



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO**

**DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO**

**Control Mediante Rechazo Activo de Perturbaciones de  
Sistemas Mecánicos Subactuados No Lineales**

**Tesis que presenta**

M. en C. Mario Ramírez Neria

**para obtener el Grado de**

**Doctor en Ciencias**

**en la Especialidad de**

Control Automático

**Directores de Tesis:**

Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma

Dr. Hebertt Sira Ramírez



## Agradecimientos:

*Agradezco a Dios por permitirme la culminación de una meta mas en mi vida.*

*A mis padres Delfín Ramírez Flores y María Gertrudis Neria García por brindarme todo su apoyo incondicional y su cariño, por todo el esfuerzo que han hecho para que pueda salir adelante.*

*A mis hermanos Edmundo Ramírez Neria y Olivia Ramírez Neria por todo el apoyo que me han brindado, su cariño y sus consejos en tiempos difíciles.*

*A mis asesores Dr. Rubén Garrido Moctezuma y Dr. Hebertt Sira Ramírez por la orientación, la motivación, el conocimiento que me transmitieron, todo el apoyo brindado y la paciencia que tuvieron conmigo en la realización de este trabajo.*

*A los auxiliares y secretarias del departamento por la colaboración y apoyo brindado durante mi estancia en los estudios doctorales.*

*A los sinodales por las valiosas observaciones realizadas a esta tesis.*

*A mis compañeros Alberto Luviano Juárez, Gilberto Ochoa Ortega, Norma Lozada Castillo, Juan Pablo Campos López y Miguel Angel Trujano Cabrera, por brindarme su amistad, apoyo y consejos.*

*Agradezco al CINVESTAV-IPN y al CONACyT todo el apoyo brindado para la culminación de éste trabajo, a través de la beca **219343***



# Resumen

En esta tesis se propone un procedimiento de diseño de controladores para una clase de sistemas subactuados no lineales, los cuales no son linealizables mediante realimentación pero exhiben una linealización tangente alrededor de un punto de equilibrio que es controlable, razón por la cual estos sistemas exhiben la propiedad de planitud diferencial. Los controladores propuestos son lineales, siguen la filosofía de rechazo activo de perturbaciones y están basados en un observador lineal de estado extendido. La propiedad de planitud diferencial del modelo linealizado de los sistemas subactuados bajo estudio provee una descomposición en cascada de bajo orden lo cual permite el diseño de observadores de estado extendido de bajo orden para cada subsistema en cascada. Estos últimos reducen los problemas de amplificación de ruido y el fenómeno de *peaking* comparados con observadores de alto orden. El péndulo de Furuta y el sistema *Ball and Beam* son tomados en cuenta como ejemplos de aplicación. Se presentan resultados experimentales que muestran la efectividad del enfoque propuesto en la estabilización, así como en las tareas de seguimiento de trayectoria.



# Abstract

In this work, a systematic procedure for controller design is proposed for a class of nonlinear underactuated systems, which are non feedback linearizable but exhibit a controllable tangent linearization around an equilibrium point whereby they exhibit differential flatness property. The proposed controllers are linear and they use an active disturbance rejection control philosophy based on linear extended state observers. The flatness property of the tangent model provides a structural property that results in an advantageous low order cascade decomposition which allows desing of low order extended state observers for each cascade subsystem, improving the attenuation of noisy and peaking components compared with a full order high gain observer. The Furuta pendulum and ball and beam systems are taken as application examples. Experimental results show the effectiveness of the proposed approach in stabilization as well as in trajectory tracking tasks.





# Contenido

<b>Lista de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Control Mediante Rechazo Activo de Perturbaciones . . . . .	1
1.2. Control Mediante Rechazo Activo de Perturbaciones en Sistemas No lineales . . . . .	2
1.3. Sistemas subactuados . . . . .	3
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	5
1.5. Objetivos . . . . .	6
1.5.1. Objetivo General . . . . .	6
1.5.2. Objetivos Específicos . . . . .	6
1.6. Organización de la tesis . . . . .	6
1.7. Lista de artículos publicados . . . . .	7
<b>2. Preliminares Matemáticos</b>	<b>9</b>
2.1. Planitud diferencial de sistemas una entrada una salida lineales invariantes en el tiempo . . . . .	9
2.1.1. Sistemas diferencialmente planos . . . . .	9
2.1.2. Sistemas representados en espacio de estados . . . . .	10
2.2. Idea central del control basado en el observador PIG para sistemas diferencialmente planos . . . . .	13
2.2.1. Observador PIG . . . . .	15
2.2.2. Control basado en el observador PIG . . . . .	17
2.3. Sistemas mecánicos subactuados . . . . .	19
2.3.1. Sistemas Lagrangianos . . . . .	19
2.3.2. Sistemas mecánicos totalmente actuados . . . . .	20
2.3.3. Sistemas mecánicos subactuados . . . . .	21
2.3.4. Dinámica de los sistemas mecánicos subactuados . . . . .	22
<b>3. Control de sistemas mecánicos subactuados</b>	<b>23</b>
3.1. Sistemas mecánicos subactuados no lineales . . . . .	23

3.1.1.	Formulación del problema . . . . .	25
3.1.2.	Linealización alrededor de un punto de equilibrio . . . . .	25
3.1.3.	Determinación de la salida plana y la relación entrada-salida . . . . .	26
3.1.4.	Propiedad de conexión en cascada del observador PIG para sistemas mecánicos subactuados . . . . .	28
3.1.5.	Diseño del controlador basado en CRAP . . . . .	32
3.2.	Resumen del procedimiento para el control de sistemas subactuados . . . . .	34
<b>4.</b>	<b>CRAP de sistemas subactuados péndulo de Furuta</b>	<b>35</b>
4.1.	El péndulo de Furuta . . . . .	36
4.1.1.	Modelo no lineal del péndulo de Furuta . . . . .	36
4.1.2.	Planitud diferencial del modelo del péndulo de Furuta linealizado . . . . .	38
4.1.3.	Propiedad de conexión en cascada para el modelo tangente . . . . .	38
4.1.4.	Formulación del Problema de control . . . . .	39
4.2.	Observador PIG en cascada para el péndulo de Furuta . . . . .	41
4.3.	CRAP para el péndulo de Furuta . . . . .	43
4.4.	Resultados experimentales . . . . .	44
4.4.1.	Comparación de desempeño entre varios controladores . . . . .	49
<b>5.</b>	<b>CRAP de sistemas subactuados <i>Ball and Beam</i></b>	<b>53</b>
5.1.	El sistema <i>ball and beam</i> . . . . .	54
5.1.1.	Modelo no lineal de sistema <i>ball and beam</i> . . . . .	54
5.1.2.	Planitud diferencial del modelo del <i>ball and beam</i> linealizado . . . . .	55
5.1.3.	Propiedad de conexión en cascada para el modelo linealizado . . . . .	56
5.1.4.	Formulación del problema de control . . . . .	57
5.2.	Observador PIG en cascada para sistema <i>ball and beam</i> . . . . .	58
5.3.	CRAP para sistema <i>ball and beam</i> . . . . .	60
5.4.	Resultados experimentales . . . . .	60
5.4.1.	Prueba experimental con perturbaciones externas . . . . .	62
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>70</b>
<b>A.</b>	<b>Artículos publicados en revistas</b>	<b>85</b>

# Lista de figuras

1.1. Esquema de control mediante rechazo activo de perturbaciones . . . .	3
3.1. Representación de la salida plana mediante una cadena de integradores	28
3.2. Conjunto de $\frac{n}{2}$ observadores propuestos . . . . .	31
4.1. Esquema del péndulo de Furuta . . . . .	37
4.2. Conexión en cascada del sistema péndulo de Furuta linealizado . . .	39
4.3. Conjunto de 2 observadores propuestos para el sistema péndulo de Furuta	42
4.4. Diagrama de bloques del esquema control para el péndulo de Furuta .	44
4.5. Péndulo de Furuta . . . . .	45
4.6. Comportamiento de la posición angular del péndulo en lazo cerrado. .	46
4.7. Comportamiento del seguimiento de trayectoria del brazo horizontal.	47
4.8. Par de control. . . . .	47
4.9. Estimación en línea de la perturbación . . . . .	48
4.10. Seguimiento de trayectoria de la salida plana. . . . .	48
4.11. Error de seguimiento de la salida plana. . . . .	49
4.12. Comparación de resultados experimentales: errores de seguimiento. . .	51
4.13. Comparación de resultados experimentales: Entradas de Control. . . .	51
5.1. Esquema del sistema <i>ball and beam</i> . . . . .	54
5.2. Estructura del sistema en cascada . . . . .	56
5.3. Conjunto de 2 de observadores para el sistema <i>ball and beam</i> . . . . .	58
5.4. Diagrama de bloques del control para el sistema <i>ball and beam</i> . . . .	60
5.5. Prototipo del sistema <i>ball and beam</i> . . . . .	61
5.6. Comportamiento del seguimiento de trayectoria de la bola . . . . .	62
5.7. Error de seguimiento de trayectoria de la bola . . . . .	63
5.8. Seguimiento de aceleración de la bola . . . . .	63
5.9. Señal de voltaje de control . . . . .	64
5.10. Estimación en línea de la perturbación . . . . .	64
5.11. Comparación del seguimiento de trayectoria de la bola con perturba- ciones externas . . . . .	66
5.12. Comparación de el error de seguimiento de trayectoria . . . . .	67
5.13. Comparación de la posición angular de la viga . . . . .	67

5.14. Señales de voltaje de control . . . . .	68
5.15. Estimación de la perturbación externa aplicada al sistema . . . . .	68

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Control Mediante Rechazo Activo de Perturbaciones

El Control mediante Rechazo Activo de Perturbaciones por sus siglas llamado CRAP ha sido estudiado desde el siglo 19. Esta metodología se presenta como una solución simple y elegante para el control de sistemas lineales y no lineales. La idea principal del CRAP consiste en la estimación de la parte desconocida de la dinámica del sistema a ser controlado y la cancelación de sus efectos utilizando una ley de control lineal. Este procedimiento reduce el problema de control de un sistema dinámico complejo como son los sistemas no lineales a uno más simple, generalmente un sistema lineal perturbado que es menos difícil de controlar utilizando un controlador lineal. Este principio difiere del enfoque matemático tradicional del Control Automático moderno. El ingeniero Francés Jean Victor Poncelet es considerado como el precursor de esta idea y enunció en 1829 [1] lo que se conoce como *principio de invariancia* el cual se enuncia como: **“Las perturbaciones se deben utilizar para generar una señal activa que tienda a cancelar el efecto de la misma”**, el “Principio de Poncelet” gozó de popularidad académica e industrial en la desaparecida Unión Soviética de acuerdo a la revisión bibliográfica hecha por Poznyak [2]. Este principio fue formalmente establecido por el profesor Gheorghe Vladimirovich Shipanov en 1939 [3], el análisis por esos años se realizaba fundamentalmente en sistemas lineales concentrándose en sistemas descritos por funciones de transferencia. El “Principio de Poncelet” fue reforzado con el empleo de mecanismos de realimentación. Algunas contribuciones fundamentales en el área fueron hechas por: Kulebakin 1948 [4], [5], B.N. Petrov 1955 [6] y L. Finkelstein 1960 [7]. Los primeros trabajos realizados en Estados Unidos con este enfoque se deben a F.G. Shinsky 1963 [8], Narendra 1964 [9] y L. McBride 1965 [10]. En los años 60 el método fue abordado utilizando la representación en espacio de estados; la idea consiste en agrupar las incertidumbres dependientes del estado en un solo termino el cual se define como una nueva variable de estado, lo anterior permite el empleo de observadores de entradas desconocidas [11]. Los desarrollos iniciales en esta área se deben a C. D. Johnson [12] quien a principios de los años setenta introduce el control por acomodo de perturbaciones, una versión discreta de este controlador fue propuesta en [13] y una versión adaptable fue

presentada en [14]. Ya en los años noventa Jingqing Han propuso para las dinámicas desconocidas y perturbaciones externas el Observador de Estado Extendido (OEE) en el cual las dinámicas desconocidas y las perturbaciones externas son tratadas como un estado ficticio, éste es estimado usando un observador de estado y subsecuentemente cancelado, obteniéndose una ley control lineal invariante en el tiempo [15], formándose la columna vertebral de un nuevo paradigma: Control mediante Rechazo Activo de Perturbaciones (CRAP) [16]. La nueva metodología fue aplicada exitosamente en implementaciones industriales [17], [18]. Las ideas de Han fueron sistemáticamente introducidas en artículos y libros en [16] y [19]. Las contribuciones recientes del profesor Zhiqiang Gao han nutrido al CRAP con aplicaciones académicas [20], [21] en diferentes áreas tecnológicas y de ingeniería [22], [23], [24], [25]. [26], [27], [28]. Algunas contribuciones donde el enfoque matemático riguroso sobre las características del CRAP son discutidas en los trabajos de Zheng, Zhao and Guo [29], [30], [31]. El libro de Z. Guo recientemente publicado [32], incluye algunas contribuciones sobre Control por Rechazo Activo de Perturbaciones para una amplia clase de sistemas dinámicos. El profesor Hebertt Sira-Ramírez ha contribuido en el área de CRAP con la idea del Observador Proporcional Generalizado (PIG) como un observador de estado extendido OEE. La primera propuesta de observadores PIG fue en el contexto de un observador mediante modos deslizantes desarrollado en [33] para sistemas robóticos flexibles. Una versión del observador PIG sin el enfoque de modos deslizantes fue presentada en [34] para la sincronización de sistemas caóticos. Una gran variedad de resultados de aplicaciones utilizando el observador PIG han sido desarrolladas para sistemas no lineales diferencialmente planos, entre estos se incluyen convertidores de potencia [35], sistemas robóticos [36], [37], [38] [39], máquinas eléctricas [40], [41], sistemas subactuados [42],[43], levitadores magnéticos [44], control tolerante a fallos [45], entre otros. Un estudio teórico reciente de muchas de las aplicaciones de la metodología CRAP se muestra en el trabajo de Madonski y Herman [46]. Una variante del CRAP es la idea del control libre de modelo presentada en el año 2006 [47], donde la metodología se basa en tratar a los sistemas no lineales como una caja negra y éstos son aproximados bajo el contexto de técnicas de identificación algebraica. El estudio fue extendido por Fliess y Join en 2008 [48] donde se propuso un viraje esencial en el control libre de modelo al proponer una combinación de métodos algebraicos y de rechazo activo de perturbaciones aplicados a modelos locales de primer y segundo orden con dinámicas no lineales con una complejidad significativa (ver [49], [50]). En el libro del profesor Sira-Ramírez [51] se presenta un estudio sobre identificación algebraica y control de sistemas lineales y no lineales.

## 1.2. Control Mediante Rechazo Activo de Perturbaciones en Sistemas No lineales

El rechazo activo de Perturbaciones conlleva los siguientes puntos:

1. Estimación de las perturbaciones mediante un modelo definido por una función dependiente únicamente del tiempo.

2. Estimación de estados no medidos del sistema o de las variables de fase de la salida del sistema.
3. Diseño del controlador que incluya acciones de cancelación del efecto de las perturbaciones.

En la Figura 1.1 se muestra un diagrama de bloques del controlador mediante rechazo activo de perturbaciones aplicado a una planta no lineal, donde  $y$  es la salida del sistema,  $u$  es la entrada de control,  $\xi(t)$  es el compendio de perturbaciones internas, términos no modelados, incertidumbres y perturbaciones externas que afectan a la planta,  $y^*(t)$  es la referencia,  $\hat{x}(t)$  es el vector de los estados estimados del sistema y  $\hat{\xi}(t)$  la estimación de la perturbación, ambos estimados mediante un observador.

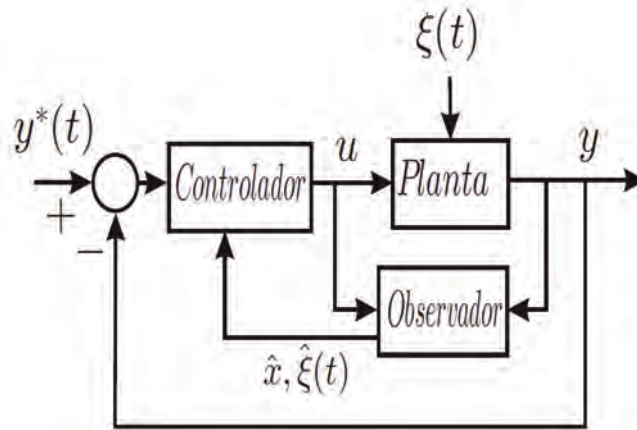


Figura 1.1: Esquema de control mediante rechazo activo de perturbaciones

Los métodos existentes basados en CRAP hacen énfasis en:

1. Estimación de las perturbaciones mediante observadores no lineales de estado extendido Han [19], Gao [52], Su [53], observadores por regímenes deslizantes Han [15], Fridman [54], Filtraje de Kalman [55] y uso de ultra-modelos Fließ [50], Sira-Ramírez [56].
2. Controladores no lineales continuos y discontinuos basados en la cancelación en línea de incertidumbres estimadas como el PID no lineal Gao [57], Regímenes Deslizantes Levant [58], Utkin [59], Alta Ganancia Khalil [60].

### 1.3. Sistemas subactuados

Los sistemas mecánicos subactuados son aquellos que tienen menos entradas de control que variables de salida y se utilizan en un gran número de aplicaciones industriales, militares, científicas y de transporte estos incluyendo robótica, sistemas

aeroespaciales, sistemas marítimos, sistemas flexibles, sistemas de transporte aéreo y terrestre entre otros. Se puede tener un sistema subactuado debido a las siguientes razones.

- **Dinámica del sistema:** Existen sistemas que naturalmente tienen una dinámica subactuada: los ejemplos más notables son los sistemas de transporte aéreo y entre ellos se pueden mencionar a los helicópteros [61], aviones y naves espaciales [62],[63], los vehículos aéreos no tripulados como cuadrirrotos [64] y dirigibles [65], también se pueden mencionar los sistemas de transporte marítimo como los vehículos submarinos [66] y barcos [67], los sistemas de transporte terrestre como las bicicletas[68], sistema *segway* [69], robots móviles diferenciales [70], algunos sistemas de locomoción sin ruedas como los robots ápodos [71] y humanoides [72], sistemas industriales como las grúas [73] y los sistemas de absorción de vibraciones [74] etc.
- **Diseño y reducción de costos:** Cuando se requiere reducir los costos de construcción o de consumo energía del sistema, se pueden eliminar actuadores como es el caso de los cohetes espaciales, misiles [75], satélites con propulsores y satélites con sistemas inerciales [76]. En otros casos como el de los robots manipuladores con estructuras flexibles [77] al reducir el peso del robot como consecuencia su estructura mecánica se vuelve flexible, esto también sucede en naves espaciales flexibles [78] .
- **Falla de actuadores:** En los vehículos aéreos y submarinos incluso en robots manipuladores la falla de actuadores puede provocar accidentes; el objetivo de control es lograr que el sistema siga funcionando a pesar de la falla del actuador [79].
- **Dinámica impuesta artificialmente:** Con el propósito de controlar sistemas subactuados de alto orden, se utilizan como ejemplos sistemas no lineales complejos de bajo orden, por ejemplo los sistemas acrobot [80], pendubot [81], *ball and beam* [82], péndulo invertido sobre carro [83], péndulo de Furuta [84], sistema TORA [85] entre otros.

Los sistemas subactuados tienen características importantes que los convierten en un tema de investigación interesante para el diseño e implementación de leyes de control de las cuales resaltan las siguientes:

- Son sistemas multivariables con dinámicas no lineales.
- Se pueden dividir en sistemas con una sola entrada y sistemas con múltiples entradas de control.
- Muchos de los sistemas subactuados no son exactamente linealizables mediante realimentación.



- Algunos sistemas subactuados pueden ser parcialmente linealizados mediante realimentación aunque el sistema resultante permanece como un sistema no lineal.
- La linealización tangente alrededor de un punto de equilibrio de la mayoría de sistemas subactuados es controlable aunque existen casos aislados en los cuales no es controlable como lo es el sistema péndulo de Kapizta [86],[87].
- Los sistemas linealizados en lazo abierto presentan características de inestabilidad y de fase no mínima para algunos puntos de equilibrio.
- Existen sistemas subactuados que pierden controlabilidad en algunas de sus configuraciones.

Entre los controladores propuestos para el control de sistemas mecánicos subactuados destacan los controladores PID en cascada [88], los controles mediante redes neuronales [89], el control mediante modos deslizantes [90], la linealización parcial por realimentación [91], el control adaptable [92], el control difuso [93], el control basado en pasividad [94], entre otros. Estos controladores son ejemplos representativos en el área académica y de experimentación. En el trabajo desarrollado en Olfati-Saber [95] se realiza un amplio análisis del modelado, clasificación y metodología de control de sistemas mecánicos y aeroespaciales subactuados.

## 1.4. Planteamiento del problema

Los sistemas mecánicos subactuados son aquellos que poseen menos entradas de control que grados de libertad. Estos han sido estudiados arduamente en los últimos años y son utilizados en un gran número de aplicaciones por ejemplo en robótica, sistemas aéreoespaciales, sistemas marítimos, robots móviles, entre otros razón por la cual intervienen en muchos procesos de producción y de transporte modernos. El hecho de tener más grados de libertad que actuadores convierte el control de estos sistemas en un reto muy grande, en especial cuando se requiere que el sistema siga una trayectoria deseada o permanezca en una posición deseada. Generalmente los sistemas subactuados tienen modelos dinámicos de alto orden y son altamente no lineales, lo cual incrementa la dificultad para el diseño de leyes de control. Se han propuesto diferentes tipos de controladores a lo largo de los años para el control de sistemas subactuados, el diseño e implementación de éstos varía en complejidad dependiendo de la técnica utilizada y muchas veces se requiere conocer el modelo matemático exacto. Tomando en cuenta lo anterior, en este trabajo se plantea el problema de determinar leyes de control mediante rechazo activo de perturbaciones en combinación con la propiedad de planitud diferencial para sistemas subactuados con una sola entrada que no son exactamente linealizables mediante realimentación de estados, pero que presentan un modelo lineal controlable alrededor de un punto de equilibrio y por lo tanto se puede obtener una salida especial llamada salida plana.

La planitud diferencial brinda la ventaja de utilizar las herramientas de los sistemas lineales en espacio de estados para el diseño del controlador y observador PIG [96].

## 1.5. Objetivos

### 1.5.1. Objetivo General

Diseñar e implementar leyes de control basadas en el control mediante rechazo activo de perturbaciones CRAP utilizando la propiedad de planitud diferencial para la regulación y seguimiento de trayectoria punto a punto de sistemas subactuados no lineales.

### 1.5.2. Objetivos Específicos

- Determinación de modelos matemáticos de sistemas mecánicos subactuados no lineales como son el péndulo de Furuta y el sistema *ball and beam*.
- Determinación de la salida plana y sus propiedades para los sistemas subactuados mencionados anteriormente.
- Diseño de leyes de control mediante rechazo activo de perturbaciones.
- Implementación en simulación de las leyes de control propuestas.
- Identificación de los modelos de las plataformas experimentales de sistemas subactuados.
- Verificación del desempeño de las leyes de control mediante resultados experimentales.

## 1.6. Organización de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se presentan algunos conceptos y resultados básicos de la teoría de planitud diferencial para sistemas lineales invariantes en el tiempo representados en el espacio de estados. También se describe la teoría básica del CRAP, el diseño del observador PIG y el controlador para sistemas diferencialmente planos, así como la metodología para obtener modelos dinámicos de sistemas mecánicos subactuados.
- En el Capítulo 3 se exponen los resultados obtenidos utilizando CRAP para sistemas mecánicos subactuados no lineales. En la primera parte del Capítulo se describen los sistemas subactuados no lineales en su representación de espacio de estados y la linealización del sistema subactuado no lineal alrededor de un punto de equilibrio, se generaliza el procedimiento para obtener la salida plana para

sistemas con una entrada una salida, la representación entrada-salida usando la salida plana, la propiedad de representación en cascada del sistema que provee la propiedad de planitud diferencial, el diseño del observador PIG y el CRAP.

- En el Capítulo 4 se presenta una aplicación de los resultados teóricos obtenidos en el Capítulo 3 para el seguimiento de trayectoria en el Péndulo de Furuta, así mismo, se presenta una comparación del CRAP con un controlador basado en modos deslizantes.
- En el Capítulo 5 se controla el sistema *Ball and beam* obteniéndose resultados experimentales para el seguimiento de trayectoria así mismo, se presenta una comparación del CRAP con un controlador lineal basado en realimentación de estados.
- En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones de este trabajo así como algunas sugerencias para trabajos futuros.

## 1.7. Lista de artículos publicados

La realización de este trabajo a dado lugar a las siguientes publicaciones:

### Revistas

- M. Ramírez-Neria, H. Sira-Ramírez, R. Garrido-Moctezuma, A. Luviano-Juárez, *On the linear control of underactuated nonlinear systems via tangent flatness and active disturbance rejection control: The case of the ball and beam system* Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 2016 138 (10), 104501
- M. Ramírez-Neria, H. Sira-Ramírez, R. Garrido-Moctezuma, A. Luviano-Juárez, *Linear active disturbance rejection control of underactuated systems: The case of the Furuta pendulum*, ISA transactions 2013 53 (4), 920-928

### Congresos internacionales

- M. Ramírez-Neria, H. Sira-Ramírez, R. Garrido-Moctezuma, A. Luviano-Juárez, *Linear robust Generalized Proportional Integral Control of a ball and beam system for trajectory tracking tasks*. En IEEE American Control Conference (ACC), 2016 (pp. 4719-4724).
- M. Ramírez-Neria, H. Sira-Ramírez, R. Garrido-Moctezuma, A. Luviano-Juárez, *Flat filtering: A classical approach to robust control of nonlinear systems*. En IEEE American Control Conference (ACC), 2016 (pp. 3844-3849).
- M. Ramírez-Neria, H. Sira-Ramírez, R. Garrido-Moctezuma, A. Luviano-Juárez, *Active disturbance rejection control of singular differentially flat systems*. En IEEE 54th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE), 2015 (pp. 554-559)

- M. Ramírez-Neria, H. Sira-Ramírez, R. Garrido-Moctezuma, A. Luviano-Juárez, *On the linear Active Disturbance Rejection Control of the inertia wheel pendulum*. En IEEE American Control Conference (ACC), 2015 (pp. 3398-3403).
- M. Ramírez-Neria, H. Sira-Ramírez, R. Garrido-Moctezuma, A. Luviano-Juárez, *On the linear active disturbance rejection control of the Furuta pendulum*. En IEEE American Control Conference (ACC), 2014 (pp. 317-322).

### Congresos Nacionales

- M. Ramírez-Neria, H. Sira-Ramírez, R. Garrido-Moctezuma, A. Luviano-Juárez, *Control Proporcional Integral Generalizado de un sistema ball and beam para tareas de seguimiento de trayectoria*, Congreso Nacional de Control Automático, AMCA 2015

## Capítulo 2

# Preliminares Matemáticos

### 2.1. Planitud diferencial de sistemas una entrada una salida lineales invariantes en el tiempo

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo que tienen una entrada de control y una variable de salida, son comúnmente denominados sistemas una entrada una salida. Para este tipo de sistemas generalmente se requiere regular la salida del sistema o seguir una trayectoria deseada. Para facilitar la realización de estas tareas independientemente de la naturaleza de la dinámica interna asociada con la variable de salida que es llamada como dinámica cero o la dinámica residual, se requiere que el sistema sea diferencialmente plano o simplemente plano. En muchos sistemas, particularmente sistemas lineales, existe una conexión entre la propiedad de planitud diferencial y el concepto de controlabilidad [97]. Un sistema lineal invariante en el tiempo es plano si y sólo si el sistema es controlable [96]. Un gran reto a resolver para los sistemas de fase no-mínima es seguir una trayectoria deseada. Para el caso de seguimiento de trayectoria punto a punto la planitud provee una solución indirecta a este problema. Para resolver problemas con un mayor grado de complejidad como lo es seguir una trayectoria arbitraria, los sistemas planos de fase no-mínima podrían en algunos casos tener problemas para realizar esta tarea. Una característica interesante de la planitud es que las propiedades del sistema se definen en una relación entrada-salida. Ésta puede determinarse utilizando una parametrización diferencial de las variables del sistema. En algunas ocasiones el empleo de esta parametrización puede ser más sencillo que utilizar las ecuaciones originales del sistema. Cuando los sistemas son afectados por perturbaciones externas, la propiedad de planitud diferencial puede ser explotada para el diseño de controladores que funcionen a pesar de estas perturbaciones.

#### 2.1.1. Sistemas diferencialmente planos

El concepto de planitud diferencial proviene del Álgebra Diferencial para el estudio en sistemas dinámicos y de control. Fue inventado hace 22 años en Francia por el profesor Michel Fliess y sus colaboradores Jean Levine, Philippe Martin and Pierre Rouchon [97]. En el contexto de esta teoría, una variable es llamada *endógena* si puede

ser expresada como una combinación lineal de la entrada, la salida y un número finito de sus derivadas, en caso contrario la variable es llamada *exógena*. Entonces una variable endógena se dice que es una *función diferencial* de las variables de entrada y de salida. Un sistema una entrada una salida es llamado *diferencialmente plano* si existe una variable endógena llamada *salida plana*, indicada por  $F$  tal que la entrada  $u$  y los estados que describen el sistema  $x$  pueden ser expresados como combinación lineal de la salida plana y un número finito de sus derivadas temporales. En este caso particular  $x$  y  $u$  son funciones diferenciales de la salida plana  $F$ , esto quiere decir que la salida plana  $F$  parametriza diferencialmente a todo el sistema. Considere el siguiente sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  son los estados del sistema y  $u \in \mathfrak{R}$  es la entrada. El sistema (2.1) es plano si existe una salida  $F$ ,

$$F = \Phi(x, \dot{x}, \dots, x^\alpha) \quad (2.2)$$

tal que

$$x = \vartheta(F, \dot{F}, \dots, F^{(\beta)}) \quad (2.3)$$

$$u = \Upsilon(F, \dot{F}, \dots, F^{(\beta+1)}) \quad (2.4)$$

con  $\alpha \in N$  y  $\beta \in N$

### 2.1.2. Sistemas representados en espacio de estados

Los sistemas dinámicos lineales son frecuentemente representados en el espacio de estados de Kalman de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial vectorial de primer orden [98]:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad u \in \mathfrak{R} \quad (2.5)$$

siendo la matriz  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  y  $b \in \mathfrak{R}^n$ . Suponga que el polinomio característico de la matriz constante  $A$  escrito en variable compleja  $s$  es dado por

$$s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad \alpha_i \in \mathfrak{R} \quad i = 0, \dots, n-1$$

Supóngase que el sistema es controlable, se define una transformación de coordenadas del espacio de estados de la forma  $z = Tx$ , con  $T$  definido como la inversa de la matriz de controlabilidad de Kalman.

$$T = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1}$$

El sistema en nuevas coordenadas,  $z$ , está dado por:

$$\dot{z} = \Lambda z + \gamma u, \quad \Lambda = TAT^{-1}, \quad \gamma = Tb \quad (2.6)$$

donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \vdots \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

Se define el estado en nuevas coordenadas  $F = z_n$  que parametrizan la transformación de las nuevas variables de estado, y por lo tanto, las variables  $x$  del sistema original, así como la entrada  $u$ . De hecho, se puede verificar que las variables transformadas y la entrada  $u$  pueden ser escritas en términos de  $F$  y un número finito de sus derivadas es decir,

$$\begin{aligned} z_n &= F \\ z_{n-1} &= \dot{F} + \alpha_{n-1}F \\ z_{n-2} &= \ddot{F} + \alpha_{n-1}\dot{F} + \alpha_{n-2}F \\ &\vdots \\ z_1 &= F^{(n-1)} + \alpha_{n-1}F^{(n-2)} + \dots + \alpha_1F \\ u &= F^{(n)} + \alpha_{n-1}F^{(n-1)} + \dots + \alpha_0F \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como consecuencia todos los estados originales  $x$  pueden también ser parametrizados en términos de la salida plana, el estado transformado  $F = z_n$  es entonces la *salida plana*. Para un sistema lineal controlable representado en espacio de estados:

$$\dot{x} = Ax + bu$$

La salida plana está dada mediante la combinación lineal de estados obtenida del último reglón de la matriz inversa de controlabilidad de Kalman  $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$

$$F = [0 \ 0 \ \dots \ 1] [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1} x \quad (2.8)$$

Es claro que para este sistema lineal una entrada una salida, la salida plana puede construirse en función sólo de las variables de estado del sistema. Esto tiene una consecuencia importante respecto a la *observabilidad* de la salida plana. Supóngase por el momento que la salida plana  $F$  es una función que sólo depende del vector de estado  $x$ . Debido a que el sistema es lineal se supone que  $F$  es una función lineal del vector de estado  $x$ .

$$F = \lambda x$$

donde  $\lambda \in \mathfrak{R}^n$ . Para determinar la salida plana se debe encontrar ahora el vector fila  $\lambda$ . Se escribe ahora el siguiente vector con  $F$  y sus derivadas temporales.

$$\begin{aligned}
 F &= \lambda x \\
 \dot{F} &= \lambda \dot{x} = \lambda A x + \lambda b u \\
 \ddot{F} &= \lambda A^2 x + \lambda A b u + \lambda b \dot{u} \\
 &\vdots \\
 F^{(n-1)} &= \lambda A^{(n-1)} x + \lambda A^{(n-2)} b u + \dots + \lambda b u^{(n-2)}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

En notación matricial, este conjunto de relaciones se representa como:

$$\begin{pmatrix} F \\ \dot{F} \\ \ddot{F} \\ \vdots \\ F^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \lambda A^2 \\ \vdots \\ \lambda A^{(n-1)} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda b & 0 & \dots & 0 \\ \lambda A b & \lambda b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A^{(n-2)} b & \lambda A^{(n-3)} b & \dots & \lambda b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

De aquí se puede obtener  $x$  en términos de  $F$  y de sus derivadas temporales. El vector  $\lambda$  debe satisfacer

$$\lambda b = 0, \quad \lambda A b = 0, \quad \dots \quad \lambda A^{n-2} b = 0, \quad \lambda A^{n-1} b \neq 0 \tag{2.11}$$

También se puede notar que

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \lambda A^2 \\ \vdots \\ \lambda A^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

debe ser invertible esto significa que la salida plana es una salida observable la cual tiene de grado relativo igual a  $n^1$ . Si la matriz (2.12) no es invertible entonces  $F$  no es una variable endógena, esto significa que  $F$  no tiene relación con  $x$  ni con  $u$ .

Se puede observar de la relación

$$\begin{pmatrix} F \\ \dot{F} \\ \ddot{F} \\ \vdots \\ F^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \lambda A^2 \\ \vdots \\ \lambda A^{(n-1)} \end{pmatrix} x \tag{2.13}$$

<sup>1</sup>Un sistema lineal tiene de grado relativo igual a  $n$  si el numerador de su función de transferencia es un polinomio de grado cero y su denominador está constituido por un polinomio de grado  $n$ , ver [99].



que si la matriz de observabilidad no es invertible, entonces existe un vector columna tal que

$$\gamma \begin{pmatrix} F \\ \dot{F} \\ \ddot{F} \\ \vdots \\ F^{(n-1)} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \lambda A^2 \\ \vdots \\ \lambda A^{(n-1)} \end{pmatrix} x = 0 \quad (2.14)$$

Entonces  $F$  no está relacionado con ninguna variable del sistema. Esto significa que  $F$  es una variable exógena, por lo tanto incontrolable, claramente una contradicción con el hecho de que el sistema sea controlable .

Se puede resumir que:

- La planitud diferencial permite calcular en términos de la salida plana las trayectorias de las variables de estado del sistema y sus entradas de control sin resolver las ecuaciones diferenciales que lo representan.
- La planitud diferencial permite la trivialización del diseño de controladores debido a que establece una equivalencia del sistema hacia una representación lo más simple posible en forma de una cadena finita de integradores desacoplados.

## 2.2. Idea central del control basado en el observador PIG para sistemas diferencialmente planos

Los observadores Proporcionales Integrales Generalizados PIG (en inglés son conocidos como *Generalized Proportional Integral Observers*) fueron introducidos en Sira-Ramirez y Feliu-Batlle [33] en el contexto de observadores mediante modos deslizantes aplicados para la detección de obstáculos en línea en robots flexibles. La versión continua de estos observadores es estudiada en el trabajo de J. Cortés-Romero, A. Luviano-Juárez, y H. Sira-Ramírez [34], donde fueron aplicados para la sincronización de sistemas caóticos.

Considérese el siguiente sistema no lineal [100], perturbado y suave <sup>2</sup>, de una entrada una salida,

$$y^{(n)} = \psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) + \gamma(t, y)u + \varphi(t) \quad (2.15)$$

El sistema no perturbado ( $\varphi(t) \equiv 0$ ) es diferencialmente plano, o simplemente plano, dado que todas las variables del sistema, incluyendo  $u$ , se pueden expresar en términos de funciones diferenciales de la salida  $y$ , es decir, funciones de  $y$  y de un número finito de sus derivadas temporales. Se supone que la perturbación exógena  $\varphi(t)$  es uniformemente absolutamente acotada. En forma similar, se supone que para todas las soluciones acotadas  $y(t)$  de (2.15), obtenidas por medio de entradas de control  $u$

<sup>2</sup>En este trabajo nos referiremos a un sistema no lineal suave como aquel que esta definido en campos vectoriales infinitamente diferenciables, ver [99].

suficientemente suaves y acotadas uniformemente la perturbación aditiva endógena  $\psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ , vista como una señal variante en el tiempo, es uniformemente absolutamente acotada. También se supone que la función no lineal  $\gamma(t, y)$

$$\inf |\gamma(t, y)| \geq \mu > 0 \quad (2.16)$$

para todas las soluciones acotadas y suaves  $y(t)$  de (2.15) obtenidas mediante una entrada suave y acotada de la señal de control  $u$ . Esta suposición es natural para evitar las singularidades de la ganancia de entrada y la falta de controlabilidad del sistema. Se pueden extender los resultados para funciones cuyas ganancias  $\gamma$  sean dependientes de derivadas de  $y(t)$  con respecto al tiempo; sin embargo se considera la ganancia  $\gamma$  conocida.

