



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL

**Unidad Zacatenco**

Departamento de Control Automático

**Control de un cuadrirrotor en orientación y altura en  
ambientes exteriores**

Tesis que presenta

**Carlos Guillermo Valerio Naranjo**

para obtener el Grado de

**Maestro en Ciencias**

en la Especialidad de

**Control Automático**

Directores de la Tesis

**Dr. Moisés Bonilla Estrada**

**Dr. Sergio Rosario Salazar Cruz**

Ciudad de México

Diciembre 2017



# Resumen

En esta tesis se realiza un diseño de control para un mini cuadricóptero de código abierto, donde se emplean leyes de control no lineal; *backstepping* y control por *modos deslizantes*, para controlar sus seis grados de libertad. Se desarrolla un modelo matemático basado en el enfoque de *Newton-Euler*, obteniendo dos modelos, uno simplificado considerando la relación entre las razones angulares  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y las velocidades de los ángulos de *Euler* *alabeo*, *cabeceo*, *guiñada* como una matriz identidad, el más común en la literatura, y el otro modelo considerando la transformación entre estas variables. Se presentan simulaciones en sus seis grados de libertad y resultados experimentales en cuatro grados de libertad, *alabeo*, *cabeceo*, *guiñada* y *altura*.



# *Abstract*

In this thesis a control scheme is designed to control an open-source mini quadrotor. Non-linear control laws are designed; *backstepping* and *sliding mode*, to control the six degrees of freedom. A mathematical model is developed based on the *Newton-Euler* approach, getting two models, a simplified model considering the relationship between angular rates  $p$ ,  $q$ ,  $r$  and the Euler rates *roll*, *pitch*, *yaw* as an identity matrix, the most common among the literature, and the second one considering the transformation matrix among these variables. Simulation results on their six degrees of freedom and experimental results on four degrees of freedom (*roll*, *pitch*, *yaw* and *altitud*) are presented.



# *Agradecimientos*

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría en un posgrado de calidad.

A mis asesores, Dr. Sergio Salazar, por abrirme las puertas en la Unidad Mixta Internacional, su enorme paciencia y apoyo. Y el Dr. Moisés Bonilla por darme la oportunidad de trabajar con él y brindarme su apoyo.

Al departamento de Control Automático y las personas que laboran en él, manteniéndolo en muy buenas condiciones y con un excelente nivel académico.

A los sinodales por tomarse el tiempo de revisar y sugerir correcciones en la tesis.

A mis amigos, los nuevos que hice durante la maestría y los viejos, con los que compartí innumerables pláticas, risas y momentos inolvidables.

A Angélica por motivarme a no darme por vencido, apoyarme cuando lo necesitaba y por equilibrar mi vida al brindarme su amor.

Finalmente, a mi familia, mi madre Teresita y mi segunda madre Imelda, mis dos grandes pilares, por su apoyo incondicional, su amor y su confianza.





# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivaciones y objetivos . . . . .	1
1.2. Vehículos aéreos no tripulados . . . . .	2
1.2.1. El cuadrirrotor y su principio de funcionamiento . . . . .	2
1.2.2. Breve historia de los cuadrirrotores . . . . .	5
1.3. Estado del arte . . . . .	8
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	9
<b>2. Descripción de la plataforma</b>	<b>11</b>
2.1. Estructura Mecánica . . . . .	13
2.2. Sistema de Control . . . . .	13
2.3. Sistema de Propulsión . . . . .	16
<b>3. Modelado Matemático del Cuadrirrotor</b>	<b>19</b>
3.1. Cinemática del cuadrirrotor . . . . .	19
3.2. Dinámica del cuadrirrotor . . . . .	20
3.2.1. Fuerzas externas . . . . .	21
3.2.2. Pares externos . . . . .	21
3.3. Modelo del subsistema traslacional . . . . .	22
3.4. Modelo del subsistema rotacional . . . . .	22
3.5. Simplificación del modelo rotacional . . . . .	23
3.6. Simplificación del modelo traslacional . . . . .	24
<b>4. Leyes de Control</b>	<b>25</b>
4.1. Procedimiento Backstepping . . . . .	26
4.1.1. Metodología . . . . .	27

4.1.2.	Backstepping para el subsistema rotacional . . . . .	29
	Simulaciones . . . . .	31
4.1.3.	Backstepping para el subsistema rotacional simplificado . . . . .	32
	Simulaciones . . . . .	34
4.1.4.	Backstepping para el subsistema traslacional . . . . .	35
	Control en altura . . . . .	35
	Control en el desplazamiento x-y . . . . .	36
	Solución inversa . . . . .	37
	Simulaciones . . . . .	38
4.2.	Modos deslizantes . . . . .	41
4.2.1.	Modos deslizantes para el subsistema rotacional . . . . .	43
	Simulaciones . . . . .	44
<b>5.</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>45</b>
5.1.	Consideraciones prácticas . . . . .	45
5.1.1.	Mapeo de leyes de control a comandos de velocidad . . . . .	45
5.1.2.	Control manual . . . . .	46
5.1.3.	Estimación de estados . . . . .	47
5.1.4.	Saturación . . . . .	48
5.1.5.	Estructura del sistema . . . . .	49
5.2.	Experimentos . . . . .	50
5.2.1.	Control en orientación . . . . .	51
	Backstepping para el modelo rotacional no simplificado. . . . .	51
	Backstepping para el modelo rotacional simplificado . . . . .	54
	Modos deslizantes . . . . .	57
5.2.2.	Control en altura . . . . .	60
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>65</b>
<b>A.</b>	<b>Matrices de rotación y sus propiedades</b>	<b>71</b>
A.1.	Propiedades de la matriz de rotación . . . . .	72
A.2.	Propiedades de la matriz antisimétrica . . . . .	72
A.3.	Velocidad rotacional . . . . .	73
A.4.	Ángulos de Euler . . . . .	74
A.5.	Transformación entre velocidades angulares del cuerpo y razones angulares de Euler . . . . .	76
<b>B.</b>	<b>Especificaciones del Pixhawk</b>	<b>77</b>
<b>C.</b>	<b>Cálculo del tensor de inercia</b>	<b>79</b>

# Índice de figuras

1.1. Cuadrirrotor comercial[32]. . . . .	2
1.2. Movimientos traslacionales y rotacionales del cuadrirrotor. . . . .	4
1.3. Gyroplane No.1, 1907. . . . .	5
1.4. Oehmichen No.2, 1920. . . . .	5
1.5. Bothezat, 1921. . . . .	6
1.6. Convertawings Model A, 1956. . . . .	6
1.7. Cuadrirrotos desarrollados en la década de los 90s. . . . .	7
1.8. Cuadrirrotos desarrollados en 2010-2013. . . . .	8
2.1. Cuadrirrotor utilizado en la tesis. . . . .	12
2.2. Diagrama de conexiones. . . . .	12
2.3. Controlador pixhawk. . . . .	13
2.4. Entorno MissionPlanner. . . . .	14
2.5. GPS. . . . .	14
2.6. Interruptor de seguridad. . . . .	14
2.7. Transmisor y receptor de radio control. . . . .	15
2.8. Batería. . . . .	16
2.9. Controlador de velocidad electrónico. . . . .	16
2.10. Par de hélices, CW y CCW. . . . .	17
2.11. Motor sin escobillas Turnigy 3325. . . . .	18
2.12. Gráficas experimentales para obtener el parámetro de empuje. . . . .	18
3.1. Diagrama de cuerpo libre del cuadrirrotor. . . . .	20
4.1. Diagrama a bloques de los controladores. . . . .	25
4.2. Respuestas del subsistema rotacional en regulación. . . . .	31
4.3. Respuestas del subsistema rotacional simplificado en regulación. . . . .	34
4.4. Diagrama de control traslacional. . . . .	35
4.5. Trayectoria tipo hélice. . . . .	38
4.6. Ángulos deseados generados para la trayectoria hélice. . . . .	39
4.7. Regulación en $(x = 4, y = 2, z = 4)$ . . . . .	39
4.8. Ángulos deseados generados para regulación. . . . .	40

4.9. Respuestas del subsistema rotacional simplificado en regulación con SMC.	44
5.1. Diagrama a bloques del proceso de estimación	48
5.2. Diagrama a bloques del sistema.	49
5.3. Respuesta en $\phi$ con señal de control y de radio.	51
5.4. Respuesta en $\theta$ con señal de control y de radio.	52
5.5. Respuesta en $\psi$ con señal de control.	53
5.6. Respuesta en altura y señal de radio control.	53
5.7. Respuesta en $\phi$ con señal de control y de radio.	54
5.8. Respuesta en $\theta$ con señal de control y de radio.	55
5.9. Respuesta en $\psi$ con señal de control.	56
5.10. Respuesta en altura y señal de radio control.	56
5.11. Respuesta en $\phi$ con señal de control y de radio.	57
5.12. Respuesta en $\theta$ con señal de control y de radio.	58
5.13. Respuesta en $\psi$ con señal de control.	59
5.14. Respuesta en <i>altura</i> y señal de radio control.	59
5.15. Control en altura, $K_p = 20, K_d = 20$ .	60
5.16. Control en altura, $K_p = 20, K_d = 30$ .	61
5.17. Control en altura, $K_p = 10, K_d = 15$ .	61
5.18. Control en altura, $K_p = 17, K_d = 10$ .	62
5.19. Control en altura, $K_p = 13, K_d = 8$ .	62
A.1. Movimiento de traslación de un marco de referencia a otro	71
A.2. Movimiento de rotación de un marco de referencia a otro	72
A.3. Velocidad angular de un punto en un marco de referencia	73
A.4. Rotación en z	74
A.5. Rotación en y	75
A.6. Rotación en x	75
C.1. Representación geométrica del cuadrirrotor para calcular el tensor de inercia	80

*A Imelda...*



# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo de tesis se estudia el problema de la dinámica y el control de un cuadrirrotor de tamaño miniatura, el cuál fue ensamblado desde cero y utiliza un controlador de código abierto. Se proponen un par de técnicas de control no lineal para incluir las dinámicas no lineales.

### 1.1. Motivaciones y objetivos

Es de gran interés para el autor poder verificar las técnicas de control, y la mejor manera de verificarlas es mediante su implementación. Se escogió un cuadrirrotor de código y hardware abierto como plataforma, ya que actualmente su construcción o ensamblaje es fácil, esto se debe a que en los últimos años, su tecnología ha crecido de tal manera que se pueden conseguir sus componentes sin problema. Asimismo, el cuadrirrotor es una excelente plataforma, ya que se pueden manipular hasta sus seis grados de libertad.

#### Objetivos

- Modelado matemático del cuadrirrotor que incluya las dinámicas no lineales y un modelo simplificado.
- Diseño y comparación de técnicas de control que estabilicen sus seis grados de libertad.
- Validación de las técnicas de control, mediante experimentos en un ambiente exterior, sin o con poco viento.

## 1.2. Vehículos aéreos no tripulados

Generalmente para referirse a estos vehículos se utiliza su acrónimo en inglés UAV (Unmanned Aerial Vehicles). Y su definición varía según la literatura, para esta tesis se refiere a aeronaves sin tripulante. Estos vehículos pueden ser completamente autónomos, o semi autónomos. Generalmente los vehículos semi autónomos, están operados de manera remota con un radio control, y tienen cierto grado de autonomía, es decir, su orientación es estabilizada de manera autónoma por un controlador interno. En este trabajo de tesis, se busca primero lograr la semi autonomía, y una vez alcanzada, realizar la autonomía completa, es decir, que tanto su orientación y su posición sean autónomos.

### 1.2.1. El cuadrirrotor y su principio de funcionamiento

Dentro los UAVs, se encuentran los MAV, (Micro Aerial Vehicle), y dentro de estos, están los multirrotores. Se les conoce como multirrotores ya que están constituidos de 3 o más rotores (motor y hélice). Un cuadrirrotor es una aeronave tipo MAV de 4 rotores que están distribuidos simétricamente como se muestra en la figura 1.1. En el capítulo 2 se hace una descripción de los elementos que conforman al cuadrirrotor utilizado en esta tesis.

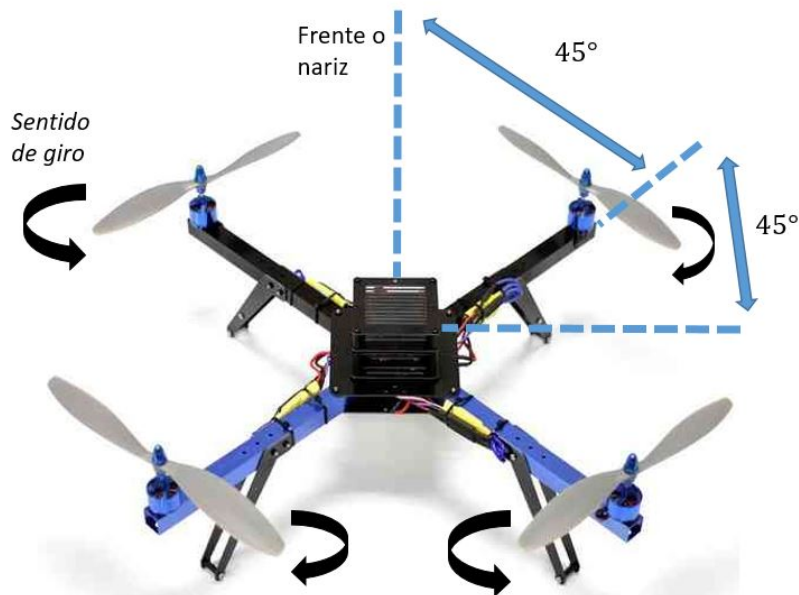


FIGURA 1.1: Cuadrirrotor comercial[32].



### Principio básico de funcionamiento

Su principio de funcionamiento se basa en el empuje que produce cada rotor al girar a una cierta velocidad, este empuje se puede decir que es proporcional al voltaje suministrado por la señal del controlador, la cual es procesada y convertida en voltaje de alimentación para el motor a través del controlador de velocidad (ESC, Electronic Speed Controller). El empuje producido por cada rotor es perpendicular a su eje de rotación, en teoría, cuando los cuatro rotores giran a una misma velocidad, y el empuje combinado de estos supera el peso del cuadrirrotor, éste se elevará a una cierta velocidad.

Los cuadrirrotores por construcción son aerodinámicamente inestables, para que sean estables, además de sus actuadores, necesitan forzosamente una computadora (controlador) que se encarga de regular la velocidad específica de cada rotor.

Cada rotor gira en un solo sentido, dos rotores giran en sentido horario y los otros dos en sentido antihorario, y están colocados como se muestra en la figura 1.1 esto con el fin de eliminar los efectos giroscópicos producidos por cada rotor.

### Movimientos traslacionales y rotacionales

Los movimientos que puede realizar el cuadrirrotor en sus seis grados de libertad están divididos en movimientos traslaciones y rotacionales, los movimientos traslaciones o lineales, están definidos sobre los ejes  $x, y, z$  y los rotacionales están definidos por los ángulos de Euler (*alabeo*  $\phi$ , *cabeceo*  $\theta$ , y *guiñada*  $\psi$ ), donde un giro en el eje  $x$  se define como movimiento rotacional en  $\phi$ , un giro sobre  $y$  es  $\theta$ , y un giro sobre el eje  $z$  se define como  $\psi$ .

Para producir estos movimientos, la velocidad de cada motor  $\omega_i$ , varía de acuerdo al movimiento deseado, por ejemplo, para un desplazamiento en  $x$ , el cuadrirrotor debe girar moderadamente sobre el  $y$ , es decir,  $\theta$  grados y mantenerse así, la inclinación  $\theta$  determinará la velocidad del desplazamiento. Esto se debe a que el empuje ya no es totalmente perpendicular al el plano de la tierra, ahora parte del empuje total del cuadrirrotor tiene componente en el eje  $x$ . Generalmente  $\theta$  está en un rango de  $\{-20^\circ, 20^\circ\}$  por seguridad del vehículo. Entonces para generar este movimiento, la velocidad en los motores  $\omega_3$  y  $\omega_4$ , además de ser igual, debe ser mayor a la velocidad en los motores  $\omega_1$  y  $\omega_2$  donde también sus velocidades deben ser iguales, esto se logra con el controlador. De igual forma para generar un movimiento traslacional en  $y$ , el cuadrirrotor gira  $\phi$  grados, en un rango de  $\{-20^\circ, 20^\circ\}$ . Ahora para realizar un giro  $\psi$  sobre el eje  $z$ , la velocidad de los motores  $\omega_1$  y  $\omega_3$  debe ser mayor a la velocidades  $\omega_2$  y  $\omega_4$ , esto producirá un torque de reacción en dirección opuesta al sentido de giro de los motores más rápidos. Finalmente, para desplazar a la aeronave verticalmente en el eje  $z$ , la velocidad de todos los motores debe ir aumentando por igual. Las siguientes figuras resumen los movimientos del cuadrirrotor.

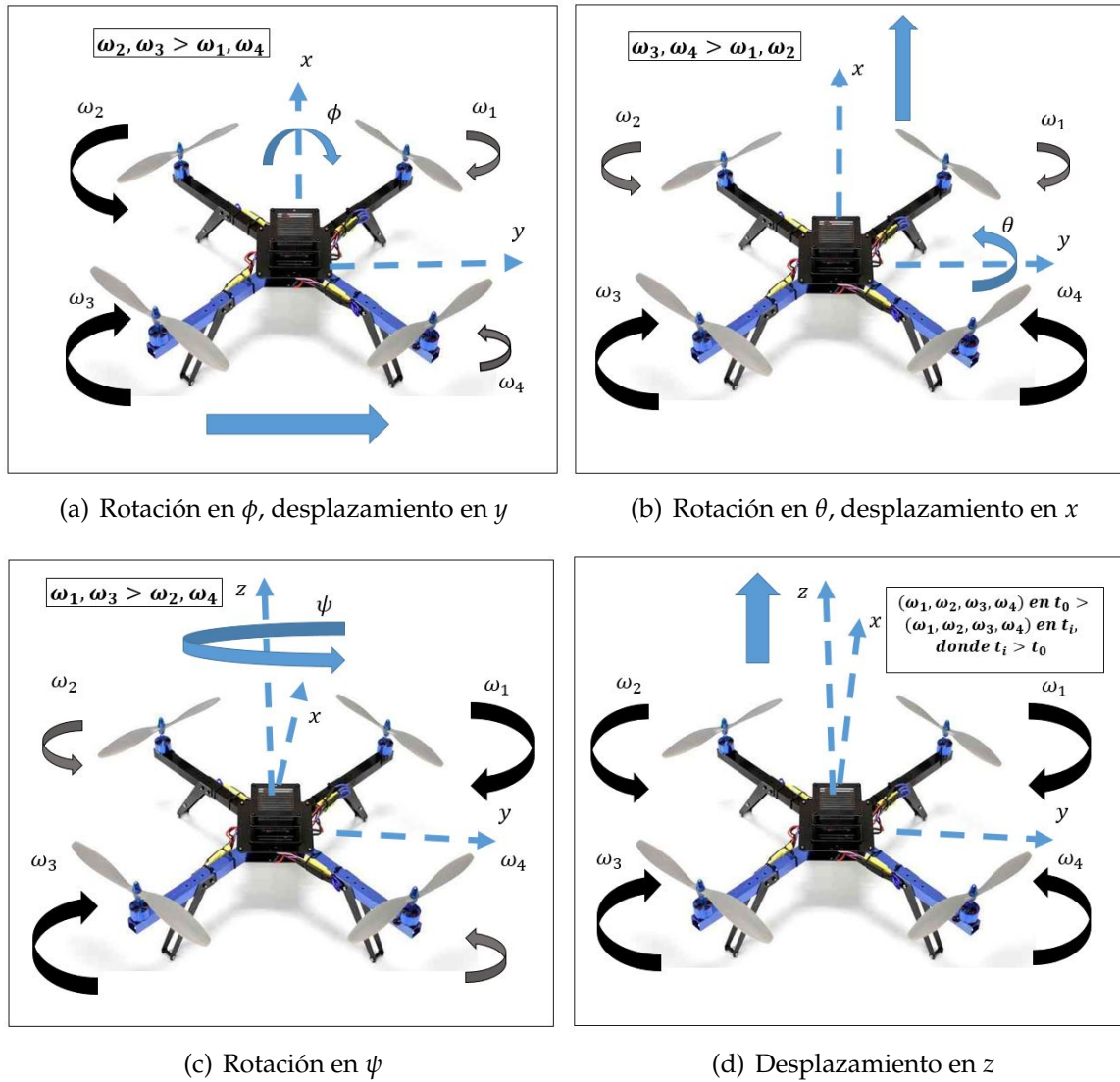


FIGURA 1.2: Movimientos traslacionales y rotacionales del cuadrirrotor.

Como se puede observar en la figuras 1.2, el desplazamiento  $x$  está acoplado al ángulo  $\theta$ , y el desplazamiento  $y$  al ángulo  $\phi$ , estas dependencias juega un papel muy importante en el desarrollo de las leyes de control introducidas en el capítulo 4. Una descripción formal de estos movimientos es dada en el capítulo 3.

### 1.2.2. Breve historia de los cuadrirrotores

La historia de los cuadrirrotores puede dividirse en dos grandes etapas, *etapa de inventiva*, dónde surgieron los primeros diseños de una aeronave que fuera capaz de hacer despegues y aterrizajes verticales, y *etapa contemporánea*, dónde se desarrollaron los cuadrirrotores que conocemos hoy en día gracias a los grandes avances en la tecnología de semiconductores.

#### Etapa de inventiva

- 1907. Los hermanos Breguet en colaboración con el profesor desarrollan el *Gyroplane No.1*<sup>1</sup>, primer aeronave de ala rotatoria capaz de despegar desde la tierra, aunque solo volada a unos cuantos pies de altura con un piloto que la controlara. Esta aeronave no era capaz de levantarse por más de unos pequeños momentos después de levantarse al rededor de un un metro y medio de altura.

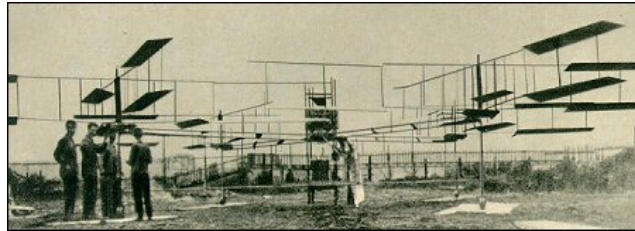


FIGURA 1.3: Gyroplane No.1, 1907.

- 1920. Etienne Oehmichen desarrolló el *Oehmichen No.2*<sup>2</sup>, el cual tenía cuatro rotores y ocho hélices manejadas por sólo un motor. Cinco de estas hélices se utilizaban para lograr el levantamiento y estabilidad lateral gracias al cambio de los ángulos de las hojas, dos eran utilizados para generar propulsión horizontal y una hélice adicional se utilizaba para manejar al vehículo. Gracias a esta configuración se realizaron vuelos controlados de hasta catorce minutos.

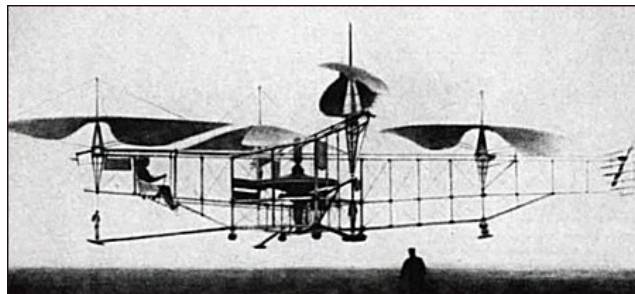


FIGURA 1.4: Oehmichen No.2, 1920.

