



CENTRO DE INVESTIGACIONES Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Observador tipo Modos Deslizantes para Sistemas no  
Lineales en Tiempo Discreto con Ruidos Estocásticos**

T E S I S

Que presenta

David Velázquez Flores

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias

EN LA ESPECIALIDAD DE:

CONTROL AUTOMÁTICO

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Alexander Semionovich Poznyak Gorbatch

Ciudad de México.

AGOSTO 2018

*"Why are numbers beautiful? It's like asking why is Beethoven's Ninth Symphony beautiful. If you don't see why, nobody can tell you. I know numbers are beautiful. If they aren't beautiful, nothing is."*

-Paul Erdős

*"To those who do not know mathematics it is difficult to get across a real feeling as to the beauty, the deepest beauty, of nature ... If you want to learn about nature, to appreciate nature, it is necessary to understand the language that she speaks in."*

-Richard Feynman.

*"Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas".*

-Albert Einstein.

# Dedicatoria

*Dedicado a:*

*Los mejores padres del mundo, Ángel Velázquez Medina y Arcelia Flores Reyes, quienes sé que me apoyaron, apoyan y apoyarán incondicionalmente en todo momento y en cada decisión.*



# Agradecimientos

A:

- Consejo de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por haber hecho posible este sueño sustentando con una beca el transcurso de toda la maestría.
  
- Alejandra por inyectarme su energía y entusiasmo durante estos 2 años de locura y estudio.
  
- La familia López, mi amiga Kari, los hermanitos Javo y Abi, los papis Javier y Amalia a todos ustedes, por no sólo haberme abierto las puertas de su casa sino también de su corazón. Por tratarme como uno más de la familia. Nunca me olvido ni me olvidaré de ustedes.



•

**Sliding Mode Observer for Nonlinear Discrete-Time Systems with Stochastic Noises.**

by

Velázquez David

Submitted to the Department of Automatic Control

on August 31, 2018, in partial fulfillment of the

requirements for the degree of

Master in Sciences

**Abstract:**

In this thesis it is present the observation process of stochastic discrete-time models by a Luenberger observer (L) with an additional discontinuous term (L+SM). The observed system is assumed non-linear satisfying the global "quasi-Lipschitz condition and subject to stochastic input and output disturbances. The selection of the best gain matrices (in the observer) is realized numerically by application of the Robust Attractive Ellipsoid Method under some specific constraints of Symmetric as Bilinear and Linear Matrix Inequalities (BMI's and LMI's) type. The suggested approach is illustrated by designing the observer such that give us a good estimation, on a probability sense, for the estates of a Magnetic Tape-Drive (contained both estates in position and angular velocities and two measured outputs with stochastic noises). The considered system deal with stochastic perturbations in the model with special structure.





- 

## **Observador Por Modos Deslizantes para Sistemas no Lineales en Tiempo Discreto con Ruidos Estocásticos**

En la presente tesis se presenta el proceso de observación de modelos estocásticos en tiempo discreto, los cuales son estimados apartir de un observador de tipo Luenberger (L) con un término adisional (L+SM). Se asume que el sistema observado es no lineal y que satisface goblantemente la condición Çuasi-Lipschitzz está sujeto a perturbaciones de entrada y de salida, es decir, perturbaciones el modelo y de medición. La selección de las mejores ganancias matriciales (del observador ) es realizada numéricamente por la aplicación del método de Elipsoides Atractivas Robustas bajo algunas restricciones específicas tales como Desiguales Matriciales Bilineales y Lineales (BMI's y LMI's). EL enfoque sugerido es ilustrado al diseñar las ganancias del observador propuesto de manera que este filtro ofrezca una buena estimación, en un sentido probabilístico, para los estados de un Magnetic Tape-Drive (que contiene estados relacionados con posición y velocidades angulares y dos mediciones de salida con ruidos estocásticos. Este sistema trata con perturbaciones estocásticas en el modelo que no presentan correlación entre ellas.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>12</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>15</b>
1.1. Una vista general en control y estimación de sistemas estocásticos a tiempo discreto	15
1.2. Contribuciones principales . . . . .	17
1.3. Suposiciones principales . . . . .	17
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	19
<b>2. Descripción del sistema y formulación del problema</b>	<b>21</b>
2.1. Sistema no lineal en tiempo discreto con salida medible . . . . .	21
2.2. Formulación del problema . . . . .	23
<b>3. Análisis Robusto: Elipsoides Atractivas Estocásticas</b>	<b>25</b>
3.1. Definiciones principales . . . . .	25
3.1.1. Error de estimación . . . . .	25
3.1.2. Elipsoide Atractiva Estocástica . . . . .	26
3.2. Método de elipsoides atractivas robustas . . . . .	26
3.2.1. Representación analítica de la elipsoide atractiva . . . . .	31
3.3. Reducción de la zona de atracción . . . . .	33
3.3.1. Estimaciones inferior y superior de $E \left\{ \ \sigma(k)\ ^2 \right\}$ . . . . .	34
3.3.2. Cota inferior de $E \{ \ \sigma(k)\  \}$ . . . . .	35

<b>4. Selección de las ganancias matriciales óptimas</b>	<b>41</b>
4.1. La traza como criterio de optimización . . . . .	41
4.2. Problema: Optimización de ganancias con restricciones de desigualdades matriciales bilineales (BMI) . . . . .	42
4.3. Transformación de restricciones de BMI a LMI . . . . .	43
4.3.1. Complemento de Schur . . . . .	43
4.3.2. Transformación de las restricciones . . . . .	43
4.4. Algoritmo para la solución . . . . .	49
<b>5. Ejemplos</b>	<b>51</b>
5.1. Ejemplo 1: Sistema no lineal (académico) . . . . .	51
5.2. Ejemplo 2: Posición de cinta magnética (Tape-Magnetic Position) . . . . .	55
<b>6. Conclusiones</b>	<b>63</b>
6.1. Algunos resultados importantes . . . . .	63

# Índice de figuras

2.1. Representación de función Cuasi-Lipschitz en el caso $n = k = 1$ . . . . .	22
5.1. Estado $x_1(k)$ Real vs Estimado . . . . .	53
5.2. Estado $x_1(k)$ Real vs Estimado . . . . .	53
5.3. Plano de fase de errores y zonas de atracción . . . . .	54
5.4. Sistema de posicionamiento de cinta magnética . . . . .	56
5.5. Trayectorias Real Vs Estimadas del estado $x_1(k)$ . . . . .	58
5.6. Trayectorias Real Vs Estimadas del estado $x_2(k)$ . . . . .	59
5.7. Trayectorias Real Vs Estimadas del estado $x_3(k)$ . . . . .	59
5.8. Trayectorias Real Vs Estimadas del estado $x_4(k)$ . . . . .	60
5.9. Elipse en error de posición. . . . .	61
5.10. Elipse en error de velocidad. . . . .	61



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Una vista general en control y estimación de sistemas estocásticos a tiempo discreto

Muchas veces la observación de estados es fundamental para lograr hacer control ya que no siempre todos los estados están disponibles para medición debido a los costos que esto pueda generar.

El control por modo deslizante (SMC) es una de las técnicas más populares para estabilizar sistemas estocásticos lineales o no lineales a tiempo discreto. Sin embargo, la aplicación de SMC se vuelve difícil cuando no todos los estados del sistema no están disponibles para la realimentación. Y más aún, cuándo los pocos estados disponibles para medición contienen ruidos de alguna índole.

En ingeniería existen muchos procesos de control que presentan señales con fluctuaciones irregulares. un modelo para un fenómeno de este tipo en la forma de un sistema dinámico estocástico tendrá una complejidad mucho menor que un sistema dinámico determinista que logre el mismo ajuste de valor para señal medida.

La observación de sistemas lineales y no lineales determinísticos con perturbaciones acotadas ha sido extensivamente estudiados como se puede ver en [4] y [5]. Sin embargo en la mayoría de los trabajos se considera que los estados disponibles como salida están libres de ruidos de medición.

En la utilización del método *Modos deslizantes* se ha trabajado con sistemas con perturbaciones acotadas como la estimación por el método presentado en [6, 7, 10] que hace referencia a modos

deslizantes de orden superior. De igual manera que en los anteriores se considera que la salida no clase alguna de perturbaciones. En particular, en esta tesis, se abordan los sistemas discretos. Aunque estos sistemas son importantes, la aplicación de métodos de estructura variable se ha abordado poco en comparación a los sistemas continuos, sin embargo, en [8] y [9] se puede encontrar un estudio muy bueno sobre la aplicación de modos deslizantes en los sistemas discretos.

Los sistemas estocásticos no han tenido tanta suerte como los determinísticos. Para un acercamiento a la estimación de los sistemas no lineales estocásticos en tiempo continuo se pueden ver [14, 15, 16]. La cantidad de trabajos, en los que se aplica la metodología de modos deslizantes para hacer observación o control de los SETD, es muy limitada. Por ejemplo, los trabajos en los que se puede estudiar el control de algunos tipos sistemas estocásticos en tiempo discreto son [17, 18, 19]. Hablando de observación se puede ver [13] donde se estudia la estimación de un sistema lineal con perturbaciones estocásticas de entrada y de salida. Donde se puede ver también la observación de sistemas estocásticos es en [20].

Esta tesis se concentra en el estudio de modelos no lineales a tiempo discreto que están influenciados por perturbaciones de naturaleza estocásticas. Algunas de las restricciones consideradas en este trabajo han sido sugeridas por ejemplo en [23]. El estudio de la estabilidad de sistemas no lineales estocásticos se puede encontrar en [24]. En [21] se presenta un procedimiento muy parecido al que se utilizará aquí para encontrar las ganancias matriciales óptimas para el filtro que proporcionará la estimación.



## 1.2. Contribuciones principales

- En la presencia de dinámicas no medeladas o perturbaciones no decrecientes, obviamente, el error de estimación no puede hacerse tan pequeño como se quisiera pero puede ser llevado a una zona elipsoidal, de dimensiones correspondientes, o en otras palabras a una Elipsoide Atractiva. Haciendo manipulaciones de términos puede reducirse la región de convergencia haciendo preferible la técnica presentada.
- Una desigualdad matricial trilineal es obtenida proporcionando una buena convergencia, en un sentido probabilístico, y como resultado asegura la propiedad robustez del observador siedeñado para sistemas estocásticos no lineales pertenecientes a la clase de funciones Cuasi-Lipschitz.
- Descomposición de una restricción en forma de desigual matricial trilineal en varias desigualdades matriciales lineales.
- Se sugiere el procedimiento numérico de optimización matricial, basado en el Método del Punto Interior [25], el cual usa las restricciones. lineales.
- Se proporcionan los valores numéricos de las matrices  $L$  y  $L_s$  que garantizas la mínima, en el sentido de la traza, elipsoide atractiva donde, con probabilidad 1, llegará el error de estimación.

## 1.3. Suposiciones principales

- El par  $(A,C)$  es observable.
- Los ruidos contemplados en los vectores estocásticos,  $\xi_x$  y  $\xi_y$ , no están correlacionados.
- EL sistema (2.2) es BIBO-estable, que es,

$$\limsup_{k \geq 0} E \left\{ \|x(k)\|^2 \right\} \leq X_+$$

- La dinámica  $f(x(k), k)$  puede ser no lineal pero satisface

$$\|f(x(k), k) - Ax(k)\|^2 \leq f_0 + f_1 \|x(k)\|^2$$

- El control  $u(k)$  está dado y satisface

$$\limsup_{k \geq 0} E \left\{ \|u(k)\|^2 \right\} \leq U_+$$

- El segundo momento condicional de las secuencias estocásticas,  $\xi_x$  y  $\xi_y$ , están acotadas por una matriz de covarianza constante y satisfacen

$$\begin{aligned} E \{ \xi_x(k+1) \mid \mathcal{F}_k \} &\stackrel{a.s.}{=} 0 \\ E \{ \xi_y(k+1) \mid \mathcal{F}_k \} &\stackrel{a.s.}{=} 0 \\ E \{ \xi_x(k+1) \xi_x^T(k+1) / \mathcal{F}_k \} &\leq \bar{\Xi}_x = \text{const} \\ E \{ \xi_y(k+1) \xi_y^T(k+1) / \mathcal{F}_k \} &\leq \bar{\Xi}_y = \text{const} \\ E \{ \xi_x(k+1) \xi_y^T(k+1) / \mathcal{F}_k \} &\stackrel{a.s.}{=} 0 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{F}_k$  es la mínima sigma-álgebra generada por la prehistoria del proceso, i.e.,

$$\mathcal{F}_k = \sigma(x(0), u(0), \xi_y(0); x(1), u(1), \xi_x(1), \xi_y(1); \dots; x(k), u(k), \xi_x(k), \xi_y(k))$$

## **1.4. Estructura de la tesis**

El segundo capítulo contiene la descripción completa de los modelos no lineales estocásticos tratados y la formulación del problema que se resolverá. El tercer capítulo presenta el resultado principal: la elipsoide atractiva robusta a la cual convergen las trayectorias del error de estimación. EL capítulo cuatro trata el problema relacionado con el problema de optimización matricial formulado bajo las restricciones trilineales y se describen los cambios de coordenadas necesarios para representar estas restricciones como desigualdades matriciales lineales. En el capítulo 5 se presenta la aplicación del método propuesto, obteniendo las estimaciones de estados y la representación gráfica de las elipsoides de atracción. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones.



