



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Identificación paramétrica de un servomecanismo mediante un algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado

TESIS

Que presenta

ING. ABRAHAM EDUARDO RIVERA UGALDE

Para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
CONTROL AUTOMÁTICO

Director de la Tesis:

Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma

Ciudad de México

Diciembre 2020

A mi Padre, Madre y Hermana por siempre estar a mi lado y creer en mí.

Agradecimientos

Gracias a mi Padre, ya no estas conmigo físicamente pero se que estas conmigo siempre, a mi Madre por siempre apoyarme y motivarme, a mi Hermana por siempre escucharme y alentarme, a mis Amigos Jose Luis, David y Alejandra por motivarme, alentarme, escucharme, creer en mi y por extenderme su mano cuando sentía que ya no podía más. Gracias por no dejarme solo y estar conmigo cuando estaba a punto de rendirme.

Un especial agradecimiento al Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma por creer en mi, por apoyarme, dedicar su tiempo, por su paciencia y por extenderme su mano en un momento difícil de mi vida.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología(CONACYT) por el apoyo otorgado, gracias al departamento de control automático del CINVESTAV IPN por la educación recibida.

Resumen

En el presente trabajo se realiza un análisis comparativo entre algoritmos de identificación en línea y fuera de línea en la estimación de parámetros de un servomecanismo de CD. Los algoritmos bajo estudio son los métodos Gradiente, Mínimos Cuadrados y Mínimos Cuadrados Modificado. Estos se prueban empleando mediciones obtenidas de un prototipo de laboratorio con el fin de estimar un modelo de cuatro parámetros del servomecanismo de Corriente Directa. La idoneidad de los parámetros estimados se evalúa mediante su empleo en el cálculo de una ley de control que tiene como fin el seguimiento de una trayectoria variante en el tiempo y se emplean varios índices de desempeño para llevar a cabo un estudio comparativo. Los resultados obtenidos permiten concluir que el algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado puede sintonizarse para obtener respuestas rápidas en el tiempo en comparación con los algoritmos Gradiente y de Mínimos Cuadrados, produciendo estimados que producen esencialmente el mismo desempeño en tareas de seguimiento de trayectoria comparado con los otros algoritmos bajo prueba.

Palabras clave: Servomecanismo de CD, Identificación Paramétrica, Método del Gradiente, Método de Mínimos Cuadrados, Matriz de Covarianza, Excitación Persistente, Seguimiento de trayectoria.

Abstract

The aim of this work is to perform a comparative study of several online parameter identification algorithm for estimating the parameters of DC servomechanism. The online estimation algorithms employed in the study are the Gradient, Least Squares and Modified Least Squares methods. They are tested using measurements obtained from a laboratory prototype for estimating a four-parameter model of DC servomechanism. The pertinence of the parameter estimates is assessed by using them for computing a trajectory tracking control law, and several performance indexes are used to this end to carry out a comparative study. These outcomes permit concluding that the Modified Least Squares algorithm may be tuned to obtain a faster time evolution compared with the Gradient and Least Squares algorithms while obtaining parameter estimates producing essentially the same performance when used in a tracking trajectory task than those obtained with the other algorithms under test.

Keywords: DC servomechanism, Parameter Identification, Gradient method, Least Squares method, Covariance Matrix, Persistency of Excitation, Trajectory tracking.

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen	IV
1. Introducción	1
1.1. Objetivo	2
1.2. Metas principales	3
1.3. Estructura del documento	3
2. Algoritmos de identificación paramétrica	4
2.1. Introducción	4
2.2. Algoritmo Gradiente	5
2.3. Algoritmo de Mínimos Cuadrados (MC)	6
2.4. Algoritmo de Mínimos Cuadrado con Factor de Olvido (MCFO)	8
2.5. Algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado (MCM)	10
3. Modelado matemático de un servomecanismo de CD	14
3.1. Modelo matemático de un servomecanismo de CD de 4 parámetros	14
3.2. Parametrización y filtrado	16
3.3. Construcción del regresor lineal del modelo filtrado	17
3.3.1. Algoritmo de Mínimos Cuadrados Fuera de Línea (MC_{FL})	18
4. Identificación del modelo de un servomecanismo de CD: Experimentos en tiempo real	19
4.1. Configuración experimental del equipo del laboratorio	19
4.2. Estabilización del servomecanismo	20
4.3. Experimentos en tiempo real	21
4.3.1. Algoritmo de Mínimos Cuadrados Fuera de Línea (MC_{FL})	21
4.3.2. Algoritmo Gradiente	22
4.3.3. Algoritmo de Mínimos Cuadrados (MC)	23
4.3.4. Algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado (MCM)	24
4.3.5. Comparación de los estimados obtenidos con los algoritmos de identificación	27
4.4. Análisis de desempeño producido por los parámetros estimados obtenidos por los algoritmos de identificación paramétrica	30

5. Conclusiones y trabajo futuro	33
5.1. Conclusiones finales	33
5.2. Trabajo Futuro	34
Bibliografía	35

Lista de Figuras

3.1.	Diagrama a bloques del servomecanismo de CD.	16
3.2.	Esquema de obtención para señales filtradas donde $f_1, f_2 > 0$	17
4.1.	Configuración empleada en los experimentos.	20
4.2.	Diagrama de bloques del servomecanismo en el lazo cerrado con el controlador PRT (4.1). Los filtros se muestran en la Figura 3.2.	21
4.3.	Estimados obtenidos con el algoritmo Gradiente.	23
4.4.	Estimados algoritmo Mínimos Cuadrados.	24
4.5.	Estimados obtenidos mediante el algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado ($\beta = 0.5$ y $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0\}$).	26
4.6.	Estimados obtenidos mediante el algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado ($\beta = 1.0$ y $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0, 100.0\}$)	28
4.7.	Comparación de estimados obtenidos por los algoritmos de identificación. . .	29
4.8.	Señales de Referencia y Salida correspondientes al seguimiento de trayectoria con los parámetros estimados.	31
4.9.	Señales de control correspondientes al seguimiento de trayectoria con los parámetros estimados.	32
4.10.	Señales de error de posición correspondientes al seguimiento de trayectoria con los parámetros estimados.	32

Lista de Tablas

3.1. Parámetros del diagrama a bloques del amplificador de potencia mostrados en la Figura 3.1.	15
3.2. Variables y parámetros del diagrama a bloques del motor de CD mostrados en la Figura 3.1.	15
4.1. Resultados experimentales de la identificación paramétrica del Motor 2 con el algoritmo MC_{FL}	22
4.2. Resultados experimentales de la identificación paramétrica del Motor 2 con el algoritmo Gradiente ($\Gamma = 25$).	22
4.3. Estimados de 4 parámetros obtenidos con el Algoritmo de Mínimos Cuadrados.	24
4.4. Estimados de 4 parámetros obtenidos con el Algoritmo MCM ($\beta = 0.5$ y $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0\}$)	25
4.5. Estimados de 4 parámetros obtenidos con el Algoritmo MCM ($\beta = 1.0$ y $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0, 100.0\}$)	27
4.6. Comparación de los 4 de estimados obtenidos por los algoritmos de identificación paramétrica	29
4.7. Tablas de índices de desempeño.	31

Capítulo 1

Introducción

En años recientes, la actividad en el campo de la automatización ha aumentado debido a que los fabricantes exigen un mejor rendimiento en el control de los servomecanismos los cuales son parte importante de muchos procesos de manufactura. La selección adecuada de un servomecanismo para desempeñar una función en específico en la industria es un elemento clave para lograr un control tanto en posición como en velocidad. Los servomecanismos son importantes en la industria con una gran variedad de aplicaciones en el área de la robótica, en el campo de las telecomunicaciones, en el control de posicionamiento de antenas, en domótica, en los sistemas de corte de metal y madera o en el Control Numérico Computarizado (CNC) debido a que se requiere un alto grado de precisión y exactitud. También se aplican en los sistemas de seguimiento solar, en los vehículos autónomos o en cualquier sistema donde se requiera un control preciso en posición y velocidad [1]. Algunas de las ventajas en los servomecanismos basados en motores de Corriente Directa (CD) son su bajo costo, su confiabilidad y su fácil mantenimiento, haciéndolos ampliamente utilizados. Además, es posible aplicarles diversas técnicas de control en posición y velocidad [2, 3]. El objetivo de control en un servomecanismo es asegurar que el motor siga una cierta referencia constante o variable en el tiempo con la mejor precisión posible [4]. Para aplicar una ley de control en posición se requiere un sensor que permita medir la posición angular o lineal del motor de CD.

Comúnmente el algoritmo de control más utilizado para tareas de posicionamiento en un servomecanismo de CD es la ley Proporcional Integral Derivativa (PID) [3, 5], pero existe una gran variedad de algoritmos que se pueden aplicar para cumplir dicha tarea como leyes de control adaptable [6], leyes de control basadas en Lógica Difusa [7], control por Modos Deslizantes [8], control H_∞ [9] o una ley de control digital robusta [10], por mencionar algunas. En el diseño de controladores para servomecanismos se deben tener en cuenta la magnitud y las variaciones que tiene señal de entrada cuando se aplica una ley de control, el error en estado estacionario, el error de seguimiento y el efecto de las perturbaciones [11]. En el caso donde se ocupan controladores basados en el modelo matemático de un servomecanismo también es necesario identificar los parámetros de su modelo.

La identificación de parámetros o estimación paramétrica es un tema importante en la teoría de Control Automático. Es una herramienta para el desarrollo de algoritmos de con-

trol basados en modelos matemáticos de una planta o un sistema dinámico. Los métodos de identificación de parámetros se pueden clasificar como métodos de estimación en línea y fuera de línea, cada uno de ellos presentando ventajas y desventajas. El método de estimación paramétrica en línea es uno de los más utilizados y es un componente clave para el diseño de controladores adaptables [12]. La identificación paramétrica se realiza mediante la minimización de una función dependiente del error entre las salidas medibles del modelo y del proceso. Los métodos de identificación más utilizados son el algoritmo Gradiente [13, 14, 15] y el de Mínimos Cuadrados. Este último se puede implementar tanto en línea como fuera de línea [13, 14, 16, 12, 17]. Un aspecto importante que se debe considerar en el proceso de la identificación paramétrica es el concepto de Excitación Persistente, el cual se describirá en el Capítulo 2.

Los algoritmos de identificación minimizan un criterio de desempeño que es función del error de predicción definido por la diferencia entra la salida estimada mediante un modelo y la salida medida del sistema a identificar. El algoritmo Gradiente [18, 19] es el más simple de implementar y consiste en minimizar el error de predicción instantáneo. La desventaja que presenta es que puede tener un tiempo mayor de convergencia. El principio en el cual se base el algoritmo de Mínimos Cuadrados [20, 21, 22] es el de minimizar la integral del error de predicción cuadrático. Una de sus desventajas es que la matriz de covarianza, la cual corresponde a la ganancia de adaptación, pierde rango bajo condiciones de Excitación Persistente lo que impide la estimación paramétrica después de que transcurre un periodo de tiempo.

Existe una alternativa para contrarrestar esta desventaja presente en el algoritmo de Mínimos Cuadrados como es la implementación de un factor de olvido [13, 14] el cual evita que la matriz de covarianza pierda rango. Otra variación del algoritmo de Mínimos Cuadrados es el algoritmo de los Mínimos Cuadrados de Distancias Ortogonales (MCDO) [23]. Este método, el cual es fuera de línea, toma en cuenta los errores tanto en la variable independiente como en la dependiente.

Una de las propuestas de este trabajo es implementar un algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado para la estimación de los parámetros de un servomecanismo de CD. Se inspira en el algoritmo de Mínimos Cuadrados con Factor de Olvido al cual se le añade un término constante a la ecuación diferencial que genera a la matriz de covarianza lo que permite establecer varias propiedades de convergencia en el error de identificación, en la estimación de los parámetros y en el cálculo de la matriz de covarianza. Este algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado fue propuesto por Wu [24] y no se ha reportado su empleo utilizando experimentos en tiempo real.

1.1. Objetivo

Aplicar tres algoritmos de identificación paramétrica en línea en un servomecanismo de CD mediante experimentos en tiempo real con la finalidad de realizar una comparación en los parámetros estimados obtenidos y su velocidad de convergencia entre algoritmos. Con esta información se realizar análisis comparativo de desempeño entre los parámetros estimados obtenidos mediante la implementación de un controlador por seguimiento de trayectoria.