<sup>1</sup>[http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/breguet\\_gyro.php](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/breguet_gyro.php)

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Étienne\\_Oehmichen](https://en.wikipedia.org/wiki/Étienne_Oehmichen)

- 1921. Casi a la par de Etienne, por parte de la armada americana, Dr. George de Bothezat e Iván Jerome desarrollaron el *Bothezat helicopter*<sup>3</sup>. Este prototipo demostró que el vuelo vertical era teóricamente y prácticamente posible a pesar de su pobre desempeño, ya que se utilizaba demasiada energía, y su mecánica compleja y poco fiable. Podría soportar hasta tres personas y era capaz de elevarlos hasta cinco metros de altura.

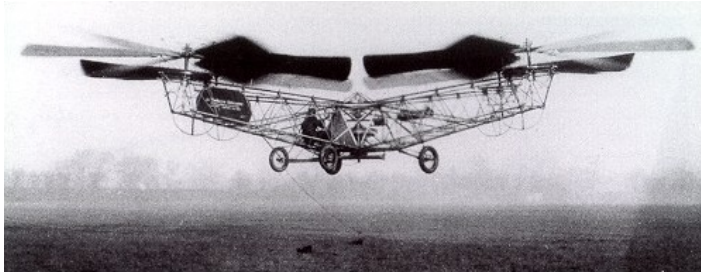


FIGURA 1.5: **Bothezat, 1921.**

- 1956. D.H. Kaplan diseñó el *Convertawings Model A*<sup>4</sup> una aeronave de cuatro rotores manejada por dos motores y con un simplificado mecanismo de control. El vehículo fue el primer helicóptero de cuatro rotores en demostrar un vuelo exitoso. El control se obtuvo al variar el empuje de los rotores, el cuál eliminó los sistemas complejos de control de cabeceo cíclico, por este principio de funcionamiento, este se podría considerar como el padre de los actuales cuadirrotores.



FIGURA 1.6: **Convertawings Model A, 1956.**

<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/George\\_de\\_Bothezat](https://en.wikipedia.org/wiki/George_de_Bothezat)

<sup>4</sup>[http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/convertawings.php](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/convertawings.php)

### Etapa contemporánea

- 1990-1999. A partir del desarrollo de los sistemas micro electro mecánicos (MEMS), se construyeron las primeras unidades de medición inercial (IMU), las cuales eran capaces de leer velocidades angulares, y aceleraciones lineales, y a partir de estas estimar la orientación. Estas IMUs eran de bajo costo y pesaban no más de unos cuantos gramos. Utilizando estos dispositivos se crearon los primeros mini cuadrirottores, siendo su primer uso como juguetes, por ejemplo una empresa japonesa desarrolló el *Gyro Sauce 1*<sup>5</sup>. En 1999 Draganfly creó el *Draganflyer quad helicopter*<sup>6</sup>, el cual fue el uno de los primeros en ser utilizados para fines de investigación.



(a) Gyro Sauce



(b) Draganflyer quad helicopter

FIGURA 1.7: Cuadrirottores desarrollados en la década de los 90s.

- 2010-2013. En estos años los cuadrirottores se volvieron muy populares, dado que la tecnología relacionada a estos creció permitiendo agregarles cámaras para tomar fotografías, grabar video, e incluso hacer investigación. A principios del 2010, una empresa francesa llamada Parrot<sup>7</sup>, lanzó su modelo *AR.Drone*, el cual ya podía ser controlado vía Wi-fi, además que incorporaba sensores ultrasónicos y una cámara que mide el flujo óptico para mejorar su estabilidad. En 2013, la empresa DJI<sup>8</sup> desarrolló el *Phantom*, el cual ganó mucha popularidad porque incorpora una cámara semi profesional permitiendo realizar fotografía y video a otro nivel.
- A principios del 2013, el equipo *PX4* liderado por Lorenz Meier en ETH Zurich y la empresa 3DRobotics lanzó el *Pixhawk*<sup>9</sup>, una plataforma *open-hardware* diseñada para controlar multirrottores, aviones de ala fija, helicópteros, botes, vehículos terrestres, submarinos y antenas, de código abierto. Esta plataforma fue la que eligió para realizar la tesis.

<sup>5</sup><https://i.pinimg.com/originals/63/07/92/630792a23d4f1f6f4b1c65bb746bf56d.jpg>

<sup>6</sup><http://www.draganfly.com/>

<sup>7</sup><https://www.parrot.com/global/>

<sup>8</sup><http://www.dji.com/>

<sup>9</sup><http://ardupilot.org/copter/docs/common-pixhawk-overview.html>



FIGURA 1.8: Cuadrirotos desarrollados en 2010-2013.

## 1.3. Estado del arte

### Controladores lineales

Se proponen controladores tipo PID y LQR para resolver el problema de seguimiento de trayectorias [14], donde se aproxima el sistema a uno lineal para el subsistema X-Y, tomando en cuenta que se tienen ángulos muy pequeños, por lo tanto despreciables. En [15] se propone una ley *Trajectory Linearization Control* (TLC), la cual se aplica para cada subsistema, este método consiste en dos partes, una pseudo inversión dinámica que lleva la trayectoria del sistema a una región cercana a la referencia de la trayectoria. En [16], se utiliza un controlador PD robusto, para estabilizar la orientación del cuadrirotor, además se presentan resultados experimentales.

### Controladores no lineales

Una técnica no lineal bastante utilizada en cuadrirotos es *feedback linearization*, la cual consiste en cancelar la dinámica no lineal mediante una propuesta adecuada del control, el cual llevará el sistema no lineal a uno lineal, para después aplicar una realimentación de estados. En [17] se utiliza esta técnica para controlar el sistema completo, dividiéndolo en dos subsistemas, uno para la posición y otro para la orientación. En [18] se compara *feedback linearization* vs un controlador PD, ambos obteniendo buenos resultados para el problema de seguimiento de trayectorias, donde cabe destacar que se utilizó una cámara monocular y un estimador de estados.

Otro método para trabajar sobre el sistema no lineal, se basa en el análisis de Lyapunov utilizando un algoritmo de *saturaciones anidadas* [19], donde se demuestra estabilidad global para el sistema en lazo cerrado, además de experimentos en tiempo real.

Una técnica no lineal ampliamente utilizada es *Sliding Mode Control* (SMC). Teóricamente en SMC las trayectorias del sistema son forzadas a alcanzar la superficie de deslizamiento en un tiempo finito y mantenerse ahí para todo tiempo futuro, sin embargo,



prácticamente el actuador no es capaz de responder de manera tan rápida generando resultados algunas veces no prácticos [20]. Una de las mayores ventajas de SMC es que presenta robustez a perturbaciones o parámetros no modelados, técnicas modificadas de este controlador como Twisting y Super-Twisting, han dado muy buenos resultados estimando estas perturbaciones y manteniendo la estabilidad del sistema, [21] y [22]. Otros resultados tomando en consideración el modelo dinámico completo se encuentran en [23].

Finalmente, otra técnica bastante eficiente es *backstepping*, un procedimiento recursivo que divide al sistema completo en subsistemas que son más sencillos de estabilizar, esta técnica es capaz de resolver problemas de estabilización, seguimiento de trayectorias y robustez bajo condiciones menos restrictivas que algunas otras técnicas no lineales [6]. Resultados satisfactorios se ha encontrado en [24], [25], [26], [27] y [28], resolviendo los problemas antes mencionados.

## 1.4. Estructura de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente forma.

En el capítulo 2, se realiza una breve descripción de la plataforma, mencionando los elementos que la conforman y su función.

En el capítulo 3, se desarrolla el modelo matemático del cuadrirrotor, utilizando el formalismo de *Newton-Euler*, se desarrolla primero un modelo completo, es decir, considerando toda la dinámica que involucra al cuadrirrotor, y después, un modelo reducido, el cuál es el que se utiliza mayormente en la literatura.

En el capítulo 4, se diseñan las leyes de control no lineal que estabilizan al cuadrirrotor, se propusieron leyes del tipo *backstepping* y *modo deslizante*, para ambos modelos, el completo y el reducido. Y se realizan simulaciones.

En el capítulo 5, se consideran los aspectos prácticos para la implementación de las leyes de control y se realizan los experimentos correspondientes para validar estas leyes.

Y finalmente en el capítulo 6, se concluye sobre los resultados obtenidos y se habla sobre el proyecto a futuro.





## Capítulo 2

# Descripción de la plataforma

Para la realización de los experimentos se optó por utilizar una plataforma de código abierto [31], esto con el fin de tener total acceso para modificar el código para escribir las leyes de control. Además se tiene la libertad de elegir el *hardware* del cuadricóptero; motores, controladores de velocidad, etc. De esta manera se puede ensamblar un cuadricóptero de acuerdo a las necesidades de los experimentos. En este capítulo se hace una breve descripción del sistema y después se presentan los resultados experimentales.

Para dar una descripción más ordenada, los componentes del cuadricóptero se pueden clasificar en tres tipos principalmente de acuerdo con [7].

- **Estructura mecánica.** (1) Fuselaje, (2) Brazo, (3) Tren de aterrizaje y (4) Marco de agarre.
- **Sistema de control.** (5) Controlador Pixhawk, (6) GPS, (7) Interruptor de seguridad y (8) Receptor RC.
- **Sistema de propulsión.** (9) Batería, (10) ESC, (11) Hélice y (12) Motor.

Todos estos elementos se pueden apreciar en la fig. 2.1. En las siguientes subsecciones se explica brevemente sus funciones principales.

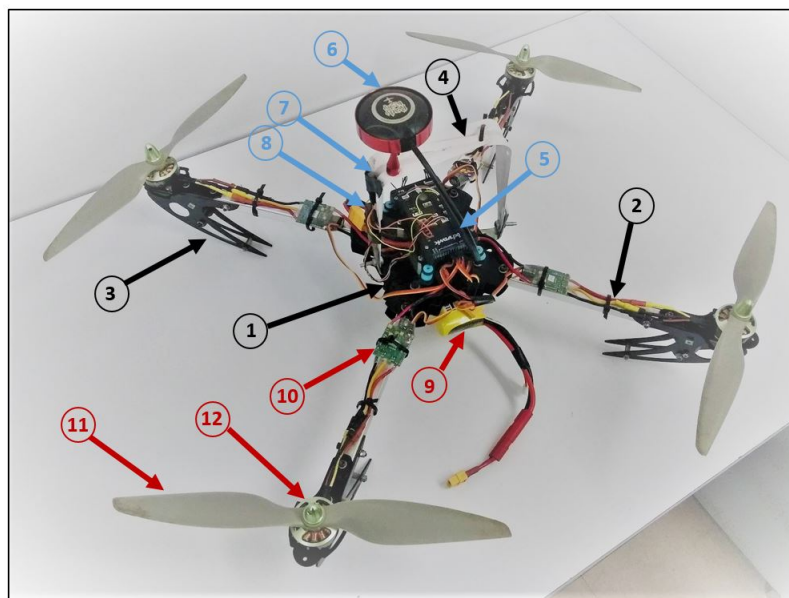


FIGURA 2.1: Cuadricóptero utilizado en la tesis.

Estos elementos están conectados como se muestra en la siguiente figura.

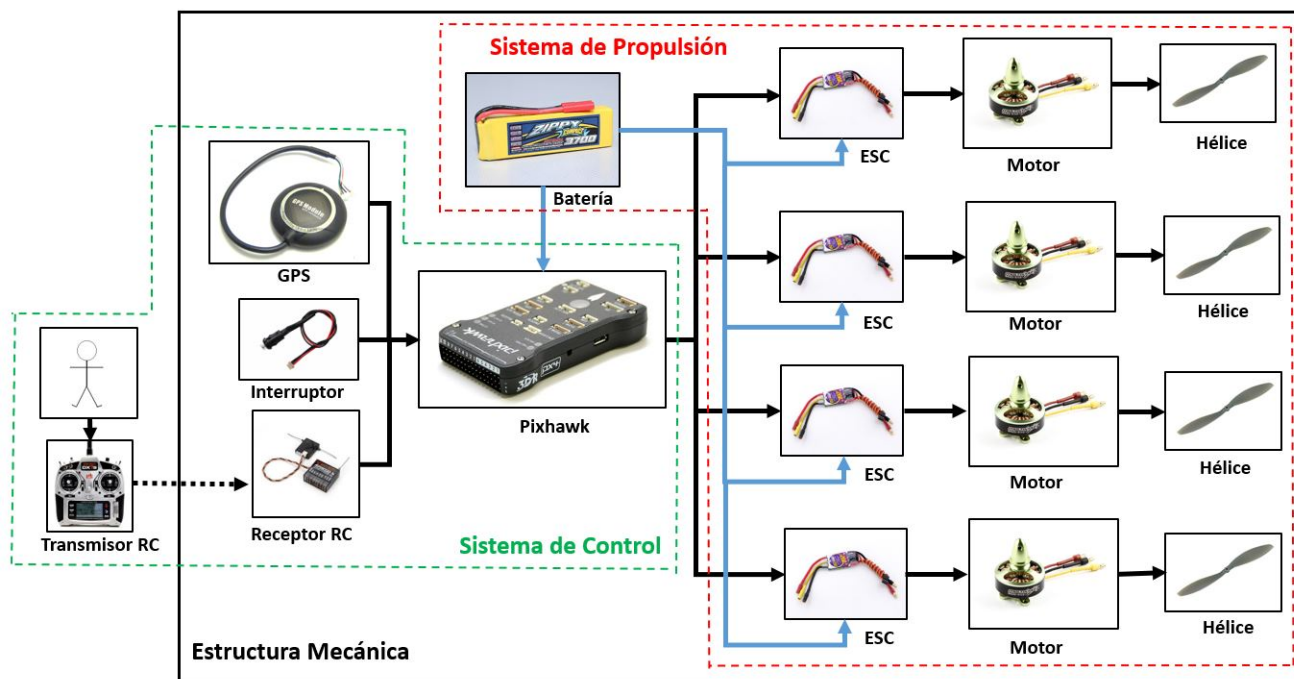


FIGURA 2.2: Diagrama de conexiones.

## 2.1. Estructura Mecánica

1. **Fuselaje.** Es el espacio donde se ensambla el sistema de control, coincide con el centro de gravedad del cuadricóptero.
2. **Brazo.** Su función es fijar los motores a una distancia considerable del fuselaje. Está compuesto de fibra de vidrio.
3. **Tren de aterrizaje.** Utilizado para mantener las hélices alejadas del suelo a una distancia de seguridad. Está compuesto de fibra de vidrio y tiene un pequeño resorte para amortiguar el aterrizaje de la aeronave.
4. **Marco de agarre.** Su función principal es mantener fija la altura y posición del cuadricóptero mientras se sintonizan las ganancias del control en orientación.

## 2.2. Sistema de Control

5. **Controlador pixhawk [31].** El cerebro del sistema, donde se procesan los datos y se generan las señales de control para los actuadores. En el apéndice A se detallan las especificaciones técnicas de este *sistema embarcado*.



FIGURA 2.3: Controlador pixhawk.

Para programar las leyes de control, se utilizó el IDE(pie) de *Eclipse* el cual utiliza lenguaje C++. Se utilizaron las librerías de código abierto en *GitHub* [33] para leer la información de los diversos sensores, así como para mandar las señales PWM de control a los motores. Para descargar el programa C++ en el Pixhawk se utilizó la estación de tierra *Mission Planner* [32] como se muestra en la siguiente imagen.

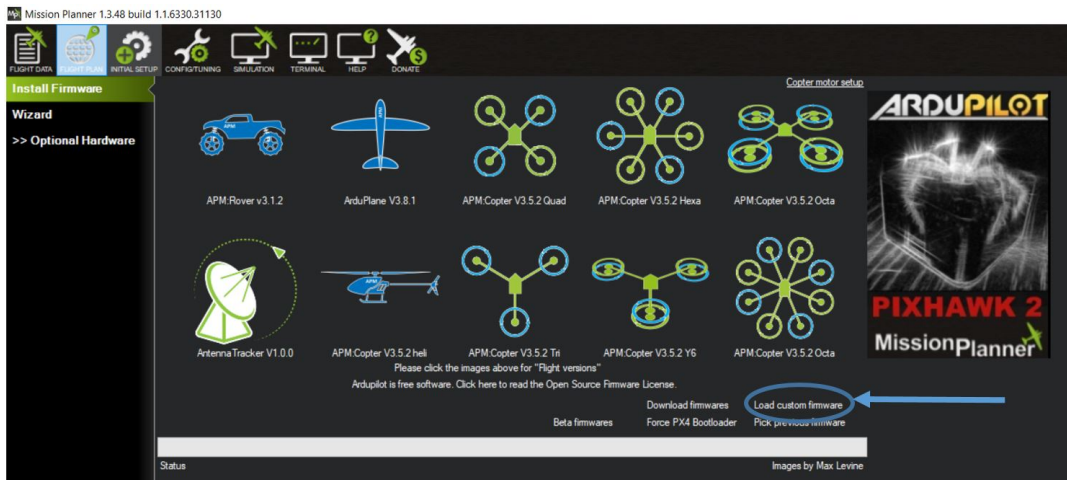


FIGURA 2.4: Entorno MissionPlanner.

6. **Módulo GPS.** Se utilizó un GPS *UBlox Neo-M8N*<sup>1</sup> para tener un estimado de la posición ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) el cual tiene una *brújula* incluida para mejorar la precisión en el ángulo *guiñada* del cuadrirrotor. Tiene una precisión entre  $0,6m$  y  $0,9m$  y trabaja a  $10Hz$ .



FIGURA 2.5: GPS.

7. **Interruptor de seguridad.** Permite habilitar o deshabilitar los motores del cuadricóptero.



FIGURA 2.6: Interruptor de seguridad.

<sup>1</sup>[https://hobbyking.com/en\\_us](https://hobbyking.com/en_us)

8. **Receptor y transmisor RC.** Para mayor seguridad se utilizó un sistema de radio control, *Spektrum DX7s*<sup>2</sup>, el cual tiene siete canales configurables, dos interruptores, una perilla, cuatro palancas con sus respectivos botones de ajuste, como se muestra en la figura 2.7. Usualmente los interruptores y la perilla están libres para ser configurados según la tarea que se le quiera asignar, en esta tesis fueron configurados para deshabilitar los motores en caso de fallo, sincronizar las ganancias de los controladores y para correr algún controlador. Tres palancas se configuran para mandar consignas de orientación, en *alabeo*, *cabeceo* y *guiñada*, como seguridad y soporte cuando se están sintonizando los controladores. La cuarta palanca se configura para variar la velocidad de los motores, usualmente se le conoce como *acelerador*.

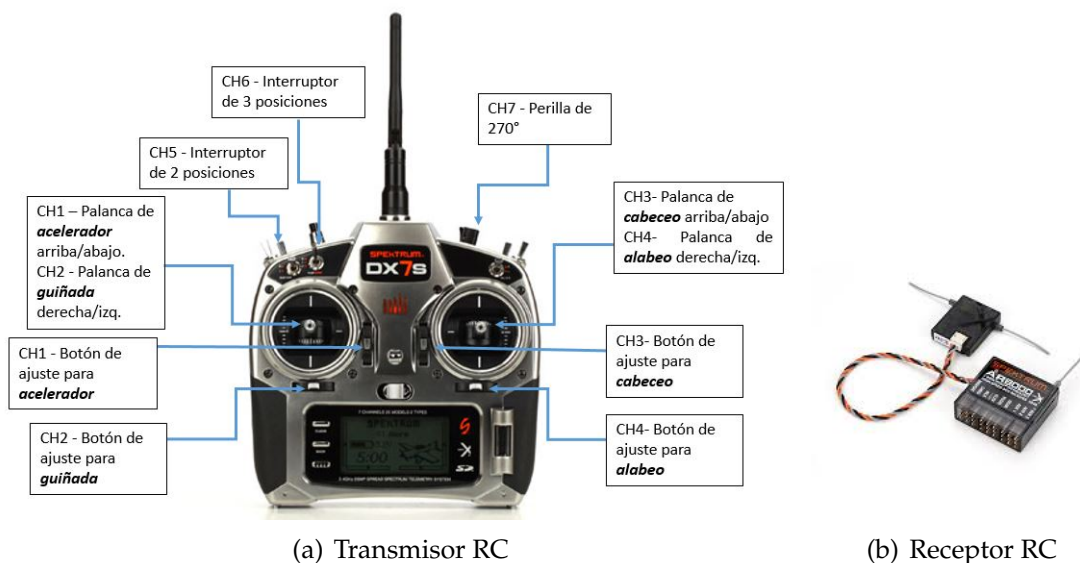


FIGURA 2.7: Transmisor y receptor de radio control.

<sup>2</sup><https://www.spektrumrc.com/default.aspx>

## 2.3. Sistema de Propulsión

9. **Batería.** Es la que se encargar de proveer energía al sistema propulsión, principalmente a los motores. También le da energía al Pixhawk y módulos, pero comparándola con la energía utilizada en los motores, ésta se puede considerar nula. Uno de los problemas más grandes del cuadrirotor es que la energía proporcionada por una batería tiene una duración limitada, en algunos drones comerciales dura hasta 30 minutos. Una de las baterías utilizada en este cuadrirotor es la que se muestra en la siguiente imagen<sup>3</sup>, y tiene los siguientes parámetros.



FIGURA 2.8: Batería.

- Batería tipo LiPo (Polímero de Litio).
  - 3S, 11.1 V.
  - 3700 mAh.
  - 25C.
10. **Controlador de velocidad electrónico, ESC.** Tiene la función de controlar la velocidad de los motores; recibe la señal PWM del controlador y la transforma en una señal de corriente alterna trifásica. Se utilizó un ESC de la marca *Afro*<sup>4</sup> con las siguientes características.



FIGURA 2.9: Controlador de velocidad electrónico.

<sup>3</sup>[https://hobbyking.com/en\\_us](https://hobbyking.com/en_us)

<sup>4</sup>[https://hobbyking.com/en\\_us](https://hobbyking.com/en_us)

- Corriente continua de 20A.
  - Rango de voltaje de 2S a 4S.
  - BEC de 0.5A lineal.
  - Frecuencia de entrada de 1kHz.
11. **Hélice.** Se utiliza en conjunto con el motor para que genere el *empuje* y *par*. La eficiencia del motor para producir estas fuerzas está ligada a las características de la hélice así como la velocidad con la que gira el motor. Se utilizaron hélices de plástico de dos hojas tipo 1045, esto es, 10 pulgadas de diámetro con un valor de 45 *pitch* (parámetro que indica cuántas pulgadas por revolución avanza en una superficie sólida). Están diseñadas para girar en un solo sentido, ya sea en contra de las manecillas del reloj CCW o siguiéndolas CW.



FIGURA 2.10: Par de hélices, CW y CCW.

12. **Motor sin escobillas.** Estos motores son los más utilizados en el ámbito de los drones, ya que tienen una alta eficiencia, además que sus costos de producción son bajos, algunos motores como los utilizados en este cuadricóptero son diseñados específicamente para utilizarlos en drones. Se eligieron motores *outrunners* de la marca *Turnigy Multistar*<sup>5</sup> con las siguientes especificaciones.
- 850 kV (RPM/V).
  - 3S (11.1V).
  - Máxima potencia de 250W.
  - Corriente de trabajo de 19A.
  - Corriente máxima durante 10s de 23A.
  - Resistencia interna de 0.101 ohms.
  - Número de polos: 14.
  - Dimensiones: 35 x 25 mm.





FIGURA 2.11: Motor sin escobillas Turnigy 3325.

Para obtener el parámetro de *empuje* se realiza de manera experimental y se utilizan diferentes tipos de hélices. En la siguiente imagen se muestran dos gráficas, una con unas hélices 1047 y la otra con hélices 1147.