# Capítulo 2

## Descripción del sistema y formulación del problema

### 2.1. Sistema no lineal en tiempo discreto con salida medible

Supóngase que las secuencias estocásticas

$$\{x_k\}_{k \geq 0}, \{\xi_x(k)\}_{k \geq 0}, \{y(k)\}_{k \geq 0}, \{\xi_y(k)\}_{k \geq 0} \text{ y } \{u(k)\}_{k \geq 0} \quad (2.1)$$

se definen en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$  y están relacionadas mediante la siguiente ley de recursividad

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k)) + Bu(k) + \xi_x(k+1) \\ y(k) &= Cx(k) + \xi_y(k) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  son los estados (no medibles),  $y(k) \in \mathbb{R}^m$  con  $m < n$  es la salida (medible),  $u(k) \in \mathbb{R}^l$  es el control y  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Las matrices  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$  y  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se asumen conocidas. Por otro lado, el mapeo no lineal  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se supone desconocido *a priori* pero perteneciente a la llamada clase de funciones Cuasi-Lipschitz.

La definición formal de la clase de funciones Cuasi-Lipschitz  $h(x)$  se formula a continuación:

*Definición 1.* Una función  $h(x) \in \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que pertenece en la clase  $C(f_0, f_1, A)$  de funciones Cuasi-Lipschitz si existen constantes no negativas  $f_0, f_1$  y una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  tales que,

para toda  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ , se mantenga la desigualdad

$$\|f(x(k)) - Ax(k)\|^2 < f_0 + f_1 \|x(k)\|^2 \quad (2.3)$$

La velocidad de crecimiento de una función perteneciente a la clase  $C(f_0, f_1, A)$  no es más rápida que una función lineal (vease la Fig.2.1 que ilustra el caso  $n = k = 1$ ).

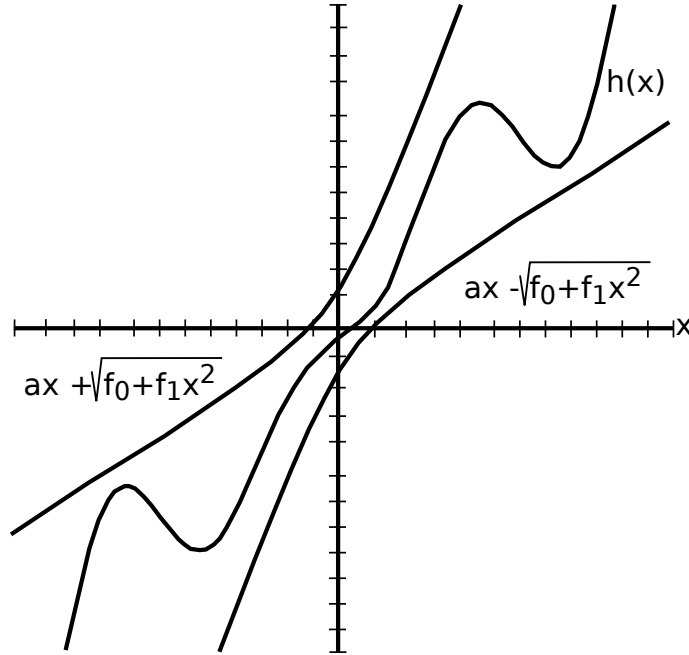


Figura 2.1: Representación de función Cuasi-Lipschitz en el caso  $n = k = 1$

La clase de funciones  $C(f_0, f_1, A)$  agrupa a todas las funciones no lineales que pueden ser abordadas mediante el enfoque mostrado en este trabajo. Un estudio más profundo de funciones Cuasi-Lipschitz utilizadas ampliamente en análisis robusto de sistemas dinámicos puede encontrarse en [1].

Los vectores aleatorios independientes  $\xi_x(k)$  y  $\xi_y(k)$  se asumen *martingalas en diferencia* con respecto a la mínima  $\sigma$ -álgebra

$$\mathcal{F}_k := \sigma(x(0), u(0), \xi_y(0), \dots, u(k), x(k), \xi_x(k), \xi_y(k)) \quad (2.4)$$

esto implica que al fijar la historia del proceso descrita por  $\mathcal{F}_k$  en (2.4) se cumple

$$\begin{aligned} E\{\xi_x(k+1)|\mathcal{F}_k\} &\stackrel{a.s.}{=} 0 \\ E\{\xi_y(k)|\mathcal{F}_k\} &\stackrel{a.s.}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Debido a que las señales estocásticas  $\xi_x(k)$  y  $\xi_y(k)$  son independientes se establece la relación

$$E\{\xi_x(k+1)\xi_y^T(k+1)|\mathcal{F}_k\} = E\{\xi_x(k+1)|\mathcal{F}_k\}E\{\xi_y^T(k+1)|\mathcal{F}_k\} \stackrel{a.s.}{=} 0 \quad (2.6)$$

Finalmente, se considera que tienen matriz de covarianza condicional acotada, esto es:

$$\begin{aligned} E\{\xi_x(k+1)\xi_x^T(k+1)|\mathcal{F}_k\} &\stackrel{a.s.}{\leq} \Xi_x = \text{const} \\ E\{\xi_y(k+1)\xi_y^T(k+1)|\mathcal{F}_k\} &\stackrel{a.s.}{\leq} \Xi_y = \text{const} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Las condiciones (2.5), (2.6) y (2.7) serán esenciales más adelante para el análisis de convergencia.

## 2.2. Formulación del problema

El problema a considerar en este trabajo es estimar los estados del sistema expresado en (2.2) usando un filtro recursivo con estructura similar al observador de Luenberger que se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\sigma(k) \\ \sigma(k) &\triangleq y(k) - C\hat{x}(k) \end{aligned} \quad (2.8)$$

La formulación formal del problema se describe como sigue: basándose en los datos medibles  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$  (considerados como la salida del sistema) y considerando la estructura dinámica que aparte del término lineal incluye el término discontinuo

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\sigma(k) + L_s \text{Sign}(\sigma(k)) \\ \sigma(k) &\triangleq y(k) - C\hat{x}(k) \end{aligned} \quad (2.9)$$

diseñar las matrices constantes  $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $L_s \in \mathbb{R}^{n \times m}$  de manera que  $\hat{x}(k)$  proporcione una buena estimación, en un sentido probabilístico, de la dinámica  $x(k)$  del modelo con incertidumbre expresado en (2.2).

El filtro considerado en (2.9) es un observador de tipo Luenberger con un término discontinuo adicional. El diseño de las matrices  $L$  y  $L_s$  se realizará de modo que el valor

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E \left\{ \|\hat{x}(k) - x(k)\|^2 \right\} \quad (2.10)$$

se haga lo más pequeño posible para cualquier acción de los ruidos estocásticos  $\xi_x$  y  $\xi_y$  que satisfacen las condiciones (2.5), (2.6) y (2.7), así como para cualquier no linealidad admisible  $f$  la cual pertenece a la clase  $C$  de funciones Cuasi-Lipschitz.

Para abordar el problema de estimación será prudente reescribir el sistema original, presentado en (2.2), en un formato llamado cuasi-lineal. Dicha forma cuasi-lineal queda expresada por la recursión:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + \hat{\xi}_x(k+1) \\ y(k) &= Cx(k) + \xi_y(k) \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde el término  $\hat{\xi}_x(k+1)$  está dado por

$$\hat{\xi}_x(k+1) = \xi_x(k+1) + [f(x(k), k) - Ax(k)] \quad (2.12)$$

y además de ser reconocido como el ruido estocástico también se atribuye a las dinámicas no modeladas.



# Capítulo 3

## Análisis Robusto: Elipsoides Atractivas Estocásticas

### 3.1. Definiciones principales

#### 3.1.1. Error de estimación

Dados el estimador  $\hat{x}(k)$ , en (2.9), y el estado  $x(k)$  se define el error de estimación de estado como sigue

$$e(k) = \hat{x}(k) - x(k) \quad (3.1)$$

la ley recursiva  $e(k+1)$  queda determinada, al substituir las dinámicas  $\hat{x}(k+1)$  y  $x(k+1)$  (en formato cuasi-lineal), como sigue

$$\begin{aligned} e(k+1) &= \hat{x}(k+1) - x(k+1) \\ &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\sigma(k) + L_s \text{Sign}(\sigma(k)) - \left[ Ax(k) + Bu(k) + \hat{\xi}_x(k+1) \right] \\ &= \tilde{A}e(k) + L_s \text{Sign}(\sigma(k)) + \eta(k, k+1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $\tilde{A} = A - LC$  y el término con incertidumbre  $\eta(k, k+1)$  está descrito por

$$\eta(k, k+1) \triangleq L\xi_y(k) - \xi_x(k+1) - [f(x(k), k) - Ax(k)]. \quad (3.3)$$

### 3.1.2. Elipsoide Atractiva Estocástica

*Definición 2.* La secuencia error de estimación de estado  $\{e(k)\}_{k \geq 0}$  pertenece a la Elipsoide Atractiva Estocástica descrita como

$$\varepsilon(0, P_e) := \{e(k) \in \mathbb{R}^n : e^\top(k) P_e e(k)\} \quad (3.4)$$

Si para cualquier condición de la planta (2.2) y cualquier no linealidad admisible  $f$  la siguiente desigualdade se mantiene

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E \{e^\top(k) P_e e(k)\} \leq 1. \quad (3.5)$$

donde  $E\{\cdot\}$  representa la Esperanza Matemática.

## 3.2. Método de elipsoides atractivas robustas

El siguiente teorema es uno de los resultados principales de este trabajo.