1.2. Metas principales

- i - Aplicar los algoritmos en línea Gradiente, Mínimos Cuadrados y Mínimos Cuadrados Modificado para estimar los parámetros un modelo de cuatro parámetros de un servomecanismo de CD.
- ii – Comparar los resultados obtenidos con los algoritmos en línea con aquellos obtenidos con un algoritmo de Mínimos Cuadrados fuera de línea.
- iii - Implementar los algoritmos propuestos en una plataforma experimental y realizar experimentos en tiempo real.
- iv - Hacer un análisis de desempeño de los parámetros estimados obtenidos por los algoritmos de identificación mediante la implementación de un controlador por seguimiento de trayectoria.

1.3. Estructura del documento

Este trabajo de tesis se encuentra dividido en cinco capítulos constituidos de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se presentan algoritmos de identificación de paramétrica utilizados.

En el Capítulo 3 se da una descripción general del modelo matemático de un servomecanismo de CD, el filtrado de las señales disponibles a través de mediciones y la construcción de su regresión lineal.

El Capítulo 4 describe la plataforma experimental utilizada para la obtención de los parámetros. Se presentan los experimentos realizados en tiempo real al utilizar los algoritmos de identificación descrito en el Capítulo 2 y el análisis comparativo entre los resultados obtenidos. Se muestra también un análisis de desempeño obtenido al emplear los parámetros estimados en el diseño de una ley de control para seguimiento de trayectoria.

Finalmente, el Capítulo 5 presenta las conclusiones de este trabajo de tesis y el trabajo futuro a desarrollar.

Capítulo 2

Algoritmos de identificación paramétrica

En este capítulo se mostrarán algunos de los algoritmos de identificación paramétrica hallados en la literatura tales como el algoritmo Gradiente, Mínimos Cuadrados, Mínimos cuadrados con Factor de Olvido y la propuesta de un algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado.

2.1. Introducción

Los métodos de identificación paramétrica son utilizados para obtener parámetros estimados de modelos de sistemas dinámicos lineales y no lineales. La identificación se puede realizar tanto en línea como fuera de línea. La identificación fuera de línea es preferible cuando existe suficiente tiempo para ejecutarla y suponiendo que los parámetros a estimar son constantes. Por otro lado, la estimación en línea permite mantener un seguimiento de los parámetros mientras éstos cambian durante la operación del sistema [13, 14].

Existe una variedad de algoritmos de identificación, en el caso de este trabajo se utilizan los siguientes

- Algoritmo Gradiente
- Algoritmo de Mínimos Cuadrados (MC)
- Algoritmo de Mínimos Cuadrados con Factor de Olvido (MCFO)
- Algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado (MCM)

Para comenzar el estudio de los algoritmos de identificación es necesario definir un modelo compuesto por las señales del sistema que son medibles a través de sensores o estimadas por un proceso de filtrado; este es conocido como **modelo de regresión** y es mostrado a continuación

$$z = \phi^\top \theta = \phi_1 \theta_1 + \phi_2 \theta_2 + \phi_3 \theta_3 + \cdots + \phi_n \theta_n \quad (2.1)$$

donde z es una variable independiente de los parámetros a estimar y se considera la variable de salida, $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n]^\top$ es el **vector paramétrico** compuesto por parámetros desconocidos y $\phi^\top = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n]$ se conoce como el vector **regresor** compuesto por las señales medibles y es dependiente del tiempo t . Notar que z no necesariamente corresponde a la salida del sistema.

El **error de predicción** o **error de estimación** está compuesto por la diferencia entre la salida estimada \hat{z} y la salida medida z definido de la siguiente manera

$$e = \hat{z} - z = \phi^\top \hat{\theta} - \phi^\top \theta = \phi^\top \tilde{\theta} = \tilde{\theta}^\top \phi \quad (2.2)$$

donde $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ se define como el error de estimación paramétrica.

2.2. Algoritmo Gradiente

El algoritmo Gradiente es el método de estimación más sencillo de los estudiados en este trabajo. Su objetivo es minimizar el **índice de desempeño** ó **función de costo** J definido a continuación

$$J = e^2 \quad (2.3)$$

donde e es el error de predicción (2.2).

La minimización se ejecuta mediante la actualización de los parámetros estimados $\hat{\theta}$. Esto se realiza mediante el cálculo del gradiente con respecto a los parámetros estimados, es decir

$$\dot{J} = \frac{\partial(e^2)}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (2.4)$$

Para minimizar índice de desempeño es necesario que \dot{J} sea negativo, por lo que se elije a $\dot{\hat{\theta}}$, como

$$\dot{\hat{\theta}} = -K \frac{\partial(e^2)}{\partial \hat{\theta}} \quad , \quad K > 0 \quad (2.5)$$

donde $K \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es constante.

Sustituyendo la ecuación (2.5) en la ecuación (2.4) se obtiene

$$\dot{J} = -K \left(\frac{\partial(e^2)}{\partial \hat{\theta}} \right)^2 \quad (2.6)$$

Se sabe que el gradiente del error de estimación (2.2) con respecto a los parámetros estimados es

$$\frac{\partial(e)}{\partial \hat{\theta}} = \phi$$

Por lo tanto, el gradiente del error de estimación cuadrático se calcula como se muestra a continuación

$$\frac{\partial(e^2)}{\partial\hat{\theta}} = 2e \frac{\partial(e)}{\partial\hat{\theta}} = 2e\phi \quad (2.7)$$

De la ecuación (2.5) y la ecuación (2.7), se obtiene

$$\dot{\hat{\theta}} = -2K\phi e = -\Gamma\phi e; \quad \Gamma = 2K > 0 \quad (2.8)$$

La matriz $\Gamma \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es constante positiva definida y se denomina ganancia de estimación. Finalmente, la ecuación (2.8) corresponde al algoritmo Gradiente.

2.3. Algoritmo de Mínimos Cuadrados (MC)

El algoritmo de Mínimos Cuadrados fue propuesto a finales del siglo XVIII por Karl Friedrich Gauss y fue utilizado para estimar la órbita entre planetas y asteroides. Este método minimiza la suma de los cuadrados de la diferencia entre los valores observados actuales y los calculados [13].

El algoritmo de MC [13, 14, 12] se genera mediante la minimización del error de predicción total y puede ser aplicado a una larga variedad de problemas ya que cuenta con una mejor convergencia de estimación en comparación con el algoritmo Gradiente. La función de costo del algoritmo de MC dependiente del error de predicción (2.2) está dada por

$$J = \int_0^t e(\tau)^2 d\tau = \int_0^t \left(\phi^\top(\tau)\hat{\theta}(t) - z(\tau) \right)^2 d\tau \quad (2.9)$$

Derivando parcialmente con respecto a $\hat{\theta}$ la ecuación (2.9) e igualando a cero se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \left[\int_0^t \left(\phi^\top(\tau)\hat{\theta}(t) - z(\tau) \right)^2 d\tau \right] &= 0 \\ 2 \int_0^t \phi(\tau) \left(\phi^\top(\tau)\hat{\theta}(t) - z(\tau) \right) d\tau &= 0 \end{aligned}$$

Realizando las operaciones indicadas por el paréntesis dentro de la integral y usando la propiedad de separación de la suma y resta de integral se obtiene

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \left[\phi(\tau)\phi^\top(\tau)\hat{\theta}(t) - \phi(\tau)z(\tau) \right] d\tau &= 0 \\ 2 \int_0^t \left[\phi(t)\phi^\top(\tau)d\tau \right] \hat{\theta}(t) - 2 \int_0^t \left(\phi(t)z(\tau) \right) d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

y despejando de la ecuación (2.10) la variable $\hat{\theta}(t)$ para así calcular los estimados se obtiene

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t \phi(\tau)\phi^\top(\tau)d\tau \right] \hat{\theta}(t) &= \int_0^t \phi(\tau)z(\tau)d\tau \\ \hat{\theta}(t) &= P(t) \int_0^t \phi(\tau)z(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $P(t) \triangleq \left[\int_0^t \phi(\tau)\phi^\top(\tau)d\tau \right]^{-1}$ se denomina matriz de covarianza. Un requisito necesario para que exista la inversa de $\hat{P}(t)$ es que se cumpla la condición de Excitación Persistente (EP) que garantiza la convergencia de los parámetros estimados a sus valores reales, La condición de EP considera que existen constantes α_0, α_1 y $T_0 > 0$ tales que para cualquier $t \geq 0$, se cumple

$$\alpha_1 I \geq \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \phi(\tau)\phi^\top(\tau)d\tau \geq \alpha_0 I \quad (2.12)$$

Para conocer el cambio de $P(t)$ con respecto al tiempo es necesario derivar $P(t)^{-1}$ de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [P(t)^{-1}] &= \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \phi(\tau)\phi^\top(\tau)d\tau \right] \\ &= \phi\phi^\top \end{aligned} \quad (2.13)$$

asumiendo $\phi(0) = 0$ y suponiendo que la inversa de P existe y tomando en cuenta que $PP^{-1} = I$, se puede obtener \dot{P}

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} [PP^{-1} - I] \\ 0 &= \dot{P}P^{-1} + P \frac{d}{dt} [P^{-1}] \\ -\dot{P}P^{-1} &= P \frac{d}{dt} [P^{-1}] \\ \dot{P} &= -P\phi\phi^\top P; \quad P(0) > 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

derivando con respecto al tiempo (2.11) y usando las ecuaciones (2.2) y (2.14) se obtiene el cambio de $\hat{\theta}$ respecto al tiempo, i.e.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= \frac{d}{dt} \left[P(t) \int_0^t \phi(\tau)z(\tau)d\tau \right] \\ &= \dot{P} \int_0^t \phi(\tau)z(\tau)d\tau + P\phi(\tau)z(\tau) \\ &= -P\phi\phi^\top P \int_0^t \phi(\tau)z(\tau)d\tau + P\phi z \\ &= -P\phi \left[\phi^\top P \int_0^t \phi(\tau)z(\tau)d\tau - z(\tau) \right] \\ &= -P\phi \left[\phi^\top \hat{\theta} - z(\tau) \right] \\ &= -P\phi e \end{aligned} \quad (2.15)$$

Finalmente, las ecuaciones siguientes corresponden al algoritmo de Mínimos Cuadrados

$$e = \phi^\top \hat{\theta} - z \quad (2.13)$$

$$\dot{P} = -P\phi\phi^\top P; \quad P(0) > 0 \quad (2.14)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -P\phi e \quad (2.15)$$

Es importante notar que P se debe inicializar tal que $P(0) \gg 0$ y por simplicidad puede ser diagonal.

2.4. Algoritmo de Mínimos Cuadrado con Factor de Olvido (MCFO)

El algoritmo de Mínimos Cuadrados con Factor de Olvido es una técnica muy útil para la estimación de parámetros de sistemas variantes en el tiempo. En comparación con el algoritmo de MC, el algoritmo MCFO tiene un error de estimación menor debido a que evita que la matriz de covarianza pierda rango mientras evoluciona con respecto al tiempo, algo que sí sucede con el algoritmo MC sin factor de olvido (2.13)-(2.15). La idea principal del MCFO es dar menos peso a las estimaciones pasadas y dar más importancia a las estimaciones recientes. El factor de olvido se incorpora en la función de costo del algoritmo de MC mediante una función exponencial que representa un peso sobre la estimación, siendo el criterio de minimización del MCFO el siguiente

$$J = \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \left(\phi^\top(\tau) \hat{\theta}(t) - z(\tau) \right)^2 d\tau \quad (2.16)$$

donde el parámetro $\beta \geq 0$ es el factor de olvido, derivando parcialmente con respecto a $\hat{\theta}$ la ecuación (2.16) e igualando a cero se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left[\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \left(\phi^\top(\tau) \hat{\theta}(t) - z(\tau) \right)^2 d\tau \right] &= 0 \\ 2 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \left(\phi^\top(\tau) \hat{\theta}(t) - z(\tau) \right) d\tau &= 0 \end{aligned}$$

realizando las operaciones indicadas por el paréntesis dentro de la integral y usando la propiedad de separación de la suma y resta de integral se obtiene

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \left[e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^\top(\tau) \hat{\theta}(t) - e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) \right] d\tau &= 0 \\ 2 \left[\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(t) \phi^\top(\tau) d\tau \right] \hat{\theta}(t) - 2 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

A partir de la ecuación (2.17) se despeja la variable $\hat{\theta}(t)$ para realizar un cálculo directo de los estimados

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^\top(\tau) d\tau \right] \hat{\theta}(t) &= \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau \\ \hat{\theta}(t) &= P(t) \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde $P(t) \triangleq \left[\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^\top(\tau) d\tau \right]^{-1}$. De la misma forma que el algoritmo de MC, se debe cumplir con la condición de EP (2.12) y se supone que existe la inversa de $P(t)$. Para conocer el cambio de $P(t)$ con respecto al tiempo se deriva $P(t)^{-1}$ obteniéndose

