

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE

CONTROL AUTOMÁTICO

**“Desempeño óptimo de sistemas con
retardos:
enfoques teórico y práctico”**

T E S I S

Que presenta

LILIAM RODRÍGUEZ GUERRERO

Para obtener el grado de

**DOCTORA EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE
CONTROL AUTOMÁTICO**

Directores de Tesis:

Dra. Sabine Marie Sylvie Mondié Cuzange
Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez

Ciudad de México

OCTUBRE 2016

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme alcanzar este logro profesional.

Agradezco la paciencia, amor y apoyo de mi familia: mi esposo Luis Ricardo y mi hijo Yoab Emmanuel. También a mis padres Eusebio y Elvira, a mis suegros Luis y Margarita, por ayudarme siempre que lo necesite, a mis hermanas Miriam y Karen y a mi cuñada Patricia.

De especial manera agradezco a mis asesores, al Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez por creer en mi y guiarme durante el desarrollo del trabajo, por su apoyo y amistad. Del mismo modo agradezco a la Dra. Sabine Mondié por sus enseñanzas, paciencia y por su apoyo en todo momento.

Agradezco a mis sinodales, quienes revisaron la memoria de tesis y realizaron observaciones y comentarios que la mejoraron: Dra. Belem Saldivar, Dr. Jorge Torres, Dr. Moisés Bonilla, Dr. Wen Yu y Dr. Gilberto Ochoa.

Al Dr. Raúl Salas Coronado y la Dra. Norma Francenia Santos Sánchez por recibirnos en Oaxaca y brindarnos su ayuda con el análisis de nutrientes.

Al Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver por su colaboración en los resultados de la sección 3.2.2.

Al Dr. Carlos Andrés Galán Vidal, jefe del Laboratorio del Centro de Investigaciones Químicas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, por prestarnos la balanza analítica.

A mis compañeros de maestría Jorge Ortega y Nicolás Cervantes.

A todos mis amigos y compañeros del DCA, a Carlos Cuvas y Adrián Ramírez por compartir sus conocimientos conmigo.

A mis amigos de Pachuca, en especial a Rocío Ortega y Alejandro Benítez por sus porras y apoyo.

Agradezco al Conacyt por la beca otorgada.

Índice

Notación	vii
Resumen	vii
Abstrac	vii
1 Introducción general	1
1.1 Sistemas de deshidratación de alimentos.....	1
1.2 Revisión bibliográfica de resultados existentes.....	2
1.2.1 El problema de optimización en procesos de secado	2
1.2.2 Sistemas con retardos	4
1.2.3 Estrategias de control para sistemas con retardos	4
1.3 Motivación	7
1.4 Planteamiento del problema.....	8
1.4.1 Optimalidad inversa para sistemas no lineales libres de retardo . . .	8
1.4.2 Función de Control de Lyapunov-Krasovskii	9
1.5 Objetivos	11
1.6 Publicaciones resultado de la tesis.....	12
2 Deshidratadora atmosférica de jitomate	15
2.1 Introducción.....	15
2.2 Descripción del prototipo.....	15
2.3 Modelado matemático	18
2.3.1 Modelo lineal con retardo en la entrada	18
2.3.2 Verificación de la propiedad de linealidad	21
2.3.3 Modelo no lineal	22
2.3.4 Modelo no lineal con retardo en el estado	25
2.3.5 Modelo no lineal con retardo en el estado y en la entrada de control .	27
2.4 Conclusiones	28
3 Estrategias de control para sistemas no lineales con retardos	29
3.1 Introducción.....	29

3.2	Control óptimo no lineal por optimalidad inversa.....	29
3.2.1	Control óptimo no lineal usando funcionales de L-K de tipo completo	29
3.2.1.1	Condiciones suficientes para que un funcional de tipo completo sea una FCLK	32
3.2.1.2	Síntesis del controlador óptimo no lineal	34
3.2.1.3	Continuidad de la ley de control (3.16)	35
3.2.1.4	Convergencia de la integral del índice de desempeño	36
3.2.1.5	Verificación de la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman	37
3.2.2	Control óptimo no lineal usando funcionales de L-K de tipo reducido	37
3.2.2.1	Condiciones suficientes para que un funcional de tipo reducido sea una FCLK	38
3.2.2.2	Continuidad de la ley de control (3.31)	41
3.3	Control subóptimo en tiempo discreto para sistemas no lineales afines con retardo en el estado y en el control	42
3.3.1	Procedimiento de optimización de horizonte finito	43
3.4	Conclusiones	46
4	Estrategias de control para sistemas lineales con retardos	49
4.1	Introducción.....	49
4.2	Control con costo garantizado para sistemas lineales con retardo en el estado e incertidumbre en la entrada.....	49
4.2.1	Control con costo garantizado	51
4.2.1.1	Cota superior garantizada del índice de desempeño	53
4.2.2	Ejemplos	53
4.3	Análisis de estabilidad robusta de un control predictor dinámico para sistemas con retardos en la entrada y el estado	59
4.3.1	Incertidumbre en los parámetros	60
4.3.1.1	Cotas de estabilidad robusta para incertidumbre en los parámetros	61
4.3.2	Incertidumbre en el retardo del estado o en el de la entrada	63
4.3.2.1	Cotas de estabilidad robusta para la incertidumbre en el retardo del estado	63
4.3.2.2	Cotas de estabilidad robusta de la incertidumbre en el retardo de la entrada	65
4.3.3	Incertidumbre en los retardos del estado y de la entrada	66
4.3.3.1	Cotas de estabilidad robusta de la incertidumbre en el retardo de estado y de la entrada	66
4.4	Conclusiones	68
5	Resultados experimentales	69
5.1	Introducción.....	69

5.2	Sintonización del controlador PID	69
5.2.1	Sintonización robusta del controlador PID	70
5.3	Implementación de la ley de control óptimo no lineal con funcionales de tipo completo	72
5.3.1	Experimentos de estabilización	72
5.3.2	Experimentos de robustez	75
5.3.3	Comparación con un control óptimo lineal	77
5.3.4	Comparación con un control por linealización exacta	79
5.4	Implementación de la ley de control óptimo no lineal con funcionales de tipo reducido.....	81
5.5	Implementación del control subóptimo en tiempo discreto.....	83
5.6	Implementación del control predictor dinámico.....	86
5.7	Análisis de la pérdida de nutrientes	87
5.7.1	Selección y preparación del jitomate	88
5.7.2	Determinación de la humedad	88
5.7.3	Desempeño del sistema en lazo cerrado y consumo de energía	90
5.8	Conclusiones	92
6	Conclusiones y perspectivas	95
6.1	Principales contribuciones de la tesis.....	95
6.2	Trabajo futuro.....	96
A	Resultados teóricos útiles	107
A.1	Sistemas con retardos	107
A.1.1	Concepto de estado y condición inicial	107
A.1.2	Conceptos de estabilidad	108
A.1.3	Sistemas lineales con retardo puntual en el estado	108
A.1.4	Funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo	110
A.1.5	Construcción de la matriz de Lyapunov usando el método semi-analítico	111
A.2	Rediseño de Lyapunov	113
A.3	Complemento de Schur	114
A.4	Control óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada	114
A.4.1	Control óptimo lineal	114
A.4.2	Implementación numérica de la ley de control óptima, caso escalar . .	115
A.4.3	Análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado	116
A.4.4	Análisis de estabilidad ante dinámicas no modeladas	119
A.5	Tipos de deshidratadores atmosféricos	124
A.6	Indicadores de calidad en el jitomate.....	125
A.7	Características del jitomate.....	125
A.8	Curvas de la pérdida de humedad a 70°C.....	127

Notación

x_t	Segmento de trayectoria de un sistema con retardos, $x_t = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$
$\ \varphi\ _h$	Norma uniforme, $\ \varphi\ _h = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} \ \varphi(\theta)\ $
0_h	Función trivial, $0_h(\theta) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in [-h, 0]$
\mathbb{R}^n	Espacio Euclidiano n – dimensional
\mathcal{C}	Espacio $\mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ de funciones continuas en \mathbb{R}^n sobre el intervalo $[-h, 0]$
$\mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones continuas a tramos en \mathbb{R}^n sobre el intervalo $[-h, 0]$
$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana para vectores y norma inducida para matrices
$\left. \frac{dv(x_t)}{dt} \right _{(*)}$	Derivada de la funcional $v(x_t)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (*)
\mathcal{U}	Conjunto de valores admisibles de la variable de control u , las cuales son funciones continuas a tramos
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espacio de matrices con coeficientes reales de dimensión $n \times n$
$\min_u(f(t, u))$	Mínimo de $f(t, u)$ con respecto a u
\mathcal{K}	Clase de funciones escalares continuas, se dice que α pertenece a esta clase si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$
\mathcal{K}_∞	Se dice que α pertenece a esta clase si pertenece a la clase \mathcal{K} y además $\alpha(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow \infty$
u^*	Valor óptimo de u bajo un criterio predefinido
$0_{m \times m}$	Bloque de ceros de m filas y m columnas
I_n	Matriz identidad de dimensión $n \times n$
$B^T \otimes A$	Producto de Kronecker entre las matrices A y B
$\lambda_{\min}(A)$	Mínimo valor propio de la matriz A
$\lambda_{\max}(A)$	Máximo valor propio de la matriz A
A^T	Matriz transpuesta de la matriz A
$A > 0$	Matriz definida positiva
A^{-1}	Matriz inversa de la matriz A
$\sigma(A)$	Espectro de la matriz A

Resumen

En este trabajo se desarrollan estrategias de control encaminadas a la optimización de una clase de sistemas no lineales con retardos, dicha optimización involucra el ahorro de energía y la compensación de los retardos. Para el caso de ahorro de energía para sistemas con retardo en el estado se obtienen dos controladores óptimos mediante el enfoque de optimalidad inversa, uno con funcionales de tipo reducido y otro con funcionales de tipo completo. También, con estas funcionales se sintetiza un controlador por costo garantizado que cancela el efecto de incertidumbre en la entrada de control. Cuando se consideran retardos en la entrada y en el estado se desarrolla una secuencia de control subóptimo no lineal con lo cual se garantiza que se alcanza una aproximación al mínimo de un índice de desempeño cuadrático. Para el caso de compensación del retardo presente en el sistema, se desarrolla un análisis de estabilidad robusta de un control predictor dinámico ante incertidumbre en los parámetros o los retardos.

Con estas estrategias se busca reducir el consumo de potencia en un sistema que emula a un deshidratador atmosférico de jitomate, en comparación con el consumo con un controlador PID industrial, además de mejorar el desempeño en cuanto a sobreimpulso, saturación del actuador y a la reducción de la pérdida de nutrientes en el producto. Los resultados experimentales demuestran la reducción del gasto energético y en consecuencia los beneficios económicos si se utilizaran estos controles en procesos industriales.

Abstract

In this work, we develop control strategies leading to the optimization of a class of nonlinear time delay systems, this optimization involves energy savings and delays compensation. For the case of energy savings for systems with state delay, we obtain two optimal controllers by using the inverse optimality approach, one with reduced type functionals and the other with complete type functionals. With these functionals, we synthesize a controller by using the guaranteed cost control strategy, which cancels the effect of the uncertainty in the control input. Moreover, when we consider both input and state delays, we find a nonlinear suboptimal control sequence which guarantees that an approximation to the minimum value of a quadratic cost function is reached. For the case of delay compensation, we analyze the robust stability of a dynamic predictor control in presence of uncertainty in the matrix parameters or the delays.

These strategies allows to reduce the power consumption of a system that emulates a tomato atmospheric dehydrator, compared to consumption with an industrial PID controller, to improve performance in terms of overshoot, actuator saturation and to reduce the loss of nutrients in the product. Experimental results demonstrate the reduction of energy consumption and therefore economic benefits if these controls were used in industrial processes.

1

Introducción general

El presente trabajo es motivado por el estudio teórico y práctico de la optimización de sistemas con retardos, para ello se sintetizan leyes de control que minimizan el consumo energético y que compensan los retardos. El estudio de la aplicación de dichas estrategias de control se realiza en una planta deshidratadora.

En este capítulo se presenta una breve introducción a los procesos de deshidratación, en particular se trata al deshidratador atmosférico con un modelo dinámico con retardos en el tiempo y se le aplican diferentes técnicas de control en este trabajo. También se hace una revisión de los trabajos existentes relacionados al tema, la motivación, el planteamiento del problema, los objetivos y se finaliza con las publicaciones producto de esta investigación.

1.1 Sistemas de deshidratación de alimentos

El deshidratado de frutas y hortalizas consiste en la extracción del agua contenida en los alimentos por medios físicos hasta que el nivel de agua se haya reducido típicamente por debajo del 10% [101], dependiendo del producto a deshidratar. Con el deshidratado se aumenta la vida de anaquel de los alimentos, se reduce su peso, su volumen y en consecuencia los costos de transporte y almacenamiento [101].

El deshidratado se realiza empleando diferentes procesos dependiendo del tipo de alimento y de las características finales del producto. Algunas de estas técnicas son: la liofilización que consiste en congelar el alimento y después evaporar el agua, con esta técnica se obtienen productos secos de alta calidad pero de alto costo; en la deshidratación osmótica se sumerge al alimento en una solución de cloruro de sodio; el secado al sol se limita a climas calurosos y humedades relativas bajas (40 – 60%) con vientos fuertes, tiene la ventaja de ser sencillo y de bajo costo, sin embargo requiere de largos tiempos de secado, lo cual puede generar consecuencias adversas en la calidad del producto, ya que se encuentra expuesto al polvo, viento, insectos, roedores y otros animales [99]; **la deshidratación atmosférica** consiste en pasar aire caliente sobre el alimento a secar.

El secado industrial se lleva a cabo por medio de deshidratación atmosférica en lotes o en procesos continuos como el secador de túnel, el secador rotatorio, secadores de tambor, el secador de charolas, entre otros. Estos procesos operan con un flujo de aire caliente

($50 - 80^{\circ}C$), alrededor del 10 al 20% del aire que pasa sobre las charolas es nuevo y el resto es aire reciclado [28]. El funcionamiento satisfactorio de los secadores de charolas depende de la conservación de una temperatura constante y una velocidad de aire uniforme ($1 - 10$ m/s) sobre todo el material que se esté secando.

En este trabajo se investiga cómo algunas técnicas de control óptimo, aplicadas a la fuente de calor de un prototipo de deshidratador atmosférico, permiten reducir el gasto energético y cómo se ve afectada la calidad de jitomate. El licopeno, el ácido ascórbico (vitamina C) y los fenoles totales están íntimamente relacionados con la calidad del jitomate y son considerados indicadores de calidad [102]. Cuando se lleva a cabo el procesamiento térmico del jitomate, estos componentes se ven afectados, modificando en consecuencia su calidad, valor nutritivo y comercial. Por lo tanto, se vuelve importante que al procesar este alimento, se tome en cuenta la conservación o disminución de las pérdidas de estos compuestos.

En esta sección se han presentado los aspectos generales del proceso de deshidratación y a continuación se presenta una revisión de trabajos en los cuales se contempla la importancia del control y en especial del control óptimo aplicado a este tipo de sistemas de secado.

1.2 Revisión bibliográfica de resultados existentes

1.2.1 El problema de optimización en procesos de secado

La tecnología del secado es una de las mayores consumidoras de energía ya que es utilizada en muchas industrias como: biotecnología, agricultura, alimentos, textiles, minerales, farmacéutica, pulpa y papel, polímeros, madera y otros [17]. El mayor costo de los secadores no es la inversión inicial sino es la operación diaria, en donde el control es muy importante para ahorrar energía y obtener la calidad deseada en los productos [17].

El objetivo más importante durante el proceso consiste en ajustar algunas de las condiciones de secado hasta alcanzar el desempeño final requerido [9]. En algunos casos se incrementa el rendimiento mientras se obtienen propiedades finales específicas como tamaño, color, porosidad, textura y resistencia [85]. También se busca disminuir el costo de producción debido al alto consumo energético, costo de mantenimiento y tiempo de secado. En lo que se refiere al consumo de energía, el secado es una operación intensiva que representa del 10% al 25% de la industria en países desarrollados [78]. Además, la mayoría de los secadores industriales opera con baja eficiencia energética, desde un 10% hasta un 60% (esta tasa se define como la diferencia entre la energía teórica requerida para el secado y la energía real consumida) [78]. Por lo tanto, debido al incremento en los costos de la energía, estos desempeños han sido mejorados usando herramientas de control, por ejemplo en [97] se presenta un proceso de optimización en un secador de granos, mediante la sintonización óptima del flujo de aire y de la potencia del calentador [98], también al aplicar un controlador óptimo se obtuvo una disminución en el tiempo de secado, el consumo de combustible y el costo total de producción [72]. Estos ejemplos ilustran las mejoras en el desempeño de los lazos de control de sistemas de secado al aplicar controles eficientes. Sin embargo, más del 95% de los lazos de control son regulados con controladores del tipo Proporcional Integral Derivativo (PID) y un 20% usa la sintonización de fábrica [3], sin ningún tipo de optimización.

El problema de optimización de energía en un secador de bandeja rotatoria o estática

con un túnel de viento involucra el uso de perfiles de temperatura del aire caliente y su velocidad, lo cual podría afectar la calidad del producto [71]. En este tipo de procesos, aparece un retardo en el tiempo debido a que la fuente de calor se localiza a una cierta distancia del producto, esto causa que la medición de la temperatura en la vecindad alrededor del producto no sea la misma que la temperatura del aire cerca de la fuente de calor. Este retardo puede modelarse como una desviación en el argumento de la entrada de control. La compensación de los retardos tanto en la entrada como en el estado es muy importante porque evita respuestas no deseadas como oscilaciones o inestabilidad. Una de las técnicas más populares para compensar el retardo en la entrada en procesos de alimentos [30] y en general en la industria es el predictor de Smith [111], que se usa con algunos controladores PID. Otras técnicas más avanzadas para compensar el retardo en la entrada se basan en el conocimiento de la solución analítica del modelo lineal de la planta [1]. Recientemente, en [94], [102] y [109] se presentaron resultados experimentales sobre un proceso de temperatura, en donde las técnicas de compensación del retardo se combinan con el control óptimo para sistemas lineales [1], [61].

La estrategia de control óptimo podría ser la mejor opción para controlar la temperatura del aire caliente en una deshidratadora atmosférica [30], sin embargo la presencia del retardo en la entrada y la necesidad de incorporar nuevas tecnologías en los lazos de control para implementar controles avanzados dificulta su aplicación en la industria. Por esta razón, existen más trabajos reportados sobre la optimización y retención de nutrientes en frutas y vegetales secos, por ejemplo en [39] se presenta la optimización de un proceso de deshidratación de brócoli y en [82] de arroz. En estos trabajos se combina el modelo de degradación de algunas características del producto (vitamina C) con el algoritmo de optimización para determinar las condiciones de secado. En [12] se estudian los efectos de diferentes perfiles de temperatura de un secador de túnel en la calidad del plátano y guayaba, los resultados experimentales muestran que cuando se emplea un cambio adecuado en la temperatura del aire (considerando tiempo y temperaturas iniciales) es posible reducir significativamente el tiempo de secado, para alcanzar la humedad deseada y una mejora en el color del producto.

En [102] se presenta una de las primeras investigaciones que analiza cuantitativamente los efectos en la calidad del jitomate deshidratado al aplicar controladores con compensación del retardo y técnicas de optimización para la temperatura del aire, los resultados obtenidos muestran la reducción del gasto energético y la pérdida de nutrientes (vitamina C, licopeno y fenoles) en comparación con los obtenidos al aplicar un controlador PID industrial.

En la presente investigación se diseñan controladores que optimizan el consumo energético en un proceso de deshidratación de jitomate. Para representar al sistema se consideran diferentes modelos que involucran retardos en el tiempo, primero se calcula de forma experimental, mediante la respuesta al escalón, un modelo lineal con retardo puntual en la entrada, el cual está presente debido a la distancia que existe entre la fuente de calor y el sensor que mide la temperatura del flujo de aire. La deshidratadora también cuenta con una tubería que recircula el aire caliente para reutilizarlo y esto induce un retardo en el estado.

La presencia de los retardos representa un desafío para nuestro análisis. A continuación se recuerdan los resultados útiles existentes relacionadas con los sistemas con retardos y las estrategias de control óptimo, optimalidad inversa, control por costo garantizado y control predictivo.

1.2.2 Sistemas con retardos

Los retardos se presentan en forma natural en los sistemas dinámicos como resultado de fenómenos asociados con el transporte de información, de materia o de energía, también están relacionados con el tiempo que toma la medición y procesamiento de las variables. Ejemplos de este tipo de sistemas son los procesos químicos con tuberías de recirculación de aire o de fluidos, sistemas de bandas transportadoras, de teleoperación, de temperatura y algunos sistemas biológicos o de crecimiento de población. Los sistemas con retardo se modelan matemáticamente como ecuaciones diferenciales en diferencias o ecuaciones diferenciales funcionales como en los trabajos de N. N. Krasovskii [56], [57], R. Bellman y K. L. Cooke [7], J. K. Hale [29], V. Kolmanovskii y A. Myshkis [53], entre otros.

Para el desarrollo de este trabajo consideramos el estudio de estabilidad de los sistemas lineales y no lineales con retardos en el marco del enfoque temporal con el método de Lyapunov-Krasovskii [56], los cuales generalizan los resultados de Lyapunov al caso con retardos por medio del empleo de funcionales, las cuales pueden ser de tipo reducido, con derivada prescrita y de tipo completo. Las funcionales con derivada prescrita se construyen a partir de la estructura de la solución del sistema con retardos, siguiendo el mismo procedimiento que en el caso sin retardo, primero se selecciona una derivada y después se calcula la funcional cuya derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema coincide con la seleccionada. Algunas funcionales cuadráticas para sistemas con un retardo se propusieron en los trabajos de M. Y. Repin [91], R. Datko [15] y E. F. Infante y W. B. Castelan [36], sin embargo, W. Huang [35] mostró que esas funcionales sólo admiten una cota inferior cúbica local, por lo que no se satisface la primera condición del Teorema de Krasovskii [56], [57]. Entonces, V. L. Kharitonov y A. P. Zhabko [46] modificaron la funcional de derivada prescrita, de manera que su derivada incluye términos que dependen de todo el estado de un sistema con retardos. A estas funcionales se les llama de tipo completo y esta teoría provee resultados constructivos que garantizan que siempre que el sistema lineal sea estable, existe una funcional que satisface una cota cuadrática inferior. En este enfoque, al igual que en el caso de sistemas libres de retardos, la funcional depende del análogo de la matriz de Lyapunov. Si el sistema es estable, la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos es la única solución de tres propiedades (dinámica, algebraica y simétrica) [47], [48]. Las funcionales de tipo completo se emplean para el análisis de estabilidad y robustez [46], [104], [105], estimados exponenciales [76] y diseño de controladores [49], [50], [105], [106], [107].

Distintas estrategias para diseñar controladores para sistemas con retardos se han propuesto [81], [92] pero el problema aún es complejo. En la siguiente sección se recapitulan los principales trabajos sobre las estrategias de control que se han desarrollado para sistemas con retardos y que sirven de punto de partida para nuestros resultados.

1.2.3 Estrategias de control para sistemas con retardos

En el problema del **Control Óptimo** se busca a la ley de control que minimiza a un índice de desempeño dado. Uno de los primeros trabajos que tratan con este problema, para sistemas con retardos, es el Principio Máximo [87], propuesto por G. L. Kharatisvili, el cual consiste principalmente en resolver de manera numérica a un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera, cuya solución describe explícitamente al controlador y provee

condiciones necesarias para optimalidad [44], [45]. Otra manera de atacar este problema es mediante la Programación Dinámica-Carathéodory [1] (basada en [8]), en donde se emplea el segundo método de Lyapunov y se obtiene un controlador con realimentación de estado y para el caso de sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo en la entrada se presenta el control óptimo. En la contribución de N. N. Krasovskii [58], [59], se consideran sistemas lineales con retardo en el estado, se propone una funcional de Lyapunov cuadrática, que depende del estado del sistema, y se obtiene la ecuación del tipo de Bellman, a partir de la cual se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (análogas a la ecuación de Riccati para sistemas lineales sin retardos [41]) con condiciones de frontera, cuya solución caracteriza explícitamente al controlador óptimo. En el trabajo de J. D. Kramer [55] se propone atacar el problema de manera distinta a la discutida en [58], se trata el problema del regulador cuadrático óptimo, para sistemas lineales (caso continuo y discreto) con retardo en el estado y con perturbaciones, mediante el uso de multiplicadores de Lagrange, sin embargo las ecuaciones que describen al controlador no son sencillas ni explícitas. Posteriormente, los resultados dados en [58] fueron extendidos en los trabajos de D. Ross [96], [95], H. Khusner [62], Y. Alekal [1], D. Eller [18], Z. Rekasius [90], A. V. Kim [51] y V. B. Kolmanovskii [54]. En estos trabajos se proponen métodos para construir la funcional de Bellman para sistemas lineales con retardo puntual y distribuido en el estado [62], [95], se analizan condiciones bajo las cuales la ecuación del tipo de Riccati obtenida posee al menos una solución [62] e incluso se proponen algunos métodos para construirla [51], [95], en casos particulares. Sin embargo, este problema aún está abierto para el caso de sistemas no lineales.

La dificultad de estos métodos consiste en encontrar la solución a la ecuación del tipo de Bellman, es decir, conocer la funcional de Lyapunov-Krasovskii (L-K) que satisface la ecuación Hamilton Jacobi Bellman (HJB). En el caso del problema del control óptimo para sistemas no lineales libres de retardo, este problema se evita mediante el enfoque de **Optimalidad Inversa**, propuesto por R. A. Freeman y P. V. Kokotovic [22], en el cual se supone la existencia de una Función de Control de Lyapunov (FCL) [113], de manera que si la FCL es conocida, puede usarse como una función de Bellman para obtener de manera explícita al control óptimo y no se resuelve la ecuación HJB. En este enfoque se define al controlador óptimo y se busca al índice de desempeño que minimiza, ambos dependen de la derivada de la FCL, por lo que si ésta existe, el problema está resuelto. Sin embargo, encontrar una FCL para un sistema no lineal no es una tarea trivial y mucho menos si se trata de un sistema no lineal con retardos.

El problema de optimalidad inversa para el caso de sistemas lineales con retardo en la entrada ha sido estudiado por M. Krstic [60], quién presenta una ley de control con realimentación obtenida mediante funcionales de L-K con derivada prescrita. En el trabajo de N. O. Sedova [110] se supone la existencia de una Función de Control de Lyapunov-Krasovskii (FCLK) para sistemas no lineales afines con retardo en el estado y se resuelve el problema de optimalidad inversa, pero solo se construyen leyes de control de forma explícita para casos particulares. Las FCLK y las Funcionales de Control de Lyapunov-Razumikhin también se utilizan para resolver el problema de estabilización de sistemas no lineales afines con retardo en el estado y perturbaciones, como en los trabajos de P. Pepe [84] y M. Jankovic [37], [38].

Por otro lado, las funcionales de tipo completo, cuya forma es conocida si el sistema nominal lineal es estable, se han utilizado para sintetizar controladores. En el trabajo de O. Santos, S. Mondié y V. L. Kharitonov [103], [107], se extiende el procedimiento iterativo para

la síntesis de leyes de control subóptimo para sistemas lineales libres de retardo, propuesto por E. M. Vaisbord [119], al caso de sistemas lineales con retardos puntuales y distribuidos en el estado. Este procedimiento se basa en la idea de una construcción aproximada de la funcional cuadrática de Bellman. En cada iteración se genera una nueva ley de control óptima que reduce el valor del índice de desempeño cuadrático.

En este trabajo se resuelve el problema de optimalidad inversa para una clase de sistemas con retardos con una parte nominal lineal estable con retardo en el estado y una parte no lineal con forma polinomial que satisface localmente una condición de Lipschitz. En el enfoque de optimalidad inversa se conoce a la ley de control óptima, ésta depende de los términos de la derivada de la FCLK para el sistema en consideración y se busca al índice de desempeño que minimiza. La funcional de tipo completo es la herramienta que utilizamos, primero se buscan las condiciones bajo las cuales es una FCLK para esta clase de sistemas y posteriormente se extiende el enfoque de optimalidad inversa al caso con retardos, encontrando al índice de desempeño que junto con la funcional de tipo completo (que en este caso es la funcional de Bellman) satisfacen la ecuación HJB.

La expresión matemática del controlador óptimo obtenido mediante optimalidad inversa posee términos integrales, los cuales deben ser aproximados mediante algún método de cuadratura para poder ser implementados en un equipo de computo y posteriormente ser aplicados al actuador de la planta. Sin embargo, la aproximación de las integrales puede evitarse si se utiliza una técnica de control en tiempo discreto. Además es posible aproximar mejor el modelo considerando ambos retardos puntuales, en la entrada y en el estado.

En el desarrollo de esta tesis, también se presenta la síntesis de un **Control Subóptimo** en tiempo discreto para sistemas no lineales con retardos en el estado y en la entrada. La secuencia de controles se obtiene mediante un proceso de optimización iterativo, basado en el enfoque de programación dinámica [8]. En cada iteración se realiza un proceso de minimización y se garantiza que se alcanza una aproximación del mínimo de un índice de desempeño cuadrático de horizonte finito.

Una diferencia fundamental entre el control óptimo obtenido mediante optimalidad inversa y el control subóptimo en tiempo discreto radica en que para el primero no se conoce la relación directa entre el consumo energético del control y la convergencia del estado, mientras que con el segundo esta relación es más clara ya que el índice de desempeño tiene matrices de penalización.

Existe otra técnica conocida como **Control con Costo Garantizado**, con la cual se obtienen leyes de control para sistemas lineales con retardo en el estado e incertidumbres en los parámetros. En esta estrategia se usan funcionales de L-K de tipo reducido, como en los trabajos de E. K. Boukas, [10], S. H. Esfahani, [20], Y. S. Lee [65] y W. H. Kwon [63], [64]. La ventaja de este método es que no es necesario resolver ecuaciones diferenciales en diferencias como en Programación Dinámica, ni ecuaciones con condiciones de frontera como en el Principio Máximo, sino que el problema se reduce a resolver una desigualdad matricial lineal (LMI) cuya solución caracteriza al controlador. A pesar de estas bondades no se tiene garantía de que la solución subóptima existe y/o esté suficientemente cercana a la óptima. En el trabajo de O. Santos y S. Mondié [108] se aborda el problema del control por costo garantizado con funcionales de tipo completo y se presenta el índice de desempeño y la ley de control óptima para sistemas lineales con retardo en el estado. Posteriormente, en [106] se diseña una ley de control que garantiza una cota superior del índice de desempeño para

sistemas lineales con retardos puntuales y distribuidos en el estado y con perturbaciones estructuradas. El enfoque se basa en la construcción de funcionales de tipo completo y el límite superior del índice de desempeño se reduce repitiendo el proceso de minimización de la ecuación del tipo de Bellman obtenida en el paso previo. También, en [105] se aborda el tema del control por costo garantizado y la estabilidad robusta de sistemas lineales y una clase de sistemas no lineales, ambos casos con retardo en el estado.

Las funcionales de tipo completo también se utilizan para diseñar leyes de **control de tipo predictivo** que compensan los retardos y garantizan estabilidad exponencial del sistema en lazo cerrado. En los recientes resultados de V. L. Kharitonov [49], se considera el caso de sistemas lineales con retardos puntuales en el estado y en el control, los cuales son compensados mediante un control que depende de valores futuros del estado, los cuales se calculan a partir de la solución de la ecuación diferencial que representa al sistema. La generalización de esas ideas condujo al desarrollo del enfoque del control predictor dinámico [50], en el cual el vector de estado se extiende, es decir que incluye a las variables de estado y a las variables de control, con lo que la estabilidad del sistema con el vector de estado extendido implica la estabilidad del sistema original en lazo cerrado y además tiene la ventaja de que permanece exponencialmente estable cuando los términos integrales de la ley de control se aproximan mediante sumatorias finitas del tipo de Riemann, lo cual podría ser visto como una propiedad de robustez.

En esta sección se han mencionado las diversas herramientas de control que nos ayudan a optimizar el desempeño de sistemas con retardos, ya sea con modelos lineales o no lineales. A continuación se presenta la motivación del trabajo.

1.3 Motivación

Un problema en la industria, en procesos de deshidratación de alimentos, es el control de temperatura porque es necesario optimizar su desempeño y reducir el consumo energético. En este tipo de procesos la distancia que existe entre la fuente de calor y el producto induce un retardo en el control y la recirculación de aire caliente produce un retardo en el estado. Además, como la velocidad de circulación del aire debe ser relativamente baja, la eficiencia del controlador debe ser alta. Esto es una motivación para la optimización del sistema mediante un control que compensa el retardo inherente en la planta.

La obtención de controladores óptimos para sistemas con retardos en el estado ha sido objeto de estudio a lo largo de las últimas décadas, sin embargo la dificultad de resolver las ecuaciones del tipo HJB para sistemas con retardos y de proponer la funcional de Bellman adecuada, son los principales problemas en esta área. Para sistemas no lineales libres de retardo, este problema es evitado mediante el enfoque conocido como optimalidad inversa mediante el uso de Funciones de Control Lyapunov y es posible obtener el control óptimo sin resolver la ecuación de Bellman. Entonces parece natural preguntarnos si con el uso de funcionales de tipo completo es posible obtener el control óptimo para una clase de sistemas no lineales con retardos.

También, es de interés medir la eficiencia de los controladores obtenidos en este trabajo, mediante el análisis de la relación que existe entre las leyes de control óptimo, usadas para controlar la temperatura en procesos de deshidratado, y la calidad del jitomate.

1.4 Planteamiento del problema

Para plantear el problema de forma adecuada, primero se recuerdan el enfoque de optimalidad inversa para el caso de sistemas libres de retardos [22] y la definición de Función de Control de Lyapunov-Krasovskii. Estos resultados y conceptos marcan la pauta para el desarrollo de la sección 3.2.

1.4.1 Optimalidad inversa para sistemas no lineales libres de retardo

Sea el sistema no lineal afín en la entrada de control de la forma

$$\dot{x}(t) = f_0(x) + f_1(x)u, \quad (1.1)$$

en donde $f_0(x) \in \mathbb{R}^n$ y $f_1(x) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ son funciones suaves y $f_0(0) = 0$ cuando $u \equiv 0$. Se supone que las entradas de control están restringidas a tomar valores en algún subconjunto de funciones continuas a tramos de \mathbb{R}^m , tal que $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$.

En el enfoque de optimalidad inversa [22] se supone la existencia de una FCL para el sistema (1.1) por lo que a continuación se presenta su definición.

Definición 1.1 [68] *Se dice que una función suave, definida positiva y propia $\tilde{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una Función de Control de Lyapunov para el sistema (1.1) (con respecto a las variables de control tomadas en \mathcal{U}) si*

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ L_{f_0} \tilde{V} + L_{f_1} \tilde{V} u \right\} < 0, \quad \forall x \neq 0,$$

en donde $L_{f_0} \tilde{V} = \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right)^T f_0$ y $L_{f_1} \tilde{V} = \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right)^T f_1$.

La derivada de $\tilde{V}(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (1.1) está dada por

$$\left. \frac{d\tilde{V}(x)}{dt} \right|_{(1.1)} = \psi_0(x) + \psi_1^T(x)u < 0,$$

en donde $\psi_0 \in \mathbb{R}$, $\psi_1 \in \mathbb{R}^m$ y se definen como $\psi_0(x) = \nabla_x \tilde{V}(x) \cdot f_0(x)$ y $\psi_1(x) = \left[\nabla_x \tilde{V}(x)^T f_1(x) \right]^T$.

Como $\tilde{V}(x)$ es una FCL, si la función $\psi_1(x) = 0$ cuando $x \neq 0$, siempre se cumple que $\psi_0(x) < 0$, lo cual garantiza la estabilidad asintótica del sistema (1.1) en lazo abierto. Se definen las siguientes funciones definidas positivas, las cuales dependen de la derivada de $\tilde{V}(x)$

$$q(x) \triangleq \psi_1^T(x)\psi_1(x) + \sqrt{\psi_0(x)^2 + [\psi_1^T(x)\psi_1(x)]^2},$$

$$r(x) \triangleq \frac{\frac{1}{4}\psi_1^T(x)\psi_1(x)}{\psi_1^T(x)\psi_1(x) + \psi_0(x)^2 + \sqrt{\psi_0(x)^2 + [\psi_1^T(x)\psi_1(x)]^2}}$$

y se considera el índice de desempeño

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} f_m(x, u) dt, \quad (1.2)$$

en donde $f_m(x, u) = q(x) + r(x)u^T u$ es una función estrictamente positiva. La ecuación HJB asociada con el sistema (1.1) y con el índice de desempeño (1.2) es

$$\min_u \left(\left. \frac{d\tilde{V}(x)}{dt} \right|_{(1.1)} + f_m(x, u) \right) = 0. \quad (1.3)$$

La función $\tilde{V}(x)$ satisface la ecuación (1.3), lo cual es fácil verificar, por lo tanto es una función de Bellman y el control óptimo

$$u^* = -\frac{1}{2} \frac{\psi_1(x^*)}{r(x^*)}$$

se obtiene derivando (1.3) con respecto a u [52].

En la siguiente sección se presenta la definición de FCLK para el caso de sistemas con retardos con múltiples entradas, de manera similar a la presentada en [37].

1.4.2 Función de Control de Lyapunov-Krasovskii

Sea el sistema no lineal con retardo afín en la entrada de control de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x_t) + g(x_t)u, \quad (1.4)$$

en donde las funcionales suaves $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : C \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ son acotadas sobre conjuntos acotados y $f(0_h) = 0$ cuando $u \equiv 0$. El control $u \in \mathbb{R}^m$ es una función continua a tramos. La condición inicial es la función $x_0 = \varphi$, $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definición 1.2 [37] Una funcional suave $\bar{V}(x_t) : C \rightarrow \mathbb{R}^+$ es llamada una Función de Control de Lyapunov-Krasovskii (FCLK) para el sistema (1.4) si existen funciones α , $\alpha(s) > 0$ para $s > 0$ y $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{K}_\infty$ tales que $\beta_1(\|\varphi(0)\|) \leq \bar{V}(\varphi) \leq \beta_2(\|\varphi\|)$ y

$$L_g \bar{V}(\varphi) = 0 \implies L_f \bar{V}(\varphi) \leq -\alpha(\|\varphi(0)\|),$$

para todas las funciones continuas a tramos $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

En esta definición $L_f \bar{V}(x_t) = \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^T f$, y $L_g \bar{V}(x_t) = \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^T g$.

Observación 1.1 La Definición 1.2 no puede restringirse a las trayectorias del sistema (1.4). Antes de elegir a la entrada de control u , las trayectorias no están definidas [37]. Una vez elegido el control u , la derivada de $\bar{V}(x_t)$ a lo largo de las trayectorias de (1.4) satisface

$$L_f \bar{V} + L_g \bar{V} u < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Si $\bar{V}(x_t)$ es una FCLK para el sistema (1.4) es posible extender el enfoque de optimalidad inversa para sistemas libres de retardos, presentado en la sección anterior, y sintetizar la ley de control óptimo no lineal u , la cual está bien definida ya que depende de la derivada de $\bar{V}(x_t)$. La continuidad de la ley de control en $x(t) = 0$ esta garantizada si la FCLK satisface la propiedad del “pequeño control” (“small control property”, en inglés), la cual se define a continuación.

Definición 1.3 [37] *La ley de control u es continua en $x(t) = 0$ si la FCLK $\bar{V}(x_t)$ satisface la propiedad del pequeño control: Para cada $\tilde{\varepsilon} > 0$ se puede encontrar $\delta(\tilde{\varepsilon}) > 0$ tal que si $0 < \|x_t\| < \delta$, existe u la cual satisface $L_f \bar{V}(x_t) + (L_g \bar{V}(x_t))^T u < 0$ y $\|u\| < \tilde{\varepsilon}$.*

A continuación, después del recordatorio se presenta el problema.

Problema

La optimización de energía en un sistema de deshidratación de jitomate es la problemática que se aborda en este trabajo, para ello se aplican distintas técnicas de control para sistemas con retardos. Se resuelven los siguientes problemas:

1. La dificultad del enfoque de optimalidad inversa para el caso sin retardo radica en el hecho de suponer la existencia de una FCL, por lo que este trabajo está dedicado a obtener condiciones suficientes bajo las cuales una funcional de tipo completo es una FCLK para sistemas no lineales con retardo de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + F(x(t), x(t-h)) + B(x(t), x(t-h))u(t), \quad (1.5)$$

con una parte lineal estable y una parte no lineal que satisface ciertas condiciones. Posteriormente, se obtiene explícitamente el controlador óptimo no lineal que estabiliza al sistema en lazo cerrado.

2. El sistema de deshidratación tiene diferentes zonas de operación, por lo cual puede modelarse como

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + B[u + \delta(t, x_t, u)],$$

en donde δ es la incertidumbre que entra a través del mismo canal que la señal de control porque no se conoce con exactitud la relación entre la transferencia de calor y el voltaje en el actuador. El problema consiste en sintetizar un controlador que cancele el efecto de δ y estabilice al sistema en lazo cerrado.

3. Los controladores obtenidos para sistemas en tiempo continuo tienen términos integrales que deben ser aproximados para poder ser implementados. Para evitar errores de aproximación, que pudieran llevar a inestabilidad en el sistema en lazo cerrado, se aborda el diseño de un controlador subóptimo para sistemas no lineales en tiempo discreto con retardos en el estado y en el control de la forma

$$x_{k+1} = f_0(x_k, x_{k-M_1}) + f_1(x_k, x_{k-M_1})u_{k-M_2}.$$

-
4. El análisis de robustez para sistemas con retardos con incertidumbre en los parámetros o en los retardos de la forma

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta_{A_0})x(t) + (A_1 + \Delta_{A_1})x(t - h) + (B + \Delta_B)u(t - \tau)$$

y

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h - \Delta_h) + Bu(t - \tau - \Delta_\tau).$$

1.5 Objetivos

Objetivo general

El objetivo general de esta tesis consiste en optimizar una clase de sistemas no lineales con retardo, mediante la síntesis de controladores óptimos no lineales obtenidos mediante el enfoque de optimalidad inversa y otras técnicas de control, como el control por costo garantizado y un control subóptimo en tiempo discreto.

Objetivos teóricos

1. Encontrar las condiciones suficientes bajo las cuales una funcional de tipo completo es una FCLK para la clase de sistemas no lineales con retardo (1.5).
2. Extender el enfoque de la optimalidad inversa para sistemas no lineales libres de retardo a sistemas con retardo y sintetizar la ley de control óptima no lineal.
3. Sintetizar una ley de control óptima no lineal mediante el enfoque de optimalidad inversa considerando a una funcional de tipo reducido como la FCLK.
4. Sintetizar un control por costo garantizado mediante el uso de funcionales de tipo completo y el método del rediseño de Lyapunov para sistemas libres de retardos.
5. Sintetizar un controlador subóptimo en tiempo discreto para un sistema no lineal con retardo en la entrada y en el estado.
6. Analizar la robustez de sistemas lineales con retardo en la entrada y en el estado ante incertidumbre en los parámetros o en los retardos.

