a

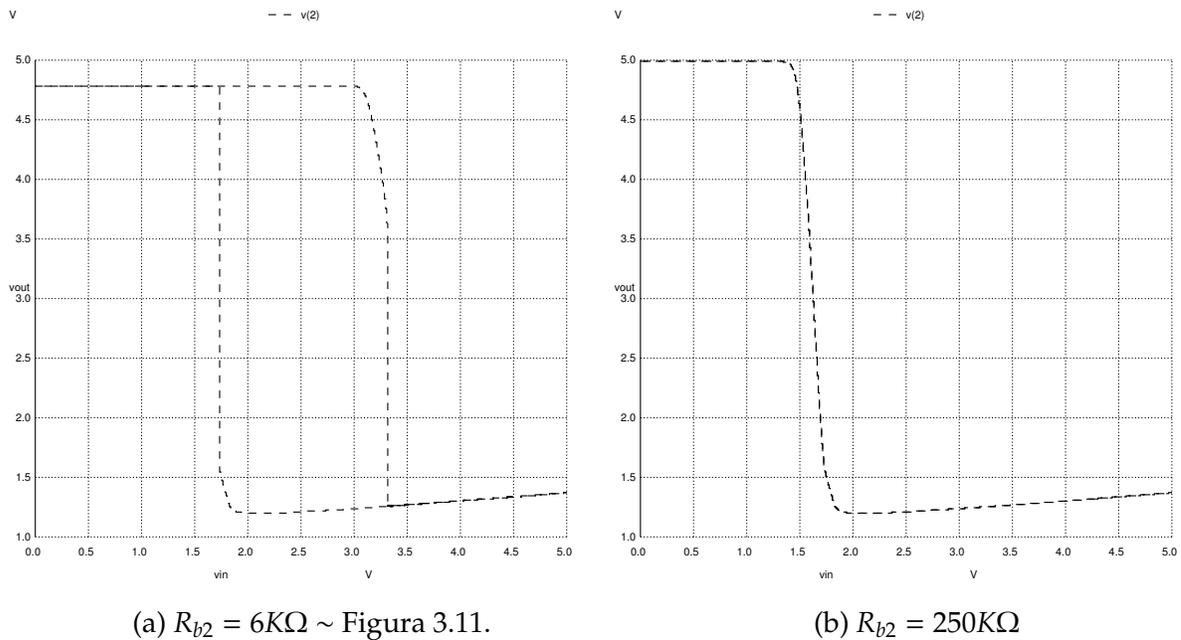


Figura 3.13: Salida V_x del circuito para valores de R_{b2} .

veces es imposible obtener una fórmula explícita para $P(x, \theta)$. Por lo que, en la subsección (e) de la sección 3 de [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Capítulo I] se presenta la solución para poder utilizar la reducción en un problema de aplicación, es decir, como se calculan las derivadas de la función reducida $P(x, \theta)$ en función de derivadas de la función Φ .

Así, se tomarán estas derivadas de la reducción de Lyapunov-Schmidt para aplicarlo al siguiente problema: ¿el comportamiento del conjunto de ecuaciones Φ , es organizado por la singularidad histéresis?. Lo cual será tema principal de esta sección.

Antes de proseguir con la solución a la problemática enunciada, se comenta que después de llevar a cabo varias simulaciones del circuito eléctrico de la Figura 3.7 en el programa *ngspice* (utilizando un transistor npn 2n2222 y las resistencias $R_{b1} = 2.4k\Omega$, $R_{c1} = 820\Omega$, $R_{c1} = 240\Omega$, $R_e = 240\Omega$, $R_{b2} = \text{variable}$), se observó que al variar la resistencia R_{b2} , fijando los parámetros restantes y variando el voltaje de entrada entre 0 y 5 volts, el comportamiento de la salida del circuito, V_x , presenta más fácilmente los diagramas persistentes de la singularidad histéresis (ver Figura 1.5), como puede verse en la Figura 3.13.

Así, basándonos en la Figura 3.13, se puede inferir que la histéresis perfecta se

encuentra entre un valor de resistencia de $6K\Omega < R_{b2}^* < 250K\Omega$. Entonces, durante el desarrollo de esta sección se toma a $\theta_1 = \beta = R_{b2}$ como el parámetro de despliegue y a θ_{2-7}^* como parámetros auxiliares fijos. Por lo tanto, en el resto del documento $\Phi(i, \theta) = 0$ se escribirá como $\Phi(i, \lambda; \beta, \theta_{2-k}^*) = 0$ y la forma reducida $P(x, \theta) = 0$ como $P(x, \lambda; \beta, \theta_{2-k}^*) = 0$.

Utilizando nuevamente como referencia a la Figura 3.13, se observa que la salida del circuito eléctrico presenta los diagramas de bifurcación persistentes de la singularidad histéresis, como consecuencia se recurre a la Proposición 1.1.3 donde las condiciones que se necesitan para reconocer la histéresis son: $g(x_0, \lambda_0) = g_x(x_0, \lambda_0) = g_{xx}(x_0, \lambda_0) = 0$, $\epsilon = \text{sgn}(g_{xxx}(x_0, \lambda_0))$ y $\delta = \text{sgn}(g_\lambda(x_0, \lambda_0))$, donde (x_0, λ_0) es el punto de singularidad. En el Capítulo 1 el punto (x_0, λ_0) se toma igual a $(0, 0)$ por simplicidad, pero cabe mencionar que la teoría se aplica a cualquier punto en donde ocurra la singularidad y si se desea se puede realizar un cambio de coordenadas, de tal manera que este punto sea $(0, 0)$.

