



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO**

**DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO**

## **Atenuación de vibraciones mediante excitación paramétrica**

Tesis que presenta

**M. en C. Miguel Luis Ramírez Barrios**

**Para obtener el grado de Doctor en Ciencias**

En la Especialidad de

**Control Automático**

Director de Tesis:

**Dr. Joaquín Collado**

Ciudad de México

Noviembre, 2017



# Agradecimientos

---

*Principalmente y de primera instancia, agradezco a mi director de tesis, el **Dr. Joaquín Colado** por aceptarme como su alumno y transmitirme el amor por el estudio y la ciencia, por su paciencia y apoyo incondicional durante mi estancia en el Cinvestav. Pero sobre todo le agradezco los invaluable consejos y observaciones hechos a lo largo de estos años, los cuales me han servido en mi vida académica y cotidiana, sin ellos hubiese sido imposible terminar este proyecto.*

*A los Doctores: Wen Yu, Alexander Poznyak, Fernando Castaños y Jorge Pérez, por ser parte del jurado de esta tesis, y por las sugerencias hechas para mejorar el trabajo.*

*A mis compañeros y amigos que me ayudaron durante mis estudios, en especial a Irandi, Felix y Carlitos.*

*A mis padres por su apoyo en este y todos los proyectos de mi vida.*

*Al Conacyt por la beca otorgada para realizar mis estudios*



# Abstract

---

We extend the notion of **Linear Hamiltonian Systems** to **Linear Hamiltonian Systems with Dissipation**. In order to express this new class of systems, we define and find some properties of  $\gamma$ -Hamiltonian matrices and we develop the properties of  $\mu$ -Symplectic matrices, for instance, the symmetry which allows simplifying many computations. With the last extension, we analyze the **vectorial damped Hill's equation** as a **Linear Periodic Hamiltonian System with Dissipation**, hence new conditions of stability are given for a system with two degrees of freedom. With this new machinery, we develop a method to attenuate vibrations in a mechanical system. We apply **parametric excitation** in a mechanical system with small dissipation and showed that an increase of dissipation of the system may be achieved, then with the inclusion of a change periodically a parameter may increase the dissipation in the system which is modeled by the vectorial Hill's equation, as a result of the above, the response of the system is attenuated.

# Resumen

---

En el trabajo se extiende el concepto de un **Sistema Hamiltoniano Lineal** a un sistema **Hamiltoniano Lineal con Disipación**. Para poder explicar esta nueva clase de sistemas definimos las matrices  $\gamma$ -Hamiltonianas y  $\mu$ -Simplécticas, y desarrollamos sus propiedades, en particular, la propiedad de simetría que presentan sus valores característicos. Esta extensión la usamos para analizar la **ecuación vectorial de Hill amortiguada**, como resultado de este análisis presentamos nuevas condiciones de estabilidad para la **ecuación de vectorial Hill amortiguada** con dos grados de libertad. Con esta teoría proponemos un método para atenuar vibraciones en un sistema mecánico. En un sistema mecánico con una pequeña disipación, introducimos la excitación paramétrica en un elemento del sistema y mostramos que la disipación aumenta, es decir la excitación paramétrica aumenta la disipación en el sistema, como consecuencia las respuestas del sistema son atenuadas.

# Índice general

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>Agradecimientos</b>                                  | <b>I</b>   |
| <b>Abstract</b>   | <b>III</b> |
| <b>Resumen</b>  | <b>IV</b>  |
| <b>Índice de figuras</b>                                | <b>VI</b>  |
| <b>Notación</b>   | <b>VII</b> |
| <b>1. Introducción</b>                                  | <b>1</b>   |
| <b>2. Preliminares</b>                                  | <b>3</b>   |
| 2.1. Sistemas Lineales . . . . .                        | 4          |
| 2.1.1. Estabilidad . . . . .                            | 4          |
| 2.1.2. Reducibilidad . . . . .                          | 7          |
| 2.2. Sistemas Lineales Periódicos . . . . .             | 8          |
| 2.2.1. Teoría de Floquet . . . . .                      | 8          |
| 2.2.2. Estabilidad de los Sistemas Periódicos . . . . . | 11         |
| 2.3. Ecuación de Hill . . . . .                         | 12         |
| 2.3.1. Ecuación de Meissner . . . . .                   | 15         |
| 2.3.2. Ecuación de Mathieu . . . . .                    | 17         |
| 2.3.3. Resonancia Paramétrica . . . . .                 | 18         |
| <b>3. Sistemas <math>\gamma</math>-Hamiltonianos</b>    | <b>20</b>  |
| 3.1. Sistemas Hamiltonianos Lineales . . . . .          | 20         |
| 3.1.1. Matrices Hamiltonianas . . . . .                 | 21         |
| 3.1.2. Matrices Simpléticas . . . . .                   | 22         |
| 3.1.3. Sistemas Hamiltonianos Lineales . . . . .        | 24         |

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| 3.2.       | Matrices $\mu$ -Simplécticas . . . . .   | 25        |
| 3.2.1.     | Polinomio Característico de una matriz $\mu$ -Simpléctica . . . . .                | 26        |
| 3.2.1.1.   | Polinomio Auxiliar de una Matriz $\mu$ -Simpléctica . . . . .                      | 28        |
| 3.3.       | Matrices $\gamma$ -Hamiltonianas . . . . .   | 33        |
| 3.3.1.     | Polinomio Característico de una Matriz $\gamma$ -Hamiltoniana . . . . .            | 34        |
| 3.3.1.1.   | Polinomio auxiliar de una matriz $\gamma$ -Hamiltoniana . . . . .                  | 36        |
| 3.4.       | Sistemas $\gamma$ -Hamiltonianos . . . . .   | 37        |
| 3.4.1.     | Sistemas Lineales $\gamma$ -Hamiltoniano Periódicos . . . . .                      | 39        |
| 3.4.1.1.   | Transformación de Lyapunov-Floquet . . . . .                                       | 39        |
| 3.4.1.2.   | Estabilidad . . . . .  | 40        |
| 3.4.1.2.1. | Con un Grado de Libertad . . . . .   | 40        |
| 3.4.1.2.2. | Con dos Grados de Libertad . . . . .   | 41        |
| <b>4.</b>  | <b>Ecuación Vectorial de Hill</b>  | <b>48</b> |
| 4.1.       | Cálculo de las Zonas de Estabilidad . . . . .                                      | 48        |
| 4.1.1.     | Discretización . . . . .   | 49        |
| 4.1.1.1.   | Técnica de Lifting . . . . .   | 50        |
| 4.1.2.     | Power Method . . . . .   | 52        |
| 4.1.2.1.   | Modificación del Power Method . . . . .  | 53        |
| 4.2.       | Ecuación de Hill con dos grados de libertad . . . . .                              | 54        |
| 4.2.1.     | Solución Analítica de la Ecuación de Meissner con dos grados de libertad . . . . . | 54        |
| 4.2.2.     | Ecuación de Mathieu con dos grados de libertad . . . . .                           | 58        |
| 4.2.3.     | Ecuación de Mathieu con tres grados de libertad . . . . .                          | 59        |
| 4.3.       | La ecuación Vectorial de Hill como un sistema $\gamma$ -Hamiltoniano . . . . .     | 59        |
| 4.3.1.     | Ecuación vectorial de Hill con dos grados de libertad . . . . .                    | 61        |
| <b>5.</b>  | <b>Atenuación de Vibraciones</b>   | <b>67</b> |
| 5.1.       | Introducción . . . . .   | 68        |
| 5.2.       | Transformaciones de Sistemas $\gamma$ -Hamiltonianos . . . . .                     | 70        |
| 5.2.1.     | Sistema 1 . . . . .  | 70        |
| 5.2.2.     | Sistema 2 . . . . .  | 72        |
| 5.2.3.     | Sistema 3 . . . . .  | 73        |
| 5.2.3.1.   | Diagonalización simultánea . . . . .   | 73        |
| 5.2.3.2.   | Sistema 3 . . . . .  | 75        |
| 5.3.       | Atenuación de Vibraciones . . . . .  | 76        |
| 5.3.1.     | Modulación . . . . .   | 76        |
| 5.3.2.     | Reducción de orden . . . . .   | 80        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 5.3.3.    | Exponentes de Lyapunov . . . . .  | 82        |
| 5.3.3.1.  | Atenuación con la ecuación de Meissner . . . . .  | 84        |
| 5.3.4.    | Lugar de los multiplicadores característicos . . . . .                                      | 84        |
| 5.3.4.1.  | Primera Región . . . . .  | 84        |
| 5.3.4.2.  | Segunda Región . . . . .  | 86        |
| <b>6.</b> | <b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>  | <b>88</b> |
| 6.1.      | Trabajo futuro . . . . .  | 89        |
| 6.1.1.    | Generalización para tres o más grados de libertad . . . . .                                 | 89        |
| 6.1.1.1.  | Aplicación . . . . .  | 89        |
| 6.1.2.    | Optimización de la atenuación . . . . .   | 89        |
| 6.1.3.    | Relaciones entre la energía de la señal de excitación y la disipación del sistema . . . . . | 89        |
|           | <b>Bibliografía</b>   | <b>91</b> |

# Índice de figuras

---

|   |    |
|---|----|
| 2.1. Diagrama de estabilidad para la ecuación de Meissner y la gráfica de la traza $D_M(\alpha, \beta_0)$ . . . . .   | 14 |
| 2.2. Diagrama de estabilidad para la ecuación de Meissner . . . . .   | 15 |
| 2.3. Lenguas de Arnold para la ecuación de Mathieu . . . . .  | 18 |
| 3.1. Simetría de los valores característicos de las matrices Hamiltonianas y Simpléticas  | 23 |
| 3.2. Simetría de los valores característicos de las matrices $\gamma$ -Hamiltonianas y $\mu$ -Simpléticas . . . . .   | 27 |
| 3.3. Multiplicadores característicos en el círculo unitario . . . . .   | 40 |
| 3.4. Curvas de transición para un sistema $\gamma$ -Hamiltoniano periódico con dos grados de libertad . . . . .   | 43 |
| 3.5. Fronteras de estabilidad o curvas de transición para un sistema $\gamma$ -Hamiltoniano periódico con dos grados de libertad y posición multiplicadores característicos . . . | 47 |
| 4.1. Diagrama de Estabilidad para la ecuación de Meissner con dos grados de libertad .  | 55 |
| 4.2. Diagrama de Estabilidad para dos ecuaciones de Mathieu con dos grados de libertad  | 57 |
| 4.3. Diagrama de Estabilidad para la ecuación de Mathieu con tres grados de libertad .  | 60 |
| 4.4. Posición de los multiplicadores característicos, la región en color blanco corresponde una configuración estable, las regiones de colores a una inestable . . . . .          | 65 |
| 4.5. Lenguas de Arnold para la ecuación vectorial de Hill (4.31) y (4.38) . . . . .   | 66 |
| 5.1. Sistema Mecánico . . . . .   | 68 |
| 5.2. Simulación de la ecuación (5.3)(5.4) con $\alpha = 2$ y $\beta = 3$ . . . . .  | 71 |
| 5.3. Diagrama de Estabilidad de (5.19) y Posición de los Multiplicadores para con $\alpha = 1.5$ y $\beta = 3.5$ . . . . .  | 77 |
| 5.4. Señales de Respuesta para (5.19) con $\alpha = 1.5$ y $\beta = 3.5$ . . . . .  | 79 |
| 5.5. Valores característicos con y sin excitación paramétrica . . . . .   | 80 |
| 5.6. Diagrama de Estabilidad y Zonas de atenuación . . . . .  | 83 |

|  |    |
|--|----|
| 5.7. Zonas de Atenuación, señal de respuesta y posición de los multiplicadores y exponentes para $(\alpha, \beta) = (0.3095, 0.705)$ . . . . . | 85 |
| 5.8. Zonas de Atenuación, señal de respuesta $(\alpha, \beta) = (0.35, 0.5)$ . . . . .   | 87 |

# Notación

---

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| $\mathbb{R}$                | Campo de los números reales   |
| $\mathbb{C}$                | Campo de los números complejos  |
| $\mathbb{Z}$                | Conjunto de los números enteros   |
| $\mathbb{R}^n$              | Conjunto de todos los vectores columna con $n$ elementos reales   |
| $\mathbb{R}^{n \times m}$   | Conjunto de todas las matrices de $n$ filas y $m$ columnas con elementos reales   |
| $I_n$                       | Matriz identidad  |
| $0_{n \times m}$            | Matriz de ceros   |
| $0$                         | Cero del espacio vectorial o vector de ceros  |
| Dada la matriz cuadrada $A$ |   |
| $A^T$                       | Matriz transpuesta  |
| $A^{-1}$                    | Matriz inversa  |
| $A^{-T}$                    | Matriz inversa transpuesta  |
| $tr(A)$                     | Traza de la matriz $A$  |
| $\det(A)$                   | Determinante de la matriz $A$   |
| $\sigma(A)$                 | Conjunto de los valores característicos de la matriz $A$ , $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$                 |
| $A > 0$                     | Matriz positiva definida es decir, simétrica y $x^T A x > 0$ , $\forall x \neq 0$   |
| $A^s$                       | Parte simétrica de una matriz $A^s = \frac{1}{2}(A + A^T)$ , $(A^s)^T = A^s$  |
| $A^A$                       | Parte anti-simétrica de una matriz $A^A = \frac{1}{2}(A - A^T)$ , $(A^A)^T = -A^A$  |
| $A = \text{Diag}\{\cdot\}$  | Matriz Diagonal, es decir una matriz solo con elementos en la diagonal principal $A = \text{Diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ |

|                           |   |
|---------------------------|---|
| $\operatorname{Re}(z)$    | Parte real de $z \in \mathbb{C}$  |
| $\operatorname{Im}(z)$    | Parte imaginaria de $z \in \mathbb{C}$  |
| $ z $                     | Modulo de $z \in \mathbb{C}$  |
| $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ | Derivada con respecto al tiempo   |
| $\ \cdot\ $               | Norma euclidiana de un vector $\ x\  = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$                                |
| $\ A\ $                   | Norma (inducida) de la matriz cuadrada $A$ : $\ A\  = \max_{\ x\ =1} \ Ax\ $                                    |
| $\Phi(t, t_0)$            | Matriz de transición de estados   |
| $C_{[t_0, \infty)}^1$     | Conjunto de funciones continuas y diferenciables en $[t_0, \infty)$   |
| $C_{[t_0, \infty)}^1$     | Conjunto de matrices cuadradas con entradas continuas en $[t_0, \infty)$<br>y diferenciables en $[t_0, \infty)$ |
| $\Omega$                  | Periodo mínimo  |
| $M$                       | Matriz de monodromía $M = \Phi(\Omega, 0) = e^{R\Omega}$  |
| $\lambda_i$               | Valores característicos de la matriz de monodromía<br>o multiplicadores característicos $\sigma(M)$             |
| $\rho_i$                  | Exponentes característicos o exponentes de Floquet $\sigma(R)$  |
| $P_M(\lambda)$            | Polinomio característico de una matriz $\mu$ -Simpléctica $M$   |
| $Q_M(\delta)$             | Polinomio auxiliar de una matriz $\mu$ -Simpléctica $M$   |
| $P_A(s)$                  | Polinomio característico de una matriz $\gamma$ -Hamiltoniana $A$   |
| $Q_A(\phi)$               | Polinomio auxiliar de una matriz $\gamma$ -Hamiltoniana $A$   |



# Introducción

---

En diversos sistemas de ingeniería eléctricos y mecánicos las oscilaciones o vibraciones de algún parámetro puede causar daños o mal funcionamiento del sistema, debido a esto el estudio de los sistemas que oscilan es de interés en diversas ramas de la ingeniería [1, 2, 3]. Para el diseño de máquinas, estructuras de edificios, motores, rotores, turbinas y sistemas de control es deseable encontrar parámetros para los cuales las vibraciones sean eliminadas, sin embargo en general no es posible eliminarlas por completo por lo que existen diversas técnicas para atenuar estas vibraciones [4, 5, 6, 3, 7]. En este trabajo proponemos la atenuación de vibraciones mediante **excitación paramétrica**, es decir variar periódicamente con respecto al tiempo algún parámetro del sistema [8, 9], para un sistema de dos grados de libertad (DOF<sup>1</sup>). En este sentido este trabajo está dedicado al estudio de los sistemas periódicos y en particular a la ecuación de Hill.

Al introducir **excitación paramétrica** en algún elemento que pueda almacenar energía en un sistema de al menos 2-DOF, es posible encontrar algunos parámetros y frecuencias, llamadas *frecuencias de anti-resonancia*, donde el amortiguamiento existente se incrementa, en otras palabras, el efecto de la **excitación paramétrica** es amplificar la disipación que existe en el sistema sin excitación. Este fenómeno fue descubierto y reportado por A. Tondl al cual llamó *anti-resonancia paramétrica* [10, 11]. Años más tarde a través de *métodos asintóticos*, teoría de perturbaciones y promediación [12, 13, 14, 15], F. Donhal desarrolló un método para la atenuación o eliminación de vibraciones mediante la construcción de un resorte con elasticidad variable periódicamente con respecto al tiempo, es decir, mediante **excitación paramétrica** [16].

Debido a que es posible aproximar algunas soluciones, el uso de métodos asintóticos ha sido una gran herramienta en el estudio de los sistemas dinámicos. Sin embargo, este análisis solo es válido para parámetros pequeños, además que solo es posible caracterizar soluciones asintóticamente estables, por lo que si se desea excitar el sistema con una señal con amplitud *grande* es imposible usar estas técnicas. Por esta razón, a diferencia de los textos publicados, en este trabajo proponemos un análisis del fenómeno usando **Teoría Floquet** para sistemas descritos por la **ecuación vectorial**

---

<sup>1</sup>Por sus siglas en inglés, degrees of freedom DOF

**de Hill amortiguada** vista como un **sistema Hamiltoniano lineal con disipación**.

Existen una gran cantidad de publicaciones sobre los sistemas Hamiltonianos, a lo largo del trabajo mencionaremos principalmente a K. Mayer [17] y Yakubovich [18] este último libro está especializado en los **sistemas Hamiltonianos lineales con coeficientes periódicos**. La mayoría de la literatura acerca de los sistemas Hamiltonianos no aborda el caso cuando existe disipación o amortiguamiento en el sistema, sin embargo, en la mayoría de aplicaciones o sistemas mecánicos existe indudablemente al menos una cantidad pequeña de disipación, por lo que uno de los principales aportes de la presente tesis es extender la definición y algunas propiedades de un sistema lineal Hamiltoniano a un sistema Hamiltoniano con cierta clase de disipación al cual llamaremos  **$\gamma$ -Hamiltoniano**. En el escrito enunciamos un teorema con el cual demostramos que la matriz de transición de estados de cualquier sistema  **$\gamma$ -Hamiltoniano** es  **$\mu$ -Simpléctica**. Con este resultado reportamos las propiedades de **simetría** que presentan las matrices  **$\mu$ -Simplécticas**, esta **simetría** será la clave de nuestra investigación.

Dado que la matriz de monodromía de un sistema  **$\gamma$ -Hamiltoniano periódico** es  **$\mu$ -Simpléctica** usamos la propiedad de **simetría** en los valores característicos de estas matrices para obtener nuevas condiciones de estabilidad para la **ecuación vectorial de Hill amortiguada** con 2-DOF. Estas condiciones brindan mayor información sobre las regiones de inestabilidad, llamadas lengua de Arnold [19], de la **ecuación vectorial de Hill amortiguada**, además gracias a estas nuevas condiciones de estabilidad el cómputo de los diagramas de estabilidad se facilita considerablemente y se hace más eficiente.

Con estas nuevas herramientas proponemos un nuevo método para la **atenuación de vibraciones con excitación paramétrica**, nuevamente usando la **simetría** del resultado anterior es posible calcular el conjunto de parámetros para los cuales podemos atenuar el sistema [20, 21]. En términos de la teoría de control, se trata de **control en lazo abierto**, podemos decir que esta técnica de control pertenece al llamado **control con vibraciones** o **control vibracional** el cual tiene como ventaja que no es necesario medir el estado del sistema [22, 23].

El trabajo está organizado de la siguiente manera, en los preliminares damos un breve repaso de los **sistemas periódicos** y algunos resultados de la **ecuación de Hill**. El capítulo 3 está dedicado a los sistemas  **$\gamma$ -Hamiltonianos**, hacemos especial énfasis en las propiedades de las matrices  **$\gamma$ -Hamiltonianas** y  **$\mu$ -Simplécticas**. El capítulo 4 de forma muy breve describimos la **ecuación vectorial de Hill amortiguada** con 2 y 3 DOF y sus diferencias con la ecuación de Hill, proponemos un nuevo algoritmo para el cómputo de las regiones de estabilidad [24] y utilizamos los resultados del capítulo anterior para obtener nuevas condiciones de estabilidad para la **ecuación vectorial de Hill amortiguada**. Finalmente como aplicación del análisis hecho en los capítulos 3 y 4 en el capítulo 5 se presenta un método de para la atenuación de vibraciones usando **excitación paramétrica**.

# Preliminares

---

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes periódicos se le conoce como **ecuación de Hill** debido a la publicación de G.W. Hill en 1886 sobre la órbita de la luna alrededor de la tierra [25], a la par en 1983 G. Floquet estableció los fundamentos de la teoría sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes periódicos. Años más tarde Lyapunov dedico parte de su estudio a los sistemas periódicos, los cuales se vieron reflejados en la tercera parte de su famoso tratado "**the general problem of stability of motion**", donde se establecen las condiciones de estabilidad para los sistemas lineales periódicos [26].

Con el estudio de la mecánica cuántica la ecuación de Hill ganó importancia debido a su relación con la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, para una dimensión esta **ecuación de Schrödinger** con un potencial periódico es una ecuación del tipo Hill, los intervalos de estabilidad e inestabilidad de la ecuación de Hill corresponden a las regiones permitidas y prohibidas de energía de una partícula; por esta razón en este periodo la mayoría de contribuciones están relacionadas con el estudio espectral de la ecuación de Hill [27, 28, 29]. Posteriormente en 1951, a través de la teoría de perturbaciones Kapitsa encontró las condiciones para estabilizar un **péndulo invertido** sobre un soporte que oscila de forma periódica, este péndulo linealizado alrededor de un punto de equilibrio esta descrito por la ecuación de Hill, debido al soporte vibrante, el punto de equilibrio superior se vuelve estable y el punto de equilibrio inferior inestable [30, 31]; este ejemplo puede ser considerado como un ejemplo del control con vibraciones [4, 3], en esta rama del control aparece de forma común la ecuación de Hill y por supuesto de forma más general los sistemas periódicos.

Este capítulo es un breve resumen de los sistemas lineales periódicos y en particular sobre la ecuación de Hill, en su mayoría estos resultados están en enunciados en [32, 18, 29, 27], los teoremas, definiciones y resultados que se mencionan durante este capítulo se usan a lo largo del trabajo y son la base sobre la cual está basado nuestro análisis. En particular se enuncian: **la factorización de Floquet** y **la transformación de Lyapunov Floquet** con lo que podemos transformar un sistema lineal periódico en un sistema invariante en el tiempo. Además describimos las principales características de las ecuaciones de **Mathieu** y **Meissner**.

## 2.1. Sistemas Lineales

Sea

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) & A(t) &\in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde todos los elementos de la matriz  $A(t) = a_{ij}(t)$  son continuos a trozos y acotados  $|a_{ij}(t)| < \infty$   $i, j = 0, 1 \dots n$  para todo  $t \in [t_0, \infty)$ . El sistema (2.1) al ser lineal (con respecto a  $x$ ) cumple con las condiciones de Lipschitz por lo tanto tiene solución única.

**Definición 2.1.** Una matriz fundamental de (2.1) se define como una matriz  $N(t) = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$  tal que sus columnas son soluciones linealmente independientes  $\phi_i(t) \in \mathbb{R}^n$  de (2.1), es claro que  $\det(N(t)) \neq 0 \ \forall t$  y  $\dot{N}(t) = A(t)N(t)$ .

**Definición 2.2.** La matriz de transición de estados del sistema (2.1) se define como:

$$\Phi(t, t_0) = N(t)N^{-1}(t_0)$$

De la definición es fácil probar que  $\Phi(t, t_0)$  es única<sup>1</sup>, además la solución de (2.1) se puede escribir como:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

y cuenta con las siguientes propiedades [33]:

- i)  $\Phi(t, t) = I$
- ii)  $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$
- iii)  $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$
- iv)  $\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t, \tau) = -\Phi(t, \tau)A(\tau)$
- v)  $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \quad \forall t_2, t_1, t_0$

### 2.1.1. Estabilidad

Consideremos el sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.2)$$

con  $f : [t_0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y diferenciable en  $t$ , localmente Lipschitz en el dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen  $x = 0$ . El origen es un punto de equilibrio de (2.2) si  $f(t, 0) = 0$ , para todo  $t \geq t_0$ .

<sup>1</sup>Sea  $N(t)$  y  $\tilde{N}(t)$  dos matrices fundamentales arbitrarias, las columnas de  $N(t)$  son una base del espacio vectorial de soluciones de (2.1), entonces  $\tilde{N}(t)$  es una combinación lineal de las columnas de  $N(t)$ :  $\tilde{N}(t) = N(t)C$  .:  $\det[C] \neq 0$ . Si  $\tilde{\Phi}(t, t_0) = \tilde{N}(t)\tilde{N}^{-1}(t_0) = [N(t)C][N(t_0)C]^{-1} = N(t)N^{-1}(t_0) = \Phi(t, t_0)$

**Definición 2.3.** Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de (2.2), entonces se dice que  $x = 0$  es:

i) **Estable** o Lyapunov estable si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tal que  $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$  para  $t \geq t_0$ .

ii) **Asintóticamente estable** si es estable, y existe una constante positiva  $k = k(t_0)$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para todo  $\|x(t_0)\| < k$

iii) **Inestable** si no es estable

En la definición se establece el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov para cualquier sistema (2.2) no autónomo, no necesariamente lineal. De la definición podemos decir que un punto de equilibrio es Lyapunov estable si las soluciones que se inicien en una vecindad del punto de equilibrio permanecen en la vecindad para todo  $t \geq t_0$ , de otro modo el punto de equilibrio es inestable. Sin embargo, en nuestro estudio trataremos con sistemas lineales no autónomos, por lo que es necesario explicar el concepto de estabilidad para los sistemas lineales. Para el sistema (2.2) la estabilidad es una propiedad local que no tiene relación con el hecho que sus soluciones sean acotadas para todo tiempo<sup>2</sup>  $t \geq t_0$ , sin embargo, para los sistemas lineales (2.1) podemos relacionar el hecho que las soluciones sean acotadas con la estabilidad. El siguiente teorema nos garantiza que si una solución de (2.1) es acotada para todo  $t$  en un intervalo  $[t_0, \infty)$  la solución es estable.

**Teorema 2.1.** *El sistema (2.1) ( $\dot{x} = A(t)x$ ) es estable si y solo si cada una de sus soluciones  $\phi_i(t)$  es acotada  $\forall t \geq t_0$ .*

**Prueba:** ( $\Rightarrow$ ) Suponemos que existe una solución cualquiera  $z(t)$  de (2.1) no acotada y la solución trivial  $\phi(t) = 0$  estable, sea  $\varepsilon > 0$  y buscamos un  $\delta > 0$  (que siempre existe por la estabilidad de la solución trivial), escribimos una solución:

$$x(t) = \frac{z(t)}{\|z(t_0)\|} \frac{\delta}{2} \Rightarrow \|x(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

dado la estabilidad de  $\phi(t) = 0 \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$  lo que contradice que  $z(t)$  sea no acotada.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $\Phi(t, t_0)$  la matriz de transición de estados de (2.1) con todas sus columnas acotadas, entonces podemos escribir<sup>3</sup>  $\|\Phi(t, t_0)\| \leq c$  entonces:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0)x_0 \\ \|x(t)\| &\leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x_0\| \leq c \|x_0\| \end{aligned}$$

ahora  $\varepsilon > 0$  y  $\|x(t_0)\| < \delta$  con  $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$

$$\|x(t)\| \leq c \|x_0\| \leq c\delta < \varepsilon$$

por lo que la solución trivial  $\phi(t) = 0$  es estable. ■

<sup>2</sup>Ver ejemplos en [34] [12] [35]

<sup>3</sup>La norma  $\|A\|$  la definimos como  $\|A\| \triangleq \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$

El teorema anterior establece que para los sistemas lineales la estabilidad es equivalente a que su solución sea acotada en  $[t_0, \infty)$ . Por otro lado el siguiente teorema establece que la solución de (2.1) solo puede ser no acotada cuando  $t \rightarrow \infty$ , o dicho en otras palabras los sistemas lineales (2.1) no tienen tiempo de *escape finitos*<sup>4</sup>.

**Teorema 2.2.** *Sea el sistema (2.1) y  $\phi(t)$  cualquier solución, entonces  $\forall t < \infty \rightarrow |\phi(t)| < \infty$  es decir para cualquier tiempo finito la solución de (2.1) está acotada.*

**Prueba:** Definimos  $\|\phi\|^2 = \phi^T \phi$  luego

$$\frac{d}{dt} \|\phi\|^2 = \frac{d}{dt} (\phi^T \phi) = \dot{\phi}^T \phi + \phi^T \dot{\phi} = [A(t)\phi]^T \phi + \phi^T A(t)\phi = 2\phi^T \left[ \frac{A(t)^T + A(t)}{2} \right] \phi$$

definiendo  $\mu_1(t) = \lambda_{\min} \left[ \frac{A(t)^T + A(t)}{2} \right]$  y  $\mu_2(t) = \lambda_{\max} \left[ \frac{A(t)^T + A(t)}{2} \right]$ , con  $\lambda \in \sigma \left( \frac{A(t)^T + A(t)}{2} \right)$ , por la desigualdad de Rayleigh

$$2\mu_1 \|\phi\|^2 \leq 2\phi^T \left[ \frac{A(t)^T + A(t)}{2} \right] \phi \leq 2\mu_2 \|\phi\|^2$$

$$2\mu_1 \|\phi\|^2 \leq \frac{d}{dt} \|\phi\|^2 \leq 2\mu_2 \|\phi\|^2$$

Integrando

$$\|\phi(t_0)\| e^{\int_{t_0}^t \mu_1 dt} \leq \|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\| e^{\int_{t_0}^t \mu_2 dt}$$

por lo tanto  $\phi(t)$  está acotado para cualquier  $t \geq t_0$  con  $t < \infty$ . ■

Por supuesto este teorema no es útil como prueba de estabilidad, pero si muestra una propiedad de los sistemas lineales:  $x(t) \rightarrow \infty \iff t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto podemos refinar el concepto de estabilidad para los sistemas lineales.

**Definición 2.4.** El sistema (2.1) ( $\dot{x} = A(t)x$ ) se dice:

- i) **Estable** si  $\forall t \geq t_0 \exists \gamma < \infty$  tal que  $\|x(t)\| \leq \gamma \|x(t_0)\|$  o bien  $\forall t \geq t_0 \exists \rho < \infty \|\Phi(t, t_0)\| \leq \rho$
- ii) **Exponencialmente Estable** si es estable y  $\exists \gamma > 0, \alpha > 0 : \forall t \geq t_0$  se cumple que  $\|x(t)\| \leq \gamma e^{-\alpha(t-t_0)} \|x(t_0)\|$  o bien  $\forall t \geq t_0 \exists \rho > 0, \beta > 0 : \|\Phi(t, t_0)\| \leq \rho e^{-\beta(t-t_0)}$

Para nuestro estudio no es necesario tener más definiciones de estabilidad, pues se puede probar que si (2.1) es *estable (exponencialmente estable)* entonces es *globalmente estable (globalmente exponencialmente estable)* respectivamente, además, más adelante mostraremos que para los sistemas lineales periódicos *exponencialmente estable* es equivalente a *asintóticamente estable* [32].

**Observación 2.1.** El sistema (2.1) es exponencialmente *estable* si y sólo si todas sus soluciones tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  es decir  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$

<sup>4</sup>La ecuación no lineal  $\dot{x} = -x^2$  con  $x(0) = -0.5$ , tiene solución  $x(t) = \frac{-0.5}{1-0.5t}$  obviamente cuando  $\lim_{t \rightarrow 2} x(t) = -\infty$ , es decir la solución del sistema se va a infinito en un tiempo finito. En general,  $\dot{x} = f(x)$  con  $x_0 = x(t_0)$  tiene un tiempo de *escape finito* si se cumple que  $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds < \infty$ , esta condición es una consecuencia del Criterio de Osgood [36, 37]

### 2.1.2. Reducibilidad

Consideremos el sistema (2.1)  $\dot{x}(t) = A(t)x$  y la transformación:

$$x(t) = L(t)y(t) \quad (2.3)$$

con  $L(t) \in \mathbf{C}_{[t_0, \infty)}^1$  una matriz cuadrada de dimensiones  $n \times n$  no singular y diferenciable  $\forall t \geq t_0$  entonces podemos reescribir el sistema (2.1) como:

$$\dot{y}(t) = [L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t)]y(t) = F(t)y(t) \quad (2.4)$$

**Definición 2.5.** La transformación (2.3) es llamada **transformación de Lyapunov** si  $L(t) \in \mathbf{C}_{[t_0, \infty)}^1$ ,  $L(t)$ ,  $L^{-1}(t)$  y  $\dot{L}(t)$  están acotadas para todo  $t \geq t_0$ .

**Lema 2.1.** Sea  $L(t)$  una transformación de Lyapunov, entonces el sistema (2.1) es:

i) **Estable** si y solo si (2.4) es estable

ii) **Exponencialmente Estable** si y solo si (2.4) exponencialmente estable

**Prueba:** i) ( $\Rightarrow$ ) Sea  $\Phi_A(t, t_0)$  y  $\Phi_F(t, t_0)$  la matriz de transición de estados de (2.1) y (2.4) respectivamente. Ahora proponemos una matriz  $Q(t) = L^{-1}(t)\Phi_A(t, t_0)L(t_0)$  derivando<sup>5</sup>  $Q(t)$

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= -L^{-1}(t)\dot{L}(t)L^{-1}(t)\Phi_A(t, t_0)L(t_0) + L^{-1}(t)A(t)\Phi_A(t, t_0)L(t_0) \\ &= [L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t)]L^{-1}(t)\Phi_A(t, t_0)L(t_0) = F(t)Q(t) \end{aligned}$$

es decir  $Q(t)$  es una matriz fundamental de (2.4) además  $Q^{-1}(t_0) = I_n$  por lo tanto

$$\Phi_F(t, t_0) = L^{-1}(t)\Phi_A(t, t_0)L(t_0) \quad (2.5)$$

si (2.1) estable  $\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma$  y dado que  $L(t)$ ,  $L^{-1}(t)$ ,  $\dot{L}(t)$  están acotadas

$$\|\Phi_F(t, t_0)\| \leq \|L^{-1}(t)\| \|\Phi_A(t, t_0)\| \|L(t_0)\| \leq \eta$$

por lo tanto (2.4) es estable. ( $\Leftarrow$ ) De (2.5) escribimos  $\Phi_A(t, t_0) = L(t)\Phi_F(t, t_0)L^{-1}(t_0)$  si (2.4) es estable se cumple que  $\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq \|L(t)\| \|\Phi_F(t, t_0)\| \|L^{-1}(t_0)\| \leq \tilde{\eta}$ . La prueba de ii) es similar a i) ■.

