CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Modos deslizantes y representaciones geométricas: control de cuerpos rígidos

TESIS

Que presenta

GIAN CARLO GÓMEZ CORTÉS

Para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

en la especialidad de:

CONTROL AUTOMÁTICO

Directores de tesis:

Dr. Fernando Castaños Luna **Dr. Jorge Angel Dávila Montoya**

Ciudad de México Septiembre, 2020

Agradecimientos

Todo proyecto en nuestras vidas se ve influenciado por diversos actores y eventos a lo largo de su desarrollo. El presente trabajo no es la excepción, agradezco a todos aquellos que contribuyeron para su desarrollo.

En especial quiero agradecer a mi esposa Gloria, por acompañarme a lo largo de este camino, por su comprensión y apoyo. A mi hijo Sebastián, por su inocencia y espontaneidad que siempre resultan tan refrescantes. A mi madre y a mi hermano por el apoyo que me han brindado de toda la vida. A los abuelos maternos de Sebastián por todas sus atenciones y el soporte que nos han brindado.

A mis asesores, el Dr. Fernando Castaños y el Dr. Jorge Dávila, por confiar en mí para este proyecto y brindarme todo su apoyo en momentos complicados, gracias por sus consejos y guía.

A los miembros del jurado en mi examen predoctoral, por sus observaciones y recomendaciones y por aceptar participar ahora en el examen de grado.

Finalmente, quiero agradecer a las instituciones que me apoyaron y a su personal. En específico, al Centro de Investigación y Estudios Avanzados por brindarme todas las facilidades para desarrollar este trabajo, a los miembros del Departamento de Control Automático, por contribuir a mi formación, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por financiar mis estudios durante los primeros dos años del doctorado y al Banco de México por todo el apoyo que me ha brindado hasta la fecha, como miembro de su comunidad, para continuar con el proyecto y llegar a esta etapa.

Resumen

En este trabajo se estudia el diseño de controladores por modos deslizantes en el grupo especial ortogonal $SO(3)$, en la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ y en el grupo especial euclidiano $SE(3)$. En todos los casos se busca explotar las propiedades algebraicas y topológicas de $SO(3)$ y $SE(3)$ como grupos de Lie y de $\mathbb{S}^2$ como espacio homogéneo. Debido a que $SO(3)$ y $\mathbb{S}^2$ permiten describir el movimiento de rotación de cuerpos rígidos, los controladores propuestos están dirigidos a resolver el problema de control de la orientación tanto en el caso de regulación como en el caso de seguimiento y la traslación en conjunto con la rotación de un cuerpo rígido en el caso del control en $SE(3)$. En particular, para los controladores que diseñamos en sistemas sobre grupos de Lie, la superficie de deslizamiento se diseña de modo que la variable deslizante luce como un elemento del conjunto $\mathfrak{so}(3)$ para el control de orientación y $\mathfrak{se}(3)$ para el movimiento mas general (rotación mas traslación). En el caso de la esfera unitaria, se muestra que la superficie de deslizamiento conserva las propiedades topológicas y algebráicas del espacio de configuración, es decir, la superficie deslizante es un espacio homogeneo. Los algoritmos de control obtenidos se caracterizan por ser robustos y garantizar la estabilidad casi global. El análisis de estabilidad para los sistemas en lazo cerrado se lleva a cabo por medio de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Finalmente, por medio de simulaciones se ilustra el funcionamiento de los controladores.

Abstract

In this thesis, we explore the design of sliding mode controllers in Non-Euclidean spaces such as the Special Orthogonal Group $SO(3)$, the Unit Sphere $\mathbb{S}^2$ and the Special Euclidean Group $SE(3)$. In all cases, we seek to exploit the algebraic and topological properties of $SO(3)$ and $SE(3)$ as Lie groups and $\mathbb{S}^2$ is considered as a homogeneous space. Since $SO(3)$ and $\mathbb{S}^2$ allow us to describe the attitude motion of rigid bodies, the proposed controllers are aimed to solve the attitude control problem for regulation and tracking. The translation is coupled with the rotation of a rigid body by using the $SE(3)$ configuration. In particular, we propose controllers for systems in Lie Groups, which consider a sliding surface designed in such a way that the sliding variable looks like an element in $\mathfrak{so}(3)$ when we treat the attitude control problem and looks like an element in $\mathfrak{se}(3)$ when the most general motion (rotation plus translation) is considered. In the case of the unit sphere, we show that the sliding surface keeps the algebraic and topological properties of the configuration space, i.e. the sliding surface is a homogeneous space. The control algorithms obtained are robust and assure almost global stability. Stability analysis for closed-loop systems is carried out using Lyapunov stability theory. Finally, through simulations, we illustrate the performance of the different controllers.

Índice general

Índice general **IX**

1. Introducción **1**
1.1. Antecedentes 1
1.2. Objetivos 3
1.3. Estructura del trabajo 3

2. Orientación de cuerpos rígidos **5**
2.1. El cuerpo rígido 5
2.2. Movimiento de cuerpos rígidos 5
2.3. Representaciones de la orientación 6
2.3.1. Matriz de rotación 7
2.3.2. Ángulos de Euler 10
2.3.3. Cuaterniones 14
2.3.4. Representación eje-ángulo 19
2.3.5. Orientación reducida 22

3. Grupos matriciales **25**
3.1. El grupo lineal general $GL_n(\mathbb{R})$ 25
3.2. Grupo especial ortogonal $SO(n)$ 26
3.3. Grupo especial Euclidiano $SE(n)$ 27
3.4. Álgebras de Lie 28
3.4.1. Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ 29
3.4.2. Álgebra de Lie $\mathfrak{se}(3)$ 31
3.5. Espacios homogeneos 32

4. Cinemática y dinámica de cuerpos rígidos **35**
4.1. Cinemática en terminos de la matriz de rotación 35
4.2. Cinemática de la orientación reducida 37
4.3. Dinámica del cuerpo rígido 37

5. Estabilidad y control por modos deslizantes **39**
5.1. Sobre la estabilidad en sistemas dinámicos 39
5.2. Control por modos deslizantes 42
5.2.1. Definiciones y características del control por modos deslizantes 43
5.2.2. El modo deslizante 44
5.2.3. Condiciones de alcanzabilidad 45
5.2.4. Ejemplo de diseño: control por modos deslizantes 46

6. Modos deslizantes y representaciones geométricas: control de cuerpos rígidos 49
6.1. El problema con las superficies lineales . . . 49
6.2. Modos deslizantes en $SO(3)$ . . . 51
6.2.1. Ecuaciones del movimiento y la superficie deslizante . . . 52
6.2.2. Estabilidad de la dinámica de orden reducido . . . 54
6.2.3. Ley de alcanzabilidad de la superficie deslizante . . . 55
6.2.4. Estabilidad exponencial sobre la superficie deslizante . . . 56
6.3. Simulaciones: control en $SO(3)$ . . . 56
6.3.1. El fenómeno de unwinding en la representación por cuaterniones . . . 57
6.3.2. El problema de seguimiento en $SO(3)$ . . . 57
6.4. Modos deslizantes en $\mathbb{S}^2$ . . . 61
6.4.1. Diseño del controlador por modos deslizantes en $\mathbb{S}^2$ . . . 62
6.4.2. La variedad deslizante como espacio homogéneo . . . 63
6.4.3. Alcanzabilidad de la variedad deslizante S . . . 64
6.4.4. Estabilidad del sistema de orden reducido . . . 65
6.4.5. Otro ángulo de la dinámica de orden reducido . . . 66
6.5. Simulaciones . . . 67
6.6. El caso de seguimiento en $\mathbb{S}^2$ . . . 71
6.6.1. Alcanzabilidad de la superficie deslizante $\mathbb{S}^2$ . . . 72
6.6.2. El sistema de orden reducido: estabilidad en $\mathbb{S}^2$ . . . 72
6.6.3. Simulaciones para el problema de seguimiento en $\mathbb{S}^2$ . . . 74
6.7. Modos deslizantes en $SE(3)$ . . . 79
6.7.1. Ecuaciones del movimiento en $SE(3)$ . . . 79
6.7.2. Dinámica del error en $SE(3)$ . . . 80
6.7.3. La superficie deslizante . . . 81
6.7.4. Alcanzabilidad de la superficie deslizante . . . 81
6.7.5. Estabilidad del sistema de orden reducido . . . 82
6.7.6. Simulaciones: control en $SE(3)$ . . . 83

7. Conclusiones 87
7.1. Trabajo a futuro . . . 88

A. Demostraciones del Capítulo 6 89

B. Identidades mas comunes en este trabajo 91

C. Definiciones algebraicas 93

Bibliografía 95

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

La idealización del cuerpo rigido tiene diversas aplicaciones; en ingeniería, por ejemplo, mediante esta idea es posible modelar el movimiento de robots, naves espaciales, aviones, satélites, vehículos submarinos, antenas (por mencionar algunos) [54, 63, 71]. Otras aplicaciones relacionadas con el uso de la idea de cuerpo rigido se pueden consultar en [33, 75] y [35].

Al describir el movimiento de cuerpos rígidos, este puede descomponerse en dos tipos: el movimiento de traslación, que se refiere al desplazamiento del cuerpo respecto a un sistema de referencia inercial, y la orientación que se refiere al movimiento de un marco de referencia que se desplaza de forma angular junto al cuerpo respecto a un marco de referencia fijo en el cuerpo [68]. Este trabajo nos enfocaremos en primera instancia al movimiento de orientación considerando y posteriormente estudiaremos el caso que involucra tanto traslación como rotación, todo esto enfocado a sistemas completamente actuados.

Existen diferentes formas de representar la orientación de un cuerpo. La cantidad de parámetros que emplean puede ser muy distinta; podemos encontrar representaciones que emplean 3, 4, 5 o mas parámetros [69]. Algunas de las mas comunes son los ángulos de Euler, los parámetros de Rodrigues, los parámetros de Rodrigues modificados, la representación eje-ángulo, los parámetros de Caley-Klein, los quaterniones y las matrices de rotación [66, 69, 56, 30]. Cada una de las representaciones posee ventajas y desventajas; al elegir alguna de ellas, las principales características a considerar son la unicidad (representación única) y la globalidad (libre de singularidades). De las representaciones mencionadas, solo las matrices de rotación y los quaterniones son representaciones globales de la orientación, (i.e. están libres de singularidades); debido a esta característica y al costo computacional que implicaba el uso de matrices de rotación, los cuaterniones han recibido especial atención [67, 41]. Desde el punto de vista de la unicidad, solamente las matrices de rotación cuentan con esta característica, por lo que son las únicas que permiten representar la orientación de forma única y global.

El problema de control de la orientación de un cuerpo ha sido abordado anteriormente a partir de las diferentes representaciones [80, 81, 52]. Principalmente se pueden encontrar trabajos como [80], [47] y [20] donde se estudia el problema de control mediante el uso de cuaterniones; en [18] y [63] se emplean los parámetros de Rodrigues para generar leyes de control; el uso de los ángulos de Euler se puede encontrar facilmente en investigaciones sobre el control de orientación de cuadrirotores [28, 62].

Recientemente, el uso de las matrices de rotación ha tomado importancia debido a que represen-

tan la orientación de forma global y única; trabajos como los presentados en [16, 60, 6, 49, 15] hacen uso de esta representación para generar leyes de control libres de singularidades y del fenómeno de *unwinding* [5], ocasionado por la no unicidad de la representación y que puede provocar que el sistema realice maniobras innecesarias que implican un desperdicio de energía.

Las matrices de rotación por sus características forman el grupo $SO(3)$, conocido como grupo especial ortogonal y definido como $SO(3) := \{R \mid RR^T = R^T R = I \ ; \det(R) = 1\}$, donde R es una matriz de rotación . Este grupo dentro de la teoría de Lie pertenece a los grupos matriciales de Lie [31]. Desde la perspectiva de la teoría de control, existen trabajos donde se han estudiado sistemas de control definidos sobre grupos de Lie, como ejemplo se tienen los siguientes trabajos: [9] donde se abordan los temas de controlabilidad, observabilidad y control óptimo; en [49] se presenta un controlador por backstepping con acción integral para el problema de regulación de la salida en sistemas definidos sobre grupos matriciales de Lie. El uso de controles proporcionales derivativos en el grupo especial Euclidiano $SE(3)$ se trata en [12]; en [44] se diseña un controlador en $SE(3)$ para un cuadrirotor por medio de técnicas geométricas y en [36] se estudia el problema de sincronización en $SE(3)$. En [19] se aborda el problema de estabilización de un sistema cinemático en $SE(3)$ mediante un controlador por realimentación de salida, en él consideran la geometría del espacio de configuraciones del sistema para obtener estabilidad casi global; dicho trabajo lo extienden en [14] para el problema de estabilización casi global en $SE(3)$, el sistema lo consideran completamente actuado y emplean la cinemática y dinámica del cuerpo rígido. En [73] se aborda el problema de consenso en $SE(3)$ considerando sistemas multi-agente con topologías de interconexión directa y conmutada, en el árticulo se sigue la estrategia de diseñar primero los controladores para la cinemática, i.e. la velocidades actúan como controladores; posteriormente, el resultado se extiende a la dinámica del sistema, donde los pares y fuerzas son el control.

Gracias a las herramientas que brinda la teoría de Lie y las características del grupo $SO(3)$, en los últimos años, el problema de control de la orientación bajo la representación de las matrices de rotación ha cobrado importancia pues, en esta representación, es posible generar leyes de control libres de singularidades gracias a la representación global de la orientación [16], y libres del fenómeno de unwinding que surge como consecuencia de la no unicidad en la representación [5]. Dentro de los trabajos dedicados al diseño de controladores en $SO(3)$ se pueden encontrar estudios dedicados al problema de seguimiento en $SO(3)$ como [61], donde se diseña un control con rechazo de perturbaciones e independencia de la matriz de inercia; en [60] y [6] se presentan controladores que garantizan convergencia en tiempo finito a un equilibrio deseado para el caso nominal y a una vecindad del equilibrio deseado para el caso perturbado. En [43] se muestra un controlador híbrido robusto que garantiza estabilidad global exponencial para el problema de seguimiento en $SO(3)$; un estudio sobre la orientación de cuerpos rígidos se presenta en [16], en él se explican, entre otras cosas, las ventajas de emplear la representación en $SO(3)$ y el uso de una representación alternativa para la orientación, conocida como orientación reducida. En [26] nosotros presentamos el diseño de un controlador por modos deslizantes, el cual considera la representación en $SO(3)$ para el diseño de la variedad deslizante, tal diseño forma parte del presente trabajo.

La orientación reducida tiene como objetivo emplear únicamente aquella información, presente en la matriz de rotación, que es útil para representar la orientación del vector o eje que se desee apuntar. Para definirla, de acuerdo con [13, 16], se considera un vector $f \in \mathbb{S}^2$, alineado con alguno de los ejes principales de un marco de referencia $\mathcal{F}$ y expresado en el mismo marco. Su representación en el marco de referencia del cuerpo estará dada por $\Gamma = R^T f \in \mathbb{S}^2$, de la expresión anterior se puede notar que Γ contiene únicamente la información útil de la matriz de rotación R para expresar la orientación del vector f. Dentro de los trabajos dedicados al control en orientación reducida se puede encontrar [16], en él se muestra un controlador del tipo proporcional derivativo para el

problema de regulación en la orientación reducida de un cuerpo rígido actuado en sus tres ejes principales; en [13] se abordan los casos de regulación y seguimiento mediante controles diseñados sobre la esfera $\mathbb{S}^2$, los controladores se aplican a un modelo subactuado de un satélite; el problema de control para realizar el seguimiento de trayectorias en $\mathbb{S}^2$ y busqueda mediante la orientación reducida se muestra en [59] y [15] usa la orientación reducida para generar una ley de control que estabiliza un péndulo $3D$ en uno de sus puntos de equilibrio. En [27] presentamos el diseño del controlador por modos deslizantes considerando la representación en $\mathbb{S}^2$, en el se muestra que la superficie deslizante se luce como un espacio homogéneo para el caso de regulación, éste resultado también forma parte del presente trabajo.

Si bien, diseñar controladores en este tipo de representaciones brinda muchas ventajas, existe una desventaja en el caso de aquellos controladores continuos en el tiempo y es la imposibilidad de obtener estabilidad global debido a la existencia de multiples puntos de equilibrio [5, 40]; sin embargo, han surgido definiciones para tratar la estabilidad en este tipo de sistemas. La mas usada, en el contexto del tipo de sistemas que se abordan en este trabajo es la estabilidad casi global definida en [40] y empleada en trabajos como [13, 59, 49, 15, 51, 61]. En el caso de controladores que buscan garantizar la estabilidad en tiempo finito, existe una definición alternativa que es la estabilidad casi global en tiempo finito, esta definición se ha usado en [60, 6, 79].

Con lo expuesto hasta ahora, se puede notar que abordar el problema de control en cuerpos rígidos desde las representaciones en $SO(3)$, $SE(3)$ y $\mathbb{S}^2$ permite generar controladores libres de singularidades y del fenómeno de unwinding; por otra parte, tales controladores deben ser robustos debido a las aplicaciones en las que son involucrados. En vista de esto, en este trabajo se enfoca en el desarrollo de controladores por modos deslizantes para representaciones geométricas que permiten modelar el movimiento de cuerpos rígidos.

1.2. Objetivos

El objetivo de esta investigación es diseñar controladores por modos deslizantes consierando representaciones geométricas que describen el movimiento de cuerpos rígidos. Además del diseño, se busca describir las características que presentan las superficies deslizantes seleccionadas.

1.3. Estructura del trabajo

La estructura que sigue este trabajo es la siguiente. En el Capítulo 2 se describen brevemente los tipos de movimiento que presenta un cuerpo rígido haciendo énfasis en la orientación del cuerpo, que es el tipo de movimiento que se desea controlar. Se muestran algunas de las parametrizaciones empleadas comúnmente para representar la orientación de un cuerpo. El Capítulo 3, sobre grupos matriciales, presenta diferentes grupos matriciales que a la vez son grupos de Lie, introduce los conceptos sobre grupos y álgebras de Lie. La cinemática y dinámica del cuerpo rígido se describen en el Capítulo 4, se detalla la forma de obtener las ecuaciones de la cinemática del cuerpo rígido en representaciones como $SO(3)$ y $\mathbb{S}^2$, las ecuaciones de la dinámica son las ecuaciones de Euler para el movimiento rotacional. En el Capítulo 5 se presentan, para sistemas dinámicos, las definiciones y teoremas sobre estabilidad que serán utilizados para el análisis de estabilidad de los controladores diseñados en este trabajo; también se presenta una introducción al control por modos deslizantes. Los resultados obtenidos en esta investigación se reportan en el Capítulo 6, se inicia con el diseño del controlador en $SO(3)$, seguido de los controladores en $\mathbb{S}^2$ y $SE(3)$. En el Capítulo 7, se dan las conclusiones y el trabajo que sigue relacionado con esta investigación. Finalmente, en los apéndices se presentan algunas pruebas del Capítulo 6 y se incluyen identidades que resultan de utilidad para seguir las pruebas de los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Orientación de cuerpos rígidos

2.1. El cuerpo rígido

Una de las idealizaciones más importantes en física e ingeniería es la del *cuerpo rígido*. De acuerdo con [25], *"Un cuerpo rígido se define como un sistema de puntos masa sujetos a restricciones holonómicas*[1] *que establecen como constante la distancia entre cualquier par de puntos del cuerpo durante el movimiento".*

Esto equivale a decir que el cuerpo no es deformable. A pesar de ser una consideración bastante fuerte, permite obtener resultados aplicables en diversas áreas. Algunos ejemplos son el diseño de robots, automóviles, vehículos espaciales, diseño de videojuegos, biomecánica, entre otras.

2.2. Movimiento de cuerpos rígidos

Al estudiar el movimiento de cuerpos rígidos se pueden distinguir dos tipos: el movimiento de traslación, que se refiere al cambio en la posición que ocupa el cuerpo respecto a un origen definido en un marco de referencia inercial[2]; y el rotacional, que estudia el cambio en la orientación del cuerpo respecto a un marco de referencia fijo, cuyo origen coincide con el marco de referencia del cuerpo; en este trabajo abordaremos problemas de control que involucran ambos tipos de movimiento.

Para describir el movimiento de un cuerpo se requieren al menos 6 parámetros, 3 para describir la traslación y 3 para la rotación. En la práctica es común que dichos parámetros resulten desconocidos, en cuyo caso, se deben emplear parámetros adicionales (como velocidades o aceleraciones) para conocer la configuración que describe el movimiento del cuerpo.

Considerando que se conocen los parámetros que definen la traslación y la rotación, la posición del cuerpo se expresa mediante la siguiente expresión:

$$x = R\bar{x} + a \tag{2.1}$$

Donde $x \in \mathbb{R}^3$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ son los vectores expresados en los marcos de referencia inercial y del cuerpo respectivamente, ambos marcos de referencia están relacionados por una matriz R. El vector

[1] Una restricción holonómica para un conjunto de coordenadas es aquella que se puede expresar como $R(q_1, ..., q_n, t) = 0$ donde t es el tiempo y $q_1, ..., q_n$ son las coordenadas [25].

[2] En mecánica clásica un marco de referencia inercial es aquel que se encuentra en reposo o se mueve con velocidad relativa constante respecto a otro marco de referencia [72].

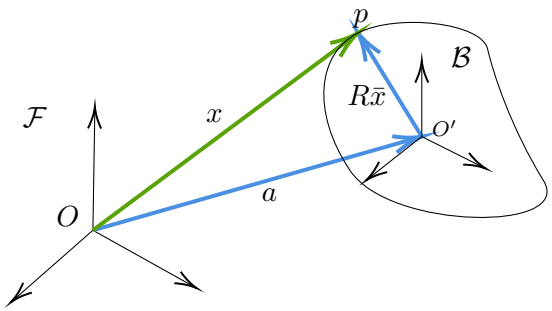


Figura 2.1: Posición de un cuerpo rígido en un marco de referencia $\mathcal{B}$ respecto a un marco de referenica $\mathcal{F}$. La figura representa la posición indicada por la ecuación (2.1).

a de la ecuación (2.1) representa al vector de posición del centro de masa del cuerpo respecto al sistema inercial.

La expresión anterior está contenida en el llamado teorema de Chasles [25, 8][3], el cual establece que el movimiento mas general de un cuerpo se puede definir mediante una traslación a lo largo de un eje, seguida de una rotación alrededor del mismo eje (a este tipo de movimiento se le conoce como *screw motion* [3]). Esta distinción marcada entre los dos tipos de movimiento permite estudiarlos por separado.

Mas adelante se verá que los movimientos rígidos definidos por la ec. (2.1), están representados dentro de los grupos de Lie como el grupo especial Euclidiano $SE(3)$.

2.3. Representaciones de la orientación

El problema de la orientación de un cuerpo rígido consiste en parametrizar la orientación del cuerpo relativa a un marco de referencia en términos de un conjunto de coordenadas $\{q_1, ..., q_n\}$ que reciben el nombre de parámetros de orientación.

Para representar la orientación del cuerpo se emplean dos marcos de referencia, uno permanece fijo mientras el otro tiene un desplazamiento angular respecto al marco de referencia fijo. El marco que se desplaza suele estar alineado con los ejes principales del cuerpo, ambos marcos tienen en común el origen.

Existen diferentes formas de representar la orientación de cuerpos rígidos y la cantidad de parámetros que emplean puede ser muy distinta, así podemos encontrar representaciones que emplean 3, 4, 5 o mas parámetros [69]. Dentro de las representaciones mas conocidas están los ángulos de Euler y los parámetros de Rodrigues que utilizan 3 parámetros, los cuaterniones y la representación eje-ángulo usan 4 parámetros mas una restricción y las matrices de rotación que emplean un conjunto de nueve parámetros con restricciones como la ortonormalidad de la matriz y que el determinante de esta sea 1.

Se pueden encontrar diversos artículos dedicados a describir y comparar diferentes formas de representar la orientación, algunos hacen énfasis en las parametrizaciones mas utilizadas en vehículos aereos como [71, 56], mientras otros prestan mayor interés al álgebra y geometría de estas [30], [66] y [29] (por mencionar algunos). En las siguientes secciones se describirán las representaciones por: matrices de rotación, ángulos de Euler, la representación eje-ángulo, cuaterniones y el caso especial de la orientación reducida.

[3]Se cree que otros personajes como Mozzi o Cauchy contaban con este resultado antes que Chasles; sin embargo en la literatura se hace referencia a este último.

2.3.1. Matriz de rotación

Las matrices de rotación son operadores lineales que en el estudio de cuerpos rígidos permiten relacionar dos marcos de referencia definidos por bases ortonormales.

Diversos libros enfocados al estudio de la dinámica de vehículos espaciales presentan una interpretación geométrica de la matriz de rotación partiendo del producto punto entre los vectores base de los marcos de referencia [68, 71, 81], i.e. proyectan la base de un marco de referencia en el otro y viceversa, esto deriva en una matriz cuyas entradas son los cosenos de los ángulos formados entre los vectores base de un marco respecto al otro; de aquí que la matriz de rotación suela llamarse matriz de cosenos directores.

Otros autores prefieren seguir una interpretación puramente algebraica de la matriz de rotación [25, 66]. Para el propósito de esta sección, se sigue una interpretación algebraica y se recurrirá parcialmente a la interpretación geométrica cuando se aborde la descripción eje-ángulo y la orientación reducida en las secciones 2.3.4 y 2.3.5, respectivamente.

Se empieza por definir los marcos de referencia en términos de bases ortogonales, físicamente estos marcos tendrán en común el origen. Sean $\{f_1, f_2, f_3\}$ y $\{b_1, b_2, b_3\}$ las bases ortogonales que definen a los marcos de referencia $\mathcal{F}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente, entonces cualquier vector arbitrario en el mismo espacio se puede representar como combinación lineal de los elementos de la base del marco $\mathcal{F}$ o de los elementos de la base del marco $\mathcal{B}$, e.g., considere un vector x, este queda representado como:

$$x = \sum_{j=1}^{3} x_j f_j = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = \sum_{j=1}^{3} x'_j b_j = x'_1 b_1 + x'_2 b_2 + x'_3 b_3 \tag{2.2}$$

Por otra parte podemos relacionar ambas bases a través de un operador lineal que llamaremos R.

$$b_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} f_j \tag{2.3}$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} R^T_{ij} b_j \tag{2.4}$$

donde R^T es la matriz transpuesta de R. Entonces un vector con componentes en el marco de referencia $\mathcal{F}$ se puede expresar en términos de la base del marco $\mathcal{B}$ como:

$$x_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{3} x_i (\sum_{j=1}^{3} R^T_{ij} b_j) \tag{2.5}$$

y viceversa

$$x_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{3} x'_i (\sum_{j=1}^{3} R_{ij} f_j) \tag{2.6}$$

A partir de esto, podemos decir que el operador R nos permite ir de un marco de referencia a otro definido en el mismo espacio y con un origen común.

Ejemplo 2.1. *La matriz identidad I representa una rotación de 0 grados.*

Ejemplo 2.2. *Considere la base canónica* $e_1 = (1,0,0)^\top$, $e_2 = (0,1,0)^\top$ *y* $e_3 = (0,0,1)^\top$, *la matriz cuyas columnas son los vectores base* b_1, b_2 *y* b_3 *es una matriz que rota la base canónica* e_1, e_2 *y* e_3 *al marco de referencia* $\mathcal{B}$

Las propiedades mencionadas en las siguientes líneas son características de la matriz de rotación.

Considere nuevamente al operador R junto con las expresiones (2.3) y (2.4).

$$b_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} R_{ij}^T b_j \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) implica que $RR^T = I$ donde I es la matriz identidad. De lo anterior también se obtiene el siguiente resultado:

$$\det(I) = \det(R)^2 = \det(RR^T) = \det(R)\det(R^T) = 1 \therefore \det(R) = \det(R^T) = \pm 1 \tag{2.8}$$

Las matrices que poseen las características anteriores reciben el nombre de matrices ortonormales. En particular, las matrices de rotación cumplen con las propiedades $RR^T = I$ y $\det(R) = 1$, este tipo de matrices están bien clasificadas en la teoría de grupos y pertenecen al grupo denominado SO(3)[4]. Mas adelante se estudiarán algunos de los grupos matriciales.

Otra propiedad importante de las matrices de rotación es que mantienen invariante la longitud y el ángulo entre vectores, esto equivale a decir que el producto interno (en este caso el producto punto) es invariante, por lo que también se les llaman operadores isométricos.

Sean r, $s \in \mathbb{R}^3$ *y* R *una matriz de rotación, efectuando el producto interno* $\langle r, s\rangle$ *se tiene lo siguiente:*

$$\langle r, s\rangle = r^T s = r^T I s = r^T R^T R s = (Rr)^T Rs = \langle Rr, Rs\rangle \tag{2.9}$$

por lo que R *es un operador isométrico.*

Con el fin de visualizar algunas propiedades mas de la matriz de rotación, se enuncia el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *[64] Dado un operador isométrico* R *en un espacio real euclideano* $\mathbb{R}^n$, *existe una base ortonormal en* $\mathbb{R}^n$ *en la cual la matriz* R *toma la siguiente forma:*

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

donde m *es el número de subespacios mutuamente ortogonales en la nueva base y los* C_i *son bloques de la forma:*

$$C_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

[4]Special Orthogonal group

En el caso de la matriz de rotación R, como se vio antes, es una isometría pues conserva la longitud y el ángulo entre vectores.

Ahora considere una matriz no singular Q que permite representar R de acuerdo con el teorema 2.1:

$$Q^{-1}RQ = A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Una primer característica que se puede observar es que $\det(Q^{-1}RQ) = \det(Q^{-1})\det(R)\det(Q) = 1$, i.e., $\det(R)$ es invariante ante transformaciones de similaridad. La traza de la matriz A es $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos\alpha$, como la traza también es invariante ante transformaciones de similaridad se tiene que $\mathrm{tr}(Q^{-1}RQ) = \mathrm{tr}(QQ^{-1}R) = \mathrm{tr}(R)$.

A partir de la condición $\det(A) = \det(R) = 1$ y dado que el determinante de una matriz es igual al producto de sus valores propios, entonces existen dos opciones de valores propios para matrices de rotación, que los tres sean reales, o un real y dos complejos. Obteniendo los valores propios de la matriz (2.10) se ve a que caso corresponde.

$$\begin{aligned} \det(I\lambda - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \lambda - \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - \cos\alpha - i\sin\alpha)(\lambda - \cos\alpha + i\sin\alpha) = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, el caso corresponde a un valor propio real $\lambda_1 = 1$ y dos valores propios complejos $\lambda_2 = \omega = \cos\alpha + i\sin\alpha$ y $\lambda_3 = \omega^* = \cos\alpha - i\sin\alpha$, con $(\lambda_2)(\lambda_3) = 1$.

Por último, de la definición de valores y vectores propios se tiene:

$$A\nu = \lambda\nu \tag{2.11}$$

donde ν es el vector propio asociado al valor propio λ, si elegimos el valor propio $\lambda_1 = 1$ la ecuación (2.11) toma la forma:

$$A\nu = \nu \tag{2.12}$$

es decir, existe un vector que es invariante ante la matriz de rotación. Este resultado se puede ver como una prueba del teorema de Euler para rotaciones en un ángulo α alrededor de un eje, pues al existir un vector invariante, éste se puede asociar a un eje cuya orientación no se verá afectada por la acción de la matriz de rotación.

Para cerrar esta sección, se presenta un ejemplo numérico verificando las propiedades de la matriz de rotación y algunos aspectos importantes.

Ejemplo 2.3. *Dados los vectores base* $f_1 = [1,0,0]^T$, $f_2 = [0, \sqrt{(5/7)}, \sqrt{(2/7)}]^T$ *y* $f_3 = [0, -\sqrt{(2/7)}, \sqrt{(5/7)}]^T$ *que forman el marco de referencia* $\mathcal{F}$ *y* $b_1 = [0,-1,0]^T$, $b_2 = [1,0,0]^T$ *y* $b_3 = [0,0,1]^T$ *que forman el marco de referencia* $\mathcal{B}$. *Obtengamos las matrices* F, B, $FB = (F)(B)$, $BF = (B)(F)$ *y* $(FB)^T = (B^T)(F^T)$ *con el fin de verificar algunas de las propiedades de las matrices de rotación.*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5/7} & -\sqrt{2/7} \\ 0 & \sqrt{2/7} & \sqrt{5/7} \end{bmatrix}$$

$$FB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.8452 & 0 & -0.5345 \\ -0.5345 & 0 & 0.8452 \end{bmatrix}; BF = \begin{bmatrix} 0 & 0.8452 & -0.5345 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5345 & 0.8452 \end{bmatrix}$$

$$(FB)^T = \begin{bmatrix} 0 & -0.8452 & -0.5345 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5345 & 0.8452 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que $(FB)(FB)^T = I$ *y que el determinante de cada una de las matrices de arriba es igual a* 1.

Otra cosa que se puede notar en el ejemplo anterior es que el producto de matrices de rotación genera una nueva matriz de rotación; por otra parte, derivado de la no conmutatividad bajo el producto de matrices se tiene que BF no genera la rotación inversa de FB, lo cual si hace $(FB)^T$. Mas adelante se verá que las propiedades con las que cuentan las matrices de rotación permiten caracterizar un grupo.

2.3.2. Ángulos de Euler

En la vida diaria estamos acostumbrados a cambiar la posición de diferentes objetos, por ejemplo: al modificar la posición de la pantalla de una computadora portátil estamos realizando una rotación(modificando la orientación de la pantalla); si usted conduce un auto efectuará diversos movimientos de esta naturaleza como girar el volante, orientar los espejos retrovisores o modificar la dirección del vehículo. Todos estos movimientos corresponden a rotaciones de cuerpos. En un sentido físico las rotaciones se hacen de forma gradual y no abrupta, por ejemplo: No se puede realizar una rotación usando la siguiente matriz.

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Si bien, matemáticamente es posible pues la matriz representa una inversión de coordenadas, físicamente no es un movimiento natural para un cuerpo rígido por lo que carece de sentido. Esta intuición física de las rotaciones como movimientos que se realizan de forma gradual es representada por la parametrización conocida como ángulos de Euler.

Los Ángulos de Euler permiten obtener transformaciones de un sistema de coordenadas a otro por medio de rotaciones sucesivas realizadas de acuerdo con una secuencia específica. Tales rotaciones no se realizan de manera consecutiva sobre un mismo eje por lo que el número de configuraciones se reduce a 12 $(3 \times 2 \times 2)$[5].

[5]Podemos pensar en rotaciones alrededor de tres ejes x_1, x_2 y x_3. Primero se rota alrededor de alguno de estos ejes, por lo que tenemos tres matrices de rotación a elegir. La siguiente rotación será alrededor de un eje distinto pues una rotación alrededor del mismo eje se podría considerar en la matriz asociada a la primer rotación, por lo que para la siguiente rotación solo podemos elegir entre dos matrices. Lo mismo sucede en la última rotación, de aqui que las configuraciones sean 12 $(3 \times 2 \times 2)$.

La forma de realizar o definir las rotaciones es la siguiente:

-Se define un marco de referencia $\mathcal{F}$ fijo con los ejes (f_1, f_2, f_3) y un marco sobre el cual se realizan rotaciones, Fig. 2.2.

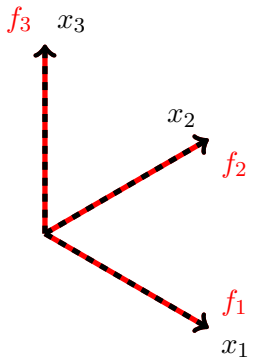


Figura 2.2: Marco de referencia rotacional alineado al marco de referencia $\mathcal{F}$

-Se elije alguna de las configuraciones de ángulos de Euler, para este ejemplo se usa la configuración $(3, 2, 1)$ que comúnmente se emplea en vehículos espaciales. Se distingue entre tres tipos de ángulos para rotar representados por las letras griegas ψ, θ y ϕ que en la terminología especializada se conocen como *yaw*, *pitch* y *roll* respectivamente. Para representar una rotación alrededor de un eje en específico usaremos una notación que indica el ángulo a rotar y el eje invariante, e.g. $R(\psi, x_3)$ indica una rotación de ψ grados alrededor del eje x_3.

-Se realiza una rotación $R_1(\psi, x_3)$ en un ángulo ψ alrededor del eje x_3, Fig. 2.3.

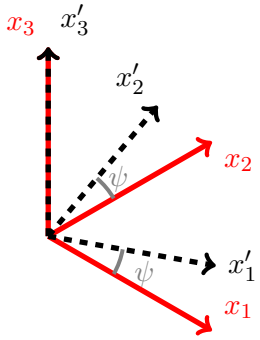


Figura 2.3: Rotación alrededor de x_3

-Se realiza una rotación $R_2(\theta, x_2')$ es un ángulo θ alrededor del eje x_2', Fig. 2.4.

-Por último se realiza una rotación $R_3(\phi, x_1'')$ en un ángulo ϕ alrededor del eje x_1'', Fig. 2.5.

Para la rotación alrededor de x_3 la matriz está definida como:

$$R_1(\psi, x_3) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

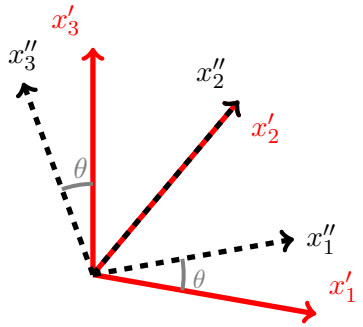


Figura 2.4: Rotación alrededor de x_2'

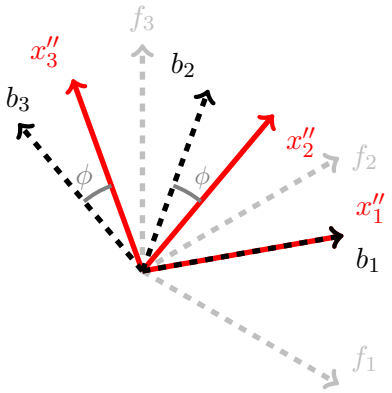


Figura 2.5: Rotación alrededor de x_1''

Se puede verificar que $R(\psi, x_3)$ es una matriz ortogonal cuyo determinante es igual a 1. Esta matriz mantiene invariante el eje x_3, es decir, x_3 no es afectado por la matriz de rotación.