*Teorema 1.* Introdúzcase el vector extendido  $z_k = [e^\top(k) \quad \text{sign}^\top(\sigma(k)) \quad \eta^\top(k, k+1)]$ . Si para el Observador por Modods Deslizantes (2.9), con ganancia matriciales constantes  $L$  y  $L_s$ , y eligiéndose  $L_s$  como

$$L_s = \mu ([A - LC]^\top P)^{-1} C^\top \quad (3.6)$$

con contantes  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu > 0$  y  $\alpha \in [0, 1)$ , todas en  $\mathbb{R}$ , existe una matriz  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiva definida tal que la siguiente desigualdad se mantiene

$$W(P, L | \varepsilon, \alpha) < 0 \quad (3.7)$$

donde  $W(P, L | \varepsilon, \alpha) \in \mathbb{R}^{(2n+m) \times (2n+m)}$  y se define como

$$W(P, L | \varepsilon, \alpha) \triangleq \begin{bmatrix} [A - LC]^\top P [A - LC] - \alpha P & 0 & [A - LC]^\top P \\ 0 & L_s^\top P L_s - \varepsilon I_{m \times m} & L_s^\top P \\ P [A - LC] & P L_s & P - \varepsilon I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

entonces, para la función cuadrática

$$V_k = z_k^\top P z_k \quad (3.9)$$

la siguiente desigualdad recurrente se mantiene

$$\mathbf{E}\{V(k+1)\} \leq \alpha \mathbf{E}\{V(k)\} + \varepsilon \beta(L) \quad (3.10)$$

donde

$$\beta(L) := \text{tr}[L^\top \Xi_y L] + \text{tr}[\Xi_x] + n + d_0 + d_1 X_+ \quad (3.11)$$

**Prueba:** El objetivo principal es obtener una desigualdad de la forma

$$m_{k+1} \leq \alpha m_k + \varepsilon \beta(L) \quad (3.12)$$

que involucre al término  $m_k := \mathbf{E}\{e^\top(k) P e(k)\}$  como en (3.10). Para esto se considera la función cuadrática

$$V(k) = e^\top(k) P e(k) \quad (3.13)$$

definida en (3.9) que, como se puede observar, depende del error  $e(k)$  y de la matriz  $P = P^\top > 0$ . Por definición se puede ver que  $V(k+1) = e^\top(k+1) P e(k+1)$  y substituyendo  $e(k+1)$  en esta expresión se tiene

$$\begin{aligned}
& V(k+1) \\
&= e(k+1)Pe(k+1) \\
&= [(A-LC)e(k) + L_s \text{Sign}(\sigma(k)) + \eta(k, k+1)]^T P [(A-LC)e(k) + L_s \text{Sign}(\sigma(k)) + \eta(k, k+1)] \\
&= e^T(k) [A-LC]^T P [A-LC] e(k) + \text{Sign}^T(\sigma(k)) L_s^T P L_s \text{Sign}(\sigma(k)) + \eta^T(k, k+1) P \eta(k, k+1) \\
&\quad + 2e^T(k) [A-LC]^T P L_s \text{Sign}(\sigma(k)) + 2\text{Sign}^T(\sigma(k)) L_s^T P \eta(k, k+1) \\
&\quad + 2e^T(k) [A-LC]^T P \eta(k, k+1)
\end{aligned}$$

Ahora bien, tomando en cuenta que

$$L_s = \mu ([A-LC]^T P)^{-1} C^T \quad (3.14)$$

resulta

$$\begin{aligned}
& V(k+1) \\
&= e^T(k) [A-LC]^T P [A-LC] e(k) + 2\mu [Ce(k)]^T \text{Sign}(\sigma(k)) + 2e^T(k) [A-LC]^T P \eta(k, k+1) + \quad (3.15) \\
&\quad [L_s \text{Sign}(\sigma(k))]^T P L_s \text{Sign}(\sigma(k)) + 2[L_s \text{Sign}(\sigma(k))]^T P \eta(k, k+1) + \eta^T(k, k+1) P \eta(k, k+1)
\end{aligned}$$

Usando la propiedad

$$\sigma^T(k) \text{Sign}(\sigma(k)) = \sum_{i=1}^n |\sigma_i(k)| \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(k)} = \|\sigma(k)\| \quad (3.16)$$

el lado derecho de la relación (3.15) puede ser representada como:

$$\begin{aligned}
& V(k+1) \\
&\leq -2\mu \|\sigma(k)\| + 2\mu \xi_y^T(k) \text{Sign}(\sigma(k)) + \\
&\quad \begin{pmatrix} e(k) \\ \text{Sign}(\sigma(k)) \\ \eta(k, k+1) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} [A-LC]^T P [A-LC] & 0 & [A-LC]^T P \\ 0 & L_s^T P L_s & L_s^T P \\ P[A-LC] & P L_s & P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ek \\ \text{Sign}(\sigma(k)) \\ \eta(k, k+1) \end{pmatrix} \quad (3.17) \\
&= z_k^T W(P, L | \epsilon, \alpha) z_k + \alpha V(k) + \epsilon \|\text{Sign}(\sigma(k))\|^2 + \epsilon \|\eta(k, k+1)\|^2
\end{aligned}$$

donde

$$z_k := \begin{pmatrix} e(k) \\ \text{Sign}(\sigma(k)) \\ \eta(k, k+1) \end{pmatrix}$$

y

$$W(P, L | \varepsilon, \alpha) := \begin{bmatrix} [A - LC]^\top P [A - LC] - \alpha P & 0 & [A - LC]^\top P \\ 0 & L_s^\top P L_s - \varepsilon I_{m \times m} & L_s^\top P \\ P[A - LC] & P L_s & P - \varepsilon I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Asumiendo que se eligen las variables libres de tal manera que

$$W(P, L | \varepsilon, \alpha) < 0 \quad (3.19)$$

y expandiendo el término  $\|\eta(k, k+1)\|^2$  se tiene

$$\begin{aligned} & V(k+1) \\ \leq & \alpha V(k) - 2\mu \|\sigma(k)\| + 2\mu \xi_y^\top(k) \text{Sign}(\sigma(k)) + \varepsilon \|\text{Sign}(\sigma(k))\|^2 + \varepsilon \|\eta(k, k+1)\|^2 \\ = & \alpha V(k) - 2\mu \|\sigma(k)\| + 2\mu \xi_y^\top(k) \text{Sign}(\sigma(k)) + \varepsilon \|\text{Sign}(\sigma(k))\|^2 + \varepsilon \| [f(x(k), k) - Ax(k)] \|^2 \\ & + \varepsilon \| L \xi_y(k+1) - \xi_x(k+1) \|^2 - 2\varepsilon [L \xi_y(k+1) - \xi_x(k+1)]^\top [f(x(k), k) - Ax(k)] \\ \leq & \alpha V(k) - 2\mu \|\sigma(k)\| + 2\mu \xi_y^\top(k) \text{Sign}(\sigma(k)) + w(k, k+1) + \varepsilon \|\text{Sign}(\sigma(k))\|^2 \\ & + \varepsilon (d_0 + d_1 \|x(k)\|^2) + \varepsilon \|L \xi_y(k+1)\|^2 + \varepsilon \|\xi_x(k+1)\|^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} w(k, k+1) := & -2\varepsilon [L \xi_y(k+1) - \xi_x(k+1)]^\top [f(x(k), k) + Ax(k)] \\ & - 2\varepsilon \xi_y^\top(k+1) L^\top \xi_x(k+1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Finalmente se tiene

$$\begin{aligned}
V(k+1) \leq & \alpha V(k) + \varepsilon \|\text{Sign}(\sigma(k))\|^2 + w(k, k+1) - 2\mu \|\sigma(k)\| + 2\mu \xi_y^\top(k) \text{Sign}(\sigma(k)) \\
& + \varepsilon (\|\text{Sign}(\sigma(k))\|^2 + (d_0 + d_1 \|x(k)\|^2) + \|L\xi_y(k+1)\|^2 + \|\xi_x(k+1)\|^2)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

con  $w(k, k+1)$  satisfaciendo

$$E\{w(k, k+1) \mid \mathcal{F}_k\} \stackrel{a.s.}{=} 0 \tag{3.23}$$

donde el operador  $E\{\cdot \mid \mathcal{F}_k\}$  representa la esperanza matemática condicionada por los eventos

$$\mathcal{F}_k := \sigma(x(0), u(0), \xi_y(0), \dots, u(k), x(k), \xi_x(k), \xi_y(k)) \tag{3.24}$$

Aquí  $\mathcal{F}_k$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por la prehistoria del proceso considerado.

Tomando la esperanza matemática condicional,  $E\{\cdot \mid \mathcal{F}_k\}$ , en ambos lados de la ecuación (3.22), resulta

$$\begin{aligned}
E\{V(k+1) \mid \mathcal{F}_k\} \stackrel{a.s.}{\leq} & \alpha E\{V(k) \mid \mathcal{F}_k\} - 2\mu \|\sigma(k)\| + \varepsilon \left( \|\text{Sign}(\sigma(k))\|^2 + (d_0 + d_1 \|x(k)\|^2) \right) \\
& + \varepsilon E\left\{ \|L\xi_y(k+1)\|^2 \mid \mathcal{F}_k \right\} + \varepsilon E\left\{ \|\xi_x(k+1)\|^2 \mid \mathcal{F}_k \right\}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

En vista de las relaciones

$$\begin{aligned}
E\left\{ \|L\xi_y(k+1)\|^2 \mid \mathcal{F}_k \right\} &= E\left\{ \text{tr}[(L\xi_y(k+1))^\top (L\xi_y(k+1))] \mid \mathcal{F}_k \right\} \\
&= E\left\{ \text{tr}[\xi_y^\top(k+1) L^\top L \xi_y(k+1)] \mid \mathcal{F}_k \right\} \\
&= E\left\{ \text{tr}[L^\top L \xi_y(k+1) \xi_y^\top(k+1)] \mid \mathcal{F}_k \right\} \\
&= \text{tr}[L^\top L E\{\xi_y(k+1) \xi_y^\top(k+1) \mid \mathcal{F}_k\}] \\
&\leq \text{tr}[L^\top \mathbb{E}_y L]
\end{aligned} \tag{3.26}$$

y

$$E\left\{ \|\xi_x(k+1)\|^2 \mid \mathcal{F}_k \right\} \leq \text{tr}[\mathbb{E}_x]$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{V(k+1) \mid \mathcal{F}_k\} &\stackrel{a.s.}{\leq} \alpha V(k) + \varepsilon \left( \|\text{Sign}(\sigma(k))\|^2 + d_0 + d_1 \|x(k)\|^2 + \text{tr}[L^\top \Xi_y L] + \text{tr}[\Xi_x] \right) \\
&\leq \alpha V(k) + \varepsilon \left( n + d_0 + d_1 \|x(k)\|^2 + \text{tr}[L^\top \Xi_y L] + \text{tr}[\Xi_x] \right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

por lo tanto, se tiene

$$\mathbb{E}\{V(k+1) \mid \mathcal{F}_k\} \stackrel{a.s.}{\leq} \alpha V(k) + \varepsilon \hat{\beta}(L) \tag{3.28}$$

donde

$$\hat{\beta}(L) := \text{tr}[L^\top \Xi_y L] + \text{tr}[\Xi_x] + n + d_0 + d_1 \|x(k)\|^2 \tag{3.29}$$

Finalmente, tomando la esperanza matemática completa en ambos lados de (3.27) se tiene

$$\mathbb{E}\{V(k+1)\} \leq \alpha \mathbb{E}\{V(k)\} + \varepsilon \beta(L) \tag{3.30}$$

donde

$$\begin{aligned}
\beta(L) &= \mathbb{E}\{\hat{\beta}(L)\} \\
&= \mathbb{E}\{\text{tr}[L^\top \Xi_y L] + \text{tr}[\Xi_x] + n + d_0 + d_1 \|x(k)\|^2\} \\
&= \text{tr}[L^\top \Xi_y L] + \text{tr}[\Xi_x] + n + d_0 + d_1 \mathbb{E}\{\|x(k)\|^2\} \\
&= \text{tr}[L^\top \Xi_y L] + \text{tr}[\Xi_x] + n + d_0 + d_1 X_+
\end{aligned} \tag{3.31}$$

■

Este resultado ayudará a hacer la representación analítica de la elipsoide a la cual el error de estimación de las trayectorias del sistema converge.

### 3.2.1. Representación analítica de la elipsoide atractiva

La representación analítica de una elipsoide de atracción, como se puede ver en la definición 2, involucra tomar el lím sup del operador  $\mathbb{E}(\cdot)$ . El siguiente teorema representa esta operación.

**Teorema 2.** Si existe un número  $\theta > 0$  tal que

$$\text{tr}[L^T \Xi_y L] < \theta \quad (3.32)$$

entonces, la siguiente desigualdad se mantiene

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k)\} \leq \phi(\varepsilon, \alpha, \theta) \quad (3.33)$$

donde

$$\phi(\varepsilon, \alpha, \theta) := \frac{\varepsilon(n + d_0 + d_1 X_+ + \theta + \text{tr}[\Xi_x])}{1 - \alpha} \quad (3.34)$$

La desigualdad mostrada en (3.32) es identificada como una desigualdad matricial bilineal. En el siguiente capítulo se obtendrá una representación adecuada para la desigualdad que involucra el número  $\theta$  de manera que la restricción se vuelva una LMI. Por el momento suponemos que existe este número  $\theta$  y que la desigualdad se mantiene.

