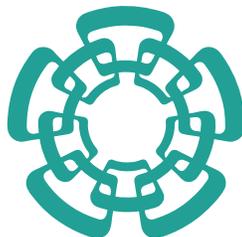


**Centro de Investigación y de Estudios  
Avanzados del Instituto Politécnico  
Nacional  
Unidad Zacatenco**

Departamento de Control Automático



**Cinvestav**

**La Ecuación de Hill con Retardo**

Tesis que presenta:

**Eli Abraham Vázquez Orduña**

para obtener el grado de:

*Doctor en Ciencias*

con especialidad en:

*Control Automático*

Asesor: Dr. Joaquín Collado Moctezuma

Ciudad de México

Diciembre de 2018



## **Agradecimientos**

- A Debbie.
- A mi familia.
- A mi asesor, el Dr. Joaquín Collado.
- A mis revisores, el Dr. Wen Yu, la Dra. Petra Wiederhold, el Dr. Alejandro Malo y el Dr. Jorge Dávila.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada durante la elaboración de esta tesis.



## **Resumen**

La ecuación de Hill con retardo es estudiada, para determinar la estabilidad se construye una aproximación de rango finito del operador de monodromía por medio de proyecciones a espacios generados por combinaciones lineales conjuntos de funciones ortonormales constantes a pedazos. Se demuestra que la estabilidad de una ecuación diferencial periódica con retardo puede determinarse a partir de dicha aproximación.



## **Abstract**

The delayed Hill equation is studied. In order to determine stability conditions a finite rank approximation of the monodromy operator is constructed by means of projections on spaces generated by linear combinations of piecewise constant orthonormal functions. It is shown that the stability of a periodic delay differential equation can be determined from said approximation.



# Contenido

<b>Lista de figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1 Motivación . . . . .	1
2 Objetivos . . . . .	2
2.1 Objetivo General . . . . .	2
2.2 Objetivos Particulares . . . . .	2
3 Contribuciones . . . . .	3
4 Publicaciones . . . . .	3
<b>2 Preliminares</b>	<b>5</b>
1 Elementos de Análisis Funcional . . . . .	5
1.1 Modos de convergencia . . . . .	6
1.2 Espacios $L^p$ . . . . .	6
1.3 Operadores lineales . . . . .	9
1.4 Convergencia de Secuencias de Operadores . . . . .	10

2	Ecuaciones Diferenciales Funcionales . . . . .	12
3	Ecuaciones Diferenciales Funcionales Periódicas . . . . .	13
3.1	Teoría de Floquet . . . . .	13
3.2	Ecuaciones Diferenciales Periódicas con Retardo . . . . .	16
3.2.1	El Operador de Monodromía . . . . .	18
3.2.2	Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales Periódicas con Retardo . . . . .	18
3.3	La Ecuación de Hill con Retardo . . . . .	19
3.3.1	La ecuación de Hill: Retardo vs No Retardo . . . . .	20
4	Funciones de Walsh . . . . .	21
4.1	Velocidad de Convergencia . . . . .	25
4.2	Convergencia en $L^2$ y $L^\infty$ . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Aproximación Numérica del Operador de Monodromía</b>	<b>33</b>
1	Discretización por Funciones de Walsh . . . . .	33
1.1	Aproximación por Integración de Soluciones . . . . .	33
1.2	Aproximación por el Método de Pasos . . . . .	37
1.2.1	Retardo Conmensurable . . . . .	37
1.2.2	Retardo No Conmensurable . . . . .	40
2	Aproximación mediante Funciones Constantes a Pedazos . . . . .	44
2.1	Aproximación de Rango Finito del Operador de Monodromía . . . . .	44
2.2	Funciones a Pulsos por Bloques (BPF) . . . . .	49
2.3	Aproximación por Funciones a Pulsos por Bloques (BPF) . . . . .	50
3	Convergencia de $\mathcal{U}_k$ . . . . .	52
3.1	Convergencia en $\mathcal{C}_\Delta$ . . . . .	52
3.2	Convergencia en $L_2$ . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Diagramas de Estabilidad de la Ecuación de Hill</b>	<b>63</b>

Contenido	<b>xi</b>
<hr/>	
1 Método de Integración de Soluciones . . . . .	64
2 Aproximación por el Método de Pasos . . . . .	66
<b>5 Aplicación de la Ecuación de Hill con Retardo</b>	<b>73</b>
<b>6 Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>7 Trabajo Futuro</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>



# Lista de figuras

2.1	Funciones de Walsh y Fourier . . . . .	23
2.2	Funciones de Walsh en orden diádico . . . . .	28
3.1	Block Pulse Functions. . . . .	49
4.1	Diagramas de estabilidad de la ecuación de Meissner con y sin retardo . . . .	64
4.2	Diagrama de estabilidad para la ecuación de Mathieu . . . . .	65
4.3	Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.4) . . . . .	66
4.4	Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.5) . . . . .	67
4.5	Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.6) . . . . .	68
4.6	Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.7) . . . . .	69
4.7	Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.8) . . . . .	70
4.8	Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.9) . . . . .	71
5.1	Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.9) . . . . .	74



# Lista de tablas

2.1	Propiedades de las ecuaciones diferenciales periódicas con retardo y sin retardo	20
2.2	Matriz y Operador de Monodromía . . . . .	21



# Lista de símbolos

$\mathcal{C}$   $\mathcal{C}_{[-h,0]}^n$ , el espacio de funciones continuas de  $[-h, 0]$  a  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{C}_{[a,b]}^n$  El espacio de funciones continuas de  $[a, b]$  a  $\mathbb{R}^n$

$U$  El operador de monodromía

## Otros Símbolos

$\oplus$  Suma directa

$\sigma(T)$  Espectro de T

## Acrónimos / Abreviaturas

*DDE* Ecuación Diferencial con Retardo

*RFDE* Ecuación Diferencial Funcional Retardada

*PDDE* Ecuación Diferencial Periódica con Retardo

*PDE* Ecuación Diferencial Periódica



# Capítulo 1

## Introducción

Las ecuaciones diferenciales periódicas con retardo han sido objeto de estudio desde mediados del siglo pasado [1–6]. Las similitudes a las ecuaciones diferenciales periódicas ordinarias llevan a buscar las razones y causas de estos comportamientos, sin embargo la naturaleza infinito dimensional inducida por el retardo presenta la mayor dificultad al tratar de adentrar en la naturaleza de estas ecuaciones.

En el caso sin retardo la estructura Hamiltoniana provee de bases para el estudio de las ecuaciones diferenciales periódicas, dicha estructura se pierde al introducir un término con retardo por lo que las opciones para obtener resultados analíticos son pocas. Muchos enfoques tratan el caso en el que el retardo es igual al periodo [6], sin embargo este caso no ofrece una buena perspectiva del caso general. Es común encontrar interesantes resultados analíticos [7, 4] que no son posibles de aplicar en el estudio de la ecuación de Hill con retardo. El enfoque convencional es el de aproximación del operador de monodromía [8–10], que puede ser basado en secuencias de operadores aproximados o en la teoría de perturbaciones de operadores en espacios de Banach.

### 1 Motivación

Las ecuaciones diferenciales periódicas tienen un gran número de aplicaciones [11] como el péndulo de Kapitza o la ecuación de Schrödinger de una dimensión con potencial periódico

en el tiempo. Cuando se considera que las interacciones físicas no ocurren instantáneamente empieza a ser necesario el considerar ecuaciones diferenciales con retardo.

La teoría de Floquet, que da las bases para el estudio de las ecuaciones diferenciales periódicas, sorprendentemente tiene una extensión válida para el caso de las ecuaciones diferenciales con retardo [2, 12]. Son debidas a esto las similitudes entre el caso con y sin retardo, sin embargo la dimensión de los eigenespacios asociados en los que la representación de Floquet es válida no es necesariamente igual al orden de la ecuación diferencial. Esto puede dar paso a dinámicas y comportamientos no observados, además de que la amortiguación que ocurre al introducir el término con retardo puede ser de gran interés para aplicaciones cotidianas.

A pesar de que existen diversos métodos para estimar la estabilidad de las ecuaciones diferenciales periódicas con retardo, existen comportamientos de la ecuación de Hill con retardo que no han sido reportados ni estudiados a fondo.

## 2 Objetivos

### 2.1 Objetivo General

Estudiar la ecuación de Hill con retardo para determinar características y condiciones de estabilidad con respecto al espacio de parámetros. Determinar cuales de estas propiedades son exclusivas del caso con retardo y cuales son similares al caso sin retardo.

### 2.2 Objetivos Particulares

- Determinar los diagramas de lenguas de Arnold para la ecuación de Hill con retardo.
- Elaborar programas para generar los diagramas del punto anterior.
- Para el caso dos dimensional, investigar el caso en el que los parámetros no sean simétricos.
- Averiguar cuando existe coexistencia.

### 3 Contribuciones

- Se construyó un método para aproximar una matriz de soluciones para construir por medio de integración numérica el operador de monodromía ([13]).
- Se construyó un método, basado en el método de pasos para obtener una aproximación finito dimensional del mapeo de solución y una aproximación finito dimensional del operador de monodromía.
- Se construye una forma general de la aproximación de una ecuación diferencial periódica con retardo, en términos de conjuntos de funciones ortonormales constantes a pedazos, por medio de la cuál se obtiene una aproximación de rango finito del mapeo de solución y del operador de monodromía ([14]).
- Se determinó que dichas aproximaciones son convergentes y pueden usarse para estudiar el espectro del operador de monodromía infinito dimensional.
- Se elaboraron algoritmos que construyen dicha aproximación y se generaron los diagramas de estabilidad para la ecuación de Hill con retardo, obteniendo comportamientos no reportados y exclusivos del caso con retardo.

### 4 Publicaciones

Las publicaciones obtenidas son:

- E. A. Vazquez and J. Collado, “Monodromy operator approximation of periodic delay differential equations by Walsh functions,” in *13th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*. IEEE, 2016

En esta publicación se describe el método de la Sección 1.1, en el cuál se construye una aproximación de una matriz de soluciones de una ecuación diferencial periódica con retardo, que posteriormente se integra numéricamente para obtener una aproximación del operador de monodromía.

- —, “Finite dimensional approximation of the monodromy operator of a periodic delay differential equation with piecewise constant orthonormal functions,” *Applied Mathematics*, no. 9, pp. 1315–1337, 2018

En esta publicación se describe el método de la Sección 2, en el cual se caracteriza el retardo como un operador en el espacio generado por combinaciones lineales de conjuntos de funciones constantes ortonormales a pedazos. Esta caracterización es usada para obtener una proyección de rango finito de la ecuación diferencial periódica con retardo que se usa para obtener una aproximación de rango finito del operador de monodromía.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 1 Elementos de Análisis Funcional

Sea  $X$  un espacio vectorial,  $X$  es un espacio normado si tiene una norma definido en él. Un espacio normado  $X$  es un espacio de Banach si es completo. Un espacio  $X$  se dice que es completo si toda secuencia de Cauchy es convergente en  $X$ .

Un espacio normado  $X$  es un espacio con producto interior o pre Hilbert si existe un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definido en  $X$ , un espacio de Hilbert es un espacio con producto interior completo en la norma inducida por el producto interno.

El espacio de las funciones continuas de  $[a, b]$  a  $\mathbb{R}^n$  denotado por  $\mathcal{C}_{[a,b]}^n$ , equipado con la norma  $\|x\| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$ , es un espacio de Banach [15].

Sea  $X$  un conjunto,  $X \neq \emptyset$ . Una  $\sigma$ -álgebra en  $X$  es una colección  $\mathcal{A}$  no vacía de subconjuntos  $A_i$  que satisfacen lo siguiente:

$$\text{i) } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \text{ si } A_i \in \mathcal{A}$$

$$\text{ii) } A^c \in \mathcal{A} \text{ si } A \in \mathcal{A}$$

Sea  $X$  un conjunto equipado con una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ . La función:

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \tag{2.1}$$

es una medida si

$$\text{i) } \mu(\emptyset) = 0$$

$$\text{ii) } \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Se dice entonces que  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  es un espacio de medida. Se dice también que  $X$  tiene la propiedad  $B$  casi en todas partes si  $X - E$  tiene la propiedad  $B$ , con  $\mu(E) = 0$ .

## 1.1 Modos de convergencia

Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  una secuencia de funciones. A continuación se enlistan algunos modos de convergencia [16].

- $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  converge uniformemente a  $f$  si y solo si para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$ , entonces  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , para todo  $x$  en  $\mathcal{A}$ .
- $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  converge puntualmente a  $f$  si y solo si para cada  $x \in \mathcal{A}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .
- Si  $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  es una secuencia de funciones medibles y  $f$  es medible ( $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ).  $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  converge a  $f$  casi en todas partes (c.t.p.) si  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $\forall x \in A : \mu(A^c) = 0$ .
- $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  converge a  $f$  casi uniformemente, si dado un  $\varepsilon > 0$  arbitrario  $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  converge uniformemente a  $f$ ,  $\forall x \in A : \mu(A^c) < \varepsilon$ .
- Si  $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  converge a  $f$  uniformemente, entonces  $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  converge a  $f$  puntualmente.
- Si  $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  converge a  $f$  casi uniformemente, entonces  $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  converge a  $f$  c.t.p.

**Definición 2.1.** [17] Una serie  $\sum_{\ell=1}^{\infty} x_{\ell}$ , se dice que converge incondicionalmente si todo ordenamiento de sus términos converge al mismo elemento.

## 1.2 Espacios $L^p$

Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Si  $f$  es una función medible en  $X$  y  $1 \leq p < \infty$ , se define:

$$\|f\|_p = \left[ \int |f|^p d\mu \right]^{1/p}, \quad (2.2)$$

y el espacio  $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  o simplemente  $L^p$ , como:

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \|f\|_p < \infty\}. \quad (2.3)$$

Para  $p = 2$  se tiene

$$L^2(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \|f\|_2 < \infty\}, \quad (2.4)$$

con

$$\|f\|_2 = \left[ \int |f|^2 d\mu \right]^{1/2}. \quad (2.5)$$

El espacio  $L^2$  es un espacio de Hilbert. [17].

**Teorema 2.2.** [16](Teorema de la convergencia dominada) Sea  $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$  una secuencia en  $L^1$  tal que

i)  $f_n \rightarrow f$  c.t.p.

ii) existe una función no negativa  $g \in L^1$  tal que  $|f_n| \leq g$  c.t.p.

para toda  $n$ . Entonces  $f \in L^1$  y  $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ .

Sea  $X$  un espacio métrico,  $M \subset X$ ,  $x \in X$  se dice punto de acumulación de  $M$  si toda vecindad abierta (en la topología inducida por la métrica) de  $x$  contiene al menos un punto de  $M$ . El conjunto de todos los puntos de acumulación de  $M$  se llama cerradura de  $M$  y se denota  $\bar{M}$ .

**Definición 2.3.** Un subconjunto  $M$  de un espacio métrico  $X$  se llama denso en  $X$  si:

$$\bar{M} = X.$$

**Teorema 2.4.** *El espacio  $\mathcal{C}_{[a,b]}$  es denso en  $L^2$ .*

*Prueba.* A demostrar que para toda  $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$  en  $L^2$  y para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe una función  $g \in \mathcal{C}_{[a,b]}$  tal que

$$\|f - g\|_2 = \left[ \int |f - g|^2 dx \right]^{1/2} < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Sea  $I$  un subconjunto cerrado  $[a, b]$  y  $K_I$  su función característica. Sea  $t(x) = \inf |x - y| (y \in I)$  y  $g_n(x) = 1/(1 + nt(x))$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Entonces  $g_n \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ ,  $g_n(x) \rightarrow 0$  en  $B = [a, b] - I$ . Por el teorema de la convergencia dominada, se sigue que

$$\|g_n - K_I\|_2 = \left[ \int (g_n(x))^2 dx \right]^{1/2} \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Entonces funciones características de conjuntos cerrados pueden ser aproximadas por funciones continuas en  $L^2$ , lo cual implica lo mismo para funciones medibles simples.  $\square$

**Teorema 2.5.** [15] *Todo subespacio de dimensión finita  $Y$  de un espacio normado  $X$  es cerrado en  $X$ .*

Sea  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_\ell, \dots\}$ . El conjunto generado por  $M$  o *span* es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de  $M$ .

**Definición 2.6.** *Un conjunto total o completo en un espacio normado  $X$  es un conjunto  $M \subset X$  cuyo conjunto generado es denso en  $X$ . Un conjunto ortonormal total o completo en un espacio con producto interno  $X$  es un subconjunto ortonormal  $M \in X$  cuyo conjunto generado o *span* es denso en  $X$ .*

Sea  $X$  un espacio de Banach, sea  $D \subset X$ ,  $D$  es *compacto* si y solo si cada cubierta abierta de  $D$  tiene una subcubierta finita.  $D$  es *relativamente compacto* si y solo si  $\bar{D}$  es compacto.  $D$  es *secuencialmente compacto* si y solo si cada secuencia en  $D$  tiene una subsecuencia convergente con límite en  $X$ .  $D$  es *precompacto* si para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $D$  tiene una cubierta finita con conjuntos de diámetro menor que  $\varepsilon$ .

**Lema 2.7.** [18] *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- i) *D es relativamente compacto,*
- ii) *D es secuencialmente compacto,*
- iii) *D es precompacto.*

**Lema 2.8.** *D es compacto si y solo si cada secuencia en D tiene una subsecuencia convergente con límite en D.*

### 1.3 Operadores lineales

**Definición 2.9** (Operador lineal acotado). *Sean X y Y espacios normados y sea  $T : \text{Dom}(T) \subset X \rightarrow Y$  un operador lineal, T se dice acotado si existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $x \in \text{Dom}(T)$ :*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|. \quad (2.8)$$

*El espacio de operadores lineales acotados se denota  $\mathcal{L}(X, Y)$ , o simplemente  $\mathcal{L}(X)$  si  $X = Y$ .*

**Teorema 2.10.** [19] *Sea X un espacio de Banach con  $\dim(X) \geq 3$ . Sea M un subespacio cerrado de X. Para cada espacio de Banach Y y para todo operador lineal acotado B que mapea M en Y existe un operador lineal acotado  $\hat{B}$  que mapea X en Y tal que  $Bx = \hat{B}x$  para todo  $x \in M$  y  $\|B\| = \|\hat{B}\|$  si y solo si X es un espacio de Hilbert.*

**Definición 2.11.** *Sean X y Y espacios normados. Un operador  $T : X \rightarrow Y$  es llamado un operador compacto si T es lineal y si para cada subconjunto acotado M de X, la imagen de TM es relativamente compacta, esto es la cerradura  $\overline{TM}$  es compacta.*

**Teorema 2.12.** [15] *Sea Z un espacio normado, Y un espacio de Banach y  $S \subset Z$  un subespacio lineal denso de Z, si  $T : S \rightarrow Y$  es un operador lineal, entonces T tiene una extensión única  $\hat{T}$ , donde  $\hat{T} \in \mathcal{L}(Z, Y)$  y  $\|T\| = \|\hat{T}\|$ .*

**Teorema 2.13.** [15] *Un operador lineal compacto  $T : X \rightarrow Y$  de un espacio normado X a un espacio de Banach Y tiene una extensión lineal compacta  $\hat{T} : \hat{X} \rightarrow Y$ , donde  $\hat{X}$  es la completación de X.*

Sea  $T \in \mathcal{L}(X)$ , entonces para cada  $z \in \mathcal{C}$ ,  $T - z \in \mathcal{L}$  donde  $z = zI$ , con I el operador identidad del espacio X. Se define:

- el conjunto resolvente,  $\rho(T) := \{z \in \mathbb{C} : \exists (T - z)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$ ,
- el operador resolvente  $R(T, z) := (T - z)^{-1}$  para  $z \in \rho(T)$ ,
- el espectro de  $T$ ,  $\sigma(T)$  es el complemento de  $\rho(T)$  en  $\mathbb{C}$ .

Al operador resolvente, o simplemente resolvente se le denota algunas veces como  $R(T, z) = (T - zI)^{-1}$ .

**Teorema 2.14.** [17] Si  $T$  es un operador compacto, su espectro es a lo más numerable y no tiene punto de acumulación en el plano complejo excepto posiblemente  $\lambda = 0$ . Cada  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $\lambda \neq 0$  es un eigenvalor de  $T$  y tiene multiplicidad geométrica finita  $v$ . Para cada  $\lambda$ , la proyección  $E(\lambda)$  es de dimensión finita distinta de 0, dada por:

$$E(\lambda)X = \{x; (T - \lambda I)^v x = 0\}$$

## 1.4 Convergencia de Secuencias de Operadores

Se listan a continuación diversos teoremas sobre la convergencia en espacios de Hilbert y Banach. Se usan  $X$  y  $Y$  para denotar espacios de Banach.

**Teorema 2.15.** [20] Sea  $\{\psi_n(x)\}$  un conjunto de funciones ortonormales uniformemente acotadas en el intervalo  $(0, 1)$ , y sea  $f(x)$  una función integrable, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \psi_n(x) dx = 0. \quad (2.9)$$

**Teorema 2.16.** [15] Sea  $\{T_n\}$  una secuencia de operadores lineales acotados  $T_n : X \rightarrow Y$  tal que  $\{\|T_n x\|\}$  es acotada para todo  $x \in X$ , es decir:

$$\|T_n x\| \leq c_x, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

donde  $c_x \in \mathbb{R}$  puede depender de  $x$ . Entonces la secuencia  $\{T_n\}$  esta acotada, es decir, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\|T_n\| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

**Definición 2.17.** Sea  $X$  un espacio de Banach, y sea una secuencia  $\{X_n\}$  de subespacios finito dimensionales de  $X$  tales que existe una secuencia de proyecciones  $\{\pi_n\}$  en  $X_n$ , que satisface

$\pi_n x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$  para todo  $x \in X$ . Dado  $D \subset X$ , sea  $D_n := \pi_n D$ , y sea  $\mathcal{T}_n : X_n \rightarrow X_n$  un operador lineal con dominio  $D_n$ . El operador  $T_n := \mathcal{T}_n \pi_n$  se dice de clase  $\mathcal{D}$ .