Un significado similar tienen las matrices con las que se realizan la segunda y tercera rotación.

$$R_2(\theta, x_2') = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$R_3(\phi, x_1'') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Estas matrices también son ortogonales con determinante 1 y pertenecen al grupo $SO(3)$, del cual se hablará más adelante. La secuencia de rotaciones $(3, 2, 1)$ para un vector $v \in \mathbb{R}^3$ definido en el marco de referencia fijo, queda determinada por la siguiente expresión:

$$v^B = R_3(\phi, x_1'')R_2(\theta, x_2')R_1(\psi, x_3)v \tag{2.17}$$

Es fácil obtener la transformación inversa empleando la propiedad de ortogonalidad.

$$v = R_1^T(\psi, x_3)R_2^T(\theta, x_2')R_3^T(\phi, x_1'')v^B \tag{2.18}$$

Realizando el producto $R_3(\phi, x_1'')R_2(\theta, x_2')R_1(\psi, x_3)$ entre las matrices de rotación se obtiene la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & c\theta s\phi \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -c\psi s\phi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

donde c y s son las funciones seno y coseno respectivamente.

Es posible verificar que la matriz $A \in SO(3)$, i.e. $AA^T = I$ y $\det(A) = 1$.

$$AA^T = R_3(\phi, x_1'')R_2(\theta, x_2')R_1(\psi, x_3)R_1^T(\psi, x_3)R_2^T(\theta, x_2')R_3^T(\phi, x_1'') = I \tag{2.20}$$

$$\det(A) = \sin^2(\psi) + \cos^2(\psi) = 1 \tag{2.21}$$

Por lo tanto $A \in SO(3)$, esto permite enlazar los ángulos de Euler con las matrices de rotación haciendo la siguiente relación:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & c\theta s\phi \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -c\psi s\phi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

De la matriz de rotación R con componentes r_{ij}, los ángulos de Euler que definen la secuencia de rotaciones son los siguientes:

$$r_{13} = -\sin\theta \;\Rightarrow\; \theta = -\arcsin(r_{13})$$

$$\frac{r_{12}}{r_{11}} = \tan\psi \;\Rightarrow\; \psi = \arctan(\frac{r_{12}}{r_{11}})$$

$$\frac{r_{23}}{r_{33}} = \tan\phi \;\Rightarrow\; \phi = \arctan(\frac{r_{23}}{r_{33}})$$

Una de las desventajas de los ángulos de Euler es que no están definidos de forma única, es decir, se puede llegar a la misma matriz (2.22) por caminos diferentes como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. *Considere $\theta = \pi/2$ en la ecuación (2.22) de modo que la matriz R tiene la siguiente forma:*

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(\psi - \phi) & \cos(\psi - \phi) & 0 \\ \cos(\psi - \phi) & -\sin(\psi - \phi) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Por lo que no se puede distinguir entre una rotación con $\phi = -10$ y $\psi = 0$ de una con $\psi = 10$ y $\phi = 0$ (solo por tomar algunos valores). Lo mismo sucede si $\theta = -\pi/2$, en este caso la matriz R toma la forma que se muestra abajo y no es posible distinguir entre rotar $\phi = 10$ y $\psi = 0$ de rotar $\phi = 0$ y $\psi = 10$.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\psi + \phi) & \cos(\psi + \phi) & 0 \\ \cos(\psi + \phi) & -\sin(\psi + \phi) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

El comportamiento de los ángulos de Euler presentado en el ejemplo anterior se conoce como *gimbal lock*. Se puede comprobar que para configuraciones asimétricas de los ángulos de Euler (como la $(3, 2, 1)$) se presentará el *gimbal lock* para valores de $\pm\pi/2$ en la segunda rotación y para configuraciones simétricas (como $(3, 1, 3)$) se dará para valores de 0 y π en la segunda rotación [63].

2.3.3. Cuaterniones

En 1843 William Rowan Hamilton propuso los cuaterniones. Estos curiosos elementos están formados por una parte escalar y otra que puede verse como un vector. Otra forma de interpretarlos es como una generalización de los números complejos por lo que a veces se les llama números hipercomplejos. Como introducción a las operaciones con cuaterniones y su aplicación en rotaciones se puede consultar [41] y [67].

Se iniciará mostrando el carácter de grupo[6] que presentan los cuaterniones bajo la operación de suma.

Un cuaternión está definido como $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ donde $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ son las componentes del cuaternión y $\{1, i, j, k\}$ es la base canónica de los cuaterniones, tal base cuenta con las siguientes propiedades: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

Para verificar que forman un grupo bajo la operación de suma debemos mostrar que son cerrados, asociativos, que poseen elemento neutro e inverso.

-*Cerradura*

Sean q y p dos cuaterniones entonces:

$$\begin{aligned} q + p &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k + p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \\ &= (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1) i + (q_2 + p_2) j + (q_3 + p_3) k \end{aligned}$$

Luego como $(q_0 + p_0), (q_1 + p_1), (q_2 + p_2), (q_3 + p_3) \in \mathbb{R}$ y haciendo $r_0 = q_0 + p_0; r_1 = q_1 + p_1; r_2 = q_2 + p_2; r_3 = q_3 + p_3$ se tiene el cuaternión $q + p = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$ por lo que la cerradura se cumple.

[6] Las definiciones sobre grupos, anillos y campos se dan en el apéndice C.

-Asociatividad

Sean p, q, r cuaterniones:

$$\begin{aligned} p+(q+r) &= p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k + [(q_0 + r_0) + (q_1 + r_1)i + (q_2 + r_2)j + (q_3 + r_3)k] \\ &= (p_0 + q_0 + r_0) + (p_1 + q_1 + r_1)i + (p_2 + q_2 + r_2)j + (p_3 + q_3 + r_3)k \\ &= [(p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k] + r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k \\ &= (p+q) + r \end{aligned}$$

la asociatividad se cumple.

-Elemento neutro

Sea q un cuaternión y defina el cuaternión $e = 0 + 0i + 0j + 0k$; realizando la suma $q + e$:

$$\begin{aligned} q+e &= (q_0 + 0) + (q_1 + 0)i + (q_2 + 0)j + (q_3 + 0)k = q \\ e+q &= (0 + q_0) + (0 + q_1)i + (0 + q_2)j + (0 + q_3)k = q \end{aligned}$$

por lo que existe el elemento neutro.

-Elemento inverso

Considere un cuaternión q, se define el cuaternión $q_{in} = -q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$ tal que:

$$\begin{aligned} q+q_{in} &= (q_0 - q_0) + (q_1 - q_1)i + (q_2 - q_2)j + (q_3 - q_3)k = e \\ q_{in}+q &= (-q_0 + q_0) + (-q_1 + q_1)i + (-q_2 + q_2)j + (-q_3 + q_3)k = e \end{aligned}$$

Por lo tanto existe el inverso bajo la operación definida, con esto podemos concluir que los cuaterniones forman un grupo bajo la suma. A partir de la prueba de cerradura, se puede verificar que bajo esta operación los cuaterniones forman un grupo Abeliano pues la operación es conmutativa.

Con el fin de obtener una estructura matemática más rica, se define la operación de producto entre cuaterniones. Esta se realiza de la misma forma que con los polinomios pero respetando las propiedades definidas para los elementos generadores.

Sean p y q cuaterniones, el producto se define como:

$$pq = p_0 q_0 - p_v \cdot q_v + p_0 q_v + q_0 p_v + p_v \times q_v \tag{2.25}$$

donde p_v y q_v son las partes vectoriales de los cuaterniones p y q respectivamente ($p_v = p_1 i + p_2 j + p_3 k$), $p_v \cdot q_v$ es el producto punto entre las partes vectoriales y $p_v \times q_v$ es su producto cruz, este ultimo producto es el responsable de la no conmutatividad del producto entre cuaterniones. A partir de la expresión anterior, se puede notar que el elemento identidad bajo la operación del producto es el cuaternión $e_p = 1 + 0i + 0j + 0k$.

Antes de continuar, se deben presentar algunas definiciones más. El conjugado de un cuaternion q esta definido como:

$$\bar{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \tag{2.26}$$

El cuadrado de la norma de un cuaternion es:

$$\|q\|^2 = q\bar{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \tag{2.27}$$

Además se tienen las siguientes propiedades:
$\overline{(pq)} = \bar{q}\bar{p}$ donde p, q son cuaterniones.

Verificación

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 q_0 - p_v \cdot q_v) + (p_0 q_v + q_0 p_v + p_v \times q_v) \\ \overline{(pq)} &= (p_0 q_0 - p_v \cdot q_v) - (p_0 q_v + q_0 p_v + p_v \times q_v) \\ \bar{q}\,\bar{p} &= [p_0 q_0 - (-q_v) \cdot (-p_v)] - [q_0(-p_v) + p_0(-q_v) + (-q_v) \times (-p_v)] \\ &= (p_0 q_0 - p_v \cdot q_v) - (p_0 q_v + q_0 p_v + p_v \times q_v) = \overline{(pq)} \end{aligned}$$

Otra propiedad es $\|pq\|^2 = \|p\|^2 \|q\|^2$.

Verificación

$$\|pq\|^2 = (pq)\overline{(pq)} = pq\bar{q}\bar{p} = \|p\|^2 \|q\|^2$$

$$\|qp\|^2 = (qp)\overline{(qp)} = qp\bar{p}\bar{q} = \|p\|^2 \|q\|^2$$

El inverso multiplicativo queda definido como:

$$p^{-1} = \frac{\bar{p}}{\|p\|^2} \tag{2.28}$$

y se puede verificar de la siguiente forma:

$$pp^{-1} = p(\frac{\bar{p}}{\|p\|^2}) = \frac{\|p\|^2}{\|p\|^2} = e_p \tag{2.29}$$

División de cuaterniones

Con el inverso multiplicativo definido, la división de un cuaternión q entre un cuaternión p esta dada por:

$$r = qp^{-1} = \frac{q\bar{p}}{\|p\|^2} \tag{2.30}$$

donde r es el cuaternión que resulta de la división. Dado que los cuaterniones forman un grupo Abeliano bajo la operación de suma, un grupo bajo el producto y cuentan con división, se dice que forman un *anillo no conmutativo con división*. La no conmutatividad es generada por el producto vectorial que aparece en la definición del producto para cuaterniones y es la responsable de que los cuaterniones no formen un campo.

Forma polar de un cuaternión

Tomemos el cuaternión $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = r(\cos\phi + u \sin\phi)$ donde $\phi \in [0, 2\pi]$, $r = \|q\|$, $\cos\phi = q_0/r$, $\sin\phi = \pm(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}/r$ y el vector unitario u definido como:

$$u = \frac{\pm(q_1 i + q_2 j + q_3 k)}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \tag{2.31}$$

Dentro de los cuaterniones se puede definir un subconjunto formado por todos aquellos cuaterniones cuya parte real o escalar es nula, es decir, $v = 0 + v_1 i + v_2 j + v_3 k$, $(v_0 = 0)$. A este tipo de cuaterniones se les llama *cuaterniones puros* y serán usados para relacionar sus componentes con las de vectores en $\mathbb{R}^3$ de forma que se pueden aplicar rotaciones.

El producto entre un cuaternión y un cuaternión puro se puede obtener a partir de la expresión (2.25).

$$qv = (-q_v \cdot v) + (q_0 v + q_v \times v) \tag{2.32}$$

la ecuación (2.32) muestra que el producto de un cuaternión por un cuaternión puro es nuevamente un cuaternión.

Ahora se define el producto qvq^{-1}

$$\begin{aligned} qvq^{-1} &= q_0 v q_v - (q_v q_0 v - q_v \cdot (v \times q_v)) + q_0^2 v - q_0 v \times q_v + \\ &\quad (v \cdot q_v) q_v + q_v \times q_0 q_v - q_v \times (v \times q_v) \end{aligned}$$

Después de usar la identidad vectorial $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ se obtiene:

$$\begin{aligned} qvq^{-1} &= q_0^2 v + 2q_0 q_v \times v + 2(q_v \cdot v) q_v - \|q_v\|^2 v \\ &= (q_0^2 - \|q_v\|^2) v + 2(q_v \cdot v) q_v + 2q_0 q_v \times v \end{aligned}$$

empleando las componentes de los cuaterniones involucrados en la expresión anterior, esta se representa de forma matricial como:

$$v' = qvq^{-1} = [(q_0^2 - \|q_v\|^2) I + 2q_v q_v^T + 2q_0 q_v^{\times}] v \tag{2.33}$$

Donde $q_v^{\times}$ se define como:

$$q_v^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

y los diferentes productos presentes en la ecuación (2.33) únicamente emplean las componentes del cuaternión q.

Hay que resaltar que del producto qvq^{-1} se obtiene un cuaternión puro, esto es importante porque tal producto se puede considerar como un operador para vectores en $\mathbb{R}^3$. Desarrollando la expresión (2.33) se llega a la siguiente ecuación:

$$v' = qvq^{-1} = \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1 q_2 - 2q_0 q_3 & 2_q 1 q_3 + 2q_0 q_2 \\ 2q_2 q_1 + 2q_0 q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2 q_3 - 2q_0 q_1 \\ 2q_3 q_1 - 2q_0 q_2 & 2q_3 q_2 + 2q_0 q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{bmatrix} v = Qv \tag{2.34}$$

Se puede verificar que la matriz Q es una matriz ortogonal con $\det(Q) = 1$ si se toma a q como un cuaternión unitario, esto quiere decir que Q es una matriz de rotación o matriz de cosenos directores, por lo que el producto $v' = qvq^{-1}$ define una rotación del vector v.

Para definir al cuaternión unitario considere los elementos $u_0 = 1 + 0i + 0j + 0k$ y $u_v = 0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k$, tanto u_0 como u_v son de norma unitaria. Escribiendo al cuaternión unitario en su forma polar en términos de u_0 y u_v, el resultado es $u = u_0 \cos\phi + u_v \sin\phi$, donde ϕ representa el ángulo a rotar alrededor del vector unitario u_v. A continuación se muestra que u es unitario.

$$\begin{aligned} |u|^2 &= (u_0 \cos\phi + u_v \sin\phi)(u_0 \cos\phi - u_v \sin\phi) \\ &= u_0 u_0 \cos^2\phi + u_v \overline{u_v} \sin^2\phi = 1 \end{aligned}$$

Entonces dado un cuaternion $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, se define al cuaternion unitario asociado al cuaternion q como $q_u = \cos\phi + u_v \sin\phi$, $\|u_v\| = 1$, el vector unitario u_v se obtiene a partir de la ecuación (2.31).

Al realizar la rotación con el cuaternion unitario se debe tener en cuenta que el ángulo ϕ es realmente dos veces más el ángulo deseado por lo que si buscamos rotar un vector en un ángulo θ, lo que se debe escribir en en la expresión del cuaternion es el valor de $\theta/2$. La prueba de este hecho se puede consultar en [41].

La parametrización de la matriz de rotación en términos del cuaternión unitario esta dada por la matriz Q definida en la ecuación (2.34). El cuaternion unitario en términos de la matriz de rotación R queda como se muestra abajo.

$$q_0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \tag{2.35}$$

$$q_1 = \frac{r_{23} - r_{32}}{4q_0} \tag{2.36}$$

$$q_2 = \frac{r_{31} - r_{13}}{4q_0} \tag{2.37}$$

$$q_3 = \frac{r_{12} - r_{21}}{4q_0} \tag{2.38}$$

donde $r_{i,j};\ i,j = 1,2,3$ son los elementos de la matriz R. Los parámetros q_1, q_2, q_3 se obtienen por inspección de la matriz Q y su relación con R. Para obtener el parámetro q_0 se usa la parametrización de la traza para las matrices de rotación, i.e., $1 + 2\cos\phi = 1 + 4\cos^2(\phi/2) - 2$, la forma alternativa que la acompaña surge de considerar sólo la mitad del ángulo pues el operador qvq^{-1} rota dos veces el ángulo indicado.

Note que al obtener el cuaternión a partir de las ecuaciones anteriores, se presenta una singularidad cuando q_0 es cero lo cual sucede si el ángulo es π. En el artículo de Klump [39] se presenta un procedimiento libre de singularidades para determinar el cuaternión, otra alternativa libre de singularidades para obtener el cuaternión es el método de Shepperd [63]. El siguiente ejemplo trata la obtención del cuaternión q, asociado a una matriz de rotación, mediante el método de Shepperd. El método consiste en calcular los cudrados de las componentes del cuaternión en términos de la matriz de rotación, para ello se usan las siguientes ecuaciones:

$$q_0^2 = \frac{1}{4}(1 + tr(R)) \tag{2.39}$$
$$q_1^2 = \frac{1}{4}(1 + 2r_{11} - tr(R)) \tag{2.40}$$
$$q_2^2 = \frac{1}{4}(1 + 2r_{22} - tr(R)) \tag{2.41}$$
$$q_3^2 = \frac{1}{4}(1 + 2r_{33} - tr(R)) \tag{2.42}$$

Posteriormente, se toma la parte positiva de la raíz cuadrada del mayor de los elementos calculados con las ecuaciones anteriores y se emplea para calcular las componentes restantes eligiendo de las siguientes ecuaciones, las apropiadas para determinar las componentes faltantes del cuaternión.

$$q_0 q_1 = (r_{23} - r_{32})/4 \tag{2.43}$$
$$q_0 q_2 = (r_{31} - r_{13})/4 \tag{2.44}$$
$$q_0 q_3 = (r_{12} - r_{21})/4 \tag{2.45}$$
$$q_2 q_3 = (r_{23} + r_{32})/4 \tag{2.46}$$
$$q_3 q_1 = (r_{31} + r_{13})/4 \tag{2.47}$$
$$q_1 q_2 = (r_{12} + r_{21})/4 \tag{2.48}$$

Ejemplo 2.5. *Dada la matriz FB obtenida en la sección 2.3.1.*

$$FB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.8452 & 0 & -0.5345 \\ -0.5345 & 0 & 0.8452 \end{bmatrix}$$

aplicando el método de Shepperd para determinar el cuaternión unitario, se obtiene:

$q_0^2 = 0.4613$, $q_1^2 = 0.0387$, $q_2^2 = 0.0387$, $q_3^2 = 0.4613$, *en este caso $q_0^2 = q_3^2$ son los mayores; podemos elegir cualquiera de los dos para determinar las componentes faltantes; así, el cuaternión es $q = 0.6792 - 0.1968i - 0.1968j + 0.6792k$. Se puede comprobar que este cuaternión tiene norma unitaria.*

2.3.4. Representación eje-ángulo

Una rotación se puede representar a partir de rotar en un ángulo ϕ alrededor de un eje que permanece fijo en ambos marcos de referencia, i.e. existe un eje invariante, el teorema de Euler sobre este hecho dice lo siguiente:

Teorema 2.2. *Teorema de Euler [25, 63] Un cuerpo rígido o marco de referencia puede llevarse de una orientación inicial arbitraria a otra orientación final arbitraria por medio de una simple rotación en un ángulo principal ϕ alrededor del eje principal a; el eje principal permanece fijo para la orientación inicial y para la final.*

Se puede tener algo de idea sobre el eje principal y el ángulo principal a partir de los valores y vectores propios de la matriz de rotación. Como se vio en la sección 2.3.1, el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ es invariante ante la transformación, es decir, permanece fijo en ambos marcos de referencia.

De lo anterior, el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ califica como eje de rotación a. Para obtener el eje de rotación en términos de la matriz de rotación R, se sigue el procedimiento representado en [1], presentado a continuación.

Secciones atrás se obtuvo que la traza de las matrices de rotación es igual a la expresión $\mathrm{tr}(R) = 1 + 2\cos\phi$, el ángulo ϕ es el ángulo principal por lo que tenemos $cos\phi = 1/2[\mathrm{tr}(R) - 1]$.

Para determinar las componentes del eje principal, se escribe la matriz de rotación R como:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Considerando que toda matriz se pueden descomponer en una parte simétrica y otra antisimétrica se tiene:

$$R = \frac{1}{2}[(R + R^T) + (R - R^T)] \tag{2.50}$$

Donde la parte antisimétrica es $S = R - R^T$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} - r_{21} & r_{13} - r_{31} \\ r_{12} - r_{21} & 0 & r_{23} - r_{32} \\ r_{31} - r_{13} & r_{32} - r_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

Ahora, denote el vector invariante como a, note que satisface $Ra = a$ y $R^T a = a$ por lo que se obtiene la siguiente relación:

$$(R - R^T)a = Sa = 0 \tag{2.52}$$

Haciendo $r_{12} - r_{21} = s_3$, $r_{13} - r_{31} = s_2$ y $r_{23} - r_{32} = s_1$ se puede escribir (2.52) en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 0 & s_3 & s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ -s_2 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.53}$$

donde a_1, a_2, a_3 son las componentes del vector a el cual tiene la característica de ser un vector unitario (característica heredada de la matriz R al ser el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$) por lo tanto $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$. Las siguientes relaciones se obtienen de la ecuación (2.53):

$$\begin{aligned} s_3 a_2 + s_2 a_3 &= 0 \\ -s_3 a_1 + s_1 a_3 &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo para a_1 y a_2 se tiene:

$$a_1 = \frac{s_1 a_3}{s_3} \qquad a_2 = \frac{-s_2 a_3}{s_3} \tag{2.54}$$

en la ecuación de la norma del vector a, al sustituir a_1 y a_2 en términos de a_3, se obtiene la componente a_3 en términos de los elementos de la matriz S, el resultado se muestra en seguida:

$$a_3 = \pm s_3 (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{-1/2} \tag{2.55}$$

Como a_1 y a_2 dependen de a_3, las componentes del vector a quedan definidas por las ecuaciones (2.54) y (2.55).

Si se quiere expresar estas componentes en función de la matriz de rotación y del ángulo, se deben hacer algunas operaciones más.

Considere la siguiente matriz:

$$SS^T = \begin{bmatrix} s_3^2 + s_2^2 & s_1 s_2 & -s_1 s_3 \\ s_1 s_2 & s_3^2 + s_1^2 & s_3 s_2 \\ -s_1 s_3 & s_2 s_3 & s_2^+ s_1^2 \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

de la ec. (2.56) la traza de la matriz es $\mathrm{tr}(SS^T) = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$.

Considerando los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \omega$ y $\lambda_3 = \omega*$ donde ω es complejo y $\omega*$ es su conjugado, se lleva a R a la siguiente forma:

$$Q^{-1}RQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp^{i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \exp^{-i\phi} \end{bmatrix} = A \tag{2.57}$$

ϕ es el ángulo de la representación polar de $\omega*$ y ω.

Verificando que la traza de A cumple con la definida para matrices de rotación se tiene:

$$\begin{aligned} tr(A) &= 1 + \exp^{i\phi} + \exp^{-i\phi} \\ &= 1 + \cos\phi + i\sin\phi + \cos\phi - i\sin\phi \\ &= 1 + 2\cos\phi \end{aligned}$$

De manera alternativa, el producto SS^T se puede expresar como $SS^T = (R - R^T)(R^T - R) = 2I - R^2 - (R^T)^2$; para obtener la traza de SS^T a partir de esta expresión, se requiere de la traza de R^2; dado que la traza es invariante ante trasformaciones de similaridad, resulta mas simple obtener la traza de la matriz A^2 la cual es $\mathrm{tr}(A^2) = 1 + 2\cos(2\phi)$; así, la traza de SS^T queda parametrizada como:

$$\begin{aligned} tr(SS^T) &= 2\,\mathrm{tr}(I) - \mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}((A^T)^2) \\ &= 6 - 1 - 2\cos(2\phi) - 1 - 2\cos(2\phi) \\ &= 8\sin^2\phi = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \end{aligned}$$

por lo que $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 4\sin^2\phi$. Finalmente, el eje y el ángulo se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{1}{2}[\mathrm{tr}(R) - 1] \\ a_1 &= \pm\frac{r_{23} - r_{32}}{2\sin\phi} \\ a_2 &= \mp\frac{r_{13} - r_{31}}{2\sin\phi} \\ a_3 &= \pm\frac{r_{12} - r_{21}}{2\sin\phi} \end{aligned} \tag{2.58}$$

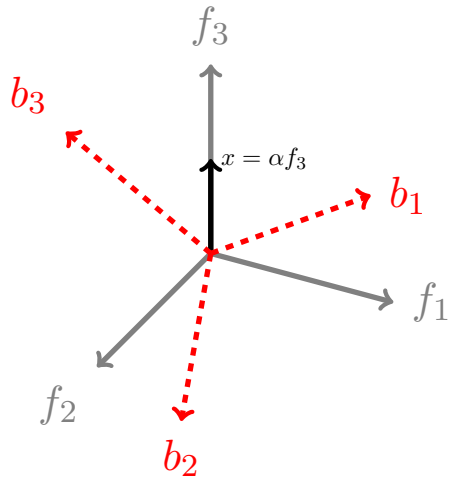


Figura 2.6: Marcos de referencia F y B con el vector de apuntamiento x

La parametrización de la matriz de rotación en términos del eje y el ángulo se puede obtener por medio de la fórmula de Rodrigues.

$$R = I + \sin\phi a^{\times} + (1 - \cos\phi)(a^{\times})^2 \tag{2.59}$$

Se puede verificar que la traza de esta matriz corresponde a la de una matriz ortogonal.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(R) &= \mathrm{tr}(I) + \mathrm{tr}(\sin\phi a^{\times}) + \mathrm{tr}[(1 - \cos\phi)(a^{\times})^2] && (2.60)\\ &= \mathrm{tr}(I) + \mathrm{tr}(1 - \cos\phi) + \mathrm{tr}(aa^T - \|a\|^2 I) && (2.61)\\ &= 3 + (1 - \cos\phi)(-2) = 1 + 2\cos\phi && (2.62) \end{aligned}$$

2.3.5. Orientación reducida

Como se dijo en la sección 2.3, la orientación de un cuerpo es el desplazamiento angular que presenta el cuerpo respecto a un marco de referencia fijo. Para definir este desplazamiento angular se emplean dos marcos de referencia, uno fijo y otro que esta alineado a los ejes principales del cuerpo; la orientación completa queda determinada por la matriz de rotación.

Ciertas aplicaciones como el apuntar una antena o posicionar un manipulador se reducen a orientar un simple eje, en tales casos este eje puede coincidir con alguno de los ejes principales por lo que las rotaciones alrededor de él no tienen efecto en si mismo. Cuando esto sucede solo una parte de la información proporcionada por la matriz de rotación es útil; de este hecho surge el concepto de orientación reducida.

La orientación reducida tiene como objetivo emplear únicamente aquella información presente en la matriz de rotación que es útil para representar la orientación del vector o eje que se desee apuntar.

Definiendo las bases ortogonales de los marcos de referencia $\mathcal{F}$ y $\mathcal{B}$ como $\{f_1, f_2, f_3\}$ y $\{b_1, b_2, b_3\}$ respectivamente. Ahora, considerando un vector $x = \alpha f_3$, es decir, el vector esta alineado con el eje f_3 por lo que no tiene proyecciones en otras direcciones como se ve en la Fig. 2.6.

La matriz de rotación que proyecta los vectores base del marco $\mathcal{F}$ en el marco $\mathcal{B}$ es la siguiente:

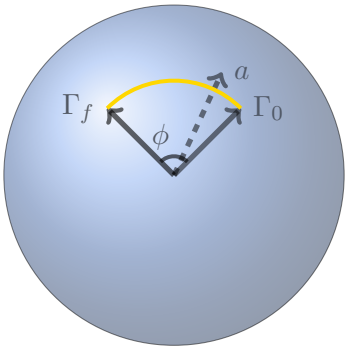


Figura 2.7: Trayectoria de la orientación reducida Γ sobre la esfera $\mathbb{S}^2$

$$R = \begin{bmatrix} f_1 \cdot b_1 & f_1 \cdot b_2 & f_1 \cdot b_3 \\ f_2 \cdot b_1 & f_2 \cdot b_2 & f_2 \cdot b_3 \\ f_3 \cdot b_1 & f_3 \cdot b_2 & f_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

y para los vectores base del marco $\mathcal{B}$ en el marco $\mathcal{F}$ se tiene la matriz transpuesta R^T

$$R^T = \begin{bmatrix} f_1 \cdot b_1 & f_2 \cdot b_1 & f_3 \cdot b_1 \\ f_1 \cdot b_2 & f_2 \cdot b_2 & f_3 \cdot b_2 \\ f_1 \cdot b_3 & f_2 \cdot b_3 & f_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

Retomando el vector $x = \alpha f_3$, su representación en el marco $\mathcal{B}$ esta dada por $x_{\mathcal{B}} = R^T x$. Ya que el vector sólo cuenta con una componente en la dirección del vector base f_3, resulta claro que únicamente la tercer columna de la matriz R^T aporta información sobre la orientación del vector. La orientación reducida queda definida de la siguiente forma:

$$\Gamma = R^T \frac{x}{\|x\|} = \begin{bmatrix} f_3 \cdot b_1 \\ f_3 \cdot b_2 \\ f_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

el vector Γ es el vector de orientación reducida definido sobre la $2 - esfera$ unitaria $\mathbb{S}^2$.

Muchas veces lo que se requiere es partir de una orientación inicial a una orientación deseada o final; para cumplir con este propósito se puede definir un vector Γ_0 de orientación reducida inicial y un vector final Γ_f. Con estos vectores definidos es posible definir una trayectoria a seguir a través de la rotación alrededor de un eje (teorema de Euler); el eje normalizado debe pertenecer a $\mathbb{S}^2$, la siguiente ecuación muestra como obtener el eje de rotación:

$$a = \frac{\Gamma_0 \times \Gamma_f}{\|\Gamma_0 \times \Gamma_f\|} \tag{2.66}$$

El ángulo de rotación queda definido por $\cos\phi = \Gamma_0^T \Gamma_f$. Si los vectores inicial y final son colineales, se tienen dos casos, en el primero no hay rotación pues, Γ_f y Γ_0 tienen la misma dirección; en el segundo Γ_f y Γ_0 tiene direcciones opuestas por lo que el ángulo de rotación requerido es $\phi = \pi$.

La trayectoria que sigue el vector de orientación reducida para llegar desde Γ_0 hasta Γ_f se puede ver en la Fig. 2.7 y se obtiene por medio de la formula de Rodrigues.

$$\Gamma_f = [I + \sin\phi a^{\times} + (1 - \cos\phi)(a^{\times})^2]\Gamma_0 \tag{2.67}$$

Capítulo 3

Grupos matriciales

En las secciones anteriores se abordaron distintas formas de como parametrizar las matrices de rotación. Por su naturaleza las matrices de rotación tienen propiedades que nos permiten pensar en un esquema más estructurado en el cual se pueden agrupar.

Dada la existencia del elemento neutro y el inverso para las matrices de rotación, resulta natural pensar en conformar una estructura de grupo para dichas matrices. En esta sección se describirán los grupos matriciales y se mostrará que las matrices de rotación pertenecen al grupo llamado $SO(3)$. Existen diversas obras dedicadas al estudio de los grupos matriciales, como libros introductorios se sugieren [2] y [70].

3.1. El grupo lineal general $GL_n(\mathbb{R})$

Se definen las matrices $M_{m,n}(\mathbb{R})$ como el conjunto de matrices $m \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$, en este caso la cantidad de filas y columnas es diferente. Si la cantidad de filas y columnas es la misma se dice que son matrices cuadradas $M_n(\mathbb{R})$. En adelante únicamente trataremos con matrices cuadradas pues es con éstas que surgen los grupos matriciales.

Para formar los grupos se toma como operación el producto matricial; bajo esta operación las matrices $M_n(\mathbb{R})$ no forman un grupo pues, no todas tienen inverso. Con esta restricción en mente surge el primer grupo que es el grupo lineal general $GL_n(\mathbb{R})$ y se define como:

Definición 3.1. *El grupo lineal general sobre* $\mathbb{R}$ *es:*

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists\, B \in M_n(\mathbb{R}) \;\; con \;\; AB = BA = I\} \tag{3.1}$$

Para verificar que $GL_n(\mathbb{R})$ es un grupo, se debe comprobar que satisface los axiomas de cerradura, asociatividad, elemento identidad y elemento inverso. Por la construcción del grupo se cumple que existe el elemento inverso, los axiomas de asociatividad e identidad se cumplen por las propiedades de las matrices $M_n(\mathbb{R})$, así que sólo resta verificar la cerradura.

Verificación: Considere los elementos A_1, $A_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ por lo que existen A_1^{-1} y A_2^{-1}

$$A_1A_2(A_1A_2)^{-1} = A_1A_2A_2^{-1}A_1^{-1} = A_1IA_1^{-1} = A_1A_1^{-1} = I \in GL_n(\mathbb{R})$$

por lo que $GL_n(\mathbb{R})$ es cerrado y concluimos que es un grupo.

Por la forma en que se construyó $GL_n(\mathbb{R})$, una característica de cualquier matriz $A \in GL_n(\mathbb{R})$ es que $det(A) \neq 0$. Si se impone la restricción de que $det(A) = 1$, esto da lugar a un nuevo grupo, el grupo lineal especial $SL_n(\mathbb{R})$ que se define como sigue:

$$SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

Para probar que $SL_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$ y por lo tanto un grupo, basta con verificar el axioma de cerradura y que el elemento inverso está en $SL_n(\mathbb{R})$.

Suponga A_1, $A_2 \in SL_n(\mathbb{R})$

$$\det(A_1 A_2) = \det(A_1)\det(A_2) = 1$$

por lo que la cerradura se cumple, ahora se verifica si el elemento inverso se encuentra en $SL_n(\mathbb{R})$.

Como $\det(A_1) = 1$ entonces existe B tal que $A_1 B_1 = B_1 A_1 = I$ y

$$\det(A_1 B_1) = \det(A_1)\det(B_1) = \det(I) = 1$$

como $\det(A_1) = 1$ entonces $\det(B_1) = 1$ por lo que $B = A_1^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$. Con esto concluimos que $SL_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

3.2. Grupo especial ortogonal $SO(n)$

Es posible generar nuevos grupos añadiendo nuevas restricciones (aunque no siempre es el caso), siguiendo esta idea ahora se pide que la matriz posea las características del grupo $GL_n(\mathbb{R})$ junto con las características de las matrices ortogonales ya que estas matrices poseen inversa ($RR^T = R^T R = I$); el grupo que surge es el grupo ortogonal $O(n)$.

$$O(n) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I\}$$

Para verificar que $O(n)$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$ se prueba la cerradura y que el elemento inverso está en $O(n)$.

Tomando A, $B \in O(n)$ se tiene:

$$AB(AB)^T = ABB^T A^T = ABB^{-1}A^{-1} = AB(AB)^{-1} = I$$

por lo que $O(n)$ es cerrado y contiene al elemento inverso, $O(n)$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$ y por si mismo un grupo.

Se prestará especial atención a este grupo pues, eventualmente nos llevará al grupo que representa a las matrices de rotación.

Una de las características del grupo $O(n)$ es que preservan el producto punto, (esta propiedad se verificó en la sección 2.3.1) por lo que reciben el nombre de isometrías.

Ahora, se revisa que sucede con el determinante de los elementos de este grupo.
Sea $A \in O(n)$

$$\det(A)^2 = \det(A)\det(A) = \det(A)\det(A^T) = \det(AA^T) = \det(I) = 1 \tag{3.2}$$

resolviendo la ecuación anterior para $\det(A)$ se tiene que $\det(A) = \pm 1$. Con base en este resultado se puede decir que $O(n)$ esta formado por la unión de dos subconjuntos disjuntos, estos se llaman $O(n)^+$ y $O(n)^-$, de modo que $O(n) = O(n)^+ \cup O(n)^-$.

$$O(n)^+ := \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\} \tag{3.3}$$

$$O(n)^- := \{A \in O(n) \mid \det(A) = -1\} \tag{3.4}$$

Esta distinción de dos conjuntos se puede ver como dos nuevas restricciones, y como hicimos para otros subconjuntos se probará si $O(n)^+$ y $O(n)^-$ califican como subgrupos de $O(n)$.

Hasta ahora se han obtenido nuevos grupos para cada restricción propuesta; sin embargo, no siempre es así, como se muestra a continuación:

Dado el conjunto $O(n)^-$, se toman A_1, $A_2 \in O(n)^-$

$$\det(A_1 A_2) = \det(A_1)\det(A_2) = 1 \tag{3.5}$$

Sin embargo las matrices que pertenecen a este conjunto deben cumplir con la restricción $\det(A) = -1$ por lo que la cerradura no se cumple y $O(n)^-$ no es un subgrupo de $O(n)$.

Es momento de revisar que sucede con $O(n)^+$. Sean A_1, $A_2 \in O(n)^+$ entonces:

$$\det(A_1 A_2) = \det(A_1)\det(A_2) = 1 \tag{3.6}$$

por lo que la cerradura se cumple, el inverso existe pues $\det(A_1) \neq 0$. Respecto a la condición del determinante se tiene lo siguiente:

$$\det(I) = \det(A_1 A_1^{-1}) = \det(A_1)\det(A_1^{-1}) = 1 \tag{3.7}$$

por lo que $\det(A_1^{-1}) = 1$. Se concluye que la cerradura se cumple y el inverso pertenece a $O(n)^+$ por lo que este es un subgrupo de $O(n)$. el nombre que recibe este nuevo grupo es $SO(n)$.

$$SO(n) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I;\ \det(A) = 1\}$$

Se puede notar que las matrices de rotación, definidas en el capítulo anterior forman el grupo $SO(3)$.

3.3. Grupo especial Euclidiano $SE(n)$

Al inicio del Capítulo 2, se presentó la expresión (2.1) que permite representar en general, el movimiento de cuerpos rígidos. Esto quiere decir que podemos representar tanto traslaciones como rotaciones. En la sección anterior vimos que las matrices de rotación conforman el grupo $SO(3)$. De igual forma, existe un grupo que representa el movimiento mas general de cuerpos rígidos (rotaciones y traslaciones), este es el grupo $SE(3)$ que para una dimensión n se respresenta como $SE(n)$.

Ahora mostraremos como lucen los elementos de $SE(n)$. Considere una matriz $R \in SO(n)$ y vectores x, $\bar{x}$, $P \in \mathbb{R}^n$, entonces la ecuación (2.1) se puede escribir como

$$x = R\bar{x} + P \tag{3.8}$$

La ecuación (3.8) representa tanto rotaciones como traslaciones y el conjunto de todas las configuraciones posibles se escribe

$$SE(n) := \{g = (R, P) \,|R \in SO(n),\ P \in \mathbb{R}^n\}$$

Para obtener la representación matricial de $SE(n)$, seguiremos la estrategia presentada en [48] donde se recurre al uso de coordenadas homogeneas.

