

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Observadores Mittag-Leffler para sistemas fraccionarios

Tesis que presenta:

Oscar Martínez Fuentes

Para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias

En la Especialidad de:

Control Automático

Director de Tesis:

Dr. Rafael Martínez Guerra

Agradecimientos

A mis padres por todo su cariño y apoyo en mi vida.

A mi asesor el Dr. Rafael Martínez Guerra con quien trabajé durante un año realizando mi tesis de maestría y cuatro años en los estudios de doctorado.

A mis sinodales por sus aportaciones para la mejora de la redacción final de la tesis y su evaluación.

A los profesores del departamento, en especial al Dr. Jorge Alberto León Vázquez por su amistad y apoyo.

Alma, gracias por tu compañía, amor y apoyo durante todo este tiempo.

A mis amigos de CINVESTAV con quienes tuve excelentes momentos.

A mis mejores amigos de toda la vida, en especial a Juan Carlos (CAVER) por su amistad desde la preparatoria.

Al personal administrativo del departamento en sus diferentes etapas (Lucero, Sonia, Caty y Anallely).

Al CONACYT por la beca número 295538 para poder concluir mis estudios de doctorado.

A CINVESTAV y al DCA: It is hard to forget something that gave you so much to remember!

Resumen

El problema de observación aparece cuando algunos estados de un sistema dinámico no son accesibles o si su medición no es viable. Para resolver este problema de estimación de estados se utiliza un sistema dinámico llamado observador, es decir, un algoritmo que permite estimar el estado interno de un sistema dinámico a partir de las mediciones de la entrada y la salida disponibles de dicho sistema. En este trabajo se resuelve el problema de la estimación de estados en una clase de sistemas no lineales fraccionarios modelados con la derivada fraccionaria de Caputo. Se propone la generalización de la familia de observadores exponenciales, estableciendo así una nueva clase de observadores llamados estimadores Mittag-Leffler. Por otro lado, se propone una solución al problema del problema clásico del regulador óptimo cuadrático para sistemas lineales fraccionarios para el diseño de leyes óptimas de control y sus aplicaciones correspondientes. La teoría desarrollada en este trabajo considera sistemas fraccionarios de orden conmensurado, es decir, donde el orden de las derivadas en las ecuaciones diferenciales fraccionarias es el mismo. Simulaciones numéricas se presentan para validar la teoría propuesta.

Abstract

The observation problem appears when some states of a dynamic system are not accessible or if their measurement is not viable. The solution to this problem is through a dynamic system called an observer. An observer is an algorithm that allows the internal state of a dynamic system to be estimated from the measurements of the available input and output of the said system. In this thesis, the problem of estimating states in a class of fractional nonlinear systems modeled with the fractional derivative of Caputo is solved. The generalization of the exponential observer family is proposed, thus establishing a new class of observers called Mittag-Leffler estimators. On the other hand, a solution is proposed to the problem of the classic problem of the Linear Quadratic Regulator for fractional linear systems for the design of optimal control laws and their corresponding applications. The theory developed in this thesis considers fractional systems of commensurate order, that is, where the order of the derivatives in the fractional differential equations is the same. Numerical simulations are presented to validate the proposed theory.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	V
Índice de tablas	VIII
Índice de figuras	IX
Notación	XIII
1. Introducción	1
1.1. El cálculo fraccionario y la teoría de control	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Organización del trabajo	4
2. Cálculo fraccionario y sistemas fraccionarios	5
2.1. Funciones gamma y beta	5
2.1.1. Función gamma	5
2.1.2. Función beta	11
2.2. Función Mittag-Leffler	13
2.3. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville	18
2.4. Sistemas fraccionarios en teoría de control	24

3. Observabilidad en sistemas fraccionarios	30
3.1. Observabilidad en sistemas lineales fraccionarios	30
3.2. Observadores Mittag-Leffler	32
4. Observador de tipo Luenberger generalizado	37
4.1. Regulador óptimo cuadrático fraccionario	38
4.2. Estimador Mittag-Leffler de tipo Luenberger	41
4.3. Cálculo de las ganancias del estimador	45
4.4. Simulaciones numéricas	47
4.4.1. Sistema Rössler	47
4.4.2. Péndulo simple de orden fraccionario	55
5. Observador de Alta Ganancia	62
5.1. Propuesta del observador	63
5.2. Análisis de convergencia	67
5.3. Simulaciones numéricas	69
5.3.1. Péndulo simple de orden fraccionario	69
5.3.2. Sistema Arneodo fraccionario	77
6. Observadores con término integral de Riemann-Liouville	83
6.1. Planteamiento del problema	84
6.2. Observador ρ -integral de alta ganancia	85
6.3. Observador P $-\rho$ -integral	87
6.4. Simulaciones numéricas	89
7. Conclusiones y trabajo a futuro	97
A. Publicaciones	99
B. Cálculo de la matriz de ganancia para $n = 3$	101
Bibliografía	108

Índice de tablas

6.1. Valores de los índices de desempeño para $h = 0.0001$ y $\bar{\omega} = 50$	94
--	----

Índice de figuras

2.1. Función gamma para $x \in (-5, 5]$	7
2.2. $ \Gamma(z) $ con valores complejos de z	7
2.3. $\text{Re}(z)$ vs $\text{Im}(z)$ de $ \Gamma(z) $	8
2.4. Solución $x(t) = 2E_{0.92}(-3t^{0.92})$ para $0 \leq t \leq 50$	27
4.1. Trayectorias del sistema (3.1).	38
4.2. Región \mathcal{R} para elegir K_{22}, K_{23}	52
4.3. Función de acotamiento vs norma del error: $\ e\ \leq f_b$	52
4.4. Convergencia del error al origen.	53
4.5. x_1 vs \hat{x}_1 para el sistema Rössler.	53
4.6. x_2 vs \hat{x}_2 para el sistema Rössler.	54
4.7. x_3 vs \hat{x}_3 para el sistema Rössler.	54
4.8. Péndulo simple.	55
4.9. Región \mathcal{R} para elegir K_{21}, K_{22}	58
4.10. Región \mathcal{R} para elegir K_{31}, K_{32}	59
4.11. Función de acotamiento vs norma del error: $\ e\ \leq f_b$	60
4.12. x_1 vs \hat{x}_1 para el péndulo simple.	60
4.13. x_2 vs \hat{x}_2 para el péndulo simple.	61
5.1. Péndulo simple para implementar el observador de alta ganancia.	69
5.2. x_1 y \hat{x}_1 para $\theta = 25$	71
5.3. x_1 y \hat{x}_1 para $\theta = 30$	72
5.4. x_2 y \hat{x}_2 para $\theta = 25$	72

5.5. x_2 y \hat{x}_2 para $\theta = 30$	73
5.6. x_1 y \hat{x}_1 para diferentes valores de θ	73
5.7. x_2 y \hat{x}_2 para diferentes valores de θ	74
5.8. Norma del error acotada por una función de Mittag-Leffler para $\theta = 25$	74
5.9. Norma del error acotada por una función de Mittag-Leffler para $\theta = 30$	75
5.10. Salida $y = x_1$ (sin ruido) y $y = x_1 + v$ (con ruido de medición).	75
5.11. $y = x_1$ sin ruido y \hat{x}_1 para $\theta = 25$	76
5.12. x_2 y \hat{x}_2 para $\theta = 25$ con ruido de medición en la salida del sistema.	76
5.13. x_1 y \hat{x}_1 para $\theta = 95$ en el sistema Arneodo.	79
5.14. x_2 y \hat{x}_2 para $\theta = 95$ en el sistema Arneodo.	80
5.15. x_3 y \hat{x}_3 para $\theta = 95$ en el sistema Arneodo.	80
5.16. Convergencia del error al origen.	81
5.17. Estimación de \hat{x}_1 para $\theta = 95$ con ruido de medición en la salida.	81
5.18. Estimación de \hat{x}_2 para $\theta = 95$ con ruido de medición en la salida.	82
5.19. Estimación of \hat{x}_3 para $\theta = 95$ con ruido de medición en la salida.	82
6.1. Salida del sistema (6.21) con ruido.	94
6.2. Estimación utilizando el observador $PI^{r\alpha}$ (6.22) sin ruido de medición, $K_{2,0} =$ $K_{2,1} = 50$	95
6.3. Estimación utilizando el observador $PI^{r\alpha}$ (6.22) con ruido en la salida, $K_{2,0} =$ $K_{2,1} = 10$	95
6.4. Estimación utilizando el observador (6.7) con $\rho = 2$ y $\rho = 5$	96
6.5. Estimación utilizando el observador (6.16) con $\rho = 2$ y $\rho = 5$	96

Notación

\mathbb{C}	Números Complejos.
\mathbb{R}	Números Reales.
\mathbb{Z}	Números Enteros.
\mathbb{N}	Números Naturales.
\mathbb{R}^+	Números Reales Positivos.
\mathbb{Z}^-	Enteros Negativos.
$\operatorname{Re}(z)$	Parte real de z .
$\operatorname{Im}(z)$	Parte imaginaria de z .
$\Gamma(\xi)$	Función gamma de ξ .
$\beta(z, w)$	Función beta de parámetros z y w .
$E_{\alpha, \beta}(z)$	Función de Mittag-Leffler de parámetros α y β .
${}_0 I_t^\alpha f(t)$	Integral fraccionaria de Riemann-Liouville de $f(t)$.
${}^{\text{RL}}_0 \mathcal{D}_t^\alpha f(t)$	Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de $f(t)$.
${}^{\text{C}}_0 \mathcal{D}_t^\alpha f(t)$	Derivada fraccionaria de Caputo de $f(t)$.
$\lambda_{\min}(X)$	Valor propio mínimo de la matriz X .
$\lambda_{\max}(X)$	Valor propio máximo de la matriz X .
$X = [x_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$	Matriz $m \times n$ donde x_{ij} denota el elemento en la fila i , columna j .
X^\top	Transpuesta de la matriz X .
■	Fin de la demostración.

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. El cálculo fraccionario y la teoría de control

El cálculo fraccionario consiste en la generalización del cálculo clásico, es decir, donde el proceso de derivación e integración de funciones puede ser de orden arbitrario (real o complejo), por ejemplo la derivada de orden 2.2 o la integral de orden 3/4 de alguna función. Aunque el cálculo fraccionario y las ecuaciones diferenciales fraccionarias han tenido mucha relevancia en la última década debido a sus potenciales aplicaciones en ingeniería, la teoría no es nueva. La primera idea sobre la derivada fraccionaria apareció en una carta que L'Hôpital escribió a Leibniz en 1695 donde se cuestiona el significado de $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ si $n = 1/2$ [60, 64].

Para justificar el uso de la derivada fraccionaria en modelos matemáticos y técnicas de análisis, podemos irnos al estudio de materiales, donde varios de estos presentan un comportamiento mecánico particular que no puede ser totalmente descrito con una derivada usual. Además, un modelo matemático con derivada fraccionaria tiene mejores propiedades y caracteriza los comportamientos presentados por estos materiales [54, 55, 66].

Aunque el uso de los modelos con derivada fraccionaria es una extensión natural de la dinámica entera y brinda además un interesante problema teórico, en años recientes mucho trabajo de investigación ha sido desarrollado para tratar de explicar el uso de la derivada en

varios modelos matemáticos [19, 23, 24, 63, 67, 79].

Dentro del estudio de la descripción física de la derivada fraccionaria aparece la interpretación geométrica de la misma. Por ejemplo en [61, 71], la interpretación geométrica de la derivada e integral de Riemann-Liouville, la derivada de Caputo y el potencial de Riesz son analizados.

En teoría de control, varias extensiones de los resultados clásicos han sido obtenidas mediante el uso de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, por ejemplo en [52] donde se presentan la implementación física de operadores de orden fraccionario y controladores PID.

Uno de los principales problemas en teoría de control es la estimación de las variables para sistemas dinámicos. Este problema se resuelve mediante un estimador (u observador) de estados, que es un algoritmo que reconstruye la información faltante del vector de estados basado en las mediciones disponibles de la salida y la señal de control.

Los primeros avances en la teoría de observadores fueron llevados a cabo por David G. Luenberger en sistemas lineales [42], y posteriormente extendidos a sistemas no lineales, lo cual permitió realizar aplicaciones con otras técnicas como la detección de fallas [26], sincronización de sistemas caóticos [53], modos deslizantes [40], filtros de Kalman [20], estimación adaptable [58] y los observadores de alta ganancia [74].

En años recientes, el problema de estimación de estados también ha sido resuelto mediante técnicas que emplean el uso de dinámicas fraccionarias, obteniendo resultados bastante interesantes como el ajuste de datos experimentales [69], sincronización de sistemas [1, 81], detección de fallas empleando métodos algebraicos [48], perturbaciones no lineales [59], observadores con modos deslizantes [16, 28], observadores de orden completo y reducido [33, 80], entre otros [72, 77, 83].

Las diferencias entre todas estas técnicas consisten en las restricciones impuestas en el sistema y en el comportamiento deseado para la dinámica del error, por ejemplo el sobre pico inicial, convergencia en tiempo finito, precisión asintótica, tasa de convergencia o la robustez con respecto a perturbaciones externas o ruidos de medición.

De acuerdo a todas las técnicas que resuelven el problema de estimación de estados, en este trabajo, la idea de los observadores exponenciales [32, 78] se generaliza para el caso de los sistemas de orden fraccionario a través de una nueva clase de estimadores llamados observadores Mittag-Leffler, basados en dos ideas esenciales: la función Mittag-Leffler y la estabilidad Mittag-Leffler de sistemas fraccionarios. En este trabajo proponemos resultados de estabilidad para el diseño y caracterización de los observadores Mittag-Leffler, así como cuatro algoritmos de estimación que pertenecen a esta familia.

El primer algoritmo consiste en un observador de Luenberger generalizado, el cual va de la mano con la solución al problema del regulador cuadrático para sistemas fraccionarios y la elección de las ganancias. El segundo algoritmo de estimación consiste en un observador de alta ganancia inspirado en el trabajo de Gauthier. Se demuestra que este observador es robusto ante ruido de medición y que la convergencia se puede acelerar al aumentar la ganancia en el observador. Finalmente los últimos algoritmos que se proponen consisten en observadores con términos integrales los cuales ayudan a mejorar la estimación ante presencia de ruido de medición.

1.2. **Objetivos**

Establecer ecuaciones diferenciales fraccionarias que sirvan como algoritmos de estimación de estados para una clase de sistemas no lineales de orden fraccionario. En particular:

- Caracterizar cada uno de estos algoritmos para que sean útiles como estimadores de estado.
- Verificar mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov que los estimadores propuestos pertenezcan a la familia de observadores Mittag-Leffler.
- Obtener resultados numéricos mediante la aplicación de las metodologías propuestas.

1.3. Organización del trabajo

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presenta de forma introductoria las definiciones, operadores del cálculo fraccionario y ecuaciones diferenciales fraccionarias, así como algunos resultados de estabilidad para sistemas fraccionarios. El capítulo 3 trata sobre observabilidad de sistemas lineales fraccionarios y se dan resultados sobre la caracterización de observadores Mittag-Leffler mediante funciones de Lyapunov.

En el capítulo 4 se propone un algoritmo que sirve como estimador de estados (observador de tipo Luenberger generalizado). Aquí es donde se desarrolla la teoría principal para la estimación de estados, así como también se propone la solución al problema del regulador óptimo cuadrático y su uso en la elección de ganancias del observador. En el capítulo 5 se presenta un algoritmo de estimación Mittag-Leffler que se caracteriza por ser un observador de alta ganancia, el cual es robusto ante la presencia de ruido en la salida del sistema.

Para el cálculo de las ganancias del observador se resuelve la ecuación diferencial fraccionaria asociada a la matriz de ganancias. Por otro lado, en el capítulo 6 se proponen dos algoritmos de estimación Mittag-Leffler diseñados con término integral Riemann-Liouville. Se prueba que estos algoritmos son robustos ante la presencia de ruido y que la estimación mejora cuando el número de integradores aumenta. Finalmente en el capítulo 7 se presentan las conclusiones de esta tesis y el trabajo planeado a futuro para continuar la investigación.

CAPÍTULO 2

Cálculo fraccionario y sistemas fraccionarios

En este capítulo se establecen las bases teóricas del cálculo fraccionario y las ecuaciones diferenciales fraccionarias, las cuales modelan a los algoritmos de estimación que se proponen en los capítulos posteriores.

2.1. Funciones gamma y beta

2.1.1. Función gamma

Considere la transformada de Laplace de la función t^{n-1} , es decir

$$I = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt.$$

No es difícil demostrar, haciendo $\tau = st$ que

$$I = \frac{1}{s^n} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{n-1} d\tau = \frac{K(n)}{s^n}$$

donde la integral $K(n)$ depende solo de n . Esta integral aparece en varios problemas aplicados en ciencia e ingeniería, y se define como sigue.

Definición 2.1. Sea $z \in \mathbb{R}^+$. La función dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

se conoce como **función gamma**.

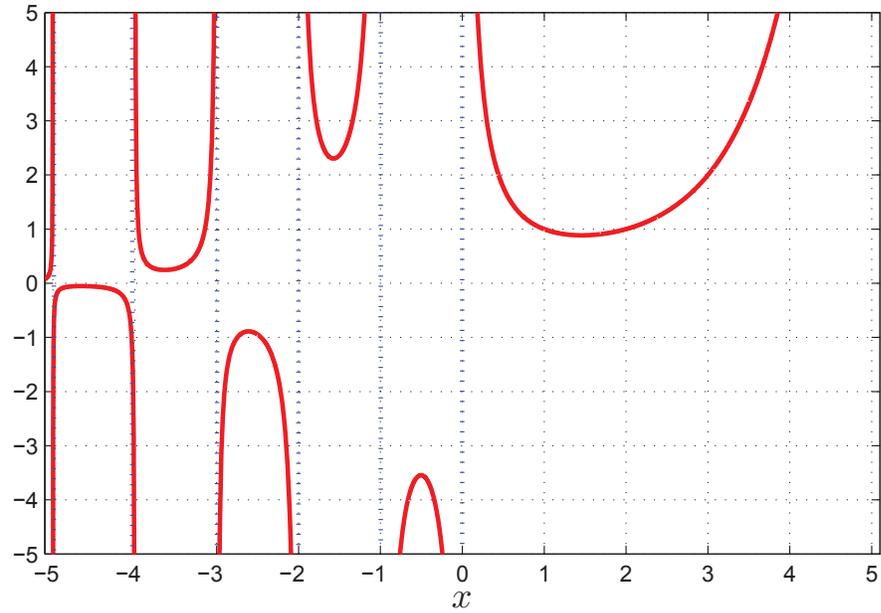
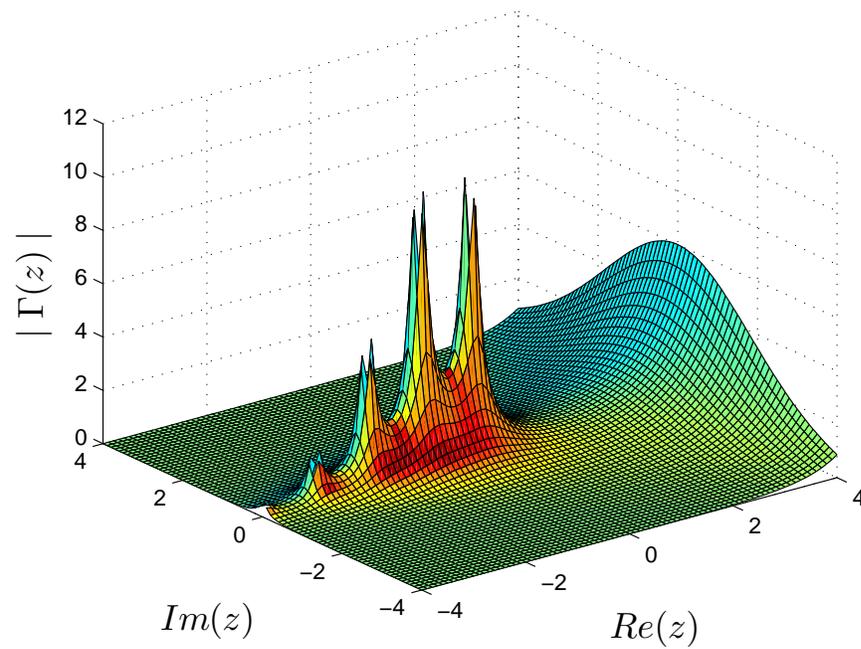
Observación 2.1.1. Aunque la función (2.1) está definida para $z \in (0, \infty)$, este dominio puede extenderse a un conjunto más grande, por ejemplo los números complejos \mathbb{C} . La única condición para poder realizar esta extensión es que $\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}^- \cup \{0\})$. Esto debido a que en el cero y en los números enteros negativos la función gamma tiene polos simples, en efecto, notemos que

$$\Gamma(z) = \underbrace{\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt}_{(1)} + \underbrace{\int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt}_{(2)}. \quad (2.2)$$

Para la integral (1):

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+z)k!}$$

Esta serie es convergente excepto donde uno de los término tiene un polo simple, es decir, en $z = -k$, $k \geq 0$, con residuo $(-1)^k/k!$. Por otro lado, la integral (2) es una función entera, por lo que $\Gamma(z)$ es función meromorfa [34]. La Figura 2.1 muestra a la función gamma con argumento $x \in (-5, 5]$, mientras que en la Figura 2.2 se observa la gráfica de la función $|\Gamma(z)|$ para algunos valores complejos de z . Al observar esta gráfica desde otra perspectiva, se puede apreciar los polos de la función gamma (Figura 2.3).

Figura 2.1: Función gamma para $x \in (-5, 5]$.Figura 2.2: $|\Gamma(z)|$ con valores complejos de z .

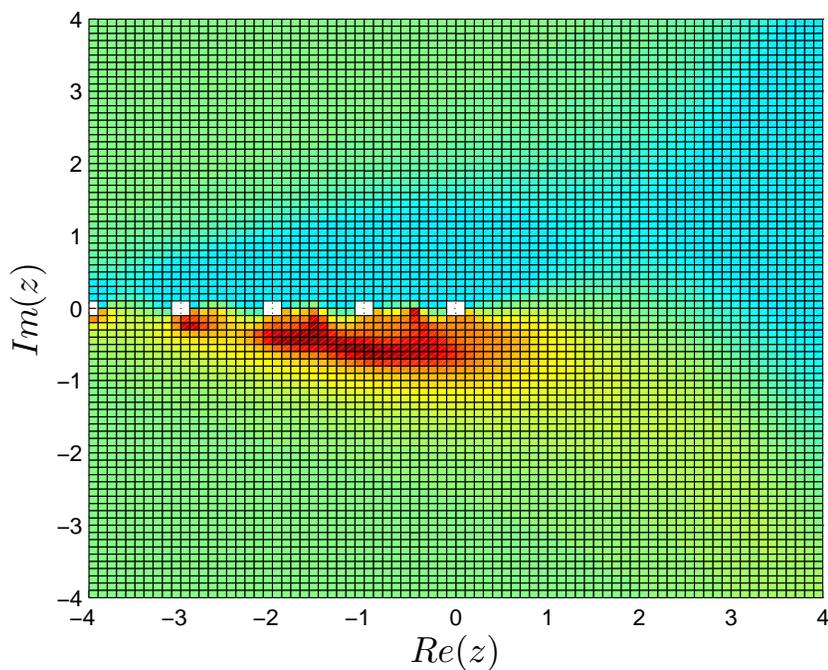


Figura 2.3: $Re(z)$ vs $Im(z)$ de $|\Gamma(z)|$.

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\
 &= -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
 &= \cancel{-e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty}} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.3)$$

De la relación (2.3), se puede obtener la relación entre la función gamma y el factorial de un número al considerar $z \in \mathbb{N}$. Utilizando inducción matemática, es fácil demostrar que

$$\Gamma(z+1) = z! \quad (2.4)$$

Teorema 2.1. Sea $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} z^{2x-1} e^{-z^2} dz. \quad (2.5)$$

Demostración. Sea $t = z^2$, entonces $dt = 2z dz$. A partir de este cambio de variable en la integral (2.1), cuando $t = 0$ tenemos $z = 0$, y $z \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} (z^2)^{x-1} e^{-z^2} 2z dz \\ &= 2 \int_0^{\infty} z^{2x-1} e^{-z^2} dz \\ &= 2 \int_0^{\infty} z^{2x-1} e^{-z^2} dz \end{aligned}$$

■

Teorema 2.2. Sea $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}. \quad (2.6)$$

Demostración. Sea \mathcal{I} la integral dada por

$$\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{R}} \exp(-\tau^2 - \nu^2) \tau^{2x-1} \nu^{2y-1} d\tau d\nu$$

donde \mathcal{R} es el primer cuadrante del plano $\tau\nu$. Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^{\infty} \tau^{2x-1} e^{-\tau^2} d\tau \int_0^{\infty} \nu^{2y-1} e^{-\nu^2} d\nu \\ &= \frac{\Gamma(x)}{2} \frac{\Gamma(y)}{2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por otro lado, sean $\tau = r \cos \theta$ y $\nu = r \sin \theta$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int \int_{\mathbb{R}} \exp(-r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) (r \cos \theta)^{2x-1} (r \sin \theta)^{2y-1} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r^{2x-1} \cos^{2x-1} \theta r^{2y-1} \sin^{2x-1} \theta r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} \, dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2x-1} \theta \, d\theta \end{aligned}$$

y del Teorema 2.1 tenemos

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \Gamma(x+y) \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2x-1} \theta \, d\theta \quad (2.8)$$

Finalmente igualando las expresiones (2.7) y (2.8) se obtiene el resultado deseado. ■

Como aplicación numérica del Teorema anterior tenemos los siguientes resultados.

Corolario 2.1.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (2.9)$$

Demostración. En la expresión (2.6) si $x = y = \frac{1}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} d\theta &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(1)} \\ \frac{\pi}{2} &= \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 \\ \pi &= \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 \end{aligned}$$

De la última igualdad, el resultado deseado es inmediato. ■

Corolario 2.2.

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (2.10)$$

Demostración. Si $x = \frac{1}{2}$ en el Teorema 2.1, tenemos $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt$. La prueba finaliza aplicando el corolario 2.1. ■

2.1.2. Función beta

Consideremos una función f tal que $f(x+y)$ se pueda expresar en términos del producto $f(x)f(y)$, por ejemplo $e^{x+y} = e^x e^y$. Si consideramos esta idea y la aplicamos al producto de funciones gamma $\Gamma(x)\Gamma(y)$, resulta que es posible encontrar una función auxiliar donde aparece la función $\Gamma(x+y)$. Esta función, se define a continuación.

Definición 2.2. Sean $z \in \mathbb{R}^+, w \in \mathbb{R}^+$. La integral

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (2.11)$$

se le conoce como **función beta**.

De la misma forma que la función gamma tiene propiedades interesantes, la función gamma no es la excepción. Por ejemplo, considerando la conmutatividad de los números complejos y empleando algunas propiedades de la función gamma, es fácil ver lo siguiente:

$$\beta(z, w) = \beta(w, z) \quad (2.12)$$

$$\beta(z+1, w) = \frac{z}{z+w} \beta(z, w) \quad (2.13)$$

Para ver la relación entre el producto $\Gamma(x)\Gamma(y)$ y la función $\Gamma(x+y)$ considere el siguiente resultado.

Teorema 2.3.

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.14)$$

Demostración. Sea $t = \cos^2 \theta$. A partir de este cambio de variable, la integral (2.11) puede reescribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta)^{x-1} (\sin^2 \theta)^{y-1} 2 \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.15)$$

Finalmente del Teorema 2.2, el resultado es inmediato. ■

Ejemplo 2.1.1. Considere la integral

$$\mathcal{I} = \int_a^b (b-x)^{m-1} (x-a)^{n-1} dx, \quad b > a, m > 0, n > 0. \quad (2.16)$$

Sea $x = a + y(b-a)$, entonces

$$\mathcal{I} = (b-a)^{m+n-1} \int_0^1 (1-y)^{m-1} y^{n-1} dy$$

De la definición de la función beta (2.11) tenemos que

$$\int_a^b (b-x)^{m-1} (x-a)^{n-1} dx = (b-a)^{m+n-1} \beta(m, n). \quad (2.17)$$

Ejemplo 2.1.2. Sea

$$\mathcal{I} = \int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx, \quad m > -1, p > -1, n > 0. \quad (2.18)$$

Si $y = x^n$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^1 \frac{x^m}{nx^{n-1}} (1-y)^p dy \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 x^{m-n+1} (1-y)^p dy \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 y^{\frac{m+1}{n}-1} (1-y)^{p+1-1} dy \end{aligned}$$

Finalmente de la definición de la función beta (2.11)

$$\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx = \frac{1}{n} \beta\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right). \quad (2.19)$$

Observación 2.1.2. Varios resultados de esta sección fueron tomados de [8]. Para un estudio más a fondo sobre la teoría y aplicaciones de las funciones gamma y beta puede verse [5, 46].