De [Golubitsky and Schaeffer, 1985], se toman las expresiones de la forma reducida P en función de derivadas de la función Φ , que son equivalentes a las condiciones de $g(x, \lambda)$ para reconocer la histéresis, éstas son:

Para aplicar la reducción

$$\Phi(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*) = 0, \quad (3.29a)$$

$$\det(d\Phi(i, \lambda; \beta^*, \theta_{2-7}^*)|_{(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)}) = 0. \quad (3.29b)$$

Las condiciones anteriores implican que:

$$P(x_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*) = 0 \quad (3.30a)$$

$$P_x(x_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*) = 0 \quad (3.30b)$$

Y por último las siguientes condiciones:

$$P_{xx}(x_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*) = \langle v_0^*, d^2\Phi(v_0, v_0) \rangle = 0, \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{sgn}(P_{xxx}(x_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)) \\ &= \text{sgn}(\langle v_0^*, d^3\Phi(v_0, v_0, v_0) - 3d^2\Phi(v_0, L^{-1}Ed^2\Phi(v_0, v_0)) \rangle), \end{aligned} \quad (3.31b)$$

$$\delta = \text{sgn}(P_\lambda(x_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)) = \text{sgn}(\langle v_0^*, \Phi_\lambda \rangle), \quad (3.31c)$$

donde L es la matriz Jacobiana evaluada en el punto $(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)$, $v_0 \in \text{Ker } L$, $v_0^* \in (\text{Im } L)^\perp$, E es la proyección de \mathbb{R}^4 en la $\text{Im } L$ y $(d^k\Phi)_{i,\theta}(v_1, \dots, v_k) = \frac{\partial}{\partial t_1} \dots \frac{\partial}{\partial t_k} \Phi(i + \sum_{i=1}^k t_i v_i, \theta) \Big|_{t_1=\dots=t_k=0}$.

Claramente, observamos que no se pueden evaluar las derivadas de $P(x, \lambda; \beta, \theta_{2-7}^*)$ en (3.29), (3.30) y (3.31) ya que se desconoce el punto de singularidad $(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)$. En búsqueda de una solución a esto, pongámonos en contexto: la función $\Phi \in \mathbb{R}^4$ se compone cuatro corrientes i desconocidas del transistor, un parámetro de bifurcación λ , un parámetro de despliegue β y parámetros θ_{2-7}^* fijos, por lo tanto, se tiene un total de 6 variables desconocidas y 6 variables fijas conocidas.

Entonces, descartando las ecuaciones para ϵ y δ , ya que no aportan información útil, se intenta en buscar el punto singular $(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)$ a partir de una solución numérica de las dos condiciones de (3.29) y de (3.31a). Lo cual suena lógico desde que son seis ecuaciones para seis variables. Sin embargo, observamos que la condición $P_{xx}(x, \lambda; \beta^*, \theta_{2-7}^*)$ se encuentra en función de v_0 , el cual se calcula a partir del conocimiento del punto de singularidad, en otras palabras, la ecuación $\langle v_0^*, d^2\Phi(v_0, v_0) \rangle$ no está definida explícitamente. Finalmente, se llega a la conclusión de que no se puede calcular el punto $(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)$ de forma inmediata a partir de (3.29), y (3.31a). Por lo tanto, se plantea el siguiente algoritmo recursivo para resolver este problema:

1. Se inicia con un valor de $\beta = 6K\Omega$. Entonces, de forma numérica se encuentra un punto $(i_0, \lambda_0; \beta, \theta_{2-7}^*)$ tal que se cumplen las condiciones de (3.29).
2. Sea $L = d\Phi(i, \lambda; \beta, \theta_{2-7}^*) \Big|_{(i_0, \lambda_0; \beta, \theta_{2-7}^*)}$. Se computa el $\text{Ker}(L)$ y $\text{Im}(L)^\perp$, los cuales son conjuntos no vacíos ya que el rango(L) = $n - 1$.

3. Se eligen los vectores $v_0 \in \text{Ker}(L)$ y $v_0^* \in \text{Im}(L)^\perp$.
4. Se calcula $P_{xx}(x, \lambda; \beta, \theta_{2-7^*})$, definida como en (3.31).
5. Finalmente de (3.31), se sabe que $P_{xx}(i_0, \lambda_0; \beta, \theta_{2-7^*})$ debe ser igual a cero, de lo contrario, se recalcula la resistencia R_{b2} y regresa al paso 1 recursivamente hasta obtener P_{xx} igual a cero.
6. Cuando $P_{xx} = 0$, detenemos el algoritmo y entonces tomando β^* como el valor final de R_{b2} , se puede concluir que el comportamiento modelo del circuito eléctrico es dado por la singularidad histéresis.