**Definición 2.18.** [18] La secuencia  $\{x_n\}$ ,  $x_n \in X$  es relativamente compacta en  $X$  si y solo si el conjunto de sus valores  $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n$  es relativamente compacto en  $X$ , esto es, si y solo si toda subsecuencia  $\{x_n\}_{N_1 \subset \mathbb{N}}$  tiene una subsecuencia convergente  $\{x_n\}_{N_2 \subset N_1}$ .

Sea la esfera unitaria de  $X$ ,  $B := \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ . Y sea  $\{T_n\}$  una secuencia de operadores en  $\mathcal{L}(X)$ , se definen los siguientes modos de convergencia:

- Convergencia *por puntos* o convergencia *fuerte*:  $T_n \xrightarrow{p} T$  si y solo si para todo  $x \in X$ ,  $T_n x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ .
- Convergencia *uniforme* si y solo si  $\|T - T_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .
- Convergencia *colectivamente compacta*:  $T_n \xrightarrow{cc}$  si y solo si:
  - i)  $T_n \xrightarrow{p} T$  y,
  - ii) el conjunto  $K := \bigcup_{n=1}^{\infty} (T - T_n)B$  es relativamente compacto en  $X$ .
- Convergencia *compacta* :  $T_n \xrightarrow{c} T$  si y solo si:
  - i)  $T_n \xrightarrow{p} T$ , y
  - ii) para toda secuencia  $\{x_n\} \in B$ , la secuencia  $\{(T - T_n)x_n\}$  es relativamente compacta en  $X$ .
- Convergencia *compacta - discreta*:  $T_n \xrightarrow{d-c} T$  para  $T_n = \mathcal{T}_n \pi_n$  de clase  $\mathcal{D}$  si y solo si:
  - i)  $T_n \xrightarrow{p} T$ , y
  - ii) para cualquier secuencia  $\{x_n\}$  tal que  $x_n \in X_n$ ,  $\|x_n\| \leq c$ , la secuencia  $\{(T - T_n)x_n\} = \{(T - \mathcal{T}_n)x_n\}$  es relativamente compacta en  $X$ .

**Teorema 2.19.** [18] Si  $T$  es compacto,  $T_n$  de clase  $\mathcal{D}$ , entonces  $T_n \xrightarrow{d-c} T$  implica  $T_n \xrightarrow{cc} T$ .

**Teorema 2.20.** [18] Sean  $T$  y  $T_n$  acotados, si  $T_n \xrightarrow{cc} T$ , entonces para cada  $z \in \rho(T)$  se tiene  $z \in \rho(T_n)$  para  $n$  suficientemente grande.

**Teorema 2.21.** *Una secuencia de operadores  $\{T_n\}$ ,  $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ , donde  $X$  y  $Y$  son espacios de Banach, converge fuertemente si y solo si:*

- i) *La secuencia  $\{\|T_n\|\}$  es acotada.*
- ii) *La secuencia  $\{T_n x\}$  es Cauchy en  $Y$  para todo  $x$  en un conjunto total en  $Y$ .*

## 2 Ecuaciones Diferenciales Funcionales

Sea  $h \geq 0$  un número real, sea  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{[-h, 0]}^n$  el espacio de funciones continuas de  $[-h, 0]$  a  $\mathbb{R}^n$ , espacio vectorial normado  $n$  dimensional. Equipado con la norma  $\|\varphi\| = \max_{-h \leq \theta \leq 0} \|\varphi(\theta)\|$ ,  $\mathcal{C}$  es un espacio de Banach [15]. Sea  $t_0, t_f \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 < t_f \leq \infty$ . Dada una función  $x(\cdot) \in \mathcal{C}_{[t_0-h, t_f]}^n$ , se define  $x_t \in \mathcal{C}$ , donde  $t \geq t_0$ , como  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$  con  $-h \leq \theta \leq 0$  [21]. Sea  $D \subset \mathcal{C} \times \mathbb{R}$ , y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función dada. La relación:

$$x_t'(0) = f(x_t, t), \quad (2.12)$$

donde  $x_t'(0)$  representa la derivada derecha de  $x_t$  en el tiempo  $\theta = 0$  es llamada una ecuación diferencial funcional retardada (RFDE). Dado  $\varphi \in \mathcal{C}$  para  $t = t_0$  se entiende por solución de (2.12) a una función continua definida para  $t \geq t_0$  que satisface (2.12) para todo  $t \geq t_0$  y con  $x_{t_0} = \varphi$ .

La ecuación (2.12) puede describir ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones con retardo y ecuaciones integrodiferenciales.

La ecuación (2.12) se dice lineal si  $f(\varphi, t) = L(\varphi)t + g(t)$  donde  $L(\varphi)$  es lineal, homogénea si  $g \equiv 0$ , no homogénea si  $g \not\equiv 0$ , y autónoma si  $f(\varphi, t) = f(\varphi)$ .

Se listan los siguientes enunciados, todos de [21]:

**Lema 2.22.** *Para  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}$  dados, y  $f(\varphi, t)$  continua, resolver (2.12) con condición inicial  $\varphi$  en  $t = t_0$  es equivalente a resolver la ecuación integral:*

$$x(t) = \varphi(0) + \int_{t_0}^t f(x_s, s) ds, \quad t \geq t_0 \quad (2.13)$$

$$x_{t_0} = \varphi$$

**Lema 2.23.** Si  $x \in \mathcal{C}_{[t_0-h, t_0+T]}^n$  entonces  $x_t$  es una función continua en  $t$  para  $t \in [t_0, t_0 + T]$ .

**Teorema 2.24.** Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathcal{C} \times \mathbb{R}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua con  $f(\varphi, t)$  Lipschitz en  $\varphi$  en cada conjunto compacto en  $\Omega$ . Si  $(\varphi, t_0) \in \Omega$ , entonces existe una solución única de la ecuación (2.12) con condición inicial  $\varphi$  en  $t = t_0$ .

### 3 Ecuaciones Diferenciales Funcionales Periódicas

#### 3.1 Teoría de Floquet

La teoría de Floquet para ecuaciones diferenciales periódicas puede ser extendida a ecuaciones funcionales periódicas, esta teoría fue desarrollada por Stokes[2].

Considérese la ecuación diferencial funcional retardada con coeficientes periódicos:

$$x_t'(0) = f(x_t, t), \quad (2.14)$$

donde  $f(\varphi, t)$  es lineal en  $\varphi$ , continua y periódica con periodo  $\omega$  en  $t$ . y  $\|f(\varphi, t)\| \leq L\|\varphi\|$ , para algún  $L > 0$  y para todo  $(\varphi, t) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}$ . Bajo estas condiciones, de acuerdo al Teorema 2.24, la ecuación (2.14) tiene una solución única  $x_t$ , para una condición inicial  $\varphi$  en  $t = t_0$ , que satisface (2.14) con  $x_{t_0} = \varphi$ , esta solución es denotada como  $x_t(\varphi, t_0)$ .

Defínase el mapeo  $U(t_0) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  como sigue:

$$U(t_0)\varphi = x_{t_0+\omega}(\varphi, t_0). \quad (2.15)$$

Se tiene de las propiedades de  $f$  en (2.14) que  $U(t_0)$  es lineal y continuo. Por lo tanto  $U(t_0)$  tiene las siguientes propiedades:

- i)  $\sigma(U(t_0))$  es a lo mas numerable y es un conjunto compacto del plano complejo  $\mathbb{C}$ .
- ii)  $0 \in \sigma(U(t_0))$  y si  $\lambda \in \sigma(U(t_0))$ ,  $\lambda \neq 0$ , entonces  $\lambda$  es un eigenvalor de  $U(t_0)$ .
- iii) Si la cardinalidad de  $\sigma(U(t_0))$  es infinita entonces 0 es el único punto de acumulación de  $\sigma(U(t_0))$ .
- iv) Dado  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in \sigma(U(t_0))$ , existen dos subespacios cerrados  $K(\lambda, t_0)$ ,  $E(\lambda, t_0)$  tales que  $\mathcal{C} = K(\lambda, t_0) \oplus E(\lambda, t_0)$ , con  $E(\lambda, t_0)$  de dimensión finita.

v) Tanto  $E(\lambda, t_0)$  como  $K(\lambda, t_0)$  son invariantes bajo  $U(t_0)$ , esto es,  $U(t_0)E(\lambda, t_0) \subset E(\lambda, t_0)$  y  $U(t_0)K(\lambda, t_0) \subset K(\lambda, t_0)$ . Además  $U(t_0)|_{K(\lambda, t_0)}$  es completamente continuo.

vi)  $\sigma(U(t_0)|_{K(\lambda, t_0)}) = \sigma(U(t_0)) \setminus \{\lambda\}$ .

Considérese  $E(\lambda, t_0)$  de dimensión  $d$  con una base dada por  $\{\psi_1, \dots, \psi_d\}$  con  $\Psi = [\psi_1, \dots, \psi_d]$ . Sea  $x_t(\Psi, t_0) = [x_t(\psi_1, t_0), \dots, x_t(\psi_d, t_0)]^T$ . Se tiene que el operador  $U(t_0)$  es invariante bajo  $E(\lambda, t_0)$ , por lo tanto  $U(t_0)|_{E(\lambda, t_0)}\Psi = U(t_0)\Psi$ . Ya que  $U(t_0)$  es un operador lineal, en el espacio de dimensión finita  $E(\lambda, t_0)$ , puede ser representado por medio de una matriz, esto es,  $U(t_0)\Psi = \Psi M$ , donde  $M$  es una matriz constante de dimensión  $d \times d$ . Se tiene que  $\sigma(M) \equiv \{\lambda\}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Sea  $B = \frac{1}{\omega} \log M$ ,  $B$  esta bien definida ya que  $M$  es no singular. Sea también  $P(t) = x_t(\Psi, t_0)e^{-Bt}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} P(t + \omega) &= x_{t+\omega}(\Psi, t_0)e^{-B(t+\omega)} \\ &= x_{t+\omega}(\Psi, t_0)e^{-B\omega}e^{Bt}, \end{aligned}$$

considerando que  $\Psi = x_{t_0}(\Psi, t_0)$  y que la solución de (2.14) en tiempo  $t + \omega$  con condición inicial  $\Psi$  en  $t_0$  es equivalente a la solución en tiempo  $t$  con condición inicial  $x_{t_0+\omega}(\Psi, t_0)$  en  $t_0 + \omega$  resulta:

$$P(t + \omega) = x_t(x_{t_0+\omega}(\Psi, t_0), t_0 + \omega)e^{-B\omega}e^{Bt}.$$

Debido a la periodicidad de (2.14) una solución con condición inicial  $\varphi$  en  $t_0$  es idéntica a la solución con condición inicial  $\varphi$  en  $t_0 + \omega$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(t + \omega) &= x_t(x_{t_0+\omega}(\Psi, t_0), t_0)e^{-B\omega}e^{Bt} \\ &= x_t(U(t_0)\Psi, t_0)e^{-B\omega}e^{Bt} \\ &= x_t(\Psi M, t_0)e^{-B\omega}e^{Bt}, \end{aligned}$$

y ya que la solución de (2.14) es lineal en  $\varphi$  se tiene:

$$\begin{aligned} P(t + \omega) &= x_t(\Psi, t_0)Me^{-B\omega}e^{Bt} \\ &= x_t(\Psi, t_0)e^{Bt} \\ &= P(t). \end{aligned}$$

Consecuencia de la linealidad de  $U(t_0)$ , también se tiene que si  $\varphi \in E(\lambda, t_0)$ , entonces  $\varphi = \sum_{i=1}^d c_i \psi_i = \Psi C$ , con  $C = [c_1, \dots, c_d]^T$ , por lo que nuevamente tomando en cuenta la linealidad de la solución se tiene  $x_t(\varphi, t_0) = x_t(\Psi, t_0)C$  para  $t \geq t_0$ . Lo anterior se traduce en el siguiente lema:

**Lema 2.25.** [2] Existe una matriz constante  $B \in \mathbb{C}^{d \times d}$  y sea  $P(t) = [p_1(t), \dots, p_d(t)]$ ,  $p_i \in \mathcal{C}$   $i = 1, \dots, d$ ,  $P(t + \omega) = P(t)$  tal que si  $\varphi \in E(\lambda, t_0)$ , entonces para  $t \geq t_0$ ,  $x_t(\varphi, t_0) = P(t)e^{Bt}C$  con  $\varphi = \Psi C$ . Más aún  $\sigma(B) = \left\{ \frac{1}{\omega} \log \lambda \right\}$ .

Se tiene que en general el eigenespacio  $E(\lambda, t_0)$  depende de  $t_0$ , sin embargo para  $\lambda$  se tiene el siguiente lema:

**Lema 2.26.** [2]  $\sigma(U(t_1)) = \sigma(U(t_2)) \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

El espectro del operador  $U(t_0)$  es independiente de  $t_0$ , tomamos entonces  $t_0 = 0$  y denotamos  $U(0) = U$ .  $U$  es llamado el *operador de monodromía*

Se tiene que para una condición inicial en los eigenespacios de  $U$  la solución de (2.14) admite una representación de Floquet. El siguiente teorema generaliza para una condición inicial arbitraria.

**Teorema 2.27.** [2] Sea la ecuación (2.14), con  $\sigma(U) = \{0\} \cup \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\lambda_i \neq 0$ . Sea  $P_n$  la proyección de  $\mathcal{C}$  en  $E(\lambda_i, t_0)$ , y sea  $\varphi \in \mathcal{C}$ :

- i) Si  $\sum_n P_n(\varphi)$  converge incondicionalmente con  $R(\varphi) = \varphi - \sum_n P_n(\varphi)$ , entonces el número de Lyapunov de  $\|x_t(R(\varphi), t_0)\|$  es  $+\infty$ ; esto es para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $e^{\alpha t} \|x_t(R(\varphi), t_0)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .
- ii) Si  $\sum_n P_n(\varphi)$  no está bien definida entonces para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$  existe  $N(\alpha)$  tal que para  $n \geq N$ , con  $R_n(\varphi) = \varphi - \sum_{i=1}^n P_i(\varphi)$ , el número de Lyapunov de  $\|x_t(R_n(\varphi), t_0)\|$  es mayor que  $\alpha$ , esto es,  $e^{\alpha t} \|x_t(R_n(\varphi), t_0)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

Los eigenvalores de la matriz de monodromía son llamados multiplicadores característicos, si  $\lambda$  es un multiplicador, entonces existe una solución del sistema tal que  $x(t + \omega) = \lambda x(t)$  y viceversa.

Con esto se tiene que la teoría de Floquet es válida asintóticamente para PFDEs.

### 3.2 Ecuaciones Diferenciales Periódicas con Retardo

Considérese la ecuación diferencial lineal con retardo:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau). \quad (2.16)$$

Junto con (2.16) considérese también el *sistema adjunto*:

$$\dot{y}(t) = -y(t)A(t) - y(t + \tau)B(t + \tau), \quad (2.17)$$

donde  $y(t)$  es un vector fila.

Sean  $x(t)$ ,  $y(t)$  que satisfacen (2.16) y (2.17) respectivamente, considérese el producto interior:

$$\langle x, y \rangle = y(t)x(t) + \int_0^\tau y(t+s)B(t+s)x(t+s-\tau)ds.$$

Considerando el cambio de variable  $\hat{s} = s + t$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x, y \rangle &= \dot{y}(t)x(t) + y(t)\dot{x}(t) + \frac{d}{dt} \int_t^{t+\tau} y(\hat{s})B(\hat{s})x(\hat{s}-\tau)d\hat{s} \\ &= -y(t)A(t)x(t) - y(t+\tau)B(t+\tau)x(t) + y(t)A(t)x(t) + y(t)B(t)x(t-\tau) \\ &\quad + y(t+\tau)B(t+\tau)x(t) - y(t)B(t)x(t-\tau) \\ &= 0, \end{aligned}$$

entonces  $\langle x, y \rangle$  es constante en las soluciones de (2.16) y por lo tanto una primera integral, se tiene entonces que para las soluciones de (2.16) es posible encontrar una solución explícita.

Sea  $Y(s, t)$  una matriz que satisface (2.17) para  $s < t$  con  $Y(t, t) = I$ , y  $Y(s, t) = 0$  para  $s > t$ . Esta matriz existe, y puede ser construida por el método de pasos, para  $t - \tau < s < t$  se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial s} Y(s, t) = -Y(s, t), \quad Y(t, t) = I;$$

esta ecuación matricial diferencial ordinaria tiene una solución  $Y_1(s, t)$ , en el intervalo  $(t - \tau, t]$ , para el intervalo  $(t - 2\tau, t - \tau]$  se tendrá:

$$\frac{\partial}{\partial s} Y_2(s, t) = -Y_2(s, t)A(s) - Y_1(s + \tau, t)B(s + \tau), \quad Y_2(t, t) = y_1(t + \tau, t);$$

esta ecuación tendrá nuevamente una solución  $Y_2(s, t)$ . Aplicando lo anterior sucesivamente se prueba la existencia de la solución  $Y(s, t)$  buscada.

De (2.16) se tiene:

$$\int_{t_0}^t Y(s, t) \dot{x}(s) ds = \int_{t_0}^t Y(s, t) A(s) x(s) ds + \int_{t_0}^t Y(s, t) B(s) x(s - \tau) ds,$$

lo que resulta:

$$\begin{aligned} x(t) = & Y(t_0, t)x(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} Y(s, t)x(s) ds + \int_{t_0}^t Y(s, t)A(s)x(s) ds \\ & + \int_{t_0}^t Y(s, t)B(s)x(s - \tau) ds, \end{aligned}$$

tomando en cuenta que  $Y(s, t)$  satisface (2.17) se tiene:

$$\begin{aligned} x(t) = & Y(t_0, t)x(t_0) - \int_{t_0 - \tau}^{t_0} Y(s + \tau, t)B(s + \tau)x(s) ds \\ & + \int_{t - \tau}^t Y(s + \tau)B(s + \tau)x(s) ds. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que  $Y(s + \tau, t) = 0$  para  $s \in (t - \tau, t]$  resulta:

$$x(t) = Y(t_0, t)x(t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} Y(s + \tau, t)B(s + \tau, t)x(s) ds.$$

Recordando que (2.17) es el problema adjunto a (2.16) entonces si  $X(t, t_0)$  es una solución de (2.16) que satisface  $X(t_0, t_0) = E$ ,  $X(t, t_0) = 0$  para  $t < t_0$  entonces  $X(t, t_0) = Y(t_0, t)$  y se tiene lo siguiente:

**Teorema 2.28.** [22] Sea  $X(t, t_0)$  una matriz que satisface (2.16) con  $X(t, t_0) = I$ ,  $X(t, t_0) \equiv 0$  para  $t < t_0$ , entonces toda solución de (2.16) con condición inicial  $\varphi$  en  $t_0$  tendrá la forma:

$$x(t) = X(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(t, s + \tau)B(s + \tau)x(s)ds. \quad (2.18)$$

La fórmula (2.18) es un análogo de la fórmula de variación de parámetros de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias.

### 3.2.1 El Operador de Monodromía

Considérese la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \tau, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde  $A(t) = A(t + \omega)$ ,  $B(t) = B(t + \omega)$  son funciones continuas a pedazos. Teniendo en cuenta el operador de monodromía definido en (2.15) y la solución general (2.18) se tiene:

$$\begin{aligned} U\varphi &= X(\theta, 0)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 X(\theta, s + \tau)B(s + \tau)\varphi(s)ds, \\ \theta &\in [0, \omega]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) es la forma explícita del operador de monodromía para ecuaciones de la forma (2.19).

### 3.2.2 Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales Periódicas con Retardo

En el teorema 2.27 se evidencia la relación de los multiplicadores de  $U$  con la estabilidad de las PDDEs, en particular se tiene:

**Teorema 2.29.** [22] Si la solución trivial de (2.19) es uniformemente estable, entonces los multiplicadores del sistema están en  $\{\lambda, |\lambda| \leq 1\}$  y a multiplicadores situados en la circunferencia unitaria corresponden divisores elementales simples. Si la solución trivial es uniformemente asintóticamente estable, entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que los multiplicadores del sistema están situados en el círculo  $\{\lambda, |\lambda| \leq 1 - \varepsilon\}$ . Recíprocamente, si los multiplicadores están situados en

el círculo  $\{\lambda, \|\lambda\| < 1\}$ , la solución trivial del sistema (2.19) es uniformemente asintóticamente estable. Si los multiplicadores del sistema están dentro del círculo unitario y a los multiplicadores situados en la circunferencia unitaria corresponden divisores elementales simples, la solución trivial es uniformemente estable.