2.2. Función Mittag-Leffler

Como sabemos, al resolver una ecuación diferencial ordinaria, la función que más aparece en las soluciones es la función exponencial $\exp(x)$. Ahora consideremos una función que generaliza a esta función y cuyo papel más importante radica en la solución de las ecuaciones diferenciales fraccionarias y la estabilidad de soluciones [15, 25, 65].

Definición 2.3. Sean $\alpha > 0, \beta > 0$. La función dada por

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \quad (2.20)$$

se llama función de Mittag-Leffler de parámetros α y β .

Ejemplo 2.2.1. Consideremos las funciones $\cos x$ y $\cosh x$ expresadas como series de potencias. Aplicando la propiedad (2.4) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = E_{2,1}(-x^2) \\ \cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = E_{2,1}(x^2) \end{aligned}$$

Observación 2.2.1. Si $\alpha = \beta = 1$, la función Mittag-Leffler (2.3) coincide con la función exponencial:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z) \quad (2.21)$$

Observación 2.2.2. Si $\beta = 1$, de la definición (2.20), la función Mittag-Leffler de un parámetro está dada por:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} = E_{\alpha}(z) \quad (2.22)$$

Observación 2.2.3. La función Mittag-Leffler puede definirse para argumentos no necesariamente escalares, por ejemplo matrices. En la ecuación (2.20), sea $z = At^\alpha$ con A una

matriz, entonces:

$$E_{\alpha,\beta}(At^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + At^\alpha E_{\alpha,\alpha+\beta}(At^\alpha) \quad (2.23)$$

En particular para $\beta = 1$:

$$E_\alpha(At^\alpha) = 1 + At^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(At^\alpha) \quad (2.24)$$

Lema 2.1. Sean $K, \theta \in \mathbb{R}^+$ y $*$ el operador convolución, entonces:

$$K * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) = -\frac{K}{\theta} E_\alpha(-\theta t^\alpha) + \frac{K}{\theta} \quad (2.25)$$

Demostración. De la definición de la función Mittag-Leffler, tenemos:

$$\begin{aligned} K * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) &= K \int_0^t \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta \tau^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} d\tau \\ &= K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^k}{\Gamma(\alpha(k+1))} \frac{t^{\alpha(k+1)}}{\alpha(k+1)} \\ &= K t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\theta t^\alpha) \end{aligned}$$

La prueba finaliza considerando la ecuación (2.24) con $A = -\theta$. ■

Lema 2.2.

$$\frac{d^m}{dt^m} E_{\alpha,\beta}(At^\alpha) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1 - m)} t^{\alpha k - m} \quad (2.26)$$

donde $m \in \mathbb{Z}^+$. Para $m = 1, \beta = 1$:

$$\frac{d}{dt} E_\alpha(At^\alpha) = t^{\alpha-1} A E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) \quad (2.27)$$

Demostración. De acuerdo a la función Mittag-Leffler:

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dt^m} E_{\alpha,\beta}(At^\alpha) &= \frac{d^m}{dt^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{d^m}{dt^m} t^{\alpha k} \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1 - m)} t^{\alpha k - m}
\end{aligned}$$

De forma particular si $m = 1$, $\beta = 1$ y $k = j + 1$ se obtiene la ecuación (2.27). ■

Teorema 2.4. Sean $\alpha > 0$ y $\gamma + \nu > 0$, entonces

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} \tau^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(\lambda \tau^\alpha) d\tau = t^{\gamma+\nu-1} E_{\alpha,\gamma+\nu}(\lambda t^\alpha) \quad (2.28)$$

Demostración. De la definición de la función Mittag-Leffler (2.3) y considerando el cambio de variable $\tau = st$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} \tau^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(\lambda \tau^\alpha) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} \tau^{\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \tau^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \gamma)} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \gamma)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} \tau^{\alpha k + \gamma - 1} d\tau \\
&= \frac{t^{\gamma+\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \gamma)} \int_0^1 (1 - s)^{\nu-1} s^{\alpha k + \gamma - 1} ds \\
&= \frac{t^{\gamma+\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \gamma)} \beta(\nu, \alpha k + \gamma) \\
&= \frac{t^{\gamma+\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \gamma)} \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\alpha k + \gamma)}{\Gamma(\alpha k + \gamma + \nu)} \\
&= t^{\gamma+\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \gamma + \nu)} \\
&= t^{\gamma+\nu-1} E_{\alpha,\gamma+\nu}(\lambda t^\alpha)
\end{aligned}$$

■

Ahora consideremos la convolución de funciones

$$\mathcal{I} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha) * t^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(yt^\alpha)$$

en el siguiente resultado.

Teorema 2.5. Sean $\alpha > 0, \nu > 0, \gamma > 0$ y $y \neq z$, entonces

$$\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} E_{\alpha,\nu}(z(t-\tau)^\alpha) \tau^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(y\tau^\alpha) d\tau = \frac{t^{\nu+\gamma-1}}{y-z} [yE_{\alpha,\nu+\gamma}(yt^\alpha) - zE_{\alpha,\nu+\gamma}(zt^\alpha)] \quad (2.29)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m (t-\tau)^{\alpha m}}{\Gamma(\alpha m + \nu)} \tau^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n \tau^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \gamma)} d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^n z^m}{\Gamma(\alpha n + \gamma) \Gamma(\alpha m + \nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha m + \nu - 1} \tau^{\alpha n + \gamma - 1} d\tau \\ (\tau = st) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^n z^m}{\Gamma(\alpha n + \gamma) \Gamma(\alpha m + \nu)} t^{\alpha(m+n) + \nu + \gamma - 1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha m + \nu - 1} s^{\alpha n + \gamma - 1} ds \\ &= t^{\nu+\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^n z^m}{\Gamma(\alpha(m+n) + \nu + \gamma)} t^{\alpha(m+n)} \\ (k = m+n) &= t^{\nu+\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{y^n z^{k-n}}{\Gamma(\alpha k + \nu + \gamma)} t^{\alpha k} \\ &= t^{\nu+\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{z^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \nu + \gamma)} \left(\frac{y}{z}\right)^n \\ &= t^{\nu+\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \nu + \gamma)} \sum_{n=0}^k \left(\frac{y}{z}\right)^n \\ &= t^{\nu+\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \nu + \gamma)} \frac{y^{k+1} - z^{k+1}}{y-z} \\ &= \frac{t^{\nu+\gamma-1}}{y-z} \left[y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yt^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \nu + \gamma)} - z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zt^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \nu + \gamma)} \right] \\ &= \frac{t^{\nu+\gamma-1}}{y-z} [yE_{\alpha,\nu+\gamma}(yt^\alpha) - zE_{\alpha,\nu+\gamma}(zt^\alpha)] \end{aligned}$$

■

Observación 2.2.4. En el análisis anterior, se consideró que

$$x^n - y^n = (x - y) (x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

entonces

$$\begin{aligned} z^k \sum_{n=0}^k \left(\frac{y}{z}\right)^n &= z^k \left(1 + \frac{y}{z} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{y^3}{z^3} + \dots + \frac{y^{k-1}}{z^{k-1}} + \frac{y^k}{z^k}\right) \\ &= z^k + yz^{k-1} + y^2z^{k-2} + y^3z^{k-3} + \dots + y^{k-1}z + y^k \\ &= \frac{y^{k+1} - z^{k+1}}{y - z}. \end{aligned}$$

Finalmente consideremos el siguiente resultado que es muy útil al resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias empleando el método de la transformada de Laplace.

Teorema 2.6. Sea $y(t) = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)$, donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces la transformada de Laplace de $y(t)$ está dada por

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}, \quad \operatorname{Re}(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.30)$$

Demostración. De la definición de la transformada de Laplace, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-\lambda t^\alpha)^j}{\Gamma(j\alpha + \beta)} dt \\ &= \sum_{j=0}^\infty \frac{(-\lambda)^j}{\Gamma(j\alpha + \beta)} \int_0^\infty t^{\alpha j + \beta - 1} e^{-st} dt \end{aligned}$$

Sea $u = st$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{\Gamma(j\alpha + \beta)} \int_0^{\infty} t^{\alpha j + \beta - 1} e^{-st} dt &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{\Gamma(j\alpha + \beta)} \frac{1}{s^{\alpha j + \beta}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha j + \beta - 1} du \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{\Gamma(j\alpha + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha j + \beta)}{s^{\alpha j + \beta}} \\ &= s^{-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} (-\lambda s^{-\alpha})^j \end{aligned}$$

La prueba concluye considerando algunas manipulaciones algebraicas y la convergencia de la serie geométrica,

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s^{\alpha - \beta}}{s^{\alpha} + \lambda}$$

donde la región de convergencia es $\operatorname{Re}(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}$. ■

2.3. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Para establecer la definición de la integral fraccionaria, primero consideremos la siguiente definición.

Definición 2.4. Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} {}_a I_t^n f(t) &= \underbrace{\int_a^t \int_a^{\sigma_1} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}}}_{n\text{-veces}} f(\sigma_n) \underbrace{d\sigma_n \dots d\sigma_2 d\sigma_1}_{n\text{-veces}} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{2.31}$$

representa la integral iterada.

Hay varias formas de establecer los operadores del cálculo fraccionario. Una forma intuitiva es a partir de la integral iterada (2.31) en el caso en que $n = \alpha \in \mathbb{R}^+$. Al considerar este cambio y gracias a la función gamma tenemos el siguiente operador que representa la integral de orden arbitrario.

Definición 2.5. La integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$ de una función

$f(t) \in L_1(a, b)$ está dada por:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a. \quad (2.32)$$

Ejemplo 2.3.1. Sea $f_1(t) = t^\beta$, con $\beta > -1$ y $\alpha > 0$. De la definición de la integral de Riemann-Liouville (2.32):

$${}_0 I_t^\alpha f_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau$$

Sea $\tau = st$, entonces

$${}_0 I_t^\alpha f_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds$$

Luego, de la ecuación (2.14) para la función beta:

$${}_0 I_t^\alpha f_1(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}$$

En particular, si $f_1(t) = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$, tenemos $\beta = \frac{1}{2}$. Al considerar $\alpha = \frac{1}{2}$:

$${}_0 I_t^{\frac{1}{2}} \sqrt{t} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(2)} t = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t$$

Ejemplo 2.3.2. Sea $g(t) = \cos(\omega t)$. De la definición de la integral de Riemann-Liouville (2.32) y del ejemplo 2.2.1, tenemos:

$$\begin{aligned} {}_0 I_t^\alpha g(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \cos(\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{2,1}(-(\omega\tau)^2) d\tau \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 2.4 con $\alpha = 2, \gamma = 1, \lambda = -1$ tenemos

$${}_0 I_t^\alpha \cos(\omega t) = t^\alpha E_{2,\alpha+1}(-(\omega t)^2) \quad (2.33)$$

En particular, cuando $\alpha = 1$, la integral (2.33) es

$$\int_0^t \cos(\omega t) dt = tE_{2,2}(-(\omega t)^2) = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{\sin(\omega t)}{\omega},$$

por lo que se recupera la integral usual.

Una propiedad importante que satisface la integral fraccionaria de Riemann-Liouville es la propiedad de semigrupo, dada en el siguiente resultado.

Teorema 2.7. Sea $f(t) \in L_1(a, b)$, y $m > 0$, $n > 0$. Entonces

$${}_a I_t^m {}_a I_t^n f(t) = {}_a I_t^{m+n} f(t) = {}_a I_t^n {}_a I_t^m f(t) \quad (2.34)$$

Demostración. De la definición de la integral de Riemann-Liouville, tenemos

$$\begin{aligned} {}_a I_t^m {}_a I_t^n f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{m-1} \int_a^\tau (\tau-x)^{n-1} f(x) dx d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^t \int_a^\tau (t-\tau)^{m-1} (\tau-x)^{n-1} f(x) dx d\tau \end{aligned}$$

A partir del Teorema de Fubini se puede cambiar el orden de integración, por lo que

$${}_a I_t^m {}_a I_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^t f(x) \int_x^t (t-\tau)^{m-1} (\tau-x)^{n-1} d\tau dx.$$

Finalmente, al considerar la integral (2.17), tenemos que

$${}_a I_t^m {}_a I_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^t f(x) (t-x)^{m+n-1} \beta(m, n) dx$$

Por lo tanto, al realizar las cancelaciones correspondientes a las funciones gamma obtenidas,

$${}_a I_t^m {}_a I_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_a^t (t-x)^{m+n-1} f(x) dx = {}_a I_t^{m+n} f(t),$$

lo que concluye la prueba. ■

Antes de presentar las derivadas fraccionarias, retomemos a la transformada de Laplace.

Recordemos que

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$$

Además, para la convolución de funciones, la transformada de Laplace está dada por

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \cdot G(s).$$

Con base en lo anterior, y dado que la integral de Riemann-Liouville se puede escribir como la convolución de dos funciones, es decir,

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \quad (2.35)$$

entonces

$$\mathcal{L}\{{}_0I_t^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t)\right\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} F(s) = \frac{F(s)}{s^\alpha} \quad (2.36)$$

A partir de la integral de Riemann-Liouville, se definen las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y la de Caputo como sigue.

Definición 2.6. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$ de una función $f(t)$ está dada por:

$$\begin{aligned} {}_0^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= D^n [{}_0I_t^{n-\alpha} f(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \alpha\}$ y D^n representa la n-esima derivada usual.

Observación 2.3.1. De la definición anterior, de forma particular para $0 < \alpha < 1$:

$${}_0^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \quad (2.38)$$

Ejemplo 2.3.3. Sea K una constante distinta de cero y considerando $0 < \alpha < 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}
{}_0^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha K &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} K d\tau \right) \\
&= \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \right) \\
&= \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[-\frac{(t-\tau)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_0^t \right] \\
&= \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right] \\
&= \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0
\end{aligned}$$

Note que si $\alpha \rightarrow 0$ entonces la derivada también tiende a 0 y se recupera la derivada usual de una constante.

Definición 2.7. La derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha > 0$ de una función $f(t)$ está dada por:

$$\begin{aligned}
{}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= {}_0I_t^{n-\alpha} [D^n f(t)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} D^n f(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.39}$$

donde $n = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k > \alpha\}$ y D^n representa la n -ésima derivada usual.

Observación 2.3.2. De la definición anterior, de forma particular para $0 < \alpha < 1$:

$${}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \tag{2.40}$$

Ejemplo 2.3.4. Es claro que para una constante K distinta de cero, ${}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha K = 0$. Sea $f_1(t) = t^\beta$. Del ejemplo 2.3.1 tenemos

$${}_0I_t^\alpha f_1(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}.$$

Además, recordemos que la derivada n -ésima de la función t^j está dada como sigue:

$$D^n t^j = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-n)} t^{j-n}.$$

Entonces de la definición de la derivada de Riemann-Liouville (2.37):

$$\begin{aligned} {}_0^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha t^\beta &= D^n [{}_0I_t^{n-\alpha} t^\beta] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} D^n [t^{n-\alpha+\beta}] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Al considerar la derivada de Caputo se obtiene un resultado similar.

Ejemplo 2.3.5. Sea $f(t) = \sin(\omega t)$, entonces de la definición de la derivada de Caputo (2.40):

$$\begin{aligned} {}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha \sin(\omega t) &= {}_0I_t^{1-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \sin(\omega t) \right) \\ &= \omega {}_0I_t^{1-\alpha} (\cos(\omega t)) \end{aligned}$$

Luego, por el ejemplo 2.3.2 tenemos

$${}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha \sin(\omega t) = \omega t^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-(\omega t)^2) \quad (2.41)$$

En particular, cuando $\alpha = 1$ recuperamos la derivada usual de la función $\sin(\omega t)$:

$$\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega E_{2,1}(-(\omega t)^2) = \omega \cos(\omega t).$$

Lema 2.3. Sea $0 < \alpha < 1$, entonces:

$${}_0^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = {}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) \quad (2.42)$$

Demostración. De la definición de la derivada de Riemann-Liouville y las propiedades de convolución:

$${}_0^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \tau^{-\alpha} f(t-\tau) d\tau \right) \quad (2.43)$$

Entonces aplicando la fórmula de Leibniz para la derivada de una integral tenemos

$$\begin{aligned}
{}_0^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_0^t \tau^{-\alpha} f'(t-\tau) d\tau + t^{-\alpha} f(0) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \tau^{-\alpha} f'(t-\tau) d\tau + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) \\
&= {}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0)
\end{aligned}$$

■

Como podemos observar, las derivadas fraccionarias utilizadas en este trabajo están relacionadas. De forma general, si $f \in \mathcal{C}^m$ y $m-1 < \alpha < m$:

$${}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = {}_0^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) \right] \quad (2.44)$$

$$= {}_0^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) \quad (2.45)$$

Retomando la transformada de Laplace, para las derivadas fraccionarias presentadas en esta sección están dadas como sigue. Sea $m-1 < \alpha < m$,

$$\mathcal{L} \{ {}_0^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k ({}_0^{RL}\mathcal{D}_t^{\alpha-k-1} f(0)) \quad (2.46)$$

$$\mathcal{L} \{ {}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} (D^{(k)} f(0)) \quad (2.47)$$

2.4. Sistemas fraccionarios en teoría de control

A partir de los operadores del cálculo fraccionario, se pueden establecer ecuaciones diferenciales fraccionarias. Hay varios métodos para resolverlas, por ejemplo utilizando la transformada de Laplace o el método de las aproximaciones sucesivas. Para más detalles sobre

métodos de solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias y resultados sobre existencia y unicidad vea [65].

Ejemplo 2.4.1. Dado el problema de valor inicial:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha y(t) = -y(t) - q(t), \quad y(0) = 2$$

con $\alpha \in (0, 1)$ y alguna función $q(t)$. Aplicando la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha y(t) \} &= -\mathcal{L} \{ y(t) \} - \mathcal{L} \{ q(t) \} \\ s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) &= -Y(s) - Q(s) \\ Y(s) &= 2 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} - \frac{1}{s^\alpha + 1} Q(s) \\ \mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \} &= 2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} Q(s) \right\} \\ y(t) &= 2E_\alpha(-t^\alpha) - q(t) * t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-t^\alpha) \end{aligned}$$

o de manera equivalente,

$$y(t) = 2E_\alpha(-t^\alpha) - \int_0^t q(t-\tau) \frac{d}{d\tau} [\tau^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\tau^\alpha)] d\tau$$

Ejemplo 2.4.2. Considere la ecuación diferencial fraccionaria

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha = \lambda x(t) \tag{2.48}$$

con $0 < \alpha < 1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. De acuerdo a la teoría de ecuaciones integrales, considere la ecuación integral de Volterra asociada a la ecuación (2.48)

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \lambda x(\tau) d\tau. \tag{2.49}$$

Utilizando el método de las aproximaciones sucesivas, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \lambda x_0 d\tau \\
 &= x_0 + \frac{\lambda x_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\
 &= x_0 + \frac{\lambda x_0}{\Gamma(\alpha)} t^\alpha \beta(\alpha, 1) \\
 &= x_0 + x_0 \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}
 \end{aligned}$$

Continuando este proceso iterativo tenemos:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \lambda x_1(\tau) d\tau \\
 &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \lambda \left[x_0 + x_0 \frac{\lambda \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] d\tau \\
 &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \lambda x_0 d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{x_0 \lambda^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^\alpha d\tau \\
 &= x_0 + x_0 \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + x_0 \frac{(\lambda t^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha + 1)}
 \end{aligned}$$

$$x_3 = x_0 + x_0 \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + x_0 \frac{(\lambda t^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + x_0 \frac{(\lambda t^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha + 1)}.$$

y

$$x_m = x_0 \left(\sum_{k=0}^m \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \right)$$

Por lo tanto $x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha)$. En particular si $\alpha = 0.92$, $x_0 = 2$ y $\lambda = -3$, la solución a la ecuación diferencial (2.48) se muestra en la Figura 2.4.

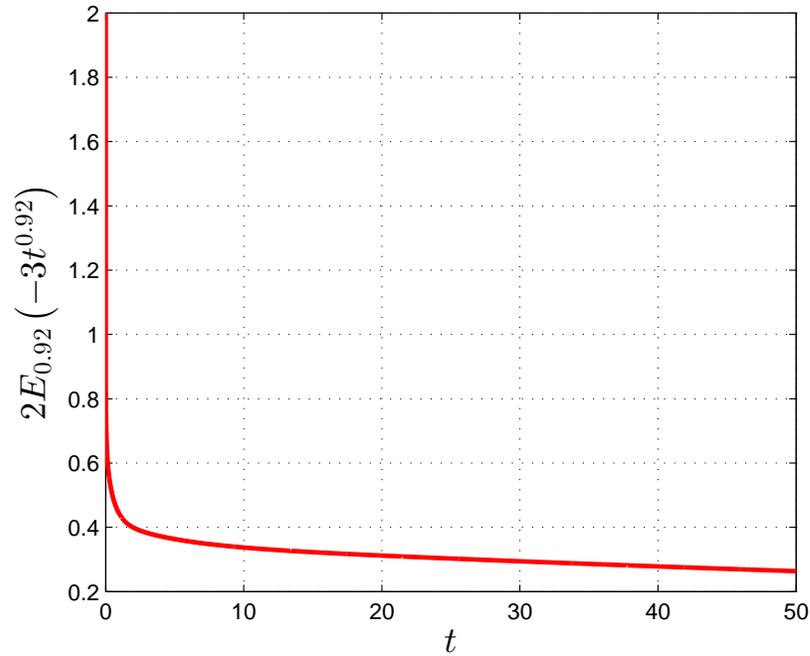


Figura 2.4: Solución $x(t) = 2E_{0.92}(-3t^{0.92})$ para $0 \leq t \leq 50$.

En teoría de control, una forma de estimar qué tan rápido convergen las soluciones de un sistema, puede determinarse mediante la noción de estabilidad exponencial que garantiza una tasa mínima de decaimiento [29]. Para sistemas de orden fraccionario, este concepto se generaliza a través de la estabilidad Mittag-Leffler.

Definición 2.1. ([39]) La solución de ${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x}(t) = f(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ se dice que es Mittag-Leffler estable si

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq [m(\mathbf{x}_0) E_\alpha(-\lambda t^\alpha)]^b \quad (2.50)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $b > 0$, y m es una función positiva y localmente Lipschitz con $m(0) = 0$.

Teorema 2.8. ([39]) Sea $\mathbf{x} = 0$ un punto de equilibrio del sistema ${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x}(t) = f(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ donde $\alpha \in (0, 1)$, $f : [t_0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua a pedazos en t y localmente Lipschitz en x en $[t_0, \infty) \times \Omega$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen $\mathbf{x} = 0$. Sea $V(t, \mathbf{x}(t)) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable y localmente Lipschitz con

respecto a \mathbf{x} , tal que:

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|^a \leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}\|^{ab} \quad (2.51)$$

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta V(t, \mathbf{x}(t)) \leq -\alpha_3 \|\mathbf{x}\|^{ab} \quad (2.52)$$

donde $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in D$, $\beta \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a, b$ son constantes positivas. Entonces $\mathbf{x} = 0$ es Mittag-Leffler estable.

Al realizar análisis de estabilidad, se proponen funciones candidatas de Lyapunov, por ejemplo $V = x^\top(t)Px(t)$, con P definida positiva, y cuya derivada está dada por:

$$\dot{V} = \dot{x}^\top Px + x^\top P\dot{x}$$

En el caso de la derivada fraccionaria, para derivar el producto de funciones, la fórmula de Leibniz para la derivada de Riemann-Liouville está dada por:

$${}_0^{RL} \mathcal{D}_t^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) {}_0^{RL} \mathcal{D}_t^{\alpha-k} g(t) \quad (2.53)$$

donde:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)}$$

Como podemos observar, aparece una serie infinita la cual no se sabe si tiene cota (lo mismo sucede para la derivada de Caputo). Para realizar análisis de estabilidad se han desarrollado algunos resultados que evitan el uso de la ecuación (2.53), y que en este trabajo serán utilizados.

Lema 2.4. ([17]) Sea $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ un vector de funciones diferenciables. Entonces, para todo $t \geq t_0$:

$$\frac{1}{2} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha (\mathbf{x}^\top(t)P\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{x}^\top(t)P {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x}(t) \quad (2.54)$$

donde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante, simétrica y definida positiva.

Ejemplo 2.4.3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias:

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha x_1(t) &= -x_1(t) - h(t)x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10} \\ {}^C\mathcal{D}_t^\alpha x_2(t) &= x_1(t) - x_2(t), \quad x_2(0) = x_{20} \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$, y $h(t)$ una función monótona decreciente, continuamente diferenciable tal que

$$0 \leq h(t) \leq M, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.56)$$

Sea $V(t, x) = x_1^2 + x_2^2 + h(t)x_2^2$. Por la condición (2.56), notemos que $x_1^2 + x_2^2 \leq V(t, x) \leq x_1^2 + (1 + M)x_2^2$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Luego, aplicando el Lema 2.4 se puede calcular la derivada de $V(t, x)$ a lo largo de la solución del sistema (2.55). En efecto,

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha V(t, x(t)) &\leq [-2x_1^2(t) - 2h(t)x_1(t)x_2(t)] + [(2 + 2h(t))x_1(t)x_2(t) - (2 + 2h(t))x_2^2(t)] \\ &= -2x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) - (2 + 2h(t))x_2^2(t) \\ &\leq -2x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) - 2x_2^2(t) \\ &= -\mathbf{x}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_P \mathbf{x}, \end{aligned}$$

con $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top$. Dado que $\mathbf{x}^\top P \mathbf{x}$ es definida positiva, se sigue que

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\|\mathbf{x}\|^2.$$

Por lo tanto, la solución cero del sistema (2.55) es Mittag-Leffler estable, lo que implica estabilidad asintótica.

CAPÍTULO 3

Observabilidad en sistemas fraccionarios

3.1. Observabilidad en sistemas lineales fraccionarios

Consideremos un caso más general de ecuaciones diferenciales que consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales dado por el siguiente sistema lineal conmensurado de orden fraccionario representado en su forma de espacio de estados de dimensión n :

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, x(0) = x_0 \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el estado y $y \in \mathbb{R}^p$ la salida del sistema. De acuerdo a la metodología presentada en el capítulo anterior, la solución de la ecuación de estado del sistema (3.1) es:

$$\mathbf{x}(t) = E_\alpha(At^\alpha)x_0 + [t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)B] * \mathbf{u}(t) \quad (3.2)$$

donde $*$ denota el operador convolución y $E_\alpha(At^\alpha) = \mathcal{L}^{-1}\{(s^\alpha I - A)^{-1} s^{\alpha-1}\}$.

En el artículo [47] se desarrolla la teoría sobre controlabilidad y observabilidad para sistemas fraccionarios lineales invariantes en el tiempo, donde se prueba que las condiciones

de observabilidad y controlabilidad son similares para el caso de sistemas lineales.

Teorema 3.1. El sistema (3.1) es observable en $[t_0, t_1]$ si y solo si

$$\mathcal{O}_{A,C} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

tiene rango n .

Teorema 3.2. El sistema (3.1) es controlable en $[t_0, t_1]$ si y solo si

$$\mathcal{C}_{A,B} := \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

tiene rango n .

De acuerdo a estos resultados, se puede establecer el siguiente principio de dualidad para sistemas fraccionarios.

Lema 3.1. El sistema

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (3.5)$$

es controlable, si y solo si

$$\begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = A^\top \mathbf{x} \\ y = B^\top \mathbf{x} \end{cases} \quad (3.6)$$

es observable.

Demostración. Si el sistema (3.5) es controlable entonces $\text{rank}[\mathcal{C}_{A,B}] = n$. Tomando la transpuesta de $\mathcal{C}_{A,B}$:

$$\mathcal{C}_{A,B}^\top = \begin{bmatrix} B^\top \\ B^\top A^\top \\ \vdots \\ B^\top A^{\top n-1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

es decir $\mathcal{C}_{A,B}^\top = \mathcal{O}_{A^\top, B^\top}$, la matriz de observabilidad del sistema (3.6). Además, dado que

$\text{rank} [C_{A,B}^T] = \text{rank} [C_{A,B}] = n$ entonces el sistema (3.6) es observable. Similarmente se puede demostrar que si el sistema (3.6) es observable, entonces el sistema (3.5) es controlable. ■

3.2. Observadores Mittag-Leffler

Considere los sistemas no lineales fraccionarios conmensurados con una salida descritos por

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.8)$$

donde $0 < \alpha < 1$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados; $y \in \mathbb{R}$ es la salida; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ la entrada de control; $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz en \mathbf{x} y uniformemente acotada en \mathbf{u} .