Objetivos prácticos

1. Implementar los controladores antes mencionados para controlar la temperatura de un prototipo de deshidratación de jitomate.
2. Cuantificar el ahorro energético obtenido al aplicar los controladores diseñados en esta tesis y comparar los resultados con los obtenidos con un controlador industrial PID.

-
3. Medir la eficiencia del proceso en base al análisis de la pérdida de nutrientes en el jitomate (vitamina C, licopeno y fenoles totales), ésto se realizará en colaboración con la Dra. Norma Francenia Santos Sánchez y el Dr. Raúl Salas Coronado de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, en Oaxaca, basado en la técnica propuesta en [40].

Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se describe la plataforma experimental y se obtienen los modelos matemáticos que la representan. En el Capítulo 3 se presentan las estrategias de control por optimalidad inversa y control subóptimo en tiempo discreto, ambas para el caso de sistemas no lineales con retardos. En el Capítulo 4 se presentan las estrategia de control con costo garantizado para sistemas lineales con retardo y también se realiza un análisis de estabilidad robusta para un control predictor dinámico. Los resultados experimentales se presentan en el Capítulo 5 y finalmente en el Capítulo 6 se hace un resumen de las principales contribuciones y el trabajo futuro. También se incluye un Apéndice con resultados teóricos útiles.

1.6 Publicaciones resultado de la tesis

El trabajo de investigación que se presenta en esta memoria de tesis dio lugar a las publicaciones en conferencias internacionales y artículos de revista indicadas a continuación.

Artículos en revista

1. Rodríguez-Guerrero, L., Santos-Sánchez, O., & Mondié S. A constructive approach for an optimal control applied to a class of nonlinear time delay systems, *Journal of Process Control*, 40, 35-49, 2016.
2. Rodríguez-Guerrero, L., Kharitonov, V. L., & Mondié S. Robust stability of dynamic predictor based control laws for input and state delay systems, *Systems and Control Letters*, 96, 95-102, 2016.
3. Ordaz, P., Santos, O. J., Rodríguez-Guerrero, L., & González-Facundo, A. Nonlinear stabilization for a time delay atmospheric drying process: Inverse optimality approach, *ISA Transactions*, aceptado con revisiones mayores.

Congresos internacionales

3. Rodríguez-Guerrero, L., Mondié, & Santos-Sánchez, O., Guaranteed cost control using Lyapunov redesign for uncertain linear time delay systems, In Proceedings of the 12th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Ann Arbor, Michigan, USA, 2015.
4. Rodríguez-Guerrero, L., Santos, O, & Mondié, S. Inverse optimality for a class of nonlinear time delay systems: a constructive approach, In Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, CA, USA, 2014.

-
5. Rodríguez-Guerrero, L., Ramírez, A., & Cuvas, C., Predictive Control and Truncated Predictor: A Comparative Study on Numerical Benchmark Problems, 11th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE) Ciudad del Carmen, Campeche, Mexico, September 29-October 3, 2014.

2

Deshidratadora atmosférica de jitomate

2.1 Introducción

En este capítulo se describe la plataforma experimental en la cual serán aplicados los controladores diseñados en el siguiente capítulo. También se obtienen los modelos matemáticos que caracterizan a la dinámica del sistema.

2.2 Descripción del prototipo

En la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo se diseñó y construyó un prototipo de deshidratador atmosférico, el cual consiste en una cámara cerrada con un túnel de viento como salida y una tubería que recircula el aire caliente en el sistema, este diseño es similar al presentado en [122] y sus elementos principales se enlistan a continuación:

1. El sensor de temperatura *LM35*, con una tasa de medida de $10\text{ mV}/^{\circ}\text{C}$, mide la temperatura del flujo de aire.
2. El ventilador que produce un flujo de aire constante de 2.1 m/s . Este valor fue elegido de acuerdo a las recomendaciones de la literatura especializada [71], [114], [102], en donde se muestra que la degradación de nutrientes es menor cuando se deshidrata jitomate con esa velocidad y temperaturas en un rango de $50^{\circ}\text{C} - 70^{\circ}\text{C}$. La velocidad de giro del ventilador no se modifica.
3. El actuador es una rejilla eléctrica usada como fuente de calentamiento. La temperatura de la cámara es regulada de acuerdo a la cantidad de voltaje aplicado (señal de control).
4. Las etapas de circuitos de potencia:
 - (a) Baja: El valor de la ley de control se convierte a una señal modulada por ancho de pulso en un rango de 0 a 5 volts y es enviada a la etapa de alta potencia.

- (b) Alta: El voltaje de alimentación de corriente alterna de la rejilla eléctrica se convierte en voltaje de corriente directa y con un conjunto de circuitos electrónicos la señal modulada por ancho de pulso es aplicada. Se considera que existe una relación lineal entre las dos etapas de potencia, es decir que cuando en la etapa de baja potencia se tiene $5V$ en la etapa de alta potencia se generan $170V$.
- La tarjeta de adquisición de datos modelo DAQ USB-6008 y el lenguaje de programación gráfica LabVIEW (versión 2014) de National Instruments se utilizan para la implementación de la ley de control y el almacenamiento de los datos de la variable del proceso. El período de muestreo es de 0.5 segundos.
 - El controlador industrial PID modelo Honeywell DC1040 con las siguientes características: precisión de $\pm 1^\circ C$ de unión de compensación de punta fría, $\pm 5\%$ de máxima desviación en la salida lineal de $4 - 20 mA$, compensación automática de banda de tiempo muerto y en la entrada un termopar de rango extendido tipo J (unión de Hierro y Cobre-Níquel para temperaturas que varían $0^\circ C - 200^\circ C$).

El funcionamiento del sistema, representado en el diagrama de instrumentación de la Figura 2.1 se describe a continuación: el flujo de aire se calienta al pasar a través de la rejilla eléctrica, después llega a la charola donde se encuentran las rebanadas de jitomate y el sensor de temperatura, una parte del aire sale por el túnel de viento y la otra parte es regresado al interior de la cámara al pasar por la tubería de recirculación. El valor de temperatura es medido cada 0.5 segundos, se almacena y se utiliza para el calcular el voltaje que se aplica al actuador. En las Figuras 2.2-2.4 se presentan algunas fotografías.

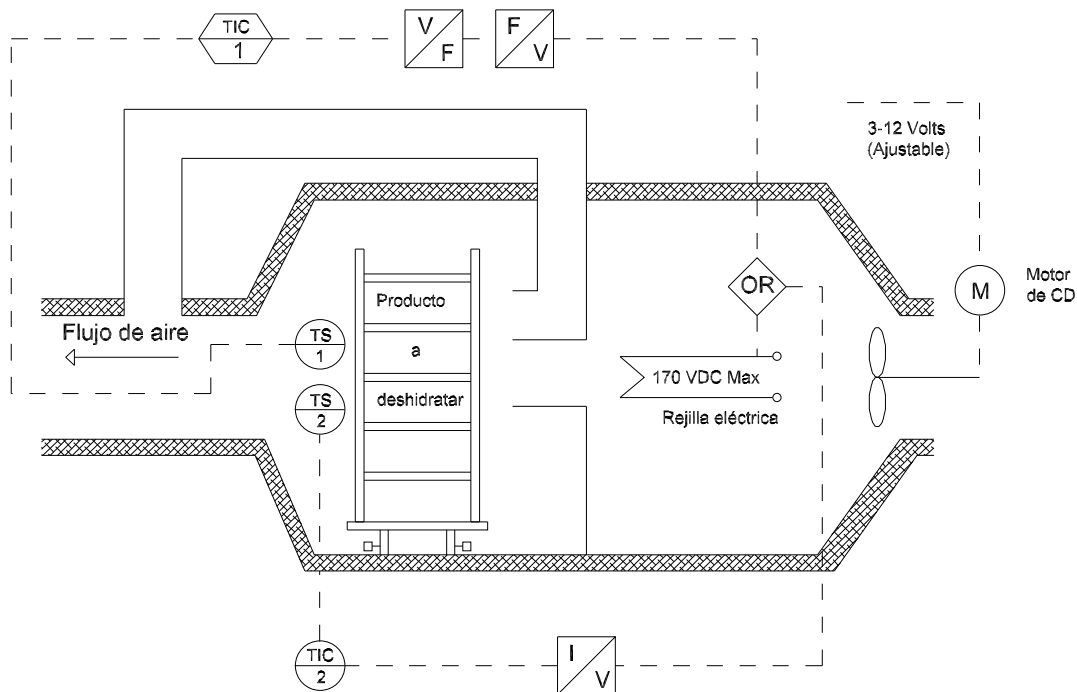


Figura 2.1: Diagrama de instrumentación del prototipo de deshidratado



Figura 2.2: Sistema de deshidratación, vista lateral



Figura 2.3: Sistema de deshidratación, vista posterior



Figura 2.4: Sistema de deshidratación, vista interior

2.3 Modelado matemático

En esta sección se presentan los modelos matemáticos que representan al prototipo de deshidratación de jitomate. Primero, el sistema se representa como un modelo lineal con retardo en la entrada debido a que la distancia que existe desde la fuente de calor hasta el producto induce un retardo en el transporte. En este caso el uso de un modelo lineal es adecuado ya que el sistema opera en una zona específica. Posteriormente, con la finalidad de enriquecer al modelo dinámico se considera un sistema no lineal con retardo en el estado, este retardo es producido por la tubería de recirculación de aire caliente. Finalmente, el modelo considera ambos retardos.

2.3.1 Modelo lineal con retardo en la entrada

Es común analizar a los sistemas térmicos en términos de los parámetros de resistencia y capacitancia térmica del proceso. Es bien sabido que si se desarrolla un modelo matemático considerando parámetros distribuidos se tiene una representación más precisa, sin embargo los modelos obtenidos bajo esta consideración, resultan en ecuaciones diferenciales parciales, haciendo difícil su aplicación a la teoría del control, esto se verá en la sección 2.3.3. Debido a esto, para simplificar el análisis, en esta sección se supone que el prototipo construido se representa mediante un modelo de parámetros concentrados, es decir, que los elementos que presentan una resistencia al flujo de calor, tienen una capacitancia térmica insignificante, esto es válido en una zona de operación específica. En el prototipo construido, dichos elementos son las paredes del mismo, las cuales fueron recubiertas con un aislante térmico para evitar la pérdida del calor. La transferencia de calor se lleva a cabo por convección, es decir por medio de un fluido que transporta el calor entre zonas con diferentes temperaturas. Para la transferencia de calor por convección, el flujo de calor q ($\frac{Kcal}{seg}$) se calcula como

$$q = K_{cc}\Delta\theta,$$

en donde $\Delta\theta$ es la diferencia de temperatura en $^{\circ}C$ y K_{cc} es el coeficiente de conductividad térmica en $\frac{Kcal}{seg^{\circ}C}$. El coeficiente $K_{cc} = HA$, con el área normal para el flujo de calor A (m^2) y H es el coeficiente de convección ($\frac{Kcal}{m^2seg^{\circ}C}$). La resistencia térmica R , para una transferencia de calor por conducción o por convección, se define como sigue:

$$R = \frac{d\Delta\theta}{dq} = \frac{1}{K_{cc}}.$$

Dado que los coeficientes de conductividad y convección térmica son casi constantes en un sistema cerrado, la resistencia térmica para la conducción o la convección es constante. Aunque nuestro proceso no es adiabático (es posible la transferencia de calor con el entorno) debido a que cuenta con una salida de aire, se supone que el aire que sale es mayor al que entra, haciendo que ésta suposición sea válida. La capacitancia térmica C se define como

$$C = Mc,$$

en donde M es la masa de la sustancia considerada (Kg) y c es el calor específico de la sustancia $\left(\frac{Kcal}{Kg} \circ C\right)$.



Figura 2.5: Sistema térmico

Como se explicó anteriormente, el sistema de la Figura 2.5 puede considerarse como cerrado, es decir que las pérdidas de calor pueden despreciarse debido al aislante utilizado. También es posible suponer que no hay almacenamiento de calor en el aislamiento, por lo que la deshidratadora tiene una temperatura estable. De este modo, solamente se utiliza una temperatura para describir al flujo de aire que sale y dicha suposición es válida porque la temperatura que nos interesa medir es la que impacta directamente al producto.

Suponga que la temperatura del flujo del aire que entra a la cámara de calentamiento θ_i ($\circ C$), se mantiene constante (esta suposición es válida debido a que la temperatura del exterior no cambia bruscamente durante el experimento) y que el flujo de calor de entrada al sistema \bar{H} $\left(\frac{Kcal}{seg}\right)$, el calor que proporciona el calefactor, cambia repentinamente de \bar{H} a $\bar{H} + h_i$ en donde h_i representa un cambio pequeño en el flujo de calor de entrada. Entonces, el flujo de calor de salida cambiará en forma gradual, de \bar{H} a $\bar{H} + h_o$. La temperatura del flujo de aire θ_o también cambiará a la salida, de θ_o a $\theta_o + \theta$. Para este caso, h_o , C y R se obtienen como:

$$\begin{aligned} h_o &= Gc\theta, \\ C &= Mc, \\ R &= \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{Gc}, \end{aligned}$$

en donde G es la velocidad del fluido en estado estable. Entonces, la ecuación diferencial que representa la dinámica del sistema es

$$C \frac{d\theta}{dt} = h_i - h_o,$$

el cambio de calor almacenado en el proceso se representa como la variación entre el flujo de calor en la entrada y el flujo de calor en la salida y el término $d\theta$ representa a la variación o el gradiente que existe en la temperatura. Al sustituir h_o , la ecuación anterior se reescribe como

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i.$$

La constante de tiempo del sistema es RC (en segundos) y la función de transferencia del sistema se obtiene en relación al flujo de calor h_i , del diagrama de bloques de la Figura 2.5 se obtiene que

$$\frac{\theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}.$$

Sin embargo, la temperatura $\theta(s)$ es medida mediante un sensor LM35. En este transductor, la temperatura es directamente proporcional a la temperatura medida ($1^\circ C$ equivale a $10mV$), por lo que puede considerarse que

$$X(s) = K_{sensor}\theta(s),$$

en donde $X(s)$ es la salida del sensor en volts y $K_{sensor} = 0.01V = C$. Aunque la relación de voltaje-temperatura del termopar es no lineal, el controlador PID realiza la compensación de punta fría, haciendo que esta consideración también sea válida. Además, suponemos que la temperatura del flujo de aire es directamente proporcional al voltaje aplicado a la rejilla eléctrica (esta relación se presenta en la Figura 2.6), entonces

$$U(s) = K_{rejilla}H_i(s),$$

en donde $K_{rejilla}$ es una constante de proporcionalidad dada en $\frac{V_{seg}}{Kcal}$ y $U(s)$ representa la señal de control aplicada al actuador. Debido a que la fuente de calor está alejada del producto una distancia L ($30cm$, en el prototipo construido), existe un retardo h en el transporte. Observe que se tiene una dependencia del retardo h con respecto a la distancia L , sin embargo debido a que esta distancia es fija, puede considerarse a dicho retardo constante y puede modelarse como una desviación en el argumento de la señal de control y en el dominio de la frecuencia se obtiene

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-hs}}{\tau s + 1}, \quad (2.1)$$

en donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo de la planta, $K = \frac{RK_{rejilla}}{K_{sensor}}$ es la ganancia del sistema y h es el retardo de la planta. Debido a las suposiciones y restricciones hechas, el modelo matemático del prototipo puede reducirse a un sistema lineal de primer orden con retardo en la entrada en una zona de operación específica. El cálculo de los parámetros del modelo se lleva a cabo mediante el método de la respuesta al escalón [112], [128], mostrada en la Figura 2.7, para la cual se identifican los parámetros: $\tau = 195s$, $h = 4s$ y $K = 0.68$. La representación en espacio de estado esta dada por

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t - h),$$

en donde $a = -\frac{1}{\tau}$ y $b = \frac{K}{\tau}$.

Note que los modelos lineales de primero y segundo orden con retardo en la entrada son utilizados en la industria por el software Expert-Tune [21] en su producto denominado PIDLoop Optimizer, el cual utiliza algoritmos para sintonizar robustamente a un PID. Por lo que el uso de un modelo de primer orden retardado está justificado.

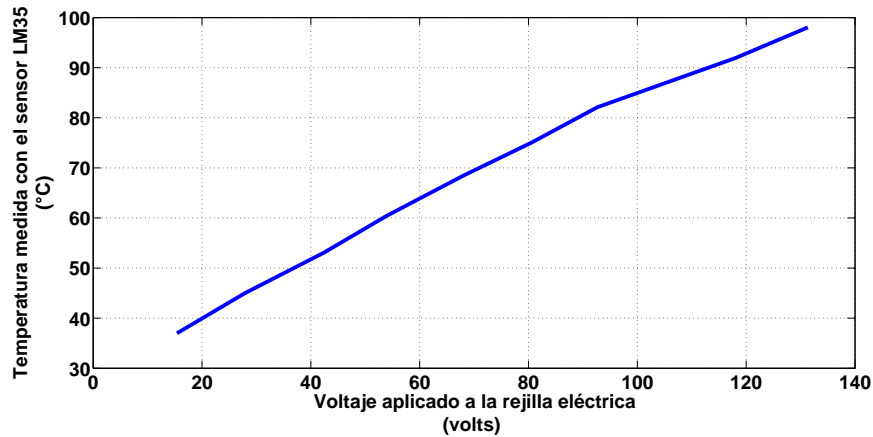


Figura 2.6: Relación entre la temperatura medida con el sensor LM35 y el voltaje aplicado a la rejilla eléctrica

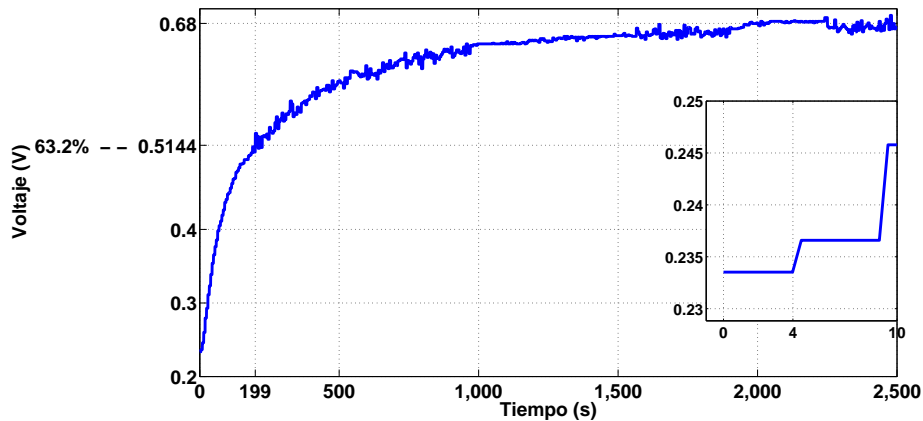


Figura 2.7: Respuesta al escalón

2.3.2 Verificación de la propiedad de linealidad

El sistema de deshidratación puede representarse como un sistema lineal que opera en una zona específica, pero el sistema no es lineal. El hecho de que un sistema sea lineal implica que el principio de superposición se mantiene. Ésto significa que si la entrada u_1 genera la salida y_1 y la entrada u_2 genera la salida y_2 entonces la entrada $u_3 = au_1 + bu_2$ producirá la salida $y_3 = ay_1 + by_2$. En la Figura 2.8 se muestran los resultados obtenidos al verificar la linealidad del sistema. Con la entrada $u_1 = 11.99V$ la respuesta del sistema y_1 alcanza una temperatura de $54.13^\circ C$ y con la entrada $u_2 = 28.34V$ la respuesta del sistema y_2 alcanza una temperatura de $75.58^\circ C$, entonces si el sistema fuera lineal, con la entrada $u_3 = 40.32V$ se alcanzaría una temperatura de $129.7^\circ C$, pero sólo llega a $93.96^\circ C$, por lo tanto el sistema no es lineal.

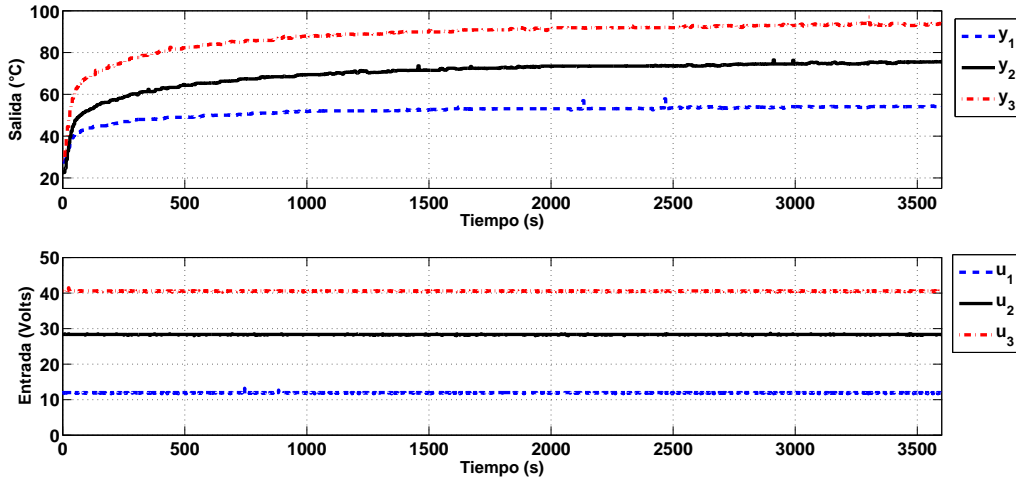


Figura 2.8: Verificación de la linealidad del sistema

A continuación se presentan modelos no lineales que representan a la plataforma experimental.

2.3.3 Modelo no lineal

El sistema puede modelarse con el principio de la conservación de la energía [69], el cual puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} \text{Flujos de energía interna, cinética} \\ \text{y potencial dentro del sistema por} \\ \text{convección} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Flujos de energía interna, cinética} \\ \text{y potencial fuera del sistema por} \\ \text{convección} \end{array} \right] \\
 & + \left[\begin{array}{c} \text{Calor agregado al sistema por} \\ \text{conducción, convección y radiación} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Trabajo realizado por el sistema} \\ \text{en el entorno} \end{array} \right] \\
 = & \left[\begin{array}{c} \text{La razón de cambio de las energías interna, cinética y potencial dentro del sistema,} \\ \text{con respecto al tiempo} \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

La representación matemática está dada por la siguiente ecuación:

$$F_0 \rho_0 (U_0 + K_0 + \Phi_0) - F \rho (U + K + \Phi) + Q + T_e - (W + FP - F_0 P_0) = \frac{d}{dt} [(U + K + \Phi) V \rho], \quad (2.2)$$

en donde:

- F : flujo volumétrico del aire (m^3/s),
- ρ : densidad del aire (Kg/m^3),
- U : energía interna (energía por unidad de masa),
- K : energía cinética (energía por unidad de masa),
- Φ : energía potencial (energía por unidad de masa),

Q : tasa de calentamiento (energía por tiempo),
 T_e : calor externo (energía por tiempo)
 W : trabajo realizado (energía por tiempo),
 P : presión del sistema (Kg/ms^2 , Pascales),
 V : volumen del aire (m^3).

El subíndice **0** indica que es el valor dentro del sistema. Para el término FP se debe utilizar un factor de conversión apropiado para que las unidades en la ecuación (2.2) sean energía por tiempo (es decir $\frac{Joule}{tiempo}$, $Joule = \frac{Kgm^2}{s^2}$).

El modelo puede simplificarse debido a que el sistema no realiza trabajo, entonces $W = 0$. También, si las velocidades del flujo de entrada y salida no son muy altas, el término de la energía cinética puede negligirse y si las elevaciones del flujo de entrada y salida son aproximadamente iguales, entonces el término de la energía potencial es pequeño. La ecuación (2.2) se reduce a

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [UV\rho] &= F_0\rho_0U_0 - F\rho U + Q + T_e - (FP - F_0P_0) \\
 &= F_0\rho_0U_0 - F\rho U + Q + T_e - \left(F\rho\frac{P}{\rho} - F_0\rho_0\frac{P_0}{\rho_0} \right) \\
 &= F_0\rho_0 \left(U_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) - F\rho \left(U + \frac{P}{\rho} \right) + Q + T_e,
 \end{aligned}$$

el recíproco de la densidad es el volumen específico \bar{V} (m^3/Kg), entonces el modelo en función de la energía interna es

$$\frac{d}{dt} [UV\rho] = F_0\rho_0 (U_0 + P_0\bar{V}_0) - F\rho (U + P\bar{V}) + Q + T_e. \quad (2.3)$$

También se puede hacer una representación de la razón de cambio de la entalpía del sistema en lugar de su energía interna. La entalpía en un gas está dada por:

$$H = U + P\bar{V}$$

y es una magnitud termodinámica, cuya variación expresa la cantidad de energía que un sistema intercambia con su entorno y es una función de la composición, la temperatura y la presión, pero primordialmente de la temperatura. La ecuación del sistema se expresa como:

$$\frac{d}{dt} [(H - P\bar{V})V\rho] = F_0\rho_0H_0 - F\rho H + Q + T_e. \quad (2.4)$$

El modelo (2.4) depende del flujo volumétrico, el cual varía debido al diseño de la deshidratadora (ver Figura 2.5). En la parte interna del sistema existe un estrechamiento en la tubería por donde circula el aire caliente (ver Figura 2.9), la presencia de una tobera provoca una presión diferencial [14] que afecta directamente el flujo volumétrico, existe una presión P_a antes del estrechamiento y una presión P_c después de que el flujo pasa por la tubería con diámetro menor d .

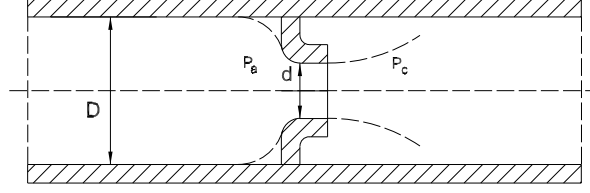


Figura 2.9: Tobera

Adicionalmente, la tubería de recirculación de aire caliente induce un retardo en el tiempo, lo cual puede interpretarse como un retardo en el flujo. Con la finalidad de considerar al retardo se define al flujo volumétrico interno como $F_0 = \bar{F}_0 + F_{0r}$, en donde \bar{F}_0 es el flujo en la cámara y F_{0r} es el flujo retardado. Entonces el modelo está dado por:

$$\frac{d}{dt} [(H - P\bar{V})V\rho] = \bar{F}_0\rho_0H_0 + F_{0r}\rho_0H_0 - F\rho H + Q + T_e \quad (2.5)$$

El caudal o flujo volumétrico, obtenida con los elementos de presión diferencial, para el caso de un fluido compresible (donde su densidad varía ya que cambia la presión, la temperatura y peso específico) [14] está dada por:

$$\bar{F}_0 = \frac{CE\varepsilon\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2(P_a - P_c)}{\rho_a}}, \quad (m^3/s) \quad (2.6)$$

en donde:

- C : coeficiente de descarga,
- E : coeficiente de velocidad de acercamiento,
- ε : coeficiente experimental de expansión del aire ocurrida durante la aceleración del flujo,
- P_a : presión en la zona anterior a la placa donde el fluido llena todo el conducto (Kg/m^2),
- P_c : presión en la vena contraída (Kg/m^2 , Pascales),
- d : diámetro del orificio (m)
- ρ_a : densidad del fluido en las condiciones en la zona anterior a la placa (Kg/m^3)

Se reemplaza el flujo volumétrico (2.6) en la ecuación (2.5) y se obtiene

$$\frac{d}{dt} [HV\rho] = \frac{CE\varepsilon\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2(P_a - P_c)}{\rho_a}} \rho_0H_0 + F_{0r}\rho_0H_0 - F\rho H + \frac{d}{dt} [P\bar{V}V\rho] + Q + T_e$$

La entalpía es una función de estado, lo que permite calcular de una manera muy directa la transferencia de calor en el sistema [79]. La variación de la entalpía está en función de la variación de la temperatura

$$\Delta H = C_p\Delta T,$$

en donde Δ indica la variación, C_p es el calor específico a presión constante y T es la temperatura. A pesar del cambio de presión después de la tobera, la presión total del la cámara

puede suponerse constante ya que el flujo de salida del aire es contante, entonces el modelo se reescribe considerando la variación de la entalpía con respecto a la temperatura como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial T} V \rho \right) = \frac{CE\varepsilon\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2(P_a - P_c)}{\rho_a}} \rho_0 \frac{\partial H_0}{\partial T} + F_{0r} \rho_0 \frac{\partial H_0}{\partial T} - F \rho \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{d}{dt} [P\bar{V}V\rho] + Q + T_e.$$

La variación de la entalpía con respecto a la temperatura puede expresarse como $\frac{\partial H}{\partial T} = f(T(t))$, es decir que f es una función que depende de la temperatura. Se calcula la derivada $\frac{df(T(t))}{dt} = \frac{df(T(t))}{dT} \frac{dT(t)}{dt}$ y el modelo está dado por

$$\frac{dT(t)}{dt} = f_0(T(t)) + f_1(T(t-h)) + b(T(t))u(t) + f_2(T(t), t), \quad (2.7)$$

en donde la entrada es $u(t) = Q$, $b(T(t)) = \left(\frac{1}{V\rho \frac{d}{dT} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)} \right)$, el término

$$f_0(T(t)) = \left(\left(\frac{CE\varepsilon\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2(P_a - P_c)}{\rho_a}} \rho_0 - F\rho \right) \frac{\partial H_0}{\partial T} + \frac{d}{dt} (P\bar{V}V\rho) \right) b(T(t))$$

y se considera que el flujo retardado F_{0r} induce un retardo en la temperatura tal que $f_1(T(t-h)) = F_{0r} \rho_0 \frac{\partial H_0}{\partial T} b(T(t))$ y el término $f_2(T(t), t) = b(T(t))T_e$.

De acuerdo a las técnicas de control que se desarrollan en este trabajo, es difícil de manejar al modelo (2.7), además surge la dificultad de encontrar los valores de los parámetros. La función que representa al modelo podría expresarse mediante una expansión en series de Taylor alrededor de un punto de equilibrio y así obtener modelos más simples con una parte lineal y términos no lineales que permitan que la región de operación sea mayor en comparación al caso de un modelo puramente lineal.

A continuación se presenta la metodología para obtener a los modelos no lineales.

2.3.4 Modelo no lineal con retardo en el estado

Con la finalidad de enriquecer el modelo, se considera un sistema de la forma

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t-h) + bu(t) + f(x(t), x(t-h)), \quad (2.8)$$

en donde la variable de estado $x(t)$ es la temperatura, medida en volts, la entrada de control $u(t)$ es el voltaje aplicado al actuador. La tubería que recicla el aire caliente induce el retardo en el estado h y en este caso el retardo en la entrada se desprecia debido a que es más pequeño. Se supone que la parte no lineal está descrita por la función polinomial

$$f(x(t), x(t-h)) = \gamma_0x^2(t) + \gamma_1x^2(t-h) + \gamma_2x^3(t) + \gamma_3x^3(t-h), \quad (2.9)$$

la cual depende de la variable del proceso [123]. Los parámetros del modelo son estimados utilizando el método de mínimos cuadrados recursivos y el retardo $h = 10$ se encuentra al validar el modelo. El sistema (2.8) se discretiza utilizando el método de aproximación de

Euler hacia adelante de la siguiente forma:

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{T} = a_0x(k) + a_1x(k - \bar{h}) + bu(k) + \gamma_0x^2(k) + \gamma_1x^2(k - \bar{h}) + \gamma_2x^3(k) + \gamma_3x^3(k - \bar{h}),$$

en donde T es el período de muestreo, k es el instante de muestreo y $\bar{h} = \frac{h}{T}$ es el número de instantes de tiempo equivalentes al retardo. Después de algunos cálculos algebraicos se obtiene la solución en el instante k como

$$x(k) = \alpha_0x(k-1) + \alpha_1x(k - \bar{h} - 1) + \beta u(k-1) + \bar{\gamma}_0x^2(k-1) + \bar{\gamma}_1x^2(k - \bar{h} - 1) + \bar{\gamma}_2x^3(k-1) + \bar{\gamma}_3x^3(k - \bar{h} - 1),$$

con

$$\alpha_0 = 1 + Ta_0, \alpha_1 = Ta_1, \beta = Tb, \bar{\gamma}_0 = T\gamma_0, \bar{\gamma}_1 = T\gamma_1, \bar{\gamma}_2 = T\gamma_2, \bar{\gamma}_3 = T\gamma_3. \quad (2.10)$$

En base al método de mínimos cuadrados se considera el vector de regresión

$$\tilde{x}^T = [x(\bar{k}), x(\bar{k} - \bar{h}), u(\bar{k}), x^2(\bar{k}), x^2(\bar{k} - \bar{h}), x^3(\bar{k}), x^3(\bar{k} - \bar{h})], \bar{k} = k - 1,$$

el cual contiene las variables medidas de entrada/salida y

$$\tilde{\theta}^T = [\alpha_0, \alpha_1, \beta, \bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3] \quad (2.11)$$

es el vector de parámetros desconocidos. Los datos de temperatura y señal de entrada se obtuvieron al aplicar una señal persistente que también incluye al ruido presente en la medición [123]. La señal de entrada fue producida por un controlador industrial PID con las siguientes ganancias de $K_p = 50$ ($B_p = 2$), $K_i = 0.2$ ($T_i = 250$) y $K_d = 50$ ($T_d = 1$). En la Figura 2.10 se muestran las variaciones de temperatura en un rango de $18 - 70^\circ C$ con incrementos y decrementos de $5^\circ C$. La Tabla 2.1 muestra los parámetros en tiempo continuo, obtenidos a partir de las relaciones dadas en (2.10). Estos parámetros no fueron útiles para algunas de las leyes de control presentadas más adelante, ya que se obtuvo un mal desempeño en la respuesta en lazo cerrado, por lo tanto también se obtuvieron modelos no lineales para diferentes regiones de operación (Tabla 2.2).

a_0	a_1	b	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3
-0.060362	0.055313	0.050480	0.050480	-0.051638	-0.087851	0.045046

Tabla 2.1: Parámetros del modelo no lineal en tiempo continuo (2.8)

Región	a_0	a_1	b	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3
$50^\circ C$	-0.02281	-0.19337	0.00105	-0.26940	1.02982	0.21007	-1.04674
$55^\circ C$	-0.07192	-0.04419	0.00054	0.01359	0.39686	-0.07951	-0.36378
$60^\circ C$	-3.13458	0.63123	0.00178	9.93038	-3.84464	-8.34756	3.80236
$70^\circ C$	-3.51022	0.61399	0.00087	7.87443	-2.32294	5.23354	1.84042

Tabla 2.2: Parámetros del modelo no lineal en tiempo continuo (2.8) para diferentes regiones de operación

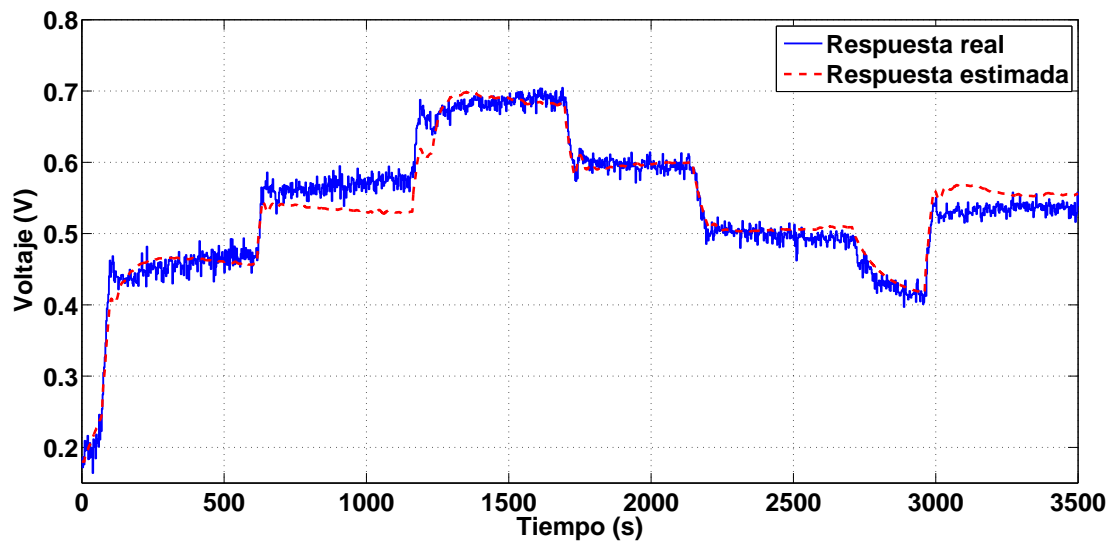


Figura 2.10: Respuesta del sistema en diferentes zonas de operación

2.3.5 Modelo no lineal con retardo en el estado y en la entrada de control

Con la finalidad de considerar ambos retardos, el retardo en el estado (inducido por la tubería de recirculación de aire caliente) y el retardo en la entrada (producido por la distancia que existe entre la fuente de calor y el producto) se representa al sistema de la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t - h) + bu(t - \tau) + f(x(t), x(t - h)), \quad (2.12)$$

en donde la parte no lineal es de la forma (2.9), el retardo en la entrada $\tau = 4s$ se obtuvo anteriormente de la respuesta al escalón de la planta y el retardo en el estado $h = 10$ al validar el modelo. Los parámetros del sistema se identifican de manera similar a la presentada en la sección anterior, el sistema (2.12) discretizado es

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \alpha_0x(k) + \alpha_1x(k - \bar{h}) + \beta u(k - \bar{\tau}) + \bar{\gamma}_0x^2(k) + \bar{\gamma}_1x^2(k - \bar{h}) \\ & + \bar{\gamma}_2x^3(k) + \bar{\gamma}_3x^3(k - \bar{h}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

en donde $\bar{\tau} = \frac{\tau}{T}$ y los parámetros se calculan de acuerdo a (2.10). El vector de regresión es

$$\tilde{x}^T = [x(\bar{k}), x(\bar{k} - \bar{h}), u(\bar{k} - \bar{\tau}), x^2(\bar{k}), x^2(\bar{k} - \bar{h}), x^3(\bar{k}), x^3(\bar{k} - \bar{h})], \bar{k} = k - 1,$$

y el vector de parámetros desconocidos esta dado por (2.11). Los parámetros obtenidos para el sistema en tiempo discreto se muestran en la Tabla 2.3.

α_0	α_1	β	$\bar{\gamma}_0$	$\bar{\gamma}_1$	$\bar{\gamma}_2$	$\bar{\gamma}_3$
0.98685	0.01193	0.00079	0.06039	-0.06259	-0.02823	0.02884

Tabla 2.3: Parámetros del modelo no lineal en tiempo discreto (2.13)

2.4 Conclusiones

Los sistemas de control de temperatura también pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales parciales, lo cual resulta en modelos no lineales más complejos, cuyo problema de control puede ser atacado de diferentes maneras. Sin embargo, este trabajo de tesis se basa en el diseño de controladores para sistemas con retardos mediante el uso de funcionales de tipo completo, por lo tanto los modelos obtenidos tienen una parte lineal estable y una parte no lineal que se supone de tipo polinomial, lo cual facilita la estimación de los parámetros. Los modelos en tiempo continuo serán utilizados para realizar los experimentos con el controlador óptimo no lineal y el modelo en tiempo discreto será utilizado con el controlador subóptimo.

3

Estrategias de control para sistemas no lineales con retardos

3.1 Introducción

Este capítulo está dedicado a las estrategias de control para sistemas no lineales con retardos. Primero se presenta el control óptimo no lineal obtenido mediante el enfoque de optimalidad inversa para una clase de sistemas con retardo, el cual se extiende del caso libre de retardo [22]. En la sección 3.2.1.2 se aborda el tema con funcionales de L-K de tipo completo y en la 3.2.2 se presentan resultados análogos con una funcional de tipo reducido.

Posteriormente, en la sección 3.3 se presenta un control subóptimo en tiempo discreto para sistemas no lineales con retardos en la entrada y en el estado.

3.2 Control óptimo no lineal por optimalidad inversa

En la teoría de optimalidad inversa, presentada en la sección 1.4.1, se supone que la FCL es conocida, por lo que primero se establecen las condiciones suficientes bajo las cuales una funcional de tipo completo (ver sección A.1.4) es una FCLK para el sistema considerado. Una vez satisfechas tales condiciones, se extiende el enfoque de optimalidad inversa para una clase de sistemas con retardos, en donde la FCLK es una funcional de tipo Bellman y explícitamente se obtiene a la ley de control, evitando la solución de la ecuación del tipo HJB.

3.2.1 Control óptimo no lineal usando funcionales de L-K de tipo completo

El estudio se restringe a sistemas con retardos de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + F(x(t), x(t-h)) + B(x(t), x(t-h))u, \quad (3.1)$$

en donde las matrices $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ corresponden a la parte lineal del sistema, $h > 0$ es el retardo, la condición inicial está dada por $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la cual pertenece al espacio de funciones continuas a tramos $\mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ sobre el intervalo $[-h, 0]$ y la entrada de control es $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$. Se consideran las siguientes suposiciones sobre el sistema:

Suposición 1 *El sistema nominal lineal*

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h) \quad (3.2)$$

es exponencialmente estable.

Suposición 2 *Cuando el sistema nominal no es exponencialmente estable y la matriz $B(\cdot, \cdot)$ es constante existe una ley de control preliminar, de la forma $\tilde{u} = K_0 x(t) + K_1 x(t - h) + u$, con las matrices K_0 y K_1 tales que se estabiliza a la parte lineal del sistema.*

Suposición 3 *La función matricial $B(x(t), x(t - h)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es continua con respecto a sus argumentos y satisface para $\omega(x_t)$, una condición localmente Lipschitz, la siguiente desigualdad*

$$\|\omega(x_t)\| \|B(x(t), x(t - h))\| \leq L \|x_t\|_h, \quad L \in \mathbb{R}^+, \quad \|x_t\|_h < \delta.$$

Suposición 4 *La función no lineal $F(x(t), x(t - h)) \in \mathbb{R}^n$ satisface localmente la condición:*

$$\|F(x(t), x(t - h))\| \leq \alpha \|x(t)\| + \beta \|x(t - h)\|, \quad (3.3)$$

en donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

De acuerdo a la Definición de FCLK (ver sección 1.4.2, Definición 1.2), a continuación se presenta la definición en términos de funcionales de tipo completo.

