CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

SINTONIZACIÓN Y ROBUSTEZ DE CONTROLADORES BASADOS EN RETARDOS

T E S I S

Que presenta

ROMÁN AZEL ZALDÍVAR LÓPEZ

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

En la especialidad de

CONTROL AUTOMÁTICO

Directores de la Tesis:

Dra. Sabine Marie Sylvie Mondié Cuzange
Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma

Ciudad de México **AGOSTO, 2020**

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis asesores de tesis, la Dra. Sabine y el Dr. Rubén, me guiaron de la forma correcta para culminar esta tesis con mucho empeño, sus consejos son invaluables. Gracias Dr. Rubén por su dedicación y paciencia para con este trabajo de tesis, me quedo con una muy buena experiencia y con un buen aprendizaje de su parte. Muchas gracias a ambos por todo el apoyo brindado.

A CONACyT, por su invaluable apoyo económico.

Para mi padre y madre, Arturo y Dora. Sin su apoyo incondicional desde que era un niño para con mi educación esto no sería posible. Me dieron una vida llena de buenos ejemplos y dedicación para salir adelante y conseguir las metas propuestas sin importar el duro camino, sin importar que tan difícil sea. Gracias a Dios por tenerlos en este momento de mi vida.

Una vida llena de consejos útiles y un buen ejemplo tío Pedro tía Eli y el cariño que me demuestran cada vez que los visito, tío Lapo, tía Vicky, primo Esleiter.

Finalmente, pero no menos importantes, gracias a todos mis amigos que hicieron la estancia en la Ciudad de México y en el cubículo dentro del departamento de control fuera muy amena y divertida. El apoyo, cariño y amistad brindados son algo irreemplazable en mi vida, especialmente Lalo, Olga, Aline, Memo, Yves, Marco, Sara y Mariana, amistades que llegaron para quedarse. Gracias a todos ustedes mis preciados amigos. Carlitos, llegaste en un momento muy duro de mi vida y sin embargo me apoyaste como nadie, y mira aquí estamos; gracias a ti también.

Notación

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	Conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{R}^n$	Conjunto de vectores de dimensión n con componentes reales
$\mathbb{R}^{n\times n}$	Conjunto de matrices de dimensión $n \times n$ con componentes reales
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos
s	Operador de Laplace
$\mathrm{Re}(s)$	Parte real de $s \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Im}(s)$	Parte imaginaria de $s \in \mathbb{C}$
$\lvert s \rvert$	Módulo de $s \in \mathbb{C}$, definido como $\sqrt{a^2+b^2}$, donde $a = \mathrm{Re}(s)$ y $b = \mathrm{Im}(s)$
$\arg(s)$	Argumento de $s \in \mathbb{C}$, definido como $\mathrm{arctag}\left(\frac{b}{a}\right)$, donde $a = \mathrm{Re}(s)$ y $b = \mathrm{Im}(s)$
I_n	Matriz identidad de dimensión n
A_0^T	Transpuesta de la matriz $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$
A_0^{-1}	Inversa de la matriz $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$A_0 > 0$	Matriz positiva definida, es decir, $\lambda_0 > 0, ..., \lambda_n > 0$
$\lambda_{\min}(A_0)$	Valor propio mínimo de la matriz $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\lambda_{\max}(A_0)$	Valor propio máximo de la matriz $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\lambda_i(A_0)$	Valor propio i de la matriz $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\ddot{x}(t),\ \dot{x}(t)$	Segunda y primera derivada de la función $x(t)$ con respecto al tiempo t
$\|X\|$	Norma Euclidiana de $X \in \mathbb{R}^n$, definida como $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
$\|A_0\|$	Norma inducida de la matriz $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La norma inducida por la norma euclidiana es igual a $\sqrt{\lambda_{\max}(A_0^T A_0)}$
$C([-h,0],\mathbb{R}^n)$	Conjunto de funciones reales y continuas de dominio $[-h,0]$ y rango $\mathbb{R}^n$ con $h \in \mathbb{R}^+$
$\|\varphi\|_h$	Norma de la función $\varphi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ definida como $\max\limits_{b_0\leq\theta\leq b_1} \|\varphi(\theta)\|$
δ	Coeficiente de amortiguamiento de un sistema de segundo orden subamortiguado
ν	Frecuencia natural no amortiguada de un sistema de segundo orden subamortiguado

Índice general

Agradecimientos II

Notación III

Resumen VII

Abstract VIII

1. Introducción 1
- 1.1. Antecedentes . . . 1
- 1.2. Objetivos de la tesis . . . 2
  - 1.2.1. Objetivos generales . . . 3
  - 1.2.2. Objetivos particulares . . . 3
- 1.3. Motivación . . . 3
- 1.4. Organización de la tesis . . . 5

2. Antecedentes teóricos 6
- 2.1. Sistema con retardo . . . 6
- 2.2. Estabilidad de sistemas con retardos: Enfoque frecuencial . . . 7
- 2.3. Estabilidad de sistemas con retardo: Enfoque temporal . . . 8
  - 2.3.1. Definiciones en el enfoque temporal . . . 8
  - 2.3.2. Estabilidad usando funcionales de Lyapunov-Krasovski . . . 9
  - 2.3.3. Funcionales de tipo completo . . . 10
  - 2.3.4. Robustez de sistemas con retardo . . . 13

3. Sintonización y robustez del controlador PI-Posicast 14
- 3.1. Controlador Posicast en lazo abierto . . . 14
  - 3.1.1. Sintonización del controlador Posicast . . . 14
- 3.2. Controlador PI-Posicast en lazo cerrado . . . 23
  - 3.2.1. Propuesta de lazo de realimentación . . . 23
  - 3.2.2. Análisis en el dominio de la frecuencia . . . 24
  - 3.2.3. Estudio gráfico de σ-estabilidad . . . 26
- 3.3. Estabilidad robusta . . . 30
  - 3.3.1. Cotas de robustez en el espacio paramétrico (ν, δ) . . . 30

3.3.2. Cotas de robustez para un sistema de segundo orden subamortiguado en lazo cerrado con un controlador PI-Posicast obtenidas mediante funcionales de Lyapunov-Krasovskii 37
3.4. Conclusiones 46

4. Estudio de robustez de un controlador PR 47
4.1. Introducción 47
4.2. Sintonización del sistema de segundo orden subamortiguado con controlador PR en el dominio frecuencial 48
4.2.1. Estudio del espacio de parámetros (γ_2, h) 49
4.2.2. Estudio de σ-estabilidad del sistema de segundo orden subamortiguado con lazo de control PR 50
4.3. Estabilidad robusta 53
4.3.1. Cotas de robustez en el espacio de parámetros (δ, ν) 53
4.3.2. Cotas de robustez para un sistema de segundo orden subamortiguado en lazo cerrado con un controlador PR obtenidas mediante funcionales de Lyapunov-Krasovskii 58
4.4. Conclusiones 63

5. Conclusiones y trabajo a futuro 64
5.1. Conclusiones 64
5.2. Trabajos futuros 65

Bibliografía 66

Resumen

En este trabajo de tesis se estudian dos clases de lazos de control basados en retardos de tiempo. Ambos controladores son aplicados a un sistema de segundo orden subamortiguado. El primer controlador se denomina PI-Posicast (Proporcional Integral Posicast), y el segundo es un controlador Proporcional Retardado (PR). El controlador PI-Posicast se construye utilizando al controlador Posicast en cascada con el sistema de segundo orden a controlar, y aplicando un controlador realimentado PI al arreglo en cascada. La sintonización del esquema Posicast se lleva a cabo de acuerdo a resultados clásicos reportados en la literatura. Para la sintonización del lazo de control Proporcional Integral se hace un estudio en el dominio de la frecuencia usando el método de D-particiones y de σ-estabilidad. También se presenta un estudio de robustez en el dominio del tiempo, donde se encuentran cotas que garantizan la estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado cuando se perturban parámetros nominales del sistema de segundo orden subamortiguado. En el caso del controlador Proporcional Retardado se emplean métodos temporales y frecuenciales para estudiar la robustez del sistema en lazo cerrado cuando los parámetros del sistema de segundo orden están sujetos a perturbaciones.

Abstract

In the present thesis we study two controllers based on time delays . Both controllers are applied to a underdamped second order system. The first controller is called the PI-Posicast (Proportional Integral Posicast), and the second is the Delayed Proportional Controller (PR). The PI-Posicast controller consists of a Posicast controller in cascade with the second order system with a Proportional Integral feedback loop. The tuning of the Posicast scheme is achieved according to results reported in the literature. For the tuning of the Integral Proportional control loop, a study is carried out in the frequency domain using the D-partitions and σ-stability method. A robustness study is also performed in the time domain where we find bounds that guarantee the robust stability of the closed-loop system when the nominal parameters of the underdamped second order system are perturbed. In the case of the Delayed Proportional controller, time and frequency domains methods are used to study the robustness of the closed loop system when the parameters of the second order system are subject to disturbances.

Capítulo 1

Introducción

En muchos sistemas se aprecia la presencia de retardos, por ejemplo en las áreas tecnológica, social y económica [18], [7]. Este fenómeno se asocia a menudo al transporte de materia o energía, o al procesamiento de información. Algunos ejemplos de procesos que se pueden modelizar exitosamente como sistemas con retardos son sistemas de combustión, de deshidratación, sistemas de poblaciones y válvulas entre otros.

Existen numerosos trabajos de sistemas basados en retardos de tiempo, éstos tratan de retardos asociados al modelo de la planta. Sin embargo, existen varias contribuciones en la que la inserción premeditada de retardos al lazo de control contribuye de manera positiva al control de la planta [26], [19], [20], [21]. Estas aportaciones son reconocidas dentro de la comunidad científica debido a su simplicidad. La implementación de controladores con retardo resuelven problemas relacionados con ruidos de medición debido a las propiedades de filtrado que estos controladores presentan.

1.1 Antecedentes

En la literatura existente referente a sistemas con retardos existen dos enfoques principales para el estudio y análisis de estabilidad: el enfoque frecuencial y el enfoque temporal:

- En el enfoque *frecuencial* la estabilidad del sistema con retardo está determinada por la ubicación de las raíces del cuasipolinomio característico. Si las raíces se localizan en el semiplano izquierdo complejo el sistema es estable, y si al menos una raíz se encuentra en el semiplano derecho el sistema es inestable [1], [4], [15].

- El enfoque *temporal* se estudia mediante las dos metodologías siguientes: Lyapunov-Krasovskii y Lyapunov-Razumikhin [13],[14], [22], [28],

    1. En el enfoque de Lyapunov-Krasovski donde se utilizan funcionales que contienen términos integrales [7].
    2. En el enfoque de Lyapunov-Razumikhin donde se mantiene la esencia del método de Lyapunov para sistemas libres de retardo utilizando funcionales cua-

dráticas típicas del segundo método de Lyapunov, con su respectiva extensión para sistemas con retardos [8].

Dentro de la literatura referente a estabilidad de sistemas con retardos con enfoque temporal, se encuentra la referencia [8], donde se estudia el enfoque de Lyapunov-Krasovski. Aquí se aplica el segundo método de Lyapunov para la estabilización de sistemas con retardos. La segunda alternativa para estudiar estabilidad, es por medio de la metodología de Lyapunov-Razumikhin.
En [23] se introduce por primera vez el término *Posicast* para un controlador retardado que utiliza conceptos básicos de la respuesta de sistemas de segundo orden lineales subamortiguados para eliminar el comportamiento oscilatorio observado en esta clase de sistemas cuando el coeficiente de amortiguamiento es menor a 1. Se analiza la propuesta de la ley de control que tiene infinito número de ceros, estables. En [2], [3], se modela un servomotor con una función de transferencia de segundo orden y se estudia la estabilización de tal sistema usando el precompensador Posicast, siendo ésta la primera aplicación para este controlador. Utilizando el controlador Posicast se logra estabilizar sistemas de segundo orden subamortiguados en [9] en cascada con un controlador clásico integral I y el sistema en lazo cerrado se analiza aplicando métodos analíticos frecuenciales, específicamente la función de sensitividad. En [10], [27] se estudian las propiedades del controlador *Posicast*, como son su sintonización, además de proveer ejemplos ilustrativos de control en lazo abierto. También se propone un método de sintonización en lazo cerrado utilizando un controlador PID (Proporcional, Integral, Derivativo).
En [26], se presenta una metodología para la estabilización de sistemas con retardos con máximo decaimiento exponencial asegurado; se utiliza método de D-particiones para lograr este fin. En [16] se encuentran condiciones del tipo LMI (Linear Matrix Inequality), que aseguran la estabilidad exponencial del sistema por medio de una funcional del tipo Lyapunov-Krasovskii. También se realiza un estudio de robustez con perturbaciones aditivas en las matrices nominales del sistema en el espacio de estados. Se asegura estabilidad exponencial del sistema perturbado mediante condiciones del tipo LMI.

1.2 Objetivos de la tesis

En esta tesis se estudia el control en lazo cerrado de sistemas de segundo orden subamortiguados, en cascada con un controlador Posicast, mediante una ley de control Proporcional Integral. La adición del lazo de control PI al esquema Posicast permite mejorar las propiedades de robustez de este último manteniendo al mismo tiempo sus propiedades de inyección de amortiguamiento. De igual forma, se estudia la estabilidad robusta de un sistema de segundo orden subamortiguado controlado mediante un controlador Proporcional Retardado (PR) el cual es analizado mediante los enfoques frecuencial y temporal cuando existen perturbaciones en los parámetros del sistema de segundo orden.

1.2.1 Objetivos generales

- Sintonizar un controlador PI aplicado a un controlador Posicast en cascada con un sistema de segundo orden subamortiguado. Este controlador se denomina en lo que sigue como el controlador PI-Posicast.
- Estudiar las propiedades de robustez del controlador PI-Posicast y del controlador PR aplicados a un sistema de segundo orden subamortiguado.

1.2.2 Objetivos particulares

- Utilizar el método de D-partición y σ-estabilidad para sintonizar el controlador PI-Posicast.
- Utilizar funcionales de tipo completo para realizar un estudio de robustez paramétrica de la planta de segundo orden subamortiguada controlados mediante un controlador PI-Posicast .
- Realizar un estudio de robustez en el enfoque temporal para un sistema de segundo orden subamortiguado en lazo cerrado con la ley de control PR.

1.3 Motivación

En esta de tesis se propone revisar la idea del control *Posicast* introducida en [23] para sistemas de segundo orden subamortiguados. Esta ley de control se basa en un filtro el cual se construye usando un retardo de tiempo y se aplica en cascada a la entrada del sistema subamortiguado. Este controlador es capaz de eliminar el comportamiento oscilatorio por completo. Sin embargo, el controlador *Posicast* está limitado en cuanto a sus propiedades de robustez debido a que se aplica en lazo abierto.

Para los propósitos de esta tesis se considera un proceso modelado por un sistema de segundo orden subamortiguado descrito por

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\nu\dot{y}(t) + \nu^2 y(t) = \nu^2 u(t), \tag{1.1}$$

con coeficiente de amortiguamiento $0 < \delta < 1$, frecuencia natural no amortiguada $\nu > 0$ y un filtro *Posicast* propuesto por Smith [23], con función de transferencia

$$G_p(s) = k_1 + (1 - k_1)\, e^{-hs},$$

donde k_1 está dado por

$$k_1 = \frac{1}{1 + A},$$

y

$$A = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}.$$

En la presente tesis se propone utilizar un lazo de control PI (Proporcional Integral),

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s},$$

como se muestra en la Figura 1.1.

Se estudia también el control Proporcional Retardado (PR) de un sistema de segundo orden subamortiguado (1.1). Este esquema se basa en la aproximación de un control Proporcional Derivativo (PD). La idea es sustituir la derivada asociada a la acción Derivativa por su aproximación de Euler:

$$\dot{y}(t) \approx \frac{y(t) - y(t-h)}{h}, \tag{1.2}$$

para un retardo h pequeño. Este controlador ha sido estudiado en [25], [26], donde se realiza su sintonización en el dominio de la frecuencia. Un tema pendiente es el estudio de la robustez de este esquema con respecto a perturbaciones en los parámetros de la planta.

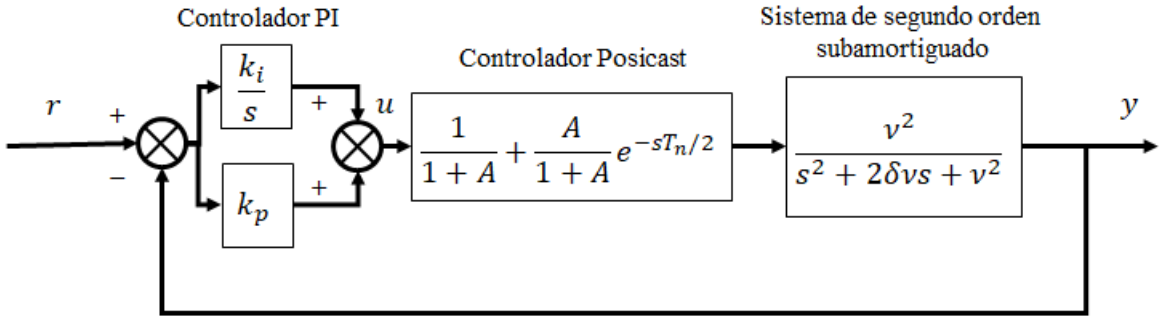

Figura 1.1: Sistema de segundo orden con controlador Posicast y lazo de control PI

1.4 Organización de la tesis

- En el segundo capítulo se presentan conceptos generales, teoremas y resultados de trabajos científicos sobre sistemas con retardos, que son utilizados en este trabajo.
- En el tercer capítulo se estudia el controlador PI-Posicast de un sistema de segundo orden subamortiguado. Se construyen mapas de estabilidad mediante el método de D-particiones. También se realiza un estudio de robustez mediante los enfoque frecuencial y temporal.
- En el cuarto capítulo se estudia un sistema de segundo orden subamortiguado en lazo cerrado con el esquema de control PR (Proporcional Retardado). Se estudia la robustez del lazo cerrado tanto en el marco frecuencial como en el temporal.

Capítulo 2

Antecedentes teóricos

En este capítulo se presentan resultados de interés por su relevancia para la realización de esta tesis. Estos conciernen al estudio de la estabilidad de sistemas con retardos dentro de los enfoques temporal y frecuencial. En el análisis temporal se estudia de manera particular el enfoque de Lyapunov-Krasovskii, enfatizando la aplicación de funcionales de tipo completo. En el marco frecuencial, se presentan los principios básicos del método de D-particiones.

2.1 Sistema con retardo

Sea la ecuación diferencial retardada de un sistema lineal invariante en el tiempo [7],

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $A_0,\ A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices constantes, $h \in \mathbb{R}^+$ es el retardo y $\varphi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones reales y continuas definidas en el intervalo $[-h,0]$ con norma definida como

$$\|\varphi\|_h := \max_{\theta\in[0,h]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Para cada condición inicial $\varphi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ y $t \geq 0$ existe una única solución $x(t,\varphi)$ del sistema (2.1) que satisface la condición inicial

$$x(\theta,\varphi) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h,0].$$

El segmento

$$x_t(\varphi) := x(t+\theta,\varphi), \quad \theta \in [-h,0]$$

se conoce como el estado del sistema (2.1).

2.2 Estabilidad de sistemas con retardos: Enfoque frecuencial

Uno de los principales objetivos dentro del Control Automático es el estudio de la estabilidad. Para este fin el análisis de estabilidad se divide en dos metodologías; la primera se basa en el estudio de la estabilidad de los sistemas en el dominio de la frecuencia, en la cual se encuentran condiciones necesarias y suficientes de estabilidad [1], [8]. La segunda se realiza en el dominio del tiempo y se basa en el uso de funcionales [6], [13].