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [P(t)^{-1}] &= \frac{d}{dt} \left[\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^\top(\tau) d\tau \right] \\
&= \phi \phi^\top + \int_0^t \frac{d}{dt} \left[e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^\top(\tau) d\tau \right] \\
&= \phi \phi^\top - \beta \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^\top(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

donde $P^{-1} = \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^\top(\tau) d\tau$. Esta expresión se sustituye en la igualdad anterior para obtener

$$\frac{d}{dt} [P(t)^{-1}] = \phi \phi^\top - \beta P^{-1} \quad (2.19)$$

Tomando en cuenta la ecuación (2.14) se tiene que $\frac{d}{dt} [P(t)^{-1}] = -P^{-1} \dot{P} P^{-1}$. Igualando esta última identidad con (2.19) permite obtener \dot{P}

$$\begin{aligned}
-P^{-1} \dot{P} P^{-1} &= \phi \phi^\top - \beta P^{-1} \\
\dot{P} &= \beta P - P \phi \phi^\top P; \quad P(0) > 0
\end{aligned} \quad (2.20)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación (2.18) produce

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\theta}} &= \frac{d}{dt} \left[P(t) \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau \right] \\
&= P \frac{d}{dt} \left[\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau \right] + \dot{P} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau \\
&= P \left[\phi z - \beta \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau \right] + \dot{P} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau \\
&= P \phi z + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau \left[\dot{P} - \beta P \right].
\end{aligned} \quad (2.21)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.2), (2.18) y (2.20) en la ecuación (2.21) finalmente conlleva al siguiente resultado

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\theta}} &= P \phi z + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau \left[\beta P - P \phi \phi^\top P - \beta P \right] \\
&= P \phi z - P \phi \phi^\top P \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) z(\tau) d\tau \\
&= P \phi z - P \phi \phi^\top \hat{\theta} \\
&= P \phi \left[z - \phi^\top \hat{\theta} \right] \\
&= -P \phi \left[\phi^\top \hat{\theta} - z \right] \\
&= -P \phi e
\end{aligned} \quad (2.22)$$

Finalmente, las ecuaciones siguientes corresponde al algoritmo de Mínimos Cuadrados con Factor de Olvido son

$$e = \phi^\top \hat{\theta} - z \quad (2.19)$$

$$\dot{P} = \beta P - P\phi\phi^\top P; \quad P(0) > 0 \quad (2.20)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -P\phi e \quad (2.22)$$

Un dato importante es que si la matriz P no está acotada o si su magnitud es grande se pueden ocasionar oscilaciones en la estimación de los parámetros. Además, si el factor de olvido es igual a cero el algoritmo MCFO se reduce al algoritmo de MC estándar y pierde su capacidad de seguimiento de parámetros variantes en el tiempo en presencia de EP. Por otro lado, un factor de olvido constante y positivo conlleva a una ganancia no acotada en ausencia de EP.

2.5. Algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado (MCM)

El algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado (MCM) [24] agrega un término constante μ a la ecuación correspondiente a la matriz de covarianza del algoritmo de MCFO (2.20). Cuando el regresor se encuentra acotado y se satisface la condición de EP (2.12) el algoritmo de MCM atenúa la influencia de perturbaciones acotadas y el cambio en los parámetros a estimar en un sistema variante en el tiempo de una manera efectiva, sin ningún conocimiento previo de las cotas superiores de los parámetros y de las perturbaciones.

Considérese el siguiente modelo de regresión lineal [25] con parámetros variantes en el tiempo y perturbaciones acotadas

$$z(t) = \phi^\top(t)\theta(t) + w(t) \quad (2.23)$$

donde, al igual que el modelo de regresión (2.1), $z(t)$ es una variable independiente de los parámetros a estimar, $\phi(t)$ es el vector regresor, $\theta(t)$ el vector paramétrico y $w(t)$ es una señal acotada desconocida debido al ruido o al error de modelado.

Supongan se las siguientes hipótesis para el algoritmo de MCM

H.1. $\|\dot{\theta}(t)\| \leq \varepsilon$, donde $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$.

H.2. $\|\theta(t)\| \leq M$, donde $M \in \mathbf{R}^+$.

H.3. $\|w(t)\| \leq d_0$, donde $d_0 \in \mathbf{R}^+$.

H.4. $\|\phi(t)\|^2 \leq \beta_1$ donde $\beta_1 \in \mathbf{R}^+$ y $\phi(t)$ satisface la condición de EP (2.12)

Se define al algoritmo de MCM de la siguiente forma

$$e = z - \phi^\top \hat{\theta} = -\phi^\top \tilde{\theta} + w(t) \quad (2.24)$$

$$\dot{P} = \beta P - P\phi\phi^\top P + \mu I; \quad P(0) = P_0 = P_0^\top > 0 \quad (2.25)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -P\phi e \quad (2.26)$$

donde, e es el error de predicción (2.2), $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ es el error de estimación paramétrica, P es la matriz de covarianza, $\beta > 0$ el factor de olvido y $\mu > 0$ es una constante de diseño.

A partir de la ecuación (2.14) se sabe que $\dot{P} = -P \frac{d}{dt} [P^{-1}] P$. Sustituyendo esta igualdad en la ecuación (2.25) y tomando en cuenta que $PP^{-1} = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} -P \frac{d}{dt} [P^{-1}] P &= \beta P - P\phi\phi^\top P + \mu PP^{-1} \\ P \frac{d}{dt} [P^{-1}] P &= -\beta P + P\phi\phi^\top P - \mu PP^{-1} \\ \frac{d}{dt} [P^{-1}] &= -\beta P^{-1} + \phi\phi^\top - \mu(P^{-1})^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Se define $R = P^{-1}$ y sustituyendo R en la ecuación (2.27) se tiene

$$\dot{R} = \frac{d}{dt} [P^{-1}] = -\beta R + \phi\phi^\top - \mu R^2, \quad R(0) = R_0 > 0 \quad (2.28)$$

y considerando que $\mu > 0$ resulta

$$\dot{R}(t) = -\beta R + \phi\phi^\top - \mu R^2 \leq -\beta R + \phi\phi^\top \quad (2.29)$$

De acuerdo al principio de comparación¹ se obtiene

$$R(t) \leq e^{-\beta t} R_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau)\phi^\top(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

donde $R_0 = R(0)$. Defínase a $z \in \mathcal{R}^n$; $\|z\| = 1$ entonces

$$\begin{aligned} z^\top R(t) z &\leq e^{-\beta t} z^\top R_0 z + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} z^\top \phi(\tau)\phi^\top(\tau) z d\tau \\ &\leq \left(\lambda_{\max}(R_0) + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} (z^\top \phi(\tau))^2 d\tau \right) z^\top z \end{aligned} \quad (2.31)$$

Si $\phi(t)$ esta acotada, i.e. $\|\phi(t)\| \leq \beta_1$ se obtiene la cota superior siguiente

$$\begin{aligned} e^{-\beta(t-\tau)} (z^\top \phi(\tau))^2 &\leq e^{-\beta(t-\tau)} \|z\|^2 \|\phi(\tau)\|^2 \\ &\leq e^{-\beta(t-\tau)} \beta_1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

¹El **principio de comparación**[26] permite conocer los límites de la solución de una ecuación diferencial $\dot{u} = f(t, u)$ mediante la comparación de la desigualdad diferencial $\dot{v}(t) \leq f(t, v(t))$ con la solución de la ecuación diferencial $\dot{u} = f(t, u)$. La derivada superior derecha $D^+v(t)$ de una función escalar diferenciable $v(t)$ satisface la desigualdad diferencial de la forma $\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)) \quad \forall t$ en un intervalo de tiempo.

Considerando la desigualdad (2.32)² y aplicándola en la desigualdad (2.31) se tiene

$$\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} (z^\top \phi(\tau))^2 d\tau \leq \beta_1 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} d\tau = \beta_1 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} d\tau z^\top z \quad (2.33)$$

Así, la desigualdad (2.31) es equivalente a

$$R(t) \leq R_0 + \beta_1 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} d\tau I \leq \lambda_{\max}(R_0)I + \frac{\beta_1}{\beta}I = \gamma_2 I \quad (2.34)$$

Entonces, $R(t)$ está acotado y su cota superior es $\gamma_2 = \lambda_{\max}(R_0) + \frac{\beta_1}{\beta}$ donde $\lambda_{\max}R_0$ es el valor propio más grande de R_0 .

El resultado anterior permite acotar la ecuación (2.28) de la siguiente manera

$$\dot{R}(t) = -\beta R + \phi\phi^\top - \mu R^2 \geq -\beta R + \phi\phi^\top - \mu\gamma_2 R \quad (2.35)$$

Usando el principio de comparación se obtiene

$$R(t) \geq e^{-\beta_2 t} R_0 + \int_0^t e^{-\beta_2(t-\tau)} \phi(\tau)\phi^\top(\tau) d\tau \quad (2.36)$$

donde se define a $\beta_2 = \beta + \mu\gamma_2$. Entonces

$$\begin{aligned} R(t) &\geq e^{-\beta_2 t} R_0 + \int_0^t e^{-\beta_2(t-\tau)} \phi(\tau)\phi^\top(\tau) d\tau \\ &= e^{-\beta_2 t} R_0 + \int_{t-T_0}^t e^{-\beta_2(t-\tau)} \phi(\tau)\phi^\top(\tau) d\tau + \int_0^{t-T_0} e^{-\beta_2(t-\tau)} \phi(\tau)\phi^\top(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.37)$$

Se considera el caso donde $t \geq T_0$ para así conocer la cota inferior de $R(t)$. A partir de la desigualdad (2.37) y considerando el segundo término y considerando el vector unitario z como en el caso de la desigualdad (2.31) permite la obtención de la siguiente desigualdad

$$R(t) \geq \int_{t-T_0}^t e^{-\beta_2(t-\tau)} z^\top \phi(\tau)\phi^\top(\tau) z d\tau \quad (2.38)$$

La siguiente desigualdad

$$e^{-\beta_2 T_0} \leq e^{-\beta_2(t-\tau)}; \quad t - T_0 \leq \tau \leq t \quad (2.39)$$

permite establecer

$$\int_{t-T_0}^t e^{-\beta_2 T_0} z^\top \phi(\tau)\phi^\top(\tau) z d\tau \leq \int_{t-T_0}^t e^{-\beta_2(t-T_0)} z^\top \phi(\tau)\phi^\top(\tau) z d\tau \quad (2.40)$$

Tomando en cuenta la condición de EP (2.12) en (2.40) del regresor $\phi(t)$ se obtiene

$$\alpha_0 T_0 e^{-\beta_2 T_0} \leq \int_{t-T_0}^t e^{-\beta_2(t-T_0)} z^\top \phi(\tau)\phi^\top(\tau) z d\tau \quad (2.41)$$

²Sea $f(x)$, $g(x)$ dos funciones reales, si $f(x) \leq g(x)$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Que es equivalente a

$$\alpha_0 T_0 e^{-\beta_2 T_0} I \leq \int_{t-T_0}^t e^{-\beta_2(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^\top(\tau) d\tau \quad (2.42)$$

Por otro lado, en el caso $t < T_0$ a partir de la desigualdad (2.37) y tomando el primer término produce la siguiente desigualdad

$$R(t) \geq e^{-\beta_2 t} R_0 \geq e^{-\beta_2 T_0} R_0 \geq \lambda_{\min}(R_0) e^{-\beta_2 T_0} I \quad (2.43)$$

Las condiciones de (2.41) y (2.43) implican que

$$R(t) \geq \gamma_1 I \quad (2.44)$$

donde $\gamma_1 = e^{-\beta_2 T_0} \min [\alpha_0 T_0, \lambda_{\min}(R_0)]$ denota la cota inferior de $R(t)$ para todo $t \geq 0$. A partir de lo anterior se puede concluir que la cota inferior y la cota superior son $\gamma_1 I \leq R(t) \leq \gamma_2 I$ para $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, por lo tanto $\gamma_1^{-1} I \leq P(t) \leq \gamma_2^{-1} I$.

Un dato importante a resaltar es que si la constante de diseño es $\mu = 0$, el algoritmo de MCM se reduce a un algoritmo de MCFO.

Capítulo 3

Modelado matemático de un servomecanismo de CD

En este capítulo se mostrará el modelo matemático de un servomecanismo de Corriente Directa con 4 parámetros y la construcción del regresor lineal para la aplicación de los algoritmos de identificación en línea del Gradiente, Mínimos Cuadrados y Mínimos Cuadrados Modificado. Para esto es necesario un proceso de filtrado en la señal de posición angular del motor de CD del servomecanismo para estimar la velocidad y la aceleración angulares debido a que éstas no se encuentran disponibles.