**Formulación del problema:** Dada una trayectoria de referencia,  $y^*(t)$  para la salida plana  $y(t)$  tal que (2.16) es válida, proponer una ley de control lineal para el sistema (2.15) de tal forma que se tenga una convergencia de la salida plana,  $y(t)$  hacia la señal de referencia  $y^*(t)$ , a pesar de los efectos de la perturbación endógena desconocida  $\psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  y de la perturbación exógena,  $\varphi(t)$ . La convergencia aproximada a que se alude implica que el error de seguimiento  $e_y(t) = y - y^*(t)$  y sus primeras  $n$  derivadas con respecto al tiempo convergen exponencialmente, a una vecindad tan pequeña como se requiera del origen en el espacio de fase del error de seguimiento. La solución del problema se puede llevar a cabo en un contexto totalmente lineal si se considera el modelo no lineal (2.15) como un sistema *lineal* perturbado, como el que se muestra a continuación:

$$y^{(n)} = \gamma(t, y)u + \tilde{\xi}(t) \quad (2.17)$$

donde  $\gamma(t, y)$  es conocida y  $\tilde{\xi}(t) = \psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) + \varphi(t)$  es una función del tiempo completamente desconocida pero uniformemente absolutamente acotada. Notar que el error de seguimiento de trayectoria  $e_y(t) = y - y^*(t)$  y la dinámica del error de seguimiento de trayectoria, el cual se puede escribir como

$$e_y^{(n)} = \gamma(t, y)u - \gamma(t, y^*)u^* + \tilde{\xi}(t) \quad (2.18)$$

donde  $u^*$  es la ley de control deseada, se simplifica a

$$e_y^{(n)} = \gamma(t, y)u + \xi(t) \quad (2.19)$$

La función de perturbaciones desconocidas llamada *perturbación total* definida como  $\xi(t) = -\gamma(t, y^*)u^* + \tilde{\xi}(t)$  es algebraicamente *observable* en el sentido de Diopp y Fliess [101]. La prueba de este hecho es inmediata después de escribir (2.19) como

$$\xi(t) = e_y^{(n)} - \gamma(t, y)u \quad (2.20)$$

es decir,  $\xi(t)$  puede expresarse en términos de la entrada de control  $u$ , del error de seguimiento  $e_y$  y de un número finito de sus derivadas. Esto significa, que  $\xi(t)$  se puede expresar mediante un modelo polinomial aproximado válido pero sobre el

cual se puede imponer una *auto-actualización automática*, pudiéndose lograr entonces una estimación aproximada de  $\xi(t)$  por medio de un observador lineal. El modelo polinomial de la perturbación  $\xi(t)$  está descrito por una ecuación diferencial lineal no-homogénea cuyo orden  $p$  excede al menos en una unidad al grado del polinomio de Taylor  $p - 1$ , que por hipótesis aproxima dicha perturbación [102] es decir

$$\xi(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i t^i + R(t) \quad (2.21)$$

donde  $R(t)$  es un término residual. La  $p$ -ésima derivada de la perturbación respecto del tiempo está definida como:

$$\frac{d^p}{dt^p} \xi(t) = R^{(p)}(t) \quad (2.22)$$

Se incorpora posteriormente este modelo lineal a la descripción del sistema (2.19) como un *modelo interno de la perturbación* y se diseña entonces un observador que adopta este modelo polinomial como parte de su dinámica.

### 2.2.1. Observador PIG

Dado el sistema lineal perturbado (2.19) tal que  $e_y = e_{y0}$ ,  $\dot{e}_y = e_{y1}$ ,  $\ddot{e}_y = e_{y2}$ ,  $\dots$ ,  $e_y^{(n-1)} = e_{yn-1}$ ,  $e_y^{(n)} = e_{yn}$ , su representación en espacio de estados está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_{y0} &= e_{y1} \\ \dot{e}_{y1} &= e_{y2} \\ &\vdots \\ \dot{e}_{yn-1} &= \gamma(t, y)u(t) + \xi(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Debido a que  $\xi(t)$  puede modelarse localmente como un polinomio Taylor de grado  $(p - 1)$  más un término residual  $R(t)$  utilizando (2.21), se obtiene

$$\xi(t) = z_1 + r(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{p-1} t^{p-1} + R(t) \quad (2.24)$$

Las condiciones iniciales de los coeficientes  $[a_0, a_1, \dots, a_{p-1}]$ , cambian en cada instante de tiempo  $[t_0, t_1, t_2, \dots, t_f]$ , alrededor del cual se hace la aproximación y se ajustan automáticamente de forma tal, que satisfacen que el polinomio  $z_1$  es invariante con respecto a traslaciones finitas en el tiempo y por lo tanto, cumple trivialmente la ecuación diferencial homogénea,  $z_1^{(p)} = 0$ . Se supone que  $\xi(t)$  es acotada y  $\varrho > 0$  por lo tanto cumple que

$$\begin{aligned} |\xi(t)| &= |z_1 + r(t)| \leq |z_1| + |R(t)| \\ |\xi(t)| - |R(t)| &\leq |z_1| \\ |\xi(t)| - |R(t)| &\leq |a_0 + a_1 t + \dots + a_{p-1} t^{p-1}| \\ |\xi(t)| - |R(t)| &\leq |a_0| + |a_1 t| + \dots + |a_{p-1} t^{p-1}| \leq |\varrho| \end{aligned}$$

Se dice que  $z_1$  define *una familia de polinomios de Taylor de grado  $(p - 1)$*  de coeficientes reales arbitrarios. Se considera a  $z_1$  como *el modelo interno* de la perturbación aditiva desconocida (Johnson C. D. [103]). El sistema lineal perturbado (2.23) junto con el modelo polinomial de la señal de perturbación  $\xi(t)$  se convierte de acuerdo a (2.24) y (2.22) en:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_{y0} &= e_{y1} \\
 \dot{e}_{y1} &= e_{y2} \\
 &\vdots \\
 \dot{e}_{n-1} &= \gamma(t, y)u(t) + z_1 \\
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{p-2} &= z_{p-1} \\
 \dot{z}_{p-1} &= z_p \\
 \dot{z}_p &= R^{(p)}(t)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

El modelo de la perturbación adquiere la característica de ser de actualización automática cuando se incorpora como parte de un observador lineal asintótico cuyo error de observación es forzado a converger uniformemente a una pequeña vecindad de cero. Se supone que la función residual  $R(t)$  y sus derivadas con respecto del tiempo  $R^{(p)}(t)$  son acotadas. El siguiente sistema es un observador PIG para el sistema (2.25)

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{e}}_{y0} &= \hat{e}_{y1} + \lambda_{p+n-1}(e_{y0} - \hat{e}_{y0}) \\
 \dot{\hat{e}}_{y1} &= \hat{e}_{y2} + \lambda_{p+n-2}(e_{y0} - \hat{e}_{y0}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{e}}_{yn-1} &= \gamma(t, y)u(t) + \hat{z}_1 + \lambda_p(e_{y0} - \hat{e}_{y0}) \\
 \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \lambda_{p-1}(e_{y0} - \hat{e}_{y0}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{z}}_{p-1} &= \hat{z}_p + \lambda_1(e_{y0} - \hat{e}_{y0}) \\
 \dot{\hat{z}}_p &= \lambda_0(e_{y0} - \hat{e}_{y0})
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Donde  $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+p-1}\}$  son las ganancias del observador PIG. La dinámica del error de observación se define como  $\tilde{e}_{y0} = (e_{y0} - \hat{e}_{y0})$  en consecuencia la dinámica del error de observación queda:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{e}}_{y0} &= \tilde{e}_{y1} - \lambda_{p+n-1}\tilde{e}_{y0} \\
 \dot{\tilde{e}}_{y1} &= \tilde{e}_{y2} - \lambda_{p+n-2}\tilde{e}_{y0} \\
 &\vdots \\
 \dot{\tilde{e}}_{yn-1} &= \tilde{z}_1 - \lambda_p\tilde{e}_{y0} \\
 \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2 - \lambda_{p-1}\tilde{e}_{y0} \\
 &\vdots \\
 \dot{\tilde{z}}_{p-1} &= \tilde{z}_p - \lambda_1\tilde{e}_{y0} \\
 \dot{\tilde{z}}_p &= R^{(p)}(t) - \lambda_0\tilde{e}_{y0}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Los errores de estimación  $\tilde{e}_{yi} = e_{yi} - \hat{e}_{yi}$ , para  $i = 1, \dots, n-1$  y los errores de estimación de las variables de fase de la perturbación  $\tilde{z}_j = z_j - \hat{z}_j$ , para  $j = 1, \dots, p$ , convergen exponencialmente a una vecindad pequeña del origen del error de reconstrucción de estado, la cual puede ser suficientemente pequeña gracias a la selección adecuada de los parámetros  $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+p-1}\}$ . La dinámica del error de estimación  $\tilde{e}_{y0}$  descrita en(2.28) cumple la siguiente ecuación diferencial lineal perturbada

$$\tilde{e}_{y0}^{(n+p)} + \lambda_{n+p-1}\tilde{e}_{y0}^{(n+p-1)} + \dots + \lambda_2\ddot{\tilde{e}}_{y0} + \lambda_1\dot{\tilde{e}}_{y0} + \lambda_0\tilde{e}_{y0} = r^{(p)}(t) \tag{2.28}$$

Ya que  $R(t)$  por hipótesis es acotada, entonces existen coeficientes  $\lambda_k$  para  $k = 0, \dots, n+p-1$  tales que  $\tilde{e}_{y0}$  converge exponencialmente a una vecindad pequeña de cero, siempre que las raíces del polinomio característico asociado:

$$p_{obs}(s) = s^{(n+p)} + \lambda_{n+p-1}s^{(n+p-1)} + \dots + \lambda_2s^2 + \lambda_1s + \lambda_0 \tag{2.29}$$

estén suficientemente lejos del eje imaginario en el semiplano izquierdo del plano complejo, en la practica los autovalores del observador se escogen de tal forma que su parte real negativa sea mayor en valor absoluto que la parte real de los autovalores escogidos para el controlador mediante realimentación de estados, generalmente se escoge una relación observador/controlador de 5 a 10 veces mayor [99].

### 2.2.2. Control basado en el observador PIG

Con el observador PIG se cuenta con una reconstrucción en línea de los estados del sistema, así como de las perturbaciones. El objetivo ahora es una ley de control que permita al sistema seguir una trayectoria deseada. Una opción es un controlador que cancele todas las perturbaciones externas. Esto se consigue con una ley de control con una realimentación lineal de los estados que además prevea la cancelación de la perturbación. Para el sistema lineal perturbado

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_{y0} &= e_{y1} \\
 \dot{e}_{y1} &= e_{y2} \\
 &\vdots \\
 \dot{e}_{yn-1} &= \gamma(t, y)u(t) + \xi(t)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

se propone la siguiente ley de control

$$u(t) = \gamma^{-1}(t, y) [-\hat{z}_1 + V] \quad (2.31)$$

donde

$$V = -\sum_{i=1}^{n-1} k_i \hat{e}_{yi} - k_0 e_{y0} \quad (2.32)$$

La función  $\gamma(t, y)$  se supone conocida,  $\hat{e}_{yi}$  son los estados estimados por el observador FIG (2.28) Sustituyendo la ley de control (2.31) y (2.32) en el sistema lineal perturbado (2.30)

$$\begin{aligned} \dot{e}_{y0} &= e_{y1} \\ \dot{e}_{y1} &= e_{y2} \\ &\vdots \\ \dot{e}_{yn-1} &= \gamma(t, y) (\gamma^{-1}(t, y) [-\hat{z}_1 + V]) + \xi(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

simplicando se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_{y0} &= e_{y1} \\ \dot{e}_{y1} &= e_{y2} \\ &\vdots \\ \dot{e}_{yn-1} &= -\sum_{i=1}^{n-1} k_i \hat{e}_{yi} - k_0 e_{y0} + \xi(t) - \hat{z}_1 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Debido a la convergencia del observador se cumple que  $\hat{z}_1 \rightarrow \xi(t)$ . Esta convergencia es sólo aproximada y la diferencia  $R(t) = \xi(t) - \hat{z}_1$  representa el residuo de la expansión en serie de Taylor de  $\xi(t)$ , para los estados de fase estimados por el observador existe un error de estimación descrito por  $\tilde{e}_{yi} = e_{yi} - \hat{e}_{yi}$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ , por lo que el sistema (2.34) se simplifica de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{e}_{y0} &= e_{y1} \\ \dot{e}_{y1} &= e_{y2} \\ &\vdots \\ \dot{e}_{yn-1} &= -\sum_{i=1}^{n-1} k_i \hat{e}_{yi} - k_0 e_{y0} + R(t) + \sum_{i=1}^{n-1} k_i (\tilde{e}_{yi}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se definen las derivadas del error de seguimiento de trayectoria como  $e_{y0}^{(i)} = e_{yi}$  para  $i = 1, \dots, n$  tal que la dinámica del error de seguimiento de trayectoria en lazo cerrado evoluciona como

$$e_{y0}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e_{y0}^{(i)} + k_0 e_{y0} = R(t) + \sum_{i=1}^{n-1} k_i (e_{y0}^{(i)} - \hat{e}_{y0}^{(i)}) \quad (2.36)$$

Es bien sabido que el comportamiento del sistema (2.36) en lazo cerrado se puede modificar a voluntad con la elección de los coeficientes  $[k_n, k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_1, k_0]$

con el objetivo de llevar al error de seguimiento de trayectoria a una vecindad de cero, el polinomio característico de la dinámica del error de seguimiento de trayectoria queda:

$$p_c(s) = s^n + \sum_{i=1}^{n-1} k_i s^i + k_0$$

Se debe asegurar que las raíces de este polinomio se encuentren lo suficientemente alejadas del eje imaginario en el lado izquierdo del plano complejo, con ésto se logra que el polinomio característico sea Hurwitz, además se garantiza que el error de seguimiento de trayectoria y sus derivadas en el tiempo converjan asintóticamente, exponencialmente a una vecindad del origen del espacio de fase del error de seguimiento de trayectoria.

## 2.3. Sistemas mecánicos subactuados

### 2.3.1. Sistemas Lagrangianos

En esta sección se presenta un modelo estándar para obtener el modelo dinámico de un sistema mecánico basado en las ecuaciones de movimiento Euler-Lagrange [95]. Este modelo es utilizado para el diseño de controladores. El Lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  de un sistema mecánico de  $w$  grados de libertad se define como la diferencia entre la energía cinética  $\mathcal{K}(q, \dot{q})$  y energía potencial  $\mathcal{U}(q)$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \quad (2.37)$$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \mathcal{U}(q) \quad (2.38)$$

Las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico de  $w$  grados de libertad están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = P(q)u \quad (2.39)$$

donde  $q = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_w]^T \in \mathfrak{R}^w$  denota el vector de coordenadas generalizadas  $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_w]^T \in \mathfrak{R}^w$  representa el vector de velocidades,  $u = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_w]^T \in \mathfrak{R}^m$ , es el vector de entradas de control,  $M(q) \in \mathfrak{R}^{w \times w}$  es la matriz de inercia la cual es simétrica definida positiva. Por otro lado la energía potencial  $\mathcal{U}(q)$  no tiene forma específica; sin embargo tiene dependencia del vector de posición  $q$  ya que se considera su presencia debido a campos como la fuerza de gravedad. La matriz  $P(q) = [p_1(q), \dots, p_m(q)]$  denota las fuerzas externas siendo  $m$  el número de fuerzas

externas linealmente independientes aplicadas al sistema. Desarrollando las ecuaciones de movimiento Euler-Lagrange (3.25) se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial \dot{q}} = M(q) \dot{q} \quad (2.40)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] = M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} \quad (2.42)$$

Sustituyendo el conjunto de ecuaciones (2.40)-(2.42) en (2.39) las ecuaciones de movimiento para sistemas mecánicos:

$$M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q} - \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} = P(q)u \quad (2.43)$$

El modelo dinámico en su forma compacta y con la notación más ampliamente usada es el siguiente:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = P(q)u \quad (2.44)$$

donde el término  $C(q, \dot{q}) \dot{q} \in R^{w \times w}$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \dot{M}(q) \dot{q} - \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \quad (2.45)$$

y el vector  $G(q) \in \mathfrak{R}^w$  es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenida como el gradiente de la energía potencial.

$$G(q) = \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} \quad (2.46)$$

Es posible demostrar que la matriz  $S_0 = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es antisimétrica [104].

### 2.3.2. Sistemas mecánicos totalmente actuados

Se dice que (2.44) es un sistema mecánico totalmente actuado si  $m = \text{rank}(P(q)) = w$ . Lo anterior implica que  $P(q)$  es una matriz invertible. Para sistemas totalmente actuados el número de entradas de control es igual a la dimensión del vector de coordenadas generalizadas. Por lo tanto los sistemas mecánicos totalmente actuados son exactamente linealizables mediante realimentación esto implica que no poseen dinámica cero [105]. Lo anterior puede probarse aplicando la siguiente ley de control que linealiza el sistema no lineal (2.44) mediante realimentación de estados

$$u = P(q)^{-1} (M(q)v + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q)) \quad (2.47)$$

donde  $v$  constituye una nueva entrada auxiliar. Los términos  $C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q)$  se añaden con el objetivo de cancelarlos en (2.44) obteniéndose

$$M(q) \ddot{q} = M(q)v \quad (2.48)$$



re definiendo las coordenadas generalizadas como  $x_1 = q \in \mathfrak{R}^w$ ,  $x_2 = \dot{q} \in \mathfrak{R}^w$ , de (2.48) se obtiene  $\ddot{q}$  su representación en espacio de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{q} = v\end{aligned}\tag{2.49}$$

el cual es claramente una cadena de integradores dobles. La mayoría de los problemas de control para sistemas mecánicos totalmente actuados pueden ser reducidos a problemas equivalentes para sistemas lineales, esto sugiere que el control de sistemas mecánicos es un reto si existe la presencia de incertidumbres en el modelo, por ejemplo incertidumbre en los parámetros de  $M(q), C(q, \dot{q})$  o  $G(q)$  o cuando el número de entradas de control es menor que el número de variables generalizadas, en este último caso la linealización por realimentación no es posible.

### 2.3.3. Sistemas mecánicos subactuados

Las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico subactuado con variables generalizadas dadas por el vector  $q \in \mathfrak{R}^w$  y Lagrangiano dado por  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  satisfacen las siguientes ecuaciones Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = P(q)u\tag{2.50}$$

Un sistema mecánico es subactuado si  $m = \text{rank}(P(q)) < w = \text{dim}(q)$ . En otras palabras los sistemas mecánicos subactuados tienen menos actuadores que coordenadas generalizadas. Esta restricción no permite la linealización exacta mediante realimentación. Como caso especial se supone que  $P(q) = (0, I_m)^T$  con lo cual las primeras  $w - m$  ecuaciones en (2.50) pueden ser expresadas como sistemas con dinámica de segundo orden

$$\Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0\tag{2.51}$$

donde las fuerzas de Coriolis, centrífugas y términos de gravedad pueden ser altamente no lineales. Si no existe una función  $h$  tal que  $\dot{h} = \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q})$ , la ecuación (2.51) es llamada restricción no holonómica de segundo orden o restricción no holonómica de aceleración. Para el caso especial donde  $P(q) = (0, I_m)^T$ , las primeras  $w - m$  ecuaciones de (2.50) como un subsistema no actuado y a las últimas  $m$  ecuaciones de (2.50) como un subsistema actuado. En el trabajo de Spong [106] se ha mostrado que el subsistema actuado de un sistema general subactuado con  $P(q) = (0, I_m)^T$  puede ser linealizado mediante la técnica linealización parcial mediante realimentación. Sin embargo, después de la linealización parcial el sistema no actuado de (2.50) aún permanece como un sistema no lineal que está acoplado con el subsistema linealizado actuado. Esto hace el diseño del controlador para sistemas subactuados complicado.

### 2.3.4. Dinámica de los sistemas mecánicos subactuados

Para el caso de sistemas Lagrangianos simples, las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico subactuado pueden ser expresadas como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = P(q)u \quad (2.52)$$

donde  $u \in \mathfrak{R}^m$  es el control y  $P(q) \in \mathfrak{R}^{w \times m}$  es una matriz no cuadrada de fuerzas externas con  $m < w$  y rango completo por columnas. Aquí  $m$  denota el número de entradas de control que es menor que el número de coordenadas generalizadas  $w$ . Suponiendo que  $P(q) = [0, I_m]^T$ , la configuración del vector de variables generalizadas puede ser particionado como  $q = (q_1, q_2) \in \mathfrak{R}^{(w-m)} \times \mathfrak{R}^m$  de acuerdo con  $P(q)$  donde  $q_1$  y  $q_2$  son las variables subactuadas y actuadas respectivamente [106]. Después de particionar la matriz de inercia  $M(q)$  la dinámica de un sistema subactuado toma la forma:

$$\begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

## Capítulo 3

# Control de sistemas mecánicos subactuados

En este Capítulo se explora la relevancia de los esquemas de control basados en CRAP para sistemas mecánicos subactuados no lineales que no son diferencialmente planos. Esta clase de sistemas posee una linealización tangente controlable [107], [108], [109]. La falta de una salida plana para las coordenadas del sistema no lineal introduce variables las cuales son no controlables y hacen imposible planear trayectorias sin resolver las ecuaciones diferenciales [97], [110]. Una linealización tangente o Jacobiana de estos sistemas alrededor de un punto de equilibrio resulta ser usualmente controlable o plana, lo cual permite formular problemas de seguimiento de trayectoria o regulación de una manera directa por medio de una planeación de la salida plana. El CRAP forzará al sistema controlado a actuar como un sistema lineal a lo largo de la trayectoria preestablecida. Un observador basado en CRAP proveerá un estimado de los términos no lineales despreciados durante la linealización.

### 3.1. Sistemas mecánicos subactuados no lineales

Los sistemas subactuados han sido el objeto de ininterrumpidos esfuerzos de investigación en las últimas décadas (ver [90],[107], [111],[112], [113], [114], [115], ). Muchas contribuciones para el control de sistemas subactuados han sido hechas desde el punto de vista de control geométrico (ver [116], [108], [117]). También se han realizado contribuciones desde el punto de vista de planitud diferencial para sistemas Liouvillianos que exhiben falta de integrabilidad ([97], [118], [119], [120] ). El control robusto de sistemas no planos es un área que ha sido poco explorada ([121], [122], [123]). En este capítulo se ilustra cómo los esquemas basados en CRAP en combinación con la propiedad de planitud son especialmente convenientes para controlar sistemas mecánicos subactuados no planos con linealización controlable, mientras son afectados por perturbaciones exógenas y los efectos de no linealidades ignoradas debido a la linealización tangente.

Considere el siguiente modelo general de un sistema mecánico subactuado descrito

por la ecuación:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = P(q)u \quad (3.1)$$

Se definen el vector de posiciones o coordenadas generalizadas  $q \in \mathfrak{R}^w$ , su derivada respecto del tiempo  $\dot{q} \in \mathfrak{R}^w$ , el vector de entradas  $u \in \mathfrak{R}^m$  y la matriz de fuerzas externas  $P(q) \in \mathfrak{R}^{w \times m}$  respectivamente como:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{w-1} \\ q_w \end{bmatrix} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_{w-1} \\ \dot{q}_w \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix} \quad P(q) = [0, I_m]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que  $M(q)$  es invertible, a partir de (3.1) se obtiene la siguiente expresión

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}(P(q)u - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \quad (3.2)$$

Se considera en esta tesis que el sistema no lineal (3.1) es un sistema subactuado con únicamente una entrada. Esto implica que  $m = 1$  y por lo tanto se tienen  $w - 1$  ecuaciones no actuadas, la matriz  $P(q) \in \mathfrak{R}^{w \times 1}$  es no cuadrada y está representada por

$$P(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se define el vector de coordenadas generalizadas como vector en espacio de estados

$$x = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_3 \\ \vdots \\ q_w \\ \dot{q}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Un sistema no lineal afín en el control es definido como:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.3)$$

Las funciones vectoriales  $f(x)$  y  $g(x)$  reciben el nombre de campos vectoriales y son diferenciables por tal motivo son llamados campos suaves <sup>1</sup> y en el caso de los sistemas mecánicos subactuados son definidos como:

$$\begin{aligned} f(x) &= -M(q)^{-1} (C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) \\ g(x) &= M(q)^{-1}P(q) \end{aligned}$$

El vector de estado se divide en 2 vectores, el primero corresponde al vector de coordenadas generalizadas  $q$  y el segundo vector  $\dot{q}$  contiene las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas, éstos son expresados como:

$$q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

### 3.1.1. Formulación del problema

Se desea que el sistema mecánico no lineal (3.3) siga una trayectoria punto a punto, desde una posición inicial  $x(t_0)$  a una posición final  $x(t_f)$  en un intervalo de tiempo preestablecido  $[t_0, t_f]$ .

### 3.1.2. Linealización alrededor de un punto de equilibrio

Considere que el sistema no lineal presentado en (3.3) representado como una función  $f(x, u)$  no lineal dependiente del estado y del control

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.5)$$

Un punto  $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$  es llamado un *punto de equilibrio* si existe un control específico  $\bar{u} \in \mathfrak{R}^m$  llamado *entrada de equilibrio*, tal que

$$f(x, \bar{u}) = 0_n$$

Supóngase que  $\bar{x}$  es un punto de equilibrio con entrada de equilibrio  $\bar{u}$ , considere iniciar el sistema (3.5) desde la condición inicial  $x(t_0) = \bar{x}$  y se aplica la entrada  $u(t) = \bar{u}$  para todo  $t \geq t_0$ . La solución resultante para  $x(t)$  satisface

$$x(t) = \bar{x} \quad (3.6)$$

Supóngase que  $(\bar{x}, \bar{u})$  es un punto y una entrada de equilibrio. Si se inicializa el sistema en  $x(t_0) = \bar{x}$  y se aplica la entrada constante  $u(t) = \bar{u}$ , entonces el estado del sistema permanecerá fijo en  $x(t) = \bar{x}$  para todo  $t$ . Se desea saber el comportamiento del

<sup>1</sup>Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son campos vectoriales infinitamente diferenciables son llamados campos suaves

sistema si se inicia un poco alejado de  $\bar{x}$  y se aplica una entrada ligeramente diferente  $\bar{u}$ . Se definen las siguientes variables incrementales para medir la discrepancia:

$$\begin{aligned} x_\delta &= x(t) - \bar{x} \\ u_\delta &= u(t) - \bar{u} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sustituyendo las variables incrementales en el sistema no lineal (3.5) se obtiene

$$\dot{x}_\delta(t) = f(x_\delta(t) + \bar{x}, u_\delta(t) + \bar{u}) \quad (3.8)$$

Suponiendo que el sistema es diferenciable, se expande el lado derecho de (3.8) usando series de Taylor alrededor de  $\bar{x}$  y  $\bar{u}$ , se desprecian los términos de alto orden. El resultado es el siguiente

$$\dot{x}_\delta(t) \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} x_\delta(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} u_\delta(t) \quad (3.9)$$

El hecho de que  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$  permite simplificar el sistema (3.9) de la manera siguiente

$$\dot{x}_\delta(t) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} x_\delta(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} u_\delta(t) \quad (3.10)$$

donde la notación  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$  representa el *Jacobiano* o *Matriz Jacobiana*, del campo vectorial  $f(x, u)$  con respecto a  $x$ , y  $\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$  con respecto a la entrada  $u$ .

La expresión (3.10) representa una ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo.

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad x_\delta = x - \bar{x}, \quad u_\delta = u - \bar{u} \quad (3.11)$$

donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \in \mathfrak{R}^{n \times m} \quad (3.12)$$

El sistema (3.11) es la linealización tangente o Jacobiana del sistema original no lineal (3.3) alrededor de un punto de equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$ .

### 3.1.3. Determinación de la salida plana y la relación entrada-salida

Considere la linealización tangente del sistema (3.11), primero se debe verificar que el par de matrices  $(A, B)$  es controlable utilizando la matriz de controlabilidad de Kalman.

$$K_c = [ B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B ] \quad (3.13)$$

Si  $\det\{K_c\} \neq 0$  el sistema es *controlable* y en consecuencia *plano* [97]. En seguida se calcula la salida plana [96]

$$y_f = \epsilon [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 ] [ B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B ]^{-1} x_\delta \quad (3.14)$$

Se define el vector fila como  $C_f = \epsilon [ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 ] [ B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B ]^{-1}$  con  $C_f \in \mathfrak{R}^n$ , donde la constante  $\epsilon \neq 0$  puede ser escogida a conveniencia para simplificar el cálculo de las derivadas temporales. Se obtienen las derivadas de la salida plana con el objetivo de encontrar el grado relativo del sistema

$$\begin{aligned} y_f &= C_f x_\delta \\ \dot{y}_f &= C_f \dot{x}_\delta = C_f A x_\delta + C_f B u_\delta \\ \ddot{y}_f &= C_f A^2 x_\delta + C_f A B u_\delta + C_f B \dot{u}_\delta \\ &\vdots \\ y_f^{(n-1)} &= C_f A^{n-1} x_\delta + C_f A^{n-2} B u_\delta + \dots + C_f B u_\delta^{(n-2)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Debido a que el sistema (3.15) satisface

$$C_f B = 0, \quad C_f A B = 0 \quad , \dots , \quad C_f A^{n-2} B = 0, \quad C_f A^{n-1} B \neq 0 \quad (3.16)$$

el cálculo de las derivadas temporales de la salida plana (3.15) se simplifica:

$$\begin{aligned} y_f &= C_f x_\delta \\ \dot{y}_f &= C_f A x_\delta \\ \ddot{y}_f &= C_f A^2 x_\delta \\ &\vdots \\ y_f^{(n-1)} &= C_f A^{n-1} x_\delta \end{aligned} \quad (3.17)$$

El grado relativo del sistema es  $n$  dando como resultado la siguiente representación entrada-salida plana del sistema

$$y_f^{(n)} = C_f A^{n-1} B u_\delta + C_f A^n x_\delta \quad (3.18)$$

En la Figura 3.1 se muestra un diagrama de bloques del sistema linealizado (3.18) el cual se representa como una cadena de integradores.

Nótese que para el caso de sistemas mecánicos subactuados las derivadas pares de orden superior de la salida plana pueden expresarse como una combinación lineal de las variables disponibles para medición del vector de estado  $x_\delta$  lo cual se puede expresar de la siguiente manera

$$\ddot{y}_f = C_f A^2 x_\delta, \quad y_f^{(4)} = C_f A^4 x_\delta \quad , \dots , \quad y_f^{(n-2)} = C_f A^{n-2} x_\delta, \quad (3.19)$$

estas variables son medibles y coinciden con el vector  $q$  de posiciones generalizadas, esta propiedad es muy útil para diseñar leyes de control [96].

El caso de las derivadas impares implica que

$$\dot{y}_f = C_f A x_\delta, \quad y_f^{(3)} = C_f A^3 x_\delta \quad , \dots , \quad y_f^{(n-1)} = C_f A^{n-1} x_\delta, \quad (3.20)$$

las cuales se expresan como una combinación lineal de las variables no disponibles para medición del vector de estado  $x_\delta$ , en este caso los estados no disponibles coinciden con la derivada temporal del vector de coordenadas generalizadas  $\dot{q}$  y serán estimadas para la su utilización en leyes de control.

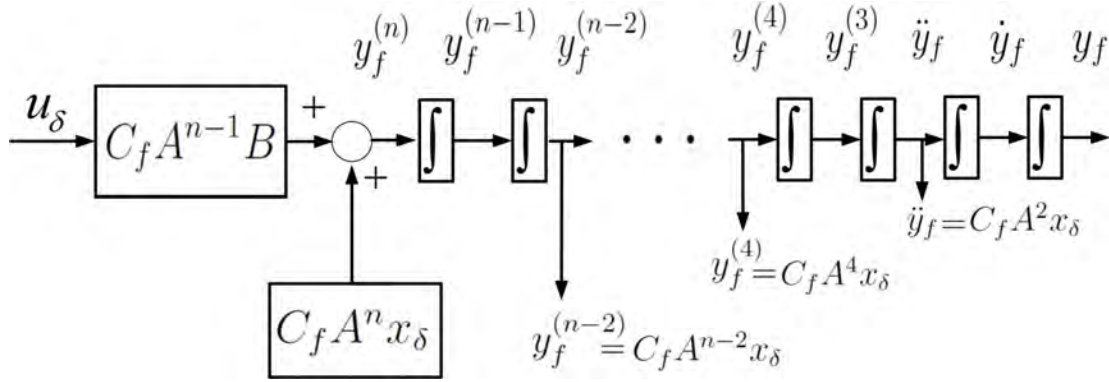


Figura 3.1: Representación de la salida plana mediante una cadena de integradores

### 3.1.4. Propiedad de conexión en cascada del observador PIG para sistemas mecánicos subactuados

Se considera el sistema linealizado (3.18), el cual se supone que modela a un sistema mecánico subactuado como un sistema lineal perturbado como se muestra a continuación

$$y_f^{(n)} = C_f A^{n-1} B u_\delta + \tilde{\xi}(t) \quad (3.21)$$

donde la ganancia  $C_f A^{n-1} B$  es conocida y  $\tilde{\xi}(t) = C_f A^n x_\delta + \varphi(t) + T.O.S$  se considera una función desconocida que incorpora dinámicas endógenas  $C_f A x_\delta$ , dinámicas exógenas  $\varphi(t)$  los Términos de Orden Superior  $T.O.S$  despreciados en la linealización. Se define el error de seguimiento de trayectoria de la salida plana como:

$$e_y = y_f - y^*(t) \quad (3.22)$$

donde  $y^*(t)$  es la trayectoria deseada. La dinámica del error de seguimiento de trayectoria se calcula como:

$$e_y^{(n)} = y_f^{(n)} - y^{(n)*}(t) = C_f A^{n-1} B u_\delta + \tilde{\xi}(t) - C_f A^{n-1} B u_\delta^* - \tilde{\xi}^*(t) \quad (3.23)$$

donde  $u_\delta^*$  es la ley control deseada y  $\tilde{\xi}^*(t)$  es la perturbación deseada.