**Prueba:**

Debido a la suposición de existencia del número  $\theta$  se mantiene la desigualdad

$$\text{tr}[L^T \Xi_y L] < \theta \quad (3.35)$$

y se sigue que

$$\begin{aligned} \beta(L) &= L^T \Xi_y L + \text{tr}[\Xi_x] + n + d_0 + d_1 X_+ \\ &\leq \theta + \text{tr}[\Xi_x] + n + d_0 + d_1 X_+ \end{aligned} \quad (3.36)$$

si se define

$$\delta := \theta + \text{tr}[\Xi_x] + n + d_0 + d_1 X_+ \quad (3.37)$$

resulta



$$\begin{aligned} E\{V(k+1)\} &\leq \alpha E\{V(k)\} + \varepsilon\beta(L) \\ &\leq \alpha E\{V(k)\} + \varepsilon\delta \end{aligned} \quad (3.38)$$

Finalmente, si se toma el límite supremo  $\limsup$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , de la última desigualdad, se tiene la siguiente equivalencia

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k+1)\} &\leq \alpha \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k)\} + \limsup_{k \rightarrow \infty} \varepsilon\delta \\ &\Downarrow \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k)\} &\leq \frac{\varepsilon\delta}{1-\alpha} := \phi(\varepsilon, \alpha, \theta) \end{aligned} \quad (3.39)$$

■

Debido a que  $V(k) = e^\top(k)Pe(k)$  y usando el teorema (2) se tiene la relación

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E\left\{e^\top(k) \frac{(1-\alpha)}{\varepsilon\delta} Pe(k)\right\} \leq 1 \quad (3.40)$$

de donde se puede deducir que Elipsoide de Atracción  $P_e$  está dada por

$$P_e = \frac{(1-\alpha)}{\varepsilon\delta} P \quad (3.41)$$

### 3.3. Reducción de la zona de atracción

En el cálculo original de la zona de atracción, de la sección anterior, el término  $E\{\|\sigma(k)\|\}$  no fue contemplado. En vez de determinar  $P_e$  a partir de la ley recursiva mostrada en (3.25) que es

$$E\{V(k+1)\} \leq \alpha E\{V(k)\} - 2\mu E\{\|\sigma(k)\|\} + \varepsilon\hat{\beta}$$

sólo se tomó en cuenta la expresión

$$E\{V(k+1)\} \leq \alpha E\{V(k)\} + \varepsilon\hat{\beta}$$

Esto se debe a la dificultad que presenta el término  $E\{\|\sigma(k)\|\}$  ya que los operadores esperanza matemática  $E\{\cdot\}$  y norma  $\|\cdot\|$  no conmutan entre sí, por este hecho se dificulta estimar por abajo el término mencionado. Sin embargo, en esta sección se abordará esta problemática contemplando la definición formal de la esperanza matemática y para esto se necesitarán dos estimaciones que son necesarias para este desarrollo. Dichas estimaciones requeridas son las cotas superior e inferior del término  $E\{\|\sigma(k)\|^2\}$

### 3.3.1. Estimaciones inferior y superior de $E\{\|\sigma(k)\|^2\}$

Se buscará que las cotas inferior y superior estén en función de la esperanza matemática  $V(k)$  (función cuadrática del Teorema 1, es decir,

$$C_0 E\{V(k)\} + C_1 \leq E\{\|\sigma(k)\|^2\} \leq C_2 E\{V(k)\} + C_3 \quad (3.42)$$

- Primera desigualdad (cota inferior)

$$\begin{aligned} E\{\|\sigma(k)\|^2\} &= E\{\| -Ce(k) + \xi_y(k) \|^2\} \\ &= E\{[-Ce(k) + \xi_y(k)]^T [-Ce(k) + \xi_y(k)]\} \\ &= E\{e^T(k)C^T Ce(k)\} - 2E\{e^T(k)C^T \xi_y(k)\} + E\{\xi_y^T(k)\xi_y(k)\} \\ &= E\{e^T(k)C^T Ce(k)\} + E\{\xi_y^T(k)\xi_y(k)\} \\ &\geq \lambda_{\min}(C^T C) E\{e(k)P^{-1}Pe(k)\} \end{aligned}$$

Usando el hecho

$$\begin{aligned} (\epsilon I_{n \times n} - X > 0 &\Leftrightarrow X^{-1/2}(\epsilon I_{n \times n} - X)X^{-1/2} > 0) \Leftrightarrow \\ \epsilon I_{n \times n} X^{-1} - I_{n \times n} > 0 &\Leftrightarrow X^{-1} > \frac{1}{\epsilon} I_{n \times n} \Leftrightarrow P^{-1} \geq \frac{1}{\epsilon} I_{n \times n} \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \|\sigma(k)\|^2 \right\} &\geq \frac{\lambda_{\min}(C^T C)}{\varepsilon} \mathbb{E} \{ e^T(k) P e(k) \} \\ &=: C_0 \mathbb{E} \{ V(k) \} + C_1 \end{aligned}$$

donde  $C_0(\varepsilon^{-1}) := \frac{\lambda_{\min}(C^T C)}{\varepsilon}$  y  $C_1 := 0$ .

- Segunda desigualdad (cota superior)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \|\sigma(k)\|^2 \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \left\| -C e(k) + \xi_y(k) \right\|^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left[ -C e(k) + \xi_y(k) \right]^T \left[ -C e(k) + \xi_y(k) \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ e^T(k) C^T C e(k) \right\} - 2 \mathbb{E} \left\{ e^T(k) C^T \xi_y(k) \right\} + \mathbb{E} \left\{ \xi_y^T(k) \xi_y(k) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ e^T(k) C^T C e(k) \right\} + \mathbb{E} \left\{ \xi_y^T(k) \xi_y(k) \right\} \\ &\leq \lambda_{\max}(C^T C) \mathbb{E} \left\{ e^T(k) P^{-1} P e(k) \right\} + \mathbb{E} \left\{ \xi_y^T(k) \xi_y(k) \right\} \end{aligned}$$

Ya que la matriz  $X := P$  es constante, y positiva definida, se puede encontrar un número  $\zeta$  tal que se cumpla  $\zeta I_{n \times n} < X$  de lo cual se derivan las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} \left( \zeta I_{n \times n} - X < 0 \Leftrightarrow X^{-1/2} (\zeta I_{n \times n} - X) X^{-1/2} > 0 \right) &\Leftrightarrow \\ \zeta I_{n \times n} X^{-1} - I_{n \times n} > 0 \Leftrightarrow X^{-1} > \frac{1}{\zeta} I_{n \times n} &\Leftrightarrow P^{-1} \geq \frac{1}{\varepsilon} I_{n \times n} \end{aligned}$$

debido a esto resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \|\sigma(k)\|^2 \right\} &\leq \frac{\lambda_{\max}(C^T C)}{\zeta} \mathbb{E} \left\{ e^T(k) P e(k) \right\} + \text{tr}(\Xi_y) \\ &=: C_2 \mathbb{E} \{ V(k) \} + C_3 \end{aligned} \tag{3.43}$$

### 3.3.2. Cota inferior de $\mathbb{E} \{ \|\sigma(k)\| \}$

Se necesita obtener la cota inferior de  $\mathbb{E} \{ \|\sigma(k)\| \}$ . Defínase  $x_\sigma := \|\sigma(k)\|$  y asu vez  $m := \mathbb{E} \{ x \}$  tal que resulta

$$m := \mathbb{E} \{ x \} = \mathbb{E} \{ \|\sigma(k)\| \} \tag{3.44}$$

Así, el problema principal de esta sección se formula a continuación.

**Problema 1.** Se requiere encontrar una función  $\Phi(\cdot)$ , dependiente del término  $E\{V(k)\}$ , tal que la desigualdad

$$m \geq \Phi(E\{V(k)\}) \quad (3.45)$$

se mantenga.

Se aborda el problema partiendo de la definición de la esperanza matemática  $E\{\cdot\}$  que es

$$E\{x\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} xF_{\xi}(x)dx \quad (3.46)$$

Debido a la naturaleza de nuestro proceso basta con considerar los límites de esta integral de  $0 \rightarrow \infty$ . Con el mismo razonamiento podemos siempre encontrar un número  $\varepsilon$  tan pequeño como se requiera y una constante  $a$  tan grande como sea posible, tales que resulta

$$\begin{aligned} m &= \int_{x=0}^{\infty} xF_{\xi}(x)dx \\ &\geq \int_{x=\varepsilon>0}^a xF_{\xi}(x)dx \\ &\geq \int_{x=\varepsilon>0}^a \varepsilon F_{\xi}(x)dx \\ &= \varepsilon \int_{x=\varepsilon}^a F_{\xi}(x)dx \\ &= \varepsilon P_r\{\omega : \varepsilon \leq x < a\} \\ &= \varepsilon [1 - P_r\{\omega : (x < \varepsilon) \wedge (x \geq a)\}] \\ &\geq \varepsilon [1 - P_r\{\omega : x \geq a\}] \end{aligned}$$

Finalmente se tiene

$$m \geq \varepsilon [1 - P_r\{\omega : x \geq a\}] \quad (3.47)$$

A partir de la desigualdad de Cantelli se puede ver que

$$m \geq \varepsilon [1 - \Pr\{\omega : x \geq a\}] \geq \varepsilon \left[ 1 - \frac{\text{var}_\xi}{a^2 + \text{var}_\xi} \right] \quad (3.48)$$

donde

$$\begin{aligned} \text{var} &:= \mathbb{E} \left\{ (x - \mathbb{E}\{x\})^2 \right\} = \mathbb{E}\{x^2\} - \mathbb{E}^2\{x\} = \sigma_x^2 - m^2 \\ \sigma_x^2 &:= \mathbb{E}\{x^2\} \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la estimación

$$\mathbb{E} \left\{ \|\sigma(k)\|^2 \right\} \leq \frac{\lambda_{\max}(C^\top C)}{\zeta} \mathbb{E}\{V(k)\} + \text{tr}(\Xi_y)$$

la cota inferior de

$$m(k) := \mathbb{E}\{x\} = \mathbb{E}\{\|\sigma(k)\|\}$$

se obtiene como sigue

$$\begin{aligned} m &\geq \varepsilon \left[ 1 - \frac{2(\sigma_x^2 - m^2)}{a^2 + \sigma_x^2 - m^2} \right] \\ &= \varepsilon \frac{a^2 - \sigma_x^2 + m^2}{a^2 + \sigma_x^2 - m^2} \\ &\geq \varepsilon \frac{a^2 - \zeta^{-1} \lambda_{\max}(C^\top C) \mathbb{E}\{V(k)\} - \text{tr}(\Xi_y) + m^2}{a^2 + \zeta^{-1} \lambda_{\max}(C^\top C) \mathbb{E}\{V(k)\} + \text{tr}(\Xi_y) - m^2} \\ &=: \varepsilon \frac{c_1 + m^2}{c_2 - m^2} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &:= a^2 - \zeta^{-1} \lambda_{\max}(C^\top C) \mathbb{E}\{V(k)\} - \text{tr}(\Xi_y) \\ c_2 &:= a^2 + \zeta^{-1} \lambda_{\max}(C^\top C) \mathbb{E}\{V(k)\} + \text{tr}(\Xi_y) \end{aligned}$$

Si  $c_2 > m^2$  :

$$mc_2 - m^3 \geq \varepsilon (c_1 + m^2) \quad (3.49)$$

$$\Downarrow \quad (3.50)$$

$$0 \geq m^3 + \varepsilon m^2 - mc_2 + \varepsilon c_1$$

Esta desigualdad tiene solución  $m > 0$  si

$$m_1(\mathbb{E}\{V(k)\}) \leq m$$

donde  $m_1$  es una raíz del polinomio (3.51) y se expresa, por las formulas de cardano, como

$$m_1(k) = -\frac{1}{3}\varepsilon + \frac{\frac{1}{9}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}c_2}{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}\varepsilon^4 c_1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 c_1^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^2 c_1 c_2 - \frac{1}{108}\varepsilon^2 c_2^2 - \frac{1}{27}c_2^3 - \frac{1}{2}\varepsilon c_1 - \frac{1}{6}\varepsilon c_2 - \frac{1}{27}\varepsilon^3}} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}\varepsilon^4 c_1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 c_1^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^2 c_1 c_2 - \frac{1}{108}\varepsilon^2 c_2^2 - \frac{1}{27}c_2^3 - \frac{1}{2}\varepsilon c_1 - \frac{1}{6}\varepsilon c_2 - \frac{1}{27}\varepsilon^3}}}$$

Esto implica

$$\boxed{\mathbb{E}\{V(k+1)\} \leq \alpha \mathbb{E}\{V(k)\} - 2\mu m_1(\mathbb{E}\{V(k)\}) + \varepsilon \mathbb{E}\{\beta_n\}}$$

Si la igualdad

$$\mathbb{E}\{V(k+1)\} = \alpha \mathbb{E}\{V(k)\} - 2\mu m_1(\mathbb{E}\{V(k)\}) + \varepsilon \mathbb{E}\{\beta_n\}$$

converge, entonces el punto límite  $v^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{V(k)\}$  satisface

$$0 = (\alpha - 1)v^* - 2\mu m_1(v^*) + \varepsilon \beta$$

o,

$$(1 - \alpha) v^* + 2\mu m_1(v^*) = \varepsilon\beta$$

Este número,  $v^*$ , puede ser encontrado numéricamente:

$$v(k) := E\{V(k)\}$$

$$v(k+1) \leq \alpha v(k) - 2\mu m_1(v(k)) + \varepsilon\beta$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} v(k) \leq v^*$$

Por último, con este término  $v^*$  se calcula la nueva elipse robusta que da lugar a la zona de atracción reducida. La matriz  $P_e^*$  que representa la nueva zona de atracción se define como

$$P_e^* = \frac{P_e}{v^*} \tag{3.51}$$





# Capítulo 4

## Selección de las ganancias matriciales óptimas

Hasta este momento se ha presentado el análisis de robustes que dió como resultado desigualdades matriciales bilineales y hasta trilineales, es decir hasta 3 terminos desconocidos multiplicándose entre sí. En este capítulo se reducirá la complejidad de estas desigualdades, mediante transformaciones de congruencia (que no afectan a las soluciones), para poder facilitar los calculos. Una representación que puede ser vista como una transformación de congruencia es el complemento de Schur. Una vez transformadas las desigualdades matriciales se procederá a dictar un proceso de iteración que ayude con la optimización para la selección de las variables de interés.