Una forma de visualizar lo que realiza el algoritmo anterior es la siguiente: Al fijar la resistencia $R_{b2} = 6 \text{ K}\Omega$ nos encontramos en el caso en donde el diagrama de bifurcación persistente de la histéresis tiene forma de "S", entonces al encontrar un punto que satisface las condiciones de (3.29), realmente se está encontrando un punto en donde ocurre la singularidad nodo-silla, y así, al evaluar (3.31) en el punto encontrado se está imponiendo el problema de reconocimiento de la Histéresis, por lo tanto al incrementar la resistencia R_{b2} estamos forzando a desaparecer las singularidades nodo-silla para encontrar el punto donde se tiene la histéresis perfecta. Los pasos de este algoritmo se detallan en el diagrama de flujo de la Figura 3.14.

Este algoritmo fue programado en *Matlab*, donde las soluciones numéricas necesarias se realizaron con el comando *fsolve*. Se utilizó un transistor npn 2n2222 con las siguientes constantes del modelo de Ebers-Moll: $I_s = 14.34 \text{ fA}$, $\beta_f = 255.9$, $V_T = 0.0257 \text{ V}$, $\alpha_R = 0.859$, $\beta_R = 6.092$; y los parámetros restantes del circuito: $V_{cc} = 5 \text{ V}$, $R_{b1} = 2400 \Omega$, $R_{c1} = 820 \Omega$, $R_{c2} = 240 \Omega$ y $R_e = 240 \Omega$. En la Figura 3.15 se muestra que la convergencia de P_{xx} a cero, lo cual era el objetivo. Y finalmente se llega al siguiente resultado.

Proposición 3.3.1 (Primer resultado principal de la Tesis). *Sea $P(x, \lambda; \beta^*, \theta_{2-7}^*) = 0$ una ecuación reducida, utilizando el método de Lypanov-Smidt, del conjunto de ecuaciones $\Phi(i, \lambda; \beta^*, \theta_{2-7}^*) = 0$ dado por (3.27). La forma reducida $P(x, \lambda; \beta^*, \theta_{2-7}^*) = 0$ es fuertemente equivalente a la singularidad histéresis $h(x, \lambda) = -x^3 + \lambda$.*

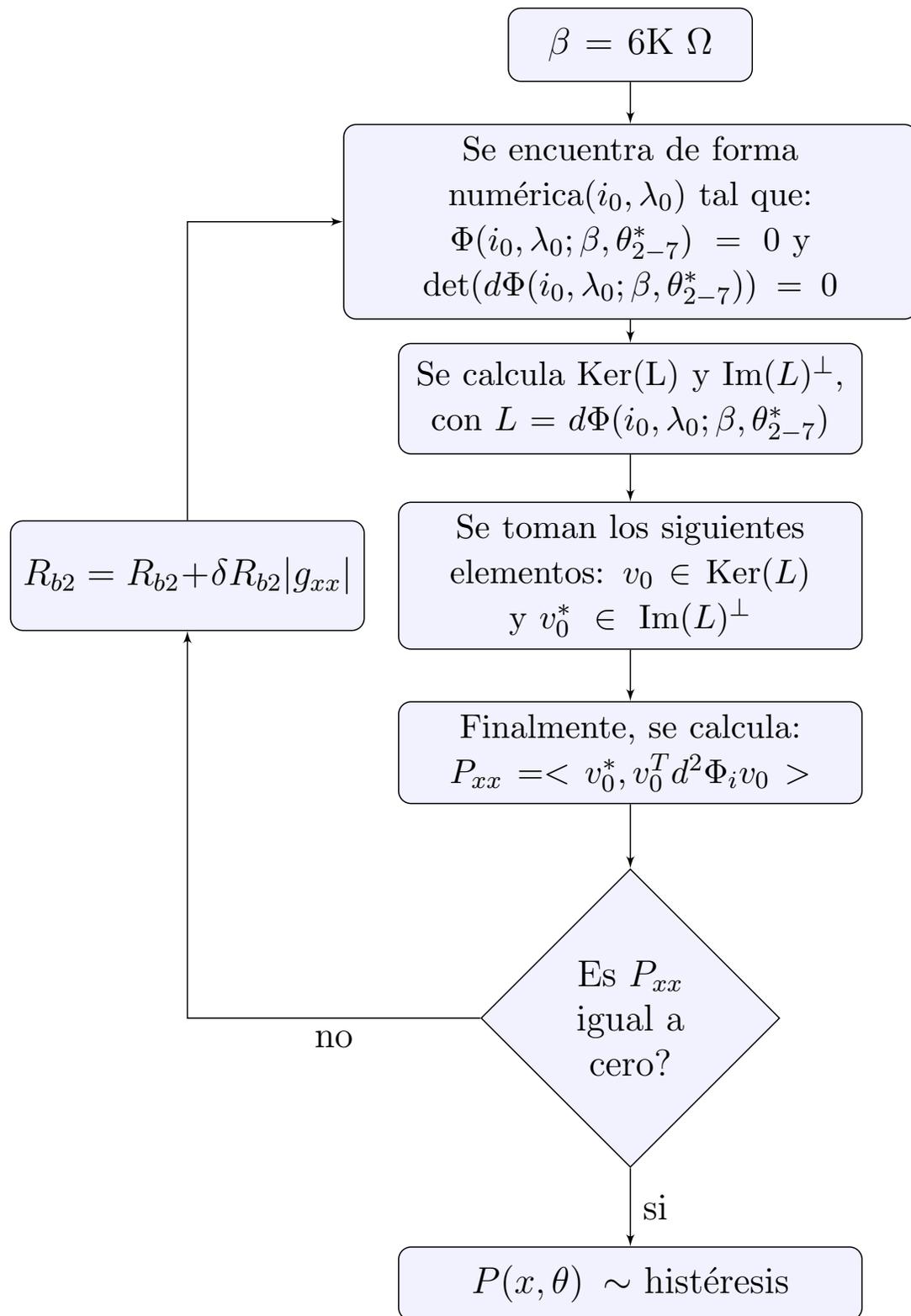


Figura 3.14: Diagrama de flujo del algoritmo.