3.1. Modelo matemático de un servomecanismo de CD de 4 parámetros

El servomecanismo está constituido por un motor de Corriente Directa (CD) que tiene acoplado un disco de latón, un amplificador de potencia y un sensor de posición. La Figura 3.1 muestra un diagrama de bloques representando el modelo matemático del servomecanismo [27, 28, 29, 30]. El amplificador de potencia funciona en modo corriente, es decir, se usa un control proporcional integral (PI) en lazo cerrado en el amplificador empleando como realimentación la corriente de armadura del motor i_a . Los parámetros definidos en el amplificador de potencia son las siguientes

Parámetros	Símbolo
Voltaje de control	u
Ganancia de entrada	K_E
Ganancia proporcional	K_p
Ganancia integral	K_i
Ganancia del lazo de corriente	K_C
Ganancia del amplificador	K_A

Tabla 3.1: Parámetros del diagrama a bloques del amplificador de potencia mostrados en la Figura 3.1.

Las variables y los parámetros definidos en el motor de CD son

Variables y parámetros	Símbolo
Voltaje aplicado al motor	v
Resistencia de armadura	R_a
Inductancia de la armadura	L_a
Constante de par	K_τ
Constante de fuerza contra electromotriz	K_{FEM}
Inercia	J
Constante de fricción viscosa	B
Constante de fricción de Coulomb	μ
Corriente de armadura	i_a
Perturbación constante	τ_d
Señal de entrada	u
Velocidad angular	\dot{y}
Posición angular	y

Tabla 3.2: Variables y parámetros del diagrama a bloques del motor de CD mostrados en la Figura 3.1.

La inercia del servomecanismo J se determina como

$$J = J_m + J_d + J_e$$

donde J_m corresponde a las inercias del motor, J_d del disco de latón y J_e del sensor de posición. La perturbación constante τ_d se debe a voltajes parásitos constantes producidos dentro del amplificador de potencia.

La siguiente expresión describe el modelo matemático del servomecanismo de CD

$$J\ddot{y} + B\dot{y} + \mu\text{sign}(\dot{y}) = Ku + \tau_d \quad (3.1)$$

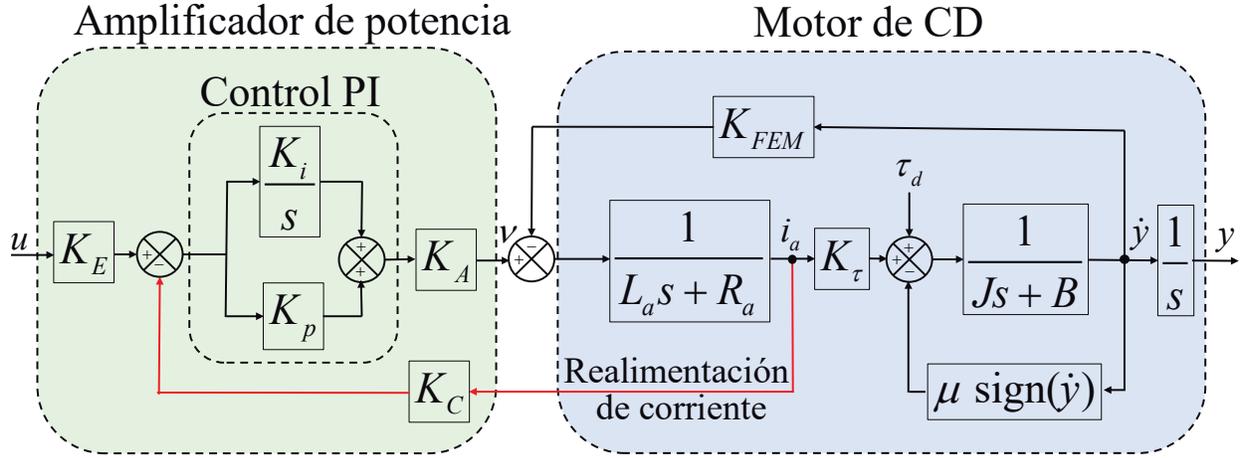


Figura 3.1: Diagrama a bloques del servomecanismo de CD.

donde y , \dot{y} y \ddot{y} representan la posición angular, la velocidad y la aceleración del servomecanismo y $K = (K_E K_\tau) / K_C$.

La ecuación (3.1) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\ddot{y} + a\dot{y} + c\text{sign}(\dot{y}) = bu + d \quad (3.2)$$

donde se definen

$$a = \frac{B}{J}, \quad b = \frac{K}{J}, \quad c = \frac{\mu}{J} \quad \text{y} \quad d = \frac{\tau_d}{J}, \quad a, b, c > 0; \quad d < 0 \quad (3.3)$$

3.2. Parametrización y filtrado

A partir del modelo matemático del servomecanismo de CD (3.2) se puede construir el regresor lineal para la aplicación de los algoritmos de identificación paramétrica mencionados en el Capítulo 2. Despejando \ddot{y} se conoce así la variable independiente

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a\dot{y} + c\text{sign}(\dot{y}) &= bu + d \\ \ddot{y} &= -a\dot{y} - c\text{sign}(\dot{y}) + bu + d \end{aligned} \quad (3.4)$$

tal que a , b y c son parámetros positivos y d es un parámetro negativo. Con la ecuación (2.1) se define el modelo de regresión siguiente

$$\bar{z} = \ddot{y} \quad (3.5)$$

$$\bar{\phi} = [-\dot{y}, u, -\text{sign}(\dot{y}), 1]^\top \quad (3.6)$$

$$\theta = [a, b, c, d]^\top \quad (3.7)$$

donde \bar{z} es la variable independiente del modelo del servomecanismo de CD, θ es el vector paramétrico compuesto de los parámetros desconocidos y $\bar{\phi}$ el vector regresor de las señales medibles.

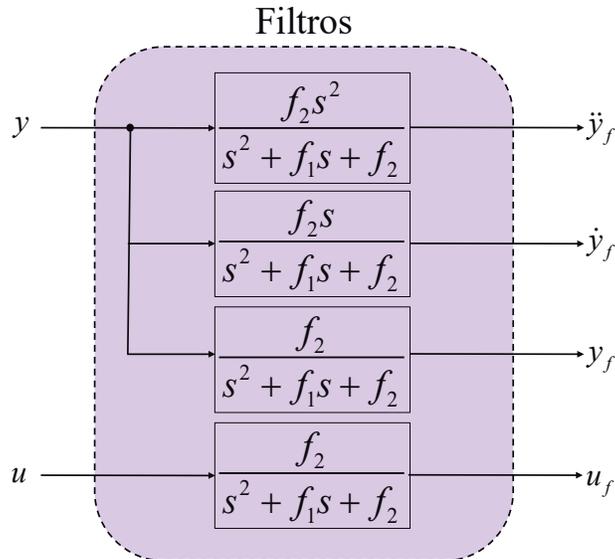


Figura 3.2: Esquema de obtención para señales filtradas donde $f_1, f_2 > 0$.

Para construir el regresor $\bar{\phi}$ es necesario medir u , \dot{y} , \ddot{y} en instantes de tiempo diferentes. Ya que la velocidad \dot{y} y la aceleración \ddot{y} son señales que no se encuentran disponibles, se requiere aplicar un proceso de filtrado a las mediciones de posición y a la señal de control para que el regresor dependa de señales disponibles. La estructura de los filtros usados para este fin se define en la Figura 3.2 donde a partir de la medición de la posición angular y y la señal de control u se genera la posición y_f por medio de un filtro pasa baja, la velocidad \dot{y}_f a través de un filtro pasa banda, la aceleración \ddot{y}_f mediante un filtro pasa alta para las señales filtradas y la señal de control filtrada u_f del servomecanismo a partir de un filtro pasa baja. Con las señales obtenidas por los filtros se reescribe el modelo del servomecanismo de CD (3.4) empleando mediciones filtradas

$$\ddot{y}_f = -a\dot{y}_f - c\text{sign}(\dot{y}_f) + bu_f + d \quad (3.8)$$

3.3. Construcción del regresor lineal del modelo filtrado

A partir de la ecuación (2.1) se construye la regresión lineal del modelo filtrado del servomecanismo de CD (3.7)

$$z = \theta^\top \phi \quad (3.9)$$

$$z = \ddot{y}_f \quad (3.10)$$

$$\phi = [-\dot{y}_f, u_f, -\text{sign}(\dot{y}_f), 1]^\top \quad (3.11)$$

$$\theta = [a, b, c, d]^\top \quad (3.12)$$

donde z es la variable independiente de los parámetros a estimar, θ el vector paramétrico y ϕ el vector regresor. Esta regresión será empleada con los algoritmos Gradiente, MC y MCM descritos en el capítulo 2.

3.3.1. Algoritmo de Mínimos Cuadrados Fuera de Línea (MC_{FL})

Además de los algoritmos de identificación descritos en el Capítulo 2 se utilizará un algoritmo de Mínimos Cuadrados Fuera de Línea (MC_{FL}) para propósitos de comparación. A continuación se describe el proceso de construcción del algoritmo MC_{FL}.

El modelo filtrado del servomecanismo de CD (3.7) permite obtener el modelo de regresión (3.9)-(3.12). Notar que la ecuación (3.9) es válida en instantes de tiempo $t = [T, 2T, \dots, (k-1)T, kT, \dots]$, siendo T el tiempo de muestreo. Por lo anterior se puede reescribir de la siguiente forma

$$z(k) = \phi(k)^\top \theta \quad (3.13)$$

donde se han omitido el argumento T . Tomando en cuenta (3.13) es posible formar el siguiente sistema de ecuaciones mediante mediciones de $\dot{y}_f(k)$, $\ddot{y}_f(k)$ y $u_f(k)$ realizadas en n instantes de tiempo de muestreo

$$A = \begin{bmatrix} \phi(1)^\top \\ \phi(2)^\top \\ \vdots \\ \phi(k-1)^\top \\ \phi(k)^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{y}_f(1) & u_f(1) & -\text{sign}(\dot{y}_f(1)) & 1 \\ -\dot{y}_f(2) & u_f(2) & -\text{sign}(\dot{y}_f(2)) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dot{y}_f(k-1) & u_f(k-1) & -\text{sign}(\dot{y}_f(k-1)) & 1 \\ -\dot{y}_f(k) & u_f(k) & -\text{sign}(\dot{y}_f(k)) & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times 4}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(k-1) \\ z(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_f(1) \\ \ddot{y}_f(2) \\ \vdots \\ \ddot{y}_f(k-1) \\ \ddot{y}_f(k) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times 1} \quad (3.14)$$

Las expresiones anteriores permiten escribir el siguiente sistema sobredeterminado

$$Z = A\theta \quad (3.15)$$

Finalmente, la solución para determinar los estimados $\hat{\theta} = [\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}]$ mediante el método de MC_{FL} está dado por [31]

$$\hat{\theta} = (A^\top A)^{-1} A^\top Z \quad (3.16)$$

El algoritmo de MC_{FL} se ejecuta en el ambiente de programación Matlab® a partir del proceso de muestro de las mediciones obtenidas por el proceso de filtrado de z (3.10) y ϕ (3.11) y el vector paramétrico θ (3.12). Se construyen las matrices A y Z (3.14) y así se obtiene el sistema sobredeterminado (3.15) y se aplican en la ecuación (3.16) para así obtener los estimados de $\hat{\theta}$.

Capítulo 4

Identificación del modelo de un servomecanismo de CD: Experimentos en tiempo real

En este capítulo se muestra la plataforma experimental utilizada en los experimentos en tiempo real y los resultados obtenidos en las pruebas experimentales al implementar los algoritmos de identificación paramétrica. Se usa el algoritmo Mínimos Cuadrados Fuera de Línea (MC_{FL}) descrito en el Capítulo 3 para así tener un punto de comparación entre algoritmos y se implementan de 3 de los 4 algoritmos de identificación paramétrica en línea descritos en el Capítulo 2, siendo el algoritmo Gradiente, Mínimos Cuadrados (MC) y Mínimos Cuadrados Modificado (MCM). En el caso de algoritmo de Mínimos Cuadrados con Factor de Olvido (MCFO) no se realizaron pruebas experimentales. Sólo se da como referencia debido a que al definir una constante de diseño $\mu = 0$ en el algoritmo de MCM se comporta como un algoritmo de MCFO. Se muestran la tablas y las gráficas de resultados obtenidos en la implementación de cada uno de los algoritmos y una tabla comparativa y de desempeño cuando se emplean en el diseño de una ley de control que tiene por objetivo el seguimiento de una trayectoria variante en el tiempo.