Definición 3.1 *Una funcional de tipo completo $V(x_t) : C \rightarrow \mathbb{R}^+$, de la forma (A.9) (ver Apéndice A.1.4), es llamada Función de Control de Lyapunov-Krasovskii (FCLK) para el sistema (3.1) si existe una ley de control u y escalares α_1 y α_2 tales que*

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq V(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2,$$

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(3.1)} = \Psi_0(x_t) + \Psi_1^T(x_t)u < 0$$

y

$$\Psi_1^T(x_t) = 0, \quad \text{con } x_t \neq 0 \implies \Psi_0(x_t) < 0,$$

para todas las funciones continuas a tramos $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Las funcionales $\Psi_0(x_t)$ y $\Psi_1(x_t)$ están dadas por:

$$\begin{aligned} \Psi_0(x_t) &= -x^T(t)W_0x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) - \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta \\ &+ 2 \left[U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-h-\theta)A_1x(t+\theta)d\theta \right]^T F(x(t), x(t-h)), \end{aligned}$$

$$\Psi_1^T(x_t) = 2 \left[U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-h-\theta)A_1x(t+\theta)d\theta \right]^T B(x(t), x(t-h)),$$

en donde $U(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$ es la matriz de Lyapunov del sistema nominal (3.2) asociada con la matriz definida positiva $W = W_0 + W_1 + hW_2$, con $W_0 > 0$, $W_1 > 0$ y $W_2 > 0$ (ver Apéndice A.1.4).

Para iniciar el análisis, se calcula la derivada de la funcional de tipo completo (A.9) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.1) como sigue

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(3.1)} &= -x^T(t)Wx(t) + 2x^T(t)U(0) [F(x(t), x(t-h)) + B(x(t), x(t-h))u(t)] \\ &\quad + 2 [F(x(t), x(t-h)) + B(x(t), x(t-h))u(t)]^T \int_{-h}^0 U(-h-\theta)A_1x(t+\theta)d\theta \\ &\quad + x^T(t) [W_1 + hW_2] x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) - \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta, \end{aligned}$$

y bajo la restricción $W = W_0 + W_1 + hW_2$. La derivada puede expresarse como

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(3.1)} = -\omega_0(x_t) + 2 [F(x(t), x(t-h)) + B(x(t), x(t-h))u(t)]^T \omega_1(x_t),$$

en donde

$$\omega_0(x_t) = x^T(t)W_0x(t) + x^T(t-h)W_1x(t-h) + \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta \quad (3.4)$$

y

$$\omega_1(x_t) = U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-h-\theta)A_1x(t+\theta)d\theta. \quad (3.5)$$

La derivada puede reescribirse como

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(3.1)} = \Psi_0(x_t) + \Psi_1^T(x_t)u, \quad (3.6)$$

en donde $\Psi_0 \in \mathbb{R}$ se define como

$$\Psi_0(x_t) = -\omega_0(x_t) + 2\omega_1^T(x_t)F(x(t), x(t-h)) \quad (3.7)$$

y $\Psi_1 \in \mathbb{R}^m$ esta dada por

$$\Psi_1^T(x_t) = 2\omega_1^T(x_t)B(x(t), x(t-h)). \quad (3.8)$$

Cuando la funcional $\Psi_1^T(x_t) = 0$ pero la respuesta del sistema aún no converge al origen, es decir $x_t \neq 0$, la condición suficiente para garantizar que el sistema (3.1) es asintóticamente estable es que el término $\Psi_0(x_t)$ sea negativo. Entonces, en la siguiente sección se encuentran

las condiciones bajo las cuales la derivada

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(3.1)} = \Psi_0(x_t) = -\omega_0(x_t) + 2\omega_1^T(x_t)F(x(t), x(t-h))$$

es negativa, en otras palabras $\Psi_0(x_t)$ debe satisfacer que $\Psi_0(x_t) < 0$. Al sustituir las funcionales (3.4) y (3.5) en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(3.1)} = & -x^T(t)W_0x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) - \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta \\ & + 2 \left[U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-h-\theta)A_1x(t+\theta)d\theta \right]^T F(x(t), x(t-h)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2.1.1 Condiciones suficientes para que un funcional de tipo completo sea una FCLK

El término cuadrático asociado a la matriz W_2 , en la ecuación (3.9), se mayoriza como sigue: se considera la Suposición 1, en la cual se asume que el sistema nominal (3.2) es asintóticamente estable, por lo que la matriz de Lyapunov $U(0)$ es definida positiva [77]. Esto implica que el término $S(\theta) = U(-h-\theta)A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no es cero para todo $\theta \in [-h, 0]$. Se define

$$\bar{s} = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|S(\theta)\|. \quad (3.10)$$

Como

$$S^T(\theta)S(\theta) \leq \|S(\theta)\|^2$$

se obtiene

$$\frac{S^T(\theta)S(\theta)}{\|S(\theta)\|^2} \leq I_n$$

y

$$\frac{1}{\bar{s}} \leq \frac{1}{\sup_{\theta \in [-h, 0]} \|S(\theta)\|} \leq \frac{1}{\|S(\theta)\|}, \quad \theta \in [-h, 0].$$

Entonces, el término que contiene a W_2 satisface

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta & \geq \int_{-h}^0 x^T(t+\theta) \left(\frac{S(\theta)}{\|S(\theta)\|} \right)^T W_2 \left(\frac{S(\theta)}{\|S(\theta)\|} \right) x(t+\theta)d\theta \\ & \geq \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)S^T(\theta) \frac{W_2}{\bar{s}^2} S(\theta)x(t+\theta)d\theta, \end{aligned}$$

y aplicando la desigualdad de Jensen se llega a

$$- \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta \leq -\frac{1}{h} \left(\int_{-h}^0 S(\theta)x(t+\theta)d\theta \right)^T \frac{W_2}{\bar{s}^2} \left(\int_{-h}^0 S(\theta)x(t+\theta)d\theta \right). \quad (3.11)$$

La desigualdad (3.11) se sustituye en la derivada (3.9), lo cual nos lleva a

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(3.1)} &\leq -x^T(t)W_0x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) \\ &\quad - \frac{1}{h} \left(\int_{-h}^0 S(\theta)x(t+\theta)d\theta \right)^T \frac{W_2}{\bar{s}^2} \left(\int_{-h}^0 S(\theta)x(t+\theta)d\theta \right) \\ &\quad + 2x^T(t)U(0)F(x(t), x(t-h)) + 2 \left[\int_{-h}^0 S(\theta)x(t+\theta)d\theta \right]^T F(x(t), x(t-h)). \end{aligned}$$

Con la finalidad de presentar una expresión cuadrática de la derivada anterior se utiliza el procedimiento S [125], [88], como en [31]. Entonces, se suma y resta el término

$$\pm \epsilon F^T(x(t), x(t-h))F(x(t), x(t-h)), \quad \epsilon > 0,$$

y se obtiene

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(3.1)} \leq -\eta^T \begin{bmatrix} W_0 & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -U(0) \\ 0_{n \times n} & W_1 & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \frac{1}{h} \frac{W_2}{\bar{s}^2} & -I_n \\ -U(0) & 0_{n \times n} & -I_n & \epsilon I_n \end{bmatrix} \eta + \epsilon F^T(x(t), x(t-h))F(x(t), x(t-h)),$$

en donde $\eta^T = \left[x^T(t), x^T(t-h), \left(\int_{-h}^0 S(\theta)x(t+\theta)d\theta \right)^T, F^T(x(t), x(t-h)) \right]$. Considerando la Suposición 4, en la cual se asume que la función no lineal $F(x(t), x(t-h))$ satisface la condición (3.3), la siguiente desigualdad

$$\epsilon F^T(x(t), x(t-h))F(x(t), x(t-h)) \leq \epsilon \bar{\alpha} x^T(t)x(t) + \epsilon \bar{\beta} x^T(t-h)x(t-h),$$

se satisface para algunas $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}^+$, en donde $\bar{\alpha} = \alpha^2 + \alpha\beta$ y $\bar{\beta} = \beta^2 + \alpha\beta$. La derivada se reescribe como

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(3.1)} \leq -\eta^T E \eta,$$

en donde la positividad de la matriz

$$E = \begin{bmatrix} W_0 - \epsilon \bar{\alpha} I_n & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -U(0) \\ 0_{n \times n} & W_1 - \epsilon \bar{\beta} I_n & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \frac{1}{h} \frac{W_2}{\bar{s}^2} & -I_n \\ -U(0) & 0_{n \times n} & -I_n & \epsilon I_n \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

asegura la negatividad de la derivada. A continuación se presenta este resultado:

Teorema 3.1 *Sea el sistema no lineal con retardo (3.1) y dadas las matrices definidas positivas $W_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 0, 1, 2$, bajo la restricción $W = W_0 + W_1 + hW_2$. Si existe algún escalar $\epsilon > 0$ tal que la matriz E , dada en (3.12) es definida positiva, entonces la funcional de tipo completo $V(x_t)$, dada en (A.9), es una Función de Control de Lyapunov-Krasovskii para el sistema (3.1).*

Las matrices W_i , $i = 0, 1, 2$, y ϵ pueden encontrarse considerando a (3.12) como una desigualdad lineal matricial ($E > 0$), bajo la restricción $W = W_0 + W_1 + hW_2$.

3.2.1.2 Síntesis del controlador óptimo no lineal

Una vez satisfecha la condición del Teorema 3.1, se extiende el enfoque de optimalidad inversa del caso sin retardo a sistemas de la forma (3.1) y se presenta la forma explícita a la ley de control óptima u^* que minimiza al índice de desempeño

$$J = \int_0^\infty [q(x_t) + r(x_t)u^T u] dt, \quad (3.13)$$

en donde $q(x_t)$ y $r(x_t)$ son funcionales estrictamente positivas. La ecuación del tipo HJB asociada al sistema (3.1) y al índice de desempeño (3.13) es

$$\min_u \left(\frac{dV(x_t)}{dt} \Big|_{(3.1)} + q(x_t) + r(x_t)u^T u \right) = 0, \quad (3.14)$$

la cual garantiza estabilidad asintótica. La ley de control óptima

$$u^* = -\frac{1}{2} \frac{\Psi_1(x_t^*)}{r(x_t^*)}$$

se obtiene reemplazando (3.6) en (3.14) y calculando la primera derivada con respecto a u . La segunda derivada de (3.14) con respecto a u es igual a $2r(x_t) > 0$, lo cual implica que se tiene un mínimo. De acuerdo al enfoque de optimalidad inversa y como la funcional $V(x_t)$ es una FCLK se define a las siguientes funcionales estrictamente positivas:

$$\begin{aligned} q(x_t) &= [\Psi_1^T(x_t)\Psi_1(x_t)] + \sqrt{[\Psi_0(x_t)]^2 + [\Psi_1^T(x_t)\Psi_1(x_t)]^2}, \\ r(x_t) &= \frac{\frac{1}{4} [\Psi_1^T(x_t)\Psi_1(x_t)]}{d_r(x_t)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$d_r(x_t) = \Psi_1^T(x_t)\Psi_1(x_t) + \Psi_0(x_t) + \sqrt{[\Psi_0(x_t)]^2 + [\Psi_1^T(x_t)\Psi_1(x_t)]^2}.$$

en donde $\Psi_0(x_t)$ y $\Psi_1(x_t)$ están dadas en (3.7) y (3.8), respectivamente.

Es fácil ver que $q(x_t)$ es positivo y para verificar que $r(x_t)$ es positivo se prueba por contradicción que el término $d_r(x_t)$ siempre es positivo cuando $\Psi_1(x_t) \neq 0$: $V(x_t)$ es una FCLK entonces $\Psi_0(x_t) < 0$, pero se supone que $d_r(x_t) \leq 0$ lo cual implica que

$$\Psi_1^T(x_t)\Psi_1(x_t) + \sqrt{[\Psi_0(x_t)]^2 + [\Psi_1^T(x_t)\Psi_1(x_t)]^2} \leq -\Psi_0(x_t), \quad (-\Psi_0(x_t) > 0),$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad anterior se obtiene

$$[\Psi_1^T(x_t)\Psi_1(x_t)]^2 + \Psi_1^T(x_t)\Psi_1(x_t)\sqrt{[\Psi_0(x_t)]^2 + [\Psi_1^T(x_t)\Psi_1(x_t)]^2} \leq 0,$$

ésto no es posible porque todos los términos son cuadráticos, por lo tanto $d_r(x_t) > 0$ y entonces $r(x_t)$ es una funcional positiva.

Las funcionales $q(x_t)$ y $r(x_t)$ están bien definidas ya que dependen de la FCLK $V(x_t)$, lo cual también garantiza estabilidad asintótica en lazo cerrado. El hecho de que $V(x_t)$ es una FCLK implica que la funcional $\Psi_0(x_t) < 0$, sin embargo, un punto singular puede aparecer en la ley de control cuando $\Psi_1(x_t) = 0$, para algún $x_t \neq 0$, ya que $r(x_t)$ se encuentra indeterminado. Esta singularidad puede removerse como se explica en la siguiente teorema:

Teorema 3.2 *Bajo la suposición de que la funcional de tipo completo $V(x_t)$, dada en (A.9), satisface la condición establecida en el Teorema 3.1, la ley de control óptima*

$$u = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\Psi_1(x_t)}{r(x_t)}, & \Psi_1(x_t) \neq 0 \\ 0, & \Psi_1(x_t) = 0, \text{ o } x_t = 0 \end{cases}, \quad (3.16)$$

estabiliza localmente a la solución trivial del sistema (3.1) y minimiza el índice de desempeño (3.13).

Para calcular el valor de la ley de control (3.16), se construye a la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos con el método semi-analítico [47] (ver Apéndice A.1.5).

3.2.1.3 Continuidad de la ley de control (3.16)

La continuidad de la ley de control (3.16) en $x^*(t) = 0$, se analiza a continuación. La ecuación (3.16) se reescribe como

$$u^* = 2 \left(\frac{\Psi_1(x_t^*) \left(\Psi_1^T(x_t^*) \Psi_1(x_t^*) + \Psi_0(x_t^*) + \sqrt{\Psi_0^2(x_t^*) + [\Psi_1^T(x_t^*) \Psi_1(x_t^*)]^2} \right)}{\Psi_1^T(x_t^*) \Psi_1(x_t^*)} \right), \quad (3.17)$$

en donde $\Psi_0(x_t^*)$ y $\Psi_1^T(x_t^*) \neq 0$, están dadas por (3.7) y (3.8), respectivamente. La Suposición 3 implica que la funcional $\Psi_1^T(x_t^*)$ es Lipschitz localmente, es decir

$$\|\Psi_1(x_t^*)\| \leq \alpha_0 \|x_t^*\|_h, \text{ para algún } \alpha_0 > 0 \text{ y } \|x_t^*\|_h < \delta.$$

El término $\Psi_0(x_t^*)$ satisface que

$$|\Psi_0(x_t^*)| \leq \alpha_1 \|x_t^*\|_h^2,$$

con

$$\alpha_1 = \|W_0\| + \|W_1\| + h \|W_2\| + \left[\max_{\theta \in [0, h]} \|U(\theta)\| (1 + h \|A_1\|) \right] L_1$$

y L_1 se obtiene de

$$\|F(x^*(t), x^*(t-h))\| \leq \alpha \|x^*(t)\| + \beta \|x^*(t-h)\| \leq L_1 \|x_t^*\|_h, \quad L_1 = \alpha + \beta, \quad \|x_t^*\|_h < \delta.$$

Entonces, el término en el numerador de (3.17) satisface

$$\left\| \Psi_1(x_t^*) \left(\Psi_1^T(x_t^*) \Psi_1(x_t^*) + \Psi_0(x_t^*) + \sqrt{\Psi_0^2(x_t^*) + [\Psi_1^T(x_t^*) \Psi_1(x_t^*)]^2} \right) \right\| \leq \alpha_2 \|x_t^*\|_h^3,$$

en donde $\alpha_2 = 4(\alpha_0^3 + \alpha_0\alpha_1)$ y $|\Psi_1^T(x_t^*) \Psi_1(x_t^*)| \leq \alpha_0^2 \|x_t^*\|_h^2$. El término en el numerador tiene mayor grado que el denominador, por lo que su velocidad de convergencia también es mayor, entonces cuando $\|x_t^*\|_h \rightarrow 0$, $u^* \rightarrow 0$ y para todo $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x_t^*\|_h < \delta(\tilde{\varepsilon}) \implies \|u^*\| < \tilde{\varepsilon}$. Esto implica que la funcional de tipo completo $V(x_t^*)$ satisface la propiedad del pequeño control [37] (ver Definición 1.3), con lo cual se concluye que la ley de control u^* es continua en $x^*(t) = 0$.

En la siguiente sección se realiza un análisis que demuestra que la integral que define al índice de desempeño (3.13) está bien definida y converge.

3.2.1.4 Convergencia de la integral del índice de desempeño

Se considera al sistema (3.1) y se parte del hecho de que la funcional de tipo completo $V(x_t)$, dada por (A.9), satisface las condiciones del Teorema 3.1, lo que indica que es una FCLK. Entonces la ecuación del tipo HJB implica que

$$\left. \frac{dV(x_t^*)}{dt} \right|_{(3.1), u=u^*} = -q(x_t^*) - r(x_t^*)u^{*T}u^*,$$

en donde x_t^* es la trayectoria óptima generada por el control óptimo u^* . Se integra desde 0 hasta ∞ y se obtiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x_t^*) - V(x_0) = - \int_0^\infty (q(x_t^*) + r(x_t^*)u^{*T}u^*) dt.$$

El hecho de que $V(x_t)$ sea una FCLK garantiza la estabilidad asintótica del sistema (3.1), por lo tanto el $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x_t^*) = 0$, entonces

$$V(\varphi) = \int_0^\infty (q(x_t^*) + r(x_t^*)u^{*T}u^*) dt.$$

El valor del índice de desempeño está dado por el valor de la funcional V evaluada en la condición inicial φ , por lo tanto concluimos que el índice de desempeño (3.13) es acotado, es decir

$$|V(\varphi)| = V(\varphi) \leq \rho, \quad \rho \in \mathbb{R}^+.$$

También es fácil verificar que la ecuación del tipo HJB, dada por (3.14), se satisface cuando la ley de control (3.16) es óptima, este análisis se presenta a continuación.

3.2.1.5 Verificación de la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman

La derivada (3.6), la funcional $q(x_t^*)$, dada por (3.15), y la ley control (3.16) se sustituyen en (3.14) y se obtiene

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{dV(x_t^*)}{dt} \right|_{(3.1)} + q(x_t^*) + r(x_t^*)u^T(x_t^*)u(x_t^*) = \\
& = \Psi_0(x_t^*) + \Psi_1^T(x_t^*) \left(-\frac{1}{2} \frac{\Psi_1(x_t^*)}{r(x_t^*)} \right) + \Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*) + \sqrt{[\Psi_0(x_t^*)]^2 + [\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)]^2} \\
& \quad + r(x_t^*) \left(-\frac{1}{2} \frac{\Psi_1(x_t^*)}{r(x_t^*)} \right)^T \left(-\frac{1}{2} \frac{\Psi_1(x_t^*)}{r(x_t^*)} \right) \\
& = \Psi_0(x_t^*) - \frac{1}{2} \frac{\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)}{r(x_t^*)} + \Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*) + \sqrt{[\Psi_0(x_t^*)]^2 + [\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)]^2} + \frac{\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)}{4r(x_t^*)} \\
& = \Psi_0(x_t^*) - \frac{1}{4} \frac{\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)}{r(x_t^*)} + \Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*) + \sqrt{[\Psi_0(x_t^*)]^2 + [\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)]^2}
\end{aligned}$$

La funcional $r(x_t^*)$, dada por (3.15), también se sustituye y todos los términos se reducen como sigue

$$\begin{aligned}
& \Psi_0(x_t^*) - \frac{\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)}{\left(\frac{4 \left[\frac{1}{4} \Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*) \right]}{\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*) + \Psi_0(x_t^*) + \sqrt{[\Psi_0(x_t^*)]^2 + [\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)]^2}} \right)} + \Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*) \\
& + \sqrt{[\Psi_0(x_t^*)]^2 + [\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)]^2} = \Psi_0(x_t^*) \\
& - \left(\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*) + \Psi_0(x_t^*) + \sqrt{[\Psi_0(x_t^*)]^2 + [\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)]^2} \right) \\
& + \Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*) + \sqrt{[\Psi_0(x_t^*)]^2 + [\Psi_1^T(x_t^*)\Psi_1(x_t^*)]^2} \\
& = 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto, la FCLK del sistema (3.1) y la ley de control óptima (3.16) satisfacen la ecuación (3.14), asociada con el índice de desempeño (3.13).

3.2.2 Control óptimo no lineal usando funcionales de L-K de tipo reducido

Con la finalidad de comparar el control óptimo no lineal obtenido en la sección anterior, con el uso de funcionales de tipo completo, ahora se diseña un controlador óptimo no lineal utilizando el enfoque de optimalidad inversa basado en un funcional de tipo reducido. Se considera el sistema no lineal con retardo afín en la entrada de la forma

$$\dot{x}(t) = f_0(x_t) + f_1(x_t)u \quad (3.18)$$

en donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado para $t \in \mathbb{R}^+$, $h > 0$ es el retardo conocido y la entrada de control es $u \in \mathbb{R}^m$. La condición inicial es la función $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ y $f_0(0_h) = \bar{0}$ cuando $u \equiv \bar{0}$. Las funciones no lineales $f_0 : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f_1 : C \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ se definen como

$$\begin{aligned}
f_0 & = A_0x(t) + A_1x(t-h) + f(x(t)) + g(x(t-h)) \\
f_1 & = B(x_t) \in \mathbb{R}^{n \times m},
\end{aligned} \quad (3.19)$$

en donde $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son las matrices de la parte lineal del sistema (3.19), la función matricial $B(x_t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $f, g \in \mathbb{R}^n$ son funciones no lineales y se consideran las siguientes suposiciones:

Suposición 5 *Las funciones no lineales f y g satisfacen localmente la condición de Lipschitz, es decir*

$$\begin{aligned} \|f(x(t))\|^2 &\leq \alpha_1^2 \|x(t)\|^2, \\ \|g(x(t-h))\|^2 &\leq \alpha_2^2 \|x(t-h)\|^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$.

Suposición 6 *Existe una FCLK $\hat{V}(x_t) \in \mathbb{R}$ que satisface las condiciones de la Definición 1.2.*

Suposición 7 *Existen escalares $\alpha_3, \beta \in \mathbb{R}^+$, tales que*

$$\alpha_3 \|x_t\|_h \leq \|2x^\top(t)PB(x_t)\|_h = \|\psi_1^\top(x_t)\|_h \leq \beta \|x_t\|_h. \quad (3.21)$$

De acuerdo al enfoque de optimalidad inversa, la ley de control $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ minimiza al índice de desempeño:

$$J(x_t, u) = \int_0^\infty \{q(x_t) + r(x_t)\|u\|^2\} dt \quad (3.22)$$

sujeto a (3.18)-(3.19), en donde

$$\begin{aligned} q(x_t) &= \psi_1^\top(x_t)\psi_1(x_t) + \sqrt{\psi_0^2(x_t) + [\psi_1^\top(x_t)\psi_1(x_t)]^2}, \\ r(x_t) &= \frac{1}{4} \frac{\psi_1^\top(x_t)\psi_1(x_t)}{q(x_t) + \psi_0(x_t)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

El problema de optimización puede reescribirse como

$$J^*(x_t^*, u^*) = \min_u J(x_t, u) \quad (3.24)$$

y está asociado con la derivada del funcional de Bellman $\hat{V}(x_t)$, entonces la ecuación del tipo HJB con el índice de desempeño (3.22) es

$$\min_u \left\{ \frac{d}{dt} \hat{V}(x_t) \Big|_{(3.19)} + q(x_t) + r(x_t)\|u\|^2 \right\} = 0. \quad (3.25)$$

A continuación se encuentran las condiciones suficientes para probar la existencia de una FCKL para el sistema (3.18)-(3.19). Además, se presentan las funcionales $\psi_0(x_t)$ y $\psi_1(x_t)$ tal que $u^* \in \mathcal{U}$ minimiza a (3.24).

3.2.2.1 Condiciones suficientes para que un funcional de tipo reducido sea una FCLK

Sea la funcional de tipo reducido (presentada en [53])

$$\hat{V}(x_t) = x^\top(t)Px(t) + \int_{t-h}^t x^\top(s)Qx(s)ds, \quad (3.26)$$

en donde $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son definidas positivas y la funcional (3.26) satisface

$$\lambda_{\min}(P)\|x(t)\|^2 \leq \hat{V}(x_t) \leq \{\lambda_{\max}(P) + \lambda_{\max}(Q)\} \|x_t\|_h^2.$$

La derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (3.18)-(3.19) está dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\hat{V}(x_t)}{dt} \right|_{(3.18)-(3.19)} &= 2x^\top(t)P\dot{x}(t) + x^\top(t)Qx(t) - x^\top(t-h)Qx(t-h) \\ &= x^\top(t) [PA_0 + A_0^\top P + Q] x(t) + 2x^\top(t)PB(x_t)u \\ &\quad + 2x^\top(t)P [A_1x(t-h) + f(x(t)) + g(x(t-h))] \\ &\quad - x^\top(t-h)Qx(t-h), \end{aligned}$$

con

$$z(t, t-h) = [x^\top(t), x^\top(t-h), f^\top(x(t)), g^\top(x(t-h))] \quad (3.27)$$

y la ecuación anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\hat{V}(x_t)}{dt} \right|_{(3.18)-(3.19)} &= z^\top(t, t-h) \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^\top P + Q, & PA_1, & P, & P \\ A_1^\top P, & -Q, & 0_{n \times n}, & 0_{n \times n} \\ P, & 0_{n \times n}, & 0_{n \times n}, & 0_{n \times n} \\ P, & 0_{n \times n}, & 0_{n \times n}, & 0_{n \times n} \end{bmatrix} z(t, t-h) \\ &\quad + 2x^\top(t)PB(x_t)u, \end{aligned}$$

se suman y se restan los términos $\varepsilon_1 f^\top(x(t))f(x(t))$ y $\varepsilon_2 g^\top(x(t-h))g(x(t-h))$ para $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ y se obtiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\hat{V}(x_t)}{dt} \right|_{(3.18)-(3.19)} &= z^\top(t, t-h)S z(t, t-h) + 2x^\top(t)PB(x_t)u \\ &\quad + \varepsilon_1 f^\top(x(t))f(x(t)) + \varepsilon_2 g^\top(x(t-h))g(x(t-h)), \end{aligned}$$

en donde

$$S = \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^\top P + Q, & PA_1, & P, & P \\ A_1^\top P, & -Q, & 0_{n \times n}, & 0_{n \times n} \\ P, & 0_{n \times n}, & -\varepsilon_1 I_n, & 0_{n \times n} \\ P, & 0_{n \times n}, & 0_{n \times n}, & -\varepsilon_1 I_n \end{bmatrix}$$

y la derivada se reescribe utilizando las desigualdades dadas en (3.20) como

$$\left. \frac{d\hat{V}(x_t)}{dt} \right|_{(3.18)-(3.19)} \leq \psi_0(x_t) + \psi_1(x_t)u,$$

con

$$\psi_0(x_t) = z^\top(t, t-h)S z(t, t-h) + \varepsilon_1 \alpha_1^2 \|x(t)\|^2 + \varepsilon_2 \alpha_2^2 \|x(t-h)\|^2$$

y

$$\psi_1^T(x_t) = 2x^\top(t)PB(x_t). \quad (3.28)$$

Se utiliza el Procedimiento S [125], [88] y la propiedad (3.20) para probar que $\psi_0(x_t) < 0$, ésto implica que la matriz S también es definida negativa. Se definen

$$\begin{aligned} 0 > F_0 &= z^\top(t, t-h)S z(t, t-h), \\ 0 > F_1 &= -\|x(t)\|^2, \\ 0 > F_2 &= -\|x(t-h)\|^2 \end{aligned}$$

y si existen escalares positivos $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, en donde $\tau_1 = \varepsilon_1 \alpha_1^2$ y $\tau_2 = \varepsilon_2 \alpha_2^2$, tales que

$$\psi_0(x_t) = F_0 + \tau_1 F_1 + \tau_2 F_2 < 0$$

entonces S es definida negativa. Este resultado se resume a continuación:

Teorema 3.3 *Sea el sistema (3.18)-(3.19) y dados escalares positivos $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, si el conjunto $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, P, Q)$ es la solución de la desigualdad matricial:*

$$S = \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^\top P + Q + \varepsilon_1 \alpha_1^2 I_n, & PA_1, & P, & P \\ A_1^\top P, & \varepsilon_2 \alpha_2^2 I_n - Q, & 0_{n \times n}, & 0_{n \times n} \\ P, & 0_{n \times n}, & -\varepsilon_1 I_n, & 0_{n \times n} \\ P, & 0_{n \times n}, & 0_{n \times n}, & -\varepsilon_2 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (3.29)$$

entonces, la funcional (3.26) es una FCLK para el sistema (3.18)-(3.19).

La funcional $\psi_0(x_t)$ se reescribe como

$$\psi_0(x_t) = z^\top(t, t-h)S z(t, t-h), \quad (3.30)$$

con $z(t, t-h)$ y $S \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, dados en (3.27) y (3.29), respectivamente. El vector $\psi_1^T(x_t)$ está dado en (3.28).

El conjunto de soluciones de (3.29), si es que existe, implica la existencia de una familia de controladores que pueden ajustarse fijando los parámetros ε_1 y ε_2 . También, del Teorema 3.3 se obtiene una derivada estrictamente negativa lo cual garantiza la estabilidad asintótica de la solución trivial del sistema (3.18)-(3.20) y aplicando el enfoque de optimalidad inversa se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.1 *Bajo la suposición de que se cumple la condición del Teorema 3.3, la FCLK satisface la ecuación del tipo de Bellman (3.25) y en consecuencia se obtiene la ley de control*

$$u^* = -\frac{1}{2r(x_t)}\psi_1(x_t).$$

Para asegurar la suavidad de la ley de control y evitar la singularidad cuando $\psi_1(x_t) = 0$, para algún $x_t \neq 0$, la ley de control se define como

$$u^* = \begin{cases} u & \text{con } \psi_1^T(x_t)\psi_1(x_t) \neq 0 \\ 0 & \text{con } \psi_1^T(x_t)\psi_1(x_t) = 0 \end{cases} . \quad (3.31)$$

3.2.2.2 Continuidad de la ley de control (3.31)

La ley de control (3.31) es continua en $x(t) = 0$ si la FCLK satisface la propiedad del pequeño control [37] (ver Definición 1.3). La norma de (3.31) es

$$\|u^*\| = 2 \frac{\left\| \psi_1(x_t^*) \left(\psi_1^\top(x_t^*) \psi_1(x_t^*) + \psi_0(x_t^*) + \sqrt{\psi_0^2(x_t^*) + [\psi_1^\top(x_t^*) \psi_1(x_t^*)]^2} \right) \right\|}{\psi_1^\top(x_t^*) \psi_1(x_t^*)}, \quad (3.32)$$

en donde $\psi_0(x_t^*)$ y $\psi_1^\top(x_t^*) \neq 0$ están dadas por (3.30) y (3.28), respectivamente. El término $\psi_0(x_t^*)$ satisface

$$\|\psi_0(x_t^*)\| \leq \bar{\alpha}_1 \|x_t^*\|_h^2, \text{ para } \|x_t^*\|_h < \delta, \quad 0 < \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_1 = 2 \{ \|P\| (\|A_0\| + \|A_1\| + \alpha_1 + \alpha_2) + \varepsilon_1 \alpha_1^2 + \varepsilon_2 \alpha_2^2 \} + \|Q\|.$$

Entonces de la expresión (3.32) y de la Suposición 7, la funcional $\psi_1^\top(x_t^*)$ satisface la siguiente desigualdad

$$\|u^*\| \leq L \frac{\|x_t^*\|_h^3}{\|x_t^*\|_h^2} = L \|x_t^*\|_h, \quad L = \frac{4(\beta^2 + \beta \bar{\alpha}_1)}{\alpha_3^2}$$

El término en el numerador es de mayor grado que el del denominador, por lo que la relación de convergencia también es mayor, entonces $\|u^*\| \leq L \|x_t^*\|_h$ y $\|x_t^*\|_h < \delta(\varepsilon) \implies \|u^*\| < \varepsilon$, con $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$. Ésto implica que la funcional $\hat{V}(x_t)$ satisface la propiedad del pequeño control y se concluye que u^* es continua en $x^*(t) = 0$.

De manera similar, pero sólo para el caso escalar, lo cual corresponde a nuestra plataforma experimental, se presenta el siguiente análisis.

La continuidad de la ley de control (3.31) en $x(t) = 0$, también puede desarrollarse de acuerdo a las ideas presentadas en [110]. La propiedad del pequeño control puede reescribirse como

$$\limsup_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \frac{\psi_0(\varphi)}{\|\psi_1(\varphi)\|} \leq 0,$$

y bajo la Suposición 5 la siguiente desigualdad se satisface

$$\frac{1}{\alpha_3} \limsup_{\|x_t^*\|_h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\gamma}{\|x_t^*\|_h} \right\} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_3} \limsup_{\|x_t^*\|_h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|x_t^*\|_h^2}{\|x_t^*\|_h} \right\} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_3} \limsup_{\|x_t^*\|_h \rightarrow 0} \|x_t^*\|_h = 0,$$

en donde

$$\gamma = - (2PA_0 + Q + \varepsilon_1^2 \alpha_1^2) x^2(t) - \varepsilon_1 \alpha_1^2 x^2(t-h) + \varepsilon_1 f^2(x(t)) + \varepsilon_2 g^2(x(t-h)) \\ - 2x^\top(t-h) P A_1 x(t) - 2f^\top(x(t)) P x(t) - 2g^\top(x(t-h)) P x(t).$$

En la siguiente sección se presenta otro enfoque de control, también se considera un modelo no lineal pero en el caso discreto.

3.3 Control subóptimo en tiempo discreto para sistemas no lineales afines con retardo en el estado y en el control

Los controladores de la sección 3.2, obtenidos mediante el análisis en tiempo continuo, se implementan aproximando las partes integrales con un método de cuadratura. Ésto puede evitarse mediante el análisis en tiempo discreto, que también permite considerar un modelo con retardos tanto en el estado como en el control, lo cual describe mejor a la dinámica del sistema.

La dificultad que existe al resolver el problema del control óptimo [16] (caso continuo y discreto) de horizonte finito e infinito para sistemas no lineales libres de retardo y no lineales con retardos consiste en encontrar la solución exacta de la ecuación HJB, la cual es generalmente una ecuación diferencial parcial no lineal o una ecuación en diferencias muy difícil de resolver, por lo que comúnmente, no existen soluciones analíticas, con la excepción de casos simples. El problema del control óptimo para sistemas con retardos es un problema infinitodimensional [70], por lo que su solución es más complicada. Para superar esta dificultad se han empleado métodos computacionales recursivos que la resuelven indirectamente. Estos enfoques se basan en la herramienta de programación dinámica [8], cuyo objetivo, en el caso de sistemas no lineales en tiempo discreto, consiste en elegir una secuencia de control tal que una función de costo sea minimizada.

En esta sección se propone el uso del enfoque de Programación Dinámica en tiempo discreto para diseñar una secuencia de controles subóptimos que garanticen que se alcanza una aproximación del mínimo de un índice de desempeño cuadrático de horizonte finito.

Se considera el sistema en tiempo discreto de la forma

$$x_{k+1} = f_0(x_k, x_{k-M_1}) + f_1(x_k, x_{k-M_1})u_{k-M_2}, \quad (3.33)$$

en donde $k = 0, 1, \dots, \tilde{N}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el error entre la variable del proceso y el valor deseado, las funciones no lineales son $f_0(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $f_1(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, el vector de control es $u_k \in \mathbb{R}^m$ y los retardos satisfacen $M_2 \leq M_1$. Se consideran las siguientes suposiciones:

Suposición 8 *Los valores iniciales del estado $x_{-M_1}, x_{-M_1+1}, \dots, x_0$ son dados arbitrariamente y los controles iniciales $u_{-M_2}, u_{-M_2+1}, \dots, u_{-1}$ son iguales al vector cero.*

Suposición 9 *El término*

$$f_0(x_k, x_{k-M_1}) + f_1(x_k, x_{k-M_1})u_{k-M_2}$$

es Lipschitz en un conjunto Ω en \mathbb{R}^n que contiene al origen.

Suposición 10 *El sistema (3.33) es controlable en el sentido de que existe una ley de control acotada que estabiliza al sistema en $\tilde{N} = N + M_2$ pasos.*

El problema consiste en encontrar la secuencia de controles $u_{k-M_2}, \forall k \in [M_2, \tilde{N} - 1]$ que

minimiza a la función de costo cuadrática

$$J = \frac{1}{2}x_{\tilde{N}}^T H x_{\tilde{N}} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} \{x_k^T Q x_k + u_{k-M_2}^T R u_{k-M_2}\}$$

sujeta a (3.33), en donde $H, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H, Q \geq 0$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $R > 0$.