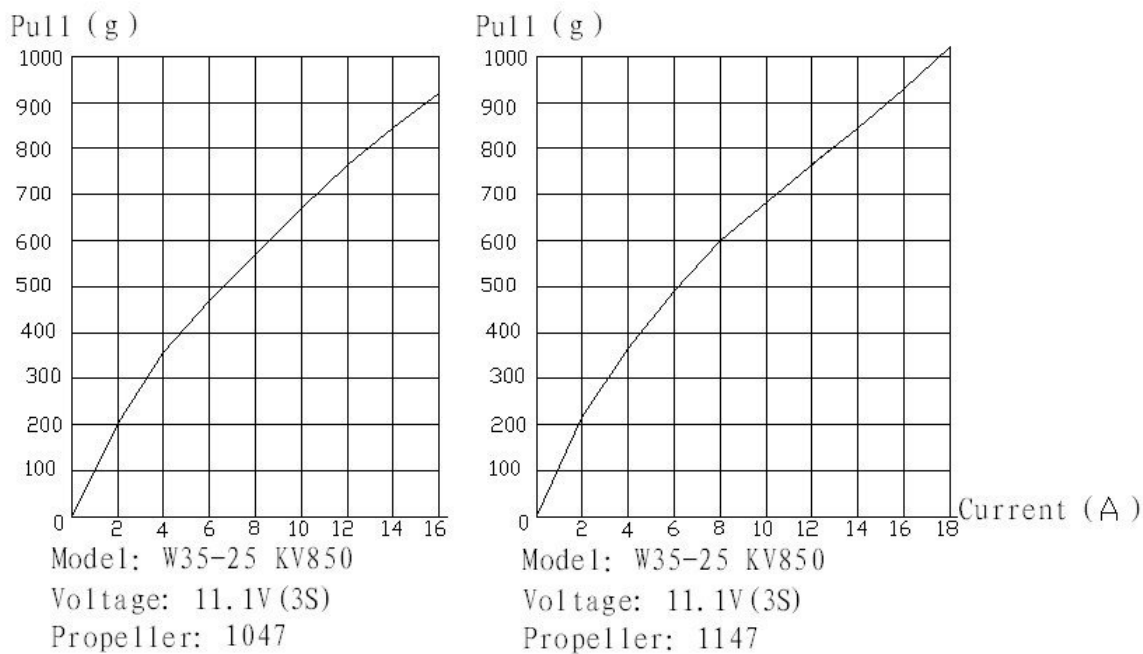


FIGURA 2.12: Gráficas experimentales para obtener el parámetro de empuje.

<sup>5</sup>[https://hobbyking.com/en\\_us](https://hobbyking.com/en_us)



## Capítulo 3

# Modelado Matemático del Cuadrirrotor

En este capítulo se desarrollará el modelo matemático del cuadrirrotor utilizando el formalismo de *Newton-Euler*. Para desarrollar las ecuaciones de movimiento es necesario primero introducir unos conceptos sobre las matrices de rotación y sus propiedades, véase apéndice A. En las siguientes subsecciones primero se desarrollará la cinemática, y después, la dinámica. Una vez desarrolladas se combinarán para obtener el modelo matemático.

### 3.1. Cinemática del cuadrirrotor

Para describir el movimiento de un cuerpo rígido de 6 grados de libertad, usualmente se definen dos marcos de referencia principales.

- Marco de referencia inercial  $E^a$ .
- Marco de referencia del cuerpo  $E^b$ .

Ambos marcos de referencia están basados en la convención NED (North-East-Down), siendo los componentes de  $E^a$ ,  $N, E, D$  y de  $E^b$ ,  $X, Y, Z$  como se muestra en la figura 3.1.

Se definen los vectores  $\xi = [x, y, z]^T$  y  $\eta = [\phi, \theta, \psi]^T$  como las coordenadas de la posición y de orientación, respectivamente, del vehículo relativas al marco de referencia inercial. Así mismo, se definen los vectores de velocidad relativos al marco de referencia del cuerpo,  $V = [V_1, V_2, V_3]^T$  traslacional y  $\Omega = [p, q, r]^T$  rotacional.

Las relaciones entre los vectores de velocidad de ambos marcos de referencia,  $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$  y  $(V, \Omega)$  está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= R_t V \\ \Omega &= R_r \dot{\eta}\end{aligned}\tag{3.1}$$

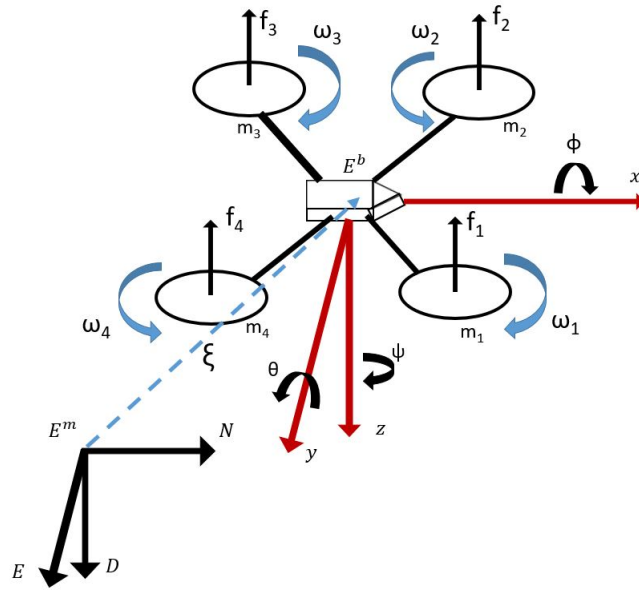


FIGURA 3.1: Diagrama de cuerpo libre del cuadrirrotor.

De acuerdo con el apéndice A, las matrices de transformación  $R_t$  (A.11) y  $R_r$  (A.12) son:

$$R_t = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$R_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi s_\theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Derivando las ecuaciones (3.1) con respecto del tiempo, y utilizando las propiedades (A.6) y (A.10),

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= R_t \dot{V} + \dot{R}_t V = R_t \dot{V} + R_t S(\Omega) V = R_t (\dot{V} + \Omega \times V) \\ \dot{\Omega} &= R_r \dot{\eta} + \dot{R}_r \eta \end{aligned} \quad (3.4)$$

## 3.2. Dinámica del cuadrirrotor

Utilizando la segunda de ley de Newton en el marco de referencia del cuerpo  $E^b$  se obtienen las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido sujeto a fuerzas externas aplicadas a su centro de masa [8]:

$$\begin{bmatrix} m I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega \times m V \\ \Omega \times I \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum F_{ext} \\ \sum T_{ext} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$I_{3 \times 3}$  Denota una matriz identidad.

$I \in \mathfrak{R}_+^{3 \times 3}$  Denota el tensor de inercia del cuadricóptero, la cual está desarrollada en el apéndice C.

### 3.2.1. Fuerzas externas

$\sum F_{ext}$  denota las fuerzas externas que se aplican a la aeronave, tomando en cuenta únicamente la fuerza  $F$  producida por las hélices la cual actúa sobre el eje  $z$  y se le conoce comúnmente como *thrust* o bien *empuje*, de acuerdo con [4], las fuerzas se pueden expresar como,

$$\sum F_{ext} = F - F_{grav} \quad (3.6)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \sum_{i=1}^4 f_i, \quad f_i = k_t \omega_i^2 \quad (3.7)$$

Donde  $k > 0$ , es una constante adimensional que se obtiene de las gráficas 2.12, y  $\omega_i$  es la velocidad del  $i$ -ésimo motor.

Y la fuerza ejercida por la gravedad de la tierra  $F_{grav}$ ,

$$F_{grav} = mR_t G, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g = 9,81 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

### 3.2.2. Pares externos

$\sum T_{ext}$  son los pares aplicados al cuadrirrotor, donde solo se tomaron en cuenta los producidos por la diferencia de velocidad entre los motores, para generar los movimientos en *alabeo*, *cabeceo* y *guiñada*.

Para generar un movimiento en *pitch*, se debe tener un mayor empuje en los motores  $m_3, m_4$  y un menor empuje en los motores  $m_1, m_2$ , entonces el par  $\tau_\theta$  será la diferencia de estas fuerzas multiplicadas por el brazo de palanca, de acuerdo con [4],

$$\tau_\theta = \frac{l}{\sqrt{2}}(f_1 + f_2 - f_3 - f_4) \quad (3.9)$$

Con la misma metodología, el par  $\tau_\phi$  en  $\phi$  es,

$$\tau_\phi = \frac{l}{\sqrt{2}}(-f_1 + f_2 + f_3 - f_4) \quad (3.10)$$

Para generar el movimiento sobre el eje  $z$ ,  $\tau_{yaw}$  (par de reacción), un par de motores que giran en el mismo sentido, deben girar más rápido que el otro par. Esto es,

$$\tau_\psi = k_m(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (3.11)$$

Donde  $k_m > 0$  es una constante adimensional que se determina experimentalmente. Finalmente,

$$\sum T_{ext} = T, \quad T = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.3. Modelo del subsistema traslacional

Para transformar las ec. (3.5) del marco de referencia del cuerpo al marco de referencia inercial se utilizan las ec. (3.1), (3.4), y sustituyendo (3.6) se tiene:

$$\begin{aligned} m\dot{V} + \Omega \times mV &= F - m(R_t)^T G \\ m(R_t)^T \ddot{\xi} - \cancel{m(\Omega \times V)} + \cancel{m(\Omega \times V)} &= F - m(R_t)^T G \\ \ddot{\xi} &= \left(\frac{1}{m}\right) R_t F - G \end{aligned} \quad (3.13)$$

Expandiendo se tienen las ecuaciones traslacionales:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) u_1 \quad (3.14)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m}(c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) u_1 \quad (3.15)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}(c_\phi c_\theta) u_1 - g \quad (3.16)$$

### 3.4. Modelo del subsistema rotacional

Y ahora para las ecuaciones rotacionales, utilizando las ec. (3.1), (3.4), (3.5) y (3.12)

$$\begin{aligned} T &= IR_r \ddot{\eta} + I\dot{R}_r \dot{\eta} + (R_r \dot{\eta}) \times (IR_r \dot{\eta}) \\ \ddot{\eta} &= R_r^{-1} I^{-1} (T - I\dot{R}_r \dot{\eta} - (R_r \dot{\eta}) \times (IR_r \dot{\eta})) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Desarrollando la ec. (3.17),

$$\ddot{\phi} = f_{0_1} + \frac{1}{I_x}u_2 + \frac{1}{I_y}s_\phi t_\theta u_3 + \frac{1}{I_z}c_\phi t_\theta u_4 \quad (3.18)$$

$$\ddot{\theta} = f_{0_2} + \frac{1}{I_y}c_\phi u_3 - \frac{1}{I_z}s_\phi u_4 \quad (3.19)$$

$$\ddot{\psi} = f_{0_3} + \frac{1}{I_y c_\theta} s_\phi u_3 + \frac{1}{I_z c_\theta} c_\phi u_4 \quad (3.20)$$

Donde,

$$\begin{aligned} f_{0_1} &= \left(\frac{I_z - I_y}{I_x}\right)(\dot{\theta}^2 c_\phi s_\theta - \dot{\psi}^2 c_\phi c_\theta^2 s_\phi - \dot{\psi} \dot{\theta} c_\phi^2 c_\theta + \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta s_\phi s_\theta) + \left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right)(\dot{\phi} \dot{\theta} s_\phi s_\theta t_\theta + \\ &\quad \dot{\psi}^2 c_\phi c_\theta s_\phi s_\theta t_\theta - \dot{\phi} \dot{\psi} c_\phi c_\theta s_\phi t_\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} s_\phi s_\theta^2 t_\theta) + \dot{\phi} \dot{\theta} t_\theta + \frac{1}{c_\theta} \dot{\theta} \dot{\psi} \\ f_{0_2} &= \left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right)(\dot{\psi}^2 c_\phi s_\phi s_\theta - \dot{\phi} \dot{\psi} c_\phi^2 s_\theta + \dot{\phi} \dot{\theta} c_\phi s_\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} c_\phi s_\theta^2) - \dot{\phi} \dot{\psi} c_\theta \\ f_{0_3} &= \left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right)(\dot{\psi}^2 c_\phi s_\phi s_\theta - \dot{\phi} \dot{\psi} c_\phi s_\theta + \frac{1}{c_\theta} \dot{\phi} \dot{\theta} s_\theta - \frac{1}{c_\theta} \dot{\theta} \dot{\psi} s_\phi s_\theta^2) + \dot{\theta} \dot{\psi} t_\theta + \frac{1}{c_\theta} \dot{\theta} \dot{\phi} \end{aligned}$$

Estos componentes se pueden simplificar un poco si se considera que la velocidad angular  $\dot{\psi}$  es muy pequeña, lo cual es válido en práctica, ya que esta dinámica está desacoplada de las otras dinámicas angulares. Reescribiendo los componentes  $f_{0_1}$ ,  $f_{0_2}$  y  $f_{0_3}$  como,

$$\begin{aligned} f_{0_1} &= \left(\frac{I_z - I_y}{I_x}\right)(\dot{\theta}^2 c_\phi s_\theta) + \left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right)(\dot{\phi} \dot{\theta} s_\phi s_\theta t_\theta) + \dot{\phi} \dot{\theta} t_\theta \\ f_{0_2} &= \left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right)(\dot{\phi} \dot{\theta} c_\phi s_\theta) \\ f_{0_3} &= \left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right)\left(\frac{1}{c_\theta} \dot{\phi} \dot{\theta} s_\theta\right) + \frac{1}{c_\theta} \dot{\theta} \dot{\phi} \end{aligned}$$

### 3.5. Simplificación del modelo rotacional

Para simplificar el diseño del control de orientación, en la ecuación (3.17) la matriz de transformación entre las velocidades angulares del cuerpo y las razones de cambio de los ángulos de Euler  $R_r$  se puede tomar como una matriz identidad, siempre y cuando las perturbaciones en la aeronave sean lo suficientemente pequeñas [24], lo cual es muy común durante un vuelo *hover*, quedando de la siguiente manera:

$$\dot{\eta} = I^{-1}(T - (\dot{\eta}) \times (I\dot{\eta})) \quad (3.21)$$

Y expandiendo finalmente se obtiene:

$$\ddot{\phi} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{1}{I_x} u_2 \quad (3.22)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{1}{I_y} u_3 \quad (3.23)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{1}{I_z} u_4 \quad (3.24)$$

### 3.6. Simplificación del modelo traslacional

Para simplificar el modelo traslacional (3.13), se linealiza la matriz de rotación (3.2) partiendo del hecho que mayormente el cuadrirrotor estará volando en modo *hover*, es decir, los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  serán lo suficientemente pequeños cumpliéndose,  $\cos(\phi, \theta, \psi) \approx 1$  y  $\sin(\phi, \theta, \psi) \approx \phi, \theta, \psi$ . Entonces la matriz de rotación queda de la siguiente forma:

$$R_{t\delta} = \begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Donde,  $R_{t\delta}$ , denota la matriz  $R_t$  linealizada.

Reescribiendo el modelo (3.13) con la matriz (3.25), se tiene,

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \theta u_1 \quad (3.26)$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{m} \phi u_1 \quad (3.27)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} u_1 - g \quad (3.28)$$

## Capítulo 4

# Leyes de Control

En este capítulo se diseñan leyes de control no lineal para los modelos traslaciones y rotacionales obtenidos en el capítulo 3. Se desarrollan dos técnicas, *backstepping* y *modos deslizantes*. Para cada técnica se realiza una simulación en el entorno *Matlab Simulink* y respectiva prueba de estabilidad.

Para simplificar el diseño, las leyes de control son desarrolladas para cada subsistema, rotacional y traslacional. La siguiente imagen muestra un diagrama a bloques de la interacción entre la dinámica del sistema y las leyes de control.

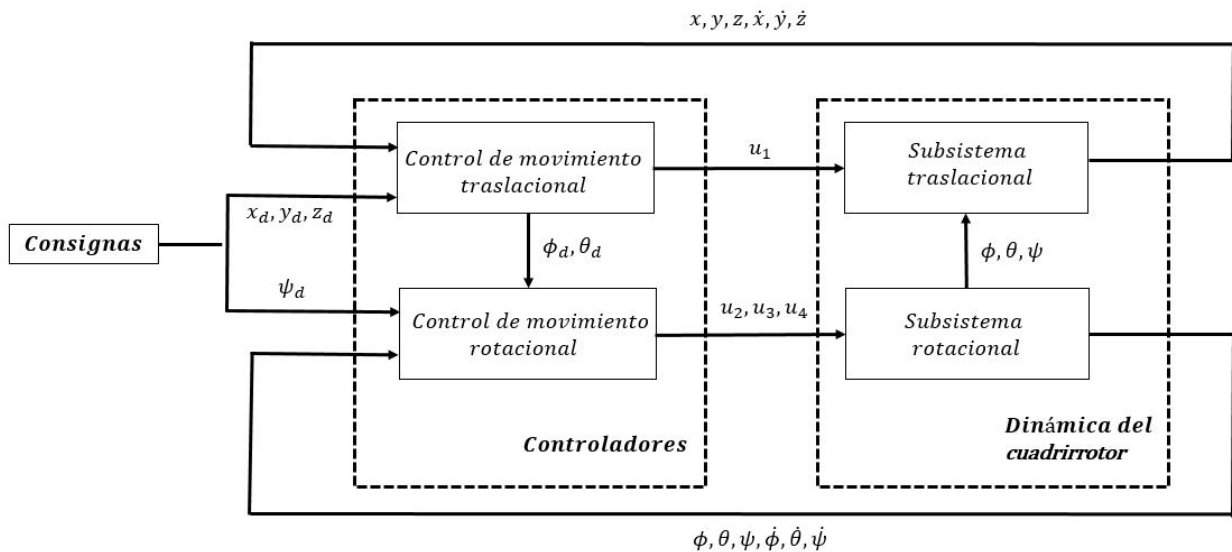


FIGURA 4.1: Diagrama a bloques de los controladores.

## 4.1. Procedimiento Backstepping

El procedimiento *Backstepping* es una técnica de diseño recursivo que fue introducida a principios de los 90s por *Petar Kokotovic* y otros [13], el cual se desarrolla ampliamente en [6],[9]. Este procedimiento construye de manera sistemática una ley de control y su respectiva función asociada de *Lyapunov* para una ecuación de estado y es repetido  $n$  veces, hasta estabilizar por completo cada uno de los  $n$ -estados del sistema.

La metodología *Backstepping* se basa fuertemente bajo el siguiente lema:

---

### Lema 4.1

Considere el sistema de la forma:

$$\dot{\zeta} = x \quad (4.1a)$$

$$\dot{x} = f(\zeta, x) + g(\zeta, x)u \quad (4.1b)$$

Donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\zeta \in \mathbb{R}^n$  son los estados,  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control. Las funciones  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  son suaves en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  y son conocidas. Suponer que existe una ley de control por realimentación continuamente diferenciable que toma a 'x' como control virtual ( $v(\zeta), v(0) = 0$ ), y estabiliza a (4.1a) en el origen, además de que existe una función de *Lyapunov*  $V(\zeta)$  asociada al control virtual tal que:

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta}(\zeta)[x] < -W(\zeta) \quad \forall \zeta \in D \quad (4.2)$$

Si  $W(\zeta)$  es definida positiva, entonces existe una ley de control por realimentación que estabiliza el origen de (4.1a) y (4.1b),

$$u = \frac{1}{g(\zeta, x)} [\alpha(v(\zeta) - x) - f(\zeta, x) + \frac{\partial v}{\partial \zeta}(\zeta)[v(\zeta) - x] - \frac{\partial V}{\partial \zeta}(\zeta)] \quad (4.3)$$

con  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  y  $g(\zeta, x) \neq 0$

Con una función de *Lyapunov* compuesta de la forma,

$$V_c(\zeta, x) = V(\zeta) + \frac{1}{2}(v(\zeta) - x)^2 \quad (4.4)$$


---

### Prueba 4.1

Se introduce el error,

$$z = v(\zeta) - x \quad (4.5)$$



Y se reescribe el sistema (4.1) en función de la variable error,

$$\dot{\zeta} = v(\zeta) - z \quad (4.6a)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial v}{\partial \zeta}(\zeta)[v(\zeta) - z] - f(\zeta, x) - g(\zeta, x)u \quad (4.6b)$$

Derivando la función de Lyapunov compuesta con respecto del tiempo y sustituyendo el control  $u$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V}_c(\zeta, x) &= \frac{\partial V}{\partial \zeta}(\zeta)[v(\zeta) - z] + z\left[\frac{\partial v}{\partial \zeta}(\zeta)[v(\zeta) - z] - f(\zeta, x) - g(\zeta, x)u\right] \\ &= \frac{\partial V}{\partial \zeta}(\zeta) \underbrace{v(\zeta)}_x + z\left[\frac{\partial v}{\partial \zeta}(\zeta)[v(\zeta) - z] - \frac{\partial V}{\partial \zeta}(\zeta) - f(\zeta, x) - g(\zeta, x)u\right] \\ &< -W(\zeta) - \alpha z^2 \triangleq -W_c(\zeta, x) < 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si  $W_c(\zeta, x)$  es definida positiva, los orígenes  $x = 0$  y  $\zeta = 0$  serán globalmente asintóticamente estables.

---

### 4.1.1. Metodología

En base al lema 4.1 y su prueba, se construye la siguiente metodología para los sistemas de la forma 4.1.