4.1. Configuración experimental del equipo del laboratorio

El equipo empleado en las pruebas experimentales mostrado en la Figura 4.1, consiste de dos motores de CD con escobillas marca Clifton Presision modelo JDTH-2050-BQ-IC acoplados mecánicamente. En el Motor 2 se realizará la identificación paramétrica y el Motor 1, el cual sirve para inyectar perturbaciones en el Motor 2, no es empleado en los experimentos. Un amplificador de potencia marca Advanced Motion Controls modelo 30A20AC PWM que impulsa el motor de CD. Un codificador óptico marca Servotek modelo 1024PTSA-7388F-1 proporciona la medición de posición.

Los algoritmos de identificación paramétrica y el control del servomecanismo se implementan utilizando la plataforma Matlab®/Simulink® en el ambiente de programación en

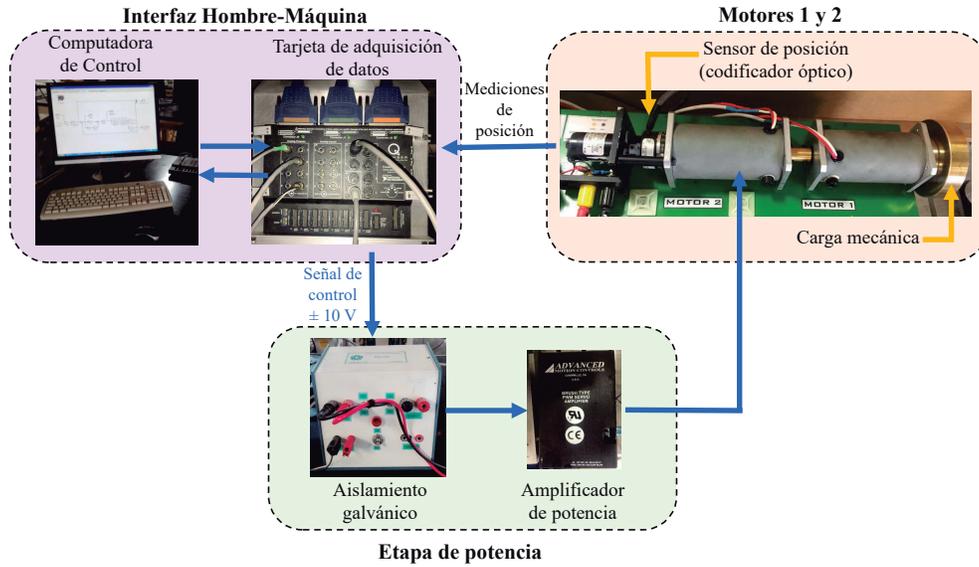


Figura 4.1: Configuración empleada en los experimentos.

tiempo real QUARC®), y una tarjeta de adquisición de datos QPIDe, ambos de la marca Quanser Consulting®. La tarjeta QPIDe envía la señal de control al servomecanismo, ésta alimenta al amplificador de potencia a través de un aislamiento galvánico. El codificador óptico provee la medición de posición y es leído por la tarjeta QPIDe. Los diagramas construidos en Matlab®/Simulink® utilizan un periodo de muestreo de $T_s = 1$ ms y el método de integración Euler ODE 1 y con un tiempo total de experimentación de $T = 40$ s.

4.2. Estabilización del servomecanismo

Con el fin de aplicar los algoritmos de estimación paramétrica en línea es necesario estabilizar el servomecanismo para realizar los experimentos y así estimar los parámetros de su modelo de forma adecuada debido a que no es estable en lazo abierto. Para la estabilización se implementa un controlador Proporcional con Realimentación Taquimétrica (PRT)

$$u = K_p e - K_d \dot{y}_{fe} \quad (4.1)$$

donde $K_p = 2$ es la ganancia proporcional, $K_d = 0.3$ es la ganancia derivativa, e el error de posición definido de la siguiente forma $e = r - y$, siendo r la referencia, y la posición angular y \dot{y}_{fe} un estimado de la velocidad que se obtienen por medio de un proceso de filtrado de la señal de posición y medida a partir del codificador óptico

$$F(s) = \frac{300s}{s + 300} \quad (4.2)$$

La señal de excitación de referencia de entrada es ruido blanco filtrado que permite excitar el motor. Lo anterior se realiza mediante el bloque de Matlab®/Simulink® **Band-Limited White Noise**, con los siguientes valores, Noise Power = 0.01, Sample Time = 0.1 y Seed

4.3.2. Algoritmo Gradiente

Se emplea el algoritmo Gradiente (2.8) en el diagrama de bloques representado en la Figura 4.2 y utilizando una ganancia de estimación de $\Gamma = 25$. Los resultados obtenidos en el experimento se muestran en la Tabla 4.2 y en la Figura 4.3. La Tabla 4.2 muestra el valor mínimo, máximo y el promedio de los parámetros estimados \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} y \hat{d} del servomecanismo de CD. Para el cálculo de estos valores se emplean los últimos 20s del experimento debido a que en este tiempo es cuando la estimación no presenta sobretiros.

Comparando los parámetros obtenidos mediante el algoritmo MC_{FL} mostrados en la Tabla 4.1 contra los obtenidos en el algoritmo Gradiente mostrados en la Tabla 4.2 se aprecia que solamente los parámetros \hat{b} y \hat{c} tiene valores similares y los estimados \hat{a} y \hat{d} se encuentran por encima y por debajo respectivamente de estimado obtenido por el algoritmo de MC_{FL} .

La Figura 4.3a muestra la gráfica de la evolución temporal del estimado \hat{a} donde se aprecia un sobretiro considerable al inicio de la estimación en el intervalo $T = [0, 5]$ s. La Figura 4.3b muestra la gráfica del estimado \hat{b} donde se aprecia que la estimación del parámetro presenta poca variación después del tiempo $T > 20$ s y no presenta tantas oscilaciones respecto a los estimados de a , c y d . La Figura 4.3c muestra la gráfica del estimado \hat{c} donde se aprecia un sobretiro al inicio de la en el intervalo de tiempo $T = [0, 10]$ s, y la estimación no tiene cambios apreciables después del tiempo $T > 30$ s. La Figura 4.3d muestra la gráfica del estimado \hat{d} donde se logra apreciar oscilaciones a lo largo de todo el tiempo de experimentación.

Parámetro	\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}
MC_{FL}	0.3991	40.8959	3.0376	-1.6131

Tabla 4.1: Resultados experimentales de la identificación paramétrica del Motor 2 con el algoritmo MC_{FL} .

Algoritmo	\hat{a}			\hat{b}		
	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
Gradiente $\Gamma = 25$	-0.0575	1.2685	0.6028	39.009	40.974	40.181
	\hat{c}			\hat{d}		
	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
	2.4946	3.7756	3.0592	-2.4421	-1.5374	-2.044

Tabla 4.2: Resultados experimentales de la identificación paramétrica del Motor 2 con el algoritmo Gradiente ($\Gamma = 25$).

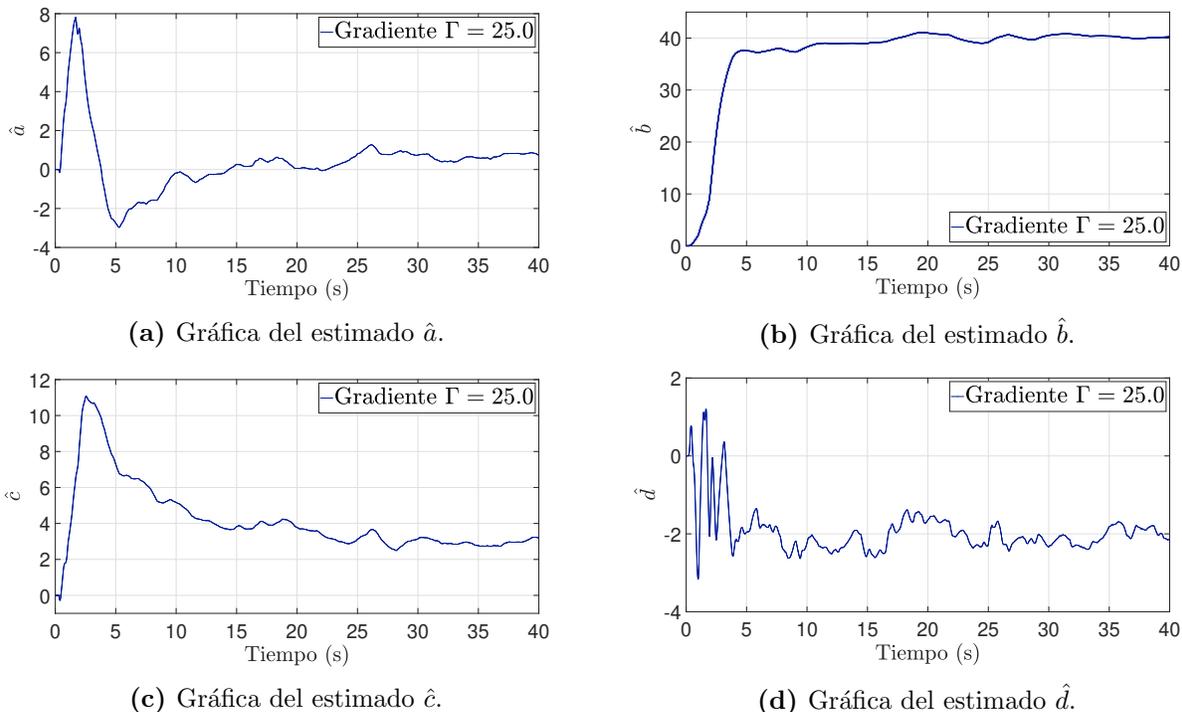


Figura 4.3: Estimados obtenidos con el algoritmo Gradiente.

4.3.3. Algoritmo de Mínimos Cuadrados (MC)

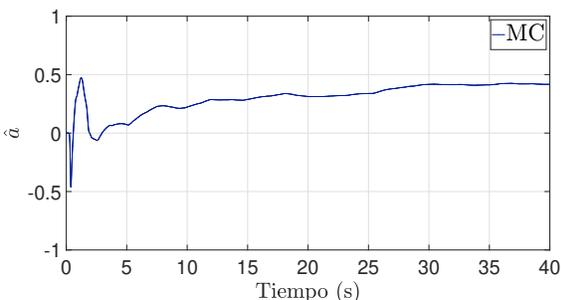
El algoritmo de MC se aplica mediante las ecuaciones (2.13)-(2.15) mostradas en el Capítulo 2 se emplea en el Diagrama de bloques representado en la Figura 4.2. La Tabla 4.3 muestra el valor mínimo, máximo y el promedio de los parámetros estimados \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} y \hat{d} del servomecanismo de CD. La Figura 4.4 muestra los resultados obtenidos de los estimados a lo largo de todo el experimento.

Se realiza la comparación de resultados entre el algoritmo fuera de línea de MC_{FL} contra los obtenidos en el algoritmo en línea de MC. En la Tabla 4.1 y en la Tabla 4.2 respectivamente se muestran los resultados correspondientes, se observa que los parámetros \hat{a} y \hat{c} toman valores cercanos a aquellos producidos por el algoritmo de MC_{FL} . Los estimados \hat{b} y \hat{d} se encuentran por debajo del estimado producidos por el algoritmo de MC_{FL} y realizando una comparación entre los valores máximos y mínimos entre el algoritmo Gradiente y el MC la región entre los límites es menor en el algoritmo de MC que ronda entre $\pm 0.2 \sim 0.5$ y en el algoritmo Gradiente es de $\pm 1.5 \sim 2.0$ como se observa en sus respectivas Tablas.

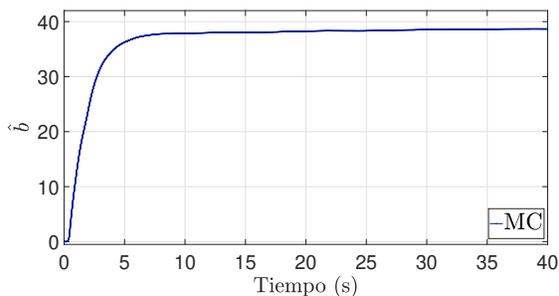
La Figura 4.4a muestra la gráfica del estimado de \hat{a} donde se observa un sobretiro al inicio de la estimación en el intervalo de tiempo $T = [0, 5]$ s pero siendo éste menor al sobretiro que presenta algoritmo de Gradiente en el estimado de a . El estimado converge a valores aproximadamente constantes después de un tiempo $T > 30$ s. La Figura 4.4b muestra la gráfica del estimado \hat{b} donde se aprecia que la estimación logra converger alrededor del tiempo $T > 8$ s y no presenta oscilaciones en comparación al estimado de \hat{a} .