**Definición 2.6.** Un sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x$$

se dice **reducible** a

$$\dot{y}(t) = F(t)y(t)$$

si existe una transformación de Lyapunov  $x(t) = L(t)y(t)$  tal que

$$F(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t)$$

<sup>5</sup>Sabemos que  $\frac{d}{dt}L^{-1}(t)L(t) = 0 \rightarrow \dot{L}^{-1}(t)L(t) + L^{-1}(t)\dot{L}(t) = 0$  por lo tanto  $\dot{L}^{-1}(t) = -L^{-1}(t)\dot{L}(t)L^{-1}(t)$

El problema de reducibilidad ha sido estudiado por muchos años, por supuesto sería deseable encontrar una transformación en la cual podamos reducir un sistema lineal variante en el tiempo  $\dot{x}(t) = A(t)x$  a un sistema lineal invariante en el tiempo  $\dot{y}(t) = Fy(t)$ , en 1946 Erugin estableció que un sistema  $\dot{x}(t) = A(t)x$  es reducible a un sistema invariante en el tiempo  $\dot{y}(t) = Fy(t)$  si y solo si su matriz fundamental  $Q(t)$  tiene la forma  $Q(t) = L(t)e^{Rt}$  con  $L(t)$  transformación de Lyapunov y  $R$  una matriz constante [32]. Años antes en 1883 G. Floquet encontró esta transformación para los sistemas lineales periódicos.

## 2.2. Sistemas Lineales Periódicos

### 2.2.1. Teoría de Floquet

Sea el sistema (2.1) con propiedad que la matriz  $A(t + \Omega) = A(t)$  es periódica, es decir un **sistema lineal periódico**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x & A(t + \Omega) &= A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $\Omega \in \mathbb{R}$  es el periodo fundamental. A pesar de la propiedad de periodicidad (2.6) en general no se puede calcular una solución analítica salvo en algunos casos particulares [38], y por supuesto la solución de (2.6) no necesariamente es periódica<sup>6</sup>. Sin embargo, que el sistema sea periódico permite obtener muchas propiedades sobre su comportamiento.

**Proposición 2.1.** *Sea  $N(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz fundamental de (2.6) y  $C, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  entonces se cumple que:*

- i)  $N(t + \Omega)$  también es una matriz fundamental
- ii)  $N(t + \Omega) = N(t)C$
- iii) Si  $N(t_1 + \Omega) = N(t_1)C$  y  $N(t_2 + \Omega) = N(t_2)B$  entonces  $C$  es similar a  $B$
- iv)  $N(t + k\Omega) = N(t)C^k$

**Prueba:** i)  $\frac{d}{dt}N(t + \Omega) = A(t + \Omega)N(t + \Omega) = A(t)N(t + \Omega)$ . ii) Dado que  $N(t + \Omega)$  y  $N(t)$  son matrices fundamentales de (2.6) existe una combinación lineal entre sus columnas por lo tanto  $N(t + \Omega) = N(t)C$ , por supuesto  $C$  es no singular. iii) Nuevamente como  $N(t_1)$  y  $N(t_2)$  son matrices fundamentales  $\rightarrow N(t_1) = N(t_2)D$  con  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no singular  $\rightarrow N(t_1 + \Omega) = N(t_2 + \Omega)D = N(t_2)BD = N(t_2)DD^{-1}BD = N(t_1)D^{-1}BD = N(t_1)C$  por lo tanto  $\sigma(C) = \sigma(B)$  iv)

<sup>6</sup>Por ejemplo sea  $\dot{y}(t) = (\rho + \cos t)y$  con  $y(0) = 1$  entonces  $y(t) = e^{\rho t + \sin t}$  por lo tanto solamente es periódica  $\iff \rho = 0$  [35].

Si  $N(t + \Omega) = N(t)C \rightarrow$

$$\begin{aligned} N(t + 2\Omega) &= N(t + \Omega)C = N(t)CC \\ N(t + 3\Omega) &= N(t + 2\Omega)C = N(t + \Omega)C^2 = N(t)C^3 \\ &\vdots \\ N(t + k\Omega) &= N(t)C^k \end{aligned}$$

**Definición 2.7.** La matriz de transición de estados de (2.6)  $\Phi(t, t_0)$  evaluada en un periodo se define como la **matriz de monodromía**

$$M_{t_1} = \Phi(\Omega + t_1, t_1)$$

si  $t_1 = 0$  entonces

$$M \triangleq M_0 = e^{R\Omega} = \Phi(\Omega, 0) \quad (2.7)$$

**Observación 2.2.** Los valores característicos de  $M$  no dependen del tiempo  $t_1$ , es decir  $\sigma(\Phi(\Omega + t_1, t_1)) = \sigma(\Phi(\Omega + t_2, t_2))$ .  $M$  es una matriz fundamental por el inciso *iii*) de la proposición anterior, por lo tanto concluimos que  $\Phi(\Omega + t_1, t_1)$  es similar a  $\Phi(\Omega + t_2, t_2)$ . La matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es no singular, por lo tanto, la matriz  $R$  está bien definida<sup>7</sup> [39].

**Teorema 2.3 (Factorización de Floquet).** *La matriz de transición de estados de (2.6) se puede factorizar como:*

$$\Phi(t, t_0) = P^{-1}(t)e^{R(t-t_0)}P(t_0)$$

con

$$P^{-1}(t) = \Phi(t, 0)e^{-Rt}$$

una matriz de dimensiones  $n \times n$  periódica  $P^{-1}(t) = P^{-1}(t + \Omega)$ . Si  $t_0 = 0$  entonces:

$$\Phi(t, 0) = P^{-1}(t)e^{Rt} \quad (2.8)$$

**Prueba:** De la definición de  $P^{-1}(t) \rightarrow P(t) = e^{Rt}\Phi(0, t)$  por supuesto  $P^{-1}(t)$  y  $P(t)$  son periódicas<sup>8</sup>, usando las propiedades de  $\Phi(t, t_0)$  podemos escribir:

$$\Phi(t, t_0) = \underbrace{\Phi(t, 0)e^{-Rt}}_{P^{-1}(t)} e^{Rt} e^{-Rt_0} \underbrace{e^{Rt_0}\Phi(0, t_0)}_{P(t_0)} = P^{-1}(t) e^{R(t-t_0)}P(t_0)$$

Si  $t_0 = 0 \rightarrow P^{-1}(0) = \Phi(0, 0)e^{-R(0)} = I_n$ , entonces podemos reescribir el teorema anterior

<sup>7</sup>La matriz  $R$  es real si la matriz  $M$  no tiene divisores elementales correspondientes valores característicos negativos [32]

<sup>8</sup> $P^{-1}(t + \Omega) = \Phi(t + \Omega, 0)e^{-R(t+\Omega)} = \Phi(t + \Omega, \Omega)\Phi(\Omega, 0)e^{-\Omega}e^{-Rt} = \Phi(t + \Omega, \Omega)e^{-Rt} = \Phi(t, 0)e^{-Rt} = P^{-1}(t)$   
 $P(t + \Omega) = e^{R(t+\Omega)}\Phi(0, t + \Omega) = e^{Rt}e^{R\Omega}[\Phi(t + \Omega, 0)]^{-1} = e^{Rt}e^{R\Omega}[\Phi(t + \Omega, \Omega)\Phi(\Omega, 0)]^{-1} = e^{Rt}e^{R\Omega}\Phi(0, \Omega)\Phi(0, t) = e^{Rt}\Phi(0, t) = P(t)$

**Corolario 2.1 (Floquet).** *La matriz de transición de estados de (2.6) con  $t_0 = 0$  se puede factorizar como:*

$$\Phi(t, 0) = P^{-1}(t)e^{Rt} \quad (2.9)$$

**Observación 2.3 (Transformación Lyapunov-Floquet).** La importancia de la Factorización de Floquet radica en la siguiente transformación<sup>9</sup>, si definimos

$$z(t) = P(t)x(t) \quad (2.10)$$

con

$$P(t) = e^{Rt}\Phi(0, t) \quad (2.11)$$

entonces para el sistema periódico (2.6) podemos escribir:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) = [\dot{P}(t)P^{-1}(t) + P(t)A(t)P^{-1}(t)]z(t) \\ &= \left\{ \left[ Re^{Rt}\Phi(0, t) + e^{Rt}\frac{d}{dt}\Phi(0, t) \right] P^{-1}(t) + P(t)A(t)P^{-1}(t) \right\} z(t) \\ &= \left\{ [Re^{Rt}\Phi(0, t) - e^{Rt}\Phi(0, t)A(t)]\Phi(t, 0)e^{-Rt} + e^{Rt}\Phi(0, t)A(t)\Phi(t, 0)e^{-Rt} \right\} z(t) \\ &= \left\{ Re^{Rt}\Phi(0, t)\Phi(t, 0)e^{-Rt} \right\} z(t) = Rz(t) \\ \dot{z}(t) &= Rz(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

es decir el sistema periódico (2.6) puede transformarse en un sistema invariante en el tiempo (2.12).

**Observación 2.4.** Por supuesto que la transformación de Lyapunov-Floquet es una transformación de Lyapunov por lo tanto el analizar la estabilidad y las propiedades dinámicas del sistema variante periódico (2.6) es similar a analizar el sistema invariante en el tiempo (2.12), por lo tanto todo sistema periódico (2.6) es reducible a un sistema invariante en el tiempo.

La factorización de Floquet es un herramienta útil para cualquier análisis si consideramos que es más fácil trabajar con un sistema lineal invariante en el tiempo (2.12), sin embargo, para calcular la matriz  $R$  es necesario conocer la solución de (2.6), lo cual en general no es posible. Por lo que es necesario el uso de métodos numéricos para construir la matriz de monodromía  $M = e^{R\Omega}$ , por esta razón podemos decir que nuestro enfoque en este trabajo es *semi-analítico*, pues a partir de construir  $M$  numéricamente, realizamos un análisis sobre las propiedades de  $M$  y  $R$  como lo mostraremos en el desarrollo de la tesis.

<sup>9</sup>Está transformación fue introducida por Lyapunov en [26]

**Definición 2.8.** Los valores característicos de la matriz de monodromía  $\sigma(M) = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n\}$  son llamados **multiplicadores característicos** y a los valores característicos la matriz  $R$ ,  $\sigma(R) = \{\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n\}$  se les conoce como **exponentes característicos** o exponentes de Floquet.

De la definición de la matriz de monodromía es claro que:

$$\lambda_i = e^{\rho_i \Omega}$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

**Corolario 2.2 (Floquet).** Sea la matriz de monodromía  $M$  del sistema (2.6) con  $t_0 = 0$ , entonces  $\lambda$  es un valor característico de  $M$  si y solo si existe una solución no trivial  $x(t)$  tal que:

$$x(t + \Omega) = \lambda x(t)$$

**Prueba:** ( $\Rightarrow$ ) Sea  $V$  un vector característico de  $M$  asociado a  $\lambda$  entonces una solución de (2.6), correspondiente a las condiciones iniciales  $x(0) = V$ , se puede escribir como  $x(t) = \Phi(t, 0)V$ , sigue que  $x(t + \Omega) = \Phi(t + \Omega, 0)V = \Phi(t, 0)MV = \Phi(t, 0)\lambda V = \lambda\Phi(t, 0)V = \lambda x(t)$ . ( $\Leftarrow$ ) Sea  $x(t)$  solución no trivial de (2.6)  $x(0) \neq 0 \rightarrow Mx(0) = \Phi(\Omega, 0)x(0) = x(\Omega) = \lambda x(0)$  por lo tanto  $x(0)$  es un vector característico de  $M$ . ■

## 2.2.2. Estabilidad de los Sistemas Periódicos

**Teorema 2.4 (Lyapunov-Floquet).** Sea  $M = e^{R\Omega}$  la matriz de monodromía de (2.6) ( $\dot{x}(t) = A(t)x$ ,  $A(t + \Omega) = A(\Omega)$ ), entonces (2.6) es:

- i) **Asintóticamente Estable**  $\Leftrightarrow \sigma(M) \subset \overset{\circ}{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
- ii) **Estable**  $\Leftrightarrow \sigma(M) \subset \bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ , y si  $|\lambda_i| = 1$  es una raíz simple del polinomio mínimo de  $M$
- iii) **Inestable**  $\Leftrightarrow \exists \lambda_i \in \sigma(M) : |\lambda_i| > 1$  o  $\sigma(M) \subset \bar{D}$  &  $\exists |\lambda_i| = 1$  raíz múltiple del polinomio mínimo de  $M$

De forma similar la estabilidad de un sistema periódico (2.6) puede enunciarse en términos de la estabilidad del sistema invariante en el tiempo (2.12) y sus valores característicos, los exponentes característicos.

**Corolario 2.3 (Lyapunov-Floquet).** Sea (2.12) ( $\dot{z}(t) = Rz(t)$ ), entonces el sistema periódico (2.6) ( $\dot{x}(t) = A(t)x$ ,  $A(t + \Omega) = A(\Omega)$ ) es:

- i) **Asintóticamente Estable**  $\Leftrightarrow \sigma(R) \subset \overset{\circ}{Z} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$
- ii) **Estable**  $\Leftrightarrow \sigma(R) \subset \bar{Z} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \leq 0\}$ , y si  $\text{Re}(\rho_i) = 0$  es una raíz simple del polinomio mínimo de  $R$
- iii) **Inestable**  $\Leftrightarrow \exists \rho_i \in \sigma(R) : \text{Re}(\rho) > 0$  o  $\sigma(R) \subset \bar{Z}$  &  $\exists i : \text{Re}(\rho_i) = 0$  una raíz múltiple del polinomio mínimo de  $R$

**Prueba:** Siempre se puede escribir  $t$  de la forma  $t = k\Omega + \tau$  con  $k \in \mathbb{N}$  y  $\tau \in [0, \Omega)$ , usando las propiedades de la matriz de transición de estados, la solución de (2.6) se escribe como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, 0)x_0 = \Phi(k\Omega + \tau, 0)x_0 \\ &= \Phi(k\Omega + \tau, k\Omega)\Phi(k\Omega, (k-1)\Omega)\Phi((k-1)\Omega, (k-2)\Omega)\dots\Phi(\Omega, 0)x_0 \\ &= \Phi(\tau, 0)[\Phi(\Omega, 0)]^k x_0 = \Phi(\tau, 0)M^k x_0 \end{aligned}$$

el término  $\Phi(\tau, 0)$  es acotado pues  $\tau$  es un número finito, por el teorema 2.2 (para (2.6) se cumple que  $x(t) \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow \infty$ ). Y dado que las condiciones iniciales  $x_0$  están acotadas, el único término que podría causar que el sistema no sea acotado es la matriz de monodromía  $M$ , la estabilidad de la solución

$$x(t) = \Phi(\tau, 0)M^k x_0$$

se puede ver como la de un **sistema lineal invariante discreto** por lo que los valores característicos de  $M$  tiene que estar dentro del círculo unitario en el plano complejo [40], o bien sobre el círculo unitario sin ser raíces múltiples de su polinomio mínimo. La prueba del colorario es simplemente las condiciones de estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo.

## 2.3. Ecuación de Hill

La ecuación

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta p(t)]x = 0 \quad p(t + \Omega) = p(t) \quad (2.13)$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  es conocida como la ecuación de Hill<sup>10</sup>, la cual ha sido estudiado con gran detalle en [27, 29]. Definiendo  $y_1 = x$ ,  $y_2 = \dot{x}$  podemos escribir a (2.13) en la forma de (2.6)

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

**Teorema 2.5** (Jacobi-Liouville). *Sea  $N(t)$  una matriz fundamental de (2.1) entonces*

$$\det(N(t)) = \det(N(t_0))e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(\tau))d\tau}$$

donde  $\text{tr}(A)$  es la traza de la matriz cuadrada  $A(t)$  [41]

Aplicando el teorema de Jacobi-Liouville a la ecuación (2.14) con condiciones iniciales normalizadas  $N(t_0) = I_2$  notamos que el determinante de cualquier matriz fundamental asociado a

<sup>10</sup>La ecuación  $\frac{d^2z}{dt^2} + b(t)\frac{dz}{dt} + r(t)z = 0$  siempre se puede escribir como una ecuación del tipo Hill  $\frac{d^2y}{dt^2} + q(t)y = 0$ , donde  $y = e^{\frac{1}{2}B(t)}z$ ,  $b(t) = \frac{dB(t)}{dt}$ ,  $q(t) = -\frac{1}{2}\frac{db(t)}{dt} - \frac{1}{4}b^2(t) + r(t)$

la ecuación de Hill es igual a uno,  $\det(N(t)) = 1$  debido a que  $\text{tr}(A(t)) = 0$ . Sea  $M$  la matriz de monodromía asociada a (2.14) entonces su polinomio característico esta dado por:

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + 1 \quad (2.15)$$

por lo tanto la estabilidad de la ecuación de Hill solo depende de la traza de  $M$ , a esta función se conoce como **discriminante de la ecuación de Hill**:

$$D_M = \text{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2$$

por lo tanto

$$\lambda_{1,2} = \frac{D_M \pm \sqrt{D_M^2 - 4}}{2}$$

por el teorema de Lyapunov-Floquet la estabilidad está determinada por los valores característicos de  $M$  pero dado que

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1$$

la ecuación de Hill solo puede ser estable si sus dos multiplicadores característicos son  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ , por otro lado

$$\lambda_1 = e^{\Omega \rho_1} \quad \lambda_2 = e^{-\Omega \rho_2}$$

dado que  $M$  es real y  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales del mismo signo o son complejas conjugadas. Entonces si podemos decir que (2.14) es:

$$\text{Estable} \Leftrightarrow |D_M| < 2$$

$$\text{Inestable} \Leftrightarrow |D_M| > 2$$

y no puede ser asintóticamente estable, los multiplicadores característicos para una región estable siempre están sobre el círculo unitario y pueden abandonar el círculo unitario solo en los puntos  $+1$  y  $-1$ . En la **frontera de estabilidad**, cuando  $D_M = 2$  o  $D_M = -2$  existen al menos una solución periódica por el colorario 2.1, además:

**i)** Si  $D_M = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 = \lambda$  y  $\rho_1 = \rho_2 = 0 = \rho = 2\pi k i \Omega$  para  $k \in \mathbb{Z}$  entonces existe un valor característico de  $M$  repetido, en general la solución es inestable debido a la raíz repetida, pero sí la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  es 2 entonces la matriz  $M$  es diagonalizable y por la factorización Floquet  $\Phi(t, 0) = P^{-1}(t)M$  (con  $P^{-1}(t) = P^{-1}(t + \Omega)$ ) tenemos dos soluciones periódicas linealmente independientes estables, a este caso se le conoce como **coexistencia** [42].

**ii)** Si  $D_M = -2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 = \lambda$  y  $\rho_1 = \rho_2 = \pi i + 2\pi k i \Omega$  para  $k \in \mathbb{Z}$  por lo que el análisis es similar al caso anterior.

Para el caso de la ecuación de Hill (2.13) su discriminante depende de dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  por lo tanto podemos ver al discriminante como una función de dos variables  $D_M(\alpha, \beta)$ . Para

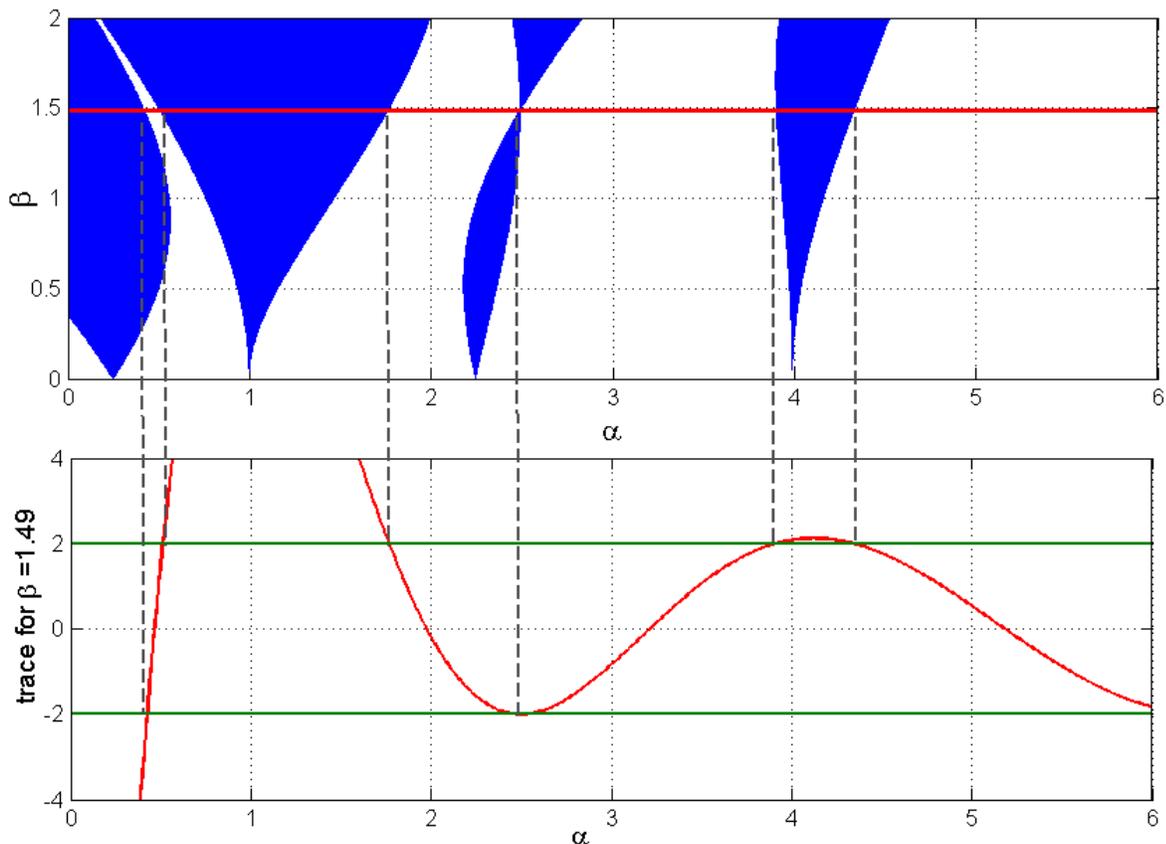


Figura 2.1: Diagrama de estabilidad para la ecuación de Meissner y la gráfica de la traza  $D_M(\alpha, \beta_0)$

$\beta = \beta_0$  constante,  $D_M(\alpha, \beta_0)$  es una función entera de orden  $1/2$  [43, 44], como consecuencia la función  $D_M(\alpha, \beta_0) + 2 = 0$  tiene un número infinito de raíces  $\{\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3, \bar{\eta}_4 \dots\}$  y la función  $D_M(\alpha, \beta_0) - 2 = 0$  también tiene un número infinito de raíces  $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \dots\}$  y lo más importante estas raíces se entrelazan de la siguiente manera:

$$\{\bar{\eta}_0, \eta_0, \eta_1, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \eta_2, \eta_3, \bar{\eta}_4, \bar{\eta}_5 \dots\} \quad (2.16)$$

es decir para un  $\beta = \beta_0$  fijo siempre existen **intervalos de estabilidad e inestabilidad** [44], cuando  $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_{i+1}$  o bien  $\eta_i = \eta_{i+1}$  tenemos un punto de coexistencia. En la Fig. 2.1 se puede observar un diagrama de estabilidad para la ecuación de Meissner  $\ddot{x} + (\alpha + \beta \text{sign}(\cos(t)))x = 0$ , las zonas azules son regiones inestables, las zonas blancas son zonas estables, en la parte inferior de la Fig. 2.1 se presenta una grafica de la traza  $D_M(\alpha, \beta_0)$  de la ecuación de Meissner para  $\beta_0 = 1.49$  donde se puede observar los cruces por los puntos  $+2$  y  $-2$ , que se describen por la línea en color verde, es decir las raíces de la función  $D_M(\alpha, \beta_0) \pm 2 = 0$ :  $\{\bar{\eta}_0, \eta_0, \eta_1, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \eta_2, \eta_3, \bar{\eta}_4, \bar{\eta}_5 \dots\}$ .

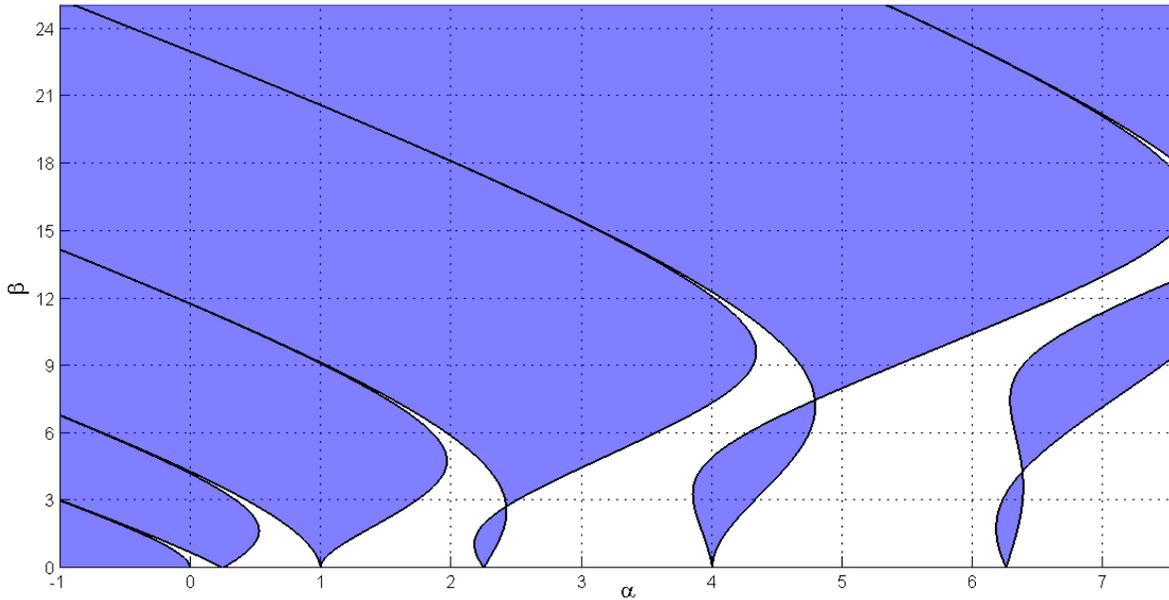


Figura 2.2: Diagrama de estabilidad para la ecuación de Meissner

Cuando  $D_M(\alpha, \beta_0) \in (-2, 2)$  estamos en un **intervalo estable**, en este intervalo  $D_M(\alpha, \beta_0)$  es monótona. Si  $|D_M(\alpha, \beta_0)| > 2$  estamos en un **intervalo inestable** y debido a que  $D_M(\alpha, \beta_0)$  es de orden un  $1/2^{11}$  siempre cuenta con un máximo o un mínimo en el intervalo donde  $|D_M(\alpha, \beta_0)| > 2$ , en la frontera  $|D_M(\alpha, \beta_0)| = 2$  de acuerdo al inciso *i*) y *ii*) en general es un punto inestable, y en algunos casos podemos tener un **punto de coexistencia** como se muestra en la Fig. 2.1 para  $\alpha = 2.5$ ,  $\beta = 1.5$ .

**Observación 2.5.** Podemos concluir que para un  $\beta$  constante, los multiplicadores característicos están sobre el círculo unitario para un intervalo estable, abandonan el círculo unitario en los puntos  $+1$  o  $-1$ , y debido a  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  existen un valor característico dentro y otro fuera del círculo unitario para un intervalo inestable.

### 2.3.1. Ecuación de Meissner

Un caso particular de la ecuación de Hill (2.13) es la ecuación de Meissner [45]:

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \text{sign}(\sin(t)))x = 0 \quad (2.17)$$

<sup>11</sup>Si  $f(x)$  es una función entera de orden menor a 2 con raíces reales, entonces las raíces de  $f'(x)$  también son reales y cada una está separada por una raíz de  $f(x)$

para esta ecuación podemos calcular la matriz de monodromía de forma analítica [46, 47]. Reescribiendo (2.17) como:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\alpha + \beta)x &= 0 & 0 < t \leq \Omega/2 \\ \ddot{x} + (\alpha - \beta)x &= 0 & \Omega/2 < t \leq \Omega \end{aligned} \quad (2.18)$$

entonces tenemos dos ecuaciones diferenciales invariantes en el tiempo, y usando las propiedades de la matriz de transición de estados  $M = \Phi(\Omega, 0) = \Phi(\Omega, \frac{\Omega}{2})\Phi(\frac{\Omega}{2}, 0)$ , definiendo  $\omega_1 := \sqrt{\alpha + \beta}$ ;  $\omega_2 := \sqrt{\alpha - \beta}$ . Se calcula  $\Phi(\frac{\Omega}{2}, 0)$  en intervalo  $0 < t \leq \Omega/2$  y  $\Phi(\Omega, \frac{\Omega}{2})$  cuando  $\Omega/2 < t \leq \Omega$ , si el periodo es  $\Omega = 2\pi$  la matriz de monodromía es:

para  $\alpha > \beta$

$$\Phi(2\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos \pi\omega_1 \cos \pi\omega_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \pi\omega_1 \sin \pi\omega_2 & \frac{1}{\omega_1} \cos \pi\omega_2 \sin \pi\omega_1 + \frac{1}{\omega_2} \cos \pi\omega_1 \sin \pi\omega_2 \\ -\omega_1 \cos \pi\omega_2 \sin \pi\omega_1 - \omega_2 \cos \pi\omega_1 \sin \pi\omega_2 & \cos \pi\omega_1 \cos \pi\omega_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \pi\omega_1 \sin \pi\omega_2 \end{bmatrix}$$

para  $\alpha < \beta$

$$\Phi(2\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos \pi\omega_1 \cosh \pi\omega_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \pi\omega_1 \sinh \pi\omega_2 & \frac{1}{\omega_1} \sin \pi\omega_1 \cosh \pi\omega_2 + \frac{1}{\omega_2} \cos \pi\omega_1 \sinh \pi\omega_2 \\ -\omega_1 \sin \pi\omega_1 \cosh \pi\omega_2 - \omega_2 \cos \pi\omega_1 \sinh \pi\omega_2 & \cos \pi\omega_1 \cosh \pi\omega_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \pi\omega_1 \sinh \pi\omega_2 \end{bmatrix}$$

para  $\alpha = \beta$

$$\Phi(2\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos \pi\omega_1 - \pi\omega_1 \sin \pi\omega_1 & \frac{1}{\omega_1} \sin \pi\omega_1 + \pi \cos \pi\omega_1 \\ -\omega_1 \sin \pi\omega_1 & \cos \pi\omega_1 \end{bmatrix}$$

Evaluando la matriz de monodromía para cada par  $(\alpha, \beta)$  y aplicando el criterio de estabilidad a cada par, obtenemos un diagrama de estabilidad como el mostrado en la Fig. 2.2, las zonas moradas son respuestas inestables de la ecuación (2.17) y las zonas blancas estables. La ecuación de Meissner es interesante pues es fácil ver el fenómeno de coexistencia, para diversos pares  $(\alpha, \beta)$  hay distintos puntos de coexistencia como se pueden ver en la Fig. 2.2. A las zonas inestables de este diagrama de estabilidad (Fig. 2.2) en ocasiones se le llama como **las lenguas de Arnold** en honor al matemático ruso Vladimir Arnold [19].

Si consideramos la matriz de monodromía de la ecuación de Meissner para  $\alpha > \beta$  y

$$\Omega = 2\pi$$

entonces, podemos ver donde nacen las lenguas de Arnold sobre el eje  $\alpha$ , si  $\beta = 0$

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\alpha}$$

entonces es necesario que se cumpla la condición  $D_M(\alpha, \beta) = \pm 2$  (que es la frontera de estabilidad)

$$\begin{aligned} 2(\cos^2 \pi\omega - \sin^2 \pi\omega) &= \pm 2 \rightarrow \cos(\pi\omega + \pi\omega) = \pm 1 \rightarrow \cos(2\pi\omega) = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow \\ 2\pi\omega &= k\pi \rightarrow \omega = \frac{k}{2} \rightarrow \alpha = \frac{k^2}{4} \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

por lo tanto las lenguas de Arnold nacen sobre el eje  $\alpha$  en

$$\alpha = \frac{k^2}{4}$$

para  $k \in \mathbb{N}_+$ .

### 2.3.2. Ecuación de Mathieu

La ecuación

$$x'' + (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \cos(\omega\tilde{t}))x = 0 \quad (2.19)$$

(donde  $x''$  es la segunda derivada con respecto al tiempo  $\tilde{t}$ ), se le conoce como la ecuación de Mathieu la cual ha sido estudiada en diversos textos, con ella se han modelado distintos sistemas en diferentes áreas [48, 49]. Uno de ellos es un péndulo invertido con un soporte que vibra a frecuencia  $\omega$ , la linealización de este péndulo da como consecuencia la ecuación de Mathieu (2.19). Si reescalamos el tiempo:

$$t = \omega\tilde{t}$$

$$\ddot{x} + \left( \frac{\tilde{\alpha}}{\omega^2} + \frac{\tilde{\beta}}{\omega^2} \cos(t) \right) x = 0$$

podemos reescribir a (2.19) como:

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos(t))x = 0 \quad (2.20)$$

con  $\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{\omega^2}$ ,  $\beta = \frac{\tilde{\beta}}{\omega^2}$ . Por lo tanto los diagramas de estabilidad se pueden presentar tanto en los parámetros  $(\alpha, \beta)$  o bien  $(\omega, \beta)$ , en general es más común ver estos diagramas con parámetros  $(\omega, \beta)$  pues  $\omega$  es la frecuencia de excitación del sistema. Para la ecuación (2.20) las lenguas de Arnold nacen sobre el eje  $\alpha$ , al igual que para la ecuación de Meissner (2.17), con la relación:

$$\alpha = \frac{k^2}{4}$$

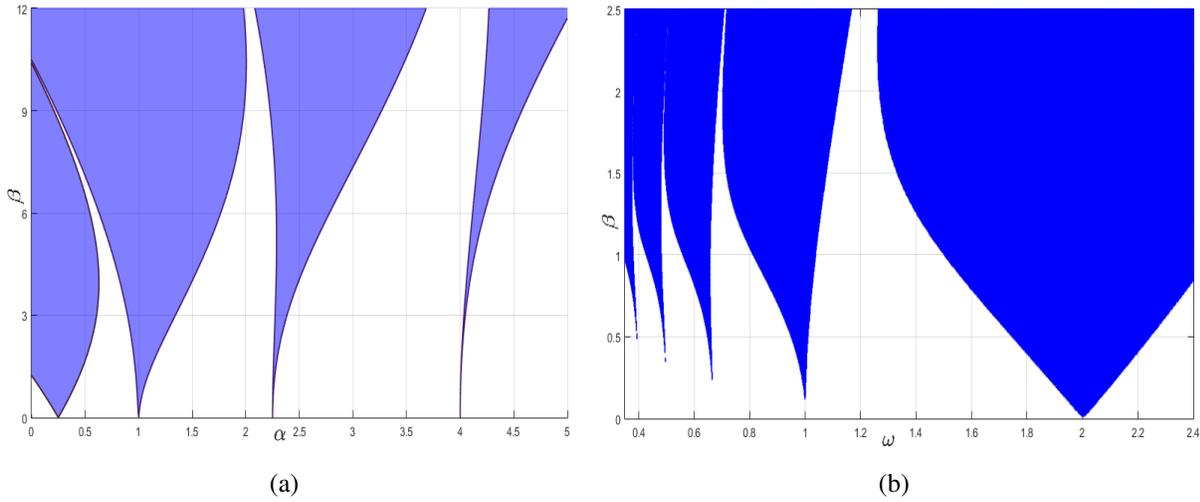


Figura 2.3: Lenguas de Arnold para la ecuación de Mathieu

para las ecuaciones (2.17) y (2.20)  $\omega = 1$  y si deseamos ver en que puntos nacen las lenguas de Arnold sobre el eje  $\omega$  entonces  $\alpha$  es constante, por lo tanto  $\sqrt{\alpha} = \frac{k\omega}{2}$

$$\omega = \frac{2\sqrt{\alpha}}{k} \quad (2.21)$$

con  $k \in \mathbb{N}^+$  nuevamente  $\sqrt{\alpha} = \omega_1$  entonces las lenguas de Arnold nacen sobre el eje  $\omega$  en

$$\omega = \frac{2}{k}$$

para  $\alpha = 1$ . En la Fig. 2.3 se pueden ver las lenguas de Arnold para la ecuación de Mathieu (2.20) y para la ecuación

$$\ddot{x} + (1 + \beta \cos(\omega t))x = 0$$

### 2.3.3. Resonancia Paramétrica

En la ecuación de Hill (2.13) a la función  $p(t)$  se le conoce como **excitación paramétrica**, pues se está variando de forma periódica un parámetro de la ecuación diferencial. Dependiendo de los parámetros  $(\alpha, \beta)$  esta señal de excitación puede causar inestabilidad en la solución de (2.13), a este efecto se le conoce como **resonancia paramétrica**, es decir, el efecto del crecimiento no acotado de la respuesta.