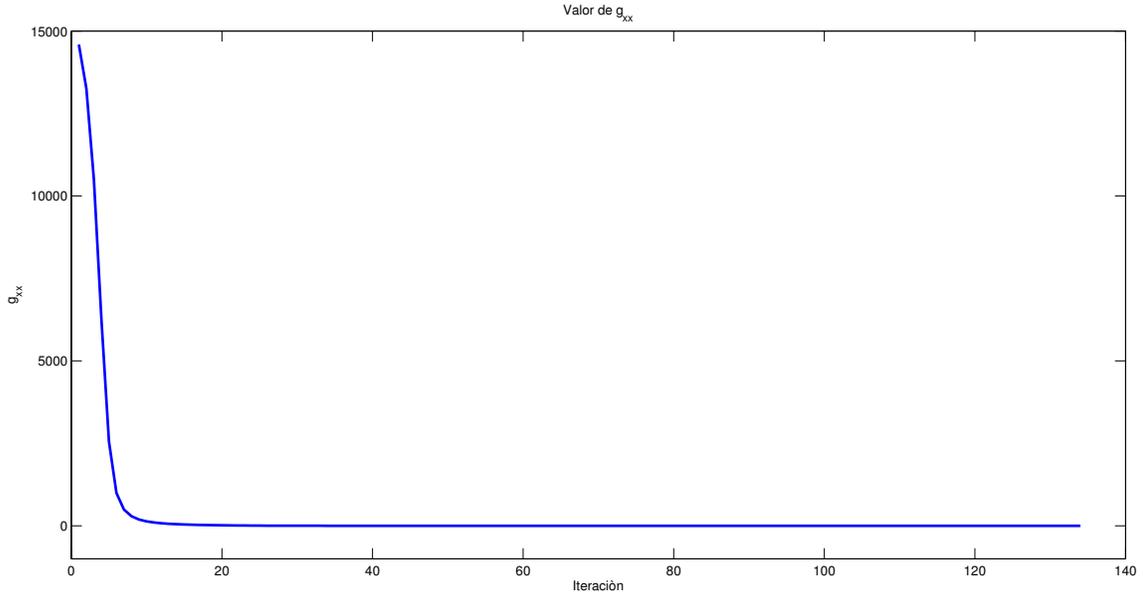


Figura 3.15: Valor de P_{xx} para cada iteración del algoritmo.

Demostración. Aplicando la Proposición 1.1.3 con $k = 3$ a la forma reducida $P(x, \lambda; \beta^*, \theta_{2-7}^*)$, en el punto de singularidad obtenido por el algoritmo $(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)$, donde $i_0 = 10E - 6[11.15, 2855.16, 5.30, 1371.04]$ A., $\lambda_0 = 1.713739$ V. y $\beta^* = 185.454$ K Ω , se obtiene:

$$\Phi(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*) = 0, \quad (3.32a)$$

$$\det(d\Phi(i, \lambda; \beta, \theta_{2-7}^*)|_{(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)}) = 0, \quad (3.32b)$$

$$P_{xx}(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*) = \langle v_0^*, d^2\Phi(v_0, v_0) \rangle = 0, \quad (3.32c)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{sgn}(P_{xxx}(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)) \\ &= \text{sgn}(\langle v_0^*, d^3\Phi(v_0, v_0, v_0) - 3d^2\Phi(v_0, L^{-1}Ed^2\Phi(v_0, v_0)) \rangle) \\ &= -1, \end{aligned} \quad (3.32d)$$

$$\delta = \text{sgn}(P_\lambda(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)) = \text{sgn}(\langle v_0^*, \Phi_\lambda \rangle) = 1. \quad (3.32e)$$

Por lo tanto, la forma reducida $P(x, \lambda; \beta^*, \theta_{2-7}^*)$ es fuertemente equivalente a la singularidad histéresis $h(x, \lambda) = -x^3 + \lambda$ en una vecindad de $(i_0, \lambda_0; \beta^*, \theta_{2-7}^*)$. \square

Para finalizar, se realiza el problema de reconocimiento para despliegues universales para el modelo del circuito eléctrico.