Algoritmo	\hat{a}			\hat{b}		
	L_{min}	L_{max}	Promedio	L_{min}	L_{max}	Promedio
MC	0.3115	0.4252	0.3846	38.259	38.668	38.492
	\hat{c}			\hat{d}		
	L_{min}	L_{max}	Promedio	L_{min}	L_{max}	Promedio
	3.037	3.2126	3.0997	-2.2103	-2.1449	-2.1841

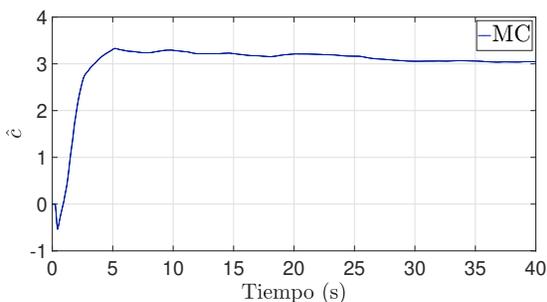
Tabla 4.3: Estimados de 4 parámetros obtenidos con el Algoritmo de Mínimos Cuadrados.



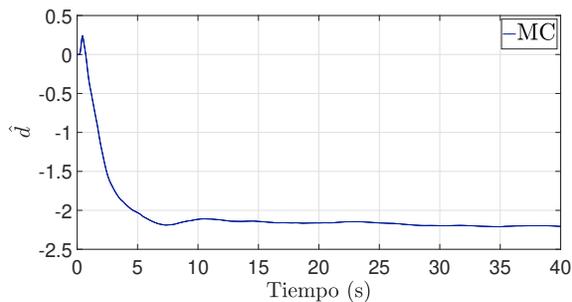
(a) Gráfica del estimado \hat{a} .



(b) Gráfica del estimado \hat{b} .



(c) Gráfica del estimado \hat{c} .



(d) Gráfica del estimado \hat{d} .

Figura 4.4: Estimados algoritmo Mínimos Cuadrados.

La Figura 4.4c muestra la gráfica del estimado de \hat{c} donde se ve que durante el inicio éste comienza siendo negativo y cuando el tiempo se incrementa toma valores positivos. La Figura 4.4d muestra la gráfica del estimado de \hat{d} la cual presenta un pequeño sobretiro inicial y cuando el tiempo se incrementa este estimado toma valores negativos.

4.3.4. Algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado (MCM)

Los experimentos realizados con el algoritmo de MCM dado por las ecuaciones (2.24)-(2.26) mostradas en el Capítulo 2 se aplican en el diagrama de bloques 4.2. Los experimentos se realizaron con diferentes valores de factor de olvido β y de constante de diseño μ .

La Tabla 4.4 y la Figura 4.5 muestran los estimados a lo largo del experimento. Se reporta el valor mínimo, máximo y promedio de los parámetros estimados \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} y \hat{d} con un factor

de olvido $\beta = 0.5$ y una constante de diseño $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0\}$. De la misma forma en la Tabla 4.5 y la Figura 4.6 se reportan los resultado obtenido con un factor de olvido $\beta = 1.0$ y una constante de diseño $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0, 100.0\}$.

A partir de las Tablas 4.1 y 4.4 se realiza un análisis comparativo entre los estimados obtenidos mediante los algoritmos de MC_{FL} y MCM. Para el primer caso experimental con un factor de olvido $\beta = 0.5$ y una constante de diseño $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0\}$ se observa que el promedio de los parámetros estimados \hat{b} , \hat{c} y \hat{d} se encuentra cerca de los valores estimados obtenidos del algoritmo de MC_{FL} , solamente el promedio del estimado de \hat{a} se encuentra por encima del estimado de producido por el algoritmo de MC_{FL} y es importante notar que al incrementarse el valor de la constante de diseño μ los parámetros estimados se acercan cada vez más a los valores de producido por el algoritmo de MC_{FL} .

En el segundo caso experimental con un factor de olvido $\beta = 1.0$ y una constante de diseño $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0, 100.0\}$ los resultados son similares al primer caso. Los parámetros estimados \hat{b} , \hat{c} y \hat{d} son los más cercanos a los valores estimados por el algoritmo de MC_{FL} y el estimado de \hat{a} es el único que se encuentra por encima del estimado producido por el algoritmo de MC_{FL} . Un dato importante a resaltar es que al aumentar el valor del factor

Algoritmo	\hat{a}			\hat{b}		
MCM	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
	0.3066	0.7159	0.4962	39.007	40.249	39.553
$\beta = 0.5$	\hat{c}			\hat{d}		
	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
$\mu = 1.0$	2.4187	3.142	2.8112	-2.4819	-1.6986	-2.1483
	\hat{a}			\hat{b}		
$\beta = 0.5$	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
	0.134	0.8999	0.5015	39.02	40.124	39.594
$\mu = 5.0$	\hat{c}			\hat{d}		
	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
$\mu = 10.0$	2.29	3.3547	2.7825	-2.4285	-1.8021	-2.1355
	\hat{a}			\hat{b}		
$\beta = 0.5$	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
	0.1291	0.9501	0.5252	39.385	40.535	39.908
$\mu = 10.0$	\hat{c}			\hat{d}		
	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
$\mu = 10.0$	2.3099	3.519	2.8374	-2.3017	-1.6435	-2.0521

Tabla 4.4: Estimados de 4 parámetros obtenidos con el Algoritmo MCM ($\beta = 0.5$ y $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0\}$)

de olvido β se reduce el tiempo de estimación como se observa en la Figura 4.6 y al utilizar una constante de diseño $\mu = 100$ también se reduce el tiempo de estimación pero el estimado presenta una mayor oscilación.

En las Figuras 4.5 y 4.6 se muestra que este algoritmo es el más rápido en converger a los parámetros estimados en comparación con los algoritmos Gradiente y el MC ya que converge en un tiempo $T < 5$ s.

La Figura 4.5a presenta los estimados de \hat{a} los cuales toman valores cercanos al valor estimado por el algoritmo MC_{FL} en menos de un tiempo $T < 2$ s; se muestra que al incrementarse el valor de μ el tiempo de convergencia es menor. La Figura 4.5b muestra los estimados de \hat{b} , se observa que las estimaciones se acercan al valor obtenido mediante el algoritmo de MC_{FL} en un tiempo $T < 10$ s siendo las tres estimaciones similares con los diferentes valores de μ . La Figura 4.5c muestra los estimados de \hat{c} donde su convergencia con diferentes valores de μ es en un tiempo $T < 5$ s. La Figura 4.5d muestra los estimados de \hat{d} donde la convergencia con el valor de $\mu = 5.0$ es la más rápida.

La Figura 4.6a muestra los estimados de \hat{a} obtenidos empleando $\beta = 1$ y $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0 \text{ y } 100.0\}$, los cuales convergen en un tiempo $T < 2$ s. La Figura 4.6b muestra los estimados de \hat{b} donde se logra apreciar que la estimación se acerca al valor obtenido mediante el algoritmo de MC_{FL} en un tiempo $T < 5$ s. La Figura 4.6c muestra los estimados de \hat{c} donde la convergencia es en un tiempo $T > 5$ s. La Figura 4.6d muestra los estimados de \hat{d}

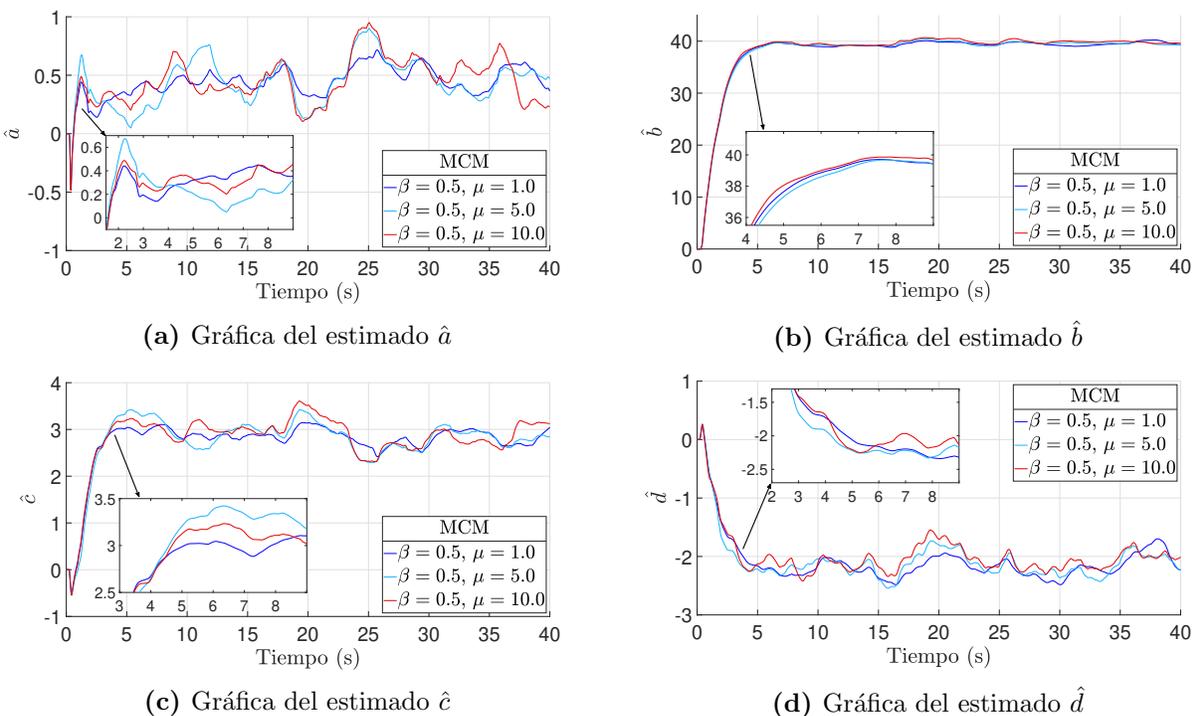


Figura 4.5: Estimados obtenidos mediante el algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado ($\beta = 0.5$ y $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0\}$).

Algoritmo	\hat{a}			\hat{b}		
MCM	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
	0.0366	0.738	0.4809	38.593	39.875	39.309
$\beta = 1.0$	\hat{c}			\hat{d}		
	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
$\mu = 1.0$	2.3888	3.4103	2.7653	-2.5342	-1.8404	-2.1989
	\hat{a}			\hat{b}		
$\beta = 1.0$	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
	0.0069	0.8070	0.5337	37.963	39.519	38.939
$\mu = 5.0$	\hat{c}			\hat{d}		
	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
$\mu = 5.0$	2.2795	3.4451	2.6877	-2.5051	-1.8664	-2.1735
	\hat{a}			\hat{b}		
$\beta = 1.0$	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
	0.1291	0.9501	0.5252	39.385	40.535	39.908
$\mu = 10.0$	\hat{c}			\hat{d}		
	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
$\mu = 10.0$	2.3099	3.519	2.8374	-2.3017	-1.6435	-2.0521
	\hat{a}			\hat{b}		
$\beta = 1.0$	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
	0.1192	0.9829	0.6039	37.339	38.693	37.968
$\mu = 100.0$	\hat{c}			\hat{d}		
	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>	L_{min}	L_{max}	<i>Promedio</i>
$\mu = 100.0$	2.0065	3.2825	2.6326	-1.9627	-1.3779	-1.6541

Tabla 4.5: Estimados de 4 parámetros obtenidos con el Algoritmo MCM ($\beta = 1.0$ y $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0, 100.0\}$)

se observa que la convergencia es en $T > 5$ s.