Considerando que $y \in \mathbb{R}$, entonces existen $n - 1$ variables desconocidas para este sistema. El problema a resolver consiste en diseñar un sistema dinámico fraccionario, llamado observador para el sistema (4.22), tal que el resto de las variables desconocidas pueda estimarse a través de la salida y del sistema original. Este observador tiene que satisfacer lo siguiente [76]:

1. Si $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ para $t_0 > 0$, entonces $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$, $\forall t \geq t_0$.
2. $\hat{\mathbf{x}}$ converge a \mathbf{x} para $t \rightarrow \infty$ suficientemente rápido, para toda condición inicial $\mathbf{x}(t_0)$ y $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$.

Definición 3.1. Sea un sistema dinámico fraccionario descrito por

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \hat{\mathbf{x}} = G(\hat{\mathbf{x}}, y, \mathbf{u}) \quad (3.9)$$

con $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ y $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable. Si existe una vecindad abierta $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ del origen con $\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{U}$ tal que

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq M [E_\alpha(-\hat{c}t^\alpha)]^d \quad (3.10)$$

donde M, \hat{c}, d son constantes positivas. Entonces el sistema (3.9) es llamado observador

Mittag-Leffler (local) para el sistema (4.22).

De la definición anterior, podemos hacer las siguientes observaciones:

Observación 3.2.1. De las propiedades de la función Mittag-Leffler, un observador Mittag-Leffler es un estimador asintótico, es decir,

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

Observación 3.2.2. Si la constante M depende de $\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$, entonces la desigualdad (3.10) se puede reescribir como:

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq M_1 \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\| [E_\alpha(-\hat{c}t^\alpha)]^d \quad (3.11)$$

donde M_1 es una constante positiva.

Observación 3.2.3. Si el conjunto abierto \mathcal{U} como todo el espacio \mathbb{R}^n , entonces (3.9) se llama observador Mittag-Leffler global.

Sea el sistema (3.9) escrito en la siguiente forma:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \hat{\mathbf{x}} = f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + g[y, h(\hat{\mathbf{x}})] \quad (3.12)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}$ es la salida del observador y

$$g[y, h(\hat{\mathbf{x}})] = 0 \quad \text{si} \quad h(\mathbf{x}) = h(\hat{\mathbf{x}}). \quad (3.13)$$

Basado en estas consideraciones, algunos resultados acerca de los observadores Mittag-Leffler pueden establecerse. De aquí en adelante, el error de estimación se define como $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$.

Teorema 3.3. Considere el sistema (3.12) tal que la función no lineal g satisface la condición (3.13). Si existe una función escalar $V(\mathbf{e}(t)) = V(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) > 0$ tal que $V(0) = 0$, y para todo $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda \|\mathbf{e}\|^\rho \leq V(\mathbf{e}(t)) \quad (3.14)$$

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V(\mathbf{e}(t)) \leq -\gamma V(\mathbf{e}(t)) \quad (3.15)$$

donde $\lambda > 0, \rho > 0, \gamma > 0$, entonces el sistema (3.12) es un observador Mittag-Leffler para el sistema (4.22) con $\hat{\mathbf{x}}_0$ arbitrario, y

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq K [E_\alpha(-\gamma t^\alpha)]^{1/\rho} \quad (3.16)$$

para todo $t \geq 0$, donde K es una constante positiva que depende de $\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$.

Demostración. De (3.15), existe una función $M(t) \geq 0$ tal que

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V(\mathbf{e}(t)) + \gamma V(\mathbf{e}(t)) + M(t) = 0 \quad (3.17)$$

De (4.26) con la condición inicial $V(\mathbf{e}_0)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{e}(t)) &= V(\mathbf{e}_0)E_\alpha(-\gamma t^\alpha) - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\gamma(t-\tau)^\alpha) M(\tau) d\tau \\ &= V(\mathbf{e}_0)E_\alpha(-\gamma t^\alpha) - M(t) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\gamma t^\alpha) \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $*$ es la convolución. Dado que $t^{\alpha-1}$ y $E_{\alpha,\alpha}(-\gamma t^\alpha)$ son funciones no negativas, entonces

$$V(\mathbf{e}(t)) \leq V(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)E_\alpha(-\gamma t^\alpha)$$

Finalmente, de (3.14), la norma del error $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ decrecerá asintóticamente y satisface

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \left[\frac{V(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)}{\lambda} \right]^{1/\rho} [E_\alpha(-\gamma t^\alpha)]^{1/\rho} \quad (3.19)$$

■

Corolario 3.1. Bajo las condiciones del Teorema (3.3), si la condición (3.14) es reemplazada por

$$\lambda_1 \|\mathbf{e}\|^2 \leq V(\mathbf{e}(t)) \leq \lambda_2 \|\mathbf{e}\|^2 \quad (3.20)$$

para todo $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, con λ_1, λ_2 números positivos, entonces

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\| [E_\alpha(-\gamma t^\alpha)]^{1/2} \quad (3.21)$$

para todo $t \geq 0$ y todo $\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. De forma similar al Teorema (3.3), de la condición (3.15), tenemos que:

$$V(\mathbf{e}(t)) \leq V(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) E_\alpha(-\gamma t^\alpha)$$

Entonces, usando la condición (3.20):

$$\lambda_1 \|\mathbf{e}\|^2 \leq V(\mathbf{e}(t)) \leq V(\mathbf{e}_0) E_\alpha(-\gamma t^\alpha) \leq \lambda_2 \|\mathbf{e}_0\|^2 E_\alpha(-\gamma t^\alpha)$$

La desigualdad (3.21) se sigue de las desigualdades anteriores, y la prueba está completa. ■

Finalmente, consideremos una forma explícita para la función candidata de Lyapunov para establecer una condición para el diseño del sistema (3.12). Para esto, proponemos

$$g[y, h(\hat{\mathbf{x}})] = \mathbf{K} [y - h(\hat{\mathbf{x}})] \quad (3.22)$$

El siguiente resultado muestra que (3.12) es un observador Mittag-Leffler.

Teorema 3.4. El sistema (3.12) con g que satisface (3.22) es un observador Mittag-Leffler para el sistema (3.8) si existe una matriz constante \mathbf{K} y una matriz definida positiva S tal que

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\top S (\nabla f - \mathbf{K} \nabla h) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \leq -\gamma \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2$$

para algún $\gamma > 0$, y $\nabla f, \nabla h$ los gradientes de f y h respectivamente. Además:

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}} \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\| \left[E_\alpha \left(-\frac{\gamma}{\lambda_{\max}(S)} t^\alpha \right) \right]^{1/2} \quad (3.23)$$

Demostración. Sea $V = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_S^2 = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\top S (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ una función candidata de Lyapunov. Por la desigualdad de Rayleigh-Ritz inequality, es claro que:

$$\lambda_{\min}(S) \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(S) \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \quad (3.24)$$

Consideremos ahora (3.8), (3.12) y (3.22). Entonces, usando el Lema (2.4), tenemos que

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V &\leq 2(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\top S [{}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} - {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \hat{\mathbf{x}}] \\ &= 2(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\top S \{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{K}h(\mathbf{x}) - [f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{K}h(\hat{\mathbf{x}})]\} \end{aligned}$$

Por otro lado, del Teorema del valor medio del basado en el teorema fundamental del cálculo integral [56] notemos que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{K}h(\mathbf{x}) - [f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{K}h(\hat{\mathbf{x}})] = \int_0^1 (\nabla f(\zeta) - \mathbf{K}\nabla h(\zeta)) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) ds$$

donde $\zeta = \hat{\mathbf{x}} + s(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$. Entonces:

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V &\leq 2 \int_0^1 (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\top S (\nabla f(\zeta) - \mathbf{K}\nabla h(\zeta)) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) ds \\ &\leq -2\gamma \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \int_0^1 ds \\ &\leq -\gamma \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Por otro lado, dado que $\gamma > 0$, el lado derecho de (3.24) implica que:

$$-\gamma \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq -\frac{\gamma}{\lambda_{\max}(S)} V(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \tag{3.26}$$

Entonces de (3.25) y (3.26), tenemos

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \leq -\frac{\gamma}{\lambda_{\max}(S)} V(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

Finalmente, usando el resultado del Corolario 3.1, es claro que

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}} \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\| \left[E_\alpha \left(-\frac{\gamma}{\lambda_{\max}(S)} t^\alpha \right) \right]^{1/2} \tag{3.27}$$

■

CAPÍTULO 4

Observador de tipo Luenberger generalizado

El regulador óptimo cuadrático (LQR) es una teoría bien conocida para el diseño de leyes óptimas de control para sistemas lineales. Para sistemas fraccionarios hay varios trabajos donde realizan generalizaciones de los resultados clásicos y se resuelve el problema de optimización, por ejemplo el LQR o aplicaciones en observadores y sincronización sistemas [12, 14, 27, 38, 51, 57, 75].

En este capítulo se propone un primer algoritmo de estimación de estados para una clase de sistemas dinámicos fraccionarios. Se utiliza el análisis de estabilidad para probar que este observador pertenece a la familia de observadores Mittag-Leffler. También se presenta una forma alterna de resolver el LQR para sistemas fraccionarios y su aplicación en la elección de las ganancias del estimador de estados propuesto.

La solución del problema del LQR para sistemas fraccionarios se realiza empleando multiplicadores de Lagrange, las ecuaciones de Euler-Lagrange de orden fraccionario y finalmente obteniendo la ecuación algebraica de Riccati ya conocida.

4.1. Regulador óptimo cuadrático fraccionario

Considere la planta descrita por el sistema lineal (3.1). El índice de desempeño a minimizar es:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \quad (4.1)$$

donde $R > 0$, $Q = Q^T > 0$ a lo largo de las trayectorias del sistema (3.1), es decir, minimizar (4.1) sujeto a (3.1) desde $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ (Figura 4.1), minimizando el índice de desempeño (4.1).

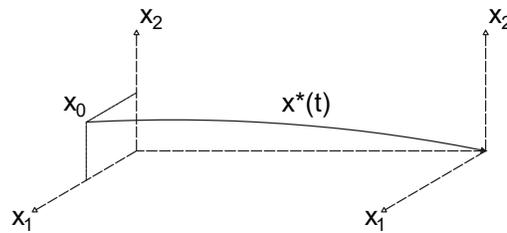


Figura 4.1: Trayectorias del sistema (3.1).

La solución al problema del LQR para sistemas lineales fraccionarios (3.1) se presenta en el siguiente resultado.

Teorema 4.1. Sea el sistema (3.1) controlable. La ley óptima de control de realimentación de estado fraccionaria que estabiliza el origen del sistema (3.1) y minimiza el índice de desempeño (4.1), está dada por:

$$\mathbf{u}^* = - (R^{-1} B^T L) \mathbf{x} \quad (4.2)$$

donde L es la solución de

$$A^T L + LA - LBR^{-1}B^T L + Q = 0 \quad (4.3)$$

Demostración. Dado (4.1), el índice de desempeño aumentado está dado por:

$$J_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} (\mathbf{x}^\top Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top R \mathbf{u}) + \lambda^\top (A \mathbf{x} + B \mathbf{u} - {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x}) \right] dt. \quad (4.4)$$

Sean los siguientes funcionales:

Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^\top Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top R \mathbf{u}) \quad (4.5)$$

Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^\top (A \mathbf{x} + B \mathbf{u}) \quad (4.6)$$

entonces (4.4) se redefine como:

$$J_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = \int_0^\infty f(\mathbf{v}, {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{v}; t) dt \quad (4.7)$$

donde $f(\mathbf{v}, {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{v}; t) = \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda; t) - \lambda^\top {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x}$, $\mathbf{v} = [\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda]^\top$.

Por otro lado, las ecuaciones de Euler-Lagrange para $f(\mathbf{v}, {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{v}; t)$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x}} \right) = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} - {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \lambda} \right) = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} - {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{u}} \right) = 0. \quad (4.10)$$

Después de algunos cálculos, las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10) se transforman en:

$$-{}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \lambda = Q \mathbf{x} + A^\top \lambda \quad (4.11)$$

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = A \mathbf{x} + B \mathbf{u} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{u} = -R^{-1} B^\top \lambda. \quad (4.13)$$

Combinando (4.11), (4.12) y (4.13), se obtiene la ecuación diferencial fraccionaria vectorial

$$\begin{bmatrix} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^\top \\ -Q & -A^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

con condiciones de frontera:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.15)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0. \quad (4.16)$$

Basado en la ecuación (4.13), una realimentación de estado se propone, tal que el estado \mathbf{x} y el coestado λ estén relacionados por una matriz L :

$$\lambda = L\mathbf{x}. \quad (4.17)$$

De las ecuaciones (4.14) y (4.17) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^\top \\ -Q & -A^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (4.18)$$

Multiplicando por la izquierda a (4.18) por $\begin{bmatrix} L & -I \end{bmatrix}$, tenemos que:

$$0 = (A^\top L + LA - LBR^{-1}B^\top L + Q) \mathbf{x} \quad (4.19)$$

la cual es válida para toda solución de (3.1). Por lo tanto, se obtiene la ecuación algebraica de Riccati dada por:

$$A^\top L + LA - LBR^{-1}B^\top L + Q = 0 \quad (4.20)$$

y la ley de control óptima:

$$\mathbf{u}^* = -(R^{-1}B^\top L) \mathbf{x} \quad (4.21)$$

con L solución de (4.20). ■

4.2. Estimador Mittag-Leffler de tipo Luenberger

Considere sistemas no lineales fraccionarios conmmesurados con una salida descritos por:

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.22)$$

donde $0 < \alpha < 1$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados; $y \in \mathbb{R}$ la salida; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ la entrada de control; $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función localmente Lipschitz en \mathbf{x} y uniformemente acotada en \mathbf{u} .

Dado que el sistema (4.22) solo tiene una salida, entonces hay $n - 1$ variables de estado cuya medición no es directa y por lo tanto no están disponibles. Reescribiendo el sistema (4.22) en la siguiente forma:

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = A\mathbf{x} + \Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.23)$$

donde $\Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ es un vector no lineal que satisface la condición de Lipschitz:

$$\|\Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\| \leq \varphi \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \quad (4.24)$$

con el par (A, C) observable y φ la constante de Lipschitz.

Consideremos ahora la siguiente ecuación diferencial fraccionaria dada por

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \hat{\mathbf{x}} = A\hat{\mathbf{x}} + \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{K}_i (y - C\hat{\mathbf{x}})^{2i-1} \quad (4.25)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$ que se propone como estimador de estados del sistema (6.1).

El primer resultado que se mostrará, está basado en la demostración de que el sistema

(4.25) es un estimador Mittag-Leffler, además del cálculo de una cota para el error de estimación $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$. Antes de establecer este resultado, consideremos el siguiente lema y algunas de sus implicaciones.

Lema 4.1. ([62]) Sea $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, estable y $\gamma > 0$, entonces existe una matriz P simétrica, positiva definida tal que

$$\hat{A}^\top P + P\hat{A} + \gamma^2 PP + I < 0 \quad (4.26)$$

si y solo si existe otra matriz \hat{P} simétrica, positiva definida tal que

$$\hat{A}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}^\top + \gamma^2\hat{P}\hat{P} + I < 0. \quad (4.27)$$

De este lema, la desigualdad algebraica matricial de Riccati-Lurie (4.26) puede ser representada en la siguiente desigualdad lineal matricial (LMI):

$$\begin{bmatrix} -\hat{A}^\top P - P\hat{A} - I & \gamma P \\ \gamma P & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.28)$$

o equivalentemente, para algún $\varepsilon > 0$:

$$\hat{A}^\top P + P\hat{A} + \gamma^2 PP + I + \varepsilon I = 0. \quad (4.29)$$

Por otro lado, sea $F = \Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$, y considerando la solución P de (4.28), la constante de Lipschitz φ y el error de estimación \mathbf{e} , entonces la siguiente desigualdad se satisface (ver [62] para demostración):

$$2\mathbf{e}^\top PF \leq \varphi^2 \mathbf{e}^\top PPe + \mathbf{e}^\top \mathbf{e}. \quad (4.30)$$

Teorema 4.2. Dado el sistema (6.1), con el par (A, C) observable. Si $\bar{A} = A - \mathbf{K}_1 C$ es una matriz estable y $M_i = P^{i-1} \mathbf{K}_i C$, $2 \leq i \leq m$ es una matriz semi definida positiva, entonces la ecuación diferencial vectorial fraccionaria (4.25) es un estimador Mittag-Leffler estable para

el sistema (6.1), y además

$$\|\mathbf{e}\| \leq \frac{\mathbf{e}^\top(0)P\mathbf{e}(0)}{\lambda_{\min}(P)} E_\alpha \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} t^\alpha \right). \quad (4.31)$$

Demostración. Sea $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ el error de estimación. Dados los sistemas (6.1) y (4.25), la dinámica del error de estimación, con el operador de Caputo está dada por:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{e} = \bar{A}\mathbf{e} + F - \sum_{i=2}^m \mathbf{K}_i (C\mathbf{e})^{2i-1} \quad (4.32)$$

donde $\bar{A} = A - \mathbf{K}_1 C$. Dado que \bar{A} es estable y $\varphi > 0$, entonces por el **Lemma 4.1** existe $P > 0$. Sea $V = \|\mathbf{e}\|_P^2 = \mathbf{e}^\top P \mathbf{e}$ una función candidata de Lyapunov. Por la desigualdad de Rayleigh-Ritz [70], es claro que:

$$\lambda_{\min}(P) \|\mathbf{e}\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P) \|\mathbf{e}\|^2. \quad (4.33)$$

Luego, por el **Lema 2.4**, la ecuación (4.29) y la desigualdad (4.30) se sigue que:

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V &\leq 2\mathbf{e}^\top P {}_0^C \mathcal{D}_t \mathbf{e} \\ &= 2\mathbf{e}^\top P \left[\bar{A}\mathbf{e} + F - \sum_{i=2}^m \mathbf{K}_i (C\mathbf{e})^{2i-1} \right] \\ &\leq \mathbf{e}^\top [P\bar{A} + \bar{A}^\top P + \varphi^2 P P + I] \mathbf{e} - 2 \sum_{i=2}^m (C\mathbf{e})^{2i-2} \mathbf{e}^\top P \mathbf{K}_i C \mathbf{e} \\ &\leq -\varepsilon \|\mathbf{e}\|^2 - \sum_{i=2}^m (C\mathbf{e})^{2i-2} \mathbf{e}^\top (2P^{2-i} M_i) \mathbf{e} \end{aligned}$$

donde $M_i = P^{i-1} \mathbf{K}_i C$. Por hipótesis $M_i \geq 0$ entonces:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V \leq -\varepsilon \|\mathbf{e}\|^2 \quad (4.34)$$

Finalmente, por el **Teorema 2.8**, de (4.33) y (4.34) se sigue que $\mathbf{e} = 0$ es Mittag-Leffler

estable. Por otro lado, de (4.34) y la desigualdad de Rayleigh-Ritz:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V \leq -\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} V. \quad (4.35)$$

Sea $n(t)$ una función no negativa tal que su transformada de Laplace exista, entonces:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V + n(t) = -\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} V. \quad (4.36)$$

Aplicando la transformada de Laplace a (4.36), no es difícil obtener:

$$V(s) = V(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)}} - \frac{1}{s^\alpha + \frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)}} N(s). \quad (4.37)$$

Luego, por la transformada inversa de Laplace a (4.37) se obtiene:

$$V(t) = V(0) E_\alpha \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} t^\alpha \right) - \bar{V} \quad (4.38)$$

con $\bar{V} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} t^\alpha \right) * n(t)$ donde $*$ denota la convolución de funciones. Dado que \bar{V} es no negativa, entonces:

$$V(t) \leq V(0) E_\alpha \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} t^\alpha \right). \quad (4.39)$$

Finalmente de la expresión (4.33), la norma del error de estimación está acotada:

$$\|\mathbf{e}\| \leq \frac{\mathbf{e}^\top(0) P \mathbf{e}(0)}{\lambda_{\min}(P)} E_\alpha \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} t^\alpha \right). \quad (4.40)$$

■

Nota 4.2.1. Sea $f_b = \frac{\mathbf{e}^\top(0) P \mathbf{e}(0)}{\lambda_{\min}(P)} E_\alpha \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} t^\alpha \right)$. Por el Teorema 4.6 ([15]), $\lim_{t \rightarrow \infty} f_b = 0$, no es difícil ver que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\| = 0$.

4.3. Cálculo de las ganancias del estimador

A continuación se da una metodología para determinar los valores de las ganancias \mathbf{K}_i del estimador (4.25):

1. Calcular la constante de Lipschitz φ del vector $\Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Dado que el par (A, C) es observable, entonces el par (A^\top, C^\top) es controlable. De acuerdo al **Lema 3.1**, considere el siguiente sistema

$$\Sigma_{\mathbf{K}_1} = \begin{cases} \mathcal{D}_t^\alpha \xi \\ \xi \end{cases} = A^\top \xi + C^\top u \quad (4.41)$$

que es controlable y cuyo origen es estabilizable por la ley de control $u = -\hat{K}\xi$, donde $\hat{K} = \mathbf{K}_1^\top$.

2. Para determinar \mathbf{K}_1 considere el algoritmo del regulador óptimo cuadrático fraccionario (FLQR) de la section 4.1.

Note que $\bar{A} = A - \mathbf{K}_1 C$ es una matriz estable y $\varphi > 0$, por lo que se puede satisfacer el **Lema 4.1**.

3. Resolver la desigualdad matricial lineal (LMI) (4.28) para obtener P .

Para $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^n$, $2 \leq i \leq m$, considere que $M_i = P^{i-1} \mathbf{K}_i C \geq 0$, entonces $n - 1$ valores propios de M_i son ceros y

$$p_{1j} K_{i1} + p_{2j} K_{i2} + \dots + p_{jj} K_{ij} + \dots + p_{nj} K_{in} > 0. \quad (4.42)$$

4. Para calcular $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^n$ considerar los siguientes dos casos.

a) Si n es par, tomar parejas de la desigualdad (4.42) y considere cada una de estas

positiva, es decir:

$$\left. \begin{aligned} p_{1j}K_{i1} + p_{2j}K_{i2} &> 0 \\ p_{3j}K_{i3} + p_{4j}K_{i4} &> 0 \\ &\vdots \\ p_{(n-1)j}K_{(n-1)i} + p_{nj}K_{in} &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Cada una de las desigualdades anteriores, determina un semi plano para elegir las entradas del vector $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^n$.

b) Si n es impar, sea $p_{1j}K_{i1} = \varphi$, entonces

$$K_{i1} = \frac{\varphi}{p_{1j}} \quad (4.44)$$

por lo que la desigualdad (4.42) se reduce a:

$$p_{2j}K_{i2} + \dots + p_{jj}K_{ij} + \dots + p_{jn}K_{in} + \varphi > 0. \quad (4.45)$$

Luego, similar al caso en que n es par, considere las siguientes desigualdades:

$$\left. \begin{aligned} p_{2j}K_{i2} + p_{3j}K_{i3} &> 0 \\ p_{4j}K_{i4} + p_{5j}K_{i5} &> 0 \\ &\vdots \\ p_{(n-1)j}K_{(n-1)i} + p_{nj}K_{in} + \varphi &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

y calcule el resto de los valores, tal que (4.45) se satisfice.

Nota 4.3.1. Las desigualdades (4.43) y (4.46) determinan semi planos donde cada punto determina los valores: $(K_{i1}, K_{i2}), \dots, (K_{(n-1)i}, K_{in})$. Considerando algunas restricciones, regiones más pequeñas pueden determinarse para elegir las entradas del vector \mathbf{K}_i a través de un problema de programación lineal.

4.4. Simulaciones numéricas

El observador propuesto se utiliza para estimar los estados en dos sistemas diferentes. En el primer ejemplo, un sistema fraccionario caótico es considerado. Es bien sabido que las trayectorias de estos sistemas son acotadas, por lo que en el segundo ejemplo, un sistema que no es caótico se utiliza para ilustrar la validez de la metodología propuesta y mostrar que el observador puede ser utilizado en una clase más amplia de sistemas fraccionarios.

4.4.1. Sistema Rössler

El sistema fraccionario de Rössler dado por las siguientes ecuaciones diferenciales fraccionarias [36, 82]:

$$\Sigma_{\text{R}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_1 = -(x_2 + x_3) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_2 = x_1 + ax_2 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_3 = b + x_3(x_1 - c) \\ y_{\text{R}} = x_1 \end{cases} \quad (4.47)$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\top$, $a = 0.5, b = 0.2, c = 5.7$, $\mathbf{x}(0) = [0.5, 1.5, 0.1]^\top$ y $\alpha = 0.935$ para comportamiento caótico. En este ejemplo, considere el conjunto convexo:

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| \leq a_1, |x_2| \leq a_2, |x_3| \leq a_3\}$$

con $a_1 = 13.4607, a_2 = 8.3017, a_3 = 48.122$ donde las trayectorias del sistema Rössler (4.47) están acotadas. Ahora se reescribe el sistema (4.47):

$$\Sigma_{\text{R}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = A_{\text{R}}\mathbf{x} + \Upsilon_{\text{R}}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_{\text{R}} = C_{\text{R}}\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.48)$$

donde:

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \Upsilon_R(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + x_3x_1 \end{bmatrix}, C_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que el vector $\Upsilon_R(\mathbf{x})$ en un conjunto compacto de \mathbb{R}^3 es Lipschitz cuya constante de Lipschitz φ se calcula como sigue. El Jacobiano para el vector $\Upsilon_R(\mathbf{x})$ está dado por:

$$\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial \mathbf{x}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

Utilizando $\|\cdot\|_\infty$ para vectores en \mathbb{R}^3 , entonces

$$\left\| \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mathbf{x}} \right\|_\infty = \text{máx} \{|x_1| + |x_3|\}.$$

Por otro lado, todos los puntos en W satisfacen:

$$|x_1| + |x_3| \leq a_1 + a_3.$$

Por lo tanto,

$$\left\| \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mathbf{x}} \right\|_\infty \leq a_1 + a_3.$$

Una constante de Lipschitz para $\Upsilon_R(\mathbf{x})$ puede tomarse como $\varphi = a_1 + a_3 = 61.5827$. Dado que el par (A_R, C_R) es observable, con $\text{rank}[\mathcal{O}_{A_R, C_R}] = 3$, de acuerdo al **Teorema 4.2**, el observador Mittag-Leffler para el sistema (4.48) con $m = 2$ está dado por:

$$\Sigma_{\hat{R}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{\mathbf{x}} = A_R \hat{\mathbf{x}} + \Upsilon_R(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}_1 C_R (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}_2 [C_R (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})]^3 \\ y_{\hat{R}} = \hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (4.49)$$

donde

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \\ K_{23} \end{bmatrix}$$

o explícitamente:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{R}}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_1 = -(\hat{x}_2 + \hat{x}_3) + K_{11}(x_1 - \hat{x}_1) + K_{21}(x_1 - \hat{x}_1)^3 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_2 = \hat{x}_1 + a\hat{x}_2 + K_{12}(x_1 - \hat{x}_1) + K_{22}(x_1 - \hat{x}_1)^3 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_3 = b + \hat{x}_3(\hat{x}_1 - c) + K_{13}(x_1 - \hat{x}_1) + K_{23}(x_1 - \hat{x}_1)^3 \\ y_{\hat{\mathbf{R}}} = \hat{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (4.50)$$

Cálculo de las ganancias del estimator

De acuerdo a la sección 4.3 los valores para $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ se calculan como sigue. Dado que el par $(A_{\mathbf{R}}, C_{\mathbf{R}})$ es observable, por el **Lema 3.1**, el par $(A_{\mathbf{R}}^T, C_{\mathbf{R}}^T)$ es controlable con un sistema asociado ${}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \xi = A_{\mathbf{R}}^T \xi + C_{\mathbf{R}}^T u$ y $u = -\hat{K}\xi$ como control por realimentación, donde $\hat{K} = \mathbf{K}_1^T$. Del algoritmo FLQR (section 4.1):

$$\hat{K} = R_{\mathbf{R}}^{-1} C_{\mathbf{R}} L_{\mathbf{R}} \quad (4.51)$$

tal que $L_{\mathbf{R}}$ satisface la ecuación algebraica de Riccati:

$$A_{\mathbf{R}} L_{\mathbf{R}} + L_{\mathbf{R}} A_{\mathbf{R}}^T - L_{\mathbf{R}} C_{\mathbf{R}}^T R_{\mathbf{R}}^{-1} C_{\mathbf{R}} L_{\mathbf{R}} + Q_{\mathbf{R}} = 0. \quad (4.52)$$

Considerando $Q_{\mathbf{R}} = \varphi I_{3 \times 3}, R_{\mathbf{R}} = 1$, la solución de la ecuación (4.52) es:

$$L_{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 9.3438 & -12.5560 & -0.3056 \\ -12.5560 & 121.1828 & -0.7966 \\ -0.3056 & -0.7966 & 5.3938 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Entonces $\hat{K} = \begin{bmatrix} 9.3438 & -12.5560 & -0.3056 \end{bmatrix}$ por lo que:

$$\mathbf{K}_1 = \hat{K}^\top = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.3438 \\ -12.5560 \\ -0.3056 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Note que $\bar{A}_R = A_R - \mathbf{K}_1 C_R$ es una matriz estable dado que $\sigma_{\bar{A}_R} = \{-7.4703, -5.9346, -1.1388\}$, además $\varphi > 0$, entonces resolviendo (4.28):

$$P_R = \begin{bmatrix} 1.7423 & -1.6657 & 0.4481 \\ -1.6657 & 19.8555 & 0.9616 \\ 0.4481 & 0.9616 & 3.9575 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

con $\sigma_{P_R} = \{1.4736, 4.0220, 20.0597\}$. De acuerdo al resultado principal, $M_2 = P_R \mathbf{K}_2 C_R$ es una matriz semi definida positiva cuyos valores propios son

$$\sigma_{M_2} = \{0, 0, 1.7423K_{21} - 1.6657K_{22} + 0.4481K_{23}\}.$$

entonces K_{21}, K_{22}, K_{23} se eligen tal que

$$1.7423K_{21} - 1.6657K_{22} + 0.4481K_{23} > 0. \quad (4.56)$$

Dado que $\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^3$, sea $\varphi = 1.7423K_{21}$ entonces $K_{21} = 35.3465$. El resto de los valores propios \mathbf{K}_2 se eligen tal que:

$$-1.6657K_{22} + 0.4481K_{23} > -\varphi. \quad (4.57)$$

Para reducir el semiplano determinado por (4.57), K_{22} y K_{23} se eligen tales que se minimice $K_{21} + K_{22} + K_{23}$ sujeto a:

$$\left. \begin{aligned} -\varphi &\leq K_{22} \leq \varphi \\ -\varphi &\leq K_{23} \leq \varphi \\ -\varphi &< -1.6657K_{22} + 0.4481K_{23} \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

De esta forma, las restricciones determinan una región \mathcal{R} (Figura 4.2) donde cada punto representa una pareja ordenada (K_{22}, K_{23}) . Luego, la solución al problema propuesto es $K_{22} = -61.5827$, $K_{23} = -61.5827$, por lo que:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \\ K_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.3465 \\ -61.5827 \\ -61.5827 \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

El vector de condiciones iniciales para el estimador (4.50) está dado por $\hat{\mathbf{x}}(0) = [3, 2, 1]^\top$, entonces $\mathbf{e}(0) = [-2.5, -0.5, -0.9]^\top$. Además la norma del error de estimación está acotada por una función Mittag-Leffler f_b , esto es, $\|\mathbf{e}\| \leq f_b$ donde:

$$f_b = 12.0630E_{0.935}(-0.2493t^{0.935}) \quad (4.60)$$

con $\varepsilon = 5$.