Se plantean a continuación algunas definiciones y resultados. Una función de transferencia es un cociente que establece una relación entre la transformada de Laplace de la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo y la transformada de Laplace de su entrada, esto es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = F(s). \tag{2.2}$$

Aquí $F(s)$ se denomina función de transferencia del sistema, $R(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada del sistema y $Y(s)$ es la transformada de Laplace de su salida. A su vez, $F(s)$ se reescribe como

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_0 s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n}. \tag{2.3}$$

El denominador de (2.3) se define como polinomio característico, y si éste contiene algún término exponencial se denomina cuasipolinomio característico. El cuasipolinomio característico del sistema (2.1) queda definido como

$$p(s,h) := \det\{sI_n - A_0 - A_1 e^{-hs}\}, \tag{2.4}$$

y para que el sistema (2.1) sea estable, su cuasipolinomio característico (2.4) debe tener todas sus raíces en el semiplano complejo izquierdo. Formalmente:

Definición 2.1. *[6]. El sistema (2.1) es estable si*

$$\{s \in \mathbb{C} : p(s,h) \text{ y } \mathrm{Re}(s) > 0\} = 0.$$

Definición 2.2. *[6]. Las raíces del cuasipolinomio característico (2.4) que se encuentran ubicadas en el semiplano derecho del plano complejo son conocidas como raíces inestables de (2.4). Las raíces estables de (2.4) son las que se ubican en el semiplano izquierdo del plano complejo..*

Lema 2.1. *[6]. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un número finito de raíces con parte real más grande que α. Considere el cuasipolinomio característico (2.4) estable y sea*

$$\sigma_0 = \max_{j=1,\dots,\infty} \{\mathrm{Re}\{s_j\} : p(s_j,h) = 0; h \in \mathbb{R}^+,\ s_j \in \mathbb{C}\}, \tag{2.5}$$

entonces, para cada $\alpha > \sigma_0$ existe una constante $L > 1$ tal que las soluciones del sistema (2.1) satisfacen la siguiente cota de decaimiento exponencial

$$\|x(t,\varphi)\| \leq Le^{-\alpha t}\|\varphi\|_h, \quad \forall t \geq 0.$$

Además, si la estabilidad del sistema (2.1) es dependiente del retardo, entonces el valor de $\sigma_0 = \sigma_0(h)$ varía continuamente con respecto al valor del retardo h.

Lema 2.2. *[6]. Sea el sistema (2.1) y su función característica (2.4). Si el sistema (2.1) es estable asintóticamente, entonces es estable exponencialmente, es decir, existen constantes positivas β y σ tales que*

$$\|x(t,\varphi)\| \leq \beta e^{-\sigma t}\|\varphi\|_h, \quad \forall t \geq 0.$$

Asimismo, se dice que el sistema (2.1) es σ-estable.

Teorema 2.1. *[11]. Sea el cuasipolinomio característico (2.4) del sistema (2.1) de grado n tal que no tiene raíces sobre el eje imaginario. La función característica (2.4) no tiene raíces con parte real positiva si y sólo si la variación de $p(j\omega, h)$ es igual a $n\pi/2$ cuando ω varía de 0 a ∞. En otras palabras, la función característica (2.4) es estable si el cambio neto del argumento satisface*

$$\arg\{p(j\omega,h)\}\big|_{\omega=0}^{\infty} = n\frac{\pi}{2}.$$

2.3 Estabilidad de sistemas con retardo: Enfoque temporal

Para el estudio de la estabilidad de sistemas con retardos en el enfoque temporal, se presentan los siguientes Teoremas y Definiciones para un sistema con retardo de la forma (2.1). Para determinar si un sistema con retardos es estable se emplean extensiones del enfoque de Lyapunov. Dentro de estas juegan un papel destacado las funcionales de Lyapunov-Krasovski, en particular las de tipo completo, y las funciones de Lyapunov-Razumikhin.

2.3.1 Definiciones en el enfoque temporal

Definición 2.3. *[13]. Una funcional del estado x_t denotada $v(x_t)$, se define como*

$$v(x_t) : C([-h,0],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

$$x_t \longrightarrow v(x_t).$$

Definición 2.4. *[13]. La funcional $v(x_t)$ es acotada si transforma cualquier conjunto acotado de $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ a un conjunto también acotado en $\mathbb{R}^+$.*

Definición 2.5. *[13]. La funcional $v(x_t)$ es definida positiva si;*

- *existe $H > 0$ tal que $v(x_t)$ es definida positiva $\forall\ \|x_t\|_h < H$,*
- *$v(x_t)$ es continua y acotada,*
- *$v(x_t) = 0$, si $x_t = 0$ y $v(x_t) > 0$, si $x_t \neq 0$.*

Definición 2.6. *[6]. La solución trivial del sistema (2.1) es estable si $\forall\ \varepsilon$ y $t_0 > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon, t_0) \mid \forall$ condición inicial φ, $\|\varphi\|_h < \delta$, ésto implica que*

$$\|x(t, \varphi, t_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si δ es independiente de t_0 la estabilidad es uniforme, es decir, δ sólo depende de ε.

Definición 2.7. *[6]. La solución trivial del sistema (2.1) es asintóticamente estable si $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall\ \varphi$ se cumple que $\|\varphi\|_h < \Delta$, entonces*

- $\|x(t, \varphi, t_0)\| < \varepsilon\ \forall\ t\ \geq\ t_0$,
- $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, \varphi, t_0) \longrightarrow 0$.

Si Δ es independiente de t_0, la estabilidad es uniforme asintótica.

Definición 2.8. *([6]). La solución trivial del sistema (2.1) es exponencialmente estable si $\forall t_0 > 0$ existen $\Delta,\ \sigma,\ \gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que si $\|\varphi\|_h < \Delta$, la solución satisface*

$$\|x(t, \varphi, t_0)\| \leq \gamma\ \|\varphi\|_h\ e^{-\sigma(t-t_0)} \qquad \forall t \geq t_0.$$

2.3.2 Estabilidad usando funcionales de Lyapunov-Krasovski

Teorema 2.2. *[13]. El sistema (2.1) es estable si existe una funcional continua diferenciable $v(.)$ y funciones continuas no decrecientes $u_1,\ u_2$ y $w\ :\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow\ \mathbb{R}^+$, donde $u_1(s) > 0,\ u_2(s) > 0$, para $s > 0$ y $u_1(0) = u_2(0) = 0$, tales que*

- $u_1(\|x(t)\|) \leq v(x_t) \leq u_2(\|x_t\|_h)$,
- $\dot{v}(x_t) \leq -w(\|x(t)\|)$.

si además $w(s) > 0$ para $s > 0$ y $w(0) = 0$, entonces el sistema (2.1) es asintóticamente estable.

Teorema 2.3. *[8]. Dadas constantes positivas $\alpha_0,\ \alpha_1$ y σ, si existe una funcional continua diferenciable acotada $v(x_t)$ tal que*

1. $\alpha_1\|x(t)\|^2 \leq v(x_t) \leq \alpha_2\|x_t\|_h^2, \qquad \forall\ t \geq 0,$
2. $\dot{v}(x_t) + 2\sigma v(x_t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$

entonces, para cada $\varphi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$, las soluciones del sistema (2.1) satisfacen la siguiente cota de decaimiento exponencial

$$\|x(t,\varphi)\| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\varphi\|_h e^{-\sigma t}.$$

2.3.3 Funcionales de tipo completo

Sea el sistema con retardo (2.1). También se supone la existencia de una función inicial que pertenece al espacio de funciones continuas por partes $\varphi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, definidas en el segmento $[-h,0]$. Sea $x(t,\varphi)$ la solución del sistema (2.1) sujeta a la condición inicial

$$x(\theta,\varphi) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h,0].$$

Se dice que $x_t(\varphi)$ denota la restricción de la solución al segmento $[t-h,t]$.

Sea el sistema (2.1) y supóngase que es exponencialmente estable. Dada una forma cuadrática $w(x) = x^T(t)Wx(t)$ se define una funcional $v(\varphi)$ en $([-h,0],\mathbb{R})$ tal que la derivada a lo largo de sus trayectorias es

$$\frac{d}{dt}v(x_t) = -x^T(t)Wx(t), \quad t \geq 0. \tag{2.6}$$

Entonces, la funcional cuadrática $v(\varphi)$ definida como

$$\begin{aligned} v(\varphi) &= \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0)\int_{-h}^{0} U(-h-\theta)A_1\varphi(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h}^{0} \varphi^T(\theta_1)A_1^T\left[\int_{-h}^{0} U(-\theta_1-\theta_2)A_1\varphi(\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1, \end{aligned} \tag{2.7}$$

satisface el requerimiento establecido en (2.6). Se observa que todos los términos de la funcional (2.7) dependen de la matriz $U(\tau)$ definida a continuación.

Definición 2.9. *[12]. La matriz $U(\tau)$ se conoce como matriz de Lyapunov del sistema (2.1) asociada a la matriz W y se define como*

$$U(\tau) = \int_0^{\infty} K^T(t)WK(t+\tau)dt. \tag{2.8}$$

Definición 2.10. *[12]. Dada la matriz de Lyapunov (2.8) asociada a la matriz W, entonces las matrices auxiliares*

$$\begin{aligned} Y(\tau) &= U(\tau), \\ Z(\tau) &= U(\tau-h), \qquad \tau \in [0,h], \end{aligned}$$

satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}Y(\tau) &= Y(\tau)A_0 + Z(\tau)A_1,\\ \frac{d}{d\tau}Z(\tau) &= -A_1^T Y(\tau) - A_0^T Z(\tau),\end{aligned} \tag{2.9}$$

asociado a las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}Y(0) &= Z(h),\\ A_0^T Y(0) + Y(0)A_0 + A_1^T Y(h) + Z(0)A_1 &= -W.\end{aligned}$$

La operación vectorización está definida como

$$\mathrm{vec}(Q) = q,$$

donde $q \in \mathbb{R}^{n^2}$. La operación satisface

$$\mathrm{vec}(AQB) = (A \otimes B)q,$$

donde la matriz

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \cdots & b_{n1}A \\ b_{12}A & b_{22}A & \cdots & b_{n2}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n}A & b_{2n}A & \cdots & b_{nn}A \end{bmatrix},$$

es el producto de Kronecker de las matrices A y B.

Entonces, de acuerdo a la notación anterior el sistema (2.9) se escribe como

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} I \otimes A_0 & I \otimes A_1 \\ -A_1^T \otimes I & -A_0^T \otimes I \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

donde $y(\tau) = \mathrm{vec}(Y(\tau))$ y $z(\tau) = \mathrm{vec}(Z(\tau))$, además, las condiciones iniciales de (2.9) son

$$M \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} y(h) \\ z(h) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

además, se define $w = \mathrm{vec}(W)$ y

$$M = \begin{bmatrix} I_{n^2} & 0_{n^2} \\ A_0^T \otimes I + I \otimes A_0 & I \otimes A_1 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0_{n^2} & -I_{n^2} \\ A_1^T \otimes I & 0_{n^2} \end{bmatrix}.$$

Resolviendo (2.10) se observa que

$$\begin{bmatrix} y(h) \\ z(h) \end{bmatrix} = e^{Lh} \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Sustituyendo (2.12) en (2.11) se tiene que

$$\left[M + Ne^{Lh}\right] \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

y despejando las condiciones iniciales de la ecuación (2.13), se llega a

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = - \left[M + Ne^{Lh}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Sustituyendo (2.14) en (2.12), se obtiene

$$\begin{bmatrix} y(h) \\ z(h) \end{bmatrix} = -e^{Lh} \left[M + Ne^{Lh}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

donde $y(h)$ representa una expresión analítica para la matriz de Lyapunov $U(\tau)$.

Lema 2.3. *[12]. La matriz de Lyapunov (2.8) satisface las siguientes propiedades*

1. ***Propiedad dinámica***

$$\frac{d}{dt}U(\tau) = U(\tau)A_0 + U(\tau - h)A_1, \quad \tau \geq 0. \tag{2.16}$$

2. ***Propiedad simétrica***

$$U(-\tau) = U^T(\tau). \tag{2.17}$$

3. ***Propiedad algebraica***

$$U(0)A_0 + U(-h)A_1 + A_0^T U(0) + A_1^T U(h) = -W. \tag{2.18}$$

Teorema 2.4. *[12]. Dadas 3 matrices simétricas W_0, W_1 y W_2, se define la funcional*

$$w(\varphi) = \varphi^T(0)W_0\varphi(0) + \varphi^T(-h)W_1\varphi(-h) + \int_{-h}^{0} \varphi^T(\theta)W_2\varphi(\theta)d\theta. \tag{2.19}$$

Si existe una matriz de Lyapunov $U(\tau)$ asociada a la matriz $W = W_0 + W_1 + hW_2$ y $v(\varphi)$ es la funcional (2.7) de esta matriz de Lyapunov, entonces la derivada respecto al tiempo de la funcional modificada, denominada funcional de tipo completo descrita a continuación

$$v_c(\varphi) = v(\varphi) + \int_{-h}^{0} \varphi^T(\theta)\left[W_1 + (h+\theta)W_2\right]\varphi(\theta)d\theta, \tag{2.20}$$

a lo largo de las trayectorias del sistema (2.1) es

$$\frac{d}{dt}v_c(x_t) = -w(x_t), \quad t \geq 0.$$

Teorema 2.5. *[12]. El sistema (2.1) es exponencialmente estable si y sólo si existe una funcional* $v \in ([-h, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *tal que las siguientes condiciones son satisfechas*

1. $\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2$, *para algunas constantes positivas* α_1, α_2.
2. *La derivada respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema (2.1) satisface la siguiente desigualdad para algún* $\beta > 0$

$$\frac{d}{dt} v(x_t) \leq -\beta \|x(t)\|^2, \quad t \geq 0.$$

2.3.4 Robustez de sistemas con retardo

La idea principal de esta sección es presentar un resultado de robustez mediante el uso de funcionales de tipo completo que conduce a cotas para sistemas con retardo perturbados paramétricamente.

Sea el sistema (2.1) reescrito como un sistema perturbado en los matrices A_0 y A_1

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta_0)\, x(t) + (A_1 + \Delta_1)\, x(t-h), \tag{2.21}$$

donde Δ_0 y Δ_1 son matrices desconocidas tales que

$$\|\Delta_0\| \leq \rho_0, \ \|\Delta_1\| \leq \rho_1. \tag{2.22}$$

Lema 2.4. *[12]. La derivada con respecto al tiempo de la funcional (2.7) a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (2.21) es*

$$\frac{d}{dt} v(x_t) = -w(x_t) + 2\left[\Delta_0 x(t) + \Delta_1 y(t-h)\right]^T \left[U(0)x(t) + \int_{-h}^{0} U(-h-\theta) A_1 y(t+\theta) d\theta\right].$$

Teorema 2.6. *[12]. Sea el sistema (2.1) exponencialmente estable. Sean las matrices* W_0, W_1 *y* W_2 *positivas definidas, entonces el sistema (2.21) permanece exponencialmente estable para todas* Δ_0, Δ_1 *satisfaciendo (2.22) y las siguientes desigualdades*

1. $\lambda_{\min}(W_0) \geq \bar{\nu}\,(2\rho_0 + ha\rho_0 + \rho_1)$,
2. $\lambda_{\min}(W_1) \geq \bar{\nu}\rho_1\,(1 + ha)$,
3. $\lambda_{\min}(W_2) \geq \bar{\nu} a\,(\rho_0 + \rho_1)$.

Capítulo 3

Sintonización y robustez del controlador PI-Posicast

Al controlador Posicast en cascada con un sistema de segundo orden subamortiguado se le añade un lazo de control PI (Proporcional Integral). Se propone la sintonización del nuevo controlador PI-Posicast mediante el método de D-particiones. También se obtienen en el dominio temporal cotas de robustez que garantizan la estabilidad robusta del sistema perturbado con controlador PI-Posicast.

3.1 Controlador Posicast en lazo abierto

En la década de los cincuentas Smith propuso un controlador denominado Posicast que se aplica en cascada a un sistema de segundo orden subamortiguado [23]. El efecto del controlador sobre la salida del sistema es que logra eliminar la respuesta oscilatoria. Lo anterior es debido a que los polos de la función de transferencia del sistema de segundo orden se cancelan con los ceros del controlador Posicast.

3.1.1 Sintonización del controlador Posicast

Se define el sistema de segundo orden

$$W(s) = \frac{\nu^2}{s^2 + 2\delta\nu s + \nu^2}, \tag{3.1}$$

donde $0 < \delta < 1$ es el coeficiente de amortiguamiento y $\nu > 0$ es la frecuencia natural no amortiguada del sistema. En la Figura 3.1 se muestra un diagrama de bloques del controlador Posicast propuesto por Smith.

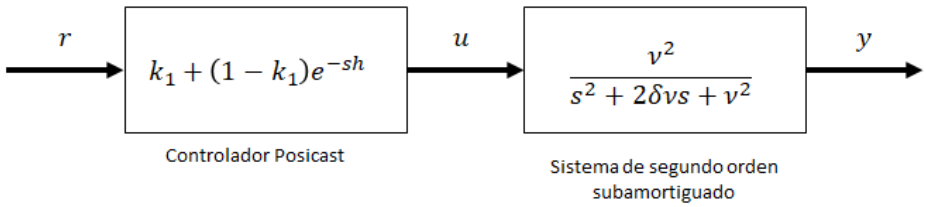

Figura 3.1: Controlador Posicast en cascada con el sistema de segundo orden subamortiguado (3.1).

El parámetro $k_1 \in \mathbb{R}^+$, se define como

$$k_1 = \frac{1}{1 + A}, \tag{3.2}$$

y A es el máximo sobreimpulso del sistema subamortiguado

$$A = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}. \tag{3.3}$$

La idea principal del controlador Posicast es dividir la señal de referencia en dos partes de tal forma que la primera parte de la señal es aplicada inmediatamente y la segunda parte de la señal se aplica con un retardo de tiempo

$$T_n = 2h \geq 0, \tag{3.4}$$

donde T_n es el periodo natural del sistema de segundo orden subamortiguado. El retardo está definido como

$$h = \frac{\pi}{\nu\sqrt{1 - \delta^2}}. \tag{3.5}$$

En la Figura 3.2 se muestra el máximo sobreimpulso A y el periodo natural T_n de la respuesta al escalón de un sistema de segundo orden subamortiguado. El objetivo del controlador Posicast es alcanzar la referencia en el tiempo $h = T_n/2$.

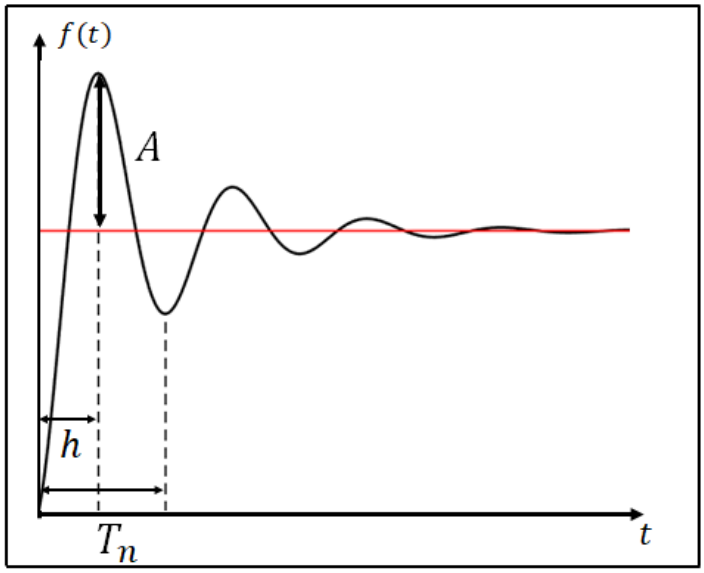

Figura 3.2: Periodo natural de la respuesta del sistema de segundo orden subamortiguado (3.1) con $0 < \delta < 1$.

La función de transferencia del controlador Posicast es

$$P(s) = \frac{1}{1+A} + \left(\frac{A}{1+A}\right) e^{-sh}. \tag{3.6}$$

En la Figura 3.3 se observa que el controlador Posicast retarda la parte $\frac{A}{1+A}$ de la señal de referencia en un tiempo $t < h$. Posteriormente, la salida del sistema de segundo orden subamortiguado alcanza el valor de la referencia. Entonces, el controlador Posicast logra que la salida converja al valor de la referencia en un tiempo $t \geq h$ y también reduce el error en estado estacionario a cero. En la Figura 3.4 se muestra el efecto del controlador Posicast sobre el sistema de segundo orden (3.1).

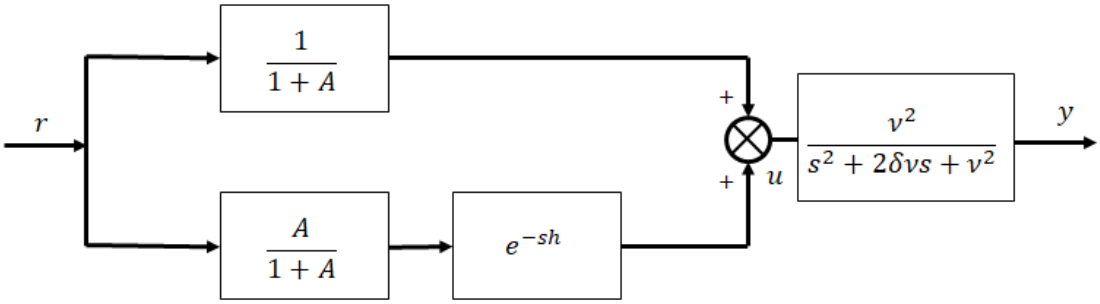

Figura 3.3: Diagrama de bloques modificado del controlador Posicast aplicado al sistema de segundo orden subamortiguado (3.1).