El paso clave en el diseño de leyes de control mediante planitud diferencial basadas en los esquemas de CRAP es tratar la dinámica del error (3.23) como el siguiente modelo simplificado

$$e_y^{(n)} = C_f A^{n-1} B u_\delta + \xi(t) \quad (3.24)$$

donde la perturbación total  $\xi(t)$  ahora contiene a  $u_\delta^*(t)$  y  $\tilde{\xi}^*(t)$  los cuales se consideran desconocidos es decir

$$\xi(t) = -C_f A^{n-1} B u_\delta^*(t) + \tilde{\xi}(t) - \tilde{\xi}^*(t)$$

Se define la dinámica del error de seguimiento de trayectoria en espacio de estados donde  $e_y^{(i)} = e_i$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , el sistema (3.24) representado en espacio de estados



$$\begin{aligned}
\dot{e}_0 &= e_1 \\
\dot{e}_1 &= e_2 \\
\dot{e}_2 &= e_3 \\
\dot{e}_3 &= e_4 \\
&\vdots \\
\dot{e}_{n-2} &= e_{n-1} \\
\dot{e}_{n-1} &= C_f A^{n-1} B u_\delta + \xi(t)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Usando la propiedad presentada en (3.19), donde las derivadas pares de la salida plana pueden expresarse como una combinación lineal de variables medibles del vector de estado  $x_\delta$ , se definen las derivadas pares del error de seguimiento de trayectoria como

$$e_2 = C_f A^2 x_\delta - \ddot{y}^*(t), \quad e_4 = C_f A^4 x_\delta - y^{(4)*}(t) \quad , \dots , \quad e_{(n-2)} = C_f A^{n-2} x_\delta - y^{(n-2)*}(t)$$

En consecuencia el sistema en espacio de estados (3.25) se puede dividir en  $\frac{n}{2}$  subsistemas de segundo orden. Considérese nuevamente el sistema (3.25), el primer subsistema se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_0 &= e_1 \\
\dot{e}_1 &= e_2 = C_f A^2 x_\delta - \ddot{y}^*(t) \\
e_0 &= y_f - y^*(t)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

con  $e_0$  como salida medible del sistema mientras la expresión  $e_2 = C_f A^2 x_\delta - \ddot{y}^*(t)$  actúa como un término de entrada a la dinámica del sistema. El segundo subsistema corresponde a

$$\begin{aligned}
\dot{e}_2 &= e_3 \\
\dot{e}_3 &= e_4 = C_f A^4 x_\delta - y^{(4)*}(t)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

con  $e_2$  actuando como la salida del subsistema mientras que la expresión lineal  $e_4 = C_f A^4 x_\delta - y^{(4)*}(t)$  constituye una entrada. De esta manera se obtienen  $\frac{n}{2} - 1$  subsistemas con salidas medibles y entradas conocidas. El  $\frac{n}{2}$ -ésimo subsistema incluye la dinámica del modelo de la perturbación

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{n-2} &= e_{n-1} \\
\dot{e}_{n-1} &= C_f A^{n-1} B u_\delta + z_1 \\
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\vdots \\
\dot{z}_p &= R^{(p)}(t)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

donde los estados  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_p$  corresponden al modelo de la perturbación total  $z_1 = \xi(t)$ , donde  $r(t)$  es el residuo de la expansión en serie de Taylor propuesto para  $\xi(t)$ . La propiedad de cascada de esta descomposición, la cual se observa en la Figura 3.1 permite proponer un conjunto de  $\frac{n}{2} - 1$  observadores de segundo orden del tipo Luenberger para los primeros  $\frac{n}{2} - 1$  subsistemas, permitiendo estimar las derivadas impares del error de salida plana, y para el  $\frac{n}{2}$ -ésimo subsistema un observador PIG de  $p + 2$  orden donde  $p$  se escoge arbitrariamente dependiendo del número de estados utilizados para estimar la perturbación. En la Figura 3.2 se muestra un diagrama de bloques de la dinámica del error de la salida plana y el conjunto de observadores propuestos. Existen muchas ventajas al proponer  $\frac{n}{2} - 1$  observadores de segundo orden del tipo Luenberger y un observador PIG de  $p + 2$  orden, en lugar de usar sólo un observador PIG de  $n + p$  orden, las ganancias de un observador PIG se incrementan al aumentar el número de estados a estimar. En consecuencia, el empleo de un único observador PIG de  $n + p$  orden para el sistema mecánico subactuado completo conlleva al empleo de altas ganancias lo cual puede amplificar el ruido de medición y aumentar la posibilidad de que suceda el fenómeno *peaking*. Este problema se reduce con el empleo de varios observadores de orden reducido. En este último caso un orden menor de los observadores conlleva a ganancias pequeñas reduciéndose la amplificación del ruido de medición y la aparición del fenómeno de *peaking*. El conjunto observadores son propuestos para el sistema (3.25) esta descrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_0 &= \hat{e}_1 + \kappa_{01}(e_0 - \hat{e}_0) \\ \dot{\hat{e}}_1 &= \hat{e}_2 = C_f A^2 x_\delta - \ddot{y}^*(t) + \kappa_{02}(e_0 - \hat{e}_0) \\ e_0 &= y_f - y^*(t)\end{aligned}\tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_2 &= \hat{e}_3 + \kappa_{21}(e_2 - \hat{e}_2) \\ \dot{\hat{e}}_3 &= \hat{e}_4 = C_f A^4 x_\delta - y^{(4)*}(t) + \kappa_{22}(e_2 - \hat{e}_2) \\ e_2 &= C_f A^2 x_\delta - \ddot{y}^*(t)\end{aligned}\tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\vdots & \\ \dot{\hat{e}}_{n-2} &= \hat{e}_{n-1} + \lambda_{p+1}(e_{n-2} - \hat{e}_{n-2}) \\ \dot{\hat{e}}_{n-1} &= C_f A^{n-1} B u_\delta + \hat{z}_1 + \lambda_p(e_{n-2} - \hat{e}_{n-2}) \\ \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \lambda_{p-1}(e_{n-2} - \hat{e}_{n-2}) \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \lambda_{p-2}(e_{n-2} - \hat{e}_{n-2}) \\ \vdots & \\ \dot{\hat{z}}_p &= \lambda_0(e_{n-2} - \hat{e}_{n-2}) \\ e_{n-2} &= C_f A^{n-2} x_\delta - y^{(n-2)*}(t)\end{aligned}\tag{3.31}$$

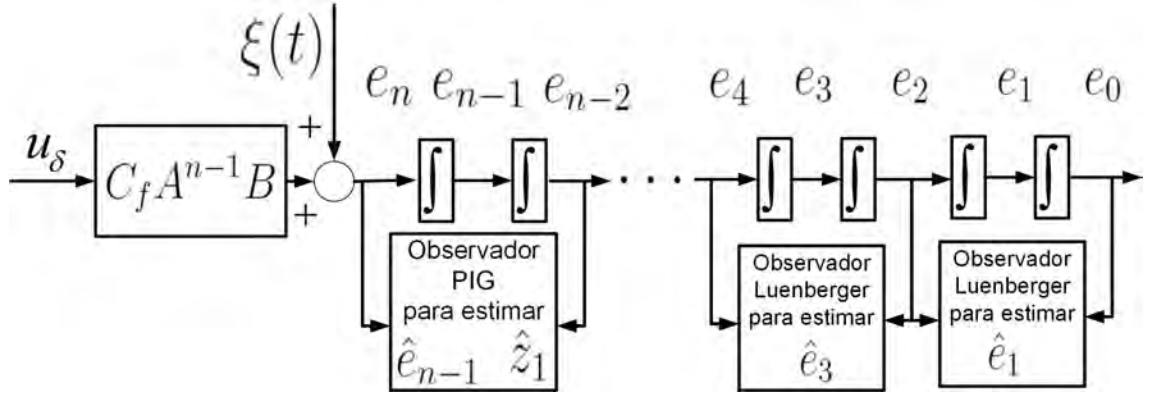


Figura 3.2: Conjunto de  $\frac{n}{2}$  observadores propuestos

El error de observación  $\tilde{e}_0 = e_0 - \hat{e}_0$  para el primer observador de tipo Luenberger se obtiene de la diferencia entre el sistema original (3.26) y el estimado (3.29) y genera la siguiente dinámica del error de observación

$$\ddot{\tilde{e}}_0 + \kappa_{02}\ddot{\tilde{e}}_0 + \kappa_{01}\tilde{e}_0 = 0$$

con un polinomio característico asintóticamente estable de segundo orden:

$$s^2 + \kappa_{02}s + \kappa_{01} = 0$$

La primera derivada error de seguimiento  $e_1$  es entonces estimada con precisión por medio del estado  $\hat{e}_1$  para propósitos de realimentación. En general la dinámica del error  $\tilde{e}_j = e_j - \hat{e}_j$ , para los  $\frac{n}{2} - 1$  observadores de tipo Luenberger se expresa como:

$$\ddot{\tilde{e}}_j + \kappa_{j2}\ddot{\tilde{e}}_j + \kappa_{j1}\tilde{e}_j = 0$$

generando polinomios característicos estables de la forma:

$$s^2 + \kappa_{j2}s + \kappa_{j1} = (s^2 + 2\zeta_{jo}\omega_{jo}s + \omega_{jo}^2)$$

Se desea que la dinámica de los observadores corresponda con polinomios de segundo orden estables, escogiendo las ganancias  $\kappa_{j2} = 2\zeta_{jo}\omega_{jo}$  y  $\kappa_{j1} = \omega_{jo}^2$  para  $j = 0, 2, 4, 6, \dots, n-4$ , las derivadas impares del error de seguimiento de la salida plana  $e_{j+1}$  corresponden a los estimados  $\hat{e}_{j+1}$ . El error de estimación para el observador PIG  $\tilde{e}_{n-2} = e_{n-2} - \hat{e}_{n-2}$  genera la siguiente dinámica de estimación del error:

$$\tilde{e}_{n-2}^{(p+2)} + \lambda_{p+1}\tilde{e}_{n-2}^{(p+1)} + \lambda_p\tilde{e}_{n-2}^{(p)} + \dots + \lambda_2\ddot{\tilde{e}}_{n-2} + \lambda_1\dot{\tilde{e}}_{n-2} + \lambda_0\tilde{e}_{n-2} = \xi^{(p)}(t)$$

La  $n-1$ -ésima derivada del error de seguimiento de trayectoria  $e_{n-1}$  es estimada por el observador PIG a través el estado  $\hat{e}_{n-1}$  así como la perturbación total  $\xi(t)$  mediante el estado  $\hat{z}_1$ , el polinomio característico correspondiente asociado a la dinámica del error de estimación debe corresponder una dinámica de segundo orden estable, se propone

que siga la dinámica del siguiente polinomio estable correspondiente. Cuando  $\frac{p+2}{2}$  es un número par se utiliza:

$$s^{p+2} + \lambda_{p+1}s^{p+1} + \lambda_p s^p + \dots + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0 = (s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)^{\frac{p+2}{2}}$$

y se utiliza el siguiente polinomio estable cuando  $\frac{p+2}{2}$  es un número impar:

$$s^{p+2} + \lambda_{p+1}s^{p+1} + \lambda_p s^p + \dots + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0 = (s + \rho)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)^{\frac{p+2}{2}-1}$$

una selección apropiada de los coeficientes  $[\kappa_{j1}, \kappa_{j2}]$  del conjunto de observadores tipo Luenberger y los coeficientes  $[\lambda_{p+1}, \lambda_p, \dots, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_0]$  del observador PIG, coloca los valores propios de la dinámica de error de estimación del lado izquierdo del plano complejo.

### 3.1.5. Diseño del controlador basado en CRAP

Es posible diseñar una ley CRAP basada en realimentación de estados empleando los estimados producidos por los observadores Luenberger y PIG incluyendo el estimado  $\hat{z}_1$  el cual compensa el efecto de la perturbación  $\xi(t)$ . El CRAP está dado por:

$$u_\delta = -\frac{1}{C_f A^{n-1} B} [k_0 e_0 + k_1 \hat{e}_1 + k_2 e_2 + k_3 \hat{e}_3 + \dots + k_{n-2} e_{n-2} + k_{n-1} \hat{e}_{n-1} + \hat{z}_1] \quad (3.32)$$

donde naturalmente los errores de seguimiento  $e_0, e_2, e_4, \dots, e_j$  para  $j = 0, 2, 4, \dots, n-4$ , son usados en lugar de los estados estimados por el conjunto de observadores. Se puede notar que los coeficientes del controlador pueden ser escogidos tomando el hecho que el error de seguimiento de trayectoria de la salida plana es gobernado por la ecuación diferencial en lazo cerrado

$$e_0^{(n)} + k_{n-1} e_0^{(n-1)} + k_{n-2} e_0^{(n-2)} + \dots + k_2 \ddot{e}_0 + k_1 \dot{e}_0 + k_0 e_0 = \xi(t) - \hat{z}_1 \quad (3.33)$$

Donde el polinomio característico de la dinámica en lazo cerrado debe corresponder a la dinámica un polinomio característico de orden  $n$  Hurwitz factorizada en polinomios de segundo orden.

$$s^n + k_{n-1} s^{n-1} + k_{n-2} s^{n-2} + \dots + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 = (s^2 + 2\zeta_c \omega_c s + \omega_c^2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (3.34)$$

donde  $\zeta_c > 0$ ,  $\omega_c > 0$ .

Se enuncia primeramente el siguiente resultado suficientemente conocido.

**Lema 1.** Sea  $\xi(t)$  una señal de perturbación uniformemente absolutamente acotada en el tiempo, que actúa sobre el sistema lineal invariante en el tiempo (3.33), caracterizado por el conjunto de coeficientes  $\{k_{n-1}, \dots, k_0\}$ , entonces las trayectorias

de las variables de fase:  $e_0, \dot{e}_0, \dots, e_0^{(n-1)}$ , convergen hacia una vecindad tan pequeña como se quiera,  $\mathcal{N}(0)$ , del origen del espacio de fase del sistema donde además, están permanecerán acotadas, siempre y cuando el conjunto de coeficientes constantes  $\{k_{n-1}, \dots, k_0\}$ , hayan sido escogidos de tal manera que las raíces del polinomio característico asociado (3.34), estén ubicadas en la parte izquierda del plano complejo y suficientemente alejada del eje imaginario.

**Demostración** El lema es ciertamente valido para  $n = 1$ .

$$\dot{e}_0 = -k_0 e_0 + \xi(t) - \hat{z}_1, \quad k_0 > 0, \quad \sup_{t \geq 0} |\xi(t) - \hat{z}_1| = K$$

La función candidata de Lyapunov:  $V(e_0) = \frac{1}{2}e_0^2$ , cumple las siguiente desigualdad.

$$\frac{d}{dt}V(e_0) = -k_0 e_0^2 + e_0(\xi(t) - \hat{z}_1) \leq -k_0 e_0^2 + K |e_0| = -k_0 |e_0| \left( |e_0| - \frac{K}{k_0} \right)$$

Puesto que  $-k_0 e_0^2 + K |e_0|$  es estrictamente negativa fuera del intervalo cerrado,  $\left[-\frac{K}{k_0}, \frac{K}{k_0}\right]$ , las trayectorias del error de seguimiento de trayectoria  $e_0(t)$ , que inicien en el exterior del intervalo convergen asintóticamente hacia las fronteras del mismo y las que inicien desde el interior de este intervalo, no pueden escapar fuera de el. En consecuencia, para un valor de  $K$  dado, mientras mayor sea en valor absoluto el valor de  $k_0$ , mas pequeño alrededor del origen es el intervalo de convergencia y de existencia de las trayectorias.

Considere ahora el sistema en lazo cerrado (3.33)

$$e_0^{(n)} = -k_{n-1}e_0^{(n-1)} - k_{n-2}e_0^{(n-2)} - \dots - k_2\ddot{e}_0 - k_1\dot{e}_0 - k_0e_0 + \xi(t) - \hat{z}_1 \quad (3.35)$$

Con  $\sup_{t \geq 0} |\xi(t) - \hat{z}_1| = K$  siendo,

$$s^n + k_{n-1}s^{n-1} + k_{n-2}s^{n-2} + \dots + k_2s^2 + k_1s + k_0$$

un polinomio Hurwitz. Definamos el vector:  $x_e = [e_0, \dot{e}_0, \dots, e_0^{(n-1)}]^T$ . El sistema perturbado (3.35) es de la forma  $\dot{x}_e = A_e x_e + b_e(\xi(t) - \hat{z}_1)$ . con  $A_e$  siendo una matriz, estable, en forma canónica compañera y  $b_e$  un vector de ceros, excepto por la ultima componente la cual es la unidad. La matriz  $Q = A_e + A_e^T$ , es simétrica y negativa definida, con autovalores reales y negativos, que se designan por  $\gamma(Q)$ . Sea  $\gamma_{max}(Q)$  el menos negativo de todos los autovalores (el menos en valor absoluto). La función candidata de Lyapunov,  $V(x_e) = \frac{1}{2}x_e^T x_e = \frac{1}{2} \|x_e\|^2$  satisface:

$$\dot{V}(x_e) = \frac{1}{2}x_e^T (A_e + A_e^T)x_e + x_e^T b_e(\xi(t) - \hat{z}_1) \leq -\frac{1}{2} |\gamma(Q)| \|x_e\|^2 + K \|x_e\| \quad (3.36)$$

La esfera  $\|x_e\|^2 \leq \frac{4K^2}{|\gamma_{max}(Q)|^2}$ , define el conjunto de convergencia de todas las trayectorias que se inician fuera de ella en el espacio de fases de coordenadas  $e_0, \dot{e}_0, \dots, e_0^{n-1}$

y representa el conjunto de contención de aquellas trayectorias que se inician en su interior. Mientras más alejados del eje imaginario se encuentren los autovalores de la matriz  $A_e$ , mas pequeño es el radio de la esfera hacia donde convergen o donde quedan atrapada las trayectorias del sistema en lazo cerrado en el espacio de fases.

### 3.2. Resumen del procedimiento para el control de sistemas subactuados

El procedimiento para el control de sistemas mecánicos subactuados usando Control por Rechazo Activo de Perturbaciones puede resumirse de la siguiente forma:

- Paso 1: Obtenga el modelo no lineal del sistema descrito por ecuaciones diferenciales.
- Paso 2: Linealice las ecuaciones no lineales alrededor de un punto de equilibrio estático y determine la salida plana usando una transformación de coordenadas.
- Paso 3: Obtenga el modelo de entradas incrementales hacia salidas planas incrementales tomando las primeras derivadas temporales respecto a la salida plana hasta encontrar el grado relativo del sistema.
- Paso 4: Encuentre la representación en forma de cascada e identifique los subsistemas de segundo orden.
- Paso 5 Diseñe un control basado en el rechazo activo de perturbaciones utilizando el conjunto de observadores tipo Luenberger y un observador PIG .
- Paso 6: Aplique el control lineal propuesto al sistema no lineal original.

## Capítulo 4

# CRAP de sistemas subactuados péndulo de Furuta

El péndulo de Furuta [84], también llamado péndulo rotacional, es uno de los sistemas subactuados más populares en laboratorios académicos alrededor del mundo. El sistema posee una entrada de control y tiene dos grados mecánicos de libertad. Éste consiste en un brazo actuado el cual rota en el plano horizontal y está unido a un péndulo no actuado el cual rota en un plano vertical perpendicular y colocado en la punta del brazo horizontal rotante. El sistema es altamente no lineal debido a las fuerzas gravitacionales, de Coriolis y centrífugas [124] además de que muestra una matriz de inercia no diagonal. Adicionalmente, el péndulo de Furuta no es linealizabile por realimentación y exhibe falta de controlabilidad en ciertas configuraciones [125]. Este sistema representa una plataforma adecuada para probar leyes de control lineales y no lineales. Los problemas de control comúnmente asociados con el péndulo de Furuta son principalmente de 2 tipos: 1) el problema de balancear el péndulo y llevarlo de su posición estable hacia su posición inestable, esta acción es llamada en inglés *swinging up*, y 2) La estabilización alrededor de su punto de equilibrio inestable. Muchas metodologías han sido propuestas para resolver el problema de *swinging up* las cuales incluyen técnicas basadas en energía [126], control basado en pasividad, [127], el método adaptativo de elipsoide atractivo [128], controladores con compensación de fricción [129], controladores basados en observadores de estado extendidos [130], entre otros. En el estudio reportado por [131], algunos controladores para el péndulo de Furuta fueron probados y comparados desde el punto de vista de observar las ventajas y desventajas de los diversos esquemas de control. Diversas investigaciones también consideran las principales limitaciones físicas asociadas con el control del péndulo, como la posibilidad de controlarlo con saturaciones a la entrada. La mayoría de esquemas de control para la estabilización se basan en la linealización tangente alrededor del punto de equilibrio inestable y estos demandan esquemas de estabilización lineales robustos [128]. La linealización tangente del modelo del péndulo de Furuta es diferencialmente plana con una salida física medible. Así, el problema de estabilización y seguimiento de trayectoria puede ser abordado desde la perspectiva de una combinación entre planitud diferencial y Control mediante Rechazo Activo de

Perturbaciones (CRAP).

En este Capítulo, un esquema de control basado en rechazo activo de perturbaciones es propuesto para resolver el problema estabilización y seguimiento de trayectoria asociado con el péndulo de Furuta. El problema de seguimiento de trayectoria se describe como llevar al brazo horizontal siguiendo una trayectoria punto a punto, mientras el péndulo no actuado permanece alrededor de la posición vertical inestable sin caer, durante y después de la maniobra de seguimiento de trayectoria. El esquema de control considera incertidumbres los parámetros del sistema, no linealidades y señales de perturbación exógenas. Se utiliza una linealización tangente del modelo del péndulo de Furuta alrededor de un punto de equilibrio arbitrario. A pesar de que la linealización descarta los términos no lineales, es posible mantener el péndulo alrededor de la posición vertical de equilibrio inestable utilizando la metodología propuesta en esta tesis. Este esquema no sólo estima los efectos de no linealidades, sino que también reduce el problema al seguimiento de trayectoria de un sistema definido por una de cadena de integradores después de cancelar en línea las perturbaciones. El esquema de control es probado en un prototipo experimental. En la sección 4.1 se considera brevemente el modelo no lineal del péndulo de Furuta y su linealización tangente alrededor de un punto de equilibrio arbitrario. La planitud del modelo linealizado es utilizada para dividir el sistema subactuado en 2 subsistemas. En la sección 4.2 se propone un conjunto de 2 observadores para la tarea de seguimiento de trayectoria, un observador Luenberger y un observador PIG. El diseño del controlador con cancelación activa de la perturbación es presentado en la sección 4.3 donde se utilizan los estados estimados por los observadores y la señal de perturbación estimada por el observador PIG para resolver la tarea propuesta. En la sección 4.4 se presentan los detalles de la plataforma experimental y se discuten los resultados experimentales del comportamiento del sistema en lazo cerrado. Además, en esta sección se ilustra el comportamiento del controlador propuesto por medio de una comparación experimental respecto a un controlador por modos deslizantes, para la misma tarea de control.

## 4.1. El péndulo de Furuta

### 4.1.1. Modelo no lineal del péndulo de Furuta

El péndulo de Furuta se muestra en Figura 4.1. El péndulo es libre de moverse sobre el plano perpendicular al brazo horizontal en cual está actuado por un motor de corriente directa. El modelo no lineal de la parte mecánica del sistema, puede ser obtenido de las ecuaciones de Newton o del formalismo Euler-Lagrange [132].

$$(I_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\phi} - m_1 l_1 l_0 \cos(\phi) \ddot{\theta} - m_1 l_1^2 \dot{\phi}^2 \sin(\phi) \cos(\phi) - m_1 g l_1 \sin(\phi) = 0 \quad (4.1)$$

$$(I_0 + m_1 (l_0^2 + l_1^2 \sin^2(\phi))) \ddot{\theta} - m_1 l_1 l_0 \cos(\phi) \ddot{\phi} + 2m_1 l_1^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi) \cos(\phi) + m_1 l_1 l_0 \dot{\phi}^2 \sin \phi = \tau \quad (4.2)$$



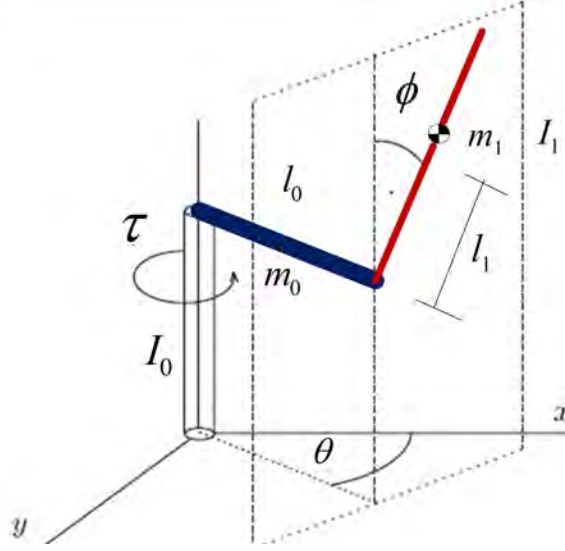


Figura 4.1: Esquema del péndulo de Furuta

donde  $\phi$  es el desplazamiento angular del péndulo con respecto a la línea vertical entre la unión el péndulo y el brazo horizontal,  $\theta$  es el ángulo del brazo horizontal medido con respecto a uno de los ejes en el plano  $(x, y)$ ,  $m_1$  denota la masa del péndulo,  $I_1$  es la inercia del péndulo,  $I_0$  representa la inercia del brazo horizontal  $l_0$  y  $l_1$  son respectivamente las longitudes del brazo horizontal y la distancia entre el centro de masa de el péndulo y de la unión con el brazo horizontal;  $\tau$  es la entrada de control directamente aplicada por el motor de corriente directa al brazo horizontal. Se supone que sólo las posiciones  $\phi$  y  $\theta$  son medibles. El modelo no lineal (4.1)-(4.2) no es linealizable via realimentación no lineal del estado además de que no es diferencialmente plano. Considere la linealización tangente del sistema alrededor del siguiente punto de equilibrio:

$$\begin{aligned} \theta = \Theta = 0 \quad \phi = 0 \quad \tau = 0 \\ \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = 0 \end{aligned}$$

A partir del modelo (4.1) y (4.2) se obtiene:

$$[I_1 + m_1 l_1^2] \ddot{\phi}_\delta - m_1 l_1 l_0 \ddot{\theta}_\delta - m_1 g l_1 \phi = 0 \quad (4.3)$$

$$[I_0 + m_1 l_0^2] \ddot{\theta}_\delta - m_1 l_1 l_0 \ddot{\phi}_\delta = \tau_\delta \quad (4.4)$$

donde  $\phi_\delta = \phi - 0 = \phi$ ,  $\theta_\delta = \theta - \Theta = \theta$ , y  $\tau_\delta = \tau - 0 = \tau$ , son los estados incrementales del sistema linealizado. Para simplificar la notación se definen las siguientes variables.

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{l_0}{l_1} \quad \alpha^2 = \frac{I_0}{m_1 l_1^2} \quad \beta = \frac{g}{l_1} \\ \gamma = \frac{1}{m_1 l_1^2} \quad \eta = \frac{I_1}{m_1 l_1^2} + 1 \end{aligned}$$

Estas definiciones ayudan a simplificar (4.4) de la manera siguiente

$$\eta\ddot{\phi}_\delta - \varepsilon\ddot{\theta}_\delta = \beta\phi_\delta = \ddot{F}_\delta \quad (4.5)$$

$$[\alpha^2 + \varepsilon^2]\ddot{\theta}_\delta - \varepsilon\ddot{\phi}_\delta = \gamma\tau_\delta \quad (4.6)$$

#### 4.1.2. Planitud diferencial del modelo del péndulo de Furuta linealizado

El modelo lineal (4.5)-(4.6) es diferencialmente plano con la salida plana incremental denotada por  $F_\delta$ , representada en este caso por la siguiente expresión,

$$F_\delta = \eta\phi_\delta - \varepsilon\theta_\delta \quad (4.7)$$

En efecto, todas las variables en el modelo lineal (4.5)-(4.6), las variables de estado y las entradas de control se expresan como funciones diferenciables de la salida plana incremental. En otras palabras, estas son expresadas como funciones de la salida plana  $F_\delta$  y un número finito de sus derivadas en el tiempo. A partir de (4.5)-(4.6) y de la salida plana (4.7) se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \phi_\delta &= \frac{\ddot{F}_\delta}{\beta}, & \dot{\phi}_\delta &= \frac{F_\delta^{(3)}}{\beta} \\ \theta_\delta &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ \eta \frac{\ddot{F}_\delta}{\beta} - F_\delta \right], & \dot{\theta}_\delta &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ \eta \frac{F_\delta^{(3)}}{\beta} - \dot{F}_\delta \right] \\ \tau_\delta &= \left( \frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta\gamma} - \frac{\varepsilon}{\beta\gamma} \right) F_\delta^{(4)} - \frac{(\alpha^2 + \varepsilon^2)}{\varepsilon\gamma} \ddot{F}_\delta \end{aligned} \quad (4.8)$$

El sistema linealizado (4.8) es equivalente al siguiente modelo entrada-salida

$$F_\delta^{(4)} = \frac{\gamma}{\left( \frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta} \right)} \tau_\delta + \frac{(\alpha^2 + \varepsilon^2)}{\left( \frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta} \right) \varepsilon} \ddot{F}_\delta \quad (4.9)$$

donde  $\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta} \neq 0$ .

#### 4.1.3. Propiedad de conexión en cascada para el modelo tangente

Esta propiedad de conexión en cascada se obtiene inmediatamente de la parametrización diferencial (4.8) donde el sistema tangente naturalmente se descompone en una conexión tipo cascada de dos bloques independientes, el primero es controlado por el par de entrada  $\tau_\delta$  con su correspondiente salida dada por la aceleración incremental  $\ddot{F}_\delta$ . Ésta salida coincide con la posición angular del péndulo,  $\phi_\delta$ , multiplicada por un factor  $\beta$ ,  $\ddot{F}_\delta = \beta\phi_\delta$ . La señal  $\beta\phi_\delta$  actúa como una entrada auxiliar medible para el segundo bloque. Este último consiste de una cadena de dos integradores representando las variables de fase  $\dot{F}_\delta$  y  $F_\delta$ . La variable  $F_\delta$  es la salida del segundo bloque

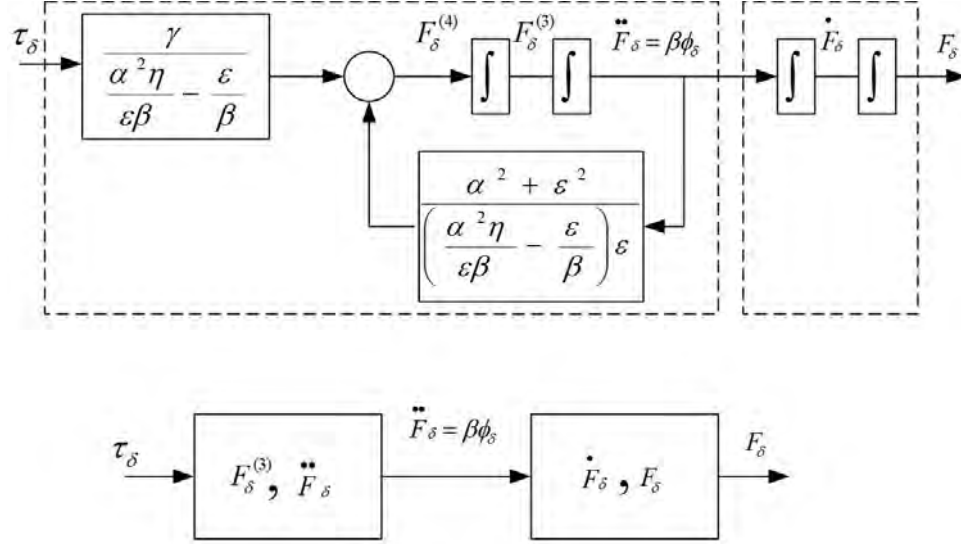


Figura 4.2: Conexión en cascada del sistema péndulo de Furuta linealizado

(ver Figura 4.2). La propiedad de conexión de bloques en cascada simplifica la tarea de diseño del observador combinando la planitud diferencial y el esquema de rechazo activo de perturbaciones CRAP.

#### 4.1.4. Formulación del Problema de control

Tomando como base la ecuación (4.9), se adopta el siguiente modelo simplificado perturbado para el sistema no lineal péndulo de Furuta:

$$F_\delta^{(4)} = \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)} \tau_\delta + \tilde{\xi}(t) \quad (4.10)$$

donde  $\tilde{\xi}(t)$  representa los términos dependientes del estado, los Términos de Orden Superior *T.O.S* despreciados en la linealización, posibles términos no modelados tales como fricción no lineal y perturbaciones externas desconocidas. Se agrupan todos estos términos inciertos dentro de una sola función variante en el tiempo representada mediante  $\tilde{\xi}(t)$ , la cual en nuestro caso es de la forma:

$$\tilde{\xi}(t) = \frac{(\alpha^2 + \varepsilon^2)}{\left(\frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \varepsilon} \ddot{F}_\delta + T.O.S \quad (4.11)$$

Suponga que se desea mover el brazo horizontal de una posición inicial  $\theta_\delta(0) = 0$  hacia una posición final  $\theta_\delta(t_f) = \Theta$  en un intervalo de tiempo finito y pre-especificado  $[0, t_f]$ . La maniobra se lleva a cabo mientras el péndulo permanece alrededor de la posición de equilibrio inestable, i.e  $\phi_\delta(0) = 0$ . Se desea lograr esta maniobra sin perder

la posición vertical inestable del péndulo  $\phi_\delta(t_f) = 0$ . Claramente, tal maniobra punto a punto es posible con una adecuada planeación de trayectoria para la salida plana  $F_\delta = \eta\phi_\delta - \varepsilon\theta_\delta$ . Como requerimiento el péndulo debe iniciar y terminar en su posición inestable  $\phi(0) = \phi(t_f) = 0$ . La posición del brazo horizontal  $\theta$  inicia en el punto  $\theta(0) = 0$  y al término de la maniobra,  $\theta(t_f) = \Theta_f$  con  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(t_f) = 0$ . Sustituyendo los valores iniciales y finales deseados en la salida plana  $F_\delta(t) = \eta\phi_\delta(t) - \varepsilon\theta_\delta(t)$  se obtiene el valor inicial deseado de la salida plana  $F_\delta(0) = 0$ , mientras el valor final deseado  $F_\delta(t_f) = -\varepsilon\Theta_f$ . Se puede definir una trayectoria suave punto a punto para  $F_\delta^*(t)$  usando, por ejemplo, un polinomio de Bèzier con suficientes derivadas respecto del tiempo, siendo cero el valor de estas derivadas al inicio y al final de la maniobra. Se define el error de seguimiento de trayectoria de la salida plana

$$e_{F_\delta} = F_\delta - F_\delta^*(t) \quad (4.12)$$

la dinámica del error de seguimiento de trayectoria evoluciona de acuerdo a,

$$e_{F_\delta}^{(4)} = F_\delta^{(4)} - F_\delta^{(4)*}(t) = \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\tau_\delta + \tilde{\xi}(t) - \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\tau_\delta^* - \tilde{\xi}^*(t) \quad (4.13)$$

Utilizando el paso clave en el diseño de control usando CRAP se trata a la dinámica del error como el siguiente modelo simplificado

$$e_{F_\delta}^{(4)} = \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\tau_\delta + \xi(t) \quad (4.14)$$

donde

$$\xi(t) = \tilde{\xi}(t) - \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\tau_\delta^* - \tilde{\xi}^*(t) \quad (4.15)$$

$\xi(t)$  representa el termino de entrada desconocido llamado perturbación total que ahora contiene todos los términos agrupados en  $\tilde{\xi}(t)$ , los efectos de la ley de control deseada  $\tau_\delta^*$  y la perturbación deseada  $\tilde{\xi}^*(t)$  que son considerados también como desconocidos.

Se definen  $e_{F_\delta}^{(i)} = e_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . El modelo en espacio de estado del error de seguimiento de la salida plana es expresado por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 &= e_1 \\ \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\tau_\delta + \xi(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

En este punto se hace uso de la propiedad de cascada descrita en el Capítulo 3, el sistema se toma como una conexión de dos subsistemas. Notar que

$$e_2 = \ddot{F}_\delta - \ddot{F}_\delta^*(t) = \beta\phi_\delta - \ddot{F}_\delta^*(t)$$

es la entrada conocida para el sistema de segundo orden de integracion pura.

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 &= e_1 \\ \dot{e}_1 &= e_2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

mientras el resto del sistema es expresado por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= \frac{\gamma}{\begin{pmatrix} \alpha^2\eta & \varepsilon \\ \varepsilon\beta & \beta \end{pmatrix}} \tau_\delta + \xi(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

## 4.2. Observador PIG en cascada para el péndulo de Furuta

El termino de perturbación  $\xi(t)$  es *algebraicamente observable* de acuerdo con los resultados de Diop y Fliess, [101]. Se adopta un modelo de polinomio variante en el tiempo de quinto orden para  $\xi(t)$ , en este caso  $z^{(6)} = 0$ . Con  $z(t) = z_1$ , el modelo de error de seguimiento de trayectoria para la salida plana (4.16) puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 &= e_1 \\ \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= \frac{\gamma}{\begin{pmatrix} \alpha^2\eta & \varepsilon \\ \varepsilon\beta & \beta \end{pmatrix}} \tau_\delta + z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_6 &= R^{(6)}(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dos observadores desacoplados, uno de tipo Luenberger y otro un observador PIG mostrados en la Figura 4.3, son usados para la estimación de las variables de estado en (4.19) utilizando la configuración en cascada mostrada en la Figura 4.2

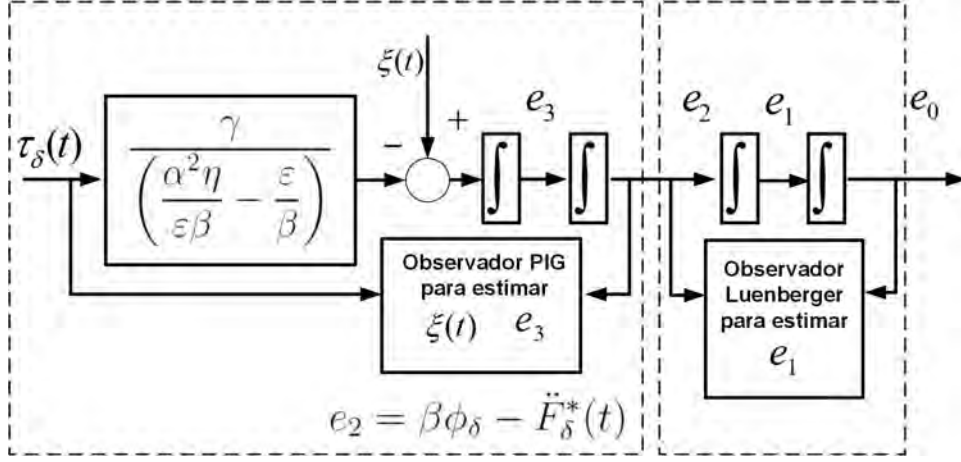


Figura 4.3: Conjunto de 2 observadores propuestos para el sistema péndulo de Furuta

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_0 &= \hat{e}_1 + \kappa_1(e_0 - \hat{e}_0) \\ \dot{\hat{e}}_1 &= \hat{e}_2 + \kappa_0(e_0 - \hat{e}_0)\end{aligned}\quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_2 &= \hat{e}_3 + \lambda_7(e_2 - \hat{e}_2) \\ \dot{\hat{e}}_3 &= \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)} \tau_\delta + \hat{z}_1 + \lambda_6(e_2 - \hat{e}_2) \\ \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \lambda_5(e_2 - \hat{e}_2) \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \lambda_4(e_2 - \hat{e}_2) \\ \dot{\hat{z}}_3 &= \hat{z}_4 + \lambda_3(e_2 - \hat{e}_2) \\ \dot{\hat{z}}_4 &= \hat{z}_5 + \lambda_2(e_2 - \hat{e}_2) \\ \dot{\hat{z}}_5 &= \hat{z}_6 + \lambda_1(e_2 - \hat{e}_2) \\ \dot{\hat{z}}_6 &= \lambda_0(e_2 - \hat{e}_2)\end{aligned}\quad (4.21)$$

El error de observación,  $\tilde{e}_0 = e_0 - \hat{e}_0$ , posee la siguiente dinámica de error de estimación:

$$\ddot{\tilde{e}}_0 + \kappa_1 \dot{\tilde{e}}_0 + \kappa_0 \tilde{e}_0 = 0 \quad (4.22)$$

Una selección apropiada de los coeficientes:  $\{\kappa_1, \kappa_0\}$ , coloca las raíces del polinomio característico suficientemente alejadas del eje imaginario en el lado izquierdo del plano complejo, para el error de observación  $\tilde{e}_3 = e_2 - \hat{e}_2$  tiene la siguiente dinámica de error:

$$\tilde{e}_2^{(8)} + \lambda_7 \tilde{e}_2^{(7)} + \lambda_6 \tilde{e}_2^{(6)} \cdots + \lambda_1 \dot{\tilde{e}}_2 + \lambda_0 \tilde{e}_2 = \xi^{(6)}(t) \quad (4.23)$$

Una selección adecuada de los coeficientes:  $\{\lambda_7, \dots, \lambda_1, \lambda_0\}$  coloca los polos del polinomio característico lo suficiente lejos en el lado izquierdo del plano complejo. Las ganancias del observador PIG  $\lambda_j$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots, 8$  son escogidas usando la metodología propuesta por Kim *et al.* en [133] esta selección de ganancias mitiga los efectos del fenómeno de *peaking* típico en observadores de alta ganancia [134]. Esta metodología se describe a continuación.