Este comportamiento es ilustrado en la Figura 4.3, donde la línea punteada representa a la función (4.60) y la norma del error $\|\mathbf{e}\|$ se ilustra con línea continua. La función f_b no es única dado que otros valores de $\varepsilon > 0$ de acuerdo a la tasa de convergencia deseada.

Por otro lado, la Figura 4.4 muestra la convergencia del error al origen como plano de fase. Las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7 representan los estados estimados \hat{x}_1 , \hat{x}_2 and \hat{x}_3 con líneas punteadas en comparación con los estados reales (líneas continuas), respectivamente.

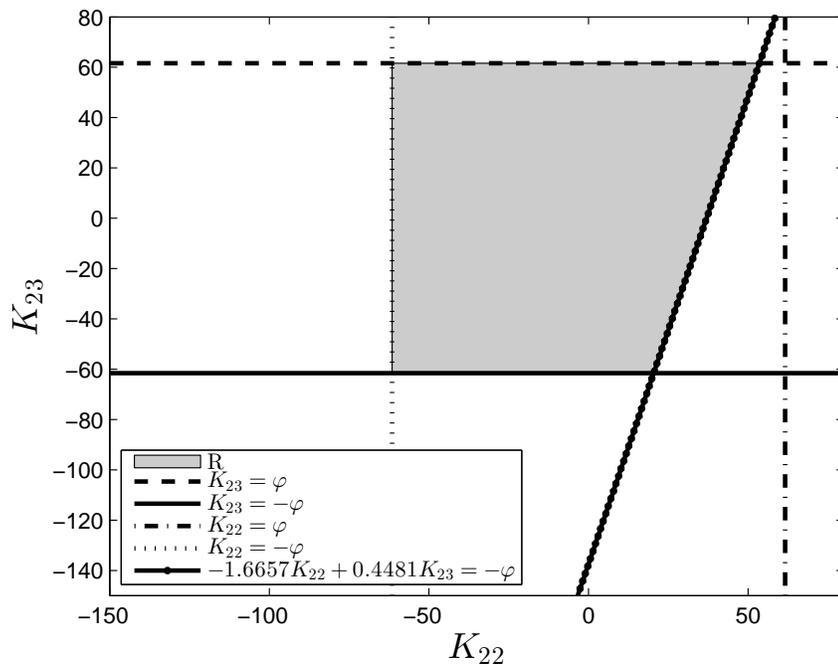


Figura 4.2: Región \mathcal{R} para elegir K_{22}, K_{23} .

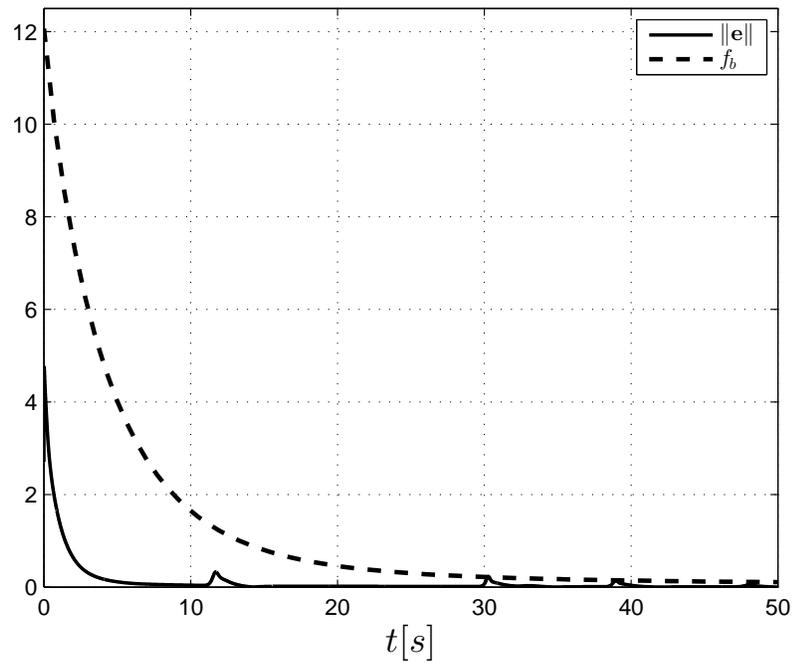


Figura 4.3: Función de acotamiento vs norma del error: $\|e\| \leq f_b$.

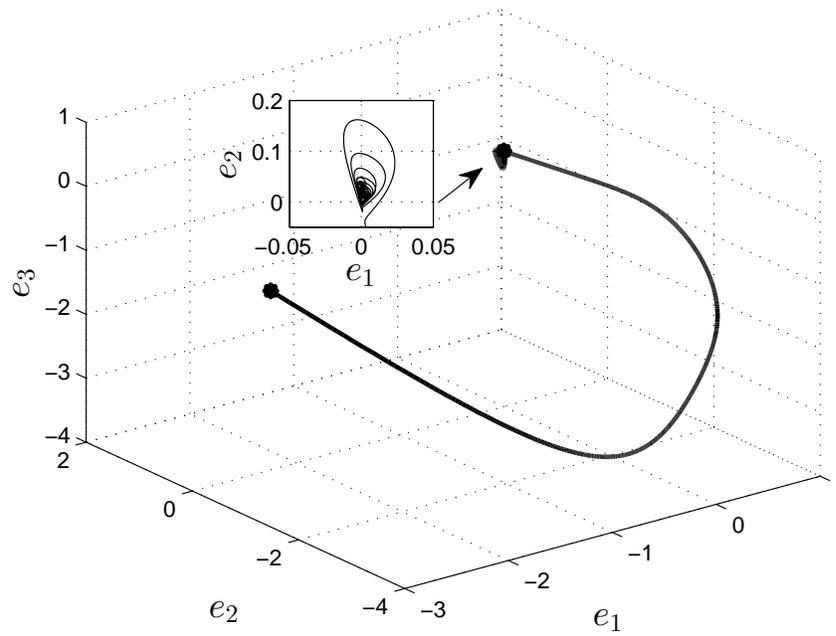
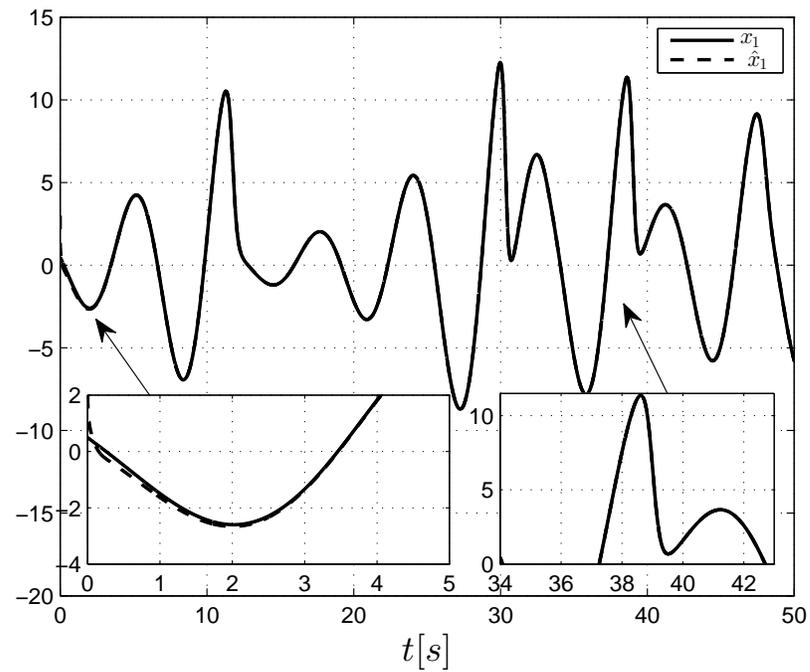


Figura 4.4: Convergencia del error al origen.

Figura 4.5: x_1 vs \hat{x}_1 para el sistema Rössler.

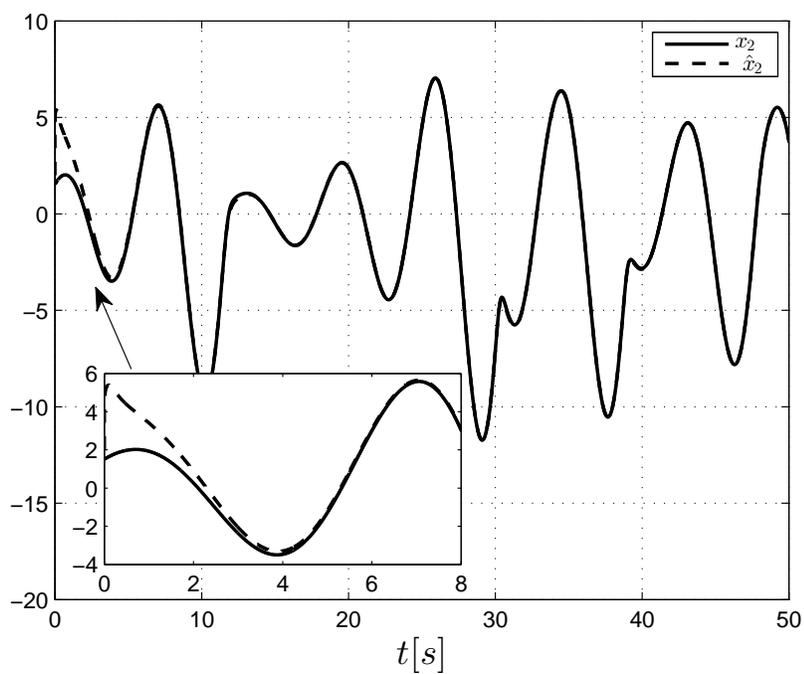


Figura 4.6: x_2 vs \hat{x}_2 para el sistema Rössler.

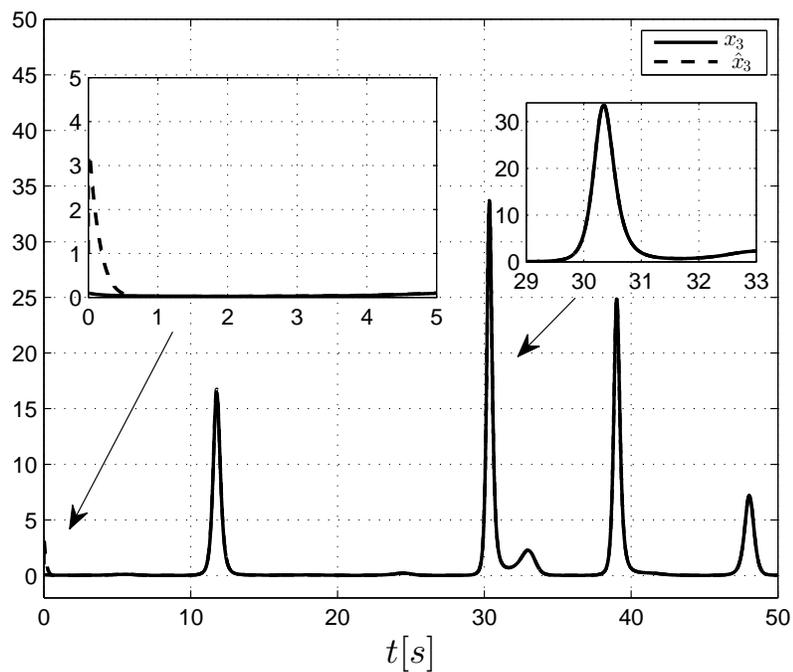


Figura 4.7: x_3 vs \hat{x}_3 para el sistema Rössler.

4.4.2. Péndulo simple de orden fraccionario

Un péndulo es una masa suspendida desde un pivote (sin fricción) con una cuerda o barra de masa despreciable para que pueda balancearse libremente (Figura 4.8). Este sistema ha sido estudiado extensamente a lo largo de los años, por ejemplo en [22, 35].

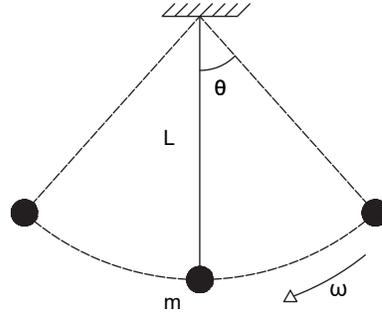


Figura 4.8: Péndulo simple.

La ecuación diferencial que describe a un péndulo simple es bien conocida y puede generalizarse utilizando operadores del cálculo fraccionario. El modelo matemático de un péndulo simple de orden fraccionario está dado por:

$$\Sigma_P = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_1 = x_2 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 \\ y_P = x_1 \end{cases} \quad (4.61)$$

donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $L = 1 \text{ m}$, $\alpha = 0.98$ y $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^\top = [\theta \ \omega]^\top$. Físicamente, θ es el ángulo medido a partir de la vertical y ω la velocidad angular.

El sistema (4.61) puede escribirse en la forma (6.1) como sigue:

$$\Sigma_P = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t \mathbf{x} = A_P \mathbf{x} + \Upsilon_P(\mathbf{x}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_P = C_P \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.62)$$

donde:

$$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Upsilon_P(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{bmatrix}, C_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

El vector $\Upsilon_P(\mathbf{x})$ es Lipschitz con $\varphi = \frac{g}{L}$ y el par (A_P, C_P) es observable. Para $m = 3$ el observador Mittag-Leffler (4.25) para el péndulo simple está dado por:

$$\Sigma_{\hat{p}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{\mathbf{x}} = A_P \hat{\mathbf{x}} + \Upsilon_P(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}_1 C_P (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\ \quad + \mathbf{K}_2 [C_P (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})]^3 + \mathbf{K}_3 [C_P (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})]^5 \\ y_{\hat{p}} = \hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (4.63)$$

donde

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} K_{31} \\ K_{32} \end{bmatrix}.$$

De forma explícita:

$$\Sigma_{\hat{p}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_1 = \hat{x}_2 + K_{11} (x_1 - \hat{x}_1) + K_{21} (x_1 - \hat{x}_1)^3 \\ \quad + K_{31} (x_1 - \hat{x}_1)^5 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin \hat{x}_1 + K_{12} (x_1 - \hat{x}_1) \\ \quad + K_{22} (x_1 - \hat{x}_1)^3 + K_{32} (x_1 - \hat{x}_1)^5 \\ y_{\hat{p}} = \hat{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (4.64)$$

Cálculo de las ganancias del estimador

\mathbf{K}_1 se calcula a partir del algoritmo FLQR de la sección 4.1 de la misma forma que el ejemplo anterior dado que el par (A_P, C_P) es observable. Resolviendo la ecuación algebraica de Riccati:

$$A_P L_P + L_P A_P^T - L_P C_P^T R_P^{-1} C_P L_P + Q_P = 0 \quad (4.65)$$

con $Q_P = \varphi I_{2 \times 2}$, $R_P = 1$. La solución de la ecuación (4.65) es:

$$L_P = \begin{bmatrix} 4.0076 & 3.1305 \\ 3.1305 & 12.5458 \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

entonces $\hat{K} = R_P^{-1} C_P L_P = \begin{bmatrix} 4.0076 & 3.1305 \end{bmatrix}$ por lo que

$$\mathbf{K}_1 = \hat{K}^\top = \begin{bmatrix} 4.0076 \\ 3.1305 \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Por otro lado, dando que $\bar{A}_P = A_P - \mathbf{K}_1 C_P$ es una matriz estable con $\sigma_{\bar{A}_P} = \{-2.9444, -1.0632\}$, la solución de (4.28) para este caso es:

$$P_P = \begin{bmatrix} 2.7733 & -2.5463 \\ -2.5463 & 4.1960 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

con $\sigma_{P_P} = \{0.8409, 6.1284\}$. De acuerdo a la metodología propuesta, \mathbf{K}_2 y \mathbf{K}_3 se eligen, tal que $M_2 = P_P \mathbf{K}_2 C_P \geq 0$ y $M_3 = P_P^2 \mathbf{K}_3 C_P \geq 0$. Note que

$$\begin{aligned} \sigma_{M_2} &= \{0, 2.7733K_{21} - 2.5463K_{22}\}, \\ \sigma_{M_3} &= \{0, 14.1745K_{31} - 17.7455K_{32}\}, \end{aligned}$$

entonces \mathbf{K}_2 y \mathbf{K}_3 se eligen de forma que:

$$2.7733K_{21} - 2.5463K_{22} > 0 \quad (4.69)$$

$$14.1745K_{31} - 17.7455K_{32} > 0. \quad (4.70)$$

Ahora para reducir los semiplanos definidos por (4.69), (4.70) se proponen dos problemas.

El primero consiste en maximizar $K_{21} + K_{22}$ sujeto a las restricciones:

$$\left. \begin{aligned} 1 \leq K_{21} \leq \frac{\varphi}{2} \\ 1 \leq K_{22} \leq \frac{\varphi}{2} \\ -2.7733K_{21} + 2.5463K_{22} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

cuya solución es $K_{21} = 4.905$, $K_{22} = 4.905$. El segundo problema consiste en maximizar $K_{31} + K_{32}$ sujeto a:

$$\left. \begin{aligned} 1 \leq K_{31} \leq 5 \\ 1 \leq K_{32} \leq \frac{\varphi}{4} \\ -14.1745K_{31} + 17.7455K_{32} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

cuya solución es $K_{31} = 5$, $K_{32} = 2.4525$. En ambos problemas, las restricciones determinan regiones más pequeñas donde los valores de (K_{21}, K_{22}) y (K_{31}, K_{32}) pueden elegirse (Figuras 4.9 y 4.10).

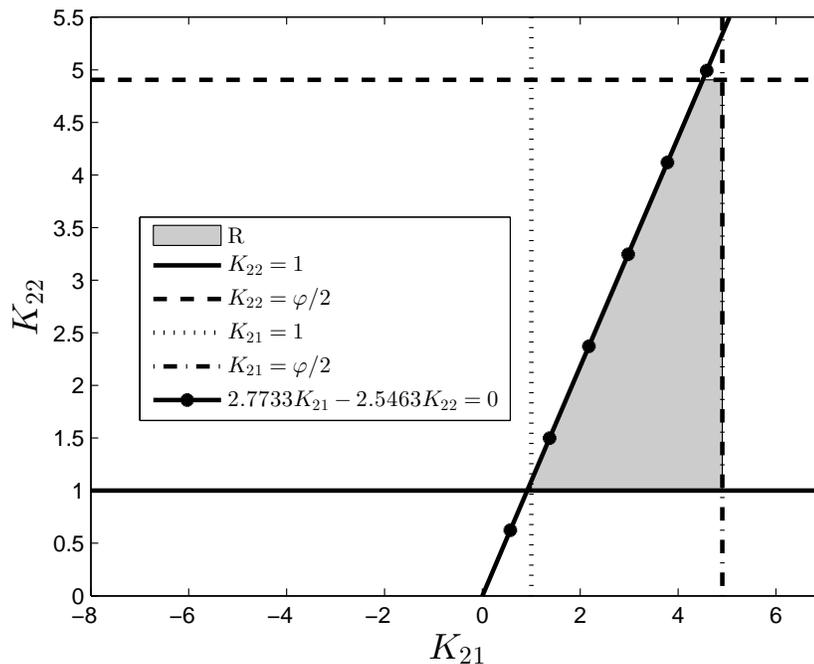


Figura 4.9: Región \mathcal{R} para elegir K_{21}, K_{22} .

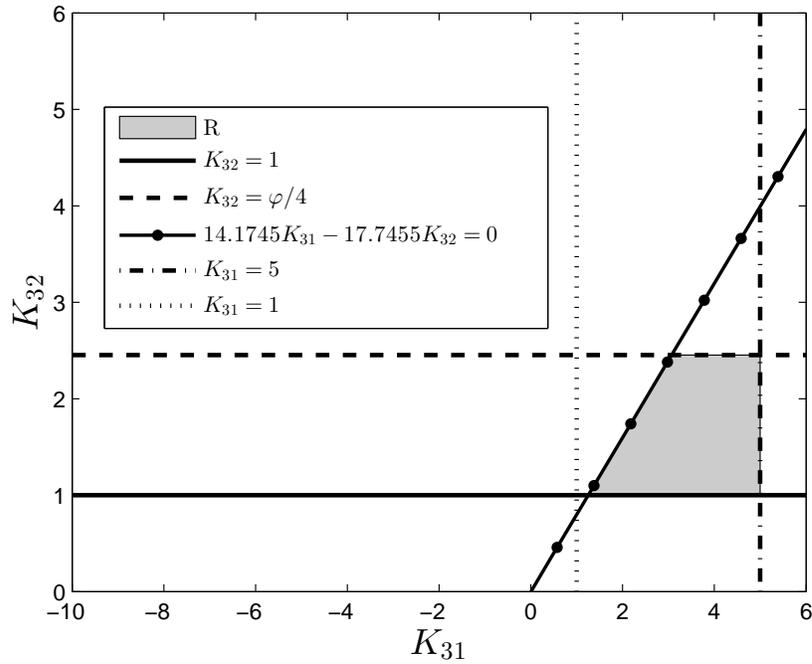


Figura 4.10: Región \mathcal{R} para elegir K_{31}, K_{32} .

En resumen, de acuerdo a la discusión anterior:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.905 \\ 4.905 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} K_{31} \\ K_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2.4525 \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Los vectores de condiciones iniciales para el péndulo simple (4.61) y el estimador (4.64) están dados por $\mathbf{x}(0) = [\pi/2, 0]^\top$, $\hat{\mathbf{x}}(0) = [\pi, 0.1]^\top$, respectivamente, por lo que $\mathbf{e}(0) = [-\pi/2, -0.1]^\top$. La Figura 4.11 muestra que $\|\mathbf{e}\| \leq f_b$ donde

$$f_b = 7.2365E_{0.98}(-1.6317t^{0.98}) \quad (4.75)$$

con $\varepsilon = 10$. Los resultados de la estimación de x_1 y x_2 se muestran en las Figuras 4.12 y 4.13, respectivamente. Las líneas continuas representan a los estados originales, mientras que los

valores estimados \hat{x}_1 , \hat{x}_2 se representan mediante líneas punteadas.

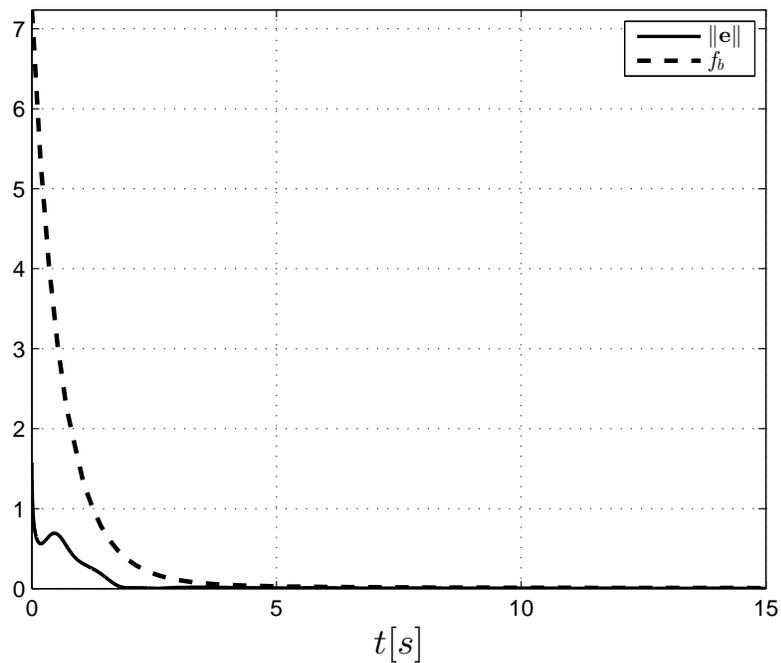


Figura 4.11: Función de acotamiento vs norma del error: $\|e\| \leq f_b$.

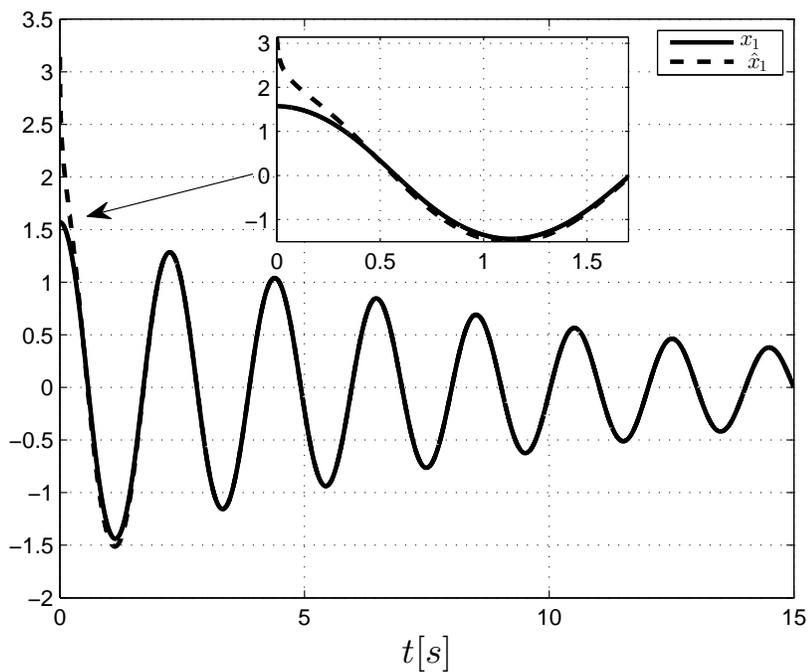


Figura 4.12: x_1 vs \hat{x}_1 para el péndulo simple.

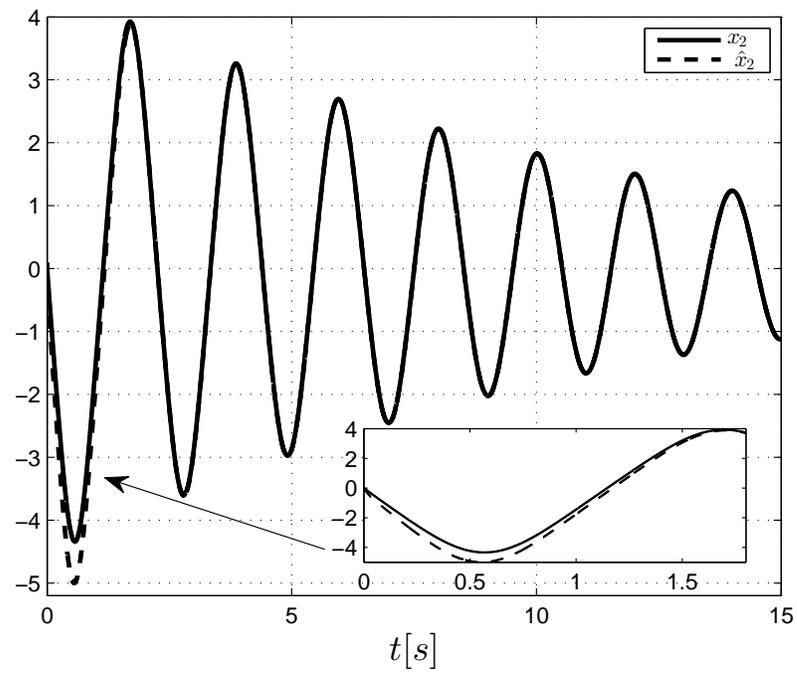


Figura 4.13: x_2 vs \hat{x}_2 para el péndulo simple.