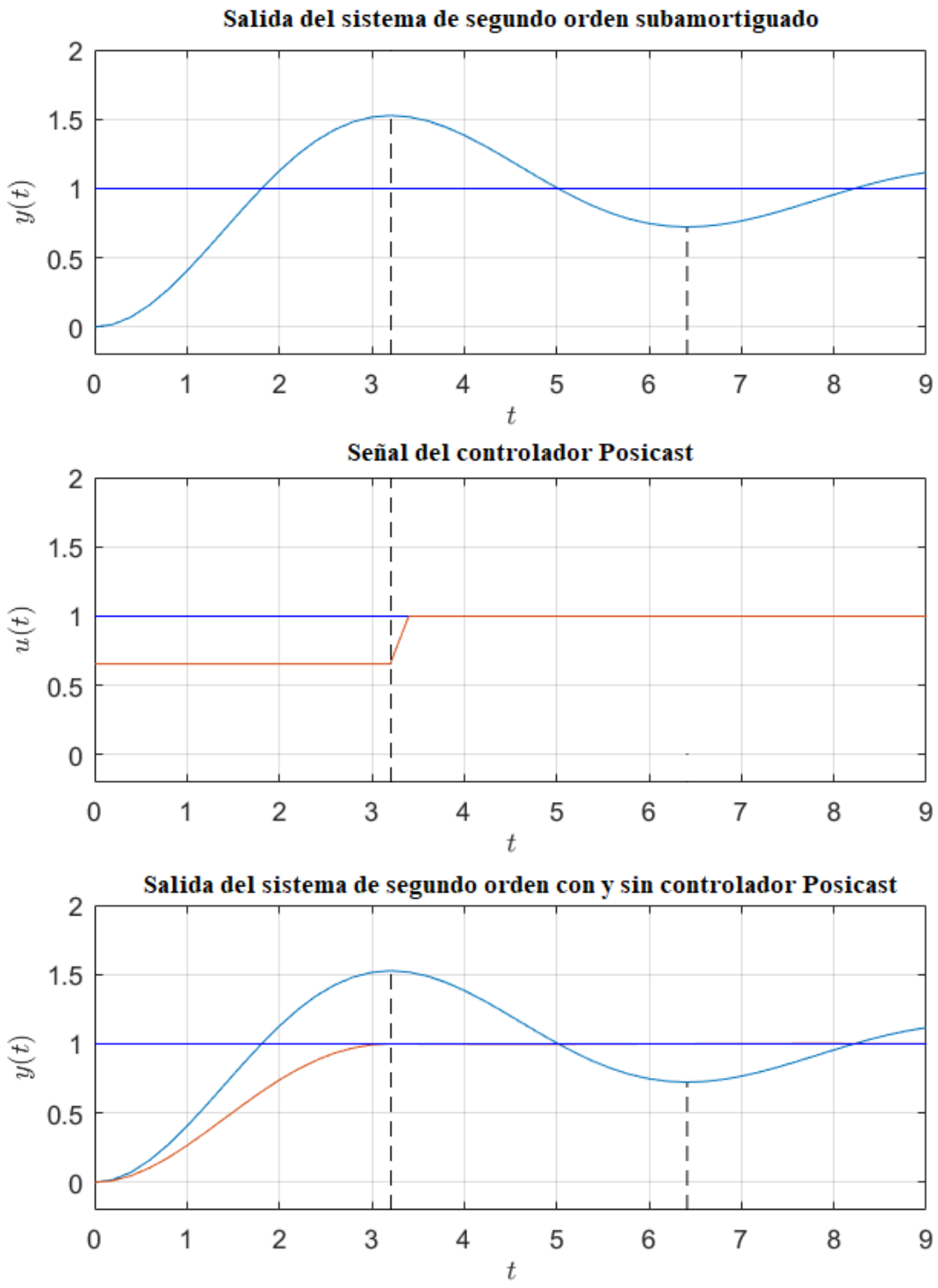

Figura 3.4: a) Salida del sistema de segundo orden subamortiguado (3.1) con $0 < \delta < 1$, b) Señal del controlador Posicast, c) ■ Salida del sistema de segundo orden en cascada con el Controlador Posicast, ■ Salida del sistema de segundo orden subamortiguado sin controlador Posicast.

En el dominio de la frecuencia el controlador Posicast posee un número infinito de ceros de los cuales el primer par de ceros complejos conjugados cancelan el par de polos resonantes del sistema subamortiguado (3.1), todos los demás ceros son estables. Los polos complejos conjugados dominantes correspondientes al controlador Posicast son

$$s_p = -\frac{\omega_d}{\pi} \ln\left(\frac{1}{A}\right) \pm j\omega_d\,(1+2n)\,, \tag{3.7}$$

donde

$$\omega_d = \nu\sqrt{1-\delta^2}.$$

En la Figura 3.5 -(a) se muestra el par de polos complejos conjugados del sistema de segundo orden subamortiguado, éstos se sitúan a una distancia $-\sigma$ respecto del origen sobre el eje real definida como

$$\sigma = \delta\nu,$$

además, existe una distancia $\pm\omega_d$ respecto del origen sobre el eje imaginario. En la Figura 3.5 -(b) se aprecian los ceros del controlador Posicast de acuerdo a la ecuación (3.7). Se observa que los dos primeros ceros complejos conjugados del controlador Posicast coinciden en ubicación con los polos complejos conjugados del sistema de segundo orden subamortiguado. En la Figura 3.5 -(c) se aprecia la cancelación de polos del sistema de segundo orden subamortiguado con los ceros del controlador Posicast cuando se combinan en cascada quedando sólo ceros estables.

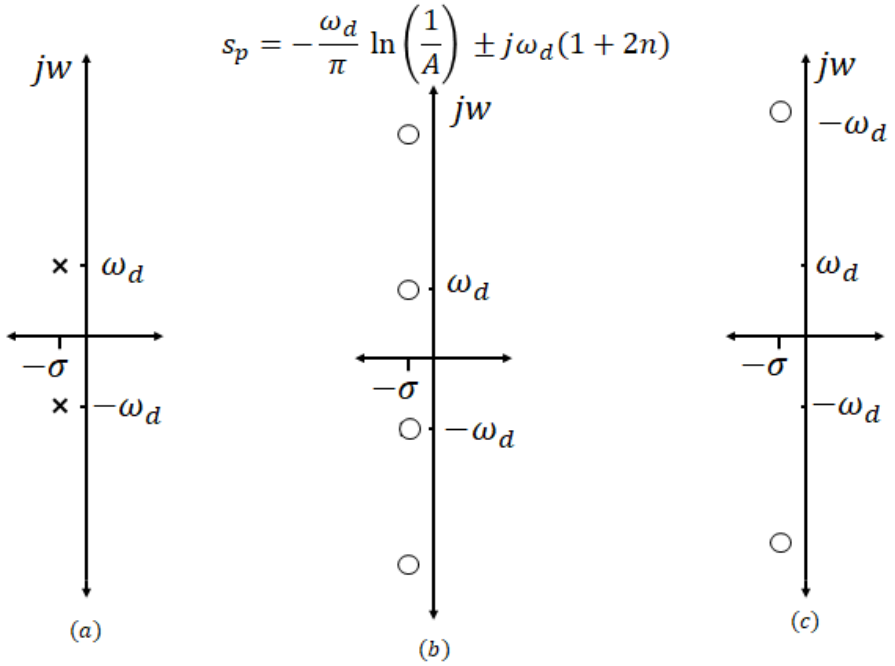

Figura 3.5: a) ($\times$) Polos del sistema de segundo orden subamortiguado (3.1), b) ($\circ$) Ceros estables del controlador Posicast (3.7), c) Cancelación de polos resonantes del sistema subamortiguado.

Ejemplo 3.1. ***Sintonización del controlador Posicast en lazo abierto***

Se propone aplicar el controlador Posicast en lazo abierto al sistema subamortiguado (3.1) con $\delta = 0.2$ *y* $\nu = 1$ *y observar la cancelación de la oscilación a la salida del sistema. La función de transferencia (3.1) del sistema de segundo orden es*

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}.$$

La respuesta escalón del sistema con ν *y* δ *dados se aprecia en la Figura 3.6 donde se observa un comportamiento oscilatorio. Para la sintonización del controlador Posicast se calcula el tiempo de retardo* h *y el sobreimpulso* A

$$h = \frac{\pi}{\nu\sqrt{1-\delta^2}} = 3.2064,$$

$$A = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.5266,$$

$$k_1 = \frac{1}{1+A} = 0.6550.$$

Por lo tanto, la función de transferencia del controlador Posicast es

$$P(s) = 0.6550 + 0.3450e^{-3.2064s}.$$

En la Figura 3.6 se observa que debido a la introducción en cascada del controlador Posicast con el sistema de segundo orden subamortiguado, las oscilaciones han desaparecido en la salida. Además, se alcanza el valor de referencia en la mitad del periodo de oscilación, es decir en $t = 3.2064s$.

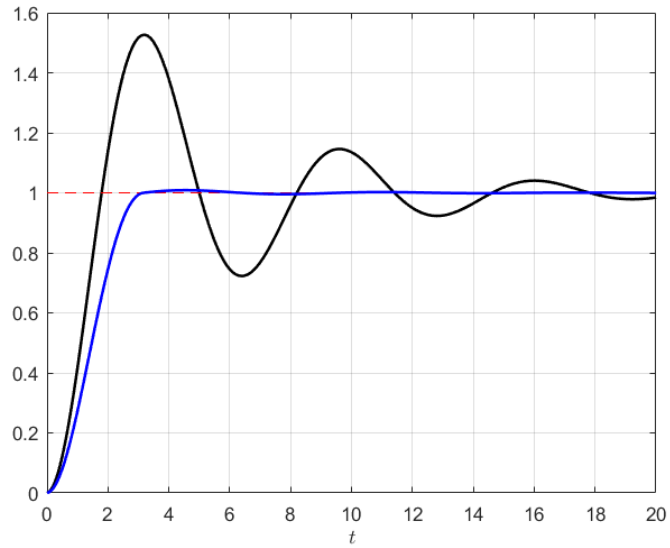

Figura 3.6: ■ Salida del sistema de segundo orden (3.1) sin controlador Posicast, ■ Salida del sistema de segundo orden con controlador Posicast, - - - Referencia.

Ejemplo 3.2. *Sea el sistema de segundo orden subamortiguado estudiado en el Ejemplo 3.1. Ahora, se realiza un cambio deliberado en los parámetros del controlador Posicast, como* $h = 1.5$ *s, lo cual repercute en el tiempo de establecimiento además de que el controlador Posicast deja de ser efectivo, como se aprecia en la Figura 3.7, aquí la salida con el controlador aplicado muestra oscilaciones. De igual forma, se agrega una perturbación constante a la entrada de la planta de segundo orden. Esto se ilustra en la Figura 3.8.*

En la Figura 3.9 se observa la salida del sistema de segundo orden subamortiguado con controlador Posicast y la salida del mismo sistema con controlador Posicast y una perturbación externa pero constante. Cuando se añade la perturbación constante la salida del sistema de segundo orden subamortiguado con controlador Posicast no converge al valor de la referencia, y por consiguiente existe error en estado estacionario.

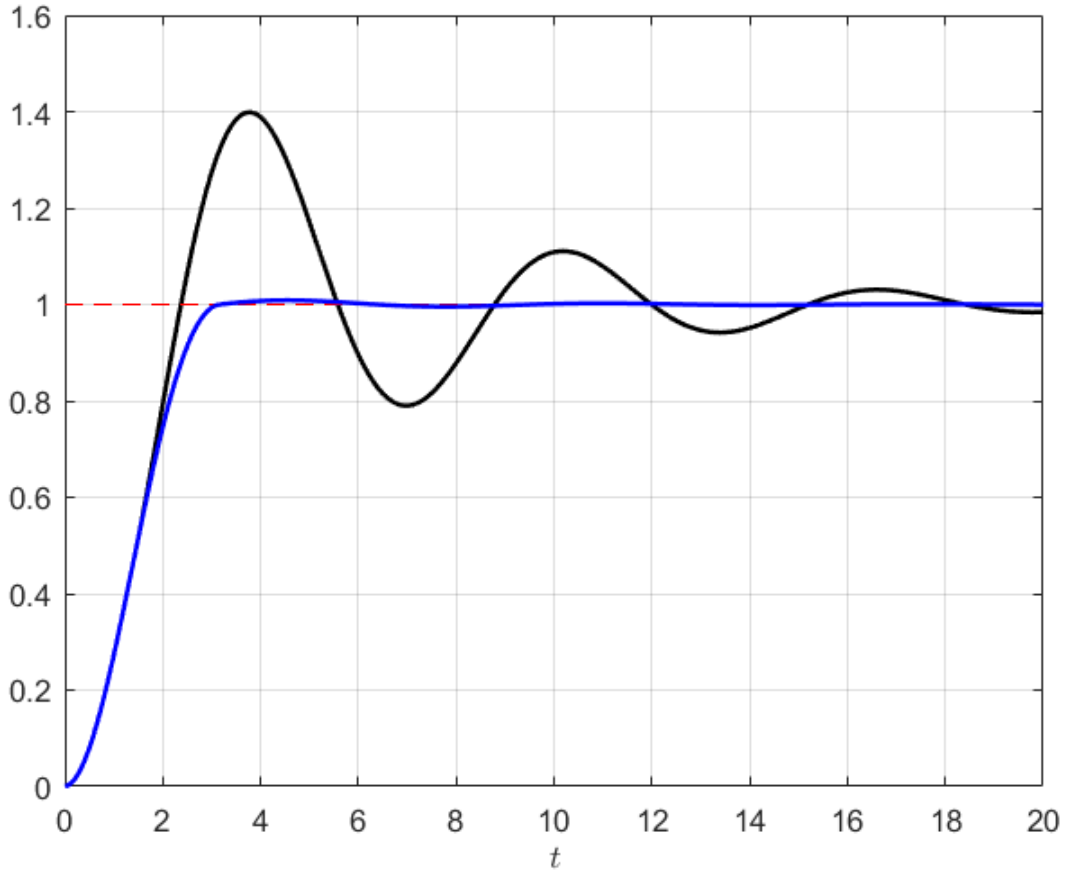

Figura 3.7: ■ Salida del sistema de segundo orden subamortiguado (3.1) con controlador Posicast, ■ Salida del sistema de segundo orden subamortiguado con controlador Posicast y parámetro h perturbado, - - - Referencia.

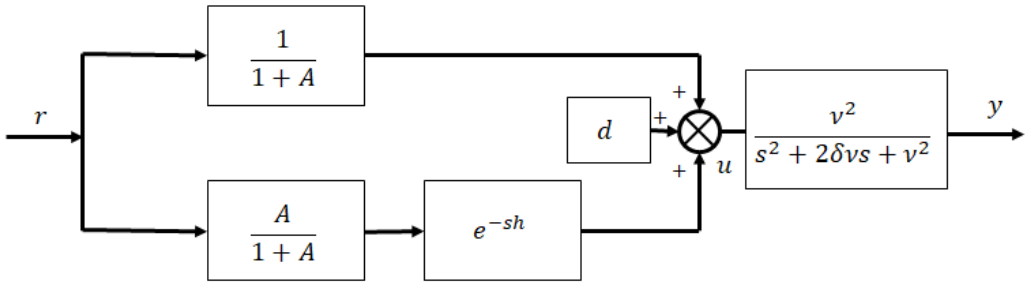

Figura 3.8: Esquema del control Posicast añadiendo una perturbación d.

Para analizar el error en estado estacionario cuando el controlador Posicast en lazo abierto usa una referencia constante se prosigue de la siguiente manera. La función de transferencia del sistema con controlador Posicast está dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = W(s)P(s).$$

Entonces, la salida en el dominio de la frecuencia es

$$Y(s) = W(s)P(s)R(s).$$

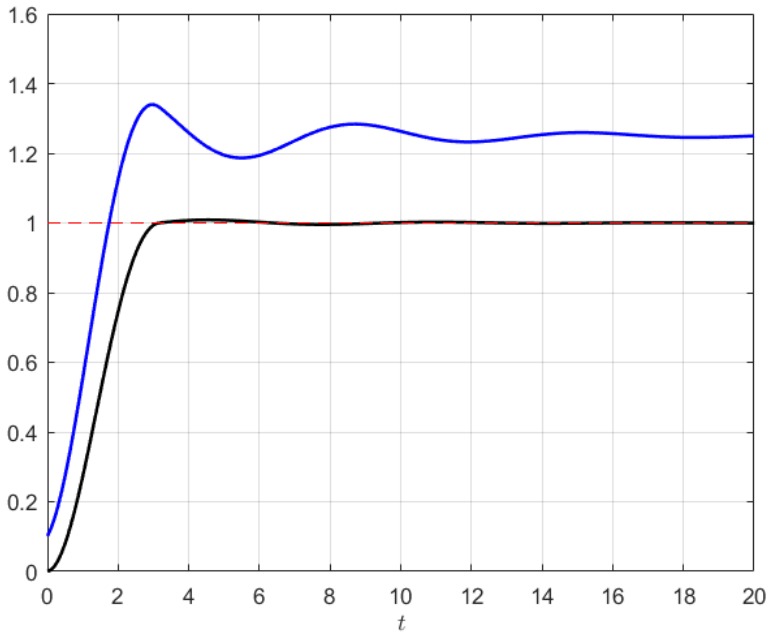

Figura 3.9: ■ Sistema de segundo orden (3.1) sin perturbación con controlador Posicast, ■ Sistema de segundo orden perturbado con controlador Posicast, - - - Referencia.

La transformada de Laplace de la referencia constante es

$$R(s) = \frac{r}{s},$$

además, la función de transferencia del controlador Posicast está dada por la ecuación (3.6). Usando el Teorema del valor final [24]

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) &= \lim_{s\to 0} sW(s)P(s)R(s), \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s\nu^2\left(k_1 + (1-k_1)e^{-sh}\right)R(s)}{s^2 + \delta\nu s + \nu^2}, \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s\left(k_1 + (1-k_1)e^{-sh}\right)\nu^2 r}{s(s^2 + \delta\nu s + \nu^2)}, \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\left(k_1 + (1-k_1)e^{-sh}\right)\nu^2 r}{s^2 + \delta\nu s + \nu^2}, \\
&= r.
\end{aligned}$$

Se concluye entonces que la salida del sistema en estado estacionario siempre alcanza y permanece en el valor de la referencia r. Cuando existe una perturbación constante ésto no se cumple. La función de transferencia de la reducción del diagrama de bloques mostrado en la Figura 3.8 es

$$\frac{Y_1(s)}{R(s)} = P(s)W(s),$$

y

$$\frac{Y_2(s)}{D(s)} = W(s),$$

entonces,

$$Y_d(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = W(s)\big[P(s)R(s) + D(s)\big].$$

La transformada de Laplace de la perturbación constante es

$$D(s) = \frac{d}{s},$$

y usando nuevamente el Teorema del valor final

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y_d(t) &= \lim_{s\to 0} sY_d(s), \\
&= \lim_{s\to 0} W(s)\big[P(s)R(s) + D(s)\big], \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\nu^2 s}{s^2 + 2\delta\nu s + \nu^2}\left[\frac{\left(k_1 + (1-k_1)e^{-sh}\right)r}{s} + \frac{d}{s}\right], \\
&= r + d.
\end{aligned}$$

Entonces, por efecto de una perturbación externa y constante aplicada al sistema de segundo orden, en la salida siempre existirá error en estado estacionario. Por lo tanto, para añadir robustez ante tal perturbación se propone aplicar un lazo de control realimentado PI (Proporcional Integral) al controlador Posicast en cascada con la planta de segundo orden subamortiguada. Esto se detalla en la siguiente sección.

3.2 Controlador PI-Posicast en lazo cerrado

A continuación, se realiza el análisis de la adición de un controlador PI (Proporcional Integral) al controlador Posicast en cascada con el sistema de segundo orden, y observar las consecuencias que éste tiene ante los efectos de las perturbaciones constantes. En efecto, al ser el controlador Posicast en lazo abierto, en caso de incertidumbre en los parámetros de la planta de segundo orden, los beneficios descritos en la sección anterior se pierden debido a que las cancelaciones exactas de ceros y polos resonantes ya no ocurren.

3.2.1 Propuesta de lazo de realimentación

Nuevamente se considera un proceso modelado por un sistema de segundo orden subamortiguado, ésto es, con $0 < \delta < 1$, y el controlador Posicast propuesto por Smith. Se plantea aplicar al sistema descrito un controlador Proporcional Integral en lazo cerrado, por lo que el controlador es:

$$U(s) = \left[k_p + \frac{k_i}{s}\right]\left[\frac{1}{1+A} + \left(\frac{A}{1+A}\right)e^{-sh}\right] \tag{3.8}$$

El diagrama de bloques del sistema de segundo orden subamortiguado con controlador PI-Posicast se muestra en la Figura 3.10.