#### Paso 1

(I) Se define a  $x$  como el *control virtual*.

$$x \triangleq v \quad (4.8)$$

(II) Se hace un cambio de coordenadas para tomar en cuenta el error de seguimiento,

$$z_1 = \zeta_d - \zeta \quad (4.9)$$

(III) Se propone una función de Lyapunov del tipo,

$$V(\zeta) = \frac{1}{2}z_1^2 \quad (4.10)$$

Y se deriva con respecto del tiempo,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta) &= z_1 \dot{z}_1 \\ &= z_1(\dot{\zeta}_d - v) \end{aligned} \quad (4.11)$$

(IV) Finalmente se utiliza el *control virtual*  $v$  para hacer definida negativa la derivada temporal de la función de *Lyapunov*,

$$v = \dot{\zeta}_d + \alpha_1 z_1 \quad \text{con} \quad \alpha_1 > 0 \in \mathfrak{R} \quad (4.12)$$

$$\therefore \dot{V}(\zeta) = -\alpha_1 z_1^2 < 0 \quad (4.13)$$

## Paso 2

(I) Continuando con la metodología, se define un nuevo error de seguimiento, que dependerá del *control virtual* del paso anterior,

$$z_2 = v - x \quad (4.14)$$

$$z_2 = \alpha_1 z_1 + \underbrace{\dot{\zeta}_d - \dot{\zeta}}_{\dot{z}_1}$$

(II) Se propone una función de *Lyapunov compuesta* la cual existe de acuerdo con la suposición 4.1, y se obtiene su derivada temporal,

$$\begin{aligned} V_c(\zeta, x) &= V(\zeta) + \frac{1}{2}z_2^2 \\ &= z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 \\ &= z_1(z_2 - \alpha_1 z_1) + z_2(\dot{v} - \dot{x}) \\ &= -\alpha_1 z_1^2 + z_2(z_1 + \alpha_1 \dot{z}_1 + \ddot{\zeta}_d - f(\zeta, x) - g(\zeta, x)u) \end{aligned} \quad (4.15)$$

(III) La forma más sencilla de hacer definida negativa la derivada temporal de la función de *Lyapunov* es tomando  $u$  como,

$$u = \frac{1}{g(\zeta, x)}(z_1 + \alpha_1 \dot{z}_1 + \ddot{\zeta}_d - f(\zeta, x) + \alpha_2 z_2), \quad \alpha_2 > 0 \in \mathfrak{R} \quad (4.16)$$

$$\therefore \dot{V}_c(\zeta, x) = -\alpha_1 z_1^2 - \alpha_2 z_2^2 < 0 \quad (4.17)$$

### 4.1.2. Backstepping para el subsistema rotacional

Reescribiendo las ecuaciones (3.18), (3.19) y (3.20) en ecuación de estado, se tiene:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.18)$$

$$\dot{x}_2 = f_0 + g_0 u \quad (4.19)$$

Siendo,

$$x_1 = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Y,

$$f_0 = \begin{bmatrix} f_{0_1} \\ f_{0_2} \\ f_{0_3} \end{bmatrix}, \quad g_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} & \frac{1}{I_y} s_\phi t_\theta & \frac{1}{I_z} c_\phi t_\theta \\ 0 & \frac{1}{I_y} c_\phi & -\frac{1}{I_z} s_\phi \\ 0 & \frac{1}{I_y} \frac{1}{c_\theta} s_\phi & \frac{1}{I_z} \frac{1}{c_\theta} c_\phi \end{bmatrix}$$

Para poder utilizar la ley de control (4.16), es necesario primero poder garantizar que la matriz  $g_0$  es invertible, lo cual se cumple ya que  $g_0^{-1} = (R_r^{-1} I^{-1})^{-1} = I R_r$  y estas matrices están bien definidas. Entonces, la ley de control es:

$$u = g_0^{-1}(z_1 + A_1 \dot{z}_1 + \ddot{x}_{1d} - f_0 + A_2 z_2), \quad (4.20)$$

Donde,

$$A_1, A_2 \in \mathfrak{R}^{3 \times 3} > 0$$

$$z_1 = x_{1d} - x_1, \quad z_2 = A_1 z_1 + \dot{x}_{1d} - x_2$$

Su función asociada de *Lyapunov* es:

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^T z_1 + z_2^T z_2) \quad (4.21)$$

Siendo su derivada temporal,

$$\dot{V}(z_1, z_2) = -z_1^T A_1 z_1 - z_2^T A_2 z_2 < 0 \quad (4.22)$$

Por lo que, tomando a  $u$  subsistema rotacional es *asintóticamente estable*. Haciendo de nuevo el cambio de variable para expresar la ley de control (4.20) en función de los errores en

orientación y expandiéndola, se tiene,

$$u_2 = I_x(c_1 e_\phi + c_2 \dot{e}_\phi - f_{01}) - I_x s_\theta (c_5 e_\psi + c_6 \dot{e}_\psi - f_{03}) \quad (4.23)$$

$$u_3 = I_y c_\theta (c_3 e_\theta + c_4 \dot{e}_\theta - f_{02}) - I_y s_\phi c_\theta (c_5 e_\psi + c_6 \dot{e}_\psi - f_{03}) \quad (4.24)$$

$$u_4 = -I_z (c_3 e_\theta + c_4 \dot{e}_\theta - f_{02}) + I_z c_\phi c_\theta (c_5 e_\psi + c_6 \dot{e}_\psi - f_{03}) \quad (4.25)$$

Donde,

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 + a_1 b_1, & c_3 &= 1 + a_2 b_2, & c_5 &= 1 + a_3 b_3 \\ c_2 &= a_1 + b_1, & c_4 &= a_2 + b_2, & c_6 &= a_3 + b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_\phi &= \phi_d - \phi, & e_\theta &= \theta_d - \theta, & e_\psi &= \psi_d - \psi \\ \dot{e}_\phi &= \dot{\phi}_d - \dot{\phi}, & \dot{e}_\theta &= \dot{\theta}_d - \dot{\theta}, & \dot{e}_\psi &= \dot{\psi}_d - \dot{\psi} \end{aligned}$$

Las ecuaciones (4.23), (4.24) y (4.25) son las que implementaran en la plataforma.

## Simulaciones

Se utilizó Simulink para visualizar el comportamiento del subsistema rotacional (3.18), (3.19) y (3.20), con las leyes de control (4.23), (4.24) y (4.25). Donde se busca llevar y mantener al subsistema en el equilibrio  $\phi_d = 0$ ,  $\theta_d = 0$  y  $\psi_d = 0$ , con condiciones iniciales,  $\phi = 0,4rad$ ,  $\theta = 0,3rad$  y  $\psi = -0,3rad$ . Con ganancias,  $c_1 = 16$ ,  $c_2 = 8$ ,  $c_3 = 16$ ,  $c_4 = 8$ ,  $c_5 = 5$  y  $c_6 = 5$ .

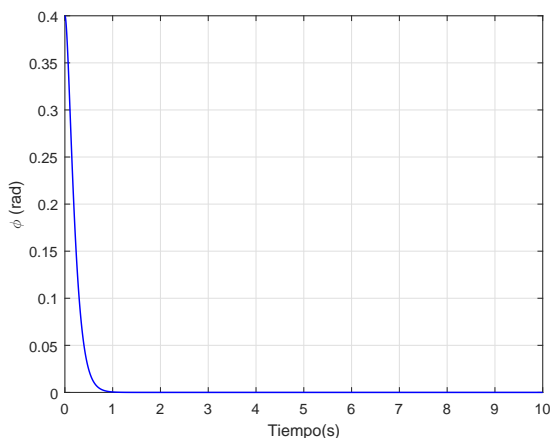
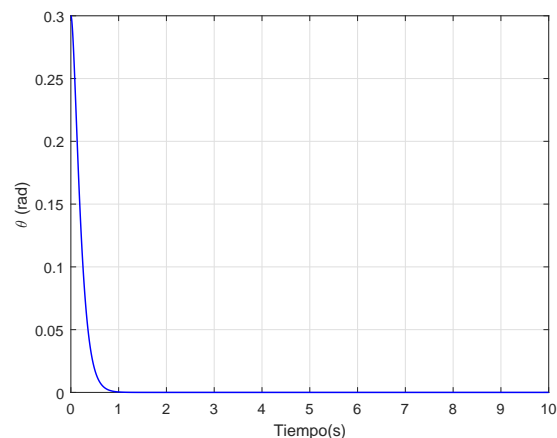
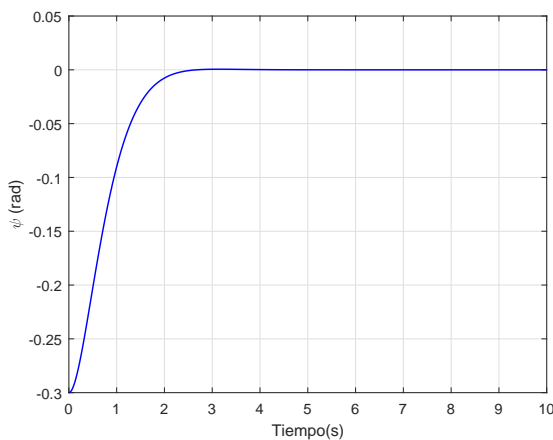
(a) Respuesta en  $\phi$ (b) Respuesta en  $\theta$ (c) Respuesta en  $\psi$ 

FIGURA 4.2: Respuestas del subsistema rotacional en regulación.

Las figuras 4.2 muestran una respuesta que decae exponencialmente, donde la velocidad de decaimiento está en función de las ganancias  $c_i$ , las cuales fueron sintonizadas de forma heurística.

### 4.1.3. Backstepping para el subsistema rotacional simplificado

Retomando el modelo reducido (3.22), (3.23) y (3.24), deducido en el capítulo anterior y reescribiéndolo en ecuación de estado,

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = \dot{\phi}, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{\theta}, \quad x_5 = \psi, \quad x_6 = \dot{\psi}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.26)$$

$$\dot{x}_2 = \underbrace{a_1 x_4 x_5}_{f_0} + \underbrace{\frac{1}{I_x}}_{g_0} u_2 \quad (4.27)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (4.28)$$

$$\dot{x}_4 = \underbrace{a_2 x_2 x_6}_{f_1} + \underbrace{\frac{1}{I_y}}_{g_1} u_3 \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_5 = x_6 \quad (4.30)$$

$$\dot{x}_6 = \underbrace{\frac{1}{I_z}}_{g_2} u_4 \quad (4.31)$$

Donde las leyes de control para los subsistemas (4.27), (4.29) y (4.31) es (4.16), desarrollada en la metodología 4.1.1,

$$u_2 = \frac{1}{g_0} (z_1 + \alpha_1 \dot{z}_1 + \ddot{x}_{1d} - f_0 + \alpha_2 z_2) \quad (4.32)$$

$$u_3 = \frac{1}{g_1} (z_3 + \alpha_3 \dot{z}_3 + \ddot{x}_{3d} - f_1 + \alpha_4 z_4) \quad (4.33)$$

$$u_4 = \frac{1}{g_2} (z_5 + \alpha_5 \dot{z}_5 + \ddot{x}_{5d} + \alpha_6 z_6) \quad (4.34)$$

Donde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 > 0$ , y,

$$\begin{aligned} z_1 &= \underbrace{x_{1d} - x_1}_{e_\phi}, & z_2 &= \alpha_1 z_1 + \dot{z}_1, & z_3 &= \underbrace{x_{3d} - x_3}_{e_\theta} \\ z_4 &= \alpha_3 z_3 + \dot{z}_3, & z_5 &= \underbrace{x_{5d} - x_5}_{e_\psi}, & z_6 &= \alpha_5 z_5 + \dot{z}_5 \end{aligned}$$

La función de *Lyapunov* para el subsistema rotacional, dada por la metodología 4.1.1 es,

$$V(z_1, \dots, z_6) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 z_i^2 \quad (4.35)$$

Con su derivada temporal,

$$\dot{V}(z_1, \dots, z_6) = - \sum_{i=1}^6 \alpha_i z_i^2 < 0 \quad (4.36)$$

Demostrando que el subsistema rotacional es *asintóticamente estable*.

Reescribiendo las ecuaciones (4.32), (4.33) y (4.34) en función de sus variables originales, se tiene,

$$u_2 = I_x \left( c_1 e_\phi + c_2 \dot{e}_\phi + \ddot{\phi}_d - \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} \right) \quad (4.37)$$

$$u_3 = I_y \left( c_3 e_\theta + c_4 \dot{e}_\theta + \ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} \right) \quad (4.38)$$

$$u_4 = I_z (c_5 e_\psi + c_6 \dot{e}_\psi + \ddot{\psi}_d) \quad (4.39)$$

Donde,

$$\begin{aligned} c_1 &= (1 + \alpha_1 \alpha_2), & c_3 &= (1 + \alpha_3 \alpha_4), & c_5 &= (1 + \alpha_5 \alpha_6) \\ c_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2), & c_4 &= (\alpha_3 + \alpha_4), & c_6 &= (\alpha_5 + \alpha_6) \end{aligned}$$

## Simulaciones

Utilizando Simulink para visualizar el comportamiento del subsistema rotacional (3.22), (3.23) y (3.24), con las leyes de control (4.37), (4.38) y (4.39). Donde se busca llevar y mantener al subsistema en el equilibrio  $\phi_d = 0$ ,  $\theta_d = 0$  y  $\psi_d = 0$ , con condiciones iniciales,  $\phi = 0,4rad$ ,  $\theta = 0,8rad$  y  $\psi = -0,5rad$ . Con ganancias,  $c_1 = 16$ ,  $c_2 = 8$ ,  $c_3 = 16$ ,  $c_4 = 8$ ,  $c_5 = 16$  y  $c_6 = 8$ .

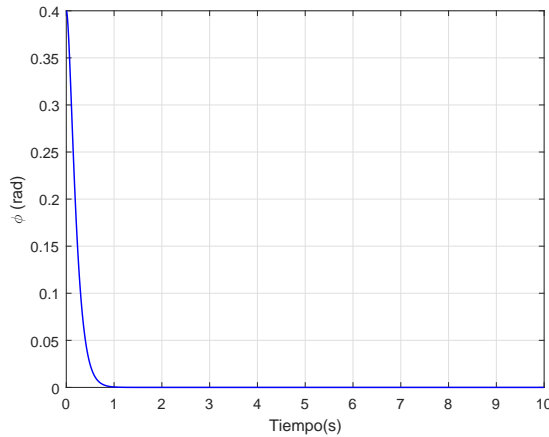
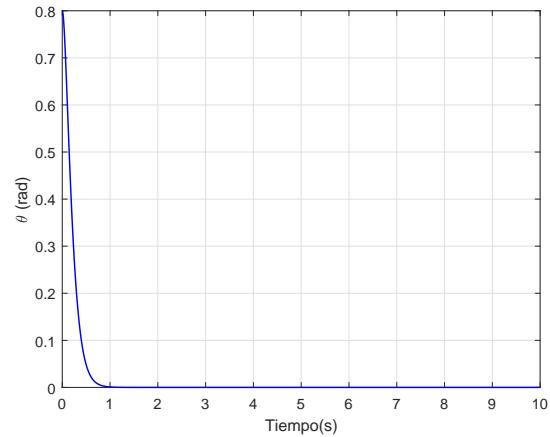
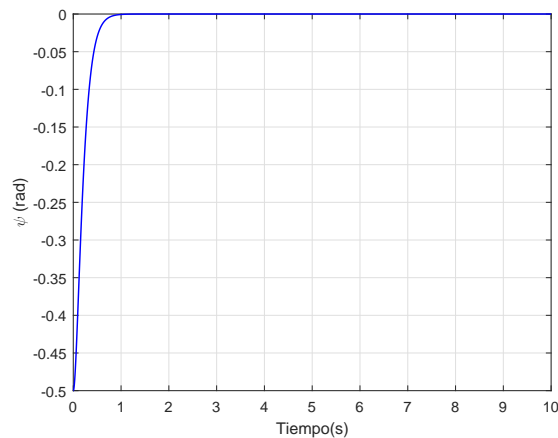
(a) Respuesta en  $\phi$ (b) Respuesta en  $\theta$ (c) Respuesta en  $\psi$ 

FIGURA 4.3: Respuestas del subsistema rotacional simplificado en regulación.

De igual forma que la figura (4.2), la figura (4.3) muestra una respuesta que decae exponencialmente, donde la velocidad de decaimiento está en función de las ganancias  $c_i$ , las cuales fueron sintonizadas de forma heurística.



#### 4.1.4. Backstepping para el subsistema traslacional

A diferencia del subsistema rotacional que es *totalmente actuado*, el subsistema traslacional es *subactuado*; tiene más salidas que entradas, solo tiene una entrada de control  $u_1$  la cual se encuentra en cada una de las ecuaciones traslacionales, (3.14), (3.15) y (3.16). Una forma de resolver este problema es estabilizando primero la altura del cuadricóptero  $z$ , diseñando la ley de control  $u_1$ . Para los desplazamientos en  $x$  y  $y$  ya no se puede utilizar ni modificar el control  $u_1$  dado que este solo funciona para mantener la altura de la aeronave. Como la fuerza de *empuje* actúa perpendicularmente al plano del cuadricóptero, si este se inclina, tendrá un desplazamiento sobre el plano  $x - y$ , de aquí se deduce que el desplazamiento está en función de los ángulos de inclinación,  $\phi, \theta$ . De esta manera, una trayectoria/posición deseada producirá unos ángulos deseados, a este método se le conoce como solución inversa, figura 4.4.

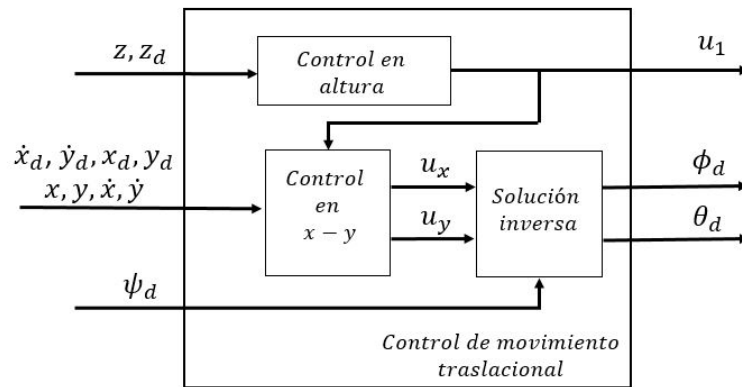


FIGURA 4.4: Diagrama de control traslacional.

##### Control en altura

Sea el sistema (3.16) reescrito en forma en ecuaciones de estado,

$$\begin{aligned} x_7 &= z \\ x_8 &= \dot{z} \\ \dot{x}_7 &= x_8 \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\dot{x}_8 = \underbrace{-g}_{f_3} + \underbrace{\frac{1}{m} c_\phi c_\theta}_{g_3} u_1 \quad (4.41)$$

Donde  $u_1$  se obtiene con la metodología 4.1.1,

$$u_1 = \frac{1}{g_3} (z_7 + \alpha_7 \dot{z}_7 + \ddot{x}_{7d} - f_3 + \alpha_8 z_8) \quad (4.42)$$

Donde,  $\alpha_7, \alpha_8 > 0$ , y

$$z_7 = \underbrace{x_{7d} - x_7}_{e_z}, \quad z_8 = \alpha_7 z_7 + \dot{z}_7$$

O bien, expresada en su variable original,

$$u_1 = \frac{m}{c_\phi c_\theta} (c_7 e_z + c_8 \dot{e}_z + \ddot{z}_d + g) \quad (4.43)$$

$$c_7 = (1 + \alpha_7 \alpha_8), \quad c_8 = (\alpha_7 + \alpha_8)$$

### Control en el desplazamiento x-y

Rescribiendo las ec. (3.14) y (3.15) en ec. de estado,

$$x_9 = x, \quad x_{10} = \dot{x}, \quad x_{11} = y, \quad x_{12} = \dot{y}$$

$$\dot{x}_9 = x_{10} \quad (4.44)$$

$$\dot{x}_{10} = \underbrace{\frac{1}{m} u_1}_{g_4} \underbrace{(c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi)}_{u_x} \quad (4.45)$$

$$\dot{x}_{11} = x_{12} \quad (4.46)$$

$$\dot{x}_{12} = \underbrace{\frac{1}{m} u_1}_{g_5} \underbrace{(c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi)}_{u_y} \quad (4.47)$$

Donde  $u_x$  y  $u_y$  se obtienen con la metodología 4.1.1,

$$u_x = \frac{1}{g_4} (z_9 + \alpha_9 \dot{z}_9 + \ddot{x}_{9d} + \alpha_{10} z_{10}) \quad (4.48)$$

$$u_y = \frac{1}{g_5} (z_{11} + \alpha_{11} \dot{z}_{11} + \ddot{x}_{11d} + \alpha_{12} z_{12}) \quad (4.49)$$

Donde,  $\alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12} > 0$ , y,

$$z_9 = x_{9d} - x_9, \quad z_{10} = \alpha_9 z_9 + \dot{z}_9, \quad z_{11} = x_{11d} - x_{11}, \quad z_{12} = \alpha_{11} z_{11} + \dot{z}_{11}$$

De igual forma que en el subsistema rotacional reducido, la función de *Lyapunov* para el subsistema traslacional, está dada por la metodología 4.1.1, sumando ambas funciones de

*Lyapunov*, subsistema traslacional y rotacional, se puede demostrar que el sistema completo es *asintóticamente estable*.

$$V(z_1, \dots, z_{12}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} z_i^2 \quad (4.50)$$

Con su derivada temporal,

$$\dot{V}(z_1, \dots, z_{12}) = - \sum_{i=1}^{12} \alpha_i z_i^2 < 0 \quad (4.51)$$

Reescribiendo las ecuaciones (3.14) y (3.15) en función de sus variables originales, se tiene,

$$u_x = \frac{m}{u_1} (c_9 e_x + c_{10} \dot{e}_x + \ddot{x}_d) \quad (4.52)$$

$$u_y = \frac{m}{u_1} (c_{11} e_y + c_{12} \dot{e}_y + \ddot{y}_d) \quad (4.53)$$

Donde,

$$\begin{aligned} c_9 &= (1 + \alpha_9 \alpha_{10}), & c_{11} &= (1 + \alpha_{11} \alpha_{12}) \\ c_{10} &= (\alpha_9 + \alpha_{10}), & c_{12} &= (\alpha_{11} + \alpha_{12}) \end{aligned}$$

### Solución inversa

Reemplazando los controles virtuales  $u_x$  (4.48), y  $u_y$  (4.49), en las ecuaciones (4.45) y (4.47) respectivamente, se tiene,

$$(c_{\phi_d} s_{\theta_d} c_{\psi_d} + s_{\phi_d} s_{\psi_d}) = u_x \quad (4.54)$$

$$(c_{\phi_d} s_{\theta_d} s_{\psi_d} - s_{\phi_d} c_{\psi_d}) = u_y \quad (4.55)$$

Resolviendo las ecuaciones, primero para  $\phi_d$ , y después para  $\theta_d$ ,

$$\phi_d = \arcsin(u_x s_{\psi_d} - u_y c_{\psi_d}) \quad (4.56)$$

$$\theta_d = \arcsin\left(\frac{u_x c_{\psi_d} + u_y s_{\psi_d}}{c_{\phi_d}}\right) \quad (4.57)$$

Las soluciones (4.56) y (4.57) no son únicas, pero son una muy buena opción, dado que no hay singularidades, por lo que están bien definidas.

## Simulaciones

### Seguimiento de trayectorias

Para simular el comportamiento del movimiento traslacional cuadrirotor, se utilizó el subsistema rotacional simplificado en lazo cerrado. Se busca seguir una trayectoria tipo hélice cilíndrica, la cual está parametrizada de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \\ kt \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Donde  $\omega = 1 \text{ rad/seg}$  es la frecuencia,  $t$  el tiempo,  $r = 3$  la amplitud y  $k = 1$  una ganancia para el avance en  $z$ .

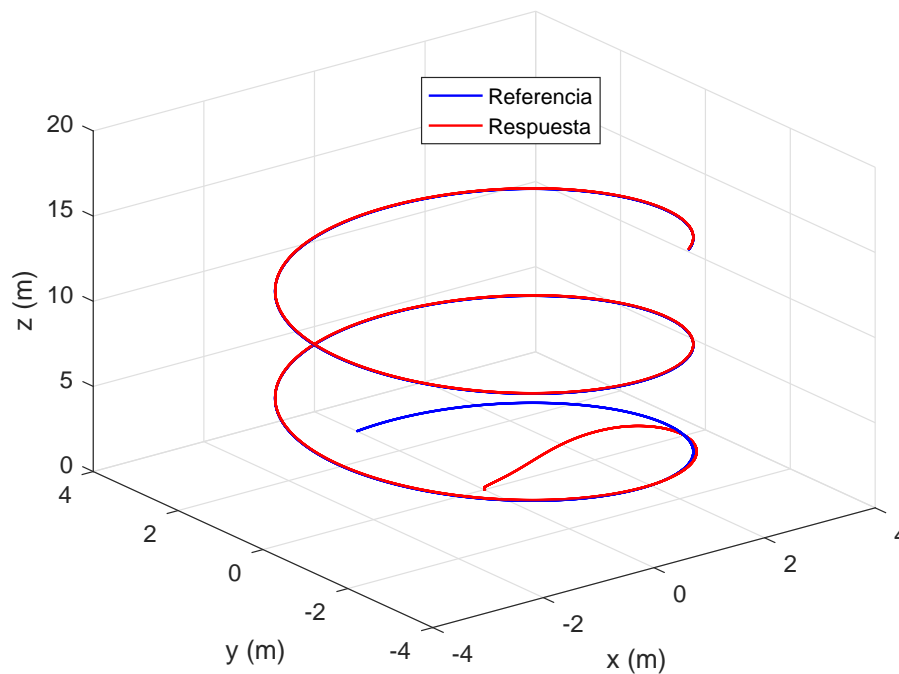


FIGURA 4.5: Trayectoria tipo hélice.

La figura 4.6, muestra como la solución inversa genera los ángulos deseados, donde ahora en lugar de ser un problema en regulación para la orientación en  $\phi$  y  $\theta$ , se convirtió en un problema de seguimiento de trayectorias.