Para un polinomio característico arbitrario de orden  $p + 2$ :

$$s^{p+2} + \lambda_{p+1}s^{p+1} + \lambda_p s^p + \dots + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0 \quad (4.24)$$

el coeficiente  $\lambda_0$  se escoge como

$$\lambda_0 = \frac{T a_0}{\lambda_{p+2}} \quad (4.25)$$

donde el término  $a_0$  es una constante arbitraria y estrictamente positiva y el término  $T > 0$  es el tiempo deseado de asentamiento llamado *constante de tiempo generalizada* donde el  $\lambda_{p+2}$  se determina como

$$\lambda_{p+2} = \frac{T^{p+2} a_0}{\alpha_{p+1} \alpha_p^2 \alpha_{p-1}^3 \dots \alpha_1^{p+1}} \quad (4.26)$$

El resto de parámetros  $\lambda$  en (4.24) son calculados vía:

$$\lambda_i = \frac{T^i a_0}{\alpha_{i-1} \alpha_{i-2}^2 \alpha_{i-3}^3 \dots \alpha_1^{i-1} \lambda_{p+2}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p + 1 \quad (4.27)$$

donde  $\alpha_1$  es el *amortiguamiento deseado* el cual será un parámetro constante ajustable real positivo mayor que 2, i.e.,  $\alpha_1 > 2$  y los coeficientes  $\alpha_k$  se calculan de la siguiente manera

$$\alpha_k = \left[ \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{p+2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{p+2}\right)}{2 \sin\left(\frac{k\pi}{p+2}\right)} \right] \alpha_1, \quad k = 2, 3, \dots, p + 1 \quad (4.28)$$

La suavidad de la respuesta del error de observación y algunas propiedades de rechazo de ruido otorgadas por el esquema, hace este altamente recomendable para colocar los polos en una implementación experimental.

### 4.3. CRAP para el péndulo de Furuta

Se propone la siguiente ley de control:

$$\tau_\delta = -\frac{\left(\frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}{\gamma} [\hat{z}_1 + k_3 \hat{e}_3 + k_2 e_2 + k_1 \hat{e}_1 + k_0 e_0] \quad (4.29)$$

Los errores de seguimiento de trayectoria,  $e_0$  y  $e_2$ , son usados en lugar de usar los sus estimados. Los coeficientes del controlador pueden ser seleccionados para que la dinamica asociada al error de seguimiento de trayectoria, la cual esta gobernada por la siguiente ecuación diferencial sea estable

$$e_0^{(4)} + k_3 e_0^{(3)} + k_2 \ddot{e}_0 + k_1 \dot{e}_0 + k_0 e_0 = \xi(t) - \hat{z}_1 \quad (4.30)$$

El conjunto de coeficientes,  $\{k_3, \dots, k_1, k_0\}$  debe hacer que el polinomio característico:

$$p(s) = s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0$$

sea Hurwitz.

Se propone  $k_3 = 4\zeta_c \omega_c$ ,  $k_2 = 2\omega_c^2 + 4\zeta_c^2 \omega_c^2$ ,  $k_1 = 4\zeta_c \omega_c^3$ ,  $k_0 = \omega_c^4$  con  $\zeta_c$  y  $\omega_c$  constantes positivas.



Figura 4.4: Diagrama de bloques del esquema control para el péndulo de Furuta

#### 4.4. Resultados experimentales

La Figura 4.4 muestra un diagrama de bloques de la plataforma experimental péndulo de Furuta usada. El prototipo experimental (Figura 4.5) consiste de un servomotor de escobillas de la marca Moog, modelo C34L80W40 el cual brinda par al brazo horizontal a través de una banda síncrona con una reducción de 4.5:1. Los ángulos del péndulo y del brazo horizontal (motor), son medidos con codificadores ópticos incrementales de 2500 pulsos por revolución, Un amplificador de potencia digital modelo Junus 90 de la marca Copley Controls trabajando en modo de corriente, brinda la potencia necesaria para el motor. La adquisición de datos se lleva a cabo mediante una tarjeta de adquisición de la marca Quanser, modelo QPID, esta tarjeta



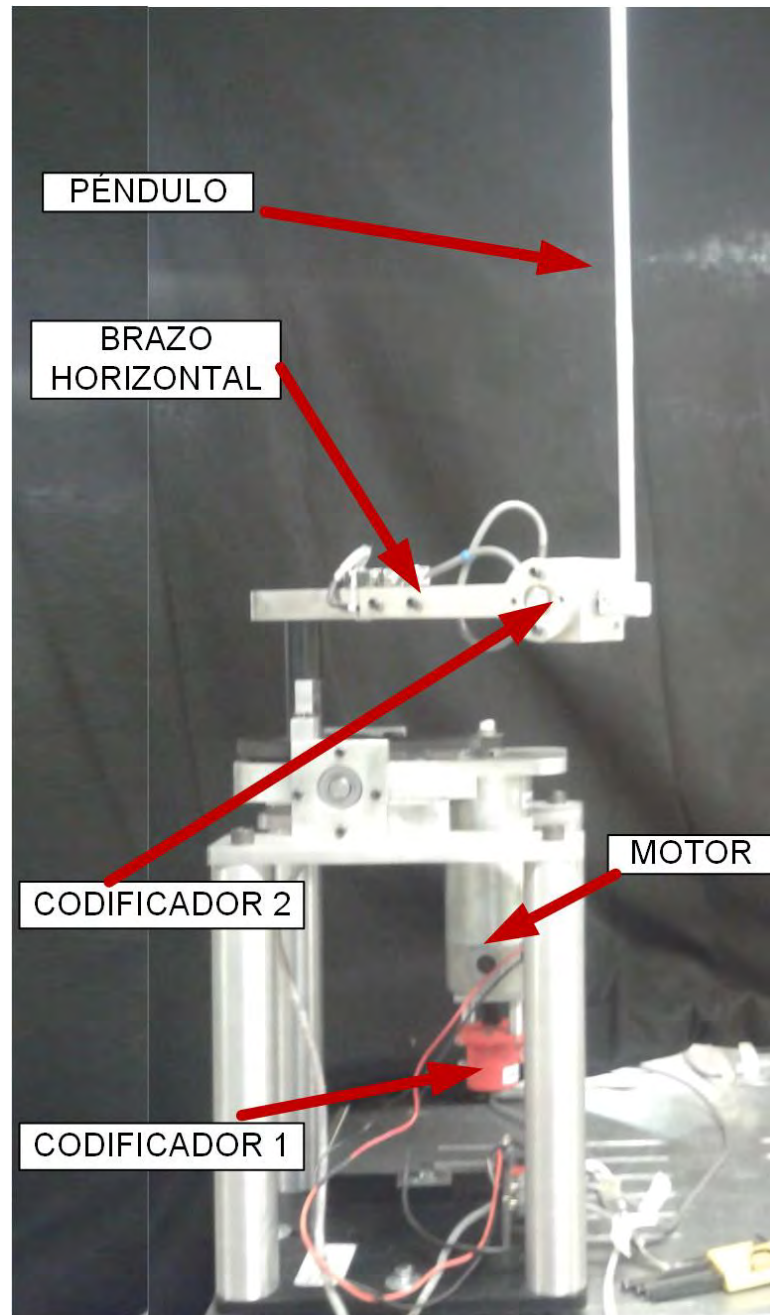


Figura 4.5: Péndulo de Furuta

lee las señales de los codificadores y suministra los voltajes de control hacia el amplificador de potencia. La estrategia de control fue implementada en la plataforma de Matlab-Simulink . El periodo de muestreo fue establecido en  $0.0005[s]$ . Los parámetros del péndulo de Furuta fueron  $l_0 = 0.33[m]$ ,  $l_1 = 0.275[m]$ ,  $m_0 = 1.64[Kg]$ ,  $m_1 = 0.141[Kg]$ ,  $I_0 = 0.0481[Kg-m^2]$ ,  $I_1 = 0.0036[Kg-m^2]$ , los cuales son usados (4.2), (4.29) para obtener  $\beta$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ , y  $\gamma$  respectivamente.

Las condiciones iniciales para las articulaciones en el sistema fueron:  $[\phi = 0, \theta = 0]$ . Los parámetros del observador para el error de observación  $\tilde{e}_1$ , fueron establecidas en:  $\zeta_o = 2$ ,  $\omega_o = 15$ . Las ganancias para el error de observación error  $\tilde{e}_3$  fueron establecidas en  $n = 8$ ,  $T = 6$ ,  $a_0 = 16$ ,  $\alpha = 4$ . Los parámetros de diseño del controlador fueron especificados como:  $\zeta_c = 1$ ,  $\omega_c = 12$ .

La Figura 4.6 muestra el desempeño del péndulo de Furuta; mientras el brazo horizontal está rotando, el péndulo conserva la posición vertical inestable  $\phi = 0$ . La figura 4.7 muestra el comportamiento del brazo horizontal desde la posición inicial  $\theta(2) = 0$  hasta la posición final  $\theta(5.4) = 2\pi$  durante un intervalo de tiempo  $t \in [2, 5.4]$  [s]. El par de control producido es provisto por la Figura 4.8. Se puede notar que la señales agrupadas en la estimación de la perturbación (ver Figura 4.9) determinan la forma de la señal de control. La Figura 4.10 muestra el comportamiento de la salida plana  $F_\delta = \eta\phi_\delta - \varepsilon\theta_\delta$  desde el valor inicial  $F_\delta(2) = 0$  hasta el final valor  $F_\delta(5.4) = -\varepsilon 2\pi$ , la Figura 4.11 muestra el error de seguimiento de trayectoria el cual permanece restringido a una zona acotada centrada en el origen del error en el espacio de fase.

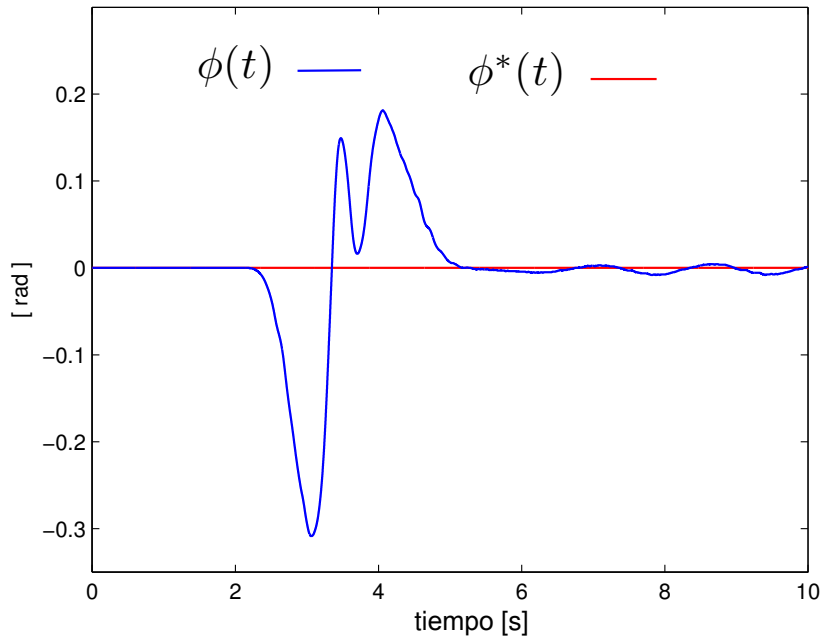


Figura 4.6: Comportamiento de la posición angular del péndulo en lazo cerrado.

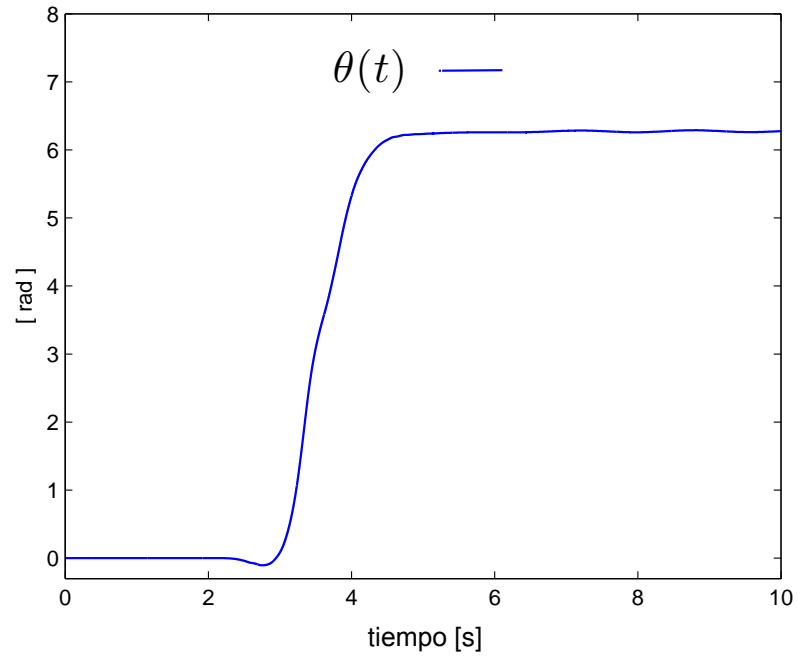


Figura 4.7: Comportamiento del seguimiento de trayectoria del brazo horizontal.

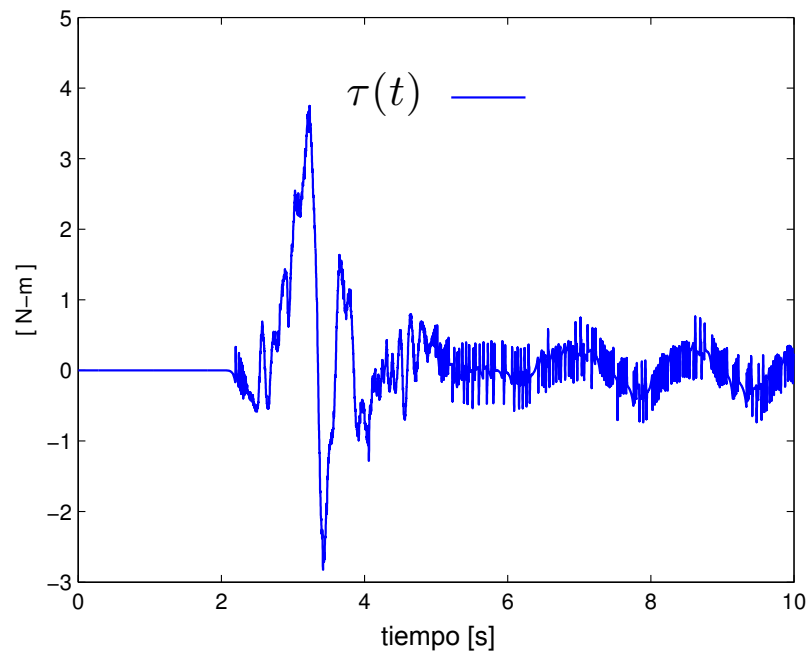


Figura 4.8: Par de control.

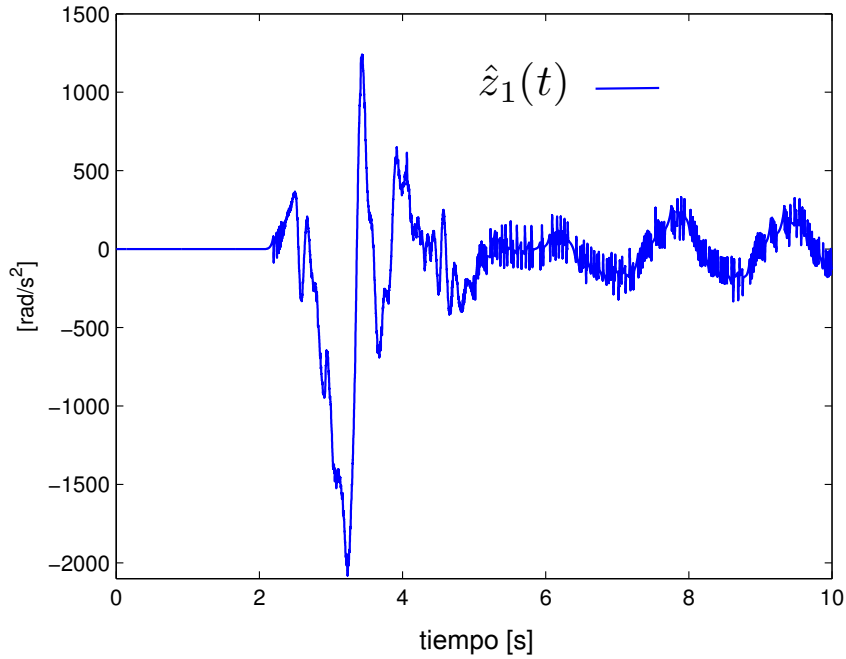


Figura 4.9: Estimación en línea de la perturbación .

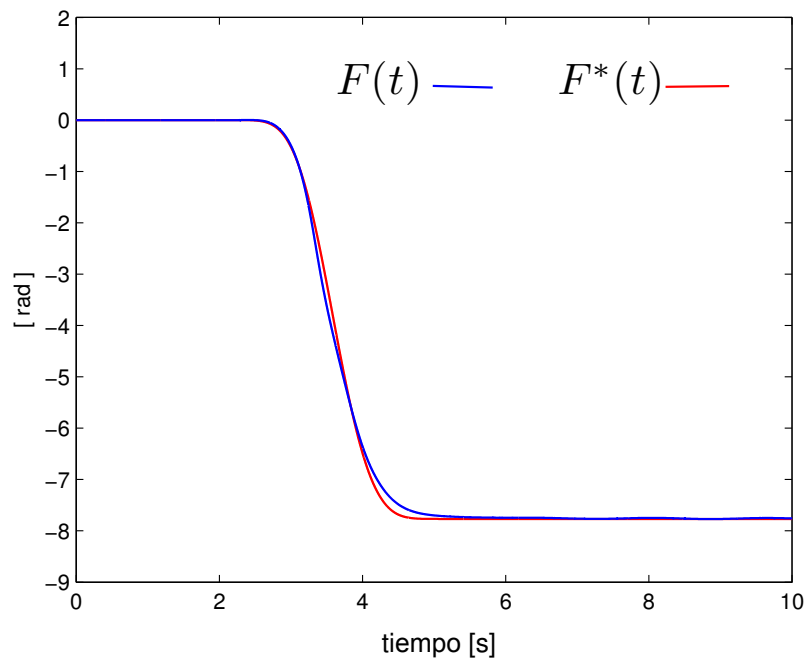


Figura 4.10: Seguimiento de trayectoria de la salida plana.

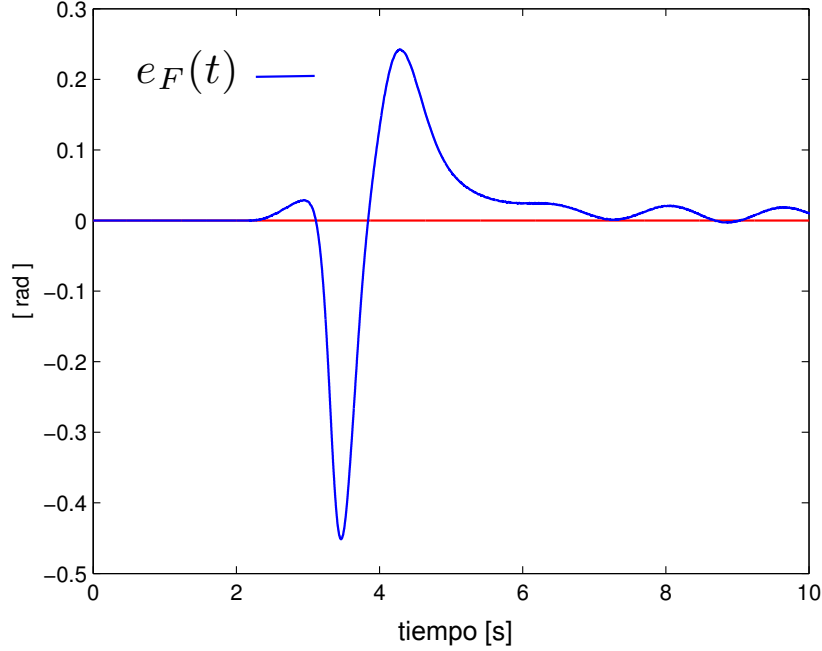


Figura 4.11: Error de seguimiento de la salida plana.

#### 4.4.1. Comparación de desempeño entre varios controladores

Con el objetivo de comparar el presente esquema de control se llevan a cabo un análisis comparativo respecto a un controlador mediante modos deslizantes, el cual es un esquema de control bien conocido. Tomando las ventajas de la propiedad de planitud diferencial que da el sistema linealizado, es posible la implementación de un control basado en el esquema de modos deslizantes (ver [135]). De la ecuación (4.16), se define la siguiente superficie deslizante:

$$\sigma = F_{\delta}^{(3)} - F_{\delta}^{(3)*} + \nu_1(\ddot{F}_{\delta} - \ddot{F}_{\delta}^*) + \nu_2(\dot{F}_{\delta} - \dot{F}_{\delta}^*) + \nu_3(F_{\delta} - F_{\delta}^*) \quad (4.31)$$

donde  $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$  son un conjunto de constantes reales tal que el polinomio  $s^3 + \nu_1 s^2 + \nu_2 s + \nu_3$  es Hurwitz. Tomando la derivada en el tiempo de  $\sigma$  se obtiene

$$\dot{\sigma} = \frac{\gamma}{\begin{pmatrix} \alpha^2 \eta & -\varepsilon \\ \varepsilon \beta & \beta \end{pmatrix}} \tau_{\delta} + \xi + \nu_1(F_{\delta}^{(3)} - F_{\delta}^{(3)*}) + \nu_2(\ddot{F}_{\delta} - \ddot{F}_{\delta}^*) + \nu_3(\dot{F}_{\delta} - \dot{F}_{\delta}^*) \quad (4.32)$$

Se puede identificar la dinámica perturbada para  $\sigma$

$$\dot{\sigma} = \frac{\gamma}{\begin{pmatrix} \alpha^2 \eta & -\varepsilon \\ \varepsilon \beta & \beta \end{pmatrix}} \tau_{\delta} + \xi(t) \quad (4.33)$$

donde

$$\xi(t) = \hat{\xi}(t) + \nu_1(F_\delta^{(3)} - F_\delta^{(3)*}) + \nu_2(\ddot{F}_\delta - \ddot{F}_\delta^*) + \nu_3(\dot{F}_\delta - \dot{F}_\delta^*) \quad (4.34)$$

Entonces el control por modos deslizantes se especifica como:

$$\tau_\delta = -\frac{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}{\gamma} W \text{sign}(\sigma) \quad (4.35)$$

para reducir el efecto de castaño es propuesta la siguiente ley de control:

$$\tau_\delta = -\frac{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}{\gamma} W \frac{\sigma}{\|\|\sigma\|\| + 0.0005} \quad (4.36)$$

donde  $W$  debe ser seleccionado tal que  $W > \sup_t \|\xi(t)\|$ , para asegurar el hecho que el error de seguimiento de trayectoria tienda a cero con el paso del tiempo. Para la superficie deslizante  $\sigma = 0$ , el conjunto de ganancias fueron escogidas de tal manera que el polinomio característico corresponda a  $s^3 + \nu_1 s^2 + \nu_2 s + \nu_3 = (s + p)(s^2 + 2\zeta_c \omega_c s + \omega_c^2)$ , con  $p = 5$ ,  $\omega_c = 5$ , y  $\zeta_c = 1.7$  respectivamente.

De la Figura 4.9, el valor de  $W$  fue fijado en 2500, el cual es un razonable valor experimental para un buen proceso de rechazo de perturbación, usando la condición del observador  $W > \sup_t \|\hat{z}(t)\|$  donde  $\hat{z}(t)$  es la perturbación estimada por el observador. La figura 4.12 muestra los resultados experimentales de ambos controladores en la misma tarea de seguimiento de trayectoria descrita antes. En la figura se puede apreciar que ambos controladores fuerzan al error de seguimiento de trayectoria a permanecer acotado. Se puede notar que el control mediante modos deslizantes presenta un pequeño castaño, sin embargo el controlador PIG ofrece una mejor respuesta en estado estacionario. Por otra parte, los errores de seguimiento de la salida plana son suaves, pero el controlador CRAP usando un observador PIG logra la tarea con un error menor. Finalmente, la Figura 4.13 muestra la entrada de control por modos deslizantes (arriba). La entrada de control fue procesada mediante un filtro de segundo orden pasabajas de tipo Butterworth con frecuencia de corte de 25 [rad/s], la señal procesada es mostrada en la parte inferior de la figura. Este tratamiento de señal fue hecho para comparar las señales de entrada del controlador CRAP y la entrada promediada del control por modos deslizantes; se puede notar que ambas señales tienen similar magnitud, lo cual muestra que el diseño del CRAP no fue ventajoso respecto al diseño del controlador mediante modos deslizantes.

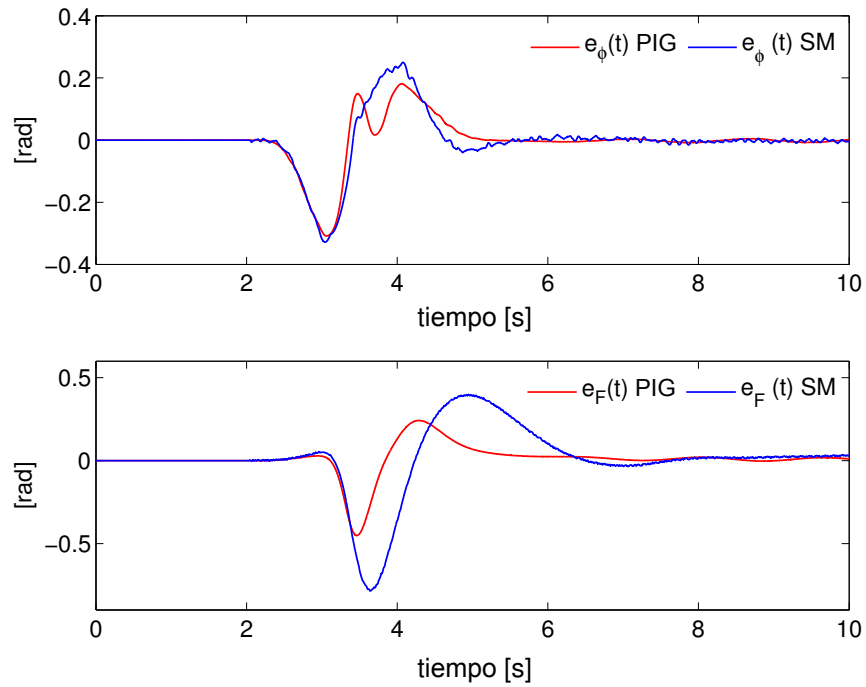


Figura 4.12: Comparación de resultados experimentales: errores de seguimiento.

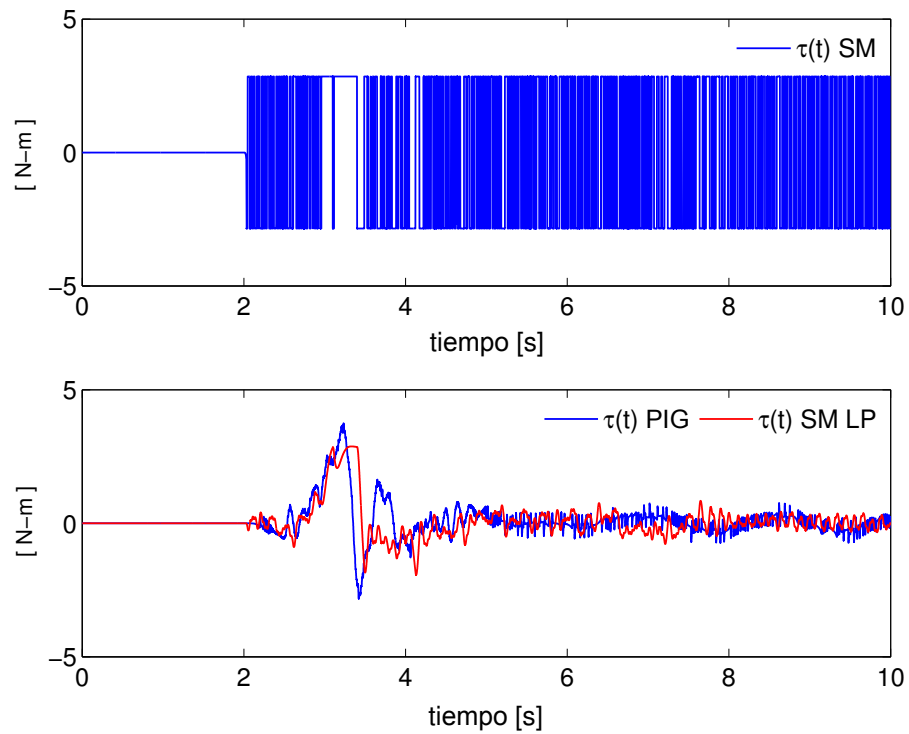


Figura 4.13: Comparación de resultados experimentales: Entradas de Control.





## Capítulo 5

# CRAP de sistemas subactuados *Ball and Beam*

Uno de los sistemas subactuados más interesantes para implementación de leyes de control es el sistema *Ball and Beam*[136], el cual consiste en una viga actuada que rota, donde una bola se mueve libremente rodando sobre la viga. El problema de control consiste en forzar a la bola a seguir una trayectoria de referencia, este problema ha sido abordado de diferentes perspectivas por ejemplo: Control por modos deslizantes [137], control difuso [138], [139], sistemas neuronales [140], realimentación de la salida [141], control basado teoría de juegos [142] entre otras. En el trabajo de [143] se realiza un estudio de comparación de estrategias de control robusto para el sistema *ball and beam*. La principal razón detrás de la existencia de una gran cantidad de esquemas obedece el hecho que el sistema *ball and beam* no es linealizable entrada-salida y no tiene un grado relativo definido [136], lo cual complica el diseño de observadores y controladores [144]. Sin embargo como se muestra en [136], la linealización aproximada mediante realimentación permite evitar singularidades, pero el esquema de control basado linealización aproximada exhibe debilidades. Incluso cuando se consigue la condición de grado relativo completo, las no linealidades así como las dinámicas despreciadas impiden un desempeño robusto. Para superar este problema, esquemas de control robusto tales como observadores de perturbación ([145], [146], [147], [52]) han mejorado el comportamiento del sistema controlado. El control basado en planitud diferencial [97] del sistema *ball and beam* linealizado permite en una estructura cascada [148] que hace menos complejo el diseño del observador. En este Capítulo, el esquema de Control basado en Rechazo Activo de Perturbaciones presentado en el Capítulo 3 y que fue probado exitosamente para el péndulo de Furuta en el Capítulo 4 se utiliza para resolver el problema estabilización y seguimiento de trayectoria del sistema *ball and beam*, nótese que a pesar de que los sistemas subactuados mecánicos antes mencionados tienen dinámicas y modelos matemáticos muy diferentes, la ley control utilizada en ambos sistemas tiene la misma estructura. El problema de seguimiento de trayectoria para el *ball and beam* se describe como llevar a la bola que no está actuada siguiendo una trayectoria punto a punto sobre la viga, mientras que la viga cambia su posición angular para lograr este objetivo. Al igual que en el

caso del péndulo de Furuta, para el *ball and beam*, el esquema de control considera incertidumbres los parámetros del sistema, no linealidades y señales de perturbación exógenas. Se utiliza una linealización tangente del modelo del *ball and beam*, alrededor de un punto de equilibrio, a pesar de esta linealización es posible mantener el la bola siguiendo una trayectoria o permanecer estable en alguna posición, incluso cuando la bola se encuentra muy alejada del punto de equilibrio.

En la sección 5.1 se considera brevemente el modelo no lineal del *ball and beam* y su linealización tangente alrededor de un punto de equilibrio. La planitud del modelo linealizado es utilizada para dividir el sistema subactuado en 2 subsistemas en cascada. En la sección 5.2 se propone un observador Luenverger para el primer subsistema y un observador PIG para el segundo subsistema. El diseño del CRAP con cancelación activa de la perturbación es presentado en la sección 5.3 donde se utilizan los estados estimados y la señal de perturbación estimada para resolver la tarea de seguimiento de trayectoria. En la sección 5.4 se presentan los detalles de la plataforma experimental y se discuten los resultados experimentales del comportamiento del sistema en lazo cerrado. Además, en esta sección se ilustra el comportamiento del controlador propuesto por medio de una comparación experimental respecto a un controlador lineal por realimentación de estados .

## 5.1. El sistema *ball and beam*

### 5.1.1. Modelo no lineal de sistema *ball and beam*

El sistema *ball and beam* mostrado en la Figura 5.1 consiste de una bola que se mueve libremente sobre una viga, esta viga es directamente ensamblada a una polea y actuada por medio de un mecanismo de banda dentada-motor que provee par a la viga generando un desplazamiento angular, la dinámica del sistema es representada como:

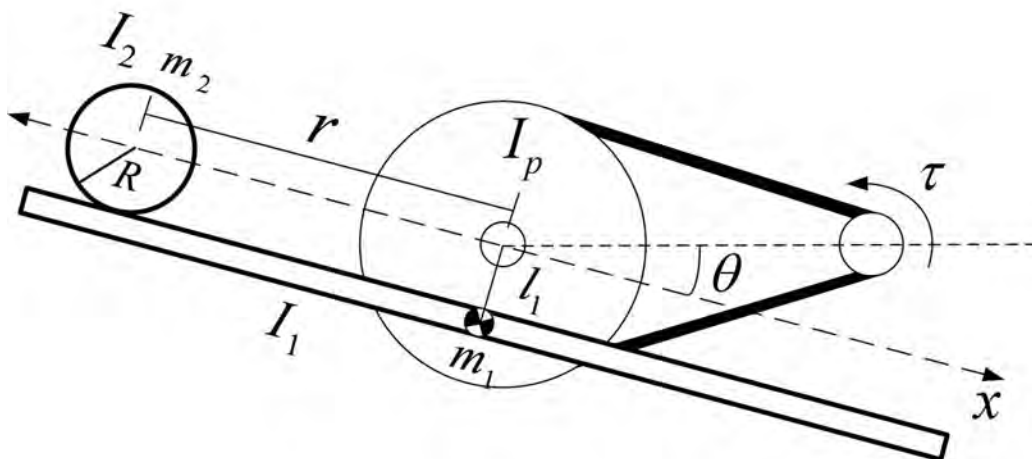


Figura 5.1: Esquema del sistema *ball and beam*

$$(m_2 + \frac{I_2}{R^2})\ddot{r} - m_2 r \dot{\theta}^2 + m_2 g \sin \theta = 0 \quad (5.1)$$

$$(m_2 r^2 + m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)\ddot{\theta} + 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta} + m_2 g r \cos \theta + m_1 g l_1 \sin \theta = N\tau \quad (5.2)$$

donde  $r$  representa la posición de la bola medida desde el centro de masa de la viga,  $\theta$  es la posición angular de la viga,  $m_2$  y  $R$  denota respectivamente la masa de la bola y su radio.  $I_2 = \frac{2}{5}m_2 R^2$  es la inercia de la bola,  $I_1$  expresa la inercia de la viga.  $m_1$  en la masa de la viga y  $I_p$  representa la inercia de la polea. La entrada de control es el par del representado por  $\tau$ , el cual puede ser expresado como función del voltaje de entrada a través de la siguiente relación aproximada:

$$\tau(t) = \frac{k_\tau}{R_a} V(t)$$

donde  $k_\tau$  y  $R_a$  representa la constante de par y la resistencia del motor respectivamente.

El punto de equilibrio deseado para el sistema es descrito por:

$$\bar{r} = 0, \quad \bar{\dot{r}} = 0, \quad \bar{\theta} = 0, \quad \bar{\dot{\theta}} = 0, \quad \bar{V} = 0 \quad (5.3)$$

La linealización aproximada del sistema (5.1)-(5.2) alrededor del punto de equilibrio (5.3) está dada por:

$$(m_2 + \frac{I_2}{R^2})\ddot{r}_\delta + m_2 g \theta_\delta = 0 \quad (5.4)$$

$$(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)\ddot{\theta}_\delta + m_2 g r_\delta + m_1 g l_1 \theta_\delta = \frac{k_\tau N}{R_a} V_\delta \quad (5.5)$$

donde  $r_\delta = r - \bar{r} = r$ ,  $\dot{r}_\delta = \dot{r} - \bar{\dot{r}} = \dot{r}$ ,  $\theta_\delta = \theta - \bar{\theta} = \theta$ ,  $\dot{\theta}_\delta = \dot{\theta} - \bar{\dot{\theta}} = \dot{\theta}$  y  $V_\delta = V - \bar{V} = V$ .

### 5.1.2. Planitud diferencial del modelo del ball and beam linealizado

El modelo linealizado (5.4)-(5.5) es diferencialmente plano [97], con la salida plana incremental dada por la posición de la bola

$$r_\delta = r - \bar{r} = r \quad (5.6)$$

todas las variables del sistema ball and beam pueden ser diferencialmente parametrizadas en términos de la salida plana  $r_\delta$ . A partir de (5.4)-(5.5) y la salida plana (5.4) se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\theta_\delta &= -\frac{(m_2 + \frac{I_2}{R^2})}{m_2 g} \ddot{r}_\delta \\
\dot{\theta}_\delta &= -\frac{(m_2 + \frac{I_2}{R^2})}{m_2 g} \dot{r}_\delta^{(3)} \\
\frac{k_\tau N}{R_a} V_\delta(t) &= -\frac{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)}{\alpha} r_\delta^{(4)} + m_2 g r_\delta - \frac{m_1 g l_1}{\alpha} \ddot{r}_\delta
\end{aligned} \tag{5.7}$$

donde  $\alpha = m_2 g / (m_2 + I_2 / R^2)$ .