En la ecuación

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t) \quad (2.22)$$

donde la señal forzante oscila con una frecuencia  $\omega$ , las respuestas de (2.22) para cualquier  $\omega_0 \neq \omega$  son estables sin embargo cuando  $\omega = \omega_0$  la solución de (2.22) es inestable, a este fenómeno se le conoce como **resonancia**, en este caso la respuesta crece de forma lineal con respecto al tiempo, si agregamos una disipación  $d$  a la ecuación  $\ddot{x} + d\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$  es posible estabilizar cuando  $\omega = \omega_0$ . En el caso de la resonancia paramétrica, esta no depende de una fuerza externa, si no de la excitación de uno de los parámetros, la inestabilidad se presenta por intervalos, y solo en un punto a diferencia de la resonancia, además en general no podemos estabilizar la ecuación agregando disipación, aún en presencia de disipación una respuesta inestable de (2.22) crece exponencialmente.

| <b>Resonancia</b>   | <b>Resonancia Paramétrica</b>  |
|---|--|
| $\ddot{x} + d\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$                             | $\ddot{x} + d\dot{x} + [\alpha + \beta p(t)]x = 0$<br>$p(t) = p(t + 2\pi)$ |
| Es inestable en un único punto  | Existen Intervalos de Estabilidad e Inestabilidad que nacen en:            |
| $\omega = \omega_0$   | $\alpha = \frac{n^2}{4}$   |
| La respuesta en resonancia crece de forma lineal con respecto al tiempo | La respuesta inestable crece exponencialmente                              |
| Si $d > 0$ la respuesta es acotada                                      | Si $d > 0 \exists$ respuestas no acotadas                                  |

Por esta razón los efectos de la **resonancia paramétrica** son más dañinos al sistema que los de la resonancia por una señal forzada, la mayoría de trabajos están enfocados a estabilizar o evitar los efectos de la resonancia paramétrica [9, 8] en el sistema. Sin embargo en esta tesis proponemos un uso positivo para la excitación paramétrica, es decir, incrementar la disipación en sistemas de al menos 2-DOFs.

En los siguientes capítulos ampliaremos los resultados presentados en este capítulo para la ecuación de Hill con más de 1 grado de libertad o dicho de otra forma  **$n$  ecuaciones de Hill acopladas**. Además presentamos un método para la atenuación de vibraciones en un sistema mecánico mediante la excitación paramétrica en un sistema de 2 grados de libertad.

# Sistemas $\gamma$ -Hamiltonianos

---

Existen una gran cantidad de publicaciones sobre los sistemas Hamiltonianos, por ejemplo [17, 18]. La mayoría de la literatura acerca de los sistemas Hamiltonianos no aborda el caso cuando existe disipación o amortiguamiento en el sistema, sin embargo, en la mayoría de aplicaciones o sistemas mecánicos existe una cantidad pequeña de disipación, en este capítulo definimos una nueva clase de sistemas Hamiltonianos con cierta clase de disipación. A grandes rasgos podemos decir que la importancia del estudio del álgebra de matrices Hamiltonianas y Simpléticas radica en el hecho que la dinámica de los sistemas Hamiltonianos produce trayectorias o mapas Simpléticos, estos mapas Simpléticos están caracterizados por las matrices Simpléticas, además una transformación simpléctica preserva la estructura Hamiltoniana de las ecuaciones dinámicas, por lo cual el estudio del álgebra y geometría simpléctica, particularmente las matrices Simpléticas y Hamiltonianas ha sido de interés en la comunidad de sistemas dinámicos. Sin embargo, como mencionamos aún no hay una formulación clara para sistemas Hamiltonianos con disipación, en este capítulo intenta redefinir un nuevo tipo de matrices Hamiltonianas a las cuales llamaremos  $\gamma$ -Hamiltonianas y sus mapas asociados, que llamaremos  $\mu$ -Simpléticos. En el capítulo se presentan estas definiciones y se desarrollan algunas de sus propiedades. Enunciamos un teorema con el cual demostramos que la matriz de transición de estados de cualquier sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano es  $\mu$ -Simplética. Dado que la matriz de monodromía de un sistema lineal gamma Hamiltoniano periódico es  $\mu$ -Simplética usamos la simetría de estas matrices para obtener nuevas condiciones de estabilidad.

## 3.1. Sistemas Hamiltonianos Lineales

Un sistema Hamiltoniano es un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}(t, q, p) & \text{o bien} & & \dot{q} &= \mathcal{H}_p \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}(t, q, p) & \text{o bien} & & \dot{p} &= -\mathcal{H}_q \end{aligned} \quad (3.1)$$

con  $i = 1, \dots, n$ , donde el *Hamiltoniano* o *función Hamiltoniana*  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$ , es una función suave valuada realmente definida para  $(t, q, p) \in \mathcal{D}$ , un conjunto abierto en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , en general

$\mathcal{H}$  representa la energía en el sistema. Los vectores  $q = [q_1 \ \dots \ q_n]^T$  y  $p = [p_1 \ \dots \ p_n]^T$  son llamados vectores de posiciones y momentos respectivamente, también se les denomina como variables adjuntas,  $p$  es adjunta de  $q$ .

**Definición 3.1.** Sea la matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

una matriz real  $2n \times 2n$  dimensional, ortogonal y anti-simétrica, es claro que  $J^T = J^{-1} = -J$ ,  $J^2 = -I_{2n}$ ,  $\det(J) = 1$ .

Introduciendo el vector  $z = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$  se puede reescribir (3.1) como:

$$\dot{z} = J \nabla \mathcal{H}(t, z)$$

$$\text{con } \nabla \mathcal{H}(t, z) = \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_1} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_{2n}} \right]^T.$$

Si  $\mathcal{H}$  es una función cuadrática entonces, de forma similar podemos definir un **sistema lineal Hamiltoniano**. Por lo tanto a un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales que satisfacen:

$$\dot{y} = J \frac{\partial \mathcal{H}(t, y)}{\partial y} = JH(t)y = A(t)y \quad (3.2)$$

con  $y \in \mathbb{R}^{2n}$  y  $H^T(t) = H(t)$ , lo llamamos **sistema lineal Hamiltoniano**, donde  $\mathcal{H}(t, y)$  es el **Hamiltoniano o función Hamiltoniana**:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, y) = \frac{1}{2} y^T H(t) y$$

es decir el Hamiltoniano es una forma cuadrática.

### 3.1.1. Matrices Hamiltonianas

**Definición 3.2.**  $L \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  es una **matriz Hamiltoniana** si satisface la ecuación:

$$JL + L^T J = 0 \quad (3.3)$$

Si  $L$  es una matriz Hamiltoniana entonces  $L^T$  también lo es,  $L$  siempre se puede factorizar como  $L = JE$  con  $E = E^T$ , y la matriz  $JL$  es simétrica es decir  $(JL) = (JL)^T$ , además si  $L_1$  y  $L_2$  son matrices Hamiltonianas la matriz  $L_1 \pm L_2$  es Hamiltoniana. Es claro que la matriz  $A$  en la ecuación (3.2) es una matriz Hamiltoniana.

Sea  $P_L(\lambda)$  el polinomio característico de  $L$ , de la definición (3.3),  $L = -JL^T J^{-1}$  entonces:

$$\begin{aligned} P_L(\lambda) &= \det(L - \lambda I) = \det(-JL^T J^{-1} - \lambda I) = (-1)^{2n} \det(J) \det(L^T - (-\lambda)I) \det(J^{-1}) \\ &= \det(L^T - (-\lambda)I) = P_L(-\lambda) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lambda \in \sigma(L) \iff -\lambda \in \sigma(L) \quad (3.4)$$

además  $P_L(\lambda)$  solo tiene términos pares, o sea

$$P_L(\lambda) = \lambda^{2n} + a_{2n-2}\lambda^{2n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_0 \quad (3.5)$$

de manera que la traza de  $L$  es cero  $tr(L) = 0$ , es decir  $P_L(\lambda)$  depende de  $n$  coeficientes y siempre se puede hacer un cambio de variable  $\eta = \lambda^2$ , en ese caso:

$$Q_L(\eta) = \eta^n + a_{2n-2}\eta^{n-1} + \dots + a_2\eta + a_0 \quad (3.6)$$

así que para encontrar las raíces de  $P_L(\lambda)$  podemos hacer uso del polinomio auxiliar  $Q_L(\eta)$ .

A causa de (3.4) si  $\lambda$  es un valor característico  $-\lambda$  también lo es y debido a que  $L$  es una matriz real  $\bar{\lambda}$ ,  $-\bar{\lambda}$  también son valores característicos de  $L$ . Por esta razón los valores característicos de  $L$  en el plano complejo son **simétricos** con respecto a los ejes real e imaginario, aparecen en cuádruples  $\lambda = \pm\alpha \pm \omega i$ , pares reales  $\lambda = \pm\alpha$  o bien pares puramente imaginarios  $\lambda = \pm\omega i$  como se muestran en la Fig. 3.1.

Por consiguiente un sistema lineal Hamiltoniano invariante en el tiempo, esto es:

$$\dot{y} = JHy = Ay \quad (3.7)$$

para  $H = H^T$  y  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  matriz Hamiltoniana, solo puede ser estable si y solo si los valores característicos de  $A$  son puramente imaginarios y son raíces simples del polinomio mínimo de  $A$ [46].

### 3.1.2. Matrices Simpléticas

**Definición 3.3.** La matriz  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  se dice Simplética si:

$$S^T JS = J \quad (3.8)$$

El determinante de una matriz Simplética es uno [17]:

$$\det(S) = 1$$

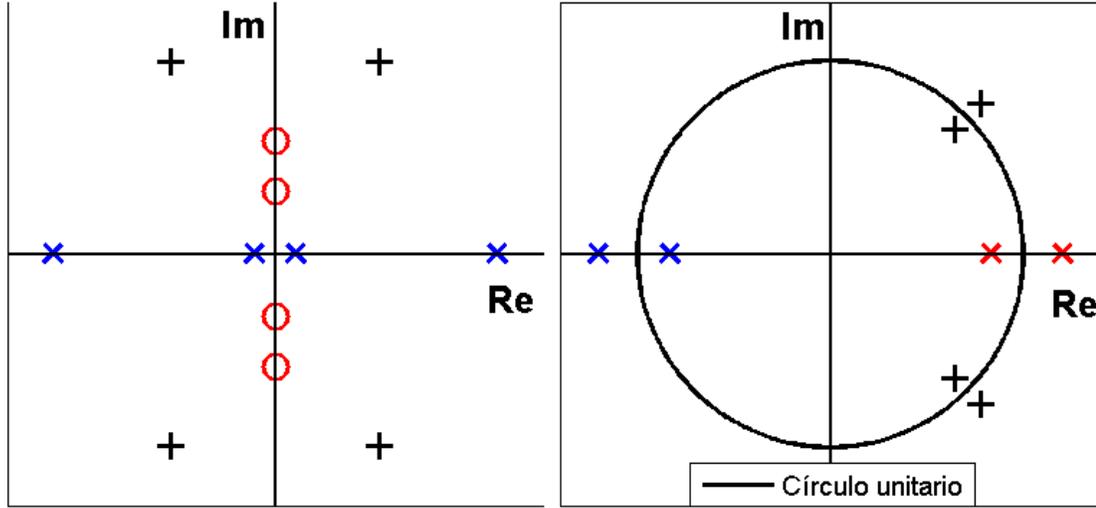


Figura 3.1: Simetría de los valores característicos de las matrices Hamiltonianas y Simpléticas

si  $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  son matrices Simpléticas, igualmente  $I_{2n}, S_1^{-1}$  y  $S_1 S_2$  son Simpléticas, así que el conjunto de las matrices Simpléticas **forman un grupo** [17]. Adicionalmente:

$$\begin{aligned} P_S(\lambda) &= \det(\lambda I - S^T) = \det(\lambda I - J^T S^{-1} J) = \det(J^T) \det(\lambda I - S^{-1}) \det(J) \\ &= \det(\lambda S - I) = \det\left(\lambda \left(\frac{I}{\lambda} - S\right)\right) = \lambda^{2n} \det\left(\frac{I}{\lambda} - S\right) = \lambda^{2n} P_S\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

$$P_S(\lambda) = \lambda^{2n} P_S\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (3.9)$$

de modo que

$$\lambda \in \sigma(S) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(S) \quad (3.10)$$

a causa de la ecuación (3.9) el polinomio característico de  $S$  es un *polinomio recíproco*, dicho de otra manera los coeficientes de  $P_S(\lambda)$  son  $a_k = a_{2n-k}$ , en tal caso:

$$P_S(\lambda) = \lambda^{2n} + a_{2n-1} \lambda^{2n-1} + a_{2n-2} \lambda^{2n-2} + \dots + a_{2n} \lambda^n + \dots + a_{2n-2} \lambda^2 + a_{2n-1} \lambda + 1 \quad (3.11)$$

de tal forma que sus coeficientes son **simétricos** con respecto al término  $a_n$ , desde luego  $a_{2n} = a_0 =$

$\det(S) = 1$ . Es posible reacomodar los coeficientes en la siguiente producto de matrices:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{bmatrix}$$

**Observación 3.1.** De la relación (3.10) es claro que los valores característicos de una matriz Simpléctica  $S$  son **simétricos con respecto al círculo unitario** en el plano complejo, además dado que  $S$  es real el  $\sigma(S)$  es simétrico con respecto al eje real por lo tanto si  $\lambda \in \sigma(S)$  entonces  $\lambda^{-1}, \bar{\lambda}$  y  $\bar{\lambda}^{-1}$  también son valores característicos de  $S$  ver Fig. 3.1, de manera que  $\det(S) = 1 = (\lambda_1)(\lambda_2)(\lambda_3) \dots (\lambda_{2n})$ , entonces

$$|\lambda_1| |\lambda_2| |\lambda_3| \dots |\lambda_{2n}| = 1$$

para  $n = 1$ , si  $|\lambda_1| > 1 \Rightarrow |\lambda_2| < 1$  en la relación

$$|\lambda_2| = \frac{1}{|\lambda_1|}$$

Gracias a la **simetría** en los coeficientes del polinomio característico (3.11) en [50] se propone una transformación:

$$\delta = \lambda + \frac{1}{\lambda} \quad (3.12)$$

mediante la cual siempre es posible escribir el polinomio característico de una matriz Simpléctica (3.11) como un polinomio auxiliar de grado  $n$

$$Q_S(\delta) = \delta^n + q_{n-1}\delta^{n-1} + \dots + q_1\delta + q_0$$

donde los coeficientes  $q_i$  dependen de los coeficientes  $a_i$ , por ejemplo si  $n = 2$

$$P_S(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + 1 \quad \longleftarrow \quad \delta = \lambda + \frac{1}{\lambda} \quad \longrightarrow \quad Q_S(\delta) = \delta^2 + a_3\delta + a_2 - 2$$

### 3.1.3. Sistemas Hamiltonianos Lineales

La trascendencia de las definiciones anteriores radica en el siguiente teorema [17]:

**Teorema 3.1.** *Sea un sistema Hamiltoniano lineal, i.e.,*

$$\dot{y} = A(t)y = JH(t)y \quad \text{con } H^T(t) = H(t)$$

*entonces su matriz de transición de estados es Simpléctica*

**Prueba:** Sea  $\Phi = \Phi(t, 0)$  la matriz de transición de estados de (3.2) con condiciones iniciales normalizadas:

$$\dot{\Phi} = JH\Phi$$

por otro lado

$$\frac{d}{dt}\Phi^T J\Phi = \dot{\Phi}^T J\Phi + \Phi^T J\dot{\Phi}$$

se sigue que  $\frac{d}{dt}\Phi^T J\Phi = (\Phi^T H^T J^T)J\Phi + \Phi^T J(JH\Phi) = \Phi^T H^T J J^T \Phi + \Phi^T J J H \Phi = \Phi^T H \Phi - \Phi^T H \Phi = 0$ . Por lo tanto la matriz  $\Phi$  es constante con respecto al tiempo, si  $t = 0$ ,  $\Phi(0, 0) = I_{2n}$

$$\Phi^T J \Phi M |_{t=0} = I_{2n} J I_{2n} = J \quad \blacksquare$$

Por lo tanto para cualquier sistema Hamiltoniano lineal su matriz de transición de estados es Simpléctica, es decir, las trayectorias de la solución están descritas por un mapa Simpléctico. Por esta razón el estudio de las matrices Simplécticas y Hamiltonianas toma relevancia en distintas áreas de los sistemas dinámicos.

## 3.2. Matrices $\mu$ -Simplécticas

Las siguientes definiciones y propiedades son una extensión, propuestas por nosotros con el objetivo de caracterizar cierta clase de sistemas Hamiltonianos con disipación.

**Definición 3.4.**  $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  es una matriz  $\mu$ -Simpléctica si satisface:

$$M^T J M = \mu J \quad (3.13)$$

con  $\mu \in (0, 1]$ .

De la definición  $\det(M^T J M) = \det(M)^2 = \det(\mu J)$  por lo tanto<sup>1</sup>:

$$\det(M) = \mu^n$$

desde luego si  $\mu = 1$  obtendremos la definición y propiedades de las matrices Simplécticas. Si  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  son matrices  $\mu$ -Simplécticas, entonces, la matriz  $M_1 M_2$  es una matriz  $\mu^2$ -Simpléctica, por ello el conjunto de las matrices  $\mu$ -Simplécticas no **forman un grupo**.

**Teorema 3.2.** Si  $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  es  $\mu$ -Simpléctica, entonces:

$$\lambda \in \sigma(M) \Rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \in \sigma(M) \quad (3.14)$$

<sup>1</sup>La prueba de  $\det(M) = \mu^n$  es similar a la de las matrices Simplécticas

**Prueba:** De la definición  $M^T = \mu JM^{-1}J^{-1}$

$$\begin{aligned}
 P_M(\lambda) &= \det(\lambda I_{2n} - \mu JM^{-1}J^{-1}) \\
 &= \det(J) \det(\lambda I_{2n} - \mu M^{-1}) \det(J^{-1}) \\
 &= \det\left(\frac{\lambda}{\mu}M - I_{2n}\right) \det(\mu M^{-1}) \\
 &= \det\left[\begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix} \left(\frac{\mu}{\lambda}I_{2n} - M\right)\right] \left(\frac{\mu^{2n}}{\det(M)}\right) \\
 &= \left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2n} \det\left(\frac{\mu}{\lambda}I_{2n} - M\right) \left(\frac{\mu^{2n}}{\mu^n}\right) \\
 &= \frac{\lambda^{2n}}{\mu^n} P_M\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Observación 3.2.** Del teorema anterior si  $\lambda \in \sigma(M) \Rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \in \sigma(M)$ , en ese caso, el producto de dos valores característicos es  $\lambda_1 \left(\frac{\mu}{\lambda_1}\right) = \mu$  y hay  $n$  pares siendo así  $\lambda_1 \left(\frac{\mu}{\lambda_1}\right) \cdot \lambda_2 \left(\frac{\mu}{\lambda_2}\right) \cdots \lambda_n \left(\frac{\mu}{\lambda_n}\right) = \det(M) = \mu^n$ . Si todos los valores característicos  $\lambda_i$  tienen la misma magnitud  $\lambda_i = re^{\theta_i} \Rightarrow \prod_{i=1}^{2n} \lambda_i = \prod_{i=1}^{2n} re^{\theta_i} = r^{2n} = \det(M) = \mu^n \Rightarrow$

$$r = \sqrt{\mu}$$

por lo tanto, los valores característicos de una matriz  $\mu$ -Simpléctica  $M$  son **simétricos** con respecto al círculo de radio  $r$ , además nótese que el radio  $r$  es independiente de  $n$ .

**Observación 3.3.** A diferencia de las matrices Simplécticas, cuyos valores característicos son simétricos con respecto al círculo unitario, las matrices  $\mu$ -Simplécticas tienen su **espectro simétrico con respecto al círculo de radio  $r = \sqrt{\mu}$** , esto es, si  $\lambda$  es un valor característico entonces  $\frac{\mu}{\lambda}$  también lo es, además dado que  $M$  es real,  $\bar{\lambda}$  y  $\mu/\bar{\lambda}$  también son valores característicos. En la Fig. 3.2 se observa la posición de los valores característicos de una matriz  $\mu$ -Simpléctica.

### 3.2.1. Polinomio Característico de una matriz $\mu$ -Simpléctica

De la prueba del teorema anterior tenemos que:

$$P_M\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{\mu^n}{\lambda^{2n}} P_M(\lambda) \quad (3.15)$$

esta relación muestra nuevamente la **simetría** en los coeficientes de su polinomio característico:

$$P_M(\lambda) = a_{2n}\lambda^{2n} + a_{2n-1}\lambda^{2n-1} + a_{2n-2}\lambda^{2n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (3.16)$$

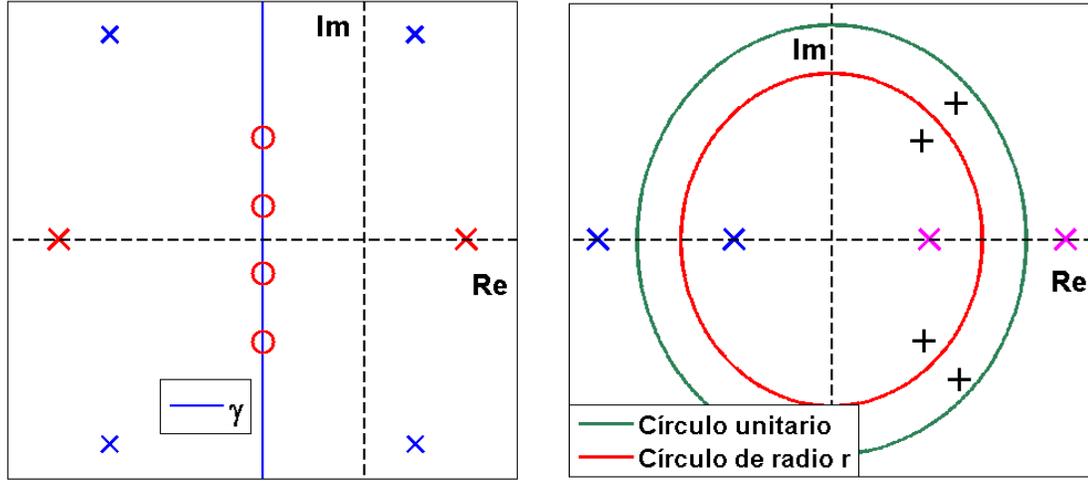


Figura 3.2: Simetría de los valores característicos de las matrices  $\gamma$ -Hamiltonianas y  $\mu$ -Simpléticas

$$P_M\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = a_{2n}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2n} + a_{2n-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2n-1} + a_{2n-2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2n-2} + \dots + a_2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + a_1\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + a_0$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu^n}{\lambda^{2n}}P(\lambda) &= \frac{\mu^n}{\lambda^{2n}}(a_{2n}\lambda^{2n} + a_{2n-1}\lambda^{2n-1} + a_{2n-2}\lambda^{2n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) \\ &= a_{2n}\mu^n + a_{2n-1}\left(\frac{\mu^n}{\lambda}\right) + a_{2n-2}\left(\frac{\mu^n}{\lambda^2}\right) + \dots + a_2\left(\frac{\mu^n}{\lambda^{2n-2}}\right) + a_1\left(\frac{\mu^n}{\lambda^{2n-1}}\right) + a_0\mu^n \end{aligned}$$

en tal caso si  $a_0 = \det(M) = \mu^n$

$$\begin{aligned} \mu^n &= a_0 \\ \mu^{n-1}a_{2n-1} &= a_1 \\ \mu^{n-2}a_{2n-2} &= a_2 \\ \mu^{-(n-2)}a_2 &= a_{2n-2} \\ \mu^{-(n-1)}a_1 &= a_{2n-1} \\ \mu^{-n}a_0 &= a_{2n} \end{aligned}$$

reacomodando los términos en la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \mu^{-n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \mu^{-n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mu^{n-1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu^n & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{bmatrix}$$

**Observación 3.4.** De manera que el polinomio de grado  $2n$  depende únicamente de  $n$  coeficientes y desde luego si  $\mu = 1$  obtenemos las mismas propiedades de una matriz Simpléctica.

### 3.2.1.1. Polinomio Auxiliar de una Matriz $\mu$ -Simpléctica

Proponemos una transformación

$$\delta = \lambda + \frac{\mu}{\lambda} \quad (3.17)$$

y gracias a la **simetría** en los coeficientes del polinomio característico (3.16) es posible reescribir a  $P_M(\lambda)$  como un polinomio auxiliar de grado  $n$ .

$$\begin{aligned} P_M(\lambda) &= a_{2n}\lambda^{2n} + a_{2n-1}\lambda^{2n-1} + a_{2n-2}\lambda^{2n-2} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \\ &\quad \updownarrow \\ &\quad \delta = \lambda + \frac{\mu}{\lambda} \\ &\quad \updownarrow \\ Q_M(\delta) &= \delta^n + q_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + q_1\delta + q_0 \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $q_i$  dependen de los coeficientes  $a_i$ , si  $\mu = 1$  obtenemos la transformación (3.12) propuesta por Howard [50]. Aplicando la transformación (3.17) al polinomio característico  $P_M(\lambda)$  de una matriz  $\mu$ -Simpléctica para algunos valores de  $n$  obtenemos:

$$\begin{aligned} n=2 & \begin{cases} P_M(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\mu\lambda + \mu^2 \\ Q_M(\delta) = \delta^2 + a_3\delta + a_2 - 2\mu \end{cases} \\ n=3 & \begin{cases} P_M(\lambda) = \lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + \mu a_4\lambda^2 + \mu^2 a_5\lambda + \mu^3 \\ Q_M(\delta) = \delta^3 + a_5\delta^2 + (a_4 - 3\mu)\delta + a_3 - 2a_5\mu \end{cases} \end{aligned}$$

$$n = 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_M(\lambda) = \lambda^8 + a_7\lambda^7 + a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + \mu a_5\lambda^3 + \mu^2 a_6\lambda^2 + \mu^3 a_7\lambda + \mu^4 \\ Q_M(\delta) = \delta^4 + a_7\delta^3 + (a_6 - 4\mu)\delta^2 + (a_5 - 3a_7\mu)\delta + a_4 - 2a_6\mu + 2\mu^2 \end{array} \right.$$

$$n = 5 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_M(\lambda) = \lambda^{10} + a_9\lambda^9 + a_8\lambda^8 + a_7\lambda^7 + a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + \mu a_6\lambda^4 + \mu^2 a_7\lambda^3 + \\ + \mu^3 a_8\lambda^2 + \mu^4 a_9\lambda + \mu^5 \\ Q_M(\delta) = \delta^5 + a_9\delta^4 + (a_8 - 5\mu)\delta^3 + (a_7 - 4a_9\mu)\delta^2 + (a_6 - 3a_8\mu + 5\mu^2)\delta \\ + a_5 - 2\mu a_7 + 2a_9\mu^2 \end{array} \right.$$

$$n = 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_M(\lambda) = \lambda^{12} + a_{11}\lambda^{11} + a_{10}\lambda^{10} + a_9\lambda^9 + a_8\lambda^8 + a_7\lambda^7 + a_6\lambda^6 + \mu a_7\lambda^5 \\ + \mu^2 a_8\lambda^4 + \mu^3 a_9\lambda^3 + \mu^4 a_{10}\lambda^2 + \mu^5 a_{11}\lambda + \mu^6 \\ Q_M(\delta) = \delta^6 + a_{11}\delta^5 + (a_{10} - 6\mu)\delta^4 + (a_9 - 5\mu a_{11})\delta^3 + \\ + (a_8 - 4\mu a_{10} + 9\mu^2)\delta^2 + (a_7 - 3\mu a_9 + 5\mu^2 a_{11})\delta + \\ + a_6 - 2a_8\mu + 2a_{10}\mu^2 - 2\mu^3 \end{array} \right.$$

$$n = 7 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_M(\lambda) = \lambda^{14} + a_{13}\lambda^{13} + a_{12}\lambda^{12} + a_{11}\lambda^{11} + a_{10}\lambda^{10} + a_9\lambda^9 + a_8\lambda^8 + a_7\lambda^7 \\ + \mu a_8\lambda^6 + \mu^2 a_9\lambda^5 + \mu^3 a_{10}\lambda^4 + \mu^4 a_{11}\lambda^3 + \mu^5 a_{12}\lambda^2 + \mu^6 a_{13}\lambda + \mu^7 \\ Q_M(\delta) = \delta^7 + a_{13}\delta^6 + (a_{12} - 7\mu)\delta^5 + (a_{11} - 6\mu a_{13})\delta^4 + \\ + (a_{10} - 5\mu a_{12} + 14\mu^2)\delta^3 + (a_9 - 4\mu a_{11} + 9\mu^2 a_{13})\delta^2 + \\ + (a_8 - 3\mu a_{10} + 5\mu^2 a_{12} - 7\mu^3)\delta + a_7 - 2a_9\mu + 2a_{11}\mu^2 - 2a_{13}\mu^3 \end{array} \right.$$

$$n = 8 \left\{ \begin{array}{l} P_M(\lambda) = \lambda^{16} + a_{15}\lambda^{15} + a_{14}\lambda^{14} + a_{13}\lambda^{13} + a_{12}\lambda^{12} + a_{11}\lambda^{11} + a_{10}\lambda^{10} + \\ + a_9\lambda^9 + a_8\lambda^8 + \mu a_9\lambda^7 + \mu^2 a_{10}\lambda^6 + \mu^3 a_{11}\lambda^5 + \mu^4 a_{12}\lambda^4 + \mu^5 a_{13}\lambda^3 \\ + \mu^6 a_{14}\lambda^2 + \mu^7 a_{15}\lambda + \mu^8 \\ Q_M(\delta) = \delta^8 + a_{15}\delta^7 + (a_{14} - 8\mu)\delta^6 + (a_{13} - 7\mu a_{15})\delta^5 \\ + (a_{12} - 6\mu a_{14} + 20\mu^2)\delta^4 + (a_{11} - 5\mu a_{13} + 14\mu^2 a_{15})\delta^3 \\ + (a_{10} - 4\mu a_{12} + 9\mu^2 a_{14} - 16\mu^3)\delta^2 + (a_9 - 3\mu a_{11} + 5\mu^2 a_{13} - 7\mu^3 a_{15})\delta + \\ + a_8 - 2a_{10}\mu + 2a_{12}\mu^2 - 2a_{14}\mu^3 + 2\mu^4 \end{array} \right.$$

Colocando en una matriz los coeficientes del polinomio auxiliar  $Q_M(\delta)$  podemos, determinar una forma recursiva para obtener los coeficientes  $q_i$  del polinomio  $Q_M(\delta)$ , que dependen de los coeficientes  $a_i$ , sin necesidad de hacer los cálculos correspondientes, esto es:

$$n = 2$$

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\mu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_3 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$n = 3$$

$$\begin{bmatrix} q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3\mu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\mu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$n = 4$$

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4\mu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3\mu & 0 & 1 & 0 \\ 2\mu^2 & 0 & -2\mu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_7 \\ a_6 \\ a_5 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

$n = 5$ 

$$\begin{bmatrix} q_5 \\ q_4 \\ q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\mu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5\mu^2 & 0 & -3\mu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\mu^2 & 0 & -2\mu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_9 \\ a_8 \\ a_7 \\ a_6 \\ a_5 \end{bmatrix}$$

 $n = 6$ 

$$\begin{bmatrix} q_6 \\ q_5 \\ q_4 \\ q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9\mu^2 & 0 & -4\mu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5\mu^2 & 0 & -3\mu & 0 & 1 & 0 \\ -2\mu^3 & 0 & 2\mu^2 & 0 & -2\mu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{11} \\ a_{10} \\ a_9 \\ a_8 \\ a_7 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

 $n = 7$ 

$$\begin{bmatrix} q_7 \\ q_6 \\ q_5 \\ q_4 \\ q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14\mu^2 & 0 & -5\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9\mu^2 & 0 & -4\mu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7\mu^3 & 0 & 5\mu^2 & 0 & -3\mu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\mu^3 & 0 & 2\mu^2 & 0 & -2\mu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{13} \\ a_{12} \\ a_{11} \\ a_{10} \\ a_9 \\ a_8 \\ a_7 \end{bmatrix}$$

$n = 8$

$$\begin{bmatrix} q_8 \\ q_7 \\ q_6 \\ q_5 \\ q_4 \\ q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20\mu^2 & 0 & -6\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14\mu^2 & 0 & -5\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -16\mu^3 & 0 & 9\mu^2 & 0 & -4\mu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7\mu^3 & 0 & 5\mu^2 & 0 & -3\mu & 0 & 1 & 0 \\ 2\mu^4 & 0 & -2\mu^3 & 0 & 2\mu^2 & 0 & -2\mu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{15} \\ a_{14} \\ a_{13} \\ a_{12} \\ a_{11} \\ a_{10} \\ a_9 \\ a_8 \end{bmatrix}$$

$n = 9$

$$\begin{bmatrix} q_9 \\ q_8 \\ q_7 \\ q_6 \\ q_5 \\ q_4 \\ q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27\mu^2 & 0 & -7\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20\mu^2 & 0 & -6\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30\mu^3 & 0 & 14\mu^2 & 0 & -5\mu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16\mu^3 & 0 & 9\mu^2 & 0 & -4\mu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9\mu^4 & 0 & -7\mu^3 & 0 & 5\mu^2 & 0 & -3\mu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\mu^4 & 0 & -2\mu^3 & 0 & 2\mu^2 & 0 & -2\mu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{17} \\ a_{16} \\ a_{15} \\ a_{14} \\ a_{13} \\ a_{12} \\ a_{11} \\ a_{10} \\ a_9 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_D$

Se observa que la matriz  $D$  es triangular inferior, y que en la diagonal principal tenemos una sucesión de unos, en las sub-diagonales pares observamos que los coeficientes se pueden determinar por una sucesión de números en orden descendente, si definimos a las siguientes diagonales en orden ascendente como:

$$\begin{aligned} \mu^0 D^0 &= \mu^0 \{1, 1, 1, \dots\} \\ \mu^1 D^2 &= \mu^1 \{2, 3, 4, 5, \dots\} \\ \mu^2 D^4 &= \mu^2 \{2, 5, 9, 14, \dots\} \\ \mu^3 D^6 &= \mu^3 \{2, 7, 16, 30, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

podemos determinar los coeficientes del polinomio auxiliar con las siguientes ecuaciones recursivas:

$$\begin{array}{lll}
 D_{i+1}^2 = D_i^2 + 1 & D_0^2 = 2 & i = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \\
 D_{i+1}^4 = D_{i+1}^2 + D_i^4 & D_0^4 = 0 & i = \{0, 1, 2, \dots, n-3\} \\
 D_{i+1}^6 = D_{i+1}^4 + D_i^6 & D_0^6 = 0 & i = \{0, 1, 2, \dots, n-5\} \\
 D_{i+1}^8 = D_{i+1}^6 + D_i^8 & D_0^8 = 0 & i = \{0, 1, 2, \dots, n-7\} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 D_{i+1}^k = D_{i+1}^{k-2} + D_i^k & D_0^k = 0 & i = \{0, 1, 2, \dots, n-(k-1)\} \\
 \text{para } k = \{2, 4, 6, \dots\}
 \end{array} \tag{3.18}$$

donde el súper índice denota el número de la sub diagonal y el sub índice el elemento de la sucesión en la sub diagonal.