CAPÍTULO 5

Observador de Alta Ganancia

Los observadores de alta ganancia introducidos por Gauthier [10, 21] han sido ampliamente estudiados para sistemas de orden entero. Se han propuesto varios trabajos relacionados con esta clase de observadores debido a su simple diseño, implementación y robustez en problemas con perturbaciones externas [3, 30]. Algunas aplicaciones de los observadores de alta ganancia utilizan control adaptable [9, 11], compensación de no linealidades [73], estudios de robustez [45], aceleración de convergencia mediante el aumento y conmutación de la ganancia [4, 18] o en comunicaciones seguras.

El observador de alta ganancia es robusto en presencia de perturbaciones externas o incertidumbres como el ruido en la medición, además de que se puede acelerar la velocidad de convergencia al aumentar la ganancia del observador. En este capítulo presentamos un algoritmo de estimación de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales fraccionarios que preserva las características antes mencionadas. La clase de sistemas no lineales utilizada permite obtener una ecuación diferencial fraccionaria cuya solución es utilizada como la matriz de ganancias del observador propuesto, la cual depende de un parámetro $\theta > 0$, y que mediante el análisis de estabilidad se prueba que al aumentar este valor, la rapidez de convergencia también puede ser incrementada.

5.1. Propuesta del observador

Considere la siguiente clase de sistemas no lineales fraccionarios descrita en la forma canónica observador [44]:

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = A\mathbf{x} + \Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (5.1)$$

donde A es una matriz “upper shift”, es decir, $A_{ij} = \delta_{i+1,j}$ donde δ_{ij} es la delta de Kronecker [43], $C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$, y $\Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ un vector localmente Lipschitz en D :

H 5.1. Sea D un compacto que incluye al origen con respecto a \mathbf{x} , uniformemente en \mathbf{u} . Existe un escalar positivo ψ tal que

$$\|\Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\| \leq \psi \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in D. \quad (5.2)$$

Para estimar las variables desconocidas del sistema (5.1), proponemos el siguiente algoritmo de estimación:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \hat{\mathbf{x}} = A\hat{\mathbf{x}} + \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - F_\infty^{-1} C^\top (C\hat{\mathbf{x}} - y) \quad (5.3)$$

donde $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, y $F_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$ con $F(t)$ la solución de la ecuación diferencial fraccionaria siguiente:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha F_\theta = -\theta F_\theta(t) - A^\top F_\theta(t) - F_\theta(t) A + C^\top C, \quad F_0 = F(0) \quad (5.4)$$

Para resolver la ecuación (5.4), consideremos la metodología propuesta en [50] para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias vectoriales. Notemos que para resolver (5.4) y analizar el comportamiento de la solución cuando $t \rightarrow \infty$, es equivalente resolver $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaciones diferenciales escalares acopladas dadas por:

$$\begin{array}{cccc}
{}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{11} = 1 - \theta f_{11} & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{12} = -f_{11} - \theta f_{12} & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{13} = -f_{12} - \theta f_{13} & \dots \bar{f}_{1n} \\
* & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{22} = -2f_{12} - \theta f_{22} & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{23} = -f_{13} - f_{22} - \theta f_{23} & \dots \bar{f}_{2n} \\
* & * & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{33} = -2f_{23} - \theta f_{33} & \dots \bar{f}_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \bar{f}_{(n-1)n} \\
* & * & * & \bar{f}_{nn}
\end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{1n} &= {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{1n} = -f_{1(n-1)} - \theta f_{1n} \\
\bar{f}_{2n} &= {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{2n} = -f_{1n} - f_{2(n-1)} - \theta f_{2n} \\
\bar{f}_{3n} &= {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{3n} = -f_{2n} - f_{3(n-1)} - \theta f_{3n} \\
\bar{f}_{(n-1)n} &= {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{(n-1)n} = -2f_{(n-2)n} - f_{(n-1)(n-1)} - \theta f_{(n-1)n} \\
\bar{f}_{nn} &= {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{nn} = -2f_{(n-1)n} - \theta f_{nn}
\end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace a ${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{11} = -\theta f_{11} + 1$, tenemos:

$$F_{11}(s) = f_{11}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} + \frac{1}{s} \frac{1}{s^\alpha + \theta}$$

Luego, aplicamos la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior, por lo que:

$$f_{11}(t) = f_{11}(0) E_\alpha(-\theta t^\alpha) + 1 * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha)$$

Entonces, de la ecuación (2.25) con $K = 1$, la solución está dada por:

$$f_{11}(t) = \left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) + \frac{1}{\theta}$$

De la misma forma, el resto de las ecuaciones diferenciales se pueden resolver utilizando la misma metodología tomando en cuenta los Lemas 2.1 y 2.2, y las propiedades de la convolución para realizar reducciones en los cálculos.

$$\begin{aligned}
f_{12}(t) &= \left(f_{12}(0) + \frac{1}{\theta^2} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) + \left(\frac{1}{\theta} - f_{11}(0) \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) - \frac{1}{\theta^2} \\
f_{13}(t) &= \left(f_{13}(0) - \frac{1}{\theta^3} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) - \left(f_{12}(0) + \frac{1}{\theta^2} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
&\quad + \left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) + \frac{1}{\theta^3} \\
f_{22}(t) &= \left[f_{22}(0) - \frac{2}{\theta^3} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) - \left[2f_{12}(0) + \frac{2}{\theta^2} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
&\quad + \left[2f_{11}(0) - \frac{2}{\theta} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) + \frac{2}{\theta^3} \\
f_{23}(t) &= \left[f_{23}(0) + \frac{3}{\theta^4} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) + \left[\frac{3}{\theta^3} - f_{13}(0) - f_{22}(0) \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
&\quad + \left[3f_{12}(0) + \frac{3}{\theta^2} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
&\quad + \left[\frac{3}{\theta} - 3f_{11}(0) \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
&\quad - \frac{3}{\theta^4} \\
f_{33}(t) &= \left[f_{33}(0) - \frac{6}{\theta^5} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) - \left[\frac{6}{\theta^4} + 2f_{23}(0) \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
&\quad + \left[2f_{13}(0) + 2f_{22}(0) - \frac{6}{\theta^3} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
&\quad - \left[6f_{12}(0) + \frac{6}{\theta^2} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
&\quad + \bar{K} E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
&\quad + \frac{6}{\theta^5}
\end{aligned}$$

con $\bar{K} = 6f_{11}(0) - \frac{6}{\theta}$. Continuando este proceso, la solución de la entrada i, j tiene la forma:

$$f_{ij}(t) = \eta_0 E_\alpha(-\theta t^\alpha) + \sum_{l=1}^{i+j-2} \eta_l E_\alpha(-\theta t^\alpha) *^l [t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha)] + \frac{(-1)^{i+j}}{\theta^{i+j-1}} \lambda_{i,j}$$

donde

$$\eta_0 = f_{ij}(0) + \frac{(-1)^{i+j+1}}{\theta^{i+j-1}} \lambda_{i,j}.$$

$\lambda_{i,j}$ es un coeficiente binomial dado por

$$\lambda_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1}, \quad (5.5)$$

η_l es una combinación lineal de las condiciones iniciales, y

$$E_\alpha(-\theta t^\alpha) *^l [t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha)] = \\ E_\alpha(-\theta t^\alpha) * \underbrace{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * \dots * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha)}_{1\text{-veces}}$$

Finalmente, considerando el Teorema del Valor Final (para operadores fraccionarios), se sigue que

$$\begin{aligned} (F_\infty(\theta))_{i,j} &= \lim_{t \rightarrow \infty} f_{ij}(t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s F_{ij}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \eta_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} + \sum_{l=1}^{i+j-2} \eta_l \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} \frac{1}{(s^\alpha + \theta)^l} + \frac{1}{s} \frac{(-1)^{i+j}}{\theta^{i+j-1}} \lambda_{i,j} \right\} \\ &= \frac{(-1)^{i+j}}{\theta^{i+j-1}} \lambda_{i,j} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por lo tanto, la matriz de ganancias del observador (5.3) se calcula considerando que

$$(F_\infty(\theta))_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{\theta^{i+j-1}} \lambda_{i,j} \quad (5.7)$$

Observación 5.1.1. La ecuación diferencial (5.4) es invariante en el tiempo, entonces su solución no depende de t_0 cuando $t \rightarrow \infty$, es decir, es una matriz constante y $\frac{d}{dt} F_\theta(t) = 0$, por lo que

$${}^C_0 \mathcal{D}_t^\alpha F_\theta = {}_0 I_t^{1-\alpha} \left[\frac{d}{dt} F_\theta(t) \right] = 0$$

. De esto, se sigue que F_∞ puede obtenerse al resolver la ecuación algebraica:

$$-\theta F_\theta(t) - A^\top F_\theta(t) - F_\theta(t) A + C^\top C = 0 \quad (5.8)$$

cuya solución es (5.7).

5.2. Análisis de convergencia

La convergencia del observador (5.3) se establece en el siguiente resultado, donde el error de estimación se acota por una función de Mittag-Leffler. Se prueba además que la convergencia puede acelerarse al incrementar el valor de la ganancia en el observador.

Teorema 5.1. El sistema (5.3) es un observador Mittag-Leffler estable para el sistema (5.1), y además

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(F_\infty)}{\lambda_{\min}(F_\infty)}} \|\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0\| [E_\alpha(-(\theta - 2\psi - 1)t^\alpha)]^{1/2} \quad (5.9)$$

con $\theta > 0$ suficientemente grande.

Demostración. Sea $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ el error de observación. De las ecuaciones (5.1), (5.3), y calculando la derivada de Caputo (2.39) al error de observación, tenemos lo siguiente:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{e} = (A - F_\infty^{-1} C^\top C) \mathbf{e} + G \quad (5.10)$$

donde $G = \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Sea $V_1 = \|\mathbf{e}\|_{F_\infty}^2 = \mathbf{e}^\top F_\infty \mathbf{e}$ una función candidata de Lyapunov con F_∞ la solución de (5.8). De la desigualdad de Rayleigh-Ritz:

$$\lambda_{\min}(F_\infty) \|\mathbf{e}\|^2 \leq V_1 \leq \lambda_{\max}(F_\infty) \|\mathbf{e}\|^2 \quad (5.11)$$

Por otro lado, considerando la cota para la derivada fraccionaria de una función cuadrática del lema 2.4, se sigue que:

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V_1 &\leq 2\mathbf{e}^\top F_\infty {}_0^C \mathcal{D}_t \mathbf{e} \\ &= 2\mathbf{e}^\top F_\infty [(A - F_\infty^{-1} C^\top C) \mathbf{e} + G] \\ &\leq -\theta \mathbf{e}^\top F_\infty \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^\top F_\infty G \end{aligned}$$

Entonces, considerando la constante de Lipschitz dada en **H 5.1** y el lado izquierdo de (5.11),

con $\theta_0 > 2\psi + 1$, resulta que para todo $\theta > \theta_0$:

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha V_1 \leq -(\theta - 2\psi - 1) \|F_\infty\| \|\mathbf{e}\|^2 \quad (5.12)$$

Por lo tanto, del Teorema 2.8, el origen $\mathbf{e} = 0$ es Mittag-Leffler estable. Finalmente, por el Teorema 3.4, el error de estimación está acotado, es decir:

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(F_\infty)}{\lambda_{\min}(F_\infty)}} \|\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0\| [E_\alpha(-(\theta - 2\psi - 1)t^\alpha)]^{1/2} \quad (5.13)$$

■

El Teorema 5.1 muestra que el algoritmo (5.3) es un observador Mittag-Leffler de alta ganancia, para todo $t \geq 0$, además de que el error de estimación tiende de forma asintótica a cero, ya que la estabilidad Mittag-Leffler implica estabilidad asintótica. De acuerdo a la cota del error de estimación, podemos definir a la tasa de convergencia como

$$\nu = \theta - 2\psi - 1 \quad (5.14)$$

Podemos controlar la velocidad de convergencia ν al incrementar el valor de θ en el observer, de manera que si θ se más grande, podemos obtener una estimación más rápida de las variables de estado.

Observación 5.2.1. En el análisis, el valor de α no afecta la tasa de convergencia de forma explícita, sin embargo, la solución numérica si es afectada. El método de Adams Bashforth Moulton es un algoritmo numérico muy utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha x = f(t, x(t))$. En este método, el orden de convergencia depende de α , y además se puede expresar como una función no decreciente de α dado que el operador integral se discretiza y se comporta de manera más suave cuando α aumenta. Para este método, al considerar $0 < a < 1$, la cota del error es $\mathcal{O}(h^{1+\alpha})$, es decir, existe una constante C tal que

$$|x(t_j) - x| < Ch^{1+\alpha} \text{ para toda } h.$$

Además, cuando $\alpha = 1$ se tiene que la cota del error es $\mathcal{O}(h^2)$ (la cota para ecuaciones

diferenciales de orden entero). Para más detalles sobre la implementación, ver [15, 37].

5.3. Simulaciones numéricas

5.3.1. Péndulo simple de orden fraccionario

Consideremos nuevamente el péndulo simple utilizado para validar el algoritmo (4.25) (Figure 5.1) cuyas ecuaciones diferenciales están dadas por:

$$\Sigma_P = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_1 = x_2 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 \\ y_P = x_1 \end{cases} \quad (5.15)$$

con $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $L = 1 \text{ m}$, $\alpha = 0.98$, y $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [\varphi \ \omega]^T$. De manera física, φ representa el ángulo medido a partir de la vertical y ω la velocidad angular.

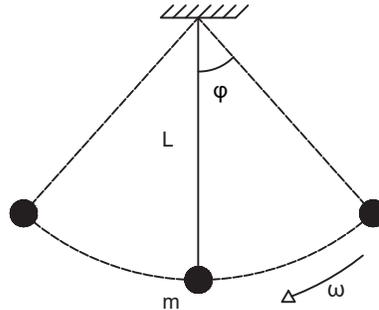


Figura 5.1: Péndulo simple para implementar el observador de alta ganancia.

El sistema (5.15) es fácilmente representado en la forma (5.1) con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Upsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\psi = \frac{g}{L}$ es la constante de Lipschitz para el vector Υ . De la relación (5.7), $F_\infty(\theta)$ y $F_\infty^{-1}(\theta)$

se calculan para $n = 2$:

$$F_\infty(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & -\frac{1}{\theta^2} \\ -\frac{1}{\theta^2} & \frac{2}{\theta^3} \end{bmatrix}, \quad F_\infty^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} 2\theta & \theta^2 \\ \theta^2 & \theta^3 \end{bmatrix}$$

Entonces, del algoritmo de alta ganancia propuesto (5.3), el observador para el péndulo simple es:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{p}}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_1 = \hat{x}_2 - 2\theta(\hat{x}_1 - x_1) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin \hat{x}_1 - \theta^2(\hat{x}_1 - x_1) \\ y_{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (5.16)$$

Del Teorema 5.1, θ se elige tal que $\theta > 2\psi + 1$. Consideremos diferentes valores de θ para verificar que la velocidad de convergencia del observador es mayor cuando la tasa de convergencia ν se aumenta. Los vectores de condiciones iniciales para el péndulo simple (5.15) y su estimador (5.16) son $\mathbf{x}(0) = [\pi/2, 0]^\top$, $\hat{\mathbf{x}}(0) = [\pi, 0.1]^\top$, respectivamente, por lo que $\mathbf{e}(0) = [\pi/2, 0.1]^\top$.

En las Figuras 5.2 y 5.3 se presenta la comparativa entre el estado estimado \hat{x}_1 (línea roja punteada) y el estado original x_1 (línea azul continua) para $\theta = 25$ y $\theta = 30$, respectivamente, mientras que en las Figuras 5.4 y 5.5 se realiza la comparativa para los estados \hat{x}_2 y x_2 considerando $\theta = 25$ y $\theta = 30$ en el observador (5.16).

Las Figuras 5.6 y 5.7 muestran la convergencia de los estados estimados \hat{x}_1 y \hat{x}_2 a los estados originales x_1 y x_2 , respectivamente, con diferentes valores de ganancia θ . Estas comparaciones se realizan para mostrar como la convergencia de la estimación es más rápida cuando la ganancia en el observador se incrementa.

Por otro lado, las Figuras 5.8 y 5.9 muestran la desigualdad (5.9) para $\theta = 25$ y $\theta = 30$, respectivamente, donde la norma del error de estimación está acotada por una función de

Mittag-Leffler:

$$f_\theta = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(F_\infty)}{\lambda_{\min}(F_\infty)}} \|\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0\| [E_\alpha(-(\theta - 2\psi - 1)t^\alpha)]^{1/2}$$

Este comportamiento muestra que el observador de alta ganancia (5.3) tiene error de decaimiento Mittag-Leffler, y satisface la definición 3.1.

Por otro lado, consideremos el ruido de medición en la salida del sistema, esto es, $y = x_1 + v$ con $v = v(t) = 1 \times 10^{-6}$. La Figura 5.10 muestra la salida del sistema sin ruido (línea roja) utilizada en las simulaciones anteriores, y la salida contaminada con ruido $y = x_1 + v$. Los resultados numéricos para la estimación en presencia de ruido se muestran en las Figuras 5.11 y 5.12 para \hat{x}_1 y \hat{x}_2 respectivamente. Como podemos observar, el observador de alta ganancia propuesto es robusto a pesar de la existencia de señales que contaminan la señal de salida disponible del sistema.

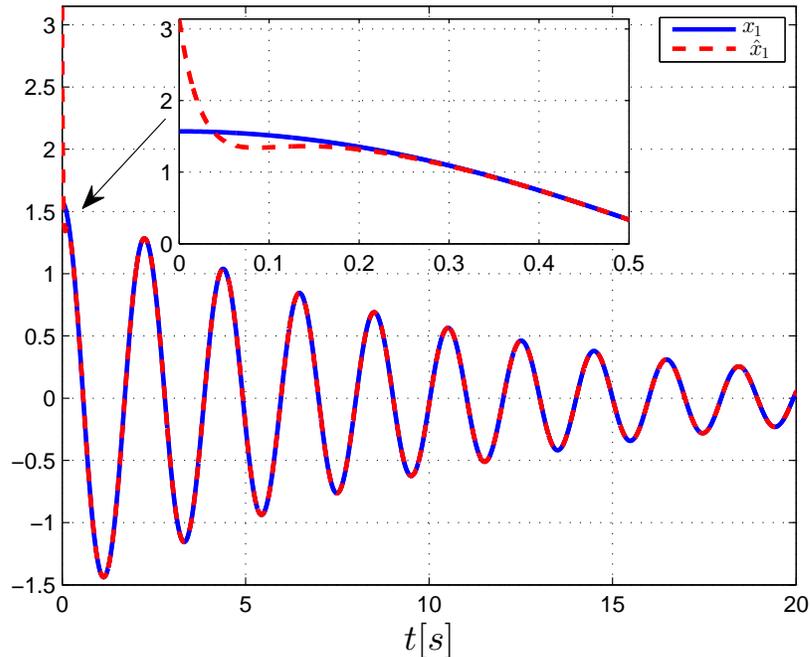


Figura 5.2: x_1 y \hat{x}_1 para $\theta = 25$.

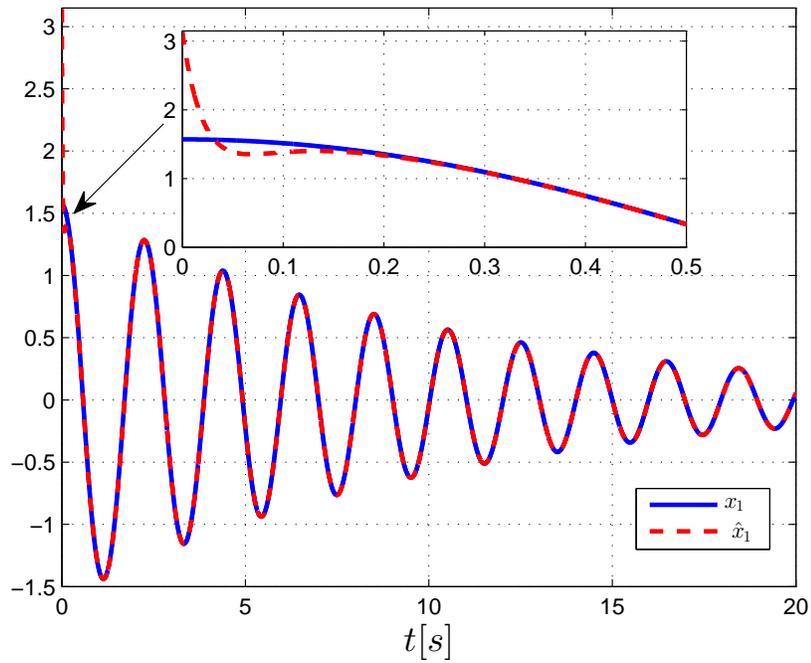


Figura 5.3: x_1 y \hat{x}_1 para $\theta = 30$.

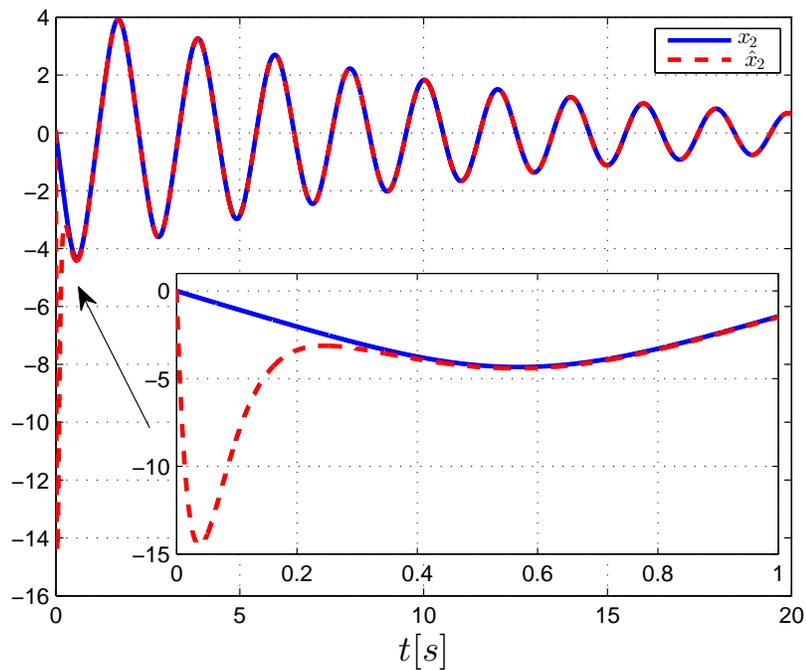


Figura 5.4: x_2 y \hat{x}_2 para $\theta = 25$.

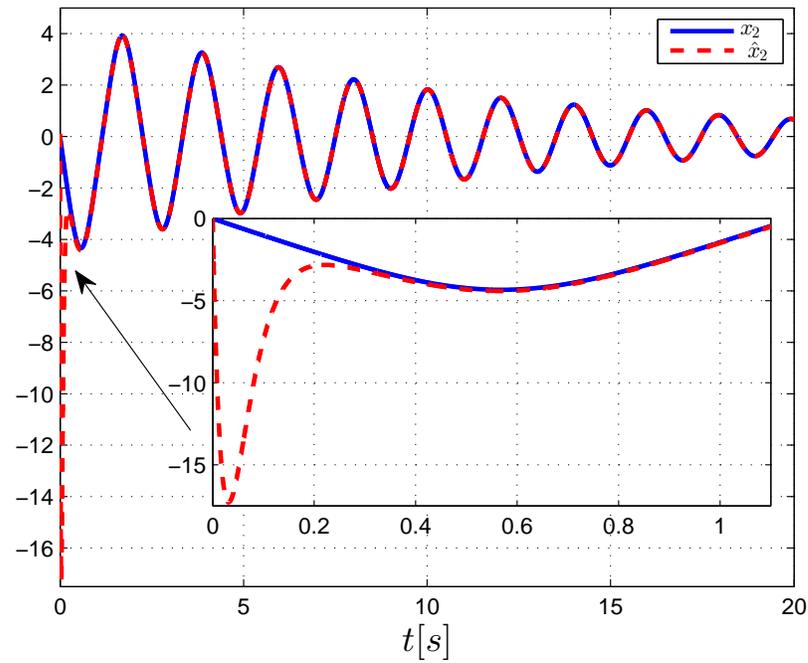


Figura 5.5: x_2 y \hat{x}_2 para $\theta = 30$.

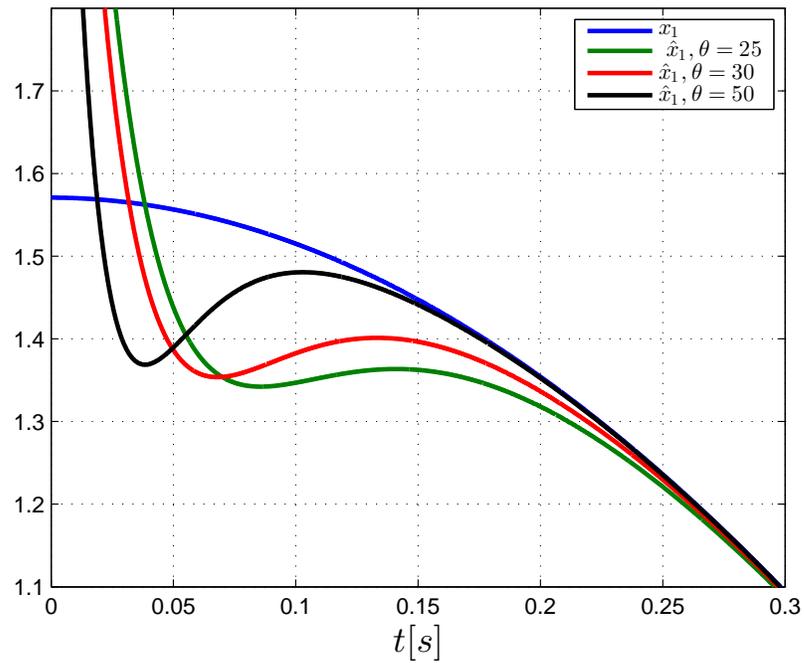


Figura 5.6: x_1 y \hat{x}_1 para diferentes valores de θ .

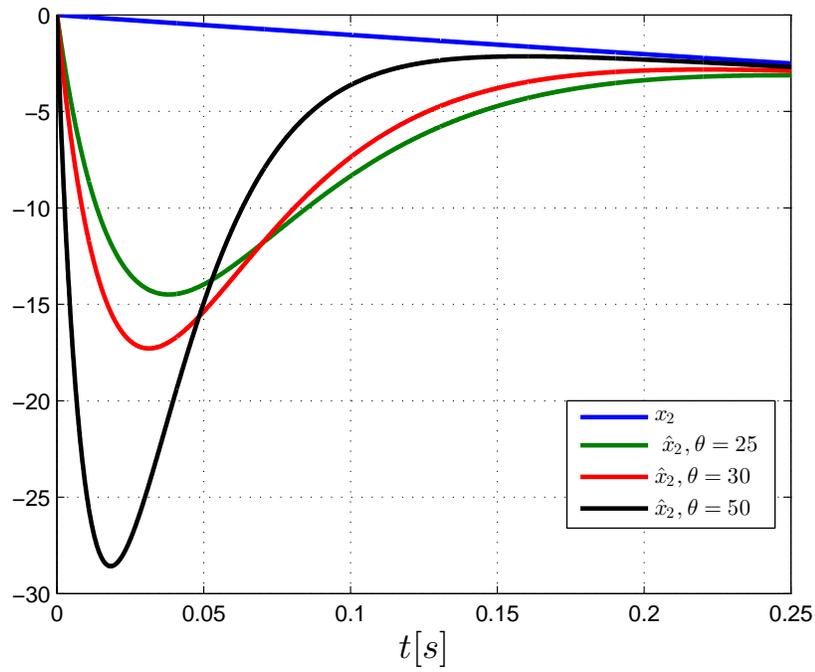


Figura 5.7: x_2 y \hat{x}_2 para diferentes valores de θ .