Proposición 3.3.2 (Segundo resultado principal de la Tesis). *La ecuación reducida $P(x, \lambda; \beta, \theta_{2-7}^*) = 0$ es un despliegue universal de la singularidad histéresis, con $\beta = \theta_1 = R_{b2}$ como el parámetro de despliegue.*

Demostración. Para β^* , se tiene que $P(x, \lambda; \beta^*, \theta_{2-7}^*)$ es fuertemente equivalente a $h(x, \lambda) = -x^3 + \lambda$. Para mostrar que $P(x, \lambda; \beta, \theta_{2-7}^*)$ es un despliegue universal, basta con mostrar que el siguiente determinante (tomando las equivalencias de $P(x, \lambda; \beta, \theta_{2-7}^*)$ como función Φ de [Golubitsky and Schaeffer, 1985, Capítulo 1]) es diferente de cero en el punto $(i_0, \lambda; \beta, \theta_{2-7}^*)$, donde $i_0 = 10E - 6[11.15, 2855.16, 5.30, 1371.04]$ A., $\lambda_0 = 1.713739$ V. y $\beta^* = 185.454$ K Ω , entonces

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} P_\lambda & P_{\lambda x} \\ P_\beta & P_{\beta x} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \langle v_0^*, \Phi_\lambda \rangle & \langle v_0^*, d\Phi_\lambda v_0 - d^2\Phi(v_0, L^{-1}E\Phi_\lambda) \rangle \\ \langle v_0^*, \Phi_\beta \rangle & \langle v_0^*, d\Phi_\beta v_0 - d^2\Phi(v_0, L^{-1}E\Phi_\beta) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \langle v_0^*, \Phi_\lambda \rangle \langle v_0^*, d\Phi_\beta v_0 - d^2\Phi(v_0, L^{-1}E\Phi_\beta) \rangle \\ &\quad - \langle v_0^*, \Phi_\beta \rangle \langle v_0^*, d\Phi_\lambda v_0 - d^2\Phi(v_0, L^{-1}E\Phi_\lambda) \rangle = 0.34 \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto la forma reducida $P(x, \theta)$ es un despliegue universal de la singularidad histéresis. \square

Al ser la forma reducida $P(x, \lambda; \beta, \theta_{2-7}^*)$ un despliegue universal de la singularidad histéresis, se justifica que aparezcan a la salida del circuito 3.7 los diagramas persistentes de la histéresis. Es decir, la singularidad histéresis es un centro organizador de la forma reducida $P(x, \lambda; \beta, \theta_{2-7}^*)$.

3.4. Comportamientos no lineales en el circuito eléctrico

Una vez que se ha demostrado que el circuito eléctrico de la Figura 3.7 es organizado por la histéresis, es válido intentar de reproducir los comportamientos no lineales pre-

sentados para la histéresis en el Capítulo 2, es decir, la excitabilidad y las oscilaciones relajadas.

Recordando que la excitabilidad y las oscilaciones relajadas se obtienen al retroalimentar la salida del circuito, con una dinámica lenta, a la entrada del circuito presentando la singularidad histéresis, el circuito eléctrico que realiza esta tarea se muestra en la Figura 3.16, donde la dinámica lenta de la salida se logra al agregar un circuito RC y la dinámica rápida se obtiene naturalmente al aprovechar la capacitancia parásita del condensador.

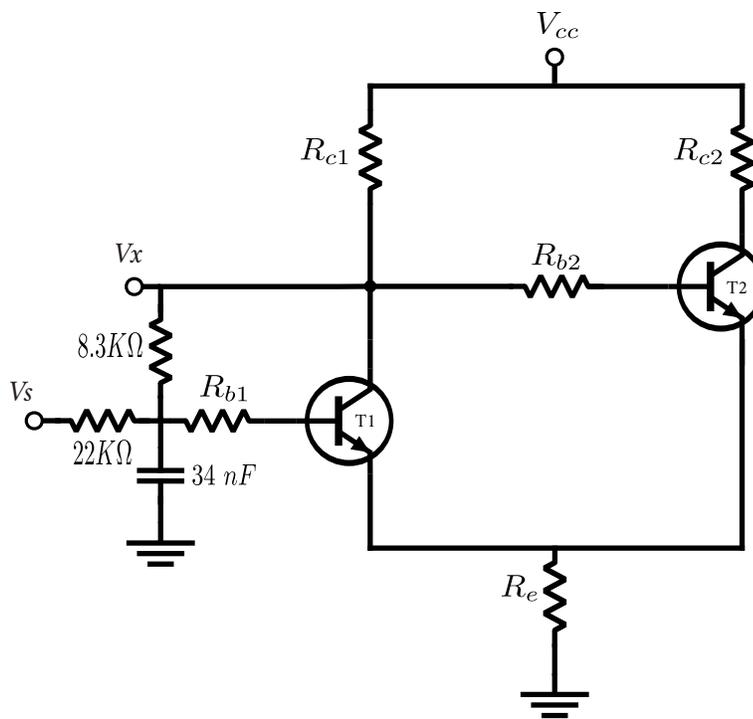


Figura 3.16: Circuito eléctrico equivalente a añadir una dinámica lenta y una dinámica rápida al despliegue universal de la singularidad histéresis.

La excitabilidad en el circuito eléctrico, se muestra introduciendo un impulso en la entrada del circuito, así, cuando el voltaje de la señal de entrada está en cero volts, el comportamiento debe permanecer en equilibrio (equivalente a estado de reposo en una neurona) y cuando el voltaje del impulso sobrepasa algún umbral (simulando perturbaciones en la neurona) se lanzan oscilaciones relajadas (*spikes* neuronales). La misma transición entre reposo y oscilaciones de relajación se observa en respuesta a un señal de entrada triangular, como se muestra en la Figura 3.18.