**Observación 3.5.** Por lo tanto, para calcular el polinomio auxiliar  $Q_M(\delta)$  del polinomio característico  $P_M(\lambda)$  de una matriz  $\mu$ -Simpléctica  $M$ , solo es necesario conocer  $n$  coeficientes  $\{a_{2n-1}, a_{2n-2}, \dots, a_n\}$  de  $P_M(\lambda)$ , y después con las formulas recursivas (3.18) se puede conocer los coeficientes del polinomio auxiliar  $Q_M(\delta)$  sin necesidad de realizar los cálculos con la transformación (3.17). Desde luego, si  $\mu = 1$  se obtiene un polinomio auxiliar de una matriz Simpléctica.

**Observación 3.6.** El resultado anterior toma relevancia, puesto que, se demostró que el polinomio característico de una matriz  $\mu$ -Simpléctica  $P_M(\lambda)$  de orden  $2n$  se puede transformar a un polinomio auxiliar  $Q_M(\delta)$  de grado  $n$ . Para el cómputo de valores característicos de una matriz  $\mu$ -Simpléctica  $M$ , la reducción orden de  $P_M(\lambda)$  a  $Q_M(\delta)$  también es significativa pues en vez de resolver un polinomio de orden  $2n$  resolvemos un polinomio orden  $n$ .

### 3.3. Matrices $\gamma$ -Hamiltonianas

**Definición 3.5.** La matriz  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  se dice  $\gamma$ -Hamiltoniana si

$$JA + A^T J = -2\gamma J \tag{3.19}$$

para algún  $\gamma \geq 0$

**Lema 3.1.** La matriz  $A$  es  $\gamma$ -Hamiltoniana si y solo si la matriz  $A + \gamma I$  es Hamiltoniana

**Prueba:** ( $\Rightarrow$ ) De la definición (3.19)

$$J(A + \gamma I) + (A + \gamma I)^T J = 0$$

$(A + \gamma I)$  satisface la condición de una matriz Hamiltoniana (3.3) ( $\Leftrightarrow$ )  $JA + A^T J = -2\gamma J \Rightarrow J(A + \gamma I) + (A + \gamma I)^T J = 0$ .

**Teorema 3.3.** *Sea  $A$  una matriz  $\gamma$ -Hamiltoniana entonces si  $s + \gamma$  es un valor característico de  $A$  entonces  $\gamma - s$  también lo es:*

$$\boxed{(s + \gamma) \in \sigma(A) \Leftrightarrow (\gamma - s) \in \sigma(A)} \quad (3.20)$$

**Prueba:** Sea  $s + \gamma$  valor característico de  $A$  es decir  $(s + \gamma) \in \sigma(A)$ , por lo tanto  $s \in \sigma(A + \gamma I)$ , del lema anterior  $A + \gamma I$  es Hamiltoniana, en consecuencia  $-s \in \sigma(A + \gamma I) \Rightarrow \gamma - s \in \sigma(A)$ . ■

**Observación 3.7.** Del teorema anterior si todos los valores característicos de la matriz Hamiltoniana  $A + \gamma I$  tienen parte real cero, entonces los valores característicos de la matriz  $\gamma$ -Hamiltoniana  $A$  tienen parte real  $\gamma$ . A causa de que  $A$  es real tienen su espectro simétrico con respecto al eje real y además debido a (3.20) tienen su **espectro simétrico a la línea vertical  $\gamma$** . Notemos que las matrices Hamiltonianas tienen su espectro simétrico con respecto a los ejes real e imaginario, mientras que las matrices  $\gamma$ -Hamiltonianas tienen sus valores característicos simétricos con respecto al eje real y la línea vertical  $\gamma$ . Ver la Fig. 3.2.

### 3.3.1. Polinomio Característico de una Matriz $\gamma$ -Hamiltoniana

Del teorema anterior, relación (3.20), si  $P_A$  es el polinomio de una matriz  $\gamma$ -Hamiltoniana, entonces:

$$\boxed{P_A(s + \gamma) = P_A(\gamma - s)}$$

así pues

$$P_A(\gamma - s) = (\gamma - s)^{2n} + a_{2n-1}(\gamma - s)^{2n-1} + \dots + a_1(\gamma - s) + a_0 \quad (3.21)$$

$$P_A(s + \gamma) = (s + \gamma)^{2n} + a_{2n-1}(s + \gamma)^{2n-1} + \dots + a_1(s + \gamma) + a_0 \quad (3.22)$$

gracias a esta **simetría** en el espectro de una matriz  $\gamma$ -Hamiltoniana  $A$ , el polinomio característico  $P_A$  depende de  $2n$  coeficientes pero dado que conocemos el valor de  $\gamma$ , podemos notar con que basta con calcular los  $n$  coeficientes pares  $a_{2n-2i}$  mientras que coeficientes impares  $a_{2n-i}$ , para

<sup>2</sup>Recuerde que si  $C \in \mathbb{R}^{l \times l}$   $\sigma(C) = \{c_1, c_2, \dots, c_l\} \Rightarrow \sigma(C + \gamma I) = \{c_1 + \gamma, c_2 + \gamma, \dots, c_l + \gamma\}$

$i = 1, 2, 3, \dots$ , dependen de los coeficientes pares. Este hecho lo podemos probar por construcción, en otras palabras, igualando los polinomios (3.21) y (3.22). Por ejemplo para  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} P_A(s + \gamma) &= (s + \gamma)^2 + a_1(s + \gamma) + a_0 = (\gamma - s)^2 + a_1(\gamma - s) + a_0 = P_A(\gamma - s) \\ &= s^2 + 2s\gamma + a_1s + \gamma^2 + a_1\gamma + a_0 = s^2 - 2s\gamma - a_1s + \gamma^2 + a_1\gamma + a_0 \end{aligned}$$

igualando los coeficientes se obtiene que:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\gamma \\ a_0 &= a_0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$P_A(s) = s^2 - 2\gamma s + a_0 \quad (3.23)$$

si hacemos el computo anterior para diferentes valores de  $n$  obtenemos:

$$n = 1$$

$$P_A(s) = s^2 - 2\gamma s + a_0$$

$$n = 2$$

$$P_A(s) = s^4 - 4\gamma s^3 + a_2 s^2 + (8\gamma^3 - 2\gamma a_2) + a_0$$

$$n = 3$$

$$P_A(s) = s^6 - 6\gamma s^5 + a_4 s^4 + (40\gamma^3 - 4\gamma a_4) s^3 + a_2 s^2 + (-96\gamma^5 + 8\gamma^3 a_4 - 2\gamma a_2) + a_0$$

$$n = 4$$

$$P_A(s) = s^8 - 8\gamma s^7 + a_6 s^6 + (112\gamma^3 - 6\gamma a_6) s^5 + a_4 s^4 + (-896\gamma^5 + 40\gamma^3 a_6 - 4\gamma a_4) s^3 +$$

$$+ a_2 s^2 + (2176\gamma^7 - 96\gamma^5 a_6 + 8\gamma^3 a_4 - 2\gamma a_2) + a_0$$

$$n = 5$$

$$P_A(s) = s^{10} - 10\gamma s^9 + a_8 s^8 + (240\gamma^3 - 8\gamma a_8) s^7 + a_6 s^6$$

$$+ (-4032\gamma^5 + 112\gamma^3 a_8 - 6\gamma a_6) s^5 +$$

$$+ a_4 s^4 + (32640\gamma^7 - 896a_8\gamma^5 + 40a_6\gamma^3 - 4a_4\gamma) s^3 +$$

$$+ a_2 s^2 + (79360\gamma^9 - 2176a_8\gamma^7 + 96a_6\gamma^5 - 8a_4\gamma^3 + 2a_2\gamma) s + a_0$$

$$n = 6$$

$$\begin{aligned} P_A(s) = & s^{12} - 12\gamma s^{11} + a_{12}s^{10} + (440\gamma^3 - 10\gamma a_{10})s^9 + a_8s^8 + \\ & (-12672\gamma^5 + 240a_{10}\gamma^3 - 8a_8\gamma)s^7 + a_6s^6 + (215424\gamma^7 - 4032a_{10}\gamma^5 + 112a_8\gamma^3 - 6a_6\gamma)s^5 \\ & + a_4s^4 + (-1745920\gamma^9 + 32640a_{10}\gamma^7 - 896a_8\gamma^5 + 40a_6\gamma^3 - 4a_4\gamma)s^3 + \\ & + (4245504\gamma^{11} - 79360a_{10}\gamma^9 + 2176a_8\gamma^7 - 96a_6\gamma^5 + 8a_4\gamma^3 - 2a_2\gamma)s + a_0 \end{aligned}$$

**Observación 3.8.** Evidentemente, si  $\gamma = 0$ ,  $P_A(s)$  se reduce a un polinomio únicamente con coeficientes pares, es decir, un polinomio de una matriz Hamiltoniana.

### 3.3.1.1. Polinomio auxiliar de una matriz $\gamma$ -Hamiltoniana

Al igual que las matrices  $\mu$ -Simplécticas, observamos que el polinomio característico de una matriz  $\gamma$ -Hamiltoniana  $P_A(s)$  presenta cierta **simetría en sus coeficientes**, por lo tanto podemos hacer un cambio de variable

$$\boxed{\phi = s - \gamma} \quad (3.24)$$

de tal manera que el polinomio de una matriz  $\gamma$ -Hamiltoniana  $A$  dependa únicamente de coeficientes pares, por ejemplo para  $n = 1$

$$P_A(s) = s^2 - 2\gamma s + a_0 = \left( \underbrace{s - \gamma}_{\phi} \right)^2 + a_0 - \gamma^2 = \phi^2 + a_0 - \gamma^2$$

$$Q_A(\phi) = \phi^2 + a_0 - \gamma^2$$

donde  $Q_A(\phi)$  solo cuenta con coeficientes pares, gracias a la simetría en los coeficientes del polinomio característico  $P_A(s)$  es posible reescribirlo como otro polinomio auxiliar  $Q_A(\phi)$  de grado  $2n$  pero con solo con coeficientes pares:

$$\begin{aligned} P_A(s) = & s^{2n} + a_{2n-1}s^{2n-1} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0 \\ & \downarrow \\ & \phi = s - \gamma \\ & \downarrow \\ Q_A(\phi) = & \phi^{2n} + q_{2n-2}\phi^{2n-2} + \dots + q_2\phi^2 + q_0 \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $q_i$  dependen de los coeficientes  $a_i$ , desde luego, si  $\gamma = 0$  obtenemos el polinomio característico  $P_A(s)$  de una Hamiltoniana, haciendo el cambio de variable (3.24) para algunos valores de  $n$  obtenemos:

$$n = 2$$

$$Q_A(\phi) = \phi^4 + (a_2 - 6\gamma^2)\phi^2 + 5\gamma^4 - a_2\gamma^2 + a_0$$

$$n = 3$$

$$Q_A(\phi) = \phi^6 + (a_4 - 15\gamma^2)\phi^4 + (a_2 - 6a_4\gamma^2 + 75\gamma^4)\phi^2 - 61\gamma^6 + 5a_4\gamma^4 - a_2\gamma^2 + a_0$$

$$n = 4$$

$$Q_A(\phi) = \phi^8 + (a_6 - 28\gamma^2)\phi^6 + (a_4 - 15a_6\gamma^2 + 350\gamma^4)\phi^4 +$$

$$+ (a_2 - 6a_4\gamma^2 + 75a_6\gamma^4 - 1708\gamma^6)\phi^2 +$$

$$+ 1385\gamma^8 - 61a_6\gamma^6 + 5a_4\gamma^4 - a_2\gamma^2 + a_0$$

$$n = 5$$

$$Q_A(\phi) = \phi^{10} + (a_8 - 45\gamma^2)\phi^8 + (a_6 - 28a_8\gamma^2 + 1050\gamma^4)\phi^6 +$$

$$+ (a_4 + 350a_8\gamma^4 - 15a_6\gamma^2 - 12810\gamma^6)\phi^4 +$$

$$+ (a_2 - 1708a_8\gamma^6 + 75a_6\gamma^4 - 6a_4\gamma^2 + 62325\gamma^8)\phi^2 +$$

$$- 50521\gamma^{10} + 1385a_8\gamma^8 - 61a_6\gamma^6 + 5a_4\gamma^4 - a_2\gamma^2 + a_0$$

### 3.4. Sistemas $\gamma$ -Hamiltonianos

**Definición 3.6.** A todo sistema lineal que se pueda escribir de la siguiente manera:

$$\dot{x} = J[H(t) + \gamma J]x = A(t)x \quad (3.25)$$

con  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $H^T(t) = H(t)$ ,  $A(t)$  matriz  $\gamma$ -Hamiltoniana, lo llamaremos **sistema lineal  $\gamma$ -Hamiltoniano** para  $\gamma > 0$ .

**Teorema 3.4.** *La matriz de transición de estados de un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano (3.25) es  $\mu$ -Simpléctica, con*

$$\mu = e^{-2\gamma t}$$

**Prueba:** Sea  $N$  cualquier matriz fundamental de (3.25) entonces se satisface:

$$\dot{N}(t) = A(t)N(t)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N^T(t)JN(t) &= \dot{N}^T(t)JN(t) + N^T(t)J\dot{N}(t) \\ &= (A(t)N(t))^T JN(t) + N^T(t)J(A(t)N(t)) \\ &= N^T(t)(A^T(t)J + JA(t))N(t) \\ \frac{d}{dt}N(t)^T JN(t) &= -2\gamma N^T(t)JN(t) \end{aligned}$$

si  $G(t) = N^T(t)JN(t)$

$$\frac{d}{dt}G(t) = -2\gamma G(t) \quad (3.26)$$

tomando en cuenta que  $\dot{G}(t)G(t) = G(t)\dot{G}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{G}(t)G(t) &= G(t)\dot{G}(t) \\ \left(\frac{d}{dt}N^T(t)JN(t)\right)N^T(t)JN(t) &= N^T(t)JN(t)\left(\frac{d}{dt}N^T(t)JN(t)\right) \\ (-2\gamma N^T(t)JN(t))N^T(t)JN(t) &= N^T(t)JN(t)(-2\gamma N^T(t)JN(t)) \\ -2\gamma N^T(t)JN(t)N^T(t)JN(t) &= -2\gamma N^T(t)JN(t)N^T(t)JN(t) \end{aligned}$$

integrando (3.26)

$$G(t) = e^{-2\gamma t}G(0)$$

$$G(0) = N^T(0)JN(0) = J$$

por consiguiente

$$N^T(t)JN(t) = e^{-2\gamma t}J$$

por lo tanto  $N$  es  $\mu$ -simpléctica

$$N^T(t)JN(t) = \mu J$$

con

$$\mu = e^{-2\gamma t}$$

■

### 3.4.1. Sistemas Lineales $\gamma$ -Hamiltoniano Periódicos

**Definición 3.7.** Si la matriz  $A(t)$  en la definición (3.25) es periódica, esto es,  $A(t) = A(t + \Omega)$  o bien la matriz  $H(t) = H(t + \Omega)$  entonces podemos definir un sistema lineal  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico como:

$$\dot{x} = J[H(t) + \gamma J]x = A(t)x \quad (3.27)$$

con  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $H(t) = H(t + \Omega)$ ,  $H^T(t) = H(t)$  y  $A(t) = A(t + \Omega)$  una matriz  $\gamma$ -Hamiltoniana periódica.

Por el teorema anterior la matriz de transición de estados de (3.27) es  $\mu$ -Simpléctica, recordando la matriz de monodromía de (3.27) se define como:

$$M = \Phi(\Omega, 0) = e^{R\Omega} \quad (3.28)$$

con  $R$  una matriz constante no siempre real.

**Observación 3.9.** Por lo tanto la matriz de **monodromía** de (3.27) es  $\mu$ -**Simpléctica** con  $\mu = e^{2\gamma\Omega}$ .

**Lema 3.2.** Sea  $M = e^{R\Omega}$  la matriz de monodromía de (3.27), entonces,  $R$  es una matriz  $\gamma$ -Hamiltoniana

**Prueba:** Dado que  $M$  es  $\mu$ -simpléctica se cumple que

$$(e^{R\Omega})^T J (e^{R\Omega}) = \mu J \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} e^{R^T \Omega} &= \mu J e^{-R\Omega} J^{-1} \\ &= \mu J \left\{ I_{2n} - R\Omega + \frac{RR\Omega^2}{2} - \frac{RRR\Omega^3}{3!} + \frac{RRRR\Omega^4}{4!} + \dots + \frac{R^k \Omega^k}{k!} + \dots \right\} J^{-1} \\ &= \mu e^{-JRJ^{-1}\Omega} = e^{-2\gamma\Omega} e^{-JRJ^{-1}\Omega} \end{aligned}$$

por lo tanto  $e^{R^T \Omega} = e^{-2\gamma\Omega} e^{-JRJ^{-1}\Omega} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} R^T \Omega &= -2\gamma\Omega I_{2n} - JRJ^{-1}\Omega \\ R^T J + JR &= -2\gamma J \quad \blacksquare \end{aligned}$$

#### 3.4.1.1. Transformación de Lyapunov-Floquet

El teorema de Floquet establece que es posible factorizar la matriz de transición de estados del sistema (3.27) como:  $\Phi(t, 0) = P^{-1}(t)e^{Rt}$  con  $t_0 = 0$  y  $P(t) = e^{Rt}\Phi(0, t)$ . Además es posible definir la siguiente transformación:

$$z(t) = P(t)x(t) \quad (3.30)$$

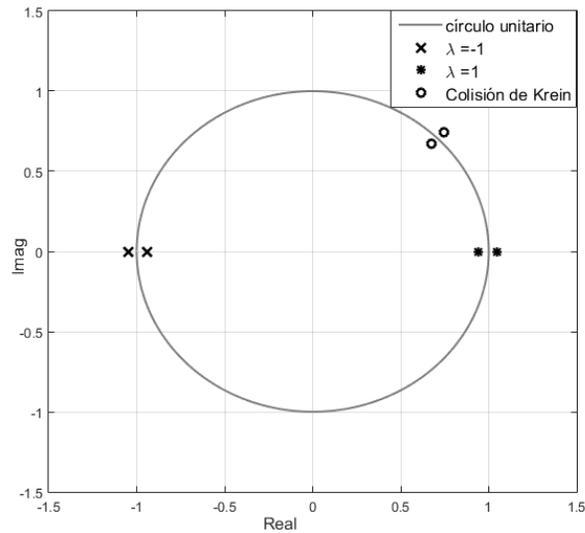


Figura 3.3: Multiplicadores característicos en el círculo unitario

entonces el sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico (3.27) se transforma en

$$\dot{z}(t) = Rz(t) \quad (3.31)$$

un sistema lineal invariante en tiempo, debido a que  $R$  es una matriz  $\gamma$ -Hamiltoniana, el sistema (3.31) es  $\gamma$ -Hamiltoniano.

### 3.4.1.2. Estabilidad

Del teorema de Lyapunov-Floquet sabemos que el sistema (3.27) es **estable** si los **multiplicadores característicos** ( $\sigma(M)$ ) están sobre el círculo unitario en el plano complejo y no existen multiplicadores múltiples. Es **asintóticamente estable** si los multiplicadores **característicos** están dentro del círculo unitario, o bien el sistema (3.27) es **estable** si los **exponentes característicos** ( $\sigma(R)$ ) están sobre el eje imaginario y **asintóticamente estable** si los **exponentes característicos** tienen parte real negativa. Además sabemos que la matriz de monodromía  $M$  es  $\mu$ -Simpléctica, así que, la matriz  $R$  es  $\gamma$ -Hamiltoniana.

#### 3.4.1.2.1. Con un Grado de Libertad Sea

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + \mu$$

el polinomio característico de la matriz de monodromía  $M$  del sistema lineal  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico para  $n = 1$ . Existen dos multiplicadores característicos, simétricos con respecto al círculo

de radio  $r$  y simétricos con respecto al eje real, por lo tanto las fronteras de estabilidad suceden cuando los multiplicadores abandonan el círculo unitario en el punto  $(1, 0)$  o el punto  $(-1, 0)$ . Ver Fig. 3.3.

Notemos que el término  $a = -tr(M)$  y de la transformación (3.17)

$$\delta = \lambda + \frac{\mu}{\lambda}$$

en este caso  $a = \delta$ .

**Teorema 3.5.** *El sistema lineal  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico (3.27) con un grado de libertad ( $n = 1$ ) es asintóticamente estable si y solo si se cumple la siguiente desigualdad*

$$|a| < (1 + \mu)$$

donde  $a$  es el coeficiente del polinomio característico de la matriz de monodromía asociada a (3.27).

**Prueba:** Dado que las fronteras de estabilidad se dan únicamente cuando los multiplicadores están en los puntos  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$ , entonces

$$\begin{aligned} P_M(1) &= (1)^2 + a(1) + \mu = a + (\mu + 1) \\ P_M(-1) &= (-1)^2 + a(-1) + \mu = -a + (\mu + 1) \end{aligned}$$

en consecuencia, se debe satisfacer

$$\begin{aligned} a + (\mu + 1) &> 0 \\ -a + (\mu + 1) &> 0 \end{aligned}$$

por lo tanto  $|a| < (1 + \mu)$ . ■

#### 3.4.1.2.2. Con dos Grados de Libertad Sea

$$P_M(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + a\mu\lambda + \mu^2 \quad (3.32)$$

el polinomio característico de la matriz de monodromía<sup>3</sup> asociada a (3.27) con  $n = 2$  y su polinomio auxiliar

$$Q_M(\delta) = \delta^2 + a\delta + b - 2\mu \quad (3.33)$$

<sup>3</sup>Vale la pena decir que estos resultados son de gran ayuda computacionalmente pues no es necesario calcular los valores característicos de  $M$ , que siempre es un proceso lento y que ocupa gran cantidad de recursos computacionales. Los términos del polinomio característico se pueden calcular como:

$$\begin{aligned} a &= -tr(M) \\ b &= [tr(M)]^2 - tr(M^2) \end{aligned}$$

existen cuatro multiplicadores característicos, simétricos con respecto al círculo de radio  $r$  y simétricos con respecto al eje real:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= x + iy \implies \lambda_2 = \frac{\mu}{\lambda_1} \\ \lambda_3 &= y - iy \implies \lambda_4 = \frac{\mu}{\lambda_3}\end{aligned}$$

nuevamente las fronteras de estabilidad suceden cuando los multiplicadores abandonan el círculo unitario en el punto  $(1,0)$  o el punto  $(-1,0)$ , además cuando un valor característico abandona el círculo unitario en un punto diferente a  $\lambda = \pm 1$  es decir cuando el argumento de  $\lambda$  es diferente de  $k\pi$  para  $k = \{0, 1, 2, \dots\}$  tenemos otra frontera de estabilidad, a este punto se le conoce como: "**colisión de Krein**" ver Fig. 3.3, sin embargo, ahora los multiplicadores están sobre el círculo de radio  $r = \sqrt{\mu} \leq 1$  no sobre el círculo unitario, por lo que aunque los multiplicadores abandonen el círculo de radio  $r$  no es una frontera de estabilidad, la estabilidad está dada con respecto al círculo unitario.

Es importante notar que

$$a = -\text{tr}(M) = \lambda_1 + \frac{\mu}{\lambda_1} + \lambda_3 + \frac{\mu}{\lambda_3} = \delta_1 + \delta_2$$

**Teorema 3.6.** *Sea (3.32) el polinomio característico de la matriz de monodromía  $M$  del sistema lineal  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico (3.27) para  $n = 2$  entonces (3.27) es estable si y solo si se cumplen las siguientes desigualdades.*

$$\begin{aligned}b &\geq -a(1 + \mu) - (1 + \mu^2) \\ b &\geq a(1 + \mu) - (1 + \mu^2) \\ b &\leq \frac{\mu^4 + 2\mu^3 + 2\mu^2 + a^2\mu + 2\mu + 1}{(1 + \mu)^2}\end{aligned}$$

**Prueba:** Una forma de probar las desigualdades es utilizando el criterio de Jury [51] al polinomio (3.32) o bien usando la transformación bilineal<sup>4</sup>:  $\lambda = \frac{s+1}{s-1}$

$$R_M(s) = \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^4 + a\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + b\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + a\mu\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + \mu^2 = 0$$

$$\begin{aligned}R_M(s) &= s^4(a\mu + 1 + b + \mu^2 + a) + s^3(-4\mu^2 + 2a + 4 - 2a\mu) + \\ &\quad s^2(6\mu^2 - 2b + 6) + s(4 - 4\mu^2 - 2a + 2a\mu) + (b - a - a\mu + \mu^2 + 1)\end{aligned}$$

<sup>4</sup>La transformación es un mapeo del plano  $\lambda$  al plano de  $s$ , todos los puntos que se encuentran dentro del círculo unitario en el plano  $\lambda$ , son mapeados en el semiplano izquierdo en el plano  $s$ , los puntos sobre el círculo unitario son mapeados en el eje imaginario del plano  $s$ , y los puntos fuera del círculo unitario son mapeados en el semiplano derecho del plano  $s$ .

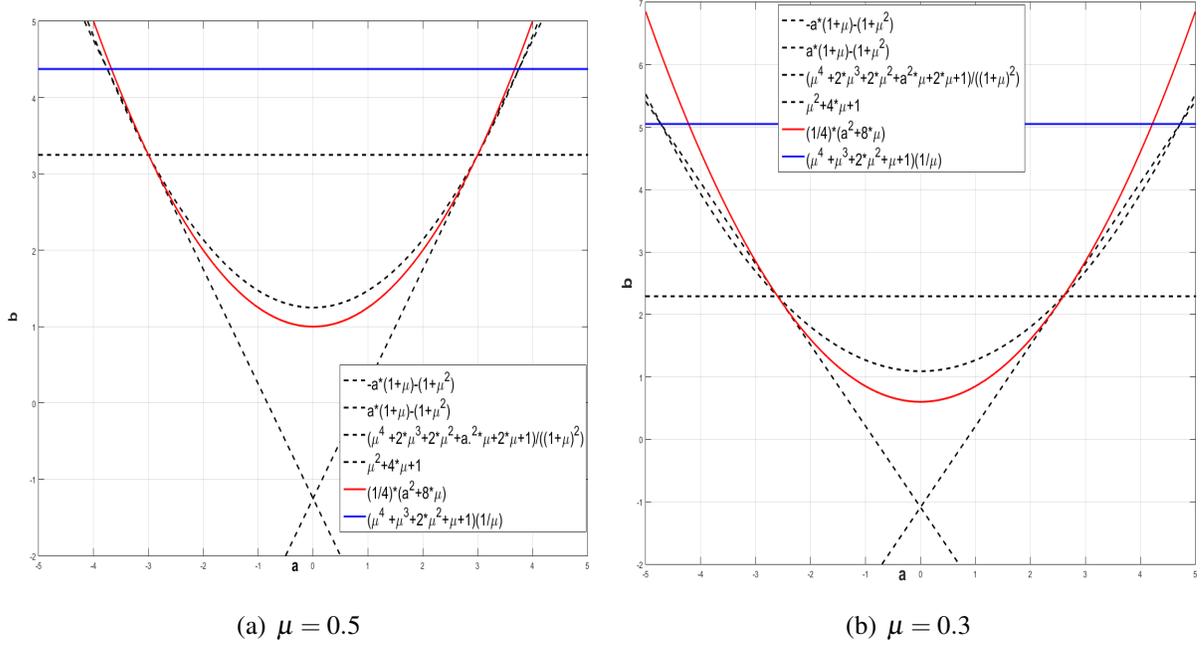


Figura 3.4: Curvas de transición para un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico con dos grados de libertad

por lo tanto (3.27) estable si las raíces de  $R_M(s)$  tienen parte real negativa, de modo que, aplicando el Criterio de Routh-Hurwitz obtenemos las desigualdades del teorema. Sin embargo, es posible extraer más información sobre la posición de los valores característicos resolviendo el polinomio (3.32) usando el polinomio auxiliar (3.33). En consecuencia, buscamos las curvas de transición o fronteras de estabilidad, el caso más simple es cuando  $\lambda = 1$  ( $\delta = 1 + \mu$ ) y  $\lambda = -1$  ( $\delta = -1 - \mu$ ) sustituyendo en (3.32) o en (3.33).

$$\begin{aligned} \lambda = 1 \quad \delta = 1 + \mu &\quad \rightarrow \quad b = -a(1 + \mu) - (1 + \mu^2) \\ \lambda = -1 \quad \delta = -(1 + \mu) &\quad \rightarrow \quad b = a(1 + \mu) - (1 + \mu^2) \end{aligned}$$

$$b = -a(1 + \mu) - (1 + \mu^2) \quad (3.34)$$

$$b = a(1 + \mu) - (1 + \mu^2) \quad (3.35)$$

Ahora consideremos el caso cuando  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dada la simetría de los valores característicos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = x + iy &\quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{\mu}{\lambda_1} \\ \lambda_3 = y - iy &\quad \Rightarrow \quad \lambda_4 = \frac{\mu}{\lambda_3} \end{aligned}$$

y recordado que en la frontera  $|\lambda| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ , entonces:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = x + iy &\quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \mu(x - iy) \\ \lambda_3 = y - iy &\quad \Rightarrow \quad \lambda_4 = \mu(x + iy) \end{aligned}$$

de la transformación (3.17)

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \lambda_1 + \frac{\mu}{\lambda_1} = x(1 + \mu) + iy(1 - \mu) \\ \delta_2 &= \lambda_3 + \frac{\mu}{\lambda_3} = x(1 + \mu) - iy(1 - \mu)\end{aligned}$$

sumado  $\delta_1$  y  $\delta_2$ :

$$\delta_1 + \delta_2 = 2x(1 + \mu) \quad (3.36)$$

por otra parte de (3.33)

$$\delta_{1,2} = \frac{-a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 + 8\mu - 4b}}{2} \quad (3.37)$$

notemos que  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son reales si:

$$b < \frac{a^2 + 8\mu}{4} \quad (3.38)$$

sumando  $\delta_1$  y  $\delta_2$  de (3.37)

$$\delta_1 + \delta_2 = -a \quad (3.39)$$

por consiguiente igualando (3.36) y (3.39)

$$2x(1 + \mu) = -a \quad (3.40)$$

la parte real  $x$  de los valores característicos la podemos obtener de la transformación (3.17)

$$\lambda^2 - \lambda\delta + \mu = 0$$

entonces

$$\lambda = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\mu}}{2} \quad (3.41)$$

sustituyendo (3.37) en (3.41)

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left( \left( -a + i\sqrt{-(a^2 + 8\mu) + 4b} \right) + \sqrt{\left( -a + i\sqrt{-(a^2 + 8\mu) + 4b} \right)^2 - 16\mu} \right)$$

simplificando

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left( -a + \sqrt{w - 4\mu - 2b + a^2} \right) + \frac{i}{4} \left( \sqrt{w + 4\mu + 2b - a^2} + \sqrt{-(a^2 + 8\mu) + 4b} \right)$$

donde  $w = 2\sqrt{-4a^2\mu + (b + 2\mu)^2}$ , de manera que la parte real de  $\lambda_1$  es:

$$x = \frac{1}{4} \left( -a + \sqrt{w - 4\mu - 2b + a^2} \right)$$

sustituyendo  $x$  en (3.40)

$$\frac{1}{2} \left( -a + \sqrt{w - 4\mu - 2b + a^2} \right) (1 + \mu) = -a$$

ahora despejando  $b$

$$\begin{aligned}
\sqrt{w-4\mu-2b+a^2} &= a\frac{\mu-1}{\mu+1} \\
w-4\mu-2b+a^2 &= a^2\frac{(\mu-1)^2}{(\mu+1)^2} \\
w-2b &= a^2\frac{(\mu-1)^2}{(\mu+1)^2}-a^2+4\mu \\
4\left(-4a^2\mu+(b+2\mu)^2\right)-\left(2b+\frac{4\mu(-a^2+(\mu+1)^2)}{(\mu+1)^2}\right)^2 &= 0 \\
-16a^2\frac{\mu}{(\mu+1)^4}(2\mu-b-2b\mu+2\mu^2+2\mu^3+\mu^4+a^2\mu-b\mu^2+1) &= 0 \\
2\mu-b-2b\mu+2\mu^2+2\mu^3+\mu^4+a^2\mu-b\mu^2+1 &= 0 \\
-b(1+\mu)^2+2\mu+2\mu^2+2\mu^3+\mu^4+a^2\mu+1 &= 0 \\
b &= \frac{2\mu+2\mu^2+2\mu^3+\mu^4+a^2\mu+1}{(1+\mu)^2} \tag{3.42}
\end{aligned}$$

por último hallamos la intersección entre las líneas (3.34) (3.35) y la línea (3.42):

$$b = \frac{1}{\mu}(\mu^4 + \mu^3 + 2\mu^2 + \mu + 1) \tag{3.43}$$

$$b = \mu^2 + 4\mu + 1 \tag{3.44}$$

como se observa en la Fig.3.4 la curva (3.43) en color azul es una condición necesaria ( $b < \frac{1}{\mu}(\mu^4 + \mu^3 + 2\mu^2 + \mu + 1)$ ) pero no suficiente, por lo tanto las condiciones de estabilidad, es decir,  $|\lambda| \leq 1$ , son:

$$b \geq -(1+\mu)a - (1+\mu^2) \tag{3.45}$$

$$b \geq (1+\mu)a - (1+\mu^2) \tag{3.46}$$

$$b \leq \frac{\mu^4 + 2\mu^3 + 2\mu^2 + a^2\mu + 2\mu + 1}{(1+\mu)^2} \tag{3.47}$$

■

Por último gracias a la prueba del teorema anterior podemos conocer la posición de los multiplicadores característicos para cada región descrita por las desigualdades (3.45), (3.46), (3.47) y (3.44). Las fronteras de estabilidad o **curvas de transición** están descritas por las curvas en *línea continua* en la Fig.3.5. La *línea punteada color magenta*

$$b = \frac{a^2 + 8\mu}{4} \tag{3.48}$$

determina la frontera cuando los multiplicadores abandonan el círculo de radio  $r = \sqrt{\mu}$  en punto diferente a  $\lambda = \pm r$ , la región entre la línea *color negro* (3.42) y línea *punteada color magenta* (3.48) describe una **zona asintóticamente estable** con los multiplicadores en la relación:  $\lambda_1 = x + iy$ ,  $\lambda_2 = \frac{\mu}{\lambda_1}$ ,  $\lambda_3 = \bar{\lambda}_1$  y  $\lambda_4 = \frac{\mu}{\bar{\lambda}_1}$  con  $|\lambda_i| < 1$  para  $i = \{1, 2, 3, 4\}$ . La línea en *color negro* es la **curva de transición** que determina cuando los multiplicadores abandonan el círculo unitario en algún punto diferente a  $\lambda = \pm 1$  por lo tanto en la región:

$$b > \frac{\mu^4 + 2\mu^3 + 2\mu^2 + a^2\mu + 2\mu + 1}{(1 + \mu)^2}$$

los multiplicadores son imaginarios en la relación  $\lambda_1 = x + iy$ ,  $\lambda_2 = \frac{\mu}{\lambda_1}$ ,  $\lambda_3 = \bar{\lambda}_1$  y  $\lambda_4 = \frac{\mu}{\bar{\lambda}_1}$  con  $|\lambda_1| > 1$ . La línea en *color cian* representa la **curva de transición** cuando un multiplicador abandona el círculo unitario en  $\lambda = 1$ , por lo tanto, en la región

$$b < -(1 + \mu)a - (1 + \mu^2) \text{ y } b \geq (1 + \mu)a - (1 + \mu^2)$$

hay un par de multiplicadores reales  $\lambda_1 = x_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = \mu/x_1$  y dos multiplicadores sobre el círculo de radio  $r$ ,  $\lambda_3 = x_2 + iy_2$  y  $\lambda_4 = \bar{\lambda}_3$ . La línea *color café* describe la **curva de transición** cuando un multiplicador abandona el círculo unitario en  $\lambda = -1$ , por consiguiente en la región

$$b < (1 + \mu)a - (1 + \mu^2) \text{ y } b \geq -(1 + \mu)a - (1 + \mu^2)$$

hay un par de multiplicadores reales  $\lambda_1 = x_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = \mu/x_1$  y dos multiplicadores sobre el círculo de radio  $r$ ,  $\lambda_3 = x_2 + iy_2$  y  $\lambda_4 = \bar{\lambda}_3$ . Luego en la región

$$b < (1 + \mu)a - (1 + \mu^2) \text{ y } b < -(1 + \mu)a - (1 + \mu^2)$$

hay dos pares de multiplicadores reales  $\lambda_1 = x_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = \mu/x_1$  y  $\lambda_3 = x_2 < 0$ ,  $\lambda_4 = \mu/x_2$ . En el región

$$b \leq \frac{\mu^4 + 2\mu^3 + 2\mu^2 + a^2\mu + 2\mu + 1}{(1 + \mu)^2} \text{ y } b \geq -(1 + \mu)a - (1 + \mu^2)$$

entre las líneas *color negro* y *cian* hay dos pares de multiplicadores reales fuera del círculo unitario con  $\lambda_1 = x_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = \mu/x_1$  y  $\lambda_3 = x_2 > 0$ ,  $\lambda_4 = \mu/x_2$ . La región entre las curvas de *color café* y *negro* nos dice que hay dos pares de multiplicadores  $\lambda_1 = x_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = \mu/x_1$  y  $\lambda_3 = x_2 < 0$ ,  $\lambda_4 = \mu/x_2$ .