3.3.1 Procedimiento de optimización de horizonte finito

De la Suposición 8 se sabe que el valor de los controles iniciales es cero, entonces el índice de desempeño puede reescribirse como

$$J = \frac{1}{2}x_{\tilde{N}}^T H x_{\tilde{N}} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M_2-1} x_k^T Q x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=M_2}^{\tilde{N}-1} \{x_k^T Q x_k + u_{k-M_2}^T R u_{k-M_2}\}$$

y de acuerdo al enfoque de programación dinámica en tiempo discreto para sistemas libres de retardo [52] se define la siguiente notación

$$J_{\tilde{N}, \tilde{N}}^* = \frac{1}{2}x_{\tilde{N}}^T H x_{\tilde{N}}, \quad (3.34)$$

en donde $J_{\tilde{N}, \tilde{N}}^*$ denota el valor del índice de desempeño en el horizonte. El término (3.34) puede ser llamado como el valor óptimo de J , en el instante \tilde{N} , éste no depende de la ley de control, ya que $u_{\tilde{N}-M_2} = u_N = 0$ y bajo la Suposición 10 el valor del estado se es igual al valor de referencia. En el primer paso se calcula el control $u_{\tilde{N}-M_2-1}$ y se define al índice de desempeño desde $\tilde{N} - 1$ a \tilde{N} como sigue

$$\begin{aligned} J_{\tilde{N}-1, \tilde{N}}^* &= \frac{1}{2} \min_{u_{\tilde{N}-M_2-1}} \left\{ \begin{array}{l} x_{\tilde{N}}^T H x_{\tilde{N}} + x_{\tilde{N}-1}^T Q x_{\tilde{N}-1} \\ + u_{\tilde{N}-M_2-1}^T R u_{\tilde{N}-M_2-1} \end{array} \right\}, \\ &= J_{\tilde{N}, \tilde{N}}^* + \frac{1}{2} \min_{u_{\tilde{N}-M_2-1}} \left\{ \begin{array}{l} x_{\tilde{N}-1}^T Q x_{\tilde{N}-1} \\ + u_{\tilde{N}-M_2-1}^T R u_{\tilde{N}-M_2-1} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

el valor de $x_{\tilde{N}}$ es calculado de la ecuación del sistema (3.33) como

$$x_{\tilde{N}} = f_0(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}) + f_1(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1})u_{\tilde{N}-M_2-1} \quad (3.36)$$

y se sustituye en (3.35) tal que

$$J_{\tilde{N}-1, \tilde{N}}^*(x_{\tilde{N}-1}, u_{\tilde{N}-M_2-1}) = \frac{1}{2} \min_{u_{\tilde{N}-M_2-1}} \mathcal{H}(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}, u_{\tilde{N}-M_2-1}), \quad (3.37)$$

en donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}, u_{\tilde{N}-M_2-1}) &= f_0^T(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1})Hf_0(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}) \\
&+ x_{\tilde{N}-1}^T Q x_{\tilde{N}-1} \\
&+ 2u_{\tilde{N}-M_2-1}^T f_1^T(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1})Hf_0(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}) \\
&+ u_{\tilde{N}-M_2-1}^T \left[\begin{array}{c} f_1^T(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}) \\ \times Hf_1(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}) + R \end{array} \right] u_{\tilde{N}-M_2-1}.
\end{aligned}$$

Para minimizar a $J_{\tilde{N}-1, \tilde{N}}$ con respecto a $u_{\tilde{N}-M_2-1}$, se consideran solo los valores de control para los cuales se satisfacen las siguientes condiciones para hallar un mínimo:

$$\begin{aligned}
1. \quad \nabla_{u_{\tilde{N}-M_2-1}} \mathcal{H}(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}, u_{\tilde{N}-M_2-1}) &= \frac{\partial J_{\tilde{N}-1, \tilde{N}}}{\partial u_{\tilde{N}-M_2-1}} = 0, \\
2. \quad \nabla_{u_{\tilde{N}-M_2-1} u_{\tilde{N}-M_2-1}} \mathcal{H}(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}, u_{\tilde{N}-M_2-1}) &= \frac{\partial^2 J_{\tilde{N}-1, \tilde{N}}}{\partial u_{\tilde{N}-M_2-1}^2} > 0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

De la primera condición necesaria de (3.38) se obtiene

$$\begin{aligned}
\nabla_{u_{\tilde{N}-M_2-1}} \mathcal{H}(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}, u_{\tilde{N}-M_2-1}) &= 0 = \\
f_1^T(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1})Hf_0(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}) \\
+ [f_1^T(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1})Hf_1(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}) + R] u_{\tilde{N}-M_2-1}
\end{aligned}$$

y el valor de la ley de control $u_{\tilde{N}-M_2-1}$ es

$$\begin{aligned}
u_{\tilde{N}-M_2-1}^* &= - \left[f_1^T(x_{\tilde{N}-1}^*, x_{\tilde{N}-M_1-1}^*)Hf_1(x_{\tilde{N}-1}^*, x_{\tilde{N}-M_1-1}^*) + R \right]^{-1} \\
&\times f_1^T(x_{\tilde{N}-1}^*, x_{\tilde{N}-M_1-1}^*)Hf_0(x_{\tilde{N}-1}^*, x_{\tilde{N}-M_1-1}^*).
\end{aligned}$$

Como la matriz R es definida positiva el término

$$[f_1^T(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1})Hf_1(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}) + R]$$

posee inversa y de la segunda condición suficiente de (3.38) se verifica que

$$\begin{aligned}
\nabla_{u_{\tilde{N}-M_2-1} u_{\tilde{N}-M_2-1}} \mathcal{H}(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}, u_{\tilde{N}-M_2-1}) &= \\
f_1^T(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1})Hf_1(x_{\tilde{N}-1}, x_{\tilde{N}-M_1-1}) + R &> 0,
\end{aligned}$$

entonces la función (3.37) es fuertemente convexa con respecto a $u_{\tilde{N}-M_2-1}$ y existe un mínimo. El valor de control $u_{\tilde{N}-M_2-1}^*$ es óptimo en el instante $\tilde{N} - M_2 - 1$ y de acuerdo al Principio de Optimalidad de Bellman [52], éste genera la trayectoria óptima $x_{\tilde{N}-1}^*$. En el segundo paso se desea encontrar el control $u_{\tilde{N}-M_2-2}$, ahora el índice de desempeño en el instante $\tilde{N} - M_2 - 2$ está dado por

$$\begin{aligned}
J_{\tilde{N}-2, \tilde{N}}(x_{\tilde{N}-2}, u_{\tilde{N}-M_2-1}, u_{\tilde{N}-M_2-2}) &= J_{\tilde{N}-1, \tilde{N}}(x_{\tilde{N}-1}, u_{\tilde{N}-M_2-1}) \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ x_{\tilde{N}-2}^T Q x_{\tilde{N}-2} + u_{\tilde{N}-M_2-2}^T R u_{\tilde{N}-M_2-2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

y sustituyendo $J_{\tilde{N}-1, \tilde{N}}(x_{\tilde{N}-1}, u_{\tilde{N}-M_2-1})$, dado en (3.37) se obtiene

$$J_{\tilde{N}-2, \tilde{N}}(x_{\tilde{N}-2}, u_{\tilde{N}-M_2-1}, u_{\tilde{N}-M_2-2}) = \frac{1}{2} \min_{u_{\tilde{N}-M_2-1}, u_{\tilde{N}-M_2-2}} \left\{ \begin{array}{l} x_{\tilde{N}}^T H x_{\tilde{N}} + x_{\tilde{N}-1}^T Q x_{\tilde{N}-1} \\ + x_{\tilde{N}-2}^T Q x_{\tilde{N}-2} + u_{\tilde{N}-M_2-1}^T R u_{\tilde{N}-M_2-1} \\ + u_{\tilde{N}-M_2-2}^T R u_{\tilde{N}-M_2-2} \end{array} \right\}, \quad (3.40)$$

en donde $x_{\tilde{N}}$ está dado por (3.36), y de (3.33) sigue que

$$x_{\tilde{N}-1} = f_0(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) + f_1(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2})u_{\tilde{N}-M_2-2}, \quad (3.41)$$

$$x_{\tilde{N}-2} = f_0(x_{\tilde{N}-3}, x_{\tilde{N}-M_1-3}) + f_1(x_{\tilde{N}-3}, x_{\tilde{N}-M_1-3})u_{\tilde{N}-M_2-3}.$$

Observe que $x_{\tilde{N}}$ depende de $u_{\tilde{N}-M_2-1}$ y $x_{\tilde{N}-2}$ de $u_{\tilde{N}-M_2-3}$, entonces el único término que depende del control $u_{\tilde{N}-M_2-2}$ es el que involucra a $x_{\tilde{N}-1}$ y como el control $u_{\tilde{N}-M_2-1}^*$, encontrado en el paso anterior, ya es óptimo se minimiza solo con respecto a $u_{\tilde{N}-M_2-2}$. Se reemplaza (3.41) en (3.40) y se obtiene

$$J_{\tilde{N}-2, \tilde{N}}(x_{\tilde{N}-2}, u_{\tilde{N}-M_2-1}, u_{\tilde{N}-M_2-2}) = \frac{1}{2} \min_{u_{\tilde{N}-M_2-2}} \mathcal{H}(x_{\tilde{N}}, x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}, u_{\tilde{N}-M_2-1}, u_{\tilde{N}-M_2-2}), \quad (3.42)$$

en donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\cdot) &= x_{\tilde{N}}^T H x_{\tilde{N}} + x_{\tilde{N}-2}^T Q x_{\tilde{N}-2} + u_{\tilde{N}-M_2-1}^T R u_{\tilde{N}-M_2-1} \\ &+ f_0^T(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) Q f_0(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) \\ &+ 2u_{\tilde{N}-M_2-2}^T f_1^T(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) Q f_0(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) \\ &+ u_{\tilde{N}-M_2-2}^T \left[\begin{array}{l} f_1^T(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) \\ \times Q f_1(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) + R \end{array} \right] u_{\tilde{N}-M_2-2}. \end{aligned}$$

El control $u_{\tilde{N}-M_2-2}$ se calcula a partir de la primera condición de (3.38), es decir

$$\begin{aligned} \nabla_{u_{\tilde{N}-M_2-2}} \mathcal{H}(\cdot) &= \frac{\partial J_{\tilde{N}-2, \tilde{N}}}{\partial u_{\tilde{N}-M_2-2}} \\ &= f_1^T(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) \times Q f_0(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) \\ &+ [f_1^T(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) Q f_1(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) + R] u_{\tilde{N}-M_2-2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La función (3.42) es fuertemente convexa con respecto a $u_{\tilde{N}-M_2-2}$ y también se garantiza la existencia de un mínimo, sin embargo, solo se tiene una aproximación del valor óptimo como

$$\begin{aligned} u_{\tilde{N}-M_2-2} &= - [f_1^T(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) Q f_1(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) + R]^{-1} \\ &\times f_1^T(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}) Q f_0(x_{\tilde{N}-2}, x_{\tilde{N}-M_1-2}). \end{aligned}$$

La ley de control en el instante $u_{\tilde{N}-M_2-2}$ es subóptima ya que con este procedimiento no se verifica si se satisface la ecuación del tipo de Bellman ni se resuelven ecuaciones del tipo de Riccati. La secuencia de controles se obtiene repitiendo el proceso, el siguiente valor de control es $u_{\tilde{N}-M_2-3}$ y así sucesivamente hacia atrás. Finalmente, el procedimiento de optimización nos lleva al siguiente resultado:

Teorema 3.4 *Sea el sistema (3.33), si se satisfacen las Suposiciones 8-10 entonces la secuencia de controles subóptimos*

$$u_{k-M_2} = 0, \text{ para } k = 0, 1, \dots, M_2 - 1 \quad (3.43)$$

y

$$u_{k-M_2} = - [f_1^T(x_k, x_{k-M_1})E f_1(x_k, x_{k-M_1}) + R]^{-1} f_1^T(x_k, x_{k-M_1})E f_0(x_k, x_{k-M_1}), \quad (3.44)$$

para $k = M_2, \dots, \tilde{N} - 1$ y $E = \begin{cases} Q, & k = M_2, \dots, \tilde{N} - 1 \\ H, & k = \tilde{N} \end{cases}$, garantiza que se alcanza una aproximación para el mínimo valor del índice de desempeño, descrito por las funciones

$$J_{\tilde{N}, \tilde{N}}^* = \frac{1}{2} x_{\tilde{N}}^T H x_{\tilde{N}}$$

y

$$J_{\tilde{N}-k, \tilde{N}}(x_{\tilde{N}-k}, u_{\tilde{N}-M_2-k}) = J_{\tilde{N}-k+1, \tilde{N}} + \frac{1}{2} \left\{ x_{\tilde{N}-k}^T Q x_{\tilde{N}-k} + u_{\tilde{N}-M_2-k}^T R u_{\tilde{N}-M_2-k} \right\}$$

para $k = 1, \dots, \tilde{N} - 1$, sujetas al sistema (3.33).

Observación 3.1 *Observe que el índice de desempeño $J_{\tilde{N}-2, \tilde{N}}$, dado en (3.39), depende del valor anterior $J_{\tilde{N}-1, \tilde{N}}^*$ (ecuación (3.35)) y éste a su vez depende del valor $J_{\tilde{N}, \tilde{N}}^*$, entonces es posible generalizar que la función de costo satisface*

$$J_{\tilde{N}-k, \tilde{N}} < J_{\tilde{N}-k-1, \tilde{N}}, \quad k = 0, \dots, \tilde{N}.$$

Después del proceso de optimización, que se muestra en esta sección, se obtiene una secuencia de control subóptima. Se considera subóptima, en el sentido de que en cada iteración se realiza una minimización del índice de desempeño, sin embargo no se verifica si se satisface una ecuación del tipo HJB, como en el caso continuo de la sección 3.2.

3.4 Conclusiones

En este capítulo se obtuvieron dos controladores óptimos no lineales por optimalidad inversa para una clase de sistemas con retardos, el primero con funcionales de tipo completo y el segundo con funcionales de tipo reducido. En ambos casos se consideran modelos con una parte lineal y una parte no lineal que satisface localmente la condición de Lipschitz, sin embargo para realizar el análisis del primer controlador se requiere que la parte nominal lineal sea estable, mientras que para el segundo esto no es necesario. Las condiciones suficientes que

garantizan que dichas las funcionales sean FCLK se presentaron en forma de desigualdades lineales matriciales, pero para expresar de forma explícita al primer controlador se requiere la construcción de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos, mientras que para el segundo controlador no son necesarios cálculos adicionales. Ambos controladores garantizan la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado y serán validados experimentalmente en el deshidratador atmosférico.

También se obtuvo una secuencia de control subóptima en tiempo discreto. Con esta estrategia es posible considerar sistemas no lineales con ambos retardos y aunque no se verifica si se satisface una ecuación del tipo HJB se garantiza que se alcanza una aproximación al mínimo valor del índice de desempeño.

4

Estrategias de control para sistemas lineales con retardos

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan dos estrategias de control para sistemas lineales con retardo en el estado. En la sección 4.2, primero se combina el enfoque de funcionales de tipo completo, presentado en el Apéndice A.1.4, con la estrategia de control por costo garantizado [10] para diseñar un controlador que estabiliza al sistema en lazo cerrado y que además asegure una cota superior para una función de costo. Después con la técnica de rediseño de Lyapunov, presentada en el Apéndice A.2, se diseña un componente adicional de la ley de control para hacerla más robusta ante una clase de incertidumbres.

En la sección 4.3 se analizan las propiedades de estabilidad robusta de un control predictor dinámico para sistemas lineales con retardos en el estado y en el control, en el marco del enfoque frecuencial. Se presentan cotas de estabilidad robusta para los casos de incertidumbre en los parámetros o en el retardo del estado o el control y en ambos retardos.

4.2 Control con costo garantizado para sistemas lineales con retardo en el estado e incertidumbre en la entrada

El análisis se restringe a sistemas lineales con retardo puntual en el estado y con términos inciertos que se introducen a la ecuación de estado a través del mismo canal que la variable de control, los cuales satisfacen ciertas condiciones. Se considera a la funcional de tipo completo, dada por (A.9), como una funcional de L-K para el sistema nominal, después para el sistema con incertidumbre se diseña un control de la forma $v = v_1(x_t) + v_2(x_t)$, el cual provee robustez al diseño. Para el primer componente $v_1(x_t)$ se utiliza la estrategia de control por costo garantizado para sistemas con retardos [20], pero se hace en el marco de los funcionales de tipo completo como en [108], en donde se presenta un control que asegura una cota superior para la función de costo. Para el diseño del componente $v_2(x_t)$ se aplica la

técnica del rediseño de Lyapunov para sistemas libres de retardos con la finalidad de cancelar el efecto de la incertidumbre.

El sistema es de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + B[u + \delta(t, x_t, u)], \quad (4.1)$$

en donde $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, la entrada de control es $u \in \mathbb{R}^m$ y se consideran la siguiente suposición:

Suposición 11 *La incertidumbre $\delta(t, x_t, u) \in \mathbb{R}^m$ satisface*

$$\delta(t, x_t, u)|_{x_t=0, u=0} = 0. \quad (4.2)$$

Además, de acuerdo a la metodología del rediseño de Lyapunov, para una ley de control de la forma

$$u = \psi(t, x) + v \quad (4.3)$$

(con $\psi(t, x)$ una ley de realimentación de estado) la incertidumbre δ satisface la siguiente desigualdad

$$\|\delta(t, x_t, \psi(t, x) + v)\| \leq \rho(x_t) + k\|v\|, \quad 0 \leq k < 1, \quad (4.4)$$

en donde $\rho(x_t)$ es un función continua no negativa.

Para el sistema nominal

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu, \quad (4.5)$$

se considera a la ley de control

$$u = \psi(t, x) = F_0x(t) + F_1x(t-h) \quad (4.6)$$

tal que el origen del sistema nominal en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_0 + BF_0)x(t) + (A_1 + BF_1)x(t-h) \\ &= \bar{A}_0x(t) + \bar{A}_1x(t-h) \end{aligned} \quad (4.7)$$

es exponencialmente estable. La funcional de tipo completo $V(x_t)$, dado en (A.9), es una funcional de L-K para el sistema (4.7), ya que satisface las siguientes condiciones:

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq V(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2, \quad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n),$$

para $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ y

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(4.7)} = -x^T(t)W_0x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) - \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta,$$

en donde W_0, W_1 y W_2 son matrices definidas positivas. Entonces, con la forma explícita de la funcional V y bajo las suposiciones (4.2) y (4.4) se diseña el componente adicional de la

ley de control $v = \gamma(t, x)$ tal que el control completo $u = \psi(t, x) + \gamma(t, x)$ estabiliza al sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = \bar{A}_0 x(t) + \bar{A}_1 x(t-h) + B[v + \delta(t, x_t, \psi(t, x) + v)]. \quad (4.8)$$

La derivada temporal de $V(x_t)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (4.8) se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(4.8)} &= -x^T(t)Wx(t) + x^T(t)[W_1 + hW_2]x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) \\ &\quad - \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta \\ &\quad + 2x^T(t)U(0)[Bv + B\delta(t, x_t, \psi(t, x) + v)] \\ &\quad + 2[Bv + B\delta(t, x_t, \psi(t, x) + v)]^T \int_{-h}^0 U(-h-\theta)\bar{A}_1x(t+\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Bajo la restricción $W = W_0 + W_1 + hW_2$, la derivada puede expresarse como

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(4.8)} &= -x^T(t)W_0x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) - \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta \\ &\quad + \omega^T(x_t)[v + \delta(t, x_t, \psi(t, x) + v)], \end{aligned} \quad (4.9)$$

en donde

$$\omega^T(x_t) = 2\omega_1^T(x_t)B \quad (4.10)$$

y

$$\omega_1(x_t) = U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-h-\theta)\bar{A}_1x(t+\theta)d\theta. \quad (4.11)$$

La derivada (4.9) tiene tres términos negativos, resultado de la derivada a lo largo de las trayectorias del sistema nominal, por lo que, para asegurar la negatividad de la derivada se elige al control de la forma

$$v = v_1(x_t) + v_2(x_t) \quad (4.12)$$

tal que se satisfaga que

$$\omega^T(x_t)(v_1 + v_2) + \omega^T(x_t)\delta(t, x_t, \psi(t, x) + v_1 + v_2) \leq 0.$$

A continuación se diseña el control con costo garantizado.

4.2.1 Control con costo garantizado

Primero se diseña la ley de control $v_1(x_t)$ que asegura una cota superior para la función de costo

$$J(v_1(x_t)) = \int_0^\infty \{x^T(t)W_0x(t) + v_1^T(x_t)Rv_1(x_t)\} dt, \quad (4.13)$$

que solo depende del componente de control $v_1(x_t)$ ya que $v_2(x_t)$ se diseña con la finalidad de cancelar el efecto de la incertidumbre. El componente

$$v_1(x_t) = -\tilde{R}^{-1}B^T\omega_1(x_t), \quad (4.14)$$

en donde la matriz $\tilde{R} = \frac{1}{2}R > 0$ y la derivada (4.9) se reescribe como

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(4.8)} &= -x^T(t)W_0x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) - \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta \\ &\quad + \underbrace{2\omega_1^T(x_t)B\tilde{R}^{-1}\tilde{R}v_1(x_t)}_{-v_1^T(x_t)} + \omega^T(x_t)[v_2(x_t) + \delta(t, x_t, \psi(t, x) + v_1 + v_2)]. \end{aligned}$$

Del lado izquierdo de la ecuación se completa al integrando del índice de desempeño y se obtiene la ecuación del tipo HJB

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(4.8)} + x^T(t)W_0x(t) + v_1^T(x_t)Rv_1(x_t) &= -x^T(t-h)W_1x(t-h) \\ &\quad - \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta \\ &\quad + \omega^T(x_t)[v_2(x_t) + \delta(t, x_t, \psi(t, x) + v_1 + v_2)], \end{aligned}$$

entonces si se asegura que

$$\omega^T(x_t)[v_2(x_t) + \delta(t, x_t, \psi(t, x) + v_1 + v_2)] \leq 0 \quad (4.15)$$

se puede garantizar una cota superior para la función de costo (4.13), lo cual se explica más adelante.

El segundo paso consiste en el diseño del componente $v_2(x_t)$ tal que se satisfaga la condición (4.15), entonces de acuerdo a (4.4) la incertidumbre δ satisface

$$\|\delta(t, x_t, \psi(t, x) + v_1(x_t) + v_2(x_t))\| \leq \tilde{\rho}(x_t) + k \|v_2(x_t)\|, \quad 0 \leq k < 1, \quad (4.16)$$

en donde $\tilde{\rho}(x_t) = \rho(x_t) + k \|v_1(x_t)\|$ y $\rho(x_t)$ son funcionales no negativas. La norma de $v_1(x_t)$ esta dada por

$$\|v_1(x_t)\| \leq \max_{\theta \in [0, h]} \|U(\theta)\| \left\| \tilde{R}^{-1} \right\| \|B^T\| (1 + h \|\bar{A}_1\|) \|x_t\|_h. \quad (4.17)$$

Siguiendo la metodología del rediseño de Lyapunov [43] se obtiene la ley de control

$$v_2(x_t) \leq -\frac{\tilde{\eta}(x_t)}{(1-k)} \cdot \frac{\omega(x_t)}{\|\omega(x_t)\|}, \quad (4.18)$$

en donde $\tilde{\eta}(x_t) \geq \tilde{\rho}(x_t)$. La desigualdad (4.15) se satisface al sustituir (4.16) y (4.18) como

sigue

$$\begin{aligned}
\omega^T(x_t) [v_2(x_t) + \delta(t, x_t, \psi(t, x) + v_1 + v_2)] &\leq -\tilde{\eta}(x_t) \left[\frac{1}{1-k} - \frac{k}{1-k} \right] \|\omega(x_t)\| + \|\omega(x_t)\| \tilde{\rho}(x_t) \\
&\leq -\|\omega(x_t)\| \tilde{\rho}(x_t) + \|\omega(x_t)\| \tilde{\rho}(x_t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, con la ley de control (4.12) la derivada de $V(x_t)$ a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (4.8) es negativa. A continuación se calcula la cota superior de la función de costo (4.13).

4.2.1.1 Cota superior garantizada del índice de desempeño

El sistema en lazo cerrado con el controlador $v(x_t)$, dado en la ecuación (4.12), es asintóticamente estable y el efecto de la incertidumbre δ ha sido compensado, es decir se satisface que

$$\dot{V}(x_t) + x^T(t)W_0x(t) + v_1^T(x_t)Rv_1(x_t) \leq 0.$$

Entonces, la desigualdad anterior se integra desde 0 hasta ∞ y se obtiene

$$\int_0^\infty \{x^T(t)W_0x(t) + v_1^T(x_t)Rv_1(x_t)\} dt \leq - \int_0^\infty \dot{V}(x_t)dt = V(\varphi),$$

en donde $V(\varphi)$ está definido en (A.9), por lo tanto $V(\varphi)$ es una cota superior de la función de costo J . En el siguiente teorema se presentan estos resultados.

Teorema 4.1 *Sea el sistema lineal con retardo e incertidumbre en la entrada (4.1) y sea la funcional de tipo completo $V(x_t)$, dado en (A.9), una funcional de Lyapunov-Krasovskii para el sistema nominal (4.7), si el sistema en lazo cerrado con el controlador $u + v$ es asintóticamente estable, en donde u es una ley de control de realimentación estabilizante y $v = v_1(x_t) + v_2(x_t)$, conformado por los controladores (4.14) y (4.18), compensa el efecto de la incertidumbre, entonces la función de costo J , dada por (4.13), tiene la siguiente cota superior*

$$J \leq V(\varphi).$$

4.2.2 Ejemplos

En esta sección se presentan dos ejemplos, simulados utilizando el software Matlab-Simulink, que ilustran el método propuesto.

Ejemplo 4.1 *Considere un proceso de refinamiento químico con retardo de transporte [96], descrito por el modelo*

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-1) + B[u(t) + \delta(t, x_t, u)],$$

en donde $x(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, $u = [u_1, u_2]^T$, y las matrices A_0 , A_1 y B están

dadas por

$$A_0 = \begin{bmatrix} -4.93 & -1.01 & 0 & 0 \\ -3.2 & -5.3 & -12.8 & 0 \\ 6.4 & 0.347 & -32.5 & -1.04 \\ 0 & 0.833 & 11.0 & -3.96 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1.92 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.92 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.724 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la condición inicial es $x_t(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, con $\varphi(\theta) = \{ 0.042, 0.04, 0.035, 0.03 \}$ y $\delta = [\delta_1, \delta_2]^T$, $v = [v_{-1}, v_{-2}]^T$. Primero, al sistema nominal (4.5) se le aplica la ley de control (4.6), en donde las ganancias se eligen tal que las raíces del cuasipolinomio característico $p(s) = sI_4 - (A_0 + BF_0) - (A_1 + BF_1)e^{sh}$ se encuentren en el semiplano izquierdo del plano complejo, lo cual se verifica usando el algoritmo QPmR (Quasi-Polynomial mapping based Rootfinder) [121], dichas ganancias son

$$F_0 = -1.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F_1 = 1.3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo que el sistema nominal en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_0 + BF_0)x(t) + (A_1 + BF_1)x(t-h) = \bar{A}_0x(t) + \bar{A}_1x(t-h) & (4.19) \\ &= \begin{bmatrix} -6.43 & -2.5 & -1.5 & -1.5 \\ -4.7 & -6.8 & -14.3 & -1.5 \\ 6.4 & 0.347 & -32.5 & -1.04 \\ 0 & 0.833 & 11.0 & -3.96 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3.22 & 1.3 & 1.3 & 1.3 \\ 1.3 & 3.226 & 1.3 & 1.3 \\ 0 & 0 & 1.87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.724 \end{bmatrix} x(t-1) \end{aligned}$$

es asintóticamente estable, las raíces se muestran en la Figura 4.1.

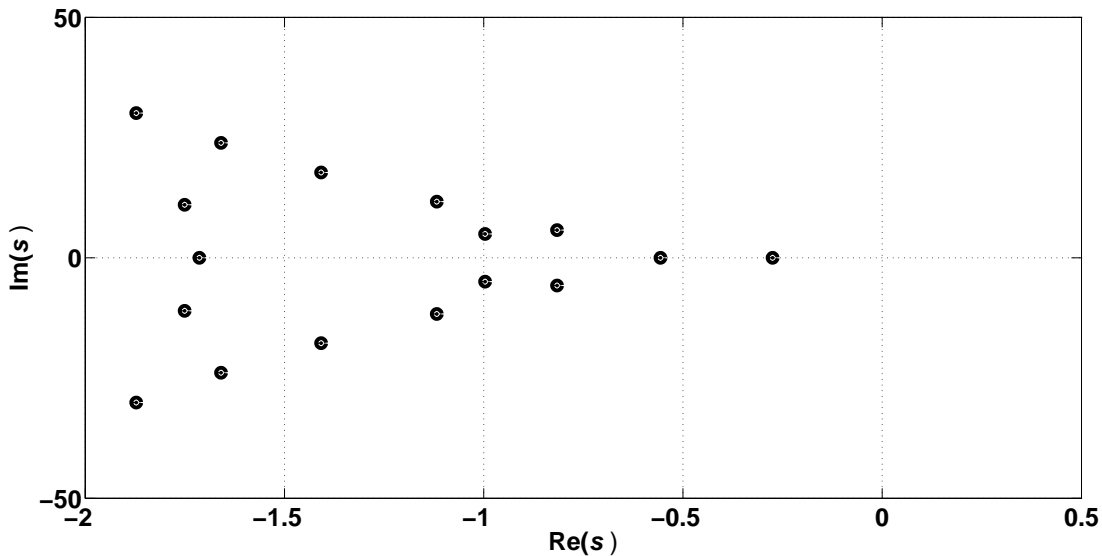


Figura 4.1: Raíces del sistema en lazo cerrado (4.19)

La matriz de Lyapunov $U(\theta)$, $\theta \in [0, 1]$ se construye con el método propuesto en [25] para $W_0 = W_2 = 0.3I_4$, $W_1 = 0.1I_4$, y $W = 0.7I_4$. Las funciones soportes de la funcional (A.9), se obtienen de acuerdo a los Lemas A.1 y A.2 (ver Apéndice A.1.4) como $0.002 \|\varphi(0)\|^2 \leq V(\varphi) \leq 39.61 \|\varphi\|_h^2$. Para el término $v_1(x_t)$, dado por (4.14), $W_0 = 0.3I_4$ y se elige $R = I_2$, el término integral de $\omega_1(x_t)$, dado por (4.11), se aproxima con la regla de Simpson [33]. El término δ es desconocido pero para la simulación se considera de manera arbitraria a la función no lineal globalmente Lipschitz

$$\delta(t, x_t, \psi(t, x) + v) = \alpha \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ \sin(x_2(t)) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sin(x_3(t-1)) \\ \sin(x_4(t-1)) \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \sin(v_{-1}) \\ \sin(v_{-2}) \end{bmatrix},$$

que satisface las condiciones (4.2) y (4.4), con $\alpha = \beta = k = 0.5$ y con la ley de control (4.3) δ satisface

$$\|\delta(t, x_t, \psi(t, x) + v)\| \leq \underbrace{|\alpha| \|x(t)\| + |\beta| \|x(t-h)\| + k \|v_1(x_t)\|}_{\tilde{\rho}(x_t)} + k \|v_2(x_t)\|, \quad (4.20)$$

en donde $\|v_1(x_t)\|$ es calculada como en (4.17). El término (4.10) es

$$\omega(x_t) = 2B^T \left[U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-h-\theta)\bar{A}_1 x(t+\theta)d\theta \right], \quad (4.21)$$

con norma

$$\begin{aligned} \|\omega(x_t)\| &\leq 2 \|B^T\| \left\| U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-h-\theta)\bar{A}_1 x(t+\theta)d\theta \right\| \\ &\leq 2 \max_{\theta \in [0, h]} \|U(\theta)\| \|B^T\| (1 + \|\bar{A}_1\| h) \|x_t\|_h. \end{aligned} \quad (4.22)$$

El componente $v_2(x_t)$ se obtiene reemplazando (4.20), (4.21) y (4.22) en (4.18) como sigue

$$\begin{aligned} v_2(x_t) &\leq \left(\frac{\alpha \|x(t)\| + \beta \|x(t-h)\| + k \|v_1(x_t)\|}{1-k} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{2B^T \left[U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-h-\theta)\bar{A}_1 x(t+\theta)d\theta \right]}{2 \max_{\theta \in [0, h]} \|U(\theta)\| \|B^T\| (1 + \|\bar{A}_1\| h) \|x_t\|_h} \right). \end{aligned}$$

La función de costo (4.13) satisface $J \leq 0.6661$ y las variables del proceso y las señales de control se muestran en la Figura 4.2. Las cuatro variables de estado y las dos variables de control convergen al punto de equilibrio en 6 segundos, esta simulación da evidencia de que es posible controlar al sistema con retardo en el estado mientras se compensa el efecto de la incertidumbre.

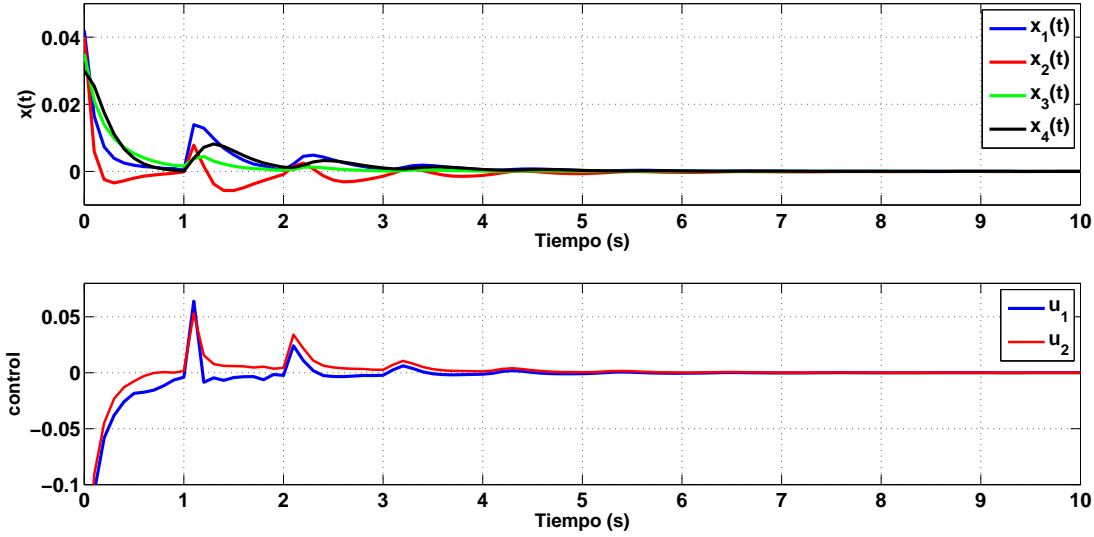


Figura 4.2: Variables de estado

Ejemplo 4.2 Se considera al deshidratador atmosférico, cuyo diagrama de instrumentación se muestra en la Figura 2.1, éste consiste en una cámara cerrada con un túnel de viento como salida y una tubería que recicla el aire caliente al sistema, este lazo de reciclaje induce un retardo en el estado, por lo tanto este proceso se modela como

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t - h) + b[u + \delta(t, x_t, u)],$$

en donde el valor de la temperatura es la variable de estado $x(t)$, la entrada de control u corresponde al voltaje aplicado al actuador y la incertidumbre está presente debido a que no se conoce con exactitud la relación entre la transferencia de calor y el voltaje. Para la construcción del controlador se elige arbitrariamente a la incertidumbre de la forma $\delta(t, x_t, u) = \alpha \sin(x(t)) + \beta \sin(x(t - h)) + k \sin(v)$, en donde $\alpha = \beta = 1$ y $k = 0.9$, ya que satisface las condiciones (4.2) y (4.4). El sistema nominal está descrito por

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t - h) + bu, \quad (4.23)$$

con $a_0 = -0.7761$, $a_1 = 0.4665$, $b = 9.97 \times 10^{-5}$, $h = 10$ y la condición inicial es $\varphi(\theta) = 0.18$, $\theta \in [-10, 0]$. Primero se aplica la ley de control $u = k_0x(t) + k_1x(t - 10)$ al sistema (4.23). Para una adecuada elección de las ganancias k_0 y k_1 se realiza la gráfica de la región de estabilidad del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = (a_0 + bk_0)x(t) + (a_1 + bk_1)x(t - h), \quad (4.24)$$

cuya ecuación característica es $f(s) = s - (a_0 + bk_0) - (a_1 + bk_1)e^{-hs}$. Se usa el método de D -particiones [80] y se obtiene la región estable de la Figura 4.3.

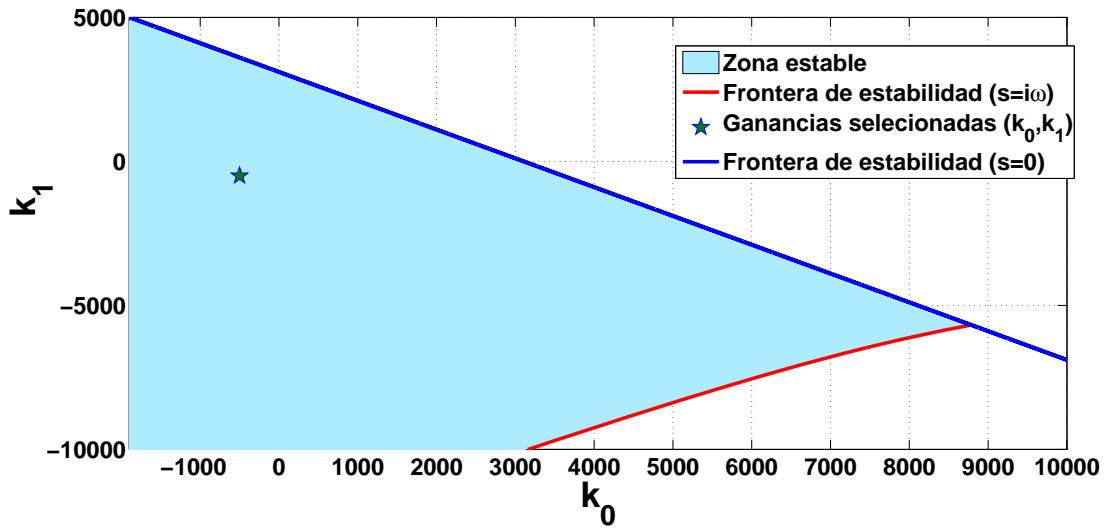


Figura 4.3: Región de estabilidad para el sistema en lazo cerrado (4.24)

Las ganancias seleccionadas $k_0 = -500$ y $k_1 = -500$ se encuentran dentro de la zona estable, entonces el sistema nominal en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{a}_0 x(t) + \bar{a}_1 x(t-h) \\ &= -0.8260x(t) + 0.4166x(t-10) \end{aligned} \quad (4.25)$$

es asintóticamente estable y las raíces (Figura 4.4) se calculan usando el algoritmo QPmR [121].

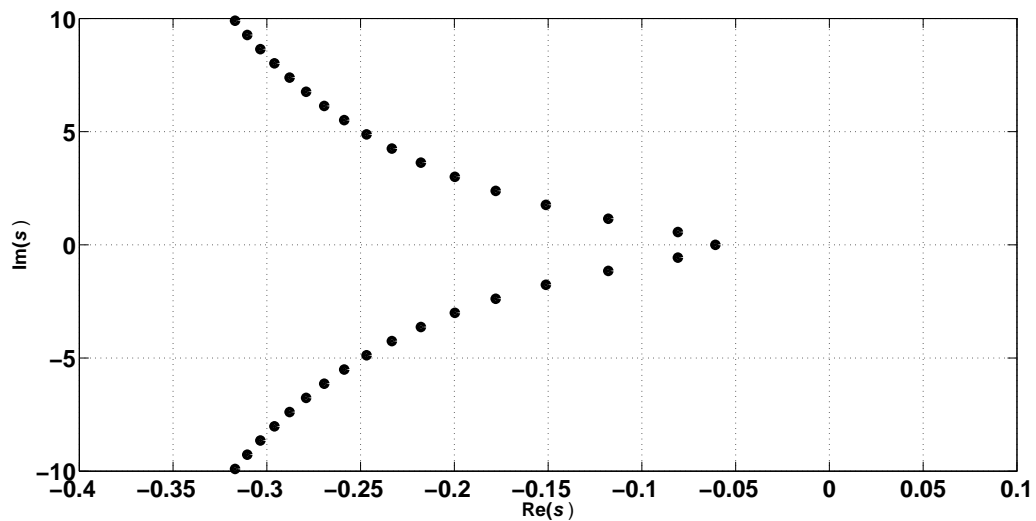


Figura 4.4: Raíces del sistema en lazo cerrado (4.25)

La funcional (A.9) es la función de Lyapunov-Krasovskii para el sistema (4.25). La función $U(\theta)$, $\theta \in [0, 10]$ se construye con el método semi-analítico [47] con las matrices $W = 1300$, $W_0 = 200$, $W_1 = W_2 = 100$ y $U(0) = 911.662$. Los estimados del funcional son

$$2 \|\varphi(0)\|^2 \leq V(\varphi) \leq 3.53 \times 10^4 \|\varphi\|_h^2.$$

Para el control $v_1(x_t)$, dado por (4.14), se elige $R = 1$ y con la ley de control

$$u = -500x(t) - 500x(t - 10) + v_1(x_t) + v_2(x_t)$$

la incertidumbre satisface

$$|\delta(t, x_t, \psi(t, x) + v)| \leq \underbrace{\alpha |x(t)| + \beta |x(t - h)| + k |v_1(x_t)|}_{\tilde{\rho}(x_t)} + k |v_2(x_t)|.$$

La ley de control $v_2(x_t)$ es

$$v_2(x_t) \leq \left(\frac{\alpha |x(t)| + \beta |x(t - h)| + k |v_1(x_t)|}{1 - k} \right) \left(\frac{2b \left[U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-h - \theta) \bar{a}_1 x(t + \theta) d\theta \right]}{2|b|(1 + |\bar{a}_1|h) |x_t|_h} \right),$$

en donde la integral es aproximada con la regla de Simpson [33] y la función de costo (4.13), satisface $J \leq 601.1791$.

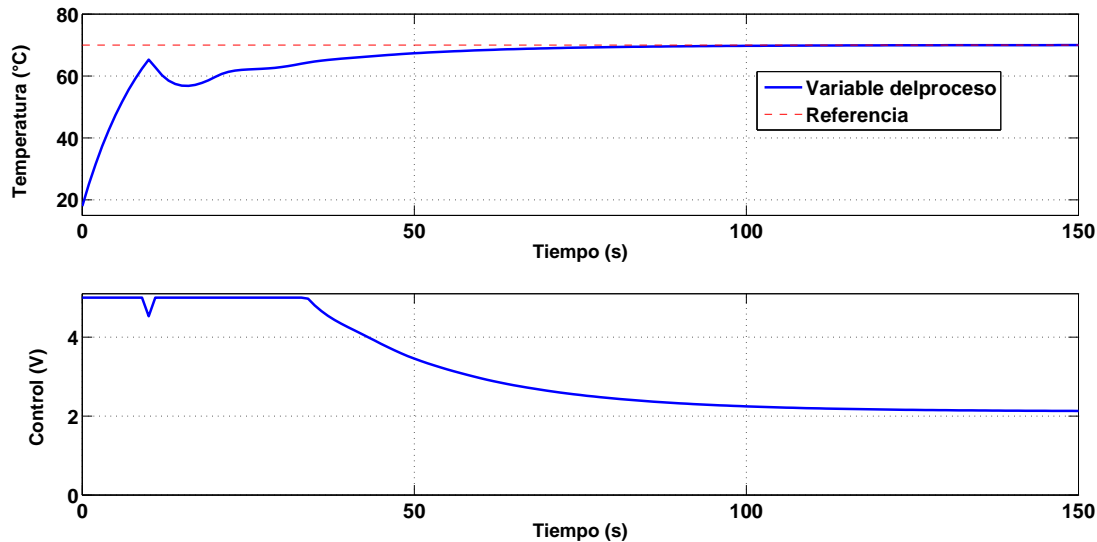


Figura 4.5: Respuesta del sistema a 70°C y señal de control

La respuesta del sistema y la ley de control se muestran en la Figura 4.5. En este ejemplo el valor de referencia es de 70°C , el cual se alcanza en 100 segundos. La señal de control está en el rango de 0 a 5 volts, por eso el actuador se satura durante 35 segundos, posteriormente

su valor disminuye pero no llega al cero debido a que se desea alcanzar un punto de equilibrio diferente.

En la siguiente sección se realiza un análisis de robustez de un control predictor dinámico para sistemas lineales con retardos en el estado y en el control.

4.3 Análisis de estabilidad robusta de un control predictor dinámico para sistemas con retardos en la entrada y el estado

Una forma de abordar la problemática de los retardos es considerar leyes de control de tipo predictivo para sistemas de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0x(t) + A_1x(t - h) + Bu(t - \tau), \quad (4.26)$$

en donde $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $0 < h \leq \tau$, se puede realizar con la ley de control de tipo predictivo [49]

$$u(t) = F_0x(t + \tau) + F_1x(t + \tau - h), \quad t \geq 0, \quad (4.27)$$

en donde F_0 y F_1 se eligen tal que la ecuación característica en lazo cerrado

$$q(s) = \det [sI_{n \times n} - (A_0 + BF_0) - e^{-sh} (A_1 + BF_1)] \quad (4.28)$$

sea exponencialmente estable. Las predicciones del estado $x(t + \tau)$ y $x(t + \tau - h)$ no están disponibles en el tiempo t , se calculan mediante la variación de la fórmula constante, la cual involucra términos integrales (ver [6]).

Para el caso de sistemas que solo tienen retardo en la entrada se ha mostrado que aún cuando se hace una buena aproximación de las integrales, la respuesta en lazo cerrado resulta inestable en algunos casos [19], [120]. Se ha mostrado que la inestabilidad aparece porque al aproximar los términos integrales de las integrales del controlador, el sistema en lazo cerrado con los términos integrales se convierte en un sistema de tipo neutral, el cual es inestable cuando el operador en diferencias es inestable [74]. Una implementación segura de la ley de control (4.27) cuando no hay retardo en el estado se puede alcanzar introduciendo dinámicas en el lazo de control [75]. La generalización de estas ideas a sistemas de la forma (4.26), se presenta en [50], dando como resultado leyes de control dinámicas de la forma

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} = & (G + F_0B) u(t) + F_1Bu(t - h) + Q(\tau)x(t) + \int_{-\tau}^0 Q(-\xi)Bu(t + \xi)d\xi \\ & + \int_{-h}^0 Q(\tau - h - \theta)A_1x(t + \theta)d\theta, \end{aligned} \quad (4.29)$$

en donde

$$Q(t) = (F_0A_0 - GF_0) K(t) + F_1A_1K(t - 2h) + (F_0A_1 + F_1A_0 - GF_1) K(t - h)$$

y $G \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es una matriz Hurwitz. La matriz fundamental del sistema (4.26) es $K(t)$ y satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\dot{K}(t) &= A_0K(t) + A_1K(t-h), \quad t \geq 0, \\ K(\theta) &= 0_{n \times n}, \quad \theta < 0, \quad K(0) = I_{n \times n}.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Como se muestra en [50], la ecuación característica en lazo cerrado es

$$q_G(s) = \det [sI_{p \times p} - G] \det [sI_{n \times n} - (A_0 + BF_0) - e^{-sh} (A_1 + BF_1)].$$

El sistema en lazo cerrado (4.26)-(4.29) permanece exponencialmente estable si los términos integrales se aproximan mediante sumatorias Riemann [50], lo cual podría ser visto como una propiedad de robustez.

En algunos resultados, como los presentados en [23], [24], [67], un control proporcional de la forma $u(t) = F_2x(t)$ se aplica para la estabilización de sistemas lineales con retardos. En el caso del sistema (4.26), la ecuación en lazo cerrado resultante

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + BF_2x(t-\tau)$$

tiene dos retardos. Es claro que se puede tratar de encontrar a la matriz F_2 y dar condiciones suficientes de tipo LMI para las cotas de las incertidumbres, aplicando funcionales de Lyapunov-Krasovskii. El enfoque basado en predicción ofrece gran libertad en la elección de controladores que permiten modificar a las matrices del sistema correspondientes a los términos con y sin retardo. Algunos resultados de robustez, en el dominio temporal, para leyes de control basadas en predicción sin filtros se han reportado en [5], [11], [126].