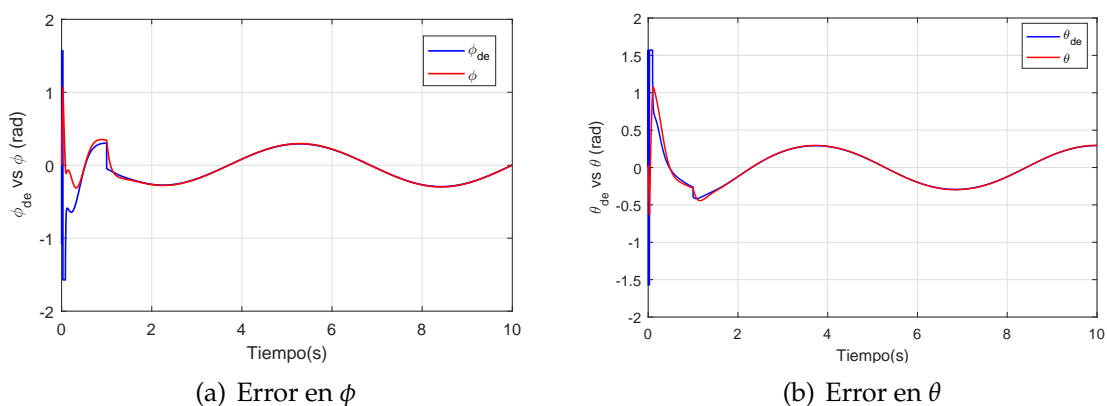


FIGURA 4.6: Ángulos deseados generados para la trayectoria hélice.

La solución inversa muestra al principio unos picos los cuales se atenúan en un período de tiempo corto menor a un segundo, y como era de esperarse el controlador en orientación fue capaz de seguir los ángulos deseados con un error mínimo.

### Regulación

Para verificar el desempeño del controlador en posición, se simuló un problema de regulación, donde el cuadricóptero tiene que llegar a una posición ( $x = 4m$ ,  $y = 2m$  y  $z = 4m$ ), partiendo de una posición ( $x = y = z = 0$ ).

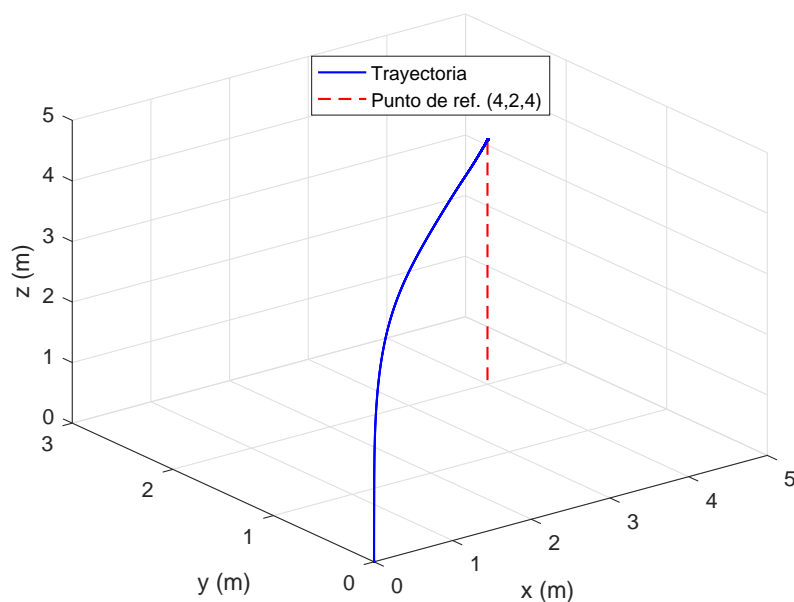


FIGURA 4.7: Regulación en ( $x = 4, y = 2, z = 4$ ).

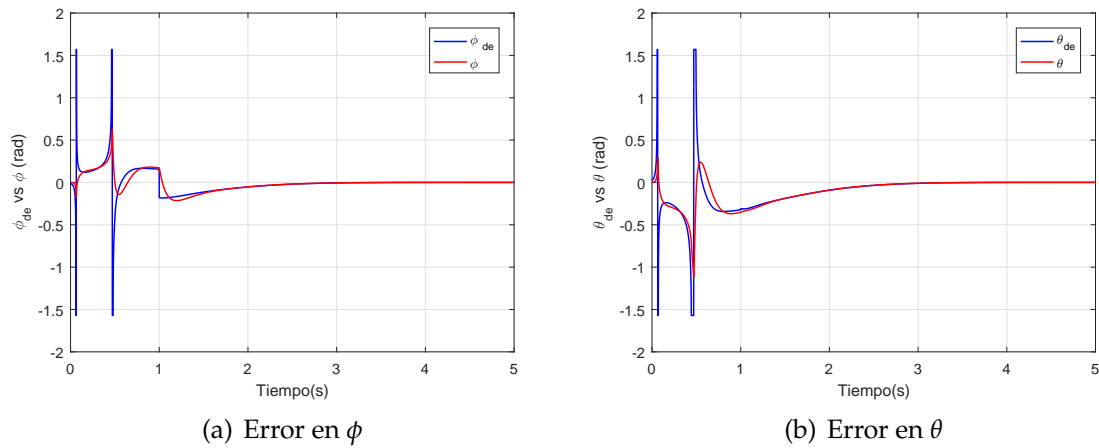


FIGURA 4.8: Ángulos deseados generados para regulación.

La figura 4.8 muestra la orientación deseada generada por el control traslacional. De igual forma que en el seguimiento de trayectorias, la solución inversa genera algunos picos, los cuales son muy difíciles de seguir.

## 4.2. Modos deslizantes

En los experimentos siempre hay incertidumbres, dinámicas no modeladas o perturbaciones que afectan directamente al sistema, algunas veces estas son de magnitud pequeña y están dominadas por las ganancias del controlador que no las contempla.

Para obtener un mejor desempeño se desarrollaron técnicas de control robusto, las cuales tratan con estos problemas, una de las más utilizadas se le conoce como SMC por sus siglas en inglés *Sliding Mode Control* o bien, *Control por Modos Deslizantes*, las primeras ideas de esta técnica surgieron a finales de los años 1950 por la Unión Soviética.

La idea del *Control por Modos Deslizantes* es conducir la trayectoria del sistema a una *superficie de deslizamiento*, y una vez que se llega a esta, mantener la trayectoria en la superficie para todo tiempo futuro. Entre las principales características de esta técnica, es que presenta convergencia en tiempo finito de los estados del sistema.

Para llevar la trayectoria a la superficie  $s(x)$ , se utiliza el enfoque de Lyapunov; proponer una función candidata definida positiva, y encontrar una ley de control que haga decrecer la derivada temporal de la función candidata, es decir, que se cumpla la siguiente condición.

$$\begin{aligned} V(s(x)) &= \frac{1}{2}s(x)^2 \\ \dot{V}(s(x)) &= \dot{s}s < 0 \end{aligned}$$

La ley de control se compone de dos partes, una denotada como  $u_D$  una función discontinua que se encarga de llevar la trayectoria a la superficie, y la otra denotada como  $u_{eq}$ , una función de control que se aplica después de alcanzar la superficie  $s = 0$ , y hace que el sistema se mantenga en la superficie, se le conoce como *control equivalente* [11].

$$u = u_D + u_{eq} \quad (4.59)$$

### Superficie de deslizamiento

Se utilizó una superficie de deslizamiento muy común en la literatura, [12]

$$s(x) = \dot{e}_x + \lambda e_x, \quad \lambda \in \mathbb{R} > 0 \quad (4.60)$$

Donde  $e_x = x - x_d$  denota el error en la variable, y  $\lambda$  es la pendiente de la superficie, entre más grande sea, la pendiente será más inclinada, implicando una convergencia más rápida, además, si se conoce la cota de la perturbación, se puede calcular el valor  $\lambda$ , de lo contrario se propone heurísticamente.

### Control equivalente

Como se mencionó anteriormente, cuando se alcanza la superficie  $s = 0$ , implica que también su derivada temporal es nula  $\dot{s} = 0$ , para cumplir esta condición, el *control equivalente* se calcula de la siguiente manera,

Retomando el sistema (4.1) :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.61a)$$

$$\dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u \quad (4.61b)$$

Utilizando la superficie (4.60) y calculando su derivada temporal,

$$\begin{aligned} s(x) &= \dot{e}_{x1} + \lambda e_{x1} = 0, \quad e_{x1} = x_1 - x_{1d} \\ \dot{s}(x) &= \ddot{e}_{x1} + \lambda \dot{e}_{x1} = 0 \\ \dot{s}(x) &= f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u - \ddot{x}_{1d} + \lambda e_{x1} = 0 \\ u_{eq} &= \frac{1}{g(x_1, x_2)} (\ddot{x}_{1d} - f(x_1, x_2) - \lambda e_{x1}) \end{aligned} \quad (4.62)$$

### Control discontinuo

El control que llevará las trayectorias del sistema a la superficie de deslizamiento es,

$$u_D = -k \operatorname{sign}(s(x)), \quad |g(x_1, x_2)|_{max} \leq k > 0 \quad (4.63)$$

Donde *sign* es una función signo, que se define,

$$\operatorname{sign}(s(x)) \triangleq \begin{cases} \operatorname{sign}(s) = 1 & s > 0 \\ \operatorname{sign}(s) \in [-1, 1] & s = 0 \\ \operatorname{sign}(s) = -1 & s < 0 \end{cases} \quad (4.64)$$

### Estabilidad de Lyapunov

Con la superficie (4.60), se propone la función de candidata Lyapunov, y se calcula su derivada temporal,

$$V(s) = \frac{1}{2}s(x)^2 \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= s\dot{s} \\ &= s(f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u - \ddot{x}_{1d} + \lambda e_{x1}) \\ &= s(f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)(u_{eq} + u_D) - \ddot{x}_{1d} + \lambda e_{x1}) \\ &= ks \operatorname{sign}(s) \\ \dot{V}(s) &= -k |s| < 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$



### 4.2.1. Modos deslizantes para el subsistema rotacional

Utilizando el modelo en espacio de estados del *backstepping* del subsistema rotacional simplificado.

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = \dot{\phi}, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{\theta}, \quad x_5 = \psi, \quad x_6 = \dot{\psi}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \underbrace{a_1 x_4 x_6}_{f_0} + \underbrace{\frac{1}{I_x}}_{g_0} u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \underbrace{a_2 x_2 x_6}_{f_1} + \underbrace{\frac{1}{I_y}}_{g_1} u_3 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= \underbrace{\frac{1}{I_z}}_{g_2} u_4 \end{aligned}$$

Donde las leyes de control para los subsistemas (4.27), (4.29) y (4.31) están dadas por las ecuaciones (4.62) y (4.63),

$$u_2 = \frac{1}{g_0} (\ddot{x}_{1d} - f_0 - \lambda_1 e_{x1}) - k_1 \text{sign}(s_{x1}) \quad (4.67)$$

$$u_3 = \frac{1}{g_1} (\ddot{x}_{3d} - f_1 - \lambda_3 e_{x3}) - k_3 \text{sign}(s_{x3}) \quad (4.68)$$

$$u_4 = \frac{1}{g_2} (\ddot{x}_{5d} + \lambda_5 e_{x5}) - k_5 \text{sign}(s_{x5}) \quad (4.69)$$

Siendo los errores  $e_{x1} = x_{1d} - x_1$ ,  $e_{x3} = x_{3d} - x_3$ ,  $e_{x5} = x_{5d} - x_5$ , las superficies,  $s_{x1} = \dot{e}_{x1} + \lambda_2 e_{x1}$ ,  $s_{x3} = \dot{e}_{x3} + \lambda_4 e_{x3}$  y  $s_{x5} = \dot{e}_{x5} + \lambda_6 e_{x5}$ , y finalmente  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, k_1, k_3$ , y  $k_5$  son constantes  $> 0$

## Simulaciones

Tomando las ec. (3.22), (3.23) y (3.24), con las leyes de control (4.67), (4.68) y (4.69). Donde se busca llevar y mantener al subsistema en el equilibrio  $\phi_d = 0$ ,  $\theta_d = 0$  y  $\psi_d = 0$ , con condiciones iniciales,  $\phi = 0,4rad$ ,  $\theta = 0,8rad$  y  $\psi = -0,5rad$ . Con ganancias,  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\lambda_3 = 10$ ,  $\lambda_4 = 10$ ,  $\lambda_5 = 5$ ,  $\lambda_6 = 5$ ,  $k_1 = 10$ ,  $k_3 = 10$ , y  $k_5 = 10$ . Además se les agregó señales de ruido como perturbaciones, para demostrar su robustez, siendo las señales, *diente de sierra*, amplitud de 5, *señal random*, amplitud de 6, y *señal sinusoidal*, amplitud de 7, todas a una frecuencia de  $1 rad/seg$  y generadas por el bloque generador de señales de Simulink.

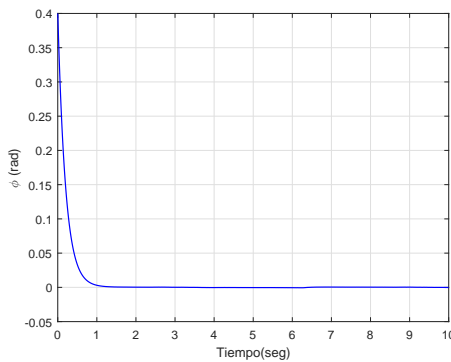
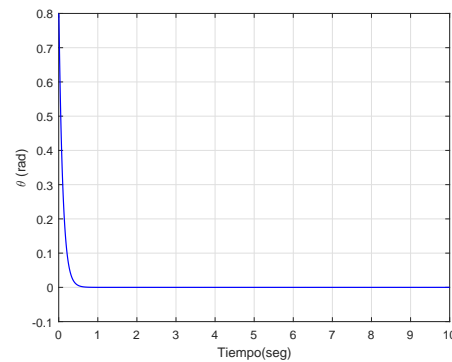
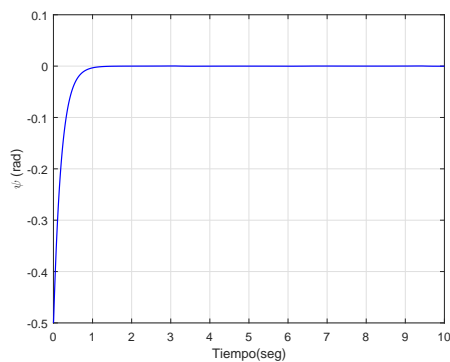
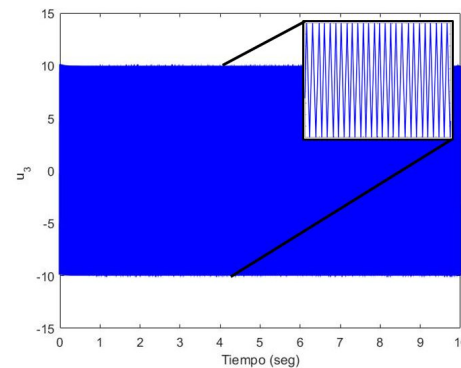
(a) Respuesta en  $\phi$ (b) Respuesta en  $\theta$ (c) Respuesta en  $\psi$ (d) Señal de control  $u_3$  con acercamiento en el tiempo

FIGURA 4.9: Respuestas del subsistema rotacional simplificado en regulación con SMC.

De igual forma que la figura 4.2, la figura 4.9 muestra una respuesta que decae exponencialmente. Y como era de esperarse, la señal de control es discontinua a alta frecuencia. Las ganancias, las cuales fueron sintonizadas de forma heurística.

## Capítulo 5

# Resultados experimentales

En este capítulo se implementan las leyes de control obtenidas en el capítulo 4. Donde primero se hacen consideraciones prácticas.

- Cómo las leyes de control  $u_1, u_2, u_3$  y  $u_4$  son traducidas a un control PWM para cada motor del cuadrirrotor.
- El rol que juega el radio control.
- Cómo los estados reales  $\phi, \theta, \psi, x, y, z$  y sus respectivas derivadas son obtenidos.
- Las restricciones físicas en las leyes de control y las restricciones que deben ser impuestas para minimizar los daños en el cuadrirrotor.

Se presentan mayormente gráficas de los estados de la aeronave, de los resultados obtenidos en exteriores.

### 5.1. Consideraciones prácticas

#### 5.1.1. Mapeo de leyes de control a comandos de velocidad

Como se definió anteriormente las leyes de control,  $u_1, u_2, u_3, u_4$  están en función del empuje producido por los motores. Sin embargo, para llevar a cabo implementación práctica de estas leyes, es necesario poder expresarlas en función de las velocidades de los motores, ya que el *pixhawk* manda la señal de control PWM a cada motor. Esto se logra de

la siguiente forma,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_t & k_t & k_t & k_t \\ -\frac{l}{\sqrt{2}}k_t & \frac{l}{\sqrt{2}}k_t & \frac{l}{\sqrt{2}}k_t & -\frac{l}{\sqrt{2}}k_t \\ \frac{l}{\sqrt{2}}k_t & \frac{l}{\sqrt{2}}k_t & -\frac{l}{\sqrt{2}}k_t & -\frac{l}{\sqrt{2}}k_t \\ k_m & -k_m & k_m & -k_m \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Invirtiendo la matriz  $M$ ,

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{k_t} & -\frac{\sqrt{2}}{k_t l} & \frac{\sqrt{2}}{k_t l} & \frac{1}{k_m} \\ \frac{1}{k_t} & \frac{\sqrt{2}}{k_t l} & \frac{\sqrt{2}}{k_t l} & -\frac{1}{k_m} \\ \frac{1}{k_t} & \frac{\sqrt{2}}{k_t l} & -\frac{\sqrt{2}}{k_t l} & \frac{1}{k_m} \\ \frac{1}{k_t} & -\frac{\sqrt{2}}{k_t l} & -\frac{\sqrt{2}}{k_t l} & -\frac{1}{k_m} \end{bmatrix}}_{M^{-1}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Para fines prácticos, como todas las constantes son del mismo signo, éstas se pueden unificar con las ganancias de las leyes de control, las cuáles también son constantes. Expandiendo la ec. (5.2),

$$\omega_1 = u_1 - u_2 + u_3 + u_4 \quad (5.3a)$$

$$\omega_2 = u_1 + u_2 + u_3 - u_4 \quad (5.3b)$$

$$\omega_3 = u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \quad (5.3c)$$

$$\omega_4 = u_1 - u_2 - u_3 - u_4 \quad (5.3d)$$

### Comando de velocidad

El comando de velocidad  $PWM$ ,  $\omega_i$ , está en un rango  $[1100, 1900]$ , donde 1100 es una velocidad nula, y 1900 representa el 100 % de la velocidad que alcanza el motor. Este rango está dado cuando se calibran los  $ESCs$ .

#### 5.1.2. Control manual

De igual forma que en las leyes de control  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y  $u_4$ , existen *controles manuales*  $u_{1rc}$ ,  $u_{2rc}$ ,  $u_{3rc}$  y  $u_{4rc}$ , que cumplen la misma función que los controles automáticos. Estos controles manuales son utilizados para controlar al cuadrirrotor en caso de alguna emergencia, además de servir de apoyo al diseñar los controles autónomos. Están expresados

en función de las velocidades de los motores,

$$\omega_1 = u_{1rc} + u_{2rc} - u_{3rc} - u_{4rc} \quad (5.4a)$$

$$\omega_2 = u_{1rc} - u_{2rc} - u_{3rc} + u_{4rc} \quad (5.4b)$$

$$\omega_3 = u_{1rc} - u_{2rc} + u_{3rc} - u_{4rc} \quad (5.4c)$$

$$\omega_4 = u_{1rc} + u_{2rc} + u_{3rc} + u_{4rc} \quad (5.4d)$$

Finalmente, el comando de velocidad que recibirá cada motor estará en función de las ec. (5.3) y (5.4), esto es,

$$\omega_1 = u_{1rc} + u_1 + u_{2rc} - u_2 - u_{3rc} + u_3 - u_{4rc} + u_4 \quad (5.5a)$$

$$\omega_2 = u_{1rc} + u_1 - u_{2rc} + u_2 - u_{3rc} + u_3 + u_{4rc} - u_4 \quad (5.5b)$$

$$\omega_3 = u_{1rc} + u_1 - u_{2rc} + u_2 + u_{3rc} - u_3 - u_{4rc} + u_4 \quad (5.5c)$$

$$\omega_4 = u_{1rc} + u_1 + u_{2rc} - u_2 + u_{3rc} - u_3 + u_{4rc} - u_4 \quad (5.5d)$$

Las ec. (5.5), son las que estarán escritas en el programa C++.

### 5.1.3. Estimación de estados

Para diseñar las leyes de control se asume que están disponibles todos los *estados*  $(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$  y sus respectivas derivadas. Sin embargo, en la práctica muy difícilmente se tienen estos estados, lo más aproximado, son *estados estimados*, los cuales son obtenidos a través algoritmos llamados *Attitude and Heading Reference Systems* o bien *AHRS*, estos combinan mediciones del acelerómetro, giróscopo y magnetómetro, para obtener los ángulos de orientación,  $\phi, \theta, \psi$ , con respecto a un marco de navegación.

Para obtener los estados del subsistema rotacional, se configuró el *pixhawk* con un algoritmo conocido como *Matriz de Cosenos Directores* o bien *DCM* por sus siglas en inglés. Este algoritmo está muy bien descrito en [29], [30]. Para obtener los estados del subsistema traslacional, se configuró el *pixhawk* en modo *Inertial Nav* el cual es algoritmo basado en filtros complementarios lineales. Ambos algoritmos se pueden encontrar en lenguaje C++ en [33]. La siguiente imagen, muestra un resumen, del proceso donde se obtienen los estados.

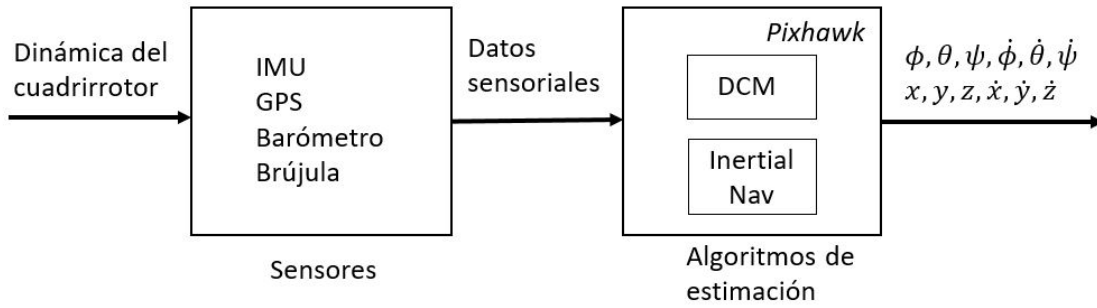


FIGURA 5.1: Diagrama a bloques del proceso de estimación

#### 5.1.4. Saturación

##### Velocidad de motores

En práctica, por muy grande que sea la señal de control, los motores sólo alcanzan un máximo número de revoluciones por minuto, como se explicó antes, la velocidad de los motores está acotada en un intervalo  $\{\omega_{min} = 1100, \omega_{max} = 1900\}$ , para asegurar que los motores funcionen correctamente se debe asegurar que la señal se encuentre siempre dentro de ese intervalo, se utiliza una función saturación, la cuál se define de la siguiente manera.

$$sat(\omega_i, \omega_{min}, \omega_{max}) \triangleq \begin{cases} \omega_i & \omega_{min} \leq \omega_i \leq \omega_{max} \\ \omega_{max} & \omega_i > \omega_{max} \\ \omega_{min} & \omega_i < \omega_{min} \end{cases} \quad (5.6)$$

##### Señales de control

Por seguridad, las señales de control  $u_2, u_3, u_4$  están saturadas con valores  $\{u_{2min} = -80, u_{2max} = 80\}$ ,  $\{u_{3min} = -80, u_{3max} = 80\}$ , y  $\{u_{4min} = -100, u_{4max} = 100\}$ . Estos valores de saturación, fueron encontrados experimentalmente. La saturación no permitirá que la ley de control exceda un movimiento de  $\pm 25^\circ$  en *cabeceo* y *alabeo*.

### 5.1.5. Estructura del sistema

Tomando en cuenta las consideraciones prácticas mencionadas, es necesario modificar el diagrama a bloques de la figura 4.1, el nuevo diagrama se muestra en la siguiente figura.