4.3.5. Comparación de los estimados obtenidos con los algoritmos de identificación

En este apartado se comparan los resultados obtenidos con el algoritmo fuera de línea de Mínimos Cuadrados (MC_{FL}) y con los algoritmos implementados en línea los cuales son los algoritmos Gradiente, Mínimos Cuadrados (MC) y Mínimos Cuadrados Modificado (MCM). A partir de los resultados mostrados en las Tablas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 se realiza la com-

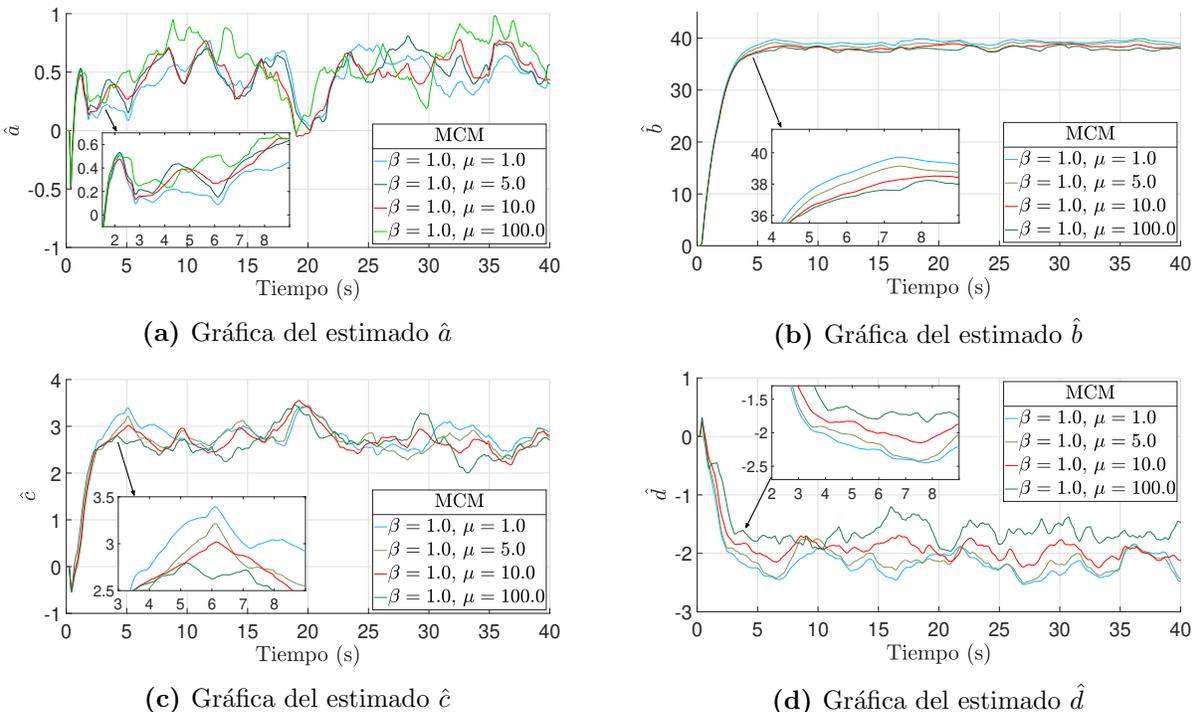


Figura 4.6: Estimados obtenidos mediante el algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado ($\beta = 1.0$ y $\mu = \{1.0, 5.0, 10.0, 100.0\}$)

paración entre los resultados obtenidos con los algoritmos de identificación paramétrica los cuales se presentan en la Tabla 4.6 y en la Figura 4.7. Para el algoritmo de MCM se elije el estimado obtenido con un factor de olvido de $\beta = 1.0$ y una constante $\mu = 10.0$.

Los estimados \hat{b} y \hat{c} obtenidos con los algoritmos Gradiente y MCM son los más cercanos a los estimados producidos por el algoritmo de MC_{FL} . Los estimados \hat{a} y \hat{d} generados mediante el algoritmo de MC son los más cercanos a los estimados producidos por el algoritmo de MC_{FL} .

En la Figura 4.7 se observa que el algoritmo Gradiente es el más lento de los 3 algoritmos de estimación en línea siendo éste el que requiere mayor tiempo de experimentación para alcanzar los estimados, y a lo largo de todo el experimento los estimados oscilan. Se puede mejorar su velocidad de estimación incrementando el valor de la ganancia Γ pero es probable que la estimación oscile más. En el algoritmo de MC la estimación es más rápida en comparación con el algoritmo Gradiente pero en cierto momento debido a la pérdida de rango de la matriz de covarianza P el algoritmo de MC deja de producir nuevos estimados. En la Figura 4.7 se muestra en línea punteada los estimados producidos por el algoritmo de MC_{FL} .

El algoritmo de MCM es el más rápido de todos y posee la ventaja que variando el valor del factor de olvido β y la constante de diseño μ se puede incrementar y así mejorar la rapidez de la convergencia.

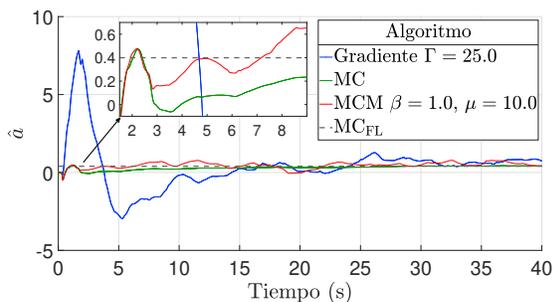
Sin embargo, no se cuenta con un método para conocer los valores óptimos para mejorar el tiempo de estimación sin que los estimados oscilen demasiado al igual que en el caso del

Parámetro	\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}
MC _{FL}	0.3991	40.8959	3.0376	-1.6131
Gradiente $\Gamma = 25.0$	0.6028	40.181	3.0592	-2.044
MC	0.3846	38.492	3.0997	-2.1841
MCM $\beta = 1.0, \mu = 10.0$	0.5252	39.908	2.8374	-2.0521

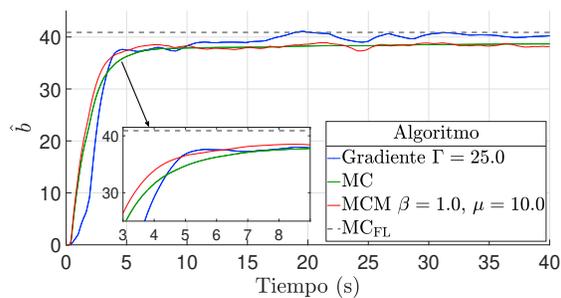
Tabla 4.6: Comparación de los 4 de estimados obtenidos por los algoritmos de identificación paramétrica

algoritmo Gradiente.

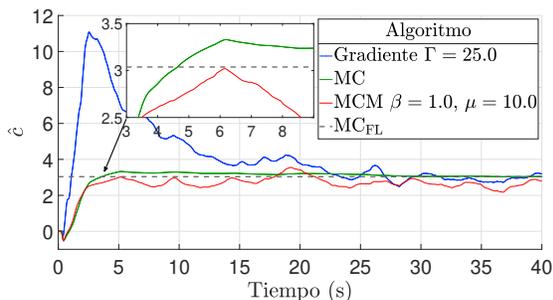
El algoritmo Gradiente es el más sencillo de implementar, ya que requiere menos cálculos que los algoritmos de MC y MCM, pero tiene un tiempo de convergencia mayor. Por otro lado, los algoritmos de MC y MCM requieren de la solución de las ecuaciones diferenciales correspondientes a las matriz de covarianza P lo cual implica el empleo de más recursos computacionales en comparación que el algoritmo Gradiente lo cual conlleva a más tiempo de cálculo. El algoritmo de MC es el más utilizado actualmente a pesar de su necesidad de recursos de cómputo y el algoritmo de MCM es una alternativa al algoritmo de MC porque presenta una gran ventaja que es la de reducir los tiempos de convergencia de los estimados hasta en un 80 % o más con valores adecuados del factor de olvido y de la constante de diseño, pero el vector regresor ϕ debe cumplir con la condición de Excitación Persistente (2.12).



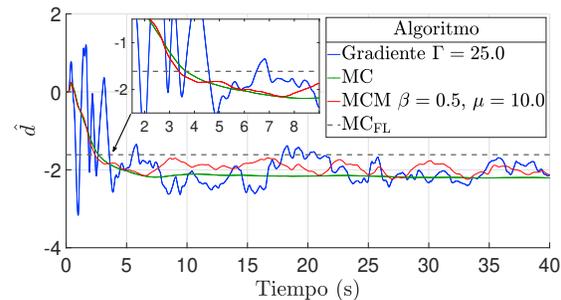
(a) Gráfica del estimado \hat{a}



(b) Gráfica del estimado \hat{b}



(c) Gráfica del estimado \hat{c}



(d) Gráfica del estimado \hat{d}

Figura 4.7: Comparación de estimados obtenidos por los algoritmos de identificación.

4.4. Análisis de desempeño producido por los parámetros estimados obtenidos por los algoritmos de identificación paramétrica

Con el fin de evaluar los parámetros estimados obtenidos mediante los algoritmos de identificación paramétrica Gradiente, MC, MCM y MC_{FL} mostrados en la Tabla 4.6, se propone la ley de control siguiente la cual es calculada a partir de los parámetros obtenidos en los experimentos

$$u = \frac{1}{\hat{b}} \left[\ddot{r} + K_p e + K_d \dot{e} + \hat{a} \dot{y} + \hat{c} \text{sign}(\dot{y}) - \hat{d} \right] \quad (4.4)$$

donde el error de seguimiento de trayectoria está definido como $e = r - y$ siendo \dot{e} la primera derivada del error de seguimiento, $r = 0.5 \sin(1.5708t)$ es una señal de referencia sinusoidal y \ddot{r} la segunda derivada de la referencia, y es la posición angular del motor de CD y las ganancias Proporcional y Derivativa son $K_p = 225$ y $K_d = 21$ respectivamente.

El objetivo de la ley de control (4.4) es la de realizar un seguimiento de trayectoria, y mediante las mediciones de las señales de control y del error se puede hacer un análisis comparativo del desempeño del sistema en lazo cerrado con los parámetros obtenidos con cada uno de los algoritmos de identificación. Los parámetros estimados más adecuados serán aquellos que produzcan el mejor desempeño.

Para medir y comparar el desempeño de los algoritmos de identificación, se emplean los siguientes índices, la Integral del Error Cuadrático (IEC), la Integral del Valor Absoluto del Error (IVAE), la Integral del Valor Absoluto de la señal de Control (IVAC) y la Integral del Valor Absoluto de la Variación de la señal de Control (IVAVC), definiéndose de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \text{IEC} &= 100 \int_0^2 e^2(t) dt, & \text{IVAE} &= 100 \int_2^{20} |e(t)| dt \\ \text{IVAC} &= \int_2^{20} |u(t)| dt, & \text{IVAVC} &= \int_0^{20} |\dot{u}(t)| dt \end{aligned}$$

La Tabla 4.7 muestra los valores de los índices utilizados para medir el desempeño respecto a los valores estimados obtenidos mediante los algoritmos de identificación. Se observa que el índice IEC en el algoritmo gradiente tiene el valor más bajo seguido del algoritmo de MCM. El índice IVAE permite evaluar el error en estado estacionario donde el algoritmo de MC presenta el valor más pequeño seguido nuevamente del algoritmo MCM. En el caso del índice IVAC el valor más pequeño corresponde algoritmo Gradiente y los índices correspondientes a los algoritmos de MC y MCM son muy similares. Finalmente, en el caso del índice IVAVC el algoritmo de MC presenta más variación y los algoritmos de MC_{FL} y de MCM son los que presentan una menor variación. Como se puede notar en la Tabla 4.7 los parámetros que produce el algoritmo de MCM generan índices de desempeño similares al resto de los algoritmos. Sin embargo, su habilidad de converger en un menor tiempo lo coloca como uno de los mejores métodos de identificación de parámetros probados en este trabajo.

Criterio	Algoritmo de identificación			
	Gradiente	MC	MC _{FL}	MCM
IEC	4.8355	6.3878	7.6640	5.7282
IVAE	1.1526	1.0087	1.4852	1.0145
IVAC	1.8696	1.9254	1.9612	1.9286
IVAVC	12.2689	12.7543	11.8467	12.2652

Tabla 4.7: Tablas de índices de desempeño.

La Figura 4.8 muestra las señales de referencia y salida con cada uno de los estimados obtenidos con los algoritmos implementados. Se observa que los estimados producidos por el algoritmo de MCM produce un mejor seguimiento a la referencia, siendo el algoritmo de MC_{FL} el que tiene el peor seguimiento. La Figura 4.9 presenta las señales de control generadas con los estimados de cada uno de los algoritmos, se observa que la señal de control producida por el algoritmo de MCM presenta menos fluctuaciones. Finalmente, la Figura 4.10 muestra las señales de error de posición producida con los estimados de los algoritmos implementados, donde se aprecia que el algoritmo de MCM presenta un menor error a comparación de los demás algoritmos siendo el algoritmo MC_{FL} el de peor desempeño.