### 3.3 La Ecuación de Hill con Retardo

Considérese la ecuación de Hill escalar:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + q(t)x(t) = 0, \quad (2.21)$$

donde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}$ , y  $q(t)$  es una función continua por partes periódica con periodo mínimo  $\omega$ . En forma de operador tenemos:

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + q(t) \right\} x(t) = 0.$$

El operador  $\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + q(t) \right\}$  opera sobre el espacio de estados  $\mathbb{R}^n$ . Extendiendo el operador a  $\mathcal{C}$  para  $x_t \in \mathcal{C}$ , con  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $-\omega \leq \theta \leq 0$ , y denotando  $\left( \frac{d^2}{dt^2} \right)^+$  como la derivada por la derecha de  $x_t(\theta)$  en  $\theta = 0$ , se tiene:

$$\left\{ \left( \frac{d^2}{dt^2} \right)^+ + q(t) \right\} x_t = 0. \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) puede verse como la versión funcional de la ecuación de Hill y se tiene que la excitación periódica opera sobre el estado  $x_t(\theta)$  a lo largo de el intervalo  $[-\omega, 0]$ . En base a esto, para el caso de ecuaciones con retardo, se propone la siguiente forma general para la ecuación de Hill con retardo:

$$\ddot{x}(t) + q_1(t)x(t) = q_2(t)x(t - \tau). \quad (2.23)$$

Considerando (2.23) se estudian tres formas de la ecuación de Mathieu con retardo:

i)

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t)x(t) = \delta x(t - \tau) \quad (2.24)$$

ii)

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t)x(t) = \gamma \cos t x(t - \tau) \quad (2.25)$$

iii)

$$\ddot{x} + \alpha x(t) = (\delta + \gamma \cos t)x(t - \tau) \quad (2.26)$$

### 3.3.1 La ecuación de Hill: Retardo vs No Retardo

Consecuencia de la compacidad del operador de solución, las ecuaciones diferenciales periódicas con retardo poseen cualidades análogas al caso sin retardo. En las tablas 2.1 2.2 se muestran las analogías entre las propiedades de los dos tipos de ecuaciones. La naturaleza infinito dimensional de las PDDEs hace que el estado para un tiempo  $t$  deba ser considerado como una función y no como un vector constante. La existencia de un operador continuo que mapea la condición inicial en el tiempo  $t_0$  a la solución de la ecuación respectiva en un tiempo  $t$  y la independencia del espectro de dicho operador con respecto al tiempo inicial  $t_0$  es lo que marca la similitud entre PODE y PDDE.

Tabla 2.1 Propiedades de las ecuaciones diferenciales periódicas con retardo y sin retardo

	PODE	PDDE
Estado	$x(t) \in \mathbb{R}^n$	$x_t(\theta) \in \mathcal{C}, \theta \in [-\tau, 0]$
Condición inicial	$x(0)$	$x_0(\theta), \theta \in [-\tau, 0]$
Mapeo de solución	$x(t_0 + \omega) = \Phi(t_0 + \omega, t_0)x(t_0)$ $\sigma(\Phi(t_0 + \omega, t_0)) =$ $\sigma(\Phi(t_1 + \omega, t_1))$	$x_{t_0+\omega}(\theta) = U(t_0 + \omega, t_0)\varphi(\theta)$ $\sigma(U(t_0 + \omega, t_0)) =$ $\sigma(U(t_1 + \omega, t_1))$

Paralelamente al caso de la matriz de monodromía y las ecuaciones diferenciales periódicas, el espectro del operador de monodromía determina la estabilidad de una ecuación diferencial periódica con retardo, sin embargo, ya que para una condición inicial fija una ecuación diferencial con retardo es equivalente a una ecuación diferencial ordinaria generalmente con

amortiguamiento [1], la estabilidad en el caso de las PDDEs será generalmente del tipo asintótico.

Tabla 2.2 Matriz y Operador de Monodromía

PODE	PDDE
Matriz de Monodromía	Operador de Monodromía
$\Phi(\omega, 0) = M$	$U(\omega, 0) = U$
$M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	$U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$

Otra diferencia importante es la ausencia de estructura simpléctica en el operador de monodromía, naturalmente al tener estabilidad asintótica no es posible tener simetría con respecto a la circunferencia unitaria.

## 4 Funciones de Walsh

Las funciones de Walsh son un conjunto de funciones ortonormales completas [20] definidas en el intervalo  $(0, 1)$ , completión de las funciones de Rademacher, están dadas por:

$$\begin{aligned}
 w_0(t) &= 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \\
 w_1(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases} \\
 w_2^{(1)}(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \frac{3}{4} < t \leq 1, \\ -1, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{4}, \end{cases} \\
 w_2^{(2)}(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4} \\ -1, & \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}, \frac{3}{4} < t \leq 1, \end{cases} \\
 &\vdots \\
 w_{n+1}^{(2k-1)}(t) &= \begin{cases} w_n^{(k)}(2t) & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ (-1)^{k+1} w_n^{(k)}(2t-1), & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases} \\
 w_{n+1}^{(2k)}(t) &= \begin{cases} w_n^{(k)}(2t) & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ (-1)^k w_n^{(k)}(2t-1), & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases} \\
 &k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Con el uso de funciones de Rademacher, la  $\ell$ -ésima función de Walsh puede ser definida como [23]:

$$w_\ell(t) = \prod_{i=0}^k [\text{sign}(\sin 2^{i-1} \pi t)]^{\varepsilon_i}, \quad (2.28)$$

donde los  $\varepsilon_i$  son los coeficientes de la expansión binaria de  $\ell$ , es decir:

$$\ell = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i 2^i, \text{ with } \varepsilon_i \in \{0, 1\} \quad (2.29)$$

Las funciones de Walsh poseen gran paralelismo con las funciones de Fourier, cualidades como que cada función es ya sea par o impar respecto al punto medio del intervalo de definición, el hecho de que ninguna función es idénticamente cero en ningún intervalo, el número de cruces por cero de la  $n$ -ésima función y el acotamiento uniforme, son algunas características que ambos conjuntos 2.27 comparten. En la Fig. 2.1 se pueden observar claramente estas similitudes.

En un punto de discontinuidad, estas funciones se definen como el promedio de los límites de ambos lados de la discontinuidad. En  $x = 0$  toman como valor 1 y en  $x = 1$  el valor  $(-1)^{k+1}$ . Para extender las funciones a múltiples intervalos de longitud 1 es necesario cambiar las definiciones en  $x = 0$  y  $x = 1$  de forma que el valor de  $w_n^{(k)}$  sea el promedio de los límites por la derecha y por la izquierda en estos puntos.

Se numeran las funciones  $w_n^{(k)}$  de acuerdo con el número de cruces por cero como  $w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots$ . Al ser ortogonales se tiene:

$$\int_0^1 w_n(t) w_m(t) dt = 0$$

si  $n \neq m, n, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Es además fácil ver que:

$$|w_n(t)| = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

excepto en un número finito de puntos.

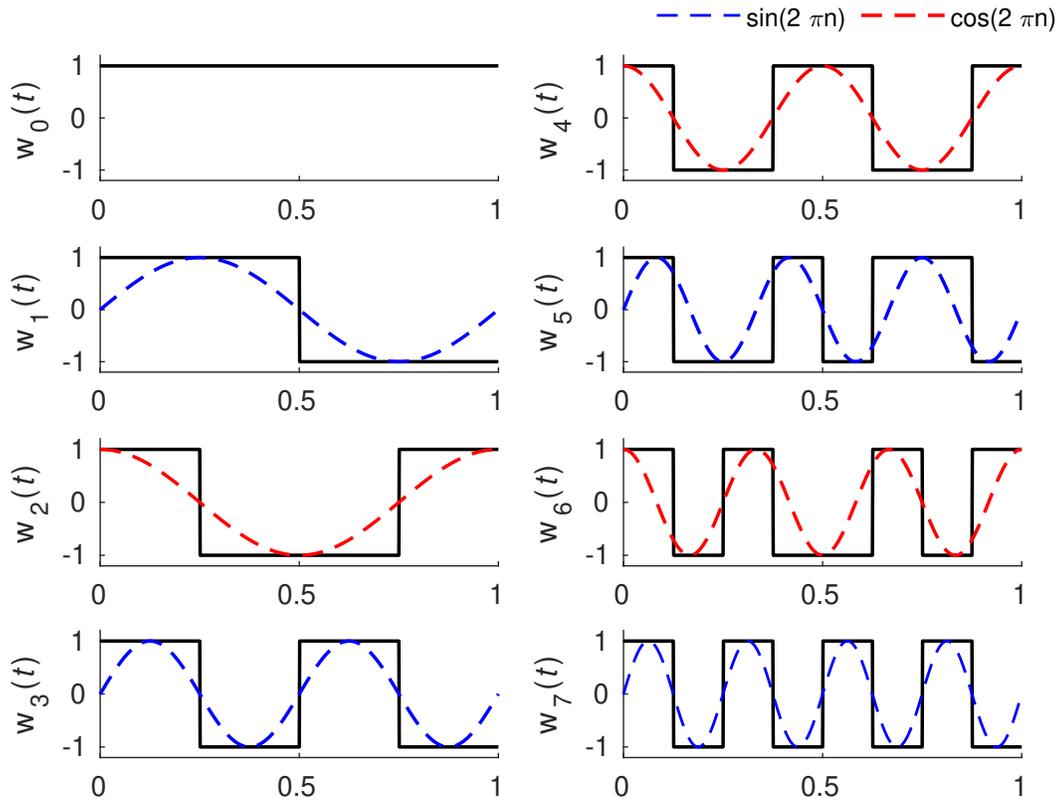


Fig. 2.1 Comparación entre funciones de Walsh y Fourier

Sea  $f(t)$  una función integrable en el sentido de Lebesgue en  $(0, 1)$ . La serie de Walsh asociada con  $f$  esta dada por:

$$f(t) = c_0 w_0(t) + c_1 w_1(t) + \cdots + c_n w_n(t) + \dots, \quad (2.30)$$

donde:

$$c_i = \int_0^1 f(s) w_i(s) ds, \quad i = 0, 1, \dots, n, \dots \quad (2.31)$$

Sobre la convergencia de (2.30) se tienen algunos teoremas:

**Teorema 2.30.** [20] Si  $f(t)$  es continua en el intervalo  $(0, 1)$  entonces la serie (2.30) converge uniformemente a  $f(t)$  si los términos están agrupados de tal forma que cada grupo contenga todos los  $2^{n-1}$  términos del conjunto  $w_n^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ .

**Teorema 2.31.** [20] Si  $f(t)$  es una función integrable y si  $\lim_{t=a} f(t)$  existe para un punto  $a$ , entonces cuando los términos de (2.30) están agrupados como en el Teorema 2.30, entonces la serie converge para  $t = a$  al valor de  $\lim_{t=a} f(t)$ . Si  $f(t)$  es continua en y en una vecindad de  $a$ , entonces esta convergencia es uniforme en una vecindad de  $a$ .

Si  $f(t)$  es una función integrable y si los límites  $f^-(a)$  y  $f^+(a)$  existen para un punto  $a$  racional diádico, es decir para un número de la forma  $\frac{2}{q^n}$  con  $q \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces la serie con los términos agrupados converge para  $t = a$  al valor  $\frac{1}{2}[f^+(a) + f^-(a)]$ ; esta convergencia es uniforme en la vecindad de  $t = a$  si  $f(t)$  es continua en dos intervalos desde  $a$  en ambas direcciones.

Se tiene entonces que una función continua o con discontinuidades en racionales diádicos puede ser representada, tan cercanamente como se desee, por una combinación lineal de las funciones de Walsh, siempre que se tome un número de  $2^k$  funciones.

La agrupación de funciones de Walsh descrita en los teoremas anteriores puede dejar de ser conveniente y es necesario estudiar la convergencia de (2.30) cuando los términos no están agrupados. Sobre la convergencia en este caso se enuncian algunos resultados.

**Teorema 2.32.** [20] Si  $f(t)$  es de variación acotada en  $0 \leq t \leq 1$ . Entonces la serie (2.30) converge al valor de  $f(t)$  todo punto en el que  $f^+(a) = f^-(a)$  y en cada punto en el que  $t = a$  sea racional diádico. Esta convergencia es uniforme en la vecindad de  $t = a$  en cada uno de los casos si  $f(t)$  es continua en dos intervalos desde y a cada lado de  $a$ .

Consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene:

**Teorema 2.33.** [20] [24]

- i) Si  $f(t)$  es una función integrable en el sentido de Lebesgue, entonces la convergencia o divergencia de la serie en un punto (2.30) depende solamente de ese punto y del comportamiento de la función en una vecindad de ese punto. Si en particular  $f(t)$  es de variación acotada en la vecindad de un punto  $t = a$ , y si  $a$  es un racional diádico o si  $f^+(a) = f^-(a)$  entonces la serie (2.30) converge para  $t = a$  al valor  $\frac{1}{2}(f^+(a) + f^-(a))$ . Si  $f(t)$  no solo es de variación acotada si no es también continua en dos intervalos a cada

lado de  $a$ , y si  $a$  es un racional diádico o si  $f^+(a) = f^-(a)$  entonces la convergencia es uniforme en la vecindad de  $a$ .

ii) Si  $f(t)$  es de variación acotada y  $a$  es un punto de discontinuidad y no es racional diádico, entonces (2.30) diverge.

Para las series de Fourier, las condiciones de Dirichlet establecen condiciones suficientes para la convergencia en un punto de discontinuidad. De ii) se observa una de las diferencias importantes entre las funciones de Fourier y las funciones de Walsh al no existir un análogo al Teorema de Dirichlet.

Al igual que en el caso de las funciones de Fourier no se tiene convergencia uniforme de la serie (2.30) para toda función continua:

**Teorema 2.34.** [20] *Para cualquier punto  $a$ , existe una función continua cuya serie (2.30) no converge a  $f(t)$  en  $t = a$ .*

Finalmente sobre la unicidad de la expansión (2.30) se tiene:

**Teorema 2.35.** [20] *Si la serie:*

$$\alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n + \dots$$

*converge a cero uniformemente en  $[0, 1]$  excepto en la vecindad de un número finito de puntos entonces  $0 = \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = \dots$*

## 4.1 Velocidad de Convergencia

La velocidad de convergencia de las aproximaciones por funciones de Walsh es similar en algunos casos a las aproximaciones por series de Fourier. Para los siguientes teoremas se considera una función  $f(t)$  integrable en  $[0, 1]$  con la serie asociada de Walsh:

$$f(t) \sim c_0 w_0 + c_1 w_1 + \dots c_n w_n + \dots$$

**Teorema 2.36.** [24] Sea

$$\omega(\delta, f) = \sup_{|h| \leq \delta, 0 \leq t \leq 1} |f(t+h) - f(t)|,$$

$$\omega_1(\delta, f) = \sup_{|h| \leq \delta} \int_0^1 |f(t+h) - f(t)| dt.$$

Entonces para  $k > 0$ :

- i)  $|c_k| \leq \frac{1}{2} \omega\left(\frac{1}{k}, f\right)$ ,
- ii)  $|c_k| \leq \omega_1\left(\frac{1}{k}, f\right)$ .

En particular se tiene:

**Teorema 2.37.** [24] Si  $f(t)$  satisface una condición de Lipschitz de orden  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , entonces  $c_k = O(k^{-\alpha})$ .

**Teorema 2.38.** [24] Si  $f(t)$  es de variación acotada, y si  $V$  es su variación total en  $(0, 1)$ , entonces  $|c_k| \leq \frac{V}{k}$  para  $k > 0$ .

Para una función  $f(t)$ ,  $m$  veces diferenciable se tiene que sus coeficientes de Fourier  $b_k$  satisfacen  $b_k = O(k^{-m})$ , esto es, la velocidad de convergencia mejora con la diferenciable de las funciones. En la expansión por series de Walsh esto no es posible, en efecto se tiene:

**Teorema 2.39.** [24] Las únicas funciones absolutamente continuas cuyos coeficientes de Walsh satisfacen  $c_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$  son las funciones constantes.

En particular, con respecto al error de convergencia de las aproximaciones de Walsh se tiene:

**Lema 2.40.** [23] Si  $f$  satisface la condición de Lipschitz, entonces:

$$E_k = \left\| \sum_{i=0}^{p=2^k} c_i w_i(t) - f(t) \right\|_{\infty} \leq C 2^{-k}, \quad (2.32)$$

para alguna constante  $C$ .

## 4.2 Convergencia en $L^2$ y $L^\infty$

**Teorema 2.41.** [25] *La serie de Walsh de cualquier función  $f \in L^2_{(0,1)}$  converge casi en todas partes.*

Ya que  $\mathcal{C}_{(0,1)} \in L^2_{(0,1)}$  se tiene que la serie de Walsh de toda función continua en  $\mathcal{C}_{(0,1)}$  converge casi en todas partes.

En el siguiente Teorema se demuestra la convergencia en  $L^2$  de las series de Walsh.

**Teorema 2.42.** *Sea  $f \in L^2(0, 1)$ , y sea  $S_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i w_i(t)$ , con  $c_i = \int_0^1 f(t) w_i(t) dt$ , entonces:*

$$\int_0^1 |(f(t) - S_n(t))|^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Definición 2.43.** [24] *Se dice que una función escalar continua y periódica  $f$  tiene módulo de continuidad  $\omega(\delta, f)$  si:*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(\delta, f), \quad \text{para todo } |x_1 - x_2| \leq \delta.$$

Sobre la convergencia uniforme de las series de Walsh se tienen lo siguiente:

**Teorema 2.44.** [24] *Sea  $c_k$  de variación acotada, esto es:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i - c_{i+1} < \infty,$$

y sea  $c_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ , entonces  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i w_i(t)$  converge uniformemente en  $0 < t < 1$ .

**Teorema 2.45** (Dini-Lipschitz). [24] *Si  $f(t)$  es continua, y si su módulo de continuidad satisface  $\omega(\delta, f) = o(\log \delta^{-1})^{-1}$ , entonces su serie de Walsh converge a  $f(t)$  uniformemente.*

**Teorema 2.46.** *Si  $f(t) \in \text{Lip } \alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , entonces su serie de Walsh converge a  $f(t)$  uniformemente.*

Existen muchas formas de ordenar las funciones de Walsh. A partir de este punto se usará el llamado orden diádico [26], la Figura 2.2 muestra las primeras funciones de Walsh en dicho orden.

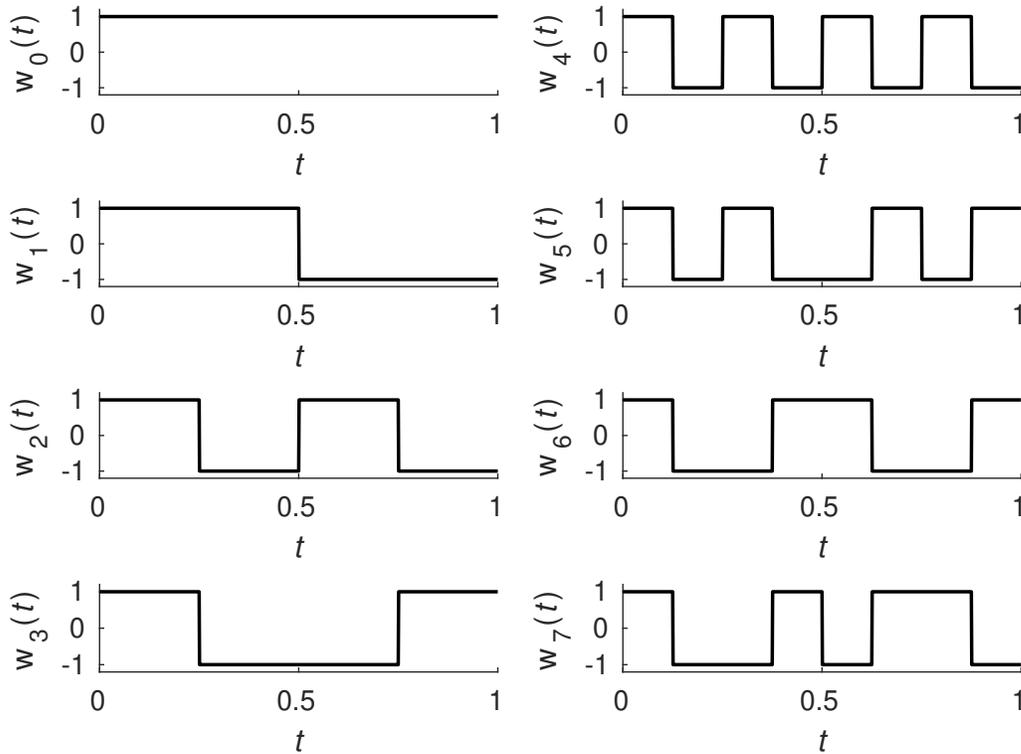


Fig. 2.2 Funciones de Walsh en orden diádico

Se define el vector de las primeras  $2^k$  funciones de Walsh como:

$$\bar{w}_k(t) = [w_0(t) w_1(t) \dots w_{2^k-1}(t)]^T. \quad (2.33)$$

donde  $k \in \mathbb{N}$  y  $w_i$  representa a la  $i$ -ésima función de Walsh en orden diádico. Una función integrable  $f$  definida en el intervalo  $(0, 1)$  se aproxima como:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{2^k-1} c_i w_i(t) = c^T \bar{w}(t), \quad (2.34)$$

con  $c_i = \int_0^1 f(t) w_i(t) dt$ .

A un vector  $\sigma = [\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{2^k-1}]^T$  se asocia la matriz simétrica de dimensión  $2^k \times 2^k$ , denotada como  $\Lambda(\sigma)$ , cuya  $i, j$ -ésima entrada estará dada por  $\sigma_{i-1 \oplus j-1}$ . Si por ejemplo  $\sigma = [\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3]^T$ , entonces:

$$\Lambda(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_3 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_0 & \sigma_1 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_0 \end{bmatrix}.$$

donde  $\oplus$  denota la suma diádica dada por:

$$q \oplus r = \sum_{\ell=0}^k 2^\ell |q_\ell - r_\ell|,$$

donde  $q_\ell, r_\ell$  son respectivamente los coeficientes de la expansión binaria de  $q$  y  $r$  como en (2.29).