Considere un vector $X \in \mathbb{R}^n$, este vector se puede extender a un vector en $\mathbb{R}^{n+1}$ añadiendo un $1 \in \mathbb{R}$ como una componente adicional, esto es

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siguiendo esta idea, la ecuación (3.8) se escribe

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz

$$g = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$$

es la representación homogenea de $SE(n)$. Lo que ganamos con esta transformación, es la posibilidad de trabajar con una transformación lineal en lugar de una transformación afín. Usando la representación homogenea obtenida, el conjunto de configuraciones queda definido de la siguiente manera

$$SE(n) := \{g = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,|R \in SO(n),\ P \in \mathbb{R}^n\}$$

Debido a que $SE(n) \subset GL_{n+1}(\mathbb{R})$, basta con probar los axiomas de cerradura y elemento inverso para comprobar que $SE(n)$ es un grupo.

Cerradura

Dados g_1, $g_2 \in SE(n)$ entonces

$$g_1 \cdot g_2 = \begin{bmatrix} R_1 & P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & P_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1R_2 & R_1P_2 + P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(n)$$

Inverso

$$g_1 \cdot g_1^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^\top & -R_1^\top P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Por lo que $SE(n)$ forma un grupo.

3.4. Álgebras de Lie

En esta sección se presentan las definiciones de grupos de Lie, álgebras de Lie y se mostrará como obtener el álgebra de Lie de los grupos $SO(3)$ y $SE(3)$. Si se desea profundizar en estos temas se sugiere [70] y [2] para consultar un panorama general sobre los grupos matriciales que involucra los grupos y álgrebas de Lie; en [34] se trata el tema desde la perspectiva de la mecánica de los cuerpos en traslación y rotación. En [42] se estudian los grupos y álgebras de Lie desde una

perspectiva geométrica. Finalmente en [31] se abordan los grupos y álgebras de Lie con un enfoque basado principalmente en el álgebra lineal y es de esta referencia de donde se obtiene la mayoria de las definiciones tratadas en esta sección.

Definición 3.2 (Grupo de Lie)**.** *Un grupo de Lie es una variedad suave*[1] G *que también es un grupo, donde el producto* $G \times G \to G$ *y el mapa inverso* $G \to G$ *son suaves.*

Ejemplo 3.1. *Los grupos* $GL_n(\mathbb{R})$*,* $SL_n(\mathbb{R})$*,* $SO(n)$ *y* $SE(n)$ *son grupos de Lie. Por ser grupos matriciales también se les llama grupos matriciales de Lie.*

Definición 3.3 (Álgebra de Lie)**.** *Un álgebra de Lie de dimensión finita es un espacio vectorial* $\mathfrak{g}$ *de dimensión finita dotado del mapa* $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *y que satisface las siguientes propiedades:*

- $[\cdot,\cdot]$ *es bilineal:* $[\alpha X_1 + \beta X_2, Y] = \alpha[X_1, Y] + \beta[X_2, Y]$*;* $[X, \alpha Y_1 + \beta Y_2] = \alpha[X, Y_1] + \beta[X, Y_2]$ *para todo* X*,* X_1*,* X_2*,* Y*,* Y_1*,* $Y_2 \in \mathfrak{g}$
- $[\cdot,\cdot]$ *es antisimétrico:* $[X, Y] = -[Y, X]$ $\forall$ X*,* $Y \in \mathfrak{g}$
- $\forall$ X*,* Y*,* $Z \in \mathfrak{g}$ *la identidad de Jacobi se satisface:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Ejemplo 3.2. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ *dotado del mapa* $[\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definido como* $[a, b] = a \times b$*, donde* $a \times b$ *es el producto cruz. Entonces* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie.*

Ahora daremos la definición de álgebra de Lie

Definición 3.4 ([70])**.** *El álgebra de Lie de un grupo matricial* $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ *es el espacio tangente a* G *en* I*, que es la matriz identidad, y se define como* $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(G) := T_I G$*.*

Para relacionar elementos del álgebra de Lie con los elementos del grupo, se emplea el mapa exponencial, esto queda detallado en el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sea* G *un grupo matricial de Lie, su álgebra de Lie, denotada por* $\mathfrak{g}$*, es el conjunto de todas las matrices* X *tales que* $e^{tX} \in G$ *para todo número real* t*.*

El mapa exponencial permite pasar información del álgebra al grupo. Usaremos este mapa para determinar como lucen los elementos del álgebra de Lie de un grupo matricial.

3.4.1. Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$

Por el Teorema 3.1, se eligen elementos $R(t) = e^{tX}$ y $R(t)^\top = e^{tX^T} \in SO(3)$. A partir de estos elementos se forma la curva $Q(t) = R(t)R(t)^T = e^{tX}e^{tX^T}$ que satisface $Q(0) = I$; la derivada de la curva $Q(t)$ respecto al tiempo evaluada en I será el vector tangente a $SO(3)$ en I; dado que la expresión $Q(t)$ es válida para cualquier $Q(t) \in SO(3)$, el conjunto de todos los vectores tangentes $\dot{Q}(0)$ formará el espacio tangente $T_I SO(3)$ el cual, por la definición 3.4 es el álgebra de Lie para $SO(3)$. Tomando la derivada de $Q(t)$ respecto al tiempo y evaluando en $t = 0$ se obtiene que:

$$\dot{Q}(0) = [Xe^{tX}e^{tX^T} + e^{tX}X^T e^{tX^T}]_{t=0} = X + X^T = 0 \tag{3.9}$$

[1] Una $n-$ variedad es un objeto M que localmente luce como $\mathbb{R}^n$; si a esta variedad la equipamos con una colección de sistemas de coordenadas locales que describen a M, tal que el mapa que define al cambio de coordenadas entre dos sistemas que se sobreponen es suave, entonces decimos que la variedad es suave.

El conjunto de matrices que satisfacen la ecuación (3.9) forman el espacio tangente $T_I SO(3)$; se puede notar que tales matrices deben ser de la forma $X = -X^T$, esta condición corresponde a la definición de una matriz antisimétrica.

De lo anterior, se define el álgebra de Lie para $SO(3)$ de la siguiente forma:

Definición 3.5. *El siguiente conjunto:*

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 3} | X = -X^T\} \tag{3.10}$$

dotado con la operación de corchete $[X, Y] = XY - YX$ *para toda* X, $Y \in \mathfrak{so}(3)$ *es el álgebra de Lie para el grupo* $SO(3)$.

A continuación se verifica que la operación $[X, Y] = XY - YX$ satisface los axiomas de la definición 3.3.

Bilinealidad: Para toda X, Y y $Z \in \mathfrak{so}(3)$ y números reales a, b y c. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
[aX + bY, Z] &= (aX + bY)Z - Z(aX + bY) \\
&= a(XZ - ZX) + b(YZ - ZY) \\
&= a[X, Z] + b[Y, Z] \\
[X, bY + cZ] &= X(bY + cZ) - (bY + cZ)X \\
&= b(XY - YX) + c(XZ - ZX) \\
&= b[X, Y] + c[X, Z]
\end{aligned}$$

Antisimetría: Para toda X, $Y \in \mathfrak{so}(3)$ se tiene que $[X, Y] = XY - YX = -(-XY + YX) = -[Y, X]$.

Identidad de Jacobi: Para toda X, Y y $Z \in \mathfrak{so}(3)$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
0 &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\
&= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y \\
&\quad + Z(XY - YX) - (XY - YX)Z \\
&= XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY \\
&\quad + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Existe una relación que resultará muy útil mas adelante entre elementos de $\mathbb{R}^3$ y los elementos de $\mathfrak{so}(3)$. Considere un vector $\Omega \in \mathbb{R}^3$ con componentes $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$; se define el isomorfismo $\Omega \mapsto \Omega^\times$ entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathfrak{so}(3)$ como

$$\Omega^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

y el operador inverso $\text{vex}(\Omega^\times) = \Omega$ que permite expresar la información de $\mathfrak{so}(3)$ en un vector en $\mathbb{R}^3$.

3.4.2. Álgebra de Lie $\mathfrak{se}(3)$

Usando el Teorema 3.1, se elige la curva $g(t) = e^{t\hat{\xi}} \in SE(n)$, donde $\hat{\xi}$ es un elemento del álgebra de Lie asociada al grupo $SE(n)$. Tomando la derivada de $g(t)$ respecto al tiempo se obtiene $\dot{g}(t) = e^{t\hat{\xi}}\hat{\xi}$, considerando la forma que tienen los elementos de $SE(n)$, reescribimos $\dot{g}(t) = e^{t\hat{\xi}}\hat{\xi}$ como

$$g^{-1}(t)\dot{g}(t) = \begin{bmatrix} R^\top & -R^\top P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{P} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^\top \dot{R} & R^\top \dot{P} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

del desarrollo para encontrar el álgebra de Lie de $SO(n)$, se tiene que existe una $\Omega^\times = R^\top \dot{R} \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n})$, por otra parte, se puede asociar un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v = R^\top \dot{P}$. De este modo queda claro como lucen los elementos del álgebra de Lie para $SE(n)$, de manera formal se da la siguiente definición

Definición 3.6. *El siguiente conjunto:*

$$\mathfrak{se}(\mathfrak{n}) = \left\{ \hat{\xi} = \begin{bmatrix} \Omega^\times & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\xi} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} |\ \Omega^\times \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}),\ v \in \mathbb{R}^n \right\} \tag{3.13}$$

dotado con la operación de corchete $[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1$ *para toda* $\hat{\xi}_1,\ \hat{\xi}_2 \in \mathfrak{se}(\mathfrak{n})$ *es el álgebra de Lie para el grupo* $SE(n)$.

A continuación se verifica que la operación $[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1$ satisface los axiomas de la Definición 3.3.

Bilinealidad: Para toda $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$ y $\hat{\xi}_3 \in \mathfrak{se}(3)$ y números reales a, b y c. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left[a\hat{\xi}_1 + b\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\right] &= (a\hat{\xi}_1 + b\hat{\xi}_2)\hat{\xi}_3 - \hat{\xi}_3(a\hat{\xi}_1 + b\hat{\xi}_2) \\ &= a(\hat{\xi}_1\hat{\xi}_3 - \hat{\xi}_3\hat{\xi}_1) + b(\hat{\xi}_2\hat{\xi}_3 - \hat{\xi}_3\hat{\xi}_2) \\ &= a[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_3] + b[\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3] \\ \left[\hat{\xi}_1, b\hat{\xi}_2 + c\hat{\xi}_3\right] &= \hat{\xi}_1(b\hat{\xi}_2 + c\hat{\xi}_3) - (b\hat{\xi}_2 + c\hat{\xi}_3)\hat{\xi}_1 \\ &= b(\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1) + c(\hat{\xi}_1\hat{\xi}_3 - \hat{\xi}_3\hat{\xi}_1) \\ &= b[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] + c[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_3] \end{aligned}$$

Antisimetría: Para toda $\hat{\xi}_1,\ \hat{\xi}_2 \in \mathfrak{se}(3)$ se tiene que $[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1 = -(-\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 + \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1) = -[\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_1]$.

Identidad de Jacobi: Para toda $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$ y $\hat{\xi}_3 \in \mathfrak{se}(3)$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= [\hat{\xi}_1, [\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3]] + [\hat{\xi}_2, [\hat{\xi}_3, \hat{\xi}_1]] + [\hat{\xi}_3, [\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2]] \\ &= \hat{\xi}_1(\hat{\xi}_2\hat{\xi}_3 - \hat{\xi}_3\hat{\xi}_2) - (\hat{\xi}_2\hat{\xi}_3 - \hat{\xi}_3\hat{\xi}_2)\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2(\hat{\xi}_3\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_1\hat{\xi}_3) - (\hat{\xi}_3\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_1\hat{\xi}_3)\hat{\xi}_2 \\ &\quad + \hat{\xi}_3(\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1) - (\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1)\hat{\xi}_3 \\ &= \hat{\xi}_1\hat{\xi}_2\hat{\xi}_3 - \hat{\xi}_1\hat{\xi}_3\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2\hat{\xi}_3\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_3\hat{\xi}_2\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2\hat{\xi}_3\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1\hat{\xi}_3 - \hat{\xi}_3\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 + \hat{\xi}_1\hat{\xi}_3\hat{\xi}_2 \\ &\quad + \hat{\xi}_3\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_3\hat{\xi}_2\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_1\hat{\xi}_2\hat{\xi}_3 + \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1\hat{\xi}_3 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

En particular, para $SE(3)$, el siguiente conjunto dotado con la operación de corchete $[\cdot, \cdot]$ forma el álgebra de Lie

$$\mathfrak{se}(3) = \{\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \Omega^{\times} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \Omega^{\times} \in \mathfrak{so}(3),\ v \in \mathbb{R}^3\} \tag{3.15}$$

Para concluir esta sección, definiremos un isomorfismo similar al que existe entre $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathbb{R}^3$. En este caso considere los vectores $\Omega \in \mathbb{R}^3$ con componentes $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ y $v \in \mathbb{R}^3$ con componentes (v_1, v_2, v_3), además considere un vector $\xi = (\Omega, v) \in \mathbb{R}^6$; entonces representamos el isomorfismo $\xi \mapsto \hat{\xi}$ entre $\mathbb{R}^6$ y $\mathfrak{se}(3)$ como

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \Omega^{\times} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y el operador inverso $\hat{\xi}^{\vee}$

$$\hat{\xi}^{\vee} = \begin{bmatrix} \Omega \\ v \end{bmatrix}$$

3.5. Espacios homogeneos

En el Capítulo 2 se explicó la representación de la orientación conocida como orientación reducida, ésta se obtiene a partir del producto de una matriz de rotación $R \in SO(3)$ con un vector unitario $b \in \mathbb{R}^3$. A la interacción entre elementos de un grupo de Lie y otra variedad, se le conoce con el nombre de acción. En esta sección se presentarán algunos conceptos referentes a las acciones de grupos de Lie y que dan lugar al concepto de Espacio homogeneo. Para profundizar en este tema se recomiendan las referencias [31, 42, 7].

Empecemos por dar la definición de acción de un grupo de Lie sobre una variedad.

Definición 3.7. *Sea un grupo G cuya identidad es el elemento e. La acción de G sobre un conjunto M es un mapa $G \times M \to M$, con la acción representada por el símbolo $*$, es decir, $(g, p) \mapsto g * p$; que satisface los siguientes axiomas:*

1. *Para todo $p \in M$, $e * p = p$.*
2. *Para cualesquiera elementos $g_1, g_2 \in G$ y $p \in M$, $g_1 * (g_2 * p) = (g_1 \cdot g_2) * p$.*

Las acciones de grupos de Lie sobre conjuntos pueden dar lugar a diferentes objetos como los conjuntos cocientes. Estos conjuntos pueden o no formar variedades. Con el fin de que la acción a considerar, de lugar a un espacio cociente que también sea una variedad, se imponen restricciones que la acción debe cumplir. En especial, nos interesa que la acción sea transitiva pues esto permite que la acción del grupo de Lie sobre el conjunto genere un espacio homogéneo. Los espacios homogeneos tienen la particularidad de que lucen igual en cualquier punto, es decir, no existen puntos con propiedades especiales, tal como sucede en una esfera. Antes de enunciar la definición de transitividad, describiremos algunos términos adicionales.

Definición 3.8. *Considere un elemento $p \in M$ fijo, definimos las órbitas*

$$G * p = \{g * p \mid g \in G\} \subset M$$

y definimos el subgrupo de isotropías

$$G_p = \{g \mid g * p = p\} \subset G\ .$$

Definición 3.9. *Dado un subgrupo $H \subset G$, definimos la clase lateral*

$$g \cdot H = \{g \cdot h \mid h \in H\} \subset G \, .$$

Con G/H nos referimos al conjunto de clases laterales módulo H.

Ahora daremos la definición de transitividad:

Definición 3.10. *Decimos que una acción es transitiva si, para cualesquiera $p, q \in M$, existe una $g \in G$ tal que $g * p = q$. Además, si $g * p = p$ implica que $g = e$, decimos que la acción es libre.*

Con las definiciones anteriores, estamos en posición de dar la definición de un espacio homogéneo.

Definición 3.11. *Una variedad suave M dotada con la acción transitiva de un grupo de Lie G se llama espacio homogéneo.*

Sabemos que, si M es homogéneo con respecto a G, entonces M es difeomorfo al cociente G/G_p (escribimos $M \simeq G/G_p$), donde p es cualquier elemento de M [42].

Para finalizar esta sección, daremos un ejemplo para ilustrar las definiciones anteriores:

Ejemplo 3.3. *Consideremos el conjunto $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$ y al grupo $G = SO(3) \times \mathbb{R}^3$. La operación de grupo en G se define como*

$$(R_1, \omega_1) \cdot (R_2, \omega_2) = (R_1 R_2, \omega_2 + \omega_1) \, .$$

Sea $g = (R, \omega) \in G$ y $q = (\Gamma, \Omega) \in \mathcal{M}$. Proponemos una acción $G \times M \to M$ de la siguiente forma

$$g * q = (R\Gamma, (\Gamma - R\Gamma) \times \Gamma_d + \Omega + \omega) \, .$$

Empecemos por verificar que la operación propuesta es realmente una acción. Para el primer axioma se toma el elemento identidad $e = (I, 0)$ y un elemento $q = (\Gamma, \omega) \in M$

$$e * q = (I\Gamma, (\Gamma - \Gamma) \times \Gamma_d + 0 + \omega) = q \, .$$

Para probar que se cumple con el segundo axioma, considere los elementos $g_1 = (R_1, \Omega_1)$ y $g_2 = (R_2, \Omega_2)$ del grupo G entonces

$$\begin{aligned} g_1 * (g_2 * q) &= (R_1, \omega_1) * (R_2\Gamma, (\Gamma - R_2\Gamma) \times \Gamma_d + \Omega_2 + \omega) \\ &= (R_1 R_2 \Gamma, (R_2\Gamma - R_1 R_2 \Gamma) \times \Gamma_d + (\Gamma - R_2\Gamma) \times \Gamma_d + \Omega_1 + \Omega_2 + \omega) \\ &= (R_1 R_2 \Gamma, (\Gamma - R_1 R_2 \Gamma) \times \Gamma_d + \Omega_1 + \Omega_2 + \omega) = (g_1 \cdot g_2) * q \end{aligned}$$

Por lo que la operación propuesta corresponde a una acción del grupo G sobre M. De hecho, esta acción es transitiva pues siempre podemos obtener una R tal que $R\Gamma = \tilde{\Gamma}$ para cualesquiera Γ, $\tilde{\Gamma} \in \mathbb{S}^2$ y una $\omega \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\Gamma - R\Gamma) \times \Gamma_d + \Omega + \omega = \tilde{\Omega}$ para cualesquiera Ω, $\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}^3$.

Por último, del ejemplo anterios, si consideremos al punto

$$p = (\Gamma_d, 0) \, .$$

Como $G_p \simeq SO(2) \times \{0\}$ (hemos identificado a $SO(2)$ con el conjunto de rotaciones alrededor de Γ_d) y como la acción es transitiva, se tiene el siguiente difeomorfismo

$$M \simeq (SO(3) \times \mathbb{R}^3)/(SO(2) \times \{0\}) \, .$$

En el capítulo 6, usaremos estas herramientas para estudiar algunas de las propiedades de la superficie deslizante en $\mathbb{S}^2$.

Capítulo 4

Cinemática y dinámica de cuerpos rígidos

Como se mencionó en la primeras secciones, el movimiento de un cuerpo rígido puede descomponerse en dos movimientos particulares, uno de traslación y otro referente a la orientación. Este capítulo se enfoca en el desarrollo de las ecuaciones que describen la cinemática y dinámica de la orientación. La cinemática es presentada en términos de la matriz de rotación y se aborda el caso de orientación reducida; por otra parte, la dinámica viene dada por las ecuaciones de Euler para el movimiento rotacional.

4.1. Cinemática en terminos de la matriz de rotación

Definir la orientación de un cuerpo requiere considerar un marco de referencia fijo en el cuerpo y que se mueve con éste, y otro marco de referencia con origen común al marco que se mueve con el cuerpo, pero que permanece fijo respecto al movimiento de rotación de éste; el primero de estos sistemas será identificado con la letra $\mathcal{B}$ (marco de referencia del cuerpo) y al segundo con la letra $\mathcal{F}$ (marco de referencia fijo). Dado que el cuerpo presenta movimiento rotacional, el marco de referencia del cuerpo tendrá un movimiento respecto al marco de referencia fijo.

Para iniciar con la descripción del movimiento rotacional, de la figura 4.1 considere el vector r que define la posición de un punto p, tomando la velocidad tangencial como $\dot{r} = (\|r\| \sin\theta)\Omega$ donde $\Omega \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad angular que tendría un cuerpo rígido respecto a un marco de referenica fijo $\mathcal{F}$, expresada en un marco $\mathcal{B}$ del cuerpo y θ el ángulo entre el vector de velocidad angular y el

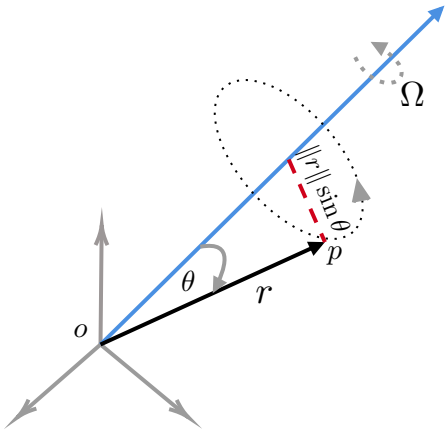


Figura 4.1: Rotación de un punto p perteneciente a un cuerpo rígido

vector de posición del punto p. Si obtenemos el modulo de la velocidad tangencial (i.e., la rapidez) se llega a la expresión $\|\dot{r}\| = \|(\|r\| \sin\theta\Omega)\|$, con esto se puede reescribir $\dot{r}$ como:

$$\dot{r} = \|(\|r\| \sin\theta)\Omega\| \frac{\Omega \times r}{\|\Omega \times r\|} = \Omega \times r \tag{4.1}$$

Ahora, dado que se busca describir el movimiento de rotación de un marco de referencia respecto a otro; considere los marcos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{F}$ con sus respectivas bases $\{b_1, b_2, b_3\}$ y $\{f_1, f_2, f_3\}$. Escribiendo el vector r en el marco de referencia del cuerpo se tiene que $r = r_1 b_1 + r_2 b_2 + r_3 b_3$, donde r_i son las componentes del vector r. Tomando su derivada respecto al tiempo vista desde el marco de referencia $\mathcal{B}$ se obtiene lo siguiente:

$$(\frac{dr}{dt})_{\mathcal{B}} = \dot{r}_1 b_1 + \dot{r}_2 b_2 + \dot{r}_3 b_3 \tag{4.2}$$

Si ahora se toma la derivada respecto al tiempo vista desde el marco de referencia $\mathcal{F}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$(\frac{dr}{dt})_{\mathcal{F}} = \dot{r}_1 b_1 + \dot{r}_2 b_2 + \dot{r}_3 b_3 + r_1 \dot{b}_1 + r_2 \dot{b}_2 + r_3 \dot{b}_3 \tag{4.3}$$

donde $\dot{b}_1$, $\dot{b}_2$ y $\dot{b}_3$ son las derivadas respecto al tiempo de los vectores base de $\mathcal{B}$. Usando las ecuaciones (4.1) y (4.2) se puede reescribir la expresión anterior de la siguiente manera:

$$(\frac{dr}{dt})_{\mathcal{F}} = (\frac{dr}{dt})_{\mathcal{B}} + \Omega \times r \tag{4.4}$$

La ecuación (4.4) se conoce como teorema de transporte [63]. Se puede notar que la derivada del lado izquierdo es con relación al marco $\mathcal{F}$ mientras que la derivada del lado derecho es con relación al marco $\mathcal{B}$, esta expresión se puede ver como un operador para derivar vectores en marcos de referencia no inerciales o con movimiento relativo. Cabe mencionar que la velocidad angular considerada en la expresión (4.4), es la velocidad angular del marco de referencia $\mathcal{B}$ relativa al marco de referencia $\mathcal{F}$ expresada en el marco $\mathcal{B}$. Es posible usar la velocidad angular medida desde el marco fijo relativa al marco del cuerpo expresada en el marco del cuerpo si la multiplicamos por -1, de modo que el teorema de transporte queda expresado como:

$$(\frac{dr}{dt})_{\mathcal{F}} = (\frac{dr}{dt})_{\mathcal{B}} - \Omega \times r \tag{4.5}$$

Se hará uso de este teorema de transporte para obtener la cinemática en términos de la matriz de rotación.

Sea $R \in SO(3)$ la matriz de rotación que mapea vectores del marco $\mathcal{B}$ al marco $\mathcal{F}$ considerando las bases $b_i \in \mathbb{R}^3$ y $f_i \in \mathbb{R}^3$. De la sección 2.3.1 se tiene lo siguiente:

$$f_i = R b_i \tag{4.6}$$

Derivando la ecuación anterior respecto al tiempo usando el teorema de transporte (4.5) se obtiene:

$$(\frac{df_i}{dt})_{\mathcal{F}} = \dot{R} b_i + R(\frac{db_i}{dt})_{\mathcal{F}} = \dot{R} b_i + R((\frac{db_i}{dt})_{\mathcal{B}} - \Omega \times b_i) \tag{4.7}$$

la derivada de los vectores b_i en el marco $\mathcal{B}$ es cero lo mismo que la derivada del lado izquierdo de la ecuación por lo que se llega a la siguiente ecuación:

$$0 = [\dot{R} - R\Omega^{\times}] b_i \tag{4.8}$$

De esta última expresión se obtiene la ecuación que define el cambio en la orientación del cuerpo en términos de la matriz de rotación R.

$$\dot{R} = R\Omega^{\times} \tag{4.9}$$

La ecuación (4.9) será utilizada en el capítulo 6 para abordar el problema de control en $SO(3)$.

4.2. Cinemática de la orientación reducida

Útil en aplicaciones de apuntado, la orientación reducida es una representación relativamente joven. Existen diversos trabajos como los presentados en [16], [13], [59] y [15] que abordan el desarrollo de leyes de control basadas en dicha representación. En la Sección 2.3.5 se describió la orientación reducida, en esta sección se describe su cinemática.

Se considera un vector $f \in \mathbb{S}^2$, alineado con alguno de los ejes principales del marco de referencia $\mathcal{F}$ y expresado en el mismo marco. Su representación en el marco de referencia del cuerpo esta dada por $\Gamma = R^{\top} f \in \mathbb{S}^2$. Tomando la derivada de Γ respecto al tiempo en el marco del cuerpo se obtiene:

$$\dot{\Gamma} = \dot{R}^{\top} f = (\Omega^{\times})^{\top} R^{\top} f = -\Omega^{\times}\Gamma = \Gamma \times \Omega \tag{4.10}$$

La ecuación (4.10) corresponde a la cinemática de la orientación reducida.

4.3. Dinámica del cuerpo rígido

Las ecuaciones de la cinemática describen el movimiento de un cuerpo sin importar las fuerzas que lo generan. Las ecuaciones de la dinámica del movimiento de un cuerpo completan la descripción del movimiento considerando la interacción de las fuerzas que lo generan. En esta sección se presenta el desarrollo de las ecuaciones de Euler para el movmiento rotacional. Se omitirá el desarrollo de la dinámica para una partícula y sistemas de partículas; para consultarlo se sugieren [25], [63] y [72].

Se considera la cantidad de movimiento angular defnida como $L = J\Omega$, donde $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica, definida positiva y expresada en el marco de referencia $\mathcal{B}$ y cuyos ejes principales coinciden con los ejes del marco de referencia $\mathcal{B}$. $\Omega \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad angular expresada en el marco de referencia $\mathcal{B}$. Por definición [72], la derivada de la cantidad de movimiento angular L respecto al tiempo en un marco de referencia inercial $\mathcal{F}$ es igual a los pares de fuerza que actúan sobre el cuerpo, es decir:

$$(\frac{dL}{dt})_{\mathcal{F}} = T \tag{4.11}$$

donde $T \in \mathbb{R}^3$ son los pares externos. Para propósitos de este trabajo, los pares externos se definirán como $T = u + D$, donde $u \in \mathbb{R}^3$ es un par de control y $D \in \mathbb{R}^3$ son perturbaciones externas que se consideran acotadas. Dado que L está expresado en el marco de referencia $\mathcal{B}$, se usará el teorema de transporte (4.4) para calcular la derivada de la expresión anterior.

$$(\frac{dL}{dt})_{\mathcal{F}} = (\frac{dL}{dt})_{\mathcal{B}} + \Omega \times L \tag{4.12}$$

Usando la ecuación (4.11) y desarrollando $(\frac{dL}{dt})_{\mathcal{B}}$ se obtiene lo siguiente:

$$u + D = \Omega \times (J\Omega) + J\dot{\Omega} + (\frac{dJ}{dt})_{\mathcal{B}}\Omega \tag{4.13}$$

Debido a que la matriz de inercia es constante en el marco $\mathcal{B}$, el último termino del lado derecho en la ecuación (4.13) es cero. Reescribiendo la ecuación anterior haciendo uso de la antisimetría del producto cruz se llega al siguiente resultado:

$$J\dot{\Omega} = (J\Omega) \times \Omega + u + D \tag{4.14}$$

La ecuación (4.14) es la ecuación de Euler para el movimiento rotacional.

Finalmente, el movimiento rotacional de un cuerpo queda descrito en términos de la matriz de rotación por las ecuaciones (4.9) y (4.14); mientras que la orientación reducida se describe a partir de las ecuaciones (4.10) y (4.14). Ambos sistemas se agrupan abajo.

$$\textit{Orientación} \begin{cases} J\dot{\Omega} = (J\Omega) \times \Omega + u + D \\ \dot{R} = R\Omega^{\times} \end{cases} \tag{4.15}$$

$$\textit{Orientación reducida} \begin{cases} J\dot{\Omega} = (J\Omega) \times \Omega + u + D \\ \dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega \end{cases} \tag{4.16}$$

Capítulo 5

Estabilidad y control por modos deslizantes

En este capítulo se introducirán los conceptos sobre estabilidad en sistemas dinámicos que serán usados en el capítulo 6. También se presenta una introducción breve al control por modos deslizantes. Esta técnica será utilizada para desarrollar controladores en $SO(3)$, $SE(3)$ y $\mathbb{S}^2$.

5.1. Sobre la estabilidad en sistemas dinámicos

En el día a día se escuchan personas hablando sobre estabilidad económica, estabilidad emocional, estabilidad laboral, estabilidad del clima, etc. La razón de que este término sea tan usado es porque se emplea para indicar que una característica, dentro de un contexto definido, no cambia o presenta cambios mínimos a lo largo del tiempo. La teoría de control no es la excepción; el concepto de estabilidad es de suma importancia pues permite describir el comportamiento que tendrán los sistemas a controlar.

Uno de los problemas a estudiar es la estabilidad de los puntos de equilibrio, se desea saber si tales puntos son estables o inestables. En teoría de control, para estudiar la estabilidad de sistemas no lineales, la principal herramienta es la teoría de estabilidad de Lyapunov; esta teoría proporciona dos métodos, el indirecto y el directo, en el primero se usa una versión linealizada del sistema no lineal y a partir de ella se estudia la estabilidad de forma local; el segundo de los métodos permite estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio usando directamente el modelo no lineal del sistema.

En esta sección se presentarán diversas definiciones de estabilidad junto algunos teoremas que permitirán estudiar la estabilidad e inestabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas a tratar en el capítulo 6.

Considere un sistema dinámico no lineal definido como:

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.1}$$

donde $f(x) \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados. Se define un punto de equilibrio x^* del sistema (5.1) de la siguiente forma:

Definición 5.1. *Se dice que el punto x^* es un punto de equilibrio del sistema (5.1) si una vez que $x(t) = x^*$, este permanece en adelante igual a x^* para todo t.*

La ecuación (5.1) en conjunto con la definición anterior indican que x^* satisface la ecuación $0 = f(x^*)$.

Ahora que se ha definido lo que es un punto de equilibrio, se enuncia la definición de estabilidad.

Definición 5.2 ([38]). *El punto de equilibrio $x^* = 0$ del sistema (5.1) es:*

- *Estable si $\forall\ \epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $|x(0)| < \delta$ implica que $|x(t)| < \epsilon\ \forall t \geq 0$*
- *Inestable si no es estable*
- *Asintóticamente estable si es estable y δ se puede elegir de forma que $|x(0)| < \delta$ implica que*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

Para determinar a cual de los casos corresponde el punto de equilibrio que se está estudiando, se emplea el teorema de estabilidad de Lyapunov.

Teorema 5.1 ([38]). *Sea $x^* = 0$ un punto de equilibrio del sistema (5.1) y $D \subset \mathbb{R}^n$ un domino que contiene a x^*. Sea $V : D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:*

- *$V(x^*) = 0$ y $V(x) > 0$ en $D \setminus x^*$*
- *$\dot{V}(x) \leq 0$ en D*

Entonces $x^* = 0$ es estable. Además, si $\dot{V}(x) < 0$ en $D \setminus x^*$, entonces el punto de equilibrio x^* es asintóticamente estable.

El resultado del teorema anterior, en cuanto a estabilidad asintótica, se puede extender para determinar la estabilidad asintótica global de un punto de equilibrio tal como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 5.2 ([38]). *Sea $x^* = 0$ un punto de equilibrio del sistema (5.1) y $D \subset \mathbb{R}^n$ un domino que contiene a x^*. Sea $V : D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:*

- *$V(x^*) = 0$ y $V(x) > 0 \quad \forall\ x \neq 0$*
- *$\|x\| \to \infty$ implica que $V(x) \to \infty$*
- *$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall\ x \neq 0$*

Entonces $x^* = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Otro tipo de estabilidad que se suele nombrar dentro del ámbito de la teoría de control, es la estabilidad en tiempo finito; poder garantizar este tipo de estabilidad resulta útil en aplicaciones en que se requiera conocer el tiempo que tardará el sistema en lazo cerrado en cumplir con las especificaciones de diseño. Las siguientes definiciones tratan los conceptos de atracción en tiempo finito y estabilidad en tiempo finito, estas definiciones se dan para sistemas definidos por inclusiones diferenciales de la forma descrita en [58]. Empecemos con la siguiente definición acerca de sistemas con soluciones en el sentido de Filippov.

Definición 5.3 ([65]). *Sea el sistema (5.1) con su lado derecho localmente acotado medible en el sentido de Lebesgue, se dice que tiene una solución en el sentido de Filippov, si éste puede ser reemplazado por una inclusión diferencial de Filippov $\dot{x} \in F(x)$ donde*

$$F(x) = \cap_{\delta>0} \cap_{\mu N>0} \bar{co} f(O_\delta(x) \setminus N)$$

μ es la medida de Lebesgue, $O_\delta(x)$ es una δ-vecindad de x y $\bar{co}M$ es la cerradura convexa del conjunto M.

Definición 5.4 ([58]). *El origen del sistema definido por la inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x,t)$ es atractivo en tiempo finito si para todo tiempo inicial $t_0 \in \mathbb{R}$ existe un conjunto $\mathcal{V}(t_0) \subseteq \mathbb{R}^n : 0 \in \text{int}(\mathcal{V}(t_0))$ tal que para toda condición inicial $x_0 \in \mathcal{V}(t_0)$*

- *Cualquier solución $x(t, t_0, x_0)$ del problema de Cauchy para $\dot{x} \in F(x,t)$ existe*
- *$T(t_0, x_0) < +\infty$ para $x_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ y $t_0 \in \mathbb{R}$*

El conjunto $\mathcal{V}(t_0)$ se llama dominio de atracción en tiempo finito.

Definición 5.5 ([58]). *El origen del sistema $\dot{x} \in F(x,t)$ se dice estable en tiempo finito si es estable en el sentido de Lyapunov y atractivo en tiempo finito. Si $\mathcal{V}(t_0) = \mathbb{R}^n$, el origen es globalmente estable en tiempo finito.*

En ocasiones, lo que se desea es verificar si un punto de equilibrio es inestable, para esta tarea, también existen teoremas de inestabilidad basados en el método directo de Lyapunov. El teorema de inestabilidad que se considera en este trabajo es el teorema de Chetaev, el cual dice lo siguiente:

Teorema 5.3 ([38]). *Sea $x^* = 0$ un punto de equilibrio para el sistema (5.1). Sea $C : D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $C(x^*) = 0$ y $C(x) > 0$ para algún x con norma $|x|$ arbitrariamente pequeña. Defina el conjunto[1] $U = \{x \in B_r | C(x) > 0\}$ y suponga que $\dot{C}(x) > 0$ en U. Entonces, x^* es inestable.*

Definición 5.6 ([37, 17]). *Una función de Chetaev para el punto de equilibrio $x^* = 0$ del sistema (5.1) es una función continuamente diferenciable $C(x)$ tal que:*

- *$C(x^*) = 0$*
- *$C(x) > 0$ para algún $x \neq 0$ arbitrariamente pequeño tal que $\dot{C}(x)$ es definida positiva al menos de forma local.*

Un punto de equilibrio x^* con una función de Chetaev de acuerdo con la definición 5.6 satisface las condiciones del teorema 5.3, i.e., si existe una función de Chetaev para el punto de equilibrio x^*, éste es inestable.

Existen situaciones en que la estabilidad asintótica, ya sea local o global, no se puede determinar directamente a partir de los teoremas 5.1 o 5.2. Esto puede ser causado por la existencia de múltiples equilibrios, soluciones periódicas aisladas (ciclos límite) o que $\dot{V}(x)$ no dependa de todos los estados del sistema. En tales casos, es posible recurrir al teorema de LaSalle.

Teorema 5.4. *(Teorema de LaSalle [38]) Sea Ω un conjunto compacto, que es positivo invariante respecto al sistema (5.1). Sea $V : D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω. Considere E como el conjunto de todos los punto en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$ y sea M el conjunto invariante mas grande en E. Entonces, toda solución que empieza en Ω se aproxima a M cuando $t \to \infty$.*

Lema 5.1. *(Lema de Barbalat [46]) Si una función $f(t)$ diferenciable tiene un límite cuando $t \to \infty$ y si su derivada respecto al tiempo $\dot{f}(t)$ es uniformemente continua, entonces $\dot{f}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.*

Para usar el Lema 5.1 en el análisis de sistemas dinámicos, usualmente se recurre a la siguiente corolario derivado del Lema 5.1 adaptado al lenguaje de la teoría de estabilidad de Lyapunov.