La representación entrada-salida del sistema (5.7) es simplificada como

$$r_\delta^{(4)} = -\frac{\alpha k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} V_\delta(t) - \frac{m_1 g l_1}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)} \ddot{r}_\delta + \frac{\alpha m_2 g}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)} r_\delta \tag{5.8}$$

### 5.1.3. Propiedad de conexión en cascada para el modelo linealizado

La aceleración de la bola  $\ddot{r}_\delta$  puede ser expresada en términos de la posición angular de la viga a través de la siguiente expresión:

$$\ddot{r}_\delta = -\alpha \theta_\delta$$

Se puede notar que el sistema linealizado naturalmente se descompone dentro de una conexión en cascada de 2 bloques independientes el primero controlado mediante el voltaje de entrada  $V_\delta(t)$  con su salida correspondiente la aceleración  $\ddot{r}_\delta$  que coincide con la posición angular de la viga  $\theta_\delta$  multiplicada por un factor  $-\alpha$ ,  $\ddot{r}_\delta = -\alpha \theta_\delta$ . La señal  $-\alpha \theta_\delta$ , actuá como una entrada auxiliar medible para el segundo bloque, el cual consiste en una cadena de dos integradores representando las variables de fase  $\dot{r}_\delta$  y  $r_\delta$  (ver Fig. 5.2), la ultima variable  $r_\delta$  es la salida del segundo bloque.

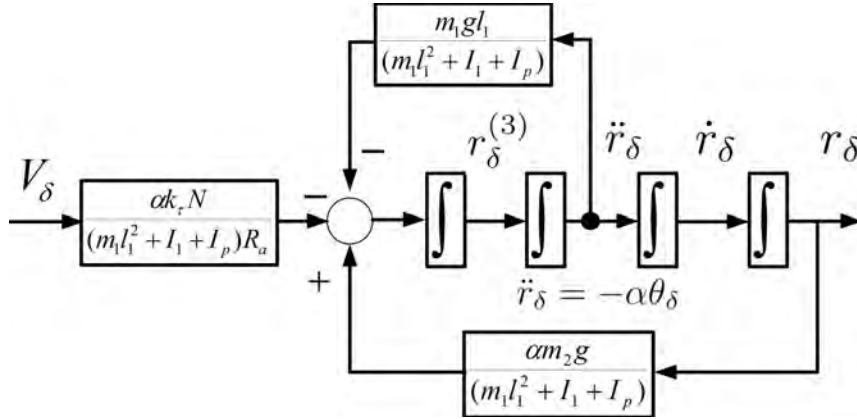


Figura 5.2: Estructura del sistema en cascada

#### 5.1.4. Formulacion del problema de control

Se desea mover la posición bola de un valor inicial  $r_\delta(0)$  hacia un valor final en un intervalo de tiempo finito  $[0, t_{final}]$ . La posición de referencia deseada  $r_\delta^*(t) = r^*(t) - \bar{r} = r^*(t)$  es especificada como una trayectoria punto a punto mediante un polinomio de interpolación de tipo Bézier (ver [149]).

Para aplicar el CRAP ([19], [52], [150], [151]), es necesario expresar el sistema como un modelo simplificado perturbado, tomando como base (5.8) este modelo simplificado perturbado es expresado como:

$$r_\delta^{(4)} = - \frac{\alpha k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} V_\delta(t) + \tilde{\xi}(t) \quad (5.9)$$

la señal de perturbación  $\tilde{\xi}(t)$  agrupa los efectos de los términos no lineales despreciados en la linealización, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas

$$\tilde{\xi}(t) = - \frac{m_1 g l_1}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)} \ddot{r}_\delta + \frac{\alpha m_2 g}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)} r_\delta + T.O.S.$$

Donde el termino T.O.S. representan los términos de orden superior despreciados en la linealización.

Se define el error de seguimiento de trayectoria de la salida plana como:

$$e_{r_\delta} = r_\delta - r^*(t) = r - \bar{r} - (r^*(t) - \bar{r}) \quad (5.10)$$

debido a la naturaleza del punto equilibrio y la entrada, este termino coincide precisamente con el error de trayectoria error  $r - r^*(t)$ , así como el voltaje de entrada incremental coincide con  $V_\delta = V(t) - \bar{V} = V(t)$ . La dinámica del error de seguimiento de trayectoria es determinada por:

$$\begin{aligned} e_{r_\delta}^{(4)} &= r_\delta^{(4)} - r^{(4)*}(t) \\ e_{r_\delta}^{(4)} &= - \frac{\alpha k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} V(t) + \tilde{\xi}(t) + \frac{\alpha k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} V^*(t) - \tilde{\xi}^*(t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

El paso clave en los esquemas de control usando planitud diferencial y CRAP ([148], [152]) es tratar la dinámica de error de seguimiento de trayectoria como un modelo simplificado perturbado:

$$e_{r_\delta}^{(4)} = - \frac{\alpha k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} V(t) + \xi(t) \quad (5.12)$$

donde  $\xi(t)$  y es comúnmente llamada perturbación total y ésta agrupa los términos desconocidos y despreciados que afectan al sistema  $\tilde{\xi}(t)$ ,  $V^*(t)$  y  $\tilde{\xi}^*(t)$  en otras palabras:

$$\xi(t) = \tilde{\xi}(t) + \frac{\alpha k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} V^*(t) - \tilde{\xi}^*(t)$$

## 5.2. Observador PIG en cascada para sistema *ball and beam*

Se define,  $e_{r_\delta}^{(i)}$  como  $e_i, i = 0, 1, 2, 3$ . La dinámica perturbada del error de seguimiento de trayectoria de la salida plana en espacio de estado está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 &= e_1 \\ \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= -\frac{\alpha k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} V(t) + \xi(t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Usando la propiedad de cascada descrita en el Capitulo 3 que nos brinda la planitud diferencial, el sistema (5.13) puede ser dividido en una conexión de 2 subsistemas. Nótese que el estado  $e_2$  puede ser expresado como:

$$e_2 = \ddot{r}_\delta - \ddot{r}_\delta^*(t) = -\alpha \theta_\delta - \ddot{r}_\delta^*(t)$$

el cual representa la entrada medible para el subsistema

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 &= e_1 \\ \dot{e}_1 &= e_2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

mientras el resto del sistema es dado por

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= -\frac{\alpha k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} V(t) + \xi(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

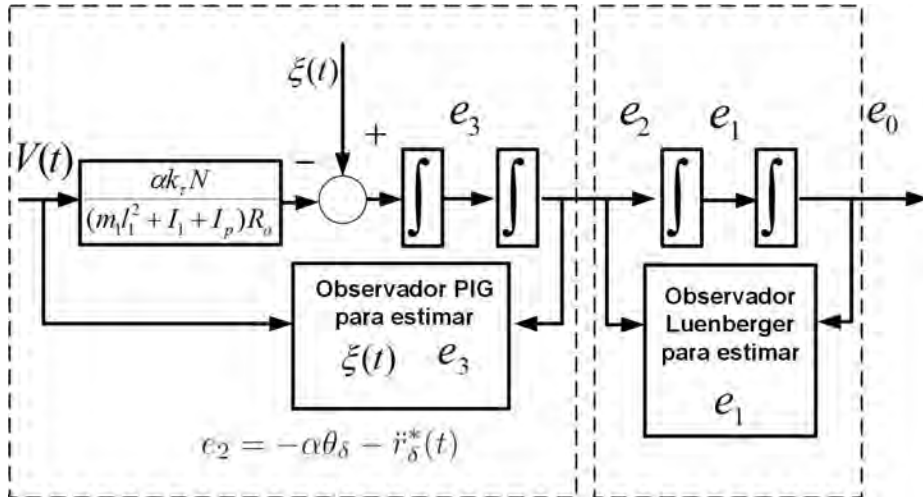


Figura 5.3: Conjunto de 2 de observadores para el sistema *ball and beam*

Aprovechando la propiedad de planitud diferencial, un conjunto de 2 observadores pueden ser propuesto para la estimación simultanea de las variables de fase asociadas con el error de seguimiento de trayectoria de la salida  $e_{r_s}$  y de la señal de perturbación  $\xi(t) = z_1$ , éstos observadores son propuestos usando la siguiente estructura. Para los estados  $e_0 - e_1$  se propone un observador Luenberger:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_0 &= \hat{e}_1 + \rho_1(e_0 - \hat{e}_0) \\ \dot{\hat{e}}_1 &= \hat{e}_2 + \rho_0(e_0 - \hat{e}_0)\end{aligned}\tag{5.16}$$

y para la dinámica restante un observador PIG:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_2 &= \hat{e}_3 + \lambda_{p+1}(e_2 - \hat{e}_2) \\ \dot{\hat{e}}_3 &= -\frac{\alpha k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)R_a} V(t) + \hat{z}_1 + \lambda_p(e_2 - \hat{e}_2) \\ \dot{\hat{z}}_j &= \hat{z}_{j+1} + \lambda_{p-j}(e_2 - \hat{e}_2), j = 1, \dots, p-1 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{z}}_p &= \lambda_0(e_2 - \hat{e}_2)\end{aligned}\tag{5.17}$$

donde  $p$  es el orden de la extensión en el observador (ver [34]), el cual puede ser escogido en una variedad de valores arbitraria. En el presente ejemplo, el término  $p = 6$  fue sistemáticamente escogido (ver la sección 5.4). La dinámica del error de observación  $\tilde{e}_0 = e_0 - \hat{e}_0$  es ,

$$\ddot{\tilde{e}}_0 + \rho_1 \dot{\tilde{e}}_0 + \rho_0 \tilde{e}_0 = 0$$

Una selección apropiada de las coeficientes:  $\{\rho_1, \rho_0\}$  localizando las raíces correspondientes del polinomio característico del lado izquierdo del plano complejo, hacen que error de observación  $\tilde{e}_0$ , decrezca exponencialmente hacia una vecindad cercana de cero. En este caso, los parámetros  $\rho_1, \rho_0$  son seleccionados de tal manera el polinomio característico corresponda con polinomios estables de segundo orden  $s^2 + 2\zeta_o \omega_o s + \omega_o^2$ , siendo  $\zeta_o > 0, \omega_o > 0$ . El error de observación  $\tilde{e}_2 = e_2 - \hat{e}_2$  presenta la siguiente dinámica:

$$\tilde{e}_2^{(p+2)} + \lambda_{p+1} \tilde{e}_2^{(p+1)} + \dots + \lambda_1 \dot{\tilde{e}}_2 + \lambda_0 \tilde{e}_2 = [\xi(t)]^p$$

Una condición necesaria y suficiente para que el error de estimación  $\tilde{e}_2$  converja exponencialmente hacia una vecindad cercana de cero del espacio de fase, consiste en escoger las ganancias del observador PIG  $\lambda_k, \{k = 0, \dots, p+1\}$  tal que la dinámica del error posea polinomios Hurwitz [40]. En este caso la dinámica lineal es de alto orden, el procedimiento de selección tiene que considerar la rápida respuesta evitando picos así como reduciendo los efectos de ruido que afectan al sistema. El eficiente procedimiento de colocación de polos, desarrollado Kim *et al.*[153] fue presentado en el Capítulo 4 en (4.25)-(4.28). Este procedimiento de colocación de polos, produce una respuesta razonable del error de estimación pero suficientemente rápida, ([154], [148])

con “peaking” mínimo. Cabe resaltar que dividir el sistema subactuado en 2 subsistemas permite el proponer un observador Luenberger para el primer subsistema y un observador PIG para el segundo subsistema, éstos utilizan ganancias más pequeñas que un solo observador PIG para el sistema subactuado completo.

### 5.3. CRAP para sistema *ball and beam*

La ley de control puede sintetizarse como:

$$V = \frac{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a}{\alpha k_\tau N} \left[ \hat{z}_1 + k_3 \hat{e}_3 + k_2 e_2 + k_1 \hat{e}_1 + k_0 e_0 \right] \quad (5.18)$$

el controlador es construido usando el valor estimado de la perturbación total  $\hat{z}_1$ , y la estimación de los estados no disponibles para su medición. Los coeficientes del controlador son escogidos usando la dinámica asociada al error de seguimiento de trayectoria de la salida plana en lazo cerrado:

$$e_1^{(4)} + k_3 e_1^{(3)} + k_2 \ddot{e}_1 + k_1 \dot{e}_1 + k_0 e_1 = \xi(t) - \hat{z}_1 \quad (5.19)$$

El conjunto de coeficientes  $\{k_3, k_2, k_1, k_0\}$  son seleccionados de tal manera que la dinámica en lazo cerrado asociada a su polinomio característico sea Hurwitz. En este caso se escogen como  $k_3 = 4\zeta_c \omega_c$ ,  $k_2 = 2\omega_c^2 + \zeta_c^2 \omega_c^2$ ,  $k_1 = 4\zeta_c \omega_c^3$ ,  $k_0 = 4\omega_c^4$ , con  $\zeta_c > 0$  y  $\omega_c > 0$ .

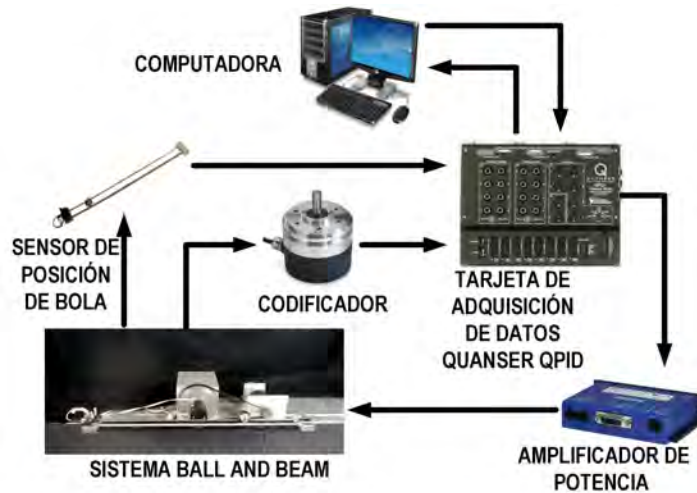


Figura 5.4: Diagrama de bloques del control para el sistema *ball and beam*

### 5.4. Resultados experimentales

Un diagrama de bloques de la plataforma experimental se muestra en la Figura 5.4. El prototipo experimental consiste de un motor de corriente directa de la marca



NISCA Motors modelo NC5475B el cual brinda par a una viga de aluminio por medio de una banda dentada y una polea, la relación de reducción es de  $N = 6 : 1$ . La posición angular de la viga es medida usando un codificador incremental de 2500 pulsos por revolución a través del motor. Un sensor de posición lineal fijado a la viga, consiste de una pista hecha cable de níquel-cromo en la cual una bola de acero inoxidable puede rodar con fricción despreciable. La bola actúa como una terminal variable similar a la de un potenciómetro, la posición a lo largo de la viga puede ser obtenida midiendo la salida de voltaje del sensor lineal con una resolución de 25 [mm/V].

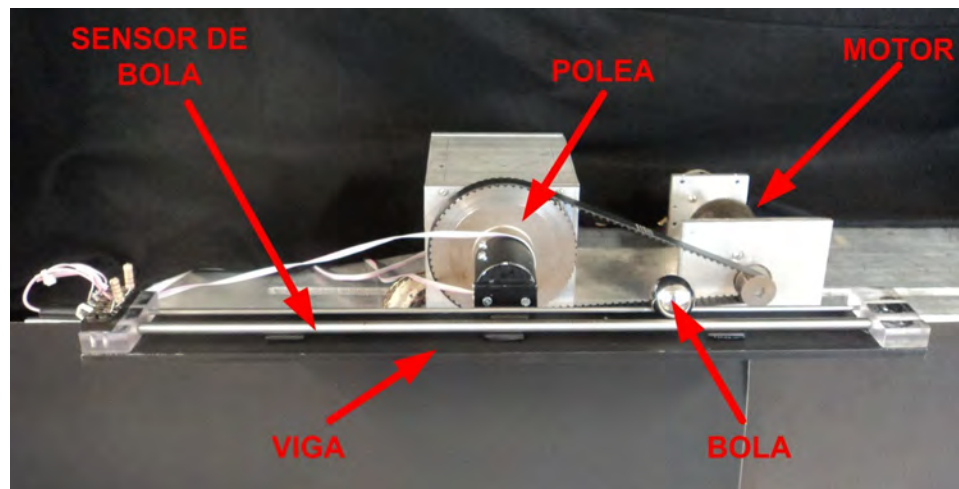


Figura 5.5: Prototipo del sistema *ball and beam*

Un amplificador de potencia de la marca STMicroelectronics modelo TDA7293 es encargado de brindar el voltaje al motor. La adquisición de datos es llevada a cabo a través de una tarjeta de Quanser modelo QPID. Esta tarjeta obtiene las señales del codificador incremental, el voltaje del sensor lineal y suministra el voltaje de control hacia el amplificador de potencia. La estrategia de control fue implementada en el entorno Matlab-Simulink. Finalmente el periodo de muestreo fue establecido 0.001[s]. Los parámetros para la viga de aluminio:  $I_1 = 0.0045[\text{Kg}\cdot\text{m}^2]$  y  $m_1 = 0.065[\text{Kg}]$  representan la inercia y la masa de viga respectivamente, la distancia del centro de masa de la viga respecto al eje de rotación  $l_1 = 0.015[\text{m}]$ , la inercia de la polea  $I_p = 0.001[\text{Kg}\cdot\text{m}^2]$ , los términos  $m_2 = 0.065[\text{Kg}]$ ,  $I_2 = 0.0045[\text{Kg}\cdot\text{m}^2]$  representan la masa de la bola y su inercia respectivamente y el radio de la bola es denotado por  $R = 0.0127[\text{m}]$ , por otra parte los parámetros del motor son descriptor por  $R_a = 12.1[\Omega]$  que representa la resistencia de armadura del motor y  $k_\tau = 0.0724[\text{Nm/A}]$  que es la constante de par. Las condiciones iniciales del experimento para las la posición de la bola y la posición angular de la viga  $[r = 0, \theta = 0]$ . Las ganancias del observador Luenberger se establecen como  $\zeta_o = 1.3$ ,  $\omega_o = 13$ , las ganancias del observador PIG se escogen como  $p = 8$ ,  $T = 6$ ,  $a_0 = 4$ ,  $\alpha_1 = 4.1$ . Los parámetros de diseño del controlador se escogen como  $\zeta_c = 1$ ,  $\omega_c = 15$ . La Figura 5.6 muestra el comportamiento para

de seguimiento de trayectoria desde la posición inicial  $r_\delta(0) = 0$  hasta la posición final  $r_\delta(9) = 0.12$ . Una vez estabilizada la bola se mueve hacia una posición final  $r_\delta(18) = -0.12$ . El error de seguimiento de trayectoria es mostrado en la Figura 5.7, el error de posición está restringido a un intervalo de  $[-0.004, 0.004]$  [m]. El voltaje de control  $V$  es representado en la Figura 5.9. Se puede notar que las señales agrupadas en la estimación de la perturbación total (Figura 5.10) determinan la forma de la señal de control que tiende a cancelar las perturbaciones de entrada desconocidas.

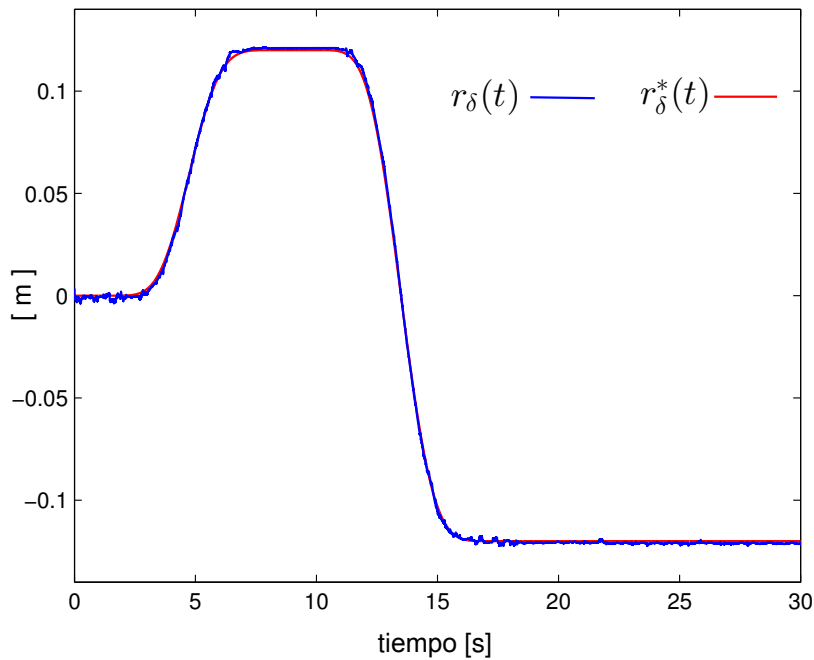


Figura 5.6: Comportamiento del seguimiento de trayectoria de la bola

#### 5.4.1. Prueba experimental con perturbaciones externas

Con el objetivo de probar el comportamiento del esquema de CRAP basado en planitud diferencial (5.18), se llevan a cabo un análisis comparativo respecto a un controlador por realimentación de estados integral CREI para el modelo linealizado del sistema ball and beam en una tarea de seguimiento de trayectoria punto a punto. El esquema de control CREI es conocido y fue desarrollado en [155] y [143]. Considere la dinámica del modelo linealizado (5.4) y (5.5). Se definen siguientes variables de estado  $x_1 = r_\delta$ ,  $x_2 = \dot{r}_\delta$ ,  $x_3 = \theta_\delta$  y  $x_4 = \dot{\theta}_\delta$ . Dada la posición de la bola  $r_\delta$  actúa como la salida del sistema. Las ecuaciones para el sistema linealizado en espacio de estado esta dadas por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.20)$$

$$y = Cx \quad (5.21)$$

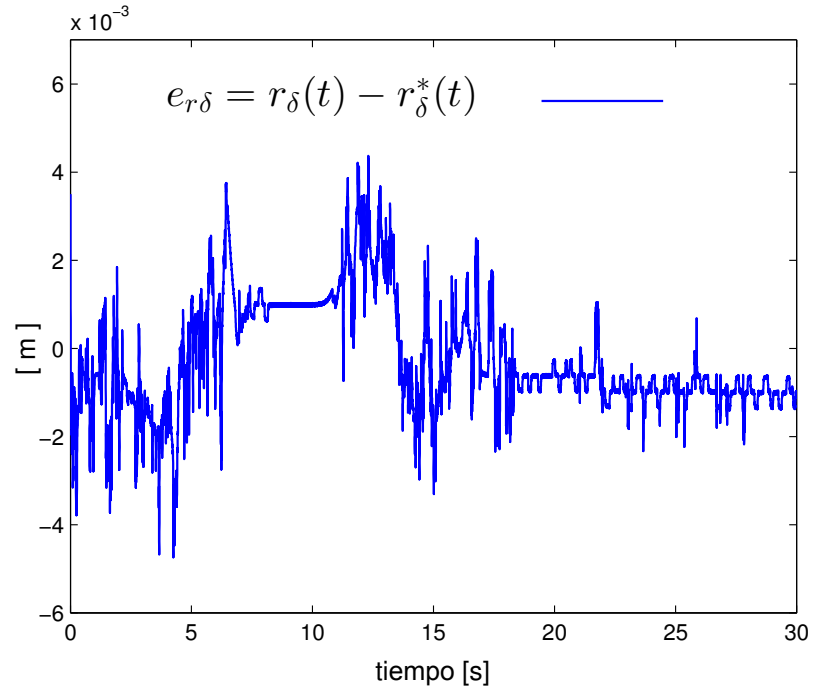


Figura 5.7: Error de seguimiento de trayectoria de la bola

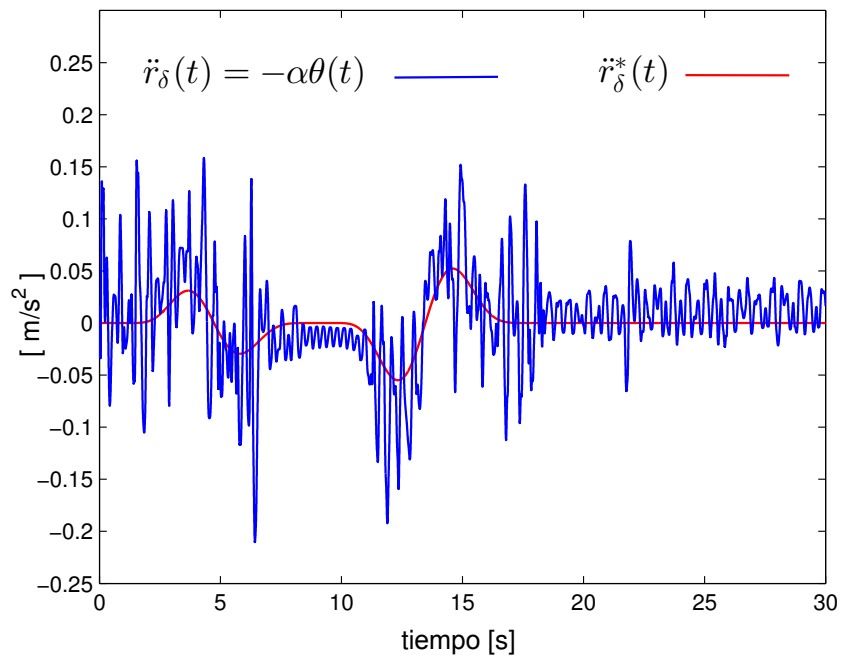


Figura 5.8: Seguimiento de aceleración de la bola

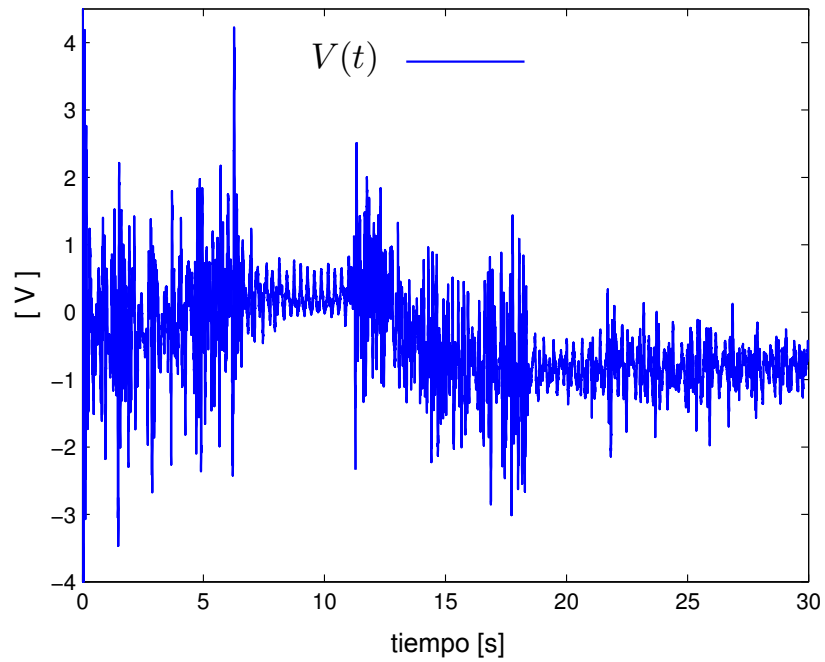


Figura 5.9: Señal de voltaje de control

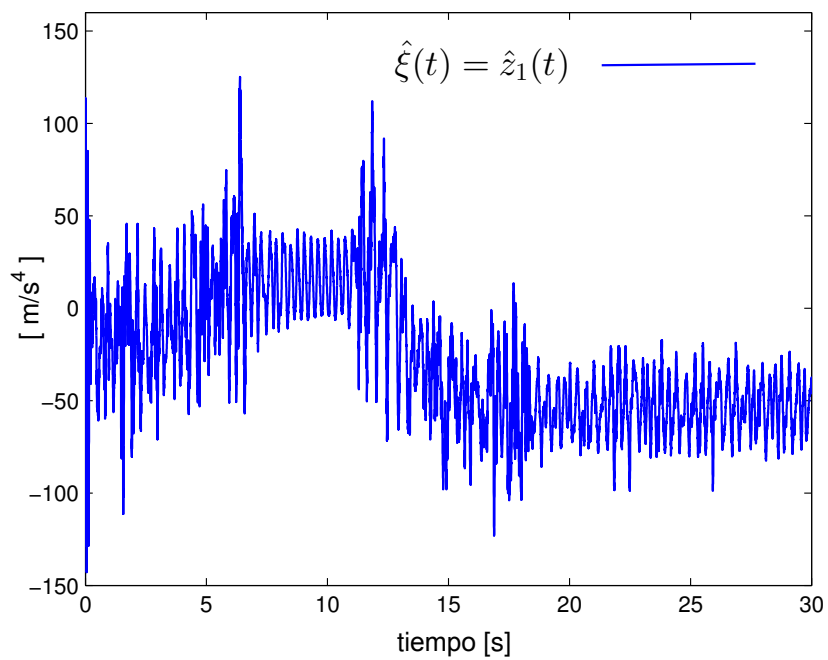


Figura 5.10: Estimación en línea de la perturbación

la matriz del sistema  $A$  y la matriz de entrada  $B$  son representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_2 g}{m_2 + \frac{I_2}{R^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m_2 g}{m_1 l_1^2 + I_1 + I_p} & 0 & -\frac{m_1 g l_1}{m_1 l_1^2 + I_1 + I_p} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_T N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} \end{bmatrix}$$

y la matriz de salida como:  $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$

En la dinámica del error de seguimiento de trayectoria es representada

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (5.22)$$

donde las siguientes matrices aumentadas están dadas por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = [C \ 0]$$

El vector de error de seguimiento de trayectoria  $e$  es definido como

$$e = \begin{bmatrix} x - x^*(t) \\ \hat{C} f(x - x^*(t)) \end{bmatrix}$$

El CREI es por lo tanto especificado como

$$u_e = -\hat{K}e \quad (5.23)$$

donde  $\hat{K} = [\kappa_1 \ \kappa_2 \ \kappa_3 \ \kappa_4 \ \kappa_5]$  es la matriz de ganancia de realimentación de estados, simplificando

$$u_e = -(\kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + \kappa_3 e_3 + \kappa_4 e_4 + \kappa_5 e_5) \quad (5.24)$$

La dinámica del error es presentada como  $\dot{e} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})e$ , los polos deseados en lazo cerrado de la matriz  $\hat{A} - \hat{B}\hat{K}$  son especificados como  $(s + \mu_1)(s + \mu_2)(s + \mu_3)(s + \mu_4)(s + \mu_5) = 0$ , donde los polos dominantes son regidos por una dinámica de segundo orden estable  $(s + \mu_1)(s + \mu_2) = s^2 + 2\zeta_f \omega_f s + \omega_f^2$  y los polos  $\mu_3, \mu_4, \mu_5$  se localizan suficientemente alejados en el lado izquierdo del plano complejo. Debido a que el sistema definido en (5.22) es completamente controlable la matriz de ganancia de realimentación de estados  $\hat{K}$  puede ser determinada por el método de localización de polos. Se puede observar que el controlador de la viga es un regulador que comprende a los estados  $e_3$  y  $e_4$ , mientras que para la bola es un controlador para seguimiento de trayectoria con los estados  $e_1, e_2$  y  $e_5$ . El control  $u_e$  trabajara con buenos resultados si el sistema se encuentra cerca de la vecindad del punto de equilibrio. Los coeficientes en la asignación de polos del CREI se seleccionan considerando los siguientes parámetros.  $\zeta_f = 0.9$ ,  $\omega_f = 8$ ,  $\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = -10$ . Calculando los coeficientes, se obtiene:

$\kappa_1 = -259.21$ ,  $\kappa_2 = -54.91$ ,  $\kappa_3 = 42.03$ ,  $\kappa_4 = 2.35$  y  $\kappa_5 = -485.437$ . Para reducir el ruido en la medición de voltaje del sensor de posición de la bola, se lleva a cabo un filtrado utilizando un filtro de primer orden pasa bajas con frecuencia de corte de  $87[\text{rad/s}]$ , con la siguiente función de transferencia  $87/(s+87)$ , la derivada temporal de la posición de la bola fue calculada usando la el bloque de derivada proporcionado por Simulink y filtrada con un filtro pasa bajos con función de transferencia  $62/(s+62)$ , para posición de la viga se utilizó un filtro pasa bajas  $188/(s+188)$ , y para su derivada  $125/(s+125)$ .

La Figura 5.11 muestra el comportamiento de la posición de la bola. El sistema es perturbado por fuerzas externas aplicadas aproximadamente en los tiempos  $t = [7, 9, 18, 22, 26]$ , la salida plana del CRAP es indicado por  $r_{\delta PIG}$ , y para el controlador CREI  $r_{\delta CREI}$ . La respuesta de ambos controladores hacen que la bola permanezca cerca de la posición deseada  $r^*(t)$  mientras evitan las perturbaciones externas. Sin embargo, el CREI falla en el tiempo  $t = 28$  debido a que la bola se encuentra muy alejada del punto de equilibrio. La respuesta del CREI para fuerzas externas se comporta como un sistema subamortiguado, este comportamiento restringe el tipo de perturbaciones que se puede aplicar al sistema, la amplitud de las perturbaciones permitidas es considerablemente menor que las amplitudes que puede permitir el controlador CRAP. Claramente  $\theta_{\delta CREI}$ , presenta oscilaciones inestables cuando la perturbación se aplica.