Sobre este operador se tiene:

**Lema 2.47.** [27] Sea  $\sigma \in \mathbb{R}^{2^k}$ , entonces:

$$\bar{w}(t) \bar{w}^T(t) \sigma = \Lambda(\sigma) \bar{w}(t). \quad (2.35)$$

Se define la matriz de Walsh  $W[k]$  como una matriz de dimensión  $2^k \times 2^k$ , compuesta por los valores de la discretización de las funciones de Walsh en orden diádico en el intervalo  $[0, 1]$ . Por ejemplo, para  $k = 3$  se tiene:

$$W[8] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se definen también la matriz de Walsh con retardo  $W[k, -m]$  como la matriz de Walsh  $W[k]$  desplazada  $m$  columnas a la derecha y con ceros en las primeras  $m$  columnas igual a 0. Para  $k = 3$  se tiene:

$$W[8, -3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Asimismo se define la matriz de Walsh en adelante  $W[k, +k]$  como la matriz de Walsh desplazada  $m$  columnas a la izquierda, y con ceros en las últimas  $m$  columnas.

$$W[8, +3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De esto último se puede ver que si  $\omega = 1$ , el el retardo de una aproximación de Walsh puede expresarse como un mapeo lineal de la aproximación sin retardo. Sobre las matrices de Walsh se tiene el siguiente lema:

**Lema 2.48.** [28] Sea  $S(t)$  la función escalón unitario dada por:

$$S(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0, \end{cases}$$

entonces:

$$w\left(t - \frac{m}{2^k}\right) S\left(t - \frac{m}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k} W[k, -m] W[k] w(t).$$

La integral de un vector Walsh puede ser aproximada por una expansión de Walsh de la forma:

$$\int_0^t \bar{w}(s) ds = P \bar{w}(t), \quad (2.36)$$

en particular se tiene:

**Lema 2.49.** [24] Sea  $k \in \mathbb{N}$ , y sea

$$P = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & & & & \\ \hline -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} I_2 & \dots & & & \\ \hline & \frac{1}{8} I_2 & 0_2 & & -\frac{1}{2^{i+1}} I_{2^{k-1}} & \dots & \\ \hline & \vdots & \ddots & & & & -\frac{1}{2^k} I_{2^{k-2}} \\ \hline & & \frac{1}{2^{k+1}} I_{2^{k-1}} & & 0_{2^{k-1}} & & -\frac{1}{2^{k+1}} I_{2^{k-1}} \\ \hline & & \vdots & & \ddots & & \\ \hline & & & \frac{1}{2^k} I_{2^{k-2}} & & & 0_{2^{k-2}} \\ \hline & & & & \frac{1}{2^{k+1}} I_{2^{k-1}} & & 0_{2^{k-1}} \end{array} \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

entonces  $Pw(t)$  converge uniformemente a  $\int_0^1 w(t) dt$  cuando  $q \rightarrow \infty$

A una función matricial  $A(t)$  se le asocia la aproximación de Walsh  $\hat{A}(t)$ :

$$\hat{A}(t) = \alpha \Omega(t), \quad (2.38)$$

donde

$$\alpha = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{11}^T & \bar{\alpha}_{12}^T & \dots & \bar{\alpha}_{1n}^T \\ \bar{\alpha}_{21}^T & \bar{\alpha}_{22}^T & \dots & \bar{\alpha}_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\alpha}_{n1}^T & \bar{\alpha}_{n2}^T & \dots & \bar{\alpha}_{nn}^T \end{bmatrix}, \quad \Omega(t) = \begin{bmatrix} \bar{w}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{w}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{w}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

y cada  $\bar{\alpha}_{i,j}$  es el vector de coeficientes de la aproximación de Walsh de cada entrada de  $A(t)$ .

Sea  $A(t)$  una función matricial de tamaño  $n \times n$  con aproximación de Walsh  $\hat{A}(t)$  y  $f(t)$  una función vectorial con aproximación  $\hat{f}(t)$ , cuyos elementos son de la forma  $f_i(t) = h_i^T \bar{w}(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  donde  $h_i \in \mathbb{R}^{2^k}$  es el vector de coeficientes de Walsh de la aproximación de cada elemento de  $f$ . Defínase  $H = \begin{bmatrix} h_1^T & \cdots & h_n^T \end{bmatrix}^T$ , entones de (2.35) tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{A}(t)\hat{f}(t) &= \alpha \Omega(t) \begin{bmatrix} \bar{w}^T(t)h_1 \\ \bar{w}^T(t)h_2 \\ \vdots \\ \bar{w}^T(t)h_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \bar{w}(t)\bar{w}^T(t)h_1 \\ \bar{w}(t)\bar{w}^T(t)h_2 \\ \vdots \\ \bar{w}(t)\bar{w}^T(t)h_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^n (h_r^T \bar{w}(t)\bar{w}^T(t)\bar{\alpha}_{1,r})^T \\ \sum_{r=1}^n (h_r^T \bar{w}(t)\bar{w}^T(t)\bar{\alpha}_{2,r})^T \\ \vdots \\ \sum_{r=1}^n (h_r^T \bar{w}(t)\bar{w}^T(t)\bar{\alpha}_{n,r})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^n \bar{w}^T(t)\Lambda(\bar{\alpha}_{1,r})h_r \\ \sum_{r=1}^n \bar{w}^T(t)\Lambda(\bar{\alpha}_{2,r})h_r \\ \vdots \\ \sum_{r=1}^n \bar{w}^T(t)\Lambda(\bar{\alpha}_{n,r})h_r \end{bmatrix} \\ &= \Omega^T(t)\bar{\Lambda}(\alpha)H, \end{aligned} \tag{2.40}$$

donde:

$$\bar{\Lambda}(\alpha) = \begin{bmatrix} \Lambda(\bar{\alpha}_{11}) & \Lambda(\bar{\alpha}_{12}) & \cdots & \Lambda(\bar{\alpha}_{1n}) \\ \Lambda(\bar{\alpha}_{21}) & \Lambda(\bar{\alpha}_{22}) & \cdots & \Lambda(\bar{\alpha}_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda(\bar{\alpha}_{n1}) & \Lambda(\bar{\alpha}_{n2}) & \cdots & \Lambda(\bar{\alpha}_{nn}) \end{bmatrix}. \tag{2.41}$$

# Capítulo 3

## Aproximación Numérica del Operador de Monodromía

### 1 Discretización por Funciones de Walsh

Sea:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $A(t)$ ,  $B(t)$  son funciones continuas a pedazos y periódicas con periodo  $\omega > 0$ ,  $0 < \tau \leq \omega$ . De acuerdo al Lema 2.22 resolver (3.1) es equivalente a resolver:

$$x(t) - \varphi(0) = \int_0^t A(s)x(s)ds + \int_0^t B(s)x(s - \tau)ds. \quad (3.2)$$

#### 1.1 Aproximación del Operador de Monodromía por Integración de Soluciones

En este método se emplea el método de aproximación de soluciones de una DDE mediante aproximaciones de Walsh propuesto en [28] para obtener soluciones independientes con las cuales se aproxima el operador (2.20). En [10] se propone un método similar en el que las

soluciones aproximadas se obtienen por medio de colocación pseudoespectral, método por el cual una función evaluada en un intervalo se aproxima por una suma de polinomios u otras funciones que se hace coincidir con la función en determinados puntos en el intervalo.

Considérese (3.2), sin pérdida de generalidad se toma  $\omega = 1$ , para el retardo se restringe a aquellos de la forma  $\tau = \frac{m}{2^k}$ , con  $k \in \mathbb{N}$ .

Sea la expansión de Walsh para  $A(t)$  dadas por (2.38):

$$\hat{A}(t) = \alpha \Omega(t), \quad (3.3)$$

similarmente sea:

$$\hat{B}(t) = \beta \Omega(t). \quad (3.4)$$

Tomando (3.2) con una condición inicial  $\varphi(\theta) = 0$  para  $-\tau \leq \theta < 0$  se tendrá:

$$x(t) - x(t_0) = \int_0^t A(s)x(s) ds + \int_0^t B(s)x(s-\tau)S(t-\tau) ds.$$

Denotando  $H = [h_1 \ \cdots \ h_n]^T$  como la matriz compuesta de vectores de coeficientes de Walsh correspondientes a cada elemento de  $x(t)$  se tendrá la siguiente aproximación:

$$H\varphi(t) - [x(t_0)0_{2,2^k-1}] w(t) = \int_0^t \alpha \Omega(s) H w(s) ds + \int_0^t \beta \Omega(s) H \frac{1}{2^k} W[k][k; -m] W w(s) ds. \quad (3.5)$$

De (2.35) se tiene:

$$\alpha \Omega(t) H w(t) = \alpha \begin{bmatrix} w(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(t) h_1 \\ w^T(t) h_2 \\ \vdots \\ w^T(t) h_n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} w(t) w^T(t) h_1 \\ w(t) w^T(t) h_2 \\ \vdots \\ w(t) w^T(t) h_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \Lambda(h_1) \\ \Lambda(h_2) \\ \vdots \\ \Lambda(h_n) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Definiendo  $D = [d_1 \ \dots \ d_n]^T = \frac{1}{2^k} HW [k; -m] W [k]$  y repitiendo el mismo proceso anterior se tiene:

$$\beta \Omega(t) H \frac{1}{2^k} W [k] [k; -m] W w(t) = \beta \begin{bmatrix} \Lambda(d_1) \\ \Lambda(d_2) \\ \vdots \\ \Lambda(d_n) \end{bmatrix}.$$

Considerando (2.37) y dado el hecho de que las funciones de Walsh son linealmente independientes se tendrá la ecuación lineal implícita:

$$H - \begin{bmatrix} x(t_0) & 0_{2,2^k-1} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \Lambda(h_1) \\ \Lambda(h_1) \\ \vdots \\ \Lambda(h_1) \end{bmatrix} P + \beta \begin{bmatrix} \Lambda(d_1) \\ \Lambda(d_1) \\ \vdots \\ \Lambda(d_1) \end{bmatrix} P. \quad (3.8)$$

Para una ecuación de la forma  $\ddot{x}(t) + (\alpha + \beta q(t))x(t) = (\delta + \gamma q(t))x(t - \tau)$ ,  $q(t)$  periódica de periodo 1 la ecuación anterior toma la forma explícita:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [I - A(\alpha, \beta) - B(\delta, \gamma)]^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ 0_{2^k-1} \\ x_2(t_0) \\ 0_{2^k-1} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & P^T \\ -\alpha P^T - \beta (\Lambda(\kappa) P)^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{p} (W [k; -m] W (\delta I + \gamma \Lambda(\kappa)) P)^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\kappa$  corresponde al vector de coeficientes de Walsh de  $q(t)$ .

Para obtener el operador de monodromía (2.20) de una PDDE de segundo orden es necesario obtener una matriz de solución aproximada  $X_W(t, 0)$  resolviendo (3.9) con condiciones iniciales

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ y } x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En este punto, en métodos similares [10, 29] es necesario emplear métodos de integración numérica. Aquí aprovechando la estructura constante a pedazos de las funciones de Walsh para obtener una integración natural y obtener el operador de monodromía directamente de la solución aproximada  $X_W(t, 0)$ .

Se divide el intervalo  $\left[-\frac{m}{2^k}, 0\right]$  in  $m$  intervalos. Considerando  $\varphi(t) = F^T w(t)$  como la aproximación de  $\varphi$  con vector de coeficientes de Walsh  $F$  se tiene que las funciones involucradas en el operador de monodromía son constantes a pedazos, por lo tanto, dividiendo el intervalo  $\left[-\frac{m}{2^k}, 0\right]$  en  $k$  segmentos of longitud  $\frac{1}{2^k}$ :  $m = \theta_1 < \dots < \theta_{m+1} = 0$  se tiene:

$$\int_{-\frac{m}{2^k}}^0 f(s) ds = \sum_{\ell=0}^m \frac{1}{2^k} f(\theta_\ell)$$

donde  $f$  representa el argumento dentro de la integral en (2.20). Se tiene ahora:

$$(U\varphi)(\theta) = X_W(\theta + T, 0) \varphi(0) + \sum_{\ell=0}^{m+1} \frac{1}{P} X_W(\theta + T, \theta_\ell + \tau) B(\theta_\ell + \tau) \varphi(\theta_\ell).$$

Considerando nuevamente la división del intervalo  $[-\tau, 0]$ , se tiene para cada  $\theta_\ell \in [-\tau, 0]$

$$(U\varphi)(\theta_r) = X_W(\theta_r + T, 0) \varphi(0) + \sum_{\ell=0}^{m+1} \frac{1}{P} X_W(\theta_r + T, \theta_\ell + \tau) B(\theta_\ell + \tau) \varphi(\theta_\ell), \quad (3.10)$$

donde  $\varphi(0) = \varphi(\theta_{\ell+1})$ , entonces:

$$(U\varphi)(\theta_r) = \left( X_W(\theta_r + T, 0) + \frac{1}{P} X_W(\theta_r + T, \tau) B(\tau) \right) \varphi(\theta_{m+1}) \\ + \sum_{\ell=0}^m \frac{1}{P} X_W(\theta_r + T, \theta_\ell + \tau) B(\theta_\ell + \tau) \varphi(\theta_\ell). \quad (3.11)$$

Reescribiendo (3.11) en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} (U\varphi)(\theta_1) \\ (U\varphi)(\theta_2) \\ \vdots \\ (U\varphi)(\theta_\ell) \\ \vdots \\ (U\varphi)(\theta_{m+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \cdots & M_{1,\ell} & \cdots & M_{1,m+1} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \cdots & M_{2,\ell} & \cdots & M_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{\ell,1} & M_{\ell,2} \cdots & M_{\ell,\ell} & \cdots & M_{\ell,m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{m+1,1} & M_{m+1,2} \cdots & M_{m+1,\ell} & \cdots & M_{k+1,k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(\theta_1) \\ \varphi(\theta_2) \\ \vdots \\ \varphi(\theta_\ell) \\ \vdots \\ \varphi(\theta_{m+1}) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

donde

$$M_{r,\ell} = X_W(\theta_r + T, 0) + \frac{1}{2^k} X_W(\theta_r + T, \theta_\ell + \tau) B(\theta_\ell + \tau).$$

## 1.2 Aproximación del Operador de Monodromía por el Método de Pasos

### 1.2.1 Retardo Commensurable

Considérese (3.2), se asume sin pérdida de generalidad  $\tau = 1$ , en otro caso sólo es necesario adecuar la definición de las funciones de Walsh para ajustarlas a un dominio de distinta longitud. Se toma como restricción  $m\tau = \omega$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , esto es retardos commensurables con el periodo.

Se divide el intervalo  $[-\tau, \omega]$  en  $m + 1$  subintervalos of longitud  $\tau$ :

$$[-\tau, \omega] = [-\tau, 0] \cup [0, \tau] \cup \dots \cup [(m-1)\tau, m\tau].$$

Para cada intervalo se define el vector de funciones de Walsh:

$$\begin{aligned} w_i(t) &= w(t - (i-1)\tau), \quad t \in [(i-1)\tau, i\tau], \\ i &= 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Así,  $w_i(t) = w_{i-1}(t - \tau)$  para  $t \in ((i-1)\tau, i\tau)$ . De (2.37) sigue inmediatamente que para todo  $t \in [(i-1)\tau, i\tau]$  se tiene:

$$\int_{(i-1)\tau}^t w_i(t) \approx P w_i(t). \quad (3.14)$$

Al igual que en (3.3) y (3.4) se tiene para  $i = 1 \dots m$  y  $t \in ((i-1)\tau, i\tau)$  la aproximación de Walsh:

$$\begin{aligned} A(t) &= A_i(t) = \alpha_i \Omega_i(t), \\ B(t) &= B_i(t) = \beta_i \Omega_i(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sea  $H_i = \begin{bmatrix} h_{i1} & h_{i2} & \dots & h_{in} \end{bmatrix}^T$ , donde  $h_j \in \mathbb{R}^{2^k}$  para  $j = 1, \dots, n$ ,  $i = 0, \dots, m$ . Se consideran las aproximaciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_i(t) = H_i^T w_i(t), \quad t \in [(i-1)\tau, i\tau], \\ \varphi &= H_0^T w_0(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para el método de pasos se separa (3.1) en intervalos  $[(i-1)\tau, i\tau]$  y se integra en cada uno de  $(i-1)\tau$  a  $t$ , resultando:

$$x(t) - x((i-1)\tau) = \int_{(i-1)\tau}^t A(s)x(s)ds + \int_{(i-1)\tau}^t B(s)x(s-\tau)ds$$

Con la notación (3.16) se tiene que para cada  $t \in [(i-2)\tau, (i-1)\tau]$   $x(t) = x_{i-1}(t)$  con lo que se reescribe:

$$x_i(t) - x_i((i-1)\tau) = \int_{(i-1)\tau}^t A_i(s)x_i(s)ds + \int_{(i-1)\tau}^t B(s)x_{i-1}(s)ds. \quad (3.17)$$

Nuevamente de (3.16) se tiene:

$$x_i((i-1)\tau) = x_{i-1}((i-1)\tau) = H_{i-1}^T w((i-1)\tau).$$

Ahora se reescribe el termino constante de la izquierda en (3.17) como una función. Sea  $W[k]$  la matriz de Walsh correspondiente a una aproximación de orden  $2^k$ . Denotando  $W_\ell[k]$  como la

$\ell$ -ésima columna de la matriz  $W[k]$  se define la matriz  $2^k \times 2^k$  :

$$W = \begin{bmatrix} W_{2^k}[k] & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

entonces se tiene:

$$\begin{aligned} H_{i-1}^T w((i-1)\tau) &= H_{i-1}^T W \\ &= H_{i-1}^T W w_i(t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

para cada  $t \in [(i-1)\tau, i\tau]$  y para cada  $i = 1, \dots, m$ . De (2.40) se tiene:

$$\alpha \Omega(t) H w(t) = \Omega^T(t) \bar{\Lambda}(\alpha) H. \quad (3.20)$$

Igualmente para:

$$\beta \Omega(t) H(t) w(t) \triangleq \Omega^T(T) \bar{\Lambda}(\beta) H. \quad (3.21)$$

De lo anterior, usando (3.15), (3.14), y (3.20), resulta:

$$\begin{aligned} H_i^T \pi_i(t) - H_{i-1}^T W w_i(t) &= \int_{(i-1)\tau}^t \alpha_i \Omega_i(s) H_i^T w(s) ds + \int_{(i-1)\tau}^t \beta_i \Omega_i(s) H_{i-1}^T w(s) ds \\ &= \int_{(i-1)\tau}^t \Omega_i^T(s) \bar{\Lambda}(\alpha_i) H_i ds + \int_{(i-1)\tau}^t \Omega_i^T(s) \bar{\Lambda}(\beta_i) H_{i-1} ds. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Usando (3.14) se define:

$$\int_{i-1}^t \Omega^T(s) ds = \Omega^T(t) \bar{P}, \quad (3.23)$$

donde:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P^T \end{bmatrix}.$$

Se define también:

$$H_{i-1}^T W \varphi_i(t) = \begin{bmatrix} w^T(t) W^T h_{i1} \\ w^T(t) W^T h_{i2} \\ \vdots \\ w^T(t) W^T h_{in} \end{bmatrix} = \Omega^T(t) \underbrace{\begin{bmatrix} W^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W^T \end{bmatrix}}_{\bar{W}} \begin{bmatrix} h_{i1} \\ h_{i2} \\ \vdots \\ h_{in} \end{bmatrix} \triangleq \Omega^T(t) \bar{W} H_{i-1}. \quad (3.24)$$

Similarmente

$$H_i^T w(t) = \Omega^T(t) H_i. \quad (3.25)$$

Finalmente de (3.23), (3.24) y (3.25), (3.17) se reescribe como:

$$\Omega^T(t) H_i - \Omega^T(t) \bar{W} H_{i-1} = H_i + \Omega^T(t) \bar{P} \bar{\Lambda}(\beta_i) H_{i-1}. \quad (3.26)$$

Ya que las funciones de Walsh son linealmente independientes, (3.26) se convierte en:

$$H_i = [I - \bar{P} \bar{\Lambda}(\alpha_i)]^{-1} [\bar{W} + \bar{P} \bar{\Lambda}(\beta_i)] H_{i-1}. \quad (3.27)$$

La invertibilidad de la matriz en (3.27) obedece a las condiciones para  $A(t)$  dadas en la prueba del Teorema 2.21. Para condiciones de invertibilidad cuando  $A(t) = A$ , véase [30]. En adelante se supondrá que la matriz es invertible.

Se tiene entonces un mapeo  $x_m(t) = U x_0(t)$  de condiciones iniciales, correspondientes a  $x_0(t) = H_0^T \varphi(t)$ ,  $t \in [-\tau, 0]$ , al estado en  $t = \omega$ , correspondiente a  $x_m(t) = H_m^T \varphi(t)$ ,  $t \in [\omega - \tau, \omega]$ . La aproximación buscada  $\mathcal{U}_q$  del operador de monodromía  $U$  estará dada por:

$$\mathcal{U}_q = \prod_{i=1}^m [I - \bar{P} \bar{\Lambda}(\alpha_{m-i+1})]^{-1} [\bar{W} + \bar{P} \bar{\Lambda}(\beta_{m-i+1})]. \quad (3.28)$$

### 1.2.2 Retardo No Commensurable

Suponemos que el retardo satisface  $\omega = m\tau - \frac{r}{2^k}$ , con  $m, k \in \mathbb{N}$ , tal que  $(m-1)\tau < \omega < m\tau$  y  $r < 2^k$ , se divide el intervalo  $[-\tau, m\tau]$  en  $m+1$  subintervalos de longitud  $\tau$  y se define para

cada subintervalo el vector de Funciones de Walsh:  $w_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, m$ , como en (3.13). En la misma forma se define el vector de funciones de Walsh  $w_{m+1}(t)$  para  $t \in [\omega - \tau, \omega]$ . Integrando (3.1) de  $\omega - \tau$  a  $t$  se tiene:

$$\int_{\omega-\tau}^t \dot{x}(t) = \int_{\omega-\tau}^t A(s)x(s)ds + \int_{\omega-\tau}^t B(s)x(t-\tau)(s)ds,$$

donde para  $t \in [\omega - \tau, \omega]$ :

$$\begin{aligned} \int_{\omega-\tau}^t B(s)x(t-\tau)(s)ds &= \int_{\omega-\tau}^t B(s)x(t-\tau)(s)(1-S(t-m\tau))ds. \\ &+ \int_{m\tau}^t B(s)x(t-\tau)(s)S(t-m\tau)ds, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde  $S(t)$  es la función escalón unitario.