[1] B_r es una bola de radio r definida como $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \|x\| \leq r\}$.

Corolario 5.1. *([46]) Si una función escalar $V(x,t)$ satisface las siguientes condiciones*

- *$V(x,t)$ es acotada por abajo*
- *$\dot{V}(x,t)$ es semidefinida negativa*
- *$\dot{V}(x,t)$ es uniformemente continua en el tiempo*

entonces $\dot{V}(x,t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Ahora se dará una definición de estabilidad motivada por aquellos sistemas que por su topología no permiten al sistema en lazo cerrado ir desde cualquier condición inicial hasta una condición deseada.

Definición 5.7 ([40])**.** *Un sistema dinámico es* ***casi globalmente asintóticamente estable*** *si todas las trayectorias que empiezan en algún subconjunto denso abierto del espacio de estados convergen asintóticamente al punto de equilibrio estable deseado.*

Por ejemplo, en el caso de un sistema con múltiples equilibrios, se puede verificar cuales de estos equilibrios son estables o inestables y prescindir de aquellos puntos de equilibrio no deseados como posibles condiciones iniciales, de modo que en el subconjunto denso abierto de todos los equilibrios, sólo se tenga el punto de equilibrio deseado.

Existe una versión de la definición 5.7 para el caso de controladores que permiten obtener convergencia en tiempo finito; esta definición se ha usado en trabajos como los presentados en [60] y [6].

Definición 5.8 ([40])**.** *Un sistema dinámico es* ***casi globalmente estable en tiempo finito*** *si todas las trayectorias que empiezan en algún subconjunto denso abierto del espacio de estados convergen en tiempo finito al punto de equilibrio estable deseado.*

La definición 5.8 resulta de utilidad en aquellos casos donde la convergencia al punto de quilibrio deseado se da en tiempo finito. En nuestro caso no será requerida ya que, para los sistemas que estudiaremos, el resultado de convergencia en tiempo finito sólo se obtiene para alcanzar la variedad deslizante.

5.2. Control por modos deslizantes

En esta sección se brinda una introducción breve al control por modos deslizantes [2]. Esta técnica será utilizada mas adelante para diseñar controladores en los grupos matriciales $SO(3)$ y $SE(3)$ y en la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$. Existen varias referencias a las cuales el lector puede recurrir para profundizar en el control por modos deslizantes, en particular se sugiere [78, 65] para familiarizarse con la técnica a partir de una perspectiva mas práctica; en [76, 77] se abordan los conceptos de la teoría con un desarrollo matemático mas amplio y [23] para consultar, en específico, el tema de ecuaciones diferenciales con lados derechos discontinuos con un enfoque en sistemas dinámicos.

[2] Los desarrollos mostrados en la sección 5.2 están basados en las descripciones sobre el tema presentadas en [78, 65, 23, 77]

5.2.1. Definiciones y características del control por modos deslizantes

El origen de los modos deslizantes se encuentra en el estudio de los sistemas de estructura variable cuyo inicio data de mediados del siglo XX [65, 77]. De acuerdo con [65], la conclusión del cuerpo principal de la teoría de control por modos deslizantes se remonta a principios 1980 y cerca de éste año el Prof. Utkin, en los trabajos [76, 77], reportó los avances que se tenían. Esta técnica cobró gran relevancia dentro de la comunidad de control y hasta nuestros días ha evolucionado en una gran variedad de algoritmos aplicados a diversos problemas. El principal problema tiene que ver con el efecto de chattering, éste surge por la existencia de dinámicas no modeladas (el modelo ideal es una aproximación) que forzan una acción de control conmutada de alta frecuencia causada sobre el sistema. Recordemos que la idea del control por modos deslizantes es emplear un controlador que lleva las trayectorias del sistema a una superficie donde el control es discontinuo. Con el fin de resolver el problema del chattering, surgieron los modos deslizantes de segundo orden y posteriormente su generalización a modos deslizantes de alto orden [65].

Para diseñar un control por modos deslizantes se requiere diseñar una *superficie de deslizamiento* y un *control discontinuo* que forzará a las trayectorias del sistema a que converjan a la superficie de deslizamiento. Durante el proceso de control, se pueden distinguir dos etapas en las que evolucionan las trayectorias del sistema. La primera es la fase de alcanzabilidad, en ella las trayectorias se llevan hasta la superficie de deslizamiento. En la segunda fase, las trayectorias se mantendrán sobre la superficie deslizante y se dice que el sistema esta en el modo deslizante. El problema de control se reduce al diseño de una superficie de deslizamiento y una ley de control que garantice que el modo deslizante ocurra.

Dentro de las ventajas que muestra esta clase de controladores están: la insensibilidad o robustez ante perturbaciones acopladas (aquellas que actúan en el mismo canal que el control); reducción en el orden del sistema, una vez que el modo deslizante es alcanzado, y se tiene convergencia en tiempo finito a la superficie de deslizamiento. Por otra parte, como se mencionó anteriormente, los controladores por modos deslizantes presentan chattering, ademas de esto, se ven afectados por perturbaciones desacopladas; sin embargo, son el punto de partida para implementar otros algoritmos como los modos deslizantes de segundo orden o los modos deslizantes de alto orden. A continuación daremos algunas definiciones para abordar el diseño de controladores por modo deslizantes.

Considere un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{5.2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u(x)$ es la entrada de control y suponga que $f(\cdot)$ es diferenciable respecto a x y absolutamente continua respecto a t. Ahora, consideremos una variable $\sigma(x)$ la cual llamremos variable deslizante. Partiendo de la variable deslizante, definimos la superficie deslizante

$$\mathcal{D} = \{x | \sigma(x) = 0\} \tag{5.3}$$

Se busca que las trayectorias del sistema (5.2) evolucionen en $\mathcal{D}$ después de un tiempo finito. Para lograr esto se requiere de una acción de control discontinua $u(x)$ [78, 65]. Sustituyendo un control discontinuo $u(x)$ en la ecuación (5.2) se tiene el sistema

$$\dot{x} = f^c(x) \tag{5.4}$$

por lo que el sistema (5.4), corresponde a una ecuación diferencial con el lado derecho discontinuo. De acuerdo con [78, 65], debido a que las soluciones para este tipo de sistemas no se pueden estudiar con la teoría clásica de ecuaciones diferenciales, las soluciones para el sistema (5.4) se deben estudiar a partir de un concepto propuesto por Filippov, que abordaremos en la siguiente sección.

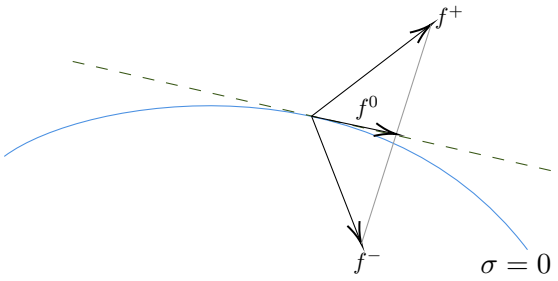


Figura 5.1: Construcción de f^0

5.2.2. El modo deslizante

El interés, a la hora de diseñar el controlador por modos deslizantes, radica en restringir el movimiento de las trayectorias a la superficie $\sigma(x) = 0$, para que esto suceda, se requiere de un control discontinuo. Debido a que el control no está definido sobre la superficie de deslizamiento, para estudiar la dinámica del sistema en esta región, se debe buscar la manera de describir lado derecho del sistema (5.4). En esta sección se describen dos métodos para obtener las ecuaciones que describen la dinámica en el modo deslizante, el método del control equivalente y el método de continuación de Filippov. Otros métodos se pueden consultar en [23, 78].

Método de continuación de Filippov

i.e. $\dot{x}$ se toma como una inclusión diferencial[3] $\dot{x} \in F(x)$ y la función vectorial absolutamente continua $x(t)$ es una solución del sistema (5.2) si $x(t)$ definida en un segmento I satisface que $\dot{x} \in F(x)$ en casi todo el segmento I [23].

Considere el sistema (5.4), se busca determinar el valor de $\dot{x}$ en cada punto sobre la superficie de deslizamiento. En el modo deslizante las trayectorias coinciden con la solución de la siguiente ecuación [65]

$$\begin{cases} \dot{x} = f^0(x,t) \\ f^0 = \alpha f^+ + (1-\alpha) f^- \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{5.5}$$

donde f^+ y f^- son los limites de $f^c(x)$ a medida que nos aproximamos al punto de discontinuidad por ambos lados de la tangente a $\mathcal{D}$. El valor de α se elige de modo que el campo vectorial $f^0(x)$ sea tangente a $\mathcal{D}$. En la Figura 5.1 se puede notar como f^0 yace sobre el plano tangente a la superficie y su punto final se intersecta con el segmento que une los finales de f^+ y f^-. El lado derecho de la ecuación (5.5) corresponde a un conjunto convexo que llamaremos $F(x) = \{\alpha f^+ + (1-\alpha) f^- \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$, por lo que la ecuación (5.5) se escribirá como

$$\dot{x} \in F(x) \tag{5.6}$$

Como el sistema se encuentra en el modo deslizante, se tiene la condición $\nabla\sigma(x) f^0 = \nabla\sigma(x)\alpha f^+ + \nabla\sigma(x)(1-\alpha) f^- = 0$; despejando α se obtiene

$$\alpha = \frac{\nabla\sigma(x) f^-}{\nabla\sigma(x) f^- - \nabla\sigma(x) f^+} \tag{5.7}$$

Finalmente, sustituyendo (5.7) en (5.5) se obtiene la siguiente expresión:

[3]Una inclusión diferencial en el sentido de Filippov es aquella cuyo conjunto de vectores $F(x)$ no es vacio, es cerrado, convexo, localmente acotado y super-semicontinuo [23].

$$\dot{x} = \frac{\nabla\sigma(x)f^-f^+ - \nabla\sigma(x)f^+f^-}{\nabla\sigma(x)(f^- - f^+)} \tag{5.8}$$

de acuerdo con [78, 23], la ecuación (5.8) es la ecuación del modo deslizante con la condición inicial $\sigma(x_0) = 0$.

La ecuación (5.6) recibe el nombre de inclusión diferencial y se dice que es una inclusión diferencial de Filippov si $F(x)$ es un conjunto no vacio, localmente acotado y semicontinuo por arriba [65] y tiene una solución en el sentido de Filippov de acuerdo con la Definición 5.3.

Método del control equivalente

Se parte de la suposición de que el vector de estados satisface la condición de deslizamiento $\sigma(x) = 0$ para $t > 0$; entonces, sobre la superficie de deslizamiento se tiene lo siguiente:

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}f(x,u) = 0 \tag{5.9}$$

Lo que se busca es un control u continuo que satisfaga la ecuación (5.9), al control que satisface dicha ecuación se le llamará control equivalente u_{eq}. Este control se sustituye en el sistema original en lugar del control discontinuo para obtener la ecuación $\dot{x} = f(x, u_{eq})$, esta ecuación será la ecuación del modo deslizante.

Por ejemplo, considere un sistema definido como $\dot{x} = f(x) + B(x)u(x)$ donde $x, f(x) \in \mathbb{R}^n$ y $u(x) \in \mathbb{R}^m$ es discontinuo sobre la superficie $\sigma(x)$. La derivada respecto al tiempo de la superficie $\sigma(x)$ es:

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}f(x) + \frac{\partial\sigma}{\partial x}B(x)u(x) = 0 \tag{5.10}$$

Por lo que el control equivalente tiene la siguiente forma:

$$u_{eq} = -(\frac{\partial\sigma}{\partial x}B(x))^{-1}(\frac{\partial\sigma}{\partial x}f(x)) \tag{5.11}$$

suponiendo que el término $(\frac{\partial\sigma}{\partial x}B(x))^{-1}$ existe, al sustituir (5.11) en el sistema original se obtiene:

$$\dot{x} = f(x) - B(x)(\frac{\partial\sigma}{\partial x}B(x))^{-1}(\frac{\partial\sigma}{\partial x}f(x)) \tag{5.12}$$

La ecuación (5.12) bajo las condiciones $\sigma(x) = 0$, $\dot{\sigma}(x) = 0$, define la ecuación del modo deslizante.

Ya que se tiene la ecuación que describe la dinámica del sistema en el modo deslizante, ésta se puede estudiar por medio de la teoría de estabilidad de Lyapunov para describir como evoluciona el sistema sobre la superficie de deslizamiento.

5.2.3. Condiciones de alcanzabilidad

En la fase de alcanzabilidad se busca que el controlador garantice que las trayectorias del sistema tiendan a la superficie de deslizamiento; lo anterior se logra si se satisfacen las siguientes condiciones [78]:

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \dot{\sigma} < 0 \qquad \lim_{\sigma\to 0^-} \dot{\sigma} > 0 \tag{5.13}$$

las condiciones (5.13) equivalen a decir que $\sigma\dot{\sigma} < 0$. Estas condiciones se pueden derivar a partir de la teoría de estabilidad de Lyapunov definiendo una función de la forma:

$$V(\sigma(x)) = \frac{1}{2}\sigma(x)^T\sigma(x) \tag{5.14}$$

Se busca que $\dot{V}(\sigma(x)) < 0$ para $\sigma(x) \neq 0$. Si se desea garantizar la convergencia en tiempo finito, se diseña $u(x,t)$ tal que $\dot{V}(\sigma(x)) < -\alpha(V(\sigma(x)))^{1/2}$ [65], de esta forma el modo deslizante se alcanza en tiempo finito. Una vez que se ha alcanzado la superficie $\sigma(x)$, el sistema entra en el modo deslizante.

5.2.4. Ejemplo de diseño: control por modos deslizantes

Ahora presentaremos un ejemplo del diseño de un controlador por modos deslizantes. Consideremos el siguiente sistema obtenido de [32]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-kx_1 - cx_2 + u + \alpha\sin(x_1)) \end{aligned} \tag{5.15}$$

donde x_1 representa el desplazamiento de una masa m, x_2 es la velocidad lineal, y los parámetros $k = 2\text{N/m}$, $c = 3\text{N}\cdot\text{s/m}$ y $m = 2\text{kg}$.

Para diseñar el controlador por modos deslizantes, consideremos la variable deslizante

$$\sigma_m(x) = a_1x_1 + a_2x_2$$

tomemos $x = (x_1, x_2)^\top$, estamos iteresados en restringir el movimiento de las trayectorias de (5.15) a una superficie

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 | \sigma_m(x) = 0\}.$$

Como se mencionó antes, requerimos de la acción de un control discontinuo. Para esto usaremos el control

$$u = -L\,\text{sign}(\sigma_m) \tag{5.16}$$

donde $L > 0$. Para conocer la dinámica del sistema en el modo deslizante, usaremos la condición que nos indica que nuestro sistema está en el modo deslizante, i.e. $\sigma_m(x) = a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, de esto se obtiene que

$$x_2 = -\frac{a_1x_1}{a_2}$$

tomando la primera ecuación de (5.15) y sustituyendo en ella, la ecuación anterior, se tiene

$$\dot{x}_1 = -\frac{a_1x_1}{a_2} \tag{5.17}$$

La ecuación (5.17) es la dinámica de orden reducido y describe el comportamiento del sistema en el modo deslizante. Esta ecuación tiene la siguiente solución

$$x_1 = x_{1,0}e^{-a_1t/a_2}$$

donde $x_{1,0}$ es el valor que tiene x_1 en el momento que se alcanza la superficie S.

Ahora que hemos estudiado lo que sucede en el modo deslizante, verificaremos que la superficie S, es alcanzable en tiempo finito. Consideremos la función candidata de Lyapunov

$$V(\sigma(x)) = \frac{m}{2}\sigma(x)^2 \tag{5.18}$$

note que $V(\sigma(x)) > 0$ y $V(\sigma(x)) = 0$ solo si $\sigma(x) = 0$. Tomando la derivada de (5.18) respecto al tiempo y sustituyendo en ella (5.15), se tiene

$$\dot{V}(\sigma(x)) = a_2\sigma(x)((m \cdot a_1)x_2/a_2 - kx_1 - cx_2 - L\,\text{sign}(\sigma_m) + \alpha\sin(x_1))$$

la expresión anterior se puede acotar de la siguiente forma

$$\dot{V}(\sigma(x)) \leq a_2|\sigma(x)|((m \cdot a_1)|x_2|/a_2 + k|x_1| + c|x_2| - L + \alpha)$$

para este ejemplo, supongamos que existen cotas $|x_1| \leq \eta_1$ y $|x_2| \leq \eta_2$ con $\eta_1, \eta_2 > 0$, de modo que es posible elegir una constante L que satisface

$$L \geq (m \cdot a_1)\eta_1/a_2 + k\eta_1 + c\eta_2 + \alpha + \delta$$

donde $\delta > 0$. Entonces, la derivada respecto al tiempo de (5.18) se puede acotar por

$$\dot{V}(\sigma(x)) \leq -a_2\delta|\sigma(x)|$$

a partir de la ecuación (5.18), podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\dot{V}(\sigma(x)) \leq -\delta\sqrt{\frac{V(\sigma(x))}{m}} \tag{5.19}$$

Finalmente, del lema de comparación [38], se concluye que $V(\sigma(x)) \to 0$ en tiempo finito y por lo tanto $\sigma(x) \to 0$ en tiempo finito.

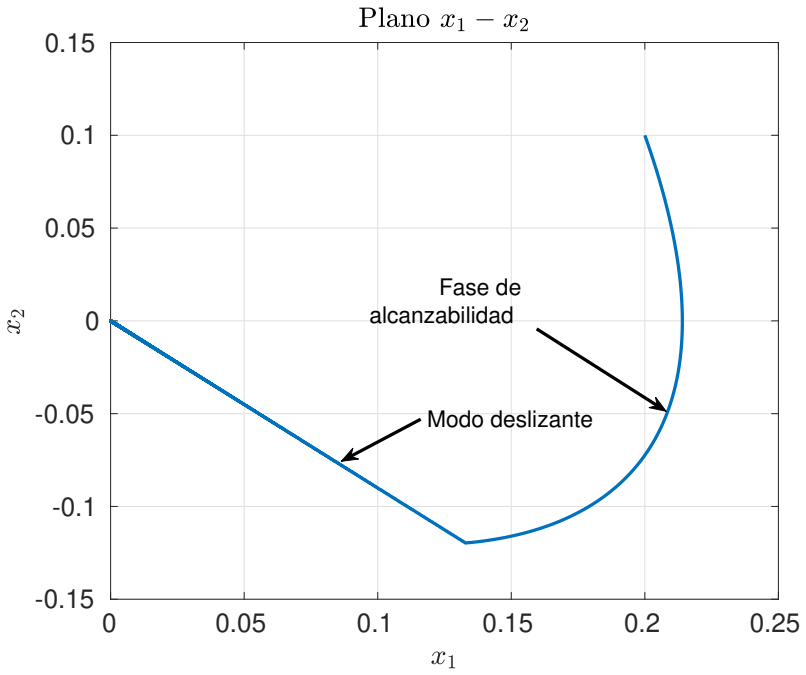


Figura 5.2: Plano $x_1 - x_2$, se puede notar como la trayectoria pasa al modo deslizante y a partir de ese momento, esta se comporta como una recta que va al origen.

La Figura 5.2 muestra como la trayectoria en el plano $x_1 - x_2$ transita por la fase de alcanzabilidad y al llegar a la superficie deslizante, la trayectoria se comporta como una recta, tal como se esperaba de acuerdo con la ecuación (5.17).

En el siguiente capítulo, se mostrará como diseñar controladores por modos deslizantes en $SO(3)$, $SE(3)$ y $\mathbb{S}^2$, se estudiará la estabilidad de los sitemas en las fases de alcanzabilidad y en el modo deslizante a partir de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Además de lo anterior, se mostrará la importancia de diseñar superficies que tomen en cuenta la geometría del espacio de configuraciones del sistema.

Capítulo 6

Modos deslizantes y representaciones geométricas: control de cuerpos rígidos

La manera natural de definir la orientación de un cuerpo rígido es por medio de las matrices de rotación. Estas matrices forman el grupo $SO(3)$ definido en el Capítulo 3. La importancia de generar controladores en $SO(3)$, respecto a generarlos en las otras representaciones, se debe a que las matrices de rotación permiten brindar una representación única de la orientación, esto se traduce en la ausencia del fenómeno de unwinding [16, 5] típico en representaciones no únicas como es el caso de los cuaterniones, y la ausencia de singularidades debido a que las matrices de rotación permiten una representación global. En el caso de la orientación reducida, su importancia radica en que no se requiere usar toda la información contenida en la matriz de rotación, por lo que la cantidad de cálculos se reduce; además, hereda las propiedades de unicidad y globalidad de la matriz de rotación.

Las matrices de rotación, desde el punto de vista de la teoría de control, resultan atractivas para generar leyes de control debido a las características mencionadas anteriormente; sin embargo, su topología da lugar a la existencia de otros fenómenos que desembocan en restricciones para las leyes de control en tiempo continuo [5, 16]. Uno de estos fenómenos es la existencia de múltiples puntos de equilibrio [40]; en el caso de los controladores presentados en [16, 60, 6, 61], tales puntos corresponden a un conjunto de medida cero y sólo uno de ellos es estable . En cambio, si se trata de la orientación reducida, para el problema de regulación surgen dos puntos de equilibrio [13, 59, 15], uno estable y otro opuesto que es inestable.

En este capítulo, se presentarán los resultados obtenidos de nuestra investigación, enfocada en el diseño de superficies deslizantes en variedades que permiten modelar el movimiento de cuerpos rígidos; en específico, se tratarán problemas de control de sistemas completamente actuados, definidos en los grupos de Lie $SO(3)$ y $SE(3)$ y en el espacio homogeneo $\mathbb{S}^2$.

6.1. El problema con las superficies lineales

Al trabajar con sistemas cuyo espacio de configuración es no euclidiano, pueden surgir situaciones inesperadas si no se consideran las propiedades de dicho espacio. En el caso del control por modos deslizantes, si se elige una superficie lineal, pueden surgir algunos problemas al tratar este tipo de sistemas. Para ilustrar esta situación, presentaremos un ejemplo basado en [5].

Considere un cuerpo rígido que rota únicamente alrededor de uno de sus ejes. El espacio de fase $\mathcal{M}$ consiste en todas las rotaciones $\mathbb{S}$ junto con todas las velocidades angulares posibles $\mathbb{R}$, de modo que $\mathcal{M}$ corresponde a un cilindro de la forma $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$. Además, suponga que el cuerpo está sometido a un par u. En las coordenadas locales (θ, ω) para $\mathcal{M}$, las ecuaciones del movimiento son las siguientes:

$$\dot{\theta} = \omega \tag{6.1a}$$
$$\dot{\omega} = u \, . \tag{6.1b}$$

El objetivo es estabilizar la posición angular en $\theta = 0$. Una selección usual de la variable deslizante sería la siguiente:

$$\sigma(\theta, \omega) = \omega + \theta \, . \tag{6.2}$$

La siguiente ley de control

$$u(\theta, \omega) = -\left(|\omega| + 1\right) \operatorname{sign} \sigma(\theta, \omega) \tag{6.3}$$

lleva el estado a la superficie de deslizamiento

$$\mathcal{D} = \{(\theta, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sigma(\theta, \omega) = 0\}$$

(la soluciones se consideran en el sentido de Filippov [23]).

De lo anterior, se tiene que la dinámica de orden reducido, es decir, la dinámica sobre la superficie de deslizamiento está dada por $\dot{\theta} = -\theta$, donde $\theta = 0$ posee estabilidad exponencial global. Podría parecer que el sistema en lazo cerrado (6.1)-(6.3) tiene un equilibrio con estabilidad exponencial global. Sin embargo, note que dicho punto θ no está representado de forma única. Sea $\bar{\theta} \in [0, 2\pi)$ el ángulo principal, entonces todo θ que satisfaga $\theta \bmod 2\pi = \bar{\theta}$ representa el mismo punto en S. Además, algunos de estos θ llevan a diferentes valores del control, por lo que el control es en realidad multivaluado. Este hecho no se consideró en el análisis preliminar, así que la condición de estabilidad asintótica global para $(0, 0)$ queda invalidada.

Una consecuencia de que la representación no sea única es el fenómeno de *unwinding*. Para mostrarlo, considere la condición inicial $(4\pi, 0) \notin \mathcal{D}$. Esta condición representa el mismo punto $(0, 0) \in \mathcal{D}$, que es el punto de equilibrio deseado. A pesar de esto, la ley de control (6.3) llevará al estado del sistema del punto $(4\pi, 0)$ al punto $(0, 0)$ haciendo que el sistema de dos rotaciones completas innecesariamente.

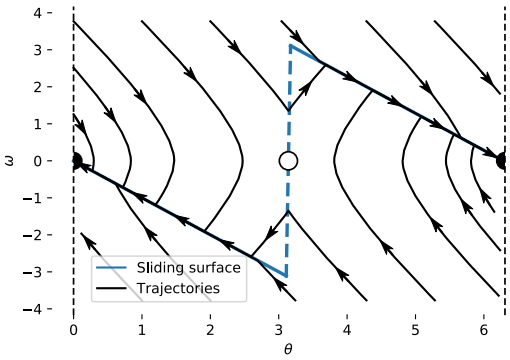
Para evitar este comportamiento, podemos reemplazar (6.2) con

$$\sigma(\theta, \omega) = \omega - \pi + (\theta - \pi) \text{ mód } 2\pi \, , \tag{6.4}$$

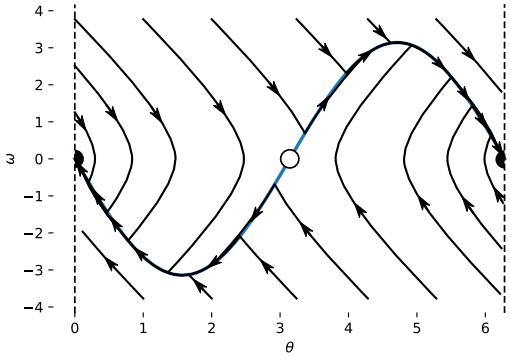
lo cual hace que el control solo tenga un solo valor para el mismo punto. Note que la variable sigue siendo lineal para $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$; sin embargo, debido a la topología del cilindro, la superficie de deslizamiento contendrá una discontinuidad a fin de mantener su carácter lineal. Para el ejemplo, la discontinuidad queda situada en el punto $\theta = \pi$.

La figura 6.1a muestra el plano fase de (6.1), (6.3), (6.4). En este ejemplo, tan solo viendo el plano fase, se nota que es posible alcanzar estabilidad asintótica casi global (ver definición 5.7). Esto es lo más que podemos obtener con un control de este tipo aplicado a un sistema mecánico con un espacio de configuración compacto. Algo a notar es que $\mathcal{D}$ es disconexa y el campo vectorial sufre de discontinuidades fuera de $\mathcal{D}$, a lo largo de la línea que une los puntos $(\pi, -\pi)$ y (π, π). También note que existe un punto de equilibrio inestable en $(\pi, 0)$ y este afecta la atractividad global de $(0, 0)$.

Para analizar a profundidad las propiedades de estabilidad en sistemas de este tipo, se requiere de herramientas matemáticas que no se encuentran comúnmente dentro de la literatura de modos



(a) Variable deslizante (6.4). La superficie deslizante es disconexa y el campo vectorial discontinuo en algunos puntos fuera de la superficie.



(b) Variable deslizante (6.5). La superficie deslizante es suave y conexa.

Figura 6.1: Plano fase de (6.1), (6.3). Los puntos $(0, \omega)$ y $(2\pi, \omega)$ se eligen de modo que los planos fase están en $S \times \mathbb{R}$. Existen puntos de equilibrio estables e inestables en $(0, 0)$ y $(0, \pi)$, respectivamente.

deslizantes. Salvo excepciones como [53], σ se considera siempre continua. Esta consideración se puede mantener si se explotan las propiedades del espacio de configuración del sistema.

Una alternativa razonable es reemplazar (6.2) por

$$\sigma(\theta, \omega) = \omega + \pi \sin \theta \ . \tag{6.5}$$

La periodicidad en θ garantiza que (6.3) sea univaluada, sin destruir la continuidad de la variable deslizante. El plano fase se muestra en la figura 6.1b. Note que nuevamente, $(0, 0)$ es casi globalmente asintóticamete estable, pero sin los diferentes problemas que hemos mencionado.

En vista de la problemática planteada en el ejemplo, en las siguientes secciones se desarrollan controladores en otras variedades que evitarán fenómenos como el unwinding y conservarán la continuidad de la variable deslizante.

6.2. Modos deslizantes en $SO(3)$

El grupo $SO(3)$ conformado por las matrices de rotación parametriza el conjunto de las diferentes orientaciones que puede presentar un cuerpo rígido, de forma que cada matriz corresponde a una orientación del cuerpo y *vice versa*. Las matrices de rotación tienen la gran ventaja de ser una representación global y única.

Además de ser un grupo bajo el producto de matrices, recordemos que $SO(3)$ posee la estructura de variedad suave y tanto el producto como la inversa son suaves, por lo cual es un grupo de Lie. Como se mencionó en el Capítulo 3, el espacio tangente al elemento identidad de $SO(3)$, denotado como $T_I SO(3)$, se asocia con el espacio de las matrices antisimétricas $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $X + X^\top = 0$. Añadiendo a este espacio la operación de corchete $[A, B] = AB - BA$, da lugar al álgebra de Lie para $SO(3)$, representada por $\mathfrak{so}(3)$.

Del Capítulo 3, recordemos el isomorfismo $\omega \mapsto \omega^\times$ entre $(\mathbb{R}^3, \times)$ y $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$, dicho isomorfismo se definió de la siguiente manera:

$$\omega^\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Para todo par (R, ω), se tiene la siguiente identidad [50]

$$(R\omega)^\times = R\omega^\times R^\top \ . \tag{6.6}$$

al igual que el mapa inverso $(\cdot)^\times$, que se representó como vex : $\mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$.

Con el fin de simplificar la notación, consideramos a $\mathbb{P}_\mathrm{a} : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathfrak{so}(3)$ como el operador que retiene la parte antisimétrica de una matriz,

$$\mathbb{P}_\mathrm{a}(A) = \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) \ ,$$

por otro lado, $\mathbb{P}_\mathrm{s}(A) : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$, definido como

$$\mathbb{P}_\mathrm{s}(A) = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) \ ,$$

será el operador que retiene la parte simétrica de la matriz.

Usualmente, en el análisis de estabilidad de los sistemas dinámicos, recurrimos a alguna definición de error para saber si nuestro objetivo de control se cumple o no. La forma mas simple de definir dicho error, en el caso de $\mathbb{R}^n$, se obtiene por medio de la resta. En términos de la teoría de grupos, equivale a decir que sumamos un elemento con el inverso de otro. Siguiendo la misma línea de pensamiento; dado que en un grupo matricial como $SO(3)$, la operación es el producto, resulta natural pensar en el error como el producto de un elemento del grupo por la inversa de otro elemento del grupo.

Otro elemento importante a considerar es el siguiente producto interno para matrices

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) \ .$$

Este producto esta relacionado con el producto punto o producto escalar de la siguiente manera Si $v, w \in \mathbb{R}^3$ y $A = A^\top$, se tienen las siguientes identidades [50]

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\langle\langle v^\times, w^\times\rangle\rangle \tag{6.7}$$

y

$$\langle\langle A, v^\times\rangle\rangle = 0 \ . \tag{6.8}$$

Antes de pasar a la definición de la dinámica del sistema y el diseño del controlador, recordemos que del teorema de rotación de Euler, se tiene que cualquier orientación R se puede obtener al rotar un eje $\eta \in \mathbb{R}^3$ en un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$. Esto nos lleva a la fórmula de Rodrigues, vista en el Capítulo 2

$$R = I + \eta^\times \sin(\theta) + (\eta^\times)^2(1 - \cos(\theta)) \ . \tag{6.9}$$

y la parametrización de la traza presentada en el mismo capítulo.

$$\mathrm{tr}(R) = 1 + 2\cos(\theta) \ . \tag{6.10}$$

Estos elementos serán de utilidad durante el análisis de estabilidad.

6.2.1. Ecuaciones del movimiento y la superficie deslizante

El espacio de estados $\mathcal{M}$ para la dinámica de la orientación consiste en el conjunto de orientaciones $SO(3)$, junto con el conjunto de posibles velocidades angulares, $\mathbb{R}^3$, de modo que $\mathcal{M} = SO(3) \times \mathbb{R}^3$.

Suponga que somos capaces de aplicar pares a lo largo de los ejes principales del cuerpo rígido cuya matriz de inercia se define como $J \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $J = J^\top > 0$.

En el capítulo 4, se vio que las ecuaciones del movimiento que describen la orientación de cuerpos rígidos están dadas por la cinemática

$$\dot{R} = R\omega^{\times}$$

y la ecuación de Euler,

$$J\dot{\omega} = (J\omega) \times \omega + u + d \, ,$$

donde $u, d \in \mathbb{R}^3$ son los pares de control y las perturbaciones respectivamente.

Como objetivo de control, se busca que el sistema siga una orientación deseada R_{d} con una velocidad angular ω_{d} tal que se cumple con la ecuación cinemática

$$\dot{R}_{\mathrm{d}} = R_{\mathrm{d}}\omega_{\mathrm{d}}^{\times} \, . \tag{6.11}$$

Antes hemos mencionado que, una parte crucial en el análisis de estos sistemas, es la definición del error. El error permitirá verificar si nuestro objetivo de control se cumple o no. En el caso de $SO(3)$, la elección natural del error es $R_{\mathrm{e}} = R_{\mathrm{d}}^{\top} R$ para la orientación y $\omega_{\mathrm{e}} = \omega - R_{\mathrm{e}}^{\top}\omega_{\mathrm{d}}$, para la velocidad angular. Note que

$$(R_{\mathrm{e}}, \omega_{\mathrm{e}}) = (I, 0) \quad \text{si, y sólo si,} \quad (R, \omega) = (R_{\mathrm{d}}, \omega_{\mathrm{d}}) \, .$$

Entonces la cinemática del error es

$$\begin{aligned} \dot{R}_{\mathrm{e}} &= (R_{\mathrm{d}}\omega_{\mathrm{d}}^{\times})^{\top} R + R_{\mathrm{d}}^{\top} R\omega^{\times} \\ &= -(\omega_{\mathrm{d}})^{\times} R_{\mathrm{e}} + R_{\mathrm{e}}\omega^{\times} \\ &= (R_{\mathrm{e}}(\omega_{\mathrm{e}} - \omega))^{\times} R_{\mathrm{e}} + R_{\mathrm{e}}\omega^{\times} \, . \end{aligned}$$

Usando (6.6) se obtiene

$$\dot{R}_{\mathrm{e}} = R_{\mathrm{e}}\omega_{\mathrm{e}}^{\times} \, . \tag{6.12a}$$

La dinámica del error se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_{\mathrm{e}} &= J(\dot{\omega} - \dot{R}_{\mathrm{e}}^{\top}\omega_{\mathrm{d}} - R_{\mathrm{e}}^{\top}\dot{\omega}_{\mathrm{d}}) \\ &= (J\omega) \times \omega + J\omega_{\mathrm{e}}^{\times} R_{\mathrm{e}}^{\top}\omega_{\mathrm{d}} - JR_{\mathrm{e}}^{\top}\dot{\omega}_{\mathrm{d}} + u + d \\ &= (J\omega) \times \omega + JR_{\mathrm{e}}^{\top}\left((R_{\mathrm{e}}\omega_{\mathrm{e}})^{\times}\omega_{\mathrm{d}} - \dot{\omega}_{\mathrm{d}}\right) + u + d \, , \end{aligned}$$

donde hemos usado (6.6) para obtener la ecuación anterior. Ahora, se elige

$$u = -JR_{\mathrm{e}}^{\top}\left((R_{\mathrm{e}}\omega_{\mathrm{e}})^{\times}\omega_{\mathrm{d}} - \dot{\omega}_{\mathrm{d}}\right) + v$$

de forma que

$$J\dot{\omega}_{\mathrm{e}} = (J\omega) \times \omega + v + d \, , \tag{6.12b}$$

La superficie deslizante

Para definir la variable deslizante, usaremos el mapa $\mathrm{vex}(\cdot)$ que nos permitirá simplificar el análisis. Ahora considere la variable deslizante $\sigma : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$

$$\sigma(R_{\mathrm{e}}, \omega_{\mathrm{e}}) = \omega_{\mathrm{e}} + \mathrm{vex}\left(\mathbb{P}_{\mathrm{a}}(R_{\mathrm{e}})\right) \, . \tag{6.13}$$

Note que ésta representación de la variable deslizante, por medio del mapa $(\cdot)^{\times}$, se puede ver como el mapa $\sigma : \mathcal{M} \to \mathfrak{so}(3)$, el análisis que se presentará en las siguientes secciones también se puede realizar con esta representación; sin embargo, consideramos que usar la variable (6.13) nos brinda un desarrollo más ágil.

A partir de la variable deslizante (6.13) se elige la siguiente superficie deslizante[26]

$$\mathcal{D} = \{(R_{\mathrm{e}}, \omega_{\mathrm{e}}) \in \mathcal{M} \mid \sigma(R_{\mathrm{e}}, \omega_{\mathrm{e}}) = 0\} \tag{6.14}$$

6.2.2. Estabilidad de la dinámica de orden reducido

Debido al carácter compacto de $SO(3)$ y a los argumentos presentados en [5] sabemos que no es posible alcanzar un resultado de estabilidad asintótica global en (6.12) mediante el uso de controladores como el que buscamos desarrollar. Por este motivo, lo más que buscaremos probar es la estabilidad casi global del punto de equilibrio deseado.