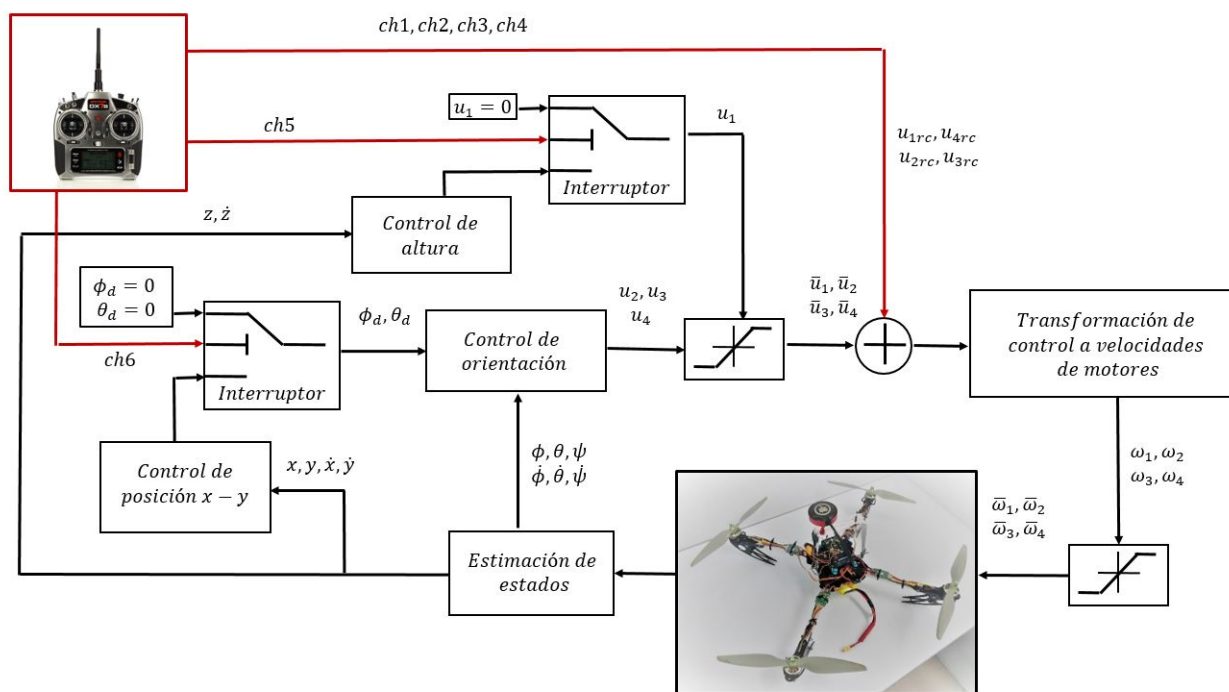


FIGURA 5.2: Diagrama a bloques del sistema.

Además de las consideraciones, se le agregó al sistema un par de condiciones para poder activar los controladores en posición y altura a través de los interruptores del radio.

## 5.2. Experimentos

Las pruebas experimentales se realizaron en un campo de fútbol abierto, donde se busca que el cuadrirrotor vuele de manera estable, idealmente se quedaría en su posición, sin embargo, debido al viento este se desplazará en el plano  $x - y$ , con el radio control se buscará compensar este movimiento.

Primeramente, se probaron los controlares propuestos, el *backstepping* que utiliza el modelo rotacional no simplificado, el que utiliza el modelo simplificado, y por último, el control por *modos deslizantes*. La altura y posición del cuadrirrotor se controló manualmente con el radio control.

Los controladores en orientación, primero fueron probados en un entorno cerrado, donde el cuadrirrotor estuvo sostenido del *marco de agarre*, para evitar que se moviera en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , así como también se mantuvo fijo en el ángulo de guiñada  $\psi$ . De esta forma se sintonizaron las ganancias hasta que su respuesta en los ángulos de *cabeceo* y *alabeo* fuera lo suficientemente rápida para mantener al cuadrirrotor estable, es decir,  $\phi = 0$  y  $\theta = 0$ , aún ante perturbaciones realizadas con movimientos en el *marco de agarre*. Aunque los errores en la respuesta estuvieron se mantuvieron en una vecindad de  $\pm 2^\circ$  estos fueron suficientes para que el cuadrirrotor tuviera un vuelo estable.

Finalmente, se realizan pruebas para controlar la altura, donde primero se volaba el vehículo a una cierta altura y después se utilizaba un interruptor del radio control, haciendo que la altura en ese instante se convirtiera en la altura deseada. La sintonización de las ganancias para este controlador se hicieron en base a la respuesta obtenida experimentalmente.

Los experimentos realizados se resumen de la siguiente manera,

- **Control en orientación utilizando los tres controladores propuestos.**
  - Backstepping para el modelo rotacional no simplificado.
  - Backstepping para el modelo rotacional simplificado.
  - Modos deslizantes para el modelo rotacional simplificado.
- **Control en altura utilizando backstepping.**



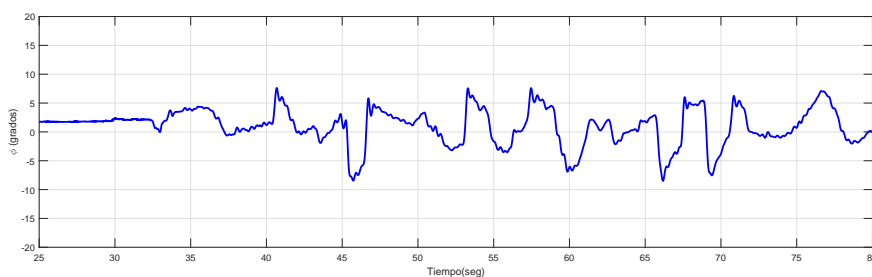
### 5.2.1. Control en orientación

#### Backstepping para el modelo rotacional no simplificado.

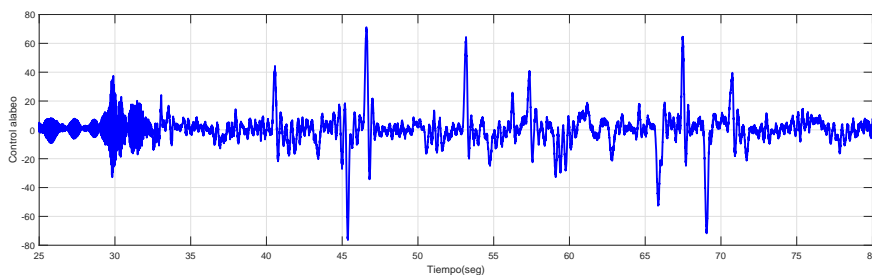
En un campo abierto de fútbol con un poco de viento y utilizando las ec,

$$\begin{aligned} u_2 &= I_x(c_1 e_\phi + c_2 \dot{e}_\phi - f_{01}) - I_x s_\theta (c_5 e_\psi + c_6 \dot{e}_\psi - f_{03}) \\ u_3 &= I_y c_\theta (c_3 e_\theta + c_4 \dot{e}_\theta - f_{02}) - I_y s_\phi c_\theta (c_5 e_\psi + c_6 \dot{e}_\psi - f_{03}) \\ u_4 &= -I_z (c_3 e_\theta + c_4 \dot{e}_\theta - f_{02}) + I_z c_\phi c_\theta (c_5 e_\psi + c_6 \dot{e}_\psi - f_{03}) \end{aligned}$$

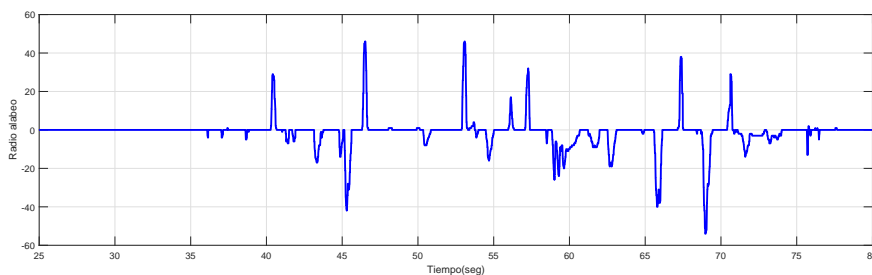
Con ganancias,  $c_1 = 30$ ,  $c_2 = 110$ ,  $c_3 = 30$ ,  $c_4 = 110$ ,  $c_5 = 100$  y  $c_6 = 140$ , se obtuvieron las siguientes gráficas.



(a) Ángulo de alabeo



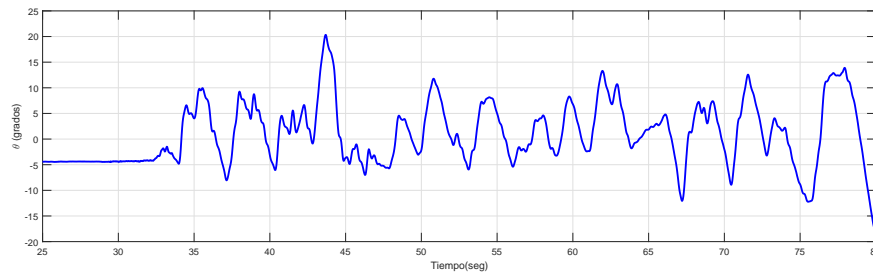
(b) Señal de control  $u_2$



(c) Señal de radio control  $u_{2r}$

FIGURA 5.3: Respuesta en  $\phi$  con señal de control y de radio.

La respuesta en el ángulo de alabeo se mantuvo en un rango  $\pm 5^\circ$ , donde las perturbaciones que lo llevaron a este extremo fueron debidas al radio control. Como se puede observar en la señal de radio control, no se necesitó mucho control manual evitar el desplazamiento en el eje  $y$ .



(a) Ángulo de cabeceo

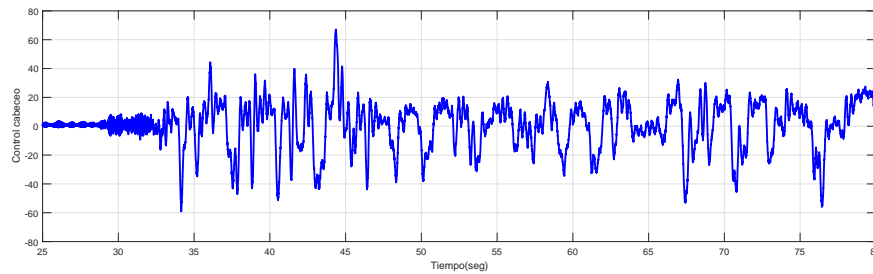
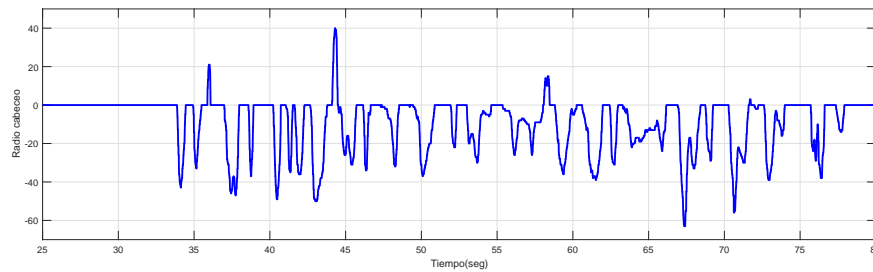
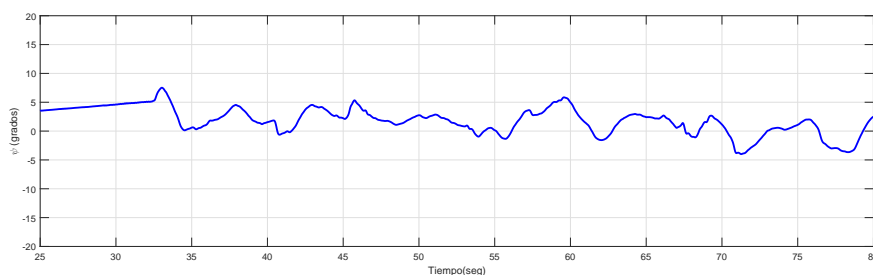
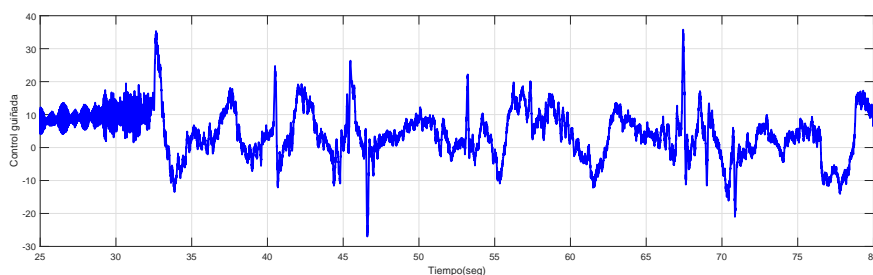
(b) Señal de control  $u_3$ (c) Señal de radio control  $u_{3r}$ 

FIGURA 5.4: Respuesta en  $\theta$  con señal de control y de radio.

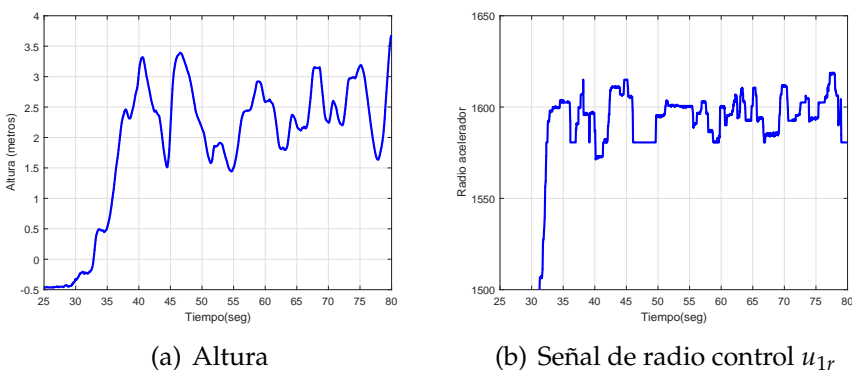
Mayormente la respuesta en cabeceo, se mantuvo en un rango  $\pm 5^\circ$ , con algunas excepciones a perturbaciones que hicieron que el cuadrirrotor rotara  $\pm 15^\circ$ . Estas perturbaciones fueron controladas y necesarias para evitar su desplazamiento, donde la señal de radio control fue mayormente negativa, lo que implica que el viento empujaba a la aeronave en dirección opuesta a su nariz.



(a) Ángulo de guiñada

(b) Señal de control  $u_4$ FIGURA 5.5: Respuesta en  $\psi$  con señal de control.

De igual que forma que la respuesta en los ángulos de cabeceo y alabeo, la respuesta en el guiñada se mantuvo en  $\pm 5^\circ$ . Aunque con una menor frecuencia, ya que en este grado de libertad no se utiliza el radio control.



(a) Altura

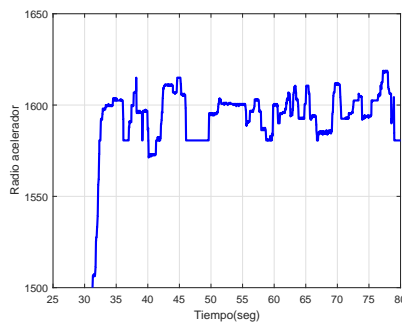
(b) Señal de radio control  $u_{1r}$ 

FIGURA 5.6: Respuesta en altura y señal de radio control.

Finalmente, en la figura 5.6 se buscó mantener al cuadrirrotor en una altura fija, o que no variara mucho. La altura osciló en un rango entre  $1,5m$  y  $3m$ .

### Backstepping para el modelo rotacional simplificado

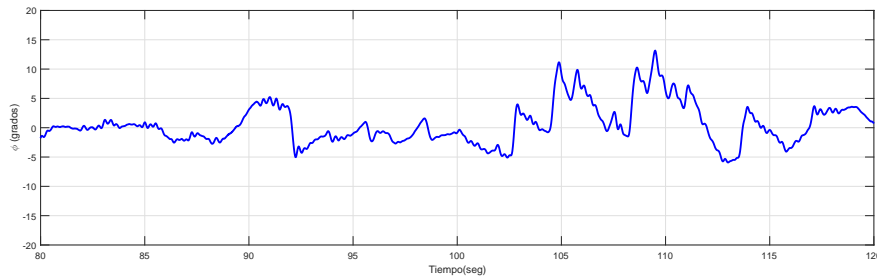
Utilizando las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 4,

$$u_2 = c_1 e_\phi + c_2 \dot{e}_\phi + \ddot{\phi}_d - \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi}$$

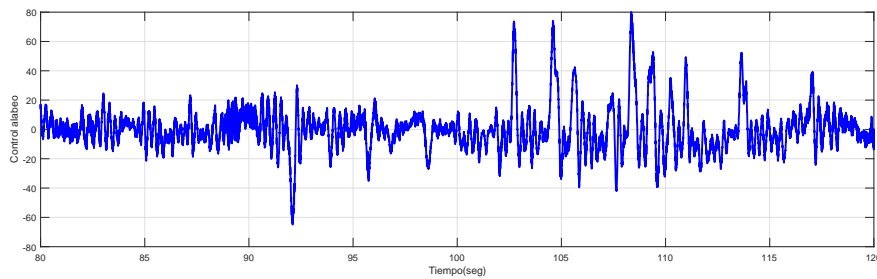
$$u_3 = c_3 e_\theta + c_4 \dot{e}_\theta + \ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi}$$

$$u_4 = c_5 e_\psi + c_6 \dot{e}_\psi + \ddot{\psi}_d$$

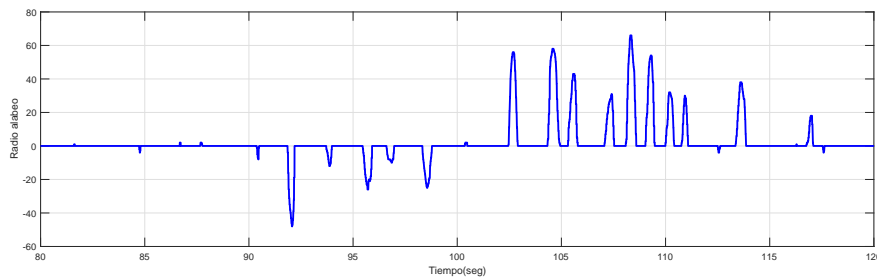
Con ganancias,  $c_1 = 30$ ,  $c_2 = 90$ ,  $c_3 = 30$ ,  $c_4 = 90$ ,  $c_5 = 90$  y  $c_6 = 140$ , se obtuvieron las siguientes gráficas.



(a) Ángulo de alabeo



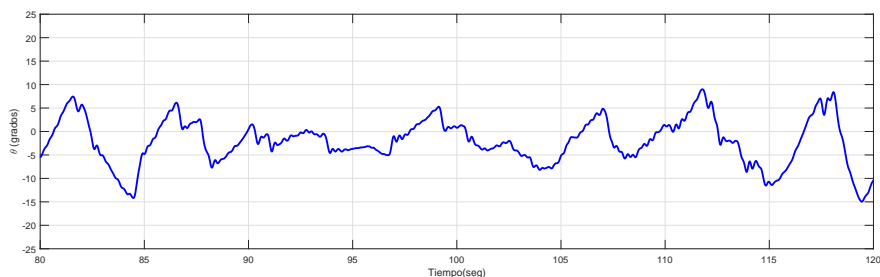
(b) Señal de control  $u_2$



(c) Señal de radio control  $u_{2r}$

FIGURA 5.7: Respuesta en  $\phi$  con señal de control y de radio.

Se obtuvo una muy buena respuesta en el ángulo de alabeo en la primer mitad de las figuras 5.7, donde no fue necesario utilizar frecuentemente el radio control, debido al poco viento, en la segunda mitad, el viento comenzó a desplazar al cuadrirrotor hacia su izquierda por lo que fue necesario aplicar el control manual del radio.



(a) Ángulo de cabeceo

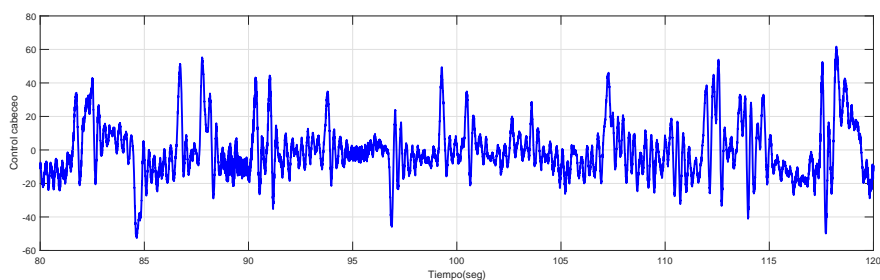
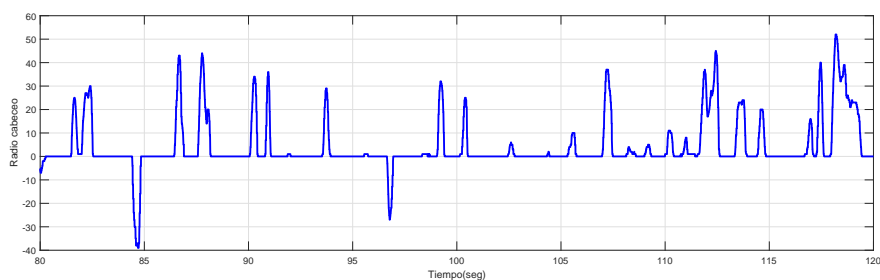
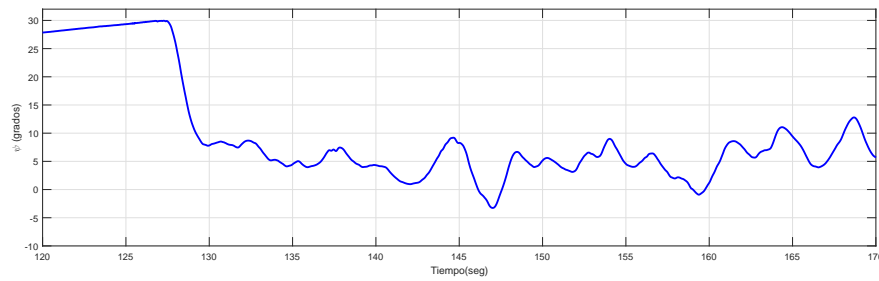
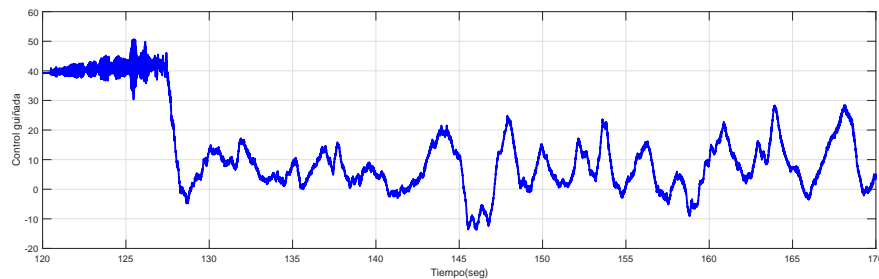
(b) Señal de control  $u_3$ (c) Señal de radio control  $u_{3r}$ 

FIGURA 5.8: Respuesta en  $\theta$  con señal de control y de radio.

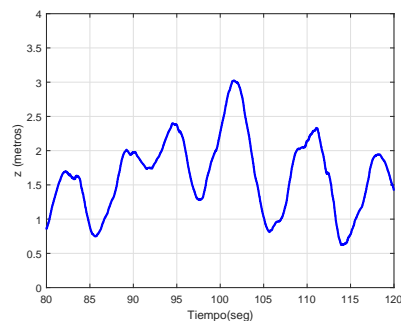
Como se puede observar en la figura 5.8 la respuesta en el ángulo de cabeceo se mantuvo principalmente en  $\pm 5^\circ$  a excepción de unos picos de amplitud de  $-15^\circ$ - $10^\circ$ . Revisando la señal de radio control se concluye que el viento intentó mover al cuadrirrotor hacia adelante.