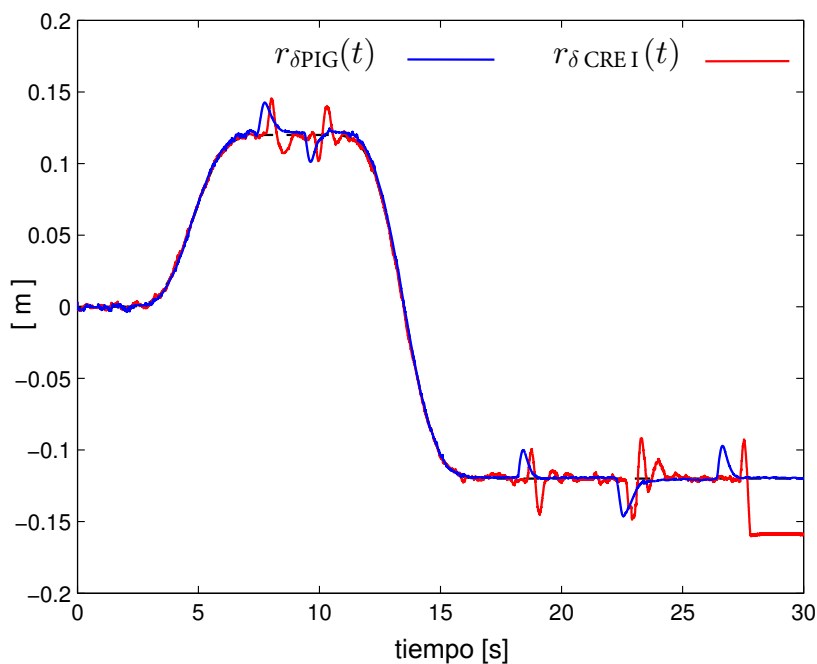


Figura 5.11: Comparación del seguimiento de trayectoria de la bola con perturbaciones externas

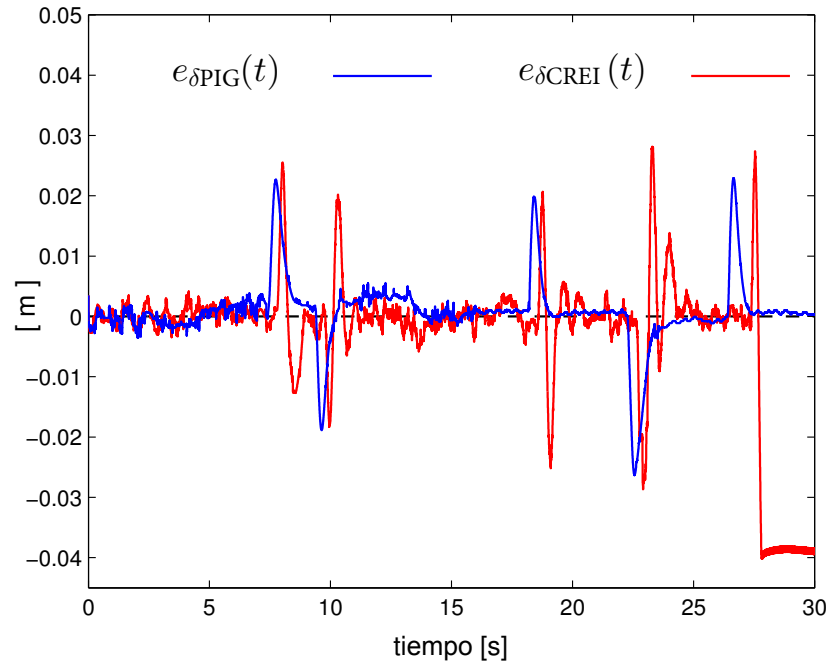


Figura 5.12: Comparación de el error de seguimiento de trayectoria

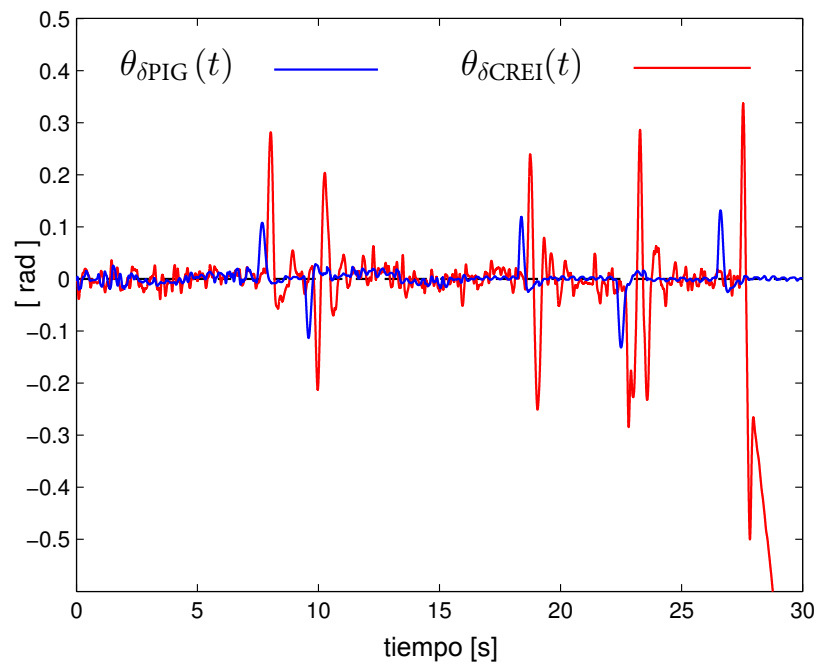


Figura 5.13: Comparación de la posición angular de la viga

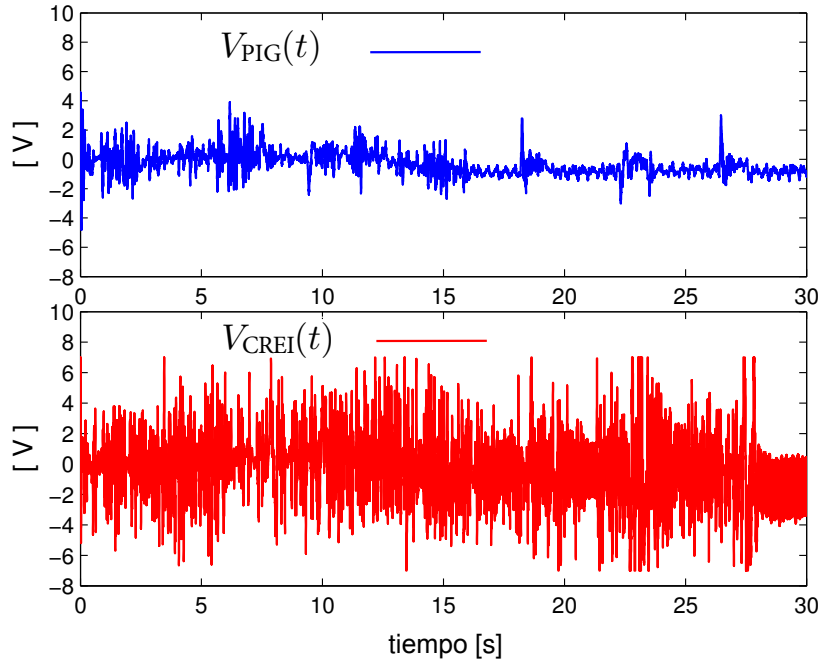


Figura 5.14: Señales de voltaje de control

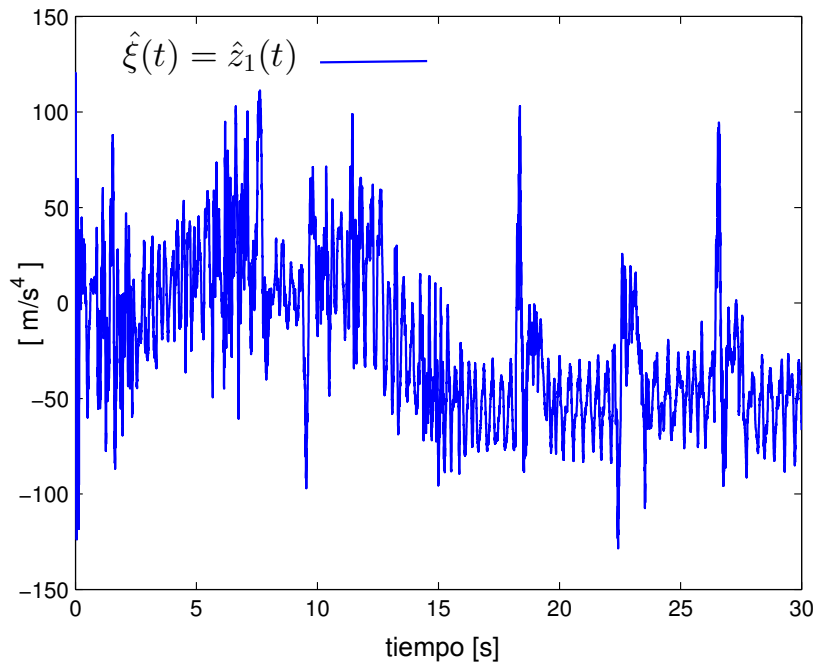


Figura 5.15: Estimación de la perturbación externa aplicada al sistema



## Capítulo 6

# Conclusiones y trabajo a futuro

La mayoría de sistemas subactuados no son linealizables via realimentación estática o dinámica. Las estrategias de control de esta clase de sistemas están centradas alrededor de aproximaciones no lineales las cuales son exactamente linealizables mediante realimentación, o alternativamente vía linealizaciones tangenciales. El problema de control de esta clase de sistemas subactuados en tareas de seguimiento de trayectoria fue abordado en este trabajo mediante el estudio de la planitud diferencial asociado con modelos linealizados, utilizando un Observador lineal de estado extendido y empleando el Control mediante Rechazo Activo de Perturbaciones. El esquema presentado usa la linealización tangente alrededor de un punto de equilibrio. Los inconvenientes tradicionales presentes en los esquemas de control lineales estándares fueron superados utilizando el hecho de que los sistemas subactuados se pueden descomponer en subsistemas de segundo orden conectados en cascada. Lo anterior hace posible diseñar observadores para cada subsistema los cuales utilizan ganancias más pequeñas que las empleadas en un observador diseñado para el sistema subactuado completo. Implementaciones experimentales logran resultados altamente competitivos cuando se comparan con otros controladores lineales y no lineales.

Como sugerencias para trabajo a futuro:

- Estudio de sistemas mecánicos subactuados alto de orden  $n > 4$  con una entrada de control.
- Extensiones del resultado para el caso de sistemas mecánicos subactuados con múltiples entradas de control.
- Extensiones del resultado para sistemas subactuados de naturaleza no mecánica con una sola entrada y con múltiples entradas de control.
- Estudio de sistemas subactuados con retardos en la entrada.



# Bibliografía

- [1] J. Preminger y J. Rootenberg. Some considerations relating to control systems employing the invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(3):209–215, 1964.
- [2] A.S. Poznyak, V.I. Utkin, y A.S. Vostrikov. Russia [control education]. *IEEE Control Systems*, 16(2):37–40, 1996.
- [3] G. Schipanov. Theory and methods of designing automatic regulators. *Automatika in Telemekhanika*, 4:49–66, 1939.
- [4] V.S. Kulebakin. On applicability of the principle of absolute invariance in real systems. En *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 60, páginas 231–234, 1948.
- [5] V.S. Kulebakin. The use of the principle of invariance in physically realizable systems. En *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, volume 60, páginas 231–234, 1948.
- [6] B. N. Petrov. The application of conditions of invariance. En *Transactions of the First All-Union Conference on the Theory of Automatic Regulation, Izvest. Akad. Nauk. SSSR, ML*, página 241.
- [7] L. Finkelstein. The theory of invariance, 1960.
- [8] F. G. Shinskey. Feedforward control applied. *ISA Journal*, páginas 61–65, 1963.
- [9] K. Narendra y L. McBride. Multiparameter self-optimizing systems using correlation techniques. *IEEE Transactions on automatic control*, 9(1):31–38, 1964.
- [10] K. Steiglitz y L. McBride. A technique for the identification of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10(4):461–464, 1965.
- [11] Yuping Guan y Mehrdad Saif. A novel approach to the design of unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(5):632–635, 1991.
- [12] C.D. Johnson. Accomodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):635–644, 1971.

- [13] C.D. Johnson. Discrete-time disturbance-accommodating control theory with applications to missile digital control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 4(2):116–125, 1981.
- [14] P.N. Nikiforuk y K. Tamura. Design of a disturbance accommodating adaptive control system and its application to a dc-servo motor system with coulomb friction. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 110(4):343–349, 1988.
- [15] Jingqing Han. A class of extended state observers for uncertain systems. *Control and Decision*, 10(1):85–88, 1995.
- [16] Zhiqiang Gao, Yi Huang, y Jingqing Han. An alternative paradigm for control system design. En *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, volume 5, páginas 4578–4585. IEEE, 2001.
- [17] Huanpao Huang, Liqiang Wu, Jingqing Han, Gao Feng, y Yongjun Lin. A new synthesis method for unit coordinated control system in thermal power plant-adrc control scheme. En *Power System Technology, 2004. PowerCon 2004. 2004 International Conference on*, volume 1, páginas 133–138. IEEE, 2004.
- [18] Yi Huang, Kekang Xu, Jingqing Han, y James Lam. Flight control design using extended state observer and non-smooth feedback. En *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE. The Journal’s web site is located at <http://www.ieeecss.org>, 2001.
- [19] Jingqing Han. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(3):900–906, 2009.
- [20] Yi Hou, Zhiqiang Gao, Fangjun Jiang, y Brian T Boulter. Active disturbance rejection control for web tension regulation. En *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, volume 5, páginas 4974–4979. IEEE, 2001.
- [21] Robert Miklosovic y Zhiqiang Gao. A robust two-degree-of-freedom control design technique and its practical application. En *Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2004 IEEE*, volume 3, páginas 1495–1502. IEEE, 2004.
- [22] Zhiqiang Gao. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning. En *Proceedings of the American control conference*, volume 6, páginas 4989–4996, 2006.
- [23] Gang Tian y Zhiqiang Gao. From Poncelet’s invariance principle to active disturbance rejection. En *2009 American Control Conference*, páginas 2451–2457. IEEE, 2009.

- [24] Qing Zheng y Zhiqiang Gao. On practical applications of active disturbance rejection control. En *Proceedings of the 29th Chinese control conference*, páginas 6095–6100. IEEE, 2010.
- [25] Xing Chen, Donghai Li, Zhiqiang Gao, y Chuanfeng Wang. Tuning method for second-order active disturbance rejection control. En *Control Conference (CCC), 2011 30th Chinese*, páginas 6322–6327. IEEE, 2011.
- [26] Zhiqiang Gao y Gang Tian. Extended active disturbance rejection controller, May 15 2012. US Patent 8,180,464.
- [27] Dazi Li, Pan Ding, y Zhiqiang Gao. Fractional active disturbance rejection control. *ISA Transactions*, 62:109–119, 2016.
- [28] Xiaohui Qi, Jie Li, Yuanqing Xia, y Zhiqiang Gao. On the robust stability of active disturbance rejection control for SISO systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, páginas 1–17, 2016.
- [29] Qing Zheng, Linda Q Gaol, y Zhiqiang Gao. On stability analysis of active disturbance rejection control for nonlinear time-varying plants with unknown dynamics. En *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*, páginas 3501–3506. IEEE, 2007.
- [30] Bao-Zhu Guo y Zhi-liang Zhao. On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty. *Systems & Control Letters*, 60(6):420–430, 2011.
- [31] Bao-Zhu Guo y Zhi-Liang Zhao. On convergence of the nonlinear active disturbance rejection control for MIMO systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(2):1727–1757, 2013.
- [32] Bao-Zhu Guo y Zhiliang Zhao. *Active Disturbance Rejection Control for Nonlinear Systems: An Introduction*. John Wiley & Sons, 2016.
- [33] Hebertt Sira-Ramirez y Vicente Feliu Batlle. Robust  $\sigma$ - $\delta$  modulation-based sliding mode observers for linear systems subject to time polynomial inputs. *International Journal of Systems Science*, 42(4):621–631, 2011.
- [34] Alberto Luviano-Juarez, John Cortes-Romero, y Hebertt Sira-Ramirez. Synchronization of chaotic oscillators by means of generalized proportional integral observers. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(05):1509–1517, 2010.
- [35] Eric William Zurita-Bustamante, Jesús Linares-Flores, Enrique Guzmán-Ramírez, y Hebertt Sira-Ramírez. A comparison between the GPI and PID controllers for the stabilization of a dc–dc buck converter: a field programmable gate array implementation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(11):5251–5262, 2011.

- [36] Marco A Arteaga-Pérez y Alejandro Gutiérrez-Giles. On the GPI approach with unknown inertia matrix in robot manipulators. *International Journal of Control*, 87(4):844–860, 2014.
- [37] Mario Ramírez-Neria, Hebertt Sira-Ramírez, Alberto Luviano-Juárez, y Alejandro Rodríguez-Ángeles. Active disturbance rejection control applied to a delta parallel robot in trajectory tracking tasks. *Asian Journal of Control*, 17(2):636–647, 2015.
- [38] Lidia M Belmonte, Rafael Morales, Antonio Fernández-Caballero, y José A Somolinos. A tandem active disturbance rejection control for a laboratory helicopter with variable-speed rotors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(10):6395–6406, 2016.
- [39] H Sira-Ramírez, C López-Uribe, y M Velasco-Villa. Linear observer-based active disturbance rejection control of the omnidirectional mobile robot. *Asian Journal of Control*, 15(1):51–63, 2013.
- [40] Hebertt Sira-Ramírez, Felipe González-Montañez, John Alexander Cortés-Romero, y Alberto Luviano-Juárez. A robust linear field-oriented voltage control for the induction motor: experimental results. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(8):3025–3033, 2013.
- [41] Hebertt Sira-Ramírez, Jesús Linares-Flores, Carlos García-Rodríguez, y Marco Antonio Contreras-Ordaz. On the control of the permanent magnet synchronous motor: an active disturbance rejection control approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(5):2056–2063, 2014.
- [42] Mario Ramirez-Neria, Hebertt Sira-Ramírez, R Garrido-Moctezuma, y Alberto Luviano-Juarez. On the linear active disturbance rejection control of the Furuta pendulum. En *2014 American Control Conference*, páginas 317–322. IEEE, 2014.
- [43] M Ramirez-Neria, H Sira-Ramirez, R Garrido-Moctezuma, y Alberto Luviano-Juarez. On the linear active disturbance rejection control of the inertia wheel pendulum. En *2015 American Control Conference (ACC)*, páginas 3398–3403. IEEE, 2015.
- [44] Mario Ramirez-Neria, JL Garcia-Antonio, Hebertt Sira-Ramírez, Martin Velasco-Villa, y Rafael Castro-Linares. On the linear active rejection control of Thomson’s jumping ring. En *2013 American Control Conference*, páginas 6643–6648. IEEE, 2013.
- [45] John Cortés-Romero, Harvey Rojas-Cubides, Horacio Coral-Enriquez, Hebertt Sira-Ramírez, y Alberto Luviano-Juárez. Active disturbance rejection approach for robust fault-tolerant control via observer assisted sliding mode control. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 2013.

- [46] R Madoński y P Herman. Survey on methods of increasing the efficiency of extended state disturbance observers. *ISA Transactions*, 56:18–27, 2015.
- [47] Michel Fliess, Cédric Join, y Hebertt Sira-Ramirez. Complex continuous nonlinear systems: their black box identification and their control. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(1):416–421, 2006.
- [48] Michel Fliess, Cédric Join, y Hebertt Sira-Ramirez. Non-linear estimation is easy. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 4(1):12–27, 2008.
- [49] Michel Fliess. Model-free control and intelligent PID controllers: towards a possible trivialization of nonlinear control? *IFAC Proceedings Volumes*, 42(10):1531–1550, 2009.
- [50] Michel Fliess y Cédric Join. Model-free control. *International Journal of Control*, 86(12):2228–2252, 2013.
- [51] Hebertt Sira-Ramírez, Carlos García Rodríguez, John Cortés Romero, y Alberto Luviano Juárez. *Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems*. John Wiley & Sons, 2014.
- [52] Z. Gao. Active disturbance rejection control: A paradigm shift in feedback control system design. En *American Control Conference*, páginas 2399–2405, Minneapolis, MN, 2006.
- [53] Yu Xin Su, Bao Yan Duan, Chun Hong Zheng, YF Zhang, GD Chen, y JW Mi. Disturbance-rejection high-precision motion control of a Stewart platform. *IEEE Transactions on control systems technology*, 12(3):364–374, 2004.
- [54] Leonid Fridman, Arie Levant, y Jorge Davila. Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *International Journal of Systems Science*, 38(10):773–791, 2007.
- [55] Mohinder S. Grewal. *Kalman filtering*. Springer, 2011.
- [56] H. Sira-Ramírez, J. Linares-Flores, A. Luviano-Juarez, y J. Cortés-Romero. Ultramodelos globales y el control por rechazo activo de perturbaciones en sistemas no lineales diferencialmente planos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 12(2):133–144, 2015.
- [57] Fangjun Jiang y Zhiqiang Gao. An application of nonlinear PID control to a class of truck ABS problems. En *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, páginas 516–521. IEEE; 1998, 2001.
- [58] Arie Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6):1247–1263, 1993.

- [59] Vadim Utkin, Jürgen Guldner, y Jingxin Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, volume 34. CRC press, 2009.
- [60] Hassan K Khalil. High-gain observers in nonlinear feedback control. En *Control, Automation and Systems, 2008. ICCAS 2008. International Conference on*, páginas xlvii–lvii. IEEE, 2008.
- [61] Raymond W. Prouty. *Helicopter performance, stability, and control*. 1995.
- [62] Marshall H. Kaplan. Modern spacecraft dynamics and control. *New York, John Wiley and Sons, Inc., 1976. 427 p.*, 1, 1976.
- [63] Wenchuan Cai, Xiaohong Liao, y David Y Song. Indirect robust adaptive fault-tolerant control for attitude tracking of spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(5):1456–1463, 2008.
- [64] Abhijit Das, Kamesh Subbarao, y Frank Lewis. Dynamic inversion with zero-dynamics stabilisation for quadrotor control. *IET control theory & applications*, 3(3):303–314, 2009.
- [65] Joseph Mueller, M Paluszek, y Yiyuan Zhao. Development of an aerodynamic model and control law design for a high altitude airship. En *AIAA 3rd Unmanned Unlimited Technical Conference, Workshop and Exhibit*, página 6479, 2004.
- [66] Gianluca Antonelli y Alexander Leonessa. Underwater robots: motion and force control of vehicle-manipulator systems. *IEEE Control Systems Magazine*, páginas 138–139, 2008.
- [67] Erjen Lefeber, Kristin Ytterstad Pettersen, y Henk Nijmeijer. Tracking control of an underactuated ship. *IEEE Transactions on control systems technology*, 11(1):52–61, 2003.
- [68] Robin S Sharp. On the stability and control of the bicycle. *Applied Mechanics Reviews*, 61(6):060803, 2008.
- [69] Lerrel Joseph Pinto, Dong-Hyung Kim, Ji Yeong Lee, y Chang-Soo Han. Development of a Segway robot for an intelligent transport system. En *System Integration (SII), 2012 IEEE/SICE International Symposium on*, páginas 710–715. IEEE, 2012.
- [70] Takanori Fukao, Hisashi Nakagawa, y Norihiko Adachi. Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 16(5):609–615, 2000.
- [71] Wei-Min Shen, Behnam Salemi, y Peter Will. Hormone-inspired adaptive communication and distributed control for CONRO self-reconfigurable robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(5):700–712, 2002.



- [72] Tomomichi Sugihara, Yoshihiko Nakamura, y Hirochika Inoue. Real-time humanoid motion generation through ZMP manipulation based on inverted pendulum control. En *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02. IEEE International Conference on*, volume 2, páginas 1404–1409. IEEE, 2002.
- [73] Mahmud Iwan Solihin, Wahyudi, y Ari Legowo. Fuzzy-tuned PID anti-swing control of automatic gantry crane. *Journal of Vibration and Control*, 16(1):127–145, 2010.
- [74] André Preumont. *Vibration control of active structures: an introduction*, volume 179. Springer Science & Business Media, 2011.
- [75] Brian L Stevens, Frank L Lewis, y Eric N Johnson. *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems*. John Wiley & Sons, 2015.
- [76] Panagiotis Tsiotras, Haijun Shen, y Chris Hall. Satellite attitude control and power tracking with energy/momentum wheels. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(1):23–34, 2001.
- [77] Mouhacine Benosman y G. Le Vey. Control of flexible manipulators: A survey. *Robotica*, 22(5):533–545, 2004.
- [78] Qinglei Hu y Guangfu Ma. Variable structure control and active vibration suppression of flexible spacecraft during attitude maneuver. *Aerospace Science and Technology*, 9(4):307–317, 2005.
- [79] Jin-Ho Shin y Ju-Jang Lee. Fault detection and robust fault recovery control for robot manipulators with actuator failures. En *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, volume 2, páginas 861–866. IEEE, 1999.
- [80] Mark W. Spong. Swing up control of the acrobot. En *Robotics and Automation, 1994. Proceedings., 1994 IEEE International Conference on*, páginas 2356–2361. IEEE, 1994.
- [81] Mark W Spong y Daniel J Block. The Pendubot: A mechatronic system for control research and education. En *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*, volume 1, páginas 555–556. IEEE, 1995.
- [82] John Hauser, Shankar Sastry, y Petar Kokotovic. Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example. *IEEE Transactions on automatic control*, 37(3):392–398, 1992.
- [83] Jun Zhao y Mark W. Spong. Hybrid control for global stabilization of the cart–pendulum system. *Automatica*, 37(12):1941–1951, 2001.

- [84] K. Furuta, M. Yamakita, S. Kobayashi, y M. Nishimura. *Advances in control education. Ch. A new pendulum apparatus for education*. Selected papers from the IFAC Symposium. Pergamon Press, 1991.
- [85] Mrdjan Jankovic, Dan Fontaine, y Petar V. Kokotović. TORA example: cascade-and passivity-based control designs. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 4(3):292–297, 1996.
- [86] PL Kapitsa. The pendulum with an oscillating pivot point. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 44(7):7–20, 1951.
- [87] N Odinets y N Levidova. Kapitsa pendulum: Modelling and observing. *Preprints of*, páginas 22–28, 2004.
- [88] Niaz Mehdi, Muhammad Rehan, Fahad Mumtaz Malik, Aamer Iqbal Bhatti, y Muhammad Tufail. A novel anti-windup framework for cascade control systems: An application to underactuated mechanical systems. *ISA Transactions*, 53(3):802–815, 2014.
- [89] Travis Dierks y Sarangapani Jagannathan. Output feedback control of a quadrotor UAV using neural networks. *IEEE Transactions on neural networks*, 21(1):50–66, 2010.
- [90] Rong Xu y Ümit Özgüner. Sliding mode control of a class of underactuated systems. *Automatica*, 44(1):233–241, 2008.
- [91] Mark W Spong. Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems. En *Intelligent Robots and Systems'94. Advanced Robotic Systems and the Real World', IROS'94. Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on*, volume 1, páginas 314–321. IEEE, 1994.
- [92] Alessandro Astolfi, Dimitrios Karagiannis, y Romeo Ortega. *Nonlinear and adaptive control with applications*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [93] Ofelia Begovich, Edgar N Sanchez, y Marcos Maldonado. Takagi-Sugeno fuzzy scheme for real-time trajectory tracking of an underactuated robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(1):14–20, 2002.
- [94] Tarek Madani y Abdelaziz Benallegue. Backstepping control for a quadrotor helicopter. En *Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on*, páginas 3255–3260. IEEE, 2006.
- [95] Reza Olfati-Saber. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. PhD thesis, Citeseer, 2000.
- [96] Hebertt Sira-Ramirez y Sunil K. Agrawal. *Differentially flat systems*. CRC Press, 2004.

- [97] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, y P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and applications. *International Journal of Control*, 61:1327–1361, 1995.
- [98] Chi-Tsong Chen. *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., 1995.
- [99] Herbertt Sira-Ramírez, Richard Marquez, Francklin Rivas-Echevarría, y Orestes Llanes-Santiago. *Control de sistemas no lineales: linealización aproximada, extendida, exacta*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [100] H. Sira-Ramírez, A. Luviano-Juárez, y Cortés-Romero J. Control lineal robusto de sistemas no lineales diferencialmente planos. *Revista Iberoamericana de Automática e informática Industrial*, 8:14–28, Enero 2011.
- [101] S. Diop y M. Fliess. Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. En *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 714–719, Brighton, England, December 1991.
- [102] H. Sira-Ramirez, M. Ramirez-Neria, y A. Rodriguez-Angeles. On the linear control of nonlinear mechanical systems. En *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 1999–2004, Atlanta, GA, USA, December 2010.
- [103] C.D. Jonhson. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971.
- [104] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, y Mathukumalli Vidyasagar. *Robot modeling and control*, volume 3. wiley New York, 2006.
- [105] Alberto Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [106] Mark W. Spong. Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. En *1996 IFAC World Congress*, páginas 431–435. Citeseer, 1996.
- [107] Isabelle Fantoni y Rogelio Lozano. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [108] Reza Olfati-Saber. Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2):305–308, 2002.
- [109] Mahmut Reyhanoglu, Arjan van der Schaft, N Harris McClamroch, y Ilya Kolmanovsky. Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9):1663–1671, 1999.
- [110] Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin, y Pierre Rouchon. A lie-backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 44(5):922–937, 1999.

- [111] Dennis J.W. Belleter y Kristin Y. Pettersen. Leader–follower synchronisation for a class of underactuated systems. En *Nonlinear Systems*, páginas 157–179. Springer, 2017.
- [112] Francesco Bullo. Stabilization of relative equilibria for underactuated systems on riemannian manifolds. *Automatica*, 36(12):1819–1834, 2000.
- [113] Sylvain Finet y Laurent Praly. Feedback linearization of the transverse dynamics for a class of one degree underactuated systems. En *Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on*, páginas 7802–7807. IEEE, 2015.
- [114] Kristin Y. Pettersen. Underactuated marine control systems. *Encyclopedia of Systems and Control*, páginas 1499–1503, 2015.
- [115] Mark W. Spong. Underactuated mechanical systems. En *Control problems in robotics and automation*, páginas 135–150. Springer, 1998.
- [116] Anthony M. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control*, volume 24. Springer, 2015.
- [117] Romeo Ortega, Mark W Spong, Fabio Gómez-Estern, y Guido Blankenstein. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(8):1218–1233, 2002.
- [118] A. Chelouah. Extensions of differential flat fields and Liouvillian systems. En *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, volume 5, páginas 4268–4273. IEEE, 1997.
- [119] H. Sira-Ramírez. Soft landing on a planet: a trajectory planning approach for the Liouvillian model. En *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, volume 4, páginas 2936–2940. IEEE, 1999.
- [120] Eduardo Licéaga-Castrol. A Liouvillian systems approach for the trajectory planning-based control of helicopter models. *Int. J. Robust Nonlinear Contrul*, 10:301–320, 2000.
- [121] X.Y. Lu y S.K. Spurgeon. Asymptotic feedback linearisation and control of non-flat systems via sliding modes. En *Proc. of the 3rd European Control Conference*, páginas 693–698, 1995.
- [122] M. Ramirez-Neria, H. Sira-Ramirez, R. Garrido-Moctezuma, y A. Luviano-Juárez. Control proporcional integral generalizado de un sistema ball and beam para tareas de seguimiento de trayectoria. En *Congreso Nacional de Control Automático, AMCA 2015, Cuernavaca, Morelos, México*.
- [123] Chao Zhang, Huosheng Hu, Dongbing Gu, y Jing Wang. Cascaded control for balancing an inverted pendulum on a flying quadrotor. *Robotica*, páginas 1–17, 2016.

- [124] B. Cazzolato y Z. Prime. On the dynamics of the Furuta pendulum. *Journal of Control Science and Engineering*, páginas 1–8, 2011.
- [125] I. Fantoni y 2002 R. Lozano. Stabilization of the Furuta pendulum around its homoclinic orbit. *International Journal of Control*, 75 (6):390–398, 2002.
- [126] K. Åstrom y K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36:287–295, 2000.
- [127] R. Ortega, M. Spong, F. Gómez-Estern, y G. Blankenstein. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 (8):1218–1233, 2002.
- [128] P. Ordaz y A. Poznyak. The Furuta’s pendulum stabilization without the use of a mathematical model: Attractive ellipsoid method with kl-adaptation. En *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control.*, páginas 7285–7290, Hawaii, USA, December 2012.
- [129] A. Sørensen y A. Shiriaev. Friction compensation in the Furuta pendulum for stabilizing rotational modes. En *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 3772–3777., Orlando, Florida, USA, December 2001.
- [130] R.E. Bou-Serhal y H.K. Khalil. Application of the extended high gain observer to underactuated mechanical systems. En *Proceedings of the American Control Conference.*, páginas 4727–4732., Montreal, Canada, June 2012.
- [131] J. Acosta, J. Aracil, y F. Gordillo. Comparative study of nonlinear control strategies for the Furuta pendulum. En *Proceedings of the International Conference Measurement and Control.*, páginas 18–23., Pennsylvania, USA, 2001.
- [132] S. Mori, H. Nishihara, y K. Furuta. Control of unstable mechanical systems. *International Journal of Control*, 23(5):673–692, 1976.
- [133] Y. Kim, L. Keel, y S. Bhattacharyya. Transient response control via characteristic ratio assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48 (12):2238–224, 2003.
- [134] H.J. Sussman y P.V. Kokotovic. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 (4):424–440, 1991.
- [135] H. Sira-Ramírez. On the sliding mode control of nonlinear systems. *System and Control Letters*, 19:303–312, 1992.
- [136] J. Hauser, S. Sastry, y P. Kokotovic. Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(3):392–398, 1992.

- [137] N.B. Almutairi y M. Zribi. On the sliding mode control of a ball on a beam system. *Nonlinear dynamics*, 59(1-2):221–238, 2010.
- [138] X. Fan, N. Zhang, y S. Teng. Trajectory planning and tracking of ball and plate system using hierarchical fuzzy control scheme. *Fuzzy Sets and Systems*, 144(2):297–312, 2004.
- [139] T.L. Chien, C.C. Chen, M.C. Tsai, y Y.C. Chen. Control of ball and beam system via improved fuzzy feedback linearization approach. *Applied Mathematical Modelling*, 34(12):3791–3804, 2010.
- [140] J.A.K. Suykens, J. Vandewalle, y B. De Moor. Optimal control by least squares support vector machines. *Neural Networks*, 14(1):23–35, 2001.
- [141] H. Sira-Ramirez. On the control of the ball and beam system: a trajectory planning approach. En *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000*, volume 4, páginas 4042–4047, 2000.
- [142] F. Andreev, D. Auckly, S. Gosavi, L. Kapitanski, A. Kelkar, y W. White. Matching, linear systems, and the ball and beam. *Automatica*, 38(12):2147–2152, 2002.
- [143] L. Márton, A.S. Hodel, B. Lantos, y J.Y. Hung. Underactuated robot control: comparing LQR, subspace stabilization, and combined error metric approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(10):3724–3730, 2008.
- [144] N.H. Jo y J.H. Seo. A state observer for nonlinear systems and its application to ball and beam system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5):968–973, 2000.
- [145] W. He, S. Zhang, y S.S. Ge. Boundary output-feedback stabilization of a Timoshenko beam using disturbance observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(11):5186–5194, 2013.
- [146] J. Yao, Z. Jiao, y D. Ma. Adaptive robust control of DC motors with extended state observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(7):3630–3637, July 2014.
- [147] A.A. Godbole, J.P. Kolhe, y S.E. Talole. Performance analysis of generalized extended state observer in tackling sinusoidal disturbances. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(6):2212–2223, 2013.
- [148] M. Ramirez-Neria, H. Sira-Ramirez, R. Garrido-Moctezuma, y A. Luviano-Juarez. Linear active disturbance rejection control of underactuated systems: The case of the Furuta pendulum. *ISA Transactions*, 53(4):920 – 928, 2014.
- [149] A.R. Forrest. Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials. *The Computer Journal*, 15(1):71–79, 1972.

- [150] L. Dong, Q. Zheng, y Z. Gao. On control system design for the conventional mode of operation of vibrational gyroscopes. *IEEE Sensors Journal*, 8(11):1871–1878, 2008.
- [151] Q. Zheng, Z. Chen, y Z. Gao. A practical approach to disturbance decoupling control. *Control Engineering Practice*, 17(9):1016–1025, 2009.
- [152] H. Sira-Ramírez, A. Luviano-Juárez, y J. Cortés-Romero. Flatness-based linear output feedback control for disturbance rejection and tracking tasks on a chua’s circuit. *International Journal of Control*, 85(5):594–602, 2012.
- [153] Y.C. Kim L.H. Keel y S.P. Bhattacharyya. Transient response control via characteristic ratio assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(1):2238–2244, 2003.
- [154] C. Ma, J. Cao, y Y. Qiao. Polynomial-method-based design of low-order controllers for two-mass systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(3):969–978, 2013.
- [155] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.





## Apéndice A

### Artículos publicados en revistas





Contents lists available at ScienceDirect

ISA Transactions

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/isatrans](http://www.elsevier.com/locate/isatrans)

# Linear active disturbance rejection control of underactuated systems: The case of the Furuta pendulum <sup>☆</sup>

M. Ramírez-Neria <sup>a,1</sup>, H. Sira-Ramírez <sup>a,1</sup>, R. Garrido-Moctezuma <sup>a,1</sup>, A. Luviano-Juárez <sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup> Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (Cinvestav-IPN), Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco, C.P. 07360 México, D.F. Apartado Postal, 14-740, 07000 México, D.F., Mexico

<sup>b</sup> Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas IPN, Av. Instituto Politécnico Nacional 2580 Col. Barrio La Laguna Ticomán C.P. 07340 México, D.F., Mexico

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 20 May 2013

Received in revised form

11 September 2013

Accepted 30 September 2013

This paper was recommended for publication by Dr. Jeff Pieper

### Keywords:

Furuta pendulum

Differentially flat systems

Active disturbance rejection control

GPI observers

## ABSTRACT

An Active Disturbance Rejection Control (ADRC) scheme is proposed for a trajectory tracking problem defined on a nonfeedback linearizable Furuta Pendulum example. A desired rest to rest angular position reference trajectory is to be tracked by the horizontal arm while the unactuated vertical pendulum arm stays around its unstable vertical position without falling down during the entire maneuver and long after it concludes. A linear observer-based linear controller of the ADRC type is designed on the basis of the flat tangent linearization of the system around an arbitrary equilibrium. The advantageous combination of flatness and the ADRC method makes it possible to on-line estimate and cancels the undesirable effects of the higher order nonlinearities disregarded by the linearization. These effects are triggered by fast horizontal arm tracking maneuvers driving the pendulum substantially away from the initial equilibrium point. Convincing experimental results, including a comparative test with a sliding mode controller, are presented.

© 2013 ISA. Published by Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

The control of underactuated systems represents a difficult and challenging problem, specially when experimental implementations of synthesized control solutions are required. This is due, aside of the effect of unmodeled dynamics and external forces, to the associated restrictions on the behavior of the non directly actuated variables [27] and the natural obstacle to linearizability exhibited by a large subclass of these systems. Underactuated systems are becoming popular in many sophisticated control applications, such as spacecraft, aerial robotic systems, underwater vehicles, locomotive systems, flexible robotics. Some possible advantages associated to such systems are cost reduction, lighter structures, smaller dimensions, among others (see [24] for a comprehensive treatment of this class of systems).

The Furuta pendulum [12], also called the rotational pendulum, is one of the most popular underactuated systems in academic

laboratories around the world. The system is provided with one control input and it has two mechanical degrees of freedom. It consists of an actuated arm, which rotates in the horizontal plane; the actuated arm is joined to a non actuated pendulum which rotates loosely in a vertical plane perpendicular at the tip of the horizontal rotating arm. The system is quite nonlinear due to the gravitational forces, the Coriolis and centripetal forces [4] and the acceleration couplings. In addition, it is nonfeedback linearizable and it exhibits a lack of controllability in certain configurations [7]. The system represents a suitable platform for testing diverse linear and nonlinear control laws.

Traditional control problems associated with the Furuta pendulum are mainly of two kinds: (1) the problem of balancing up the vertical pendulum to the upper, unstable, position (swinging up) and (2) the stabilization around this position. Several methodologies have been proposed to solve the problem of swinging up and balancing the Furuta pendulum, these include the energy based swinging up control [2], passivity-based control [26], adaptive attractive ellipsoid methods [25], friction compensation controllers [34], extended state observer-based controllers [3], among others. In the study reported in [1], some different controllers for the Furuta pendulum were tested and compared to point out the principal advantages and drawbacks of the diverse control schemes. The study also considered the main physical limitations associated with the control of the pendulum, where among others, the possibility of control input saturations was specifically treated. Most of the

<sup>☆</sup>This work was supported by the Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (Cinvestav-IPN), México, D.F., México.

\* Corresponding author. Tel.: +52 57296000.

E-mail addresses: [mramirez@ctrl.cinvestav.mx](mailto:mramirez@ctrl.cinvestav.mx) (M. Ramírez-Neria), [hsira@cinvestav.mx](mailto:hsira@cinvestav.mx) (H. Sira-Ramírez), [rgarrido@ctrl.cinvestav.mx](mailto:rgarrido@ctrl.cinvestav.mx) (R. Garrido-Moctezuma), [aluvianoj@ipn.mx](mailto:aluvianoj@ipn.mx), [alberto.luviano@gmail.com](mailto:alberto.luviano@gmail.com) (A. Luviano-Juárez).

<sup>1</sup> Tel.: +52 5747 3800.

stabilizing schemes rely on the tangent linearization around the unstable equilibrium point, and demand robust linear stabilizing schemes [25].