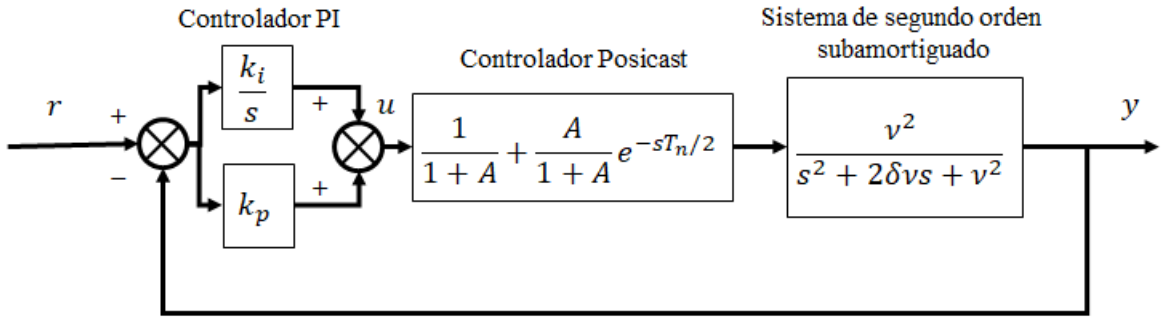

Figura 3.10: Sistema de segundo orden subamortiguado (3.1) con controlador PI-Posicast

3.2.2 Análisis en el dominio de la frecuencia

La reducción del diagrama de bloques del sistema mostrado en la figura (3.10) produce la siguiente función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\nu^2 k_i(1-k_1)e^{-hs} + \nu^2 k_p(1-k_1)se^{-hs} + \nu^2 k_1 k_p s + \nu^2 k_1 k_i}{s^3 + 2\delta\nu s^2 + (\nu^2 + \nu^2 k_1 k_p)s + \nu^2 k_1 k_i + \nu^2 k_i(1-k_1)e^{-hs} + \nu^2 k_p(1-k_1)se^{-hs}}, \tag{3.9}$$

por lo que el cuasipolinomio característico del sistema está dado por la ecuación

$$\begin{aligned} p_{cl}(s, k_p, k_i) = s^3 + 2\delta\nu s^2 + \nu^2(1 + k_1 k_p)s + \nu^2(1 + k_1 k_i) + \nu^2 k_p\,(1-k_1)\,se^{-sh} \\ + k_i \nu^2\,(1-k_1)\,e^{-sh}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A continuación se usa el método de D-particiones [17]. Para calcular los cruces de estabilidad/inestabilidad, es necesario realizar la sustitución $s = 0$ y $s = j\omega$ en la ecuación $p_{cl}(s, k_p, k_i) = 0$, y determinar los valores de k_p y k_i para los cuales el sistema en lazo cerrado es estable.

Caso $s = 0$; Sustituyendo $s = 0$ en la ecuación (3.10) e igualando a cero se tiene

$$p_{cl}(0, k_p, k_i) = \nu^2 k_i\,((1-k_1) + k_1) = 0.$$

Despejando k_i de la ecuación anterior se obtiene

$$k_i = 0. \tag{3.11}$$

Se concluye que en el espacio de parámetros se tiene una recta en cero para el eje k_i. De acuerdo al método de D-particiones lo anterior indica el lugar donde los polos cruzan de zonas estables a inestables.

Caso $s = j\omega$; Se sustituyen en la ecuación (3.10) $s = i\omega$ y $e^{-sh} = \cos h\omega + i \sin h\omega$. Separando la parte real de la imaginaria e igualando ambas partes a cero se tiene

$$\begin{aligned} Re(p_{cl}) = -2\delta\nu\omega^2 + \nu^2 k_i \cos(h\omega) - k_1\nu^2 k_i \cos(h\omega) + \nu^2\omega k_p \sin(h\omega) \\ -k_1\nu^2\omega k_p \sin(h\omega) + k_1\nu^2 k_i = 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} Im(p_{cl}) = -\nu^2 k_i \sin(h\omega) + k_1\nu^2 k_i \sin(h\omega) + \nu^2\omega k_p \cos(h\omega) - k_1\nu^2\omega k_p \cos(h\omega) \\ +k_1\nu^2\omega k_p + \nu^2\omega - \omega^3 = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Despejando k_p y k_i, parámetros desconocidos del controlador que se requieren sintonizar, se obtienen las ecuaciones paramétricas en el espacio (k_p, k_i), ver Figura 3.11.

$$k_p = \frac{2\delta\,(k_1-1)\,\nu\omega \sin(h\omega) + (k_1-1)\,(-(\nu-\omega))(\nu+\omega)\cos(h\omega) + k_1(\nu-\omega)(\nu+\omega)}{\nu^2\,(2\,(k_1-1)\,k_1(\cos(h\omega)-1)-1)}, \tag{3.14}$$

$$k_i = \frac{\omega\,(2\delta\,(k_1-1)\,\nu\omega\cos(h\omega) + (k_1-1)\,(\nu-\omega)(\nu+\omega)\sin(h\omega) - 2\delta k_1\nu\omega)}{\nu^2\,(2\,(k_1-1)\,k_1(\cos(h\omega)-1)-1)}. \tag{3.15}$$

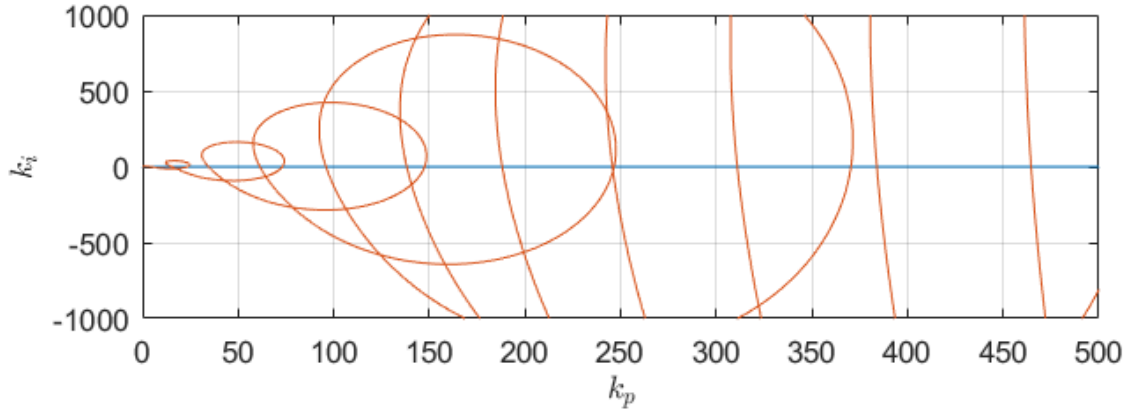

Figura 3.11: Espacio de parámetros $(k_p,\ k_i)$ para $\delta = 0.2$, $\nu = 1$, $h = 3.2064$ y $k_1 = 0.6550$.

El espacio de parámetros se escoge de esta manera ya que al estudiar las zonas de estabilidad se podrá determinar valores de k_p y k_i obtenidos en la D-partición que aseguran que el sistema en lazo cerrado sea estable. La sintonización para los parámetros del controlador Posicast que cancela las oscilaciones del sistema subamortiguado para $\delta = 0.2$, $\nu = 1$ son; el retardo $h = 3.2064$ y la constante $k_1 = 0.6924$. La mayor parte del espacio de parámetros mostrado en la Figura 3.11 es inestable excepto una zona muy pequeña cercana al origen entre la curva de la ecuación paramétrica y la recta $k_i = 0$. Esta zona se muestra en la Figura 3.12.

La zona sombreada mostrada en la Figura 3.11 corresponde a las ganancias (k_p, k_i) de la realimentación Proporcional Integral externa del controlador que estabiliza el sistema en lazo cerrado. Los parámetros k_p y k_i deben escogerse en esta zona.

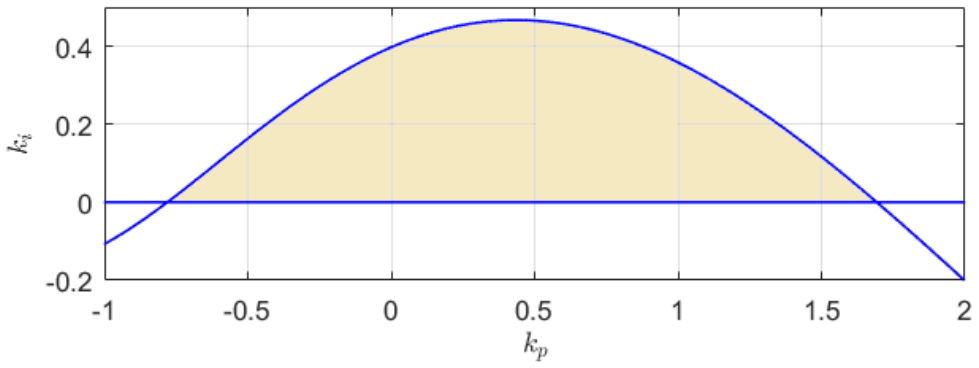

Figura 3.12: ■ Zona estable del espacio de parámetros (k_p, k_i) para $\delta = 0.2$, $\nu = 1$, $h = 3.2064$ y $k_1 = 0.6550$.

3.2.3 Estudio gráfico de σ-estabilidad

La Figura 3.11 muestra el espacio paramétrico en el cual el sistema de segundo orden subamortiguado (3.1) con controlador PI-Posicast es estable. Se nota que existe un número infinito de parámetros (k_p, k_i) que logran este fin. Se determinan entonces dos parámetros específicos del controlador PI-Posicast que estabilicen al sistema de segundo orden subamortiguado y que además cumplan el requisito de hacer que su respuesta tenga un decaimiento máximo exponencial.

Se dicen que los parámetros (k_p, k_i) σ-estabilizan al sistema en lazo cerrado si su ecuación característica (3.10) satisface el Lema 2.1. Esto implica la existencia de una cota de decaimiento exponencial σ tal que

$$\|x(t,\varphi)\| \leq Le^{-\sigma t}\|\varphi\|_h,$$

con $L > 0$. Realizando el cambio de variable en el dominio de la frecuencia $s \to s - \sigma$ en el cuasipolinomio característico (3.10), se obtiene

$$p(s-\sigma, k_p, k_i) = \nu^2 \left(k_1 - (1-k_1)\, e^{-h(s-\sigma)}\right)(k_i + k_p(s-\sigma)) + (s-\sigma)\left(\nu^2 + 2\delta\nu(s-\sigma) + (s-\sigma)^2\right). \tag{3.16}$$

Se usa el método de D-particiones para determinar un espacio de parámetros en el cual se alcance el máximo decaimiento exponencial, entonces:

Caso $s = 0$; se sustituye $s = 0$ en el cuasipolinomio característico (3.16) y se iguala a cero para obtener

$$p(0, k_p, k_i) = \nu^2 \left((k_1 - 1)\, e^{h\sigma} + k_1\right)(k_i - \sigma k_p) - \sigma\left(-2\delta\nu\sigma + \nu^2 + \sigma^2\right) = 0. \tag{3.17}$$

Despejando k_p de la ecuación anterior, implica

$$k_p = \frac{k_i}{\sigma} - \frac{-2\delta\nu\sigma + \nu^2 + \sigma^2}{\nu^2\left((k_1 - 1)\, e^{h\sigma} + k_1\right)}. \tag{3.18}$$

La ecuación (3.18) delimita la primera frontera de estabilidad y representa el cruce de una raíz real de alguna zona estable a una inestable. También se observa que σ sólo puede tomar valores estrictamente mayores a cero.

Caso $s = j\omega$; se sustituye $s = j\omega$ en el cuasipolinomio característico (3.16) y separando la parte real de la imaginaria e igualando a cero se obtiene

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{p_{cl}(j\omega, k_p, k_i)\} &= -\sigma\left(-2\delta\nu\sigma + \nu^2 + \sigma^2\right) + \omega^2(3\sigma - 2\delta\nu) \\ +\nu^2\left((k_1 - 1)\, e^{h\sigma}\left(\cos(h\omega)\,(k_i - \sigma k_p) + \omega k_p \sin(h\omega)\right) + k_1\,(k_i - \sigma k_p)\right) &= 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\{p_{cl}(j\omega, k_p, k_i)\} &= \omega\left(-4\delta\nu\sigma + \nu^2 + 3\sigma^2 - \omega^2\right) \\ +\nu^2\left((k_1 - 1)\, e^{h\sigma}\left(\sin(h\omega)\,(\sigma k_p - k_i) + \omega k_p \cos(h\omega)\right) + k_1\omega k_p\right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Despejando k_i de la ecuación (3.20) se obtiene

$$ki = \frac{\omega e^{-h\sigma}\csc(h\omega)\left(-4\delta\nu\sigma + k_1\nu^2 k_p + \nu^2 + 3\sigma^2 - \omega^2\right)}{\left(k_1 - 1\right)\nu^2} + k_p(\omega\cot(h\omega) + \sigma). \tag{3.21}$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (3.21) en (3.19) y despejando k_p, se llega a

$$\begin{aligned} k_p = & \frac{\left(k_1 - 1\right)\omega e^{h\sigma}\cos(h\omega)\left(4\delta\nu\sigma - \nu^2 - 3\sigma^2 + \omega^2\right)}{\nu^2\omega\left(2k_1\left(k_1 - 1\right)e^{h\sigma}\cos(h\omega) + \left(k_1 - 1\right)^2 e^{2h\sigma} + k_1^2\right)} \\ & + \frac{\left(k_1 - 1\right)e^{h\sigma}\sin(h\omega)\left(2\delta\nu\left(\omega^2 - \sigma^2\right) + \nu^2\sigma + \sigma^3 - 3\sigma\omega^2\right)}{\nu^2\omega\left(2k_1\left(k_1 - 1\right)e^{h\sigma}\cos(h\omega) + \left(k_1 - 1\right)^2 e^{2h\sigma} + k_1^2\right)} \\ & + \frac{k_1\omega\left(4\delta\nu\sigma - \nu^2 - 3\sigma^2 + \omega^2\right)}{\nu^2\omega\left(2k_1\left(k_1 - 1\right)e^{h\sigma}\cos(h\omega) + \left(k_1 - 1\right)^2 e^{2h\sigma} + k_1^2\right)}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Entonces, para $0 < \delta < 1$, ν, k_1, h, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ dados, las ecuaciones (3.18), (3.21) y (3.22) describen las fronteras σ-estables del cuasipolinomio (3.16). Con el objetivo de fijar los parámetros (k_p, k_i) que generen el máximo decaimiento exponencial se estudia el espacio paramétrico cuando el valor de σ aumenta. Con este fin se presentan los siguientes resultados gráficos.

1. Cuando $\sigma = 0.0000001$ se genera el espacio paramétrico mostrado en la Figura 3.13, se observa que dentro de la zona sombreada existen raíces estables.

2. Cuando $\sigma = 0.01$ se genera el espacio paramétrico mostrado en la Figura 3.14, se escoge el punto $(k_p = 0.2238, k_i = 0.2416)$ dentro de la zona estable.

3. El valor $\sigma = 0.05$ genera el espacio paramétrico mostrado en la Figura 3.15, se escoge $(k_p = 0.1580, k_i = 0.2751)$ dentro de la zona estable.

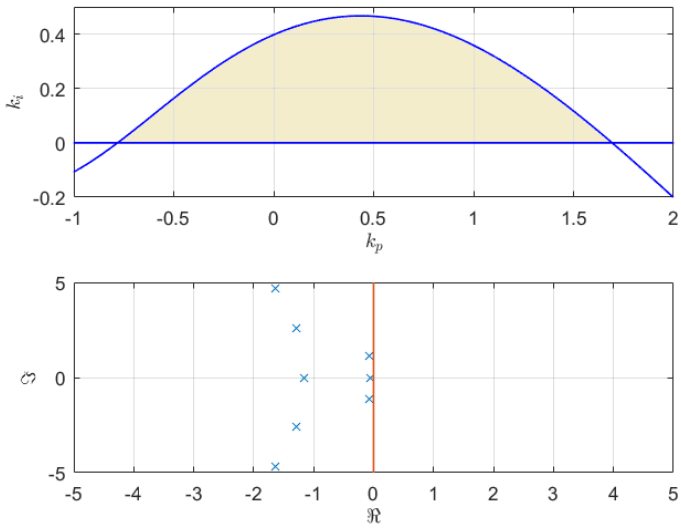

Figura 3.13: ■ Zona estable del espacio de parámetros (k_p, k_i) para $\delta = 0.2$, $\nu = 1$, $h = 3.2064$, $k_1 = 0.6550$ y $\sigma = 0.0000001$. (×) Polos estables del sistema en lazo cerrado.

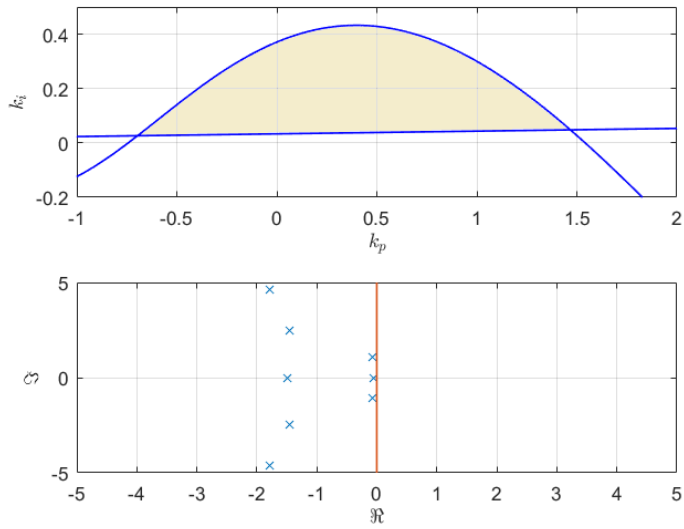

Figura 3.14: ■ Zona estable del espacio de parámetros (k_p, k_i) para $\delta = 0.2$, $\nu = 1$, $h = 3.2064$, $k_1 = 0.6550$ y $\sigma = 0.01$. (×) Polos estables del sistema en lazo cerrado.

4. El valor $\sigma = 0.06$ genera el espacio paramétrico mostrado en la Figura 3.16, se escoge $(k_p = 0.1792, k_i = 0.2692)$ dentro de la zona sombreada estable.

5. El valor $\sigma = 0.062$ genera el espacio paramétrico mostrado en la Figura 3.17, se escoge $(k_p = 0.1792, k_i = 0.274)$ dentro de la zona sombreada estable.

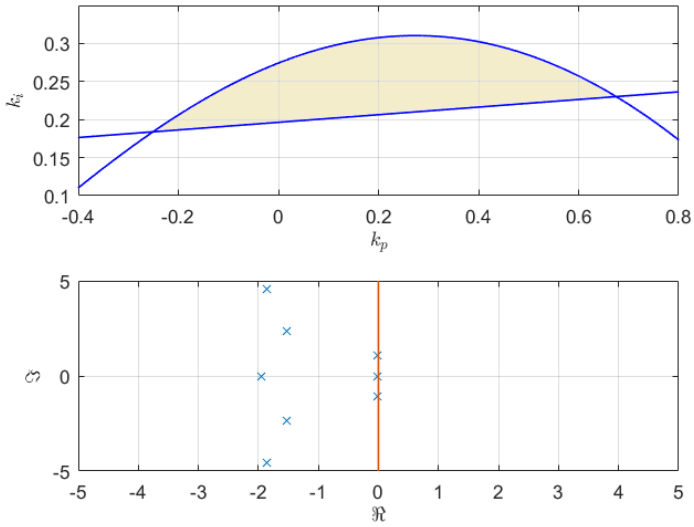

Figura 3.15: ■ Zona estable del espacio de parámetros (k_p, k_i) para $\delta = 0.2$, $\nu = 1$, $h = 3.2064$, $k_1 = 0.6550$ y $\sigma = 0.05$. (×) Polos estables del sistema en lazo cerrado.