(a) Ángulo de guiñada

(b) Señal de control  $u_4$ FIGURA 5.9: Respuesta en  $\psi$  con señal de control.

Entre los segundos 125 y 130 de la figura 5.9 se observa como responde el sistema al control en regulación, donde se tiene una condición inicial de aproximadamente  $27^\circ$  en guiñada, el sistema tardó dos segundos en responder y llevar al ángulo de guiñada a un estado estacionario entre  $0^\circ - 10^\circ$ .



(a) Altura

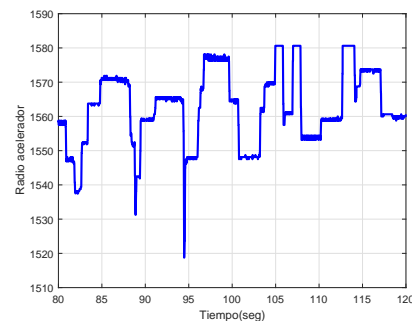
(b) Señal de radio control  $u_{1r}$ 

FIGURA 5.10: Respuesta en altura y señal de radio control.

Por último, la figura 5.10 muestra que la altura que mantuvo el cuadricóptero mientras se hicieron las pruebas, llevándolo hasta tres metros de altura.

### Modos deslizantes

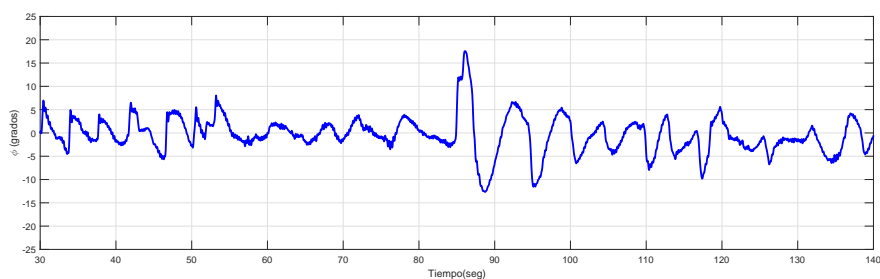
Utilizando las ecuaciones,

$$u_2 = I_x(\ddot{x}_{1d} - \frac{I_y - I_z}{I_x}\dot{\theta}\dot{\psi} - \lambda_1 e_{x1}) - k_1 \text{sign}(\dot{e}_{x1} + \lambda_2 e_{x1})$$

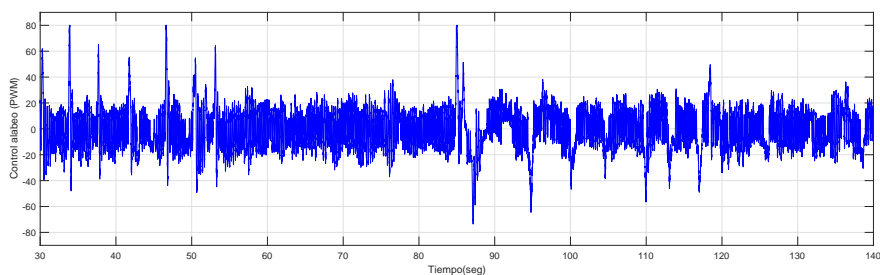
$$u_3 = I_y(\ddot{x}_{3d} - \frac{I_z - I_x}{I_y}\dot{\phi}\dot{\psi} - \lambda_3 e_{x3}) - k_3 \text{sign}(\dot{e}_{x3} + \lambda_4 e_{x3})$$

$$u_4 = I_z(\ddot{x}_{5d} + \lambda_5 e_{x5}) - k_5 \text{sign}(\dot{e}_{x5} + \lambda_6 e_{x5})$$

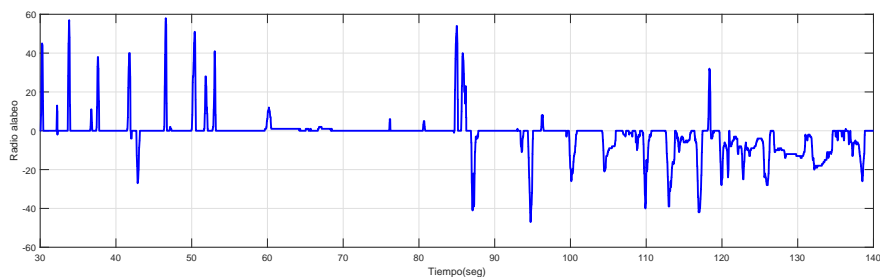
desarrolladas en el capítulo 4, con ganancias,  $\lambda_1 = 30$ ,  $\lambda_2 = 85$ ,  $\lambda_3 = 30$ ,  $\lambda_4 = 85$ ,  $\lambda_5 = 100$ ,  $\lambda_6 = 130$ ,  $k_1 = k_3 = k_5 = 8$  se obtuvieron las siguientes gráficas.



(a) Alabeo



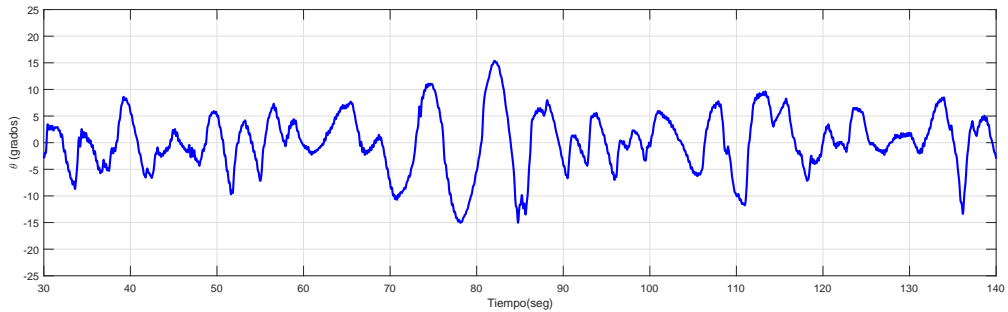
(b) Señal de control  $u_2$



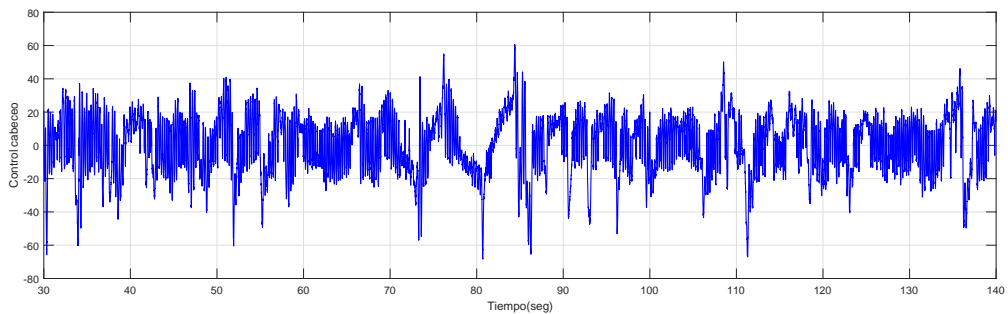
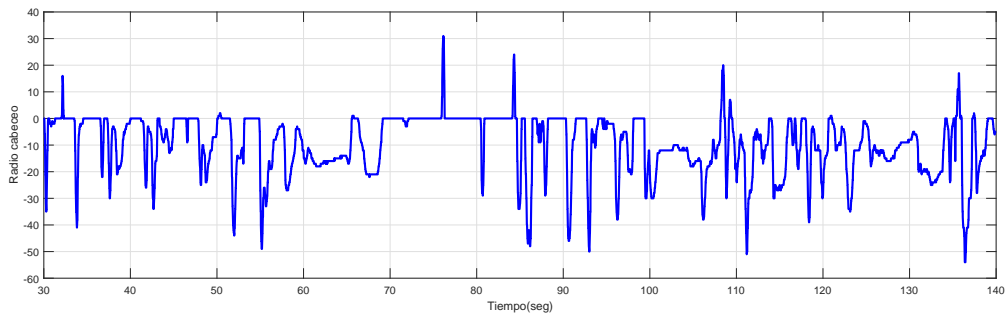
(c) Señal de radio control  $u_{2r}$

FIGURA 5.11: Respuesta en  $\phi$  con señal de control y de radio.

La respuesta en el ángulo de alabeo se mantuvo en un rango de  $\pm 10^\circ$ . Como era de esperarse la señal de control de control se mantiene principalmente en la ganancia de la ley de control, 10, y es discontinua. El viento intentó mover al cuadrirrotor primero hacia un costado y después hacia el otro costado.

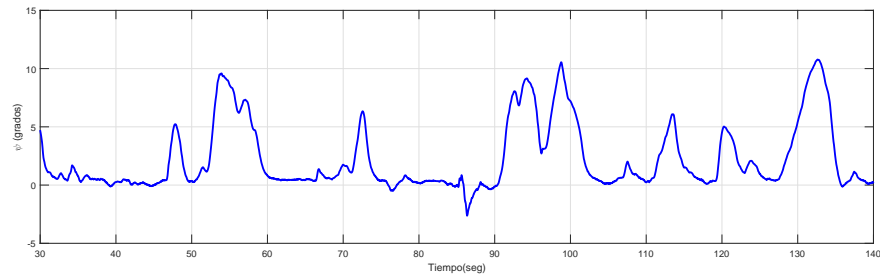
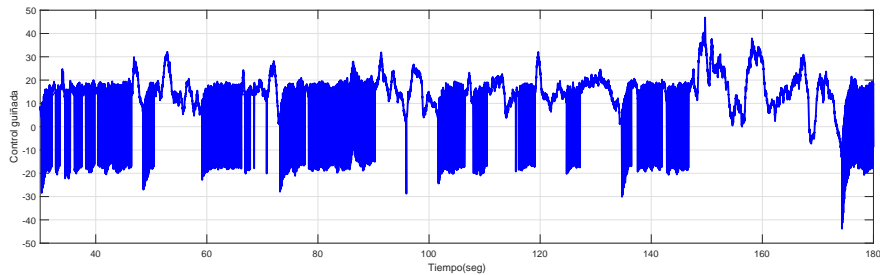


(a) Cabeceo

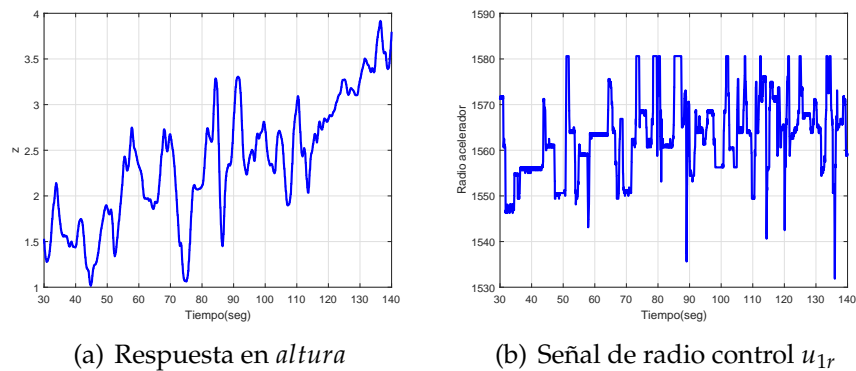
(b) Señal de control  $u_3$ (c) Señal de radio control  $u_{3r}$ **FIGURA 5.12: Respuesta en  $\theta$  con señal de control y de radio.**

La respuesta del ángulo de cabeceo es muy similar a la que se obtuvo en el ángulo de alabeo, solo cambió que se utilizó más el radio control para compensar el desplazamiento hacia detrás que provocaba el viento.



(a) Respuesta en  $\psi$ (b) Señal de control  $u_4$ FIGURA 5.13: Respuesta en  $\psi$  con señal de control.

Se obtuvo una mejor respuesta en guiñada que con los controladores *backstepping*, donde el rango está entre  $0 - 2^\circ$ . Los picos en la figura 5.13 se deben a los cambios en la señal de aceleración del radio control dado que la palanca de acelerador y la de guiñada están acopladas mecánicamente.



(a) Respuesta en altura

(b) Señal de radio control  $u_{1r}$ 

FIGURA 5.14: Respuesta en altura y señal de radio control.

Finalmente, se en la figura 5.14 se muestra la altura a la que hicieron las pruebas, donde el promedio aproximadamente fue de  $2,5m$ .

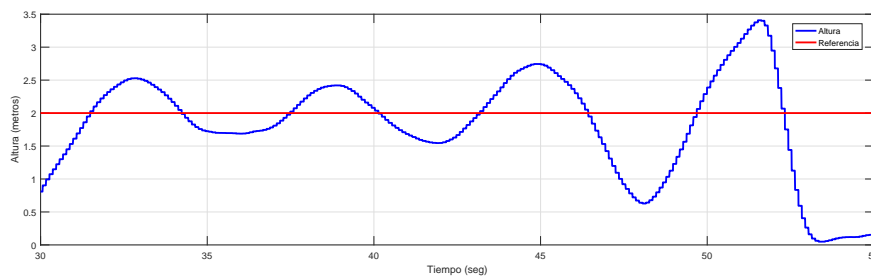
### 5.2.2. Control en altura

Para el control de altura se utilizó la ecuación (4.43), la cual se podría decir que es un controlador tipo *Proporcional - Derivativo* con un compensador de gravedad. El compensador de gravedad es el porcentaje de PWM requerido para que el cuadrirrotor venza la gravedad y comience a ascender a una cierta altura deseada y una vez alcanzada mantenerla, todo esto se hace manera heurística utilizando la palanca de acelerador del radio control. La ecuación (4.43) se puede entonces reescribir como:

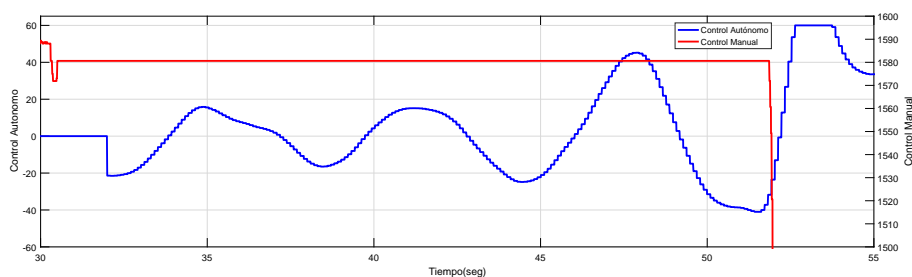
$$u_1 = \frac{1}{c_\phi c_\theta} (k_p e_z + k_d \dot{e}_z) + u_{1rc} \quad (5.7)$$

El término  $c_\phi c_\theta$  tiene la función de compensar la fuerza de altura que pierde el cuadrirrotor al inclinarse en alabeo o cabeceo.

Para sintonizar las ganancias se comenzó utilizando unas ganancias sugeridas de un cuadrirrotor de tamaño similar ya con control de altura. Las siguientes figuras muestran la evolución de la sintonización de las ganancias.

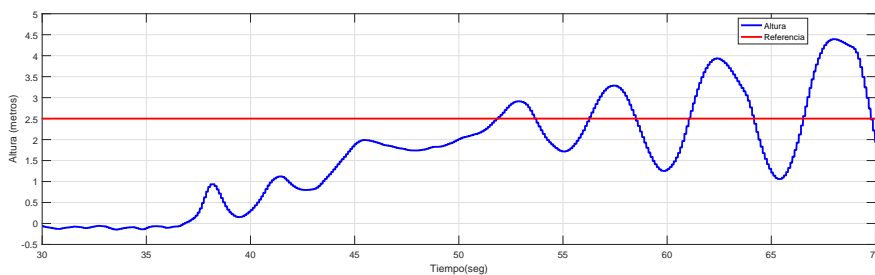


(a) Respuesta en altura

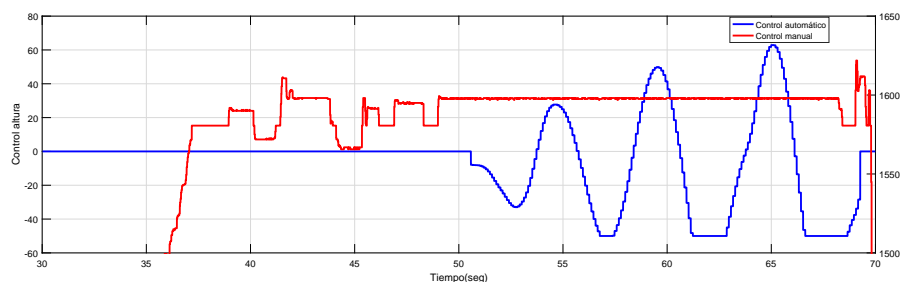


(b) Control automático y control manual

FIGURA 5.15: Control en altura,  $K_p = 20$ ,  $K_d = 20$ .

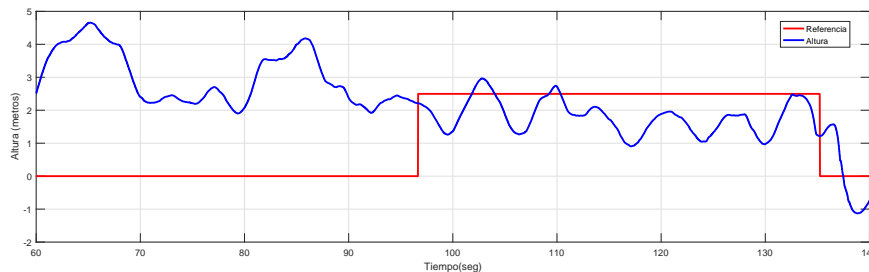


(a) Respuesta en altura

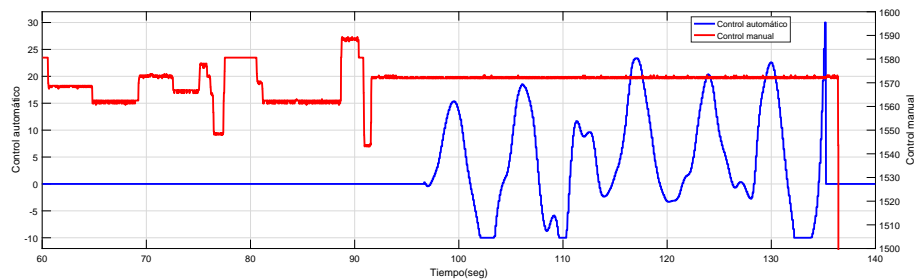


(b) Control automático y control manual

FIGURA 5.16: Control en altura,  $K_p = 20$ ,  $K_d = 30$ .

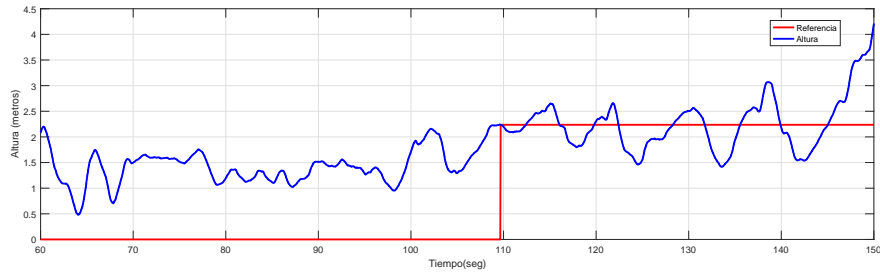


(a) Respuesta en altura

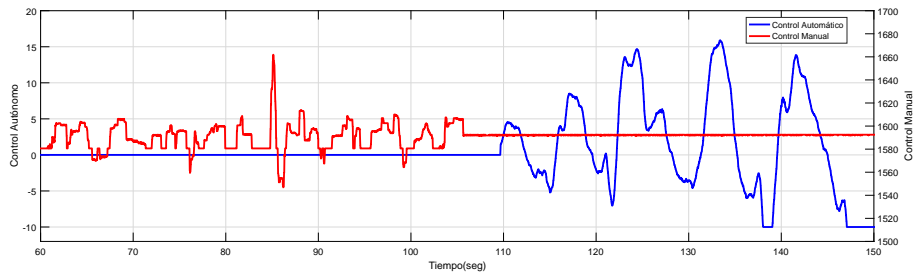


(b) Control automático y control manual

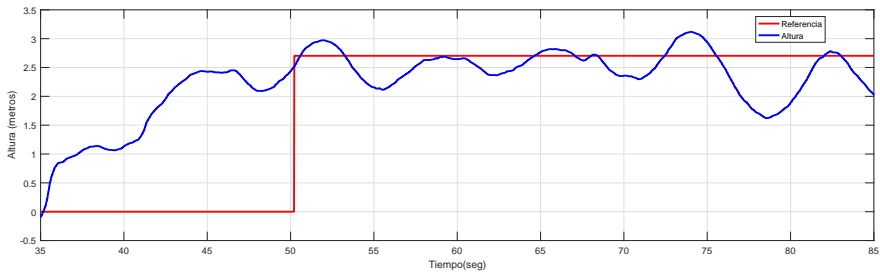
FIGURA 5.17: Control en altura,  $K_p = 10$ ,  $K_d = 15$ .



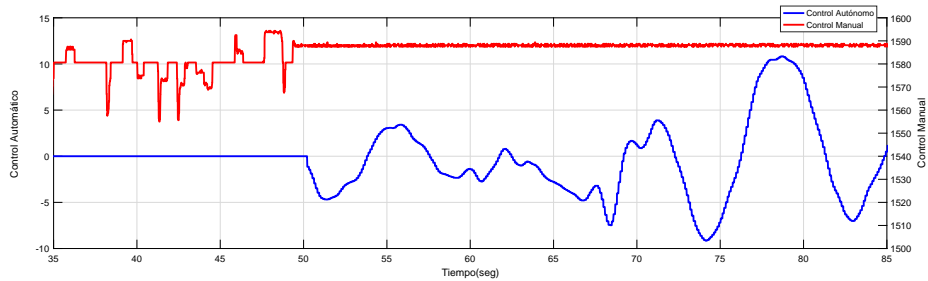
(a) Respuesta en altura



(b) Control automático y control manual

FIGURA 5.18: Control en altura,  $K_p = 17$ ,  $K_d = 10$ .

(a) Respuesta en altura



(b) Control automático y control manual

FIGURA 5.19: Control en altura,  $K_p = 13$ ,  $K_d = 8$ .

En la figura 5.15 la altura del cuadrirrotor se mantiene oscilando de una manera estable durante 15s y después su respuesta comienza a diverger. Aumentando la ganancia derivativa las oscilaciones divergeran aún más rápido como se ve en la figura 5.16.

Reduciendo las ganancias considerablemente a  $k_p = 10$  y  $k_d = 15$  se obtuvo la figura 5.17 donde la altura no pudo alcanzar la referencia salvo a un par de ocasiones, aunque la respuesta es buena, manteniendo al cuadrirrotor en un rango de 1m a 2,5m.

Considerando las respuestas anteriores, la ganancia proporcional debe ser mayor a la ganancia derivativa, primero se propuso  $k_p = 17$ ,  $k_d = 10$  obteniendo la figura 5.18 donde se obtuvo una buena respuesta excepto al final que comienza a diverger. Finalmente se llegó a utilizar las ganancias  $k_p = 13$  y  $k_d = 8$  para obtener los mejores resultados en estas pruebas.



## Capítulo 6

# Conclusiones y trabajo a futuro

En el capítulo 5 se obtuvieron gráficas de las respuestas en los estados del sistema, obteniendo resultados satisfactorios, ya que el cuadrirrotor realizó varios vuelos estables sin descontrolarse. Se puede aún mejorar la maniobrabilidad del cuadrirrotor si se sintonizan aún más las ganancias en la realimentación de estados.

Los resultados también mostraron lecturas ruidosas, independientemente de los controladores, estas dependen mucho en las lecturas de los sensores, aunque la tecnología ha avanzado mucho, aún algunos sensores no son lo suficientemente precisos, como el GPS y el barómetro, repercutiendo directamente en la respuesta del cuadrirrotor, este defecto es despreciable cuando se trata de escalas grandes, es decir, trayectorias punto a punto con más de veinte metros entre cada punto.