Considérese (3.16), y la aproximación:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{m+1}(t) = H_{m+1}^T w_{m+1}, \\ B(t) &= B_{m+1}(t) = \beta_{m+1} w_{m+1}(t). \\ &t \in [\omega - \tau, \omega] \end{aligned} \quad (3.30)$$

La ecuación (3.29) se convierte para  $t \in [\omega - \tau, \omega]$  en:

$$\begin{aligned} H_{m+1}^T w_{m+1}(t) - H_m^T w_m(\omega - \tau) &= \int_{\omega-\tau}^t A(s)H_{m+1}^T w_{m+1}(s)ds \\ &+ \int_{\omega-\tau}^t B(s)H_{m-1}^T w_{m-1}(s)(1-S(s-m\tau))ds \\ &+ \int_{m\tau}^t B(s)H_m^T w_m(s)S(s-m\tau)ds. \end{aligned} \quad (3.31)$$

El valor de  $\varphi_m(\omega - \tau)$  corresponde a la  $(r+1)$ -ésima columna de la matriz de Walsh de orden  $2^k$ . Como en (3.18), se define la matriz  $2^k \times 2^k$ :

$$W_{r+1} = \begin{bmatrix} W_{r+1}[k] & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

se tiene entonces:

$$H_m^T w_m(\omega - \tau) = H_m^T W_{r+1} w_{m+1}(t). \quad (3.32)$$

Para  $t \in [\omega - \tau, m\tau]$ , se tiene:

$$w_{m-1}(t - \tau) = w_{m+1}\left(t + \frac{r}{2^k}\tau\right),$$

$$(t + k) \in [\omega - \tau + k, \omega] \subset [\omega - \tau, \omega],$$

y para  $t \in [m\tau, \omega]$ :

$$w_m(t - \tau) = w_{m+1}\left(t - \frac{2^k - r}{2^k}\tau\right),$$

$$\left(t - \frac{2^k - r}{2^k}\tau\right) \in \left[\omega - \tau, \frac{2^k - r}{2^k}\tau\right] \subset [\omega - \tau, \omega].$$

Considerando (2.34) se tiene la expansión de Walsh:

$$w_{m+1}^{(j)}\left(t + \frac{r}{2^k}\tau\right) (1 - S(t - m\tau)) = \sum_{i=0}^{2^k-1} c_i^{(j)} w_{m+1}^{(i)}(t),$$

donde  $S(t)$  es la función escalón unitario y:

$$c_i^{(j)} = \int_0^1 w_{m+1}^{(i)}\left(t + \frac{r}{2^k}\tau\right) (1 - S(t - m\tau)) w_{m+1}^{(j)}(t) dt$$

$$= \frac{1}{2^k} [(i+1)\text{-ésima fila de } W[k; +r]] [(j+1)\text{-ésima columna de } W[k]].$$

Así:

$$w_{m+1}^{(j)}\left(t + \frac{r}{2^k}\tau\right) (1 - S(t - m\tau)) = \frac{1}{2^k} W[k; +r] W[k] w_{m+1}(t). \quad (3.33)$$

Similarmente se tendrá:

$$w_{m+1}^{(j)}\left(t - \frac{2^k - r}{2^k}\tau\right) S(t - m\tau) = \frac{1}{2^k} W[k; -(2^k - r)] W[k] w_{m+1}(t). \quad (3.34)$$

De (3.32), (3.33), y (3.34), (3.31) resulta:

$$\begin{aligned} H_{m+1}^T w_{m+1}(t) - H_m^T w_m(\omega - \tau) &= \int_{\omega - \tau}^t \alpha_{m+1} w_{m+1}(s) H_{m+1}^T w_{m+1}(s) ds \\ &+ \frac{1}{2^k} \int_{\omega - \tau}^t \beta_{m+1} w_{m+1}(s) H_{m-1}^T W[k; +r] W[k] w_{m+1}(s) ds \\ &+ \frac{1}{2^k} \int_{m\tau}^t \beta_{m+1} w_{m+1}(s) H_m^T W[k; -(2^k - r)] W[k] w_{m+1}(s) ds. \end{aligned}$$

Denotando:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2^k} W[k; +r] W[k], \\ D_2 &= \frac{1}{2^k} W[k; -(2^k - r)] W[k], \end{aligned}$$

y definiendo  $\bar{D}_1$  y  $\bar{D}_2$  en la misma forma que  $\bar{W}$  fue definida en (3.24) se tiene:

$$\begin{aligned} \beta_{m+1} \Omega_{m+1} H_{m-1}^T D_1 w_{m+1}(t) &= \Omega_{m+1}^T(t) \bar{D}_1 \bar{\Lambda}(\beta)_{m+1} H_{m-1}, \\ \beta_{m+1} \Omega_{m+1} H_m^T D_2 w_{m+1}(t) &= \Omega_{m+1}^T(t) \bar{D}_2 \bar{\Lambda}(\beta)_{m+1} H_m. \end{aligned}$$

Con las mismas consideraciones que llevaron a (3.26), definiendo  $\bar{W}_{r+1}$  como en (3.24), omitiendo  $\Omega_{m+1}^T$  debido a la independencia lineal, y sustituyendo (3.28), (3.31) resulta:

$$[I - \bar{P}\bar{\Lambda}(\alpha_{m+1})] H_{m+1} = \left[ \bar{P}\bar{\Lambda}(\beta_{m+1}) \bar{D}_1 U_{m-1} + [\bar{P}\bar{\Lambda}(\beta_{m+1}) \bar{D}_2 + \bar{W}_{r+1}] U_m \right] H_0,$$

donde:

$$\begin{aligned} U_\gamma &= \prod_{i=1}^{\gamma} [I - \bar{P}\bar{\Lambda}(\alpha_{\gamma-i+1})]^{-1} [\bar{W} + \bar{P}\bar{\Lambda}(\beta_{\gamma-i+1})], \\ \gamma &\in \{m-1, m\}. \end{aligned}$$

El operador de monodromía aproximado  $\mathcal{U}_q$  para el caso de un retardo no conmensurable esta dado por:

$$\mathcal{U}_q = [I - \bar{P}\bar{\Lambda}(\alpha_{m+1})]^{-1} \left[ \bar{P}\bar{\Lambda}(\beta_{m+1}) \bar{D}_1 U_{m-1} + [\bar{P}\bar{\Lambda}(\beta_{m+1}) \bar{D}_2 + \bar{W}_{r+1}] U_m \right]. \quad (3.35)$$

La aproximación (3.35) se reduce a (3.28) para el caso de un retardo conmensurable. En efecto, considérese (3.35), para un retardo conmensurable se tendrá  $r = 2^k$ , así  $W[k, -2^k] = 0$  y  $W[k, +0] = W[k]$ . Entonces ya que  $W[k]W[k] = W^T[k]W[k] = pI$  se tendrá  $D_1 = 0$ , y  $D_2 = I$ , recuperando (3.28).

## 2 Aproximación de Rango Finito mediante Funciones Constantes a Pedazos

Los métodos anteriores, aunque ofrecen una alternativa para la aproximación del operador de monodromía de ecuaciones diferenciales periódicas con retardo, no explotan posibilidad de caracterizar el retardo en las funciones de Walsh. Más aún las funciones de Walsh están fuertemente relacionadas con otros conjuntos de funciones ortonormales constantes a pedazos, como las funciones de Haar o las Funciones a Pulsos por Bloques. Esta relaciones se dan por transformaciones de similaridad que permiten expresar las funciones de Walsh como una combinación lineal de las otras y viceversa.

En el método siguiente se hace uso de la caracterización del retardo con las funciones de Walsh y se dan los términos para una generalización del método para aproximaciones con otros conjuntos de funciones ortonormales constantes a pedazos.

### 2.1 Aproximación de Rango Finito del Operador de Monodromía

Sin pérdida de generalidad se  $\omega = 1$ . se aproxima el operador de monodromía por medio de una proyección (3.1) en un subespacio finito dimensional de  $L^2[0, 1)$  formado por el span of  $2^k$  funciones ortonormales constantes a pedazos. Se asume que las funciones ortonormales son funciones de Walsh, el análisis puede llevarse al caso de de Funciones por Pulsos a Bloques o funciones de Haar por medio de una transformación de similaridad. Se considera solo el caso de retardos conmensurables, esto es  $m\tau = \omega$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ .

Integrando (3.1) de 0 a  $t$  se tendrá:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t A(s)x(s)ds + \int_0^t B(s)x(s - \tau)ds, \quad (3.36)$$

con  $x(\theta) = \varphi(\theta)$  para  $\theta \in [-\tau, 0]$ . Una solución de (3.36) corresponderá a una solución de (3.1) [21]. Se denota por  $\pi_k$  al mapeo de proyección que lleva la expansión de Walsh  $f(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} w_{\ell}(t)$  a la aproximación de Walsh  $\hat{f}(t) = \sum_{\ell=0}^{2^k} c_{\ell} w_{\ell}(t)$ . Junto con (3.36) se introduce su proyección al espacio  $M = \text{span} \{w_0, w_1, \dots, w_{2^k-1}\}^n$ :

$$\hat{x}(t) - x(0) = \pi_k \int_0^t \hat{A}(s) \hat{x}(s) ds + \pi_q \int_0^t \hat{B}(s) \hat{x}(s - \tau) ds, \quad (3.37)$$

donde  $\hat{x}(t) \in M$  y  $\varphi(0) \in M$  ya que es constante.  $\hat{A}(t)$  y  $\hat{B}(t)$  corresponden a  $\pi_k A(t)$  y  $\pi_k B(t)$ , esto es, la aproximación de  $A(t)$  y  $B(t)$ , respectivamente, como en (2.38).  $\hat{x}(x)(\theta)$  aún no está definida para  $\theta \in [-\tau, 0)$ , no se puede definir aún la proyección de la condición inicial, ya que esta está definida en un dominio distinto al dominio de definición de las funciones de Walsh. Para esto se tiene:

**Proposición 3.1.** *El valor de la aproximación de Walsh de orden  $2^k$  en un intervalo  $[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k})$ ,  $i = 0, \dots, 2^k - 1$ , depende solo en el valor de la función en el mismo intervalo.*

*Prueba.* Sigue inmediatamente del Teorema 2.1.3 en [23]. □

Entonces, se define la proyección  $\pi_k \varphi(\theta) = \sum_{\ell=0}^{2^k-1} c_{\ell} w_{\ell}(\theta + \omega) \triangleq \hat{\varphi}(\theta)$  como la aproximación de Walsh de orden  $2^k$  de una función integrable  $\varphi^*(\theta)$  definida en  $[-\omega, 0)$ , que es igual a  $\varphi(\theta)$  en  $[-\tau, 0)$  y 0 en otro lado, y hacemos  $\hat{x}(\theta) = \hat{\varphi}(\theta)$  para  $\theta \in [-\tau, 0]$ . Ya que las funciones de Walsh no fueron definidas para  $t = 1$ , simplemente se fija  $\hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}(-\frac{1}{2^k})$ .

Se divide la segunda integral en (3.36) como:

$$\begin{aligned} \int_0^t B(s)x(s - \tau) ds &= \int_0^{\tau} B(s)x(s - \tau) ds + \int_{\tau}^t B(s)x(s - \tau) ds \\ &= \int_0^{\tau} B(s)\varphi(s - \tau) ds + \int_{\tau}^t B(s)x(s - \tau) ds \\ &= \int_0^{\tau} (1 - S(s - \tau)) B(s)\varphi(s - \tau) ds \\ &\quad + \int_0^t S(s - \tau) B(s)x(s - \tau) ds, \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde  $S(t)$  es la función escalón unitario.

Se hace uso del siguiente Lema:

**Lema 3.2.** [23] *Cualquier función  $f(t)$  constante en los intervalos de la forma  $\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right)$ ,  $0 \leq i \leq 2^k - 1$  puede ser representada en la forma:*

$$f(t) = \sum_{\ell=0}^{2^k-1} c_\ell w_\ell(t), \quad (3.39)$$

*esto es, los coeficientes no cero de la expansión de Walsh de  $f(t)$  tienen índices no mayores a  $2^k - 1$ . Más aún, esta representación es única.*

De la linealidad de  $\pi_k$  y del Lema 3.2, se tiene que se puede dividir la segunda integral en (3.37) como en (3.38), siendo esto consistente con la proyección:

$$\begin{aligned} \pi_k \int_0^t \hat{B}(s) \hat{x}(s - \tau) ds &= \pi_k \int_0^t (1 - S(s - \tau)) \hat{B}(s) \hat{\phi}(s - \tau) ds \\ &+ \pi_k \int_0^t S(s - \tau) \hat{B}(s) \hat{x}(s - \tau) ds, \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ya que  $\hat{x}(t) \in M$  se tiene que  $\hat{x}(t) = [h_1^T \bar{w}(t), \dots, h_n \bar{w}(t)]^T$ , también se tiene que  $\hat{\phi}(\theta) = [c_1^T \bar{w}(\theta + \omega), \dots, c_n \bar{w}(\theta + \omega)]^T$  con cada  $h_i$  y  $c_i$  correspondiendo a vectores de coeficientes de Walsh. Definiendo  $H = [h_1^T, \dots, h_n^T]^T$ ,  $\Phi = [c_1^T, \dots, c_n^T]^T$ , y tomando (2.33) y (2.38), se puede escribir (3.37) como:

$$\begin{aligned} \Omega^T(t)H - \hat{x}(0) &= \pi_q \int_0^t \alpha \Omega(s) \Omega^T(s) H ds + \pi_k \int_0^t \beta \Omega(s) S(s - \tau) \Omega^T(s - \tau) H ds \\ &+ \pi_k \int_0^t \beta \Omega(s) (1 - S(s - \tau)) \Omega^T(s - \tau + \omega) \Phi ds, \end{aligned} \quad (3.41)$$

Del Lema 3.2. se tiene que ambos,  $S(t - \tau) \Omega^T(t - \tau)$  y  $(1 - S(t - \tau)) \Omega^T(s - \tau + \omega)$ , pueden ser únicamente representados en términos de  $\Omega(t)$ :

$$\begin{aligned} S(t - \tau) \Omega^T(t - \tau) &= \Omega^T(t) \bar{W}_D, \\ (1 - S(t - \tau)) \Omega^T(s - \tau + \omega) &= \Omega^T(t) \bar{W}_F, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$\bar{W}_F$  y  $\bar{W}_D$  son matrices diagonales por bloques de dimensión  $2^k n \times 2^k n$ , cuyas entradas diagonales están dadas respectivamente por  $W_F^T$  y  $W_D^T$ , que satisfacen  $W_F \bar{w}(t) = (1 - S(t -$

$\tau))w(s - \tau + \omega)$  y  $W_D\bar{w}(t) = S(t - \tau)\bar{w}(t - \tau)$  Cuando se aproxima por funciones de Walsh, la matriz  $W_D$  esta dada por  $W_D = \frac{1}{2^k}(W[-m, k]W[k])$ .  $W_F$  esta dada de forma análoga como  $W_F = \frac{1}{2^k}(W[+(1 - m), k]W[k])$ . El término  $\hat{x}(0)$  tendrá también una representación única:

$$\hat{x}(0) = \Omega^T(t)\bar{W}_C\Phi, \quad (3.43)$$

ya que  $\hat{x}(0) = \hat{\phi}(0)$ .  $\bar{W}_C$  será de nuevo una matriz diagonal por bloques de dimensión  $2^k n \times 2^k n$ , cuyas entradas diagonales están dadas por  $W_C^T$ . En el caso de las funciones de Walsh, la matriz  $W_C$  evalúa  $\phi(t)$  en el tiempo  $2^k - 1$  y le asigna su valor al coeficiente de la función de Walsh constante  $w_0(t)$ , por lo tanto  $W_C^T = [\bar{w}(2^k - 1), 0, \dots, 0]^T$ .

De (2.40), (3.43) y (3.42) se tiene que se puede escribir (3.41) como:

$$\begin{aligned} \Omega^T(t)H - \Omega^T(t)\bar{W}_C\Phi &= \pi_k \int_0^t \Omega^T(s)ds\bar{\Lambda}(\alpha)H + \pi_k \int_0^t \Omega^T(s)ds\bar{\Lambda}(\beta)\bar{W}_F\Phi \\ &+ \pi_k \int_0^t \Omega^T(s)ds\bar{\Lambda}(\beta)\bar{W}_D H. \end{aligned} \quad (3.44)$$

De (2.36) tenemos que:

$$\pi_k \int_0^t \Omega^T(s)ds = \Omega^T(t)\bar{P}, \quad (3.45)$$

donde  $\bar{P}$  es una matriz de dimensión  $2^k n \times 2^k n$  dada por:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P^T \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

de donde se llega a:

$$\begin{aligned} \Omega^T(t)H - \Omega^T(t)\bar{W}_C\Phi &= \Omega^T(t)\bar{P}\bar{\Lambda}(\alpha)H\Omega^T(t) + \bar{P}\bar{\Lambda}(\beta)\bar{W}_F\Phi \\ &+ \Omega^T(t)\bar{P}\bar{\Lambda}(\beta)\bar{W}_D H. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ya que  $\Omega(t)$  es no singular, se tiene:

$$H = [I - \bar{P}\bar{\Lambda}(\alpha) - \bar{P}\bar{\Lambda}(\beta)\bar{W}_D]^{-1} [\bar{W}_C + \bar{P}\bar{\Lambda}(\beta)\bar{W}_F] \Phi. \quad (3.48)$$

De (3.48), es posible definir un mapeo  $\mathcal{T}_k : M \rightarrow M$ :

$$\mathcal{T}_k = [I - \bar{P}\bar{\Lambda}(\alpha) - \bar{P}\bar{\Lambda}(\beta)\bar{W}_D]^{-1} [\bar{W}_C + \bar{P}\bar{\Lambda}(\beta)\bar{W}_F] \quad (3.49)$$

Sin embargo, por construcción se observa que el dominio de  $\mathcal{T}_k$  es de hecho el subespacio de  $M$  consistente de todas las funciones generadas por combinaciones lineales de las primeras  $2^k$  funciones de Walsh, que son iguales a 0 para  $t \in [0, \omega - \tau)$ , se denota a este subespacio como  $M'$ . Se la misma forma se puede extender el dominio de definición del mapeo de solución de (3.1) del espacio  $\mathcal{C}_{[-\tau, 0]}$ , el subespacio de  $L^2_{[-\omega, 0]}$  consistente de todas las funciones continuas en  $[-\tau, 0]$  que son iguales a 0 para  $t \in [-\omega, \tau)$ , este espacio, denotado  $\mathcal{C}'$  es isomorfo al espacio  $\mathcal{C}_{[-\tau, 0]}$  y su proyección en el espacio  $M$  corresponde a  $M'$ . Se puede decir ahora que  $\mathcal{T}_k$  es una aproximación del mapeo de solución  $T$  of (3.1), se obtiene una solución aproximada  $\hat{x}(t) = \Omega^T(t)H$  que satisface (3.37), y por lo tanto, se tiene una aproximación del mapeo de solución de (3.1).

Para determinar el operador de monodromía de (3.1), se debe estudiar el estado en el tiempo  $t = \omega$ , esto es, se debe saber la solución de (3.1) para  $t \in [\omega - \tau, \omega]$  correspondiente a una condición inicial. Ya que  $M'$  es la proyección en el espacio  $M$  de  $\mathcal{C}'$  y ya que  $\mathcal{C}'$  es isomorfo a  $\mathcal{C}_{[\omega - \tau, \omega]}$ , la aproximación del estado en el tiempo  $t = \omega$  estará dada por la proyección de la solución aproximada en  $M'$ . Por lo tanto por el Lema 3.2 se tendrá:

$$H' = \bar{W}_P H. \quad (3.50)$$

donde  $\bar{W}_P$  es una matriz diagonal por bloques de dimensión  $2^k n \times 2^k n$  que proyecta la solución aproximada  $\Omega^T(t)H$  en el subespacio  $M'$ , cuyas entradas diagonales están dadas por  $W_P^T$ . En el caso de las funciones de Walsh, tendremos  $W_P^T = \frac{1}{2^k} W_{S(t-(1-m))}[k] W[k]$  donde  $W_{S(t-(1-m))}[k]$  estarán dadas por matrices de Walsh de orden  $2^k$  que tienen como valores 0s en las primeras  $(1-m)$ -ésimas columnas.