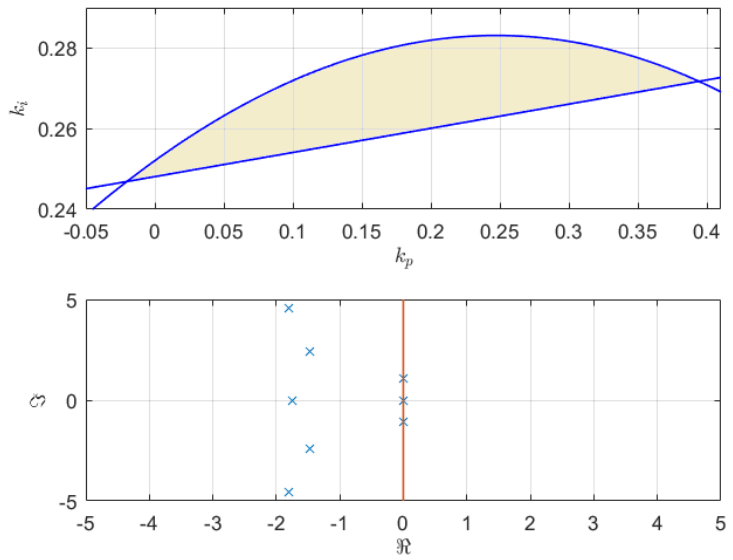

Figura 3.16: ■ Zona estable del espacio de parámetros (k_p, k_i) para $\delta = 0.2$, $\nu = 1$, $h = 3.2064$, $k_1 = 0.6550$ y $\sigma = 0.06$. (×) Polos estables del sistema en lazo cerrado.

6. El valor $\sigma = 0.062659$, hace que la zona estable se reduzca al punto $(k_p = 0.1810, k_i = 0.2742125)$. Éste corresponde al máximo decaimiento exponencial y el cual se muestra en la Figura 3.18.

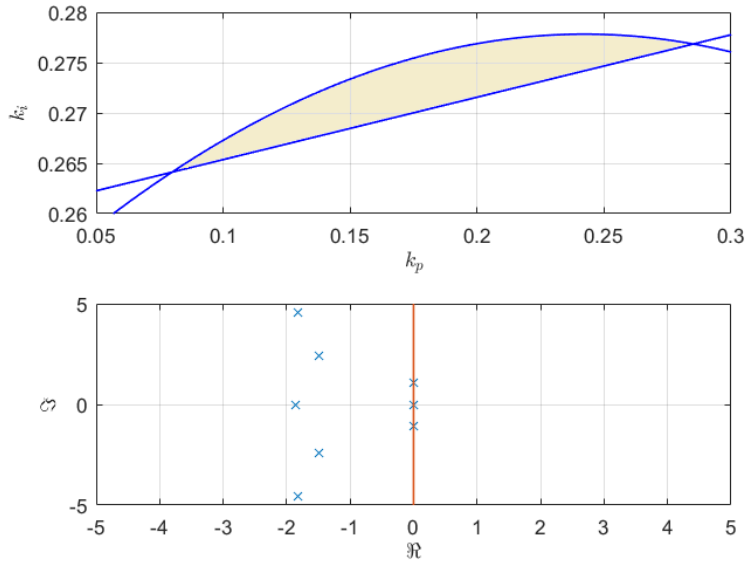

Figura 3.17: ■ Zona estable del espacio de parámetros (k_p, k_i) para $\delta = 0.2$, $\nu = 1$, $h = 3.2064$, $k_1 = 0.6550$ y $\sigma = 0.062$. (×) Polos estables del sistema en lazo cerrado.

Se concluye entonces por medio del método de D-particiones que con los valores paramétricos fijos $\delta = 0.2$, $\nu = 1$ y los valores de diseño del controlador Posicast $h = 3.2064$ y $k_1 = 0.6550$, se logra el máximo decaimiento exponencial σ^* cuando las ganancias del lazo de control son: $k_p = 0.1810$ y $k_i = 0.2742125$. El valor del máximo decaimiento exponencial se produce con $\sigma = 0.062659$.

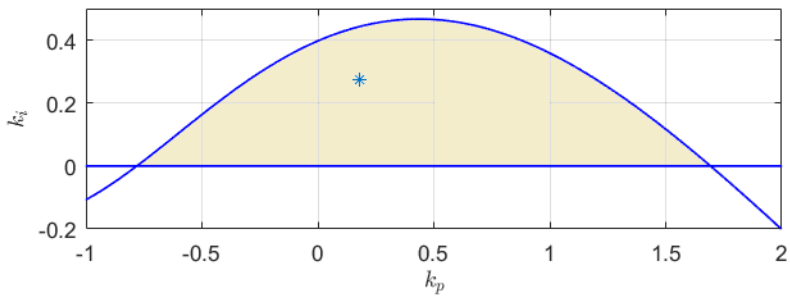

Figura 3.18: ■ Zona estable del espacio de parámetros (k_p, k_i) para $\delta = 0.2$, $\nu = 1$, $h = 3.2064$, $k_1 = 0.6550$ y $\sigma = 0.062659$.

3.3 Estabilidad robusta

En esta sección se analiza la estabilidad robusta del sistema de segundo orden subamortiguado (3.1) en lazo cerrado con el controlador PI-Posicast (3.8). Primero se realiza un estudio frecuencial el cual sólo es válido para perturbaciones desconocidas constantes. El segundo estudio es hecho en el dominio del tiempo.

3.3.1 Cotas de robustez en el espacio paramétrico (ν, δ)

Con el fin de analizar la robustez del sistema de segundo orden con controlador PI-Posicast ante incertidumbre en los parámetros ν y δ de la planta de segundo orden, se eligen valores de las ganancias Proporcional e Integral del lazo de control externo en la zona de estabilidad. Posteriormente, se presenta el mapa de estabilidad en el espacio de parámetros (ν, δ). Esto permite determinar el rango de valores de δ y ν para los cuales esta sintonización mantiene la estabilidad en lazo cerrado. Cabe mencionar que estos límites conciernen a parámetros inciertos pero constantes. El cuasipolinomio característico del sistema en lazo cerrado (3.10) es

$$p_{cl}(s, k_p, k_i) = s^3 + 2\delta\nu s^2 + \nu^2 s + \nu^2 \left((1 - k_1)\, e^{-hs} + k_1\right)(k_i + s k_p)\,.$$

Usando el método de D-particiones se determina el rango de valores (ν, δ) para el cual la planta de segundo orden con controlador PI-Posicast se mantiene estable.

Caso $s = 0$; sustituyendo $s = 0$ en el cuasipolinomio característico (3.10), e igualando a cero se obtiene

$$p_{cl}(0, k_p, k_i) = (2k_1 - 1)\,\nu^2 k_i = 0. \tag{3.23}$$

Despejando ν de la ecuación anterior se llega a

$$\nu = 0, \tag{3.24}$$

y por lo tanto, la ecuación (3.24) define la primera frontera de estabilidad y delimita el cruce de una raíz real de una zona estable a inestable y viceversa.

Caso $s = j\omega$; sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación (3.10) y separando la parte real de la imaginaria e igualando ambas partes a cero se obtiene

$$\mathrm{Re}\{p_{cl}(j\omega, k_p, k_i)\} = \nu\left(\nu k_i\left((k_1 - 1)\cos(hw) + k_1\right) + w\left((k_1 - 1)\,\nu k_p \sin(hw) - 2\delta w\right)\right), \tag{3.25}$$

$$\mathrm{Im}\{p_{cl}(j\omega, k_p, k_i)\} = \nu^2\left(wk_p\left((k_1 - 1)\cos(hw) + k_1\right) - (k_1 - 1)\,k_i \sin(hw)\right) - w^3 + \nu^2 w. \tag{3.26}$$

Despejando δ de la ecuación (3.25) implica

$$\delta = \frac{\nu\left(k_i\left((k_1 - 1)\cos(hw) + k_1\right) + (k_1 - 1)\,wk_p \sin(hw)\right)}{2w^2}. \tag{3.27}$$

Despejando ν de la ecuación (3.26) se obtiene

$$\nu = \pm\frac{w^{3/2}}{\sqrt{-(k_1 - 1)\,k_i \sin(hw) + wk_p\left((k_1 - 1)\cos(hw) + k_1\right) + w}}. \tag{3.28}$$

Entonces, las ecuaciones (3.24), (3.27) y (3.28) describen las fronteras de estabilidad que subdividen al espacio paramétrico en regiones estables e inestables. En la Figura 3.19 se muestra el espacio paramétrico estable (ν, δ) y se selecciona el punto $(1, 0.2)$. Se nota que el sistema es estable ya que sus raíces se encuentran en el semiplano complejo izquierdo. En la Figura 3.20 se observa la salida del sistema $y(t)$. Se aprecia que $y(t)$ converge a la referencia en un tiempo mayor a la que la salida del controlador Posicast logra en lazo abierto. La principal ventaja de esta sintonización es que no existen oscilaciones en el transitorio. Gráficamente se observa que el valor de δ y ν pueden ser perturbados en los rangos $0.1308 < \delta < 1$, $\nu > 0.2520$ y el sistema en lazo cerrado mantiene su estabilidad.

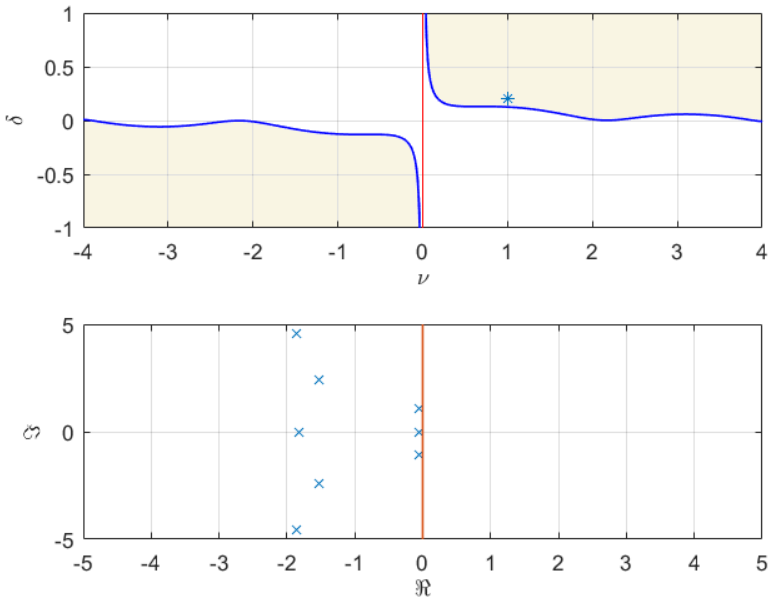

Figura 3.19: ■ Zona estable del espacio paramétrico (ν, δ) para $k_p = 0.1810$, $k_i = 0.2742125$, $h = 3.2064$, $k_1 = 0.6550$ y $(\times)$ raíces estables.

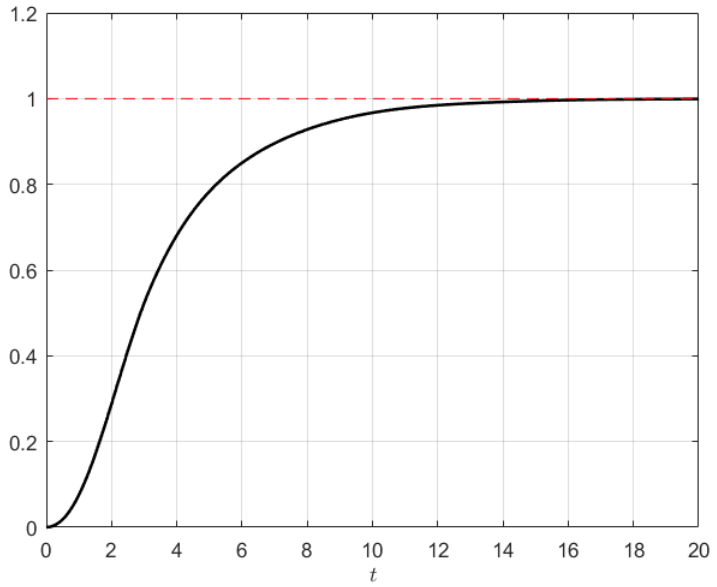

Figura 3.20: ■ Salida del sistema de segundo orden subamortiguado (3.1) con controlador PI-Posicast para $k_p = 0.1810$, $k_i = 0.2742125$, $h = 3.2064$, $k_1 = 0.6550$ $\nu = 1$ y $\delta = 0.2$, - - - Referencia

Ejemplo 3.3. *Considérense los parámetros del controlador PI-Posicast siguientes;*

$$\begin{aligned} h &= 3.2064, \\ k_1 &= 0.6924, \\ k_p &= 0.1810, \\ k_i &= 0.2742125, \end{aligned}$$

y se perturban los parámetros nominales δ y ν del sistema (3.1) con el fin de estudiar los efectos de las perturbaciones sobre la salida del sistema en lazo cerrado.

En la Figura 3.21 se observa que cuando el parámetro δ del sistema (3.1) es perturbado, la salida en el periodo transitorio presenta sobretiro mientras la perturbación $\Delta\delta$ aumenta, sin embargo, la salida converge a la referencia por efecto de la acción integral del controlador PI-Posicast.

En la Figura 3.22 se muestra que la salida del sistema (3.1) converge al valor de la referencia aún cuando existe una perturbación $\Delta\nu$. Sin embargo, durante el transitorio existen oscilaciones que no se observan en la salida del sistema sin perturbar.

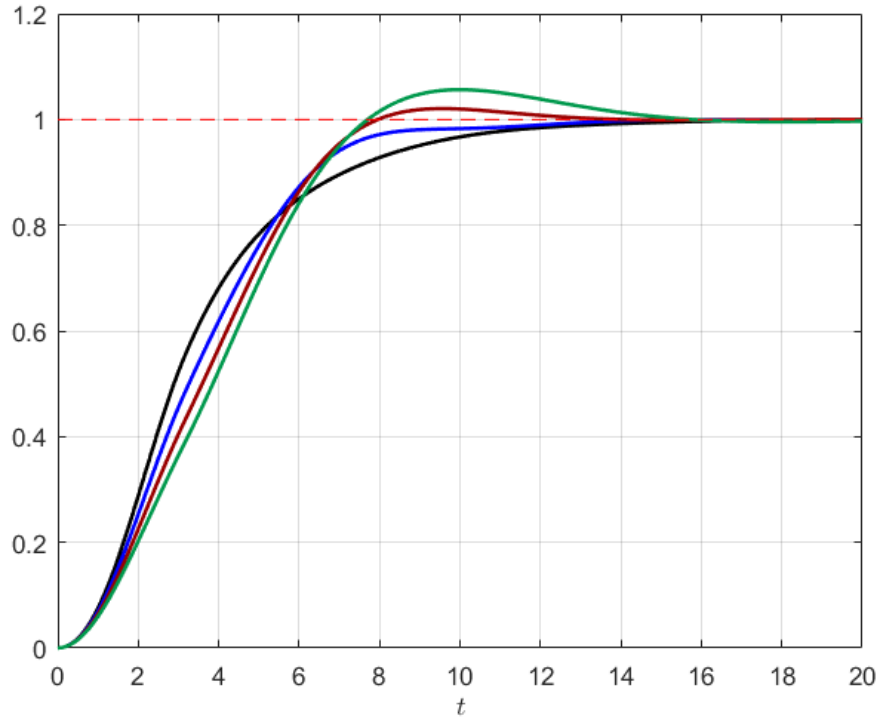

Figura 3.21: Salida del sistema de segundo orden subamortiguado (3.1) con controlador PI-Posicast para el parámetro δ perturbado y ν constante. Los valores de la perturbación paramétrica son; ■ $\Delta\delta = 0$, ■ $\Delta\delta = 0.15$, ■ $\Delta\delta = 0.3$, ■ $\Delta\delta = 0.45$, - - - Referencia.

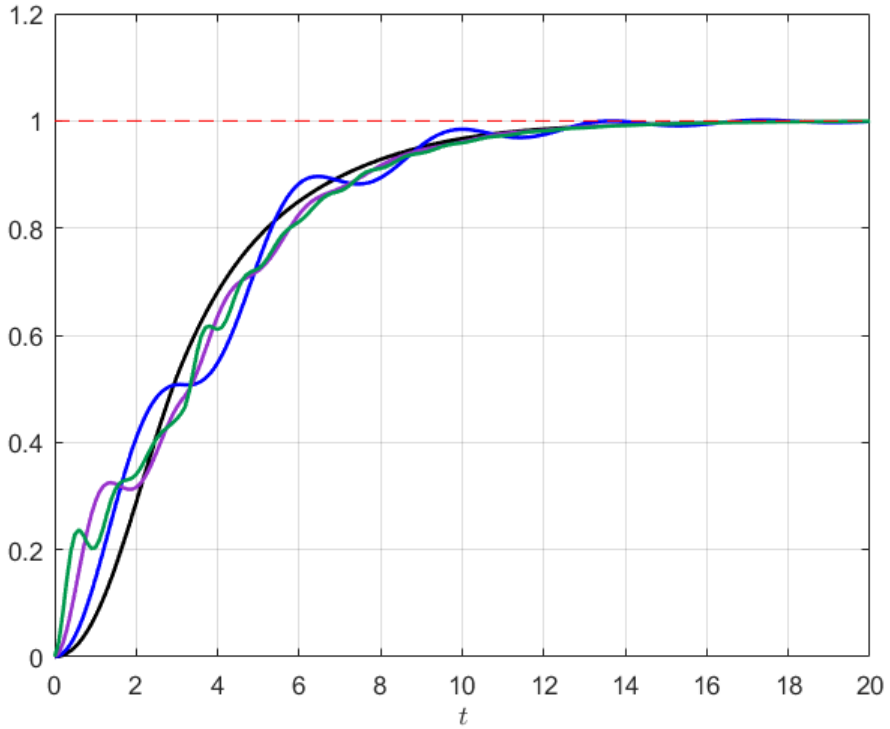

Figura 3.22: Salida del sistema de segundo orden subamortiguado (3.1) con controlador PI-Posicast para el parámetro δ constante y ν perturbado. Los valores de la perturbación paramétrica son; ■ $\Delta\nu = 0$, ■ $\Delta\nu = 0.5$, ■ $\Delta\nu = 2$, ■ $\Delta\nu = 5$, - - - Referencia.

Se concluye que cuando existen perturbaciones paramétricas $\Delta\delta$ y $\Delta\nu$ en el sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador PI-Posicast, el error en estado estacionario no se afecta por tales perturbaciones y es cero, además, en el transitorio se aprecian sobretiros. El análisis de robustez se lleva a cabo en la siguiente sección.

Ejemplo 3.4. *Se desea corroborar la estabilidad robusta del sistema de segundo orden (3.1) con controlador PI-Posicast ante perturbaciones externas constantes tal y como se muestra en la Figura 3.23. En la Figura 3.24 se observa el efecto que tiene la perturbación añadida en la salida del sistema.*

Mientras la perturbación constante d aumenta, se aprecian oscilaciones en el transitorio. Sin embargo, una perturbación constante y externa al sistema (3.1) no afecta en el error en estado estacionario en la salida ya que éste converge asintóticamente a cero.

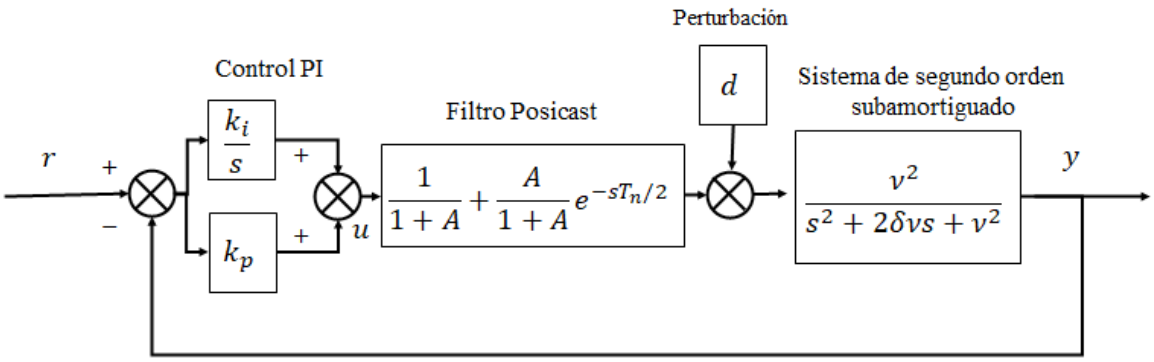

Figura 3.23: Diagrama de bloques del lazo de control propuesto añadiendo una perturbación constante.