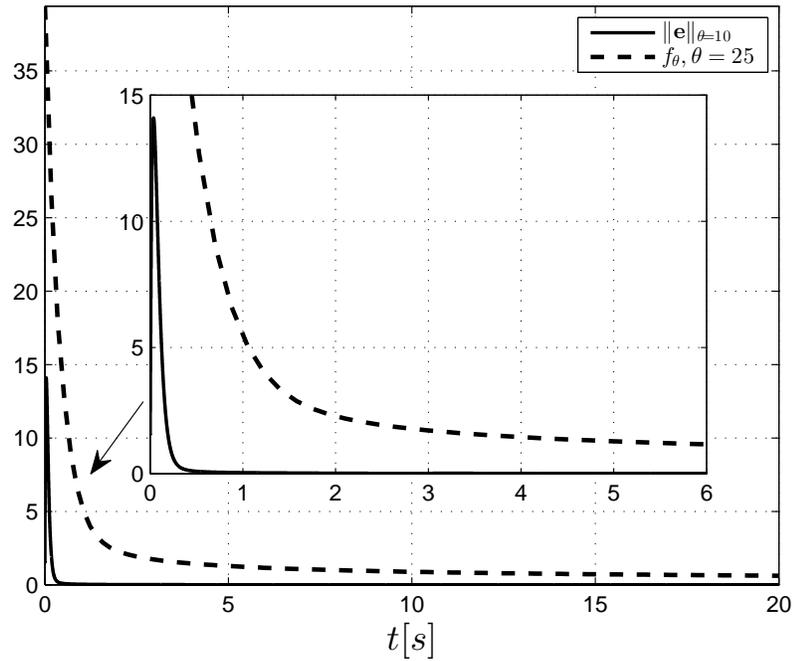


Figura 5.8: Norma del error acotada por una función de Mittag-Leffler para $\theta = 25$.

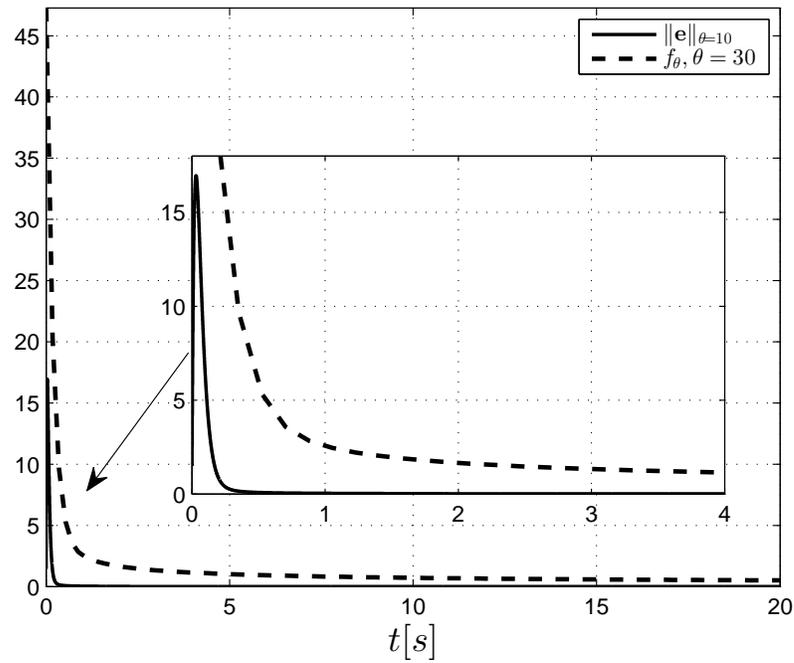


Figura 5.9: Norma del error acotada por una función de Mittag-Leffler para $\theta = 30$.

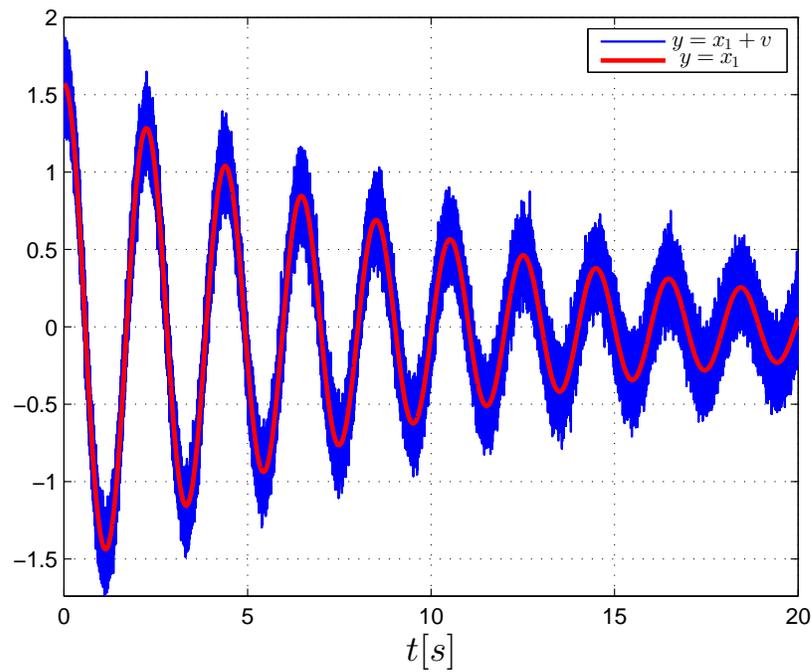


Figura 5.10: Salida $y = x_1$ (sin ruido) y $y = x_1 + v$ (con ruido de medición).

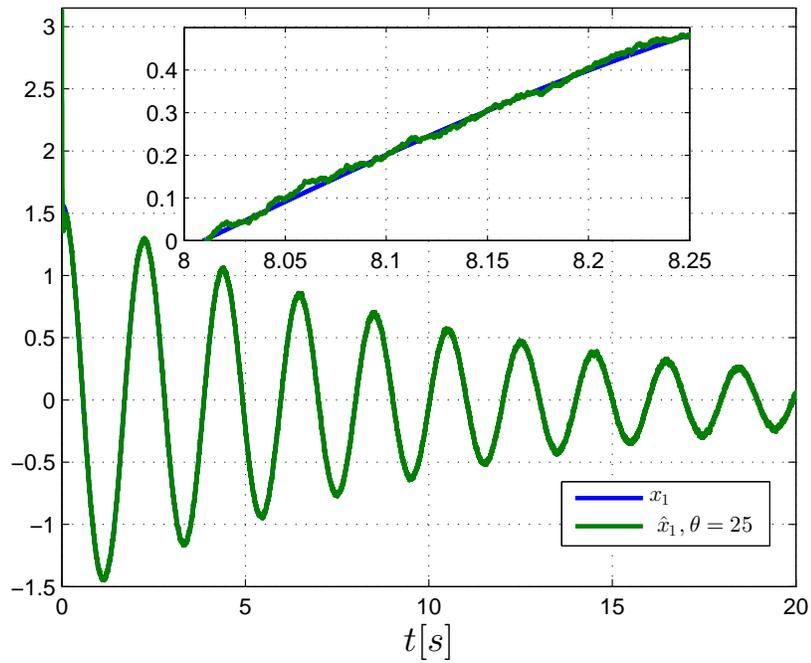


Figura 5.11: $y = x_1$ sin ruido y \hat{x}_1 para $\theta = 25$.

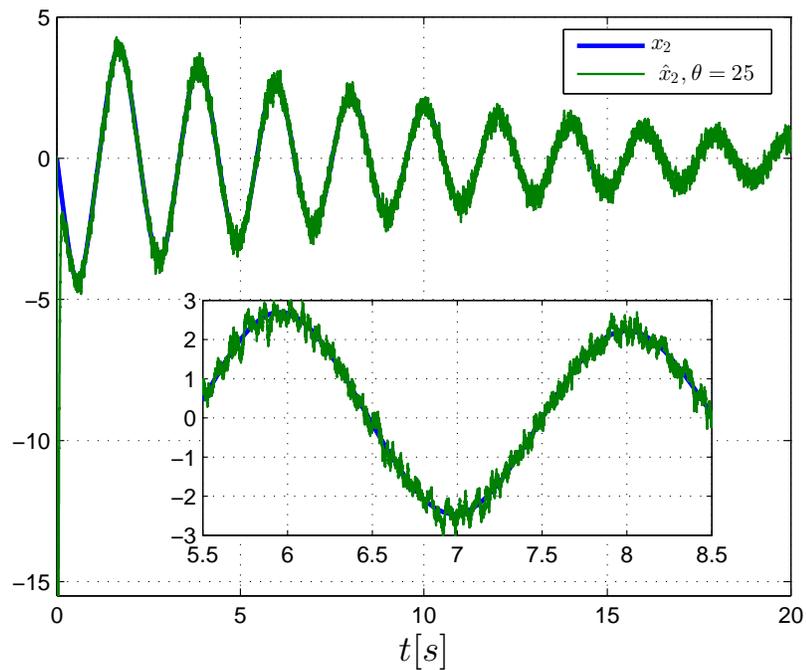


Figura 5.12: x_2 y \hat{x}_2 para $\theta = 25$ con ruido de medición en la salida del sistema.

5.3.2. Sistema Arneodo fraccionario

Considere el sistema Arneodo fraccionario descrito por [41]:

$$\Sigma_A = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_1 = x_2 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_2 = x_3 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_3 = -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^3 \\ y_A = x_1 \end{cases} \quad (5.17)$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\top$, $\beta_1 = -5.5$, $\beta_2 = 3.5$, $\beta_3 = 0.25$, $\beta_4 = -1$, $\mathbf{x}(0) = [-0.25, 1.2, 0.2]^\top$, y $\alpha = 0.92$ para comportamiento caótico. Además, las trayectorias del sistema Arneodo están acotadas en el conjunto

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| \leq 3.5, |x_2| \leq 6, |x_3| \leq 12.5\}.$$

Por otro lado, el sistema (5.17) puede representarse en la forma (5.1) con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Upsilon(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde la constante de Lipschitz para $\Upsilon(\mathbf{x})$ se calcula en un conjunto compacto de \mathbb{R}^3 . Consideremos la matriz Jacobiana para el vector $\Upsilon(\mathbf{x})$ dada por:

$$\left[\frac{\partial \Upsilon(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 + 3\beta_4 x_1^2 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{bmatrix},$$

y para vectores en \mathbb{R}^3 , tenemos que:

$$\left\| \frac{\partial \Upsilon(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|_\infty = \max \{ |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| + 3|\beta_4|x_1^2 \}.$$

Dado que todos los puntos en \mathcal{W} satisfacen $x_1^2 \leq 12.25$, entonces

$$\left\| \frac{\partial \Upsilon(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|_{\infty} \leq |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| + 36.75|\beta_4|.$$

Por lo tanto, la constante de Lipschitz para $\Upsilon(\mathbf{x})$ puede tomarse como $\varphi = |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| + 36.75|\beta_4| = 46$. Por otro lado, de la ecuación (5.7) con $n = 3$:

$$F_{\infty}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & -\frac{1}{\theta^2} & \frac{1}{\theta^3} \\ -\frac{1}{\theta^2} & \frac{2}{\theta^3} & -\frac{3}{\theta^4} \\ \frac{1}{\theta^3} & -\frac{3}{\theta^4} & \frac{6}{\theta^5} \end{bmatrix}, \quad F_{\infty}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} 3\theta & 3\theta^2 & \theta^3 \\ 3\theta^2 & 5\theta^3 & 2\theta^4 \\ \theta^3 & 2\theta^4 & \theta^5 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el observador para el sistema de Arneodo es:

$$\Sigma_{\hat{A}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^{\alpha} \hat{x}_1 = \hat{x}_2 - 3\theta(\hat{x}_1 - x_1) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^{\alpha} \hat{x}_2 = \hat{x}_2 - 3\theta^2(\hat{x}_1 - x_1) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^{\alpha} \hat{x}_3 = -\beta_1\hat{x}_1 - \beta_2\hat{x}_2 - \beta_3\hat{x}_3 + \beta_4\hat{x}_1^3 - \theta^3(\hat{x}_1 - x_1) \\ y_{\hat{A}} = \hat{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Para fines de simulación, la ganancia del observador $\theta = 95$ se elige tal que $\theta > 2\psi + 1$. Las condiciones iniciales para el estimador (5.18) y para la ecuación de error asociada están dados por $\hat{\mathbf{x}}(0) = [3, 1.8 \ 0.25]^T$ y $\mathbf{e}(0) = [3.25, 0.6 \ 0.05]^T$, respectivamente. Se llevaron a cabo dos simulaciones con los mismos parámetros. Los resultados de la primera simulación se muestran en las Figuras 5.13, 5.14 y 5.15 donde se observa que los estados estimados \hat{x}_1 , \hat{x}_2 y \hat{x}_3 convergen a las variables originales x_1 , x_2 y x_3 , respectivamente del sistema Arneodo (5.17), y en la Figura 5.16 se muestra que el error de observación converge al origen.

Para la segunda simulación, se consideró el ruido de medición en la salida del sistema, es decir, $y = x_1 + v(t)$, donde $v(t) = V \sin(\omega t)$ con $V = 0.01$ y $\omega = 15$ rad/s. En las Figuras 5.17, 5.18 y 5.19 se muestran los resultados de estimación \hat{x}_1 , \hat{x}_2 y \hat{x}_3 , respectivamente con

$\theta = 95$. Se observa que el algoritmo (5.18) proporciona una rápida convergencia a pesar de la presencia de ruido que contamina la señal de salida disponible.

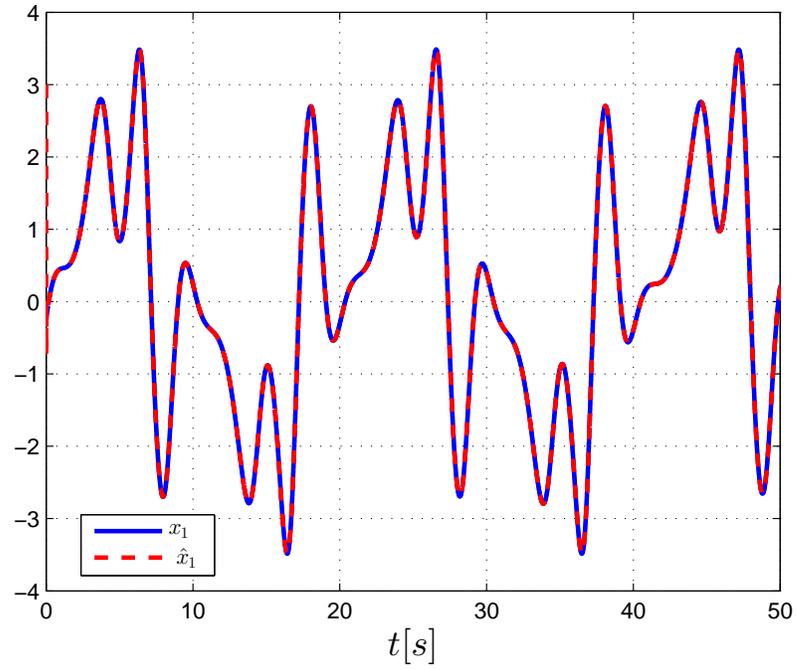


Figura 5.13: x_1 y \hat{x}_1 para $\theta = 95$ en el sistema Arneodo.

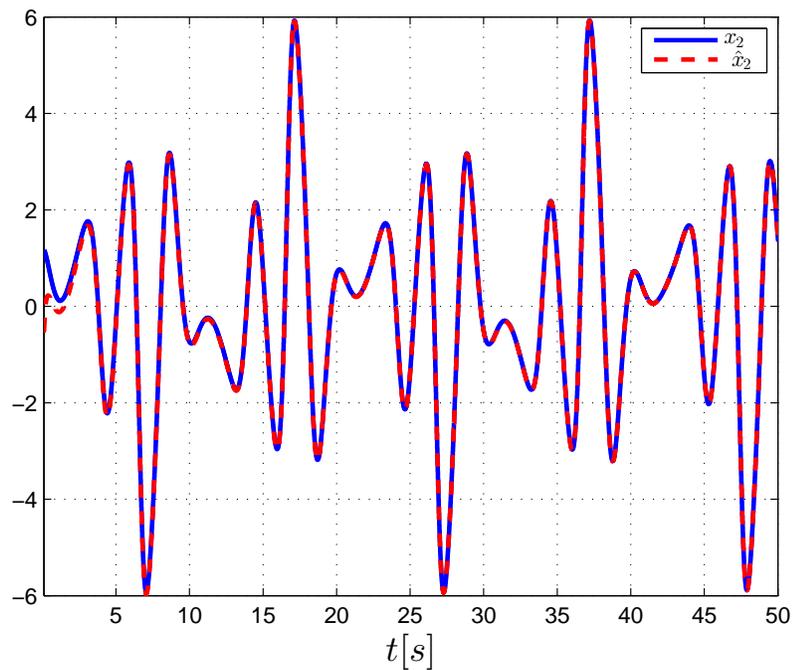


Figura 5.14: x_2 y \hat{x}_2 para $\theta = 95$ en el sistema Arneodo.

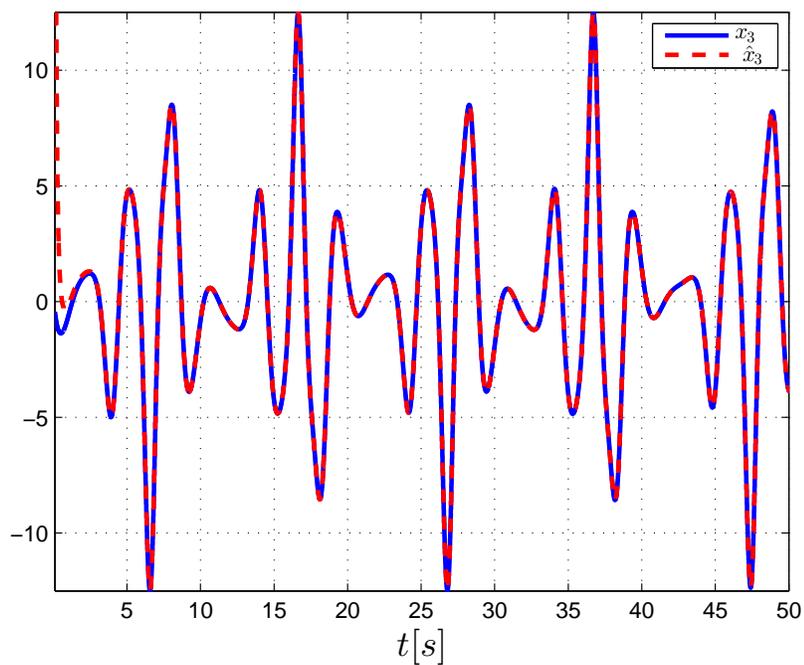


Figura 5.15: x_3 y \hat{x}_3 para $\theta = 95$ en el sistema Arneodo.

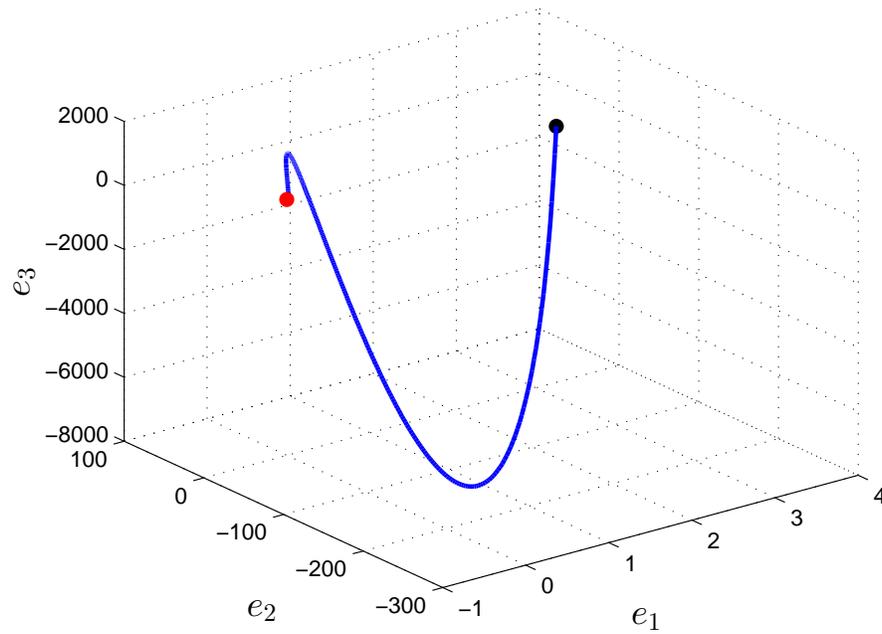
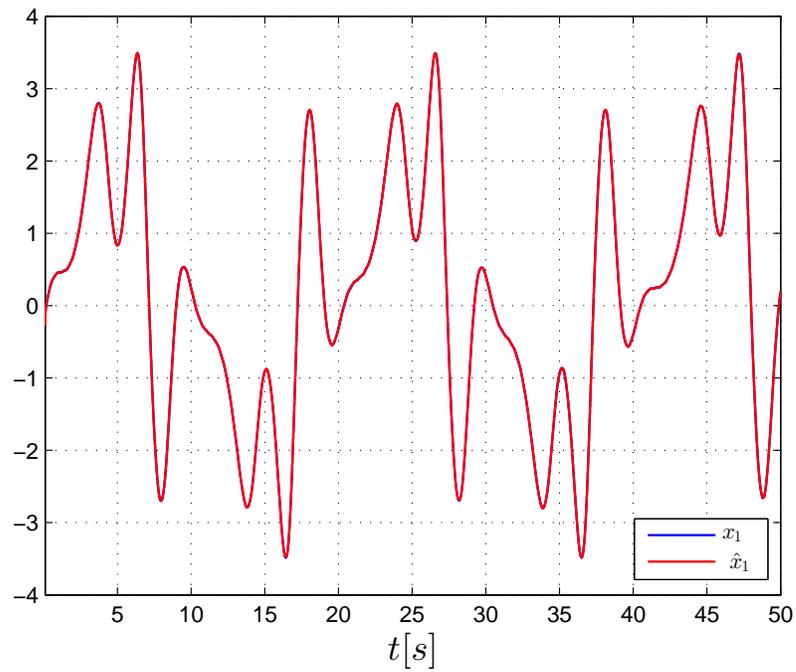


Figura 5.16: Convergencia del error al origen.

Figura 5.17: Estimación de \hat{x}_1 para $\theta = 95$ con ruido de medición en la salida.

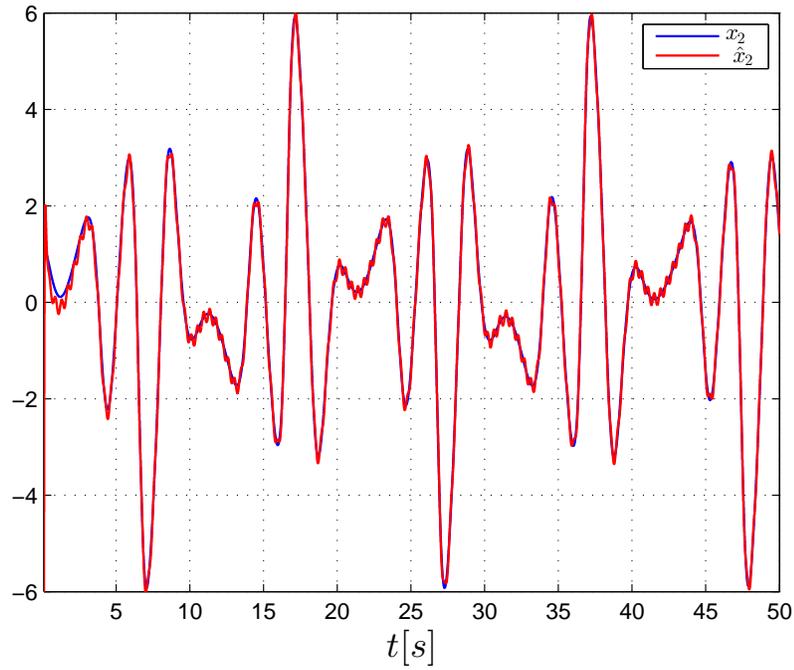


Figura 5.18: Estimación de \hat{x}_2 para $\theta = 95$ con ruido de medición en la salida.

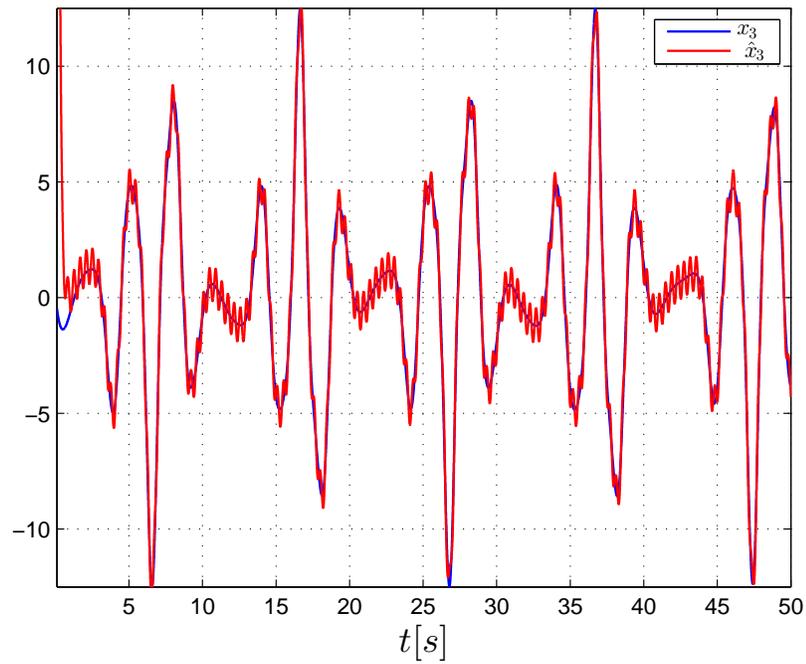


Figura 5.19: Estimación of \hat{x}_3 para $\theta = 95$ con ruido de medición en la salida.

CAPÍTULO 6

Observadores con término integral de Riemann-Liouville

Los observadores con término integral son bien conocidos y han sido estudiados debido a sus propiedades de robustez al existir perturbaciones en el sistema o ruido en la salida, por ejemplo en [6, 7, 68] donde observadores PI se utilizan para control robusto con perturbaciones en los parámetros. En [2] se propone un observador robusto para resolver el problema de la sincronización de caos por realimentación de salida utilizando el método de Inmersión e Invariancia (I&I), mientras que en [31] se diseña un observador proporcional-integral de orden reducido para sistemas descriptores con entradas desconocidas.

Para sistemas de orden fraccionario, algunos resultados teóricos han sido obtenidos considerando observadores integrales utilizando métodos algebraicos con sus respectivas aplicaciones en sincronización, anti-sincronización y detección de fallas [13, 48, 49]. Basado en estos estudios, en este capítulo se proponen dos algoritmos de estimación que emplean la integral de Riemann-Liouville.

De forma similar al caso entero, se prueba que los estimadores propuestos son robustos ante la presencia de ruido en la medición e incertidumbres en la salida del sistema, además de que el análisis de estabilidad se emplea para demostrar que estos estimadores pertenecen a la familia de observadores Mittag-Leffler.

6.1. Planteamiento del problema

Consideremos el sistema no lineal (4.22) escrito en la siguiente forma canónica [44]:

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{x} = A\mathbf{x} + \Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (6.1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz “upper shift”, y es la salida del sistema con $C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ con $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ y $\Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ es un vector no lineal tal que:

H 6.1. Existe un escalar positivo ψ tal que

$$\|\Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\| \leq \psi \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \quad (6.2)$$

Para estimar las $n-1$ variables desconocidas del sistema (6.1) se proponen dos algoritmos de estimación. Antes de presentarlos y estudiar la convergencia Mittag-Leffler, consideremos lo siguiente:

H 6.2. Sea $\theta > 0$, $H \in \mathbb{R}^{k \times k}$ una matriz “upper shift”, $\hat{C} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times k}$. Existe $P > 0$ tal que $-\theta P - H^\top P - PH + \hat{C}^\top \hat{C} = 0$, con

$$(P)_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{\theta^{i+j-1}} \xi_{i,j} \quad (6.3)$$

donde $\xi_{i,j}$ es un coeficiente binomial dado por:

$$\xi_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1} \quad (6.4)$$

H 6.3. Sea $\tau > 0$ y $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ tal que $\text{Re}(\lambda_i(M)) > -\frac{\tau}{2}$ para todo valor propio λ_i de M , y $\hat{C} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times k}$. Entonces existe $Q > 0$ tal que

$$-\tau Q - M^\top Q - QM + \hat{C}^\top \hat{C} = 0. \quad (6.5)$$

6.2. Observador ρ -integral de alta ganancia

Como primera propuesta para estimar, consideremos el siguiente observador ρ -integral:

$$\Sigma_{\text{IO}} = \begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \hat{\mathbf{x}} = A\hat{\mathbf{x}} + \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{K}_I z_1 \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha z_1 = z_2 - k_{z_1} z_1 \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha z_2 = z_3 - k_{z_2} z_1 \\ \vdots \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha z_\rho = C\hat{\mathbf{x}} - y - k_{z_\rho} z_1 \end{cases} \quad (6.6)$$

donde z_i representa una entrada de $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\rho \times 1}$, $\hat{\mathbf{x}}$ es el vector de estado del observador, y $\mathbf{K}_I \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa el vector de ganancias integral para el observador. El sistema (6.6) puede reescribirse como sigue:

$$\Sigma_{\text{IO}_b} = \begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \hat{\mathbf{x}} = A\hat{\mathbf{x}} + \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \hat{\mathbf{K}}_I \mathbf{z} \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{z} = (A_z - \hat{\mathbf{K}}_z) \mathbf{z} + B_z (C\hat{\mathbf{x}} - y) \end{cases} \quad (6.7)$$

donde $A_z \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$ es una matriz “upper shift” $B_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{\rho \times 1}$. Además $\mathbf{K}_z = \begin{bmatrix} k_{z_1} & k_{z_2} & \dots & k_{z_\rho} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{\rho \times 1}$, $\hat{\mathbf{K}}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_z & \mathbf{0}_{\rho \times \rho-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$, $\hat{\mathbf{K}}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I & \mathbf{0}_{n \times \rho-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times \rho}$.