De (3.50) se obtiene el operador de monodromía aproximado, dado por:

$$\mathcal{U}_k = \bar{W}_P [I - \bar{P}\bar{\Lambda}(\alpha) - \bar{P}\bar{\Lambda}(\beta)\bar{W}_D]^{-1} [\bar{W}_C + \bar{P}\bar{\Lambda}(\beta)\bar{W}_F]. \quad (3.51)$$

## 2.2 Funciones a Pulsos por Bloques (BPF)

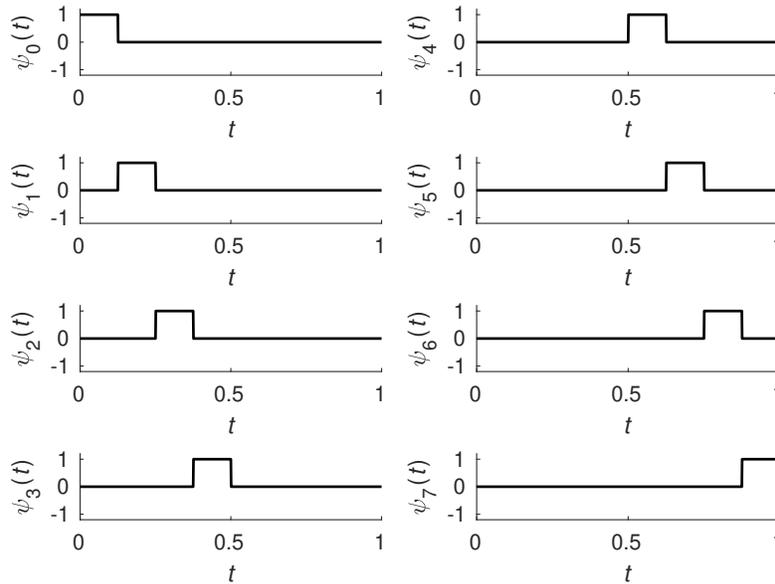


Fig. 3.1 Block Pulse Functions.

El conjunto de Funciones a Pulsos por Bloques de orden  $p$  esta definido en el intervalo  $[0, 1)$  como el conjunto  $\{\psi_0(t), \dots, \psi_{m-1}(t)\}$ , donde [31]:

$$\psi_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[\frac{i}{p}, \frac{i+1}{p}\right) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.52)$$

$i = 1, \dots, p - 1.$

Las Funciones a Pulsos por Bloques, mostradas en la Figura 3.1, son ortogonales, fácilmente normalizables [32], y cuando  $m \rightarrow \infty$  forman un conjunto total [31]. Se restringe al caso  $p = 2^k$  para  $k$  entero. Las funciones de Walsh y las Funciones a Pulsos por Bloques están relacionadas mediante una correspondencia uno a uno, lo que significa que existe una transformación biyectiva única que mapea las primeras  $2^k$  funciones de Walsh al conjunto de BPF de orden  $2^k$  [33]. La existencia de esta transformación y la completitud de las Funciones a Pulsos por Bloques aseguran que las propiedades de las funciones de Walsh sean heredadas por las BPFs. En particular se tiene lo siguiente:

**Lema 3.3.** [33] La matriz  $P$  en (2.37) es similar a la matriz triangular superior  $P_* \triangleq W[k]PW[k] = \frac{1}{2}I_{2^k} + Q + Q^2 + \dots + Q^{2^k-1}$ , donde  $Q$  es una matriz nilpotente con unos sobre la diagonal y ceros en las demás entradas:

$$P_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

**Lema 3.4.** [34] Sea  $\hat{f}(t) = \sigma^T \bar{w}(t)$  la aproximación de Walsh de la función  $f(t)$ , con  $\sigma \in \mathbb{R}^{2^k}$  siendo el vector de coeficientes de la aproximación de Walsh. Entonces  $\Lambda(\sigma)$  es similar a la matriz diagonal:

$$\begin{aligned} \Lambda_*(\sigma) &= W^{-1}[k]\Lambda(\sigma)W[k] \\ &= \begin{bmatrix} \hat{f}\left(\frac{0}{2^k}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{f}\left(\frac{1}{2^k}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{f}\left(\frac{2^k-1}{2^k}\right) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

### 2.3 Aproximación por Funciones a Pulsos por Bloques (BPF)

La ecuación (3.51) para la aproximación de  $\mathcal{U}_k$  es válida para todos los conjuntos de funciones ortonormales que puedan ser obtenidas por medio de combinaciones lineales de funciones de Walsh. Para el cálculo numérico de la aproximación del operador de monodromía. Las funciones a Pulsos por Bloques ofrecen las mayores ventajas, ya que con su simplicidad viene una carga computacional más ligera, en particular para la aproximación con BPF se tendrá:

$$\begin{aligned} \bar{W}_P &= \text{diag}\{W_P^T, \dots, W_P^T\}, \\ W_P^T &= \begin{bmatrix} 0_{2^k-m \times 2^k-m} & 0_{2^k-m \times m} \\ 0_{m \times 2^k-m} & I_{m \times m} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\bar{W}_C = \text{diag}\{W_C^T, \dots, W_C^T\}, \quad (3.56)$$

$$W_C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{P} = \text{diag}\{P^T, \dots, P^T\} \quad (3.57)$$

$$P = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Si se define:

$$Q_- = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

se tendrá:

$$\bar{W}_D = \text{diag}\{W_D^T, \dots, W_D^T\} \quad (3.59)$$

$$W_D^T = Q_-^m,$$

and

$$\bar{W}_F = \text{diag}\{W_F^T, \dots, W_F^T\} \quad (3.60)$$

$$W_F^T = Q_+^{2^k - m}.$$

Finalmente, si en (3.1) se tiene  $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$ , then  $\bar{\Lambda}(\alpha)$  estará dado

como en (2.41) con:

$$\Lambda(\bar{\alpha}_{ij}) = \begin{bmatrix} \hat{a}_{ij}\left(\frac{0}{2^k}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{a}_{ij}\left(\frac{1}{2^k}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{a}_{ij}\left(\frac{2^k-1}{2^k}\right) \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

donde

$$\hat{a}_{ij}\left(\frac{i}{2^k}\right) = \int_{\frac{i}{2^k}}^{\frac{i+1}{2^k}} a_{ij}(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, 2^k - 1, \quad (3.62)$$

con lo mismo para  $\bar{\Lambda}(\beta)$  y  $B(t)$ .

### 3 Convergencia de $\mathcal{U}_k$

Denótese como  $\mathcal{C}_\Delta$  al espacio de funciones de  $[0, 1]$  a  $\mathbb{R}^n$ , cuyo límite por la izquierda existe en todo punto en  $(0, 1]$  y cuyo límite por la izquierda existe en todo punto en  $[0, 1)$  que son también continuas en cada punto que no es un racional diádico, esto es,  $\mathcal{C}_\Delta$  es el espacio de funciones continuas en  $[0, 1]$  que tienen a lo más discontinuidades en los racionales diádicos.

#### 3.1 Convergencia en $\mathcal{C}_\Delta$

**Proposición 3.5.** *El espacio  $\mathcal{C}_\Delta$  es un espacio de Banach con la norma sup.*

*Prueba.* Sea  $\{x_n\}$  una secuencia de Cauchy en  $\mathcal{C}_\Delta$ , entonces  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N$  tal que  $n, m \geq N$  implica:

$$\sup_{t \in [0, 1]} \|x_n(t) - x_m(t)\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto para todo  $t_0 \in [0, 1]$  se tiene  $\|x_n(t_0) - x_m(t_0)\| < \varepsilon$ , para  $n, m \geq N$ . Entonces  $\{x_n(t_0)\}$  es una secuencia de Cauchy en  $\mathbb{R}^n$ , por lo tanto convergente, se denota tal límite como  $x^*(t_0)$ , entonces se tiene que para todo  $\varepsilon$ , existe  $N$ , tal que para  $n \geq N$ :

$$\|x_n(x_0) - x^*(x_0)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1],$$

esto es  $\{x_n\}$  converge a  $x^*$  uniformemente.

Ahora, sea  $t_0 \in [0, 1]$ , entonces para todo  $x_n$  el límite por la derecha en  $t_0$  existe, esto es,  $\forall x_n \in \{x_n\}$ ,  $\exists! L_n^+$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_n > 0$  tal que:

$$0 < t - t_0 < \delta \Rightarrow \|x_n(t) - L_n^+\| < \varepsilon. \quad (3.63)$$

La secuencia  $\{L_n^+\}$  esta definida en  $\mathbb{R}^n$ , por lo tanto es convergente si y solo si es Cauchy. Asumimos por contradicción que  $\{L_n^+\}$  no es Cauchy, entonces existe  $\varepsilon_1$  tal que para todo  $N_1$ , existe  $n_1, m_1 \geq N_1$  tal que:

$$\|L_{m_1} - L_{n_1}\| \geq \varepsilon_1. \quad (3.64)$$

Ya que  $\{x_n\}$  es Cauchy se tiene que existe  $N_2$  tal que  $n, m \geq N_2$  implica:

$$\sup_{t \in [0, 1]} \|x_n(t) - x_m(t)\| < \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

Sea  $n_1, m_1 \geq N_2$ , tal que (3.64) se satisfacen. Sea  $\delta_1$  tal que para  $0 < t - t_0 < \delta_1$  se tiene:

$$\|x_{n_1}(t) - L_{n_1}\| < \frac{\varepsilon_1}{3},$$

similarmente, sea  $\delta_2$  tal que  $0 < t - t_0 < \delta_2$  se tiene:

$$\|x_{m_1}(t) - L_{m_1}\| < \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

Tómese  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , entonces para  $0 < t - t_0 < \delta$  se tiene:

$$\begin{aligned} \|x_{n_1}(t) - x_{m_1}(t)\| &< \frac{\varepsilon_1}{3} \\ \|(x_{n_1}(t) - L_{n_1}^+ + x_{m_1}(t) - L_{m_1}^+) - (L_{m_1}^+ - L_{n_1}^+)\| &< \frac{\varepsilon_1}{3} \\ \|(x_{n_1}(t) - L_{n_1}^+ + x_{m_1}(t) - L_{m_1}^+) - (L_{m_1}^+ - L_{n_1}^+)\| &< \frac{\varepsilon_1}{3}, \end{aligned}$$

pero  $\|L_{m_1}^+ - L_{n_1}^+\| \geq \varepsilon_1$  y  $\|x_{n_1}(t) - L_{n_1}^+ + x_{m_1}(t) - L_{m_1}^+\| < \frac{2\varepsilon_1}{3}$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\leq \|L_{m_1}^+ - L_{n_1}^+\| - \|x_{n_1}(t) - L_{n_1}^+ + x_{m_1}(t) - L_{m_1}^+\| < \frac{\varepsilon_1}{3} \\ \varepsilon_1 &\leq \|L_{m_1}^+ - L_{n_1}^+\| < \frac{\varepsilon_1}{3} + \|x_{n_1}(t) - L_{n_1}^+ + x_{m_1}(t) - L_{m_1}^+\| \\ \varepsilon_1 &\leq \|L_{m_1}^+ - L_{n_1}^+\| < \frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_1}{3} = \varepsilon_1, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción, por lo tanto la secuencia  $\{L_n^+\}$  converge a un límite  $L^+$ .

Ahora sea  $\varepsilon > 0$ , sea  $N \in \mathbb{N}$  y  $\delta$  tales que para  $0 < t + t_0 < \delta$ :

$$\begin{aligned} \|x_N(t) - x^*(t)\| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ \|x_N(t) - L_N^+\| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ \|L_N^+ - L^+\| &< \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \|x^*(t) - L^+\| &\leq \|x_N(t) - x^*(t)\| + \|x_N(t) - L_N^+\| + \|L_N^+ - L^+\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $L^+$  es un límite derecho de  $x^*$  en  $t = t_0$ , por lo tanto el límite derecho existe. Repitiendo el proceso para el límite izquierdo, se concluye que los límites izquierdos  $x^*$  existen donde son requeridos.

Ahora sea  $t_0 \in [0, 1]$ ,  $t_0$  no racional diádico, entonces cada  $x_n$  es continuo en  $t_0$ , por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  es continuo en  $t_0$ . Entonces tenemos  $x^* \in \mathcal{C}_\Delta$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

Se hace uso de lo siguiente:

**Lema 3.6.** [30] Sean los intervalos diádicos:  $\Delta_k(\ell) = \left[ \frac{\ell-1}{2^k}, \frac{\ell}{2^k} \right)$ ,  $\ell \in \Gamma_k$  with  $\Gamma_k = \{1, \dots, 2^k\}$  y sea  $\chi_{\Delta_k(\ell)}(t)$  la función característica del intervalo  $\Delta_k(\ell)$ , entonces:

$$\pi_k \int_0^t \chi_{\Delta_k(\ell)}(s) ds = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\ell-1}{2^k} \\ \frac{1}{2^{k+1}}, & \frac{\ell-1}{2^k} \leq t < \frac{\ell}{2^k} \\ \frac{1}{2^k}, & \frac{\ell}{2^k} \leq t < \frac{\ell-1}{1} \end{cases} \quad (3.65)$$

Ahora se declara:

**Teorema 3.7.** Sea el espacio de Banach:  $\mathcal{C}_\Delta$ , el operador de monodromía aproximado  $\mathcal{U}_k$  converge fuertemente al operador de monodromía  $U$ .

*Prueba.* Denótese por  $\pi_k$  al mapeo de proyección que lleva la expansión de Walsh  $f(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell w_\ell(t)$  a la aproximación de Walsh  $\hat{f}(t) = \sum_{\ell=0}^{2^k} c_\ell w_\ell(t)$ . Sin riesgo de confusión, se denota como  $\mathcal{U}_k \varphi(\theta)$  al operador  $\mathcal{U}_k \pi_k \varphi(\theta)$  y como  $\mathcal{T}_k \varphi(\theta)$  al operador  $\mathcal{T}_k \pi_k \varphi(\theta)$ .

Denótese como  $x(t) = T \varphi(\theta)$  a la solución de (3.36) correspondiente a una condición inicial  $\varphi(\theta)$  para  $\theta \in [-\tau, 0]$ . De la misma forma, denótese como  $\hat{x}(t) = \mathcal{T}_k \hat{\varphi}(\theta)$  a la solución de (3.37). Claramente  $x(t) = U \varphi(\theta)$  y  $\hat{x}(t) = \mathcal{U}_k \varphi(\theta)$  para  $t \in [\omega - \tau, \omega]$

Sea  $\hat{A}(t) = \pi_k A(t)$ ,  $\hat{B}(t) = \pi_k B(t)$  y  $\hat{\varphi}(t) = \pi_k \varphi(t)$ . Entonces:

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \|\pi_k x(t) - x(t)\| + \|\hat{x}(t) - \pi_k x(t)\|. \quad (3.66)$$

Ya que la solución  $x(t)$  es continua, se tiene que el primer término de la derecha converge a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ . Ahora, se observa que  $\hat{x}(t)$  y  $x(t)$  satisfacen:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = \varphi(0) + \pi_k \int_0^t \hat{A}(s) \hat{x}(s) ds + \pi_k \int_0^t S(t-\tau) \hat{B}(s) \hat{x}(s-\tau) ds \\ + \pi_k \int_0^t (1 - S(t-\tau)) \hat{B}(s) \hat{\varphi}(s-\tau) ds \end{aligned} \quad (3.67)$$

y

$$\begin{aligned} x(t) = \varphi(0) + \int_0^t A(s) x(s) ds + \int_0^t S(t-\tau) B(s) x(s-\tau) ds \\ + \int_0^t (1 - S(t-\tau)) B(s) \varphi(s-\tau) ds, \end{aligned} \quad (3.68)$$

respectivamente. Sean  $\mathcal{A}(t) = A(t) + S(t - \tau)B(t)$ ,  $\mathcal{B}(t) = (1 - S(t - \tau))B(t)$ , de la misma forma sean  $\hat{\mathcal{A}}(t)$  y  $\hat{\mathcal{B}}(t)$  sus aproximaciones. Defínase  $y_k(t) = \hat{x}(t) - \pi_k x(t)$ . Se tiene:

$$y_k(t) = \pi_k \int_0^t \hat{\mathcal{A}}(s) \hat{x}(s) ds + \pm \pi_k \int_0^t \hat{\mathcal{A}}(s) \pi_k x(s) ds - \pi_k \int_0^t \mathcal{A}(s) x(s) ds + \pi_k \left[ \int_0^t \hat{\mathcal{B}}(s) \hat{\varphi}(s - \tau) ds - \mathcal{B}(s) \varphi(s - \tau) ds \right], \quad (3.69)$$

así:

$$y_k(t) = \pi_k \int_0^t \hat{\mathcal{A}}(s) y_k(s) ds + \pi_k \int_0^t \left[ \hat{\mathcal{A}}(s) \pi_k x(s) - \mathcal{A}(s) x(s) \right] ds + \pi_k \int_0^t \left[ \hat{\mathcal{B}}(s) \hat{\varphi}(s - \tau) - \mathcal{B}(s) \varphi(s - \tau) \right] ds. \quad (3.70)$$

Se tiene que el lado derecho de (3.70) es constante a pedazos, por lo que si se definen los intervalos diádicos  $\Delta_k(\ell) = [\frac{\ell-1}{2^k}, \frac{\ell}{2^k})$ , para  $\ell \in \Gamma$  con  $\Gamma = \{1, \dots, 2^k\}$ , se puede escribir:

$$\pi_k \int_0^t \hat{\mathcal{A}}(s) y_k(s) ds = \pi_k \int_0^t \sum_{q=1}^{2^k} \hat{\mathcal{A}}\left(\frac{q-1}{2^k}\right) y_k\left(\frac{q-1}{2^k}\right) \chi_{\Delta_k(q)}(s) ds, \quad (3.71)$$

donde  $\chi_{\Delta_k(q)}(t)$  es la función característica del intervalo  $\Delta_k(q)$ . Del Lema 3.6, se tendrá para  $t \in \Delta_k(\ell)$ :

$$\pi_k \int_0^t \hat{\mathcal{A}}(s) y_k(s) ds = \frac{1}{2^k} \sum_{q=1}^{\ell-1} \hat{\mathcal{A}}\left(\frac{q-1}{2^k}\right) y_k\left(\frac{q-1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} \hat{\mathcal{A}}\left(\frac{\ell-1}{2^k}\right) y_k\left(\frac{\ell-1}{2^k}\right). \quad (3.72)$$

Ya que  $y_k(t)$  es constante en los intervalos diádicos, entonces  $y_k(t) = y_k\left(\frac{\ell-1}{2^k}\right)$  para  $t \in \Delta_k(\ell)$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left\| y_k\left(\frac{\ell-1}{2^k}\right) \right\| &\leq \frac{1}{2^k} \left\| \sum_{q=1}^{\ell-1} \hat{\mathcal{A}}\left(\frac{q-1}{2^k}\right) y_k\left(\frac{q-1}{2^k}\right) \right\| \\ &\quad + \frac{1}{2^{k+1}} \left\| \hat{\mathcal{A}}\left(\frac{\ell-1}{2^k}\right) \right\| \left\| y_k\left(\frac{\ell-1}{2^k}\right) \right\| \\ &\quad + \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \pi_k \int_0^t \left[ \hat{\mathcal{B}}(s) \hat{\varphi}(s-\tau) - \mathcal{B}(s) \varphi(s-\tau) \right] ds \right\| \\ &\quad + \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \pi_k \int_0^t \left[ \hat{\mathcal{A}}(s) \pi_k x_1(s) - \mathcal{A}(t) x_1(t) \right] ds \right\|. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Defínase  $C_k^* = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \max_{q \in \Gamma} \left\| \hat{\mathcal{A}}\left(\frac{q-1}{2^k}\right) \right\|$ , y asúmase  $C_k^* > 0$ . Esta restricción no es significativa ya que  $A(t)$  y  $B(t)$  son acotadas, por lo tanto  $\hat{A}(t)$  y  $\hat{B}(t)$  son acotados, y  $\frac{1}{2^{k+1}} \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ .