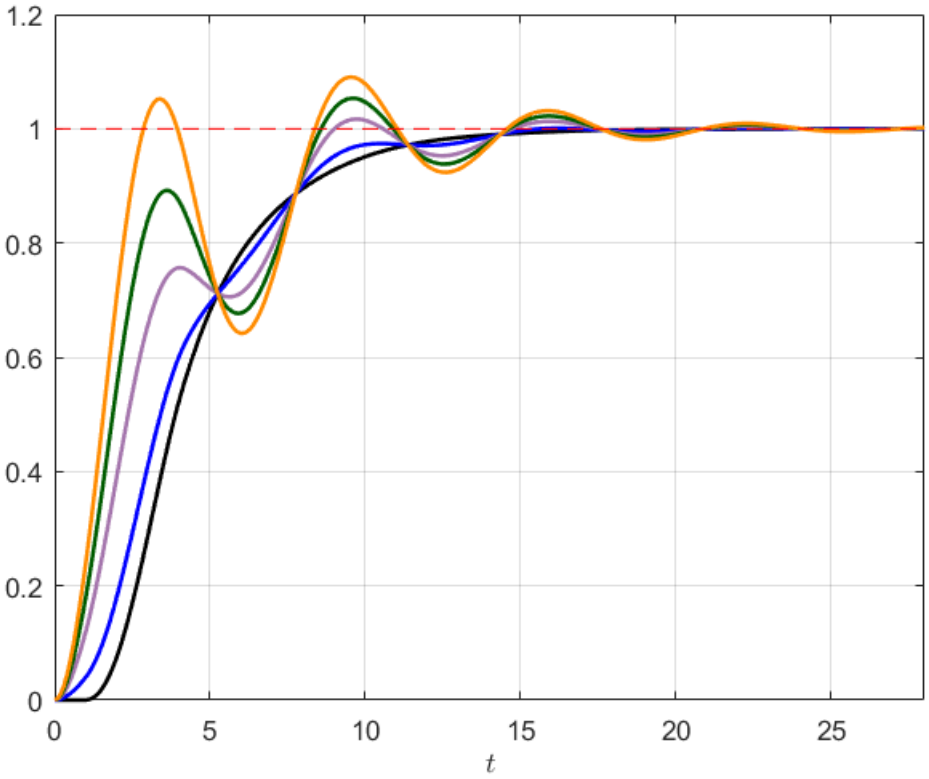

Figura 3.24: Salida del sistema de segundo orden subamortiguado (3.1) con controlador PI-Posicast y perturbaciones constantes; ■ $d = 0$, ■ $d = 0.1$, ■ $d = 0.3$, ■ $d = 0.45$, ■ $d = 0.6$, - - - Referencia.

Entonces, según los Ejemplos 3.3 y 3.4 el empleo de un lazo de control PI logra estabilidad ante perturbaciones en los parámetros δ y ν y mantiene la estabilidad del sistema en lazo cerrado cuando existen perturbaciones constantes externas a la planta. Para determinar de forma analítica lo mencionado, se aplica el Teorema del valor final al sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador PI-Posicast.

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\nu^2 k_i(1-k_1)e^{-hs} + \nu^2 k_p(1-k_1)se^{-hs} + \nu^2 k_1 k_p s + \nu^2 k_1 k_i}{s^3 + 2\delta\nu s^2 + (\nu^2 + \nu^2 k_1 k_p)s + \nu^2 k_1 k_i + \nu^2 k_i(1-k_1)e^{-hs} + \nu^2 k_p(1-k_1)se^{-hs}}.$$

Entonces, su salida se escribe

$$Y(s) = \frac{\nu^2 k_i(1-k_1)e^{-hs} + \nu^2 k_p(1-k_1)se^{-hs} + \nu^2 k_1 k_p s + \nu^2 k_1 k_i}{s^3 + 2\delta\nu s^2 + (\nu^2 + \nu^2 k_1 k_p)s + \nu^2 k_1 k_i + \nu^2 k_i(1-k_1)e^{-hs} + \nu^2 k_p(1-k_1)se^{-hs}} R(s).$$

Aplicando el Teorema del valor final se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sY(s), \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)(\nu^2 k_i(1-k_1)e^{-hs} + \nu^2 k_p(1-k_1)se^{-hs} + \nu^2 k_1 k_p s + \nu^2 k_1 k_i)}{s^3 + 2\delta\nu s^2 + (\nu^2 + \nu^2 k_1 k_p)s + \nu^2 k_1 k_i + \nu^2 k_i(1-k_1)e^{-hs} + \nu^2 k_p(1-k_1)se^{-hs}}, \\
&= \frac{(k_i(1-k_1) + k_1 k_i)\,\nu^2 r}{(k_i(1-k_1) + k_1 k_i)\,\nu^2}, \\
&= r.
\end{aligned}$$

El error en estado estacionario está definido como

$$e_{ss} = r(t) - y(t). \tag{3.29}$$

Entonces, se verifica que el error en estado estacionario es cero. Se aplica el Teorema del valor final al sistema perturbado mostrado en la Figura 3.23

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{Y(s)}{R(s)} + \frac{Y(s)}{D(s)}\right].$$

Lo anterior implica

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)(\nu^2 k_i(1-k_1)e^{-hs} + \nu^2 k_p(1-k_1)se^{-hs} + \nu^2 k_1 k_p s + \nu^2 k_1 k_i)}{s^3 + 2\delta\nu s^2 + (\nu^2 + \nu^2 k_1 k_p)s + \nu^2 k_1 k_i + \nu^2 k_i(1-k_1)e^{-hs} + \nu^2 k_p(1-k_1)se^{-hs}} \\
&\quad + \lim_{s\to 0} \frac{s[sd(s)\nu^2\left(k_1 + (1-k_1)e^{-sh}\right)]}{(s - k_i - sk_p)(s^2 + 2\delta\nu s + \nu^2)}.
\end{aligned}$$

Se sigue que el valor de la salida $y(t)$ en estado estacionario es

$$y(t) = r,$$

lo cual muestra que el error en estado estacionario es cero aunque exista una perturbación constante externa a la planta. El efecto de las perturbaciones paramétricas se estudia en la siguiente sección.

3.3.2 Cotas de robustez para un sistema de segundo orden subamortiguado en lazo cerrado con un controlador PI-Posicast obtenidas mediante funcionales de Lyapunov-Krasovskii

Una cota de robustez para un sistema con retardo (2.1) corresponde a los valores máximos que pueden tomar las perturbaciones sin que se modifique su estabilidad. En esta sección se determinan cotas de robustez respecto de perturbaciones en los parámetros nominales δ y ν del sistema (3.1) en el dominio del tiempo con el fin de conocer qué tanto se pueden perturbar sin que el sistema en lazo cerrado pierda estabilidad.

Aplicando transformada inversa de Laplace a la ecuación característica (3.9) se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\dddot{y}(t) + 2\delta\nu\ddot{y}(t) + (\nu^2 + \nu^2 k_1 k_p)\dot{y}(t) + \nu^2 k_1 k_i y(t) + \nu^2 k_i(1-k_1)y(t-h) + \nu^2 k_p(1-k_1)\dot{y}(t-h)\\ = \nu^2 k_1 k_p \dot{r}(t) + \nu^2 k_1 k_i r(t) + \nu^2 k_i(1-k_1)r(t-h) + \nu^2 k_p(1-k_1)\dot{r}(t-h).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Para el problema de regulación, se considera una referencia constante, $r(t)$=r, $t \geq -h$. Por lo mismo, los valores retardados de la referencia tienen valor r y las derivadas tanto instantáneas como retardadas de la referencia constante también son cero. La ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned}\dddot{y}(t) + 2\delta\nu\ddot{y}(t) + (\nu^2 + \nu^2 k_1 k_p)\dot{y}(t) + \nu^2 k_1 k_i y(t) + \nu^2 k_i(1-k_1)y(t-h) + \nu^2 k_p(1-k_1)\dot{y}(t-h)\\ = \nu^2 k_1 k_i r + \nu^2 k_i(1-k_1)r.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Definiendo el error

$$\overline{e}(t) = r - y(t), \tag{3.32}$$

se sigue que

$$y(t) = r - \overline{e}(t), \tag{3.33}$$

$$\dot{y}(t) = -\dot{\overline{e}}(t), \tag{3.34}$$

$$\ddot{y}(t) = -\ddot{\overline{e}}(t), \tag{3.35}$$

$$\dddot{y}(t) = -\dddot{\overline{e}}(t). \tag{3.36}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.40), (4.41), (4.42) y (3.36) en la ecuación diferencial (3.31) se obtiene que la ecuación diferencial del sistema en lazo cerrado (3.31) asociada al error es

$$\dddot{\overline{e}}(t)+2\delta\nu\ddot{\overline{e}}(t)+(\nu^2+\nu^2 k_1 k_p)\dot{\overline{e}}(t)+\nu^2 k_1 k_i \overline{e}(t)+\nu^2 k_i(1-k_1)\overline{e}(t-h)+\nu^2 k_p(1-k_1)\dot{\overline{e}}(t-h) = 0. \tag{3.37}$$

Definiendo el estado $x(t) = \begin{bmatrix}\overline{e}(t) & \dot{\overline{e}}(t) & \ddot{\overline{e}}(t)\end{bmatrix}^T$ se llega a la representación de estado

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \tag{3.38}$$

donde las matrices A_0 y A_1 son

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\nu^2 k_1 k_i & -\nu^2(1+k_1k_p) & -2\delta\nu \end{bmatrix}, \tag{3.39}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\nu^2 k_i(1-k_1) & -\nu^2 k_p(1-k_1) & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.40}$$

Para calcular el punto de equilibrio $x^* = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix}^T$ de la representación de estado de la ecuación del error (4.44), se observa que para los sistemas con retardos, en el equilibrio las variables retardadas e instantáneas alcanzan el mismo valor x^*, y que la derivada es nula. Se obtiene que en el equilibrio se cumple

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\nu^2 k_i k_1 & -\nu^2(1+k_1k_p) & -2\delta\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\nu^2 k_i(1-k_1) & -\nu^2 k_p(1-k_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}, \tag{3.41}$$

y de (3.41) se sigue que

$$x_2^* = 0, \tag{3.42}$$

$$x_3^* = 0, \tag{3.43}$$

$$-\nu^2 k_i x_1^* - \nu^2(1+k_p)x_2^* - 2\delta\nu x_3^* = 0. \tag{3.44}$$

Sustituyendo (3.42) y (3.43) en (3.44) se obtiene

$$x_3^* = 0, \tag{3.45}$$

y entonces el único punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado asociado al error (4.44) es

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

Se considera que el sistema en lazo cerrado descrito por la ecuación (4.44) presenta perturbaciones a los parámetros δ y ν respectivamente. Sean $\Delta\delta$, $\Delta\nu \in \mathbb{R}$ tales perturbaciones, entonces las matrices A_0 y A_1 pueden ser reescritas en términos de sus perturbaciones como sigue

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\left(\nu+(\Delta\nu)\right)^2 k_1 k_i & -\left(\nu+(\Delta\nu)\right)^2 (1+k_1k_p) & -2\left(\delta+(\Delta\delta)\right)\left(\nu+(\Delta\nu)\right) \end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_0 = A_0 + \Delta_0,$$

donde

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_1 k_i\big[2\nu(\Delta\nu) + (\Delta\nu)^2\big] & -(1+k_1k_p)\big[2\nu(\Delta\nu) + (\Delta\nu)^2\big] & -2\big[\delta(\Delta\nu) + \nu(\Delta\delta) + (\Delta\nu)(\Delta\delta)\big] \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

y

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\left(\nu + (\Delta\nu)\right)^2 k_i(1-k_1) & -\left(\nu + (\Delta\nu)\right)^2 k_p(1-k_1) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_1 = A_1 + \Delta_1,$$

con

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\left(2\nu\left(\Delta\nu\right) + \left(\Delta\nu\right)^2\right) k_i(1-k_1) & -\left(2\nu\left(\Delta\nu\right) + \left(\Delta\nu\right)^2\right) k_p(1-k_1) & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

Los términos Δ_0 y Δ_1 representan matrices desconocidas que contienen los términos perturbados. Resumiendo, el sistema (4.44) perturbado con lazo de control PI-Posicast se representa de la siguiente manera

$$\dot{x}(t) = \left(A_0 + \Delta_0\right) x(t) + \left(A_1 + \Delta_1\right) x(t-h), \tag{3.49}$$

con

$$\|\Delta_0\| \leq \rho_0, \tag{3.50}$$

$$\|\Delta_1\| \leq \rho_1, \tag{3.51}$$

siendo $\|\Delta_0\|$ y $\|\Delta_1\|$ las normas inducidas de las perturbaciones matriciales Δ_0 y Δ_1, y ρ_0 y $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$.

En las siguientes líneas se detalla la prueba de estabilidad en el dominio temporal usando la funcional de tipo completo (2.20) con el sistema en lazo cerrado (3.49). Primero se presenta un corolario que establece una condición sobre la derivada de la funcional de tipo completo (2.20) a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (3.49), después se determinan expresiones analíticas sobre las cotas de robustez ρ_0 y ρ_1 de las matrices perturbadas (3.47) y (3.48).

Corolario 3.1. *[12] La derivada de la funcional de tipo completo (2.20) a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (3.49) es de la forma*

$$\frac{d}{dt}v_c(x_t) = -x^T(t)W_0x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) - \int_{t-h}^{t} x^T(\theta')W_2x(\theta')d\theta'$$
$$+2\big[\Delta_0x(t) + \Delta_1x(t-h)\big]^T L(x_t),$$

donde

$$L(x_t) = U(0)x(t) + \int_{t-h}^{t} U(-h-\theta'+t)A_1x(\theta')d\theta'.$$

Prueba.

Se define cada término de la funcional de tipo completo (2.20) como sigue

$$v_c(x_t) = G_1(x_t) + G_2(x_t) + G_3(x_t) + G_4(x_t),$$

donde

$$\begin{aligned}
G_1(x_t) &= x^T(t)U(0)x(t),\\
G_2(x_t) &= 2x^T(t)\int_{-h}^{0} U(-h-\theta)A_1x(t+\theta)d\theta,\\
G_3(x_t) &= \int_{-h}^{0} x^T(t+\theta_1)A_1^T\left[\int_{-h}^{0} U(\theta_1-\theta_2)A_1x(t+\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1,\\
G_4(x_t) &= \int_{-h}^{0} x^T(t+\theta)\left[W_1+(h+\theta)W_2\right]x(t+\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Se utiliza el Lema 2.4 donde se observa que la derivada de la funcional de tipo completo a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (3.49) es

$$\frac{d}{dt}G_1(x_t) = x^T(t)\left[U(0)A_0 + A_0^TU(0)\right]x(t) + 2x^T(t)U(0)A_1x(t-h)$$

$$+2x^T(t)U(0)\Delta_0x(t) + 2x^T(t)U(0)\Delta_1x(t-h),$$

$$\frac{d}{dt}G_2(x_t) = 2x^T(t)U(-h)A_1x(t) - 2x^T(t)U(0)A_1x(t-h) + 2x^T(t)\int_{t-h}^{t} U'(t-h-\theta')A_1x(\theta')d\theta'$$

$$+2x^T(t)A_0^T\int_{t-h}^{t} U(-h-\theta'+t)A_1x(\theta')d\theta' + 2x^T(t-h)A_1^T\int_{t-h}^{t} U(t-h-\theta')A_1x(\theta')d\theta'$$

$$+2x^T(t)\Delta_0^T\int_{t-h}^{t} U(-h-\theta'+t)A_1x(\theta')d\theta' + 2x^T(t-h)\Delta_1^T\int_{t-h}^{t} U(t-h-\theta')A_1x(\theta')d\theta',$$

$$\frac{d}{dt}G_3(x_t) = 2x^T(t)A_1^T\int_{t-h}^{t} U(t-\theta')A_1x(\theta')d\theta' - 2x^T(t-h)A_1^T\int_{t-h}^{t} U(t-h-\theta')A_1x(\theta')d\theta',$$

$$\frac{d}{dt}G_4(x_t) = x^T(t)\left[W_1+hW_2\right]x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) - \int_{t-h}^{t} x^T(\theta')W_2x(\theta')d\theta'.$$

Reordenando términos semejantes se nota que

$$\dot{v}_c(x_t) = x^T(t)\left[U(0)A_0 + A_0^TU(0) + U(-h)A_1 + A_1^TU(h) + W_1 + hW_2\right]x(t)$$

$$+\{2x^T(t)U(0)A_1x(t-h) - 2x^T(t)U(0)A_1x(t-h)\}$$

$$+\{2x^T(t-h)A_1^T\int_{t-h}^{t} U(t-h-\theta')A_1x(\theta')d\theta' - 2x^T(t-h)A_1^T\int_{t-h}^{t} U(t-h-\theta')A_1x(\theta')d\theta'\}$$

$$+2x^T(t)\int_{t-h}^{t}\big[U'(t-h-\theta')+U(t-h-\theta')+U(t-\theta')\big]A_1x(\theta')d\theta'$$

$$-x^T(t-h)W_1x(t-h)-\int_{t-h}^{t}x^T(\theta')W_2x(\theta')d\theta'$$

$$+2\big[\Delta_0x(t)+\Delta_1x(t-h)\big]^T[U(0)x(t)+\int_{t-h}^{t}U(-h-\theta'+t)A_1x(\theta')d\theta'],$$

y usando la propiedad simétrica y la propiedad algebraica del Lema 2.3 donde $U(0)A_0 + A_0^TU(0) + U(-h)A_1 + A_1^TU(h) = -W$ con $W = W_0 + W_1 + hW_2$, y $U'(t-h-\theta') = -A_0^T(t-h-\theta') - A_1^T(t-\theta')$ y el Teorema 2.4, entonces la derivada a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado es

$$\frac{d}{dt}v_c(x_t) = -x^T(t)W_0x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) - \int_{t-h}^{t}x^T(\theta')W_2x(\theta')d\theta'$$
$$+2\big[\Delta_0x(t)+\Delta_1x(t-h)\big]^T[U(0)x(t)+\int_{t-h}^{t}U(-h-\theta'+t)A_1x(\theta')d\theta']. \quad \square. \tag{3.52}$$

El siguiente Teorema se enfoca en determinar expresiones analíticas que condicionen valores para las cotas de robustez de las matrices perturbadas (3.47) y (3.48), para ésto se utiliza el resultado obtenido en el Corolario 3.1.

Se define

$$\bar{\nu} = \max_{\theta\in[0,h]}\|U(\theta)\|, \qquad a = \|A_1\|.$$

Teorema 3.1. *[12] Sea el sistema (2.1) exponencialmente estable. Dadas las matrices W_1, W_2 y W_0 positivas definidas, entonces el sistema perturbado (3.49) se mantiene exponencialmente estable para toda matriz perturbada desconocida Δ_0, Δ_1 tales que $\|\Delta_0\| < \rho_0$ y $\|\Delta_1\| < \rho_1$ y si se satisfacen las siguientes condiciones*

$$\lambda_{\min}(W_0) \geq 2\rho_0\overline{\nu} + \rho_0 ah\overline{\nu} + \rho_1\overline{\nu} \tag{3.53}$$
$$\lambda_{\min}(W_1) \geq \rho_1\overline{\nu} + \rho_1\overline{\nu}ah \tag{3.54}$$
$$\lambda_{\min}(W_2) \geq \overline{\nu}\rho_0 a + \rho_1\overline{\nu}a \tag{3.55}$$

Prueba.