Para demostrar la efectividad del observador (6.7), consideremos el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 6.1. Considerando las hipótesis **H 6.1** y **H 6.2**, el sistema (6.7) es un observador Mittag-Leffler para el sistema (6.1) con $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_z & \mathbf{K}_I \end{bmatrix}^\top = P^{-1} \hat{C}^\top$ para $t \geq 0$, y de forma explícita, la cota del error es:

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0\| [E_\alpha(-(\theta - k(\varphi)) t^\alpha)]^{1/2} \quad (6.8)$$

para todo $t \geq 0$ y todo $\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ con $\theta > 0$ suficientemente grande.

Demostración. Considere los sistemas (6.1) y (6.7). De la derivada de Caputo, el error de

estimación $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ y \mathbf{z} tienen las siguientes dinámicas:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{e} = A\mathbf{e} - \hat{\mathbf{K}}_I \mathbf{z} + F \quad (6.9)$$

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{z} = \left(A_z - \hat{\mathbf{K}}_z \right) \mathbf{z} + B_z C \mathbf{e} \quad (6.10)$$

donde $F = \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Considere el vector $\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{z} & \mathbf{e} \end{bmatrix}^\top$. Aplicando la derivada de Caputo a η , las ecuaciones (6.9) y (6.10) pueden expresarse en la siguiente ecuación diferencial fraccionaria:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \eta = \left(H - P^{-1} \hat{C}^\top \hat{C} \right) \eta + w \quad (6.11)$$

donde $\hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times (n+\rho)}$, $w = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\rho \times 1} \\ F \end{bmatrix}$, y $H = \begin{bmatrix} A_z & B_z C \\ \mathbf{0}_{n \times \rho} & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\rho) \times (n+\rho)}$.

Dado que H es una matriz “upper shift”, de **H 6.2**, existe P tal que

$$-\theta P - H^\top P - PH + \hat{C}^\top \hat{C} = 0, \theta > 0 \quad (6.12)$$

con el vector de ganancias

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_z \\ \mathbf{K}_I \end{bmatrix} = P^{-1} \hat{C}^\top. \quad (6.13)$$

De la discusión anterior, considere la función candidata de Lyapunov $V = \|\eta\|_P^2 = \eta^\top P \eta$ que satisface la desigualdad de Rayleigh-Ritz:

$$\lambda_{\min}(P) \|\eta\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P) \|\eta\|^2 \quad (6.14)$$

Entonces, del lema 2.4, las ecuaciones (6.11) y (6.12) tenemos que:

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V &\leq 2\eta^\top P {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \eta \\ &= 2\eta^\top P \left[\left(H - P^{-1} \hat{C}^\top \hat{C} \right) \eta + w \right] \\ &\leq -\theta \eta^\top P \eta + 2\|\eta^\top P w\|. \end{aligned}$$

Utilizando la descomposición de Cholesky, tenemos que $P = LL^\top$, donde L es una matriz

triangular inferior con entradas reales y positivas en la diagonal principal, entonces

$$\|\eta^\top P w\| = \|\eta^\top L L^\top w\| \leq \|\eta^\top L\| \|L^\top w\| = \sqrt{\eta^\top L L^\top \eta} \sqrt{w^\top L L^\top w} = \|\eta\|_P \|w\|_P$$

por lo que se obtiene que ${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V \leq -\theta V + 2\|\eta\|_P \|w\|_P$. Sean c_1 y c_2 constantes positivas tales que $c_1 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_P \leq c_2 \|\cdot\|$. Por la propiedad de Lipschitz de F , tenemos que $\|w\| = \|F\| \leq \varphi \|\mathbf{e}\| \leq \varphi \|\eta\|$. Entonces

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha V \leq -\gamma V \quad (6.15)$$

donde $\gamma = (\theta - k(\varphi))$, $k(\varphi) = 2\varphi \frac{c_2}{c_1}$. Por lo tanto, del Teorema 2.8, $\eta = 0$ es Mittag-Leffler estable si $\theta > k(\varphi)$ para todo $t \geq 0$ y $V(\eta(t)) \leq V(\eta_0) E_\alpha(-\gamma t^\alpha)$.

De la última desigualdad y utilizando el hecho de que $\|\mathbf{e}\| \leq \|\eta\|$, se obtiene el estimado para la cota del error. Además, dado que la estabilidad Mittag-Leffler implica estabilidad asintótica, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = 0.$$

■

6.3. Observador P ρ -integral

Ahora extendemos el algoritmo propuesto en la sección anterior utilizando el término proporcional. Considere ahora el siguiente algoritmo de estimación:

$$\Sigma_{\text{IO}_c} = \begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \hat{\mathbf{x}} = A \hat{\mathbf{x}} + \Upsilon(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \hat{\mathbf{K}}_I \mathbf{z} - \mathbf{K}_P (C \hat{\mathbf{x}} - y) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{z} = (A_z - \hat{\mathbf{K}}_z) \mathbf{z} + B_z (C \hat{\mathbf{x}} - y) \end{cases} \quad (6.16)$$

donde A_z , B_z , \mathbf{K}_z , $\hat{\mathbf{K}}_z$ están definidas en la sección anterior, y \mathbf{K}_P es tal que la suposición **H 6.3** se cumpla. Bajo estas consideraciones, en el siguiente teorema se prueba la efectividad del sistema (6.16) para estimar las variables desconocidas del sistema (6.1).

Teorema 6.2. Bajo las suposiciones **H 6.1** y **H 6.3**, el sistema (6.16) es un observador Mittag-Leffler para el sistema (6.1) para $t \geq 0$. Además, el error de estimación está acotado

como sigue:

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}} \|\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0\| [E_\alpha(-(\tau - k(\varphi))) t^\alpha]^{1/2} \quad (6.17)$$

para todo $t \geq 0$ y todo $\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $\eta = [\mathbf{z} \ \mathbf{e}]^\top$, con $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ el error de estimación. De la definición (2.39) y las ecuaciones (6.1) y (6.16), es fácil verificar que

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \mathbf{e} = (A - \mathbf{K}_P C) \mathbf{e} - \hat{\mathbf{K}}_I \mathbf{z} + F. \quad (6.18)$$

Además, la dinámica de \mathbf{z} está dada en la ecuación (6.10), y

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha \eta = (M - Q^{-1} \hat{C}^\top \hat{C}) \eta + w \quad (6.19)$$

con $M = \begin{bmatrix} A_z & B_z C \\ \mathbf{0}_{n \times \rho} & A - \mathbf{K}_P C \end{bmatrix}$. Por la suposición **H 6.3**, existe la matriz Q solución de la ecuación (6.5), tal que el vector de ganancia se calcula como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_z \\ \mathbf{K}_I \end{bmatrix} = Q^{-1} \hat{C}^\top. \quad (6.20)$$

Considere $V = \eta^\top Q \eta$ como función candidata de Lyapunov. Repitiendo los mismos pasos de la prueba del Teorema 6.1, obtenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = 0$ y

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}} \|\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0\| [E_\alpha(-(\tau - k(\varphi))) t^\alpha]^{1/2}$$

Esto finaliza la demostración. ■

6.4. Simulaciones numéricas

Consideremos el péndulo simple de orden fraccionario descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales fraccionarias:

$$\Sigma_P = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_1 = x_2 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha x_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 \\ y_P = x_1 \end{cases} \quad (6.21)$$

donde la aceleración de la gravedad $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, la longitud del péndulo es $L = 1 \text{ m}$, el orden de la dinámica $\alpha = 0.98$ y los estados $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^\top = [\varphi \ \omega]^\top$. Como hemos visto en los capítulos anteriores, el modelo dinámico del péndulo tiene la forma (6.1), donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Upsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\psi = \frac{g}{L}$ es la constante de Lipschitz del vector Υ . Para ilustrar las ventajas de los algoritmos de estimación (6.7) y (6.16), comparemos los resultados con la estimación obtenida mediante un observador de orden reducido $PI^{r\alpha}$ [13]:

$$\Sigma_{PI^\alpha} = \begin{cases} \hat{x}_2 = \gamma_2 + K_{2,0}y \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \gamma = -K_{2,0}(\gamma_2 + K_{2,0}y) + K_{2,1}y - K_{2,1} {}^C_0I_t^\alpha (\gamma_2 + K_{2,0}y) \end{cases} \quad (6.22)$$

con $[K_{2,0} \ K_{2,1}]^\top = [50 \ 50]^\top$. Para fines de simulación y comparación, consideremos ruido de medición en la salida del sistema, es decir, $y = x_1 + v(t)$, donde $v(t) = V \sin(\bar{\omega}t)$ con $V = 0.1$ y $\bar{\omega} = 50 \text{ rad/s}$ (Figura 6.1). Para el observador (6.7) con $\rho = 2$:

$$\hat{\mathbf{K}}_I = [\mathbf{K}_I \ \mathbf{0}_{2 \times 1}] = \begin{bmatrix} k_{I_1} & 0 \\ k_{I_2} & 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{K}}_z = [\mathbf{K}_z \ \mathbf{0}_{2 \times 1}] = \begin{bmatrix} k_{z_1} & 0 \\ k_{z_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular los valores para las ganancias del observador, de (6.13) y la suposición **H 6.2**:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & -\frac{1}{\theta^2} & \frac{1}{\theta^3} & -\frac{1}{\theta^4} \\ -\frac{1}{\theta^2} & \frac{2}{\theta^3} & -\frac{3}{\theta^4} & \frac{4}{\theta^5} \\ \frac{1}{\theta^3} & -\frac{3}{\theta^4} & \frac{6}{\theta^5} & -\frac{10}{\theta^6} \\ -\frac{1}{\theta^4} & \frac{4}{\theta^5} & -\frac{10}{\theta^6} & \frac{20}{\theta^7} \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 4\theta & 6\theta^2 & 4\theta^3 & \theta^4 \\ 6\theta^2 & 14\theta^3 & 11\theta^4 & 3\theta^5 \\ 4\theta^3 & 11\theta^4 & 10\theta^5 & 3\theta^6 \\ \theta^4 & 3\theta^5 & 3\theta^6 & \theta^7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{K}_z \\ \mathbf{K}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\theta \\ 6\theta^2 \\ 4\theta^3 \\ \theta^4 \end{bmatrix}$$

De forma similar, para $\rho = 5$:

$$\hat{\mathbf{K}}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I & \mathbf{0}_{2 \times 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{K}}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_z & \mathbf{0}_{5 \times 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{z_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{z_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{z_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{z_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_z \\ \mathbf{K}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\theta \\ 21\theta^2 \\ 35\theta^3 \\ 35\theta^4 \\ 21\theta^5 \\ 7\theta^6 \\ \theta^7 \end{bmatrix}$$

En ambos casos $\theta > 2\psi$, y tomamos $\theta = 25$. Finalmente, el observador 2-integral y el observador 5-integral para el péndulo simple son:

$$\rho = 2, \Sigma_{\hat{p}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_1 = \hat{x}_2 - k_{I_1} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin \hat{x}_1 - k_{I_2} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_1 = z_2 - k_{z_1} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_2 = \hat{x}_1 - x_1 - k_{z_2} z_1 \end{cases} \quad (6.23)$$

$$\rho = 5, \Sigma_{\hat{p}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_1 = \hat{x}_2 - k_{I_1} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin \hat{x}_1 - k_{I_2} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_1 = z_2 - k_{z_1} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_2 = z_3 - k_{z_2} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_3 = z_4 - k_{z_3} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_4 = z_5 - k_{z_4} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_5 = \hat{x}_1 - x_1 - k_{z_5} z_1 \end{cases} \quad (6.24)$$

Por otro lado, considerando las matrices previamente calculadas y el observador (6.16) con la ganancia proporcional \mathbf{K}_P tal que la suposición **H 6.3** se cumpla, entonces para el sistema (6.21) tenemos:

$$\rho = 2, \Sigma_{\hat{p}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_1 = \hat{x}_2 - k_{I_1} z_1 - k_{P_1} (\hat{x}_1 - x_1) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin \hat{x}_1 - k_{I_2} z_1 - k_{P_2} (\hat{x}_1 - x_1) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_1 = z_2 - k_{z_1} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_2 = \hat{x}_1 - x_1 - k_{z_2} z_1 \end{cases} \quad (6.25)$$

$$\rho = 5, \Sigma_{\hat{\mathbf{p}}} = \begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_1 = \hat{x}_2 - k_{I_1} z_1 - k_{P_1} (\hat{x}_1 - x_1) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha \hat{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin \hat{x}_1 - k_{I_2} z_1 - k_{P_2} (\hat{x}_1 - x_1) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_1 = z_2 - k_{z_1} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_2 = z_3 - k_{z_2} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_3 = z_4 - k_{z_3} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_4 = z_5 - k_{z_4} z_1 \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\alpha z_5 = \hat{x}_1 - x_1 - k_{z_5} z_1 \end{cases} \quad (6.26)$$

En este caso, para $\rho = 2$ con $\tau = 6$ y $\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix}^\top$, resolviendo (6.5) y (6.20):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_z \\ \mathbf{K}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 56 \\ 24 \\ 16 \end{bmatrix}$$

De forma similar para $\rho = 5$ con $\tau = 3$ y $\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^\top$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_z \\ \mathbf{K}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 119 \\ 427 \\ 756 \\ 376 \\ -320 \\ 64 \end{bmatrix}$$

Los vectores de condiciones iniciales para el péndulo simple (6.21) y para los estimadores están dados por $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \pi/2, & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\hat{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} \pi, & 0.1 \end{bmatrix}^\top$, respectivamente. La Figura 6.2 muestra la estimación obtenida con el observador de orden reducido (6.22), considerando

$r = 1, K_{2,0} = K_{2,1} = 50$, además de que no hay ruido en la señal de salida.

Como podemos observar, la convergencia del estado estimado al estado original es rápida y se mantiene a través del tiempo, sin embargo, considerando la señal de salida con ruido con valores de ganancia $K_{2,0} = K_{2,1} = 10$, la estimación es de mala calidad y la amplificación del ruido en la señal del ruido es remarcable y se incrementa a través del tiempo en la señal estimada (Figure 6.3).

Por otro lado, en la Figura 6.4 se muestra la comparación entre el estado original x_2 (línea continua) y el estimado \hat{x}_2 obtenido por el observador integral (6.7) con $\rho = 2$ (línea azul punteada) y $\rho = 5$ (línea negra punteada). En este caso, la salida es perturbada con ruido, y como podemos observar, la mejor estimación se obtiene cuando se incrementa el número de filtros, es decir, incrementando el valor de ρ .

Con la finalidad de reducir el sobretiro que ocurre al inicio de la simulación y el ruido que aún corrompe la señal estimada, consideramos el observador (6.16) con $\rho = 2$ y $\rho = 5$. La Figura 6.5 muestra la comparación entre el estado original x_2 y los resultados obtenidos con este observador P- ρ -integral con $\rho = 2$ (línea azul punteada) y $\rho = 5$ (línea negra punteada).

Se alcanza la estimación en menos de 5 segundos, y se mantiene a través del tiempo a pesar de la existencia de ruido que contamina la señal de salida. Finalmente, con la finalidad de cuantificar la comparación, se introducen los siguientes índices de desempeño [18]:

$$J_{2,100\%} = \sqrt{\sum_{i=0}^N |x_2(t_i) - \hat{x}_2(t_i)|^2} \quad (6.27)$$

$$J_{2,10\%} = \sqrt{\sum_{i=0.9N}^N |x_2(t_i) - \hat{x}_2(t_i)|^2} \quad (6.28)$$

$$J_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq N} |x_2(t_i) - \hat{x}_2(t_i)| \quad (6.29)$$

donde $x_2(t_i)$ y \hat{x}_2 son las variables original y estimada en el tiempo $t_i = ih; i = 0, 1, \dots, N$, donde N es el número de pasos en la simulación. En este caso $t_f = Nh = 20$ s y $h = 0.0001$. El índice $J_{2,100\%}$ se calcula para todo el tiempo de simulación y $J_{2,10\%}$ se calcula durante el último 10% del tiempo de simulación para evaluar la precisión asintótica, mientras que J_{∞}

	$J_{2,100\%}$	$J_{2,10\%}$	J_{∞}
$PI^{r\alpha}$ -reduced observer	388.2483	100.1633	3.0304
2-integral observer	289.4946	22.538	8.1628
5-integral observer	1852.2625	2.3304	52.9998
P -2-integral observer	96.8047	2.221	1.5443
P -5-integral observer	168.1461	1.1866	2.01

Tabla 6.1: Valores de los índices de desempeño para $h = 0.0001$ y $\bar{\omega} = 50$.

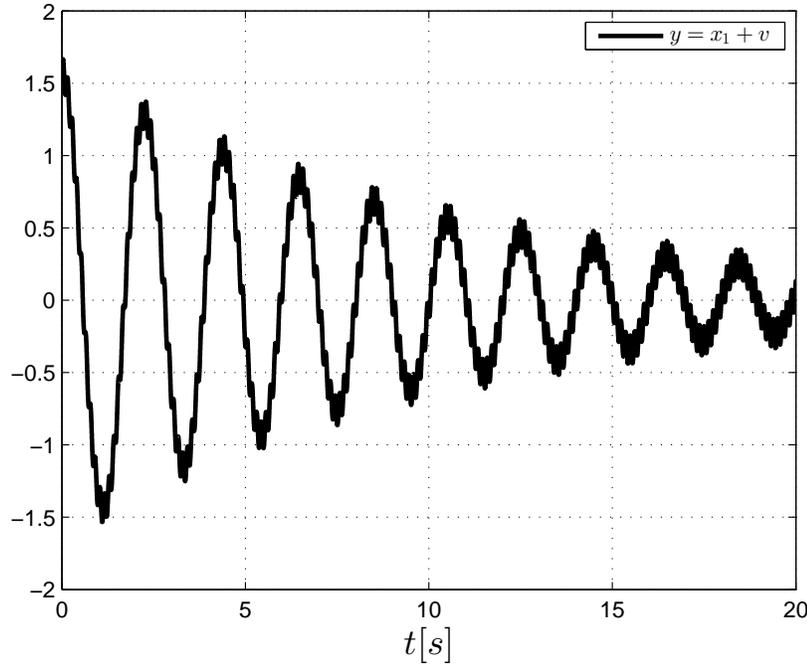


Figura 6.1: Salida del sistema (6.21) con ruido.

cuantifica el sobrepico.

La Tabla 6.1 muestra los valores para los índices obtenidos durante la simulación de los algoritmos de estimación considerando el ruido en la salida. Como podemos observar, el observador $PI^{r\alpha}$ tiene convergencia lenta comparada con los otros algoritmos (Figure 6.3). El observador ρ -integral con $\rho = 2$ y $\rho = 5$ tiene mejor desempeño en cuanto a convergencia, sin embargo el sobrepico es remarcable. El observador integral **P**- ρ con $\rho = 2$ y $\rho = 5$ tiene el mejor desempeño en cuanto precisión y sobrepico.

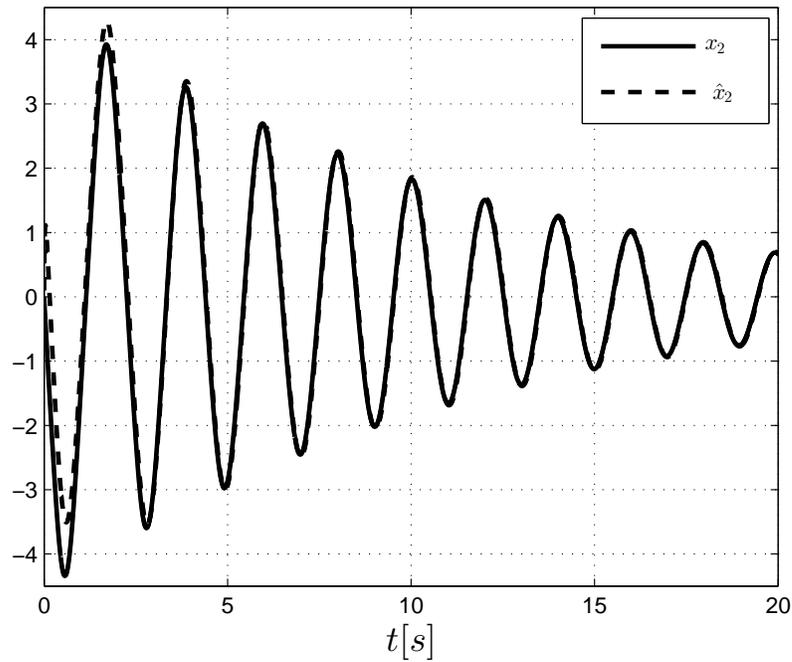


Figura 6.2: Estimación utilizando el observador $PI^{r\alpha}$ (6.22) sin ruido de medición, $K_{2,0} = K_{2,1} = 50$.

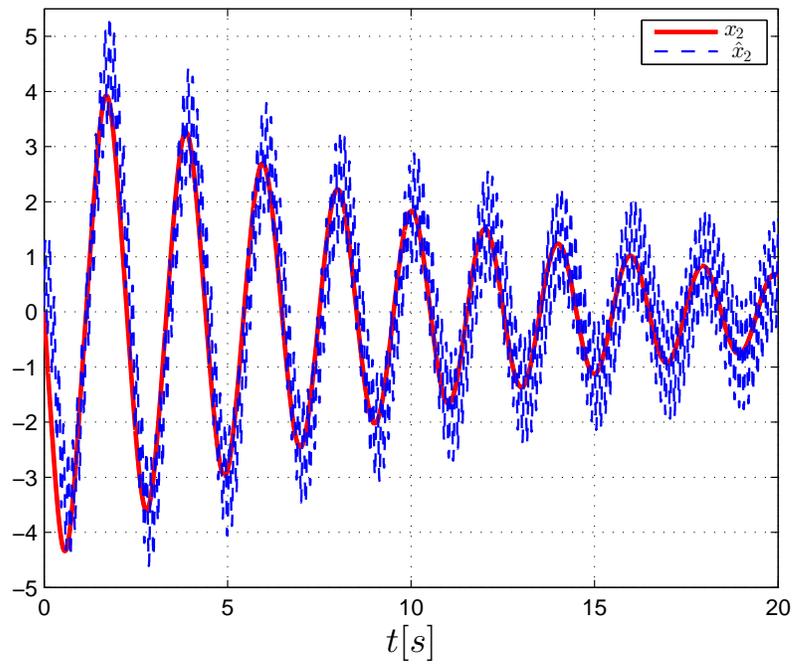


Figura 6.3: Estimación utilizando el observador $PI^{r\alpha}$ (6.22) con ruido en la salida, $K_{2,0} = K_{2,1} = 10$.

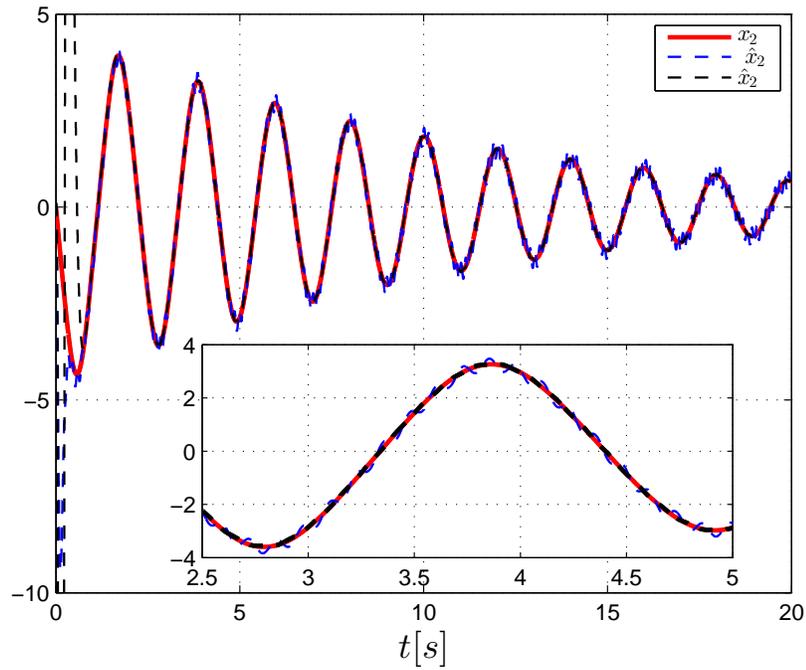


Figura 6.4: Estimación utilizando el observador (6.7) con $\rho = 2$ y $\rho = 5$.

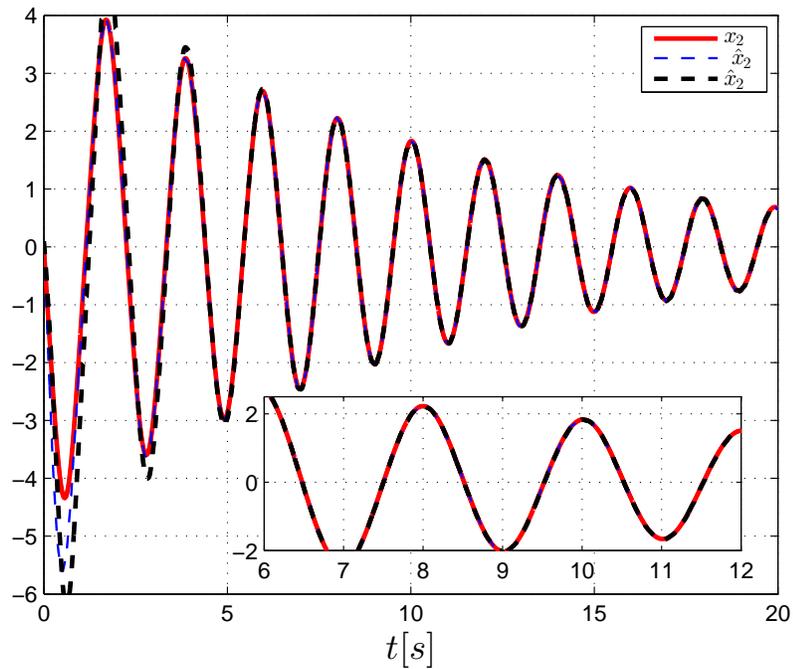


Figura 6.5: Estimación utilizando el observador (6.16) con $\rho = 2$ y $\rho = 5$.

CAPÍTULO 7

Conclusiones y trabajo a futuro

Este trabajo presenta una forma de resolver el problema clásico de estimación de estados para sistemas no lineales fraccionarios de orden conmensurado. Las soluciones propuestas son válidas para una clase de sistemas con una salida que pueden ser representados en una forma equivalente que consiste en una parte lineal y un vector Lipschitz.

La representación equivalente de los sistemas permite la aplicación de los estimadores propuestos, los cuales pertenecen a una familia de observadores que generaliza a los clásicos observadores exponenciales. Una nueva clase de estimadores se define basada en el análisis de estabilidad Mittag-Leffler que muestra la estabilidad del origen de la dinámica del error de estimación y proporciona además una función que acota las trayectorias del error. Esta forma de acotar las trayectorias a través de la función de Mittag-Leffler es un caso más general que el de estabilidad exponencial donde las trayectorias se acotan por una función exponencial.

Se establecen condiciones para el diseño de observadores Mittag-Leffler mediante el análisis de funciones de Lyapunov lo que permite determinar si algoritmos de estimación pertenecen a esta familia de observadores.

Como resultado alternativo se obtiene la solución al problema clásico del regulador óptimo cuadrático y cuya aplicación directa es en la elección de ganancias del observador de tipo Luenberger generalizado. Para establecer la efectividad de la metodología propuesta

de los algoritmos de estimación de estados, algunos ejemplos numéricos de dos sistemas no lineales fraccionarios y diferentes se presentan, donde es claro que la observación de estados se logra.