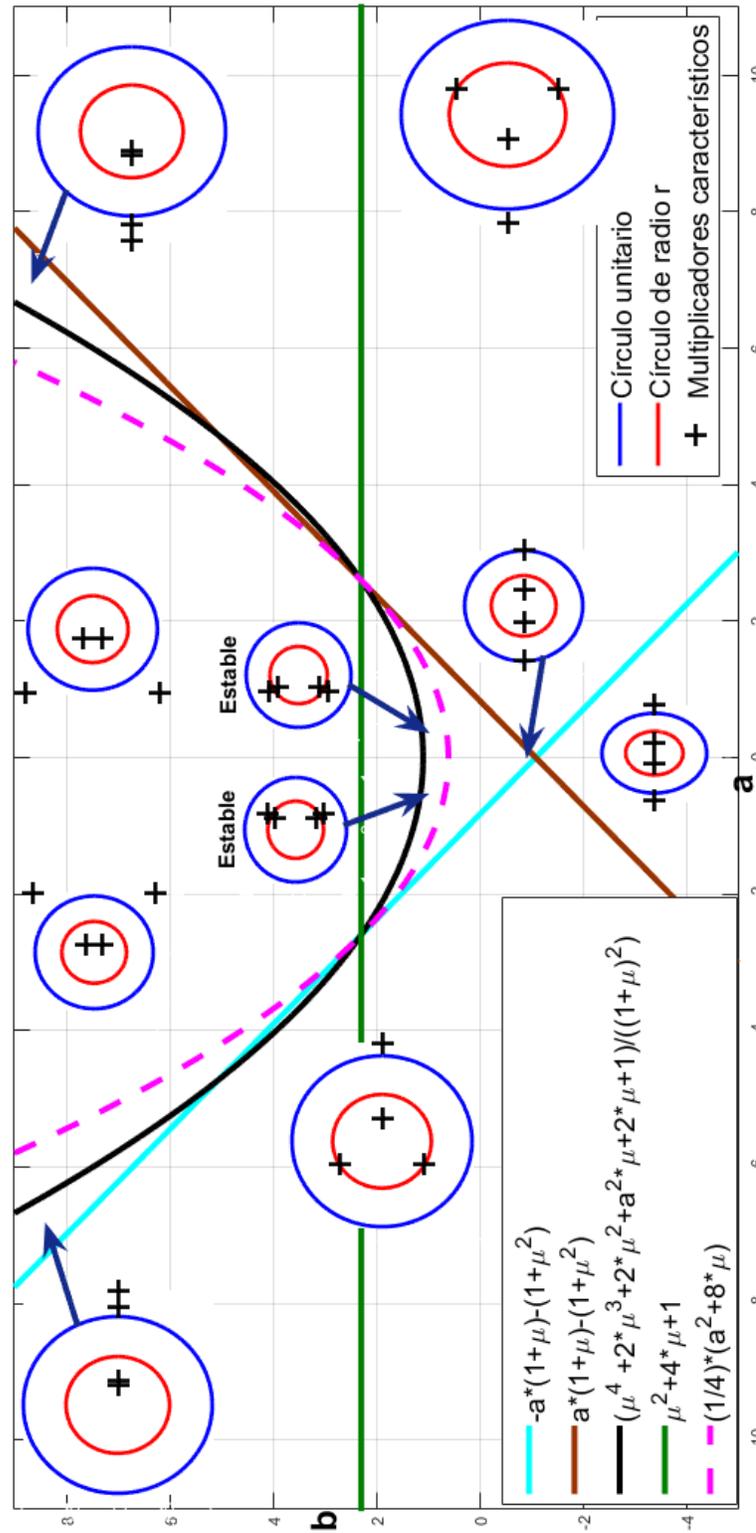


Figura 3.5: Fronteras de estabilidad o curvas de transición para un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico con dos grados de libertad y posición multiplicadores característicos

# Ecuación Vectorial de Hill

---

Diversos sistemas mecánicos son modelados por la **ecuación vectorial de Hill**, particularmente los sistemas con rotores, motores, tornos, turbinas, cuando tienen un soporte elástico, cuando los rotores son no isotrópicos (es decir, que su eje de rotación no coincide con el centro de masa) o bien el rotor está en una superficie viscosa [16, 52, 53, 54, 55]. La **ecuación vectorial de Hill** ha sido estudiada monumentalmente en [18], además podemos citar dos trabajos notables cuando la ecuación de Hill cuenta con dos grados de libertad [56, 57, 58]. En este capítulo hacemos un análisis de la **ecuación vectorial de Hill con disipación**, la primera diferencia fundamental entre la ecuación de Hill con uno y dos grados de libertad es que no existen algoritmos espectrales para el cálculo de los diagramas de estabilidad [59], por lo tanto, en general es necesario integrar numéricamente lo cual requiere gran cantidad de recursos computacionales y bastante tiempo de cómputo. Por esta razón, en primer lugar presentamos: un nuevo método para obtener diagramas de estabilidad confiables para sistemas periódicos con más de un grado de libertad y en particular para la ecuación vectorial de Hill. Con ayuda de una unidad de procesamiento de gráficos (GPU) y la programación en paralelo hemos reducido el tiempo de cómputo de los diagramas de estabilidad a uno cuantos segundos. Además si consideramos a la ecuación Vectorial de Hill con dos grados de libertad como un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano, podemos reducir aún más el tiempo y la precisión de los diagramas de estabilidad, esto es gracias a las condiciones de estabilidad obtenidas en el capítulo pasado, en consecuencia, en este capítulo presentamos una descripción de la ecuación vectorial de Hill con disipación, presentamos la solución a la ecuación de Meissner con dos grados de libertad. Mostramos los diagramas de estabilidad para la ecuación vectorial de Hill con disipación descrita como un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano.

## 4.1. Cálculo de las Zonas de Estabilidad

Al conjunto de  $n$  ecuaciones de Hill acopladas le llamaremos: **ecuación vectorial de Hill**. Parametrizando las  $n$  ecuaciones de Hill en 2 parámetros  $(\alpha, \beta)$  podemos escribir a la ecuación

vectorial de Hill como:

$$\ddot{y} + \tilde{D}\dot{y} + (\alpha\tilde{A} + \beta\tilde{B}p(t))y = 0 \quad (4.1)$$

con  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{A} = \tilde{A}^T$ ,  $\tilde{B} = \tilde{B}^T$ ,  $\tilde{D} = \tilde{D}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $p(t) = p(t + \Omega)$ . Un problema importante a resolver durante la realización de este trabajo es encontrar métodos o algoritmos que puedan calcular las regiones de estabilidad e inestabilidad de la ecuación (4.1). La simetría de las matrices  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  y  $\tilde{D}$  es debido a garantizar la estructura Hamiltoniana (para  $\tilde{D} = 0$ ).

Para el cálculo de las lenguas de Arnold para la ecuación de Hill, existen diversos métodos, sin embargo, para la **ecuación vectorial de Hill** hay pocos ejemplos, uno de ellos se muestra en [56] donde se desarrollan los *determinantes infinitos* para un ejemplo particular de la ecuación de Mathieu con dos grados de libertad, se puede implementar el método de *perturbaciones regulares* [12] sin embargo, este método solo es válido para  $\beta$  muy pequeñas, y para las primeras lenguas de Anold es decir  $\alpha$  pequeñas. A continuación presentamos un método numérico el cual permite el cómputo de las lenguas de Arnold para el sistema (4.1).

Entonces, para (4.1) hacemos el cambio de variable  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$  obtenemos un sistema de la forma:

$$\dot{x} = R(t)x \quad (4.2)$$

donde

$$R(t) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -(\alpha\tilde{A} + \beta\tilde{B}p(t)) & -\tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ P(t) & -\tilde{D} \end{bmatrix}$$

con

$$P(t) = -(\alpha\tilde{A} + \beta\tilde{B}p(t))$$

Por supuesto siempre se puede integrar la ecuación (4.2) con cualquier método numérico, en particular el método de Runge-Kutta [60]:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= R(t_i, x_i) & k_2 &= R(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= R(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_2) & k_4 &= R(t_i + h, x_i + k_3) \end{aligned}$$

este algoritmo es implementado en **cómputo paralelo** para construir la matriz de monodromía para cualquier sistema lineal periódico [24].

### 4.1.1. Discretización

Dado que (4.1) tiene solución única y continua entonces podemos aproximar  $\dot{y}$  y  $\ddot{y}$  como:

$$\dot{y} \approx \frac{y(t + \frac{h}{2}) - y(t - \frac{h}{2})}{h}$$

$$\ddot{y}(t) \approx \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} \quad (4.4)$$

con  $h$  pequeña, esta aproximación es conocida como *diferencias centradas* [60]. Sustituyendo (4.4) en (4.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t_k) &\approx \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \\ \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + D \left( \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \right) + P(t_k)y_k &= 0 \\ y_{k+1} &= \left( I + \frac{h}{2}D \right)^{-1} \left[ (2 - h^2P(t_k))y_k + \left( \frac{h}{2}D - I \right)y_{k-1} \right] \\ y_{k+2} &= \left( I + \frac{h}{2}D \right)^{-1} \left[ (2 - h^2P(t_k))y_{k+1} + \left( \frac{h}{2}D - I \right)y_k \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

por lo tanto se obtiene una ecuación en **diferencias variante en el tiempo** de forma periódica,  $P(t_k) = P(t_k + \Omega_k)$  siempre que  $\exists k \in \mathbb{N}_+ : \Omega = kh$ . El discretizar mediante diferencias centradas (4.4) se le conoce como una aproximación de segundo orden. Una mejor aproximación o discretización, es posible, si usamos el método de Runge-Kutta (4.3) que es un método de cuarto orden, o bien

$$y_{k+1} = I_k + hR_k + \frac{h^2}{2}R_k^2 + \frac{h^3}{6}R_k^3 + \frac{h^4}{24}R_k^4 \quad (4.6)$$

la serie de Taylor de cuarto orden<sup>1</sup> para discretizar la ecuación (4.2). Durante el trabajo utilizamos la aproximación (4.6) para discretizar la ecuación vectorial de Hill.

#### 4.1.1.1. Técnica de Lifting

Ahora usando la técnica que se conoce como *lifting* [61] de sistema discreto (4.5) obtendremos un **sistema discreto invariante**. Sea cualquier sistema lineal discreto periódico

$$z_{k+1} = A_k y_k \quad (4.7)$$

con

$$A_k = A_{k+N}$$

donde  $N$  es el periodo mínimo que se obtiene de la discretización para  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , si  $\Omega$  es el periodo mínimo en tiempo continuo entonces  $h = \frac{\Omega}{N}$ . Resolviendo paso a paso para el primer

<sup>1</sup>Serie de Taylor de cuarto orden que es equivalente al método de Runge-Kutta [60]

periodo:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= A_0 z_0 \\
 z_2 &= A_1 z_1 = A_1 A_0 z_0 \\
 z_3 &= A_2 z_2 = A_2 A_1 A_0 z_0 \\
 &\vdots \\
 z_k &= A_{k-1} z_{k-1} = A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_1 A_0 z_0
 \end{aligned}$$

para el siguiente periodo

$$\begin{aligned}
 z_{k+1} &= (A_0 A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_2 A_1) z_0 \\
 z_{k+2} &= (A_1 A_0 A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_2) z_1 \\
 &\vdots \\
 z_{k+N} &= (A_{k-1} A_{k-2} A_{k-3} \cdots A_0) z_{N-1}
 \end{aligned}$$

definiendo el vector  $x_k = [z_{Nk+1} \ z_{Nk+2} \ \cdots \ z_{Nk+N}]^T$  obtenemos el siguiente sistema lineal shift-invariant:

$$x_{k+1} = \mathcal{A} z_k \quad (4.8)$$

donde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix}
 A_0 A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_1 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & A_1 A_0 A_{k-1} \cdots A_2 & \vdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_0
 \end{bmatrix}$$

El sistema (4.8) es un sistema discreto invariante por lo tanto es asintóticamente estable si y solo si

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset D = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda < 1\}$$

dado que  $\mathcal{A}$  es diagonal

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A_0 A_{k-1} \cdots A_2 A_1) \cup \sigma(A_1 A_0 A_{k-1} \cdots A_2) \cup \cdots \cup \sigma(A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_0)$$

si  $A_i, A_j$  son no singulares es claro que

$$\sigma(A_i A_j) = \sigma(A_j A_i)$$

entonces

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A_0 A_{k-1} \cdots A_2 A_1) = \sigma(A_1 A_0 A_{k-1} \cdots A_2) = \cdots = \sigma(A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_0)$$

de tal forma que, para concluir sobre la estabilidad de (4.8) es suficiente calcular  $\sigma(A_0 A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_2 A_1)$ .

**Observación 4.1.** Por consiguiente, el primer algoritmo para calcular regiones de estabilidad de (4.2) se reduce a evaluar los valores característicos de la matriz  $A_0A_{k-1}A_{k-2}\cdots A_2A_1$  del sistema discreto (4.8).

### 4.1.2. Power Method

En general, todos los algoritmos para el cálculo de los valores característicos consumen bastantes recursos computacionalmente y tiempo. Dado que, para nuestro análisis de estabilidad es suficiente conocer el valor del módulo máximo de los valores característicos, proponemos el siguiente método [24].

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz con valores característicos  $\lambda_i$  para  $i = 1, \dots, n$ , tal que  $|\lambda_1| > |\lambda_j|$  para  $j = 2, \dots, n$ , es decir, existe un valor característico más grande que el resto. Por simplicidad asumimos que los valores característicos de  $A$  son diferentes. Sea  $x_0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$  un vector inicial donde  $x_i$  son los vectores característicos de  $A$  ( $Ax_i = \lambda_i x_i$ ) y  $\alpha_1 \neq 0$  entonces:

$$\begin{aligned} Ax_0 &= A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_n Ax_n \\ &= \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n \end{aligned}$$

pre multiplicando  $A$

$$\begin{aligned} AAx_0 &= A(\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n) = \alpha_1 \lambda_1 Ax_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n Ax_n \\ &= \alpha_1 \lambda_1^2 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 x_n \end{aligned}$$

repetiendo  $k$  veces el paso anterior

$$\begin{aligned} A^k x_0 &= \alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k x_n \\ A^k x_0 &= \lambda_1^k \left( \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n \left( \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} \right) x_n \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

dado que  $|\lambda_1| > |\lambda_j|$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_j^k}{\lambda_1^k} \right) = 0 \quad j = 2, \dots, n$$

por lo tanto cuando  $k \rightarrow \infty$

$$A^k x_0 \approx \alpha_1 \lambda_1^k x_1 = \alpha_1 A^k x_1 \quad (4.10)$$

observamos que para  $k$  suficientemente grande  $A^k x_0$  se alinea con  $x_1$ , el vector característico asociado a  $\lambda_1$ , el valor característico más grande en valor absoluto, entonces:

$$\begin{aligned} \|A^k x_0\| &\approx \alpha_1 |\lambda_1^k| \|x_1\| \\ \|A^{k+1} x_0\| &\approx \alpha_1 |\lambda_1^{k+1}| \|x_1\| \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|\lambda_1| \approx \frac{\|A^{k+1}x_0\|}{\|A^k x_0\|} \quad (4.11)$$

esta es la idea principal de algunos algoritmos para calcular los valores y vectores característicos llamado *Power Method* y *QR methods* [62, 63].

#### 4.1.2.1. Modificación del Power Method

Sin embargo si se quiere utilizar el Power Method para un sistema estable no podemos asegurar la convergencia de (4.10), si no hay términos *disipativos* en (4.1), el sistema es estable o inestable no puede ser asintóticamente estable. Recordando los valores característicos de la matriz de monodromía  $M$  de (4.2) con  $D = \text{diag}\{0, 0, \dots, 0\}$  están sobre el círculo unitario debido a que  $M$  es simpléctica por lo tanto la condición  $|\lambda_1| > |\lambda_j|$  no se cumple, el sistema es estable si todos sus valores característicos tienen modulo igual a uno. Entonces de (4.9) y seleccionando un vector inicial normalizado

$$x_0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$\|x_0\|_2 = 1$$

tenemos

$$\|M^k x_0\| \leq |\lambda_1^k| \left\| \left( \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n \left( \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} \right) x_n \right) \right\| \quad (4.12)$$

dado que  $M$  es simpléctica el sistema (4.2) es estable se cumple que

$$\prod_{i=1}^n |\lambda_i| = 1 \longrightarrow \left| \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} \right| = 1$$

para  $k = 1, 2, \dots$  se sigue que:

$$\|M^k x_0\| \leq |\lambda_1^k| \|(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)\| \quad (4.13)$$

pero

$$\|x_0\|_2 = 1$$

por lo tanto si (4.2) es estable:

$$\|M^k x_0\| \leq 1 \quad (4.14)$$

la desigualdad (4.14) se satisface.

**Observación 4.2.** Este método nos ayudó debido a que su tiempo de cómputo es mucho menor que calcular los valores característicos. Claro que para la programar el algoritmo no se puede hacer

$k \rightarrow \infty$  es necesario fijar un valor de  $k$  además debido a errores numéricos es conveniente tener como condición de estabilidad

$$\left\| M^k x_0 \right\| \leq P = 1.0001$$

si  $|\lambda| \approx 1.00001$  después de  $K$  iteraciones este valor es  $(|\lambda| \approx 1.00001)^K$  por lo tanto es conveniente usar como cota de estabilidad:

$$\bar{P} = P^K$$

para la implementación del algoritmo para programación en paralelo se puede consultar [24].

## 4.2. Ecuación de Hill con dos grados de libertad

### 4.2.1. Solución Analítica de la Ecuación de Meissner con dos grados de libertad

Al parecer no hay ejemplos en la literatura donde se presentan la solución analítica de la ecuación de Meissner con dos grados de libertad. Sea la ecuación

$$\ddot{x} + D\dot{x} + [\alpha A + \beta B \text{sign}(\sin(t))]x = 0 \quad (4.15)$$

con  $A = A^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B = B^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $D = \text{diag}\{d, d\}$  a la que llamaremos **ecuación vectorial de Meissner**, entonces al igual que en el caso de un grado de libertad se puede separar en dos ecuaciones lineales invariantes en el tiempo, similar al caso de la ecuación de Meissner, dado que los cálculos algebraicos son complicados para el cálculo de  $\Phi(2\pi, \pi)$  y  $\Phi(\pi, 0)$  usaremos la ayuda de las herramientas computacionales<sup>2</sup>. Entonces la matriz de monodromía está dada por

$$M = \Phi(2\pi, 0) = \Phi(2\pi, \pi) \Phi(\pi, 0) = e^{-\pi d} \Phi_1 \Phi_2 \quad (4.16)$$

donde

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(K_{11}\delta_{11} - K_{12}\delta_{12}) & \frac{1}{2}c_{11}(Kc_{11} - dKs_{11}) & K_{13} & c_{11}Ks_{11} \\ \frac{1}{2}Kc_{11} + dKs_{11} & \frac{1}{2}(K_{15}\delta_{11} - K_{14}\delta_{12}) & c_{11}Ks_{11} & K_{16} \\ K_{17} & c_{11}K_{18} & \frac{1}{2}(K_{19}\delta_{11} - K_{11}\delta_{12}) & \frac{1}{2}c_{11}(Kc_{11} - dKs_{11}) \\ c_{11}K_{18} & K_{11} & \frac{1}{2}c_{11}(Kc_{11} - rKs_{11}) & \frac{1}{2}(K_{10}\delta_{11} - K_{19}\delta_{12}) \end{pmatrix}$$

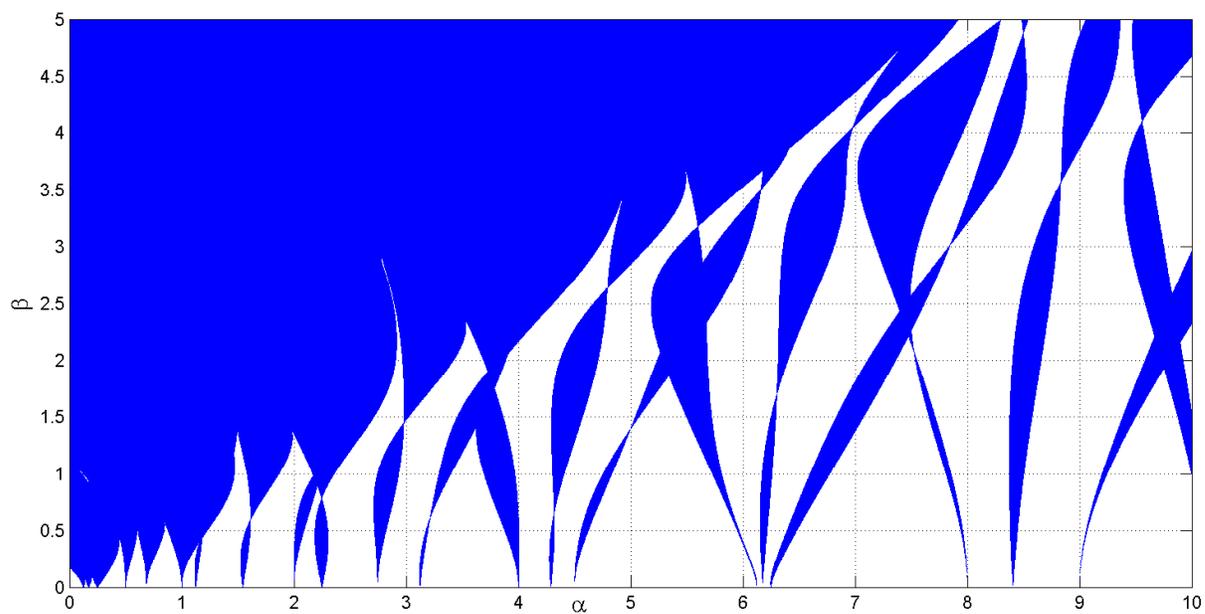
$$\gamma_1 = \sqrt{4(\alpha a_2 + \beta b_2)^2 + (\alpha(a_1 - a_4) + \beta(b_1 - b_4))^2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{d^2 - 2\gamma_1 - 2\alpha(a_1 + a_4) - 2\beta(b_1 + b_4)}$$

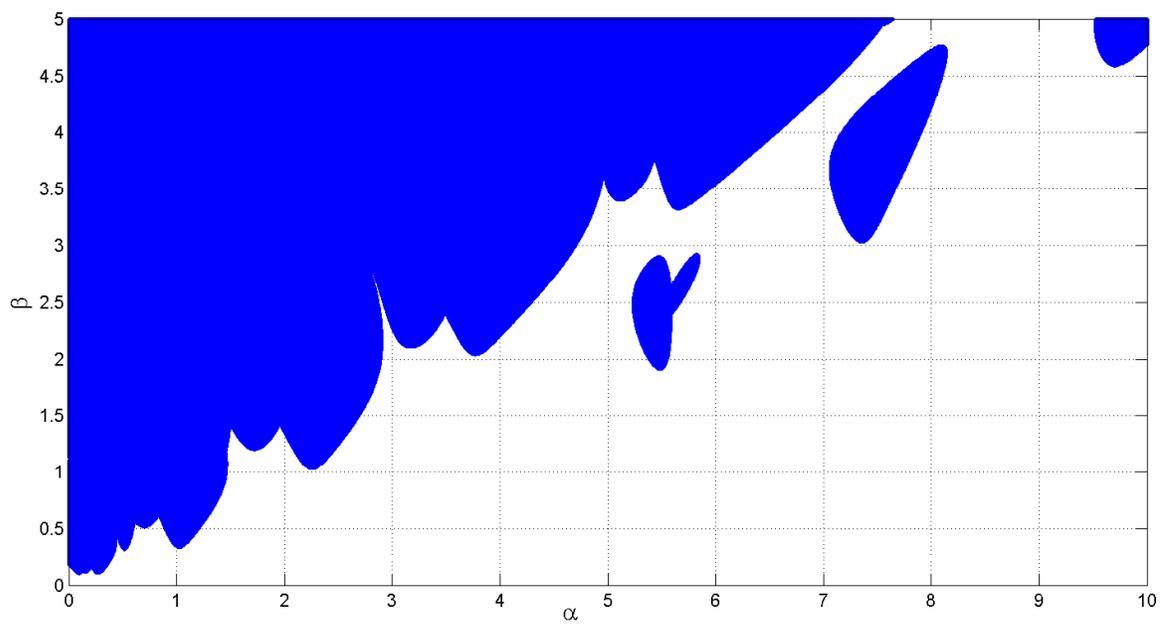
$$\omega_2 = \sqrt{d^2 + 2\gamma_1 - 2\alpha(a_1 + a_4) - 2\beta(b_1 + b_4)}$$

$$\delta_{11} = \gamma_1 + \alpha(a_1 - a_4) + \beta(b_1 - b_4)$$

<sup>2</sup>Mathematica tiene una instrucción para el cálculo de la matriz exponencial



(a) Sin disipación



(b) Con disipación

Figura 4.1: Diagrama de Estabilidad para la ecuación de Meissner con dos grados de libertad

$$\delta_{12} = -\gamma_1 + \alpha(a_1 - a_4) + \beta(b_1 - b_4)$$

$$\delta_{13} = \gamma_1 + \alpha(a_1 + a_4) + \beta(b_1 + b_4)$$

$$\delta_{14} = -\gamma_1 + \alpha(a_1 + a_4) + \beta(b_1 + b_4)$$

$$c_{11} = \alpha a_2 + \beta b_2, c_{12} = \alpha a_1 + \beta b_1, c_{13} = \alpha a_4 + \beta b_4$$

$$\Delta_{11} = 2c_{11}^2 + c_{12}\delta_{12}$$

$$\Delta_{12} = 2c_{11}^2 + c_{12}\delta_{11}$$

$$\Delta_{13} = 2c_{11}^2 - c_{13}\delta_{11}$$

$$\Delta_{14} = 2c_{11}^2 - c_{13}\delta_{12}$$

$$Ch_{\omega_1} = \cosh\left(\frac{\pi\omega_1}{2}\right), Ch_{\omega_2} = \cosh\left(\frac{\pi\omega_2}{2}\right)$$

$$Sh_{\omega_1} = \sinh\left(\frac{\pi\omega_1}{2}\right), Sh_{\omega_2} = \sinh\left(\frac{\pi\omega_2}{2}\right)$$

$$Kc_{11} = Ch_{\omega_1} - Ch_{\omega_2}, Ks_{11} = \frac{Sh_{\omega_1}}{\omega_1} - \frac{Sh_{\omega_2}}{2};$$

$$K_{11} = Ch_{\omega_1} + d\frac{Sh_{\omega_1}}{\omega_1}, K_{12} = Ch_{\omega_2} + d\frac{Sh_{\omega_2}}{\omega_2}$$

$$K_{13} = \frac{Sh_{\omega_1}\delta_{11}}{\omega_1} - \frac{Sh_{\omega_2}\delta_{12}}{\omega_2}, K_{14} = d\frac{Sh_{\omega_1}}{\omega_1} + Ch_{\omega_1}$$

$$K_{15} = Ch_{\omega_2} + d\frac{Sh_{\omega_2}}{\omega_2}, K_{16} = \frac{Sh_{\omega_2}\delta_{11}}{\omega_2} - \frac{Sh_{\omega_1}\delta_{12}}{\omega_1}$$

$$K_{17} = \frac{Sh_{\omega_2}\Delta_{11}}{\omega_2} - \frac{Sh_{\omega_1}\Delta_{12}}{\omega_1}, K_{18} = \frac{Sh_{\omega_2}\delta_{14}}{\omega_2} - \frac{Sh_{\omega_1}\delta_{13}}{\omega_1}$$

$$K_{19} = Ch_{\omega_1} - d\frac{Sh_{\omega_1}}{\omega_1}, K_{10} = Ch_{\omega_2} - d\frac{Sh_{\omega_2}}{\omega_2}$$

$$K_{11} = \frac{Sh_{\omega_2}\Delta_{13}}{\omega_2} - \frac{Sh_{\omega_1}\Delta_{14}}{\omega_1}$$

y para calcular  $\Phi_2$  se debe cambiar  $\beta = -\beta$  en el cálculo de  $\Phi_1$ .

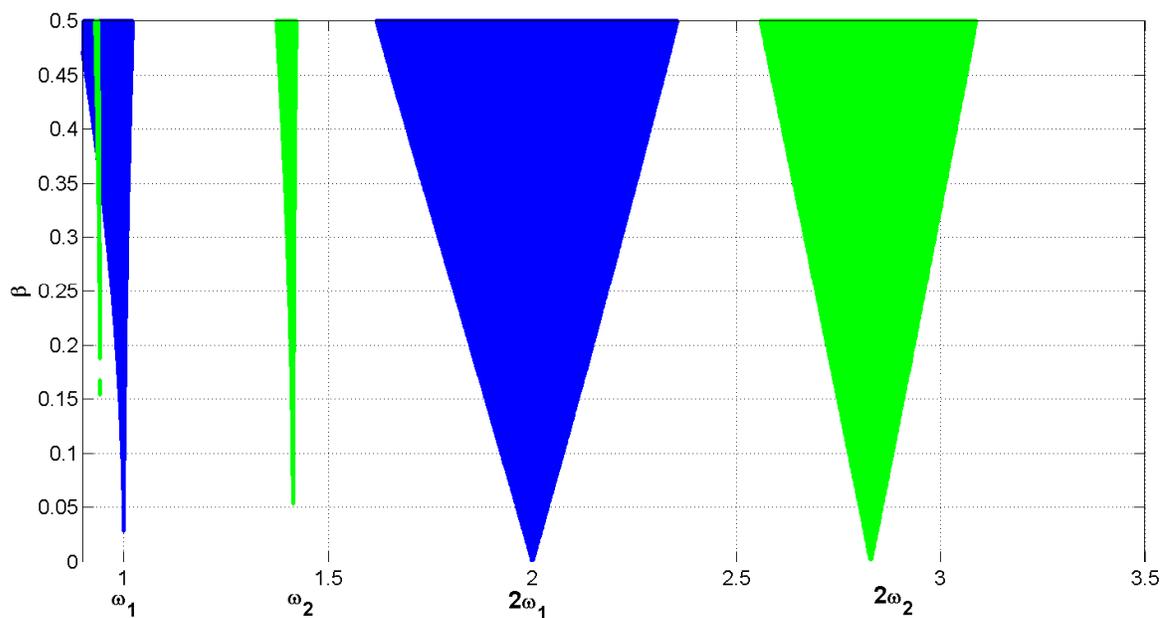
Con este resultado no es necesario usar métodos numéricos para construir la matriz de monodromía  $M$  lo que nos permite ahorrar tiempo y recursos en cómputo. A continuación mostramos dos graficas la primera Fig. 4.1 (a) se muestran de las lenguas de Arnold para (4.15) con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

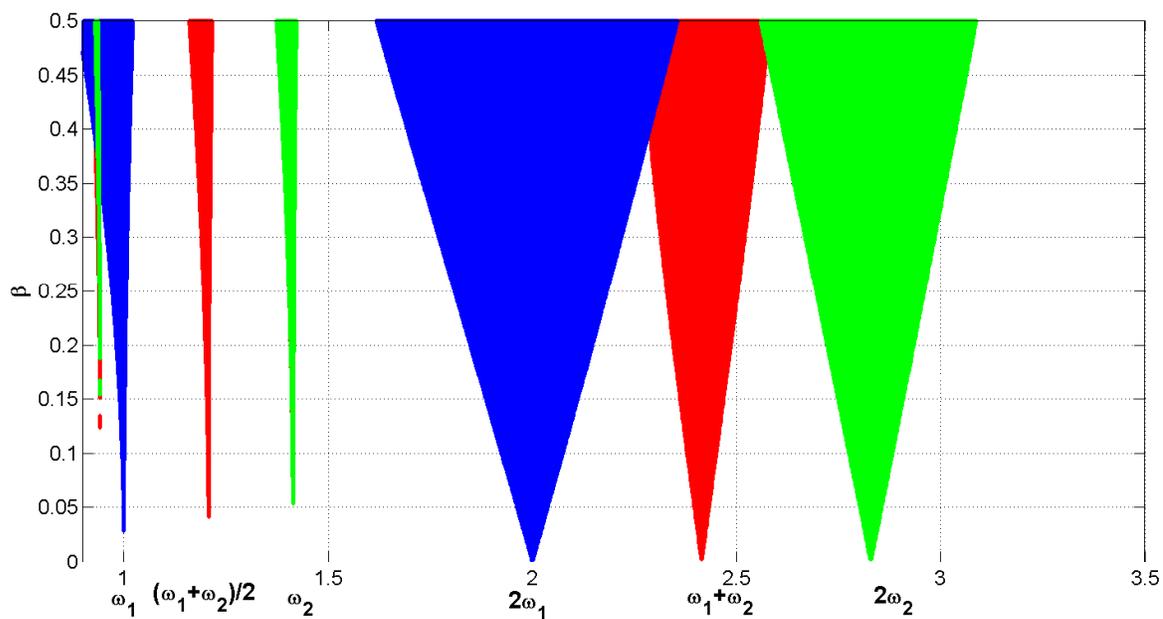
y en la segunda Fig. 4.1 (b) se muestran las lenguas para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

la diferencia entre (a) y (b) en la Fig. 4.1, es el factor de disipación  $D$ . Una característica importante cuando hay presencia del término disipante, la matriz  $D$ , entonces solo algunos puntos inestables en (4.17) se vuelven estables en (4.18), es decir que a diferencia de una ecuación lineal invariante en el tiempo en presencia de un factor disipante no es suficiente para estabilizar la ecuación de Hill.