El análisis de estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado con respecto a incertidumbres en los parámetros del sistema y/o en los retardos es una tarea importante en aplicaciones en tiempo real, por lo que en este capítulo se presenta un análisis con respecto a incertidumbre en los parámetros de las matrices del sistema o en los retardos de la entrada y el estado.

4.3.1 Incertidumbre en los parámetros

En esta sección se consideran incertidumbres aditivas en las matrices del sistema porque son descritas de manera sencilla y son adecuadas para nuestro análisis en el dominio de la frecuencia.

El sistema perturbado es de la forma

$$\frac{dy(t)}{dt} = (A_0 + \Delta_{A_0})y(t) + (A_1 + \Delta_{A_1})y(t-h) + (B + \Delta_B)u(t-\tau),\tag{4.31}$$

en donde los términos de perturbación $\Delta_{A_0}, \Delta_{A_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\Delta_B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ satisfacen las siguientes restricciones

$$\|\Delta_{A_0}\| \leq \delta_{A_0}; \quad \|\Delta_{A_1}\| \leq \delta_{A_1}; \quad \|\Delta_B\| \leq \delta_B,\tag{4.32}$$

La ley de control, calculada con las matrices nominales, es

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} = & (G + F_0B)u(t) + F_1Bu(t-h) + Q(\tau)y(t) + \int_{-\tau}^0 Q(-\xi)Bu(t+\xi)d\xi \\ & + \int_{-h}^0 Q(\tau-h-\theta)A_1y(t+\theta)d\theta, \end{aligned} \quad (4.33)$$

la cual coincide con (4.29), excepto que ahora se usa a la variable $y(t)$ en el lazo de realimentación y las matrices F_0 , F_1 y G se eligen tal que el sistema nominal en lazo cerrado sea exponencialmente estable. El reto consiste en determinar las cotas positivas δ_{A_0} , δ_{A_1} , δ_B , tal que la estabilidad del lazo cerrado (4.31), (4.33) conserva la estabilidad del sistema nominal en lazo cerrado (4.26), (4.29).

4.3.1.1 Cotas de estabilidad robusta para incertidumbre en los parámetros

El sistema en lazo cerrado (4.31), (4.33) se reescribe como sigue

$$\frac{dz(t)}{dt} = (\mathcal{A}_0 + \Lambda_0)z(t) + (\mathcal{A}_1 + \Lambda_1)z(t-h) + (\mathcal{A}_2 + \Lambda_2)z(t-\tau) + \int_{-\tau}^0 \mathcal{G}(\theta)z(t+\theta)d\theta, \quad (4.34)$$

en donde $z(t) = (y^T(t), u^T(t))^T$, las matrices \mathcal{A}_0 , \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 se definen como

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0_{n \times p} \\ Q(\tau) & G + F_0B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & F_1B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & B \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{pmatrix},$$

y la función matricial $\mathcal{G}(\theta)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\theta) &= \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & Q(-\theta)B \end{pmatrix}, \quad \theta \in [-\tau, -h), \\ \mathcal{G}(\theta) &= \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times p} \\ Q(\tau-h-\theta)A_1 & 0_{p \times p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & Q(-\theta)B \end{pmatrix}, \quad \theta \in [-h, 0]. \end{aligned}$$

Las matrices inciertas son

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \Delta_{A_0} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \Delta_{A_1} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & \Delta_B \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{pmatrix}$$

y satisfacen las siguientes desigualdades

$$\|\Lambda_0\| = \|\Delta_{A_0}\| \leq \delta_{A_0};$$

$$\|\Lambda_1\| = \|\Delta_{A_1}\| \leq \delta_{A_1};$$

$$\|\Lambda_2\| = \|\Delta_B\| \leq \delta_B.$$

Como el sistema nominal en lazo cerrado

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{A}_1 z(t-h) + \mathcal{A}_2 z(t-\tau) + \int_{-\tau}^0 \mathcal{G}(\theta) z(t+\theta) d\theta \quad (4.35)$$

es exponencialmente estable, su matriz característica

$$G_0(s) = sI - \mathcal{A}_0 - e^{-sh} \mathcal{A}_1 - e^{-s\tau} \mathcal{A}_2 - \int_{-\tau}^0 \mathcal{G}(\theta) e^{s\theta} d\theta, \quad (4.36)$$

es no singular en el semiplano cerrado derecho $C^+ = \{ s \mid \text{Re}(s) \geq 0 \}$. La matriz característica del sistema perturbado (4.34) es

$$\begin{aligned} G(s) &= G_0(s) - \Lambda_0 - e^{-sh} \Lambda_1 - e^{-s\tau} \Lambda_2 \\ &= G_0(s) [I - P(s)], \end{aligned}$$

en donde $P(s) = G_0^{-1}(s) [\Lambda_0 + e^{-sh} \Lambda_1 + e^{-s\tau} \Lambda_2]$. Los siguientes resultados de estabilidad robusta están basados en la propiedad de la continuidad de las raíces de la ecuación característica [7] con respecto a la variación en los parámetros. El hecho de que la matriz $G_0(s)$ es Hurwitz implica que $G(s)$ permanece estable si no ocurren cruces en el eje imaginario del plano complejo para algunos Δ_{A_0} , Δ_{A_1} y Δ_B . Ésto quiere decir que $P(s)$ debe satisfacer que

$$\|P(i\omega)\| < 1, \quad \omega \in [0, \infty). \quad (4.37)$$

Para $s \in C^+$, $|e^{-sh}| \leq 1$ y $|e^{-s\tau}| \leq 1$ se satisface que

$$\begin{aligned} \|\Lambda_0 + e^{-sh} \Lambda_1 + e^{-s\tau} \Lambda_2\| &\leq \|\Lambda_0\| + \|\Lambda_1\| + \|\Lambda_2\| \\ &\leq \delta_{A_0} + \delta_{A_1} + \delta_B, \end{aligned}$$

entonces

$$P(s) \leq G_0^{-1}(s) [\delta_{A_0} + \delta_{A_1} + \delta_B]$$

y definiendo a

$$\begin{aligned} r &= \sup_{s \in C^+} \|G_0^{-1}(s)\| \\ &= \max_{\omega \in [0, \infty)} \|G_0^{-1}(i\omega)\|, \end{aligned}$$

la desigualdad (4.37) se reescribe como $r [\delta_{A_0} + \delta_{A_1} + \delta_B] < 1$ y se establece el siguiente resultado:

Teorema 4.2 *El sistema en lazo cerrado perturbado (4.34) permanece exponencialmente estable si se mantiene la siguiente condición*

$$\delta_{A_0} + \delta_{A_1} + \delta_B < \frac{1}{r}. \quad (4.38)$$

4.3.2 Incertidumbre en el retardo del estado o en el de la entrada

El sistema con incertidumbre en el retardo del estado es de la forma

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_0 y(t) + A_1 y(t - h - \Delta_h) + Bu(t - \tau), \quad (4.39)$$

en donde h es el retardo nominal y $\Delta_h \in \mathbb{R}$ describe a la incertidumbre en el retardo del estado. Para asegurar que $h + \Delta_h$ sea positivo se impone la restricción $|\Delta_h| < \delta_h \leq h$.

Como en el caso de incertidumbre en los parámetros, la ley de control es (4.29), pero se usa la salida $y(t)$ del sistema perturbado (4.39) en el lazo de realimentación. Las matrices F_0 , F_1 y G son tales que el sistema nominal en lazo cerrado (4.35) es exponencialmente estable. El reto ahora es encontrar δ_h tal que se asegure que el sistema en lazo cerrado (4.39), (4.33) permanece estable para $|\Delta_h| < \delta_h$.

4.3.2.1 Cotas de estabilidad robusta para la incertidumbre en el retardo del estado

El sistema (4.39) puede reescribirse como

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_0 y(t) + A_1 y(t - h) + Bu(t - \tau) + A_1 [y(t - h - \Delta_h) - y(t - h)]. \quad (4.40)$$

La matriz característica del sistema perturbado (4.40) en lazo cerrado con la ley de control (4.33) es

$$\begin{aligned} G(s) &= G_0(s) - \begin{pmatrix} A_1 & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{pmatrix} (e^{-s(h+\Delta_h)} - e^{-sh}) \\ &= G_0(s) [I - R(s)], \end{aligned}$$

en donde $G_0(s)$ se definió en (4.36) y

$$\begin{aligned} R(s) &= R_0(s)(e^{-s(h+\Delta_h)} - e^{-sh}) \\ &= G_0^{-1}(s) \begin{pmatrix} A_1 & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{pmatrix} (e^{-s(h+\Delta_h)} - e^{-sh}). \end{aligned}$$

De manera similar al análisis de la sección 4.3.1.1, el hecho de que la matriz $G_0(s)$ es Hurwitz implica que $G(s)$ permanece estable si no ocurren cruces en el eje imaginario del plano complejo para algún Δ_h . En otras palabras $R(s)$ debe satisfacer que

$$\|R(i\omega)\| < 1, \quad \omega \in [0, \infty). \quad (4.41)$$

Primero se presenta el siguiente resultado:

Proposición 4.1 *Si el sistema nominal en lazo cerrado (4.35) es tal que*

$$2r_0 < 1 \quad (4.42)$$

con

$$r_0 = \max_{\omega \in [0, \infty)} \|R_0(i\omega)\|,$$

entonces la estabilidad del sistema perturbado en lazo cerrado (4.39), (4.33) está garantizada para $|\Delta_h| < h$.

Prueba 4.1 Note que

$$\max_{\omega \in [0, \infty)} \|R(i\omega)\| \leq \max_{\omega \in [0, \infty)} \|R_0(i\omega)\| |e^{-i(h+\Delta_h)\omega} - e^{-ih\omega}|.$$

Como $|e^{-i(h+\Delta_h)\omega} - e^{-ih\omega}| \leq 2$,

$$\max_{\omega \in [0, \infty)} \|R(i\omega)\| \leq 2 \max_{\omega \in [0, \infty)} \|R_0(i\omega)\| = 2r_0,$$

entonces si (4.42) se mantiene, la condición (4.41) se satisface y se llega al resultado.

A continuación se buscan las condiciones para el caso en donde el sistema nominal no satisface la condición (4.42), es decir que

$$\max_{\omega \in [0, \infty)} \|R_0(i\omega)\| \geq \frac{1}{2}.$$

El hecho de que $G_0^{-1}(s)$ sea estrictamente propia ($\|G_0^{-1}(i\omega)\| \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$) implica que existe $\omega_0 < \infty$ tal que

$$\|R_0(i\omega)\| < \frac{1}{2}, \quad \omega \in [\omega_0, \infty). \quad (4.43)$$

Para $\omega \in [\omega_0, \infty)$, resulta que

$$\|R(i\omega)\| < 1.$$

En el intervalo $[0, \omega_0]$, la identidad (ver [73])

$$e^{-i\omega\Delta_h} - 1 = -2ie^{-\frac{i\omega\Delta_h}{2}} \sin\left(\frac{\omega\Delta_h}{2}\right), \quad (4.44)$$

permite obtener que

$$\|R(i\omega)\| \leq 2 \|R_0(i\omega)\| \left| \sin \frac{\omega\Delta_h}{2} \right|.$$

Se define el conjunto

$$\Omega_0 = \left\{ \omega \mid \|R_0(i\omega)\| \geq \frac{1}{2}, \omega \in [0, \omega_0] \right\}$$

entonces $\|R(i\omega)\| \leq 1$ para $\omega \in [0, \omega_0]$ si $|\Delta_h| < \delta_h$ en donde

$$\delta_h = \min \left\{ \inf_{\omega \in \Omega_0} \frac{2}{\omega} \arcsin \left(\frac{1}{2 \|R_0(i\omega)\|} \right), h \right\}.$$

El análisis anterior se resume en el siguiente resultado:

Teorema 4.3 *Si el sistema nominal en lazo cerrado (4.35) es tal que*

$$2r_0 \geq 1$$

existe una frecuencia $\omega_0 < \infty$ tal que

$$2 \|R_0(i\omega)\| < 1, \quad \omega \in [\omega_0, \infty),$$

y el sistema perturbado en lazo cerrado (4.39), (4.33) es estable para la incertidumbre en el retardo $|\Delta_h| < \delta_h$ con

$$\delta_h = \min \left\{ \inf_{\omega \in \Omega_0} \frac{2}{\omega} \arcsin \left(\frac{1}{2 \|R_0(i\omega)\|} \right), h \right\}.$$

4.3.2.2 Cotas de estabilidad robusta de la incertidumbre en el retardo de la entrada

Las pruebas para el caso de incertidumbre en el retardo de la entrada son similares por lo que solo se presentan los siguientes resultados. El sistema se describe como

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_0 y(t) + A_1 y(t - h) + B u(t - \tau - \Delta_\tau). \quad (4.45)$$

Basándonos en argumentos similares a los de la sección anterior se obtienen los siguientes resultados:

Proposición 4.2 *Si el sistema nominal en lazo cerrado (4.35) es tal que*

$$2r_1 < 1$$

con

$$r_1 = \max_{\omega \in [0, \infty)} \|R_1(i\omega)\|,$$

en donde

$$R_1(s) = G_0^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & B \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{pmatrix},$$

entonces la estabilidad del sistema perturbado en lazo cerrado (4.45), (4.33) está garantizada para $|\Delta_\tau| < \tau$.

Teorema 4.4 *Si el sistema nominal en lazo cerrado (4.35) es tal que*

$$2r_1 \geq 1$$

existe una frecuencia $\omega_1 < \infty$ tal que

$$\|R_1(i\omega)\| < \frac{1}{2}, \quad \omega \in [\omega_1, \infty),$$

y el sistema perturbado en lazo cerrado (4.45), (4.33) es estable para la incertidumbre en el retardo de la entrada $|\Delta_\tau| < \delta_\tau$ con

$$\delta_\tau = \min \left\{ \inf_{\omega \in \Omega_1} \frac{2}{\omega} \arcsin \left(\frac{1}{2 \|R_1(i\omega)\|} \right), \tau \right\},$$

y

$$\Omega_1 = \left\{ \omega \mid \|R_1(i\omega)\| \geq \frac{1}{2}, \omega \in [0, \omega_1] \right\}.$$

4.3.3 Incertidumbre en los retardos del estado y de la entrada

Sea el sistema

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_0 y(t) + A_1 y(t - h - \Delta_h) + B u(t - \tau - \Delta_\tau) \quad (4.46)$$

en donde h y τ son los retardos nominales del estado y de la entrada, respectivamente. Las perturbaciones inciertas $\Delta_h, \Delta_\tau \in \mathbb{R}$ son tales que $h + \Delta_h$ y $\tau + \Delta_\tau$ permanecen positivas y se imponen la siguientes restricciones

$$|\Delta_h| < \delta_h \leq h; \quad |\Delta_\tau| < \delta_\tau \leq \tau. \quad (4.47)$$

La salida $y(t)$ del sistema perturbado (4.46) se usa en la ley de control (4.33). Las matrices F_0, F_1 y G se eligen para asegurar la estabilidad del sistema nominal en lazo cerrado (4.35). Se buscan δ_h y δ_τ que garanticen la estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado (4.46), (4.33).

4.3.3.1 Cotas de estabilidad robusta de la incertidumbre en el retardo de estado y de la entrada

El sistema perturbado puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= A_0 y(t) + A_1 y(t - h) + B u(t - \tau) \\ &\quad + A_1 [y(t - h - \Delta_h) - y(t - h)] + B [u(t - \tau - \Delta_\tau) - u(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

La matriz característica del sistema perturbado (4.48) en lazo cerrado con la ley de control (4.33) es

$$\begin{aligned} G(s) &= G_0(s) - \begin{pmatrix} A_1 & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{pmatrix} (e^{-s(h+\Delta_h)} - e^{-sh}) - \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & B \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{pmatrix} (e^{-s(\tau+\Delta_\tau)} - e^{-s\tau}) \\ &= G_0(s) [I - R_2(s)], \end{aligned}$$

en donde $G_0(s)$ está definida en (4.36) y

$$R_2(s) = R_0(s)(e^{-s(h+\Delta_h)} - e^{-sh}) + R_1(s)(e^{-s(\tau+\Delta_\tau)} - e^{-s\tau}).$$

$R_2(s)$ debe satisfacer

$$\|R_2(i\omega)\| < 1, \quad \omega \in [0, \infty). \quad (4.49)$$

Entonces se presenta la siguiente proposición:

Proposición 4.3 *Si el sistema nominal es tal que*

$$2(r_0 + r_1) < 1 \quad (4.50)$$

entonces la estabilidad del sistema perturbado en lazo cerrado (4.46), (4.33) está garantizada para $|\Delta_h| < h$ y $|\Delta_\tau| < \tau$.

Prueba 4.2 *Observe que*

$$\begin{aligned} \max_{\omega \in [0, \infty)} \|R_2(i\omega)\| &\leq 2 \max_{\omega \in [0, \infty)} \|R_0(i\omega)\| + 2 \max_{\omega \in [0, \infty)} \|R_1(i\omega)\| \\ &= 2(r_0 + r_1). \end{aligned}$$

entonces si la condición (4.50) se mantiene no ocurre ningún cruce de raíces por el eje imaginario.

Para el caso en donde $2(r_0 + r_1) \geq 1$, se sabe que como $G_0^{-1}(i\omega)$ es estrictamente propia, existe $\omega_2 < \infty$ tal que

$$2\|R_2(i\omega)\| < 1, \quad \omega \in [\omega_2, \infty). \quad (4.51)$$

Para $\omega \in [\omega_2, \infty)$ se tiene que

$$\|R_2(i\omega)\| < 1.$$

Usando (4.44)

$$\|R_2(i\omega)\| \leq 2 \left(\|R_0(i\omega)\| \left| \sin \frac{\omega\Delta_h}{2} \right| + \|R_1(i\omega)\| \left| \sin \frac{\omega\Delta_\tau}{2} \right| \right)$$

se mantiene para cualquier $\omega \in \mathbb{R}$, se obtiene que si $\rho(\omega) = \max\{\|R_0(i\omega)\|, \|R_1(i\omega)\|\} > 0$, entonces

$$\|R_2(i\omega)\| \leq 2\rho(\omega) \left(\left| \sin \frac{\omega\Delta_h}{2} \right| + \left| \sin \frac{\omega\Delta_\tau}{2} \right| \right). \quad (4.52)$$

Si para $\omega \geq 0$ la siguiente restricción

$$\frac{\omega(\delta_h + \delta_\tau)}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.53)$$

se mantiene, entonces

$$\left| \sin \frac{\omega\Delta_h}{2} \right| + \left| \sin \frac{\omega\Delta_\tau}{2} \right| \leq \left| \sin \frac{\omega(\Delta_h + \Delta_\tau)}{2} \right|.$$

y se llega la desigualdad

$$\|R_2(i\omega)\| \leq 2\rho(\omega) \sin \frac{\omega(\delta_h + \delta_\tau)}{2}.$$

Se define el conjunto

$$\Omega_2 = \left\{ \omega \mid \rho(\omega) \geq \frac{1}{2}, \omega \in [0, \omega_2] \right\},$$

entonces la desigualdad (4.49) se mantiene cuando

$$\delta_h + \delta_\tau = \inf_{\omega \in \Omega_2} \frac{2}{\omega} \arcsin \left(\frac{1}{2\rho(\omega)} \right). \quad (4.54)$$

Teniendo en mente las restricciones (4.47), (4.53), (4.54) y $h \leq \tau$, se establece el siguiente resultado

Teorema 4.5 *Si el sistema nominal en lazo cerrado (4.35) es tal que*

$$r_2 \geq \frac{1}{2}$$

existe una frecuencia $\omega_2 < \infty$ tal que

$$2\rho(\omega) < 1, \quad \omega \in [\omega_2, \infty).$$

y el desempeño del sistema en lazo cerrado (4.46), (4.33) es estable para las incertidumbres en el retardo $|\Delta_h| < \delta_h \leq h$ y $|\Delta_\tau| < \delta_\tau \leq \tau$ con

$$\delta_h + \delta_\tau = \min \left\{ \inf_{\omega \in \Omega_2} \frac{2}{\omega} \arcsin \left(\frac{1}{2\rho(\omega)} \right), h, \frac{\pi}{\omega_2} \right\}.$$

En esta sección se realizó un análisis de estabilidad robusta del control predictor dinámico en el marco frecuencial y se obtuvieron las cotas para las incertidumbres, en los casos de incertidumbre en las matrices del sistema o en los retardos.

4.4 Conclusiones

Con la combinación del enfoque de funcionales de tipo completo, la estrategia de control por costo garantizado y la técnica de rediseño de Lyapunov se obtuvo un controlador explícito para sistemas lineales con retardo en el estado e incertidumbre en la entrada de control. Este control estabiliza al sistema en lazo cerrado y compensa el efecto de la incertidumbre. Las simulaciones muestran la efectividad del método propuesto.

El análisis de estabilidad robusta provee un método para calcular cotas para las incertidumbres paramétricas que pueden estar presentes en los modelos matemáticos, en este caso solo es realizado para sistemas lineales con ambos retardos.

5

Resultados experimentales

5.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos al aplicar los controladores óptimos no lineales (Sección 3.2) y se comparan con los resultados obtenidos con un controlador industrial PID sintonizado mediante dos técnicas, la primera es robustamente utilizando el método de D-particiones [80] y la segunda mediante las reglas de Ziegler-Nichols [128]. El resultado del control óptimo no lineal con funcionales de tipo completo se compara con el control óptimo lineal (Apéndice A.4) y con un control por linealización exacta. Posteriormente se muestran los resultados obtenidos al aplicar el control subóptimo en tiempo discreto (Sección 3.3) y el control predictor dinámico (Capítulo 4.3). También se presentan los resultados del análisis de la pérdida de nutrientes en rebanadas de jitomate deshidratadas utilizando el control óptimo no lineal y el control PID.

La implementación de las leyes de control se realiza mediante el ambiente de programación de LabVIEW y el objetivo de control consiste en alcanzar una temperatura de consigna y mantenerla. El desempeño de los controladores se mide en base al porcentaje de energía ahorrada.

5.2 Sintonización del controlador PID

Para conseguir que un controlador industrial PID funcione correctamente, se deben considerar algunos aspectos importantes como los cambios en los parámetros de la planta [100]. Los equipos industriales ofrecen alternativas para lidiar con ese tipo de problemas, sin embargo la sintonización del controlador sigue siendo un reto [100].

En la primera etapa de este trabajo, las ganancias del controlador PID industrial se fijan de acuerdo a las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols [128], el cual es un resultado clásico y hoy en día aún se utiliza para sintonizar a los controladores PID, en plantas industriales [21]. Además, Honeywell es reconocida como una marca de calidad con una larga historia en el trabajo con fabricantes de equipos de procesos y controladores que ofrecen una solución de automatización rentable para el control térmico en hornos, hornos túnel y secadores, así

como el de diversas unidades de proceso [34].

Ésta sintonización está basada en la respuesta al escalón de la planta (Figura 2.7), cuya función de transferencia está dada en (2.1). Las ganancias obtenidas son: $K_p = 58.5$, $K_i = 7.3$ y $K_d = 117$.

5.2.1 Sintonización robusta del controlador PID

En la segunda etapa de este trabajo, la sintonización robusta de las ganancias del controlador PID se realiza con el método de D-particiones [80], como en [109]. Este método consiste en calcular los intervalos de estabilidad robusta de las ganancias K_p , K_i y K_d del controlador. El procedimiento se describe a continuación:

1. Calcular el cuasipolinomio característico del sistema en lazo abierto y cerciorarse de que sea estable (esto facilita el análisis y en nuestro caso se satisface).
2. Considerar que las ganancias K_i y K_d son cero (debido a que la planta es lineal es posible aplicar el principio de superposición) y obtener el cuasipolinomio característico en lazo cerrado del sistema, únicamente considerando la parte proporcional del controlador. De este modo se encuentra el intervalo estable para la ganancia K_p en las dos fronteras: $s = 0$ y $s = j\omega$.
3. Seleccionar un valor de K_p que se encuentre en el intervalo de estabilidad.
4. Calcular el cuasipolinomio característico en lazo cerrado, considerando a las ganancias proporcional e integral, se sustituye el valor de K_p seleccionado en el paso anterior y se hallan las fronteras de estabilidad para K_i .
5. Seleccionar un valor de K_i en el intervalo estable.
6. Calcular el cuasipolinomio característico en lazo cerrado, considerando las ganancias K_p , K_i y K_d , se sustituyen los valores de las ganancias K_p y K_i obtenidas anteriormente y se hallan las fronteras de estabilidad para K_d .
7. Seleccionar un valor de K_d que se encuentre en la zona de estabilidad robusta.

A continuación se presenta brevemente este procedimiento para el cálculo de la ganancia K_p . La función de transferencia del modelo de la planta bajo estudio es:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-sh}}{\tau s + 1},$$

en donde el polinomio característico en lazo abierto $\tau s + 1 = 0$ es estable, con $s = -\frac{1}{\tau}$. La función de transferencia en lazo cerrado con el controlador proporcional es:

$$G(s) = \frac{K_p K e^{-sh}}{\tau s + 1 + K_p K e^{-sh}},$$

con el cuasipolinomio característico

$$\tau s + 1 + K_p K e^{-sh} = 0. \quad (5.1)$$

La primera frontera de K_p se obtiene cuando se sustituye $s = 0$ en (5.1), entonces $\underline{K_p} = -\frac{1}{K}$. La segunda frontera del intervalo estable para K_p se obtiene al sustituir $s = j\omega$ en (5.1), como sigue:

$$\tau j\omega + 1 + K_p K e^{-j\omega h} = 0,$$

y de acuerdo con la identidad de Euler se obtiene

$$\tau j\omega + 1 + K_p K \cos(\omega h) - j K_p K \sin(\omega h) = 0.$$

Se separaran la partes real e imaginaria

$$1 + K_p K \cos(\omega h) = 0, \quad (5.2)$$

$$\tau\omega + K_p K \sin(\omega h) = 0, \quad (5.3)$$

de (5.3) se despeja a K_p

$$K_p = \frac{\tau\omega}{K \sin(\omega h)}$$

y se sustituye en (5.2), entonces

$$1 + \frac{\tau\omega K \cos(\omega h)}{K \sin(\omega h)} = 0$$

lo cual reescribe como

$$1 + \tau\omega \cot(\omega h) = 0. \quad (5.4)$$

Para hallar los valores de ω que satisfacen esta ecuación (5.4) es posible usar el método gráfico y buscar el primer cruce por cero, el cual se denota como ω^* y con ese valor se obtiene la segunda frontera de estabilidad para el parámetro K_p . Las fronteras de estabilidad son:

$$\underline{K_p} = -\frac{1}{K} \quad \text{y} \quad \overline{K_p} = \frac{\tau\omega^*}{K \sin(\omega^* h)}.$$

Siguiendo este procedimiento se obtienen los intervalos de estabilidad para cada ganancia: $K_p \in [-1, 60.48]$, $K_i \in [0, 0.7402]$ y $K_d \in [0, 38.5116]$. La Figura 5.1 muestra la zona de estabilidad robusta con las ganancias $K_p = 2$, $K_d = 8$ y $K_i = 0.2$. Mientras los valores del retardo h y la ganancia K permanezcan en la zona obtenida el sistema en lazo cerrado será robustamente estable. Es importante mencionar que esta sintonización no está relacionada con los parámetros de la respuesta temporal del sistema, tales como tiempo de establecimiento, sobreimpulso, etc.

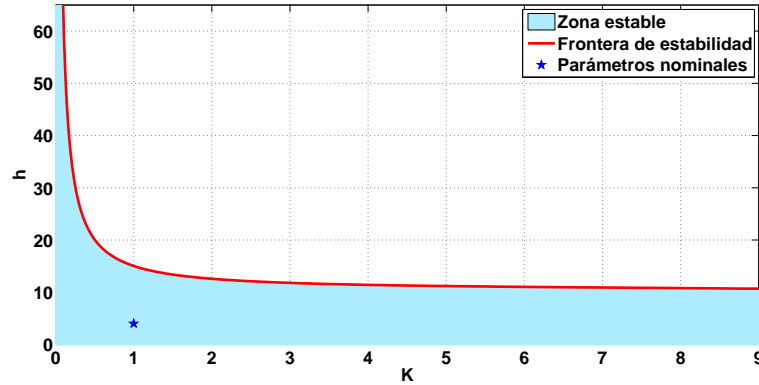


Figura 5.1: Zona de estabilidad robusta del controlador PID

5.3 Implementación de la ley de control óptimo no lineal con funcionales de tipo completo

De acuerdo al enfoque de optimalidad inversa, primero se verifica si la funcional de tipo completo es una FCLK, es decir que exista ϵ tal que se garantiza la positividad de la matriz (3.12), para ello se fijan los valores de las matrices W_0 , W_1 , W_2 , la matriz de Lyapunov $U(\theta)$, $\theta \in [0, 10]$ se construye utilizando el método semi-analítico [47] y finalmente se encuentra el valor de ϵ . Si no se satisface la positividad de la matriz (3.12) se puede modificar los valores de W_0 , W_1 y W_2 hasta encontrar ϵ que asegure la condición $E > 0$.

La ley de control óptima no lineal está dada en la Sección 3.2.1.2 por la ecuación (3.16), aquí se denota como ONL_{TC} . Los términos integrales de las funciones $\omega_0(x_t)$ y $\omega_1(x_t)$, dadas en (3.4) y (3.5), respectivamente, son aproximados con la regla Simpson compuesta [33].

5.3.1 Experimentos de estabilización

Los parámetros estimados para los experimentos presentados en esta sección están dados en la Tabla 2.2. La condición inicial del sistema es la temperatura ambiente, aproximadamente de $20^\circ C$ y la temperatura que se desea alcanzar en este experimento es $50^\circ C$. Los valores escalares utilizados para la construcción de la matriz de Lyapunov (en este caso también escalar) mediante el método semi-analítico [47] (ver Apéndice A.1.5) son: $W_0 = 200$, $W_1 = W_2 = 100$ y $W = 1300$, con los cuales $U(0) = 5854.63$ y $\bar{s} = 300.875$; los valores $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0.017$ y $\epsilon = 346020$. El espectro de la matriz (3.12) está dado por $\sigma_{50^\circ C}(E) = \{346119.0601, 0.9397, 0.00041, 0.00022\}$.

Las variables mostradas en la Figura 5.2 son la temperatura, el voltaje de control, el error y el consumo energético en la etapa de baja potencia. Se presenta una comparación con la respuesta obtenida con el controlador PID sintonizado con las reglas de Ziegler-Nichols, denotado como PID_{ZN} .

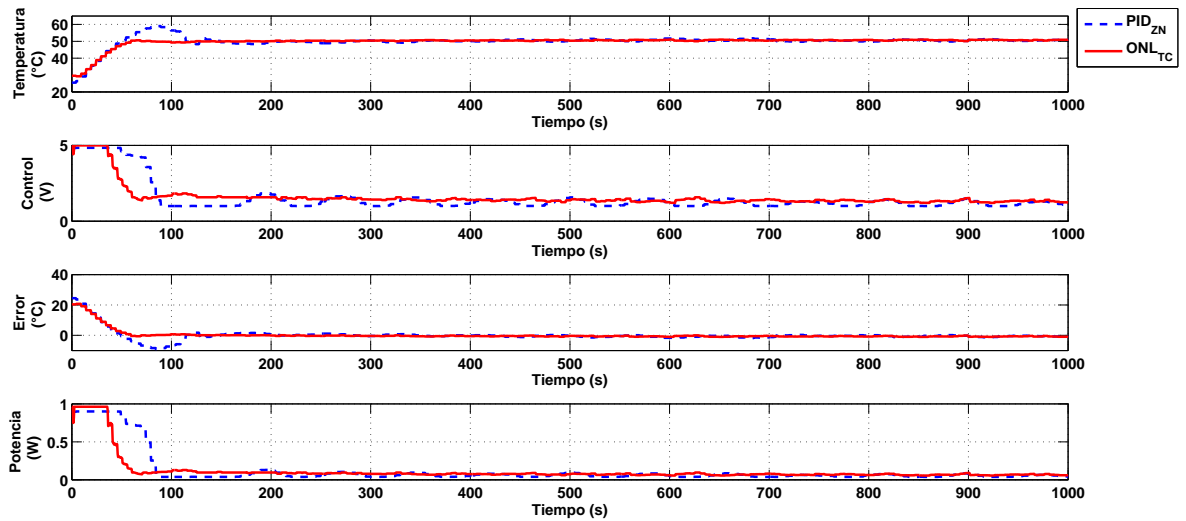


Figura 5.2: Estabilización a $50^{\circ}C$

La Figura 5.3 muestra la respuesta del sistema con una consigna de $55^{\circ}C$. Las ganancias son: $W_0 = 500$, $W_1 = W_2 = 100$, $W = 1600$, $U(0) = 9502.363$, los escalares $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0.015$, $\epsilon = 444440$ y $\bar{s} = 419.994$. Los valores propios de la matriz (3.12) son $\sigma_{55^{\circ}C}(E) = \{444809.452, 30.548, 0.000038, 0.001\}$.

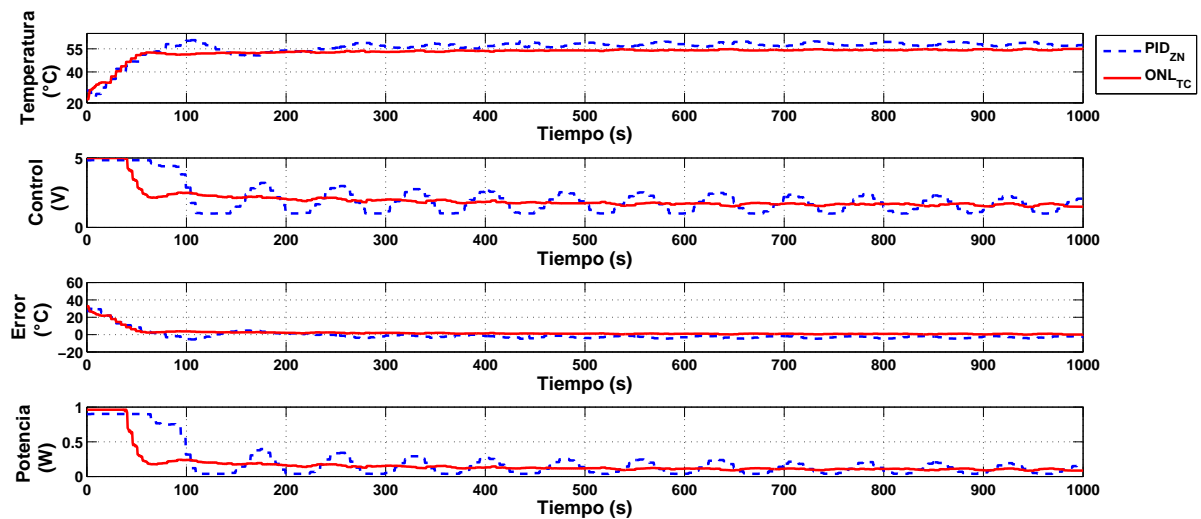


Figura 5.3: Estabilización a $55^{\circ}C$

Para una consigna de $60^{\circ}C$ (Figura 5.4) se consideran los siguientes parámetros: $W_0 = 300$, $W_1 = 200$, $W_2 = 100$, $W = 1500$, $U(0) = 244.271$, $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0.5$, $\epsilon = 790$ y $\bar{s} = 154.193$. El espectro de la matriz (3.12) esta dado por $\sigma_{60^{\circ}C}(E) = \{867.9511, 24.5440, 0.0052, 2.5\}$.

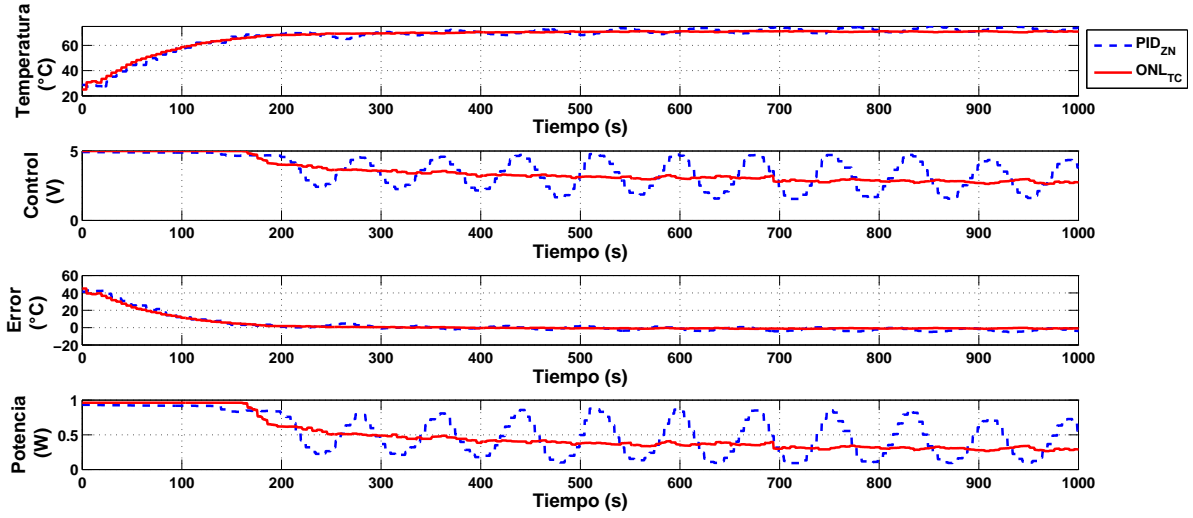


Figura 5.5: Estabilización a $70^{\circ}C$

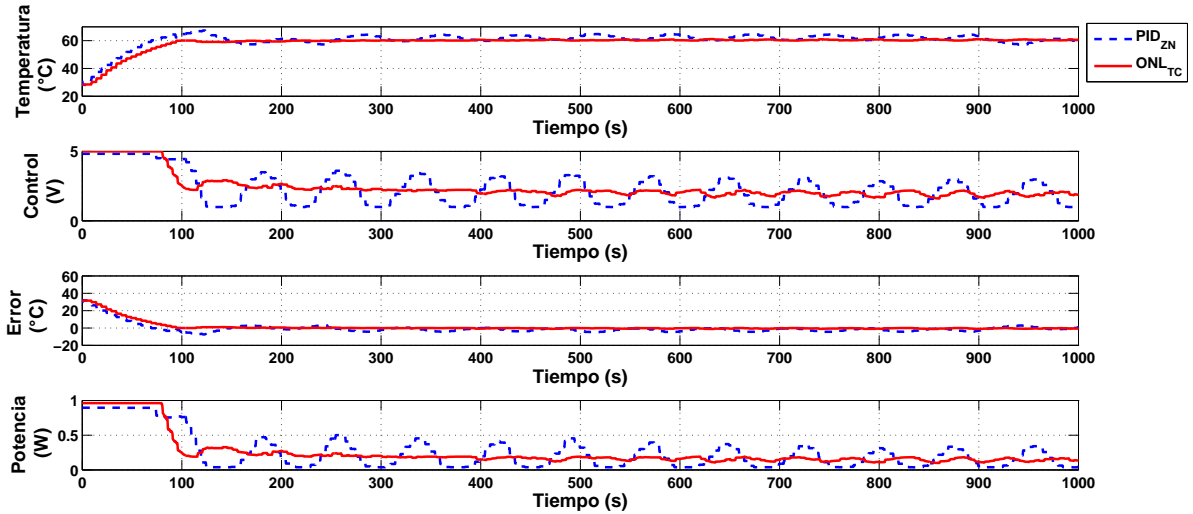


Figura 5.4: Estabilización a $60^{\circ}C$

La Figura 5.5 muestra los resultados experimentales para una referencia de $70^{\circ}C$. Las ganancias son: $W_0 = 600$, $W_1 = 500$, $W_2 = 100$, $W = 2100$, $U(0) = 303.7651$; los escalares $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0.8$, $\epsilon = 740$, $\bar{s} = 186.508$ y los valores propios de (3.12) son $\sigma_{70^{\circ}C}(E) = \{864.939, 1.3528, 0.1083, 0.2639\}$.

El desempeño del controlador se mide en base al ahorro de energía, calculando la potencia promedio de la etapa de alto voltaje como $P_a = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$, en donde T es la duración del experimento y $P(t)$ es la potencia instantánea. En la Tabla 5.1 se presentan estos resultados, también el porcentaje de potencia ahorrada con el control óptimo no lineal y un estimado del ahorro económico en dólares, en un año de funcionamiento (8 horas por 5 días a la semana). Se considera el precio promedio de la electricidad al por menor, dado en el censo de noviembre

del 2015 [115], de 8.51 centavos de dólar por *Kilowatt – hora*.

Temperatura (°C)	ONL_{TC} (Wh)	PID_{ZN} (Wh)	Potencia ahorrada (%)	Ahorro por año dólar (US)
50	28.841	29.652	2.73	515.79
55	42.075	49.060	14.23	4,451.01
60	61.033	62.184	1.85	733.45
70	121.856	132.587	8.09	6,838.10

Tabla 5.1: Potencia promedio en los experimentos de estabilización

Observación 5.1 *La Tabla 5.1 muestra que la cantidad de potencia ahorrada en los experimentos a 50°C y 60°C es poca en comparación con la obtenida con el controlador PID, sin embargo, considerando un criterio de error en estado estacionario de $\pm 5\%$, se observa que cuando se aplica el control óptimo no lineal el tiempo de establecimiento es de 60s y 100s, respectivamente, mientras que para el PID se tienen tiempos de establecimiento de 130s y 140s, respectivamente.*

Observación 5.2 *Con la finalidad de obtener una relación entre la magnitud de las no linealidades en el sistema y la variación permitida de la temperatura una vez que ya ha sido alcanzado el estado estable, considerando el criterio de error de $\pm 5\%$, se realiza el siguiente análisis: En el experimento con temperatura de referencia de 50°C, la función no lineal (2.9) satisface*

$$f^2(x(t), x(t - h)) \leq 0.017 (x^2(t) + x^2(t - h)),$$

lo cual se puede interpretar como una variación de temperatura permitida de $\pm 9.22^\circ C$ y para la temperatura de consigna de $55^\circ C$ se obtiene un intervalo de variación de $\pm 9.53^\circ C$; en contraste, cuando se trabaja en la región de operación a $60^\circ C$ se obtiene un valor de $\pm 30^\circ C$ y para $70^\circ C$ de $\pm 56^\circ C$. Estas variaciones dependen de los parámetros estimados en cada zona de operación, lo cual muestra que el sistema es robusto y para validarlo se realizan experimentos para analizar la robustez del sistema directamente en el deshidratador.

5.3.2 Experimentos de robustez

La humedad en el producto se mide fuera de línea, por lo que se requiere abrir la puerta del prototipo y pesar el producto, esto introduce perturbación al sistema. En esta sección se presenta la respuesta del sistema al abrir la cámara después de 650 segundos de iniciado los experimentos con referencias de $55^\circ C$ y $60^\circ C$. Se consideran las mismas ganancias de la sección anterior y las respuestas se muestran en las Figuras 5.6 y 5.7, respectivamente.