En el capítulo 5 se propuso un observador de alta ganancia basado en las ideas de Gauthier para sistemas fraccionarios. Se resuelve la ecuación diferencial fraccionaria asociada a la matriz de ganancias del observador y se prueba que la tasa de convergencia de la estimación puede acelerarse al aumentar el valor de la ganancia. Se realizan simulaciones para verificar que este algoritmo realiza estimaciones adecuadas en presencia de ruido en la salida del sistema.

En el capítulo 6 se proponen dos algoritmos de estimación, ambos asociados con términos integrales basados en la integral fraccionaria de Riemann-Liouville. El desempeño se evalúa utilizando índices de desempeño que cuantifican la convergencia y el sobre pico al inicio de la simulación. Se prueba que estos observadores son Mittag-Leffler estables y que el aumento de integradores permite una mejor estimación en las variables de estado a pesar de la presencia de ruido en la medición.

Como trabajo a futuro se planea buscar más estimadores que pertenezcan a la familia Mittag-Leffler. Dado que el problema del significado físico de la derivada fraccionaria aún está abierto, y los modelos matemáticos propuestos no siempre se pueden validar, se buscará establecer la estimación de estados de sistemas no lineales a través de estimadores de orden fraccionario. Esta combinación de dinámicas motiva a trabajar con sistemas de orden inconmensurados.

APÉNDICE A

Publicaciones

Publicaciones en revistas

1. Fidel Meléndez-Vázquez, **Oscar Martínez-Fuentes**, Rafael Martínez-Guerra (2017). *Fractional fault-tolerant dynamical controller for a class of commensurate-order fractional systems*. International Journal of Systems Science, vol 49, no. 1, pp. 196-210. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207721.2017.1397806>
2. **Oscar Martínez-Fuentes**, Rafael Martínez-Guerra (2018). *A Novel Mittag-Leffler stable estimator for nonlinear fractional-order systems: a linear quadratic regulator approach*. Nonlinear Dynamics, vol 94, no. 3, pp. 1973–1986. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4469-6>
3. **Oscar Martínez-Fuentes**, Rafael Martínez-Guerra (2019). *A high-gain observer with Mittag-Leffler rate of convergence for a class of nonlinear fractional-order systems*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol 79. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104909>
4. **Oscar Martínez-Fuentes**, Rafael Martínez-Guerra. *Mittag-Leffler fractional ρ -integral observers for a class of nonlinear fractional-order systems*. ISA Transactions (**Sometido**).

Publicaciones en congresos internacionales

1. **Oscar Martínez-Fuentes**, Rafael Martínez-Guerra (2016), *Generalized synchronization in chaotic Liouvilian fractional systems*. American Control Conference (ACC 2016), Boston, MA, USA, pp. 2747-2752. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACC.2016.7525334>
2. **Oscar Martínez-Fuentes**, Fidel Meléndez-Vázquez, Rafael Martínez-Guerra (2018), *Fractional-order nonlinear systems with fault tolerance*. American Control Conference (ACC 2018), Milwaukee, WI, USA, pp. 6566-6571. DOI: <https://doi.org/10.23919/ACC.2018.8431495>

Libros

1. Rafael Martínez-Guerra, **Oscar Martínez-Fuentes**, Juan Javier Montesinos-García (2019). *Algebraic and Differential Methods for Nonlinear Control Theory: Elements of Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-12025-2>

APÉNDICE B

Cálculo de la matriz de ganancia para $n = 3$

Para obtener la matriz de ganancias del observador (5.3), primero se debe resolver la ecuación diferencial fraccionaria

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha F = -\theta F_t(\theta) - A^\top F_t(\theta) - F_t(\theta) A + C^\top C, \quad F_0(\theta) \quad (\text{B.1})$$

para obtener la matriz $F(t)$. Posteriormente se calcula el $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$ para obtener la matriz

de ganancias deseada. Consideremos $n = 3$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 0 \ 0]$ en la ecuación

(B.1), es decir:

$$\begin{bmatrix} {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{11} & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{12} & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{13} \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{12} & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{22} & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{23} \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{13} & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{23} & {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \theta f_{11} & -f_{11} - \theta f_{12} & -f_{12} - \theta f_{13} \\ -f_{11} - \theta f_{12} & -2f_{12} - \theta f_{22} & -f_{13} - f_{22} - \theta f_{23} \\ -f_{12} - \theta f_{13} & -f_{13} - f_{22} - \theta f_{23} & -2f_{23} - \theta f_{33} \end{bmatrix}$$

Igualando entrada por entrada se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales fraccionarias:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{11} = -\theta f_{11} + 1 \quad (\text{B.2})$$

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{12} = -f_{11} - \theta f_{12} \quad (\text{B.3})$$

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{13} = -f_{12} - \theta f_{13} \quad (\text{B.4})$$

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{22} = -2f_{12} - \theta f_{22} \quad (\text{B.5})$$

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{23} = -f_{13} - f_{22} - \theta f_{23} \quad (\text{B.6})$$

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{33} = -2f_{23} - \theta f_{33} \quad (\text{B.7})$$

Ahora, consideremos el método de la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones (B.2)-(B.7). Para la ecuación diferencial (B.2), aplicando la transformada de Laplace para operadores fraccionarios y siguiendo la metodología ya conocida:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{11} \} &= \mathcal{L} \{ -\theta f_{11} + 1 \} \\ s^\alpha F_{11}(s) - s^{\alpha-1} f_{11}(0) &= -\theta F_{11}(s) + s^{-1} \\ F_{11}(s) &= f_{11}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} + \frac{1}{s} \frac{1}{s^\alpha + \theta} \\ \mathcal{L}^{-1} \{ F_{11}(s) \} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ f_{11}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} + \frac{1}{s} \frac{1}{s^\alpha + \theta} \right\} \\ f_{11}(t) &= f_{11}(0) E_\alpha(-\theta t^\alpha) + 1 * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \end{aligned}$$

Luego, de la ecuación (2.25) con $K = 1$ se sigue que la solución de (B.2) es:

$$f_{11}(t) = \left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) + \frac{1}{\theta} \quad (\text{B.8})$$

Comprobemos que en efecto la función dada por (B.8) es la solución de la ecuación diferencial (B.2). Aplicando la derivada fraccionaria de Caputo a (B.8), considerando el Lema 2.2 para

la derivada de la función de Mittag-Leffler y las propiedades de la función gamma, tenemos:

$$\begin{aligned}
{}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{11} &= \frac{-\theta \left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta\tau^\alpha) d\tau \\
&= \frac{-\theta \left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^k \tau^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} d\tau \\
&= \frac{-\theta \left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right)}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \tau^{\alpha+\alpha k-1} d\tau \\
&= \frac{-\theta \left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right)}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(\alpha + \alpha k)}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\
&= -\theta \left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\
&= -\theta \left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) \\
&= -\theta \left[\left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) + \frac{1}{\theta} \right] + 1 \\
&= -\theta f_{11} + 1
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial (B.3):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \{ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{12} \} &= \mathcal{L} \{ -f_{11} - \theta f_{12} \} \\
s^\alpha F_{12}(s) - s^{\alpha-1} f_{12}(0) &= -f_{11}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} - \frac{1}{s} \frac{1}{s^\alpha + \theta} - \theta F_{12}(s) \\
F_{12}(s) &= f_{12}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} - f_{11}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^2} - \frac{1}{s} \frac{1}{(s^\alpha + \theta)^2}
\end{aligned}$$

Y aplicando la transformada inversa de Laplace, se obtiene que

$$\begin{aligned}
f_{12}(t) &= f_{12}(0) E_\alpha(-\theta t^\alpha) - f_{11}(0) E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
&\quad - 1 * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha)
\end{aligned}$$

Ahora, considerando las propiedades de la convolución y la ecuación (2.25):

$$f_{12}(t) = \bar{f}_{12} E_\alpha(-\theta t^\alpha) + \left(\frac{1}{\theta} - f_{11}(0) \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) - \frac{1}{\theta^2} \quad (\text{B.9})$$

donde $\bar{f}_{12} = (f_{12}(0) + \frac{1}{\theta^2})$. Por otro lado, siguiendo la misma metodología para la ecuación diferencial (B.4):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{13} \} &= \mathcal{L}\{-f_{12} - \theta f_{13}\} \\ s^\alpha F_{13}(s) - s^{\alpha-1} f_{13}(0) &= -f_{12}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} + f_{11}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^2} + \frac{1}{s} \frac{1}{(s^\alpha + \theta)^2} - \theta F_{13}(s) \\ F_{13}(s) &= f_{13}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} - f_{12}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^2} + f_{11}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^3} + \frac{1}{s} \frac{1}{(s^\alpha + \theta)^3}\end{aligned}$$

cuya inversa está dada por:

$$\begin{aligned}f_{13}(t) &= \left(f_{13}(0) - \frac{1}{\theta^3} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) - \left(f_{12}(0) + \frac{1}{\theta^2} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\ &+ \left(f_{11}(0) - \frac{1}{\theta} \right) E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) + \frac{1}{\theta^3}\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

Para la ecuación (B.5):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{22} \} &= \mathcal{L}\{-2f_{12} - \theta f_{22}\} \\ s^\alpha F_{22}(s) - s^{\alpha-1} f_{22}(0) &= -2F_{12}(s) - \theta F_{22}(s) \\ F_{22}(s) &= \frac{f_{22}(0) s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} - 2f_{12}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^2} + 2f_{11}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^3} + \frac{2}{s(s^\alpha + \theta)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{22}(t) &= \left[f_{22}(0) - \frac{2}{\theta^3} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) - \left[2f_{12}(0) + \frac{2}{\theta^2} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\ &+ \left[2f_{11}(0) - \frac{2}{\theta} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) + \frac{2}{\theta^3}\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Para la ecuación (B.6):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{23} \} &= \mathcal{L}\{-f_{13} - f_{22} - \theta f_{23}\} \\ s^\alpha F_{23}(s) - s^{\alpha-1} f_{23}(0) &= -F_{13}(s) - F_{22}(s) - \theta F_{23}(s) \\ F_{23}(s) &= f_{23}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} - [f_{13}(0) + f_{22}(0)] \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^2} + 3f_{12}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^3} \\ &\quad - 3f_{11}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^4} - \frac{3}{s(s^\alpha + \theta)^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{23}(t) = & \left[f_{23}(0) + \frac{3}{\theta^4} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) + \left[\frac{3}{\theta^3} - f_{13}(0) - f_{22}(0) \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
& + \left[3f_{12}(0) + \frac{3}{\theta^2} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
& + \left[\frac{3}{\theta} - 3f_{11}(0) \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
& - \frac{3}{\theta^4}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Finalmente para la ecuación (B.7):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \{ {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha f_{33} \} &= \mathcal{L} \{ -2f_{23} - \theta f_{33} \} \\
F_{33}(s) &= f_{33}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \theta} - 2f_{23}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^2} + 2[f_{13}(0) + f_{22}(0)] \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^3} \\
&\quad - 6f_{12}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^4} + 6f_{11}(0) \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \theta)^5} + \frac{6}{s(s^\alpha + \theta)^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{33}(t) = & \left[f_{33}(0) - \frac{6}{\theta^5} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) - \left[\frac{6}{\theta^4} + 2f_{23}(0) \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
& + \left[2f_{13}(0) + 2f_{22}(0) - \frac{6}{\theta^3} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
& - \left[6f_{12}(0) + \frac{6}{\theta^2} \right] E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
& + \bar{K} E_\alpha(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\theta t^\alpha) \\
& + \frac{6}{\theta^5}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

con $\bar{K} = 6f_{11}(0) - \frac{6}{\theta}$. Con base en las soluciones anteriores,

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ f_{13}(t) & f_{23}(t) & f_{33}(t) \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

Finalmente, dado que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \tag{B.15}$$

entonces

$$F_{\infty}(\theta) = \begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} f_{11}(t) & \lim_{t \rightarrow \infty} f_{12}(t) & \lim_{t \rightarrow \infty} f_{13}(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f_{12}(t) & \lim_{t \rightarrow \infty} f_{22}(t) & \lim_{t \rightarrow \infty} f_{23}(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f_{13}(t) & \lim_{t \rightarrow \infty} f_{23}(t) & \lim_{t \rightarrow \infty} f_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & -\frac{1}{\theta^2} & \frac{1}{\theta^3} \\ -\frac{1}{\theta^2} & \frac{2}{\theta^3} & -\frac{3}{\theta^4} \\ \frac{1}{\theta^3} & -\frac{3}{\theta^4} & \frac{6}{\theta^5} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Los resultados de la matriz (B.16) pueden ser obtenidos considerando el análisis realizado en el **Capítulo 5**, donde se prueba que las entradas de la matriz F_{∞} se pueden calcular como:

$$(F_{\infty}(\theta))_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{\theta^{i+j-1}} \lambda_{i,j} \quad (\text{B.17})$$

donde $\lambda_{i,j}$ es un coeficiente binomial dado por:

$$\lambda_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1} \quad (\text{B.18})$$

Para el caso $n = 3$, con $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ en la ecuación (B.17) tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1} &= \binom{0}{0} = 1 & \lambda_{1,2} &= \binom{1}{1} = 1 & \lambda_{1,3} &= \binom{2}{2} = 1 \\ \lambda_{2,1} &= \binom{1}{0} = 1 & \lambda_{2,2} &= \binom{2}{1} = 2 & \lambda_{2,3} &= \binom{3}{2} = 3 \\ \lambda_{3,1} &= \binom{2}{0} = 1 & \lambda_{3,2} &= \binom{3}{1} = 3 & \lambda_{3,3} &= \binom{4}{2} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(F_\infty(\theta))_{1,1} &= \frac{(-1)^{1+1}}{\theta^{1+1-1}} \lambda_{1,1} = \frac{1}{\theta}, & (F_\infty(\theta))_{1,2} &= \frac{(-1)^{1+2}}{\theta^{1+2-1}} \lambda_{1,2} = -\frac{1}{\theta^2}, \\
(F_\infty(\theta))_{1,3} &= \frac{(-1)^{1+3}}{\theta^{1+3-1}} \lambda_{1,3} = \frac{1}{\theta^3}, & (F_\infty(\theta))_{2,1} &= \frac{(-1)^{2+1}}{\theta^{2+1-1}} \lambda_{2,1} = -\frac{1}{\theta^2}, \\
(F_\infty(\theta))_{2,2} &= \frac{(-1)^{2+2}}{\theta^{2+2-1}} \lambda_{2,2} = \frac{2}{\theta^3}, & (F_\infty(\theta))_{2,3} &= \frac{(-1)^{2+3}}{\theta^{2+3-1}} \lambda_{2,3} = -\frac{3}{\theta^4}, \\
(F_\infty(\theta))_{3,1} &= \frac{(-1)^{3+1}}{\theta^{3+1-1}} \lambda_{3,1} = \frac{1}{\theta^3}, & (F_\infty(\theta))_{3,2} &= \frac{(-1)^{3+2}}{\theta^{3+2-1}} \lambda_{3,2} = -\frac{3}{\theta^4}, \\
(F_\infty(\theta))_{3,3} &= \frac{(-1)^{3+3}}{\theta^{3+3-1}} \lambda_{3,3} = \frac{6}{\theta^5}.
\end{aligned}$$

lo que comprueba que se obtienen los mismos resultados que en la matriz (B.16).

Bibliografía

- [1] S. K. Agrawal, M. Srivastava, y S. Das. Synchronization of fractional order chaotic systems using active control method. *Chaos Solitons Fract*, 45(6):737–752, 2012.
- [2] C. Aguilar-Ibañez, E. García-Canseco, R. Martínez-Guerra, J. C. Martínez-García, y M. S. Suarez-Castañón. An I&I-Based Observer to Solve the Output-Feedback Synchronization Problem for a Class of Chaotic Systems. *Asian J Control*, 20(4):1491–1503, 2018.
- [3] J. H. Ahrens y H. K. Khalil. High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach. *Automatica*, 45(4):936–943, 2009.
- [4] V. Andrieu, L. Praly, y A. Astolfi. High gain observers with updated gain and homogeneous correction terms. *Automatica*, 45(2):422–428, 2009.
- [5] E. Artin. *The gamma function*. Courier Dover Publications, 2015.
- [6] F. Bakhshande y D. Söffker. Proportional-integral-observer: A brief survey with special attention to the actual methods using ACC Benchmark. *IFAC-PapersOnLine*, 48(1):532–537, 2015.
- [7] S. Beale y B. Shafai. Robust control system design with a proportional integral observer. *Int J Control*, 50(1):97–111, 1989.
- [8] W. W. Bell. *Special functions for scientists and engineers*. Courier Corporation, 2004.
- [9] N. Boizot, E. Busvelle, y J. P. Gauthier. An adaptive high-gain observer for nonlinear systems. *Automatica*, 46(9):1483–1488, 2010.

-
- [10] G. Bornard y H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. En *IEEE Conference on Decision and Control*, págs. 1494–1496. 1991.
- [11] E. Bullinger y F. Allgöwer. An adaptive high-gain observer for nonlinear systems. En *IEEE Conference on Decision and Control*, págs. 4348–4353. 1997.
- [12] C. S. Chen. Optimal nonlinear observers for chaotic synchronization with message embedded. *Nonlinear Dyn*, 61(4):623–632, 2010.
- [13] J. C. Cruz-Victoria, R. Martínez-Guerra, C. A. Pérez-Pinacho, y G. C. Gómez-Cortés. Synchronization of nonlinear fractional order systems by means of $PIr\alpha$ reduced order observer. *Appl Math Comput*, 262:224–231, 2015.
- [14] A. Dabiri, M. Nazari, y E. A. Butcher. Optimal fractional state feedback control for linear fractional periodic time-delayed systems. En *IEEE American Control Conference*, págs. 2778–2783. 2016.
- [15] K. Diethelm. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer, 2010.
- [16] N. Djeghali, S. Djennoune, M. Bettayeb, M. Ghanes, y J. P. Barbot. Observation and sliding mode observer for nonlinear fractional-order system with unknown input. *ISA Trans*, 63:1–10, 2016.
- [17] M. A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J. A. Gallegos, y R. Castro-Linares. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 22(1-3):650–659, 2015.
- [18] D. Efimov, A. Polyakov, A. Levant, y W. Perruquetti. Convergence acceleration for observers by gain commutation. *Int J Control*, 91(9):2009–2018, 2018.
- [19] N. Engheta. On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism. *IEEE Trans Antennas Propag*, 44(4):554–566, 1996.

- [20] B. Fridholm, T. Wik, y M. Nilsson. Kalman filter for adaptive learning of look-up tables with application to automotive battery resistance estimation. *Control Eng Practice*, 48:78–86, 2016.
- [21] J. P. Gauthier, H. Hammouri, y S. Othman. A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. *IEEE Trans Autom Control*, 37(6):875–880, 1992.
- [22] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley, 1980.
- [23] J. F. Gómez-Aguilar, R. Razo-Hernández, y D. Granados-Lieberman. A physical interpretation of fractional calculus in observables terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response. *Rev Mex Fís*, 60(1):32–38, 2014.
- [24] J. F. Gómez-Aguilar, J. J. Rosales-García, J. J. Bernal-Alvarado, T. Córdova-Fraga, y R. Guzmán-Cabrera. Fractional mechanical oscillators. *Rev Mex Fís*, 58(4):348–352, 2012.
- [25] R. Gorenflo y A. A. Kilbas. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer, 2016.
- [26] H. Han, Y. Yang, L. Li, y S. X. Ding. Observer-based fault detection for uncertain nonlinear systems. *J Frankl Inst*, 355(3):1278–1295, 2018.
- [27] M. F. Hassan. Observer-based controller for discrete-time systems: a state dependent Riccati equation approach. *Nonlinear Dyn*, 70(1):693–707, 2012.
- [28] A. Karami-Mollaei, H. Tirandaz, y O. Barambones. On dynamic sliding mode control of nonlinear fractional-order systems using sliding observer. *Nonlinear Dyn*, 92(3):1379–1393, 2018.
- [29] H. K. Khalil. Nonlinear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, 2(5):5–1, 1996.
- [30] H. K. Khalil. High-gain observers in nonlinear feedback control. En *IEEE International Conference on Control, Automation and Systems*, págs. 47–57. 2008.
- [31] D. Koenig y S. Mammar. Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems. *IEEE Trans Autom Control*, 47(12):2057–2062, 2002.

- [32] S. R. Kou, D. L. Elliott, y T. J. Tarn. Exponential observers for nonlinear dynamic systems. *Inf Control*, 29(3):204–216, 1975.
- [33] Y. H. Lan, L. L. Wang, L. Ding, y Y. Zhou. Full-order and reduced-order observer design for a class of fractional-order nonlinear systems. *Asian J Control*, 18(4):1467–1477, 2016.
- [34] S. Lang. *Complex Analysis*. Addison-Wesley, 1977.
- [35] S. M. Lee. The double-simple pendulum problem. *Am J Phys*, 38(4):536–537, 1970.
- [36] C. Li y G. Chen. Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations. *Physica A*, 341:55–61, 2004.
- [37] C. Li y C. Tao. On the fractional Adams method. *Comput Math Appl*, 58(8):1573–1588, 2009.
- [38] Y. Li y Y. Chen. Fractional order linear quadratic regulator. En *IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications*, págs. 363–368. 2008.
- [39] Y. Li, Y. Chen, y I. Podlubny. Mittag–Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45(8):1965–1969, 2009.
- [40] M. Liu, L. Zhang, P. Shi, y Y. Zhao. Fault estimation sliding-mode observer with digital communication constraints. *IEEE Trans Autom Control*, 63(10):3434–3441, 2018.
- [41] J. G. Lu. Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order Arneodo’s systems. *Chaos Solitons Fract*, 26(4):1125–1133, 2005.
- [42] D. G. Luenberger. Observing the State of a Linear System. *IEEE Trans Milit Electron*, 8(2):74–80, 1964.
- [43] R. Martínez-Guerra, O. Martínez-Fuentes, y J. J. Montesinos-García. *Algebraic and differential methods for nonlinear control theory: Elements of commutative algebra and algebraic geometry*. Springer, 2019.

- [44] R. Martínez-Guerra y J. L. Mata-Machuca. Fractional generalized synchronization in a class of nonlinear fractional order systems. *Nonlinear Dyn*, 77(4):1237–1244, 2014.
- [45] R. Martínez-Guerra, A. Poznyak, y V. Diaz De Leon. Robustness property of high-gain observers for closed-loop nonlinear systems: Theoretical study and robotics control application. *Int J Syst Sci*, 31(12):1519–1529, 2000.
- [46] A. M. Mathai y H. J. Haubold. *Special functions for applied scientists*, tomo 4. Springer, 2008.
- [47] D. Matignon y B. d’Andréa Novel. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. En *Comput Eng Syst Appl*, tomo 2, págs. 952–956. 1996.
- [48] F. Meléndez-Vázquez, O. Martínez-Fuentes, y R. Martínez-Guerra. Fractional fault-tolerant dynamical controller for a class of commensurate-order fractional systems. *Int J Syst Sci*, 49(1):196–210, 2017.
- [49] F. Meléndez-Vázquez y R. Martínez-Guerra. Reduced-order fractional integral observer for synchronisation and anti-synchronisation of fractional-order chaotic systems. *IET Control Theory Appl*, 12(12):1755–1762, 2018.
- [50] K. S. Miller y B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley-Interscience, 1993.
- [51] M. E. Mousa, M. A. Ebrahim, y M. A. Moustafa Hassan. Optimal Fractional Order Proportional—Integral—Differential Controller for Inverted Pendulum with Reduced Order Linear Quadratic Regulator. En *Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems*, págs. 225–252. Springer, 2017.
- [52] C. Muñoz-Montero, L. V. García-Jiménez, L. A. Sánchez-Gaspariano, C. Sánchez-López, V. R. González-Díaz, y E. Tlelo-Cuautle. New alternatives for analog implementation of fractional-order integrators, differentiators and PID controllers based on integer-order integrators. *Nonlinear Dyn*, 90(1):241–256, 2017.

- [53] H. Nijmeijer y I. M. Y. Mareels. An observer looks at synchronization. *IEEE Trans Circuits Syst I Fundam Theory Appl*, 44(10):882–890, 1997.
- [54] P. G. Nutting. A new general law of deformation. *J Frankl Inst*, 191(5):679–685, 1921.
- [55] P. G. Nutting. A general stress-strain-time formula. *J Frankl Inst*, 235(5):513–524, 1943.
- [56] J. M. Ortega y W. C. Rheinboldt. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. Academic Press, 1970.
- [57] M. E. Ortiz-Quisbert, M. A. Duarte-Mermoud, F. Milla, R. Castro-Linares, y G. Lefranc. Optimal fractional order adaptive controllers for AVR applications. *Electrical Eng*, 100(1):267–283, 2018.
- [58] N. Oucief, M. Tadjine, y S. Labiod. A new methodology for an adaptive state observer design for a class of nonlinear systems with unknown parameters in unmeasured state dynamics. *Trans Inst Measur Control*, 40(4):1297–1308, 2018.
- [59] S. Pashaei y M. Badamchizadeh. A new fractional-order sliding mode controller via a nonlinear disturbance observer for a class of dynamical systems with mismatched disturbances. *ISA Trans*, 63:39–48, 2016.
- [60] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.
- [61] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fract Calc Appl Anal*, 5(4):367–386, 202.
- [62] S. Raghavan y J. K. Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int J Control*, 59(2):515–528, 1994.
- [63] F. Riewe. Mechanics with fractional derivatives. *Phys Rev E*, 55(3):3581, 1997.
- [64] B. Ross. The development of fractional calculus 1695–1900. *Hist Math*, 4(1):75–89, 1977.
- [65] S. G. Samko, A. A. Kilbas, y O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and Breach Sci. Publishers, 1993.

- [66] G. W. Scott Blair y M. Reiner. The rheological law underlying the nutting equation. *Appl Sci Res*, 2(1):225, 1951.
- [67] D. Sierociuk, W. Malesza, y M. Macias. Derivation, interpretation, and analog modelling of fractional variable order derivative definition. *Appl Math Model*, 39(13):3876–3888, 2015.
- [68] D. Söffker, T. J. Yu, y P. C. Müller. State estimation of dynamical systems with nonlinearities by using proportional-integral observer. *Int J Syst Sci*, 26(9):1571–1582, 1995.
- [69] J. E. Solís-Pérez, J. F. Gómez-Aguilar, L. Torres, R. F. Escobar-Jiménez, y J. Reyes-Reyes. Fitting of experimental data using a fractional Kalman-like observer. *ISA Trans*, págs. 1–17, 2018.
- [70] G. W. Stewart. *Introduction to matrix computations*. Elsevier, 1973.
- [71] V. E. Tarasov. Geometric interpretation of fractional-order derivative. *Fract Calc Appl Anal*, 19(5):1200–1221, 2016.
- [72] M. Tavazoei y M. H. Asemi. Fractional-order-dependent global stability analysis and observer-based synthesis for a class of nonlinear fractional-order systems. *Int J Robust Nonlinear Control*, 28(15):4549–4564, 2018.
- [73] A. Tornambè. High-gain observers for non-linear systems. *Int J Syst Sci*, 23(9):1475–1489, 1992.
- [74] C. Tréangle, M. Farza, y M. M’Saad. Filtered high gain observer for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs. *Automatica*, 101:197–206, 2019.
- [75] C. Tricaud y Y. Chen. Time-optimal control of systems with fractional dynamics. *Int J Differ Equ*, 2010, 2010.
- [76] A. Van Der Schaft. On nonlinear observers. *IEEE Trans Autom Control*, 30(12):1254–1256, 1985.
- [77] Y. H. Wei, Z. Y. Sun, Y. S. Hu, y Y. Wang. On fractional order adaptive observer. *Int J Autom Comput*, 12(6):664–670, 2015.

-
- [78] X.h. Xia y W.b. Gao. On exponential observers for nonlinear systems. *Syst Control Lett*, 11(4):319–325, 1988.
- [79] X. J. Yang, J. A. Tenreiro Machado, C. Cattani, y F. Gao. On a fractal LC-electric circuit modeled by local fractional calculus. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 47:200–206, 2017.
- [80] T. Zhan, J. Tian, y S. Ma. Full-order and reduced-order observer design for one-sided Lipschitz nonlinear fractional order systems with unknown input. *Int J Control Automat Syst*, 16(5):2146–2156, 2018.
- [81] B. Zhang, J. Zhuang, H. Liu, J. Cao, y Y. Xia. Master–slave synchronization of a class of fractional-order Takagi–Sugeno fuzzy neural networks. *Adv Differ Equ*, 2018(1):473, 2018.
- [82] W. Zhang, S. Zhou, H. Li, y H. Zhu. Chaos in a fractional-order Rössler system. *Chaos Solitons Fract*, 42(3):1684–1691, 2009.
- [83] S. Zheng y W. Li. Robust stabilization of fractional-order plant with general interval uncertainties based on a graphical method. *Int J Robust Nonlinear Control*, 28(5):1672–1692, 2018.