La dinámica del sistema a lo largo de $\mathcal{D}$ se obtiene al aplicar la restricción $\sigma(R_\mathrm{e}, \omega_\mathrm{e}) = 0$ sobre (6.12). Lo que lleva a la dinámica de orden reducido

$$\dot{R}_\mathrm{e} = -R_\mathrm{e}\mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e}) \; . \tag{6.15}$$

Teorema 6.1. *[26] El elemento identidad $R_\mathrm{e} = I$ es un equilibrio casi globalmente asintóticamente estable del sistema de orden reducido* (6.15)*.*

Demostración. Consideremos la función lineal candidata de Lyapunov[1] [50]

$$V_R(R_\mathrm{e}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(I - R_\mathrm{e}) \; .$$

Note que $V_R(R_\mathrm{e}) \geq 0$ ya que $\operatorname{tr}(I) = 3$ y $\operatorname{tr}(R_\mathrm{e}) \in [-1, 3]$ (cf. (6.10)). $V_R(R_\mathrm{e}) = 0$ si y sólo si $R_\mathrm{e} = I$. Su derivada respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_R(R_\mathrm{e}) &= \frac{1}{2}\operatorname{tr}(R_\mathrm{e}\mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e})) \\
&= \frac{1}{2}\langle\langle R_\mathrm{e}^\top, \mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e})\rangle\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\langle -\mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e}) + \mathbb{P}_\mathrm{s}(R_\mathrm{e}), \mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e})\rangle\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\langle\langle \mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e}), \mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e})\rangle\rangle \; ,
\end{aligned}$$

la ecuación anterior se obtiene con ayuda de (6.8). Usando (6.7) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\dot{V}_R(R_\mathrm{e}) &= -\langle \operatorname{vex}(\mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e})), \operatorname{vex}(\mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e}))\rangle \\
&= -\| \operatorname{vex}(\mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e}))\|^2 \leq 0 \; .
\end{aligned}$$

Esto prueba la estabilidad de $R_\mathrm{e} = I$.

La convergencia casi global se establecerá por medio del Teorema 5.4. Empecemos por determinar el siguiente conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ R_\mathrm{e} \in SO(3) \mid \dot{V}_1(R_\mathrm{e}) = 0 \right\} \; .$$

De la fórmula de Rodrigues (6.9) se tiene que

$$\mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e}) = \sin(\theta)\eta_\mathrm{e}^\times \; .$$

Como $\eta_\mathrm{e} \neq 0$, entonces $\mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e}) = 0$ solo si $\theta \in \{0, \pi\}$. Nuevamente, de la ecuación (6.9) se concluye que

$$\mathcal{E} = \{I\} \cup \left\{ -I + 2\eta\eta^\top \mid \eta \in \mathbb{R}^3, \; \|\eta\| = 1 \right\} \; .$$

Note que $\mathcal{E}$ esta formado por equilibrios, asi que $\mathcal{E}$ es el conjunto invariante mas grande contenido en $\mathcal{E}$, de modo que todas las trayectorias convergen a $\mathcal{E}$.

Para finalizar, debido a que

$$R_\mathrm{e} \in \left\{ -I + 2\eta\eta^\top \mid \eta \in \mathbb{R}^3, \; \|\eta\| = 1 \right\}$$

[1] Usar la función lineal $\operatorname{tr}(I - R) = \operatorname{tr}(I - \mathbb{P}_\mathrm{s}(A))$ es equivalente a usar el producto interior de Frobenius $\operatorname{tr}[(I - R)^\top (I - R)] = 2\operatorname{tr}(I - \mathbb{P}_\mathrm{s}(A))$ como función candidata de Lyapunov pues sólo difieren en una constante.

se tiene que $V_R(R_\mathrm{e}) = \mathrm{tr}\left(I - \eta\eta^\top\right) = 3 - \mathrm{tr}(\eta^\top\eta) = 2$, este es el valor máximo que V_R puede alcanzar. Lo anterior implica que todos los equilibrios $R_\mathrm{e} \in \mathcal{E}$ son inestables, con excepción de $R_\mathrm{e} = I$. Por lo tanto, el único punto de atracción es $R_\mathrm{e} = I$. El hecho de que $\mathcal{E}$ es un conjunto de medida cero, nos permite concluir la convergencia casi global. □

Nota 6.1. *El ejemplo presentado al inicio de este Capítulo 6 y la variable deslizante, se pueden ver como un caso particular en $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ si se restringe el movimiento a la rotación de un solo eje principal.*

6.2.3. Ley de alcanzabilidad de la superficie deslizante

La condición $\sigma(R_\mathrm{e}, \omega_\mathrm{e}) = 0$ se puede satisfacer por medio de la siguiente ley de control.

Teorema 6.2. *[26] Suponga que las perturbaciones d están acotadas por una constante conocida $\bar{d} > 0$, esto es, $\|d\| \leq \bar{d}$. Tomando una constante $\delta > 0$ y eligiendo*

$$v(R_\mathrm{e}, \omega_\mathrm{e}, \omega) = -K(\omega_\mathrm{e}, \omega)\frac{\sigma(R_\mathrm{e}, \omega_\mathrm{e})}{\|\sigma(R_\mathrm{e}, \omega_\mathrm{e})\|} \tag{6.16}$$

con σ igual a (6.13) *y una ganancia*

$$K(\omega_\mathrm{e}, \omega) \geq \|J\|_2 \cdot \|\omega\|^2 + \|\omega_e\| + \bar{d} + \delta \; . \tag{6.17}$$

Entonces, las trayectorias de (6.12) *convergen a $\mathcal{D}$* (6.14) *en tiempo finito.*

Demostración. Para la prueba, consideremos la función candidata de Lyapunov

$$V_\sigma(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^\top J\sigma \; .$$

Usando (6.13), la derivada de $V_\sigma(\sigma)$ luce de la siguiente forma

$$\dot{V}_\sigma(\sigma) = \sigma^\top J\left(\dot{\omega}_\mathrm{e} + \mathrm{vex}(\mathbb{P}_\mathrm{a}(\dot{R}_\mathrm{e}))\right) \; .$$

Usando la dinámica (6.12) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}_\sigma(\sigma) &= \sigma^\top J\left(\dot{\omega}_\mathrm{e} + \mathrm{vex}(\mathbb{P}_\mathrm{a}(\dot{R}_\mathrm{e}))\right) \\ &= \sigma^\top\left((J\omega)\times\omega + \mathrm{vex}(\mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e}\omega_e^\times)) + d + v\right) \; .\end{aligned}$$

Es fácil verificar que

$$\|(J\omega)\times\omega\| \leq \|J\|_2 \cdot \|\omega\|^2$$

y (6.7) implica que

$$\|\,\mathrm{vex}(\mathbb{P}_\mathrm{a}(R_\mathrm{e}\omega_e^\times))\| = \|\omega_e\| \; .$$

Por lo tanto, la derivada respecto al tiempo está acotada por

$$\dot{V}_\sigma(\sigma) \leq -\|\sigma\|\left(K(\omega_\mathrm{e}, \omega) - \|J\|_2 \cdot \|\omega\|^2 - \|\omega_e\| - \bar{d}\right) \; .$$

La condición (6.17) garantiza que

$$\dot{V}_\sigma(\sigma) \leq -\delta\sqrt{\frac{V_\sigma(\sigma)}{\lambda_{\mathrm{máx}}(J)}} \; .$$

Finalmente, del lema de comparación [38], se obtiene que V_σ, y por lo tanto σ, tienden a cero en tiempo finito, lo que implica que el par $(R_e, \omega_e) \in \mathcal{D}$. □

En la siguiente sección se presentarán simulaciones para el caso de seguimiento y una comparación entre un controlador por modos deslizantes que presenta unwinding y el propuesto en esta sección.

6.2.4. Estabilidad exponencial sobre la superficie deslizante

En esta parte mostraremos que el controlador (6.16) garantiza estabilidad exponencial, una vez que las trayectorias del sistema alcanzan el modo deslizante. Con este fin en mente, considere la siguiente función candidata de Lyapunov [13, 50].

$$V = \operatorname{tr}(\mathbb{P}_a^T(R_e)\mathbb{P}_a(R_e)) \tag{6.18}$$

donde $V > 0$ and $V = 0$ solo si $\mathbb{P}_a(R_e) = 0$. Tomando la derivada respecto al tiempo de (6.18) obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \operatorname{tr}(\mathbb{P}_a^T(\dot{R}_e)\mathbb{P}_a(R_e) + \mathbb{P}_a^T(R_e)\mathbb{P}_a(\dot{R}_e)) \\ &= \operatorname{tr}(\mathbb{P}_a(R_e)\frac{\dot{R}_e^T - \dot{R}_e}{2} - \mathbb{P}_a(R_e)\frac{\dot{R}_e - \dot{R}_e^T}{2}) \\ &= \operatorname{tr}(\mathbb{P}_a(R_e)[(\omega_e^\times)^T R_e^T - R\omega_e^\times])\end{aligned} \tag{6.19}$$

De la condición de deslizamiento se tiene que $-\mathbb{P}_a(R_e) = \omega_e^\times$, al sustituir esta expresión en (6.19) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \operatorname{tr}(\mathbb{P}_a(R_e)[-\mathbb{P}_a(R_e)^T R_e^T + R\mathbb{P}_a(R_e)]) \\ &= \operatorname{tr}(\mathbb{P}_a(R_e)\mathbb{P}_a(R_e)R_e^T) + \operatorname{tr}(\mathbb{P}_a(R_e)R_e\mathbb{P}_a(R_e)) \\ &= 2\operatorname{tr}(\mathbb{P}_a(R_e)^2(R_e + R_e^T)) \\ &= 4\operatorname{tr}(\mathbb{P}_a(R_e)^2\mathbb{P}_s(R_e))\end{aligned} \tag{6.20}$$

Partiendo de la fórmula de Rodrigues (6.9), escribimos las partes antisimétrica y simétrica de R_e como $\mathbb{P}_a(R_e) = \sin(\theta)\eta^\times$ y $\mathbb{P}_s(R_e) = I + (1 - \cos(\theta)(\eta^\times)^2)$ respectivamente. Entonces (6.20) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 4\operatorname{tr}(-\sin^2(\theta)(\eta^\times)^T(\eta^\times) - \sin^2(\theta)(1 - \cos(\theta))(\eta^\times)^4) \\ &\leq -4\operatorname{tr}(\sin(\theta)(\eta^\times)^T\sin(\theta)(\eta^\times))\end{aligned}$$

como $\mathbb{P}_a(R_e) = \sin(\theta)\eta^\times$, podemos escribir

$$\dot{V} \leq -4\operatorname{tr}(\mathbb{P}_a^T(R_e)\mathbb{P}_a(R_e))$$

por lo que se tiene la siguiente desigualdad

$$\dot{V} \leq -4V \tag{6.21}$$

De la expresión anterior y el lema de comparación [38], concluimos que el controlador (6.16) garantiza estabilidad exponencial una vez que las trayectorias del sistema alcanzan la superficie deslizante $\mathcal{D}$. Esto sucede para casi cualquier condición inicial de acuerdo con el teorema 6.1.

6.3. Simulaciones: control en $SO(3)$

En la siguiente simulación se compara el comportamiento de dos controladores por modos deslizantes, uno que sufre de unwinding y el que se diseñó en este trabajo.

6.3.1. El fenómeno de unwinding en la representación por cuaterniones

Debido a que permiten una representación global (no presentan singularidades), los cuaterniones son una de las representaciones de la orientación más populares. Sin embargo, a pesar de su carácter global, los cuaterniones nos llevan a una representación que no es única; de hecho, existen dos cuaterniones que representarán la misma orientación. Como se explicó antes, esta situación puede llevar al fenómeno de unwinding. En el siguiente ejemplo simularemos el comportamiento de un cuerpo rígido usando el controlador por modos deslizantes basado en cuaterniones [47] y el controlador (6.16).

En términos del cuaternion unitario $\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q}_v)$, $q_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{q}_v \in \mathbb{R}^n$, la dinámica de la orientación del cuerpo rígido está dada por

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= (J\omega) \times \omega + u + d \\ \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}\mathbf{q}_v\omega \\ \dot{\mathbf{q}}_v &= \frac{1}{2}(q_0 I + \mathbf{q}_v^{\times})\omega \end{aligned} \quad . \tag{6.22}$$

Considere el siguiente control por modos deslizantes, con la variable deslizante lineal

$$\begin{aligned} \sigma_q(\mathbf{q}_v, \omega) &= \mathbf{q}_v + \omega \\ u(\mathbf{q}_v, \omega) &= -k_q \frac{\sigma_q(\mathbf{q}_v, \omega)}{\|\sigma_q(\mathbf{q}_v, \omega)\|} \end{aligned} \quad . \tag{6.23}$$

La ganancia k_q se elige lo suficientemente grande como para forzar al sistema a alcanzar el modo deslizante.

Se tomará la matriz de inercia $J = \mathrm{diag}(3, 4, 5)$ y perturbaciones representadas de la siguiente manera

$$d(t) = \begin{pmatrix} \sin(5\pi t) & \cos(7\pi t) & \sin(9\pi t) \end{pmatrix}^\top \ .$$

Se elige la ganancia

$$K(\omega_\mathrm{e}, \omega) = 7 \cdot \|\omega\|^2 + 2 \cdot \|\omega_e\| + 1.8 \ , \tag{6.24}$$

de modo que $K(\omega_\mathrm{e}, \omega)$ satisface la desigualdad (6.17) y se toma $k_q = 5$.

Ahora, consideramos el problema de regulación $R_d = I$, $\omega_\mathrm{d} = 0$. Para ilustrar el fenómeno de unwinding, suponga que el sistema inicia en la orientación deseada $R(0) = I$. En términos de cuaterniones, esta orientación se representa con los siguientes cuaterniones

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top \quad \text{or} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top \ .$$

A pesar de que ambos cuaterniones representan la misma orientación, $\mathbf{q}_1$ es inestable, mientras que $\mathbf{q}_2$ es estable. Permitamos que el sistema inicie en el cuaternion inestable $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_1$.

La Figura 6.2 muestra la traza de R_e (esto permite medir qué tan cerca se encuentra R_e de la identidad) y la norma de la velocidad angular $\|\omega\|$ para los sistemas (6.12) y (6.22) ante la acción de los controladores (6.16) y (6.23), respectivamente. Se puede notar que la ley de control (6.16) mantiene la orientación inicial, pues es la orientación donde $\mathrm{tr}(R_e) = 3$ y $\|\omega\| = 0$. Por otro lado, aún con el sistema (6.22) iniciando en la orientación deseada, el control (6.23) aleja completamente el sistema de dicha posición y lo lleva a dar una vuelta completa hasta llegar nuevamente a la orientación deseada.

6.3.2. El problema de seguimiento en $SO(3)$

Para simular el problema de seguimiento, consideremos una trayectoria variante en el tiempo (6.11) con una velocidad angular como se muestra en la Figura 6.3. La figura también muestra

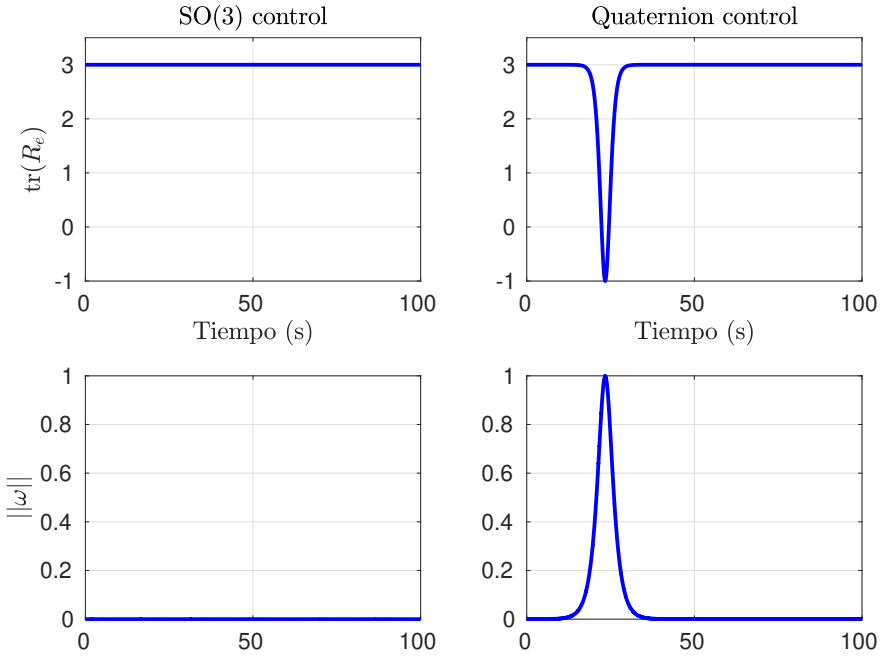


Figura 6.2: Comparación entre controladores por modos deslizantes. El controlador basado en cuaterniones presenta el fenómeno de unwinding, el controlador basado en matrices de rotación no.

la velocidad angular real con el sistema controlado por medio de (6.16). Se puede notar que $\omega_e \to 0$. La Figura 6.4 muestra los pares de control. La traza de la matriz de orientación se muestra en la Figura 6.5. En ella se aprecia como $\text{tr}(R_e) \to 3$ lo cual significa que $R \to R_d$.

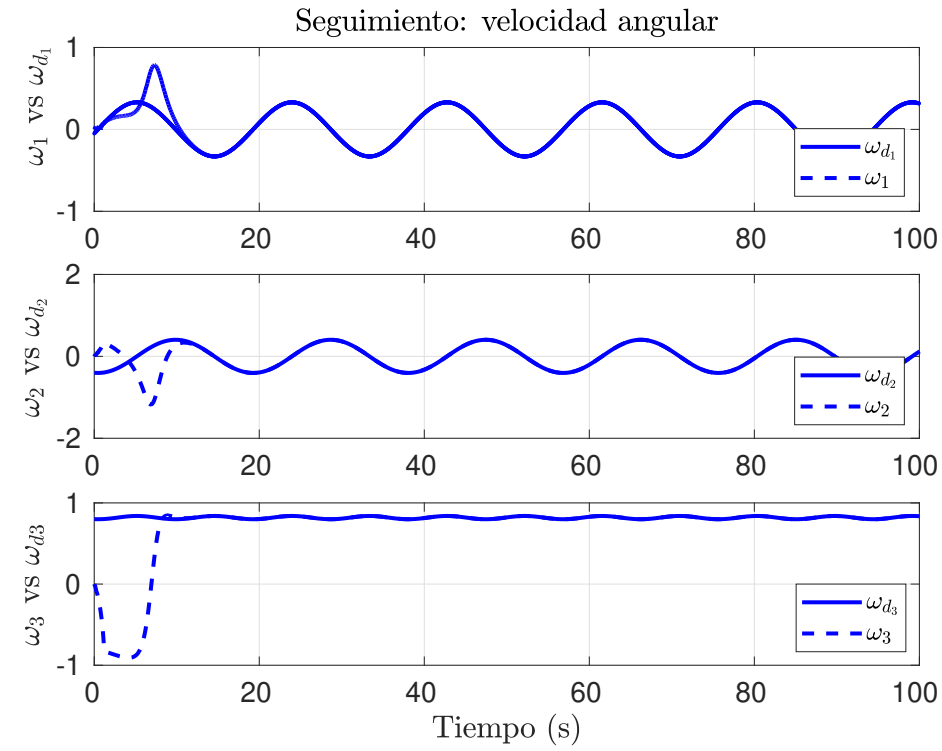


Figura 6.3: Velocidades angulares deseadas y reales. Controlador por modos deslizantes (6.16) en $SO(3)$.

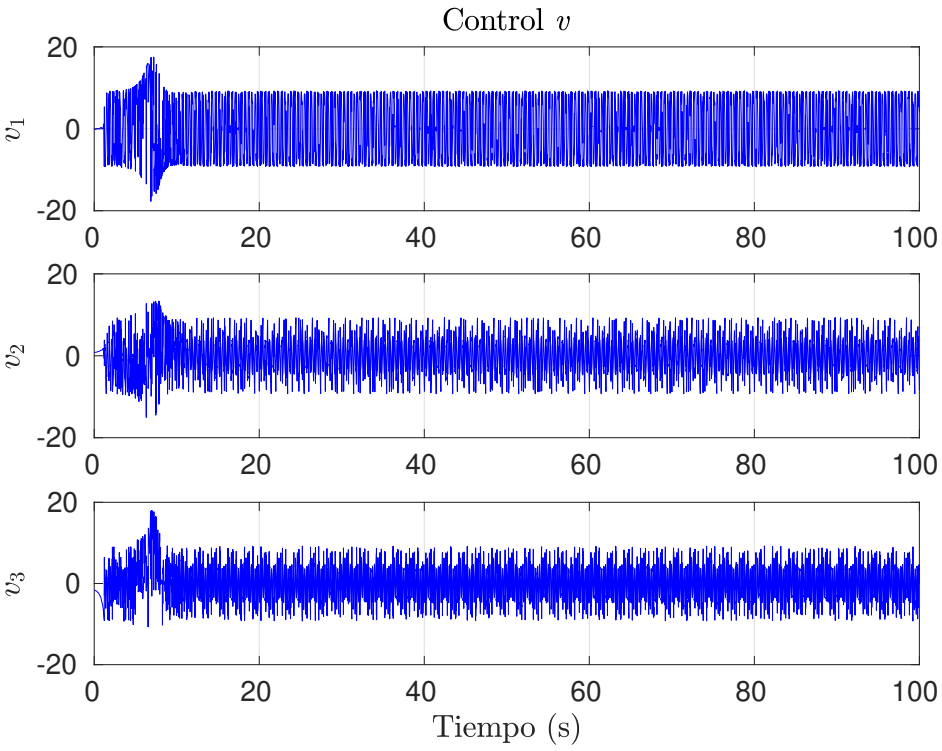


Figura 6.4: Pares de control u generados por la ley de control (6.16).

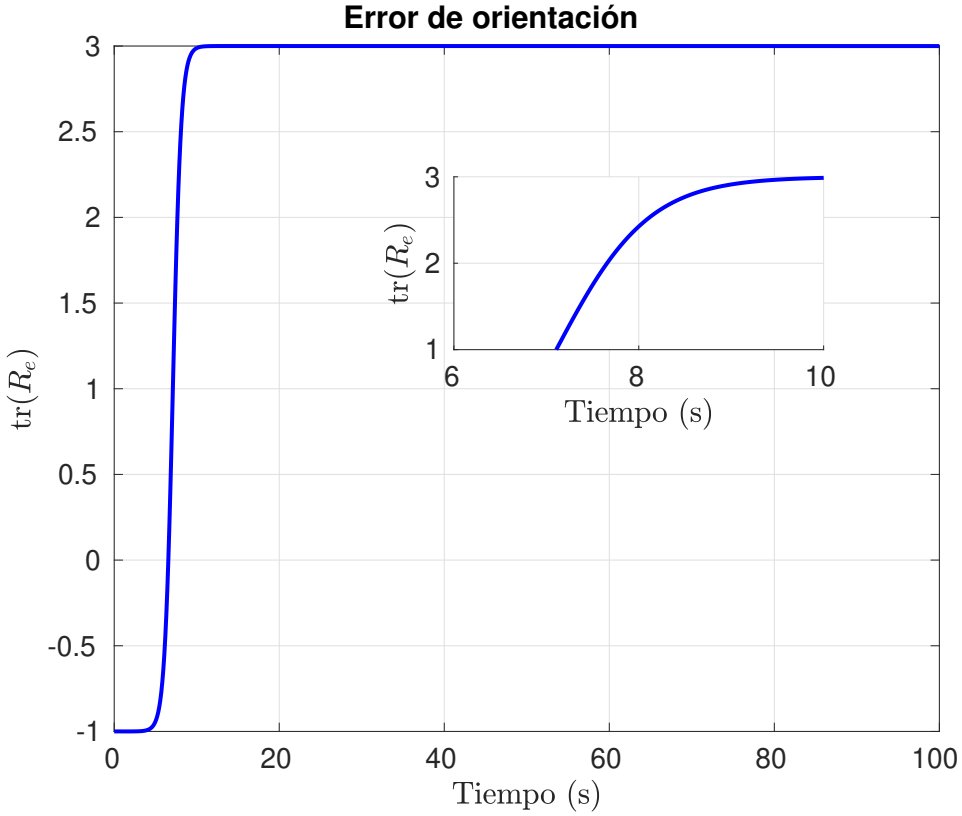


Figura 6.5: La traza de la matriz del error de orientación R_e muestra que el sistema en lazo cerrado (6.12), (6.16) sigue la orientación deseada, i.e. $R_e = R_d^T R \to I$.

6.4. Modos deslizantes en $\mathbb{S}^2$

Aunque algunas aplicaciones requieren conocer la orientación completa del cuerpo, hay otras que no lo requieren. Por ejemplo, para apuntar una antena, un telescopio, o una nave espacial en cierta dirección, necesitamos orientar un eje específico. En estos casos, las rotaciones alrededor del eje que apunta no afectan la dirección de apuntado. Por lo tanto, solo se requiere información parcial de la orientación del cuerpo rígido y se puede considerar una representación simplificada llamada orientación reducida [16, 13].

Los sistemas definidos sobre grupos de Lie son sistemas definidos en variedades que poseen la estructura de grupo, mientras que los sistemas en un espacio cociente u homogéneo se refieren a sistemas definidos sobre variedades que, si bien no admiten una estructura de grupo, su espacio de configuraciones tiene la forma $\mathcal{U} \simeq G/H$, donde G es un grupo de Lie, $H \subset G$ es un subgrupo y '$\simeq$' indica la existencia de un difeomorfismo. En particular, los sistemas definidos en una esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n = \{\Gamma \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \Gamma^\top \Gamma = 1\}$ no son grupos de Lie, excepto en los casos $n = 1$ y $n = 3$, pero sus espacios de configuración pueden escribirse en la forma $\mathbb{S}^n \simeq SO(n+1)/SO(n)$ [10].

Los problemas donde se requiere apuntar un eje específico del cuerpo, como antenas, satélites y maniobras de apuntado de un telescopio, exigen sólo información parcial adquirida de la matriz de rotación. En tales casos, se puede usar una representación simplificada llamada orientación reducida. Se tomarán en cuenta dos marcos de referencia, uno fijo al cuerpo rígido y otro que comparte el origen con el marco fijo, pero que está alineado con los ejes principales del cuerpo. Este marco se llamará marco de referencia del cuerpo.

Se define la 2-esfera como

$$\mathbb{S}^2 = \{\Gamma \in \mathbb{R}^3 \mid \|\Gamma\| = 1\} \,. \tag{6.25}$$

De la ecuación (6.25), se tiene que $\Gamma^\top \Gamma = 1$. Al derivar esta expresión respecto al tiempo se obtiene $2\Gamma^\top \dot{\Gamma} = 0$, lo cual lleva a la expresión del espacio tangente a $\mathbb{S}^2$ en Γ,

$$T_\Gamma \mathbb{S}^2 = \{\dot{\Gamma} \in \mathbb{R}^3 \mid \Gamma^\top \dot{\Gamma} = 0\} \,.$$

El conjunto de todos los espacio tangentes a $\mathbb{S}^2$ forma el fibrado tangente $T\mathbb{S}^2$.

Ahora, considere la definición de orientación reducida dada por [13] y [16], i.e., $\Gamma = R^\top b$, donde $b \in \mathbb{S}^2$ es un vector alineado a un vector base de un marco de referencia fijo, $R \in SO(3)$ es una matriz de rotación que transforma componentes del marco de referencia del cuerpo al marco de referencia fijo y $\Gamma \in \mathbb{S}^2$ es el vector de orientación reducida. En este caso, se dice que $SO(3)$ actúa sobre $\mathbb{S}^2$. Además esta acción es transitiva, ya que para cualquier par de puntos b y Γ existe una R tal que $\Gamma = R^\top b$ [27].

Para determinar la cinemática $\dot{\Gamma}$ de la orientación reducida se considera primero la cinemática en términos de la matriz de rotación, i.e., $\dot{R} = R\Omega_\times$, donde $\Omega \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad angular representada en el marco de referencia del cuerpo, y la matriz antisimétrica $\Omega_\times$ es la imagen de Ω bajo el isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ [26]. Tomando la derivada de Γ respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\Gamma} = \dot{R}^\top b = \Omega_\times^\top R^\top b = -\Omega_\times \Gamma = \Gamma \times \Omega \,. \tag{6.26}$$

De la ecuación (6.26) se observa que el par $(\Gamma, \dot{\Gamma})$ pertenece al fibrado tangente $T\mathbb{S}^2$ pues Γ es ortogonal a $\dot{\Gamma}$. La ecuación (6.26) representa la cinemática de la orientación reducida.

Supongamos un cuerpo rígido capaz de proporcionar pares a lo largo de sus ejes principales, de manera que la dinámica en el espacio de estados, $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$, se describe mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} J\dot{\Omega} &= (J\Omega) \times \Omega + u + D \\ \dot{\Gamma} &= \Gamma \times \Omega \end{aligned} \,, \tag{6.27}$$

donde J es la matriz de inercia rotacional, la cual es simétrica, definida positiva y se expresa en el marco de referencia del cuerpo. El vector $u \in \mathbb{R}^3$ es el control y $D \in \mathbb{R}^3$ representa perturbaciones tales que $\delta > \|D\|$ con $\delta > 0$.

Para atacar el problema de regulación, suponemos que la orientación reducida deseada corresponde a un vector constante $\Gamma_d \in \mathbb{S}^2$ y buscamos que la velocidad angular deseada sea $\Omega_d = 0$.

Como en todo problema de control, debemos determinar una forma de medir el error entre el estado del sistema y en este caso la orientación y velocidades angulares deseadas. En la sección anterior se empleó el producto de matrices para determinar el error entre la orientación deseada y la orientación real, y para el error de velocidad angular se empleó la suma de vectores. Para el problema de orientación reducida, la elección de la operación a emplear no es tan evidente pues no existe una operación inherente al espacio homogeneo $\mathbb{S}^2$. En este sentido, algunos autores han propuesto usar operaciones como el producto vectorial y el producto punto [13, 16] para determinar el error pues brindan una interpretación geométrica clara sobre el error de orientación reducida. Consideraremos estas operaciones en para diseñar el controlador por modos deslizantes.

El producto punto como medida del error
Se consideran dos definiciones para el error de la orientación reducida. La primera surge del producto punto. Esta definición nos permitirá estudiar la estabilidad del sistema de orden reducido mas adelante. El error se interpetará como el ángulo

$$\theta = \arccos(\Gamma^\top \Gamma_d) \tag{6.28}$$

donde se observa que , $\theta = 0$ si $\Gamma = \Gamma_d$ y $\theta = \pi$ si $\Gamma = -\Gamma_d$. Se verá mas adelante que el punto $\Gamma = -\Gamma_d$ corresponde a un punto de equilibrio inestable de la dinámica de orden reducido.

El producto escalar como medida del error
La segunda definición de error, propuesta en [13, 16], está dada por el producto vectorial

$$\Gamma_e = \Gamma \times \Gamma_d \tag{6.29}$$

donde $\Gamma_e \in \mathbb{R}^3$ es el error en la orientación reducida. En adelante, y para mantener mayor claridad en los desarrollos, continuaremos escribiendo el producto $\Gamma \times \Gamma_d$ para referirnos al error de orientación reducida (6.29). Utilizaremos esta definición para diseñar la variable deslizante en la Sección 6.4.1.

Las ecuaciones (6.28) y (6.29) reflejan la naturaleza de los puntos de equilibrio que surgen para este tipo de sistemas, y que nos obligan a considerar la estabilidad casi global en lugar de la estabilidad global cuando se busca diseñar controladores como el que proponemos. Por ejemplo, considere el punto de equilibrio $(\Gamma, \Omega) = (\Gamma_d, 0)$ para el sistema (6.27). El error en la orientación reducida es $\Gamma \times \Gamma_d = 0$ para dicho punto; sin embargo, si $\Gamma = -\Gamma_d$ el error de orientación también es cero. La existencia de más de un punto de equilibrio es una consecuencia de la topología del espacio de configuraciones y no de la definición particular que hemos elegido para el error [5]. Se busca entonces una ley de control u tal que $\theta \to 0$. Esto se verá en la siguiente sección.

6.4.1. Diseño del controlador por modos deslizantes en $\mathbb{S}^2$

En esta sección, se aborda el problema de control de orientación reducida a través del control por modos deslizantes, por lo que las soluciones del sistema en lazo cerrado (6.27) se entienden en el sentido de Filippov [23, 76]. Dado que el sistema (6.27) está definido como un espacio homogéneo,

se busca que la variedad deslizante sea también un espacio homogéneo. Esta propiedad se muestra en la proposición 6.1.

6.4.2. La variedad deslizante como espacio homogéneo

Consideremos ahora al espacio de estados $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$ y al grupo $G = SO(3) \times \mathbb{R}^3$. La operación de grupo en M se define como

$$(R_1, \omega_1) \cdot (R_2, \omega_2) = (R_1 R_2, \omega_2 + \omega_1) \ .$$

Sea $g = (R, \omega) \in G$ y $q = (\Gamma, \Omega) \in \mathcal{M}$. Definimos la acción $G \times M \to M$ como

$$g * q = (R\Gamma, (\Gamma - R\Gamma) \times \Gamma_d + \Omega + \omega) \ .$$

Es fácil verificar que el mapa satisface los dos axiomas y que la acción es transitiva. Por otra parte, consideremos al punto

$$p = (\Gamma_d, 0) \ .$$

Como $G_p \simeq SO(2) \times \{0\}$ (hemos identificado a $SO(2)$ con el conjunto de rotaciones alrededor de Γ_d) y como la acción es transitiva,

$$M \simeq (SO(3) \times \mathbb{R}^3)/(SO(2) \times \{0\}) \ .$$

En otras palabras: Al ser homogéneo, el espacio de estados es difeomorfo a un espacio cociente.

Ahora se enuncia el resultado que describe la estructura de la variedad deslizante.

Proposición 6.1. *[27] Considere la variedad deslizante $S \subset M$, definida por*

$$S = \left\{ (\Gamma, \Omega) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \Omega = -\Gamma \times \Gamma_{\mathrm{d}} \right\} \tag{6.30}$$

y al subgrupo de Lie

$$H = SO(3) \times \{0\} \ .$$

(Note que $G_p \subset H \subset G$). Entonces, S es un espacio homogéneo con respecto a H. En otras palabras, la acción restringida $H \times S \to S$ es transitiva.

Demostración. Sean (Γ_1, Ω_1) y (Γ_2, Ω_2) dos elementos de S. Para mostrar que S es homogéneo con respecto a H, se debe encontrar un elemento $(R, 0) \in H$ tal que

$$(R, 0) * (\Gamma_1, \Omega_1) = (\Gamma_2, \Omega_2) \ . \tag{6.31}$$

Dado que ambos puntos están en S, la ecuación (6.31) toma la forma

$$(R, 0) * (\Gamma_1, -\Gamma_1 \times \Gamma_{\mathrm{d}}) = (\Gamma_2, -\Gamma_2 \times \Gamma_{\mathrm{d}}) \ ,$$

es decir,

$$(R\Gamma_1, (\Gamma_1 - R\Gamma_1) \times \Gamma_d - \Gamma_1 \times \Gamma_d) = (\Gamma_2, -\Gamma_2 \times \Gamma_{\mathrm{d}}) \ . \tag{6.32}$$

Como $SO(3)$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{S}^2$, existe una $R \in SO(3)$ tal que $\Gamma_2 = R\Gamma_1$. La ecuación (6.32) se satisface claramente con dicha R. □

El resultado anterior muestra que la variedad deslizante conserva las características topológicas del espacio de estados.

6.4.3. Alcanzabilidad de la variedad deslizante S

Con base en la técnica de control por modos deslizantes se propone una ley de control que garantiza la estabilidad casi global de los puntos de equilibrio requeridos. La siguiente proposición enuncia la convergencia a la superficie deslizante.

Proposición 6.2. *[27] Considere la variable deslizante*

$$\sigma = \Gamma \times \Gamma_d + \Omega$$

y la ley de control

$$u = -K(\Omega)\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\ , \quad K(\Omega) = k_1\|\Omega\|^2 + k_2\|\Omega\| + k_3\ . \tag{6.33}$$

Entonces, para k_1, k_2 y k_3 suficientemente grandes, el sistema en lazo cerrado (6.27) *converge, para toda condición inicial, a la superficie deslizante definida en* (6.30)*.*

Demostración. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_1(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^\top J\sigma\ . \tag{6.34}$$

Como J es definida positiva, tenemos $V_1(\sigma) \geq 0$ y $V_1(\sigma) = 0$ sólo si $\sigma = 0$. Por lo tanto, V_1 es definida positiva.

Tomando la derivada de V_1 respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\sigma) &= \sigma^\top J\left(\dot{\Gamma}\times\Gamma_d + \dot{\Omega}\right)\\ &= \sigma^\top\left(J\left((\Gamma\times\Omega)\times\Gamma_d\right) + (J\Omega)\times\Omega + u + D\right)\\ &= \sigma^\top\left(\tau(\Omega,\Gamma,\Gamma_d,D) + u\right)\ ,\end{aligned} \tag{6.35}$$

donde

$$\tau(\Omega,\Gamma,\Gamma_d,D) = (J\Omega)\times\Omega + J\left((\Gamma\times\Omega)\times\Gamma_d\right) + D\ .$$

Escogiendo las ganancias k_i para mayorar los términos cuadrático, lineal y constante que en Ω tiene τ, podemos garantizar que

$$K(\Omega) > \|\tau(\Omega,\Gamma,\Gamma_d,D)\| + \xi$$

para algún $\xi > 0$. Luego,

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\sigma) &\leq -\|\sigma\|\left(K(\Omega) - \|\tau(\Omega,\Gamma,\Gamma_d,D)\|\right)\\ &\leq -\xi\|\sigma\|\\ &\leq -\xi\sqrt{\frac{V_1(\sigma)}{\lambda_{\text{máx}}(J)}}\ .\end{aligned}$$

Por el lema de comparación [38] se tiene que $V_1 \to 0$ y, por lo tanto, $\sigma \to 0$ en tiempo finito [58]. Es más, S se alcanza en el tiempo

$$t_s \leq \frac{2}{\xi}\sqrt{\lambda_{\text{máx}}(J)V_1(\sigma_0)}\ .$$

□

6.4.4. Estabilidad del sistema de orden reducido

Una vez que se alcanza la variedad deslizante, el sistema (6.27) será confinado a la región donde $\Gamma \times \Gamma_d + \Omega = 0$ u $\Omega = \Gamma_d \times \Gamma$, lo que define al sistema de orden reducido

$$\dot{\Gamma} = -\Gamma \times (\Gamma \times \Gamma_d) \ . \tag{6.36}$$

Por las propiedades del doble producto vectorial, la ecuación (6.36) puede también escribirse como

$$\dot{\Gamma} = -\Gamma(\Gamma^\top \Gamma_d) + \Gamma_d \ . \tag{6.37}$$

Para estudiar al sistema (6.37), se considera la función candidata de Lyapunov

$$V_2(\Gamma) = 1 - \Gamma^\top \Gamma_d \ ,$$

la cual satisface $V_2(\Gamma) \geq 0$ y $V_2(\Gamma) = 0$ sólo si $\Gamma = \Gamma_d$. Tomando la derivada de V_2 respecto al tiempo y usando (6.37), se obtiene

$$\dot{V}_2(\Gamma) = \dot{\Gamma}^\top \Gamma_{\mathrm{d}} = \Big(\Gamma(\Gamma^\top \Gamma_d) - \Gamma_d\Big)^\top \Gamma_d \ ,$$

de donde resulta inmediato que

$$\dot{V}_2(\Gamma) = -\left(1 - (\Gamma^\top \Gamma_d)^2\right) \ ,$$

por lo que $\dot{V}_2(\Gamma) \leq 0$ y $\dot{V}_2(\Gamma) = 0$ sólo si $\Gamma = \Gamma_d$ o $\Gamma = -\Gamma_d$. Aplicando el teorema de LaSalle [11, 38], se mostrará que Γ converge al conjunto

$$\tilde{\mathcal{E}} = \Big\{\Gamma \in \mathbb{S}^2 \mid \dot{V}_2(\Gamma) = 0\Big\} = \{\Gamma_d, -\Gamma_d\} \ .$$

Como $\tilde{\mathcal{E}}$ está compuesto de puntos de equilibrio, se trata de un conjunto invariante. Luego, todas las trayectorias convergen a $\tilde{\mathcal{E}}$.