The linearized model of the Furuta pendulum is differentially flat (i.e., it is controllable) with a physically measurable flat output. Thus, the problem of stabilization and tracking can be tackled from a combined perspective of flatness and Active Disturbance Rejection Control. Here, we propose the use of a linear decoupled extended observer, motivated by the structure revealed by flatness, in an active disturbance canceling scheme of the ADRC class. In general, ADRC dates back to the French engineer Poncelet (see [14]). Seminal work about a closely related technique, called Disturbance Accommodation Control, is due to Johnson [16]. Other variants of the ADRC idea are found as the control of simplified purely *phenomenological* plant models using algebraic estimation techniques [8,9]. The idea of a controller with the capacity of lumped compensation of endogenous and exogenous disturbances by means of an observer based control was proposed by Han, introducing the concept of Active Disturbance Rejection Control (ADRC) [15]. ADRC controllers have led to a new paradigmatic view of traditional nonlinear control problems where disturbances, internal and external, are actively estimated and rejected. Experimental results have been reported in diverse examples of systems (see [6,13,14,36,38]). As mentioned in [23], linearized observer based control of nonlinear systems has produced successful implementations in disturbance canceling schemes. For the case of underactuated dynamical systems, observer based ADRC plus linearized flatness takes one further step into the ADRC control of nonlinearizable systems. Efforts on underactuated systems control have also been recently advanced with promising results (see [19,21,37]).

It has been shown that the use of approximate disturbance estimation, via extended Luenberger observers, known as Generalized Proportional Integral (GPI) observers [32], constitutes an effective manner of integrating ADRC schemes. The GPI observer naturally includes a self-updating, lumped, time-polynomial model of the nonlinear state-dependent perturbation (Ref. [18] studies another interesting approach of time-polynomial disturbance estimation technique). The GPI estimates the perturbations and delivers a time signal to the controller for on-line cancelation of the effect of unknown nonlinearities and foreign perturbations while, simultaneously, estimating the phase variables related to the measured output. The scheme achieves accurate on-line estimations of the joint effect of all unknown disturbances (state dependent or non state dependent). Some applications have been reported in the recent literature (see [30–33]). The main features of this control scheme lie in the fact that both, exogenous unstructured perturbation inputs and state-dependent perturbation inputs, appearing in the input–output model, are all lumped into a simplifying time-varying signal that needs to be linearly estimated. The control scheme takes advantage of the natural possibilities of differentially flat systems, allowing the use of linear disturbance estimation and linear output feedback control with disturbance cancelation (see [10] and the books [20,29] for a comprehensive treatment on differentially flat systems). The main difference between traditional flatness based controllers and the ADRC scheme for flat systems is the fact that traditionally flatness based controls need perfect knowledge of the plant while ARDC schemes for flat systems may largely ignore unknown nonlinearities and exogenous additive perturbation inputs in the input-to-flat output dynamics. Needless to say, flat systems do not have any zero dynamics, thus avoiding the problem of internal stability after feedback.

In this article, an ADRC scheme is proposed for a trajectory tracking problem associated with the Furuta pendulum. The tracking problem is that of having the horizontal arm follow a rest to rest

angular position reference trajectory, while the unactuated pendulum is to remain around its unstable vertical position, without falling, during the entire tracking maneuver and long after it ceases. The control scheme assumes an important lack of knowledge of the system parameters, nonlinearities and exogenous disturbance signals. Using a tangent linearization model of the Furuta pendulum around an arbitrary equilibrium, we show that fast excursions from the unstable equilibrium point, triggering adverse effects of nonlinearities, are still feasible while maintaining the pendulum around its unstable vertical position. The scheme not only accurately estimates the effects of the excited nonlinearities, but it also reduces the tracking control problem to that defined on a chain of integrators after on-line active disturbance cancelations. The control scheme is tested on an experimental prototype, showing excellent results for the tracking error and the estimation of lumped state dependent and external disturbances.

Section 2 briefly considers the nonlinear model of the Furuta Pendulum and its tangent linearization around an arbitrary equilibrium point. In this section the flatness (controllability) of the linearized model is exploited to obtain a natural decoupled two stage observer design. The method is extendable to some other underactuated systems, i.e. the ball and beam, inverted pendulum on a cart, gantry crane systems, etc. Section 3 proposes a high gain extended linear observer based ADRC tracking scheme for the tangent linearized model of the system. High gain extended observers of the Luenberger type receive here the name of Generalized Proportional Integral (GPI) observers due to their dual relationship with robust linear GPI controllers, introduced by Fliess et al. [11]. Section 4 special emphasis is placed on a careful pole placement for the linear observer estimation dynamics, avoiding the traditional “peaking” phenomenon, appearing in high gain controlled systems. Section 5 is devoted to present the details of the experimental setup and discusses the obtained closed loop performance of the system; besides, the section illustrates the controller behavior by means of an experimental comparison against a sliding mode controller, under the same control task. The conclusions and suggestions for further research constitute the topic of the last section.

## 2. The Furuta pendulum

### 2.1. The nonlinear Furuta pendulum model

The Furuta pendulum system consisting of an unactuated pendulum attached to the end of a horizontal rotating arm (see Fig. 1). The pendulum is free to move on a plane perpendicular to the horizontal arm which is driven by a DC motor. The nonlinear

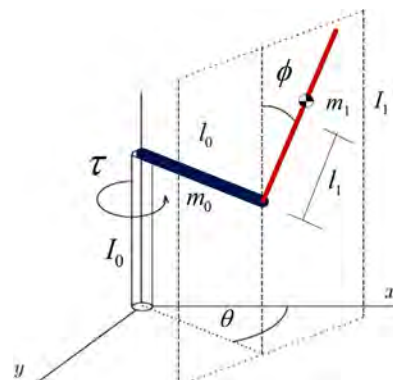


Fig. 1. Schematic of the Furuta Pendulum.

model of the mechanical part of the system, which can be derived from either Newton equations or from the Euler–Lagrange formalism, is given by [22]

$$(I_0 + m_1(l_0^2 + l_1^2 \sin^2(\phi)))\ddot{\theta} - m_1 l_1 l_0 \cos(\phi)\ddot{\phi} + 2m_1 l_1^2 \dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\phi) \cos(\phi) + m_1 l_1 l_0 \dot{\phi}^2 \sin(\phi) = \tau \quad (1)$$

$$(I_1 + m_1 l_1^2)\ddot{\phi} - m_1 l_1 l_0 \cos(\phi)\ddot{\theta} - m_1 l_1^2 \dot{\phi}^2 \sin(\phi) \cos(\phi) - m_1 g l_1 \sin(\phi) = 0 \quad (2)$$

where  $\phi$  is the angular displacement of the pendulum with respect to the vertical line passing through the joint of the pendulum with the horizontal arm,  $\theta$  is the angle of the horizontal arm, measured with respect to an arbitrary but fixed direction in the  $(x,y)$  plane,  $m_1$  denotes the mass of the pendulum,  $I_1$  stands for the pendulum inertia;  $I_0$  represents the inertia of the horizontal arm;  $l_0$  and  $l_1$  are, respectively, the lengths of the horizontal arm and the distance between the center of mass of the pendulum and the joint with the horizontal arm;  $\tau$  is the control input directly applied by the DC motor to the horizontal arm. We specifically assume that only the angular positions,  $\theta$  and  $\phi$ , are measurable. The model (1) and (2) is not feedback linearizable, i.e., it is non flat.

Considered the tangent linearization of the system around the following arbitrary unstable equilibrium point:

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad \phi = 0, \quad \tau = 0 \\ \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = 0 \end{aligned}$$

One readily obtains

$$[l_0 + m_1 l_0^2]\ddot{\theta}_\delta - m_1 l_1 l_0 \ddot{\phi}_\delta = \tau_\delta \quad (3)$$

$$[I_1 + m_1 l_1^2]\ddot{\phi}_\delta - m_1 l_1 l_0 \ddot{\theta}_\delta - m_1 g l_1 \phi = 0 \quad (4)$$

where  $\phi_\delta = \phi - 0 = \phi$ ,  $\theta_\delta = \theta - 0 = \theta$ , and  $\tau_\delta = \tau - 0 = \tau$  are the incremental states of the linearized system. Notice that the linearization can be performed for any fixed value of  $\theta$ , say  $\Theta$ ,  $\Theta = 0$  was selected for simplicity. In order to simplify the notation, let us define

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{l_0}{l_1}, \quad \alpha^2 = \frac{l_0}{m_1 l_1^2}, \quad \beta = \frac{g}{l_1} \\ \gamma = \frac{1}{m_1 l_1^2}, \quad \eta = \frac{l_1}{m_1 l_1^2} + 1 \end{aligned}$$

One is lead to the following implicit incremental description of the system:

$$[\alpha^2 + \varepsilon^2]\ddot{\theta}_\delta - \varepsilon\ddot{\phi}_\delta = \gamma\tau_\delta \quad (5)$$

$$\eta\ddot{\phi}_\delta - \varepsilon\ddot{\theta}_\delta = \beta\phi_\delta \quad (6)$$

Thus

$$\beta\phi_\delta = \ddot{F}_\delta \quad (7)$$

### 2.2. Flatness of the linearized Furuta pendulum model

The linear model (6) is differentially flat, with incremental flat output, denoted by  $F_\delta$ , given in this case by the following expression:

$$F_\delta = \eta\phi_\delta - \varepsilon\theta_\delta \quad (8)$$

Indeed, all system variables in the linear model, i.e., states and the control input are expressible as differential functions of the incremental flat output. In other words, they are expressible as functions of the flat output  $F_\delta$  and a finite number of its time derivatives:

$$\begin{aligned} \phi_\delta &= \frac{\ddot{F}_\delta}{\beta}, \quad \dot{\phi}_\delta = \frac{F_\delta^{(3)}}{\beta} \\ \theta_\delta &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ \eta \frac{\ddot{F}_\delta}{\beta} - F_\delta \right], \quad \dot{\theta}_\delta = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \eta \frac{F_\delta^{(3)}}{\beta} - \dot{F}_\delta \right] \\ \tau_\delta &= \left( \frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta \gamma} - \frac{\varepsilon}{\beta \gamma} \right) F_\delta^{(4)} - \frac{(\alpha^2 + \varepsilon^2)}{\varepsilon \gamma} \ddot{F}_\delta \end{aligned} \quad (9)$$

The linearized system is clearly equivalent to the following input–output model:

$$F_\delta^{(4)} = \frac{\gamma}{\left( \frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta} - \frac{\varepsilon}{\beta} \right)} \tau_\delta + \frac{(\alpha^2 + \varepsilon^2)}{\left( \frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta} - \frac{\varepsilon}{\beta} \right) \varepsilon} \ddot{F}_\delta \quad (10)$$

where  $\alpha^2 \eta / \varepsilon \beta - \varepsilon / \beta \neq 0$ .

### 2.3. A useful decoupling property of the tangent model

It is immediate from the differential parametrization (9) that the tangent system naturally decomposes into a cascade connection of two independent blocks, the first one controlled by the torque input  $\tau_\delta$  with the corresponding output given by the flat output incremental acceleration,  $\ddot{F}_\delta$ . This output coincides, modulo

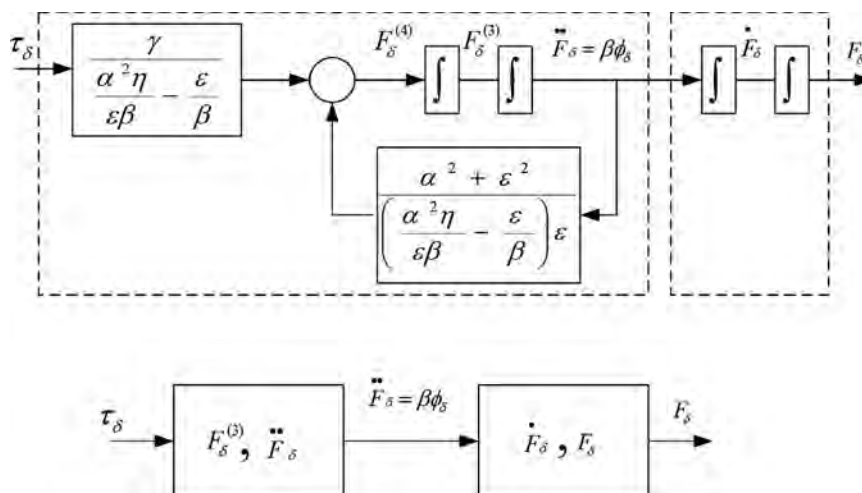


Fig. 2. Cascade connection of the linearized Furuta Pendulum System.

a constant factor  $\beta$ , with the vertical arm incremental angular position,  $\phi_\delta$ , i.e.,  $\ddot{F}_\delta = \beta\phi_\delta$ . The signal  $\beta\phi_\delta$  acts then as an auxiliary known (i.e., measurable) input to the second block, which consists of a chain of two integrators rendering the phase variables  $\dot{F}_\delta$  and  $F_\delta$ . The last variable  $F_\delta$  being the output of the second block and the output to be controlled for the overall system (see Fig. 2).

This cascading property simplifies and decouples the observer design task in the Flatness based ADRC scheme to be presented next.

### 3. A GPI observer-based active disturbance rejection controller

#### 3.1. Problem formulation

On the basis of (10), we adopt the following simplified perturbed model for the underlying nonlinear Furuta pendulum system (10):

$$F_\delta^{(4)} = \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\tau_\delta + \tilde{\xi}(t) \quad (11)$$

where  $\tilde{\xi}(t)$  represents state dependent expressions, all the higher order terms (h.o.t) neglected by the linearization, the possibly unmodeled dynamics, and external unknown disturbances affecting the system. We lump all this uncertain terms into a single time-varying function model represented by  $\tilde{\xi}(t)$ , which in our case is of the form

$$\tilde{\xi}(t) = \frac{(\alpha^2 + \varepsilon^2)}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\ddot{F}_\delta + \text{h.o.t} \quad (12)$$

Suppose it is desired to transfer the horizontal arm from the initial position  $\theta_\delta(0) = 0$  towards the final position  $\theta_\delta(t_f) = \Theta$  in a finite, prespecified, time interval  $[0, t_f]$ . The maneuver is to be carried out while the pendulum evolves closely around the unstable position (i.e.  $\phi_\delta(0) = 0$ ). It is desired to accomplish this maneuver without losing the vertical unstable position of the pendulum arm  $\phi_\delta(t_f) = 0$  at the end of, and long thereafter of, the prescribed time interval.

Clearly, such a rest-to-rest maneuver is feasible via an adequate planning of the trajectory for the flat output  $F_\delta = \eta\phi_\delta - \varepsilon\theta_\delta$ . The vertical arm is required to start and end at the unstable position, then  $\phi(0) = \phi(t_f) = 0$ . The horizontal arm orientation  $\theta$  starts at rest at  $\theta(0) = 0$  and ends the maneuver at a different rest point,  $\theta(t_f) = \Theta_f$  with  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(t_f) = 0$ . Hence, the initial value of the flat output is  $F_\delta(0) = 0$ , while its final value is  $F_\delta(t_f) = -\varepsilon\Theta_f$ . One could prescribe a smooth rest to rest trajectory for  $F_\delta^*(t)$  using, for instance, a Bèzier polynomial with sufficient time derivatives being zero at the initial and at the final instants.

The flat output trajectory tracking error  $e_{F_\delta} = F_\delta - F_\delta^*(t)$  is seen to evolve according to

$$e_{F_\delta}^{(4)} = \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\tau_\delta + \xi(t) \quad (13)$$

where  $\xi(t)$  represents the previously defined unknown input term, complemented now by the effects arising from the prescribed nominal flat output trajectory and its various time derivatives. Let  $e_{F_\delta}^{(i)} = e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . The flat output trajectory tracking error perturbed state space model is, given by,

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= e_4 \\ \dot{e}_4 &= \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\tau_\delta + \xi(t) \end{aligned} \quad (14)$$

At this point we make use of the cascading property and view the previous system as the connection of two subsystems. Note that

$$e_3 = \ddot{F}_\delta - \ddot{F}_\delta^*(t)$$

is the known input to the second order pure integration system:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \end{aligned} \quad (15)$$

while the rest of the system is given by

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= e_4 \\ \dot{e}_4 &= \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\tau_\delta + \xi(t) \end{aligned} \quad (16)$$

#### 3.2. A cascaded GPI observer-based ADRC for the Furuta pendulum

The perturbation term  $\xi(t)$  is algebraically observable according to the results of Diop and Fliess [5]. Then, one may propose an instantaneous virtual evolution model of a time-polynomial nature for such a time-varying function  $\xi(t)$ , denoted by  $z$ , and adopt, say, the following fifth order time polynomial model for  $\xi(t)$ , i.e.,  $z^{(6)} = 0$ . Then, with  $z(t) = z_1$ , the flat output trajectory tracking error model (14) may be rewritten as follows:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= e_4 \\ \dot{e}_4 &= \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta}{\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}\tau_\delta + z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_6 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

A set of decoupled, high gain, extended linear Luenberger observers, or GPI observers, for the simultaneous estimation of the phase variables associated with the output tracking error  $e_{F_\delta}$  and the time-polynomial approximation variable,  $z = z_1$ , of the perturbation term  $\xi(t)$ , can be proposed as follows:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_1 &= \hat{e}_2 + \kappa_1(e_1 - \hat{e}_1) \\ \dot{\hat{e}}_2 &= \hat{e}_3 + \kappa_0(e_1 - \hat{e}_1) \\ \dot{\hat{e}}_3 &= \hat{e}_4 + \lambda_7(e_3 - \hat{e}_3) \\ \dot{\hat{e}}_4 &= \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2\eta\beta}{\varepsilon} + \sigma\varepsilon\beta\right)}\tau_\delta + \hat{z}_1 + \lambda_6(e_3 - \hat{e}_3) \\ \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \lambda_5(e_3 - \hat{e}_3) \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \lambda_4(e_3 - \hat{e}_3) \\ \dot{\hat{z}}_3 &= \hat{z}_4 + \lambda_3(e_3 - \hat{e}_3) \\ \dot{\hat{z}}_4 &= \hat{z}_5 + \lambda_2(e_3 - \hat{e}_3) \\ \dot{\hat{z}}_5 &= \hat{z}_6 + \lambda_1(e_3 - \hat{e}_3) \\ \dot{\hat{z}}_6 &= \lambda_0(e_3 - \hat{e}_3) \end{aligned} \quad (19)$$

The observation error,  $\tilde{e}_1 = e_1 - \hat{e}_1$ , of the incremental flat output tracking error, generates the following linear injected estimation error dynamics:

$$\ddot{\tilde{e}}_1 + \kappa_1\dot{\tilde{e}}_1 + \kappa_0\tilde{e}_1 = 0, \quad \kappa_0, \kappa_1 > 0 \quad (20)$$

An appropriate choice of the design coefficients:  $\{\kappa_1, \kappa_0\}$ , placing the roots of the corresponding characteristic polynomial deep into the left half of the complex plane, renders an asymptotically, exponentially, decreasing estimation error state,  $\tilde{e}_1, \dot{\tilde{e}}_1 = \tilde{e}_2$ . The tracking error velocity for the flat output  $\dot{e}_{F_\delta}$  is, thus, accurately estimated for feedback purposes.

In the same manner, consider the observation error,  $\tilde{e}_3 = e_3 - \hat{e}_3$ , of the flat output acceleration tracking error. It generates the following dominantly linear reconstruction error dynamics:

$$\tilde{e}_3^{(8)} + \lambda_7 \tilde{e}_3^{(7)} + \lambda_6 \tilde{e}_3^{(6)} + \dots + \lambda_1 \dot{\tilde{e}}_3 + \lambda_0 \tilde{e}_3 = \xi^{(6)}(t) \quad (21)$$

It may be proved that a necessary and sufficient condition for having the incremental flat output acceleration estimation error  $\tilde{e}_3$  and its associated phase variables,  $\dot{\tilde{e}}_3, \ddot{\tilde{e}}_3, \dots, \tilde{e}_3^{(8)}$ , ultimately, uniformly, converge towards a small as desired neighborhood of the acceleration estimation error phase space is that  $\xi^{(6)}(t)$  be uniformly absolutely bounded. An appropriate choice of the design coefficients:  $\{\lambda_7, \dots, \lambda_1, \lambda_0\}$ , placing the poles of the associated linear homogenous system sufficiently far into the left half of the complex plane, renders a uniformly asymptotically convergent estimation error,  $\tilde{e}_3$ , towards an arbitrary small vicinity of the origin along with a finite number of its time derivatives.

In our case, the observer gain parameters  $\lambda_j$ , for  $j = 0, 1, 2, \dots, 8$ , are chosen using the methodology proposed by Kim et al. [17] based on the extensive use of the, so-called, characteristic ratios of the characteristic polynomial associated with the incremental flat output tracking error estimation dynamics. This methodology suitably mitigates the “peaking phenomenon” typical of linear high gain pole placement injected responses of the observer [35].

Consider a characteristic polynomial  $p(s)$  of the form

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad a_i > 0 \quad (22)$$

and let  $\alpha_i$  be the characteristic ratios of  $p(s)$ . It has been shown [17] that if the following two conditions are satisfied the polynomial (22) is Hurwitz

(A)  $\alpha_1 > 2$ ;

(B)  $\alpha_k = \frac{\sin(\frac{k\pi}{n}) + \sin(\frac{\pi}{n})}{2 \sin(\frac{k\pi}{n})} \alpha_1$

for  $k = 2, 3, \dots, n-1$ . The construction of the all-pole stable characteristic polynomial involves only  $\alpha_1$  which we require to be larger than 2. Thus, this result allows us to characterize the reference all-pole systems by adjusting a single parameter  $\alpha_1$  to achieve the desired damping. The pole placement procedure is as follows:

For an arbitrary positive  $a_0$  and  $T > 0$

$$a_1 = T a_0$$

$$a_i = \frac{T^i a_0}{\alpha_{i-1} \alpha_{i-2}^2 \alpha_{i-3}^3 \dots \alpha_1^{i-1}}$$

for  $i = 2, 3, \dots, n$

Then, choose

$$\lambda_j = \left( \frac{a_j}{a_n} \right)$$

for  $j = 0, 1, 3, \dots, 8$

The smoothness of the error responses and noise rejection properties, achieved by this procedure, makes it a highly recommendable choice for pole placement in practical situations (see [17] for details).

#### 4. The ADRC controller design

The control input may then be readily synthesized with an active disturbance canceling strategy for the uncertain input  $\xi(t)$ , in terms of its estimated value  $\hat{z}_1$ , and the use, for feedback purposes, of the estimated time derivatives associated with the incremental flat output tracking errors:  $e_1$  and the measurable incremental flat output acceleration error,  $e_3$ . We propose then

$$\tau_\delta = - \frac{\left( \frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta} - \frac{\varepsilon}{\beta} \right)}{\gamma} [\hat{z}_1 + k_3 \hat{e}_4 + k_2 e_3 + k_1 \dot{e}_2 + k_0 e_1] \quad (23)$$

where, naturally, the tracking errors,  $e_1$  and  $e_3$ , themselves are used instead of their redundant estimates. This is due to the fact that these variables are assumed to be measurable through the variables  $\theta$  and  $\phi$ . Notice that the coefficients of the controller should be chosen in accordance with the fact that, asymptotically, the tracking error is being approximately governed by the differential equation:

$$e_1^{(4)} + k_3 e_1^{(3)} + k_2 \dot{e}_1 + k_1 \dot{e}_1 + k_0 e_1 = \xi(t) - \hat{z}_1 \quad (24)$$

the set of design coefficients,  $\{k_3, \dots, k_1, k_0\}$  should render Hurwitz the underlying characteristic polynomial:

$$p(s) = s^{(4)} + k_3 s^{(3)} + k_2 s^2 + k_1 s + k_0$$

We propose  $k_3 = 4\zeta_c \omega_c$ ,  $k_2 = 2\omega_c^2 + 4\zeta_c^2 \omega_c^2$ ,  $k_1 = 4\zeta_c \omega_c^3$ ,  $k_0 = \omega_c^4$ .

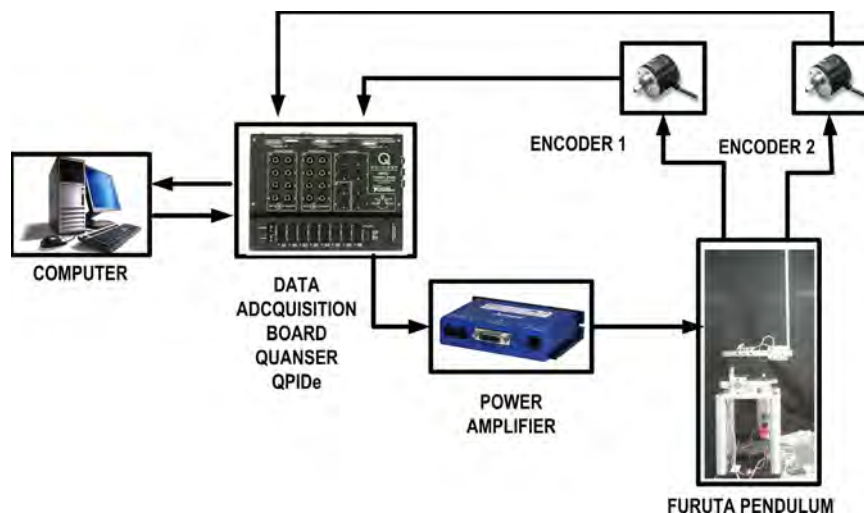


Fig. 3. Block diagram for the Furuta Pendulum control scheme.

## 5. Experimental results

Fig. 3 shows a diagram of the experimental platform used for the Furuta Pendulum. The experimental device (Fig. 4) consists of a Brushed servomotor from Moog, model C34L80W40, which drives the horizontal arm through a synchronous belt with a 4.5:1 ratio. The angles of the pendulum and arm (motor) can be measured with Incremental optical encoders of 2500 CPR. A Copley Controls digital amplifier model Junus 90, working in current mode, is in charge of driving the motor.

The Data acquisition is carried out through a data card from Quanser consulting, model QPiDe terminal board. This card reads

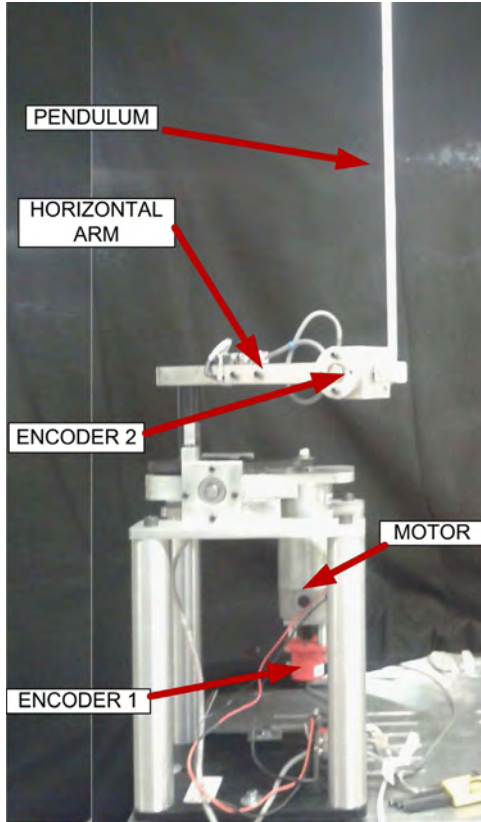


Fig. 4. Furuta pendulum system prototype.

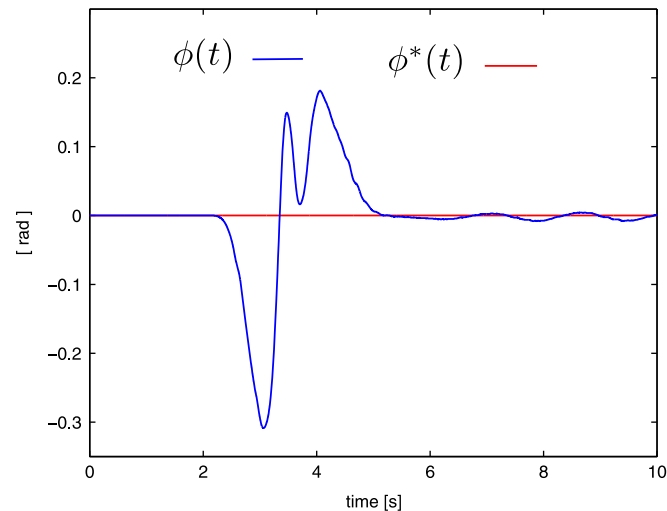


Fig. 5. Vertical angle closed loop behavior.

signals from the optical incremental encoders and supplies control voltages to the power amplifiers. The control strategy was implemented in the Matlab-Simulink platform. Finally, the sampling time was set to be 0.0005 s. The Furuta Pendulum parameters were  $l_0 = 0.33$  m,  $l_1 = 0.275$  m,  $m_0 = 1.64$  kg,  $m_1 = 0.141$  kg,  $I_0 = 0.0481$  kg m<sup>2</sup>,  $I_1 = 0.0036$  kg m<sup>2</sup>, which are used in (18), (21) to obtain  $\beta$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ , and  $\gamma$ , respectively.

The initial conditions for the joint variables in the system were  $[\phi = 0, \theta = 0]$ . The observer gain parameters for the observation error  $\tilde{e}_1$ , were set to be  $\zeta_o = 2$ ,  $\omega_o = 15$ . The observer gain parameters for observation error  $\tilde{e}_3$  were set to be as follows:  $n = 8$ ,  $T = 6$ ,  $a_0 = 16$ ,  $\alpha = 4$ . The controller design parameters were specified to be:  $\zeta_c = 1$ ,  $\omega_c = 12$ .

Fig. 5 shows the Furuta Pendulum experimental platform performance; while the horizontal arm is rotating, pendulum's vertically lies at the unstable vertical position  $\phi = 0$ . Fig. 6 shows the performance of the horizontal arm from the initial position  $\theta(2) = 0$  towards the final position  $\theta(5.4) = 2\pi$  during a time interval  $t \in [2, 5.4]$  s. The produced control torque is depicted in Fig. 7, notice that the lumped disturbance estimation (see Fig. 8) determines the form of the control inputs, which tend to cancel out the additive disturbance inputs. Fig. 9 shows the behavior of

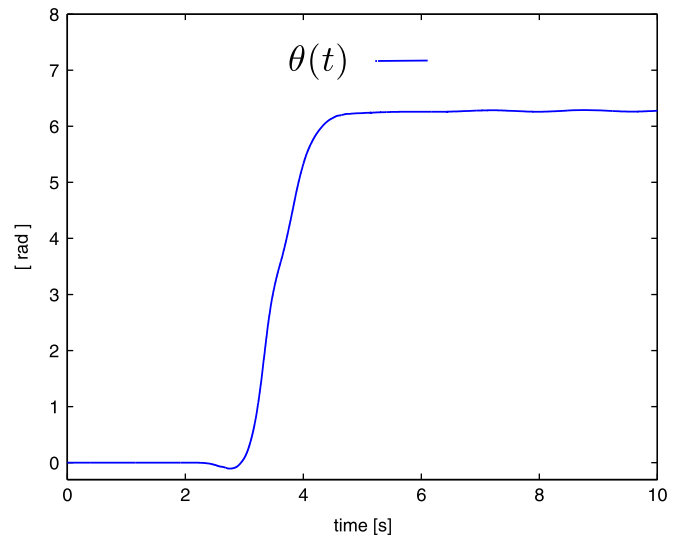


Fig. 6. Horizontal arm angular reference trajectory tracking behavior.

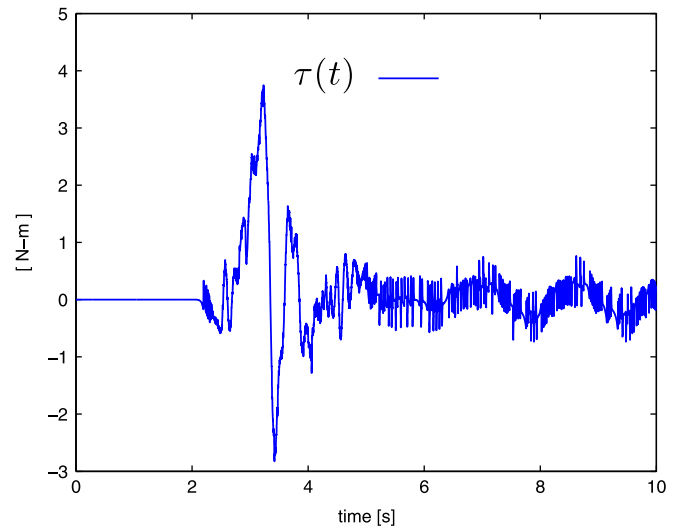


Fig. 7. Torque input trajectory.



the flat output  $F_\delta = \eta\phi_\delta - \varepsilon\theta_\delta$  from the initial value  $F_\delta(2) = 0$  towards the final value:  $F_\delta(5.4) = -\varepsilon 2\pi$ , Fig. 10 shows the tracking error which remains restricted to a bounded zone centered at the origin of the error phase space.

5.1. An experimental comparison test

In order to test the performance of the presented control scheme, we carried out a comparative analysis with respect to a sliding mode controller, which is a well-known robust control scheme. Taking advantage of the flatness of the linearized system, the implementation of a sliding mode (SM) based control scheme is feasible (see [28]). Define, for dynamics (14), the following sliding surface:

$$\sigma = F_\delta^{(3)} - F_\delta^{(3)*} + \nu_1(\ddot{F}_\delta - \ddot{F}_\delta^*) + \nu_2(\dot{F}_\delta - \dot{F}_\delta^*) + \nu_3(F_\delta - F_\delta^*) \quad (25)$$

where  $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$  are a set of real constants such that the polynomial  $s^3 + \nu_1 s^2 + \nu_2 s + \nu_3$  is Hurwitz. Taking the time derivative of  $\sigma$  yields

$$\dot{\sigma} = \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)} \tau_\delta + \xi + \nu_1(F_\delta^{(3)} - F_\delta^{(3)*}) + \nu_2(\ddot{F}_\delta - \ddot{F}_\delta^*) + \nu_3(\dot{F}_\delta - \dot{F}_\delta^*), \quad (26)$$

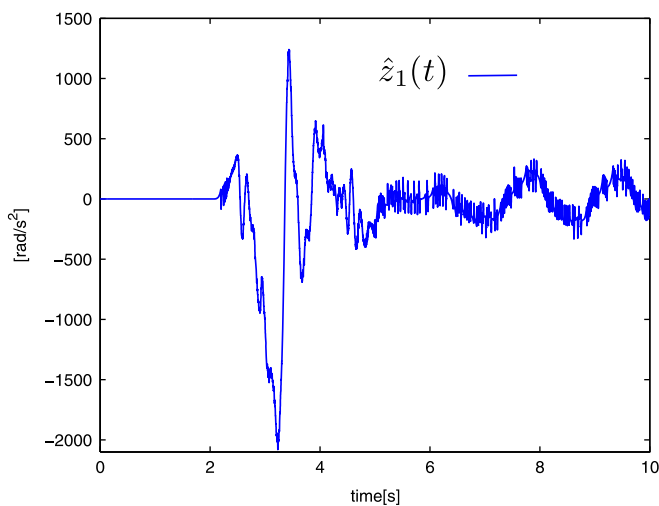


Fig. 8. Lumped on-line disturbance estimation.

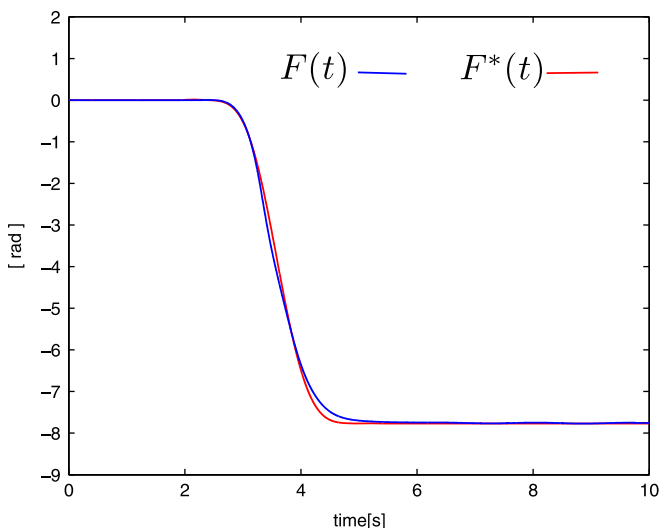


Fig. 9. Flat output reference trajectory tracking.

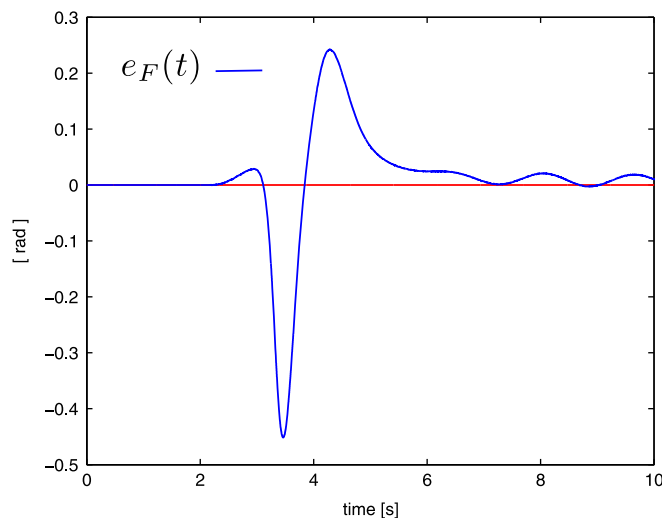


Fig. 10. Tracking error for the flat output.

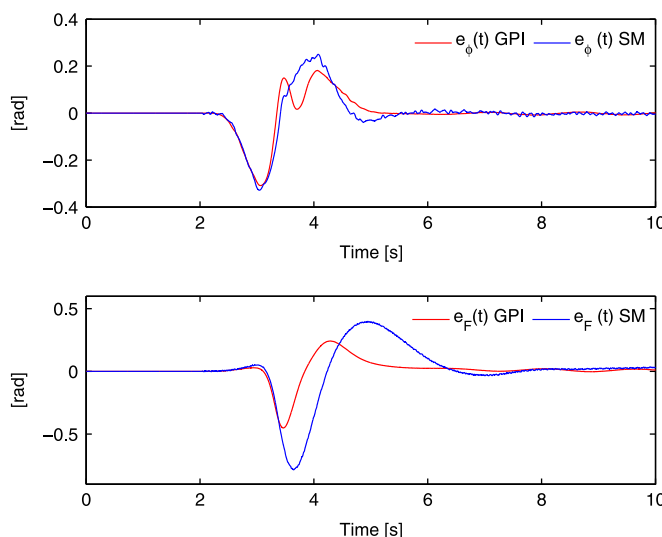


Fig. 11. Experimental comparative results: tracking errors. SM, sliding mode.