### 4.1. La traza como criterio de optimización

En álgebra lineal, la traza  $\text{tr}(\cdot)$  definida solamente para una matriz cuadrada, llámese  $M$  a esta matriz, se define como la suma de los elementos que se encuentran en la diagonal principal de  $M$ , es decir, si  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la traza es

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii} \quad (4.1)$$

donde  $m_{ii}$  representa la entrada en la fila  $i$  y columna  $i$  de la matriz  $M$ . De igual manera, la traza puede calcularse como la suma de los eigenvalores, esta característica hace que la operación traza sea invariante ante cualquier transformación de coordenadas.

Geométricamente, la traza, puede ser interpretada como el cambio infinitesimal en el volumen debido a que puede verse como la derivada del determinante, lo cual se hace evidente en la fórmula de Jacobi. Así, podemos decir que la solución de nuestro problema de optimización se reduce a minimizar la traza de  $P$  lo cual es una función lineal.

## 4.2. Problema: Optimización de ganancias con restricciones de desigualdades matriciales bilineales (BMI)

Considerando el término en (3.8), si uno quiere minimizar el error de estimación  $e(k)$  tiene sentido maximizar  $\frac{P}{\phi(\varepsilon, \alpha, \theta)}$  con respecto a  $L$  y los parámetros escalares. Se sugiere, como en [], que la búsqueda de la ganancia matricial  $L$  se lleve a cabo mediante la solución del siguiente problema de optimización

$$\frac{\text{tr}(P)}{\phi(\varepsilon, \alpha, \theta)} \rightarrow \sup_{P>0, L, \alpha \in [0,1], \varepsilon>0, \theta>0, \mu} \quad (4.2)$$

sujeto a las restricciones

$$W(P, L | \varepsilon, \alpha) < 0 \quad (4.3)$$

y

$$\text{tr}[L^T \Xi_y L] < \theta. \quad (4.4)$$

Así, el propósito es encontrar la ganancia matricial de observación  $L$  que garantiza una buena estimación de estado del sistema que se rigen por gama de funciones no lineales pertenecientes a la clase  $\mathcal{C}(f_0, f_1, A)$ .

más adelante será de gran ayuda reescribir la restricción (4.3) como

$$\tilde{W}(P, L | \varepsilon, \alpha) := -W(P, L | \varepsilon, \alpha) > 0 \quad (4.5)$$

esto se abordará en la siguiente sección.

## 4.3. Transformación de restricciones de BMI a LMI

### 4.3.1. Complemento de Schur

En la introducción de este capítulo se mencionó el uso de una herramienta muy socorrida cuando de desigualdes matriciales hablamos. Esta herramienta es el complemento de Schur, también conocido como lema de Schur. LA idea del complemento de Schur es expresar una matriz positiva definida dividida por bloques en una desigualdad, más fácil de digerir. A continuación se presenta de manera formal el lema de Schur.

*Lema 1.* Defínase la matriz positiva definida  $M \in \mathbb{R}^{n+m}$  dividida a bloques por las submatrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tales que

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Entonces, se tiene que

- Si la matriz  $A$  es no singular, entonces, la siguiente desigualdad se mantiene

$$D - CA^{-1}B > 0 \quad (4.7)$$

- O si la matriz  $D$  es no singular, entonces, la siguiente desigualdad se mantiene

$$A - BD^{-1}C > 0 \quad (4.8)$$

### 4.3.2. Transformación de las restricciones

Se pretende realizar transformaciones a los bloques de la matriz

$$W(P, L | \varepsilon, \alpha) \triangleq \begin{bmatrix} [A - LC]^\top P [A - LC] - \alpha P & 0 & [A - LC]^\top P \\ 0 & L_s^\top P L_s - \varepsilon I_{m \times m} & L_s^\top P \\ P [A - LC] & P L_s & P - \varepsilon I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

tales que en vez de tener restricciones bilineales, y hasta trilineales en el caso de 1 término  $[A - LC]^\top P[A - LC]$ , se tengan expresiones lineales que ofrecen mayor facilidad de cálculo al momento de encontrar las soluciones para  $P$  y  $L$ . Se irán indicando dichas transformaciones como comentarios.

Se inicia con el término trilineal mencionado en el párrafo anterior.

*Comentario 1.* Nótese que desarrollando el término  $[A - LC]^\top P[A - LC]$  se tiene

$$\begin{aligned} [A - LC]^\top P[A - LC] &= A^\top PA - (LC)^\top PA - A^\top P(LC) + (LC)^\top PLC \\ &= A^\top PA - C^\top (L^\top P)A - A^\top (PL)C + (LC)^\top PLC \end{aligned}$$

donde, usando el cambio de variable  $X := P$  y  $Y := PL$  resulta

$$\begin{aligned} [A - LC]^\top P[A - LC] &= A^\top PA - C^\top (L^\top P)A - A^\top (PL)C + (PLC)^\top P^{-1}PLC \\ &= A^\top XA - C^\top Y^\top A - A^\top YC + C^\top Y^\top X^{-1}YC \\ &< A^\top XA - C^\top Y^\top A - A^\top YC + Q_Y \end{aligned}$$

con la matriz  $Q_Y$  que satisface

$$C^\top Y^\top X^{-1}YC < Q_Y$$

lo cual, por el complemento de Schur, puede ser representado como

$$\begin{bmatrix} Q_Y & C^\top Y^\top \\ YC & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.10)$$

Entonces, en las nuevas variables  $X$  y  $Y$  la matriz  $W$  definida en (3.19) puede ser expresada como

$$W(X, Y | \varepsilon, \alpha) \triangleq \begin{bmatrix} A^T X A - C^T Y^T A - A^T Y C + Q_Y - \alpha X & 0 & A^T X - C^T Y^T \\ 0 & L_s^T X L_s - \varepsilon I_{m \times m} & L_s^T X \\ X A - Y C & X L_s & X - \varepsilon I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Ahora continuamos con el término  $W(2, 2)$

*Comentario 2.* Si existe una matriz  $Q_{L_s}$  que satisfice

$$L_s^T P L_s - \varepsilon I_{m \times m} < -Q_{L_s} \Leftrightarrow \varepsilon I_{m \times m} - Q_{L_s} > \mu^2 C (A - LC)^{-1} P^{-1} ([A - LC]^T)^{-1} C^T$$

Esta expresión, haciendo uso del complemento de Schur y algunas transformaciones más, puede ser representado como

$$\begin{bmatrix} \varepsilon I_{m \times m} - Q_{L_s} & \mu C \\ \mu C^T & [A - LC]^T P [A - LC] \end{bmatrix} > 0$$

que, al emplear el cambio de variable que se propuso anteriormente  $X := P$  y  $Y := PL$ , es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \varepsilon I_{m \times m} - Q_{L_s} & \mu C \\ \mu C^T & A^T X A - A^T Y C - C^T Y^T A + C^T Y^T X^{-1} Y C \end{bmatrix} > 0$$

Asumiendo que existe un número  $\gamma$  tal que se mantiene la desigualdad  $C^T Y^T X^{-1} Y C > \gamma I_{n \times n}$  se sigue que

$$\begin{bmatrix} \varepsilon I_{m \times m} - Q_{L_s} & \mu C \\ \mu C^T & A^T X A - A^T Y C - C^T Y^T A + C^T Y^T X^{-1} Y C \end{bmatrix} > 0 \quad (4.12)$$

↑

$$\begin{bmatrix} \varepsilon I_{m \times m} - Q_{L_s} & \mu C \\ \mu C^T & A^T X A - A^T Y C - C^T Y^T A + \gamma I_{n \times n} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

Esto implica que la restricción  $W(P, L, \varepsilon, \alpha) < 0$  puede representarse como

$$W(X, Y, Q_Y, Q_{L_s} | \varepsilon, \alpha) \triangleq \begin{bmatrix} A^\top X A - C^\top Y^\top A - A^\top Y C + Q_Y - \alpha X & 0 & A^\top X - C^\top Y^\top \\ 0 & -Q_{L_s} & L_s^\top X \\ X A - Y C & X L_s & X - \varepsilon I_{n \times n} \end{bmatrix} < 0$$

Esta última restricción es, por mucho, más sencilla de resolver que la obtenida en un inicio. Sin embargo, como se puede notar, en el bloque matricial

$$\begin{bmatrix} -Q_{L_s} & L_s^\top X \\ X L_s & X - \varepsilon I_{n \times n} \end{bmatrix}$$

interviene el término  $L_s = \mu((A - LC)^\top P)^{-1} C^\top$ . Este término hace que la restricción sea de naturaleza no lineal. Para lograr que este bloque se vuelva tratable para nuestros programas auxiliares *Sedumi* y *PenLab* se introducen algunas restricciones que se hacen presentes en el siguiente comentario.

**Comentario 3.** *Percátese que si se mantienen las desigualdades*

$$\begin{bmatrix} -Q_{L_s} & L_s^\top X \\ X L_s & X - \varepsilon I_{n \times n} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} -Q_{L_s} & 0 \\ 0 & X - \frac{\varepsilon}{2} I_{n \times n} \end{bmatrix} < 0$$

entonces

$$W(X, Y, Q_Y, Q_{L_s} | \varepsilon, \alpha) \triangleq \begin{bmatrix} A^\top X A - C^\top Y^\top A - A^\top Y C + Q_Y - \alpha X & 0 & A^\top X - C^\top Y^\top \\ 0 & -Q_{L_s} & 0 \\ X A - Y C & 0 & X - \frac{\varepsilon}{2} I_{n \times n} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

con la restricción

$$\begin{bmatrix} -2Q_{L_s} & L_s^\top X \\ X L_s & -\frac{\varepsilon}{2} I_{n \times n} \end{bmatrix} < 0$$

que, por el complemento de Schur, es equivalente a

$$\begin{bmatrix} -2Q_{L_s} & \mu C \\ \mu C^T & -\frac{\varepsilon}{2}(A-LC)^T(A-LC) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2Q_{L_s} & \mu C \\ \mu C^T & -\frac{\varepsilon}{2}(A-LC)^T P P^{-1}(A-LC) \end{bmatrix} \\ < \begin{bmatrix} -2Q_{L_s} & \mu C \\ \mu C^T & -(A-LC)^T P(A-LC) \end{bmatrix} < 0$$

finalmente, teniendo en cuenta los cambios de variable  $X = P$ ,  $Y = PL$ , con la desigualdad  $P - \frac{\varepsilon}{2}I_{n \times n} < 0$  y multiplicando la desigualdad por  $(-1)$  se tiene

$$\begin{bmatrix} 2Q_{L_s} & \mu C \\ \mu C^T & A^T X A - A^T Y C - C^T Y^T A + C^T Y^T X^{-1} Y C \end{bmatrix} > 0$$

que al contemplar la restricción  $C^T Y^T X^{-1} Y C < \gamma I_{n \times n}$  se reduce a

$$\begin{bmatrix} 2Q_{L_s} & \mu C \\ \mu C^T & A^T X A - A^T Y C - C^T Y^T A + \gamma I_{n \times n} \end{bmatrix} > 0$$

Por último, se abordará la restricción  $\text{tr}[L^T \Xi_y L] < \theta$ .