Es posible estabilizar casi globalmente el sistema en el punto de equilibrio deseado mediante la ley de control (6.33). Este resultado se presenta en la proposición 6.6. La prueba se realiza usando el teorema de inestabilidad de Chetaev [38].

Proposición 6.3. *[27] Para cualquier condición inicial*

$$(\Gamma_0, \Omega_0) \neq (-\Gamma_d, 0) \ ,$$

las trayectorias del sistema (6.27) *convergen al punto de equilibrio deseado* $(\Gamma_d, 0)$*, i.e. el punto de equilibrio es casi global y asintóticamente estable.*

Demostración. Como el punto de equilibrio $(-\Gamma_d, 0)$ se encuentra sobre la superficie S, su comportamiento se puede estudiar por medio del sistema de orden reducido (6.52). Se define el conjunto

$$\mathcal{G} := \Big\{\Gamma \in \mathbb{S}^2 \mid \Gamma^\top \Gamma_d \in (-1, 1)\Big\} \tag{6.38}$$

Se elige una función candidata de Chetaev

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \pi - \arccos(\Gamma^\top \Gamma_d) \tag{6.39}$$

Note que $\mathcal{C}(\Gamma) > 0$ en $\mathcal{G}$ y $\mathcal{C}(\Gamma) = 0$ en el punto frontera $\Gamma = -\Gamma_d$. Tomando la derivada de $\mathcal{C}$ respecto al tiempo, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{C}}(\Gamma) &= \frac{\dot{\Gamma}^\top \Gamma_d}{\sqrt{1-(\Gamma^\top\Gamma_d)^2}} \\ &= \frac{\left(-\Gamma(\Gamma^\top\Gamma_d)+\Gamma_d\right)^\top \Gamma_d}{\sqrt{1-(\Gamma^\top\Gamma_d)^2}} \\ &= \sqrt{1-(\Gamma^\top\Gamma_d)^2}\end{aligned}$$

Note que $\dot{\mathcal{C}}(\Gamma) > 0$ en $\mathcal{G}$ y, por lo tanto, del teorema de Chetaev se concluye que $\Gamma = -\Gamma_d$ es inestable. Este resultado, junto con la convergencia hacia $\tilde{\mathcal{E}}$, garantizan que todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado (6.27) convergen al punto de equilibrio deseado $(\Gamma_d, 0)$, excepto para la condición inicial $(-\Gamma_d, 0)$. □

6.4.5. Otro ángulo de la dinámica de orden reducido

Previamente mostramos que la dinámica de orden reducido queda determinada por la ecuación (6.36). Ahora mostraremos que sobre la superficie deslizante, el sistema (6.27) evoluciona como uno definido sobre un grupo de Lie. Para explicarlo, usaremos la interpretación geométrica del producto cruz y la condición de deslizamiento $\Omega = -\Gamma \times \Gamma_d$. La Figura 6.6 ilustra cómo el problema se reduce a uno similar al que se presentó en la Sección 6.1 donde la rotación se realiza alrededor de un eje fijo.

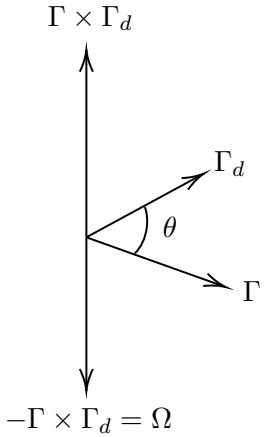


Figura 6.6: Sobre la superficie deslizante, la rapidez de cambio en θ es igual a la magnitud de la velocidad angular Ω

Es posible parametrizar la matriz de rotación asociada a la rotación alrededor del eje alineado con $\Gamma \times \Gamma_d$. Dicha parametrización está dada por la siguiente expresión

$$R_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma^\top\Gamma_d & \sqrt{1-(\Gamma^\top\Gamma_d)^2} \\ 0 & -\sqrt{1-(\Gamma^\top\Gamma_d)^2} & \Gamma^\top\Gamma_d \end{pmatrix} .$$

es fácil probar que $R_r \in SO(3)$.

6.5. Simulaciones

En esta sección se presentan los resultados de algunas simulaciones que permiten observar la acción del controlador (6.33) para el problema de regulación. Suponemos una matriz de inercia

$$J = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0.9 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0.9 & 0 & 15 \end{bmatrix} .$$

Las perturbaciones están dadas por

$$D^\top = \begin{pmatrix} \sin(5\pi t) & \cos(7\pi t) & \sin(9\pi t) \end{pmatrix} .$$

La orientación reducida inicial se toma como $\Gamma_0^\top = (0, 0, -1)$ y se desea alcanzar una orientación diametralmente opuesta $\Gamma_d^\top = (0, 0, 1)$. Las velocidades angulares reales iniciales se eligen como $\Omega_0^\top = (-0.8, -0.3, -0.5)$ y se desea una velocidad angular $\Omega_d^\top = (0, 0, 0)$. Con las condiciones iniciales consideradas, el sistema (6.27) inicia su movimiento cerca del punto de equilibrio inestable $(-\Gamma_d, \Omega_d) \approx (\Gamma_0, \Omega_0)$. Las ganancias del controlador se eligen como $k_1 = k_2 = k_3 = 22$, de modo que $K(\Omega) > \tau(\Omega, \Gamma, \Omega_d, D)$.

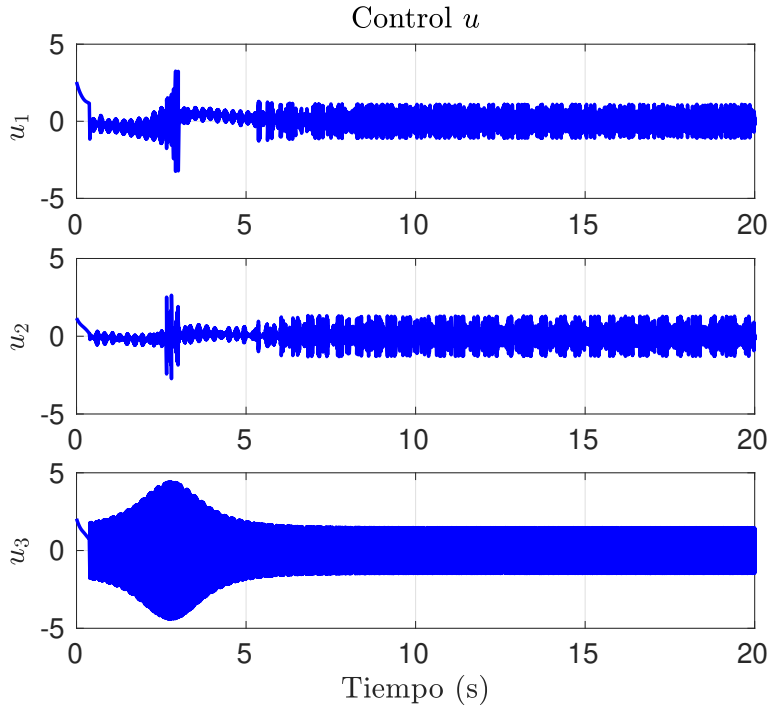


Figura 6.7: Ilustración de los pares de control u en diferentes instantes de tiempo, obtenidos para esta simulación por medio del control (6.33).

Los pares de control u se muestran para diferentes instantes de tiempo en la Figura 6.7, donde se puede apreciar la presencia de *chattering*. La Figura 6.8 muestra como las velocidades angulares convergen a cero después de un tiempo. El error de la orientación para diferentes instantes de tiempo se presenta en las Figuras 6.9 y 6.10. La primera muestra la magnitud $\|\Gamma \times \Gamma_d\|$ que corresponde a una de las representaciones consideradas para definir el error en la orientación reducida. Esta magnitud es igual a cero cuando Γ y Γ_d son paralelas y $\|\Gamma \times \Gamma_d\| = 1$ cuando Γ y Γ_d son ortogonales. La segunda de estas figuras representa el ángulo entre los vectores Γ y Γ_d en diferentes instantes del tiempo. Al inicio, $\theta = \pi$ pues Γ y Γ_d apuntan en direcciones opuestas. Se puede observar que después de un tiempo θ converge a cero.

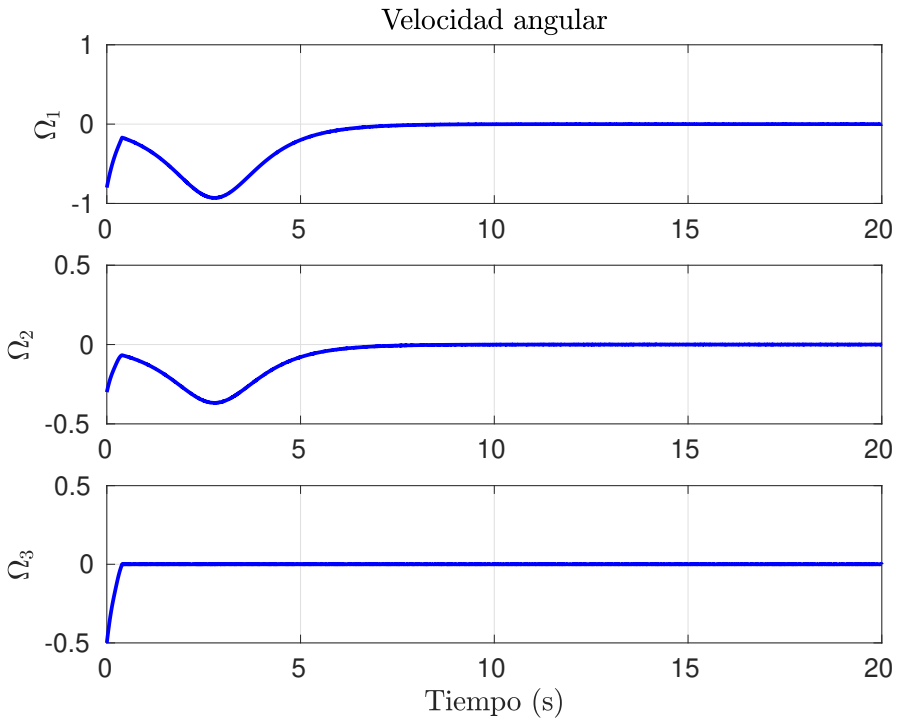


Figura 6.8: Ilustración de las velocidades angulares. Se puede notar que después de un tiempo estas convergen a cero.

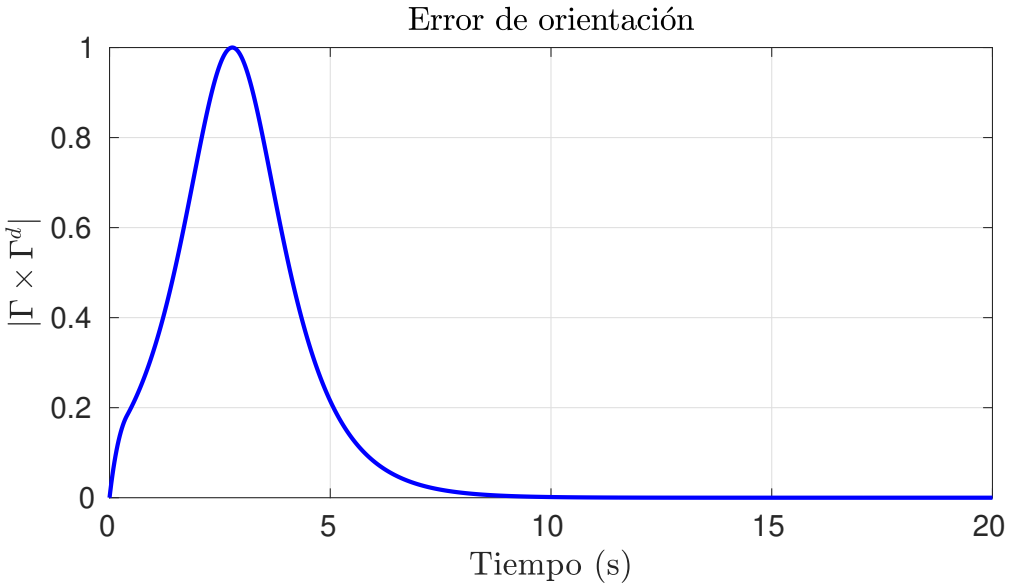


Figura 6.9: Error de la orientación en términos de la magnitud de $\Gamma \times \Gamma_d$. El error es igual a cero tanto en la posición opuesta como en la deseada.

La Figura 6.11 muestra como las trayectorias Γ del sistema (6.27) llegan hasta la orientación reducida deseada Γ_d sobre $\mathbb{S}^2$ y se mantienen en ella. Finalmente, las Figuras 6.12 y 6.13 ilustran la evolución de σ y sus componentes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ en diferentes instantes de tiempo.

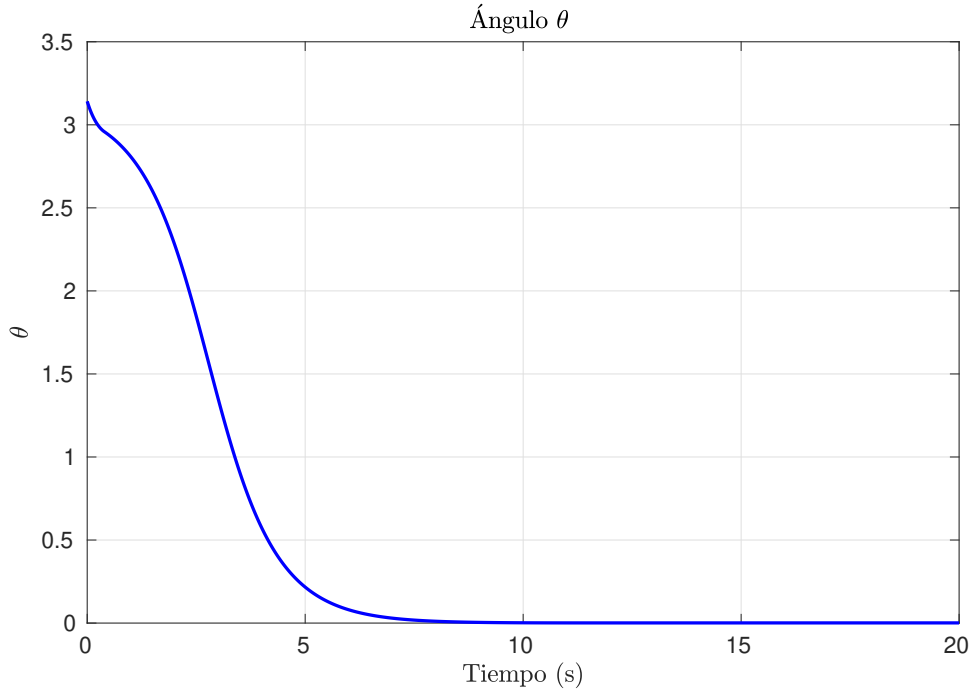


Figura 6.10: Error de la orientación en términos de θ.

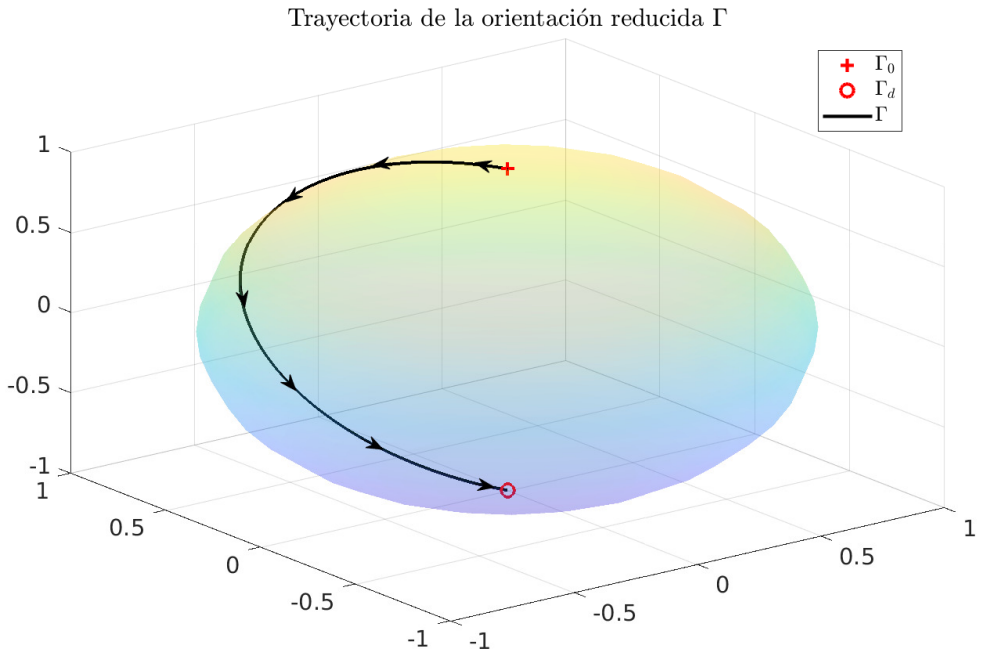


Figura 6.11: Ilustración del recorrido de Γ sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ hasta alcanzar la orientación deseada Γ_d. La cruz indica el punto de inicio de la maniobra y el círculo la orientación reducida deseada.

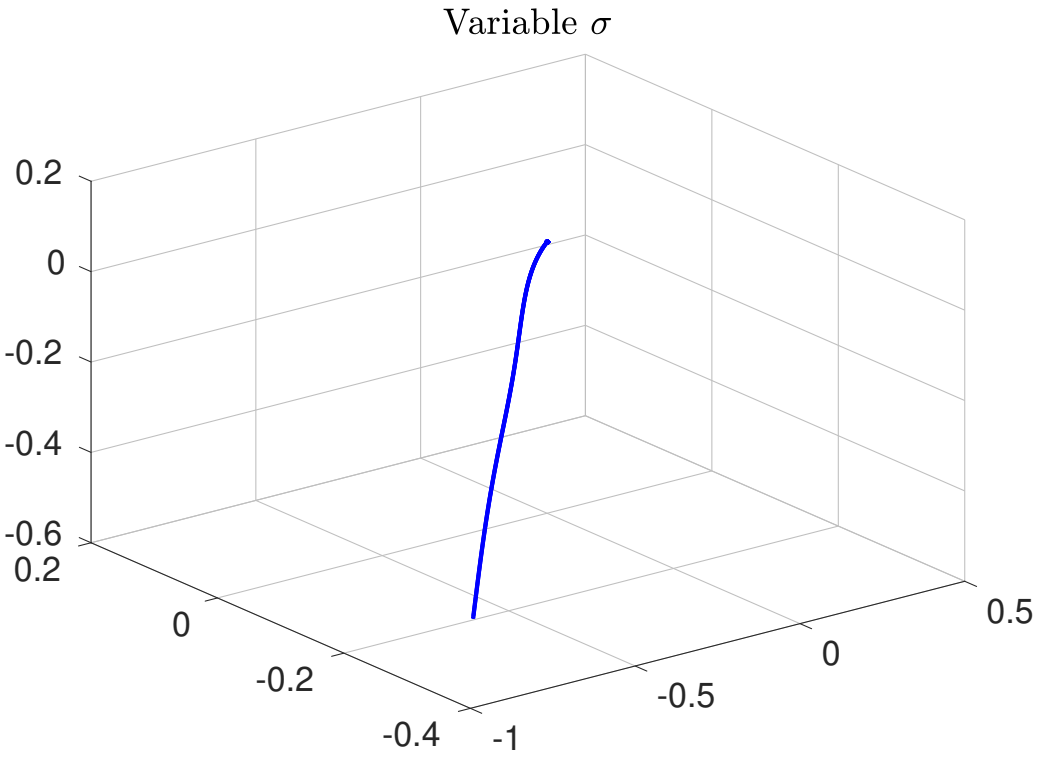


Figura 6.12: Muestra el comportamiento de σ en diferentes instantes del tiempo.

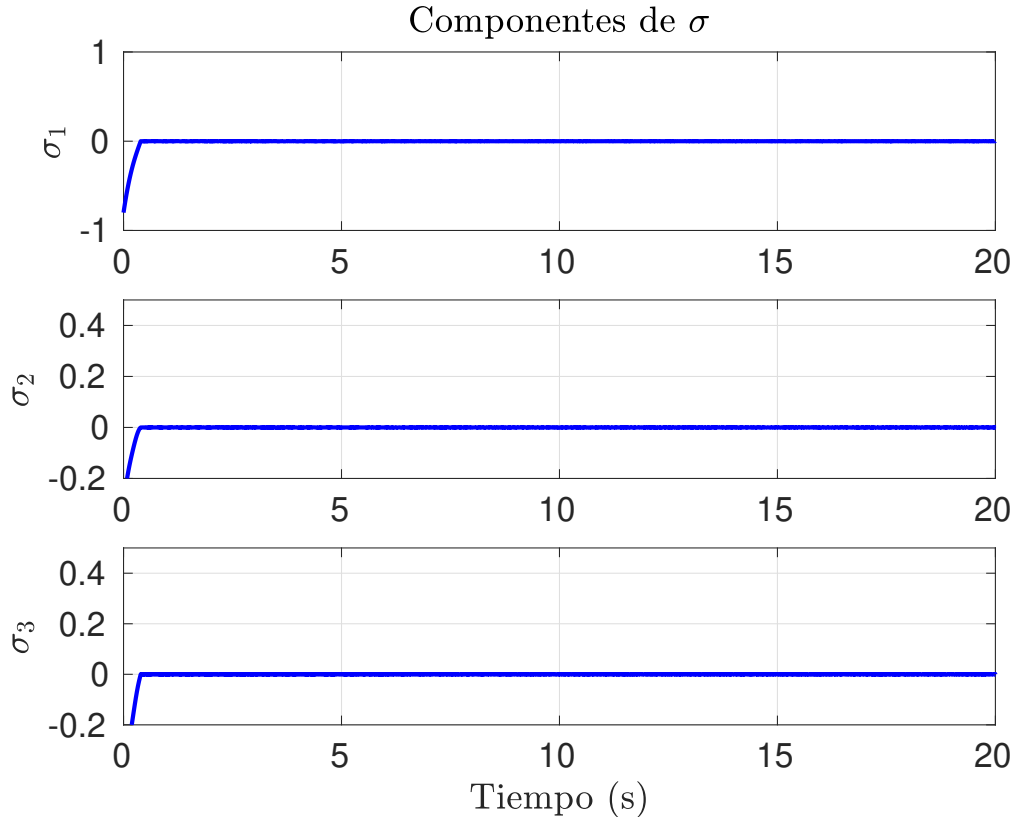


Figura 6.13: Componentes de del vector σ.

6.6. El caso de seguimiento en $\mathbb{S}^2$

En esta sección se extiende el resultado de regulación al problema de seguimiento. Las principales diferencias se encuentran en la forma de definir la acción del grupo de Lie y el estudio de la estabilidad en el sistema de orden reducido pues, en este caso, la dinámica de orden reducido corresponde a un sistema no autónomo.

Para el problema de seguimiento, se busca que Γ siga la trayectoria Γ_d y Ω siga la trayectoria Ω_d, donde Γ_d y Ω_d satisfacen la siguiente ecuación cinemática

$$\dot{\Gamma}_d = \Gamma_d \times \Omega_d$$

En cuanto al error, este se representará por $\Gamma \times \Gamma_d$ para la orientación y $\Omega_e = \Omega - \Omega_d$ para la velocidad angular. Se considera el grupo de Lie $G = SO(3) \times SO(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con la operación[2]

$$(R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1) \cdot (R_2, \bar{R}_2, \omega_2, \bar{\omega}_2) = (R_1 R_2, \bar{R}_1 \bar{R}_2, \omega_1 + \omega_2, \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \tag{6.40}$$

y el conjunto $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. La variable deslizante $\sigma_r : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$ queda definida como

$$\sigma_r(\Gamma, \Gamma_d, \Omega, \Omega_d) = \Omega - \Omega_d + \Gamma \times \Gamma_d. \tag{6.41}$$

y la superficie deslizante $S \subset \mathcal{M}$, se describe de la siguiente forma

$$S = \{(\Gamma, \Gamma_d, \Omega, \Omega_d) \in \mathcal{M} \mid \Omega = -\Gamma \times \Gamma_{\mathrm{d}} + \Omega_d\} \tag{6.42}$$

y el subgrupo de Lie

$$H = SO(3) \times SO(3) \times \{0\} \times \mathbb{R}^3 .$$

Al igual que en el caso de regulación, S es un espacio homogéneo respecto a H con la siguiente acción transitiva[3]

$$g * q = (R\Gamma, \bar{R}\Gamma_d, \Gamma \times \Gamma_d - R\Gamma \times \bar{R}\Gamma_d + \omega + \tilde{\omega} + \Omega, \Omega_d + \tilde{\omega}) \tag{6.43}$$

donde $g = (R, \bar{R}, \omega, \tilde{\omega}) \in G$ y $q = (\Gamma, \Gamma_d, \Omega, \Omega_d) \in \mathcal{M}$. La siguiente proposición enuncia el resultado sobre la estructura de la variedad deslizante.

Proposición 6.4. *Considere la variedad deslizante $S \subset \mathcal{M}$, definida por*

$$S = \{(\Gamma, \Gamma_d, \Omega, \Omega_d) \in \mathcal{M} \mid \Omega = -\Gamma \times \Gamma_{\mathrm{d}} + \Omega_d\} \tag{6.44}$$

y al subgrupo de Lie

$$H = SO(3) \times SO(3) \times \{0\} \times \mathbb{R}^3 .$$

Entonces S es un espacio homogéneo respecto a H. En otras palabras, la acción restringida $H \times S \to S$ es transitiva.

Demostración. Sean $q_1 = (\Gamma_1, \Gamma_d, \Omega_1, \Omega_d)$ y $q_2 = (\Gamma_2, \bar{\Gamma}_d, \Omega_2, \bar{\Omega}_d) \in S$. Para mostrar que S es homogéneo respecto a H, se debe encontrar un elemento $(R, \bar{R}, 0, \tilde{\omega})$ tal que con la acción (6.43) se cumpla

$$(R, \bar{R}, 0, \tilde{\omega}) * (\Gamma_1, \Gamma_d, \Omega_1, \Omega_d) = (\Gamma_2, \bar{\Gamma}_d, \Omega_2, \bar{\Omega}_d) \tag{6.45}$$

Dado que ambos puntos están en S, la ecuación (6.45) toma la forma

$$(R\Gamma_1, \bar{R}\Gamma_d, -R\Gamma \times \bar{R}\Gamma_d + \Omega_d + \tilde{\omega}, \Omega_d + \tilde{\omega}) = (\Gamma_2, \bar{\Gamma}_d, \bar{\Omega}_d - \Gamma_2 \times \bar{\Gamma}_d, \bar{\Omega}_d) \tag{6.46}$$

como $SO(3)$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{S}^2$, existen $R, \bar{R} \in SO(3)$ tal que $\Gamma_2 = R\Gamma_1$ y $\bar{\Gamma}_d = \bar{R}\Gamma_d$, y existe $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\Omega}_d = \Omega_d + \tilde{\omega}$, de modo que la ecuación (6.46) se satisface con estos R, $\bar{R}$ y $\tilde{\omega}$ y concluimos que S es homogéneo respecto H. □

[2] En el apéndice se muestra que la operación (6.40) cumple los axiomas de grupo.

[3] En el apéndice se presenta la prueba de que (6.43) es una acción transitiva.

6.6.1. Alcanzabilidad de la superficie deslizante $\mathbb{S}^2$

Ahora se verificará la alcanzabilidad de la superficie y se estudiará la estabilidad de la dinámica de orden reducido. Antes de iniciar, consideremos las cotas $\|(J\Omega)\times\Omega\| \leq \|J\|_2 \cdot \|\Omega\|^2$ (vista en la Sección 6.2) y $\|J((\Gamma\times\Omega)\times\Gamma_d)\| \leq \|J\|_2\cdot\|\Omega\|$. También se elige Γ_d, Ω_d tal que $\dot{\Omega}_d = \Gamma_d\times\Omega_d$ y $\|\Gamma\times(\Gamma_d\times\Omega_d)+\dot{\Omega}_d\| \leq \kappa$. Estas cotas forman parte de la siguiente proposición.

Proposición 6.5. *Suponga que las perturbaciones d están acotadas por una constante conocida $\bar{d}>0$, donde $\|d\|\leq\bar{d}$ y una constante $\kappa>0$ que acota los términos relacionados con Γ_d y Ω_d. Tomando una constante $\delta>0$ y eligiendo el control*

$$u(\Gamma,\Gamma_d,\Omega_e) = -K(\Omega)\frac{\sigma_r(\Gamma,\Gamma_d,\Omega_e)}{\|\sigma_r(\Gamma,\Gamma_d,\Omega_e)\|} \tag{6.47}$$

con σ_r determinada por la expresión (6.41) *y con la ganancia*

$$K(\Omega) \geq \|J\|_2\cdot\|\Omega\|^2 + \|J\|_2\cdot\|\Omega\| + \bar{d} + \kappa + \delta\ . \tag{6.48}$$

Entonces las trayectorias de (6.27) convergen a S (6.44) en tiempo finito.

Demostración. Considere la siguiente función de Lyapunov

$$V_1(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^\top J\sigma\ . \tag{6.49}$$

como J es definida positiva $V_1(\sigma)\geq 0$ y $V_1(\sigma)=0$ solo si $\sigma=0$. Entonces V_1 es definida positiva.

Tomando la derivada respecto al tiempo de V_1:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\sigma) &= \sigma^\top J\left(\dot{\Gamma}\times\Gamma_d + \Gamma\times\dot{\Gamma}_d + \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_d\right)\\ &= \sigma^\top\left(J\left((\Gamma\times\Omega)\times\Gamma_d\right) + (J\Omega)\times\Omega + u + d\right)\\ &\quad + \Gamma\times(\Gamma_d\times\Omega_d) + \dot{\Omega}_d)\end{aligned} \tag{6.50}$$

Por la tanto, la derivada queda acotada de la siguiente manera

$$\dot{V}_1(\sigma) \leq -\|\sigma\|\left(K(\Omega) - \|J\|_2\cdot\|\Omega\|^2 - \|J\|_2\cdot\|\Omega\| - \bar{d} - \kappa\right)$$

La condición (6.48) garantiza que

$$\dot{V}_1(\sigma) \leq -\delta\sqrt{\frac{V_1(\sigma)}{\lambda_{\text{máx}}(J)}}\ . \tag{6.51}$$

Del lema de comparación se concluye que $V_1\to 0$ y por lo tanto $\sigma\to 0$ en tiempo finito. Además, S se alcanza en el tiempo

$$t_s \leq \frac{2}{\delta}\sqrt{\lambda_{\text{máx}}(J)V_1(\sigma_0)}\ .$$

□

6.6.2. El sistema de orden reducido: estabilidad en $\mathbb{S}^2$

Una vez que el sistema ha alcanzado la superficie deslizante S, el sistema (6.27) debido a la condición de deslizamiento $\Gamma\times\Gamma_d+\Omega_e=0$ o $\Gamma\times\Gamma_d+\Omega-\Omega_d=0$, evoluciona de acuerdo con la siguiente expresión

$$\dot{\Gamma} = \Gamma\times(-\Gamma\times\Gamma_d+\Omega_d)\ . \tag{6.52}$$

Usando la identidad para el triple producto vectorial podemos reescribir (6.52) como

$$\dot{\Gamma} = -\Gamma(\Gamma^\top \Gamma_d) + \Gamma_d + \Gamma \times \Omega_d \; . \tag{6.53}$$

Para analizar la estabilidad de (6.53), consideraremos la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_2(\Gamma) = 1 - \Gamma^\top \Gamma_d \; ,$$

donde $V_2(\Gamma) \geq 0$ y $V_2(\Gamma) = 0$ solo si $\Gamma = \Gamma_d$. Tomando la derivada de $V_2(\Gamma)$ respecto al tiempo y usando (6.53), se obtiene

$$\dot{V}_2(\Gamma) = -\dot{\Gamma}^\top \Gamma_d - \Gamma^\top \dot{\Gamma}_d$$

usando las identidades del triple producto escalar es fácil verificar que

$$\dot{V}_2(\Gamma) = -\left(1 - (\Gamma^\top \Gamma_d)^2\right) \; ,$$

por lo que, $\dot{V}_2(\Gamma) \leq 0$ y $\dot{V}_2(\Gamma) = 0$ solo si $\Gamma = \Gamma_d$ o $\Gamma = -\Gamma_d$.

Note también que $V_2(\Gamma)$ es acotada por abajo pues $V_2(\Gamma) > V_2(\Gamma = \Gamma_d)$ para $\Gamma \neq \Gamma_d$.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -\dot{\Gamma}^T \Gamma_d - \Gamma^T \dot{\Gamma}_d \\ &= -(\Gamma \times \Omega)^T \Gamma_d - \Gamma^T (\Gamma_d \times \Omega_d) \end{aligned} \tag{6.54}$$

empleando las identidades del triple producto escalar se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -\Omega^T (\Gamma_d \times \Gamma) - \Omega_d^T (\Gamma \times \Gamma_d) \\ &= \Omega^T (\Gamma \times \Gamma_d) - \Omega_d^T (\Gamma \times \Gamma_d) \\ &= (\Omega - \Omega_d)^T (\Gamma \times \Gamma_d) \end{aligned} \tag{6.55}$$

Usando la condición de deslizamiento $\Omega - \Omega_d = -\Gamma \times \Gamma_d$, se tiene que $\dot{V}_2 = -\|\Gamma \times \Gamma_d\|^2 \leq 0$ y $\dot{V}_2$ es semidefinida negativa.

Ahora verificaremos que $\dot{V}_2$ es uniformemente continua en el tiempo calculando $\ddot{V}_2$ y comprobando que esta segunda derivada respecto al teimpo es acotada.

$$\begin{aligned} \ddot{V}_2 &= -2(\Gamma \times \Gamma_d)^T (\dot{\Gamma \times \Gamma_d}) \\ &= -2(\Gamma \times \Gamma_d)^T (\dot{\Gamma} \times \Gamma_d + \Gamma \times \dot{\Gamma}_d) \\ &= -2(\Gamma \times \Gamma_d)^T ((\Gamma \times \Omega) \times \Gamma_d + \Gamma \times (\Gamma_d \times \Omega_d)) \end{aligned} \tag{6.56}$$

usando nuevamente la condición de deslizamiento, ahora en (6.56) obtenemos

$$\ddot{V}_2 = -2(\Gamma \times \Gamma_d)^T ([\Gamma \times (-\Gamma \times \Gamma_d + \Omega_d)] \times \Gamma_d + \Gamma \times (\Gamma_d \times \Omega_d)) \tag{6.57}$$

usando el Corolario 5.1, como Γ, Γ_d y Ω_d son acotadas, $\ddot{V}_2$ es acotada y $\dot{V}_2 \to 0$ lo cual implica que $\Gamma \times \Gamma_d \to 0$ y por lo tanto $\Gamma = \Gamma_d$ o $\Gamma = -\Gamma_d$. Finalmente, de la condición de deslizamiento se concluye que $\Omega - \Omega_d = 0$ de modo que $\Omega = \Omega_d$.

Para mostrar que el sistema (6.27) sigue la trayectoria deseada (Γ_d, Ω_d); mediante el teorema de Chetaev se mostrará que $(-\Gamma_d, \Omega_d)$ es inestable.

Proposición 6.6. *Para cualquier condición inicial* (Γ_0, Ω_0) *tal que*

$$(\Gamma_0, \Omega_0) \neq (-\Gamma_d, \Omega_d) \; ,$$

las trayectorias del sistema (6.27) *convergen a la trayectoria deseada* (Γ_d, Ω_d).

Demostración. Notemos que $(-\Gamma_d, \Omega_d)$ real satisface la condición de deslizamiento $\sigma_r = 0$ en conjunto con las trayectorias deseadas; por lo que es posible estudiar su estabilidad mediante el sistema de orden reducido (6.52).