Thus, the sliding mode control is specified as follows:

$$\tau_\delta = -\frac{\left(\frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}{\gamma} W \text{sign}(\sigma), \quad W > 0 \quad (27)$$

In order to reduce the chattering effect, the following control law is proposed:

$$\tau_\delta = -\frac{\left(\frac{\alpha^2 \eta}{\varepsilon \beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)}{\gamma} W \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \mu} \quad (28)$$

where  $\mu = 0.0005$  is a small positive scalar parameter and  $W$  must be selected such that  $W > \sup \|\xi(t)\|$ , to guarantee that the tracking error tends to zero as time evolves. For the sliding surface  $\sigma = 0$ , the set of gains were chosen such that the following desired characteristic polynomial was matched:  $s^3 + \nu_1 s^2 + \nu_2 s + \nu_3 = (s+p)(s^2 + 2\zeta_c \omega_c s + \omega_c^2)$ , with  $p=5$ ,  $\omega_c = 5$ , and  $\zeta_c = 1.7$ .

From Fig. 8, the value of  $W$  was set to be 2500, which is a reasonable experimental value for a good disturbance estimate from the observer-based results,  $W > \sup \|\hat{z}(t)\|$ . Fig. 11 shows the tracking error signal, which remains bounded for both controllers. Notice that the sliding mode controller (SM) presents a slight chattering due to high gain smoothing of the control input signal.

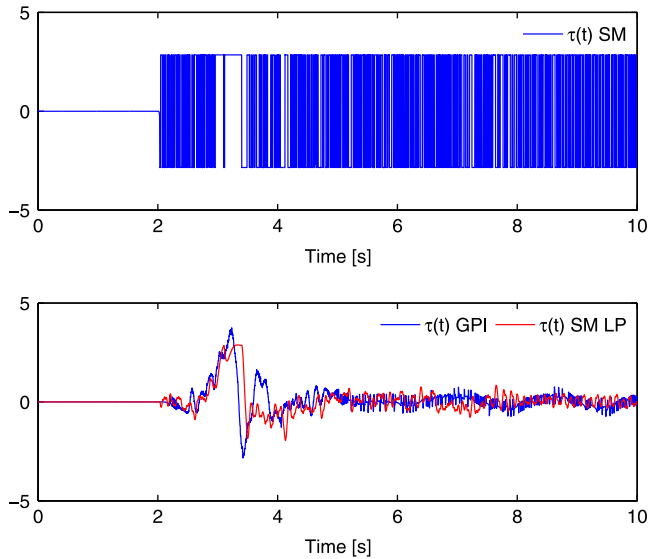


Fig. 12. Experimental comparative results: control inputs. SM LP, sliding mode low pass filtering.

However, the GPI controller (GPI) offers a better steady state response. The flat output tracking errors are rather smooth and the GPI achieves the tracking task with a smaller error magnitude. Finally, Fig. 12 shows the sliding mode control input (SM). In order to compare the control efforts, a filtering of the sliding mode control input (SM LP) was carried out with a second order low pass filter of the Butterworth type with a cut-off frequency of 25 rad/s, with transfer function given by  $LPF(s) = 625/(s^2 + 35.3553s + 625)$ . The figure shows a comparison with respect to the GPI control input (GPI). Notice that both signals have a similar magnitude.

## 6. Conclusions and future work

The advantageous combination of flatness and active disturbance rejection control allows for the efficient solution of a challenging trajectory tracking problem in a popular underactuated, nonfeedback linearizable, mechanical system known as the Furuta Pendulum. The fact that the tangent linearization of this system, around an arbitrary equilibrium point, is controllable (hence, flat), allows the use of robust active disturbance rejection control in the efficient on-line estimation of the neglected nonlinearities and their active feedback cancelation. The flatness property reveals a cascading feature that immediately allows for a clear decoupling of the linear observer scheme. The solution, which is quite robust with respect to unmodeled disturbances and neglected nonlinearities, is entirely linear and it is based on a set of decoupled linear extended observers and a single linear output feedback controller with disturbance cancelation features. Experimental results reveal the effectiveness of the proposed design.

The scheme here advocated may be extended to an interesting class of underactuated systems, specifically, those which exhibit controllable tangent linearizations, i.e., the ball and beam system, the gantry crane, the double inverted pendulum, etc. These systems enjoy similar flatness and cascading properties in their linearized models. They will be the subject of further research in the upcoming future, in which a general solution methodology could be obtained.

## References

- [1] Acosta J, Aracil J, Gordillo F. Comparative study of nonlinear control strategies for the Furuta pendulum. In: Proceedings of the international conference measurement and control. Pennsylvania, USA; 2001. p. 18–23.

- [2] Åström K, Furuta K. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica* 2000;36:287–95.
- [3] Bou-Serhal RE, Khalil HK. Application of the extended high gain observer to underactuated mechanical systems. In: Proceedings of the American control conference. Montreal, Canada; June 2012. p. 4727–32.
- [4] Cazzolato B, Prime Z. On the dynamics of the Furuta pendulum. *J Control Sci Eng* 2011;1–8. <http://dx.doi.org/doi:10.1155/2011/528341>.
- [5] Diop S, Fliess M. Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. In: Proceedings of the 36th IEEE conference on decision and control. Brighton, England; 1991. p. 714–9.
- [6] Dong L, Zhang Y, Gao Z. A robust decentralized load frequency controller for interconnected power systems. *ISA Trans* 2012;51:410–9.
- [7] Fantoni I, Lozano R. Stabilization of the Furuta pendulum around its homoclinic orbit. *Int J Control* 2002;75(6):390–8.
- [8] Fliess M, Join C. Intelligent PID controllers. In: 16th Mediterranean conference on control and automation; 2008. p. 326–31.
- [9] Fliess M, Join C, Riachy S. Revisiting some practical issues in the implementation of model-free control. In: Proceedings of the 18th World congress the international federation of automatic control. Milano, Italy; August–September 2011. p. 8589–94.
- [10] Fliess M, Lévine J, Martin P, Rouchon P. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and applications. *Int J Control* 1995;61:1327–61.
- [11] Fliess M, Márquez R, Delaleau E, Sira-Ramírez H. *Correcteurs Proportionnels-Intégraux Généralisés*. ESAIM: Control Optim Calcul Var 2002;7(2):23–41.
- [12] Furuta K, Yamakita M, Kobayashi S, Nishimura M. Advances in control education. In: A new pendulum apparatus for education. Selected Papers from the IFAC Symposium. Pergamon Press, Boston, Massachusetts, USA; 1991.
- [13] Gao Z. Active disturbance rejection control: a paradigm shift in feedback control system design. In: American control conference. Minneapolis, Minnesota, USA; June 2006. p. 2399–405.
- [14] Gao Z, Huang Y, Han J. An alternative paradigm for control system design. In: 40th IEEE conference on decision and control, vol. 5; 2001. p. 4578–85.
- [15] Han J. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Trans Ind Electr* 2009;56(March (3)):900–6.
- [16] Johnson CD. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems. *IEEE Trans Autom Control* 1971;16(6).
- [17] Kim Y, Keel L, Bhattacharyya S. Transient response control via characteristic ratio assignment. *IEEE Trans Autom Control* 2003;48(December (12)):2238–44.
- [18] Kim KS, Rew KH, Kim S. Disturbance observer for estimating higher order disturbances in time series expansion. *IEEE Trans Autom Control* 2010;55(August (8)):1905–11.
- [19] Léonard F, Martini A, Abba G. Robust nonlinear controls of model-scale helicopters under lateral and vertical wind gusts. *IEEE Trans Control Syst Technol* 2012;20(January (1)):154–63.
- [20] Lévine J. *Analysis and control of nonlinear systems: a flatness-based approach*. Mathematical engineering. Springer; 2009.
- [21] Li R, Li T, Zheng Q, Li Q. Ship tracking control based on linear active disturbance rejection control. In: Third international conference on intelligent control and information processing. Dalian, China; July 2012. p. 201–5.
- [22] Mori S, Nishihara H, Furuta K. Control of unstable mechanical systems. *Int J Control* 1976;23(5):673–92.
- [23] Noh D, Jo NH, Seo JH. Nonlinear design by dynamic observer error linearization. *IEEE Trans Automat Control* 2004;49(10):1746–50.
- [24] Olfati-Saber R. Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles [Ph.D. thesis], Massachusetts Institute of Technology; 2000.
- [25] Ordaz P, Poznyak A. The Furuta's pendulum stabilization without the use of a mathematical model: attractive ellipsoid method with kl-adaptation. In: Proceedings of the 51st IEEE conference on decision and control. Hawaii, USA; December 2012. p. 7285–90.
- [26] Ortega R, Spong M, Gómez-Estern F, Blankenstein G. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Trans Automa Control* 2002;47(August (8)):1218–33.
- [27] Shiriaev A, Freidovich L, Robertsson A, Johansson R, Sandberg A. Virtual-holonomic-constraints-based design of stable oscillations of Furuta pendulum: theory and experiments. *IEEE Trans Robot* 2007;23(August (4)):827–32.
- [28] Sira-Ramírez H. On the sliding mode control of nonlinear systems. *Syst Control Lett* 1992;19:303–12.
- [29] Sira-Ramírez H, Agrawal S. *Differentially flat systems*. Marcel Dekker Inc.; 2004.
- [30] Sira-Ramírez H, González-Montañez F, Cortés-Romero J, Luviano-Juárez A. A robust linear field oriented voltage control for the induction motor: experimental results. *IEEE Trans Ind Electr* 2013;60(8):3025–33.
- [31] Sira-Ramírez H, Lopez-Urbe C, Velasco-Villa M. Linear observer-based active disturbance rejection control of the omnidirectional mobile robot. *Asian J Control* 2013;15(1):51–63. <http://dx.doi.org/10.1002/asjc.523>.
- [32] Sira-Ramírez H, Núñez C, Visairo N. Robust sigma-delta generalised proportional integral observer based control of a “buck” converter with uncertain loads. *Int J Control* 2010;83(August (8)):1631–40.
- [33] Sira-Ramírez H, Ramírez-Neria M, Rodríguez-Angeles A. On the linear control of nonlinear mechanical systems. In: Proceedings of the 49th IEEE conference on decision and control. Atlanta, GA, USA; December 2010. p. 1999–2004.
- [34] Sørensen A, Shiriaev A. Friction compensation in the Furuta pendulum for stabilizing rotational modes. In: Proceedings of the 40th IEEE conference on decision and control. Orlando, FL, USA; December 2001. p. 3772–7.

- [35] Sussman HJ, Kokotovic PV. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans Automat Control* 1991;AC-36(4):424–40.
- [36] Vincent J, Morris D, Usher N, Gao Z, Zhao S, Nicoletti A, Zheng Q. On active disturbance rejection based control design for superconducting RF cavities. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* 2011;643:11–6.
- [37] Xu J, Zhou J, Zhang H, Bian X. Auto disturbance rejection control system of diving for an underactuated AUV. In: Fourth international joint conference on computational sciences and optimization. Kunming and Lijiang City, China; April 2011. p. 982–6.
- [38] Zhao S, Gao Z. An active disturbance rejection based approach to vibration suppression in two-inertia systems. *Asian J Control* 2012;15:350–62, <http://dx.doi.org/10.1002/asjc.552>.



# On the Linear Control of Underactuated Nonlinear Systems Via Tangent Flatness and Active Disturbance Rejection Control: The Case of the Ball and Beam System

**Mario Ramírez-Neria**

Department of Mechatronics,  
UNITEC ATIZAPAN, México,  
Blvd. Calacoaya No. 7 Col. La Ermita Atizapán,  
de Zaragoza Estado de México 52999, Mexico  
e-mail: mramirez@ctrl.cinvestav.mx

**Hebertt Sira-Ramírez**

Department of Electrical Engineering,  
Mechatronics Section,  
CINVESTAV - IPN,  
Av. IPN 2580 Col. San Pedro Zacatenco,  
D.F. México, C.P. 07360, Mexico  
e-mail: hsira@cinvestav.mx

**Rubén Garrido-Moctezuma**

Department of Automatic Control,  
CINVESTAV-IPN, México,  
Av. IPN 2580 Col. San Pedro Zacatenco,  
D.F. México, C.P. 07360, Mexico  
e-mail: garrido@ctrl.cinvestav.mx

**Alberto Luviano-Juárez<sup>1</sup>**

Instituto Politécnico Nacional,  
UPIITA,  
Av. IPN 2580, Col. Barrio La Laguna Ticomán,  
D.F. México, C.P. 07340, Mexico  
e-mail: aluvianoj@ipn.mx

*In this paper, a systematic procedure for controller design is proposed for a class of nonlinear underactuated systems (UAS), which are non-feedback linearizable but exhibit a controllable (flat) tangent linearization around an equilibrium point. Linear extended state observer (LESO)-based active disturbance rejection control (ADRC) is shown to allow for trajectory tracking tasks involving significantly far excursions from the equilibrium point. This is due to local approximate estimation and compensation of the nonlinearities neglected by the linearization process. The approach is typically robust with respect to other endogenous and exogenous uncertainties and disturbances. The flatness of the tangent model provides a unique structural property that results in an advantageous low-order cascade decomposition of the LESO design, vastly improving the attenuation of noisy and peaking components found in the traditional full order, high gain, observer design. The popular ball and beam system (BBS) is taken as an application example. Experimental results show the effectiveness of the proposed approach in stabilization, as well as in perturbed trajectory tracking tasks. [DOI: 10.1115/1.4033313]*

<sup>1</sup>Corresponding author.

Contributed by the Dynamic Systems Division of ASME for publication in the JOURNAL OF DYNAMIC SYSTEMS, MEASUREMENT, AND CONTROL. Manuscript received September 17, 2015; final manuscript received March 23, 2016; published online June 8, 2016. Assoc. Editor: Evangelos Papadopoulos.

## 1 Introduction

The analysis and control of UAS has been an active topic of research in recent years. Generally speaking, UAS are not feedback linearizable and in the multivariable case they may have an ill-defined vector relative degree [1]. Approximate feedback linearization allows singularity avoidance at the expense of some weaknesses. The flatness of the linearized system is shown to naturally induce a low-order cascade structure [2], which allows for a simpler (decoupled) and more efficient disturbance and state observer design. In this article, tangent flatness around an equilibrium point and ESO-based ADRC are merged into a systematic procedure for robust feedback controller design in a class of UAS which are non-feedback linearizable. A structural property, revealed by flatness, results in an advantageous low-order cascade decomposition of the LESO design. The BBS is taken as a prototypical application example. Experimental results show the effectiveness of the proposed approach in stabilization, as well as in perturbed trajectory tracking tasks. This article is structured as follows: In Sec. 2, some theoretical preliminaries are introduced. A methodology for controlling a class of nonlinear UAS is proposed in Sec. 3. The same section illustrates the procedure in a direct application to the BBS. Experimental results are provided in Sec. 4. Finally, some conclusions are found in Sec. 5.

## 2 Preliminary Concepts

**2.1 Differentially Flat Systems.** It is said that a nonlinear system of the form  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$  is *differentially flat*, i.e., linearizable by an endogenous (static) feedback [3], if there exists an endogenous variable,  $f$ , having the following properties:

- (i) Every system variable may be expressed as a function of  $f$  and a finite number of its time derivatives.
- (ii) The variable  $f$  may be expressed as a function of the system state vector and a finite number of its time derivatives.
- (iii) The variable  $f$  does not satisfy any differential equation by itself.

**2.2 A Class of UAS.** Consider the following model of an underactuated nonlinear mechanical system [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11}(\mathbf{x})\ddot{x}_1 + \mathbf{M}_{12}(\mathbf{x})\ddot{x}_2 + C_1(x, \dot{x}) &= b(x)u \\ \mathbf{M}_{21}(\mathbf{x})\ddot{x}_1 + \mathbf{M}_{22}(\mathbf{x})\ddot{x}_2 + C_2(x, \dot{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

where  $x^T = (x_1^T, x_2^T) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}^{n-p}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^p$ ,  $n, p \in \mathbb{N}$  are the states,  $b(x) \in \mathbb{R}^{n-p}$  is the gain vector, and  $u \in \mathbb{R}$  is the control input. The term  $p$  denotes the underactuated degrees-of-freedom. The functions  $C_1 \in \mathbb{R}^{n-p}$  and  $C_2 \in \mathbb{R}^p$  contain the centrifugal and gravity forces. The inertia matrix defined by

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}(\mathbf{x}) & \mathbf{M}_{12}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{M}_{21}(\mathbf{x}) & \mathbf{M}_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbb{R}^{n \times n}$$

with  $\mathbf{M}_{11}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $\mathbf{M}_{12}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ ,  $\mathbf{M}_{21}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$ ,  $\mathbf{M}_{22}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  is positive definite for any  $x$ .

**2.2.1 Basic Assumptions.** It is assumed that the single input single output (SISO) UAS exhibits a controllable tangent linearization around a natural equilibrium point. The linearized system is assumed to be flat. It includes a lumped disturbance term, which considers internal and external disturbances, considered unknown but absolutely bounded with finite time-bounded derivatives, generated from the linearization process as well as external effects. Also, this term may contain deterministic bounded additive noises of unknown statistics from the measurement process. The ESO-based ADRC will take care of the neglected endogenous

disturbances as well as external perturbations by direct estimation and cancellation. The flatness property in the tangent linearized system allows a systematic procedure in the robust flat output feedback controller design for these systems with the help of ESO-based ADRC. In ADRC schemes, the control problem can be approached in terms of estimating the *total disturbance* affecting the system, reducing the control task to the control of a perturbed chain of integrators. An additional advantage of flatness is revealed in a structural property exhibited in the differential parameterization of the system variables via the flat output. This property places in simple terms of measurable (position) variables an intermediate high-order time derivative of the flat output, thus reducing the natural measurement noise effects in the high-order injected flat output phase variables estimation error dynamics. In Sec. 3, a generalized procedure is applied to the popular BBS.

### 3 A Control Design Procedure Through a Case Study

Consider the well-known BBS [1], shown in Fig. 1, consisting of a ball placed on a beam, which undergoes an angular displacement around a certain pivot, actuated by a direct current (DC) motor directly coupled to the beam by means of a pulley. The dynamical model is represented as follows:

$$\left(m_2 + \frac{I_2}{R^2}\right)\ddot{r} - m_2 r \dot{\theta}^2 + m_2 g \sin \theta = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (m_2 r^2 + m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)\ddot{\theta} + 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta} + m_2 g r \cos \theta \\ + m_1 g l_1 \sin \theta = N \tau \end{aligned} \quad (3)$$

where  $r \in \mathbb{R}$  denotes the position of the ball from the center of mass of the beam,  $\theta \in \mathbb{R}$  is the angular position of the beam,  $m_2 \in \mathbb{R}$  and  $R \in \mathbb{R}$  denote, respectively, the ball mass and its radius.  $I_2 = \frac{2}{5} m_2 R^2 \in \mathbb{R}$  is the ball inertia,  $I_1 \in \mathbb{R}$  denotes the beam inertia,  $m_1 \in \mathbb{R}$  is the beam mass, and  $I_p \in \mathbb{R}$  represents the inertia of the pulley system.  $N \in \mathbb{R}$  is a ratio of distances concerning the pulley/motor actuator. The control input (motor torque)  $\tau \in \mathbb{R}$  can be expressed as a function of the motor voltage through the approximate relation  $\tau(t) = k_\tau V(t)/R_a$ , where  $k_\tau \in \mathbb{R}$  is the motor torque constant, and  $R_a \in \mathbb{R}$  is the motor armature electric resistance.

**3.1 Problem Formulation.** Devise a control law in order to manipulate the ball position from an initial value,  $r(0)$ , to a given final value  $r(t_{\text{final}})$  in a finite, prescribed, interval of time  $[0, t_{\text{final}}]$ , though a smooth rest to rest trajectory.

**Step 1: Obtain the Linearized System Around an Equilibrium Point.** The system desired equilibrium point is described by:  $\bar{r} = \bar{r} = \bar{\theta} = \bar{\dot{\theta}} = \bar{V} = 0$ . The approximate linearization of the systems (2) and (3) around the equilibrium point is given by

$$\left(m_2 + \frac{I_2}{R^2}\right)\ddot{r}_\delta + m_2 g \theta_\delta = 0 \quad (4)$$

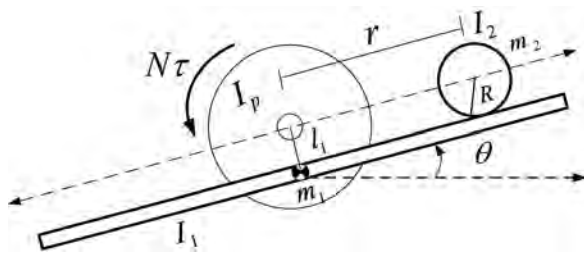


Fig. 1 A schematic of the BBS

$$(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)\ddot{\theta}_\delta + m_2 g r_\delta + m_1 g l_1 \theta_\delta = \frac{k_\tau N}{R_a} V_\delta \quad (5)$$

where  $r_\delta = r - \bar{r} = r$ ,  $\dot{r}_\delta = \dot{r} - \bar{\dot{r}} = \dot{r}$ ,  $\theta_\delta = \theta - \bar{\theta} = \theta$ ,  $\dot{\theta}_\delta = \dot{\theta} - \bar{\dot{\theta}} = \dot{\theta}$  and  $V_\delta = V - \bar{V} = V$ . An alternative writing for the linearized system is

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}V_\delta \quad (6)$$

where  $\mathbf{x} = [r_\delta \quad \dot{r}_\delta \quad \theta_\delta \quad \dot{\theta}_\delta]^T$ ,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_2 g}{m_2 + \frac{I_2}{R^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m_2 g}{m_1 l_1^2 + I_1 + I_p} & 0 & -\frac{m_1 g l_1}{m_1 l_1^2 + I_1 + I_p} & 0 \end{bmatrix}$$

**Step 2: Verify the Existence of the Flatness Property, and Obtain a Flat Output as Well as the Input-to-Flat Output Relationship.** The linearized model (4) and (5) is controllable and hence, flat with controllability Matrix  $\mathbf{K}_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$ . The incremental flat output can be computed as  $f = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{K}_c^{-1} \mathbf{x}$ . We can choose the flat output as the incremental position of the ball,  $r_\delta = (f/\varepsilon)$ , with  $\varepsilon = -(R_a(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)(m_2 R^2 + I_2)/\alpha k_\tau N R^2 m_2)$ . Define  $\alpha = m_2 g / (m_2 + I_2/R^2) \in \mathbb{R}$ . All system variables in the linear model BBS and the control input are expressible as functions of the flat output  $r_\delta$  and a finite number of its time derivatives

$$\theta_\delta = -\frac{1}{\alpha} \ddot{r}_\delta, \quad \dot{\theta}_\delta = -\frac{1}{\alpha} \dot{r}_\delta^{(3)} \quad (7)$$

$$V_\delta(t) = -\frac{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a}{\alpha k_\tau N} r_\delta^{(4)} - \frac{R_a m_1 g l_1}{\alpha k_\tau N} \ddot{r}_\delta + \frac{m_2 g r_\delta}{k_\tau N} \quad (8)$$

**Step 3: Find the Cascade Form of the UAS.** The incremental input-to-flat output relationship for the BBS (8) is represented by means of a fourth-order linear time-invariant system

$$\begin{aligned} r_\delta^{(4)} = & -\frac{\alpha k_\tau N}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p) R_a} V_\delta(t) - \frac{m_1 g l_1}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)} \ddot{r}_\delta \\ & + \frac{\alpha m_2 g}{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)} r_\delta \end{aligned}$$

Notice that the linearized system naturally decomposes into a cascade connection of two independent blocks; the first one controlled by the input voltage  $V_\delta(t)$ , with the corresponding output given by the flat output incremental acceleration  $\ddot{r}_\delta = \ddot{r}$ . Thus, the linearized acceleration of the ball can be expressed in terms of the angular position of the beam through the relation:  $\ddot{r}_\delta = -\alpha \theta_\delta$ . The signal  $\alpha \theta_\delta$  acts as an auxiliary input to the second block, which consists of an elementary chain of two integrators rendering, simple enough, the estimation of the phase variables  $\dot{r}_\delta$  and  $r_\delta$  (see Fig. 2). This fundamental cascade property simplifies and decouples the ESO design task in the ADRC scheme.

**Step 4: Implement the Linear ADRC for the Linearized System.** To apply the ADRC [5], it is necessary to express the system as an additively disturbed chain of integrators. The linearized system can be expressed as follows:



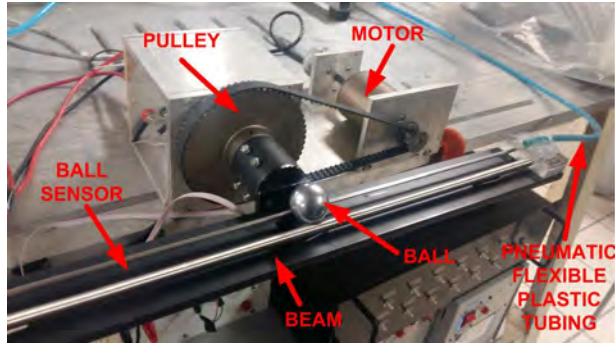


Fig. 3 Block diagram of the ball and beam control system

$+k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0$  becomes stable. In this case,  $k_3 = 4\zeta_c\omega_c$ ,  $k_2 = 2\omega_c^2 + 4\zeta_c^2\omega_c^2$ ,  $k_1 = 4\zeta_c\omega_c^3$ ,  $k_0 = \omega_c^4$ , with  $0 < \zeta_c < 1$ ,  $\omega_c \in \mathbb{R}^+$ . One may force the closed-loop tracking error dynamics to exhibit the desired stable fourth-order dynamics with characteristic polynomial coincident with  $(s^2 + 2\zeta_c\omega_c s + \omega_c^2)^2$ .

#### 4 Experimental Results

The experimental device consists of a 24 V DC motor which drives an aluminum beam via a synchronous belt and a pulley with a ratio  $N = 6:1$ . The angular position of the beam is measured using an incremental optical encoder of 2500 pulses per revolution. A linear sensor, consisting of an etched wire made of a nickel-chromium wire, measured the position of the ball along the beam with a resolution of 25 (mm/V) as shown in Fig. 3. The data acquisition is carried out through a data card, model QPIDE, from Quanser. The control strategy described before was implemented in the MATLAB-SIMULINK Quarc platform. The sampling time was 0.001 (s). The parameters for the beam are  $I_1 = 0.0045$  (kg/m<sup>2</sup>),  $m_1 = 0.065$  (kg),  $l_1 = 0.015$  (m),  $I_p = 0.001$  (kg/m<sup>2</sup>),  $m_2 = 0.065$  (kg), and  $I_2 = 0.0045$  (kg/m<sup>2</sup>). The radius of the ball is,  $R = 0.0127$  (m). The parameters of the motor are  $R_a = 2.983$  ( $\Omega$ ),  $k_t = 0.0724$  (N m/A). The initial conditions for the position variables in the system were  $[r = 0, \theta = 0]$ . The observer gain parameters for the observation error  $\tilde{e}_0$  were set as  $\zeta_o = 3$ ,  $\omega_o = 70$ . The observer gain parameters for observation error  $\tilde{e}_2$  were set as  $T = 5$ ,  $a_0 = 4$ ,  $\alpha_1 = 4.1$ . The controller design parameters were  $\zeta_c = 0.8$ ,  $\omega_c = 15$ . Figure 4 shows the performance of the closed loop trajectory tracking for ball position and acceleration, from the initial position  $r_\delta(0) = 0$ , toward the equilibrium position  $r_\delta(4) = -0.14$  (m), and then moved to the final resting position

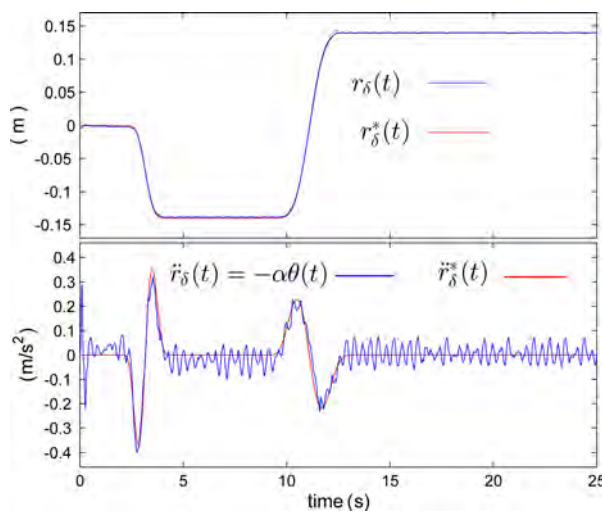


Fig. 4 Performance of closed loop reference trajectory tracking ball position and acceleration

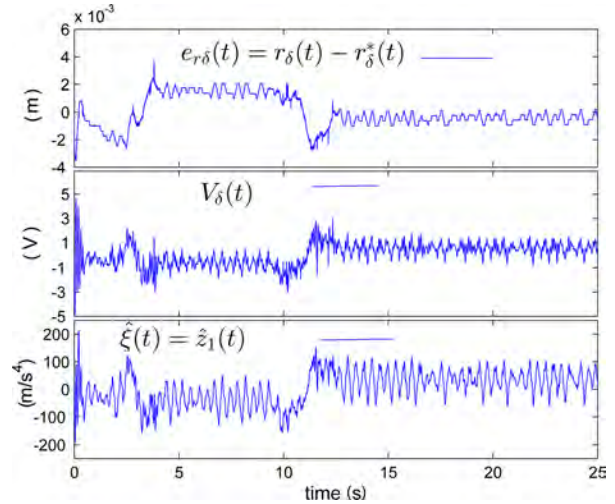


Fig. 5 Tracking error, voltage input control signal, and lumped online disturbance estimation

$r_\delta(12) = 0.14$  (m). The tracking error evolution, the control input, and the lumped disturbance estimation are shown in Fig. 5.

**4.1 Comparison Test.** In order to test the performance of the flatness-based ADRC scheme proposed, we carried out a comparative analysis with respect to a state feedback integral (SFI) controller [7] as well as the super twisting (ST) algorithm [8]. The error dynamics is given by  $\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}V_{\delta\text{SFI}}$ , where

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}]$$

$$V_{\delta\text{SFI}} = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t) \\ \hat{\mathbf{C}} \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t)) \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

The SFI controller is specified as

$$V_{\delta\text{SFI}} = -(\kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + \kappa_3 e_3 + \kappa_4 e_4 + \kappa_5 e_5) \quad (12)$$

The state stabilization error equation is simplified to  $\dot{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{e}$ , the desired closed-loop poles of matrix  $\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}$  are specified as  $(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) = 0$ , being  $\mu_1 = -0.9 + 2.6814i$ ,  $\mu_2 = -0.9 - 2.6814i$ ,  $\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = -10$ . Then the state-feedback gain matrix  $\hat{\mathbf{K}} = [\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3 \quad \kappa_4 \quad \kappa_5]$  can be determined by a traditional pole-placement technique. For the super twisting controller, the following sliding surface and controller were defined:

$$\sigma = -\alpha\dot{\theta}_\delta - r_\delta^{*(3)} + \gamma_2(-\alpha\theta_\delta - \ddot{r}^*) + \gamma_1(\dot{r}_\delta - \dot{r}_\delta^*) + \gamma_0(r_\delta - r_\delta^*)$$

$$V_{\delta\text{SM}} = \frac{(m_1 l_1^2 + I_1 + I_p)R_a}{\alpha k_t N} [-a\sqrt{|\sigma|}\text{sign}(\sigma) + y]$$

$$\dot{y} = -M\text{sign}(\sigma)$$

For the sliding surface  $\sigma = 0$ , the set of gains were chosen such that the following desired characteristic polynomial was matched:  $s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0 = (s + p)(s^2 + 2\zeta_m \omega_m s + \omega_m^2)$  with  $p = 8$ ,  $\omega_m = 8$ ,  $\zeta_m = 1$ , the controller gains was chosen as  $a = 70$ ,  $M = 0.64$ . For both controllers, the measured states  $[r_\delta, \dot{r}_\delta, \theta_\delta, \dot{\theta}_\delta]$  were processed by means of low-pass filters  $30\pi/(s + 30\pi)$ , in order to reduce the noise in the derivative estimation. A disturbance consisting of an air load with a value of approximately 0.1 (N) was applied as a kind of step with duration of 1 (s) at the times  $t = 15$  and  $t = 20$  (s). It was produced using a



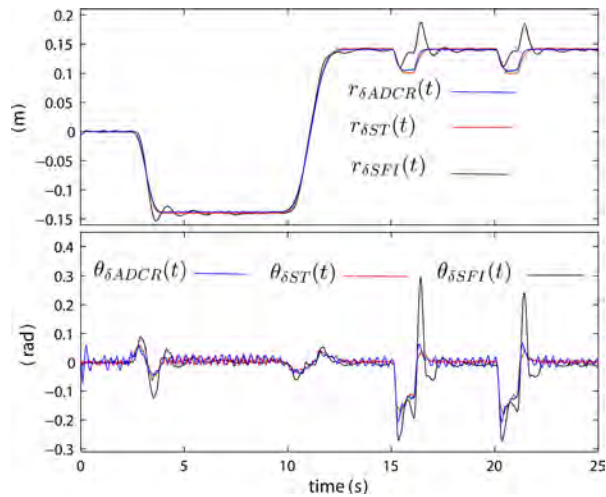


Fig. 6 Tracking trajectory performance

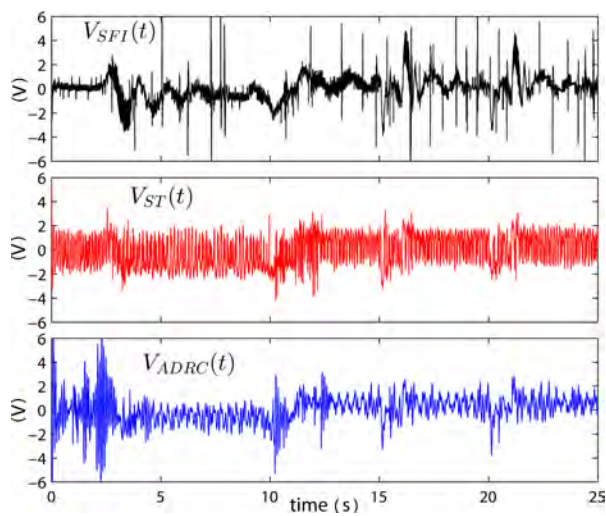


Fig. 7 Control inputs in the comparison test

pneumatic flexible plastic tubing with interior diameter 4 (mm) (see Fig. 3), and activated by means of solenoid air control valve, the pressure of the air was set to 3.44738 (Bar). Figure 6 shows

the tracking trajectory results and Fig. 7 shows the control signals. Notice that the sliding mode controller and the proposed scheme obtained better results with respect to the ones of the SFI. Notice that the proposal is quite competitive using purely linear methods in relation to one of the most important robust controllers.

## 5 Concluding Remarks

The problem of controlling a class of UAS, in a trajectory tracking task, was solved by means of exploiting the flatness associated with the linearized model and via an extended state observer based linear ADRC. The scheme uses the tangent linearization system model of the BBS around an arbitrary equilibrium point. The traditional drawbacks present in standard linear control schemes were overcome by using a particular structure of the LESO, of the Luenberger type, induced by the flatness of the system. The scheme achieves highly competitive experimental results when compared with other linear and nonlinear controllers. Extensions of this result for the multivariable case are considered as future investigation.

## Acknowledgment

This article was partially supported by SIP-IPN under research Grant No. 20160354 (Alberto Luviano-Juárez).

## References

- [1] Hauser, J., Sastry, S., and Kokotovic, P., 1992, "Nonlinear Control Via Approximate Input-Output Linearization: The Ball and Beam Example," *IEEE Trans. Autom. Control*, **37**(3), pp. 392–398.
- [2] Ramirez-Neria, M., Sira-Ramirez, H., Garrido-Moctezuma, R., and Luviano-Juarez, A., 2014, "Linear Active Disturbance Rejection Control of Underactuated Systems: The Case of the Furuta Pendulum," *ISA Trans.*, **53**(4), pp. 920–928.
- [3] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., and Rouchon, P., 1995, "Flatness and Defect of Non-Linear Systems: Introductory Theory and Applications," *Int. J. Control*, **61**(6), pp. 1327–1361.
- [4] Xu, R., and Ozguner, U., 2008, "Sliding Mode Control of a Class of Underactuated Systems," *Automatica*, **44**(1), pp. 233–241.
- [5] Gao, Z., 2006, "Active Disturbance Rejection Control: A Paradigm Shift in Feedback Control System Design," *American Control Conference*, Minneapolis, MN, June 14–16, pp. 2399–2405.
- [6] Keel, Y., Keel, L. H., and Bhattacharyya, S., 2003, "Transient Response Control Via Characteristic Ratio Assignment," *IEEE Trans. Autom. Control*, **48**(1), pp. 2238–2244.
- [7] Márton, L., Lantos, B., and Hung, J. Y., 2008, "Underactuated Robot Control: Comparing LQR, Subspace Stabilization, and Combined Error Metric Approaches," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, **55**(10), pp. 3724–3730.
- [8] Utkin, V., 2013, "On Convergence Time and Disturbance Rejection of Super-Twisting Control," *IEEE Trans. Autom. Control*, **58**(8), pp. 2013–2017.