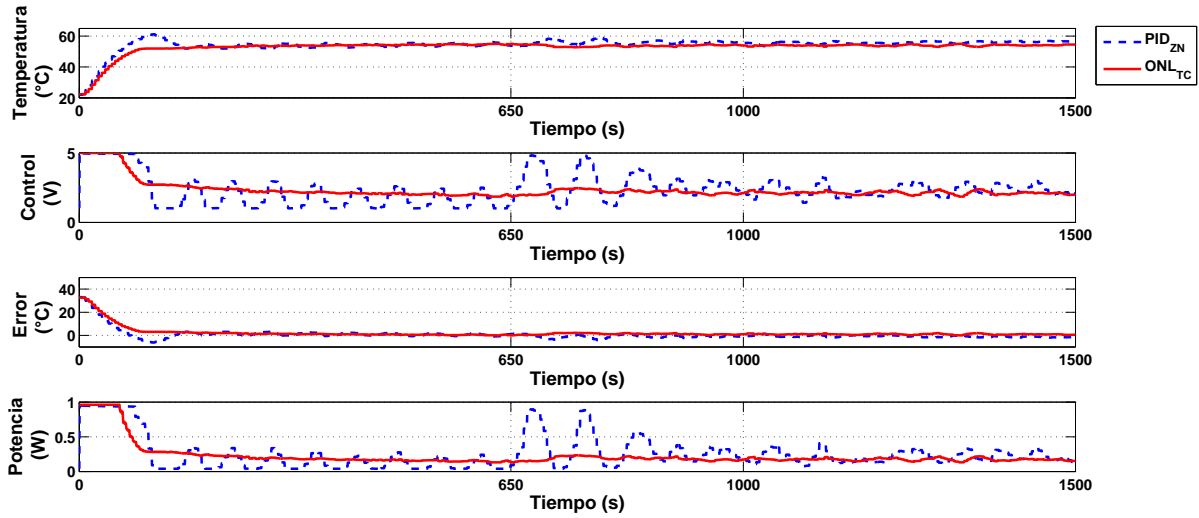


Figura 5.6: Experimento de robustez, referencia $55^{\circ}C$

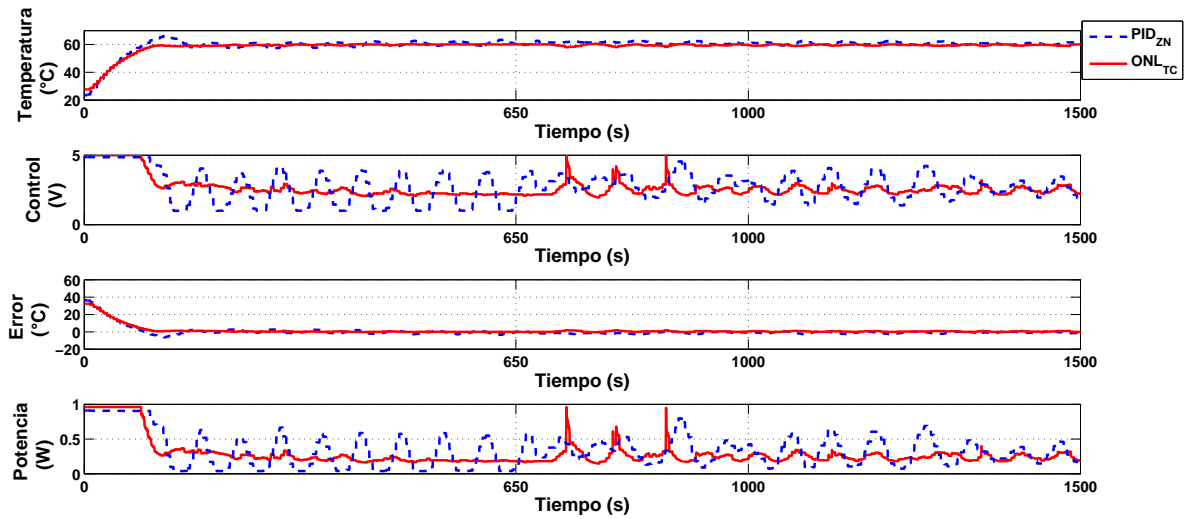


Figura 5.7: Experimento de robustez, referencia $60^{\circ}C$

El resultado del experimento con referencia de $70^{\circ}C$ se muestra en la Figura 5.8, en este caso la perturbación se introduce $750s$ después del inicio del experimento.

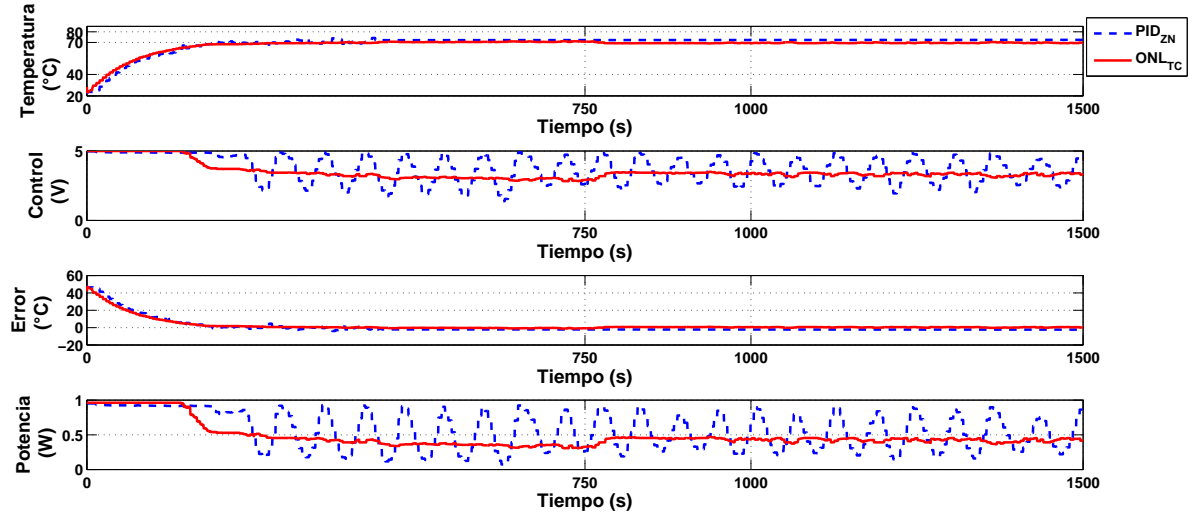


Figura 5.8: Experimento de robustez, referencia $70^{\circ}C$

La Tabla 5.2 presenta el consumo de potencia, el porcentaje de ahorro energético obtenido con el ONL_{TC} y el ahorro estimado en dólares.

Temperatura ($^{\circ}C$)	ONL_{TC} (Wh)	PID_{ZN} (Wh)	Potencia ahorrada (%)	Ahorro por año dólar (US)
55	83.607	96.192	13.08	7,979.37
60	107.768	125.919	14.41	11,566.39
70	178.535	213.673	16.44	22,390.94

Tabla 5.2: Potencia promedio en los experimentos de robustez

Observación 5.3 *Los resultados experimentales muestran que la magnitud de la ley de control está relacionada con la elección de las matrices W_i , $i = 0, 1, 2$. Matrices con norma más grande producen señales de control de mayor magnitud y viceversa.*

5.3.3 Comparación con un control óptimo lineal

En el Apéndice A.4 se recuerda el control óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada, expuesto en [1], y se aborda el problema de implementación del retardo distribuido en la ley de control. La parte integral de la ley de control se aproxima numéricamente y mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii se encontraron condiciones en forma de desigualdades lineales matriciales para concluir que dado un número de particiones de la integral, el sistema en lazo cerrado con la ley de control aproximada es asintóticamente estable. Adicionalmente se presentan condiciones de estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado con el control aproximado y ante incertidumbres no lineales no estructuradas en el modelo, ésto debido a que el sistema es no lineal.

El desempeño del controlador ONL_{TC} , dado por (3.16), se compara con el controlador óptimo lineal (Apéndice A.4), denotado como OL . En la Figura 5.9 se muestran los resultados experimentales para $Q = 1500$ y $R = 0.1$. La temperatura de referencia es $60^{\circ}C$ y la perturbación se introduce $750s$ después de inicio del experimento.

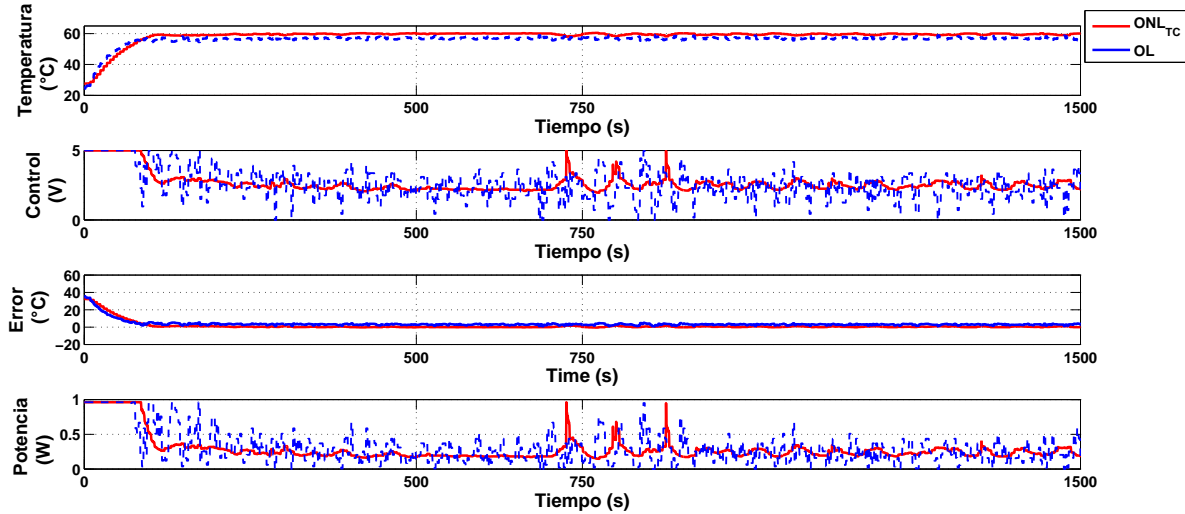


Figura 5.9: Comparación de las respuestas del sistema con los controles OL y ONL_{TC} , referencia $60^{\circ}C$

La Tabla 5.3 muestra los resultados de la potencia consumida y el valor de la integral del valor absoluto del error (IAE), aunque este criterio no se minimizó se toma como referencia comparativa.

	ONL_{TC}	OL	PID_{ZN}
Potencia (Wh)	107.76	113.31	125.91
IAE	4,374.95	11,262.99	6,537.86

Tabla 5.3: Consumo de potencia e IAE

La Tabla 5.4 presenta el porcentaje de ahorro de energía con el ONL_{TC} en contraste con el OL y el PID_{ZN} .

	ONL_{TC} vs OL	ONL_{TC} vs PID_{ZN}
Potencia %	4.89	14.41
IAE %	61.15	33.08

Tabla 5.4: Porcentajes de ahorro de energía del controlador ONL_{TC} con respecto al OL y PID_{ZN}

El control ONL_{TC} mejora el desempeño del sistema en cuanto al consumo de potencia y al error.

Observación 5.4 *Otra elección de las ganancias Q y R podría mejorar el ahorro energético con respecto al ONL_{TC} y al PID_{ZN} , pero se obtiene mal desempeño en los experimentos de robustez (al abrir la tapa del prototipo).*

5.3.4 Comparación con un control por linealización exacta

Como el sistema (2.8)-(2.9) es controlable se realizaron experimentos con una ley de control de realimentación por linealización exacta con la que se obtuvo un desempeño pobre, ya que el error entre el sistema nominal y el modelo aproximado no se puede eliminar. Ésto se explica a continuación: Sea el sistema nominal

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + g(x_t) + bu(t),$$

con $g(x_t) = a_1x(t-h) + f(x(t), x(t-h))$ y la ley de control es

$$u(t) = u_2 - \frac{1}{\tilde{b}}\tilde{g}(x_t), \quad (5.5)$$

en donde $\tilde{g}(x_t)$ es la aproximación polinomial del valor nominal de $g(x_t)$ [123] y se asume que $b \approx \tilde{b}$, en donde \tilde{b} es el valor estimado del parámetro nominal b . El sistema en lazo cerrado es

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + bu_2 + \Delta(x_t)$$

en donde el error entre el sistema nominal y el aproximado es $\Delta(x_t) = g(x_t) - \tilde{g}(x_t)$ y satisface $|\Delta(x_t)| \leq m$, $m > 0$. Aunque este error es acotado en una región (Teorema de Aproximación de Weierstrass [32]) y las soluciones del sistema nominal y del sistema perturbado son exponencialmente acotadas (propiedades de continuidad [48]) el error afecta la respuesta del sistema. Como evidencia, en la Figura 5.10 se muestran los resultados experimentales con el control por Linealización Exacta (denotado como LE) de la forma:

$$u(t) = u_1 - \frac{1}{b}f(x(t), x(t-h)), \quad (5.6)$$

en donde $u_1 = -k_0x(t) - k_1x(t-h)$ es una ley de control de realimentación de estado, las ganancias $k_0 = -0.08$ y $k_1 = -0.01$ se eligen tal que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = (a_0 + bk_0)x(t) + (a_1 + bk_1)x(t-h)$$

sea estable.

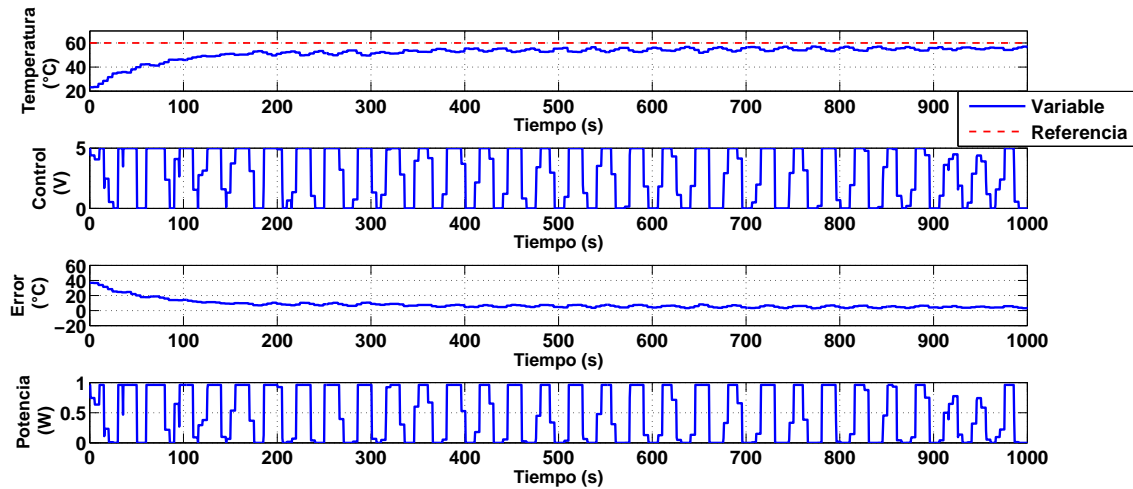


Figura 5.10: Respuesta del sistema al aplicar el control LE , referencia $60^{\circ}C$.

Sin embargo, existe error en estado estacionario y la señal de control oscila. Adicionalmente se utilizó la ley de control (5.5) con una ganancia calculada de manera óptima [52] (se denota como LEO), entonces $u_2 = -R^{-1}bPx(t)$ y P satisface una ecuación algebraica de Riccati [41]. La Figura 5.11 muestra la respuesta obtenida para $Q = 1000$ y $R = 1 \times 10^7$. Con este controlador la respuesta del sistema alcanza la temperatura de referencia, sin embargo las oscilaciones en la señal de control permanecen y el actuador se satura durante 200s al inicio del experimento.

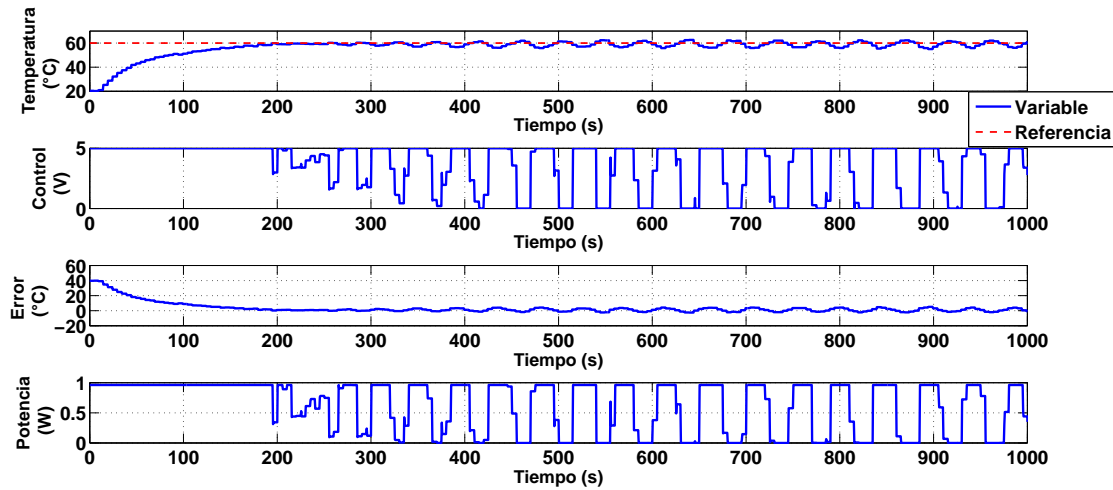


Figura 5.11: Respuesta del sistema al aplicar el control LEO , referencia $60^{\circ}C$.

En la Tabla 5.5 se presenta una comparación del consumo de potencia con los controladores por linealización exacta (LE), por linealización exacta con ganancia optimizada (LEO) y con el control óptimo no lineal con funcionales de tipo completo ($ONLTC$). Tam-

bién se mide el desempeño del sistema mediante el criterio IAE, aunque éste no se minimiza se utiliza como referencia comparativa.

	LE	LEO	ONL_{TC}
Potencia (Wh)	116.25	154.66	61.33
IAE	15,918.22	7,794.87	3,520.79

Tabla 5.5: Consumo de potencia e IAE

El porcentaje de ahorro energético del controlador ONL_{TC} en contraste con los controladores LE y LEO se presentan en la Tabla 5.6.

	ONL_{TC} vs EL	ONL_{TC} vs ELO
Ahorro energético %	47.24	60.34
IAE %	77.88	54.83

Tabla 5.6: Porcentaje de ahorro energético e IAE del ONL_{TC} en contraste con EL y ELO

La comparación con el control por linealización exacta (5.6) da evidencia de que el término con retardo en el estado no puede cancelarse mediante pasos algebraicos, éste debe ser tomado en cuenta para obtener un buen desempeño de la respuesta del sistema.

5.4 Implementación de la ley de control óptimo no lineal con funcionales de tipo reducido

Este controlador es presentado en la Sección 3.2.2 por la ecuación (3.31) y se denota como ONL_{TR} . Se considera el modelo dado en la Tabla 2.1 y bajo la Suposición 5 (desigualdades (3.20)) el proceso de deshidratado es localmente Lipschitz con $\alpha_1 = 0.0022$ y $\alpha_2 = 0.0026$. Para verificar que la funcional de tipo reducido (3.26) es una FCLK se obtiene la solución para el conjunto de parámetros $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, P, Q)$ tal que se satisface la desigualdad lineal matricial (3.29) del Teorema 3.3 y la ley de control (3.31) sea óptima. Para calcular dicha solución se utiliza el software Matlab-SeaDUMi-YalMiP, los valores calculados son: $P = 1.2013 \times 10^3$, $Q = 68.7668$, $\varepsilon_1 = 2.9796 \times 10^5$ y $\varepsilon_2 = 2.9659 \times 10^5$. La desigualdad matricial (3.29) tiene la forma

$$S = \begin{bmatrix} -0.0008, & 0.0007, & 0.0120, & 0.0120 \\ 0.0007, & -0.0007, & 0, & 0 \\ 0.0120, & 0, & -2.9796, & 0 \\ 0.0120, & 0, & 0, & -2.9659 \end{bmatrix} \times 10^5$$

y su espectro esta dado por $\sigma(S) = \{-2.9796 \times 10^5, -2.9659 \times 10^5, -134.0604, -1.1483\}$. Las Figuras 5.12 y 5.13 muestran la respuesta del sistema, la señal de control, el error y la potencia consumida, para las referencias de 60 y 70°C, respectivamente. La respuesta obtenida

con el ONL_{TR} se compara con la obtenida con el controlador PID sintonizado robustamente (denotado como $PID_{robusto}$) y PID_{ZN} .

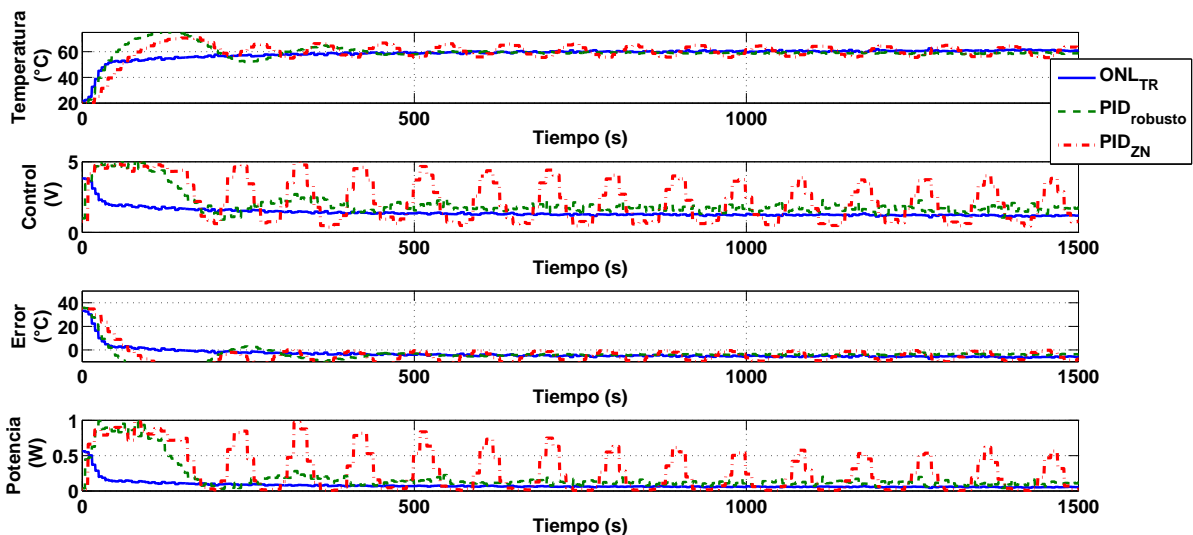


Figura 5.12: Comparación de la respuesta del sistema con los controles ONL_{TR} , $PID_{robusto}$ y PID_{ZN} , referencia $60^{\circ}C$

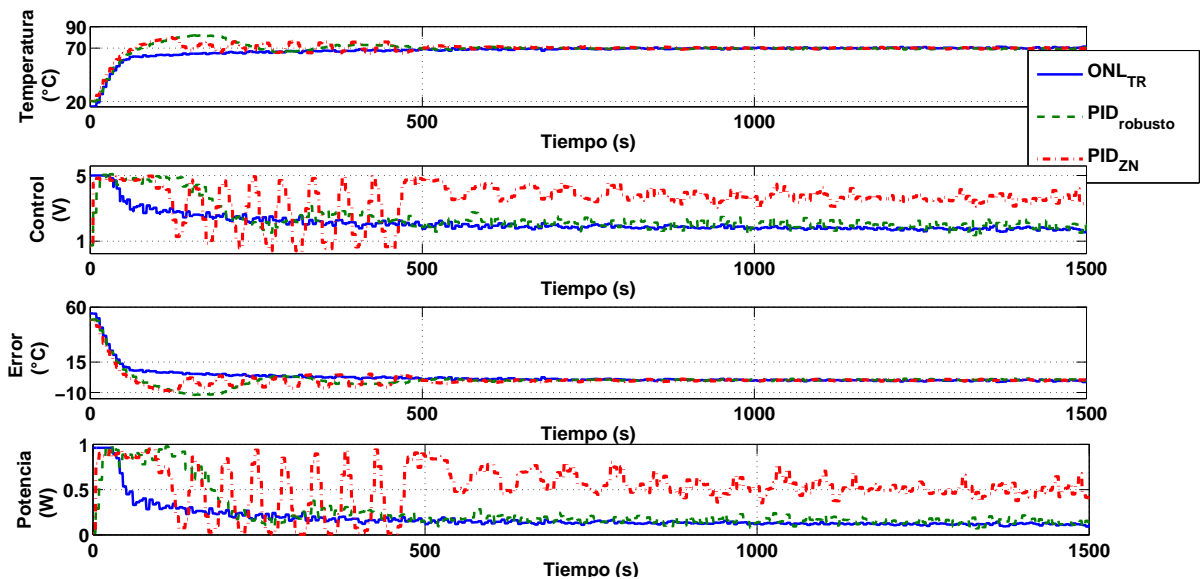


Figura 5.13: Comparación de la respuesta del sistema con los controles ONL_{TR} , $PID_{robusto}$ y PID_{ZN} , referencia $70^{\circ}C$

Observación 5.5 Bajo el criterio de error en estado estacionario de $\pm 2\%$, en el experimento de la Figura 5.12, se tienen tiempos de establecimiento de 450s y 520s para con el controlador ONL_{TR} y el $PID_{robusto}$, respectivamente. Con el controlador PID_{ZN} no se alcanza la referencia, la temperatura llega a $57^{\circ}C$.

En el experimento a 70°C , mostrado en la Figura 5.13, para el controlador ONL_{TR} se calcula un tiempo de establecimiento de 480s, para el $PID_{robusto}$ de 492s y para el PID_{ZN} de 550s.

En las siguientes Tablas se muestran los resultados de la potencia consumida, el porcentaje de ahorro obtenido con el ONL_{TR} y el ahorro en dólares.

Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	ONL_{TR} (Wh)	$PID_{robusto}$ (Wh)	PID_{ZN} (Wh)
60	29.04	68.04	82.95
70	68.19	94.34	198.43

Tabla 5.7: Comparación de la potencia promedio

Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	ONL_{TR} vs $PID_{robusto}$ (%)	ONL_{TR} vs PID_{ZN} (%)
60	57.31	64.99
70	27.71	65.63

Tabla 5.8: Comparación del porcentaje de potencia ahorrada con el controlador ONL_{TR}

Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	ONL_{TR} vs $PID_{robusto}$ (US)	ONL_{TR} vs PID_{ZN} (US)
60	34,961.5	39,646.7
70	16,904.3	40,037.1

Tabla 5.9: Comparación del ahorro en dólares por año

A diferencia del control ONL_{TC} , que utiliza diferentes modelos con parte lineal estable para cada región de operación, el control ONL_{TR} utiliza un solo modelo. El desempeño de ambos controladores fue mejor en comparación con el controlador industrial PID. En todos los experimentos se observó un ahorro energético, lo cual conduce a un ahorro económico.

5.5 Implementación del control subóptimo en tiempo discreto

La secuencia de controles subóptimos (Sección 3.3.1, ecuación (3.44)), se denota como CSD. Los parámetros estimados del modelo están dados en la Tabla 2.3 y los instantes equivalentes a los retardos son $M_1 = 20$ y $M_2 = 8$. Se elige $N = 7200$, el horizonte es $\tilde{N} = 7208$, con

$T_s = 0.5s$, con lo que el tiempo de duración del experimento es $t_f = T_s \tilde{N} = 3604s$. Se realizan tres experimentos con temperaturas de referencia de 50, 60 y 70 grados y se compara con los obtenidos con el $PID_{robusto}$. La Figura 5.14 muestra la respuesta del sistema, para una referencia de $50^\circ C$ y las ganancias son: $H = 300$, $Q = 300$ y $R = 0.006$.

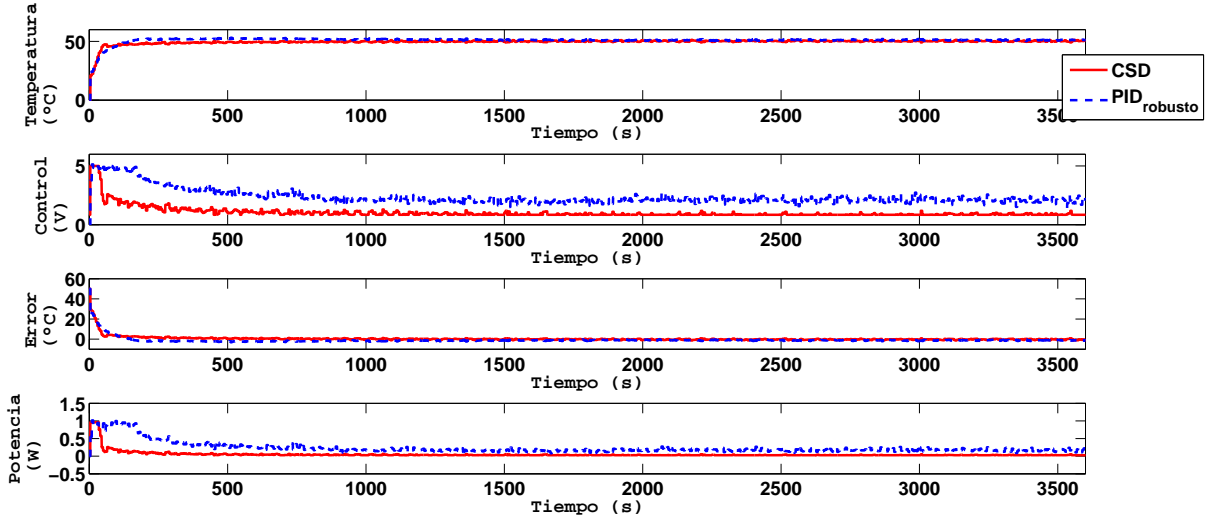


Figura 5.14: Respuesta del sistema al aplicar el control CSD, referencia $50^\circ C$

La Figura 5.15 muestra el experimento con referencia a $60^\circ C$ y las ganancias son: $H = 250$, $Q = 250$ y $R = 0.006$.

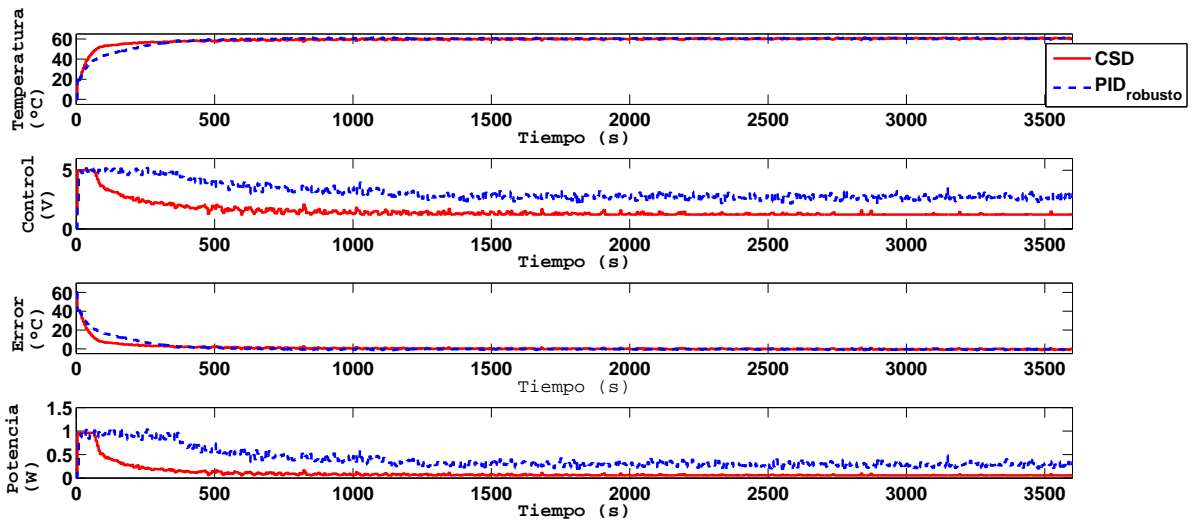


Figura 5.15: Respuesta del sistema al aplicar el control CSD, referencia $60^\circ C$

La Figura 5.16 muestra el experimento con referencia a $70^\circ C$, las ganancias son: $H = 200$, $Q = 200$ y $R = 0.006$.

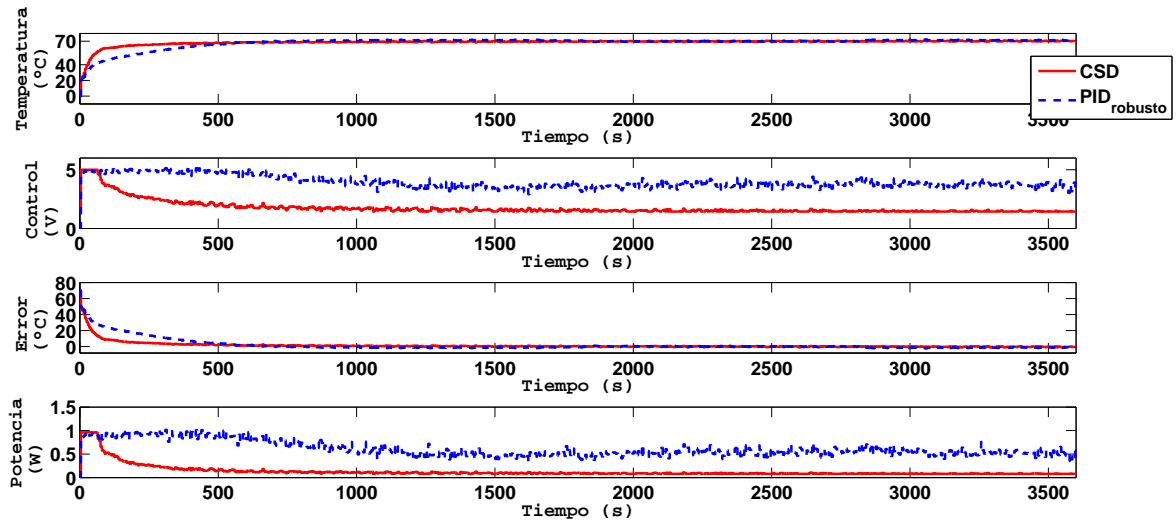


Figura 5.16: Respuesta del sistema al aplicar un control subóptimo en tiempo discreto a $70^{\circ}C$

En los tres experimentos, se observa que la temperatura converge a la referencia con ambos controladores, sin embargo, las señales de control del PID tienen mayor amplitud que la del control subóptimo, lo cual impacta en el consumo de energía y esto se muestra en las Tablas 5.10 y 5.11.

Temperatura ($^{\circ}C$)	CSD (Wh)	$PID_{robusto}$ (Wh)
50	38.93	201.033
60	81.31	345.48
70	119.92	539.84

Tabla 5.10: Comparación de la potencia promedio consumida con el CSD y el $PID_{robusto}$

Temperatura ($^{\circ}C$)	CSD vs $PID_{robusto}$ (%)
50	80.63
60	76.46
70	77.78

Tabla 5.11: Porcentaje de potencia ahorrada con el controlador CSD

Con este controlador solo se utiliza un solo modelo para las tres regiones de operación y los resultados de ahorro de potencia mejoran en comparación con el $PID_{robusto}$.

5.6 Implementación del control predictor dinámico

En la ley de control (4.29) presentada en el Capítulo 4.3 se considera el caso cuando el retardo en la entrada τ es mayor que el retardo en el estado h , pero en el caso de la deshidratadora se tiene el caso contrario cuando $h > \tau$, por lo que la ley de control se obtiene siguiendo el análisis en [50] como sigue:

En [49] se presenta el control de tipo predictivo que compensa los retardos del sistema (4.26) y está descrito por

$$u(t) = F_0x(t + \tau) + F_1x(t + \underbrace{\tau - h}_{-\gamma}), \quad t \geq 0, \quad (5.7)$$

en donde $F_0, F_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son tales que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = (A_0 + BF_0)x(t) + (A_1 + BF_1)x(t - h), \quad t > \tau$$

es asintóticamente estable. En este caso solo se requiere la predicción de $x(t + \tau)$, el valor de $x(t + \tau - h)$ es un valor retardado. Para definir a la ley de control se elige a una matriz Hurwitz $G \in \mathbb{R}^{p \times p}$ y de (5.7) sigue que

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} - Gu(t) &= F_0 \frac{dx(t + \tau)}{dt} + F_1 \frac{dx(t - \gamma)}{dt} - G [F_0x(t + \tau) + F_1x(t - \gamma)] \\ &= F_0 [A_0x(t + \tau) + A_1x(t - \gamma) + Bu(t)] \\ &\quad + F_1 [A_0x(t - \gamma) + A_1x(t - \delta) + Bu(t - h)] \\ &\quad - G [F_0x(t + \tau) + F_1x(t - \gamma)] \end{aligned}$$

en donde $\gamma = h - \tau$ y $\delta = 2h - \tau$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= [F_0A_0 - GF_0]x(t + \tau) + [F_0A_1 + F_1A_0 - GF_1]x(t - \gamma) \\ &\quad + [F_0B + G]u(t) + F_1A_1x(t - \delta) + F_1Bu(t - h). \end{aligned}$$

En la ecuación anterior se sustituye la predicción del estado

$$x(t + \tau) = K(\tau)x(t) + \int_{-h}^0 K(\tau - \theta - h)A_1x(t + \theta)d\theta + \int_{-\tau}^0 K(-\theta)Bu(t + \theta)d\theta,$$

en donde $K(t)$ es la matriz fundamental del sistema (4.26) y satisface (4.30). Entonces el control está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= [F_0B + G]u(t) + F_1Bu(t - h) \\ &\quad + Q(\tau)x(t) + \int_{-h}^0 Q(\tau - \theta - h)A_1x(t + \theta)d\theta + \int_{-\tau}^0 Q(-\theta)Bu(t + \theta)d\theta \\ &\quad + [F_0A_1 + F_1A_0 - GF_1]x(t - \gamma) + F_1A_1x(t - \delta), \end{aligned} \quad (5.8)$$

en donde

$$Q(t) = [F_0 A_0 - G F_0] K(t).$$

El modelo lineal que describe la dinámica del sistema de deshidratación en un punto de operación de 70°C está descrito por:

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t - h) + bu(t - \tau),$$

los parámetros se estiman con el método de mínimos cuadrados recursivos y son: $a_0 = -0.09952$, $a_1 = 0.09357$, $b = 0.00196$, $h = 10$ y $\tau = 5$. La ecuación diferencial que representa a la ley de control (5.8) se resuelve de manera continua con un bloque integrador del modulo de *Control y Simulación* de LabVIEW y las integrales se aproximan con la regla de Simpson compuesta con un número de particiones $N = 15$. Las ganancias del controlador son $F_0 = -700$, $F_1 = -50$ y $G = -0.05$. La respuesta del sistema y la señal de control se muestran en la Figura 5.17.

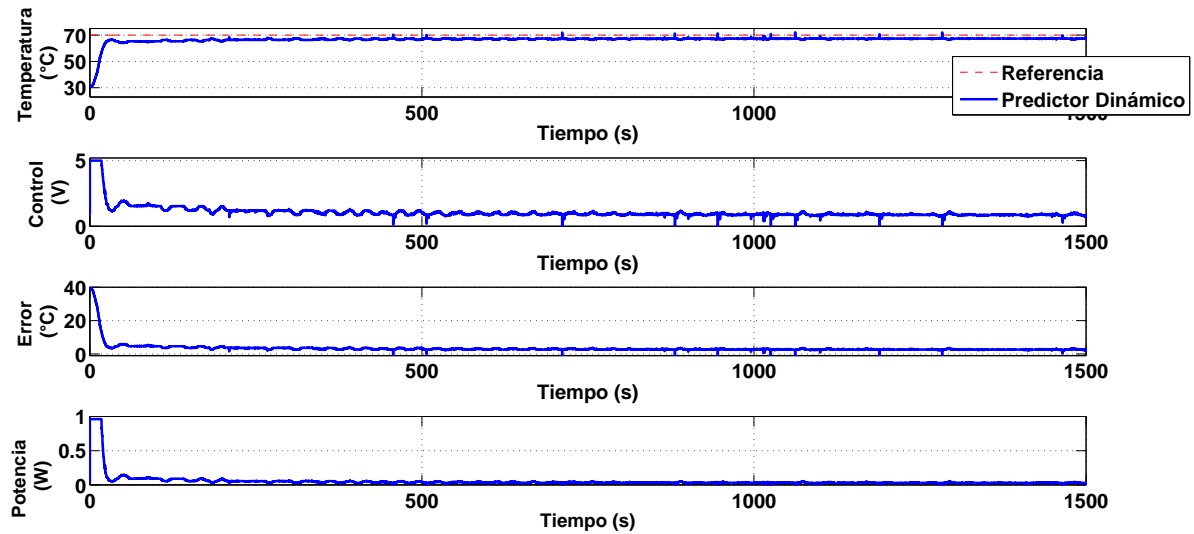


Figura 5.17: Respuesta del sistema al aplicar el control predictor dinámico, referencia 70°C

La temperatura no alcanza la referencia, existe un error en estado estacionario de 4°C , ésto lo atribuimos al hecho de que se utiliza un modelo lineal de la planta pero, como se mostró en el capítulo 2, el sistema no es lineal.

5.7 Análisis de la pérdida de nutrientes

En esta sección se presentan los resultados del estudio sobre los efectos del control de temperatura en el proceso de deshidratación de rebanadas de jitomate. Se consideran dos estrategias de control: el control óptimo no lineal obtenido mediante el enfoque de optimalidad inversa con funcionales de tipo completo (Sección 3.2) y el controlador PID sintonizado robustamente (Sección 5.2.1). Las características intrínsecas que se cuantifican son los niveles de vitamina

C, fenoles totales y licopeno. Este análisis se realiza con la finalidad de observar las ventajas de estos controladores.

5.7.1 Selección y preparación del jitomate

Se utilizaron jitomates saladette (*Lycopersicon esculentum*) con masas similares (180 – 210 g). La selección de los frutos se realizó de acuerdo a la escala de color USDA (United States Department of Agriculture) [118], con al menos un 90% de la superficie roja. En la etapa de pretratamiento, los jitomates se lavaron y rebanaron con 6mm de espesor y las semillas se remueven para prevenir una alta variación en el peso del producto seco. Con la finalidad de prevenir la degradación de los componentes antioxidantes del jitomate, las rebanadas se sumergen en una solución de metabisulfito de sodio (10 g/L) durante 5 minutos, a temperatura ambiente (aproximadamente 25°C) y finalmente la solución es drenada durante 2 minutos.