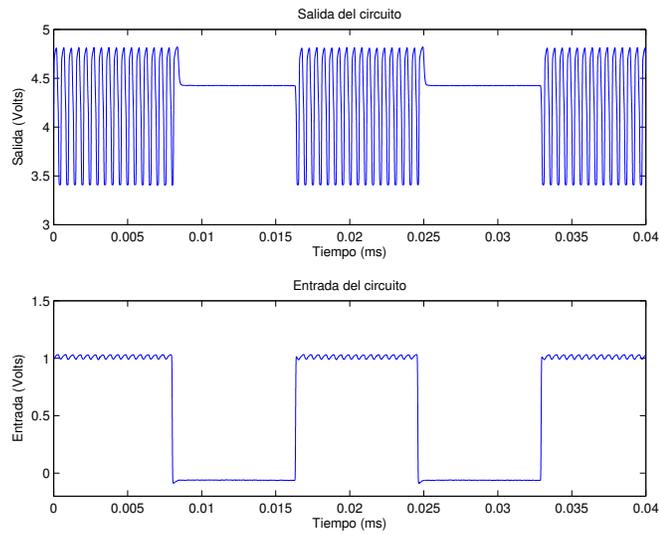


Figura 3.17: Excitabilidad en un circuito eléctrico.

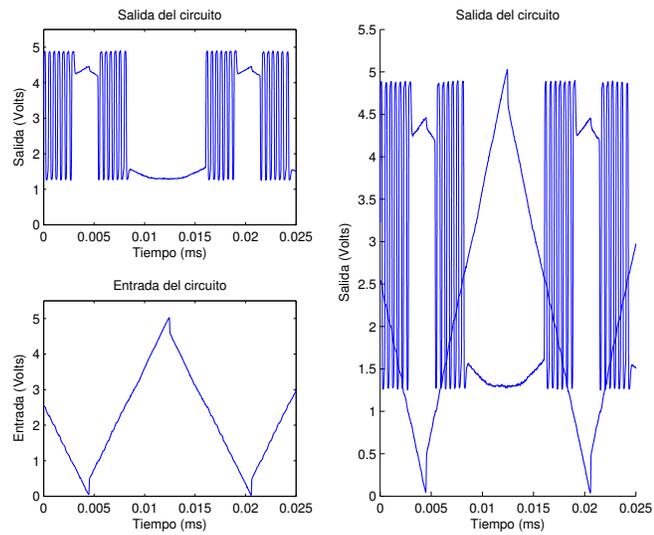


Figura 3.18: Oscilaciones relajadas en un circuito eléctrico.

Discusión de los resultados

Los principales resultados de la tesis son las proposiciones 3.3.1 y 3.3.2, las cuales, aseguran que la salida del circuito eléctrico de la Figura 3.7 tiene un comportamiento organizado por la singularidad histéresis, es decir, los diagramas de bifurcación que tiene la salida del dispositivo, al variar el parámetro de despliegue R_{b2} , son equivalentes a los mostrados en la Figura 1.5. Entonces, al utilizar estos resultados y la teoría del Capítulo 2, se consolida la construcción de la singularidad histéresis y su despliegue universal en un circuito eléctrico, el cual, puede convertirse en un circuito organizado por la singularidad winged cusp agregando un comportamiento *bump* a la entrada del dispositivo.

La importancia del primer resultado es vital para demostrar que efectivamente, tomando la resistencia R_{b2} como parámetro de despliegue, el circuito eléctrico es un despliegue universal de la histéresis en el punto de singularidad obtenido por el algoritmo propuesto en el Capítulo 3. El segundo resultado, nos asegura que al modificar la resistencia R_{b2} podemos conseguir los diferentes comportamientos de la histéresis. Por lo tanto, estas proposiciones nos permiten dar el siguiente paso en la metodología de construcción, el cual es, dar una idea de como agregar componentes, como el condensador, para obtener los comportamientos asociados a la histéresis: la excitabilidad y las oscilaciones relajadas o *spiking* periódico.

Lo anterior se compara con otras investigaciones al momento de construir circuitos neuromorfos, ya que por ejemplo, para llevar a cabo la sintonización de parámetros y obtener los comportamientos neuronales de interés, en esta tesis basta con modificar el parámetro de despliegue mientras que en otros trabajos puede llevarse a cabo de manera heurística, no ser tan evidente y en algunos casos muy complicado, donde la principal

causa de esto se debe a que son dispositivos contruidos con muchos componentes.

La principal limitación de la tesis se observa directamente al obtener únicamente el comportamiento neuronal *spiking*, ya que para conseguir el *bursting* y otros comportamientos es obligatorio el análisis y la construcción de la singularidad winged cusp y su despliegue universal.

Una pregunta que surge directamente de esta investigación, es explorar si es posible la construcción de circuitos neuromorfos utilizando transistores MOSFET aplicando la misma metodología desarrollada a lo largo de tesis.