Definimos el conjunto

$$\mathcal{G} := \{\Gamma \in \mathbb{S}^2 | \Gamma^T \Gamma_d \in (-1, 1)\} \tag{6.58}$$

y elegimos la siguiente función

$$\mathcal{C} = \pi - \arccos(\Gamma^T \Gamma_d) \tag{6.59}$$

Note que $\mathcal{C} > 0$ en $\mathcal{G}$ y $\mathcal{C} = 0$ en la frontera $\Gamma = -\Gamma_d$ para todo tiempo $t \geq t_0$. Tomando la derivada de $\mathcal{C}$ respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{C}} &= \frac{\dot{\Gamma}^T \Gamma_d + \Gamma^T \dot{\Gamma}_d}{\sqrt{1 - (\Gamma^T \Gamma_d)^2}} \\
&= \frac{(\Gamma_d)^T (\Gamma_d - \Gamma \langle \Gamma, \Gamma_d \rangle) + (\Gamma_d)^T (\Gamma \times \Omega_d) + \Gamma^T (\Gamma_d \times \Omega_d)}{\sqrt{1 - (\Gamma^T \Gamma_d)^2}} \\
&= \frac{1 - (\Gamma^T \Gamma_d)^2 - (\Gamma_d)^T (\Omega_d \times \Gamma) + (\Gamma_d)^T (\Omega_d \times \Gamma)}{\sqrt{1 - (\Gamma^T \Gamma_d)^2}} \\
&= |\sin \theta| \\
&= \|\Gamma \times \Gamma_d\| \geq 0
\end{aligned} \tag{6.60}$$

se observa que $\dot{\mathcal{C}} > 0$ en el conjunto $\mathcal{G}$, entonces $(-\Gamma_d, \Omega_d)$ en el tiempo t_0 es inestable. Este resultado junto con el obtenido al aplicar el Corolario 5.1 garantizan que el sistema en lazo cerrado (6.27) converge a la trayectoria deseada (Γ_d, Ω_d) siempre que en el tiempo t_0 se cumpla la condición inicial $(\Gamma_0, \Omega_0) \neq (-\Gamma_d, \Omega_d)$.

□

6.6.3. Simulaciones para el problema de seguimiento en $\mathbb{S}^2$

En esta sección ilustraremos como se comporta el controlador (6.47). Tomaremos las condiciones iniciales $\Gamma_0 = (0, 0, -1)^T$ para la orientación reducida real y el punto antípodo $\Gamma_{d_0} = (0, 0, 1)^T$ para la orientación reducida deseada. Se eligen las velocidades angulares iniciales $\Omega_0 = (0, 0, 0)^T$rad/s y $\Omega_{d_0} = (-0.8, -0.3, -0.5)^T$rad/s real y deseada respectivamente. Con las condiciones iniciales elegidas, el sistema (6.27) inicia su movimiento cerca de la trayectoria inestable $(-\Gamma_d, \Omega_d)$. Se consideran las ganancias $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 25$ y $\bar{k}_3 = 3$ tal que $k(\Omega) < 0$.

Las entradas de control u se muestran en la Figura 6.14, se puede notar chattering a partir del momento en que las trayectorias llegan a la superficie S. El seguimiento de la velocidad angular deseada se puede apreciar en la Figura 6.15. Como se mencionó antes, se consideran dos formas de representar el error de orientación reducida, estas se ilustran en las Figuras 6.16 y 6.17. La primera muestra como cambia la magnitud del producto cruz $\|\Gamma \times \Gamma_d\|$, la cual es cero cuando Γ y Γ_d son paralelas y $\|\Gamma \times \Gamma_d\| = 1$ cuando Γ y Γ_d son ortogonales. La segunda representación se ilustra en la Figura 6.17 y muestra el cambio del ángulo entre los vectores Γ y Γ_d; al inicio $\theta = \pi$ puesto que Γ y Γ_d son antípodos uno del otro, después de $5s$ aproximadamente θ el ángulo se reduce prácticamente a cero.

La Figura 6.18 muestra como la orientación reducida dada por el sistema (6.27) sigue la orientación reducida deseada, las trayectorias Γ y Γ_d evolucionan en $\mathbb{S}^2$. Por último, la Figura 6.19 ilustra el comportamiento de la variable deslizante en diferentes instantes de tiempo.

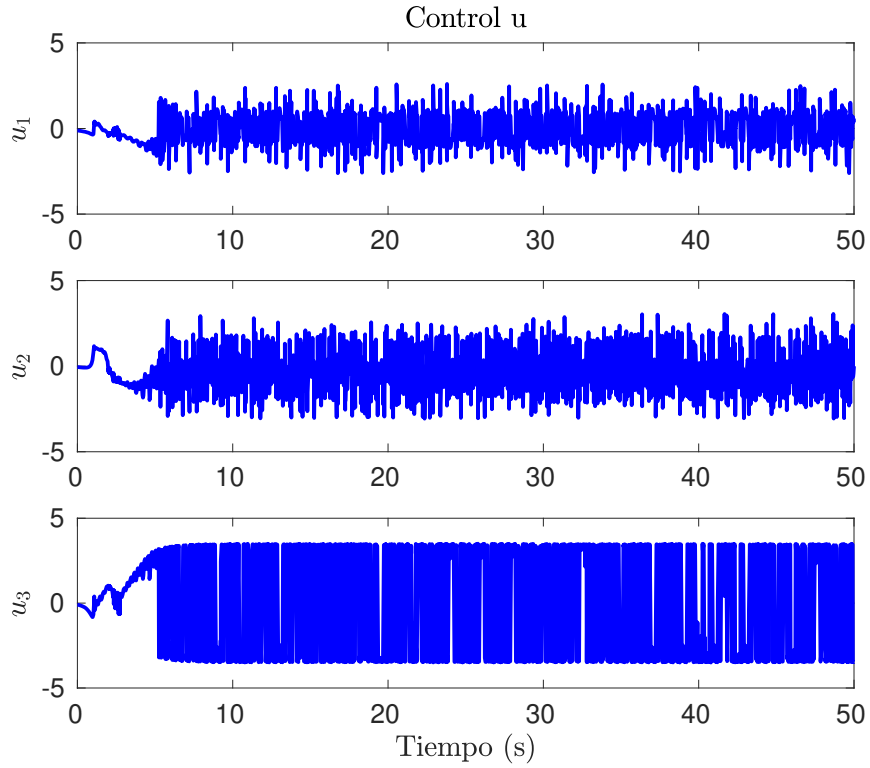


Figura 6.14: Entradas de control u obtenidas con la ley de control (6.47).

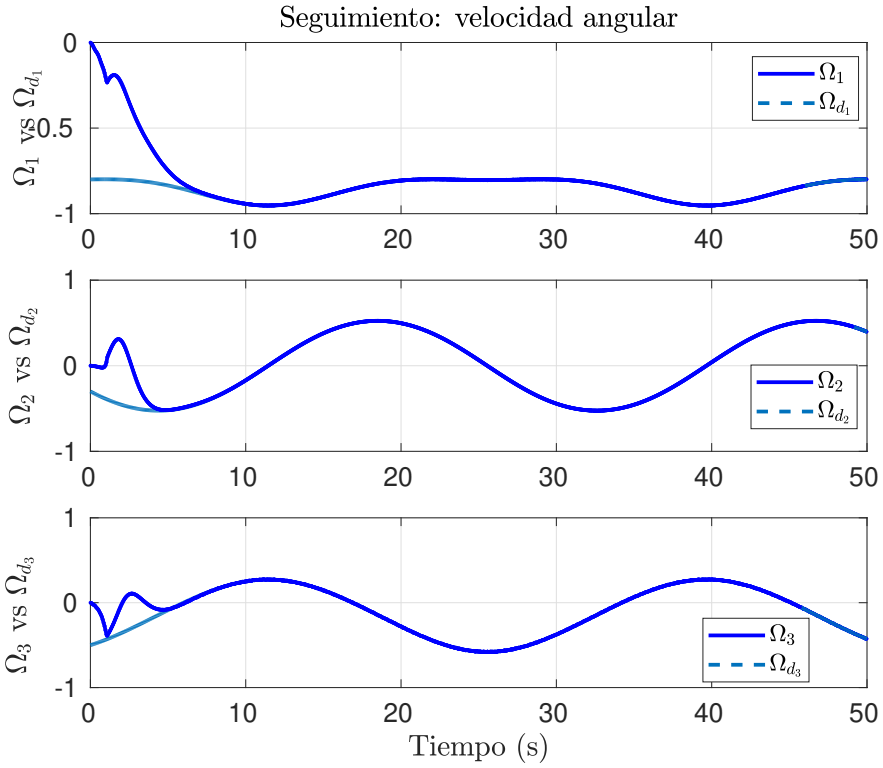


Figura 6.15: Seguimiento de la velocidad angular deseada.

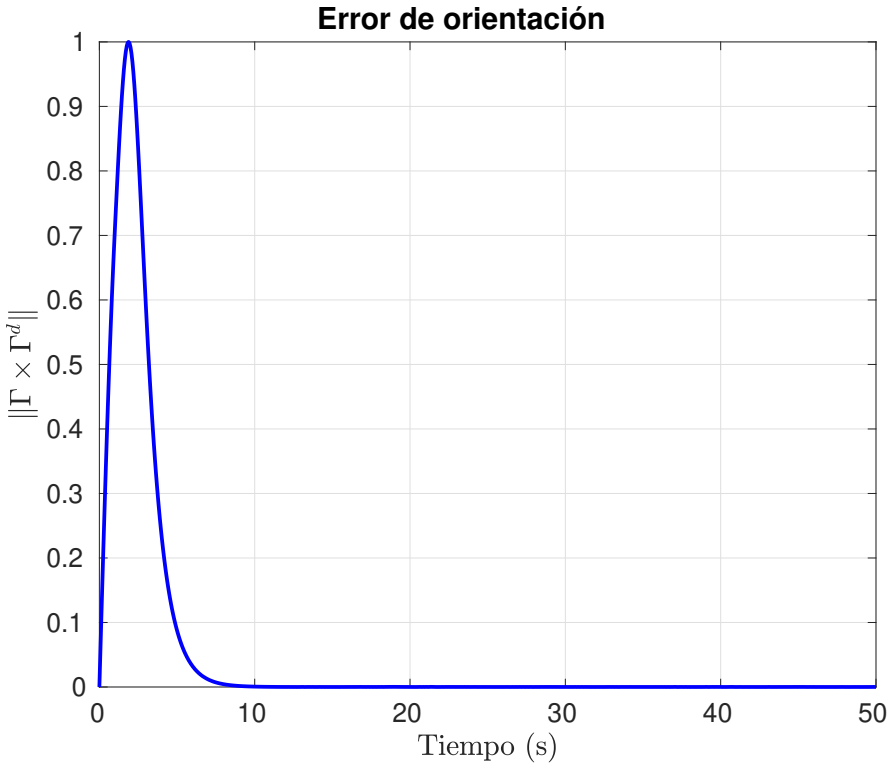


Figura 6.16: El error de orientación $\|\Gamma \times \Gamma_d\|$ ilustra la existencia de dos equilibrios $\Gamma = \Gamma_d$ and $\Gamma = -\Gamma_d$.

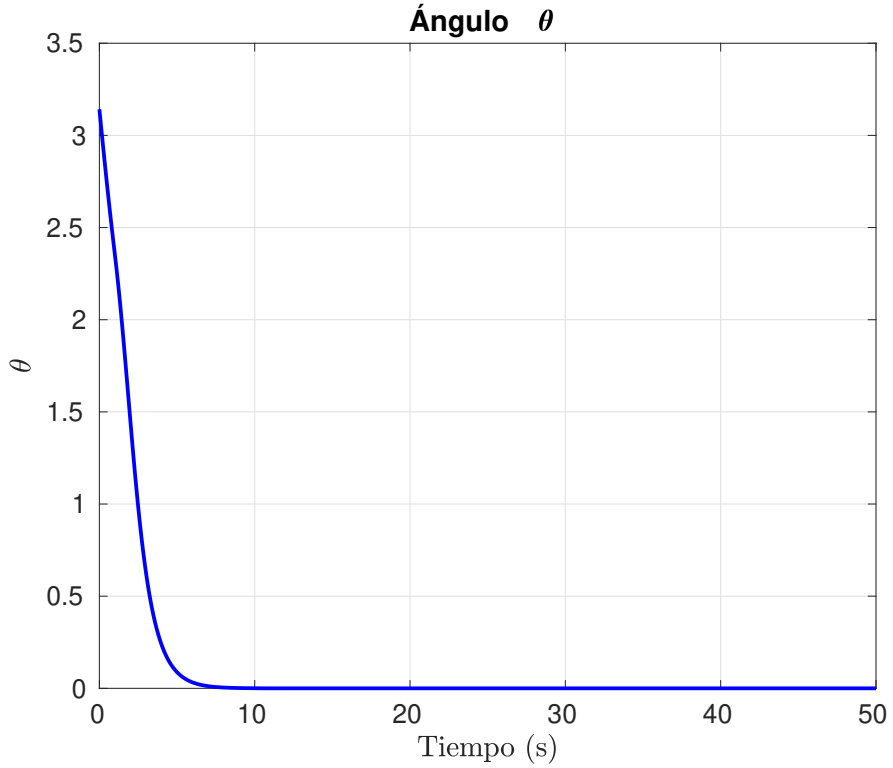
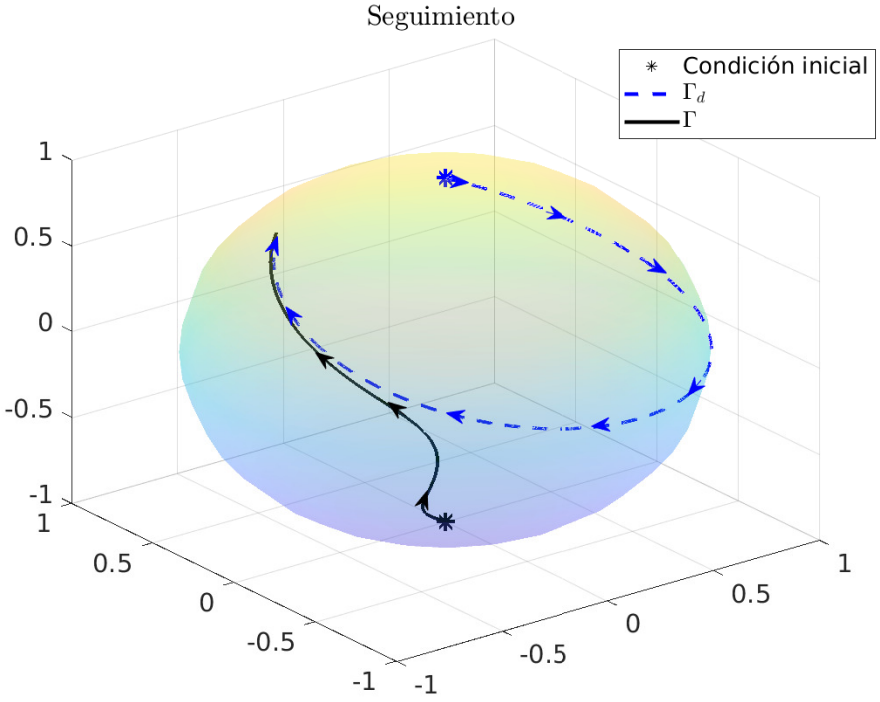
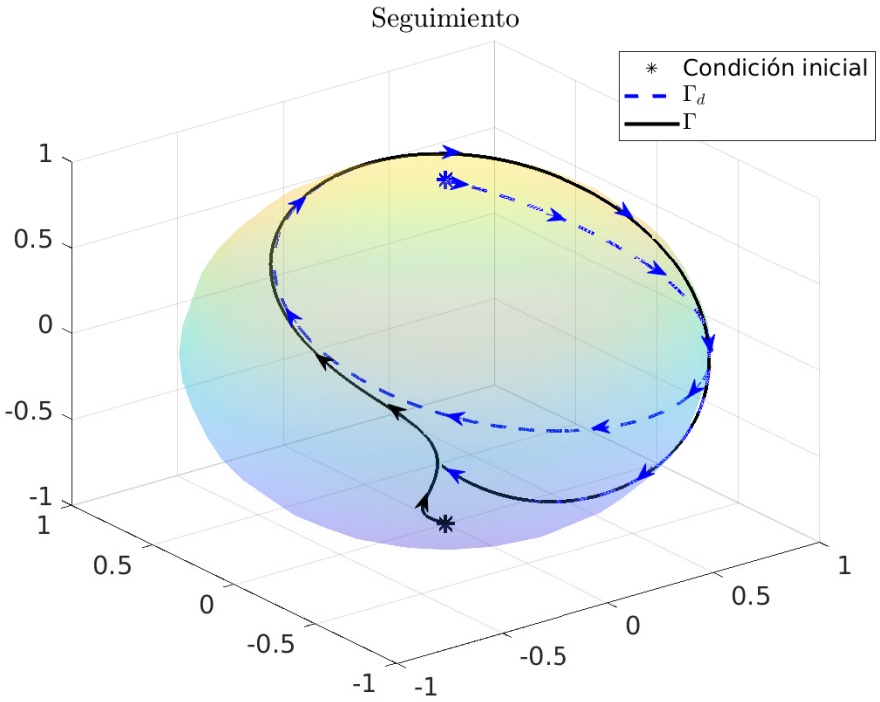


Figura 6.17: El error de orientación θ muestra cómo el sistema (6.27) se mueve hacia la posición deseada desde la posición opuesta. hasta alcanzarla.



(a) 5 segundos



(b) 10 segundos

Figura 6.18: Seguimiento de la orientación reducida sobre $\mathbb{S}^2$ al transcurrir 5 seconds (figura 6.18a) y 10 segundos (figura 6.18b) de simulación

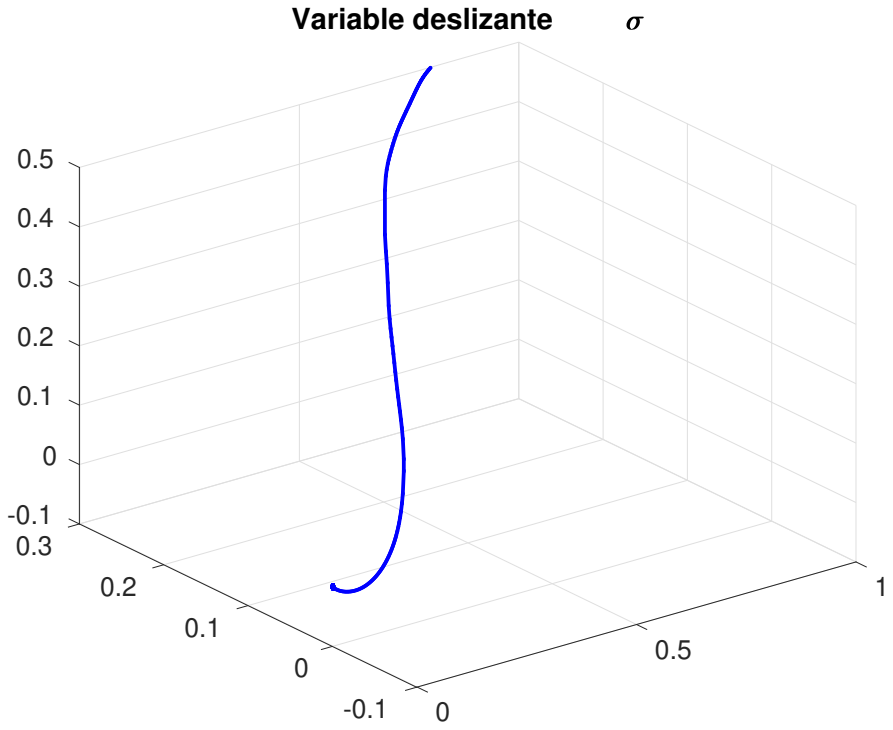


Figura 6.19: Evolución de la variable de deslizamiento σ en diferentes instantes del tiempo.

6.7. Modos deslizantes en $SE(3)$

En esta sección se estudiará el problema de control para sistemas definidos en $SE(3)$. Nuevamente se recurrirá al control por modos deslizantes y se diseñará una superficie en la que hacemos uso de los resultados obtenidos en la sección 6.2. Es importante resaltar que todo el análisis realizado en la sección 6.2 se traslada ahora a $SE(3)$ con sus respectivas adecuaciones. Esto es posible gracias a que la dinámica de la orientación se puede considerar independiente de la de traslación. Otra ventaja que se tiene, es que sabemos a priori que en $SE(3)$ solo podemos alcanzar estabilidad casi global como consecuencia de la naturaleza de $SO(3)$, esto simplificará el análisis en esta sección.

Dentro de la estructura de $SE(3)$ interactúan dos clases de movimientos, el de rotación y el de traslación. Es importante no perder de vista esto al diseñar el controlador, principalmente por la diferencia de escalas en las magnitudes que implica uno u otro movimiento. En esta sección, algunas partes del análisis se realizarán considerando el movimiento completo (traslación-rotación) y en otras se separarán para brindar mayor claridad.

6.7.1. Ecuaciones del movimiento en $SE(3)$

Para este desarrollo considere un sistema de segundo orden definido a partir de las matrices $A \in SE(3)$, $X \in \mathfrak{se}(3)$ con la entrada de control $U \in \mathfrak{se}(3)$, $\mathcal{D} \in \mathfrak{se}(3)$ una matriz de perturbaciones, y la matriz $f(\cdot) \in \mathfrak{se}(3)$; la dinámica en $SE(3)$ es la siguiente

$$\begin{aligned} \dot{A} &= AX \\ \dot{\hat{X}} &= f(X) + U + \mathcal{D} \end{aligned} \tag{6.61}$$

La ecuación (6.61) representa tanto la traslación como la rotación de un cuerpo rígido. El objetivo será llevar los estados del sistema al origen, esto quiere decir que buscamos un control donde el resultado sea $A \to I$ y $X \to \mathbf{0}$, note que ahora la matriz identidad I y la matriz $\mathbf{0}$ están en $\mathbb{R}^{4\times4}$. Este objetivo es el mismo para el problema de seguimiento considerando la dinámica del error. En adelante, al referirnos a matrices como la identidad I o una matriz de ceros $\mathbf{0}$ se especificarán sus dimensiones como subíndices cuando se considere que puede existir confusión en la notación; como ejemplo considere $I \in \mathbb{R}^{3\times3}$, esta será representada como $I_{3\times3}$.

El sistema (6.61) representa de forma compacta el movimiento del cuerpo; sin embargo, resulta útil conocer la composición de estas matrices con el fin de diseñar la variable deslizante y seleccionar las ganancias del controlador. Para esto, seguiremos las representaciones utilizadas en [19] y [73].

La matriz A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} R & P \\ \mathbf{0}_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}; \quad R \in SO(3),\ P \in \mathbb{R}^3$$

y está compuesta por la orientación R y la posición P. La matriz X

$$X = \begin{bmatrix} \omega^\times & v \\ \mathbf{0}_{1\times3} & 0 \end{bmatrix}; \quad \omega^\times \in \mathfrak{so}(3),\ v \in \mathbb{R}^3 \tag{6.62}$$

contiene la velocidad angular ω por medio del operador $(\cdot)^\times$ y la velocidad lineal v. La matriz f se conforma como sigue

$$f(X) = \begin{bmatrix} (J^{-1}(J\omega)^\times\omega)^\times & -m^{-1}\omega^\times v \\ \mathbf{0}_{1\times3} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.63}$$

para terminar la descripción del sistema (6.61), la matriz de perturbaciones toma la forma

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} J^{-1}d^{\times} & m^{-1}D \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 0 \end{bmatrix}; \quad d,\ D \in \mathbb{R}^3 \tag{6.64}$$

donde d y D están acotadas por constantes $\bar{d} > 0$ y $\bar{D} > 0$.

6.7.2. Dinámica del error en $SE(3)$

Al igual que en el caso de $SO(3)$, se consideran los errores $R_e = R_d^{\top} R$ y $\omega_e = \omega - R_e^T \omega_d$ de orientación y velocidad angular respectivamente. También se usarán los errores $P_e = R_d^T(P - P_d)$ y $V_e = -R_e^{\top}\omega_d^{\times} P_e + V - R_e^{\top} V_d$, estas definiciones nos permiten llegar a una forma apropiada de la dinámica del error para tratar tanto el problema de regulación como el de seguimiento. Para determinar la dinámica del error, parte del trabajo lo realizamos en la sección (6.2.1), donde se determinó la dinámica del error para la orientación. Para completar la dinámica del error en $SE(3)$, resta determinar las ecuaciones que describen el error en la traslación.

Considere el error de posición $P_e = R_d^T(P - P_d)$, tomando su derivada respecto al tiempo se tiene

$$\dot{P}_e = -\omega_d^{\times} R_d^{\top}(P - P_d) + R_d^T \dot{P} - R_d^T \dot{P}_d$$

suponga que $\dot{P}_d = R_d V_d$ y $\dot{R}_d = R_d \omega_d^{\times}$, entonces la dinámica del error de posición toma la siguiente forma

$$\dot{P}_e = R_e V_e \tag{6.65}$$

Para obtener la dinámica que describe el error de velocidad lineal, considere el error $V_e = -R_e^{\top}\omega_d^{\times} P_e + V - R_e^{\top} V_d$. Tomando su derivada respecto al tiempo se obtiene

$$m\dot{V}_e = m(-\dot{R}_e^{\top}\omega_d^{\times} P_e - R_e^{\top}\dot{\omega}_d^{\times} P_e - R_e^{\top}\omega_d^{\times}\dot{P}_e + \dot{V} - \dot{R}_e^{\top} V_d - R_e^{\top}\dot{V}_d)$$

Usando $\dot{V}_d = -\omega_d^{\top} V_d$, $J\dot{\omega}_d = (J\omega_d)^{\times}\omega_d$ y sustituyendo el resto de las derivadas en la expresión anterior se tiene

$$m\dot{V}_e = m(-R_e^{\top} J^{-1}((J\omega_d)^{\times}\omega_d)^{\times} P_e - R_e^{\top}\omega_d^{\times} R_e V_e - (R_e^{\top}\omega_d)^{\times} R_e^{\top}\omega_d^{\times} P_e) - \omega_e^{\times} V_e + u + D \tag{6.66}$$

haciendo

$$u = -m(-R_e^{\top} J^{-1}((J\omega_d)^{\times}\omega_d)^{\times} P_e - R_e^{\top}\omega_d^{\times} R_e V_e - (R_e^{\top}\omega_d)^{\times} R_e^{\top}\omega_d^{\times} P_e) + w$$

y sustituyendo u en la ecuación (6.66) se llega a la dinámica que describe el error de velocidad lineal

$$m\dot{V}_e = -\omega_e^{\times} V_e + w + D \tag{6.67}$$

Agrupando las ecuaciones (6.12), (6.65) y (6.67), se obtiene la representación en $SE(3)$ de la dinámica del error

$$\dot{A} = \begin{bmatrix} R_e & P_e \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_e^{\times} & V_e \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.68a}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} (J^{-1}(J\omega)\times\omega)^{\times} & -m^{-1}\omega_e^{\times} V_e \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J^{-1}z^{\times} & m^{-1}w \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J^{-1}d^{\times} & m^{-1}D \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.68b}$$

Finalmente, concluimos esta sección recordando los isomorfismos $\xi \mapsto \hat{\xi}$ entre $\mathbb{R}^6$ y $\mathfrak{se}(3)$

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \Omega^{\times} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y el operador inverso $\hat{\xi}^{\vee}$

$$\hat{\xi}^{\vee} = \begin{bmatrix} \Omega \\ v \end{bmatrix}$$

ambos presentados en el Capítulo 3.

6.7.3. La superficie deslizante

Cuando diseñamos la superficie deslizante en $SO(3)$, la restricción que se impuso fue una variable deslizante representada como matriz antisimétrica, pues es la forma que exhiben los elementos de $\mathfrak{so}(3)$. Para determinar esta variable, se emplearon los errores de orientación y velocidad angular. Para el caso en $SE(3)$, se sigue la misma estrategia.

En el Capítulo 3, vimos como lucen los elementos de $\mathfrak{se}(3)$, usaremos esa descripción para generar la variable deslizante en términos de los errores de posición, de orientación y de velocidades lineal y angular. De este modo definimos la superficie deslizante.

Definición 6.1. *Considere la variable deslizante*

$$\sigma(R_e, \omega_e, P_e, V_e) = \begin{bmatrix} \sigma_R(R_e, \omega_e) & \sigma_T(R_e, P_e, V_e) \\ \boldsymbol{0}_{1\times 3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{\mathrm{a}}(R) + \omega_e^{\times} & R_e^{\top} P_e + V_e \\ \boldsymbol{0}_{1\times 3} & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{6.69}$$

Se define la superficie deslizante como

$$\mathcal{S} = \{(A, X) \in \mathcal{M} \mid \sigma(R_e, \omega_e, P_e, V_e) = 0\} \tag{6.70}$$

En la siguiente sección mostraremos el controlador que permite al sistema alcanzar, en primera instancia, la superficie deslizante $\mathcal{S}$ en tiempo finito y posteriormente se probará que sobre la superficie, las trayectorias del sistema convergen al equilibrio deseado de forma exponencial.

6.7.4. Alcanzabilidad de la superficie deslizante

Con la superficie deslizante definida, el siguiente paso es generar el control que permita cumplir con los objetivos. El siguiente teorema presenta el control propuesto y probaremos que la superficie deslizante se puede alcanzar mediante dicho controlador. Algo a notar, es que se consideran dos ganancias, una que afecta a la parte del movimiento rotacional y otra que afecta al movimiento de traslación. Dividir las ganancias de este modo, permite ajustarlas con mayor facilidad pues no se tiene el problema de la diferencia en la escala de las magnitudes de los movimientos.

Teorema 6.3. *Las trayectorias del sistema (6.68a-6.68b) convergen a $\mathcal{S}$ por medio de la ley de control*

$$U(R_e, \omega_e, \omega, P_e, V_e) = \begin{bmatrix} K_R(\omega_e, \omega, P_e, V_e)\,\mathrm{sign}(\sigma_R) & K_T(\omega_e, P_e, V_e)\,\mathrm{sign}(\sigma_T) \\ \boldsymbol{0}_{1\times 3} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.71}$$

con las ganancias que satisfacen las siguientes condiciones

$$K_R(\omega_e, \omega) \geq \|J\|_2 \cdot \|\omega\|^2 + \|\omega_e\| + \delta + \bar{d} \tag{6.72}$$

$$K_T(\omega_e, P_e, V_e) \geq m\|V_e\| + \|V_e\|_2 \cdot \|\omega_e\| + \bar{D} + \delta \tag{6.73}$$

Demostración. Empecemos por aplicar el mapa $(\cdot)^\vee$ a la variable deslizante (6.69)

$$\sigma^\vee = \begin{bmatrix} \text{vex}(\sigma_R) \\ \sigma_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{vex}(\mathbb{P}_\text{a}(R_e)) + \omega_e \\ R_e^\top + V_e \end{bmatrix}$$

Ahora usaremos la matriz de inercia $J = J^\top$ y la masa m que multiplica a la matriz identidad $I_{3\times3}$. Con lo anterior, se considera la función candidata de Lyapunov

$$V_a = \frac{1}{2}(\sigma^\vee)^\top \mathcal{J}\sigma^\vee = \frac{1}{2}(\sigma^\vee)^\top \begin{bmatrix} J & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & mI_{3\times3} \end{bmatrix} \sigma^\vee$$

se puede notar que V_a es definida positiva. Ahora, tomando la derivada de V_a respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V}_a = (\sigma^\vee)^\top \begin{bmatrix} J\dot{\omega}_e + J\,\text{vex}(\mathbb{P}_\text{a}(\dot{R}_e)) \\ m\dot{V}_e + m(R_e^\top \dot{P}_e + \dot{R}_e^\top P_e) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las derivadas $\dot{R}_e$, $\dot{\omega}_e$, $\dot{V}_e$, y $\dot{P}_e$ en la ecuación anterior obtenemos

$$\dot{V}_a = (\sigma^\vee)^\top \begin{bmatrix} (J\omega)^\times J + z + d + J\,\text{vex}(\mathbb{P}_\text{a}(\dfrac{R_e\omega_e^\times - (R_e\omega_e^\times)^\top}{2})) \\ mV_e - \omega_e^\times V_e + w + D + m((R_e\omega_e^\times)^\top P_e) \end{bmatrix} \tag{6.74}$$

enseguida aplicaremos el mapa $(\cdot)^\vee$ al control (6.71), esto es

$$U^\vee = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_R(\omega_e, \omega)\,\text{sign}(\text{vex}(\sigma_R)) \\ K_T(\omega_e, P_e, V_e)\,\text{sign}((\sigma_T)) \end{bmatrix}$$

Por otro lado, de la sección 6.2.3 se tiene que $\|(J\omega)\times\omega\| \leq \|J\|_2 \cdot \|\omega\|^2$, además $\|\omega_e^\times V_e\| \leq \|\omega_e\|_2 \cdot \|V_e\|$, entonces se deduce que la ecuación (6.74) está acotada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_a \leq &-\text{vex}(\sigma_R)^\top \text{sign}(\text{vex}(\sigma_R))(K_R(\omega_e,\omega) - \|J\|_2 \cdot \|\omega\|^2 - \|\omega_e\| - \bar{d}) \\ &- \sigma_T^\top \text{sign}(\sigma_T)(K_T(\omega_e, P_e, V_e) - m\|V_e\| - \|V_e\|_2 \cdot \|\omega_e\| - \bar{D}) \end{aligned} \tag{6.75}$$

las condiciones (6.72) y (6.73) garantizan que

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &\leq -\delta(\text{vex}(\sigma_R)^\top \text{sign}(\text{vex}(\sigma_R) + \sigma_T^\top \text{sign}(\sigma_T)) \\ &= -\delta((\sigma^\vee)^T \text{sign}(\sigma^\vee) \\ &\leq -\delta\|\sigma^\vee\| \\ &\leq -\delta\sqrt{\frac{V_a}{\lambda_{max}(\mathcal{J})}} \end{aligned} \tag{6.76}$$

del lema de comparación [38] se tiene que V_a y por lo tanto $\sigma^\vee$ tienden a cero en tiempo finito. □

6.7.5. Estabilidad del sistema de orden reducido

Para determinar el sistema de orden reducido, usamos la cinemática (6.68a) y la variable deslizante σ. Obtenemos así la dinámica del sistema sobre la superficie $\mathcal{S}$

$$\dot{A} = \begin{bmatrix} -R_e\mathbb{P}_\text{a}(R_e) & -P_e \\ \mathbf{0}_{1\times3} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.77}$$

De nuestro trabajo [26], sabemos que para el sistema en $SO(3)$, solo podemos aspirar a un resultado de estabilidad casi global, que existe un conjunto de medida cero formado por puntos de equilibrio inestables (ver sección 6.2.2) y que la identidad $R_e = I_{3\times3}$ es un punto de equilibrio

estable casi globalmente para la dinámica de orden reducido (6.15). Las características anteriores las hereda $SE(3)$, salvo que ahora el punto de equilibrio de la dinámica de orden reducido está formado por $R_e = I_{3\times 3}$ y $P_e = 0$, lo que implica que $A = I_{4\times 4}$ será el punto de equilibrio en $SE(3)$ para la dinámica de orden reducido (6.77). Por lo anterior, en esta sección nos centramos en el análisis de estabilidad considerando que en las condiciones iniciales

$$A_0 \notin \left\{ \begin{bmatrix} I + 2\eta\eta^\top & \mathbf{0}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \mid \eta \in \mathbb{R}^3,\ \|\eta\| = 1 \right\} \tag{6.78}$$

Teorema 6.4. *La identidad $A = I_{4\times 4}$ es un equilibrio estable casi globalmente del sistema de orden reducido (6.77).*

Demostración. Para estudiar el comportamiento del sistema de orden reducido, considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_{or} = \frac{1}{2} P_e^\top P_e + \operatorname{tr}(\mathbb{P}_{\mathrm{a}}(R_e)^\top \mathbb{P}_{\mathrm{a}}(R_e))$$

Tomando la derivada de V_{or} respecto al tiempo y usando el resultado obtenido en la sección 6.2.4 se tiene que

$$\dot{V}_{or} \leq -4 \operatorname{tr}(\mathbb{P}_{\mathrm{a}}(R_e)^\top \mathbb{P}_{\mathrm{a}}(R_e)) + P_e^\top \dot{P}_e$$

finalmente, de la dinámica de orden reducido la derivada respecto al tiempo es acotada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_{or} &\leq -4 \operatorname{tr}(\mathbb{P}_{\mathrm{a}}(R_e)^\top \mathbb{P}_{\mathrm{a}}(R_e)) - P_e^\top P_e \\ &\leq -2 \operatorname{tr}(\mathbb{P}_{\mathrm{a}}(R_e)^\top \mathbb{P}_{\mathrm{a}}(R_e)) - P_e^\top P_e \\ &= 2V_{or} \end{aligned} \tag{6.79}$$

del lema de comparación, del resultado de estabilidad casi global obtenido en la sección 6.2.2 y de la condición (6.78) se concluye que el par (R_e, P_e) converge exponencialmente al punto $(I_{3\times 3}, 0)$ para casi cualquier condición inicial y por lo tanto $A \to I_{4\times 4}$.

□

6.7.6. Simulaciones: control en $SE(3)$

En esta sección se ilustra el comportamiento del sistema ante la acción del control (6.71) para el caso de regulación. Para este propósito considere las siguientes condiciones iniciales:

Usaremos la matriz de inercia $J = \operatorname{diag}(0.0022, 0.0025, 0.0045)$ y la masa $m = 0.456$ reportadas en [45]. Las perturbaciones están dadas por

$$D^\top = 0.5 \begin{pmatrix} -\sin(5\pi t) & \cos(7\pi t) & -\sin(9\pi t) \end{pmatrix} .$$

$$d^\top = 0.005 \begin{pmatrix} -\sin(5\pi t) & \cos(7\pi t) & -\sin(9\pi t) \end{pmatrix} .$$

Las velocidades iniciales angular y lineal son $\omega_0 = (-0.5, 0.6, -0.4)^\top$ y $V_0 = (1.5, 2, 3)^\top$. La posición inicial será $P_0 = (10, 5, 6)^\top$ y la orientación

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ 0 & -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}$$

y elegimos las ganancias

$$K_R(\omega_e, \omega) = \|\omega\|^2 + 0.009\|\omega_e\| + 0.009$$

$$K_T(\omega_e, P_e, V_e) = 2\|V_e\| + 4\|V_e\| \cdot \|\omega_e\| + 11.5\|P_e\|\|\omega_e\| + 0.009$$

Se busca que $R \to 0$, $\omega \to 0$, $P \to 0$ y $V \to 0$. En las siguientes figuras se muestran los resultados de la simulación. La Figura 6.20 ilustra las entradas de control para los movimientos de rotación y traslación. Note el cambio de escala en la magnitud del control de orientación respecto al de traslación. Es importante considerar este cambio de escala a la hora de diseñar el controlador pues, si bien es posible demostrar que la superficie es alcanzable usando una sola ganancia para todo el sistema en $SE(3)$, esto se convierte en una limitación a la hora de ajustar el valor de dicha ganancia debido a la diferencia de escalas entre el movimiento de rotación y el movimiento de traslación.