(a) Desacopladas



(b) Acopladas

Figura 4.2: Diagrama de Estabilidad para dos ecuaciones de Mathieu con dos grados de libertad

### 4.2.2. Ecuación de Mathieu con dos grados de libertad

Sea

$$\ddot{x} + (A + \beta B \cos(\omega t))x = 0 \quad (4.19)$$

con  $A^T = A$ ,  $B = B^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Note que los parámetros son ahora  $(\omega, \beta)$ . Si calculamos las lenguas de Arnold con los parámetros  $(\omega, \beta)$  para (4.19) con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

observamos que en realidad tenemos dos ecuaciones de una dimensión

$$\ddot{x}_1 + (1 + \beta \cos(t))x_1 = 0 \quad (4.21)$$

y

$$\ddot{x}_2 + (2 + \beta \cos(t))x_2 = 0 \quad (4.22)$$

por la relación, enunciada en los preliminares:

$$\omega = \frac{2\sqrt{\alpha}}{k} \quad (4.23)$$

con  $k \in \mathbb{N}^+$  donde nacen las lenguas sobre el eje  $\omega$ , entonces las lenguas de Arnold asociadas a (4.21) nacen (se observa que  $\alpha = 1$ ) en el eje  $\omega$  en  $\omega = 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \dots$  y para (4.22) nacen en (se observa que  $\alpha = 2$ )  $\omega = 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \dots$ , entonces cuando tanto  $A$  como  $B$  son diagonales no hay interacción entre (4.21) y (4.22) o decimos que están **desacopladas**, si definimos a  $\omega_1^2 = \alpha = 1$  y a  $\omega_2^2 = \alpha = 2$  entonces podemos entonces en la Fig. 4.2 a) podemos ver las lenguas de Arnold para (4.19) con (4.20), es decir tenemos unas lenguas asociadas a (4.21) y otras a (4.22).

Podemos observar que las zonas de inestabilidad se *sobreponen* o se *traslapan* unas con otras, sin embargo, para el caso de una dimensión nunca se sobreponen, siempre se presentan en intervalos de estabilidad e inestabilidad para cualquier valor de  $\beta$  fijo  $\beta = \beta_0$ .

Si  $A$  o  $B$  no son diagonales, entonces existe interacción entre los subsistemas, es decir están **acoplados**, nuevamente el valor donde nace las lenguas de Arnold dependen de los valores de la matriz  $A$ , definiendo

$$\sigma(A) = \{\omega_1^2, \omega_2^2\}$$

entonces las lenguas nacen sobre el eje  $\omega$  en  $\frac{2\omega_j}{k}$ ,  $j = 1, 2$ ; las cuales corresponden a cada uno de los subsistemas, además debido al acoplamiento aparecen sobre el eje  $\omega$  en

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{k} \quad (4.24)$$

o bien en

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{k} \quad (4.25)$$

para  $k \in \mathbb{N}^+$ , las cuales llamaremos **lenguas de combinación de suma** (4.24) o **de resta** (4.25) [18, 56]. Sea (4.19) con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces en la Fig. 4.2 b) se puede apreciar como aparecen las lenguas de combinación en la relación (4.24)  $\omega = \left\{ 1 + \sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{3}, \dots \right\}$ .

### 4.2.3. Ecuación de Mathieu con tres grados de libertad

El método numérico presentado anteriormente puede ser aplicado para el cálculo de las zonas de estabilidad de la ecuación

$$\ddot{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} + \left( \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cos(t) \right) x = 0 \quad (4.26)$$

es decir, una ecuación de Mathieu con tres grados de libertad o tres ecuaciones de Mathieu acopladas, en la Fig. 4.3 a) podemos observar las lenguas de Arnold para (4.26) y en Fig. 4.3 b) se muestra el diagrama de estabilidad de la ecuación:

$$\ddot{x} + \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \dot{x} + \left( \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cos(t) \right) x = 0 \quad (4.27)$$

esto es, una ecuación de Mathieu con disipación.

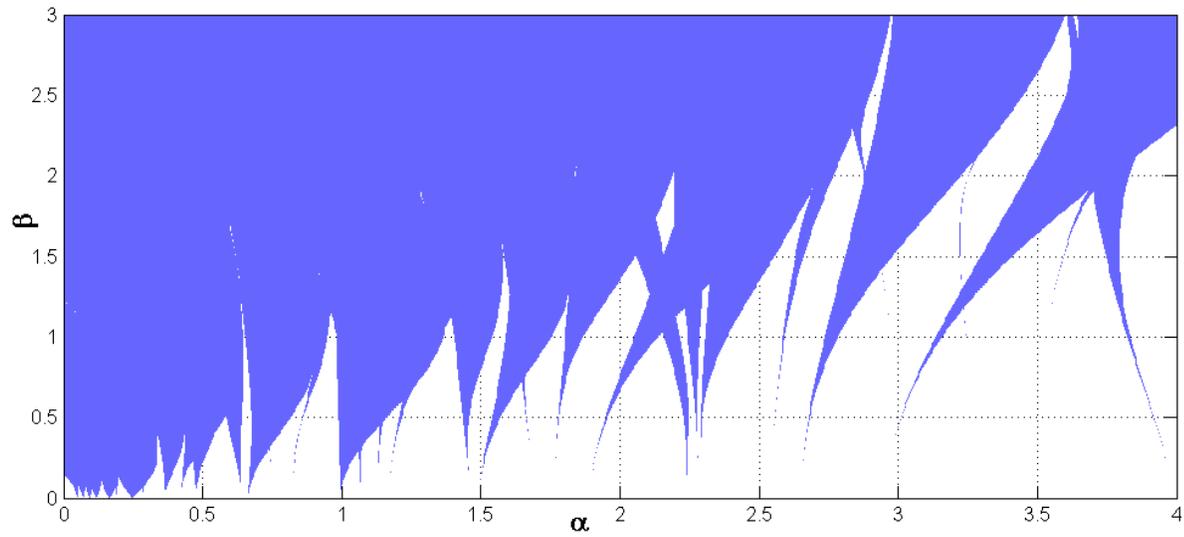
## 4.3. La ecuación Vectorial de Hill como un sistema $\gamma$ -Hamiltoniano

Sea la ecuación vectorial de Hill

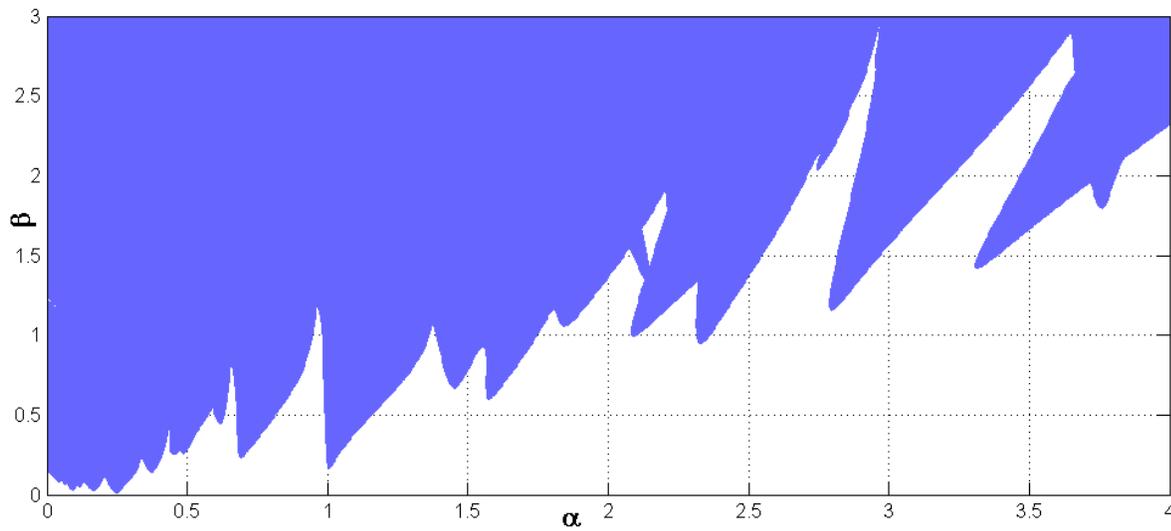
$$\ddot{x} + D\dot{x} + \underbrace{[\alpha K_0 + \beta B p(t)]}_{S=S^T} x = 0 \quad p(t) = p(t + \Omega) \quad (4.28)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $D = D^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$  y  $d_i \geq 0$ ,  $K_0 = K_0^T$ ,  $B = B^T$ , haciendo el cambio de variable  $x = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & \dot{x} \end{bmatrix}^T$ , entonces:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -S(t) & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$



(a) Sin disipación



(b) Con disipación

Figura 4.3: Diagrama de Estabilidad para la ecuación de Mathieu con tres grados de libertad

escribiendo la ecuación (4.29) como:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = J \left( \begin{bmatrix} S(t) & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} J \right) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

si

$$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

entonces (4.29) se puede escribir como un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano

$$\dot{y} = J[H(t) + \gamma J]y$$

en consecuencia, todo el análisis hecho en el capítulo anterior es válido, fundamentalmente el hecho que la matriz de **monodromía**  $M$  de (4.29), es una matriz  $\mu$ -Simpléctica.

### 4.3.1. Ecuación vectorial de Hill con dos grados de libertad

Sea la ecuación (4.28) con dos grados de libertad:

$$\ddot{x} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \left( \underbrace{\alpha \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}}_{A=A^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}}_{B=B^T} p(t) \right) x = 0 \quad (4.31)$$

$d \geq 0$ , entonces, calculamos su matriz de monodromía con los métodos numéricos presentados anteriormente, después construimos su polinomio característico

$$P_M(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + a\mu\lambda + \mu^2 \quad (4.32)$$

con las siguientes formulas:

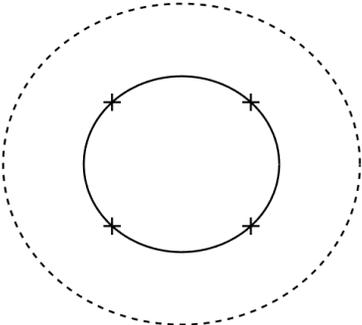
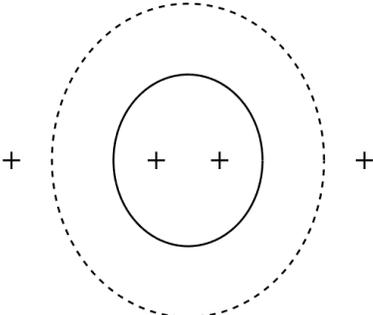
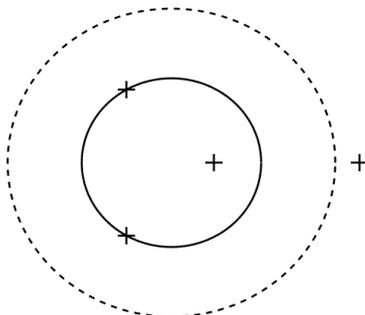
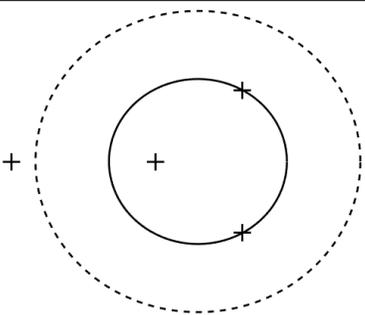
$$\begin{aligned} a &= -tr(M) \\ b &= a^2 - tr(M) \end{aligned} \quad (4.33)$$

y recordando que  $\mu$  lo podemos calcular conociendo el valor de  $\gamma$

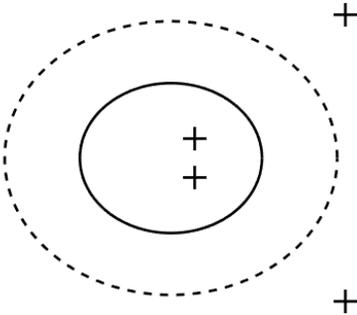
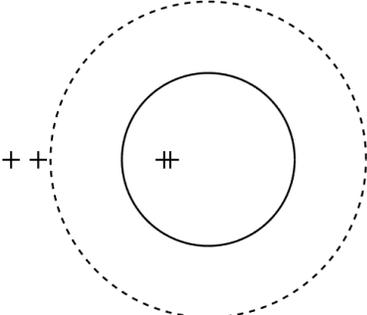
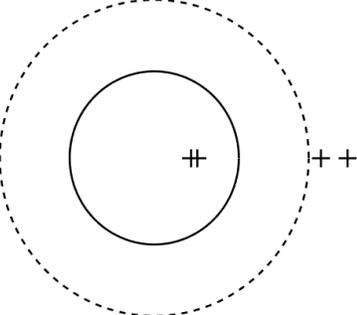
$$\mu = e^{2\gamma T} \quad (4.34)$$

donde  $\gamma = -2d$ , o bien:

$$\det(M) = \mu^2 \longrightarrow \mu = \sqrt[2]{\det(M)}$$

| Color  | Zona   |  |
|--------|--|--|
| Blanco | <b>Estable</b>   |    |
| Cyan   | <b>Inestable:</b> en la frontera los multiplicadores abandonan el círculo unitario en +1 o -1.   |    |
| Rojo   | Inestable: en la frontera un multiplicador abandona el círculo unitario en +1. Lenguas de correspondientes a un subsistema nacen en $\frac{2\omega_1}{k}$ .        |  |
| Azul   | <b>Inestable:</b> en la frontera un multiplicador abandona el círculo unitario en -1. Lenguas de correspondientes a un subsistema nacen en $\frac{2\omega_2}{k}$ . |  |

Cuadro 4.1: Posición de los multiplicadores.

|          |  |  |
|----------|--|--|
| Verde    | <p><b>Inestable:</b> en la frontera los multiplicadores abandonan el círculo unitario en puntos diferentes a <math>+1</math> o <math>-1</math>. Lengua de combinación entre los dos subsistemas nacen en <math>\frac{\omega_1 \pm \omega_2}{k}</math>.</p> |    |
| Amarillo | <p><b>Inestable:</b> en la frontera dos multiplicadores abandonan el círculo unitario en <math>-1</math>.</p>  |   |
| Magenta  | <p><b>Inestable:</b> en la frontera dos multiplicadores abandonan el círculo unitario en <math>+1</math>.</p>  |  |

Cuadro 4.2: Posición de los multiplicadores (Continuación).

**Observación 4.3.** Por el teorema (3.6), del capítulo anterior, la ecuación (4.31) es estable si se satisfacen las desigualdades:

$$b \geq -(1 + \mu)a - (1 + \mu^2) \quad (4.35)$$

$$b \geq (1 + \mu)a - (1 + \mu^2) \quad (4.36)$$

$$b \leq \frac{\mu^4 + 2\mu^3 + 2\mu^2 + a^2\mu + 2\mu + 1}{(1 + \mu)^2} \quad (4.37)$$

por lo tanto, para determinar la estabilidad de la ecuación (4.31) **no es necesario calcular los valores característicos**, esto es de suma importancia para reducir el tiempo de cómputo y la precisión en el cálculo de las lenguas de Arnold<sup>3</sup>. Además, podemos saber la posición de los multiplicadores respecto al círculo unitario, con lo cual es posible conocer el tipo de región inestable, ya sea una lengua de Arnold asociada a una frecuencia de un subsistema (4.23) o alguna lengua de combinación o acoplamiento: (4.24) o (4.25), ver Fig.4.5.

Gracias a las desigualdades es posible conocer la posición de los multiplicadores característicos en cada región inestable, como lo describimos en el capítulo anterior, en la Fig.4.4 la zona en color *blanco* corresponde a regiones asintóticamente estables y las zonas de *colores* a regiones inestables. En la frontera de la región en color rojo (4.35), existe un multiplicador  $\lambda = 1$ , y una solución  $\Omega$ -periódica, en la frontera de la región de color azul (4.36) hay un multiplicador con  $\lambda = -1$ , por tanto, una solución  $2\Omega$ -periódica; en estos dos casos corresponden a las frecuencias (4.23) de cada subsistema cuando  $\beta = 0$ , y podemos asociarlos a las lenguas de Arnold de color rojo y azul respectivamente en la Fig.4.5. En la región descrita por la desigualdad

$$b > \frac{\mu^4 + 2\mu^3 + 2\mu^2 + a^2\mu + 2\mu + 1}{(1 + \mu)^2}$$

color verde en la Fig.4.4, en la frontera dos multiplicadores abandonan el círculo unitario en algún punto diferente a  $\lambda = \pm 1$  (hay dos pares complejos conjugados), y están asociadas a las lenguas de color verde en la Fig.4.5 y corresponden a las lenguas de combinación,  $\frac{\omega_1 \pm \omega_2}{k}$  cuando  $\beta = 0$ . Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

entonces en la Fig.4.5 se muestran dos diagramas de estabilidad con disipación, uno para la ecuación de Meissner y otra la ecuación de Mathieu. Lo anterior se puede resumir en el cuadro 4.1.

<sup>3</sup>Pues como se mencionó, el cómputo o el cálculo de los valores característicos de una matriz consume gran cantidad de recursos computacionales, aún con el algoritmo presentado, *la modificación del power method*, siempre será más eficiente hacer el cálculo de los coeficientes (4.33) y evaluar las desigualdades (4.35), (4.36), (4.37) que cualquier otro método, aunque por supuesto sigue siendo necesario construir la matriz de monodromía ya sea discretizando o integrando la ecuación.

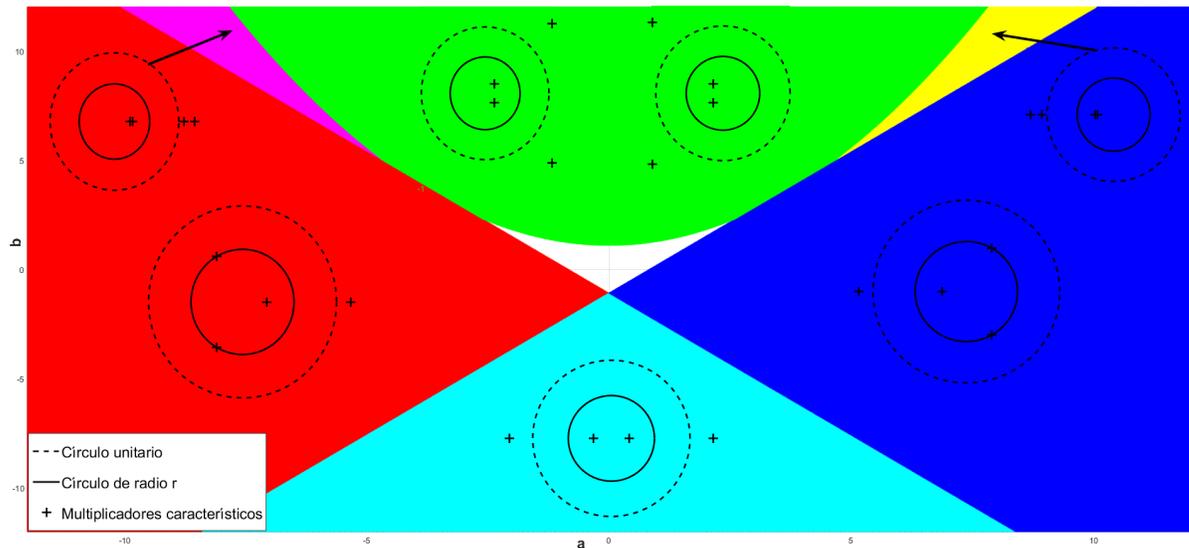


Figura 4.4: Posición de los multiplicadores característicos, la región en color blanco corresponde una configuración estable, las regiones de colores a una inestable

Con lo mencionado anteriormente y observando los diagramas de estabilidad podemos concluir algunas diferencias entre la ecuación de Hill y la ecuación vectorial de Hill (4.31):

**i)** En la ecuación de Hill los multiplicadores solo pueden abandonar el círculo unitario cuando  $\lambda = \pm 1$ , con dos grados de libertad existen otros puntos donde los multiplicadores abandonan el círculo unitario.

**ii)** Como consecuencia de **i)**, en las fronteras de estabilidad en la ecuación de Hill tenemos al menos una solución  $\Omega$  periódica o  $2\Omega$ -periódica. En la ecuación (4.31) en las fronteras de estabilidad puede haber soluciones: **a)**  $\Omega$  periódicas, **b)**  $2\Omega$  periódicas, **c)**  $\Omega$  y  $2\Omega$  periódicas y **d)** soluciones periódicas no conmensurables con  $\Omega$ .

**iii)** En la ecuación de Hill las lenguas de Arnold nunca se traslapan, para cualquier  $\beta = \beta_0$  fija siempre existen intervalos de estabilidad e inestabilidad sucesivamente<sup>4</sup>. En la ecuación de Hill con dos grados de libertad (4.31), las lenguas de Arnold se sobreponen o se traslapan.

<sup>4</sup>Por el teorema de Hochstadt mencionado en los preliminares [44, 29]

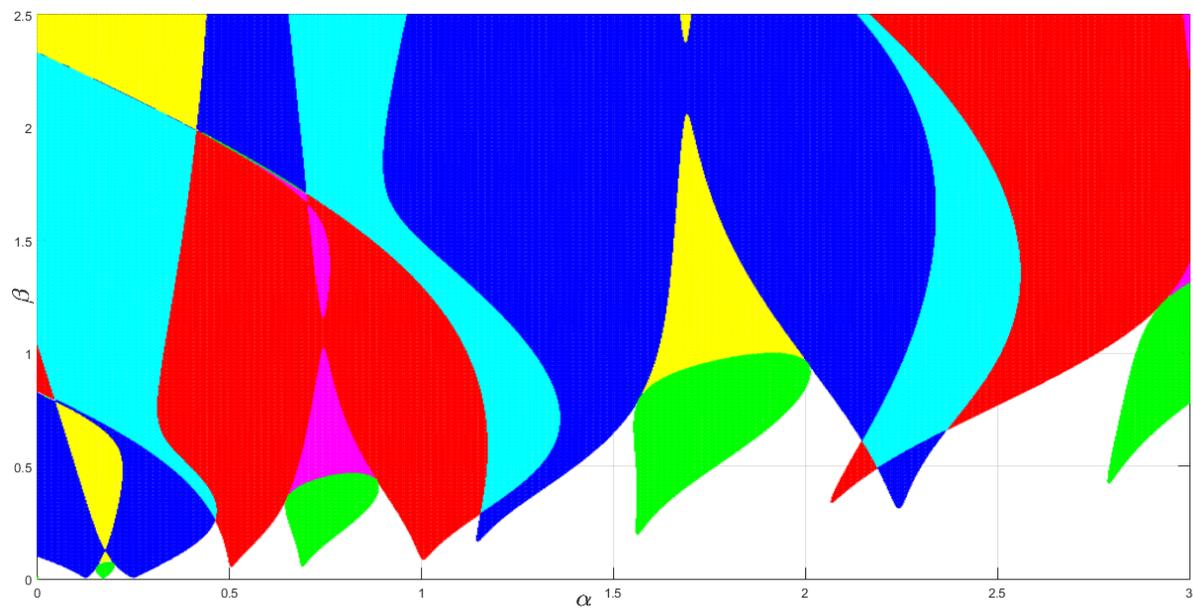
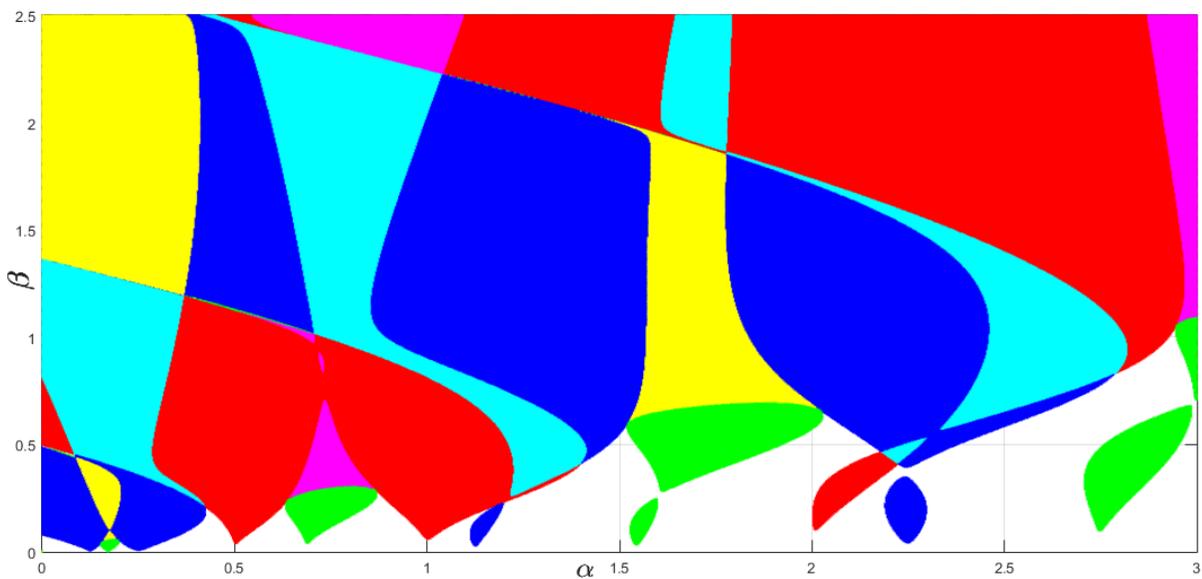
(a) Mathieu,  $p(t) = \cos(t)$  y  $d = 0.01$ (b) Meissner,  $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$  y  $d = 0.01$ 

Figura 4.5: Lenguas de Arnold para la ecuación vectorial de Hill (4.31) y (4.38)

# Atenuación de Vibraciones

---

Como se mencionó en el capítulo 4 diversos sistemas son modelados con la **ecuación vectorial de Hill** con dos grados de libertad, por lo tanto, estos sistemas presentan **resonancia paramétrica**, zonas de inestabilidad, es por ello que parte de la literatura relacionada con esta clase de sistemas, en general, hacen un análisis sobre su estabilidad [52, 53, 55] y de como evitarla.

Por otro lado, la **excitación paramétrica** puede ser usada como una señal de **control en lazo abierto** para esta clase de sistemas [11, 64]. Además, en un sistema lineal de al menos dos grados de libertad asintóticamente estable es posible encontrar algunos parámetros donde su respuesta es atenuada mediante el uso de una señal periódica como control en lazo abierto. Este fenómeno fue descubierto y reportado por primera vez por A. Tondl, a través de métodos asintóticos, perturbaciones y promediación, A. Tondl mostró que cerca de las frecuencias

$$\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{n} \quad (5.1)$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , es posible suprimir o atenuar las vibraciones [10]. Dicho de otro modo, se da un uso positivo a la excitación paramétrica, de forma más general podemos decir, que al introducir **excitación paramétrica** en algún elemento que pueda almacenar energía en un sistema de al menos dos grados libertad es posible encontrar algunos parámetros y frecuencias, llamadas **frecuencias de anti-resonancia** (5.1), donde el amortiguamiento existente se incrementa, en otras palabras, el efecto de la excitación paramétrica es amplificar la disipación que existe en el sistema sin excitación [10, 65]

Años más tarde F. Donhal desarrolló un método para la atenuación o eliminación de vibraciones en un sistema mecánico [16], mediante la construcción de un **resorte con elasticidad variable periódicamente** con respecto al tiempo, es decir, la **excitación paramétrica** es introducida en algún resorte del sistema [66, 67, 68, 69]. Por supuesto que la primera pregunta que surge, es, si es posible construir este actuador, un resorte con elasticidad variable, la respuesta es sí. La primera propuesta esta reportada en [70], el efecto piezoeléctrico de ciertos materiales pueden inducir parámetros que cambien periódicamente [71], por lo tanto no es despreciable considerar construir un

actuador con este material. Más recientemente se construyó un actuador con estas características [72, 73], además, en principio hay sistemas donde se puede variar la masa de forma periódica [65]. Por lo tanto, es posible construir un actuador con estas características.

Los resultados obtenidos en [66, 67, 68, 69] fueron obtenidos a través de la promediación y perturbaciones, por lo tanto solo son válidos para parámetros pequeños, a diferencia de los trabajos anteriores, en este capítulo a través la teoría de Floquet y usando las propiedades  $\mu$ -Simplécticas de la matriz de monodromía, mostramos un método para atenuar vibraciones, estos resultados son válidos para parámetros pequeños o grandes. Por supuesto para usar la Teoría de Floquet es necesario conocer la solución del sistema, que siempre lo podemos hacer por métodos numéricos, por lo que el método presentado podemos decir que es un **método semi-analítico**.

## 5.1. Introducción

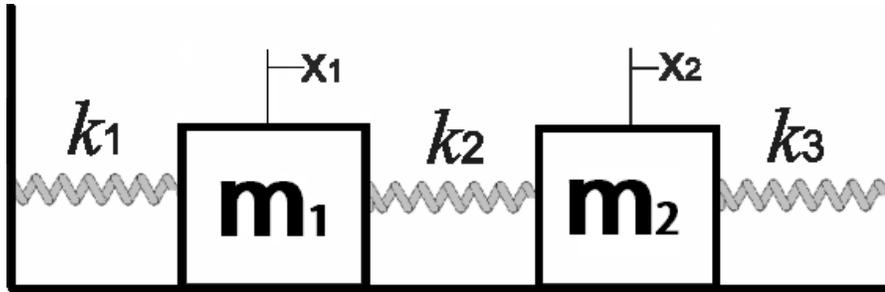


Figura 5.1: Sistema Mecánico

En un sistema mecánico modelado por:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0 \quad (5.2)$$

sus respuestas son siempre asintóticamente estable si  $D > 0$ , ver Fig. 5.1, por otro lado si podemos implementar un actuador tal que:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + K(t)x = 0$$

con  $K(t) = K(t + \Omega)$  esto es:

$$k_i(t) = k_{i_a} + k_{i_b}p(t)$$

con  $k_{i_a} > 0$ ,  $|k_{i_a}| > |k_{i_b}|$  para  $i = 1, 2, 3$ . donde  $p(t) = p(t + \Omega)$  [73, 71, 72]. Por ejemplo, si  $m_1 = 0.5$ ,  $m_2 = 1$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3(t) = 2 + \cos(t)$ , es decir  $k_{3_a} = 2$  y  $k_{3_b} = 1$ , entonces (5.2) se puede

escribir como una ecuación vectorial de Hill amortiguada:

$$\ddot{x} + D\dot{x} + \left( \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_1}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_{3a}+k_2}{m_2} \end{bmatrix}}_A + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{3b} \end{bmatrix}}_B \cos(t) \right) x = 0 \quad (5.3)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 3.1 & -0.1 \\ -0.05 & 1.05 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

por supuesto si  $\beta = 0$  la ecuación (5.3) describe el sistema lineal invariante en el tiempo (5.2). Calculando el diagrama de estabilidad para la ecuación (5.3) con (5.4) se puede observar en la Fig. 5.2 a). Aquí debemos hacer una mención importante ¿para qué agregar a un sistema lineal invariante en el tiempo asintóticamente estable parámetros que pueden causar inestabilidad?

**Observación 5.1.** Al agregar excitación paramétrica a (5.2) introducimos puntos de operación inestables  $(\alpha_0, \beta_0)$ , pero atenúamos la respuesta para algunos  $(\alpha_1, \beta_1)$  sin medir el estado lo cual siempre es costoso, es decir tenemos un control en lazo abierto.

Si se realiza una simulación en el punto  $(\alpha_0, \beta_0) = (2, 3)$  con condiciones iniciales  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$  podemos observar en la figura Fig. 5.2 b) como la respuesta del sistema con excitación paramétrica (5.3) esta más atenuada que el sistema sin excitación (5.2). Para mostrar cuánto se atenúa la señal podemos suponer que la respuesta en general es quasi-periódica de la forma

$$x(t) = Ae^{-\eta_1 t} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + Be^{-\eta_2 t} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

si consideramos el término más "energético"[74], es decir, el correspondiente

$$\max\{|A|, |B|\}$$

entonces la respuesta será de la forma:

$$x(t) = e^{-\eta t} \sin(\omega t + \phi) \quad (5.5)$$

de la simulación Fig. 5.2 b) podemos estimar mediante una regresión lineal:

$$\bar{x}(t) = e^{-\eta t}$$

el factor de atenuación  $\eta$ , es decir solo estimamos a la parte envolvente de las respuesta (5.5), en tal caso

$$\begin{aligned} \eta &= 0.0058 && \text{con resonancia} \\ \eta &= 0.0048 && \text{sin resonancia} \end{aligned}$$

por lo tanto es posible aumentar el factor de atenuación en un 18% gracias a la **excitación paramétrica**, como se observa en al Fig. 5.2 c). Entonces, nuestro objetivo es encontrar todos los parámetros  $(\alpha_0, \beta_0)$  donde la respuesta del sistema sea atenuada con excitación paramétrica.

Proponemos dos soluciones al problema de estimar parámetros  $(\alpha_0, \beta_0)$  donde podemos atenuar la respuesta del sistema, la primera es mediante el computo de los exponentes de Lyapunov y la segunda es ubicando la posición multiplicadores característicos dentro del circulo unitario, para facilitar este último cálculo usamos la simetría de los multiplicadores característicos de la matriz de monodromía por lo que es necesario poder escribir el sistema como un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano.