5.7.2 Determinación de la humedad

Las curvas de secado se obtienen de acuerdo al peso de las rebanadas y se calcula como sigue:

$$\% \text{ Humedad} = \frac{\text{peso}_{\text{inicial}} - \text{peso}_{\text{final}}}{\text{peso}_{\text{inicial}}} 100.$$

Las muestras se pesan cada 15 minutos en una balanza analítica (marca Sartorius) y el secado se continua hasta obtener un contenido final de humedad de 10%. Para reducir la incertidumbre en cada prueba, los experimentos se realizaron por triplicado. Se colocaron 6 rebanadas en una rejilla de acero inoxidable dentro de la deshidratadora (Figura 5.18). Es importante cuidar la posición de las rebanadas para mantenerla durante todo el proceso.

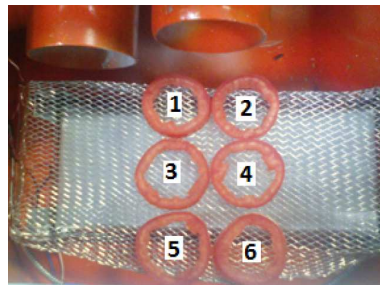


Figura 5.18: Ubicación de las rebanadas

El secado se lleva a cabo a 50 y 70°C, con velocidad del aire de 2.1 m/s y la humedad inicial de cada rebanada se considera de 90%. Las curvas de secado de cada rebanada, a 50°C con el control ONL_{TC} y $PID_{robusto}$, se muestran en las Figuras 5.21 y 5.22, respectivamente. Las curvas de humedad a 70°C se muestran en el Apéndice A.8. Observe que el proceso de secado tiene diferentes tiempos de duración, cuando se aplica el control ONL_{TC} se toman 8 muestras, mientras que con el control PID se tomaron 11, hasta que todas las rebanadas

alcancen el porcentaje de humedad menor al 10%. Las fotografías de las rebanadas frescas se muestran en la Figura 5.19 y deshidratadas en la Figura 5.20.



Figura 5.19: Jitomate fresco



Figura 5.20: Jitomate deshidratado

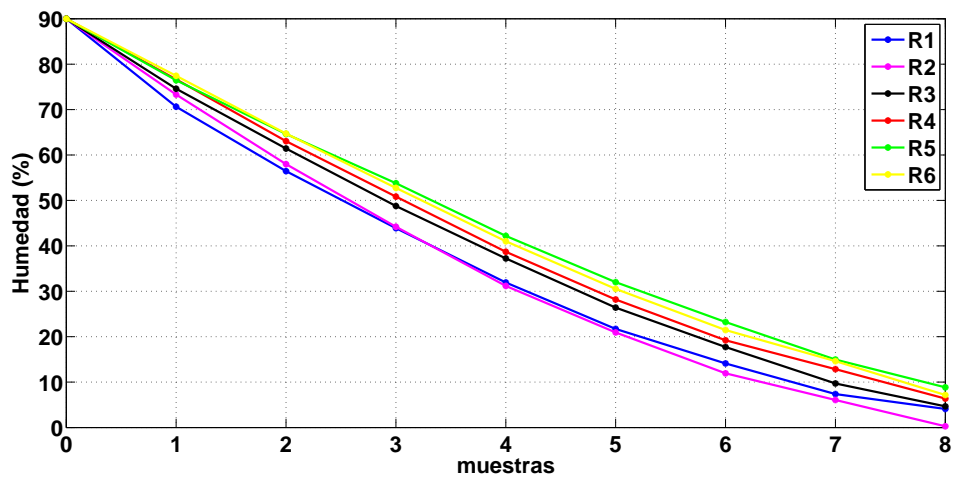


Figura 5.21: Pérdida de humedad al aplicar el control ONL_{TC} a $50^{\circ}C$

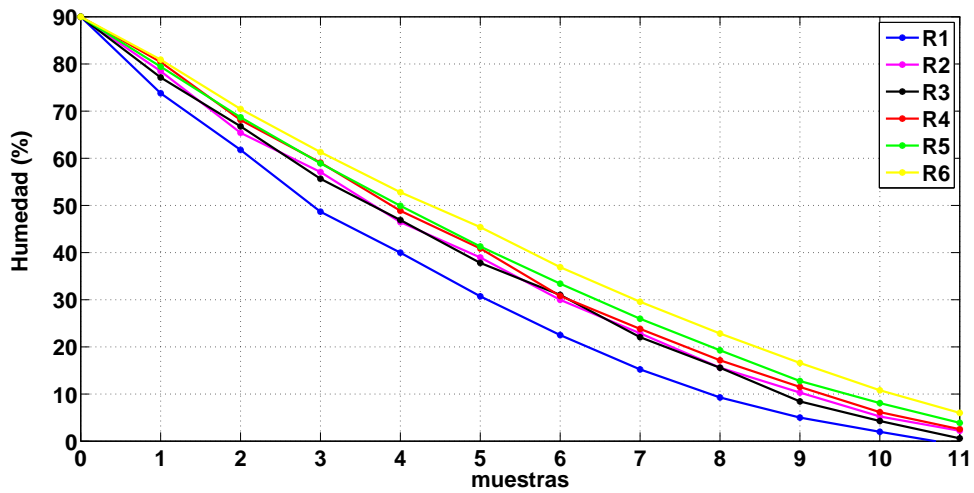


Figura 5.22: Pérdida de humedad al aplicar el control *PID* a 50°C

5.7.3 Desempeño del sistema en lazo cerrado y consumo de energía

La Figura 5.23 muestra la respuesta del sistema, correspondiente a las curvas de humedad de las Figuras 5.21 y 5.22. Es importante mencionar que con la finalidad de evitar la degradación en la calidad del producto, las ganancias de los controladores se eligen de modo que no existe sobreimpulso, al inicio del experimentos. Sin embargo, cuando se retiran las rebanadas para pesarlas se presenta un incremento de la temperatura, para el caso del control *ONLTC* de 4°C y con el *PID* de 6°C . Este incremento en la temperatura no afecta al producto, ya que ocurre mientras las rebanadas están siendo pesadas, cuando se colocan nuevamente la temperatura alcanza nuevamente el valor de consigna (50°C). En el experimento a 70°C (Figura 5.24) se observa un comportamiento similar.

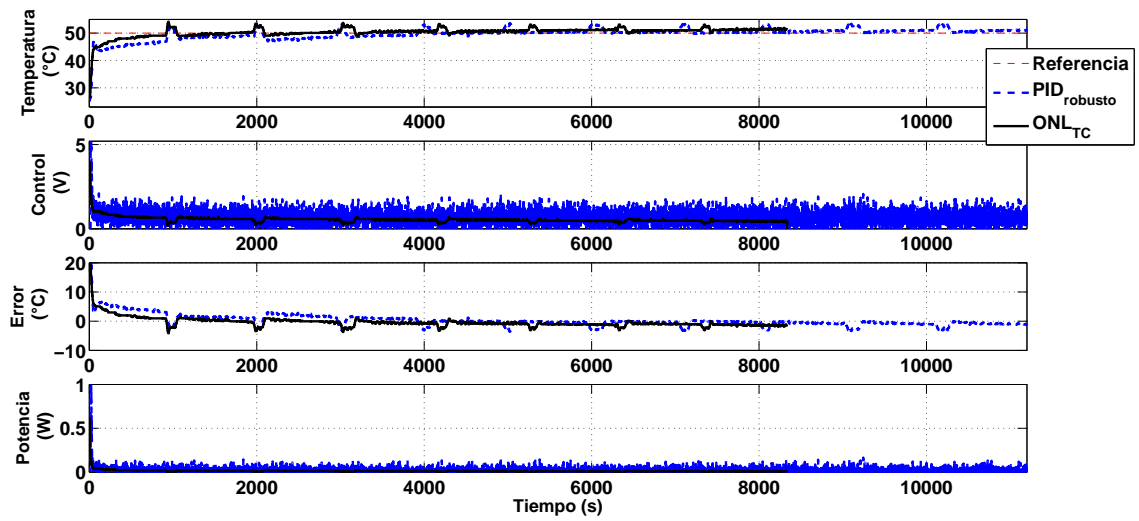


Figura 5.23: Respuesta del sistema en el experimento de deshidratación a 50°C

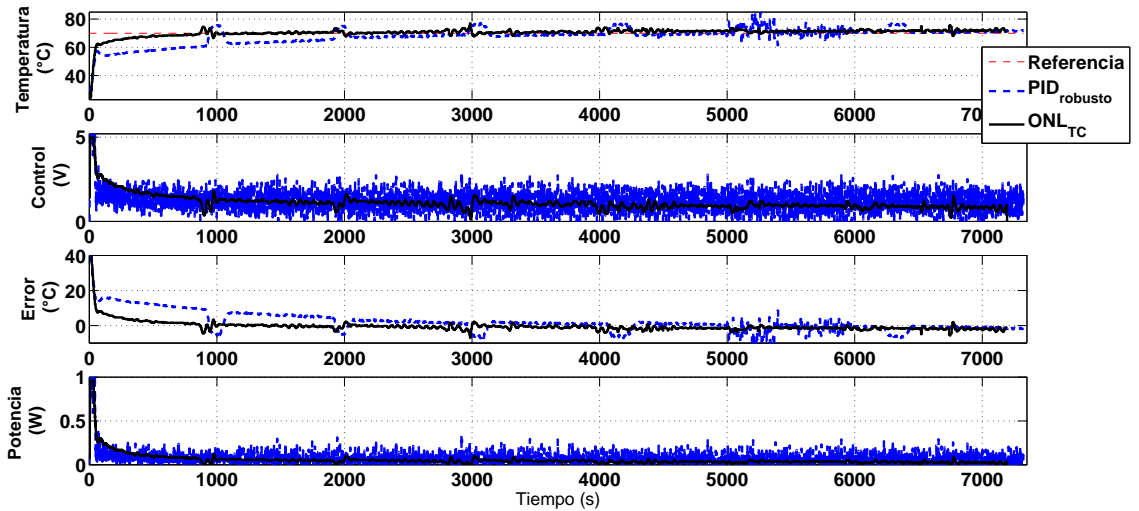


Figura 5.24: Respuesta del sistema en el experimento de deshidratación a 70°C

La Tabla 5.12 resume el desempeño de la planta cuando se aplican los dos controladores. El IAE se considera para medir el desempeño en lazo cerrado, el tiempo de establecimiento T_e se calcula usando el criterio de $\pm 2\%$, y también se presentan los tiempos de saturación del actuador T_s y de duración de la deshidratación.

<i>Controlador</i>	<i>Tiempo_e</i> (s)	<i>Tiempo_s</i> (s)	Duración (s)	<i>IAE</i>
<i>PID_{50°C}</i>	1026	24	11,331.5	29, 533.21
<i>ONL_{TC50°C}</i>	660	3	8,337.5	18,822.6
<i>PID_{70°C}</i>	1929	44	7,323	58,254.09
<i>ONL_{TC70°C}</i>	744	34	7,194	24,383.06

Tabla 5.12: Desempeño de la planta en lazo cerrado

Las respuestas del sistema, mostradas en las Figuras 5.23 y 5.24 se comparan en base al consumo de potencia y es evidente el ahorro con el *ONL_{TC}* (Tabla 5.13).

<i>Controlador</i>	Consumo de energía (<i>Wh</i>)	Ahorro (%)
<i>PID_{50°C}</i>	175.08	—
<i>PID_{70°C}</i>	322.21	—
<i>ONL_{TC50°C}</i>	67.28	61.57
<i>ONL_{TC70°C}</i>	251.68	21.88

Tabla 5.13: Ahorro energético

5.8 Conclusiones

En este capítulo se presentaron los resultados experimentales obtenidos al aplicar los controladores óptimos no lineales y su desempeño se comparó con el de un controlador PID industrial, ya que sigue siendo el más utilizado. Adicionalmente, la respuesta del sistema en lazo cerrado con el control óptimo no lineal, obtenido con funcionales de tipo completo, se contrasta con las obtenidas con el control óptimo lineal y con un control por linealización exacta; ambas respuestas exhiben un desempeño pobre al presentarse errores en estado estacionario y de oscilaciones en la señal de control. Estos resultados dan evidencia de que el término con retardo en el estado no puede cancelarse mediante pasos algebraicos, éste debe ser tomado en cuenta para obtener un buen desempeño de la respuesta del sistema.

En el caso del controlador obtenido usando funcionales de tipo completo fue necesario utilizar diferentes modelos con parte lineal estable para cada región de operación, sin embargo se obtuvieron resultados satisfactorios ante perturbaciones. Para el controlador obtenido con funcionales de tipo reducido se utilizó un modelo que contempla las diferentes zonas de operación. Cuando se utilizaron estos controladores se observó una disminución en el consumo de potencia en comparación con el PID, lo cual conduce a un ahorro económico.

La necesidad de aproximar los términos integrales de las leyes de control obtenidas para sistemas en tiempo continuo se evitó mediante la estrategia de control subóptimo en tiempo discreto, en donde se utilizó un modelo que considera los retardos en la entrada y en el estado y es válido para las diferentes regiones de operación.

Cuando se utilizaron controladores sintetizados a partir de modelos matemáticos puramente lineales, como en los casos del control óptimo lineal y del control predictor dinámico,

se observó desempeño pobre (error en estado estacionario y/o oscilaciones en la señal de control) en la respuesta del sistema en lazo cerrado. En los casos cuando se enriquece al modelo agregando una parte lineal (estable o no) y una parte no lineal se obtienen controladores que permiten obtener un mejor desempeño del sistema de deshidratación en lazo cerrado y cierta robustez ante perturbaciones. También se observó que el desempeño es mejor cuando se consideran ambos retardos (en la entrada y en el estado) ya que el consumo de potencia es menor.

El análisis de retención de nutrientes aún está pendiente, ya que estamos esperando los resultados del análisis químico. Sin embargo, lo que podemos evaluar del desempeño de los dos controladores, en términos del consumo de potencia, es que con el control óptimo no lineal se reducen los tiempos de saturación del actuador y la duración del experimento, además se utilizó el criterio IAE para mostrar que el error es mayor con el controlador PID.

6

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se han desarrollado diferentes controladores óptimos y subóptimos para mejorar el desempeño de un sistema de deshidratación, con respecto al consumo energético. Este proceso se modela como una clase de sistema no lineal con retardo en el estado, en la entrada o ambos.

A continuación se resumen las principales contribuciones y se discute el trabajo a llevar a cabo.

6.1 Principales contribuciones de la tesis

- **Condiciones suficientes bajo las cuales una funcional de tipo completo es una FCLK** para un sistema no lineal con retardo puntual en el estado, con una parte lineal estable y una parte no lineal que satisface una condición de Lipschitz localmente.
- **Condiciones suficientes bajo las cuales una funcional de tipo reducido es una FCLK** para un sistema no lineal con retardo puntual en el estado, sin embargo, no es necesario que la parte lineal sea estable para proponer a la funcional.
- **Dos tipos de controladores óptimos, obtenidos mediante el enfoque de optimalidad inversa**, el primero usando funcionales de tipo completo y el segundo con funcionales de tipo reducido.
- **Resultados experimentales** que muestran la efectividad de los controladores óptimos no lineales al aplicarlos al actuador del sistema de deshidratado. La respuesta del sistema alcanza la referencia y se ahorra energía en comparación con un controlador industrial PID.
- **Secuencia de control subóptimo en tiempo discreto** para sistemas no lineales afines con retardos en el estado y en la entrada de control. El resultado experimental muestra la efectividad del controlador.
- **Control con costo garantizado** para sistemas lineales con retardo en el estado e incertidumbre en la entrada, mediante el uso de funcionales de tipo completo y la

técnica conocida como rediseño de Lyapunov. Este controlador se valida en simulación, con lo cual se observa un buen desempeño de la respuesta de los sistemas considerados.

- **Condiciones suficientes de estabilidad para el sistema en lazo cerrado con el control óptimo lineal aproximado** y un análisis ante incertidumbres no modeladas.
- **Análisis de robustez de un control predictor dinámico** para sistemas lineales con retardo en la entrada y en el estado ante incertidumbre en los parámetros o en los retardos. Se realizó en el marco del enfoque frecuencial y se encontraron estimados para las incertidumbres.

6.2 Trabajo futuro

En la continuación de este trabajo, se tiene el propósito de completar los resultados presentados de acuerdo a los siguientes ejes de investigación:

- Reportar los resultados de la retención de nutrientes (licopeno, vitamina C y fenoles totales) en el jitomate.
- Diseñar un control óptimo no lineal que minimize un criterio de desempeño que también incluya la pérdida de color del jitomate, ya que el color es un indicador de calidad muy importante. Los cambios de color están relacionados con la humedad del producto, entonces se planea realizar la medición de humedad y color en línea.
- Encontrar las condiciones suficientes para que una funcional de tipo completo sea una Función de Control de Lyapunov-Krasovskii Robusta.

Bibliografía

- [1] Alekal, Y., Brunovsky, P., Chyung, D. H., & Lee, E. B. (1971). The quadratic problem for systems with time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6), 673-687.
- [2] Arias, R., Lee, T. C., Logendra, L., & Janes, H. (2000). Correlation of lycopene measured by HPLC with the L*, a*, b* color readings of a hydroponic tomato and the relationship of maturity with color and lycopene content. *Journal of Agricultural and Food Chemistry*, 48(5), 1697-1702.
- [3] Aström, K. J. & Häggglund, T. (1995). *PID controllers: theory, design and tuning*. Instrument society of America.
- [4] Barmish, B. R., Corless, M., & Leitmann, G. (1983). A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21(2), 246-255.
- [5] Bekiaris-Liberis, N. (2014). Simultaneous compensation of input and state delays for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 73, 96-102.
- [6] Bellman R. (1943). The stability of solutions of linear differential equations, *Duke Math. J.* 10(4), 643-647.
- [7] Bellman R., & Cooke K. L. (1963). *Differential difference equations*, Academic Press, New York.
- [8] Bellman, R., & Kalaba, R. E. (1965). *Dynamic programming and modern control theory*. Academic Press, New York.
- [9] Bhatia, M. (2004). Revolutionary Concept in Product Drying using Desiccant Dehumidification. *In International Workshop and Symposium on Industrial Drying*, paper SY174. Mumbai, India.
- [10] Boukas, E. K., & Liu, Z. K. (2012). *Deterministic and stochastic time-delay systems*. Springer Science & Business Media.
- [11] Bresch-Pietri, D., & Petit, N. (2014). Prediction-based control for linear systems with input-and state-delay-robustness to delay mismatch. *In Proc. of the IFAC World Congress*, South Africa, 11410-11418.

-
- [12] Chua, K. J., Hawlader, M. N. A., Chou, S. K., & Ho, J. C. (2002). On the study of time-varying temperature drying-Effect on drying kinetics and product quality. *Drying Technology*, 20(8), 1559-1577.
- [13] Corless, M. (1993). Control of uncertain nonlinear systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 115(2B), 362-372.
- [14] Creus, A. (1997). *Instrumentación industrial*. Alfaomera, México.
- [15] Datko, R. (1971). An algorithm for computing Liapunov functionals for some differential difference equations. *Ordinary differential equations*, 387-398.
- [16] Dyer, P., & Mc. Reynolds, S. R. (1970). *The computation and theory of optimal control*, vol. 177, New York Academic Press.
- [17] Dufour, P. (2006). Control engineering in drying technology: Review and trends. *Drying technology*, 24(7), 889-904.
- [18] Eller, D. H., Aggarwal, J. K., & Banks, H. (1969). Optimal control of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(6), 678-687.
- [19] Engelborghs, K., Dambrine, M., & Roose, D. (2001). Limitations of a class of stabilization methods for delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(2), 336-339.
- [20] Esfahani, S. H., Moheimani, S. R., & Petersen, I. R. (1998). LMI approach to suboptimal guaranteed cost control for uncertain time-delay systems. *In Proceedings of IEE Control Theory and Applications*, 145(6), 491-498.
- [21] Expert Tune, <http://www.experttune.com/PIDModel.aspx>, 2016. Consulta: 2016-06-28.
- [22] Freeman, R. A., & Kokotovic, P. V. (2008). *Robust nonlinear control design: state-space and Lyapunov techniques*. Springer Science & Business Media.
- [23] Fridman, E., & Shaked, U. (2003). Parameter dependent stability and stabilization of uncertain time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5), 861-866.
- [24] Fridman, E. *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Springer, 2014.
- [25] García-Lozano, H., & Kharitonov, V. L. (2004). Lyapunov matrices for time delay systems with commensurate delays. *In 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Oaxaca, México, 102-106.
- [26] Garcia-Lozano, H., & Kharitonov, V. L. (2006.). Numerical computation of time delay Lyapunov matrices. *In Proceedings of 6th IFAC Workshop on Time Delay Systems*. 6(1), 60-65.
-

-
- [27] Garrido, A. E. (2014). Tesis de maestría, *Control óptimo lineal para una deshidratadora y monitorización en línea del color del producto*, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- [28] Geankoplis, C. J. (1999). *Procesos de transporte y operaciones unitarias* Vol. 1. Ceca.
- [29] Hale, J. K. (1971). *Functional differential equations*. Springer Berlin Heidelberg.
- [30] Haley, T. A., & Mulvaney, S. J. (1995). Advanced process control techniques for the food industry. *Trends in Food Science & Technology*, 6(4), 103-110.
- [31] Han, Q. L., & Yu, L. (2004). Robust stability of linear neutral systems with nonlinear parameter perturbations. *In Proceedings of IEE Control Theory and Applications*, 151(5), 539-546.
- [32] Hazewinkel, M. (1994). *Encyclopedia of Mathematics*, Springer.
- [33] Hoffman, J. D., & Frankel, S. (2001). *Numerical methods for engineers and scientists*. CRC press.
- [34] Honeywell, <https://www.honeywellprocess.com/library/marketing/brochures/Solutions-for-Thermal-Processing-OEMs-Spanish-Brochure.pdf>, 2013. Consulta: 2016-06-28.
- [35] Huang, W. (1989). Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 142(1), 83-94.
- [36] Infante, E. F., & Castelan, W. B. (1978). A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation. *Journal of Differential Equations*, 29(3), 439-451.
- [37] Jankovic, M. (2000). Extension of control Lyapunov functions to time-delay systems. *In Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000*, 5, 4403-4408.
- [38] Jankovic, M. (2001). Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7), 1048-1060.
- [39] Jin, X., van der Sman, R. G. M., van Straten, G., Boom, R. M., & van Boxtel, A. J. B. (2014). Energy efficient drying strategies to retain nutritional components in broccoli. *Journal of Food Engineering*, 123, 172-178.
- [40] Julián-Loeza, A. P., Santos-Sánchez, N. F., Valadez-Blanco, R., Sánchez-Guzmán, B. S., & Salas-Coronado, R. (2011). Chemical composition, color, and antioxidant activity of three varieties of *Annona diversifolia* Safford fruits. *Industrial Crops and Products*, 34(2), 1262-1268.
- [41] Kalman, R. E. (1960). Contributions to the theory of optimal control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 5(2), 102-119.
- [42] Kerkhofs, N. S., Lister, C. E., & Savage, G. P. (2005). Change in colour and antioxidant content of tomato cultivars following forced-air drying. *Plant Foods for Human Nutrition*, 60(3), 117-121.
-

-
- [43] Khalil, H. K., & Grizzle, J. W. (1996). *Nonlinear systems* Vol. 3. Prentice Hall, New Jersey.
- [44] Kharatishvili, G. L. (1961). The maximum principle in the theory of optimal processes with delay. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 136(1), 39-42.
- [45] Kharatishvili, G. L. (1967). *A maximum principle in external problems with delays, Mathematical theory of control*, Academic press.
- [46] Kharitonov, V. L., & Zhabko, A. P. (2003). Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 39(1), 15-20.
- [47] Kharitonov, V. L., & Plischke, E. (2006). Lyapunov matrices for time-delay systems. *Systems & Control Letters*, 55(9), 697-706.
- [48] Kharitonov V. L. (2013). *Time delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Birkhäuser.
- [49] Kharitonov V. L. (2014). An extension of the prediction scheme to the case to system with both input and state delay, *Automatica*, 50, 211-217.
- [50] Kharitonov V. L. (2015). Predictor-Based Controls: The Implementation Problem. *Differential Equations*, 51(13), 1675-1682.
- [51] Kim, A.V. y Lozhnikov, A. B. (2000). A linear Quadratic Control Problem for State-Delay Systems. Exact solutions for the Riccati Equations, *Automation and Remote Control*, 61(7), 1076-1090.
- [52] Kirk, D. E. (2012). *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation.
- [53] Kolmanovskii, V., & Myshkis, A. (2013). *Introduction to the theory and applications of functional differential equations* Vol. 463. Springer Science & Business Media.
- [54] Kolmanovskii, V. B., & Maizenberg, T. L. (1973). Optimal control of stochastic systems with aftereffect. *Automation and Remote Control*, 1, 39-52.
- [55] Kramer, J. D. R. (1960). On control of linear systems with time lags. *Information and Control*, 3(4), 299-326.
- [56] Krasovskii N. N. (1956). On the application of the second method of Lyapunov for equations with time delays, *Prikl. Mat. Mekh.*, 20, 315-327.
- [57] Krasovskii, N. N. (1959). *Stability of motion* (Russian), Moscow, 1959. (English translation) Stanford University Press, Stanford, CA, 1969.
- [58] Krasovskii, N. N. (1962). On analytic design of optimal controllers for systems with time delay. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 26(1), 39-51. (On the analytic construction of an optimal control in a system with time lags, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 26(1), 50-67).
-

-
- [59] Krasovskii, N. N. (1963). Optimal processes in systems with time lag. *In Proc. of 2nd IFAC Congress*, Basel, Switzerland, 327-332.
- [60] Krstic, M. (2008). Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: Inverse optimality and robustness to delay mismatch. *Automatica*, 44(11), 2930-2935.
- [61] Krstic, M. (2009). *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*, Birkhauser.
- [62] Kushner, H. J., & Barnea, D. I. (1970). On the control of a linear functional-differential equation with quadratic cost. *SIAM Journal on Control*, 8(2), 257-272.
- [63] Kwon, W. H., Kang, J. W., Lee, Y. S., & Moon, Y. S. (2003). A simple receding horizon control for state delayed systems and its stability criterion. *Journal of Process Control*, 13(6), 539-551.
- [64] Kwon, W. H., Lee, Y. S., & Han, S. H. (2004). General receding horizon control for linear time-delay systems. *Automatica*, 40(9), 1603-1611.
- [65] Lee, Y. S., Moon, Y. S., & Kwon, W.H. (2001). Delay dependent Guaranteed Cost control for uncertain state delayed systems. *In Proc. of IEEE American Control Conference*, USA, 3376-3380.
- [66] Leitmann, G. (1979). Guaranteed ultimate boundedness for a class of uncertain linear dynamical systems. In *Differential Games and Control Theory III: Proceedings of the Third Kingston Conference*, 44(29). CRC Press.
- [67] Li, X., & De Souza, C. E. (1997). Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: a linear matrix inequality approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8), 1144-1148.
- [68] Lin, Y., & Sontag, E. D. (1995). Control-Lyapunov universal formulas for restricted inputs. *Control Theory and Advanced Technology*, 10(4).
- [69] Luyben, W. L. *Process modeling, simulation and control for chemical engineers*. McGraw-Hill, 1989.
- [70] Malek-Zavarei, M., & Jamshidi, M. (1987). *Time-delay systems: analysis, optimization and applications*. Elsevier Science Inc.
- [71] Marfil, P. H. M., Santos, E. M., & Telis, V. R. N. (2008). Ascorbic acid degradation kinetics in tomatoes at different drying conditions. *LWT-Food Science and Technology*, 41(9), 1642-1647.
- [72] McFarlane, N. J. B., & Bruce, D. M. (1996). A cost function for continuous-flow grain drying and its use in control. *Journal of agricultural engineering research*, 65(1), 63-75.
- [73] Mondié, S., Niculescu, S., & Loiseau, J. J. (2001). Delay robustness of closed loop finite assignment for input delay systems. In *Proc. of the 3rd IFAC Conference on Time Delay Systems*, Santa Fe, New Mexico, USA.

-
- [74] Mondié, S., Dambrine, M. & Santos, O. (2002). Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability. *Kybernetika*, 38(5), 541-551.
- [75] Mondié, S., & Michiels, W. (2003). Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(12), 2207-2212.
- [76] Mondie, S., & Kharitonov, V. L. (2005). Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2), 268-273.
- [77] Mondié, S., Ochoa, G., & Ochoa, B. (2011). Instability conditions for linear time delay systems: a Lyapunov matrix function approach. *International Journal of Control*, 84(10), 1601-1611.
- [78] Mujumdar, A. S. (2004). *Guide to industrial drying: Principles, equipment and new developments*. Colour Publications.
- [79] Müller, E. A. *Termodinámica Básica*, Equinoccio, 1991.
- [80] Neimark, Y. I. (1992). Robust stability and D-partition. *Automation and Remote Control*, 53(7), 957-965.
- [81] Niculescu S. (2001). *Delay effect on Stability: a robust control approach*, Springer, London.
- [82] Olmos, A., Trelea, I. C., Courtois, F., Bonazzi, C., & Trystram, G. (2002). Dynamic optimal control of batch rice drying process. *Drying Technology*, 20(7), 1319-1345.
- [83] Park, P. (1999). A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4), 876-877.
- [84] Pepe, P. (2009). Input-to-state stabilization of stabilizable, time-delay, control-affine, nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(7), 1688-1693.
- [85] Perera, C. O. (2005). Selected quality attributes of dried foods. *Drying Technology*, 23(4), 717-730.
- [86] Pérez, A. (2006). *Construcción de un secador de charolas giratorio y su valoración con ajo* (*Allium sativum*, L.). Tesis de Licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca.
- [87] Pontryagin, L. S. (1961). *Mathematical theory of optimal processes*. CRC Press.
- [88] Poznyak, A. (2010). *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Deterministic Systems* Vol. 1. Elsevier.
- [89] Re, R., Bramley, P. M., & Rice-Evans, C. (2002). Effects of food processing on flavonoids and lycopene status in a Mediterranean tomato variety. *Free radical research*, 36(7), 803-810.
-

-
- [90] Rekasius, Z. V., & Lawrence, G. (1970). Minimum energy control of systems with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(3), 365-368.
- [91] Repin, I. M. (1965). Quadratic Liapunov functionals for systems with delay. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 29(3), 669-672.
- [92] Richard, J. P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10), 1667-1694.
- [93] Rodríguez-Guerrero, L. (2011). *Tesis de Maestría: Sistema de optimización y supervisión desarrollado en Java. Caso de estudio: Proceso de temperatura con retardo*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- [94] Rodríguez-Guerrero, L., López, O. and Santos-Sánchez, O. (2012). Object oriented optimal control for a batch dryer process, *Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 58(1), 293-307.
- [95] Ross, D. W., & Flügge-Lotz, I. (1969). An optimal control problem for systems with differential-difference equation dynamics. *SIAM Journal on Control*, 7(4), 609-623.
- [96] Ross, D. W. (1971). Controller design for time lag systems via a quadratic criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6), 664-672.
- [97] Ryniecki, A., & Nellist, M. E. (1991). Optimization of control systems for near-ambient grain drying: Part 1, The optimization procedure. *Journal of agricultural engineering research*, 48, 1-17.
- [98] Ryniecki, A., & Nellist, M. E. (1991). Optimization of control systems for near-ambient grain drying: Part 2, The optimizing simulations. *Journal of agricultural engineering research*, 48, 19-35.
- [99] Sacilik, K., Keskin, R., & Elicin, A. K. (2006). Mathematical modelling of solar tunnel drying of thin layer organic tomato. *Journal of food Engineering*, 73(3), 231-238.
- [100] Samad, T., & Annaswamy, A. M. (2011). The impact of control technology. *IEEE Control Systems Society*.
- [101] Sharma, S. K., Mulvaney, S. J., & Rizvi, S. S. (2003). *Ingeniería de alimentos: operaciones unitarias y prácticas de laboratorio*. Limusa Wiley.
- [102] Santos-Sánchez, N. F., Salas-Coronado, R., Santos-Sánchez, O. J., Romero, H., & Garrido-Aranda, E. (2016). On the effects of the temperature control at the performance of a dehydration process: energy optimization and nutrients retention. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 1-15.
- [103] Santos O. (2006). Tesis de Doctorado: *Control subóptimo para sistemas con retardos: un enfoque iterativo*, CINVESTAV, Mexico.

-
- [104] Santos, O., Mondié, S., & Kharitonov, V. L. (2006). Robust stability conditions for systems with distributed delays. *In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 217-222.
- [105] Santos, O., Villafuerte, R., & Mondié, S. (2014). Robust stabilization of nonlinear time delay systems: A complete type functionals approach. *Journal of the Franklin Institute*, 351(1), 207-224.
- [106] Santos, O., & Mondié, S. (2010). Guaranteed cost control of linear systems with distributed delays: A complete type functionals approach. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 8(3), 497-505.
- [107] Santos, O., Mondié, S., & Kharitonov, V. L. (2009). Linear quadratic suboptimal control for time delays systems. *International Journal of Control*, 82(1), 147-154.
- [108] Santos, O. and Mondié, S. (2007). On the optimal control of time delay systems: a complete type functionals approach. *In Proceedings of 46th IEEE Conference on Decision and Control*, 6035-6040.
- [109] Santos-Sánchez, O., Rodríguez-Guerrero, L. and López-Ortega, O. (2012). Experimental results of a control time delay system using optimal control. *Optim. Control Appl. Meth.*, 33(1), 100-113.
- [110] Sedova, N. O. (2010). Control functionals in stabilization problem systems with time delay. *Automation and Remote Control*, 71(5), 902-910.
- [111] Smith, O. J. (1959). A controller to overcome dead time. *ISA Journal*, 6(2), 28-33.
- [112] Smith, C. A., & Corripio, A. B. (1985). *Principles and practice of automatic process control* Vol. 2. Wiley, New York.
- [113] Sontag, E. D. (1989). A ‘universal’ construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization. *Systems & control letters*, 13(2), 117-123.
- [114] Urwaye, A. P. (2008). *New Food Engineering Research Trends*, Nova Science Publishers Inc.
- [115] U.S. Energy Information Administration, Electric Power Monthly, http://www.eia.gov/electricity/monthly/epm_table_grapher.cfm?t=epmt_5_6_a, 2016. Consulta: 2015-08-28.
- [116] Umar Lule, S., & Xia, W. (2005). Food phenolics, pros and cons: a review. *Food Reviews International*, 21(4), 367-388.
- [117] Unadi, A., Fuller, R.J., Macmillan, R.H. (2002). Strategies for drying tomatoes in a tunnel dehydrator. *Drying Tech.*, 7, 1407-1425.
- [118] United States Standards for Grades of Fresh Tomatoes, https://www.ams.usda.gov/sites/default/files/media/Tomato_Standard%5B1%5D.pdf, 1997. Consulta: 2016-06-28.
-

-
- [119] Vaisbord, E. M. (1963), An approximate Method for the Synthesis of Optimal Control, *Automation and Remote Control*, 24, 1482-1488.
- [120] Van Assche, V., Dambrine, M., Lafay, J. F., & Richard, J. P. (1999). Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws. In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 5, 4668-4672.
- [121] Vyhlídal, T., Zítek, P. (2009). Mapping based algorithm for large-scale computation of quasi-polynomial zeros, *IEEE Trans. Automat. Control* 54 (1), 171–177.
- [122] Williams, H. B., Andrew, W. G., & Zoss, L. M. (1979). *Applied instrumentation in the process industry*, Gulf Publishing Company.
- [123] Wellstead, P. E., & Zarrop, M. B. (1991). *Self-tuning systems: control and signal processing*. John Wiley & Sons, Inc.
- [124] Xianquan, S., Shi, J., Kakuda, Y., & Yueming, J. (2005). Stability of lycopene during food processing and storage. *Journal of medicinal food*, 8(4), 413-422.
- [125] Yakubovich, V. A. (1971). S-procedure in nonlinear control theory. *Vestnik Leningrad University*, 1, 62-77.
- [126] Yoon, S. Y., & Lin, Z. (2015). Robust output regulation of linear time-delay systems: A state predictor approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- [127] Zanoni, B., Peri, C., Nani, R., & Lavelli, V. (1998). Oxidative heat damage of tomato halves as affected by drying. *Food Research International*, 31(5), 395-401.
- [128] Ziegler, J. G., & Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of The American Society of Mechanical Engineers*, 64(11), 759-768.

A

Resultados teóricos útiles

En esta sección se exponen los conceptos que conforman la base de conocimientos preliminares requeridos para comprender el desarrollo de los resultados obtenidos en esta memoria.

A.1 Sistemas con retardos

Un sistema con retardo está representado por la ecuación

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), x(t-h)),$$

en donde $h > 0$ es el retardo más grande en el sistema y la función vectorial $g(t, x, y)$ está definida para $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^n$. Se asume que esta función es continua con respecto a sus argumentos.

A.1.1 Concepto de estado y condición inicial

En la teoría de control clásico, el estado es la información mínima que debe conocerse para poder continuar las soluciones del sistema. En sistemas con retardos, la información mínima para poder continuar las dinámicas del sistema implica que se debe conocer la trayectoria de las dinámicas en todo un segmento previo al punto presente, es decir, se necesita conocer $x(t+\theta)$ para $\theta \in [-h, 0]$. En este trabajo se utiliza la siguiente notación para describir el estado de sistemas con retardos

$$x_t : \theta \rightarrow x(t+\theta, \varphi), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Al igual que en sistemas libres de retardos, el estado en el tiempo inicial, el cual suponemos igual a cero ($t_0 = 0$), es conocido como condición inicial, definida en el intervalo $[-h, 0]$ y denotada por φ en la expresión anterior. Aquí se supone que la condición inicial pertenece al espacio de funciones continuas a pedazos, $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Cuando la condición inicial no es crucial, se omite el argumento φ .

A.1.2 Conceptos de estabilidad

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para la estabilidad asintótica uniforme de la solución trivial del sistema

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t), \quad (\text{A.1})$$

en donde la funcional $f : [0, \infty) \times \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Teorema A.1 [57] *La solución trivial del sistema (A.1) es uniformemente asintóticamente estable si existen dos funcionales definidas positivas $v(t, \varphi)$ y $v_2(t, \varphi)$, además una función definida positiva $w(x)$ tal que las siguientes condiciones se mantienen:*

1. $v(t, \varphi) \leq v_2(t, \varphi)$, para $t \geq 0$ y $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, con $\|\varphi\|_h \leq H$.
2. El valor de la funcional a lo largo de las soluciones del sistema es diferenciable con respecto a t y su derivada satisface la desigualdad

$$\frac{dv(t, x_t)}{dt} \leq -w(x(t)).$$

Definición A.1 [48] *Se dice que la funcional $v(t, x_t)$ es definida positiva si existe $H > 0$ tal que se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. La funcional $v(t, x_t)$ está definida para $t \geq 0$ y cualquier $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ con $\|\varphi\|_h \leq H$.
2. $v(t, 0_h) = 0$, $t \geq 0$.
3. Existe una función definida positiva $v_1(x)$ tal que

$$v_1(\varphi(0)) \leq v(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n), \quad \|\varphi\|_h \leq H.$$

4. Para cualquier $t_0 \geq 0$ la funcional $v(t_0, \varphi)$ es continua en φ en el punto 0_h , es decir que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la desigualdad $\|\varphi\|_h < \delta$ implica

$$|v(t_0, \varphi) - v(t_0, 0_h)| = v(t_0, \varphi) < \epsilon.$$

A.1.3 Sistemas lineales con retardo puntual en el estado

Los siguientes conceptos y resultados son consultados del capítulo 2 de [48]. Sea el sistema con un retardo concentrado

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h) \quad (\text{A.2})$$

en donde las matrices del sistema son $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $h > 0$ es el retardo. La condición inicial es $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la cual pertenece al espacio de funciones continuas a tramos $\mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ sobre el intervalo $[-h, 0]$.

La matriz de dimensión $n \times n$, $K(t)$, es conocida como matriz fundamental del sistema (A.2), y satisface la ecuación

$$\dot{K}(t) = A_0 K(t) + A_1 K(t - h),$$

con condición inicial $K(0) = I_n$, $K(t) = 0_{n \times n}$, $t < 0$. También satisface (ver [7])

$$\dot{K}(t) = K(t)A_0 + K(t - h)A_1.$$

La fórmula de Cauchy [7] para la solución del sistema (A.2) está dada por la expresión

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(t - \theta - h)A_1 x(\theta, \varphi) d\theta, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.3})$$

A continuación se recapitulan algunos conceptos de estabilidad para el sistema (A.2).

Definición A.2 [48] *El sistema (A.2) se dice exponencialmente estable si existen constantes $\gamma \geq 1$ y $\sigma > 0$ tal que cualquier solución $x(t, \varphi)$ del sistema satisface la siguiente desigualdad:*

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{-\beta t} \|\varphi\|_h.$$

Observación A.1 *En el caso de sistemas lineales con retardos, la estabilidad asintótica es equivalente a la exponencial.*

El siguiente resultado es una versión simplificada del Teorema A.1 establecido por Krasovskii, ahora se presentan las condiciones suficientes para la estabilidad exponencial del sistema (A.2).

Teorema A.2 [48] *El sistema (A.2) es exponencialmente estable si existe una funcional*

$$v : \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. *Para algunas α_1 y α_2*

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2, \quad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n).$$

2. *Para alguna $\beta > 0$ la desigualdad*

$$\frac{d}{dt} v(x_t) = -\beta \|x(t)\|^2, \quad t \geq 0,$$

se mantiene a lo largo de las soluciones del sistema.

Con la estructura de la solución del sistema con retardo (A.2) es posible construir funcionales cuadráticas que satisfacen las condiciones del Teorema A.2. Primero se selecciona

una derivada y después se calcula la funcional cuya derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema coincide con la seleccionada.

Dada una matriz de dimensión $n \times n$, $W > 0$, la funcional con derivada prescrita

$$\left. \frac{dv_0(x_t(\varphi))}{dt} \right|_{(A.2)} = -x^T(t, \varphi)Wx(t, \varphi), \quad t \geq 0,$$

tiene la forma

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) &= \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 U(-h-\theta)A_1\varphi(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)A_1^T \int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2)A_1\varphi(\theta_2)d\theta_2d\theta_1, \end{aligned} \quad (A.4)$$

en donde

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t)WK(t+\tau)dt.$$

La matriz de funciones $U(\tau)$ es conocida como la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos, asociada con la matriz W , la cual satisface las siguientes propiedades esenciales para su construcción [46]:

1. Propiedad dinámica

$$U'(\tau) = U(\tau)A_0 + U(\tau-h)A_1, \quad \tau \geq 0, \quad (A.5)$$

2. Propiedad simétrica

$$U(-\tau) = U^T(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (A.6)$$

3. Propiedad algebraica

$$A_0^T U(0) + A_1^T U(h) + U(0)A_0 + U(-h)A_1 = -W. \quad (A.7)$$

La construcción de la matriz de Lyapunov se logra mediante el planteamiento de un sistema de variables auxiliares libre de retardos [47] o bien mediante una aproximación lineal a pedazos [26].