Conclusión y trabajo futuro

La forma organizada en la que fue evolucionando la tesis, permitió ir por el camino correcto para cumplir el objetivo general propuesto. En primer lugar, el estudio de las bifurcaciones desde un enfoque diferente, la teoría de singularidades, resultó una herramienta fácil de aplicar. En segundo término, la teoría geométrica de perturbaciones singulares dio una idea clara del comportamiento de un sistema dinámico que tiene una estructura con escalas de tiempo fuertemente separadas, a pesar de ser una teoría difícil de entender. Y finalmente, al seguir una metodología ordenada de análisis y construcción fue que al modelo del circuito final se le pudo aplicar la teoría estudiada, para demostrar que el comportamiento estático de la salida es organizado por la histéresis y que al agregar otros elementos electrónicos se obtuvo un comportamiento similar al spiking neuronal.

Recordando un poco la hipótesis planteada al inicio, concluimos que en efecto al analizar los comportamientos neuronales desde un punto de vista de sistemas dinámicos, las bifurcaciones permitieron dar una forma más sencilla de estudiar la neurona y construir un circuito utilizando solamente dos transistores, siete resistencias y un condensador, para reproducir el comportamiento más sencillo conocido como *spiking*.

El camino por recorrer aún es muy grande y a veces suele ser confuso y complicado, pero si se tiene claro a donde se desea llegar tarde o temprano los objetivos planteados se resolverán. Es por esto, que se enuncia el trabajo futuro.

El trabajo a corto plazo, es la construcción de un circuito eléctrico que sea organizado por la winged cusp. Como consecuencia directa de esto, se obtendrán comportamientos neuronales más sofisticados como el *bursting*.

Posteriormente, se explorará si es posible llevar a cabo la misma construcción de

circuitos neuromorfos, pero ahora utilizando transistores MOSFETs. Esta idea surge ya que este tipo de dispositivos suelen ser más nobles en su forma de operación y quizá, esta propiedad reduzca aún más el número de elementos del circuito neuomorfo.

Un objetivo a mediano plazo, es el estudio y la experimentación de tareas específicas realizadas por el sistema nervioso a partir de conexiones de las neuronas. Estas tareas se mencionaron muy brevemente en circuitos neuromorfos que se han desarrollado en la literatura, por ejemplo: dispositivos de visión, de generación de patrones, de toma de decisiones, de simulación, etcétera.

Bibliografía

- [Arthur and Boahen, 2004] Arthur, J. V. and Boahen, K. (2004). Recurrently connected silicon neurons with active dendrites for one-shot learning. In *Neural Networks, 2004. Proceedings. 2004 IEEE International Joint Conference on*, volume 3, pages 1699–1704 vol.3.
- [Benjamin et al., 2014] Benjamin, B. V., Gao, P., McQuinn, E., Choudhary, S., Chandrasekaran, A. R., Bussat, J. M., Alvarez-Icaza, R., Arthur, J. V., Merolla, P. A., and Boahen, K. (2014). Neurogrid: A mixed-analog-digital multichip system for large-scale neural simulations. *Proceedings of the IEEE*, 102(5):699–716.
- [Cassidy and Andreou, 2008] Cassidy, A. and Andreou, A. G. (2008). Dynamical digital silicon neurons. In *2008 IEEE Biomedical Circuits and Systems Conference*, pages 289–292.
- [Cassidy et al., 2007] Cassidy, A., Denham, S., Kanold, P., and Andreou, A. (2007). Fpga based silicon spiking neural array. In *2007 IEEE Biomedical Circuits and Systems Conference*, pages 75–78.
- [Castaños and Franci, 2015] Castaños, F. and Franci, A. (2015). The transition between tonic spiking and bursting in a six-transistor neuromorphic device. *12th International Conference on Electronical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, pages 28–30.
- [Douglas et al., 1995] Douglas, R., Mahowald, M., and Mead, C. (1995). Neuromorphic analogue vlsi. *Annual Review of Neuroscience*, 18(1):255–281. PMID: 7605063.

- [Fenichel, 1972] Fenichel, N. (1972). Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Indiana Univ. Math. J.*, 21(3):193–226.
- [Fitzhugh, 1961] Fitzhugh, R. (1961). Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1(6):445–466.
- [Franci et al., 2014] Franci, A., Drion, G., and Sepulchre, R. (2014). Modeling the modulation of neuronal bursting: A singularity theory approach. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 13(2):798–829.
- [Franci and Sepulchre, 2014] Franci, A. and Sepulchre, R. (2014). Realization of nonlinear behaviors from organizing centers. *53rd IEEE conference on Decision and Control*, pages 56–61.
- [Fukushima et al., 1970] Fukushima, K., Yamaguchi, Y., Yasuda, M., and Nagata, S. (1970). An electronic model of the retina. *Proceedings of the IEEE*, 58(12):1950–1951.
- [Golubitsky and Schaeffer, 1985] Golubitsky, M. and Schaeffer, D. (1985). *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, volume 51. Springer-Verlag New York.
- [Grasman, 1987] Grasman, J. (1987). *Asymptotic Methods for Relaxation Oscillations and Applications*, volume 63. Springer New York, New York.
- [Hodgkin and Huxley, 1952] Hodgkin, A. L. and Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, 117:500–544.
- [Indiveri, 2003] Indiveri, G. (2003). A low-power adaptive integrate-and-fire neuron circuit. In *Circuits and Systems, 2003. ISCAS '03. Proceedings of the 2003 International Symposium on*, volume 4, pages IV–820–IV–823 vol.4.
- [Izhikevich, 2010] Izhikevich, E. M. (2010). Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting.