## 5.2. Transformaciones de Sistemas $\gamma$ -Hamiltonianos

Recordando, un sistema lineal, es  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico si lo podemos escribir como:

$$\dot{x} = J[H(t) + \gamma J]x \quad (5.6)$$

con  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $H(t) = H(t + \Omega)$ ,  $H^T(t) = H(t)$ .

### 5.2.1. Sistema 1

Sea

$$M\ddot{y} + D\dot{y} + K(t)y = 0 \quad (5.7)$$

$y \in \mathbb{R}^n$ ,  $M, D, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con  $M = M^T > 0$  una matriz constante y diagonal  $M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ ,  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots\}$  y  $K(t) = K^T(t)$ , en ese caso (5.7) siempre se puede escribir como un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico (5.6). Haciendo el cambio de variable

$$x_1 = y \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{y}$$

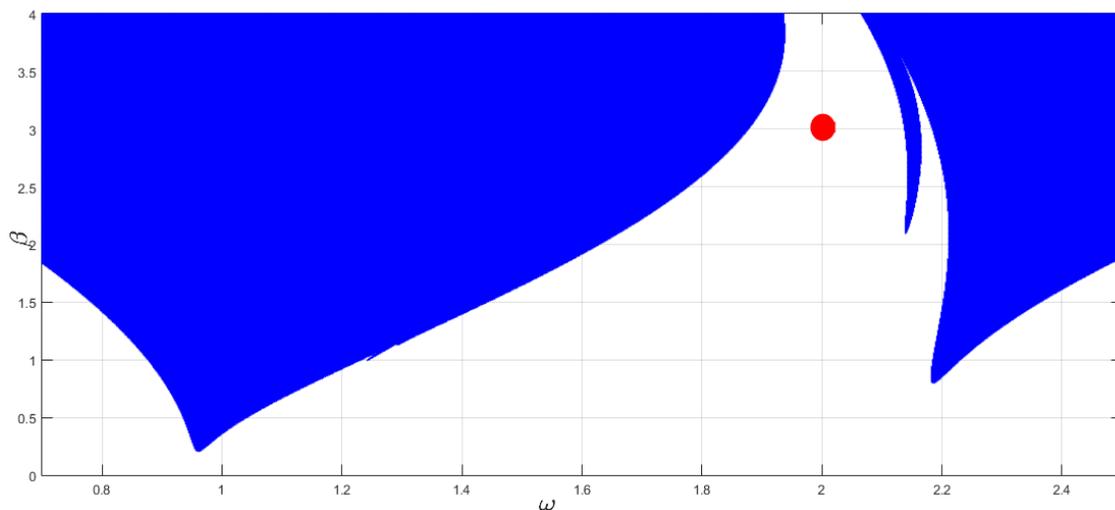
$$x_2 = M\dot{y} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = M\ddot{y} = -D\dot{y} - K(t)y$$

podemos reescribir (5.7), como un sistema de primer orden:

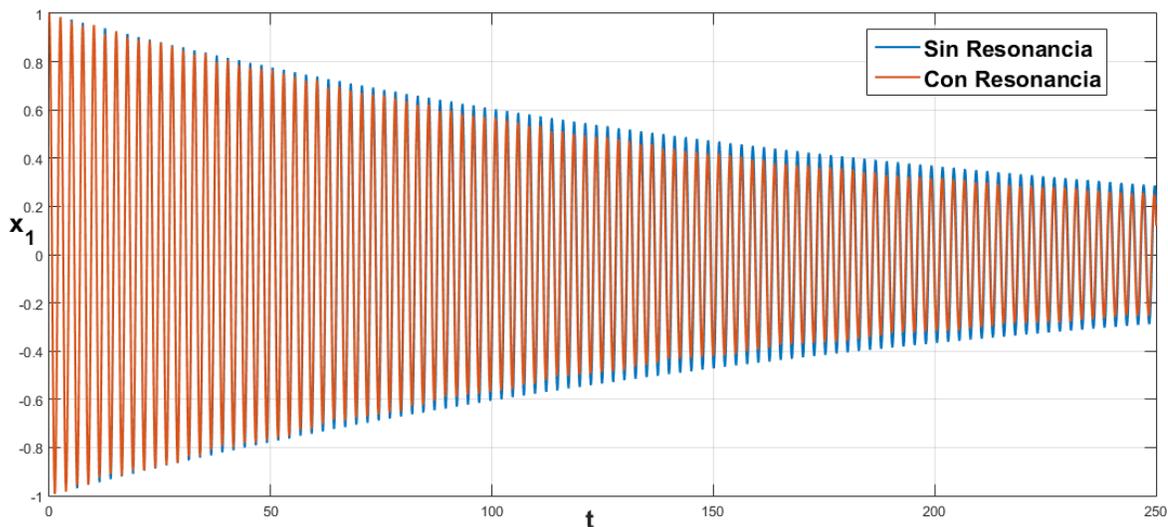
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ -K(t) & -DM^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ M\dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ -K(t) & -DM^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

y factorizando:

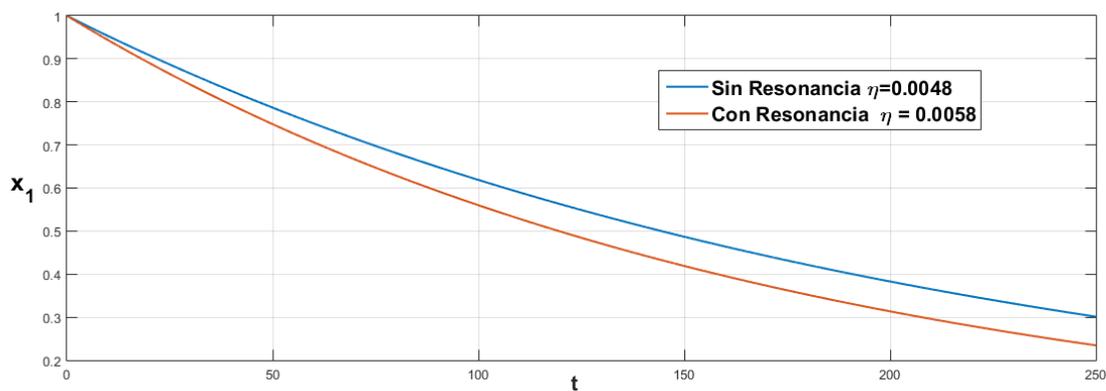
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = J \left( \begin{bmatrix} K(t) & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} DM^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



(a) Diagrama de Estabilidad



(b) Señales de Respuesta



(c) Señal envolvente

Figura 5.2: Simulación de la ecuación (5.3)(5.4) con  $\alpha = 2$  y  $\beta = 3$

dado que  $D$  y  $M$  son diagonales  $\Delta = DM^{-1} = \text{diag} \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \}$  es diagonal, donde  $\delta_i = \frac{d_i}{m_i}$ , en tal caso

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = J \left( \underbrace{\begin{bmatrix} K(t) & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}}_{H(t)} + \gamma J \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

con

$$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i$$

finalmente dado que  $M = M^T$  y  $K(t) = K^T(t)$  entonces  $H(t) = H^T(t)$ , por lo tanto, el sistema (5.7) es posible escribirlo como un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico (5.6).

### 5.2.2. Sistema 2

Sea

$$\frac{d}{dt} \left[ M(t) \frac{dy}{dt} \right] + 2D\dot{y} + K(t)y = 0 \quad (5.8)$$

con  $y(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $M(t) = M^T(t) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrix diagonal  $M(t) = \{m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)\}$ ,  $K(t) = K^T(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , si

$$D = D^S + D^A = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n) + D^A$$

con  $d_i > 0$  y donde

$$(D^A)^T = -D^A$$

en ese caso particular (5.8) siempre se puede escribir como un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico (5.6), además notamos que la parte anti-simétrica  $D^A$  no contribuye a la disipación del sistema, únicamente la parte simétrica  $D^S$  contribuye a disipar energía en el sistema. Haciendo el cambio de variable

$$x_1 = y \quad \rightarrow \quad x_1 = M^{-1}(t)x_2 - M^{-1}(t)(D^A + D^S)x_1$$

$$x_2 = M(t)\dot{y} + (D^A + D^S)y \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{d}{dt} [M(t)\dot{y}] + (D^A + D^S)\dot{y}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d}{dt} [M(t)\dot{y}] + (D^A + D^S)\dot{y} = - (D^A + D^S)\dot{y} - K(t)y$$

podemos reescribir (5.8), como un sistema de primer orden:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -M^{-1}(t)(D^A + D^S) & M^{-1}(t) \\ -K(t) + (D^A + D^S)M^{-1}(t)(D^A + D^S) & (D^A + D^S)M^{-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ M(t)\dot{y} + (D^A + D^S)y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -M^{-1}(t)(D^A + D^S) & M^{-1}(t) \\ -K(t) + (D^A + D^S)M^{-1}(t)(D^A + D^S) & -(D^A + D^S)M^{-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y factorizando:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= J \left( \begin{bmatrix} K(t) - (D^A + D^S) M^{-1}(t) (D^A + D^S) & (D^A + D^S) M^{-1}(t) \\ -M^{-1}(t) (D^A + D^S) & M^{-1}(t) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= J \left( \begin{bmatrix} K(t) - D^A M^{-1}(t) D^A & D^A M^{-1}(t) \\ -M^{-1}(t) D^A & M^{-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D^S M^{-1}(t) & D^S M^{-1}(t) D^S \\ 0 & M^{-1}(t) D^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dado que  $D^S$  y  $M$  son diagonales entonces  $D^S M^{-1}$ ,  $D^S M^{-1}(t) D^S$ ,  $M^{-1}(t) D^S$  son diagonales también. En este caso es posible escribirlo como un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano siempre y cuando se haga **una aproximación, un promedio** de las matrices  $D^S M^{-1}$ ,  $D^S M^{-1}(t) D^S$ ,  $M^{-1}(t) D^S$ , diagonales.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = J \left( \underbrace{\begin{bmatrix} K(t) - D^A M^{-1}(t) D^A & D^A M^{-1}(t) \\ -M^{-1}(t) D^A & M^{-1}(t) \end{bmatrix}}_{H(t)} + \gamma J \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

finalmente dado que  $M = M^T$ ,  $K(t) = K^T(t)$  y  $(D^A)^T = -D^A$ , entonces  $H(t) = H^T(t)$ , por lo tanto, el sistema (5.8) es posible escribirlo como un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico (5.6).

**Observación 5.2.** Importante notar que la suposición de  $D^S$  diagonal es aún muy **restrictiva** y por supuesto la **aproximación** de  $\gamma$  también es un **condición restrictiva**, por lo tanto sería deseable encontrar alguna transformación como lo indica la siguiente sección.

### 5.2.3. Sistema 3

#### 5.2.3.1. Diagonalización simultánea

**Teorema 5.1.** Sea  $M = M^T > 0$  y  $D = D^T$  matrices constantes  $M, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces existe una transformación  $T$  tal que:

$$T^T M T = I_n$$

$$T^T D T = \tilde{D} = \text{Diag} \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

$$\sigma(M^{-1} D) = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

Un esbozo de prueba es construyendo la transformación, escribiendo

$$Dv = \lambda Mv \tag{5.9}$$

con  $v \in \mathbb{R}^n$ , entonces decimos que  $\lambda$  y  $v$  son un valor y vector característico respectivamente de la ecuación (5.9). Por otro lado dado que  $M > 0 \rightarrow M^{-1} > 0$  por lo tanto, siempre existe la descomposición de Cholesky

$$M^{-1} = LL^T = Q^T Q$$

donde  $L$  es una matriz triangular inferior, siendo así

$$M = Q^{-1} Q^{-T}$$

por otro lado si premultiplicamos (5.9) por  $Q$

$$QDv = \lambda QMv$$

si

$$v = Q^T w \tag{5.10}$$

entonces

$$QDQ^T w = \lambda QMQ^T w = \lambda Q(Q^{-1} Q^{-T}) Q^T w = \lambda w \tag{5.11}$$

si normalizamos a  $v$

$$v^T Mv = 1 \tag{5.12}$$

en tal caso

$$v^T Mv = (Q^T w)^T M Q^T w = w^T QMQ^T w = w^T w = 1$$

de (5.11)

$$(QDQ^T - \lambda I) w = 0 \tag{5.13}$$

por lo tanto, calculando los vectores característicos  $w_i$  y normalizando, es decir,  $\bar{w}_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$  y sustituyendo en (5.10)  $v_i = Q^T \bar{w}_i$ , si

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

se puede reescribir la ecuación  $Dv_i = \lambda_i Mv_i$ , para  $i = \{1, \dots, n\}$ , como

$$DT = MT\tilde{D}$$

premultiplicando por  $T^T$

$$TDT = T^T MT\tilde{D}$$

y dado (5.12)

$$T^T MT = I_n$$

por lo tanto

$$T^T DT = \tilde{D}$$

con  $\tilde{D}$  matriz diagonal.

### 5.2.3.2. Sistema 3

Sea

$$M\ddot{y} + D\dot{y} + K(t)y = 0 \quad (5.14)$$

con  $y(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $K(t) = K^T(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M = M^T > 0$  y  $D = D^T$  y  $\sigma(D) \in \mathbb{R}_+$  matrices constantes  $M$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Aplicando la transformación anterior  $M$  y  $D$ :

$$\begin{aligned} T^T M T &= I_n \\ T^T D T &= \tilde{D} \end{aligned}$$

si

$$y = T x$$

entonces

$$\begin{aligned} T^T M T \ddot{x} + T^T D T \dot{x} + T^T K(t) T x &= 0 \\ \ddot{x} + \tilde{D} \dot{x} + T^T K(t) T x &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

haciendo el cambio de variable

$$x_1 = x \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{x}$$

$$x_2 = \dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \ddot{x} = -\tilde{D}\dot{x} - T^T K(t) T x$$

podemos reescribir (5.15), como un sistema de primer orden:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -T^T K(t) T & -\tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

y factorizando:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = J \left( \begin{bmatrix} T^T K(t) T & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

dado que  $\tilde{D} = \text{Diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  es diagonal, en tal caso

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = J \left( \underbrace{\begin{bmatrix} T^T K(t) T & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_n \end{bmatrix}}_{H(t)} + \gamma J \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

con

$$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i}$$

finalmente dado que  $(T^T K(t) T)^T = T^T K(t) T$ , entonces  $H(t) = H^T(t)$ , por lo tanto, el sistema (5.15) es posible escribirlo como un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico (5.6).

### 5.3. Atenuación de Vibraciones

Para explicar cómo contribuye la señal de **excitación paramétrica** a la atenuación de las vibraciones, necesitamos recordar que la respuesta de un sistema periódico

$$\dot{x} = A(t)x \quad (5.16)$$

$A(t) = A(t + \Omega)$  se puede escribir como:

$$x(t) = \Phi(\tau, 0)M^k x_0 \quad (5.17)$$

con  $t = k\Omega + \tau$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y  $\tau \in [0, \Omega)$  donde

$$M = e^{R\Omega}$$

es la matriz de monodromía<sup>1</sup>, de la ecuación (5.17) notamos que la respuesta de (5.16) es similar a la de un sistema discreto invariante en el tiempo.

**Observación 5.3.** El efecto de la excitación paramétrica se puede observar al ver la posición de los multiplicadores característicos dentro del círculo unitario. Entonces para un sistema asintóticamente estable, los multiplicadores están dentro del círculo unitario, digamos están sobre o cercanos a un círculo de radio  $r_s$ , tal que  $r_s < 1$  y la excitación paramétrica debería mover a los multiplicadores característicos a un círculo de menor radio es decir  $r_c < r_s$ .

Este efecto lo podemos ver en el siguiente ejemplo.

#### 5.3.1. Modulación

Sea el sistema mostrado en la Fig. 5.1:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0 \quad (5.18)$$

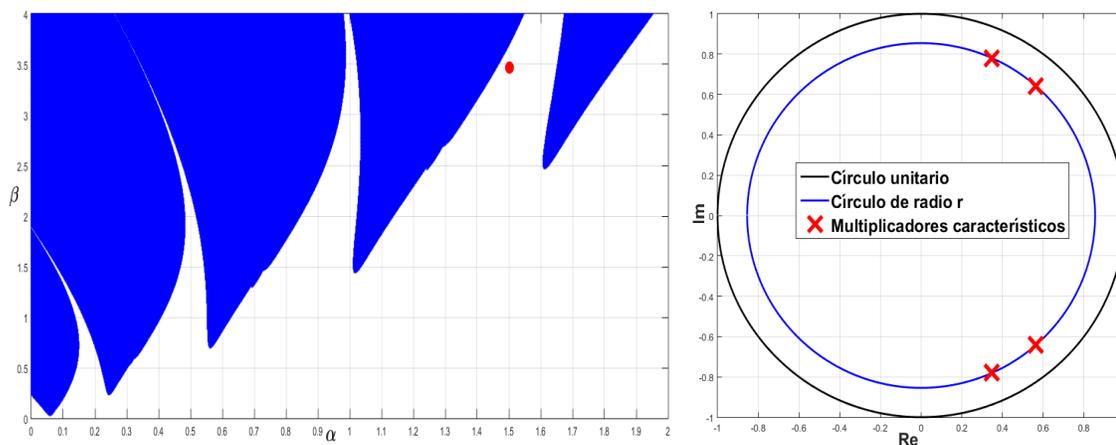
con  $D = \text{diag}\{0.5, 0.5\}$ , (que satisface las condiciones de los sistemas 1-3 descritos en la sección 5), entonces, sus respuestas son siempre asintóticamente estable, insertando la señal de excitación paramétrica en  $k_3$ :

$$k_3(t) = k_{3_b} + k_{3_b} \cos(t), \text{ con } k_{3_a} > 0, |k_{3_a}| > |k_{3_b}|$$

por lo tanto (5.18) con la señal de control en lazo abierto se escribe como:

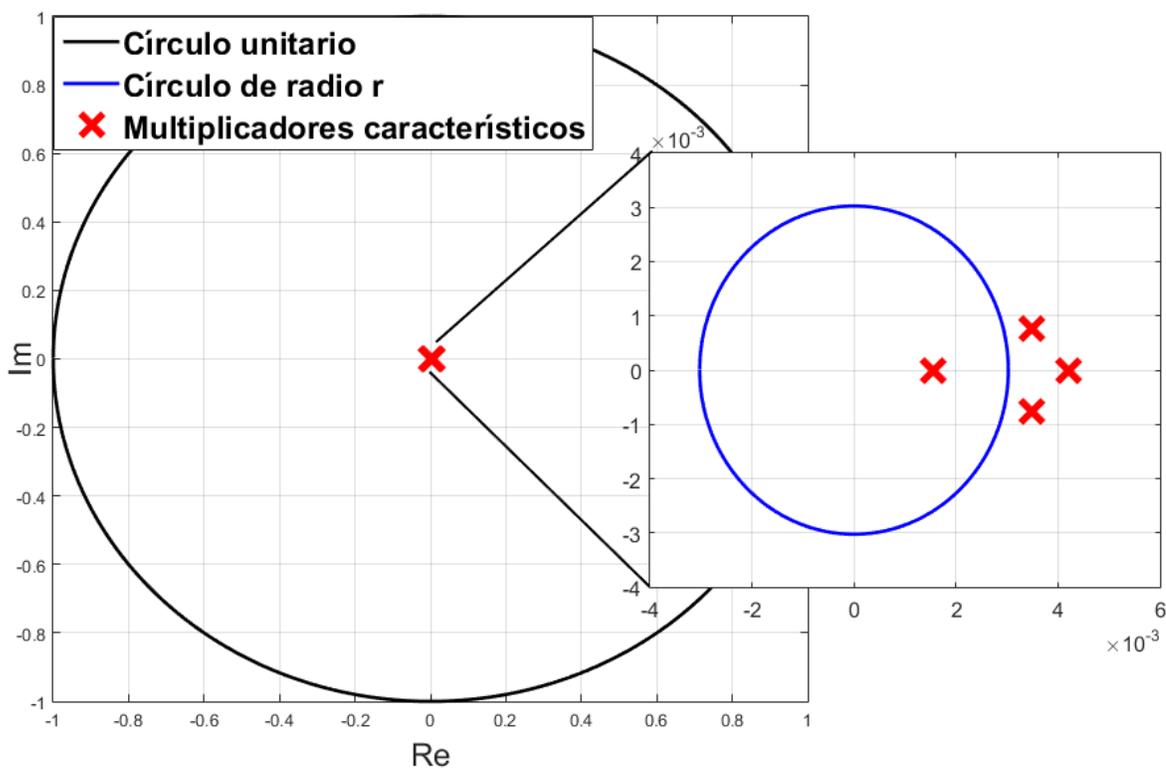
$$\ddot{x} + D\dot{x} + (\alpha A + \beta Bp(t))x = 0 \quad (5.19)$$

<sup>1</sup>Nota: No confundir con la matriz  $M$  del modelado mecánico de la sección anterior



(a) Diagrama de Estabilidad

(b) Multiplicadores con  $p(t) = \cos$



(c) Multiplicadores con la señal  $p(t) = \frac{1}{2} (\text{sign}(\cos(\frac{2\pi}{\tau}t)) + 1) \cos(t)$  para  $\tau = 240$

Figura 5.3: Diagrama de Estabilidad de (5.19) y Posición de los Multiplicadores para con  $\alpha = 1.5$  y  $\beta = 3.5$

si  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0.5$ ,  $d_1 = 0.05$ ,  $d_2 = 0.025$ ,  $k_{1a} = 3$ ,  $k_{3a} = 2$ ,  $k_{2b} = 1$ , y  $p(t) = \cos(t)$ , en ese caso

$$D = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3.1 & -0.1 \\ -0.2 & 4.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

haciendo el análisis de estabilidad para (5.19) con (5.20) obtendremos el diagrama mostrado en la Fig. 5.3 a). Tomando algún par de parámetros  $(\alpha, \beta) = (1.5, 3.5)$ , y realizando una simulación de sus respuestas para el estado  $x_1$ , podemos observar en la Fig. 5.4 a) que la respuesta del sistema con excitación paramétrica (5.19) decae más rápido que el sistema sin excitación paramétrica (5.18). De simple vista podemos ver en este ejemplo que la respuesta del sistema no la podemos suponer como la respuesta de un sistema de segundo orden como (5.5), observamos que la respuesta del sistema excitado (5.19) con (5.20) presenta *beating*, esto es como si se tratara de una señal modulada. Podemos suponer que si desactivamos el efecto de la excitación paramétrica cuando la señal envolvente aumenta entonces se mejora la atenuación. Por ejemplo si cambiamos las señal de excitación por

$$p(t) = \frac{1}{2} \left[ \text{sign} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{\tau} t \right) \right) + 1 \right] \cos(t) \quad (5.21)$$

dicho de otra forma, una **señal de excitación modulada**<sup>2</sup> por una función

$$r(t) = \frac{1}{2} \left[ \text{sign} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{\tau} t \right) \right) + 1 \right]$$

cuando

$$r(t) = \frac{1}{2} \left[ \text{sign} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{\tau} t \right) \right) + 1 \right] = 1$$

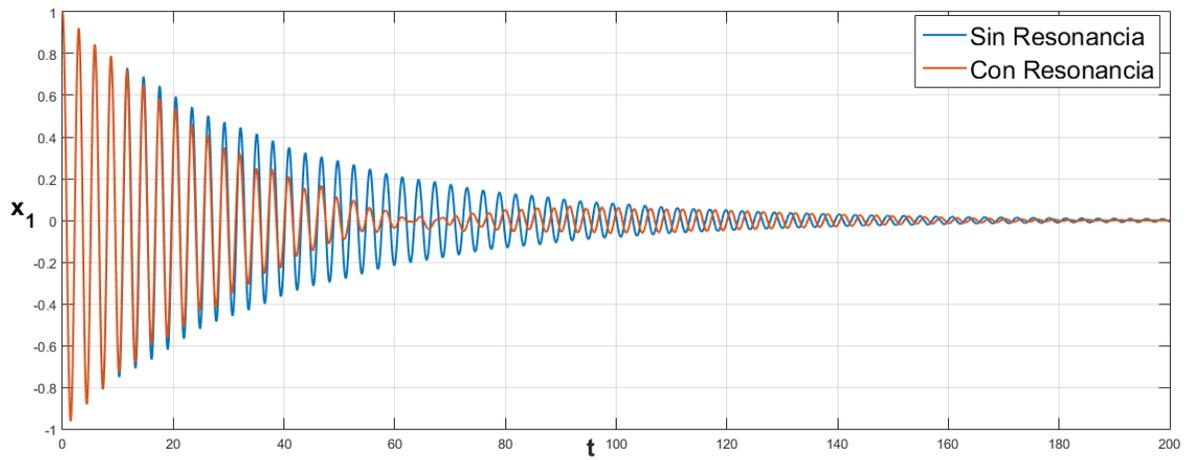
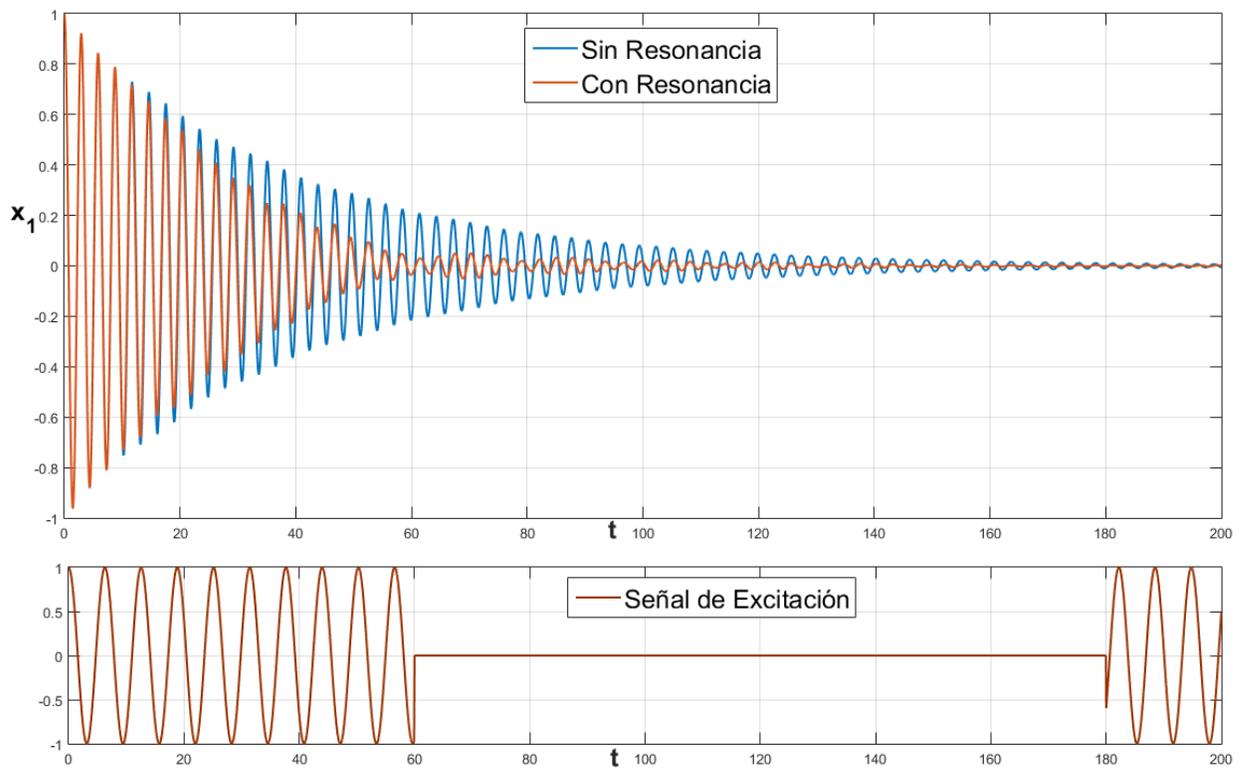
el sistema es periódico y cuando

$$r(t) = \frac{1}{2} \left[ \text{sign} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{\tau} t \right) \right) + 1 \right] = 0$$

se puede ver como sistema invariante en el tiempo, ver Fig. 5.4 b).

El efecto de modular la señal de excitación se puede observar si calculamos los multiplicadores característicos del sistema periódico (5.19) con la señal de excitación  $p(t) = \cos(t)$  y los valores multiplicadores con la señal de excitación  $p(t) = \frac{1}{2} \left[ \text{sign} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{\tau} t \right) \right) + 1 \right] \cos(t)$ , en la Fig. 5.3 a) b) se puede ver que los multiplicadores se encuentran sobre un círculo de radio  $r$  y después de aplicar la señal modulada este círculo se contrae como se observa en la Fig. 5.3 c). Si asumimos que el comportamiento de un sistema periódico es similar al de un sistema lineal invariante discreto, entonces, es claro ver que debido a que los multiplicadores con la señal de excitación es más atenuada. Realizando una simulación con  $p(t) = \frac{1}{2} \left[ \text{sign} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{\tau} t \right) \right) + 1 \right] \cos(t)$  en la ecuación (5.19) con  $\tau = 240$  obtenemos una mejor atenuación como se puede ver en la Fig. 5.4 b).

<sup>2</sup>Es importante notar que ahora la señal de excitación ya no es  $2\pi$  periódica ahora es  $\tau$  periódica

(a) Señal de Respuesta con  $p(t) = \cos(t)$ (b) Señales de Respuesta y de Excitación con  $p(t) = \frac{1}{2} (\text{sign}(\cos(\frac{2\pi}{\tau}t)) + 1) \cos(t)$  con  $\tau = 240$ Figura 5.4: Señales de Respuesta para (5.19) con  $\alpha = 1.5$  y  $\beta = 3.5$

### 5.3.2. Reducción de orden

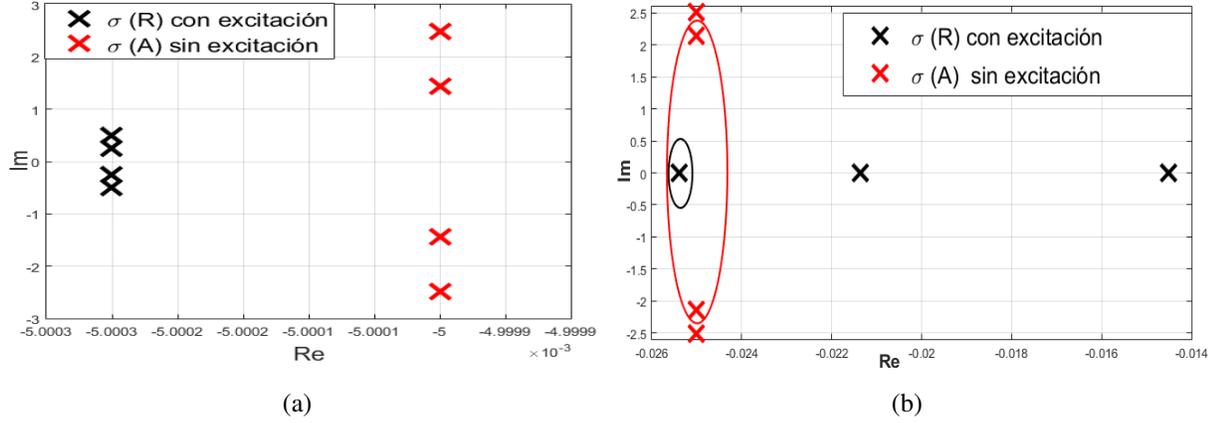


Figura 5.5: Valores característicos con y sin excitación paramétrica

Un problema a resolver es ¿cómo saber el factor de atenuación de forma analítica? o ¿cómo saber cuánto podemos atenuar la respuesta del sistema? Gracias a la factorización de Lyapunov-Floquet, el sistema (5.16), se puede transformar en un sistema invariante en el tiempo

$$\dot{z} = Rz \quad (5.22)$$

recordando  $R$  proviene de la definición de la matriz de monodromía  $M = e^{R\Omega}$ . Si construimos  $M$  con métodos numéricos podemos conocer el espectro de  $\sigma(R) = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$

$$\rho_i = \frac{1}{\Omega} \ln(\lambda_i)$$

donde  $\lambda_i \in \sigma(M)$ .

Por otro lado sabemos que  $M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0$  se puede escribir como

$$\dot{y} = \tilde{A}y \quad (5.23)$$

$$\text{con } \tilde{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -K & -D \end{bmatrix}.$$

Entonces vale la pena comparar los valores característicos de  $\tilde{A}$  y  $R$  es decir el sistema con excitación paramétrica y sin excitación. Tanto (5.22) como (5.23) son sistemas lineales invariantes en el tiempo. Haciendo la suposición de que el factor de atenuación  $\eta$  es la parte real de cada valor característico como si tratase de un sistema de segundo orden, entonces podemos tener un criterio de comparación entre el sistema con y sin excitación paramétrica.

Para el ejemplo mostrado en la introducción de este capítulo calculamos  $\sigma(\tilde{A})$  y  $\sigma(R)$ , en la Fig. 5.5 a) podemos observar que el sistema con excitación paramétrica (5.22) cuenta con más *amortiguamiento* que sin excitación (5.23), pues los valores característicos de  $R$  están a la izquierda de los de  $\tilde{A}$ . Con esto podemos concluir que el factor de atenuación es aumentado pero ¿cómo podemos estimar el  $\eta$ ? lo que proponemos es tratar de realizar una reducción de orden de un sistema de cuarto orden a un sistema de segundo orden.

Existen diversos métodos para reducir el orden de los sistemas, [75, 76], por ahora solo buscamos reducir de un sistema de orden 4 a uno de orden 2, en particular nos interesan los dos valores característicos que aporten más *amortiguamiento al sistema*. Lo que proponemos es seleccionar el par de valores característicos más *energéticos* (polos) o los que aportan más energía a la respuesta del sistema, [77].

Sea

$$h(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (5.24)$$

una función de transferencia estable, donde  $q(s)$ ,  $p(s)$  son polinomios de grado  $m, n$  respectivamente sabemos

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{h(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} h(s)e^{st} ds \quad (5.25)$$

dado que  $h(s)$  es estable se cumple que  $c = 0$ . Por otro lado la energía asociada al sistema está dada por

$$E = \int_0^{\infty} h^2(t) dt$$

sustituyendo en (5.25)

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\infty} h(t) \left[ \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\omega}^{j\omega} h(s)e^{st} ds \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\omega}^{j\omega} h(s) \int_0^{\infty} h(t)e^{st} dt ds \end{aligned}$$

pero

$$h(-s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{st} dt$$

entonces

$$E = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\omega}^{j\omega} h(s)h(-s) ds \quad (5.26)$$

aplicando el teorema de Cauchy:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi j} (2\pi j \cdot \sum \mathcal{R}es\{h(s)h(-s)\}) \\ E &= \sum \mathcal{R}es\{h(s)h(-s)\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

luego

$$\begin{aligned} h(s)h(-s) &= \frac{q(s)q(-s)}{p(s)p(-s)} \\ &= \frac{(s+z_n)(s+z_{n-1})\dots(s+z_0)\dots(s-z_n)(s-z_{n-1})\dots(s-z_0)}{(s+p_n)(s+p_{n-1})\dots(s+p_0)\dots(s-p_n)(s-p_{n-1})\dots(s-p_0)} \end{aligned}$$

por lo tanto existen  $2n$  polos simples o complejos, expandiendo en fracciones parciales

$$h(s)h(-s) = \frac{A_n}{(s+p_n)} + \dots + \frac{A_0}{(s+p_0)} + \dots + \frac{B_n}{(s-p_n)} + \dots + \frac{B_0}{(s-p_0)}$$

por supuesto los coeficientes  $A_n, B_n$  coinciden con el residuo <sup>3</sup> de cada polo en (5.27)

$$E = \sum A_i + \sum B_j \quad (5.28)$$

entonces sabemos con cuánta energía contribuye cada polo al sistema (por supuesto los polos estables) entonces seleccionamos los polos con más energía y reescribimos el sistema reducido como

$$R(s) = \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{(s+p_i)}$$

donde  $r$  es el orden del sistema reducido. Resumiendo el método, primero calculamos el producto  $h(s)h(-s)$ , posteriormente calculamos sus residuos para todos los polos estables, y seleccionamos los  $r$  polos que proporcionan más energía al sistema, es decir seleccionamos los polos que tengan el residuo más grande.