A.1.4 Funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo

La funcional (A.4) no satisface la primera condición del Teorema A.2, ya que sólo admite una cota inferior cúbica local [35]. Entonces en [46] se modifica a la funcional, de manera que su derivada incluye términos que dependen de todo el estado de un sistema con retardo y además admite una cota cuadrática inferior. Tales funcionales, denominadas de tipo completo, están definidas a partir de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos. La forma explícita de las funcionales de tipo completo $V : \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ se presenta en el siguiente teorema.

Teorema A.3 [48] Dadas tres matrices simétricas W_j , $j = 0, 1, 2$, se define la funcional

$$w(\varphi) = \varphi^T(0)W_0\varphi(0) + \varphi^T(-h)W_1\varphi(-h) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta)W_2\varphi(\theta)d\theta. \quad (\text{A.8})$$

Si existe una matriz de Lyapunov $U(\tau)$ asociada con la matriz $W = W_0 + W_1 + hW_2$, la funcional

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 U(-h-\theta)A_1\varphi(\theta)d\theta \\ &\quad + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) [W_1 + (h+\theta)W_2] \varphi(\theta)d\theta \\ &\quad + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)A_1^T \left[\int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2)A_1\varphi(\theta_2)d\theta_2 \right] d\theta_1, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

tiene la derivada temporal a lo largo de las soluciones del sistema (A.2) dada por

$$\frac{dV(x_t)}{dt} = -w(x_t), \quad t \geq 0.$$

La matriz de Lyapunov $U(\tau)$, del sistema (A.2), asociada con la matriz $W = W_0 + W_1 + hW_2$ es la única solución de las propiedades (A.5), (A.6) y (A.7).

Lema A.1 [48] Sea el sistema (A.2) exponencialmente estable. Dadas las matrices definidas positivas W_j , $j = 0, 1, 2$, existe $\alpha_1 > 0$ tal que el funcional de tipo completo (A.9) admite la siguiente cota cuadrática inferior:

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq V(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n),$$

en donde α_1 es tal que la matriz $W(\alpha_1) = \begin{bmatrix} W_0 & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & W_1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} A_0 + A_0^T & A_1 \\ A_1^T & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$ es definida positiva.

Lema A.2 [48] Sea el sistema (A.2), el cual satisface la condición de Lyapunov. Dadas las matrices simétricas W_j , $j = 0, 1, 2$, para alguna α_2 positiva la funcional (A.9) satisface la desigualdad

$$V(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2, \quad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n),$$

en donde $\alpha_2 = \max_{\theta \in [0, h]} \|U(\theta)\| (1 + \|A_1\| h)^2 + h (\|W_1\| + h \|W_2\|)$.

Es importante recalcar que las funcionales (A.4) y (A.9) dependen de la matriz $U(\tau)$, por lo que se explica el método semi-analítico para su construcción.

A.1.5 Construcción de la matriz de Lyapunov usando el método semi-analítico

Se utiliza el método propuesto en [47], donde se busca a la matriz $U(\tau)$, $\tau \in [0, h]$, que satisface las propiedades (A.5), (A.6) y (A.7). Se presenta el siguiente lema útil para la

construcción:

Lema A.3 *La matriz de Lyapunov satisface*

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} = -A_0^T U(\tau) - A_1^T U(\tau + h), \quad \tau < 0.$$

El primer paso consiste en plantear un sistema de ecuaciones libre de retardos, para ello se definen las variables $Y(\tau) = U(\tau)$, $Z(\tau) = U(\tau - h)$ y la condición en la frontera $Y(0) = Z(h)$. Después se reescribe la propiedad dinámica en términos de las nuevas variables como sigue

$$\frac{dY(\tau)}{d\tau} = Y(\tau)A_0 + Z(\tau)A_1, \quad \tau \geq 0,$$

y del Lema A.3 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dU(\tau - h)}{d\tau} &= -A_0^T U(\tau - h) - A_1^T U(\tau), \quad \tau < 0, \\ \frac{dZ(\tau)}{d\tau} &= -A_0^T Z(\tau) - A_1^T Y(\tau). \end{aligned}$$

Para poder reescribir al sistema libre de retardo se define la operación de vectorización $vec(Q) = q$, en donde $q \in \mathbb{R}^{n^2}$ se obtiene de $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aplilando sus columnas. La operación satisface la igualdad

$$vec(AQB) = (B^T \otimes A)vec(Q).$$

Entonces, con $y(\tau) = vec(Y(\tau))$ y $z(\tau) = vec(Z(\tau))$ se obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix} y'(\tau) \\ z'(\tau) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} A_0^T \otimes I & A_1^T \otimes I \\ -(I \otimes A_1^T) & -(I \otimes A_0^T) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

cuya solución esta dada por

$$\begin{bmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix} = e^{L\tau} \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}.$$

Para encontrar el vector de condiciones iniciales $\begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$ se reescribe la propiedad algebraica (A.7) en base a las nuevas variables y con la condición de frontera se obtiene

$$M \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} y(h) \\ z(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -w \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

donde $M = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ (I \otimes A_0^T) + (A_0^T \otimes I) & (A_1^T \otimes I) \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & -I_{n \times n} \\ (I \otimes A_1^T) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$ y $w = vec(W)$.

Cuando la variable $\tau = h$, de la solución del sistema (A.10) se tiene que

$$\begin{bmatrix} y(h) \\ z(h) \end{bmatrix} = e^{Lh} \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix},$$

lo cual se sustituye en (A.11) y siguiendo pasos sencillos se obtiene la condición inicial del sistema (A.10)

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = (M + Ne^{Lh})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -w \end{bmatrix}.$$

Entonces, la solución es

$$\begin{bmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix} = e^{L\tau}(M + Ne^{Lh})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -w \end{bmatrix}.$$

A.2 Rediseño de Lyapunov

El rediseño de Lyapunov [66], [4], [13] es una técnica que permite diseñar controladores para sistemas no lineales en presencia de incertidumbre, los términos inciertos entran a través de los mismos canales de las variables de control y satisfacen ciertas condiciones. Se utiliza una función de Lyapunov para el sistema nominal y se diseña un componente adicional de la ley de control que la hace más robusta en presencia de incertidumbres.

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x) [u + \delta(t, x, u)], \quad (\text{A.12})$$

en donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado y $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control. Las funciones $f, G \in \mathbb{R}^n$ y $\delta \in \mathbb{R}^m$ están definidas para $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times \mathbb{R}^m$, en donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen. Se asume que f, G y δ son funciones continuas a pedazos en t y localmente Lipschitz en x y u . Las funciones f y G son conocidas mientras la función desconocida δ entra a la ecuación de estado a través del mismo canal que la ley de control. El método consiste en:

1. Diseñar un controlador por realimentación $u = \psi(t, x)$ para el modelo nominal (el sistema sin incertidumbre), tal que el origen del sistema nominal en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)\psi(t, x) \quad (\text{A.13})$$

es uniformemente asintóticamente estable.

2. Suponer que se conoce una función de Lyapunov para el sistema (A.13); es decir, se tiene una función definida positiva continuamente diferenciable $V_n(t, x)$ que satisface las siguientes desigualdades:

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V_n(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{\partial V_n}{\partial x} [f(t, x) + G(t, x)\psi(t, x)] \leq -\alpha_3(\|x\|),$$

en donde α_1, α_2 y α_3 son funciones clase \mathcal{K} .

3. Suponer que con la ley de control $u = \psi(t, x) + v$, el término incierto δ satisface la desigualdad

$$\|\delta(t, x, \psi(t, x) + v)\| \leq \rho(t, x) + k \|v\|, \quad 0 \leq k < 1,$$

en donde $\rho : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua no negativa.

4. Con el conocimiento de la función de Lyapunov V_n , la función ρ y la constante k , diseñar una ley de control adicional $v = \gamma(t, x)$ tal que el control completo $u = \psi(t, x) + \gamma(t, x)$ estabiliza al sistema (A.12) en presencia de incertidumbre.

A.3 Complemento de Schur

Sea la matriz K , dada de la siguiente forma:

$$K = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B}^T & C \end{bmatrix},$$

en donde $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $K > 0$ si y sólo si:

1. $\bar{A} > 0$ y $C - \bar{B}^T \bar{A}^{-1} \bar{B} > 0$
2. $C > 0$ y $\bar{A} - \bar{B} C^{-1} \bar{B}^T > 0$.

A.4 Control óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada

Con la finalidad de comparar experimentalmente el desempeño del controlador óptimo no lineal por optimalidad inversa, obtenido con el uso de funcionales de tipo completo (Sección 3.2), se utiliza el controlador óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada [1]. Este controlador se describe brevemente para el caso escalar ya que será aplicado al actuador del sistema de deshidratación. Para realizar la implementación de la ley de control es necesario aproximar el término integral mediante un método de cuadratura como en [109], [93] y [27]. En esta sección se presentan análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado con la ley de control aproximada y ante dinámicas no modeladas.

A.4.1 Control óptimo lineal

Sea el sistema escalar lineal con retardo en la entrada de la forma

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t - h), \quad t \geq 0, \quad (\text{A.14})$$

en donde $h > 0$ es el retardo, los parámetros del sistema son los escalares a y b , la condición inicial del estado $y(t) \in \mathbb{R}$ es $y(0) = y_0$ y la condición inicial del control $u(t - h) \in \mathbb{R}$ es la función continua a tramos $\psi = u(\theta)$, $\forall \theta \in [-h, 0]$. Sea el índice de desempeño cuadrático

$$J = \int_0^\infty (y^2(t)Q + u^2(t)R) dt,$$

con los escalares $Q \geq 0$ y $R > 0$. En el intervalo $[0, h]$, el estado $y(t)$ depende de los valores iniciales de $u(t)$ para $t \in [-h, 0]$ y la función de control no tiene influencia sobre $y(t)$, por

lo tanto, para el control óptimo se elige como $u(t) \equiv 0$. La respuesta del sistema en lazo cerrado se inicia en el tiempo $t = h$. Entonces

$$\min \int_0^\infty [y^2(t)Q + u^2(t)R] dt = \min \int_0^h y^2(t)Q dt + \min \int_h^\infty [y^2(t)Q + u^2(t-h)R] dt.$$

Sea $v(t) = u(t-h)$ y considere el problema de control para el sistema

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bv(t), \quad t \geq h,$$

con condición inicial $y(h)$ del problema anterior y con el criterio

$$\hat{J} = \int_h^\infty (y^2(t)Q + v^2(t)R) dt.$$

Obviamente, si $v(t)$ minimiza a \hat{J} , entonces $u(t-h) = v(t)$ para $t \in [h, \infty]$ también minimiza a J y viceversa. El control $v(t)$ puede ser calculado como una ley de control de realimentación de estado

$$v(t) = \bar{K}y(t), \quad t \geq h, \quad (\text{A.15})$$

en donde la ganancia $\bar{K} = -R^{-1}bP$, con P que satisface la ecuación escalar del tipo Riccati [41]. Es decir $u(t-h) = \bar{K}y(t)$, pero solo $y(t-h)$ esta disponible para el control por realimentación en el tiempo $t-h$ (asumiendo un esquema de medida estándar). Por lo tanto es necesario predecir $y(t)$ del conocimiento de $y(t-h)$ y $u(s)$ en el intervalo $t-2h \leq s \leq t-h$. Entonces la ley de control es

$$v(t) = u(t-h) = \bar{K} \left[e^{ah}y(t-h) + \int_{t-h}^t e^{a(t-\theta)} bu(\theta-h) d\theta \right]. \quad (\text{A.16})$$

El problema de implementación del término con retardo distribuido en la ley de control se aborda en la siguiente sección.

A.4.2 Implementación numérica de la ley de control óptima, caso escalar

La ley de control (A.16) depende de $u(s-h)$ y cuando se realizaron los experimentos se observó que dicha dependencia confería poca robustez a todo el esquema [109], [93], [27]. Es por ello que se decidió que la ley de control dependiera únicamente del estado $y(t)$ y valores anteriores de éste, lo cual también facilita el análisis de estabilidad en el dominio temporal. Entonces, de la ecuación del sistema (A.14) se tiene que

$$bu(\theta-h) = \dot{y}(s) - ay(s)$$

y al sustituirlo en (A.16), con el uso de las propiedades básicas de integración por partes y después de simplificaciones directas, la ley de control es

$$v(t) = \bar{K}e^{ah}y(t-h) + \bar{K} \int_{t-h}^t e^{a(\theta-t)} \dot{y}(\theta) d\theta - a\bar{K} \int_{t-h}^t e^{a(\theta-t)} y(\theta) d\theta$$

$$v(t) = \bar{K}y(t) - 2a\bar{K} \int_{-h}^0 e^{a\theta} y(t+\theta) d\theta + adj. \quad (\text{A.17})$$

El término integral se aproxima mediante el método trapezoidal y se obtiene

$$v(t) \approx \bar{K}y(t) - 2a\bar{K} \left[\frac{h}{n} \left(\frac{y(t)}{2} + 2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} e^{a\frac{ih}{n}} y \left(t - i\frac{h}{n} \right) \right] + e^{ah}y(t-h) \right) \right],$$

en donde n es el número de subintervalos.

Como es bien sabido, toda realimentación de estado converge al punto de equilibrio cero, si se desea alcanzar un valor distinto se utiliza el error y en algunos casos debe agregarse una señal de control adicional, que mantenga a la variable del proceso en la referencia deseada, como $v(t) = -\bar{K}e(t) + adj$, en donde $e(t) = y(t) - SP$, SP (Set Point de sus siglas en inglés) es la referencia y adj es el valor de la señal adicional, que puede calcularse fácilmente en el caso escalar. El parámetro adj se calcula a partir de la suposición de que la planta alcanzó el estado estable, es decir que $e(t) = 0$, observe que el término integral en la ley de control puede resolverse, entonces el sistema en lazo cerrado con el control (A.17) en estado estable es

$$0 = SP(a + b\bar{K} - 2b\bar{K}(1 - e^{ha}) + badj)$$

y se despeja el término adj como

$$adj = -\frac{SP}{b} [a + b\bar{K} - 2b\bar{K}(1 - e^{ha})].$$

A continuación se presenta un análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado con el controlador aproximado, para algún n .

A.4.3 Análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado

En este caso no se considera ninguna perturbación externa, tales como turbulencias, fugas excesivas de calor, absorción excesiva de calor en las paredes de la deshidratadora, cambios bruscos de la temperatura externa, dinámicas no modeladas e incertidumbres que podrían afectar el comportamiento de la planta de manera considerable. Para realizar el análisis, considere sin pérdida de generalidad el punto de equilibrio cero y $adj = 0$.

La ley de control aproximada se sustituye en el sistema (A.14) y se obtiene

$$\dot{y}(t) = ay(t) + b \left\{ \bar{K}y(t) - 2a\bar{K} \left[\frac{h}{n} \left(\frac{y(t)}{2} + 2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} e^{a\frac{ih}{n}} y \left(t - i\frac{h}{n} \right) \right] + e^{ah}y(t-h) \right) \right] \right\}. \quad (\text{A.18})$$

La ecuación (A.18) puede reescribirse de manera más sencilla mediante una sumatoria que

contiene a los términos $y(t - i\frac{h}{n})$ como sigue

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t - i\frac{h}{n}), \quad (\text{A.19})$$

en donde

$$\tilde{A}_0 = a + b\bar{K} - \frac{2a\bar{K}bh}{n}, \quad \tilde{A}_i = \frac{-2a\bar{K}bh}{n} e^{\frac{aih}{n}}, \quad \tilde{A}_n = \left(\frac{-2a\bar{K}bhe^{ah}}{n} \right). \quad (\text{A.20})$$

Usando una la transformación dada en [83], la ecuación (A.19) puede reescribirse de la forma

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(s) ds, \quad (\text{A.21})$$

Ésto conduce a sustituir el valor de $\dot{y}(s)$ como sigue

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \sum_{j=0}^n \tilde{A}_j y\left(s - j\frac{h}{n}\right) ds,$$

aquí es posible intercambiar la integral con la sumatoria interna y se obtiene

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \tilde{A}_i \tilde{A}_j \int_{t-\frac{ih}{n}}^t y\left(s - j\frac{h}{n}\right) ds.$$

Se realiza el cambio de variable $\tau = s - j\frac{h}{n}$ y se calculan los nuevos límites de integración como: si $s = t$ entonces $\tau = t - j\frac{h}{n}$ y si $s = t - \frac{ih}{n}$ entonces $\tau = t - \frac{ih}{n} - j\frac{h}{n}$. La nueva expresión es

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \tilde{A}_i \tilde{A}_j \int_{t-\frac{ih}{n}-\frac{jh}{n}}^{t-\frac{jh}{n}} y(\tau) d\tau. \quad (\text{A.22})$$

Para el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado (A.22), se considera el Teorema de Lyapunov-Krasovskii A.1 [57] (ver Apéndice A.1). Sea la funcional de Lyapunov-Krasovskii [53]:

$$V(y_t) = V_1(y(t)) + V_2(y_t),$$

con

$$V_1(y(t)) = y(t)^2 P$$

y

$$V_2(y_t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{\frac{jh}{n}}^{\frac{jh}{n} + \frac{ih}{n}} \left[\int_{t-s}^t y(\tau)^2 R d\tau \right] ds,$$

en donde $y(t) \in \mathbb{R}$, P y R son escalares positivos. No es difícil probar que V posee cotas inferior y superior tales que satisfacen la condición 1 del Teorema A.1. Primero se calcula

$\dot{V}_1(y(t))$ como sigue

$$\dot{V}_1(y(t)) = 2y(t)P\dot{y}(t)$$

y al sustituir (A.22) se obtiene

$$\dot{V}_1(y(t)) = 2y(t)P \left[\sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \tilde{A}_i \tilde{A}_j \int_{t-\frac{ih}{n}-\frac{ih}{n}}^{t-\frac{jh}{n}} y(\tau) d\tau \right],$$

después de algunas operaciones directas se llega a

$$\dot{V}_1(y(t)) = 2y^2(t)P \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i - 2y(t)P \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \tilde{A}_i \tilde{A}_j \int_{t-\frac{ih}{n}-\frac{ih}{n}}^{t-\frac{jh}{n}} y(\tau)^T d\tau.$$

$\dot{V}_2(y_t)$ se calcula de la siguiente manera

$$\dot{V}_2(y(t)) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{\frac{jh}{n}}^{\frac{jh}{n} + \frac{ih}{n}} \left[\int_{t-s}^t y^2(\tau) R d\tau \right] ds \right),$$

al aplicar la regla de derivación de Leibnitz se obtiene

$$\dot{V}_2(y_t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[\int_{jh}^{\frac{ih}{n} + \frac{ih}{n}} (y^2(t)R - y^2(t-s)R) ds \right]$$

y se resuelve el término integral como sigue

$$\dot{V}_2(y(t)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left(y^2(t)R \frac{ih}{n} - \int_{jh}^{\frac{ih}{n} + \frac{ih}{n}} y^2(t-s)R ds \right).$$

Se realiza el cambio de variable $\tau = t - s$, entonces si $s = \frac{jh}{n}$ entonces $\tau = t - \frac{jh}{n}$, y si $s = \frac{ih}{n} + \frac{ih}{n}$ entonces $\tau = t - \frac{ih}{n} - \frac{ih}{n}$. La derivada se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(y_t) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[y^2(t)R \frac{ih}{n} - \int_{t-\frac{ih}{n}-\frac{ih}{n}}^{t-\frac{jh}{n}} y^2(\tau)R y d\tau \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left(y^2(t)P \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T P + nR \frac{ih}{n} \right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{t-\frac{ih}{n}-\frac{ih}{n}}^{t-\frac{jh}{n}} \left(y^2(t)P \tilde{A}_i \tilde{A}_j y(\tau) + y^2(\tau) \tilde{A}_j \tilde{A}_i P + y^2(t)R y(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

A la expresión anterior se le adiciona y sustrae el siguiente término

$$y^2(t)P \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{ih}{n} \tilde{A}_i \tilde{A}_j R^{-1} \tilde{A}_j^T \tilde{A}_i^T P$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(y_t) &= \sum_{i=0}^n \left(y^2(t) \left(P\tilde{A}_i + \tilde{A}_i P + Rih + \sum_{j=0}^n P^2 \frac{ih}{n} \tilde{A}_i^2 \tilde{A}_j^2 R^{-1} \right) \right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{t-\frac{jh}{n}-\frac{ih}{n}}^{t-\frac{jh}{n}} 2y(t)P\tilde{A}_i\tilde{A}_jy(\tau) + y(\tau)^2Rd\tau + y(t)^2P^2\frac{ih}{n}\tilde{A}_i^2\tilde{A}_j^2R^{-1}. \end{aligned}$$

Finalmente la derivada está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(y_t) &= y^2(t) \left(\sum_{i=0}^n \left(P\tilde{A}_i + \tilde{A}_i P + Rih + \sum_{j=0}^n P^2 \frac{ih}{n} \tilde{A}_i^2 \tilde{A}_j^2 R^{-1} \right) \right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[\int_{t-\frac{jh}{n}-\frac{ih}{n}}^{t-\frac{jh}{n}} \left(Ry(\tau) + \tilde{A}_j\tilde{A}_iPy(t) \right) R^{-1} \left(Ry(\tau) + \tilde{A}_j\tilde{A}_iPy(t) \right) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Debido a que el segundo término de la expresión anterior ya es negativo, la condición suficiente para que la derivada sea negativa se presenta en el siguiente Teorema:

Teorema A.4 *Sea el sistema en lazo cerrado (A.18), dados los parámetros del sistema, los escalares positivos Q y R y el número de particiones n , si existe un escalar positivo P tal que se satisface la siguiente condición*

$$\sum_{i=0}^n \left(P\tilde{A}_i + \tilde{A}_i P + Rih + \sum_{j=0}^n P^2 \frac{ih}{n} \tilde{A}_i^2 \tilde{A}_j^2 R^{-1} \right) = -Q, \quad (\text{A.23})$$

entonces la solución trivial del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable.

A.4.4 Análisis de estabilidad ante dinámicas no modeladas

En esta sección, se analiza la estabilidad robusta ante perturbaciones que no están consideradas en el modelo, tales como turbulencias dentro de la deshidratadora que produzcan flujo de aire no laminar, fugas de aire caliente que no sea por el venteo de salida del dispositivo o alguna perturbación externa al sistema que afecte el modelo lineal. Considere el sistema nominal (A.14) con una perturbación no lineal no estructurada aditiva

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t-h) + F(y(t)), \quad (\text{A.24})$$

en donde $|F(y(t))| \leq \alpha |y(t)|$, con $\alpha > 0$, al menos localmente. Ahora se buscan las condiciones bajo las cuales la solución trivial del sistema (A.24) es asintóticamente estable. Para ello, considere el sistema escalar en lazo cerrado dado por (A.21) y la perturbación no lineal aditiva como

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(s) ds + F(y(t)), \quad (\text{A.25})$$

en donde las constantes \tilde{A}_i , fueron definidas en la sección anterior en la ecuación (A.20). Para analizar la estabilidad robusta, se utiliza la siguiente funcional (dada en [31])

$$V(y_t) = V_1(y(t)) + V_2(y_t) + V_3(y_t),$$

con

$$V_1(y(t)) = y(t)^2 P, \quad P > 0,$$

$$V_2(y_t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i^2 Q_1 \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta)^2 \left(\theta - t + \frac{ih}{n} \right) d\theta, \quad Q_1 > 0$$

y

$$V_3(y_t) = \sum_{i=0}^n R_1 \int_{t-\frac{ih}{n}}^t y(\theta)^2 d\theta, \quad R_1 > 0.$$

La derivada de la primera funcional a lo largo de las trayectorias del sistema (A.25) es $\dot{V}_1(y(t)) = 2y(t)P\dot{y}(t)$ y al realizar operaciones directas se llega a

$$\dot{V}_1(y(t)) = 2 \sum_{i=0}^n P \tilde{A}_i y(t)^2 - 2 \sum_{i=1}^n y(t) P \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta + 2y(t) P F(y(t)). \quad (\text{A.26})$$

El segundo término que involucra productos cruzados entre $y(t)$ y $\int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta$ puede manejarse mediante desigualdades como se explica a continuación. Considere la desigualdad presentada en [83], entonces

$$-2y^2(t)P \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta \leq \sum_{i=0}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \begin{bmatrix} \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 & y^2(t) P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_1 M \\ M Q_1 & (M Q_1 + 1) Q_1^{-1} (Q_1 M + 1) \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} \tilde{A}_i y(\theta) \\ P y(t) \end{bmatrix} d\theta,$$

en donde $Q_1 > 0$ y M son escalares. El término anterior se desarrolla como

$$-2y(t)^2 P \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta \leq \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \left[\dot{y}(\theta)^2 \tilde{A}_i Q_1 \tilde{A}_i d\theta \right. \\ \left. + 2y(t) P M Q_1 \tilde{A}_i \dot{y}(\theta) + y^2(t) P (M^2 Q_1 + I) Q_1^{-1} (Q_1 M + 1) P \right] d\theta.$$

Observe que $\int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta = y(t) - y\left(t - \frac{ih}{n}\right)$, entonces

$$-2y^2(t)P \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta \leq \sum_{i=1}^n \left[\int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 y(\theta) d\theta \right. \\ \left. + 2y(t)^2 P M Q_1 \tilde{A}_i - 2y(t) P M Q_1 \tilde{A}_i y\left(t - \frac{ih}{n}\right) \right. \\ \left. + y(t)^2 P (M Q_1 + I) Q_1^{-1} (Q_1 M + 1) P \left(\frac{ih}{n}\right) \right].$$

Finalmente se define a $\bar{X} = Q_1MP$, $\mathbf{Y} = \tilde{h}^{-1}Q_1$ y $\tilde{h} = \sum_{i=1}^n (\frac{ih}{n})$, entonces \dot{V}_1 satisfice

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(y(t)) \leq & \left[2\bar{X} \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i + (\bar{X} + P)\mathbf{Y}^{-1}(\bar{X} + P) \right] y^2(t) \\ & - 2y(t)\bar{X} \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i y \left(t - \frac{ih}{n} \right) + 2y(t)PF(y(t)) + \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

La derivada \dot{V}_2 se calcula mediante la regla de Leibnitz

$$\dot{V}_2 = \dot{y}^2(t)Q_1 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta$$

y considerando la definici3n de \mathbf{Y} , se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(y_t) = & y^2(t)\tilde{A}_0^2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} + y(t)\tilde{A}_0 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k y \left(t - \frac{kh}{n} \right) \\ & + y(t)\tilde{A}_0 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}F(y(t)) + \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j y \left(t - \frac{jh}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}\tilde{A}_0 y(t) \\ & + \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j y \left(t - \frac{jh}{n} \right) \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^2 \left(\frac{ih}{n} \right) \mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k y \left(t - \frac{kh}{n} \right) \\ & + \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j y \left(t - \frac{jh}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}F(y(t)) + F(y(t)) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \left(\frac{ih}{n} \right) \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}\tilde{A}_0 y(t) \\ & + F(y(t)) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k y \left(t - \frac{kh}{n} \right) \\ & + F(y(t))^2 \left(\sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \left(\frac{ih}{n} \right) \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} - \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

La derivada de $V_3(y_t)$ es

$$\dot{V}_3(y_t) = - \left[\sum_{i=1}^n y \left(t - \frac{ih}{n} \right) \right] R_1 \left[\sum_{j=1}^n y \left(t - \frac{jh}{n} \right) \right] + y^2(t)R_1, \quad (\text{A.29})$$

Las derivadas (A.27), (A.28) y (A.29) se agrupan y resulta

$$\begin{aligned}
\dot{V}(y_t) \leq & y(t)^2 \left[2\bar{X} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j + (\bar{X} + P)\mathbf{Y}^{-1}(\bar{X} + P) + \tilde{A}_0^2 \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} + R_1 \right] \\
& + 2y(t) \sum_{i=1}^n \left[-2\bar{X}\tilde{A}_i + \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}\tilde{A}_i \right] y \left(t - \frac{ih}{n} \right) \\
& + 2y(t) \left[P + \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}\tilde{A}_0 \right] F(y(t)) \\
& + \left[\sum_{i=1}^n y \left(t - \frac{ih}{n} \right) \right] \left[\tilde{A}_i^2 \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} - R_1 \right] \left[\sum_{i=1}^n y \left(t - \frac{ih}{n} \right) \right] \\
& + 2F(y(t))\mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \tilde{A}_i y \left(t - \frac{ih}{n} \right) \\
& + F(y(t))^2 \left[\left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \right] - \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta.
\end{aligned}$$

Para concluir estabilidad robusta es suficiente probar que \dot{V} es negativa. El procedimiento S se utiliza para verificar la no negatividad de una función cuadrática bajo restricciones, si existen al menos dos desigualdades cuadráticas en el conjunto de restricciones es posible hacer uso de este procedimiento. Como se expuso anteriormente la función $F(y(t))$ satisface que $|F(y(t))| \leq \alpha |y(t)|$, con $\alpha > 0$ y puede expresarse como

$$F(y(t))^2 \leq \alpha^2 y(t)^2 \Rightarrow 0 \leq \alpha^2 y(t)^2 - F(y(t))^2.$$

Se busca un escalar $\epsilon_1 > 0$, tal que cuando se suma el término $\epsilon_1 [\alpha^2 y(t)^2 - F(y(t))^2]$ a la derivada, toda la expresión resulta negativa, es decir

$$\dot{V}(y_t) + \epsilon_1 [\alpha^2 y(t)^2 - F(y(t))^2] < 0, \quad \epsilon_1 > 0.$$

La desigualdad anterior puede expresarse como

$$\begin{aligned}
& \dot{V}(y_t) + \epsilon_1 [\alpha^2 y(t)^2 - F(y(t))^2] \leq \\
& - \left[y(t) \quad \sum_{i=1}^n y \left(t - \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \quad F(y(t)) \right] \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}}_Z \begin{bmatrix} y(t) \\ \sum_{i=1}^n y \left(t - \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \\ F(y(t)) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}
Z_{11} &= -2\bar{X} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j - (\bar{X} + P)\mathbf{Y}^{-1}(\bar{X} + P) - \tilde{A}_0^2 \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} - R_1 - \epsilon_1\alpha^2, \\
Z_{12} &= \bar{X} - \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \tilde{A}_j \binom{jh}{n} \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}, \quad Z_{13} = -P - \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}\tilde{A}_0, \\
Z_{21} &= \bar{X} - \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \tilde{A}_j \binom{jh}{n} \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}, \quad Z_{22} = - \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} + R_1, \\
Z_{23} &= -\mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^n \tilde{A}_j \binom{jh}{n} \right]^2, \quad Z_{31} = -P - \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}\tilde{A}_0, \\
Z_{32} &= -\mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \quad Z_{33} = - \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} + \epsilon_1.
\end{aligned}$$

Es posible concluir la negatividad de la derivada temporal de $V(y_t)$ si la matriz Z es definida positiva, es decir si existen escalares positivos P , \mathbf{Y} , ϵ_1 , \bar{X} , R_1 y M tales que los valores propios de Z sean positivos. El método con LMI proporciona una alternativa numérica para hallar las matrices (en este caso escalares) incógnitas tales que se satisfaga la desigualdad requerida. Sin embargo se nota que la desigualdad $Z > 0$, no es lineal con respecto a sus incógnitas y no es posible aplicar las técnicas de resolución numérica. Una alternativa es reescribir a la matriz Z en una forma equivalente, tal que se tenga una desigualdad matricial lineal. Dicha equivalencia la proporciona el complemento de Schur (ver Apéndice A.3). Se define a las matrices

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} - \left(2\bar{X} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j + R_1 + \epsilon_1\alpha^2 \right) & \bar{X} & -P \\ \bar{X} & R_1 & 0 \\ -P & 0 & \epsilon_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & 0 \\ 0 & \mathbf{Y} \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right) \sqrt{\tilde{h}}\mathbf{Y} & (\bar{X} + P) \\ \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right) \sqrt{\tilde{h}}\mathbf{Y} & 0 \\ \left(\sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right) \sqrt{\tilde{h}}\mathbf{Y} & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$-\bar{B}C^{-1}\bar{B}^T = - \begin{bmatrix} (\bar{X} + P)^2 \mathbf{Y}^{-1} + \tilde{A}_0^2 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} & \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \tilde{A}_j \left(\frac{jh}{n} \right) \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} & \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}\tilde{A}_0 \\ \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \tilde{A}_j \left(\frac{jh}{n} \right) \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} & \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} & \mathbf{Y}\tilde{h} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \\ \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}\tilde{A}_0 & \mathbf{Y}\tilde{h} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 & \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \end{bmatrix}.$$

Observe que $Z = \bar{A} - \bar{B}C^{-1}\bar{B}^T$ y es posible formar la matriz K del complemento de Schur. Este resultado se presenta a continuación:

Teorema A.5 *Sea el sistema en lazo cerrado (A.25), dado un número de particiones n y definidas las matrices \bar{A} , \bar{B} y C , si existen escalares R_1 , P , \mathbf{Y} , \bar{X} , α y ε_1 tales que*

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B}^T & C \end{bmatrix} > 0$$

entonces la solución trivial del sistema en lazo cerrado es asintóticamente robustamente estable ante perturbaciones no lineales no estructuradas.

A.5 Tipos de deshidratadores atmosféricos

- Los **secadores continuos de túnel** suelen ser compartimientos de charolas o de carretillas que operan en serie. Los sólidos se colocan sobre charolas o en carretillas que se desplazan continuamente por un túnel con gases calientes que pasan sobre la superficie de cada bandeja. El flujo de aire caliente puede ser a contracorriente, en paralelo, o una combinación de ambos. Muchos alimentos se secan por este procedimiento [28]. El tiempo de residencia en el secador debe ser lo suficientemente grande como para reducir al valor deseado el contenido de humedad del sólido. Para operaciones a temperaturas relativamente bajas ($50-80^\circ C$), generalmente se calienta el gas mediante aire calentado con vapor y se puede lograr una calidad aceptable de frutas deshidratadas; sin embargo el costo de energía puede ser alto comparado con los precios de venta de los productos [117].
- El **secador de charolas giratorias** es el método más empleado y las condiciones de operación en las que trabaja son apropiadas para el deshidratado de jitomate, así como para conservar su valor nutritivo. Se ha observado que en el secado en charolas estáticas las charolas se tienen que rotar manualmente para obtener un producto homogéneo [86].
- En el **secador de charolas estáticas**, el material puede ser un sólido en forma de terrones o pasta, se esparce uniformemente sobre una charola de metal de 10 a 100 mm de profundidad. Estos secadores tienen charolas que se cargan y se descargan de un gabinete [28]. La transmisión de calor puede ser directa del gas a los sólidos, con circulación de aire caliente; o indirecta, utilizando repisas o bases calientes, serpentines de radiador o paredes refractarias al interior de la cubierta. En unidades de calor indirecto, exceptuando los equipos de repisas al vacío, casi siempre se necesita la

circulación de aire para eliminar el vapor de humedad de la cámara de secado y evitar la saturación y condensación del aire. Alrededor del 10 al 20% del aire que pasa sobre las charolas es nuevo, y el resto es aire recirculado [28]. El funcionamiento satisfactorio de los secadores de charolas depende de la conservación de una temperatura constante y una velocidad de aire uniforme sobre todo el material que se esté secando. Conviene tener una circulación de aire con velocidades de 1 a 10 m/s para mejorar el coeficiente de transferencia de calor en la superficie y con el propósito de eliminar bolsas de aire estancado. La corriente de aire no uniforme es uno de los problemas más graves que se presentan en el funcionamiento de los secadores de charolas.

A.6 Indicadores de calidad en el jitomate

- **Licopeno:** es un carotenoide importante para el ser humano debido a que se deposita en el hígado, pulmón, próstata, colon y piel, su concentración en el cuerpo es más alta que la de cualquier otro carotenoide y facilita la inactivación de radicales libres, favoreciendo su actividad anticancerígena y antiarteriosclerótica [124]. En [2] se demuestra que el contenido de licopeno está correlacionado con el color del fruto. El deshidratado de jitomate ocasiona cambios de color en el producto final ya que ocurren el oscurecimiento no enzimático y de la degradación de licopeno [42].
- **Ácido ascórbico:** es una vitamina que pierde su actividad por varios factores, como el pH, contenido de humedad, oxígeno, temperatura y catálisis de iones metálicos. En el proceso de secado, las pérdidas de ácido ascórbico se deben principalmente a las temperaturas altas [127].
- **Fenoles totales:** los compuestos fenólicos, como fenoles simples, flavonoides y ácidos fenólicos son un amplio grupo de metabolitos secundarios de las plantas y son importantes en la dieta humana. Estudios epidemiológicos han demostrado que los compuestos fenólicos poseen atributos benéficos a la salud como anticarcinogénicos, antioxidantes potenciales, antivirales, antimicrobianos y antimutagénicos [116]. El jitomate posee una cantidad importante de compuestos fenólicos; sin embargo al someterse a un proceso térmico se han observado cambios en su concentración [89].

A.7 Características del jitomate

El jitomate utilizado en los experimentos fue obtenido de un invernadero ubicado en la delegación de Jaltepec, Municipio de Tulancingo de Bravo, Estado de Hidalgo. A continuación se enlistan sus características:

- La planta crece en el suelo como enredadera y se riega mediante un sistema de goteo tres veces al día.
- La cosecha se inició el 12 de marzo del 2015 y se han realizado 23 cortes aproximadamente, el tiempo de espera entre cada corte es de 10 a 15 días.

- La medición de temperatura no se realizó directamente en el producto, pero la temperatura del invernadero era de $27.8^{\circ}C$, siendo las 10:06 am del 2 de abril del 2016.
- La humedad relativa al momento del corte fue de 42%.
- Se utilizan los siguientes fertilizantes:



Figura A.1: Invernadero



Figura A.2: Planta de jitomate

Nombre	Marca
Librel Mix	NITROMEX
Multi-npk 12-2-44	Haifa
Sop, Sulfato de potasio	Haifa
Sal Epsom sulmag	Poly feel
Codaphos k	
Codabrix	

Tabla A.1: Fertilizantes

También se utiliza el excremento del ganado vacuno, ovino y equino como abono, el cual se coloca en una composta, después se realiza un proceso de secado al sol y por último es harneado.

- Se utilizan los siguientes plaguicidas:

Nombre	Marca
Previcur	Bayer
Oberon	Bayer
Scala	Bayer
Movento 150 od	Bayer
Busan 30 wb	Buckman

Tabla A.2: Plaguicidas

A.8 Curvas de la pérdida de humedad a 70°C

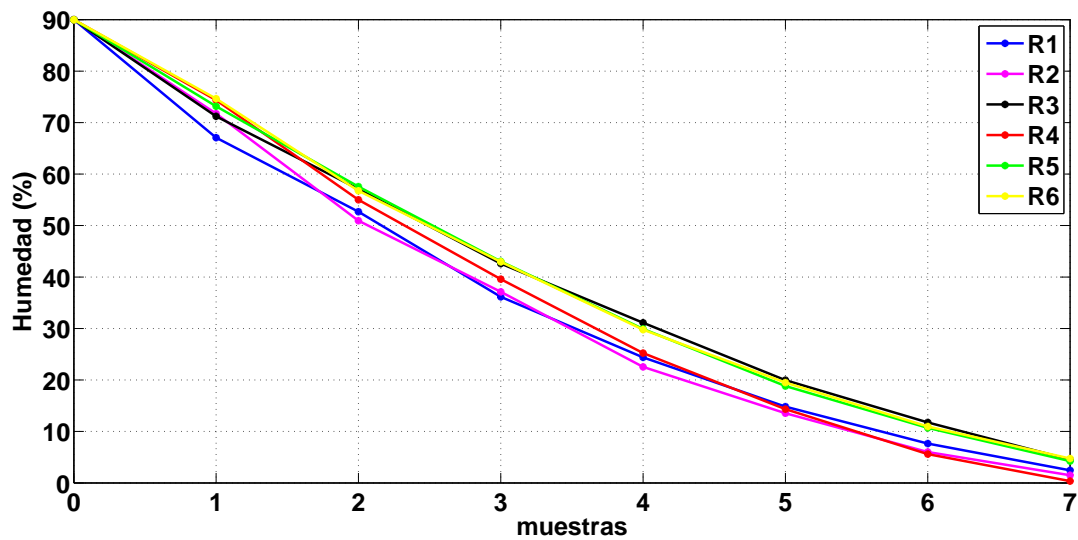


Figura A.3: Pérdida de humedad al aplicar el control ONL_{TC} a 70°C

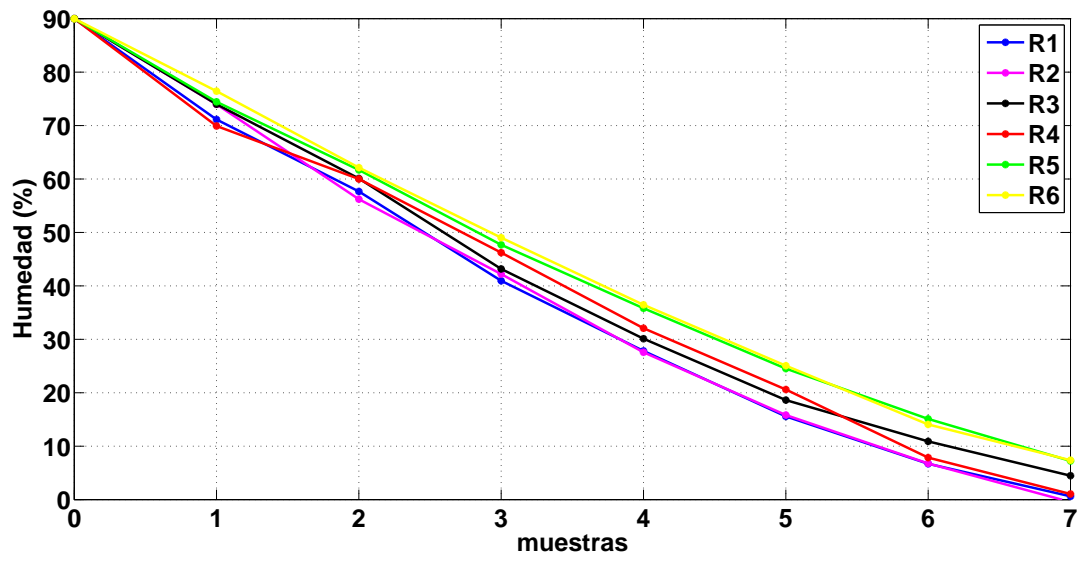


Figura A.4: Pérdida de humedad al aplicar el control *PID* a 70°C