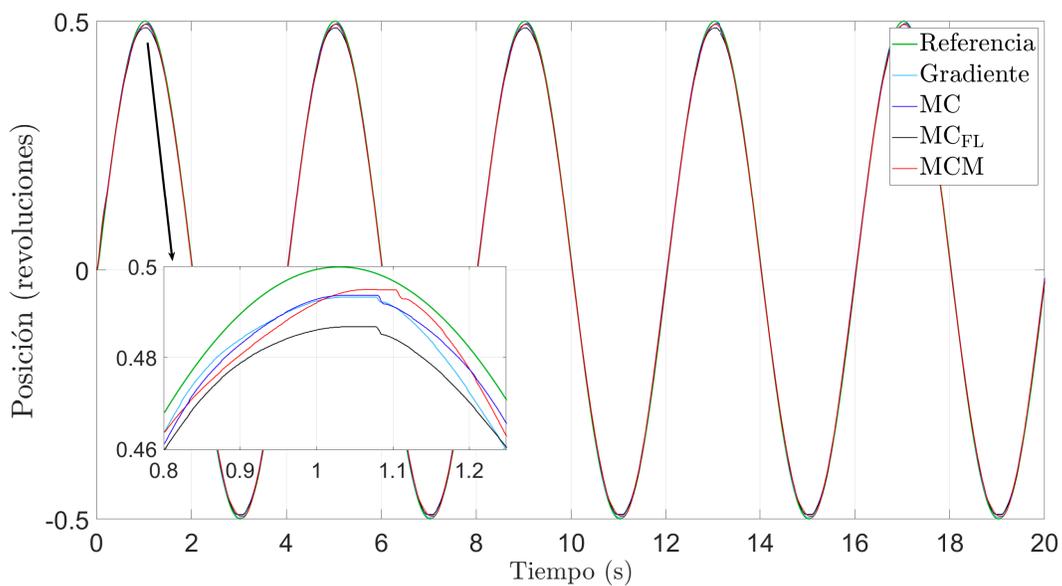


Figura 4.8: Señales de Referencia y Salida correspondientes al seguimiento de trayectoria con los parámetros estimados.

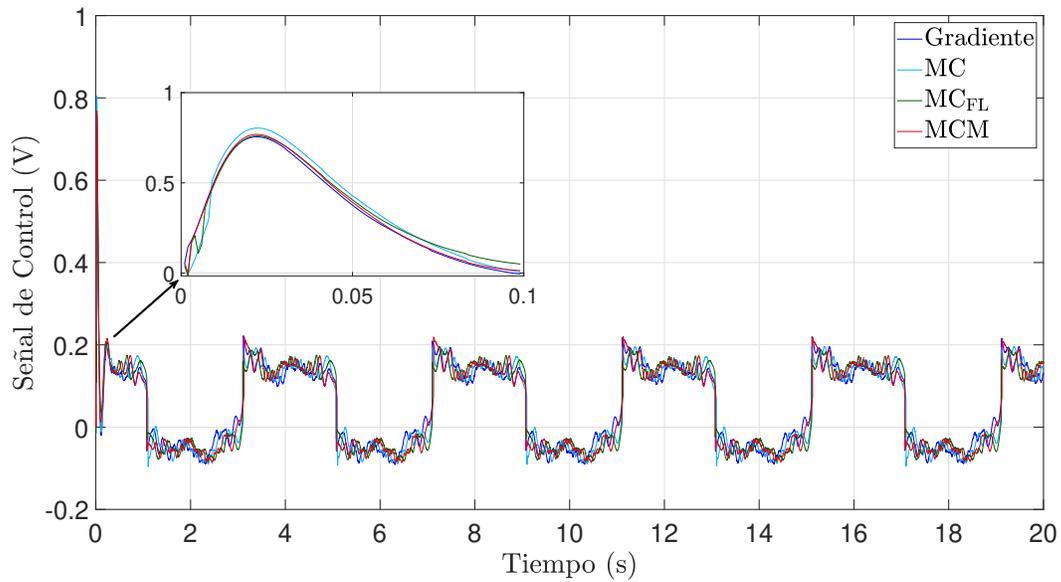


Figura 4.9: Señales de control correspondientes al seguimiento de trayectoria con los parámetros estimados.

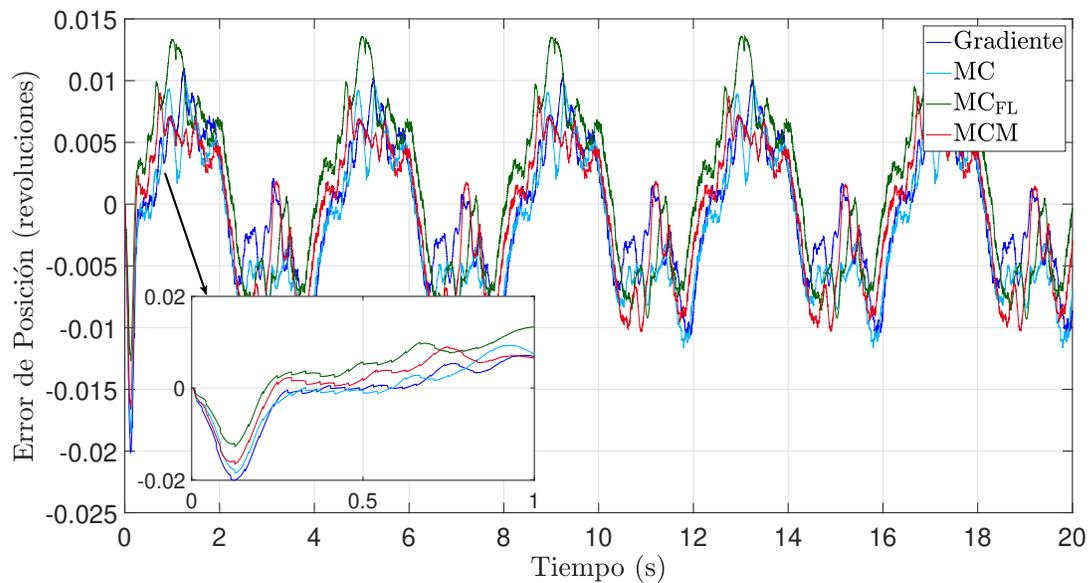


Figura 4.10: Señales de error de posición correspondientes al seguimiento de trayectoria con los parámetros estimados.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones finales

El algoritmo de Mínimos Cuadrados Modificado (MCM) es un método alternativo bastante útil y eficiente en la estimación de parámetros en línea, debido a que tienen la capacidad de contrarrestar la desventaja del algoritmo de Mínimos Cuadrados (MC) que es la pérdida de rango de la matriz de covarianza bajo la condición de Excitación Persistente (EP) (2.12), lo que le impide a este último continuar con la estimación paramétrica después de cierto periodo de tiempo.

Entre las ventajas presentes en el algoritmo de MCM cuando se satisface la condición de Excitación Persistente (EP) (2.12) en el vector regresor ϕ , es que se atenúa la influencia de perturbaciones acotadas sobre los estimados. Además, es capaz de estimar parámetros variantes en el tiempo [24]. Se observó en los experimentos que al elegir de manera adecuada los coeficientes de factor de olvido β y la constante de diseño μ se reduce el tiempo de convergencia de la estimación. Lo anterior permite tener control sobre el comportamiento transitorio de los estimados. Una desventaja que presenta este algoritmo es que una elección no adecuada de μ y β produce oscilaciones en la evolución temporal de los estimados y no existe un método formal para realizar esta selección.

Los resultados obtenidos muestran que el algoritmo de MCM presentó un desempeño similar o mejor a los demás algoritmos de estimación en línea cuando los parámetros estimados producidos por éste fueron empleados en el diseño de una ley de control por seguimiento de trayectoria.

5.2. Trabajo Futuro

Como trabajo futuro se considera

- ◇ Eliminar la necesidad de Excitación Persistente (EP) en el algoritmo MCM. Sin esta condición el algoritmo no es capaz de mantener acotada la matriz de covarianza, lo cual es un problema si se desea emplear este algoritmo en el contexto de Control Adaptable.
- ◇ Modificar el algoritmo de MCM para aplicarlo en un algoritmo de Control Adaptable o Rechazo Activo de Perturbaciones.
- ◇ Aplicar el algoritmo de MCM a sistemas dinámicos Sub-Actuados.

Bibliografía

- [1] L. Luna y R. Garrido. «On the equivalence between P+DOB and set point weighted PI controllers for velocity control of servodrives under load disturbances». En: *2018 XX Congreso Mexicano de Robótica (COMRob)*. 2018, págs. 1-6.
- [2] Haci Mehmet Guzey y col. «Optimal synchronizing speed control of multiple DC motors». En: *2018 4th International Conference on Optimization and Applications (ICOA)*. IEEE. 2018, págs. 1-5.
- [3] George Ellis. *Control system design guide: using your computer to understand and diagnose feedback controllers*. Butterworth-Heinemann, 2012.
- [4] Rolf Isermann. *Mechatronic systems: fundamentals*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] Jianying Liu, Pengju Zhang y Fei Wang. «Real-time dc servo motor position control by pid controller using labview». En: *2009 International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics*. Vol. 1. IEEE. 2009, págs. 206-209.
- [6] Ruijuan Guo, Juan Chen y Xiaoxing Hao. «Position servo control of a DC electromotor using a hybrid method based on model reference adaptive control (MRAC)». En: *2010 International Conference on Computer, Mechatronics, Control and Electronic Engineering*. Vol. 4. IEEE. 2010, págs. 534-537.
- [7] Mete Kalyoncu y Mustafa Haydim. «Mathematical modelling and fuzzy logic based position control of an electrohydraulic servosystem with internal leakage». En: *Mechatronics* 19.6 (2009), págs. 847-858.
- [8] Akif Durdu y Emre Hasan Dursun. «Sliding mode control for position tracking of servo system with a variable loaded DC motor». En: *Elektronika ir Elektrotechnika* 25.4 (2019), págs. 8-16.
- [9] Qing Guo, Tian Yu y Dan Jiang. «Robust H positional control of 2-DOF robotic arm driven by electro-hydraulic servo system». En: *ISA transactions* 59 (2015), págs. 55-64.
- [10] Jong Sun Ko y col. «A robust digital position control of brushless DC motor with dead beat load torque observer». En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 40.5 (1993), págs. 512-520.
- [11] Riazollah Firoozian. *Servo motors and industrial control theory*. Springer, 2014.
- [12] Shankar Sastry; Marc Bodson. *Adaptive control : stability, convergence, and robustness*. Prentice-Hall information and system sciences series.; Prentice Hall advanced reference series., Engineering. Prentice Hall, 1989.

-
- [13] Weiping Li Jean-Jacques Slotine. *Applied Nonlinear Control*. Pearson, 1991.
- [14] Bjorn Wittenmark Karl J. Astrom. *Adaptive control*. 2.^a ed. Dover Publications, 1994.
- [15] Petros A. Ioannou Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Courier Corporation. 2012.
- [16] Karl J. Astrom. *Lectures on the identification problem. The least square method*. Division of Automatic Control. Lund Institute of Tecnology, Lund, Sweden, 1968.
- [17] Ljung. L. *System Identification: Theory for the User*. 2nd Edition. Prentice Hall, 1999.
- [18] Goodwin G.C. y Middleton R. H. «Adaptive control of time-varying linear systems». En: *Trans. Autom. Control* 2.33 (1988), págs. 150-155.
- [19] Kostas S Tsakalis y Petros A Ioannou. *Linear time-varying systems: control and adaptation*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [20] Abdulle A. Wanner G. «200 years of least squares method». En: 57.2 (2002), págs. 45-60.
- [21] Ljung. L. *System identification toolbox: User's guide*, MathWorks Incorporated, 1995.
- [22] Bard Y. *Nonlinear parameter estimation*. Academic Press, 1974.
- [23] Luis A Cantera Cantera y col. «Parameter Estimation of a Linear Ultrasonic Motor Using the Least Squares of Orthogonal Distances Algorithm». En: *2019 16th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*. IEEE. 2019, págs. 1-6.
- [24] Yuchen Song & Jingou Zhang Jinbo Wu WenjianHuang. «Robust adaptive identification of linear time-varying systems with modified least-squares algorithm». En: (2016).
- [25] Dimogianpoulos D. & Mahony R. Lozano R. «Identification of linear time-varying systems usind a modified least squares algorithm». En: *Automatic* 36 (2000), págs. 1009-1015.
- [26] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems (3rd Edition)*. 3.^a ed. Prentice Hall, 2001.
- [27] Roger Miranda Ruben Garrido. «DC servomechanism parameter identification: A closed loop input error approach». En: *ISA Transactions* 51.1 (2012), págs. 42-49.
- [28] R. Garrido y A. Concha. «An Algebraic Recursive Method for Parameter Identification of a Servo Model». En: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 18.5 (2013), págs. 1572-1580.
- [29] R. Garrido y A. Concha. «Inertia and Friction Estimation of a Velocity-Controlled Servo Using Position Measurements». En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 61.9 (2014), págs. 4759-4770.
- [30] Adrián Ramírez, Rubén Garrido y Sabine Mondié. «Velocity control of servo systems using an integral retarded algorithm». En: *ISA Transactions* 58 (2015), págs. 357 -366.
- [31] R. Isermann y Marco Münchhof M. *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. 1.^a ed. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing Series. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.