*Comentario 4.* Nótese que introduciendo la identidad  $PP^{-1}$  y usando el cambio de variable, ya mencionado anteriormente, se sigue

$$\begin{aligned} \text{tr}[L^T \Xi_y L] &= \text{tr}[L^T P P^{-1} \Xi_y P^{-1} P L] \\ &= \text{tr}[Y^T (X^{-1} \Xi_y X^{-1}) Y] < \theta \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ahora, como  $\theta \in \mathbb{R}$  y teniendo en cuenta la relación

$$\theta = \text{tr} \left[ \frac{\theta}{m} I_{m \times m} \right] \quad (4.16)$$

entonces, se tiene la siguiente equivalencia

$$\begin{aligned} \text{tr}[Y^T (X^{-1} \Xi_y X^{-1}) Y] &< \theta \\ \Downarrow \\ 0 &< \text{tr} \left[ \frac{\theta}{m} I_{m \times m} \right] - \text{tr}[Y^T (X^{-1} \Xi_y X^{-1}) Y] \end{aligned}$$

Usando la propiedad de linealidad del operador  $\text{tr}(\cdot)$  resulta

$$\text{tr} \left[ \frac{\theta}{m} I_{m \times m} - Y^\top (X^{-1} \Xi_y X^{-1}) Y \right] > 0 \quad (4.17)$$

implementando el complemento de Schur y notando que  $P - \frac{\varepsilon}{2}$  se obtiene la restricción

$$\begin{bmatrix} \frac{\theta}{m} I_{m \times m} & \frac{2}{\varepsilon} Y^\top \\ \frac{2}{\varepsilon} Y & \Xi_y^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.18)$$

Entonces estamos listos para formular el siguiente resultado

**Teorema 3.** Si se cumplen las siguientes desigualdades matriciales

1. 
$$\begin{bmatrix} A^\top X A - C^\top Y^\top A - A^\top Y C + Q_Y - \alpha X & 0 & A^\top X - C^\top Y^\top \\ 0 & -Q_{Ls} & 0 \\ XA - YC & 0 & X - \frac{\varepsilon}{2} I_{n \times n} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

2. 
$$\begin{bmatrix} \varepsilon I_{m \times m} - Q_{Ls} & \mu C \\ \mu C^\top & A^\top X A - A^\top Y C - C^\top Y^\top A + \gamma I_{n \times n} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.20)$$

3. 
$$\begin{bmatrix} Q_{Ls} & -\mu C \\ -\mu C^\top & A^\top X A - A^\top Y C - C^\top Y^\top A + \gamma I_{n \times n} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.21)$$

4. 
$$\begin{bmatrix} Q_Y & C^\top Y^\top \\ YC & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.22)$$

5. 
$$\frac{\varepsilon}{2} I_{n \times n} - X > 0 \quad (4.23)$$

6. 
$$\frac{\varepsilon}{2} I_{m \times m} - Q_{Ls} > 0 \quad (4.24)$$



7.

$$C^T Y^T Y C > \varepsilon \gamma I_{n \times n} \quad (4.25)$$

entonces, la restricción

$$W(P, L | \varepsilon, \alpha) \triangleq \begin{bmatrix} [A - LC]^T P [A - LC] - \alpha P & 0 & [A - LC]^T P \\ 0 & L_s^T P L_s - \varepsilon I_{m \times m} & L_s^T P \\ P [A - LC] & P L_s & P - \varepsilon I_{n \times n} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

se mantiene.

#### 4.4. Algoritmo para la solución

Como se puede notar las desigualdades (4.10), (4.13), (4.14), (3) y (4.18) para los escalares fijos  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\theta$  y  $\mu$  forman un conjunto de restricciones lineales, conocidas como LMI's. Adicional a estas, se tiene la restricción

$$C^T Y^T Y C < \gamma \varepsilon I_{n \times n} \quad (4.27)$$

Debido a esta última desigualdad se resolverá el problema empleando principalmente el BMItoolbox PenLab en conjunto con los LMItoolboxes YALMIP y SeDuMi. El problema de optimización tratado puede ser resuelto aplicando los dos siguientes pasos

1. Fijando los parámetros escalares  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$  y  $\theta = \theta_0$  se busca una solución con respecto a las variables matriciales que satisfacen las LMI's.
2. Se encuentran las matrices variables  $Y$  y  $X$  resolviendo, con respecto a los escalares fijos del inciso 1, el problema de optimización

$$\frac{1}{\sigma} \text{tr}(X) \rightarrow \sup_{X > 0, Y, \lambda \in [0, 1], \varepsilon > 0, \mu > 0, \theta > 0}$$

que está sujeto a las restricciones matriciales (4.10), (4.13), (4.14), (3), (4.18 y (4.27).

Haciendo este proceso de manera iterativa, finalmente se encuentran las soluciones  $\alpha^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\varepsilon^*$ ,  $\theta^*$ ,  $X^* = P^*$  y  $Y^* = LP^*$  de las cuales obtenemos las ganancias  $L$  y  $L_s$ , del observador, que ofrecen la mejor estimación posible, en un sentido probabilístico, de los estados.

# Capítulo 5

## Ejemplos

### 5.1. Ejemplo 1: Sistema no lineal (académico)

Considérese el sistema gobernado por las siguientes ecuaciones de estado no lineales

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{bmatrix} \frac{x_2(k)}{1+x_2(k)} \\ x_1(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + \xi_x(k+1) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \xi_y(k)\end{aligned}\tag{5.1}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu_k + \hat{\xi}_x(k+1) \\ y(k) &= Cx(k) + \xi_y(k+1)\end{aligned}$$

donde

$$\hat{\xi}_x(k+1) = \xi_x(k+1) + f(x(k), k) - Ax(k)$$

con

$$f(x(k), k) = \begin{bmatrix} \frac{x_2(k)}{1+x_2(k)} \\ x_1(k) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

tal que

$$\|f(x(k), k) - Ax(k)\|^2 \leq f_0 + f_1 \|x(k)\|^2$$

aquí  $f_0 = 0.5^2$  y  $f_1 = 1.5^2$ .

**Problema 2.** El objetivo en este ejemplo es obtener una estimación lo más precisa posible, en un sentido probabilístico, para el estado  $x_1(k)$  del sistema no lineal a tiempo discreto (5.1) influenciado por los ruidos estocásticos en el modelo,  $\xi_x(k+1)$ , y en la medición,  $\xi_y(k)$ .

Las matrices de covarianza están dadas por  $\Xi_y = 0.1I_m$  y  $\Xi_x = 0.1I_n$ . Obsérvese que el par  $(A, C)$  es observable, por lo tanto, se puede aplicar el proceso de optimización gobernado por las restricciones del **Teorema 3** y resulta

$$\alpha^* = 0.1099, \mu^* = 0.05, \varepsilon = 30, \theta = 1$$

Las ganancias matriciales  $L$  y  $L_s$  del observador derivador de la optimización son

$$L = \begin{bmatrix} 0.4856 \\ 0.1162 \end{bmatrix}; L_s = \begin{bmatrix} -0.0040 \\ -0.0227 \end{bmatrix}$$

La matriz  $P_{att}$  que define la zona de atracción es

$$P_e = \begin{bmatrix} 1.8862 & 1.6304 \\ 1.6304 & 7.9282 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Del proceso de reducir la zona de atracción con  $v^* = 0.363$  la nueva matriz de la elipse, definida como  $P_{att2}$ , es

$$P_e^* = \begin{bmatrix} 0.6847 & 0.5918 \\ 0.5918 & 2.8780 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

En las figuras (5.1) y (5.2) se presentan las trayectorias reales y estimadas de los estados  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$ .

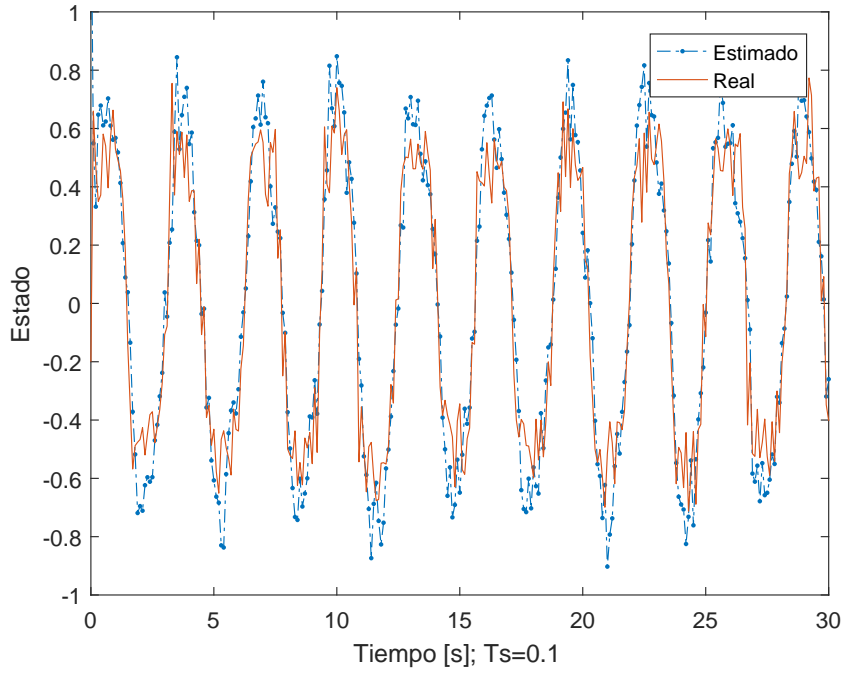


Figura 5.1: Estado  $x_1(k)$  Real vs Estimado

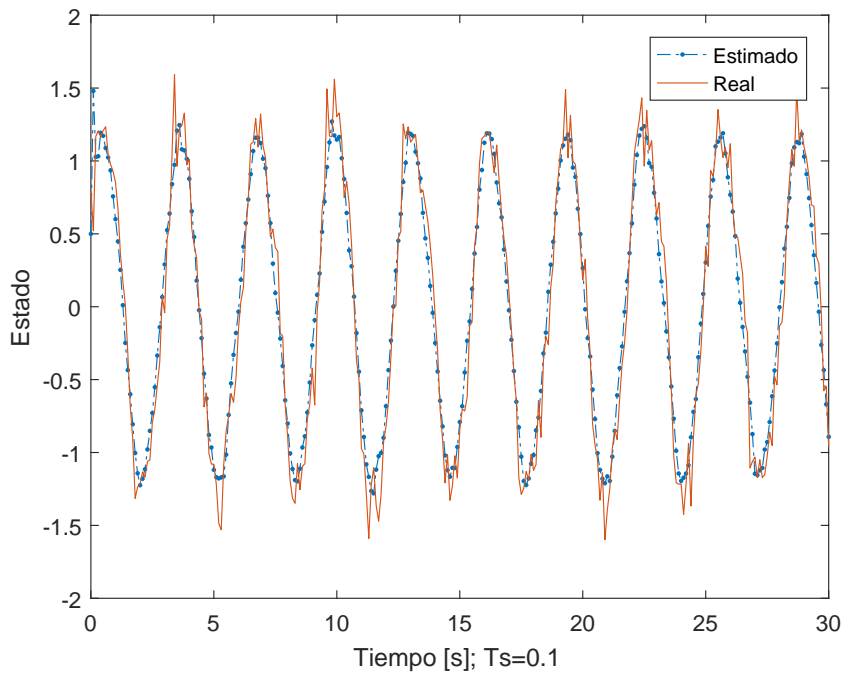


Figura 5.2: Estado  $x_1(k)$  Real vs Estimado

En la Fig.(5.3) se muestra la evolución de los errores,  $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$  y  $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$  en el plano de

fase. Además se muestran las zonas de atracción obtenidas.