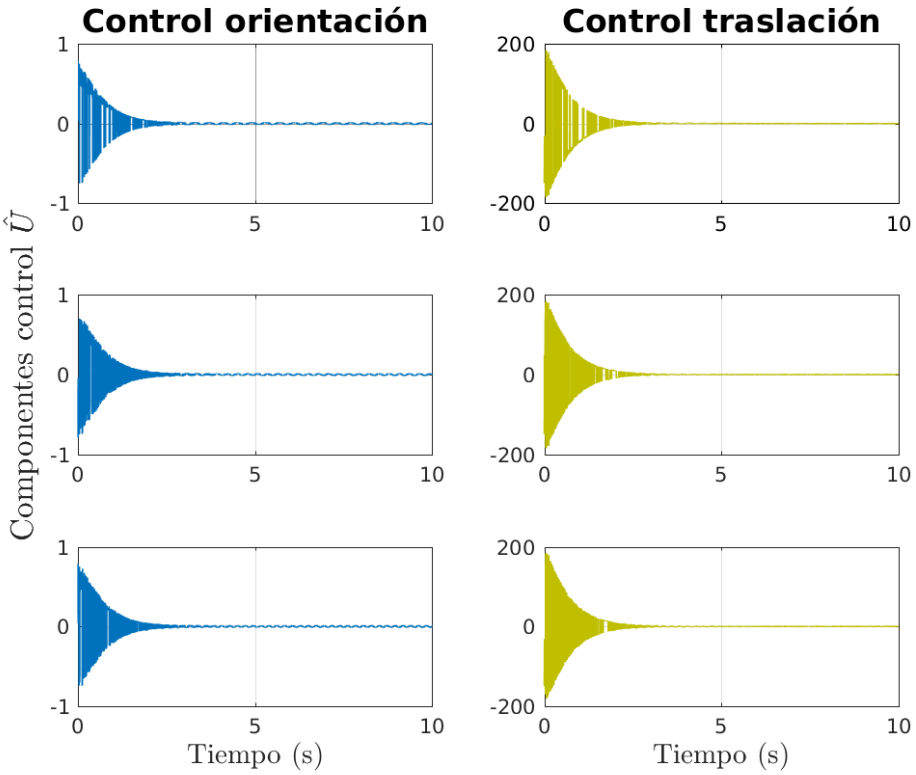


Figura 6.20: La figura muestra las componentes del control bajo el mapa $\hat{u}$, del lado izquierdo se aprecian las componentes del control encargado de la orientación. Del lado derecho se muestran las entradas de control encargadas de la traslación.

En la Figura 6.21 se muestran las componentes del error de velocidad angular, para el caso de regulación la gráfica para la velocidad angular real tiene el mismo aspecto; se aprecia que las trayectorias tienden a cero. De igual manera, en la Figura 6.22 se ilustra como el error en la velocidad lineal tiende a cero, en ambos casos esto sucede de forma exponencial una vez que las trayectorias del sistema alcanzan el modo deslizante.

Finalmente, en las Figuras 6.23 y 6.24 se muestran los errores de posición y orientación respectivamente. En la primera de ellas se puede notar que el error de posición tiende a cero; en la segunda el error tiende a 3 como es de esperarse ya que $R_e \to I$.

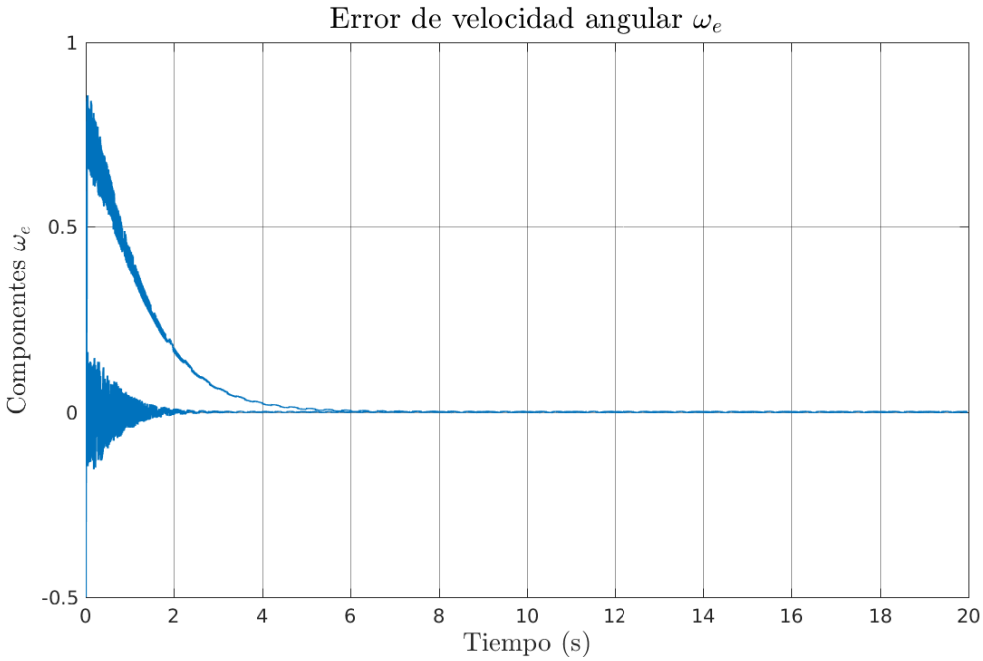


Figura 6.21: La figura muestra las componentes del error de velocidad angular ω_e para diferentes instantes de tiempo.

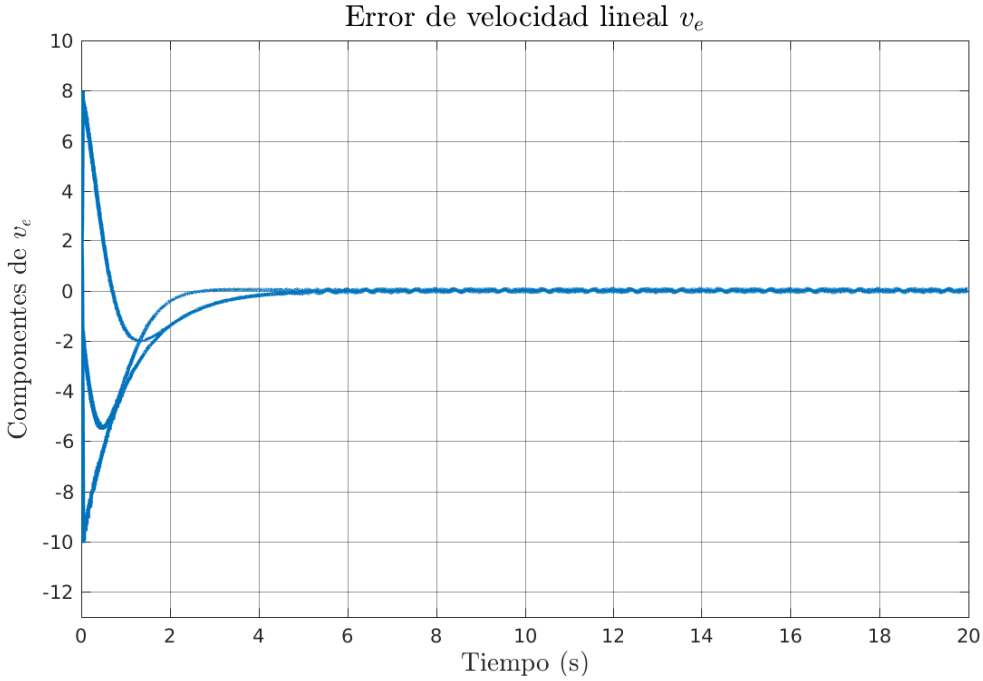


Figura 6.22: En la figura se aprecia como las componentes del error de velocidad lineal v_e tienden a cero de forma exponencial.

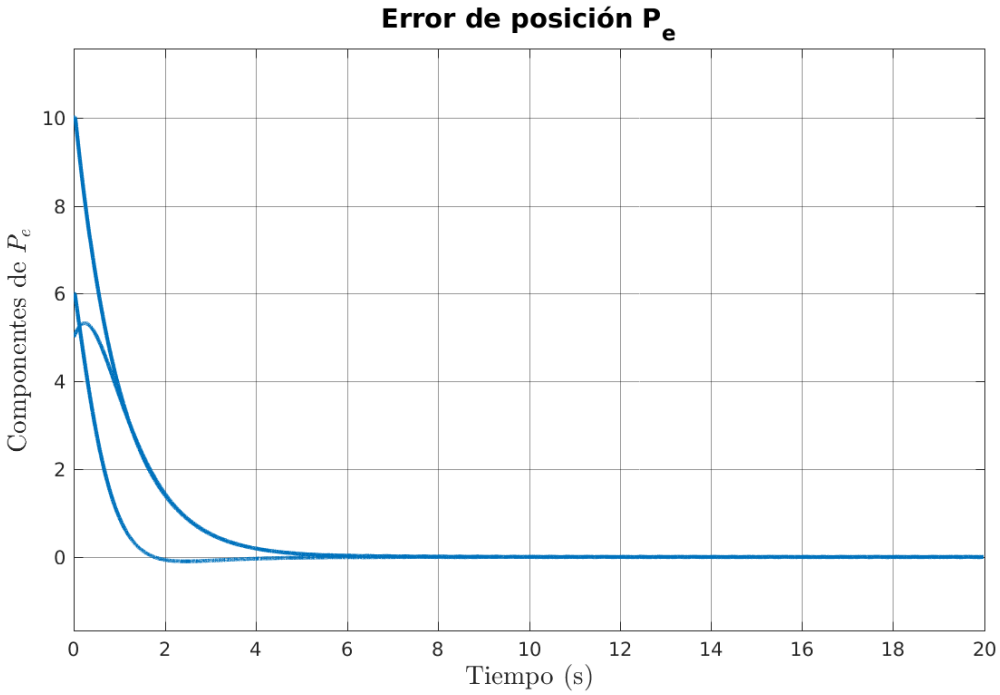


Figura 6.23: La figura muestra como las componentes del error de posición tienden a cero, lo que significa que se alcanza la posición deseada.

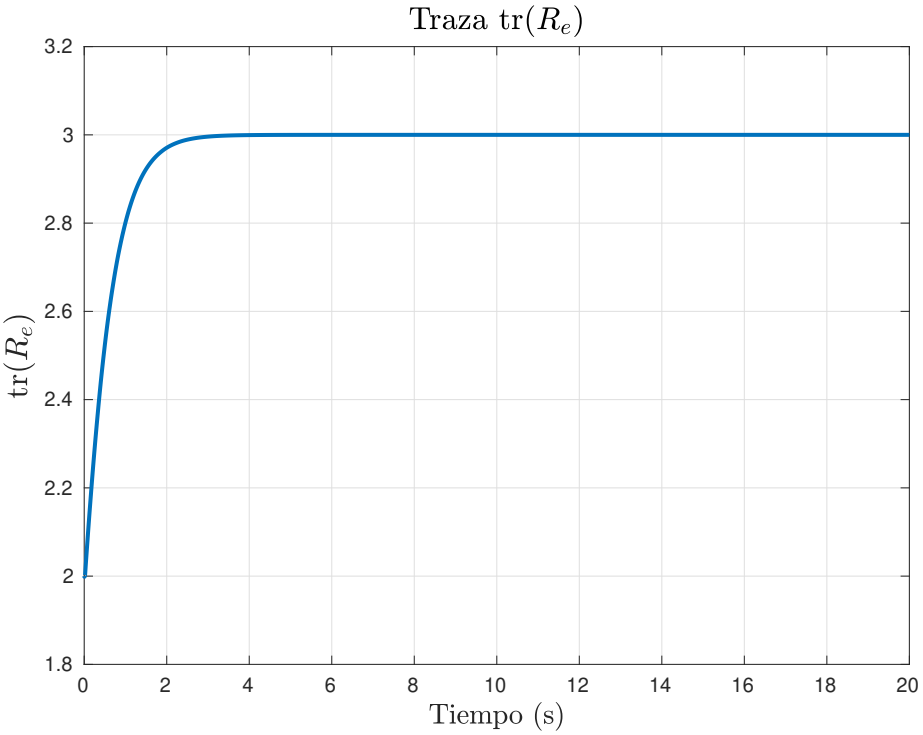


Figura 6.24: En la figura se muestra como $\text{tr}(R_e) \to 3$, esto indica que $R_e = I$ o que el control lleva al sistema a la orientación deseada.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se abordó el problema de diseñar controladores por modos deslizantes mediante representaciones geométricas que describen el movimiento de cuerpos rígidos. En concreto, el trabajo se enfocó en el diseño de controladores para sistemas definidos en los grupos $SO(3)$, $SE(3)$ y el espacio homogéneo $\mathbb{S}^2$.

Para el diseño de los controles en $SO(3)$ y $SE(3)$, resulta esencial entender la operación del grupo para poder plantear definiciones de error que permitan describir la naturaleza del problema, diseñar la superficie deslizante y que faciliten el análisis del problema. El estudio de la estabilidad en estos sistemas requiere considerar la existencia de múltiples equilibrios en $SO(3)$, esta situación la heredan los sistemas en $SE(3)$ ya que contienen a las rotaciones. Para el control en $SE(3)$, resulta importante considerar que en él están inmersos dos tipos de movimientos con escalas de magnitud distintas, esto nos lleva a que se elijan ganancias en función del tipo de movimiento que se desea controlar. En ambos casos se probó que las trayectorias, una vez que se encuentran en la superficie deslizante, convergen a los puntos de equilibrio deseados exponencialmente para casi cualquier condición inicial, este es el resultado de estabilidad casi global. Mediante simulaciones, se ilustró la existencia del unwinding para una representación no única y se comparó con el control que diseñamos, este último presentó el resultado esperado: no mostró unwinding.

El caso del control en $\mathbb{S}^2$ presenta sus peculiaridades, de entrada no existe un elemento identidad en esta variedad ya que es un espacio homogéneo. De esto surge la necesidad de usar las definiciones de error que se consideraron. Otra característica importante es que la superficie deslizante conserva el carácter homogéneo del espacio de configuraciones. Una desventaja de la definición del error de orientación reducida es que nos impide obtener una dinámica del error apropiada para estudiar el caso de seguimiento a partir del estudio del caso de regulación. En el caso del problema de seguimiento, la dinámica de orden reducido corresponde a un sistema variante en el tiempo, por lo que el análisis empleado para el caso de regulación no se puede emplear del todo. Otra característica importante es que, una vez el sistema alcanza la superficie deslizante, este se comporta como un sistema en $SO(3)$ rotando alrededor de un solo eje. Para este tipo de sistemas, se probó que el punto de equilibrio deseado en el caso de regulación es asintóticamente estable casi globalmente. Para el caso de seguimiento, se mostró que la trayectoria deseada es asintóticamente estable casi globalmente.

Como parte de esta investigación, se han publicado hasta el momento los trabajos [26, 27]. De los resultados presentados en esta investigación, faltan por someterse el controlador en $SE(3)$, el caso de seguimiento en $\mathbb{S}^2$ y los resultados de estabilidad exponencial casi global.

7.1. Trabajo a futuro

Como trabajo a futuro se contempla lo siguiente:

- Diseñar la versión continua del modo deslizante para cada controlador.
- Explorar el diseño de controladores en otras variedades.
- Abordar los casos subactuados de los sistemas vistos en este trabajo.

Apéndice A

Demostraciones del Capítulo 6

En este apéndice se darán las desmotraciones correspondientes a las ecuaciones (6.40) y (6.43). Respecto a la primera ecuación, se mostrará que el conjunto $G = SO(3) \times SO(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dotado de la operación (6.40) forma un grupo. Respecto a la ecuación (6.43), se mostrará que es una acción transitiva. Ambas ecuaciones se repetirán en las proposiciones siguientes para brindar mayor claridad.

Proposición A.1. *El conjunto $G = SO(3) \times SO(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con la operación*

$$(R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1) \cdot (R_2, \bar{R}_2, \omega_2, \bar{\omega}_2) = (R_1 R_2, \bar{R}_1 \bar{R}_2, \omega_1 + \omega_2, \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \tag{A.1}$$

forma un grupo.

Demostración. Considere $g_1 = (R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1)$, $g_2 = (R_2, \bar{R}_2, \omega_2, \bar{\omega}_2)$ y $g_3 = (R_3, \bar{R}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3)$ elementos en G. Probaremos los axiomas de cerradura, asociatividad, existencia del elemento neutro y el inverso.

Cerradura

$$g_1 \cdot g_2 = (R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1) \cdot (R_2, \bar{R}_2, \omega_2, \bar{\omega}_2) = (R_1 R_2, \bar{R}_1 \bar{R}_2, \omega_1 + \omega_2, \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)$$

note que $R_1 R_2$ y $\bar{R}_1 \bar{R}_2$ pertenecen a $SO(3)$; $\omega_1 + \omega_2$ y $\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2$ pertenecen a $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $g_1 * g_2 \in G$.
Asociatividad

$$\begin{aligned}
(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 &= ((R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1) \cdot (R_2, \bar{R}_2, \omega_2, \bar{\omega}_2)) \cdot (R_3, \bar{R}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3) \\
&= (R_1 R_2, \bar{R}_1 \bar{R}_2, \omega_1 + \omega_2, \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \cdot (R_3, \bar{R}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3) \\
&= (R_1 R_2 R_3, \bar{R}_1 \bar{R}_2 \bar{R}_3, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3) \\
&= (R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1) \cdot (R_2 R_3, \bar{R}_2 \bar{R}_3, \omega_2 + \omega_3, \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3) \\
&= (R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1) \cdot ((R_2, \bar{R}_2, \omega_2, \bar{\omega}_2)) \cdot (R_3, \bar{R}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3)) \\
&= g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)
\end{aligned}$$

Elemento neutro
Considere $g_1 \in G$ y $e = (I, I, 0, 0) \in G$, aplicando la operación (A.1) a g_1 y e, se tiene

$$\begin{aligned}
g_1 \cdot e &= (R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1) \cdot (I, I, 0, 0) \\
&= (R_1 I, \bar{R}_1 I, \omega_1 + 0, \bar{\omega}_1 + 0) \\
&= (R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1) \\
&= g_1
\end{aligned}$$

Elemento inverso
Considere $g_1 \in G$ y $g_1^{-1} = (R_1^\top, \bar{R}_1^\top, -\omega_1, -\bar{\omega}_1) \in G$, aplicando la operación (A.1) a g_1 y g_1^{-1}, se tiene

$$\begin{aligned} g_1 \cdot g_1^{-1} &= (R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1) \cdot (R_1^\top, \bar{R}_1^\top, -\omega_1, -\bar{\omega}_1) \\ &= (R_1 R_1^\top, \bar{R}_1 \bar{R}_1^\top, \omega_1 - \omega_1, \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_1) \\ &= (I, I, 0, 0) \\ &= e \end{aligned}$$

dado que se cumplen los axiomas de grupo, concluimos que G es un grupo con la operación (A.1). □

Proposición A.2. *Considere $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ una variedad y G un grupo de Lie, y elementos $g = (R, \bar{R}, \omega, \tilde{\omega}) \in G$ y $q = (\Gamma, \Gamma_d, \Omega, \Omega_d) \in \mathcal{M}$, entonces*

$$g * q = (R\Gamma, \bar{R}\Gamma_d, \Gamma \times \Gamma_d - R\Gamma \times \bar{R}\Gamma_d + \omega + \tilde{\omega} + \Omega, \Omega_d + \tilde{\omega}) \tag{A.2}$$

es una acción de G sobre $\mathcal{M}$. Tal acción además es transitiva.

Demostración. Para verificar que (A.2) es una acción, debemos mostrar que satisface la definición (3.7).
Acción del elemento neutro
Tomemos el elemento neutro $e \in G$ y un $q \in \mathcal{M}$, sustituyéndolos en (A.2) se tiene

$$\begin{aligned} e * q &= (I, I, 0, 0) * (\Gamma, \Gamma_d, \Omega, \Omega_d) \\ &= (I\Gamma, I\Gamma_d, \Omega + 0, \Omega_d + 0) \\ &= q \end{aligned}$$

Acción de dos elementos del grupo
Tomemos los elementos $g_1 = (R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1)$ y $g_2 = (R_2, \bar{R}_2, \omega_2, \bar{\omega}_2)$ en G y $q \in \mathcal{M}$, aplicando (A.2) de forma consecutiva se tiene

$$\begin{aligned} g_2 * (g_1 * q) &= (R_2, \bar{R}_2, \omega_2, \bar{\omega}_2) * ((R_1, \bar{R}_1, \omega_1, \bar{\omega}_1) * (\Gamma, \Gamma_d, \Omega, \Omega_d) \\ &= (R_2, \bar{R}_2, \omega_2, \bar{\omega}_2) * (R_1\Gamma, \bar{R}_1\Gamma_d, \Gamma \times \Gamma_d - R_1\Gamma \times \bar{R}_1\Gamma_d + \omega_1 + \bar{\omega}_1 + \Omega, \Omega_d + \bar{\omega}_1) \\ &= (R_2R_1\Gamma, \bar{R}_2\bar{R}_1\Gamma_d, \Gamma \times \Gamma_d - R_2R_1\Gamma \times \bar{R}_2\bar{R}_1\Gamma_d + \omega_1 + \bar{\omega}_1 + \omega_2 + \bar{\omega}_2 + \Omega, \Omega_d + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \\ &= (R_2R_1, \bar{R}_2\bar{R}_1, \omega_1 + \omega_2, \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) * (\Gamma, \Gamma_d, \Omega, \Omega_d) \\ &= (g_2 \cdot g_1) * q \end{aligned}$$

De lo anterior, se concluye que (A.2) es una acción de G sobre $\mathcal{M}$. Luego, como $SO(3)$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{S}^2$, entonces existen R y $\bar{R}$ en $SO(3)$ tales que $R\Gamma_1 = \Gamma_2$ para un $\Gamma_2 \in \mathbb{S}^2$ y $\bar{R}\Gamma_d = \bar{\Gamma}_d$ para un $\bar{\Gamma}_d \in \mathbb{S}^2$. Por otra parte $\Gamma \times \Gamma_d - R\Gamma \times \bar{R}\Gamma_d + \omega + \tilde{\omega} + \Omega$ y $\Omega_d + \tilde{\omega}$ pertenecen a $\mathbb{R}^3$. Finalmente, se concluye que la acción (A.2) es transitiva.

□

Apéndice B

Identidades mas comunes en este trabajo

Las siguientes identidades serán de utilidad:

- $v \times u = -u \times v$ para $v, u \in \mathbb{R}^3$ (antisimetría)
- $u \times (v \times w) = v(u^T w) - w(u^T v)$ para $u, v, w \in \mathbb{R}^3$
- $u^T(v \times w) = v^T(w \times u) = w^T(u \times v)$ para $u, v, w \in \mathbb{R}^3$
- $(v^\times)^2 = vv^T - |v|^2 I$ para $v \in \mathbb{R}^3$, I es la matriz identidad.
- $(Rv)^\times = Rv^\times R^T$ para $R \in SO(3)$ y $v \in \mathbb{R}^3$
- $(v \times w)^\times = [v^\times, w^\times]$ con $v, w \in \mathbb{R}^3$ y $[\cdot, \cdot]$ el conmutador matricial
- $v^T w =< v, w >= \frac{1}{2}\langle\langle v^\times, w^\times \rangle\rangle$ con $v, w \in \mathbb{R}^3$
- $v^T v = |v|^2 = \frac{1}{2}||v^\times||^2$ con $v \in \mathbb{R}^3$
- $\langle\langle A, v^\times \rangle\rangle = 0$ para $A = A^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $v \in \mathbb{R}^3$
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ donde $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$; $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Las matrices cuadradas corresponden al caso $m = n$

Apéndice C

Definiciones algebraicas

En este apéndice se presentan las definiciones sobre grupos, anillos y campos; estas definiciones se usarán en algunos capítulos, principalmente la definición de grupo.

Definición C.1 ([57]). *Un grupo es una estructura algebraica definida por un conjunto G y una operación $*$ que satisfacen los siguientes axiomas:*

- *Cerradura, $\forall\ a,\ b \in G$ se cumple que $a * b \in G$*
- *Asociatividad, $\forall\ a,\ b,\ c \in G$ se cumple que $a * (b * c) = (a * b) * c$*
- *Elemento neutro, existe un elemento $e \in G$ tal que $a * e = a$ y $e * a = a\ \forall a \in G$*
- *Elemento inverso, $\forall a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = e$ y $a^{-1} * a = e$*

Definición C.2 ([57]). *Un grupo G es un **grupo abeliano** si además de satisfacer los axiomas de grupo, la operación $*$ conmuta, i.e. $\forall\ a,\ b \in G$ se cumple que $a * b = b * a$*

Definición C.3 ([57]). *Un anillo es un conjunto G dotado de dos operaciones llamadas suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ que satisfacen los siguientes axiomas:*

- *Forma un grupo abeliano bajo la suma*
- *La multiplicación es asociativa*
- *La multiplicación es distributiva sobre la suma, i.e. $\forall\ a,\ b,\ c \in G$ se cumple que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$*

Definición C.4 ([57]). *Un anillo se llama **anillo no conmutativo con división** si además de las propiedades del anillo se satisface lo siguiente:*

- *El elemento neutro existe para la multiplicación*
- *El elemento inverso de la multiplicación existe $\forall a \in G \setminus 0$*

Definición C.5 ([57]). *Un campo es un anillo que además de las propiedades del anillo satisface lo siguiente:*

- *La multiplicación conmuta*
- *El elemento neutro existe para la multiplicación*
- *El elemento inverso de la multiplicación existe $\forall a \in G \setminus 0$*

Bibliografía

[1] Altman, S.L., *Rotations, Quaternions and Double Groups*, Oxford University Press 1986, 312 p.

[2] Baker, A., *Matrix Groups: an introduction to Lie group theory*, Springer-Verlag 2002, 330 p.

[3] Ball, R. S., *The theory of screws: a study in the dynamics of a rigid body.* Dublin: Hodges, Foster, 1973.

[4] Bani Younes, A., Turner, J., Mortari, D., y Junkins, J., "A Survey of Attitude Error Representations", AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, 2012.

[5] Bhat, S. P. y Bernstein, D. S., "A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon," Systems and Control Letters, vol. 39, no. 1, pp. 63–70, 2000.

[6] Bohn, J. y Sanyal, A. K., "Almost global finite-time stabilization of rigid body attitude dynamics using rotation matrices," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 26, no. 9, pp. 2008–2022, 2015.

[7] Boothby, W.M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, California 2003, 419 p.

[8] Bottema, O. y Roth, B. *Theoretical kinematics.* New York: Dover Publications, 1990.

[9] Brockett, R. W., "Lie Theory and Control Systems Defined on Spheres," SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 25, no. 2, pp. 213–225, 1973.

[10] Brockett, R.W., "System theory on group manifolds and coset spaces", SIAM Journal on Control, 10(2), 265-284.

[11] Bullo, F. y Lewis, A.D., *Geometric Control of Mechanical Systems.* Springer-Verlag, New York 2004, 726 p.

[12] Bullo, F. y Murray, R. M., "Proportional derivative (PD) control on the Euclidean group". In European Control Conference, Rome, Italy, pages 1091-1097, June 1995.

[13] Bullo, F., Murray, R. y Sarti, A., "Control on the Sphere and Reduced Attitude Stabilization", IFAC Proceedings Volumes, vol. 28, no. 14, pp. 495–501, 1995.

[14] Cabecinhas, D., Cunha, R. y Silvestre, C., "Output-feedback control for almost global stabilization of fully-actuated rigid bodies", Proc. Conference on Decision and Control, pp. 3583-3588, Cancún, México, Diciembre (2008).

[15] Chaturvedi, N. A., y Mcclamroch,N. H., "Asymptotic stabilization of the hanging equilibrium manifold of the 3D pendulum," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 17, no. 16, pp. 1435–1454, 2007.

[16] Chaturvedi, N., Sanyal, A. y Mcclamroch, N., "Rigid-Body Attitude Control," IEEE Control Systems, vol. 31, no. 3, pp. 30–51, 2011.

[17] Chazin, L. G. y Snol Emmanuil, E., *Stability of critical equilibrium states*. Manchester: Manchester Univ. Press, 1991.

[18] Chen, Y.-P. y Lo, S.-C., "Sliding-mode controller design for spacecraft attitude tracking maneuvers," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 29, no. 4, pp. 1328–1333, 1993.

[19] Cunha, R., Silvestre, C. y Hespanha, J., "Output-feedback control for stabilization on $SE(3)$", Proc. Conference on Decision and Control, pp. 3825-3830, San Diego, USA, Diciembre (2006).

[20] Davila, J. y Gómez-Cortes, G., "Attitude Control of Spacecraft using Robust Backstepping Controller based on High Order Sliding Modes", AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference, 2013.

[21] Ding, S. y Li, S., "Stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with external disturbances using finite-time control techniques," American Control Conference, 2007.

[22] Edwards, C. y Spurgeon, S. K., *Sliding mode control: theory and applications*. London: Taylor and Francis, 1998.

[23] Filippov, A., *Differential equations with discontinuos right-hand sides* . Dordre ht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988.

[24] Friedberg, S.H., Insel, J.A., Spence, E.L., *Linear Algebra*, 4th ed. Prentice Hall 2003, 601 p.

[25] Goldstein, H., Poole, C., Safko, J., *Classical Mechanics*, 3rd ed. , Addison Wesley, 2002, 638 p.

[26] Gómez-Cortés, G.C., Castaños, F. y Dávila, J., "Sliding Motions on $SO(3)$, Sliding Subgroups", Proc. Conference on Decision and Control, pp. 6954-6958, Nice, France, Diciembre (2019).

[27] Gómez-Cortés, G.C., Castaños, F. y Dávila, J., "Control en la esfera $\mathbb{S}^2$ usando modos deslizantes", Congreso Nacional de Control Automático, pages 778-784, Puebla, Mexico, Octubre (2019).

[28] Gonzalez-Hernandez, I., Palacios, F. M., Cruz, S. S., Quesada, E. S. E., y Leal, R. L., "Real-time altitude control for a quadrotor helicopter using a super-twisting controller based on high-order sliding mode observer," International Journal of Advanced Robotic Systems, vol. 14, no. 1, 2017.

[29] Grubin, C., "Vector Representation of Rigid Body Rotation," American Journal of Physics, vol. 30, no. 6, pp. 416–417, 1962.

[30] Ha, J. V. D. y Shuster, M. "A Tutorial on Vectors and Attitude Focus on Education," IEEE Control Systems Magazine, vol. 29, no. 2, pp. 94–107, 2009.

[31] Hall, B. C., *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*. Cham: Springer, 2015.

[32] Hamayun, M.T., Edwards, C. and Alwi, H., Fault Tolerant Control Schemes Using Integral Sliding Modes. Springer, 2016.

[33] Heard, W. B., *Rigid body mechanics: mathematics, physics and applications*. Weinheim: Wiley, 2006.

[34] Holm, D. D., *Geometric mechanics. Rotating, Translating and Rolling*. London: Imperial College Press, 2011.

[35] Huang, L., *A concise introduction to mechanics of rigid bodies: multidisciplinary engineering*. Switzerland: Springer, 2017.

[36] Igarashi, Y., Hatanaka, T., Fujita, M. y Spong, M. W., "Passivity-based output synchronization in SE(3)," 2008 American Control Conference, 2008.

[37] Kelly, R. y Santibañez, V., Strict Lyapunov Function And Chetaev Function For Stability/instability Analysis Of The Pendulum, IFAC Proceedings Volumes, vol. 38, no. 1, pp. 187–191, (2005).

[38] Khalil, H. K. , *Nonlinear systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2014, 750 p.

[39] Klumpp, A. R., "Singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix," Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 13, no. 12, pp. 754–755, 1976.

[40] Koditschek, D. E., "The application of total energy as a Lyapunov function for mechanical control systems," Dynamics and Control of Multibody Systems Contemporary Mathematics, pp. 131–157, 1989.

[41] Kuipers, J.B., *Quaternions and Rotation Sequences*, Princeton University Press, 1999, 371 p.

[42] Lee, J.M., *Introduction to smooth manifolds*. Springer, New York 2013, 708 p.

[43] Lee, T., "Global Exponential Attitude Tracking Controls on $SO(3)$," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 60, no. 10, pp. 2837-2842, 2015.

[44] Lee, T., Leok, M. y Mcclamroch, N. H., "Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3)," 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 2010.

[45] Lefeber, E., Eijnden, S. V. D. y Nijmeijer, H., "Almost global tracking control of a quadrotor UAV on SE(3)," 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC), 2017.

[46] Li, W. y Slotine, J.J.E. *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, New Jersey 1991, 461 p.

[47] Lo, S.-C. y Chen, Y.-P., "Smooth sliding-mode control for spacecraft attitude tracking maneuvers," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 18, no. 6, pp. 1345–1349, 1995.

[48] Ma, Y., Soatto, S., Kosecka, J. y Sastry, S.S., *An Invitation to 3-D Vision: From Images to Geometric Models*, Springer-Verlag, New York 2004, 526 p.

[49] Mahony, R., Hamel, T. y Marconi, L., "Adding an integrator for output regulation of systems with matrix Lie-group states," 2015 American Control Conference (ACC), 2015.

[50] Mahony, R., Hamel, T. y Pflimlin, J.-M., "Nonlinear Complementary Filters on the Special Orthogonal Group," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 5, pp. 1203–1218, 2008.

[51] Marco, S. D., Marconi, L., Mahony, R. y Hamel, T., "Output regulation for systems on matrix Lie-groups," Automatica, vol. 87, pp. 8–16, 2018.

[52] Markley, F. L. y Crassidis, J. L., *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*. Place of publication not identified: SPRINGER, 2016.

[53] Miranda-Villatoro, F., Castaños, F. y Brogliato, B., "Continuous and discrete-time stability of a robust set-valued nested controller", Automatica, vol. 107, pp. 406-4017, (2019).

[54] Murray, R. M., Li, Z. y Sastry, S., *A mathematical introduction to robotic manipulation*. Boca Raton: CRC Press, 1994.

[55] Park, F. C., "Distance Metrics on the Rigid-Body Motions with Applications to Mechanism Design," Journal of Mechanical Design, vol. 117, no. 1, p. 48, 1995.

[56] Phillips, W. F., Hailey, C. E. y Gebert, G. A., "Review of Attitude Representations Used for Aircraft Kinematics", Journal of Aircraft, Vol. 38, No. 4 (2001), pp. 718-737.

[57] Pinter, C.C., *A Book of Abstract Algebra*, Dover ed, 2010, 384 p.

[58] Polyakov, A. y Fridman, L., "Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems", Journal of the Franklin Institute, vol. 351, no. 4, pp. 1831-1865, (2014).

[59] Pong, C. M. y Miller, D. W., "Reduced-Attitude Boresight Guidance and Control on Spacecraft for Pointing, Tracking, and Searching", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 38, no. 6, pp. 1027–1035, 2015.

[60] Sanyal, A. K., Bohn, J., y Bloch, A. M. "Almost global finite time stabilization of rigid body attitude dynamics," 52nd IEEE Conference on Decision and Control, 2013.

[61] Sanyal, A., Fosbury, A., Chaturvedi, N., y Bernstein, D. S., "Inertia-free spacecraft attitude trajectory tracking with internal-model-based disturbance rejection and almost global stabilization," 2009 American Control Conference, 2009.

[62] Sanz, R., Rodenas, L., Garcia, P., y Castillo, P., "Improving attitude estimation using inertial sensors for quadrotor control systems," 2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2014.

[63] Schaub, H. y Junkins, J. L., *Analytical Mechanics of Space Systems*, Third Edition," Apr. 2014.

[64] Shilov, G.E., *Linear Algebra*, Dover ed. 1977, 387 p.

[65] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L. y Levant, A., *Sliding Mode Control and Observation*, Birkhäuser, New York 2014, 376 p.

[66] Shuster, M.D., A Survey of Attitude Representations, Journal of the Astronautical Science, Vol. 41, pp. 439-517 (1993).

[67] Shuster, M. "The nature of the quaternion", The Journal of the Astronautical Sciences, vol. 56, no. 3, pp. 359-373, 2008.

[68] Sidi, M.J., *Spacecraft Dynamics and Control*, Cambridge University Press, 1997, 409 p.

[69] Stuelpnagel, J., On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group, SIAM Review, Vol. 6, 4, pp. 422-430 (1964).

[70] Tapp, K., *Matrix Groups for Undergraduates*, American Mathematical Society 2005, 168 p.

[71] Tewari, A., *Atmospheric and Space Flight Dynamics*, Birkhäuser, 2007, 556 p.

[72] Thornton, S. T. y Marion, J. B., *Classical dynamics of particles and systems*. Andover: Cengage Learning, 2014.

[73] Thunberg, J., Goncalves, J. y Hu, X., "Consensus and formation control on $SE(3)$ for switching topologies", Automatica, 66, pp. 109-121, (2016).

[74] Tsinias, J., "Generalizations of the Instability Theorem of Chetaev to Nonlinear Control Systems," IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 6, no. 2, pp. 151–165, 1989.

[75] Tzeren, A. , *Human body dynamics: classical mechanics and human movement.* Place of publication not identified: Springer, 2013.

[76] Utkin, V. I. *Sliding modes in control and optimization.* Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[77] Utkin, V. I., *Sliding modes and their applications in variable structure systems.* Moscow: MIR, 1978.

[78] Utkin, V., Guldner, J. y Shi, J., *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems, Second Edition*, Automation and Control Engineering, 2009.

[79] Viswanathan, S. P., Sanyal, A. K. y Warier, R. R., "Finite-time stable tracking control for a class of underactuated aerial vehicles in SE(3)", American Control Conference (ACC), (2017).

[80] Wen, J.-Y. y Kreutz-Delgado, K., "The attitude control problem," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, no. 10, pp. 1148–1162, 1991.

[81] Wertz, J.R., Spacecraft Attitude Determination and Control, Kluwer Academic Publishers, 1973, 882 p.