- [Jo et al., 2010] Jo, S. H., Chang, T., Ebong, I., Bhadviya, B. B., Mazumder, P., and Lu, W. (2010). Nanoscale memristor device as synapse in neuromorphic systems. *Nano Letters*, 10(4):1297–1301. PMID: 20192230.
- [Jones, 1995] Jones, C. K. (1995). Geometric singular perturbation theory. In Johnson, R., editor, *Dynamical Systems*, volume 1609, pages 44–118. Springer Berlin Heidelberg, Division of Applied Mathematics, Brown University. Lecture Notes in Mathematics.
- [Keyfitz, 1986] Keyfitz, B. L. (1986). Classification of one-state-variable bifurcation problems up to codimension seven. *Dynamics and Stability of Systems*, 1(1):1–41.
- [Krupa and Szmolyan, 2001] Krupa, M. and Szmolyan, P. (2001). Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities. *Nonlinearity*, 14(6):1473.
- [Krupa and Szmolyan, 2001] Krupa, M. and Szmolyan, P. (2001). Relaxation Oscillation and Canard Explosion. *Journal of Differential Equations*, 174:312–368.
- [Lee et al., 2004] Lee, Y. J., Lee, J., Kim, Y. B., Ayers, J., Volkovskii, A., Selverston, A., Abarbanel, H., and Rabinovich, M. (2004). Low power real time electronic neuron vlsi design using subthreshold technique. In *Circuits and Systems, 2004. ISCAS '04. Proceedings of the 2004 International Symposium on*, volume 4, pages IV–744–7 Vol.4.
- [Mead, 1989] Mead, C. (1989). *Adaptive Retina*, pages 239–246. Springer US, Boston, MA.
- [Mead, 1990] Mead, C. (1990). Neuromorphic electronic systems. *Proceedings of the IEEE*, 78(10):1629–1636.
- [Mead and Mahowald, 1988] Mead, C. A. and Mahowald, M. (1988). A silicon model of early visual processing. *Neural Networks*, 1(1):91 – 97.
- [Merolla and Boahen, 2006] Merolla, P. A. and Boahen, K. (2006). Dynamic computation in a recurrent network of heterogeneous silicon neurons. In *2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages 4 pp.–4542.

- [Mishchenko, 2013] Mishchenko, E. (2013). *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, volume 13. Springer Science & Business Media.
- [Nakada et al., 2004] Nakada, K., Asai, T., and Amemiya, Y. (2004). Analog cmos implementation of a bursting oscillator with depressing synapse. In *Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, pages 503–506.
- [Nakada et al., 2005] Nakada, K., Asai, T., and Hayashi, H. (2005). silicon resonate-and-fire neuron based on the volterra system. In *Int. Symp. on Nonlinear Theory and its Applications*, pages 82–85.
- [Patel and DeWeerth, 1997] Patel, G. N. and DeWeerth, S. P. (1997). Analogue vlsi morris-lecar neuron. *Electronics Letters*, 33(12):997–998.
- [Pickett et al., 2013] Pickett, M. D., Medeiros-Ribeiro, G., and Williams, R. S. (2013). A scalable neuristor built with mott memristors. *Nat Mater*, 12(2):114–117.
- [Rosenblatt, 1958] Rosenblatt, F. (1958). The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, pages 65–386.
- [Sedra and Smith, 2004] Sedra, A. S. and Smith, K. C. (2004). *Microelectronic circuits*. Oxford University Press, 5th edition.
- [Strogatz, 2001] Strogatz, S. H. (2001). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, volume 272. Westview Press.
- [Taylor and Mann, 1983] Taylor, A. E. and Mann, W. R. (1983). *Advanced Calculus*. Wiley, New York, 2 edition.
- [Tenore et al., 2004] Tenore, F., Etienne-Cummings, R., and Lewis, M. A. (2004). A programmable array of silicon neurons for the control of legged locomotion. In *Circuits and Systems, 2004. ISCAS '04. Proceedings of the 2004 International Symposium on*, volume 5, pages V-349–V-352 Vol.5.

- [Vogelstein et al., 2004] Vogelstein, R. J., Mallik, U., Culurciello, E., Cauwenberghs, G., and Etienne-Cummings, R. (2004). Saliency-driven image acuity modulation on a reconfigurable array of spiking silicon neurons. In *Advances in neural information processing systems*, pages 1457–1464.
- [Vogelstein et al., 2007] Vogelstein, R. J., Mallik, U., Vogelstein, J. T., and Cauwenberghs, G. (2007). Dynamically reconfigurable silicon array of spiking neurons with conductance-based synapses. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 18(1):253–265.
- [Vogelstein et al., 2008] Vogelstein, R. J., Tenore, F. V. G., Guevremont, L., Etienne-Cummings, R., and Mushahwar, V. K. (2008). A silicon central pattern generator controls locomotion in vivo. *IEEE Transactions on Biomedical Circuits and Systems*, 2(3):212–222.
- [Wijekoon and Dudek, 2008] Wijekoon, J. H. and Dudek, P. (2008). Compact silicon neuron circuit with spiking and bursting behaviour. *Neural Networks*, 21(2–3):524 – 534. *Advances in Neural Networks Research: {IJCNN} '07* 2007 International Joint Conference on Neural Networks {IJCNN} '07.