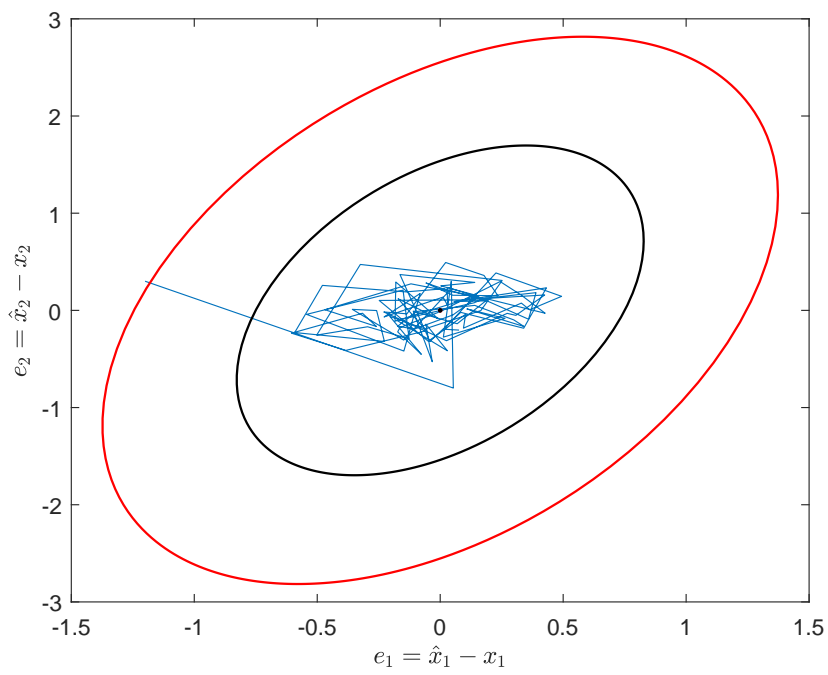


Figura 5.3: Plano de fase de errores y zonas de atracción

## 5.2. Ejemplo 2: Posición de cinta magnética (Tape-Magnetic Position)

Dadas las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.599 & 0.0401 & -0.4861 & 0.0139 \\ 0.0401 & 0.7599 & -0.0139 & 0.4861 \\ 0.1566 & -0.1566 & 0.8321 & -0.0679 \\ 0.1566 & -0.1566 & 0.0679 & 0.8321 \end{bmatrix} x(k) \\
 &+ \begin{bmatrix} -0.1049 & 0.0017 \\ -0.0017 & 0.1049 \\ 0.4148 & -0.0118 \\ -0.0118 & 0.4148 \end{bmatrix} u_k + \xi_x(k+1) \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \xi_y(k)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

descritas en [9], que representan el comportamiento de un posicionador de cinta magnética, ver Fig.5.4. Donde el vector de estados es  $x(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k)]^T$ , las componentes

- $x_1(k)$  y  $x_2(k)$  representan la posición
- $x_3(k)$  y  $x_4(k)$  representan velocidades angulares de los motores.

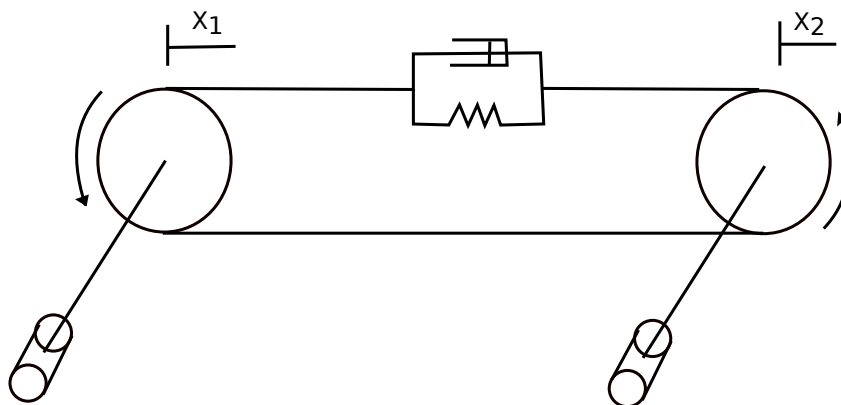


Figura 5.4: Sistema de posicionamiento de cinta magnética

**Problema 3.** Basándose en los datos medidos  $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$  diseñar las ganancias  $L$  y  $L_s$ , para el observador (2.8), de tal manera que este filtro proporcione una buena estimación, en un sentido probabilístico, de las velocidades angulares  $x_3(k)$  y  $x_4(k)$  del modelo con perturbaciones (5.4).

Note que el par  $(A, C)$  es observable. Aquí se considera que las matrices de covarianza están dadas por  $\Xi_y = 0.1I_m$  y  $\Xi_x = 0.1I_n$ .

El proceso de optimización descrito en el capítulo anterior lleva a

$$\alpha^* = 0.1, \quad \mu^* = 0.01, \quad \varepsilon = 5000, \quad \theta = 10$$

tal que la función positiva  $\Phi$  es igual a

$$\Phi(\varepsilon, \alpha, \theta) = \frac{\hat{\beta}}{1 - \alpha} = 557.777$$

La matriz  $P$  obtenida es

$$P = \begin{bmatrix} 1.8519 & -0.0451 & 1.0549 & -0.0131 \\ -0.0451 & 1.4378 & 0.0312 & -0.4053 \\ 1.0549 & 0.0312 & 0.6760 & -0.1506 \\ -0.0131 & -0.4053 & -0.1506 & 1.7420 \end{bmatrix}$$

Tomándose en cuenta la recursión que mejora la región de atracción se obtiene que  $v^* = 0.222$  y por lo tanto las matrices que definen las elipses de convergencia son

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{P^{-1}}{\Phi(\varepsilon, \alpha, \theta)} \\ &= \begin{bmatrix} 25.5252 & 0.7981 & -40.5673 & -3.1309 \\ 0.7981 & 3.3612 & -1.2490 & 0.6800 \\ -40.5673 & -1.2490 & 71.2345 & 5.5650 \\ -3.1309 & 0.6800 & 5.5650 & 3.1889 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.5)$$

y



$$\begin{aligned}
P_e^* &= \frac{(P/v^*)^{-1}}{\Phi(\varepsilon, \alpha, \theta)} \\
&= \begin{bmatrix} 5.6717 & 0.1773 & -9.0141 & -0.6957 \\ 0.1773 & 0.7469 & -0.2775 & 0.1511 \\ -9.0141 & -0.2775 & 15.8283 & 1.2365 \\ -0.6957 & 0.1511 & 1.2365 & 0.7086 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Los parámetros matriciales  $L$  y  $L_s$  del observador son

$$L = \begin{bmatrix} 1.5099 & 0.1241 \\ -0.0264 & 1.6893 \\ -1.3949 & -0.3847 \\ -0.1295 & 1.4241 \end{bmatrix}; \quad L_s = \begin{bmatrix} 1.5099 & 0.1241 \\ -0.0264 & 1.6893 \\ -1.3949 & -0.3847 \\ -0.1295 & 1.4241 \end{bmatrix}$$

Los resultados de aplicar del observador (2.8), con las ganancias  $L$  y  $L_s$  se muestran graficamente a continuación. En las figuras (5.5), (5.6), (5.7) y (5.8 se presentan el estado real, la estimación mediante el observador sliding propuesto y, además, una estimación hecha por un observador de Luenberger.