La obtención de las cotas superiores usando el Corolario 3.1 y de acuerdo al Lema 2.6

implica

$$
\begin{aligned}
\|x^T(t)W_0x(t)\| &\leq \lambda_{\min}(W_0)\|x(t)\|^2,\\
\|x^T(t-h)W_1x(t-h)\| &\leq \lambda_{\min}(W_1)\|x(t-h)\|^2,\\
\left\|\int_{t-h}^{t} x^T(\theta')W_2x(\theta')d\theta'\right\| &\leq \lambda_{\min}(W_2)\int_{t-h}^{t}\|x(\theta')\|^2d\theta',\\
2\|x^T(t)\Delta_0^TU(0)x(t)\| &\leq 2\rho_0\bar{\nu}\|x(t)\|^2,\\
2\left\|x^T(t)\Delta_0^T\int_{t-h}^{t}U(-h-\theta'+t)A_1x(\theta')d\theta'\right\| &\leq \bar{\nu}\rho_0a\left(h\|x(t)\|^2+\int_{t-h}^{t}\|x(\theta')\|^2d\theta'\right),\\
2\|x^T(t-h)\Delta_1^TU(0)x(t)\| &\leq \rho_1\overline{\nu}\left(\|x^T(t-h)\|^2+\|x(t)\|^2\right),\\
2\left\|x^T(t-h)\Delta_1^T\int_{t-h}^{t}U(-h-\theta'+t)A_1x(\theta')d\theta'\right\| &\leq \rho_1\overline{\nu}a\left(h\|x(t-h)\|^2+\int_{t-h}^{t}\|x(\theta')\|^2d\theta'\right).
\end{aligned}
$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\|\dot{v}_c(x_t)\| \leq{}& \left(-\lambda_{\min}(W_0)+2\rho_0\overline{\nu}+\rho_0ah\overline{\nu}+\rho_1\overline{\nu}\right)\|x(t)\|^2\\
&+\left(-\lambda_{\min}(W_1)+\rho_1\overline{\nu}+\rho_1\overline{\nu}ah\right)\|y(t-h)\|^2\\
&+\left(-\lambda_{\min}(W_2)+\overline{\nu}\rho_0a+\rho_1\overline{\nu}a\right)\int_{t-h}^{t}\|x(\theta')\|^2d\theta' \leq 0,
\end{aligned}
$$

y para que la derivada (3.52) se mantenga negativa se debe cumplir

$$
\begin{aligned}
-\lambda_{\min}(W_0)+2\rho_0\overline{\nu}+\rho_0ah\overline{\nu}+\rho_1\overline{\nu} &\leq 0,\\
-\lambda_{\min}(W_1)+\rho_1\overline{\nu}+\rho_1\overline{\nu}ah &\leq 0,\\
-\lambda_{\min}(W_2)+\overline{\nu}\rho_0a+\rho_1\overline{\nu}a &\leq 0,
\end{aligned}
$$

lo cual implica

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\min}(W_0) &\geq 2\rho_0\overline{\nu}+\rho_0ah\overline{\nu}+\rho_1\overline{\nu},\\
\lambda_{\min}(W_1) &\geq \rho_1\overline{\nu}+\rho_1\overline{\nu}ah,\\
\lambda_{\min}(W_2) &\geq \overline{\nu}\rho_0a+\rho_1\overline{\nu}a. \quad \square
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.5. *En el presente ejemplo se propone el cálculo de las cotas de robustez ρ_0 y ρ_1 de las matrices perturbadas desconocidas Δ_0 y Δ_1 del sistema (3.49) en lazo cerrado con un controlador PI-Posicast aplicando el Teorema 3.1. Primero se calcula según el Teorema 3.1 cotas de robustez para las normas de las matrices perturbadas $\|\Delta_0\|$ y $\|\Delta_1\|$, después se calcula una condición de robustez para las perturbaciones en un espacio paramétrico $(\Delta\delta, \Delta\nu)$. Los valores fijos para la planta de segundo orden son $\delta = 0.2$ y $\nu = 1$. Dados los parámetros del controlador PI-Posicast sintonizados previamente; $h = 3.2064$, $k_1 = 0.6550$, $k_p = 0.1810$ y $k_i = 0.2742125$. Entonces, las normas de las matrices perturbadas desconocidas* (3.47) *y* (3.48) *deben cumplir*

$$
\|\Delta_0\| < \rho_0,
$$

y

$$\|\Delta_1\| < \rho_1.$$

Las matrices A_0 y A_1 definidas en las ecuaciones (3.39) y (3.40) son

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \\ -0.1796 & -1.1185 & -0.4000 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0946 & -0.0624 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz $W = W_0 + W_1 + hW_2 > 0$ se escoge como la matriz Identidad por simplicidad de cómputo para el cálculo de la matriz de Lyapunov (2.9) por lo que las matrices $W_0 > 0$, $W_1 > 0$ y $W_2 > 0$ se definen como

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \tag{3.56}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \tag{3.57}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.0624 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0624 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0624 \end{bmatrix}. \tag{3.58}$$

Para que el sistema perturbado (3.49) *sea estable se deben satisfacer las condiciones 1, 2 y 3 del Teorema 3.1, entonces usando el método semianalítico mostrado en la Definición 2.10 para calcular el máximo de la norma de la matriz de Lyapunov $U(\theta)$ en el intervalo $[0, h]$ se obtiene*

$$\bar{\nu} = \max_{\theta \in [0,h]} \|U(\theta)\| = 10.3225. \tag{3.59}$$

A su vez, la norma inducida por la norma Euclidiana de la matriz A_1 entonces es

$$a = \|A_1\| = 0.1133. \tag{3.60}$$

Las 3 condiciones del Teorema 3.1 producen 3 inecuaciones con dos incógnitas para las cotas superiores de robustez (3.50) y (3.51). Para determinar el valor de las cotas para las matrices desconocidas (3.47) *y* (3.48) *que forman el sistema perturbado (3.49), con la condición (3.54) se encuentra la cota superior de la norma $\|\Delta_1\|$*

$$\rho_1 = 0.003,$$

y ésto indica que el máximo valor de la norma de la matriz Δ_1 que contiene los parámetros perturbados $\Delta\delta$ y $\Delta\nu$ debe ser $\|\Delta_1\| \leq 0.003$. Ahora, se calcula el valor de la cota de

robustez para la matriz Δ_0 *de manera que las condiciones (3.53) y (3.55) se cumplan simultáneamente, entonces*

$$\rho_0 = 0.001.$$

De lo anterior de puede concluir que las cotas superiores de robustez ρ_0 *y* ρ_1 *de las normas de las matrices desconocidas perturbadas* $\|\Delta_0\|$ *y* $\|\Delta_1\|$ *y los parámetros* h, k_i, k_p, k_1, δ *y* ν *fijos hacen que las condiciones del Teorema 3.1 se cumplan, y por lo tanto el sistema perturbado (3.49) es exponencialmente estable con* $\|\Delta_0\| < 0.001$ *y* $\|\Delta_1\| < 0.003$. *En la Figura 3.25 se muestra la convergencia de los estados* $e(t)$, $\dot{e}(t)$ *y* $\ddot{e}(t)$ *a sus puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado perturbado (3.49).*

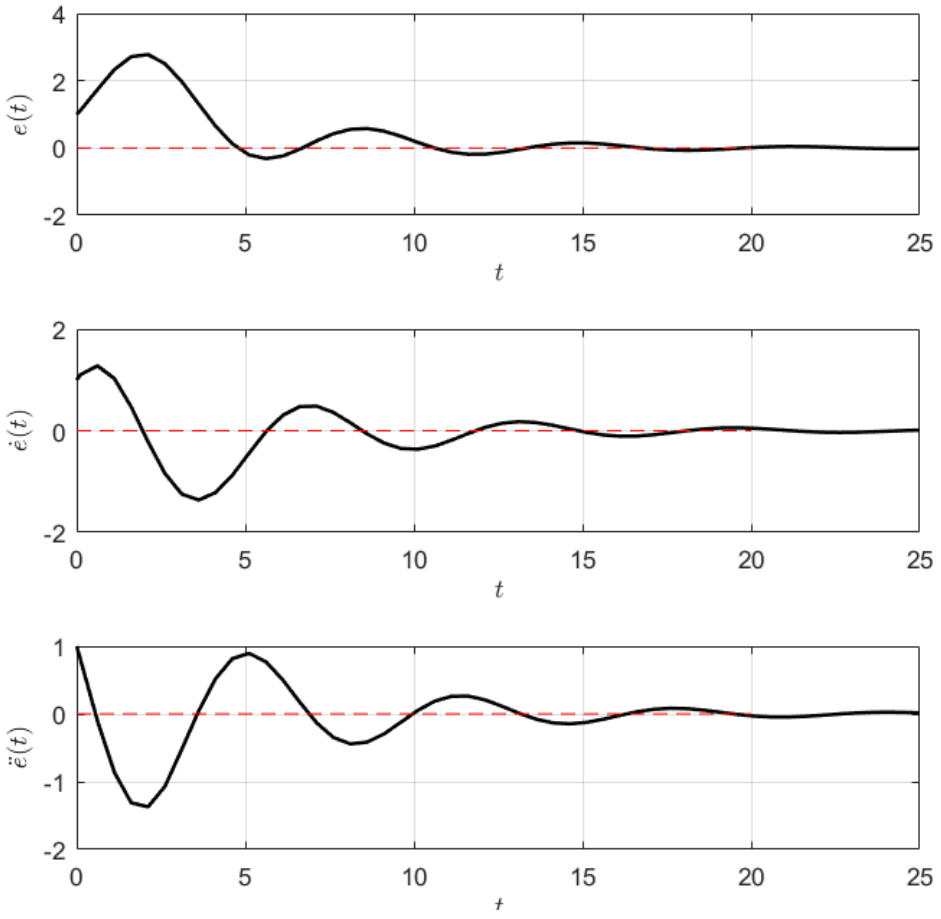

Figura 3.25: Estados del sistema de segundo orden (3.1) perturbado con controlador PI-Posicast.

Si se desea una condición de robustez en términos de las perturbaciones paramétricos $\Delta\nu$ y $\Delta\delta$, entonces se debe considerar la expresión de las matrices Δ_0 y Δ_1, en las condiciones de robustez (3.50) y (3.51). Usando la norma inducida permite reescribir las condiciones (3.50) y (3.51) como

$$\begin{aligned} \|\Delta_0\| &= \lambda_{\max}(\Delta_0^T\Delta_0) \leq \rho_0^2, \\ \|\Delta_1\| &= \lambda_{\max}(\Delta_1^T\Delta_1) \leq \rho_1^2, \end{aligned} \tag{3.61}$$

lo anterior implica

$$\begin{aligned} 4\delta^2\Delta\nu^2 + 8\delta\Delta\delta\Delta\nu(\Delta\nu+\nu) + 4\Delta\delta^2(\Delta\nu+\nu)^2 + \Delta\nu^2(\Delta\nu+2\nu)^2 \\ +\Delta\nu^2 k_1(\Delta\nu+2\nu)^2\left(k_1\left(k_i^2+k_p^2\right)+2k_p\right) \leq \rho_0^2, \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\Delta\nu^2\left(k_1-1\right)^2(\Delta\nu+2\nu)^2\left(k_i^2+k_p^2\right) \leq \rho_1^2. \tag{3.63}$$

Si bien de (3.62) y (3.63) no se puede derivar una condición explícita que muestre el conjunto de valores de las perturbaciones $\Delta\delta$ y $\Delta\nu$ para el cual las condiciones (3.53), (3.54) *y* (3.55) *se cumplen, es posible determinar numéricamente la zona del espacio de parámetros donde (3.62) y (3.63) se satisfacen.*

En la Figura 3.26 se observa el espacio de parámetros $(\Delta\delta, \Delta\nu)$ donde el sistema perturbado (3.49) se mantiene estable. Se escoge un par ordenado dentro de la región $(\Delta\delta = 0.0002, \Delta\nu = 0.0009)$ y se observa que las matrices (3.47) *y* (3.48) *cumplen con las condiciones* (3.50) *y* (3.51)

$$\|\Delta_0\| = 4.8201 \times 10^{-4} \leq \rho_0 = 0.003,$$

$$\|\Delta_1\| = 1.8193e \times 10^{-5} \leq \rho_0 = 0.001.$$

En las Figura 3.21 y 3.22 obtenidas mediante el enfoque frecuencial se observa que los valores de las perturbaciones paramétricas para el cual el sistema en lazo cerrado con controlador PI-Posicast (3.9) *se mantiene estable son $\Delta\delta \in [0, 0.45]$ y $\Delta\nu \in [0, 5]$. En la Figura 3.26 se observa el espacio de parámetros $(\Delta\delta, \Delta\nu)$ obtenido mediante el análisis temporal el cual muestra que el sistema en lazo cerrado* (3.49) *es estable si los valores de las perturbaciones paramétricas se mantienen en $\Delta\delta \in [-0.004, 0.004]$ y $\Delta\nu \in [-0.021, 0.021]$. Entonces, en conclusión se observa de los resultados de robustez obtenidos mediante el análisis temporal usando funcionales de tipo completo son mucho más conservativos que los obtenidos en el dominio de la frecuencia.*

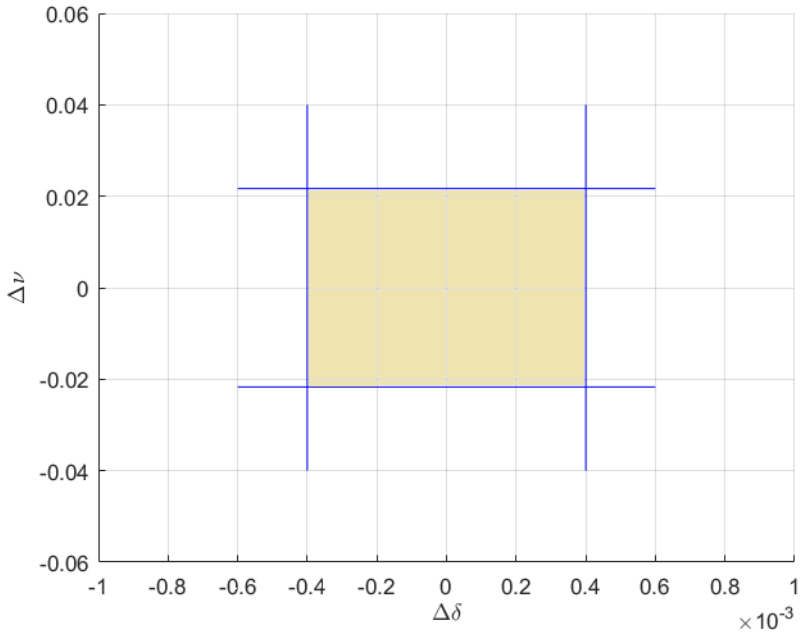

Figura 3.26: Espacio de parámetros $(\Delta\delta, \Delta\nu)$ que mantiene al sistema perturbado (3.49) estable.

3.4 Conclusiones

En este capítulo se introdujo el controlador Posicast en lazo abierto aplicado a un sistema de segundo orden subamortiguado. Usando ésta idea se propuso mejorar sus propiedades de robustez añadiendo un lazo de control Proporcional Integral. Se realizó un estudio de robustez en el dominio frecuencial y temporal. En el dominio de la frecuencia se usó el método de D-particiones para encontrar el espacio de parámetros en el cual el sistema de segundo orden subamortiguado con controlador PI-Posicast es robusto ante perturbaciones paramétricas y también ante perturbaciones constantes externas a la planta. De igual forma se encontraron, por medio del método temporal usando funcionales de tipo completo, cotas de robustez cuando existen perturbaciones aditivas en los parámetros de la planta. Se observó en un ejemplo ilustrativo que los resultados en el dominio del tiempo son mucho más conservativos que los obtenidos en el dominio de la frecuencia.

Capítulo 4

Estudio de robustez de un controlador PR

En el presente capítulo se profundiza en el análisis de un sistema de segundo orden subamortiguado controlado mediante un algoritmo Proporcional Retardado (PR). Se utiliza el método temporal mediante funcionales de Lyapunov-Krasovskii para verificar las condiciones de estabilidad del sistema en lazo cerrado.

4.1 Introducción

Sea el sistema de segundo orden de la forma

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\nu\dot{y}(t) + \nu^2 y(t) = bu(t), \tag{4.1}$$

con b, δ, $\nu \in \mathbb{R}^+$ parámetros conocidos. Se propone una ley de control Proporcional Derivativa (PD)

$$u(t) = -k_p y(t) - k_d \dot{y}(t), \tag{4.2}$$

donde se aproxima la derivada como

$$\dot{y}(t) \approx \frac{y(t) - y(t-h)}{h}. \tag{4.3}$$

Lo anterior conduce a una ley de control Proporcional Retardada (PR),

$$u(t) = -\gamma_1 y(t) + \gamma_2 y(t-h). \tag{4.4}$$

El controlador anterior tiene como característica la de evitar la medición de la derivada $\dot{\theta}(t)$ o el uso de observadores. Aquí $\gamma_1 = k_p + \frac{k_d}{h}$, $\gamma_2 = \frac{k_d}{h}$, $h \in \mathbb{R}^+$, siendo γ_1 la ganancia Proporcional, γ_2 la ganancia Derivativa y h el retardo, el cual es también parámetro de diseño. El sistema en lazo cerrado (4.1, 4.4) es entonces

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\nu\dot{y}(t) + \nu^2 y(t) = -b\gamma_1 y(t) + b\gamma_2 y(t-h). \tag{4.5}$$

Una representación del sistema en lazo cerrado (4.5) con estado $x(t) = \begin{bmatrix}\theta(t) & \dot{\theta}(t)\end{bmatrix}^T$ es

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \tag{4.6}$$

donde

$$A_0 \doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 - b\gamma_1 & -2\delta\nu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \tag{4.7}$$

y

$$A_1 \doteq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \tag{4.8}$$

La ecuación (4.6) muestra la dinámica del sistema nominal de segundo orden (4.1) en lazo cerrado con una ley de control Proporcional Retardada. Para calcular el punto de equilibrio $x^* = [x_1^* \quad x_2^*]^T$ del sistema (4.6) se tiene en cuenta que tanto las variables instantáneas como retardadas en el equilibrio alcanzan el mismo valor x^*. Entonces,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 - b\gamma_1 & -2\delta\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

De la ecuación anterior se obtiene

$$x_2^* = 0, \tag{4.10}$$

$$(-\nu^2 - b\gamma_1 + b\gamma_2)x_1^* - 2\delta\nu x_2^* = 0. \tag{4.11}$$

Sustituyendo (4.46) en (4.47) se observa que

$$x_1^* = 0, \tag{4.12}$$

y según las ecuaciones (4.46) y (4.12) el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (4.6) es

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

En la siguiente sección se presenta el análisis de estabilidad en el dominio de la frecuencia para un espacio de parámetros (h, γ_2).

4.2 Sintonización del sistema de segundo orden subamortiguado con controlador PR en el dominio frecuencial

En [25] se estudia el controlador Proporcional Retardado aplicado a un sistema de segundo orden subamortiguado. De este trabajo se toma el estudio de la *σ-estabilidad* del sistema en lazo cerrado (4.5) para determinar el valor de los parámetros (h, γ_2) que aseguren un máximo decaimiento exponencial. Asimismo, se emplea el método de D-particiones [17], para determinar el espacio de parámetros (h, γ_2) para los cuales el sistema (4.1) en lazo cerrado con un controlador PR (4.4) es estable.

4.2.1 Estudio del espacio de parámetros (γ_2, h)

El cuasipolinomio característico del sistema en lazo cerrado (4.5) se obtiene al aplicarle la transformada de Laplace, entonces

$$P_{lc}(s, h, \gamma_1, \gamma_2) = s^2 + 2\delta\nu s + \left(b\gamma_1 + \nu^2\right) - b\gamma_2 e^{-hs}. \tag{4.14}$$

Se sustituye en la ecuación (4.14), $s = 0$ y $s = j\omega$ de lo cual se obtienen ecuaciones paramétricas que definen los cruces o fronteras de estabilidad, ésto con el fin de subdividir el espacio paramétrico de la ecuación característica en regiones estables e inestables de acuerdo al método de D-particiones.

Caso $s = 0$: Sustituyendo $s = 0$ en el cuasipolinomio característico (4.14) e igualando a cero se llega a

$$P_{lc}(0, h, \gamma_1, \gamma_2) = b\gamma_1 - b\gamma_2 + \nu^2 = 0. \tag{4.15}$$

Despejando γ_2 de la ecuación anterior implica

$$\gamma_2 = \frac{b\gamma_1 + \nu^2}{b}. \tag{4.16}$$

Caso $s = j\omega$: sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación (4.14) y empleando la igualdad $e^{-sh} = \cos(h\omega) - j\sin(h\omega)$ e igualando a cero se obtiene la ecuación

$$P_{lc}(j\omega, h, \gamma_1, \gamma_2) = b\gamma_1 - b\gamma_2\cos(h\omega) + \nu^2 - \omega^2 + j\left(b\gamma_2\sin(h\omega) + 2\delta\nu\omega\right) = 0. \tag{4.17}$$

El cuasipolinomio $P_{lc}(j\omega, h, \gamma_1, \gamma_2)$ es igual a cero si y sólo si su parte real e imaginaria son iguales a cero simultáneamente, por lo tanto

$$\mathrm{Re}\{P_{lc}(j\omega, h, \gamma_1, \gamma_2)\} = b\gamma_1 - b\gamma_2\cos(h\omega) + \nu^2 - \omega^2 = 0, \tag{4.18}$$

$$\mathrm{Im}\{P_{lc}(j\omega, h, \gamma_1, \gamma_2)\} = b\gamma_2\sin(h\omega) + 2\delta\nu\omega = 0. \tag{4.19}$$

Despejando γ_2 de la ecuación (4.18) se obtiene

$$\gamma_2 = -\frac{2\delta\nu\omega\csc(h\omega)}{b}. \tag{4.20}$$

Sustituyendo (4.20) en (4.18) y despejando h, se llega a

$$h = \frac{\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{-b\gamma_1 - \nu^2 + \omega^2}{2\delta\nu\omega}\right) + \pi n}{\omega}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.21}$$

Así, para γ_1, δ, ν y $b \in \mathbb{R}^+$ dados, las ecuaciones paramétricas (4.16), (4.20) y (4.21) describen las fronteras de estabilidad del cuasipolinomio característico (4.14).