Para nuestro caso  $r = 2$ , si calculamos los valores de característicos de  $R$  y  $\tilde{A}$  para el (5.19) y (5.20) podemos observar en la Fig. 5.5 b) el par de valores característicos con más *energía* están encerrados, y nuevamente los polos más *energéticos* de  $R$  aparecen a la izquierda de los polos más *energéticos* de  $\tilde{A}$ . Para este ejemplo el amortiguamiento sin excitación es  $\eta = 0.025$  y para el sistema con excitación paramétrica  $\eta = 0.0306$  (con  $p(t) = \cos(t)$ ) por lo tanto atenúamos la señal en un 22% .

### 5.3.3. Exponentes de Lyapunov

**Definición 5.1.** Sea la función  $f(t)$  definida en un intervalo  $[t_0, \infty)$  entonces el exponente de Lyapunov  $\delta$  se define como:

$$\delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \ln (|f(t)|) \right\}$$

<sup>3</sup>Recordando la definición del residuo  $\mathcal{R}e(h(s)h(-s), p_i) = \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{1}{k-1} \frac{d^k}{dt^k} \left[ (s+p_i)^k h(s)h(-s) \right]$  donde  $k$  es el orden del polo

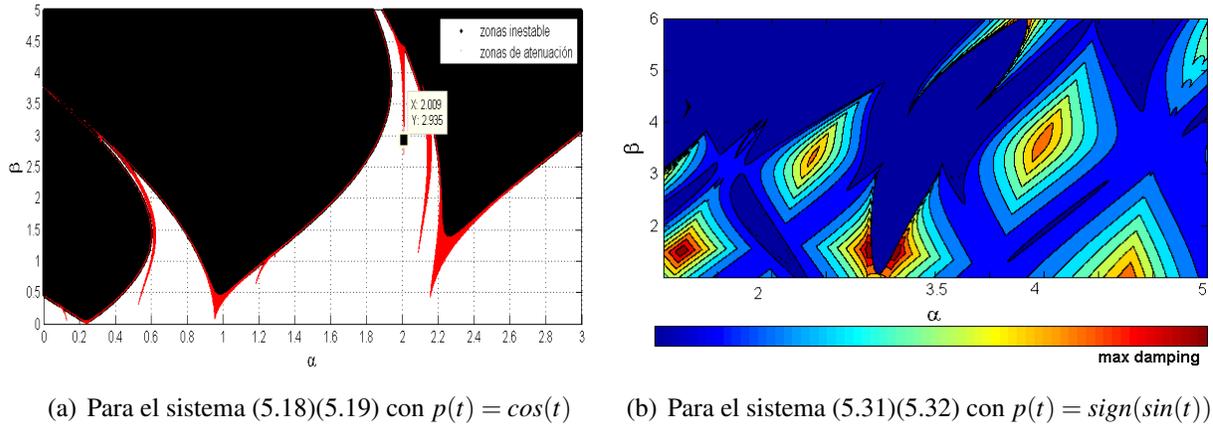


Figura 5.6: Diagrama de Estabilidad y Zonas de atenuación

$\delta$  determina el crecimiento (o decrecimiento) de la función  $|f(t)|$  con respecto a una función exponencial  $e^{\delta t}$  [35].

Por supuesto es nuestro interés conocer  $\delta$  con el objetivo de medir la atenuación de la respuestas de un sistema con excitación paramétrica. En distintos textos se analizan a detalle los exponentes de Lyapunov, para nuestro estudio solo nos interesan dos casos particulares que se enuncian en los siguientes lemas [32].

**Lema 5.1.** Sea  $\dot{x} = \tilde{A}x$  con  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  entonces, sus exponentes de Lyapunov  $\delta_i$  son la parte real de los valores característicos de  $\tilde{A}$

**Lema 5.2.** Sea  $\dot{x} = A(t)x$  con  $A(t) = A(t + \Omega)$  entonces, sus exponentes de Lyapunov  $\bar{\delta}_i$  son la parte real de los exponentes característicos  $\rho_i$ .

$$\bar{\delta}_i = \text{Re}(\rho_i).$$

**Observación 5.4.** Definiendo

$$\begin{aligned} \eta &= \text{máx}(\delta_i) \\ \bar{\eta} &= \text{máx}(\bar{\delta}_i) \end{aligned} \tag{5.29}$$

es decir  $\eta$  es el máximo exponente de Lyapunov en un sistema lineal invariante en el tiempo y  $\bar{\eta}$  el exponente de un sistema periódico, podemos plantear un criterio para saber cuándo (5.18) se atenúa con excitación paramétrica si:

$$\eta > \bar{\eta} \tag{5.30}$$

el sistema (5.18) puede ser atenuado con excitación paramétrica.

Para el (5.19)(5.20) con  $p(t) = \cos(t)$  calculamos todos los puntos donde se cumpla la condición (5.30) y obtenemos el siguiente diagrama Fig. 5.6 a) parámetros donde la respuesta de (5.19)(5.20) puede ser atenuada con excitación paramétrica.

### 5.3.3.1. Atenuación con la ecuación de Meissner

Como hemos mencionado la desventaja de usar la teoría de Floquet es que se requiere usar métodos numéricos, sin embargo hemos podido resolver la ecuación de Meissner con dos grados de libertad [20]. Si la señal de excitación es  $p(t) = \text{sign}(\sin(t))$  entonces, el sistema (5.19) se transforma en:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + (\alpha A + \beta B \text{sign}(\cos(t)))x = 0 \quad (5.31)$$

proponiendo algunos valores de  $M$ ,  $D$ ,  $A$  y  $B$

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 3.1 & -0.1 \\ -0.1 & 2.1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.32)$$

calculamos las condiciones de estabilidad y las zonas de atenuación ( $\eta > \bar{\eta}$ ), en Fig. 5.6 b) se muestra en azul las zonas inestables del sistema, las zonas rojas es el lugar donde se alcanza la máxima atenuación, y los otros colores son estables pero la señal no se atenúa.

### 5.3.4. Lugar de los multiplicadores característicos

#### 5.3.4.1. Primera Región

Ahora tomamos como parámetros a la frecuencia de la señal de excitación<sup>4</sup> ( $\omega, \beta$ ) entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \dot{x} + \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 3.1 & -0.1 \\ -0.1 & 1.1 \end{bmatrix}}_{K_0} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos(\omega t) \right) x = 0 \quad (5.33)$$

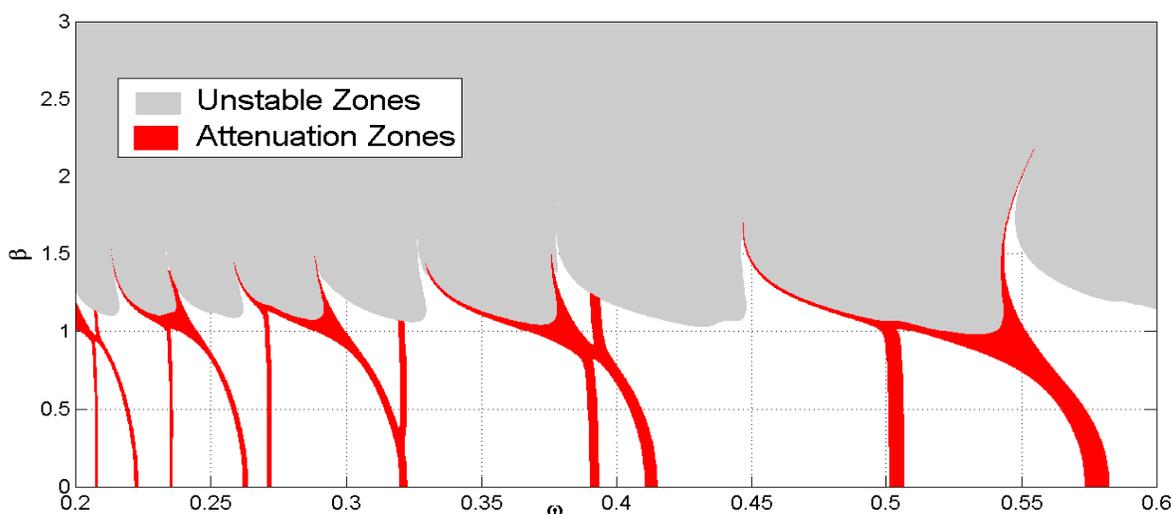
y usando la factorización de Floquet podemos reescribir (5.33) como:

$$\dot{z} = Rz$$

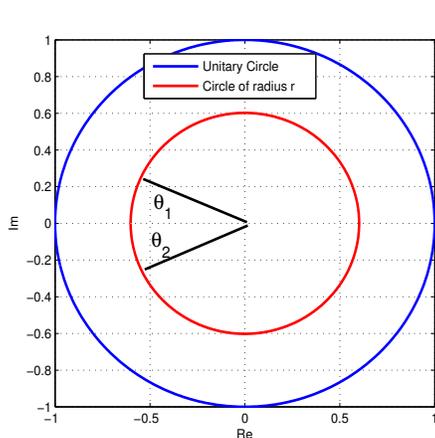
para el sistema anterior ahora buscaremos la mejor posición de los multiplicadores característicos

en el círculo de radio  $r = \sqrt{\mu}$ , notemos que (5.33) es un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano con  $\gamma = 0.025$ , por lo tanto la matriz de monodromía es  $\mu$ -Simpléctica además y la matriz  $R$  es  $\gamma$ -Hamiltoniana. Por lo tanto la simetría descrita en el capítulo anterior es válida para (5.33), esto es, los exponentes

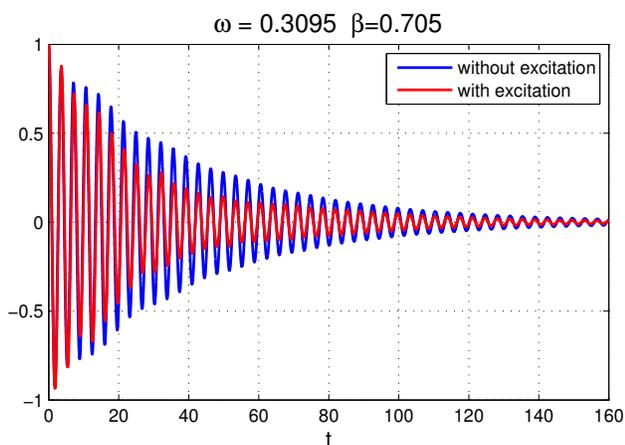
<sup>4</sup>Recordemos que es equivalente analizar al sistema con los parámetros ( $\omega, \beta$ ) que con los parámetros ( $\alpha, \beta$ ). Como se explica en el capítulo 1.



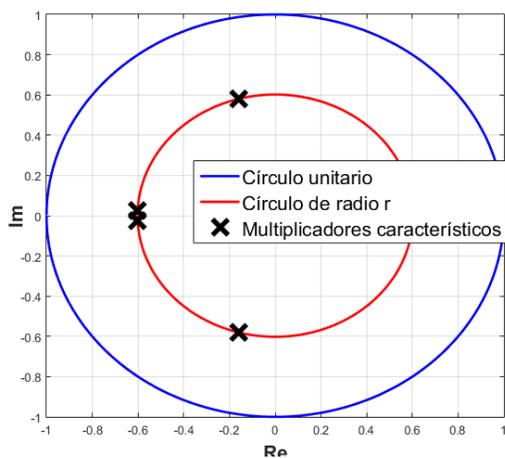
(a) Diagrama de Estabilidad y Zonas de Atenuación



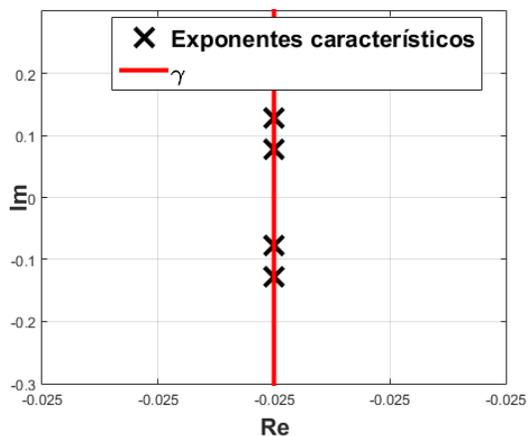
(b) Región de Atenuación



(c) Señal de respuesta



(d) Multiplicadores



(e) Exponentes

Figura 5.7: Zonas de Atenuación, señal de respuesta y posición de los multiplicadores y exponentes para  $(\alpha, \beta) = (0.3095, 0.705)$

característicos son simétricos con respecto al eje real y la línea vertical  $\gamma$ , por lo tanto es necesario que la atenuación suceda cuando los exponentes estén sobre la línea  $\gamma$  lo que corresponde a que los multiplicadores estén sobre el círculo de radio  $r$ , por lo tanto los exponentes se mueven a lo largo de la línea  $\gamma$ , por lo tanto debemos encontrar la posición donde los exponentes estén cerca del eje real lo que es equivalente a que los multiplicadores se encuentren en la región  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  como lo muestra la Fig. 5.7 b). Por lo tanto podemos buscar numéricamente todos los parámetros que cumplan con esta condición como se muestra en la Fig. 5.7 a), las regiones en color rojo corresponde a los parámetros donde se puede atenuar el sistema. En la Fig. 5.7 c) se muestra una simulación para un punto dentro de la zona de atenuación, y mostramos los multiplicadores y exponentes característicos para  $(\omega, \beta) = (0.3095, 0.705)$ .

### 5.3.4.2. Segunda Región

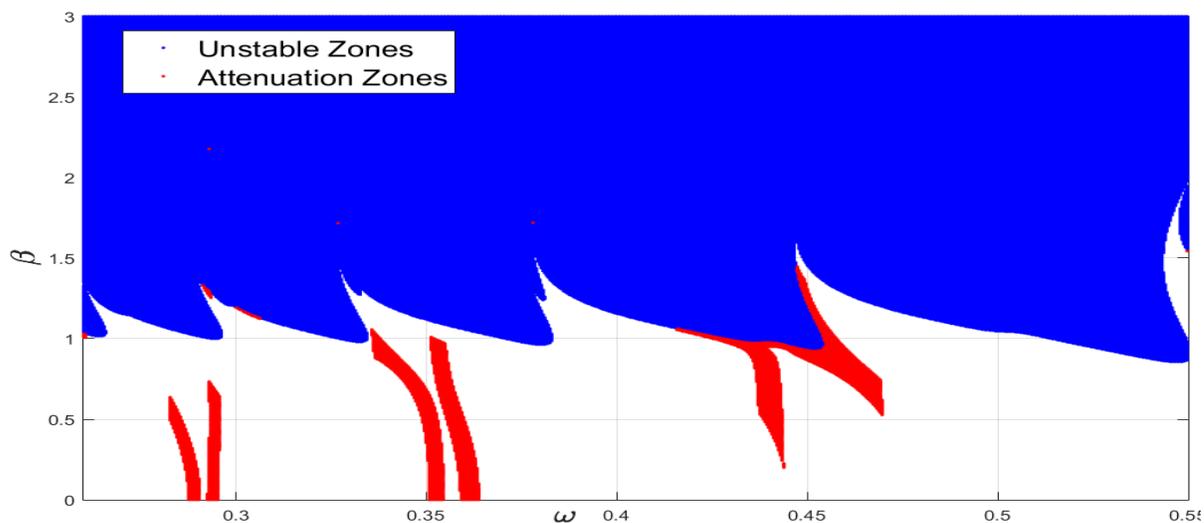
Nuevamente suponiendo que las respuestas de un sistema periódico son similares a la de un sistema discreto entonces podemos hallar las curvas de amortiguamiento dentro del círculo unitario, similar a las curvas de amortiguamiento de unos sistemas de segundo orden, ver Fig. 5.8 b). Esto es, si algún las raíces estan dadas por  $s_{12} = -\omega_n \zeta \pm i\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  sabemos que el factor de atenuación está dado por  $\sigma = \omega_n \zeta$  y en un sistema discreto

$$z_{12} = e^{s_{12}\Omega}$$

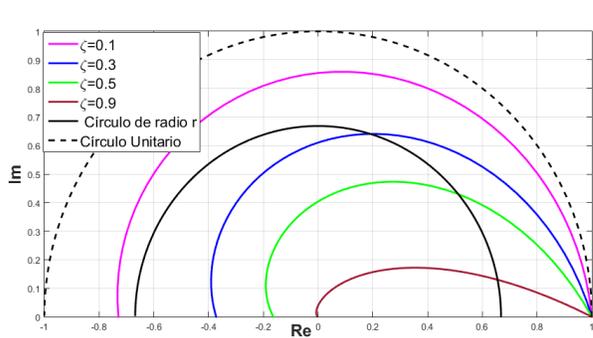
entonces en la Fig. 5.8 a) se pueden ver las curvas de amortiguamiento para un sistema de segundo orden. En la Fig. 5.8 c) se muestran las curvas de amortiguamiento para un sistema de cuarto orden con  $s_{12} = -\omega_{n1} \zeta_1 \pm i\omega_{n1} \sqrt{1 - \zeta_1^2}$  y  $s_{34} = -\omega_{n2} \zeta_2 \pm i\omega_{n2} \sqrt{1 - \zeta_2^2}$  y

$$z_{12} = e^{s_{12}s_{23}\Omega}$$

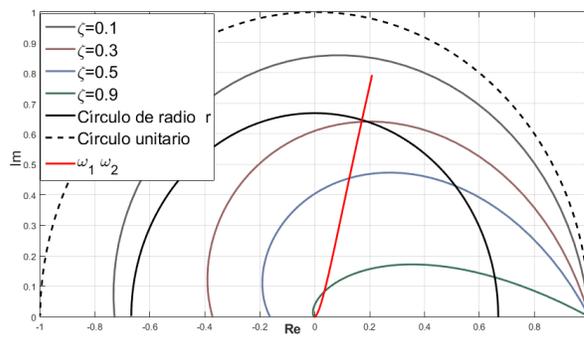
y calculando la frecuencias el sistema sin excitación esto es  $\sigma(K_o) = \{\omega_1^2, \omega_2^2\}$  esta curva se puede ver en color rojo en la Fig. 5.8 c). Por lo tanto debemos buscar los parámetros  $(\omega, \beta)$  que hagan que los multiplicadores esten en la región mostrada en la Fig. 5.8 d) que corresponde con el máximo amorguamiento posible para el sistema (5.33). En la Fig. 5.8 a) se pueden ver las zonas de máxima atenuación y una simulación para los parámetros  $(\omega, \beta) = (0.35, 0.5)$ .



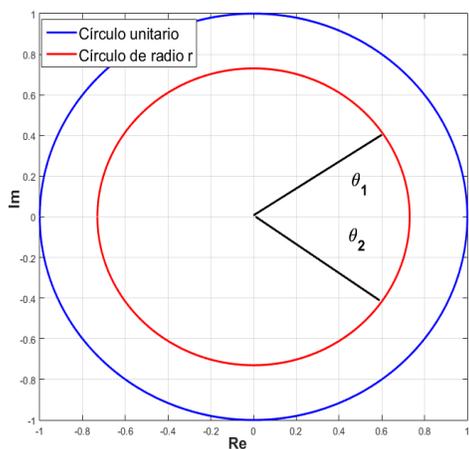
(a) Diagrama de Estabilidad y Zonas de Atenuación



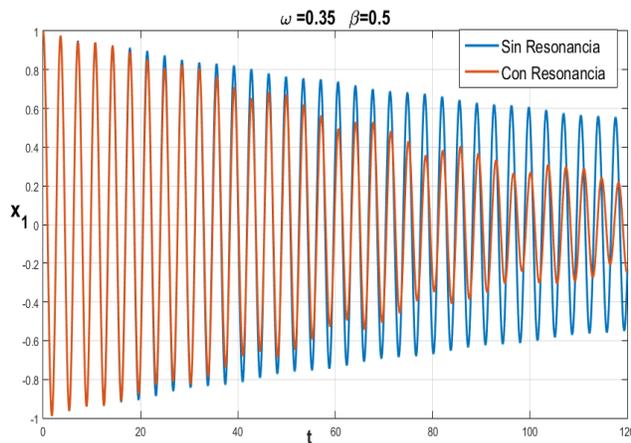
(b) Curvas de Amortiguamiento de Segundo Orden



(c) Curvas de Amortiguamiento de Cuarto Orden



(d) Región de Atenuación



(e) Señal de respuesta

Figura 5.8: Zonas de Atenuación, señal de respuesta  $(\alpha, \beta) = (0.35, 0.5)$

## Conclusiones y Trabajo Futuro

---

Se definió una clase particular de sistemas Hamiltonianos con disipación, a la cual llamamos  $\gamma$ -Hamiltoniano, para describir su comportamiento definimos las matrices  $\mu$ -Simplécticas y  $\gamma$ -Hamiltonianas, de las cuales se puede concluir:

- Las matrices  $\mu$ -Simplécticas y  $\gamma$ -Hamiltonianas presentan **simetría similar** a las matrices Simplécticas y Hamiltonianas respectivamente.
- La matriz de transición de estados de un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano es  $\mu$ -Simpléctica.

Este análisis se utilizó para el estudio sistemas  $\gamma$ -Hamiltonianos periódicos en particular de la ecuación vectorial de Hill amortiguada con lo que se obtuvieron **nuevas condiciones de estabilidad** para un sistema con dos grados de libertad. Con lo que podemos concluir:

- Los multiplicadores característicos son simétricos con respecto al círculo de radio  $r = \sqrt{\mu}$ .
- Los exponentes característicos son simétricos con la línea vertical  $\gamma$ .
- Las condiciones de estabilidad para la ecuación vectorial de Hill con dos grados de libertad, son tres desigualdades que dependen de los coeficientes del polinomio característico de la matriz de monodromía, por lo tanto, no es necesario el cómputo de los multiplicadores característicos.
- Se presentó un método para a obtener los diagramas de estabilidad (Fig. 4.5) que relacionan cada lengua de Arnold con la posición de sus multiplicadores en relación con el círculo unitario y el círculo de radio  $r$

Con las nuevas condiciones de estabilidad se desarrolló un algoritmo para el cómputo de las lenguas de Arnold para la ecuación de Hill amortiguada con dos grados de libertad. Finalmente como resultado del análisis teórico anterior se presentó un método para la atenuación de vibraciones con resonancia paramétrica.

## 6.1. Trabajo futuro

### 6.1.1. Generalización para tres o más grados de libertad

Para continuar con esta línea de investigación el paso inmediato es encontrar las condiciones de estabilidad para un sistema  $\gamma$ -Hamiltoniano periódico con tres o más grados de libertad usando las propiedades de simetría en la matriz de monodromía, que es  $\mu$ -Simpléctica.

#### 6.1.1.1. Aplicación

Con esta generalización sería posible desarrollar un método para la atenuación de vibraciones para un sistema con tres o más grados de libertad. Quizás a largo plazo sea posible construir un actuador que se coloque en algún edificio y se puedan atenuar las vibraciones durante algún sismo en control en lazo abierto.

### 6.1.2. Optimización de la atenuación

Sobre la atenuación de vibraciones una gran aportación sería encontrar parámetros  $(\alpha, \beta)$  donde sea atenuado el sistema mecánico tal que el cambio en la elasticidad en actuador variante en el tiempo sea mínima, es decir, si la elasticidad de actuador está dada por

$$k_i(t) = k_a + k_b p(t)$$

entonces se buscaría optimizar la atenuación en el sentido de encontrar la señal de excitación de amplitud mínima, esto es, los parámetros  $(\alpha, \beta)$  donde se atenué las respuestas del sistema mecánico tal que

$$k_a \gg k_b$$

### 6.1.3. Relaciones entre la energía de la señal de excitación y la disipación del sistema

La energía de la señal de excitación está dada por

$$E = \int_0^t p^2(t) dt$$

con  $p(t + \Omega) = p(t)$  periódica, para  $t \geq 0$ . Basados en el hecho que de la sección 5.3.1. *Modulación*, notamos que tenemos un mejor desempeño para la atenuación con la señal

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{2} \left[ \text{sign} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{\tau} t \right) \right) + 1 \right] \cos(t)$$

sin embargo, la energía de  $\bar{p}(t)$  es menor a la de  $p(t)$  en el intervalo  $[0, \tau]$ . Por lo tanto un estudio de la energía en la señal de excitación con la energía disipada del sistema podría dar nuevas condiciones o mejoras para la atenuación.

# Bibliografía

---

- [1] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1995.
- [2] I. Blekhman, *Selected topics in vibrational mechanics*. World Scientific, 2004, vol. 11.
- [3] J. J. Thomsen, *Vibrations and stability: advanced theory, analysis, and tools*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] I. I. Blekhman, *Vibrational mechanics: nonlinear dynamic effects, general approach, applications*. World Scientific, 2000.
- [5] S. S. Rao and F. F. Yap, *Mechanical vibrations*. Prentice Hall Upper Saddle River, 2011, vol. 4.
- [6] H. Benaroya and M. L. Nagurka, *Mechanical vibration: analysis, uncertainties, and control*. CRC Press, 2009.
- [7] A. Preumont, *Vibration control of active structures: an introduction*. Kluwer Academic Publishers, 2004, vol. 96.
- [8] T. I. Fossen and H. Nijmeijer, *Parametric resonance in dynamical systems*. Springer, 2012.
- [9] A. Champneys, “Dynamics of parametric excitation,” *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, pp. 2323–2345, 2009.
- [10] A. Tondl, “To the problem of quenching self-excited vibrations,” *Acta technica ČSAV*, vol. 43, no. 1, pp. 109–116, 1998.
- [11] H. Ecker and A. Tondl, “Stabilization of a rigid rotor by a time-varying stiffness of the bearing mounts,” in *International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Paper C*, vol. 623, 2004, pp. 45–54.
- [12] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2006.

- [13] R. Rand and D. Armbruster, *Perturbation methods, bifurcation theory and computer algebra*. Springer-Verlag New York Inc., 1987.
- [14] A. H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons, 1993.
- [15] ———, *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [16] F. Dohnal, *Damping of Mechanical Vibrations by Parametric Excitation: Parametric Resonance and Anti Excitation*. Sudwestdeutscher Verlag fur Hochschulschriften, 2009.
- [17] K. Meyer, G. Hall, and D. Offin, *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*. Springer Science & Business Media, 2008, vol. 90.
- [18] V. Yakubovich and V. Starzhinskii, *Linear Differential Equations With Periodic Coefficients*. John Wiley and Sons, 1975, vol. 1,2.
- [19] V. I. Arnold, “Remarks on the perturbation theory for problems of mathieu type,” *Russian Mathematical Surveys*, vol. 38, no. 4, pp. 215–233, 1983.
- [20] M. Ramírez and J. Collado, “Attenuation vibration by parametric excitation using the meissner equation,” in *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), 2016 13th International Conference on*. IEEE, 2016, pp. 1–6.
- [21] M. Ramírez and J. Collado, “Damped Hill’s equation and its application to attenuate vibrations,” in *9th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC)*, 2017.
- [22] S. Meerkov, “Principle of vibrational control: Theory and applications,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, no. 4, pp. 755–762, 1980.
- [23] R. E. Bellman, J. Bentsman, and S. M. Meerkov, “Vibrational control of nonlinear systems: Vibrational stabilizability,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 31, no. 8, pp. 710–716, 1986.
- [24] M. Ramírez and J. Collado, “Calculation of the stability zones of Hill’s equation with a gpu on matlab,” in *International Conference on Supercomputing*. Springer, 2015, pp. 225–239.
- [25] G. W. Hill, “On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon,” *Acta mathematica*, vol. 8, no. 1, pp. 1–36, 1886.
- [26] A. M. Lyapunov, “The general problem of the stability of motion,” *International Journal of Control*, vol. 55, no. 3, pp. 531–534, 1992.
- [27] W. Magnus and S. Winkler, *Hill’s equation*. John Wiley and Sons, 1966.

- [28] M. S. P. Eastham, *The spectral theory of periodic differential equations*. Scottish Academic Press, London, 1973.
- [29] B. M. Brown, M. S. Eastham, and K. M. Schmidt, *Periodic differential operators*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 228.
- [30] P. Kapitsa, “Dynamic stability of the pendulum when the point of suspension is oscillating,” *Sov Phys JETP*, vol. 21, p. 588, 1951.
- [31] L. Landau, *Mechanics: Volume 1 (Course Of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann, 1976, vol. 3.
- [32] L. Y. Adrianova, *Introduction to linear systems of differential equations*. American Mathematical Soc., 1995, no. 146.
- [33] R. Brockett, *Finite dimensional linear systems*. John Wiley and Sons, 1970.
- [34] H. Khalil, *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 2002.
- [35] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*. Springer, 1963.
- [36] C. Swanson, *Comparison and oscillation theory of linear differential equations*. Mathematics in Science and Engineering, New York: Academic Press, 1968, vol. 48.
- [37] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, INC. New York, 1956.
- [38] J. A. Richards, *Analysis of periodically time-varying systems*. Springer-Verlag Berlin, 1983.
- [39] V. Yakubovich, “A remark on the Floquet-Lyapunov theorem,” *Vestnik Leningrad. Univ*, vol. 25, no. 1, pp. 88–92, 1970.
- [40] C. H. Houppis and G. B. Lamont, *Digital control systems*. McGraw Hill Higher Education, 1991.
- [41] D. W. Jordan and P. Smith, *Nonlinear ordinary differential equations: an introduction for scientists and engineers*. New York, 2007.
- [42] H. Hochstadt, “A special Hill’s equation with discontinuous coefficients,” *American Mathematical Monthly*, pp. 18–26, 1963.
- [43] ———, “On the determination of a hill’s equation from its spectrum,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 19, no. 5, pp. 353–362, 1965.

- [44] ———, “Functiontheoretic properties of the discriminant of Hill’s equation,” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 82, no. 3, pp. 237–242, 1963.
- [45] E. t. Meissner, “Über schüttelschwingungen in systemen mit periodisch veränderlicher elastizität,” *Schweizer Bauzeitung*, vol. 72, no. 10, pp. 95–98, 1918.
- [46] A. P. Seyranian and A. A. Mailybaev, *Multiparameter stability theory with mechanical applications*. World Scientific, 2003, vol. 13.
- [47] S. Simakhina, “Stability analysis of Hill’s equation,” *PhD Thesis*, 2003.
- [48] N. W. McLachlan, *Theory and application of Mathieu functions*. Clarendon Press, 1951.
- [49] G. Wolf, “Mathieu functions and Hill’s equation,” *NIST Handbook of Mathematical Functions*, edited by FWJ Oliver, DW Lozier, RF Boisvert, and CW Clark (Cambridge University Press, Cambridge, 2010), pp. 651–681, 2009.
- [50] J. Howard and R. MacKay, “Linear stability of symplectic maps,” *Journal of mathematical physics*, vol. 28, no. 5, pp. 1036–1051, 1987.
- [51] E. I. Jury, *Inners and stability of dynamic systems*. Krieger Pub Co, 1982.
- [52] V. Bolotin, *The Dynamic stability of elastic systems*. Holden-Day, Inc, 1964.
- [53] G. Genta, *Dynamics of rotating systems*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [54] A. Muszynska, *Rotordynamics*. CRC press, 2005.
- [55] J. Vance, F. Zeidan, and B. Murphy, *Machinery Vibration and Rotordynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2010.
- [56] J. Hansen, “Stability diagrams for coupled Mathieu-equations,” *Ingenieur-Archiv*, vol. 55, no. 6, pp. 463–473, 1985.
- [57] V. Shapiro, “Rotating class of parametric resonance processes in coupled oscillators,” *Physics Letters A*, vol. 290, no. 5, pp. 288–296, 2001.
- [58] R. E. Ruelas and R. H. Rand, “Disappearance of resonance tongues,” in *ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2013, pp. V07BT10A053–V07BT10A053.
- [59] L. N. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*. SIAM, 2000, vol. 10.

- [60] J. Butcher, *The numerical Analysis of Ordinary differential equations*. John Wiley and Sons, 1987.
- [61] S. Bittanti and P. Colaneri, *Periodic systems: filtering and control*. Springer Science and Business Media, 2008.
- [62] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*. JHU Press, 1989.
- [63] F. Chatelin, *Eigenvalues of Matrices*. SIAM, 2012.
- [64] H. Ecker and A. Tondl, “Increasing the stability threshold of a rotor by open-loop control of the bearing mount stiffness,” 2005.
- [65] A. TONDL, “Systems with periodically variable masses,” *Acta technica ČSAV*, vol. 46, no. 3, pp. 309–321, 2001.
- [66] K. Makihara, H. Ecker, and F. Dohnal, “Stability analysis of open-loop stiffness control to suppress self-excited vibrations,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 11, no. 5, pp. 643–669, 2005.
- [67] F. Dohnal, “Damping by parametric stiffness excitation: resonance and anti-resonance,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 14, no. 5, pp. 669–688, 2008.
- [68] F. Dohnal and F. Verhulst, “Averaging in vibration suppression by parametric stiffness excitation,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 54, no. 3, pp. 231–248, 2008.
- [69] F. Dohnal, “Optimal dynamic stabilisation of a linear system by periodic stiffness excitation,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 320, no. 4, pp. 777–792, 2009.
- [70] Y. G. Panovko and I. I. Gubanov, *Stability and oscillation of elastic systems: modern concepts, paradoxes and errors*. NASA technical translation, 1973.
- [71] N. Jalili, *Piezoelectric-based vibration control*. Springer, 2010.
- [72] A. Ramaratnam and N. Jalili, “A switched stiffness approach for structural vibration control: theory and real-time implementation,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 291, no. 1, pp. 258–274, 2006.
- [73] E. Schmidt, F. Paradeiser, Wolfgang Dohnal, and H. Ecker, “Design of an electromagnetic actuator for parametric stiffness excitation,” *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 26, no. 3, pp. 800–813, 2007.

- 
- [74] M. Ramírez and J. Collado, “Atenuación de vibraciones mediante excitación paramétrica,” in *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA*, 2014, pp. 1242–1247.
- [75] C. Chen and L. Shieh, “An algebraic method for control systems design,” *International Journal of Control*, vol. 11, no. 5, pp. 717–739, 1970.
- [76] P.-O. Gutman, C. F. Mannerfelt, and P. Molander, “Contributions to the model reduction problem,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 27, no. 2, pp. 454–455, 1982.
- [77] J. Collado, “Reduced order models,” Master’s thesis, UNAM, 1985. (In Spanish).