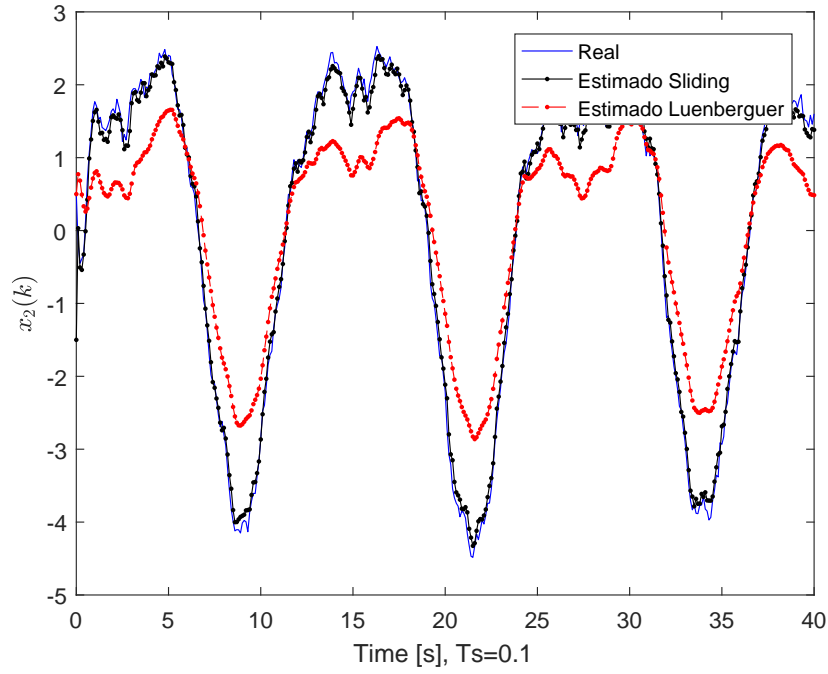


Figura 5.5: Trayectorias Real Vs Estimadas del estado  $x_1(k)$

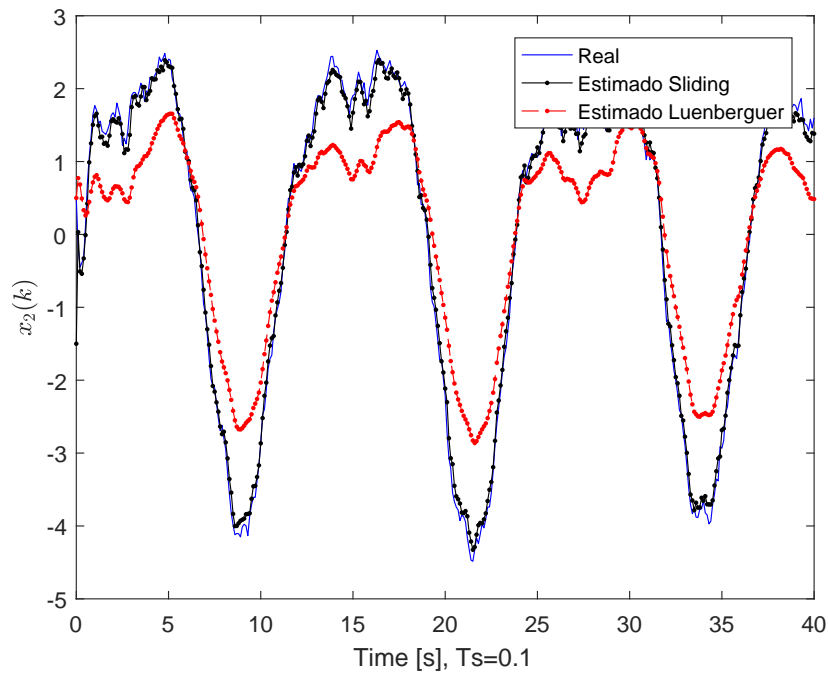


Figura 5.6: Trayectorias Real Vs Estimadas del estado  $x_2(k)$

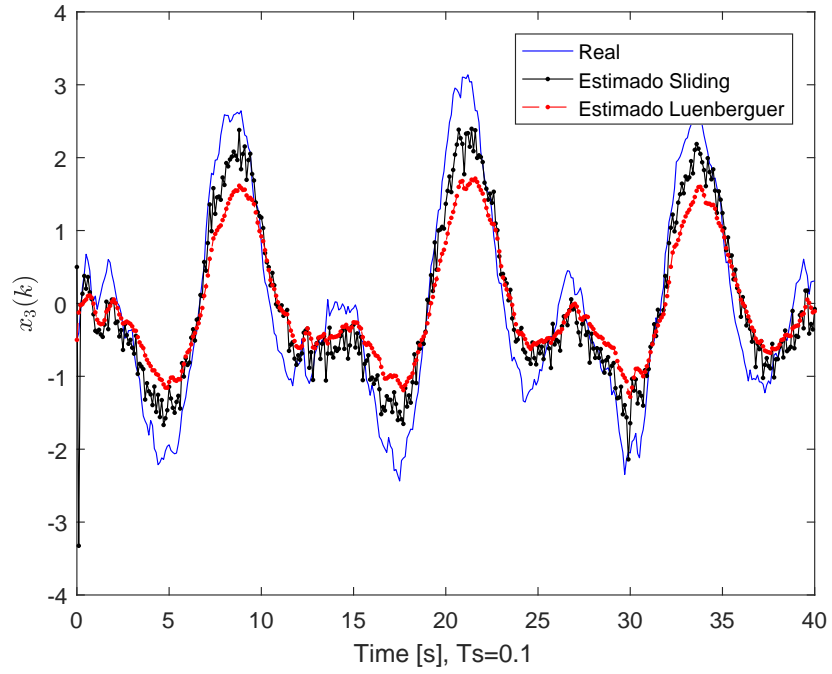


Figura 5.7: Trayectorias Real Vs Estimadas del estado  $x_3(k)$

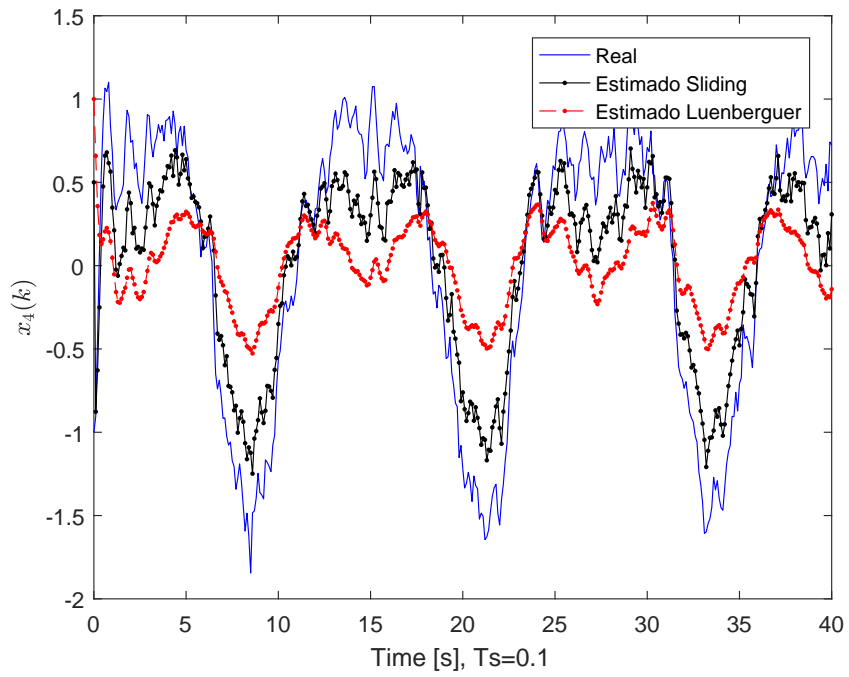


Figura 5.8: Trayectorias Real Vs Estimadas del estado  $x_4(k)$

A continuación se muestran las elipsoides obtenidas de tomar y no tomar en cuenta el término negativo que involucra  $\|\sigma(k)\|$ . En la Fig.(5.9) se observa la trayectoria en el plano de fase de los estados  $x_1(k)$  y  $x_2(k)$  que están asociados a la posición. En la Fig.(5.10) se muestra, de igual manera, el plano de fase de los errores en velocidad que son  $e_3(k)$  y  $e_4(k)$ .

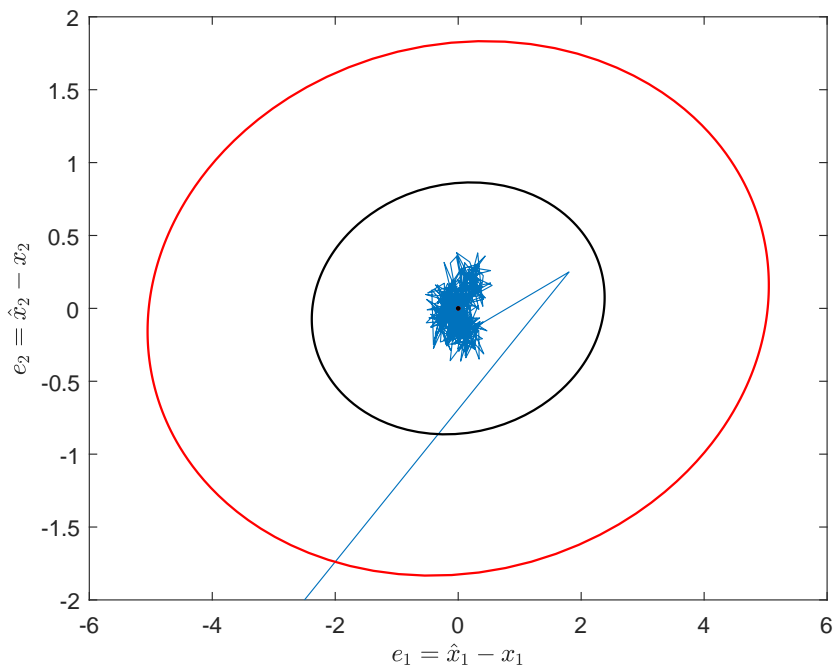


Figura 5.9: Elipse en error de posición.

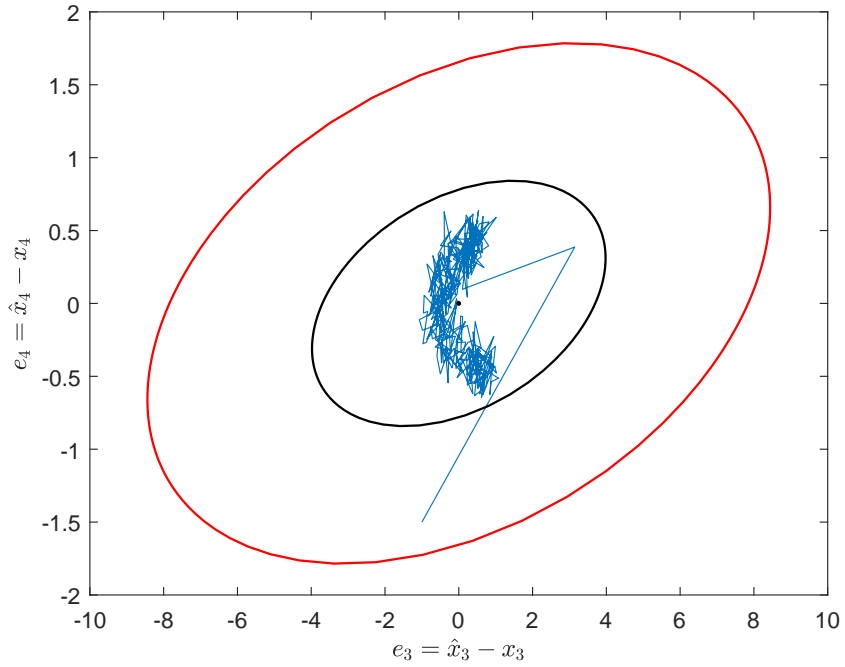


Figura 5.10: Elipse en error de velocidad.

**Comentario:** Usando el método de reducción de la zona de atracción se puede ganar, con respecto al primer método, un 47% la calidad de la nueva elipse.



# Capítulo 6

## Conclusiones

Esta disertación investigó el desarrollo de una implementación para la realización de diseño de un Observador tipo "Modos deslizantes" para una clase de sistemas no lineales que contienen incertidumbres y perturbaciones estocásticas. La principal restricción de la clase de sistemas es totalmente representada por la condición de cuasi-Lipschitz. El procedimiento de diseño está basado en una extensión del método convencional de elipsoides atractivas. Como resultado de este procedimiento de optimización se obtienen las elipsoides atractivas robustas con las mínimas restricciones para calcular las ganancias matriciales óptimas. La elipsoide obtenida contiene a todas las trayectorias de error de estimación con probabilidad 1. La relevancia de este hecho es que propone una metodología para estimar de manera aceptable las trayectorias de los sistemas contemplados.

Además, el cálculo propuesto de una nueva zona de atracción, contemplando el término  $E\{\|\sigma(k)\|\}$ , aumenta notablemente la robustez del observador propuesto reduciendo de esta manera la zona de atracción.

Normalmente el enfoque sugerido de elipsoides atractivas usualmente ofrece una super estimación el diseño de las ganancias de observación está basado en condiciones de convergencia práctica, llamadas, desigualdades matriciales lineales pero en este caso el teorema principal presenta las condiciones suficientes de robustez del método.

### 6.1. Algunos resultados importantes

- Aumento de robustez del observador considerando el término  $E\{\|\sigma(k)\|\}$ .

- Se presenta un cambio especial de coordenadas que lleva las restricciones de trilineales a lineales.
- Ilustración de la metodología mediante la presentación de ejemplos numéricos como la estimación de estados del posicionador de cinta magnética.



# Bibliografía

- [1] Poznyak, A., Polyakov, A., & Azhmyakov, V. (2014). *Attractive ellipsoids in robust control*. Charm: Springer International Publishing.
- [2] POZNYAK, Alex. *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Systems*. Elsevier, 2010.
- [3] POZNYAK, Alex. *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 2: Stochastic Techniques*. Elsevier, 2010.
- [4] GROBOV, Igor D. *Input disturbance estimation for linear systems in the bounded noise context*. Asian Journal of Control, 2001.
- [5] KOSHKOU EI, Ali J.; ZINOBER, Alan SI. *Sliding mode state observation for non-linear systems*. International Journal of Control, 2004.
- [6] BEJARANO, F. J.; FRIDMAN, L.; POZNYAK, *An Exact state estimation for linear systems with unknown inputs based on hierarchical super-twisting algorithm*. International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal, 2007.
- [7] MORENO, Jaime A.; OSORIO, Marisol. *A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers*. En Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on. IEEE, 2008
- [8] Janardhanan, S., Bandyopadhyay, B. Multirate output feedback based robust quasi-sliding mode control of discrete-time systems. IEEE Transactions on Automatic Control, (2007).
- [9] Bandyopadhyay, B., Janardhanan, S. Discrete-time sliding mode control: a multirate output feedback approach (Vol. 323). Springer Science & Business Media.(2005).

- [10] DAVILA, Jorge; FRIDMAN, Leonid; POZNYAK, Alexander. *Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes*. International Journal of Control, 2006.
- [11] Friedman, A.: *Stochastic differential equations and applications*. Dover Publications, Inc., New York, (2006).
- [12] Morimoto H.: *Stochastic control and mathematical modeling. Applications in Economics*.
- [13] SINGH, Satnesh; JANARDHANAN, Sivaramakrishnan. *Sliding mode control-based linear functional observers for discrete-time stochastic systems*. International Journal of Systems Science, 2017.
- [14] Kumar, P. R., & Varaiya, P. *Stochastic systems: Estimation, identification, and adaptive control* (Vol. 75). SIAM.(2015).
- [15] Tarn, T. J., & Rasis, Y. O. N. A. Observers for nonlinear stochastic systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 21(4), 441-448. (1976).
- [16] Kallianpur, G., & Striebel, C. Estimation of stochastic systems: Arbitrary system process with additive white noise observation errors. The Annals of Mathematical Statistics, 39(3), 785-801. (1968).
- [17] Wu, L., Shi, P., & Gao, H. *State estimation and sliding-mode control of Markovian jump singular systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 55(5), 1213-1219. (2010).
- [18] Abidi, K., Xu, J. X., & Xinghuo, Y. *On the discrete-time integral sliding-mode control*. IEEE Transactions on Automatic Control, 52(4), 709-715. (2007).
- [19] WU, Ligang; ZHENG, Wei Xing; GAO, Huijun. *Dissipativity-based sliding mode control of switched stochastic systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013.
- [20] Kailath, T. *Linear systems (Vol. 156)*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. (1980).
- [21] Poznyak, A., Nazin, A., & Murano, D. (2004). *Observer matrix gain optimization for stochastic continuous time nonlinear systems*. Systems & control letters, 52(5), 377-385.

- [22] Leondes, C. T., & Novak, L. M. (1972). *Optimal minimal-order observers for discrete-time systems—A unified theory*. Automatica, 8(4), 379-387.
- [23] Alazki, H., & Poznyak, A. *Constraint robust stochastic discrete-time tracking: Attractive ellipsoids technique*. In Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE), 2010 7th International Conference on (pp. 99-104). IEEE.(2010, September).
- [24] M. Bensoubaya, A. Ferfera & A. Iggidr. *Estabilization of Nonlinear Stochastic Systems Discrete time Systems*. Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, 3180-3181, (1999).
- [25] NESTEROV, Yurii; NEMIROVSKII, Arkadii. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. Siam, 1994.