Uno de los objetivos sobre el modelo matemático para el subsistema rotacional se cumplió, ya que se pudo verificar que a en base del modelo completo se desarrollaron leyes de control no lineal, donde se cancelaba directamente la dinámica no lineal del cuadrirrotor, obteniendo resultados satisfactorios ya que se realizaron vuelos semi autónomos. De igual forma, utilizando el modelo con la dinámica simplificada también se demostró que se pueden hacer vuelos estables.

Para obtener un mejor desempeño energético, es recomendable utilizar la ley de control *backstepping* del subsistema rotacional simplificado, dado que utiliza menos poder computacional que la ley *backstepping* del subsistema rotacional, permitiendo agregar algoritmos a prueba de fallas en caso de que algún motor o hélice deje de funcionar correctamente. La ley de control por *modos deslizantes* presentó muy buenos resultados en la estabilización, sin embargo, utiliza mucho mayor energía que las leyes de control continuo, implicando un menor tiempo de vuelo, una opción.

Estos resultados son aplicables para vuelos con maniobras simples y suaves, para vuelos con maniobras agresivas se tendría que evaluar de nuevo el desempeño de las leyes

de control propuestas.

### **Trabajo a futuro**

Para resolver el problema de los datos con ruido obtenidos de los sensores, se utilizarán técnicas de estimación más complejas, como los filtros de Kalman o filtro de complementarios no lineales, además se agregaran más sensores; ultrasónicos, de flujo óptico, etc, con el fin de realizar una mejor fusión sensorial. Se realizarán experimentos para mejorar el controlador en altura; se experimentará con la acción integral, y se implementarán algoritmos basados en control por modos deslizantes para comparar su desempeño con el ya implementado backstepping. Además también se probarán los controladores en posición, primeramente trabajando en regulación y después en trayectorias, utilizando algoritmos sencillos como un controlador proporcional derivativo. Una vez que esté dominado el control en regulación se pasará al seguimiento de trayectorias. Finalmente se buscará resolver un problema real que explote la autonomía del cuadrirrotor.



# Bibliografía

- [1] GOLDSTEIN H., *Classical Mechanics* Addison-Wesley Publishing, Reading, MA, 2nd ed., 1980.
- [2] EDKIN B. y REID L.D. *Dynamics of Flight* Wiley, New York, 1959.
- [3] CASTILLO P., LOZANO R. y DZUL A. *Modelling and Control of Mini-Flying Machines* Springer-Verlag, London, 2005.
- [4] GARCÍA L.R., DZUL A., LOZANO R. y PÉGARD C. *Quad Rotorcraft Control, Vision-Based Hovering and Navigation* Springer-Verlag, London, 2013.
- [5] LOZANO R. *Unmanned Aerial Vehicles* Wiley, 2010.
- [6] KHALIL, H. K., & GRIZZLE, J. W. *Nonlinear systems* (Vol. 3). New Jersey: Prentice hall, 1996.
- [7] QUAN QUAN *Introduction to Multicopter Design and Control* Springer Nature, Singapore, 2017.
- [8] RICHARD M. MURRAY, ZEXIANG LI y S. SHANKAR SASTRY *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation* CRC Press, 1994.
- [9] MIROSLAV KRSTIC, IOANNIS KANELAKOPOULOS y PETAR KOKOTOVIC *Nonlinear and Adaptive Control Design* John Wiley & Sons, Inc. 1995.
- [10] MARK W. SPONG SETH HUTCHINSON M. VIDYASAGAR *Robot Modeling and Control* John Wiley & Sons, Inc., 1st Edition, 2006.
- [11] YURI SHTESSEL, CHRISTOPHER EDWARDS, LEONID FRIDMAN y ARIE LEVANT *Sliding Mode Control and Observation* Birkhäuser Basel, Springer 2014
- [12] JEAN-JACQUES E. SLOITINE y WEIPING LI *Applied Nonlinear Control* Prentice-Hall Inc. 1991
- [13] PETAR V. KOKOTOVIC, *The Joy of Feedback: Nonlinear and Adaptive* Bode Prize Lecture 1991.

- [14] Liu, C., Pan, J., & Chang, Y. (2016, July). PID and LQR trajectory tracking control for an unmanned quadrotor helicopter: Experimental studies. In Control Conference (CCC), 2016 35th Chinese (pp. 10845-10850). TCCT.
- [15] Zhu, B., & Huo, W. (2010, June). Trajectory linearization control for a quadrotor helicopter. In Control and Automation (ICCA), 2010 8th IEEE International Conference on (pp. 34-39). IEEE.
- [16] Liu H., Bai Y., Lu G., Shi & Z. Zhong Y. (2013, May). Robust Tracking Control of a Quadrotor Helicopter. *J Intell Robot Syst* (2014). Springer.
- [17] Lee, S. H., Kang, S. H., & Kim, Y. (2011, October). Trajectory tracking control of quadrotor UAV. In Control, Automation and Systems (ICCAS), 2011 11th International Conference on (pp. 281-285). IEEE.
- [18] Mercado, D. A., Castillo, P., & Lozano, R. (2015, June). Quadrotor's trajectory tracking control using monocular vision navigation. In Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2015 International Conference on (pp. 844-850). IEEE.
- [19] Castillo, P., Dzul, A., & Lozano, R. (2004). Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. *IEEE Transactions on control systems technology*, 12(4), 510-516.
- [20] Reinoso, M. J., Minchala, L. I., Ortiz, P., Astudillo, D. F., & Verdugo, D. (2016). Trajectory tracking of a quadrotor using sliding mode control. *IEEE Latin America Transactions*, 14(5), 2157-2166.
- [21] Muñoz, F., Bonilla, M., González-Hernández, I., Salazar, S., & Lozano, R. (2015, October). Super Twisting vs Modified Super Twisting algorithm for altitude control of an Unmanned Aircraft System. In Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), 2015 12th International Conference on (pp. 1-6). IEEE.
- [22] Arellano-Muro, C. A., Castillo-Toledo, B., Loukianov, A. G., Luque-Vega, L. F., & González-Jiménez, L. E. (2015, May). Quaternion-based trajectory tracking robust control for a quadrotor. In System of Systems Engineering Conference (SoSE), 2015 10th (pp. 386-391). IEEE.
- [23] Sumantri B., Uchiyama N., Sano S., & Kawabata Y. (2013, Mar). Robust Tracking Control of a Quad-Rotor Helicopter Utilizing Sliding Mode Control with a Nonlinear Sliding Surface. *Journal of System Design and Dynamics* (pp. 226-241).
- [24] Bouabdallah S. & Siegawart R. (2005, April). Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor. *International Conference on Robotics and Automation. Proceedings of the 2005 IEEE*.
- [25] Madani T. & Benallegue A. (2006, Oct). Backstepping Control for a Quadrotor Helicopter. *International Conference on Intelligent Robots and Systems. Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ*.

- [26] Yang, Y., Wu, Q., & Chen, M. (2016, June). Robust trajectory tracking control for a quadrotor unmanned aerial vehicle using disturbance observer. In *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2016 12th World Congress on* (pp. 697-702). IEEE.
- [27] Dang, H. N., Mohamed, B., & Rafaralahy, H. (2014, June). Trajectory-tracking control design for an under-actuated quadrotor. In *Control Conference (ECC), 2014 European* (pp. 1765-1770). IEEE.
- [28] Rashad, R., AbouDonia, A., & El-Badawy, A. (2015, October). Backstepping trajectory tracking control of a quadrotor with disturbance rejection. In *Information, Communication and Automation Technologies (ICAT), 2015 XXV International Conference on* (pp. 1-7). IEEE.
- [29] Edwan E., Zhang J., Zhou J., & Loffeld O. Reduced DCM Based Attitude Estimation Using Low-cost IMU and Magnetometer Triad. *IEEE 8th Workshop on Positioning, Navigation and Communication*, 2011.
- [30] N. H. Q. Phuong, H. -J. Kang, Y. -S. Suh, & Y. -S. Ro. A DCM Based Orientation Estimation Algorithm with an Inertial Measurement Unit and a Magnetic Compass. *Journal of Universal Computer Science*, vol. 15, pp. 859-876, 2009.
- [31] Autopiloto hardware/software <https://pixhawk.org/>, Última visita 6/Sep/2017.
- [32] Autopiloto ArduPilot <http://ardupilot.org/ardupilot/index.html>, Última visita 6/Sep/2017.
- [33] Código abierto para ArduPilot <https://github.com/ArduPilot/ardupilot/>, Última visita 6/Sep/2017.



## Apéndice A

# Matrices de rotación y sus propiedades

El movimiento de un cuerpo rígido en  $\mathfrak{R}^3$  consiste en rotaciones y traslaciones, las cuales describirán su orientación y posición respectivamente. En el movimiento de traslación simplemente se siguen las coordenadas de un punto  $q$  del cuerpo rígido relativas a un marco de referencia ya conocido, en este caso el inercial.

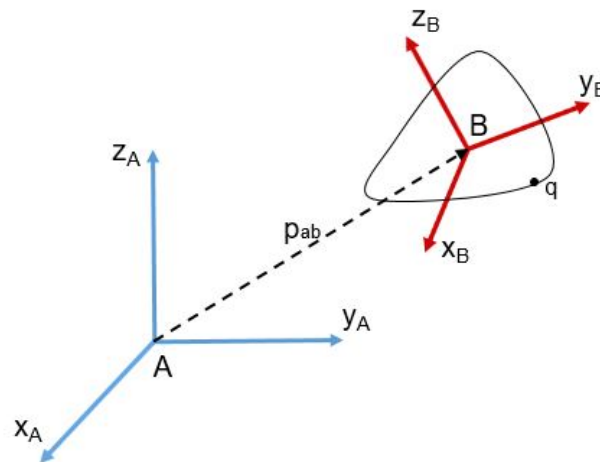


FIGURA A.1: **Movimiento de traslación de un marco de referencia a otro**

Para describir la orientación de un objeto es un poco más complejo, se describe una orientación geométrica relativa entre un marco de referencia y otro, además se asume que todos los marcos de referencia siguen la *regla de la mano derecha*.

Para describir este movimiento se construye una matriz de rotación de la forma:

$$R_{ab} = (x_{ab}, y_{ab}, z_{ab}), \in \mathfrak{R}^{3 \times 3} \quad (\text{A.1})$$

A continuación se enuncian brevemente las propiedades que cumple la matriz de rotación.

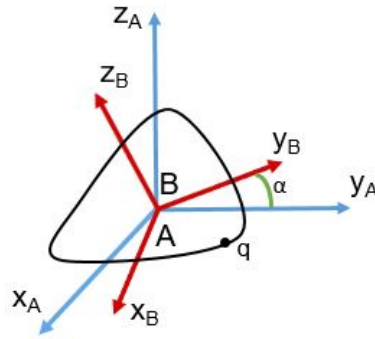


FIGURA A.2: Movimiento de rotación de un marco de referencia a otro

## A.1. Propiedades de la matriz de rotación

- Las columnas de  $R$  son mutuamente ortogonales  $RR^T = R^T R = I$ .
- $R^{-1} = R^T$ .
- $\det(R) = 1$ .

Todas las matrices que satisfacen estas propiedades se denotan como  $SO(n)$ , *special orthogonal*. Otras propiedades importantes en las matrices  $SO(n)$  son:

- Si  $R_1, R_2 \in SO(3)$ , entonces  $R_1 R_2 \in SO(3)$ .
- Dada  $R \in SO(3)$  y  $v, w \in \mathbb{R}^3$ ,

$$R(v \times w) = (Rv) \times (Rw) \quad (\text{A.2})$$

$$RS(w)R^T = S(Rw) \quad (\text{A.3})$$

Se utiliza la nomenclatura  $S(\cdot)$  para referirse a una matriz antisimétrica.

## A.2. Propiedades de la matriz antisimétrica

Una matriz se dice que es antisimétrica si y solo si  $S^T + S = 0$ , donde  $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Dado un vector  $a = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ , la matriz antisimétrica  $S(a)$ , se construye como:

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Dados  $R \in SO(3)$ ,  $a$  y  $b \in \mathbb{R}^3$  y  $\alpha, \beta$  son escalares, las siguientes propiedades se satisfacen:

$$\bullet S(\alpha a + \beta b) = S(\alpha a) + S(\beta b) \quad (\text{A.5})$$

$$\bullet S(a)b = a \times b, \text{ donde } a \times b \text{ denota el producto cruz.} \quad (\text{A.6})$$

$$\bullet R(a \times b) = Ra \times Rb \quad (\text{A.7})$$

$$\bullet RS(a)R^T = S(Ra) \quad (\text{A.8})$$

### A.3. Velocidad rotacional

Otra propiedad muy recurrida en el modelado mediante *Newton-Euler*, es lo que se conoce como *velocidad angular instantánea* [8].

Se considera un vector  $v$  que está siendo observado desde dos marcos de referencia,  $E^m$  y  $E^b$ , el inercial y el del cuerpo, respectivamente.  $E^b$  gira con una velocidad angular  $\omega$  relativa a  $E^m$  como se muestra en la figura A.3.

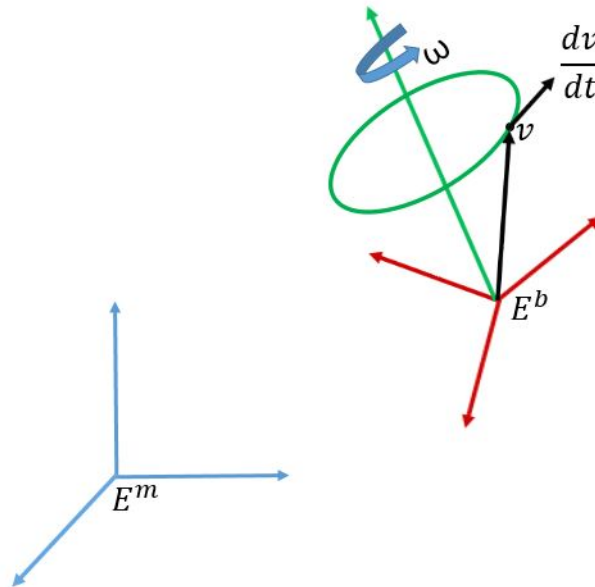


FIGURA A.3: Velocidad angular de un punto en un marco de referencia

El vector  $v$  que está fijo al cuerpo rígido sigue una trayectoria en el las coordenadas espaciales la cual se reprenta como:

$$v_m(t) = R_{mb}(t)v_b, \quad R \in SO(3)$$

O alternativamente, en coordenadas del cuerpo:

$$v_b(t) = R_{bm}(t)v_m$$

Su velocidad está dada por:

$$\dot{v}_m = \dot{R}_{mb}v_b, \quad \dot{v}_b = \dot{R}_{bm}v_m$$

Utilizando las propiedades elementales del producto cruz, se puede observar de la figura A.3 que:

$$\frac{dv}{dt} = \omega \times v = S(\omega)v$$

Combinando las dos últimas ecuaciones,

$$\begin{aligned} \dot{R}_{mb}v_b &= S(\omega)v_b \\ \dot{R}_{mb}v_b &= S(\omega)R_{mb}v_b \end{aligned}$$

Por lo que se define a la *velocidad angular inercial instantánea* como:

$$S(\omega_m) = \dot{R}_{mb}R_{mb}^{-1} \quad (\text{A.9})$$

De igual manera se tiene *velocidad angular del cuerpo instantánea* como:

$$S(\omega_b) = R_{mb}^{-1}\dot{R}_{mb} \quad (\text{A.10})$$

## A.4. Ángulos de Euler

Como se mencionó anteriormente, para seguir la trayectoria del cuadrirotor relativa al marco de referencia inercial, se utilizó una matriz de rotación  $R \in SO(3)$ , para definir esta matriz se sigue la parametrización de los *ángulos de Euler* en una convención "ZYX", esto es, realizando primero una rotación en el eje  $z$  a un ángulo  $\psi$  (*guiñada*), seguida de una rotación en el eje  $y$  a un ángulo  $\theta$  (*cabeceo*) y finalmente, una rotación en el eje  $x$  a un ángulo  $\phi$  (*alabeo*). De cada rotación se obtiene una matriz como se muestra en las siguientes figuras.

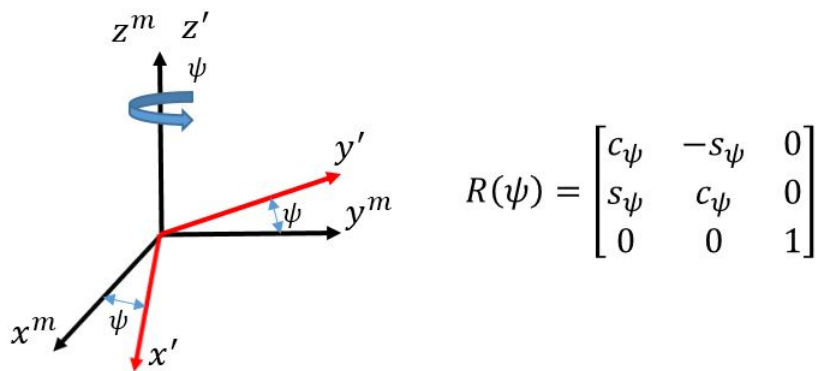


FIGURA A.4: Rotación en  $z$



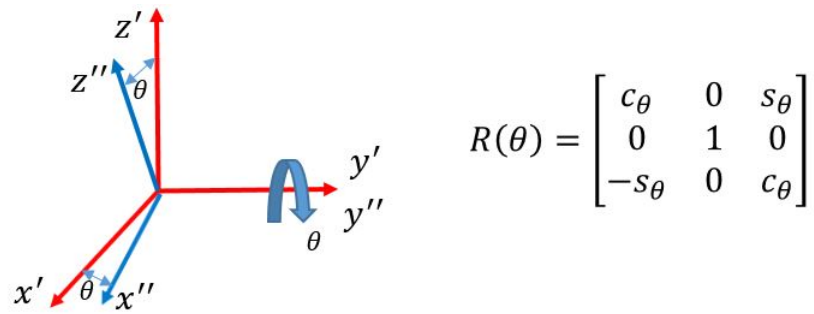


FIGURA A.5: Rotación en y

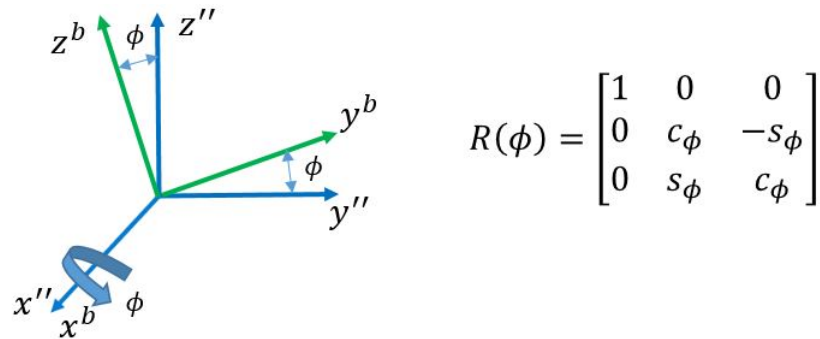


FIGURA A.6: Rotación en x

Finalmente la matriz de rotación se obtiene multiplicando las tres matrices:

$$\begin{aligned} R_{mb} &= R_t = R(\psi)^{-1}R(\theta)^{-1}R(\phi)^{-1} \\ &= R(\psi)^T R(\theta)^T R(\phi)^T \end{aligned}$$

$$R_t = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

## A.5. Transformación entre velocidades angulares del cuerpo y razones angulares de Euler

Para seguir la velocidad de la trayectoria del vehículo relativa al marco inercial, es necesario definir una matriz de transformación que relacione las velocidades angulares del cuerpo  $\Omega = (p, q, r)^T$  con las razones de los ángulos de Euler, de acuerdo con [2] la matriz de transformación se define como:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi s_\theta \end{bmatrix}}_{R_r} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Siendo su inversa,

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi / c_\theta & c_\phi / c_\theta \end{bmatrix}}_{R_r^{-1}} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

La cual está definida cuando  $(-\pi/2 < \phi < \pi/2)$  y  $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ .

## Apéndice B

# Especificaciones del Pixhawk

### Procesador

- 32bit STM32F427 Cortex M4 Core with FPU
- 168 MHz
- 256 KB RAM
- 2 MB Flash
- 32 bit STM32F103 failsafe co-processor

### Sensores

- ST Micro L3GD20H 16 bit gyroscope
- ST Micro LSM303D 14 bit accelerometer / magnetometer
- Invensense MPU 6000 3-axis accelerometer/gyroscope
- MS5611 barometer

### Interfaces

- 5x UART (serial ports), one high-power capable, 2x with HW flow control
- 2x CAN (one with internal 3.3V transceiver, one on expansion connector)
- Spektrum DSM / DSM2 / DSM-X® Satellite compatible input
- Futaba S.BUS® compatible input and output
- PPM sum signal input
- RSSI (PWM or voltage) input
- I2C
- SPI
- 3.3 and 6.6V ADC inputs
- Internal microUSB port and external microUSB port extension



## Apéndice C

### Cálculo del tensor de inercia

El momento de inercia describe el comportamiento dinámico de un cuerpo que gira sobre un eje definido. Es una medida de resistencia de un cuerpo a cambios en su movimiento rotacional. Sin embargo, este término se utiliza generalmente en cuerpos que giran sobre solo un eje. Para un cuerpo que gira sobre 3 ejes, hay infinitas selecciones de ejes de rotación, para resolver esto se necesita caracterizar la distribución de masa de un cuerpo rígido. El tensor de inercia resume todos los posibles momentos de inercia de un cuerpo, y se define como [10]:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Donde,

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{yy} &= \iiint (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{zz} &= \iiint (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{xy} &= I_{yx} = - \iiint xy\rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{xz} &= I_{zx} = - \iiint xz\rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{yz} &= I_{zy} = - \iiint yz\rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

Donde,  $\rho(x, y, z)$  es la densidad de masa volumétrica, la cual es constante cuando el cuerpo es homogéneo.

Las integrales son evaluadas en la región del espacio ocupada por el cuerpo. A los elementos en la diagonal de la matriz  $I$  se le conocen como *principales momentos de inercia*, y a los otros términos que no se encuentra en la diagonal se le conocen como *productos cruzados de inercia*.

### Cálculo del tensor de inercia para el cuadrirrotor

Con el fin de simplificar el cálculo del tensor de inercia del quadricóptero, se hacen las siguientes suposiciones:

- La distribución de masa de los brazos del cuadrirrotor no contribuye en el tensor de inercia.
- El fuselaje del cuadrirrotor se modela como una esfera de radio  $r = 0,1m$ , donde su masa  $m_{esf} = 1,02kg$ , es la suma de todos los elementos del quadricóptero excepto los motores con sus hélices.
- Los motores con sus hélices se modelan como masas puntuales,  $m_{mot} = 0,07kg$ .

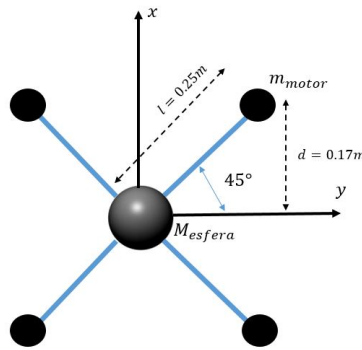


FIGURA C.1: Representación geométrica del quadricóptero para calcular el tensor de inercia

Bajo estas suposiciones, y resolviendo las integrales de volumen, los *principales momentos de inercia* son:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{2}{5}m_{esf}r^2 + 4m_{mot}d^2 = 0,01217 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{C.2})$$

$$I_{zz} = \frac{2}{5}m_{esf}r^2 + 4m_{mot}l^2 = 0,02158 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{C.3})$$

Y los *productos cruzados de inercia* son idénticamente cero por la simetría del quadricóptero, entonces el tensor de inercia es:

$$I = \begin{bmatrix} 0,01217 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01217 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02158 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$