Se tiene:

$$\left\| \sum_{q=1}^{\ell-1} \hat{\mathcal{A}}\left(\frac{q-1}{2^k}\right) y_k\left(\frac{q-1}{2^k}\right) \right\| \leq \max_{q \in \Gamma} \left\| \hat{\mathcal{A}}\left(\frac{q-1}{2^k}\right) \right\| \left\| \sum_{q=1}^{\ell-1} y_k\left(\frac{q-1}{2^k}\right) \right\|. \quad (3.74)$$

De todo lo anterior y definiendo:  $D_k^* \triangleq \frac{1}{2^k} \frac{A_k^*}{C_k^*}$ , con  $A_k^* = \max_{q \in \Gamma} \left\| \hat{\mathcal{A}}\left(\frac{q-1}{2^k}\right) \right\|$  y denotando:

$$\begin{aligned} B_k^* &= \frac{1}{C_k^*} \left[ \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \pi_k \int_0^t \left[ \hat{\mathcal{A}}(s) \pi_k x(s) - \mathcal{A}(t) x(t) \right] ds \right\| \right. \\ &\quad \left. + \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \pi_k \int_0^t \left[ \hat{\mathcal{B}}(s) \hat{\varphi}(s-\tau) - \mathcal{B}(s) \varphi(s-\tau) \right] ds \right\| \right], \end{aligned}$$

se llega a:

$$\left\| y_k\left(\frac{\ell-1}{2^k}\right) \right\| \leq B_k^* + D_k^* \sum_{q=1}^{\ell-1} \left\| y_k\left(\frac{q-1}{2^k}\right) \right\|. \quad (3.75)$$

Lo que resulta:

$$\left\| y_k\left(\frac{\ell-1}{2^k}\right) \right\| \leq B_k^* (1 + D_k^*)^{\ell-1}. \quad (3.76)$$

En efecto, para  $\ell = 1$ ,  $\left\| y_k \left( \frac{\ell-1}{2^k} \right) \right\| \leq B_k^*$ , y asumiendo  $B_k^* + D_k^* \sum_{q=1}^{\ell-2} \left\| y_k \left( \frac{q-1}{2^k} \right) \right\| \leq B_k^* (1 + D_k^*)^{\ell-2}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| y_k \left( \frac{\ell-1}{2^k} \right) \right\| &\leq B_k^* + D_k^* \sum_{q=1}^{\ell-2} \left\| y_k \left( \frac{q-1}{2^k} \right) \right\| + D_k^* \left\| y_k \left( \frac{\ell-2}{2^k} \right) \right\| \\ &\leq B_k^* (1 + D_k^*)^{\ell-2} + D_k^* B_k^* (1 + D_k^*)^{\ell-2} \\ &\leq B_k^* (1 + D_k^*)^{\ell-1}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Para  $t \in \Delta_k(\ell)$  se tiene  $\frac{\ell-1}{2^k} \leq t$ , entonces  $\ell-1 \leq 2^k t$ , por lo tanto:

$$\|y_k(t)\| \leq B_k^* (1 + D_k^*)^{2^k t}. \quad (3.78)$$

Considerando la definición de  $D_k^*$  se tiene:

$$\begin{aligned} (1 + D_k^*)^{2^k t} &\leq \left( 1 + \frac{A_k^*}{2^k - \frac{A_k^*}{2}} \right)^{2^k t} \\ &\leq \left( 1 + \frac{A_k^*}{2^k - \frac{A_k^*}{2}} \right)^{2^k t - \frac{A_k^*}{2} t} \left( 1 + \frac{A_k^*}{2^k - \frac{A_k^*}{2}} \right)^{\frac{A_k^*}{2} t}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ya que  $t \in [0, 1]$ , y ya que se asumió  $1 - \frac{1}{2^{k+1}} A_k^* > 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{A_k^*}{2^k - \frac{A_k^*}{2}} \right)^{2^k t - \frac{A_k^*}{2} t} &\leq \left( 1 + \frac{A_k^*}{2^k - \frac{A_k^*}{2}} + \frac{1}{2!} \left( \frac{A_k^*}{2^k - \frac{A_k^*}{2}} \right)^2 + \dots \right)^{2^k t - \frac{A_k^*}{2} t} \\ &\leq e^{A_k^* t} \\ &\leq e^{A_k^*} \end{aligned} \quad (3.80)$$

y

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{A_k^*}{2^k - \frac{A_k^*}{2}} \right)^{\frac{A_k^*}{2} t} &= (1 + D_k^*)^{\frac{A_k^*}{2} t} \\ &\leq (1 + D_k^*)^{\frac{A_k^*}{2}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

De (3.80), (3.81) y (3.78) we se llega a:

$$\|y_k(t)\| \leq B_k^* e^{A_k^*} (1 + D_k^*)^{\frac{A_k^*}{2}}, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3.82)$$

La expresión  $e^{A_k^*} (1 + D_k^*)^{\frac{A_k^*}{2}}$  es acotada, y claramente  $x \in \mathcal{C}_\Delta$ , y ya que  $\varphi(t - \omega) \in \mathcal{C}_\Delta$ , se tiene  $B_k^* \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ , por lo tanto se tiene  $\|y_k\| \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ , esto es:

$$\|\mathcal{T}_k \varphi - T \varphi\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_\Delta, \quad (3.83)$$

de donde se sigue inmediatamente que:

$$\|\mathcal{U}_k \varphi - U \varphi\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_\Delta, \quad (3.84)$$

Lo que concluye la prueba. □

**Corollario 3.8.** *si  $\varphi$  es Lipschitz, entonces el error de aproximación  $\mathcal{U}_k$ , satisface  $\|\mathcal{U}_k \varphi - U \varphi\| \in O\left(\frac{1}{k}\right)$ .*

*Prueba.* De (3.78), se tiene que, ya que  $\varphi$  es Lipschitz, y  $x(t)$  es diferenciable, el resultado sigue inmediatamente del Lema 2.40. □

Ahora, se prueba que la solución aproximada es en efecto igual a la aproximación de Walsh de la solución exacta. Primero se prueba:

**Lema 3.9.** [24] *Sea  $\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell w_\ell(t)$  la expansión de Walsh de una función  $f(t)$ , si  $\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell w_\ell(t)$  converge a cero en todas partes, entonces  $c_i = 0$ ,  $i \geq 0$ .*

Con esto se tiene lo necesario para probar:

**Teorema 3.10.** *Sea  $x(t) = T \varphi(\theta)$ , la solución de (3.36) correspondiente a una condición inicial  $\varphi(\theta)$  para  $\theta \in [-\tau, 0]$ . De la misma forma sea  $\hat{x}(t) = \mathcal{T}_k \hat{\varphi}(\theta)$ , la solución de (3.37), entonces  $\hat{x}(t) = \pi_k x(t)$ .*

*Prueba.* Se tiene  $\hat{x}(t) = \sum_{\ell=0}^{2^k} c_\ell w_\ell(t)$  y  $\pi_k x(t) = \sum_{\ell=0}^{2^k} d_\ell w_\ell(t)$ , para algunos coeficientes  $c_\ell$  y  $d_\ell$ , entonces :

$$\|\pi_k x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \|x(t) - \hat{x}(t)\| + \|\pi_k x(t) - x(t)\|. \quad (3.85)$$

Ya que la solución  $x(t)$  es continua y de (3.83) se tiene que los dos términos en la derecha convergen a cero, por lo tanto:  $\sum_{\ell=0}^{2^k} (c_\ell - d_\ell) w_\ell(t)$  converge a cero uniformemente, por lo tanto en todas partes, y del Lema 3.9 se tiene  $c_\ell = d_\ell$ , para  $\ell = 0, \dots, 2^k$ , esto es  $\hat{x}(t) = \pi_k x(t)$   $\square$

**Corollario 3.11.**  $\mathcal{U}_k \varphi(t) = \pi_k U \varphi(t)$ ,

**Lema 3.12.** Sea  $X \subset \mathcal{C}_\Delta$  compacto, entonces para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $k \in \mathbb{N}$ , tal que:

$$\|\pi_k x - x\| < \varepsilon, \quad \forall x \in X. \quad (3.86)$$

*Prueba.* Sea  $\varepsilon > 0$ , ya que  $X$  es compacto, existe un número finito de bolas abiertas de radio  $\frac{\varepsilon}{3}$  centradas en finitos puntos  $x_1, \dots, x_N \in X$  que cubren  $X$ , entonces  $\forall x \in X$ ,  $\|x - x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$ , para algunos  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Sea  $k$  tal que para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\|\pi_k x_i - x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Sea  $x \in X$ , entonces para algún  $i \in \{1, \dots, N\}$ :

$$\begin{aligned} \|\pi_k x - x\| &\leq \|\pi_k x - \pi_k x_i\| + \|x - x_i\| + \|\pi_k x_i - x_i\| \\ &\leq \|\pi_k\| \|x - x_i\| + \|x - x_i\| + \|\pi_k x_i - x_i\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ya que existe solo un número finito de  $x_i$ , el resultado deseado sigue inmediatamente.  $\square$

La solución de (3.1) estará dada por:

$$x(t) = X(t, 0) \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 X(t, s + \tau) B(s + \tau) \varphi(s) ds, \quad (3.87)$$

donde  $X$  es una matriz de soluciones tal que  $X(0, 0) = I$  y  $X(t, 0) = 0$  para  $t < 0$  [22]. Si  $\varphi \in \mathcal{C}_\Delta$  entonces la solución  $x(t)$  será continua y la matriz de soluciones  $X$  sera la misma que para el espacio  $\mathcal{C}$ . Más aún se tendrá un operador acotado:

$$\|x(t)\| = \|T(\varphi(\theta))\| \leq \|T\| \|\varphi(\theta)\|, \quad (3.88)$$

y como en  $\mathcal{C}$ , se tendrá que  $T$  mapea secuencias acotadas arbitrarias en secuencias equicontinuas, entonces por el Teorema de Arzelá-Ascoli se tendrá que  $T$  es compacto en  $\mathcal{C}_\Delta$ .

Ahora se tiene que:

**Teorema 3.13.** El operador de monodromía aproximado  $\mathcal{U}_k$  converge uniformemente al operador de monodromía  $U$ .

*Prueba.* Denótese por  $\bar{B}$  a la bola unitaria cerrada en  $\mathcal{C}_\Delta$ . Ya que  $T$  es compacto, entonces la imagen de  $T$  sobre  $\bar{B} T \bar{B}$  es también compacta y por el Lema 3.12 se tiene que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $k$  tal que:

$$\|\mathcal{T}_k - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\pi_k T x - T x\| < \varepsilon. \quad (3.89)$$

El hecho de que  $\|\mathcal{U}_k - U\| \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  se sigue inmediatamente.  $\square$

Con esto se puede establecer convergencia espectral:

**Teorema 3.14.** *El espectro del operador de monodromía aproximado  $\mathcal{U}_k$  converge al espectro del operador de monodromía  $U$ . Más precisamente, para todo abierto  $\mathcal{V}$ , tal que  $\sigma(U) \subset \mathcal{V}$ , existe  $K$  tal que  $\sigma(\mathcal{U}_k) \subset \mathcal{V}$ , para todo  $k \geq K$ . Mas aún sea,  $\lambda_0 \in \sigma(U)$  y sea  $\Gamma$  un círculo pequeño centrado en  $\lambda_0$  tal que cualquier otro eigenvalor de  $U$  este afuera de  $\Gamma$ , entonces la suma de las multiplicidades de los eigenvalores de  $\mathcal{U}_k$  dentro de  $\Gamma$  serán iguales a la multiplicidad de  $\lambda_0$ .*

*Prueba.* Sea  $\Gamma$  un círculo pequeño con centro en  $\lambda_0 \in \sigma(U)$ , tal que cualquier otro eigenvalor de  $U$  esté fuera de este círculo. Entonces la proyección espectral de  $\lambda_0$  esta dada por:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda I - U)^{-1} d\lambda. \quad (3.90)$$

La proyección espectral del espectro de  $\mathcal{U}_k$  dentro de  $\Gamma$  estará dada por:

$$P_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda I - \mathcal{U}_k)^{-1} d\lambda. \quad (3.91)$$

Ya que  $\|U - \mathcal{U}_k\| \rightarrow 0$ , entonces  $P_k$  converge uniformemente a  $P$ , por lo tanto, debe existir  $k$  tal que parte del espectro de  $\mathcal{U}_k$  este en  $\Gamma$ .

Ya que  $P$  y  $P_k$  son operadores de dimensión finita y ya que  $P_k$  converge uniformemente a  $P$ , se tendrá que para un valor suficientemente grande de  $k$ :

$$\dim(P) = \dim(P_k), \quad (3.92)$$

esto es, la multiplicidad algebraica de  $\lambda_0$  será la misma que la multiplicidad algebraica del espectro de  $\mathcal{U}_k$  contenido en  $\Gamma$ .

□

### 3.2 Convergencia en $L_2$

El operador de monodromía está definido en el espacio de las funciones continuas, por lo tanto para considerar la convergencia en  $L^2(0, 1)$  es necesario considerar la extensión del operador a este espacio.

Se tiene:

**Lema 3.15.** *El operador de monodromía  $U$ , definido en el espacio  $\mathcal{C}$  tiene una extensión única  $\tilde{U}$  en el espacio de Hilbert  $L^2[0, 1]$ , tal que  $\|U\| = \|\tilde{U}\|$ ,  $\tilde{U}x = Ux$  para toda  $x \in \mathcal{C}$ , y  $\tilde{U}$  es compacto.*

*Prueba.* Dado que  $\mathcal{C}$  es denso en  $L^2(0, 1)$ , el resultado se tiene inmediatamente de los Teoremas 2.12 y 2.13. □

**Lema 3.16.** *La secuencia  $U_k$  converge fuertemente al operador de monodromía  $U$*

*Prueba.* Realizando el mismo análisis que en la prueba del Teorema 2.21 se tiene convergencia fuerte del operador aproximado en  $\mathcal{C}$ , que es un espacio denso en  $L^2$ . Por lo que se tiene que la secuencia  $\{\mathcal{U}_k x\}$  es Cauchy para toda  $x$  en un espacio denso en  $L^2$ . Ya que los operadores  $\mathcal{U}_k$  son proyecciones del operador acotado  $U$  en span de las funciones Walsh, se tiene que la secuencia  $\{\mathcal{U}_k\}$  es acotada. De lo anterior sigue por el Teorema (2.21) que  $U_q \xrightarrow{p} U$ . □

**Teorema 3.17.** *Sea el espacio  $L^2(0, 1)$ , el espectro del operador de monodromía  $\mathcal{U}_k$  aproximado converge al espectro del operador de monodromía  $U$ . La convergencia es en el mismo sentido que en el Teorema 3.14.*

*Prueba.* A partir de la convergencia fuerte, la convergencia uniforme y la convergencia del espectro siguen inmediatamente de los teoremas 3.13 y 3.14. □

La prueba de convergencia aplica para cualquiera de los tres métodos propuestos. Se tendrá entonces que es posible determinar la estabilidad del operador de monodromía a partir del estudio de la estabilidad del operador de monodromía aproximado.

## Capítulo 4

# Diagramas de Estabilidad de la Ecuación de Hill

En la figura 4.1 se puede observar la comparación entre el diagrama de estabilidad de la ecuación de Meissner:

$$\ddot{x}(t) + (\alpha + \beta \operatorname{sign}(\cos(t)))x(t) = 0, \quad (4.1)$$

y la ecuación de Meissner con retardo:

$$\ddot{x}(t) + (\alpha + \beta \operatorname{sign}(\cos(t)))x(t - \tau) = 0, \quad (4.2)$$

con  $\tau = \frac{2\pi}{50}$ . Puede observarse que para el caso con retardo las lenguas pasan de intersectarse en un punto a intersectarse en una región, esto es debido al efecto amortiguante del retardo.

La ecuación de Mathieu escalar esta dada por:

$$\ddot{x}(t) + (\alpha + \beta \cos(t))x(t) = 0 \quad (4.3)$$

En la figura 4.2 se puede ver el diagrama de estabilidad para la ecuación de Mathieu, se pueden observar las diferencias con los diagramas presentados a continuación:

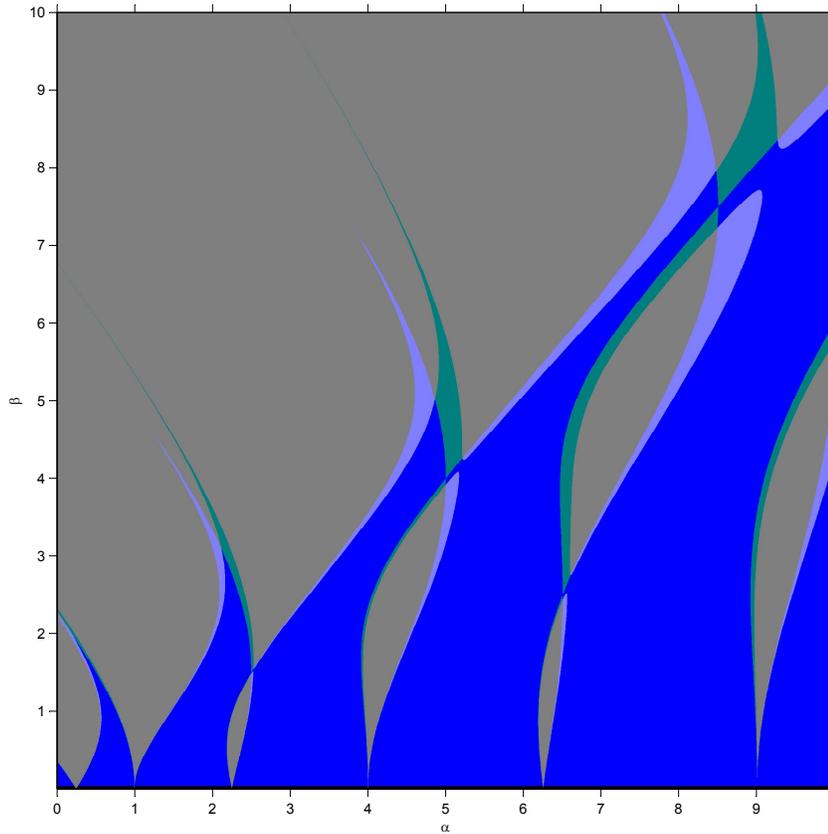


Fig. 4.1 Comparación entre diagramas de estabilidad para la ecuación de Meissner con y sin Retardo. Las lenguas de la ecuación con retardo corresponden al color verde, mientras que las lenguas de la ecuación sin retardo corresponden a las de color azul claro. El color azul más oscuro pertenece a las lenguas de ambas ecuaciones.

## 1 Método de Integración de Soluciones

Considérese la ecuación:

$$\ddot{x}(t) + [\alpha + \beta \cos(2\pi t)]x(t) = \gamma \cos(2\pi t)x(t - \tau). \quad (4.4)$$

La figura 4.3 muestra el diagrama de estabilidad para el plano paramétrico  $\alpha\gamma$  con  $\beta = 15.35$  y  $\tau = \frac{15}{256}$ . Para esta ecuación las zonas de estabilidad son desconexas y no existe simetría con respecto al eje horizontal, al contrario del caso de la ecuación de Mathieu sin retardo.

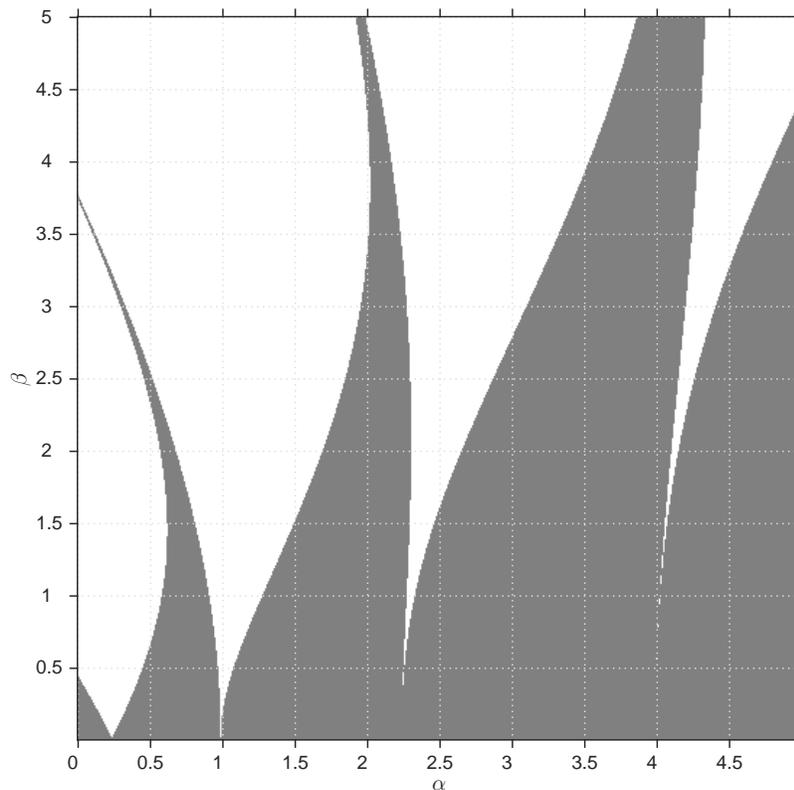


Fig. 4.2 Diagrama de estabilidad para la ecuación de Mathieu. En gris las zonas estables. En blanco las zonas inestables.

Considérese ahora la ecuación:

$$\ddot{x}(t) + [\alpha + \beta \cos(2\pi t)]x(t) = \delta x(t - \tau). \quad (4.5)$$

Esta ecuación es la que generalmente es entendida como la ecuación de Mathieu con retardo [6]. La figura 4.4 muestra el diagrama de estabilidad para el plano paramétrico  $\alpha\beta$  con  $\delta = 7.5$  y  $\tau = \frac{15}{256}$ . Las zonas de estabilidad son acotadas en  $\beta$  y existe una nueva región de inestabilidad no presente en el caso sin retardo.

Finalmente considérese:

$$\ddot{x}(t) + \alpha x(t) = [\delta + \gamma \cos(2\pi t)]x(t - \tau). \quad (4.6)$$

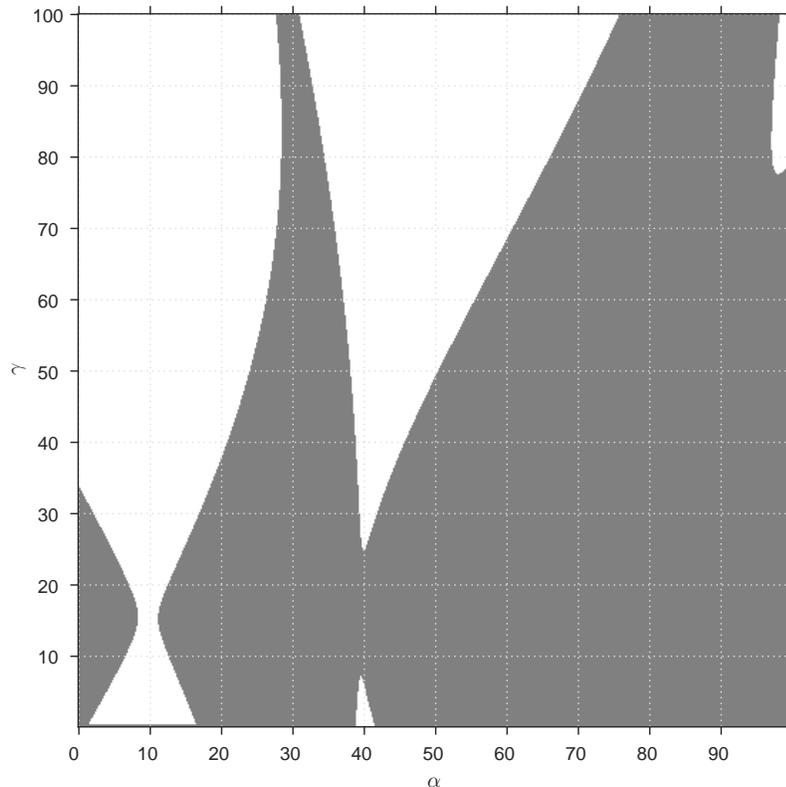


Fig. 4.3 Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.4). En gris las zonas asintóticamente estables. En blanco las zonas inestables.

La figura 4.5 muestra el diagrama de estabilidad del plano paramétrico  $\alpha\gamma$  con  $\delta = 7.35$  y  $\tau = \frac{12}{126}$ . Con gran parecido al diagrama de estabilidad para una ecuación de Mathieu con amortiguamiento, esta ecuación se comporta similar al caso sin retardo aún para un periodo relativamente grande.

## 2 Aproximación por el Método de Pasos

Considérese la ecuación:

$$\ddot{x}(t) + (\alpha + \beta \cos(t))x(t) = \gamma \cos(t)x(t - \tau). \quad (4.7)$$

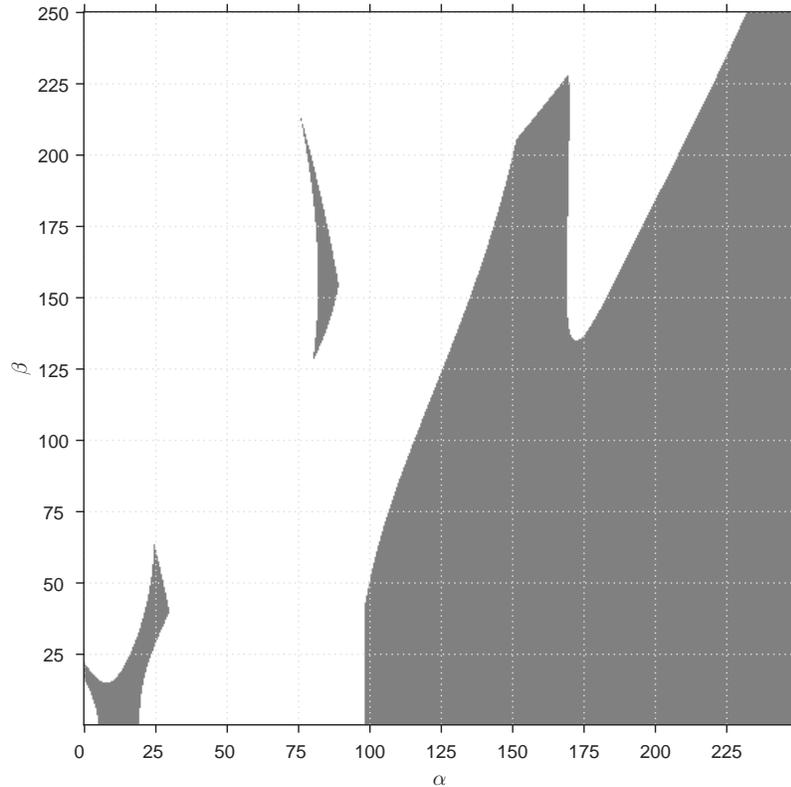


Fig. 4.4 Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.5). En gris las zonas asintóticamente estables. En blanco las zonas inestables.

La figura 4.6 muestra el diagrama de estabilidad de (4.7) para el plano  $\alpha\beta$  con  $\tau = \frac{2\pi}{30}$  y  $\gamma = 1.5$ . Para esta ecuación las zonas de estabilidad son desconexas y no existe simetría con respecto al eje horizontal.

Considérese también:

$$\ddot{x}(t) + [\alpha + \beta \cos(2\pi t)]x(t) = \delta x(t - \tau). \quad (4.8)$$

La figura 4.7 muestra el diagrama de estabilidad para el plano paramétrico  $\alpha\beta$  de la ecuación (4.8) con  $\delta = 0.15$  y  $\tau = \frac{2\pi}{1+50/128}$ . Las zonas de estabilidad son acotadas en  $\beta$ , y se observa el nuevo tipo de región de estabilidad para  $\beta = 0$ .

Por último:

$$\ddot{x}(t) + \alpha x(t) = [\delta + \gamma \cos(2\pi t)]x(t - \tau). \quad (4.9)$$

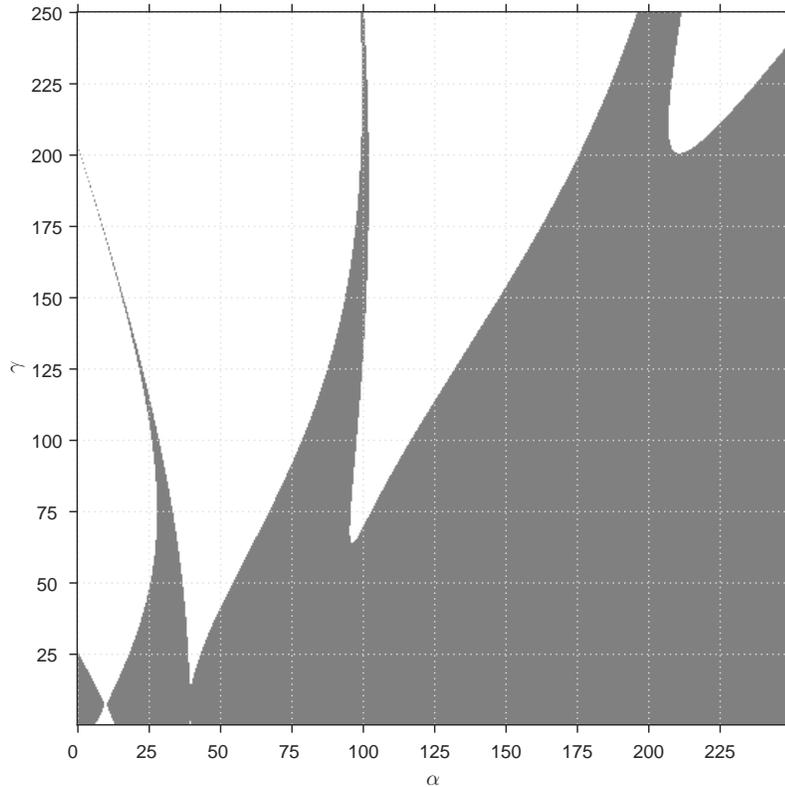


Fig. 4.5 Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.6). En gris las zonas asintóticamente estables. En blanco las zonas inestables.

La figura 4.8 muestra el diagrama de estabilidad para la ecuación (4.9) en el plano  $\alpha\gamma$  con  $\delta = 0.85$  y  $\tau = \frac{2\pi}{12}$ .

Los diagramas para el caso de la ecuación de Mathieu muestran la variedad de comportamientos nuevos que se generan el sistema al introducir un retardo. Es interesante observar que además del efecto de amortiguamiento, en algunos casos se generan zonas de inestabilidad que naturalmente no existen en el caso sin retardo. Se observa también la variación que existe al considerar la excitación paramétrica en el término con retardo.

El algoritmo para obtener los diagramas de estabilidad es altamente paralelizable, es posible entonces hacer uso de GPUs para la generación de diagramas de estabilidad reduciendo drásticamente el tiempo de cómputo.

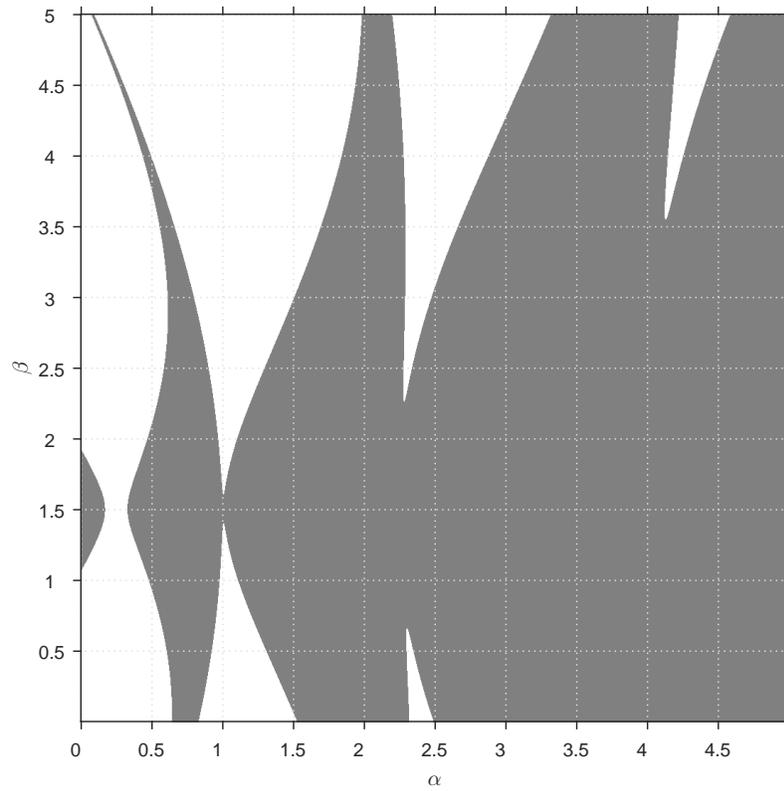


Fig. 4.6 Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.7). En gris las zonas asintóticamente estables. En blanco las zonas inestables.

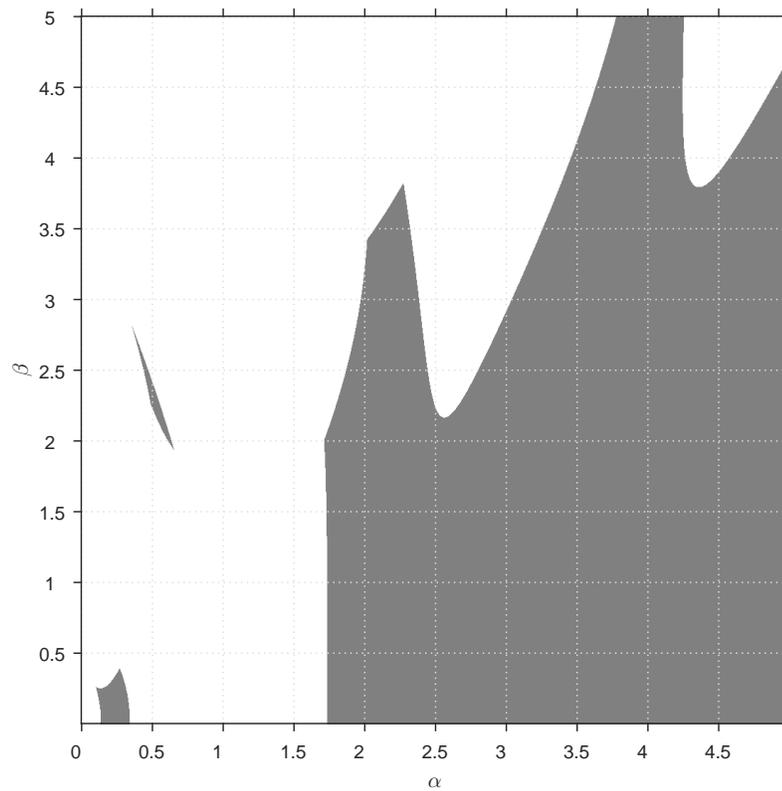


Fig. 4.7 Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.8). En gris las zonas asintóticamente estables. En blanco las zonas inestables.

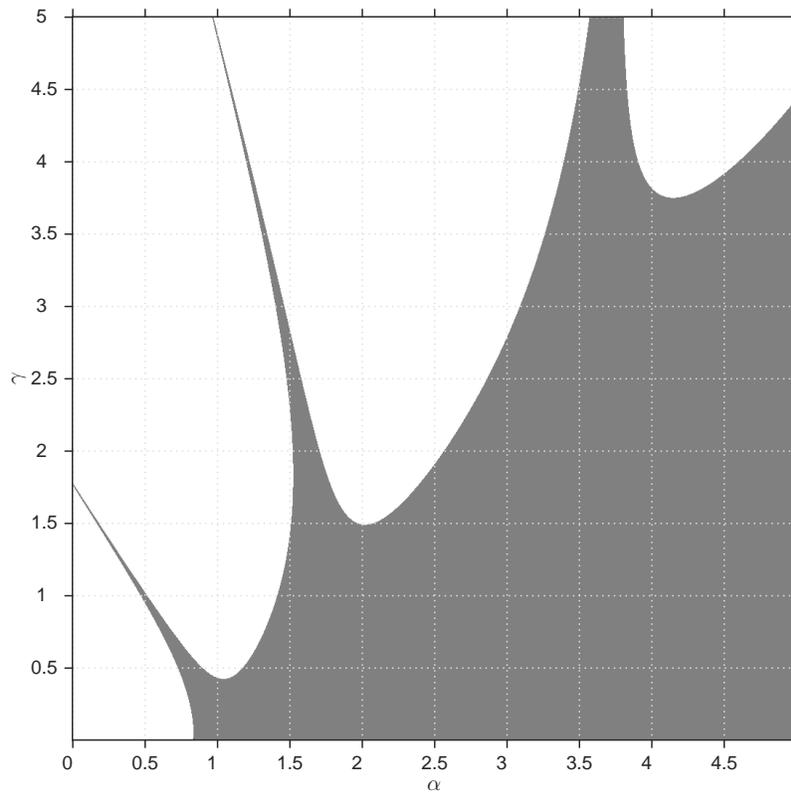


Fig. 4.8 Diagrama de estabilidad para la ecuación (4.9). En gris las zonas asintóticamente estables. En blanco las zonas inestables.



# Capítulo 5

## Aplicación de la Ecuación de Hill con Retardo

La existencia de los efectos del retardo durante el maquinado de piezas mecánicas es bien conocido [35]. Las vibraciones producidas durante el proceso afectan la cantidad de material que se corta, lo que trae efectos como el desgaste de las herramientas de corte o defectos en el acabado. Más aún debido a la rotación de la herramienta de corte, o de la pieza, existen fuerzas de carácter periódico que intervienen durante el proceso.

En el caso de un torno, durante la primera revolución de la pieza se tendrán irregularidades en la cantidad de material cortado, esto debido a la oscilaciones del proceso. Durante la segunda revolución se tendrá entonces que la cantidad de material cortado dependerá de la cantidad de material resultante del corte correspondiente a una revolución anterior, y es así como aparece el efecto del retardo. La Figura 5.1 muestra gráficamente el fenómeno del retardo.

El modelado del proceso de corte se hace en base a la diferencia entre la cantidad de material removida y la cantidad de material que se esperaba remover, de forma que estabilizar esta variable equivale a eliminar las variaciones en la profundidad de corte.

Considerando las vibraciones periódicas que actúan en la dirección de corte se puede modelar este proceso por medio de una ecuación de Hill con retardo:

$$\ddot{x}(t) + (\alpha + \beta)q(t)x(t) = x(t - \tau). \quad (5.1)$$

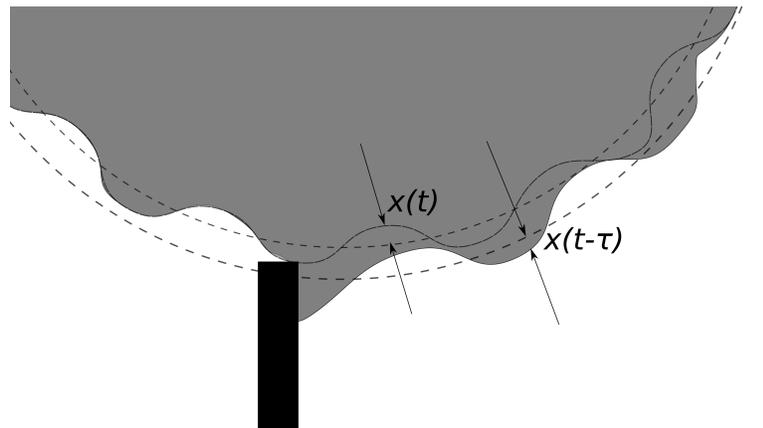


Fig. 5.1 Efecto del retardo durante el maquinado.

Entonces, para resolver el problema causado por las oscilaciones será necesario determinar los diagramas de estabilidad para la ecuación correspondiente, para posteriormente identificar los parámetros para los cuales se tiene un comportamiento asintóticamente estable.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Se lograron obtener por primera vez diagramas de estabilidad en los planos paramétricos de la ecuación de Hill con retardo sin la restricción de  $\omega = \tau$ . Los diagramas obtenidos muestran diferentes comportamientos de acuerdo a la configuración del retardo y la excitación paramétrica. El caso más interesante es la aparición de una región de estabilidad no observada en el caso sin retardo.

El uso del método de Walsh permite caracterizar el retardo de una forma natural simplificando y reduciendo el orden de la aproximación necesaria, compensando así la menor velocidad de convergencia de las aproximaciones por funciones de Walsh con respecto a las aproximaciones por funciones de Fourier o polinomios de Chebyshev.



# Capítulo 7

## Trabajo Futuro

- Obtener una caracterización de la ecuación diferencial periódica equivalente a la ecuación diferencial con retardo en cada uno de los eigenespacios.
- Realizar el algoritmo para el caso de retardos distribuidos.
- Realizar un algoritmo para analizar la estabilidad de la ecuación de Hill con retardo como un problema de Sturm-Liouville.



# Bibliografía

- [1] S. Norikin, *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*. Academic Press, 1973, vol. 105.
- [2] A. Stokes, “A Floquet theory for functional differential equation,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 48, no. 8, p. 1330, 1962.
- [3] S. Shimanov, “On stability of quasiharmonic systems with retardation,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 25, no. 6, pp. 1494–1507, 1961.
- [4] B. P. Lampe and E. Rosenwasser, “Stability investigation for linear periodic time-delayed systems using fredholm theory,” *Automation and Remote Control*, vol. 72, no. 1, pp. 38–60, 2011.
- [5] Y. F. Dolgii and E. Ulyanov, “Singular numbers of the monodromy operator and sufficient conditions of the asymptotic stability of periodic system of differential equations with fixed delay,” *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 259, no. 2, pp. S95–S110, 2007.
- [6] T. Insperger and G. Stépán, “Stability chart for the delayed Mathieu equation,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 458, no. 2024, pp. 1989–1998, 2002.
- [7] Y. F. Dolgii, “Application of self-adjoint boundary value problems to investigation of stability of periodic delay systems,” *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 255, no. 2, pp. S16–S25, 2006.
- [8] D. Breda, “On characteristic roots and stability charts of delay differential equations,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 22, no. 8, pp. 892–917, 2012.
- [9] E. Bueler, “Chebyshev collocation for linear, periodic ordinary and delay differential equations: a posteriori estimates,” *arXiv preprint math/0409464*, 2004.
- [10] D. E. Gilsinn, F. A. Potra *et al.*, “Integral operators and delay differential equations,” *Journal of Integral Equations and Applications*, vol. 18, no. 3, pp. 297–336, 2006.

- 
- [11] W. Magnus and S. Winkler, *Hill's Equation*, ser. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2004.
- [12] S. Shimanov, "On the theory of linear differential equations with periodic coefficients and time lag," *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 27, no. 3, pp. 674–687, 1963.
- [13] E. A. Vazquez and J. Collado, "Monodromy operator approximation of periodic delay differential equations by Walsh functions," in *13th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*. IEEE, 2016.
- [14] ———, "Finite dimensional approximation of the monodromy operator of a periodic delay differential equation with piecewise constant orthonormal functions," *Applied Mathematics*, no. 9, pp. 1315–1337, 2018.
- [15] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications*, ser. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, 1978.
- [16] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [17] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators part I: general theory*. Interscience publishers New York, 1958, vol. 7.
- [18] F. Chatelin, *Spectral approximation of linear operators*. SIAM, 2011.
- [19] J. J. Saccoman, "On the extension of linear operators," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 28, no. 10, pp. 621–623, 2001.
- [20] J. L. Walsh, "A closed set of normal orthogonal functions," *American Journal of Mathematics*, vol. 45, no. 1, pp. 5–24, 1923.
- [21] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to functional differential equations*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 99.
- [22] A. Halanay, *Differential equations: Stability, oscillations, time lags*. Academic Press, 1966, vol. 23.
- [23] B. Golubov, A. Efimov, and V. Skvortsov, *Walsh series and transforms: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 64.
- [24] N. J. Fine, "On the Walsh functions," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 65, no. 3, pp. 372–414, 1949.
- [25] P. Billard, "Sur la convergence presque partout des séries de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace  $l^2(0, 1)$ ," *Studia Mathematica*, vol. 3, no. 28, pp. 363–388.
- [26] N. Ahmed and K. R. Rao, *Orthogonal transforms for digital signal processing*. Springer Science & Business Media, 2012.

- 
- [27] V. Karanam, P. Frick, and R. Mohler, "Bilinear system identification by walsh functions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, no. 4, pp. 709–713, 1978.
- [28] W.-L. Chen and Y.-p. Shih, "Shift Walsh matrix and delay-differential equations," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 23, no. 6, pp. 1023–1028, 1978.
- [29] D. Breda, S. Maset, and R. Vermiglio, "Pseudospectral methods for stability analysis of delayed dynamical systems," *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 2, no. 2, pp. 143–153, 2014.
- [30] G. Gát and R. Toledo, "Estimating the error of the numerical solution of linear differential equations with constant coefficients via walsh polynomials," *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, vol. 31, no. 2, pp. 309–330, 2015.
- [31] C. Kwong and C. Chen, "The convergence properties of block-pulse series," *International Journal of Systems Science*, vol. 12, no. 6, pp. 745–751, 1981.
- [32] G. Rao and T. Srinivasan, "Remarks on "author's reply"; to "comments on design of piecewise constant gains for optimal control via walsh functions";," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, no. 4, pp. 762–763, August 1978.
- [33] C. Cheng, Y. Tsay, and T. Wu, "Walsh operational matrices for fractional calculus and their application to distributed systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 303, no. 3, pp. 267–284, 1977.
- [34] M. Gulamhusein, "Simple matrix-theory proof of the discrete dyadic convolution theorem," *Electronics Letters*, vol. 9, no. 10, pp. 238–239, 1973.
- [35] T. Insperger, D. Lehotzky, and G. Stepan, "Regenerative delay, parametric forcing and machine tool chatter: A review," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 12, pp. 322–327, 2015.