4.2.2 Estudio de σ-estabilidad del sistema de segundo orden subamortiguado con lazo de control PR

En la Figura 4.1 se muestra el espacio paramétrico en el cual el sistema en lazo cerrado (4.6) es estable. Sin embargo, el espacio paramétrico (h, γ_2) tiene un número infinito de valores que estabilizan al sistema en lazo cerrado (4.6). Entonces, se busca en particular parámetros (h, γ_2) que hagan que la respuesta del sistema tenga un máximo decaimiento exponencial. En [26] se realiza la sintonización del sistema de segundo orden con controlador Proporcional Retardado (4.5), además, se encuentran ecuaciones que determinan el decaimiento exponencial máximo. Aquí se emplea el mismo enfoque empleado en ese trabajo para fijar el espacio de parámetros (h, γ_2). Se dicen que los parámetros (h, γ_1, γ_2) σ-estabilizan al sistema en lazo cerrado (4.6) si su ecuación característica (4.14) satisface el Lema 2.1. Lo anterior implica la existencia de una cota de decaimiento exponencial σ tal que

$$\|x(t, \varphi)\| \leq Le^{-\sigma t}\|\varphi\|_h,$$

con $L > 0$. Realizando el cambio de variable $z(t) = x(t)e^{\sigma(t-h)}$ al sistema en lazo cerrado (4.6), se obtiene

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + A_1 z(t-h). \tag{4.22}$$

Las matrices A_0 y A_1 se definen como

$$A_0 = \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ -\nu^2 - b\gamma_1 & \sigma - 2\delta\nu \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} e^{\sigma h}.$$

El cuasipolinomio característico del sistema en lazo cerrado (4.22) es

$$p_\sigma(s, \gamma_1, \gamma_2, h) = s^2 + 2\left(\delta\nu - \sigma\right)s + \left(\sigma^2 - 2\sigma\delta\nu + \nu^2 + b\gamma_1\right) - b\gamma_2 e^{h(\sigma - s)}. \tag{4.23}$$

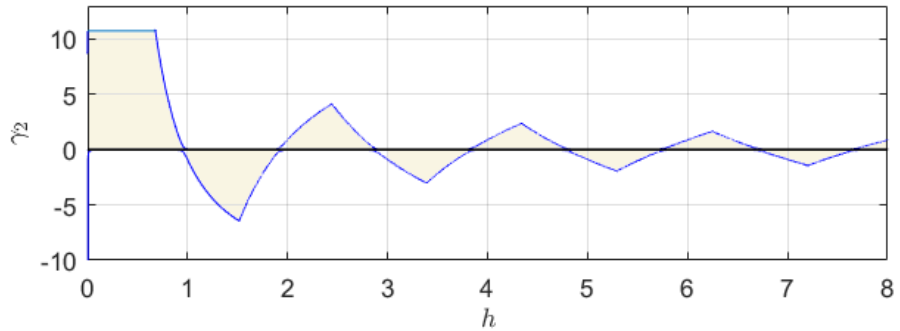

Figura 4.1: ■ Zona estable del espacio de parámetros (h, γ_2) con $\nu = 3$, $b = 1$, $\delta = 0.028$, $k_p = 0$, correspondiente al cuasipolinomio característico (4.14).

De acuerdo al método de D-particiones, haciendo $s = 0$ y $s = j\omega$ en (4.23) se subdivide el espacio paramétrico de la ecuación característica en regiones de estabilidad o inestabilidad. Entonces se tiene:

Caso $s = 0$: se sustituye $s = 0$ en el cuasipolinomio característico (4.23) e igualando a cero

$$\left(\sigma^2 - 2\sigma\delta\nu + \nu^2 + b\gamma_1\right) - b\gamma_2 e^{h(\sigma)} = 0.$$

Despejando γ_2 de la ecuación anterior se llega a

$$\gamma_2 = \frac{e^{-h\sigma}\left(b\gamma_1 - 2\delta\nu\sigma + \nu^2 + \sigma^2\right)}{b}. \tag{4.24}$$

La ecuación (4.24) describe la primera frontera de estabilidad o inestabilidad.

Caso $s = j\omega$: se sustituye $s = j\omega$ en el cuasipolinomio característico (4.23) e igualando a cero se obtiene

$$b\gamma_1 - b\gamma_2 e^{h\sigma}\cos(h\omega) - 2\delta\nu\sigma + \nu^2 + \sigma^2 - \omega^2 + j\left(b\gamma_2 e^{h\sigma}\sin(h\omega) + 2\delta\nu\omega - 2\sigma\omega\right) = 0.$$

La ecuación anterior se cumple si y sólo si la parte real y la parte imaginaria son cero simultaneamente, es decir

$$b\gamma_1 - b\gamma_2 e^{h\sigma}\cos(h\omega) - 2\delta\nu\sigma + \nu^2 + \sigma^2 - \omega^2 = 0, \tag{4.25}$$

$$b\gamma_2 e^{h\sigma}\sin(h\omega) + 2\delta\nu\omega - 2\sigma\omega = 0. \tag{4.26}$$

Ahora, despejando γ_2 de la ecuación (4.26) se obtiene

$$\gamma_2 = \frac{2\omega e^{-h\sigma}(\sigma - \delta\nu)\csc(h\omega)}{b}. \tag{4.27}$$

Sustituyendo (4.27) en la ecuación (4.25) y despejando h se llega a

$$h = \frac{\cot^{-1}\left(\frac{-b\gamma_1 + 2\delta\nu\sigma - \nu^2 - \sigma^2 + \omega^2}{2\omega(\delta\nu - \sigma)}\right) + \pi c_1}{\omega}, c_1 \in \mathbb{Z}. \tag{4.28}$$

Las ecuaciones (4.24), (4.27) y (4.28) describen las fronteras de estabilidad que subdividen al espacio paramétrico en regiones σ-estables o inestables. Se define σ^* como una cota de decaimiento exponencial máxima alcanzable con (h^*, γ_2^*) que son los valores del espacio de parámetros que produce σ^*. Las ecuaciones presentadas en [26] que determinan el máximo decaimiento exponencial del sistema en lazo cerrado (4.6) son

$$\sigma^* = \delta\nu + \sqrt{\nu^2(1 - \delta^2) + b\gamma_1}, \tag{4.29}$$

$$h^* = -\frac{2(\delta\nu - \sigma^*)}{\nu^2 + (\sigma^*)^2 - 2\delta\nu\sigma^* + b\gamma_1}, \tag{4.30}$$

$$\gamma_2^* = -\frac{2(\delta\nu - \sigma^*)}{bh^* e^{\sigma^* h^*}}. \tag{4.31}$$

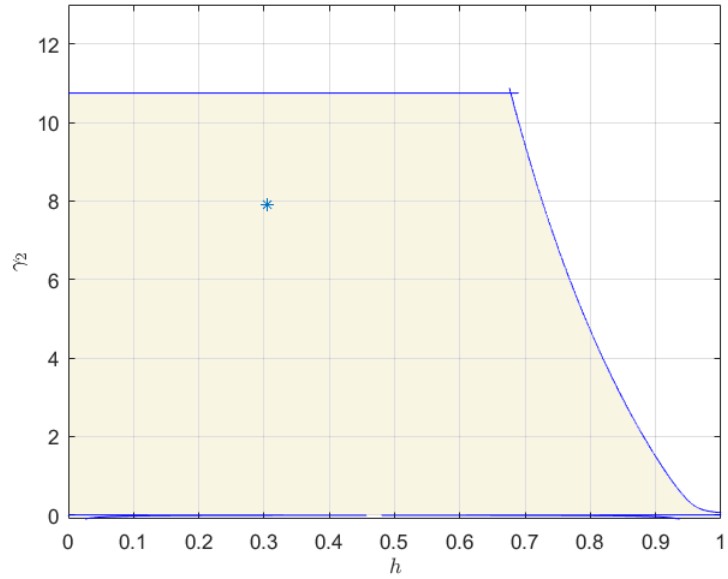

Figura 4.2: ■ Zona estable del espacio de parámetros (h, γ_2). Los valores $(h = 0.3050, \gamma_2 = 7.90229)$ generan el máximo decaimiento exponencial correspondiente al cuasipolinomio (4.14).

Usando las expresiones (4.29), (4.30) y (4.31) con $b = 1$, $\nu = 2.3968$, $\delta = 0.00055$, y $\gamma_1 = 5$, se obtienen los valores que generan el máximo decaimiento exponencial en el espacio paramétrico (γ_2, h): $\sigma^* = 3.2792$, $h^* = 0.3050$ y $\gamma_2^* = 7.90229$. En la Figura 4.2 se muestra la zona estable y el punto donde los parámetros (h^*, γ_2^*) generan un máximo decaimiento exponencial.

Ejemplo 4.1. *Considérense el sistema en lazo cerrado* (4.6) *y los parámetros de la planta;* $\nu = 2.3968$, $\delta = 0.00055$, $b = 1$ *y la ganancia Proporcional* $\gamma_1 = 5$. *Aplicando las fórmulas (4.30) y (4.31) para encontrar los valores de* γ_2^* *y* h^* *que garantizan el máximo decaimiento exponencial se obtiene*

$$h^* = 0.3050$$
$$\gamma_2^* = 7.90229.$$

Entonces, en la Figura 4.3 se observa que los estados del sistema convergen a sus puntos de equilibrio mostrados en (4.13).

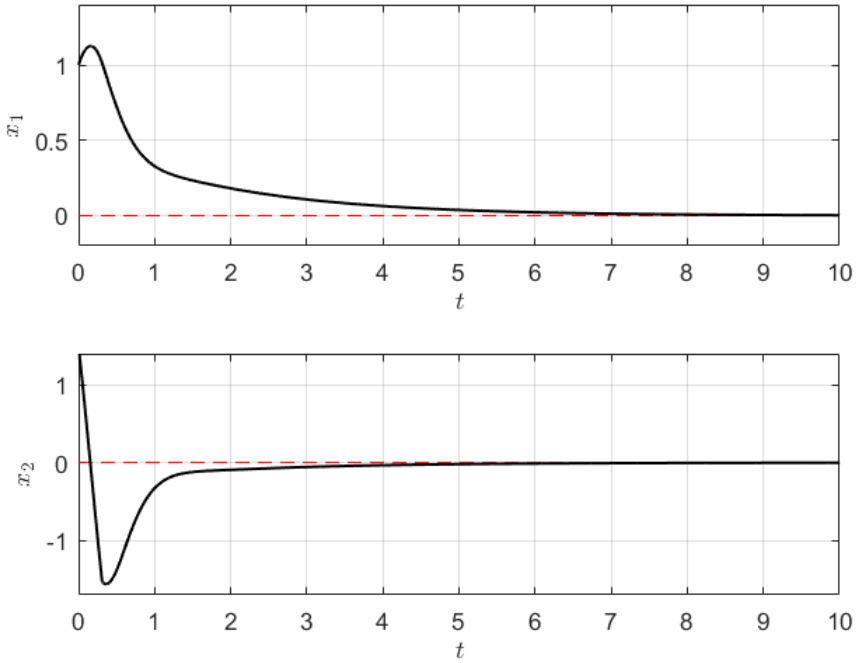

Figura 4.3: Convergencia de los estados del sistema en lazo cerrado (4.6) a sus puntos de equilibrio con $\nu = 2.3968$, $b = 1$, $\delta = 0.0005$, $h^* = 0.3050$, $\gamma_2^* = 7.90229$ con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 1.5$.

4.3 Estabilidad robusta

En esta sección se presentan dos estudios de estabilidad del sistema en lazo cerrado (4.6). El primero se hace en el dominio de la frecuencia, por lo que se consideran perturbaciones desconocidas externas constantes. El segundo análisis está basado en el enfoque temporal mediante el uso de funcionales de Lyapunov-Krasovskii.

4.3.1 Cotas de robustez en el espacio de parámetros (δ, ν)

Los parámetros (γ_2^*, h^*) del sistema en lazo cerrado (4.6) se fijan en los valores correspondientes al decaimiento exponencial máximo alcanzable (4.30) y (4.31). A continuación, se propone estudiar el mapa de estabilidad del espacio de los parámetros (δ, ν) del sistema en lazo cerrado (4.6) con el fin de obtener valores para δ y ν que garanticen la estabilidad. Sea el cuasipolinomio característico del sistema en lazo cerrado (4.6)

$$P_{lc}(s,h,\delta,\nu) = s^2 + 2\delta\nu s + \left(b\gamma_1 + \nu^2\right) - b\gamma_2 e^{-hs}.$$

Se aplica el método de D-particiones para subdividir el espacio paramétrico (δ, ν) en regiones estables e inestables.

Caso $s = 0$: se sustituye $s = 0$ en el cuasipolinomio característico (4.23) y se iguala a cero, entonces se llega a

$$b\gamma_1 - b\gamma_2 + \nu^2 = 0. \tag{4.32}$$

Despejando ν de la ecuación anterior se obtiene

$$\nu = \pm\sqrt{b\left(\gamma_2 - \gamma_1\right)}. \tag{4.33}$$

Las ecuaciones (4.32) y (4.33) delimitan la primera frontera de estabilidad además de ser el cruce de una raíz de una zona estable a otra inestable o viceversa.

Caso $s = j\omega$: ahora se sustituye $s = jw$ en el cuasipolinomio característico (4.23) e igualando a cero se obtiene

$$b\gamma_1 + \nu^2 - \omega^2 - b\gamma_2\cos(h\omega) + j\left(b\gamma_2\sin(h\omega) + 2\delta\nu\omega\right) = 0. \tag{4.34}$$

La ecuación (4.34) se cumple sólo si sus partes real e imaginaria son iguales a cero simultáneamente, es decir

$$b\gamma_1 - b\gamma_2\cos(h\omega) + \nu^2 - \omega^2 = 0, \tag{4.35}$$

$$b\gamma_2\sin(h\omega) + 2\delta\nu\omega = 0. \tag{4.36}$$

Despejando ν de la ecuación (4.35) se llega a

$$\nu = \pm\sqrt{-b\gamma_1 + b\gamma_2\cos(h\omega) + \omega^2}. \tag{4.37}$$

Sustituyendo (4.37) en (4.36) y despejando δ se obtiene

$$\delta = \pm\frac{b\gamma_2\sin(h\omega)}{2\omega\sqrt{-b\gamma_1 + b\gamma_2\cos(h\omega) + \omega^2}}. \tag{4.38}$$

Entonces, las ecuaciones (4.33), (4.37) y (4.38) representan las fronteras de estabilidad que dividen al espacio paramétrico (δ, ν) en regiones estables o inestables. La Figura 4.4 muestra el espacio paramétrico (δ, ν) para el cual el sistema en lazo cerrado (4.6) es estable. Se observa gráficamente que el valor de las cotas para los parámetros δ y ν que mantienen estable al sistema en lazo cerrado (4.6) son; $\delta > 0$ y $\nu > 1.7036$. En particular, se busca perturbar los parámetros de la planta δ y ν y verificar que bajo estas perturbaciones el sistema en lazo cerrado (4.6) se mantiene estable.

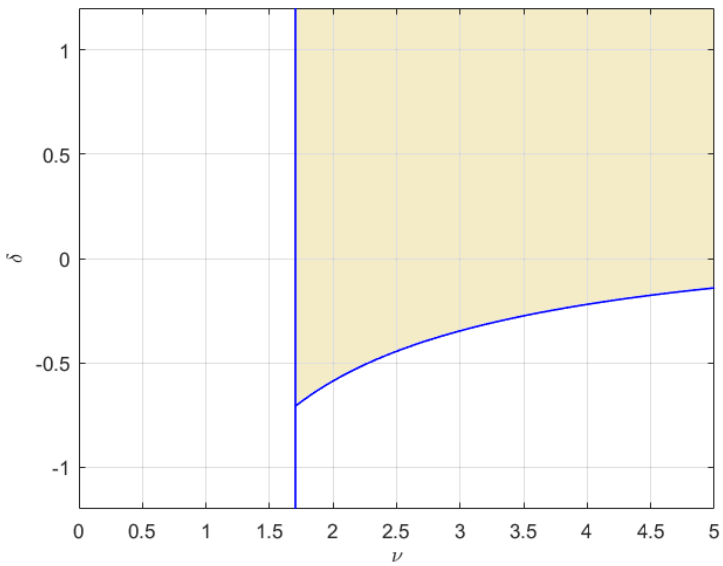

Figura 4.4: ■ Zona estable del espacio de parámetros (ν, δ), con $b = 1$, $\gamma_1 = 5$, $h^* = 0.3050$, $\gamma_2^* = 7.90229$, correspondiente al cuasipolinomio (4.14).

Ejemplo 4.2. *Dados los parámetros fijos de la planta nominal:* $b = 1$, $\gamma_1 = 5$, *y los valores que generan el máximo decaimiento exponencial* $h^* = 0.3050$ *y* $\gamma_2^* = 7.90229$, *se añaden perturbaciones aditivas a los parámetros de la planta* δ *y* ν *en los rangos* $0 < \delta \leq 0.95$ *y* $0 < \nu \leq 3$ *para observar los efectos de tales perturbaciones en el sistema en lazo cerrado (4.5). En la Figura 4.5 se observa el comportamiento de la salida del sistema cuando se perturba el parámetro* δ *y en la Figura 4.6 se aprecia la salida del sistema cuando se perturba el parámetro* ν. *Los efectos de las perturbaciones se observan en la salida del sistema en lazo cerrado* (4.5) *considerando el problema de regulación con* $r(t) = r > 0$. *Por lo anterior, es necesario recurrir al cambio de variable siguiente. La ecuación dinámica del error aplicada al sistema en lazo cerrado* (4.5) *puede reescribirse como*

$$\overline{e}(t) = r - y(t), \tag{4.39}$$

se sigue que

$$y(t) = r - \overline{e}(t), \tag{4.40}$$

$$\dot{y}(t) = -\dot{\overline{e}}(t), \tag{4.41}$$

$$\ddot{y}(t) = -\ddot{\overline{e}}(t), \tag{4.42}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.40), (4.41) *y* (4.42) *en la ecuación diferencial* (4.5) *se obtiene que la ecuación diferencial del sistema en lazo cerrado* (4.5) *asociada al error es*

$$\ddot{\overline{e}}(t) + 2\delta\nu\dot{\overline{e}}(t) + (\nu^2 + g\gamma_1)\overline{e}(t) - b\gamma_2\overline{e}(t-h) = (\nu^2 + b\gamma_1 - b\gamma_2)r. \tag{4.43}$$

Definiendo el estado $e(t) = \begin{bmatrix}\overline{e}(t) & \dot{\overline{e}}(t)\end{bmatrix}^T$ *se llega a*

$$\dot{e}(t) = A_0 e(t) + A_1 e(t-h) + Br, \tag{4.44}$$

donde las matrices A_0, A_1 *y* B *son*

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\nu^2 + b\gamma_1) & -2\delta\nu \end{bmatrix},$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b\gamma_2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu^2 + b\gamma_1 - b\gamma_2 \end{bmatrix}.$$

De la ecuación (4.44) *se calcula el punto de equilibrio* $e^* = [\overline{e}^* \quad \dot{\overline{e}}^*]^T$, *entonces*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\nu^2 + b\gamma_1) & -2\delta\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}^* \\ \dot{\overline{e}}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}^* \\ \dot{\overline{e}}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \nu^2 + b\gamma_1 - b\gamma_2 \end{bmatrix} r \tag{4.45}$$

donde se observa que

$$\dot{\overline{e}}^* = 0, \tag{4.46}$$
$$-(\nu^2 + b\gamma_1 - b\gamma_2)\overline{e}^* - 2\delta\nu\dot{\overline{e}}^* + (\nu^2 + b\gamma_1 - b\gamma_2)r = 0. \tag{4.47}$$

Sustituyendo (4.46) *en* (4.47) *y despejando* $\overline{e}^*$ *se obtiene*

$$\overline{e}^* = r, \tag{4.48}$$

y entonces el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (4.44) *es*

$$e^* = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.49}$$

Se nota que mientras existe una perturbación en el parámetro δ *del sistema en lazo cerrado (4.44) la salida converge a la referencia. El tiempo de convergencia es mayor mientras el valor de la perturbación* $\Delta\delta$ *aumenta. Se concluye que el sistema de segundo orden subamortiguado con controlador PR (4.44) es robusto ante perturbaciones aditivas al parámetro* δ *en el rango de variación* $0 < \delta \leq 0.95$. *Por otro lado, se observa que con una perturbación aditiva al parámetro* ν *existe sobretiro conforme la perturbación* $\Delta\nu$ *aumenta dentro del rango* $0 < \nu \leq 3$. *Se concluye que el sistema en lazo cerrado (4.44) es estable ante perturbaciones paramétricas aditivas a los parámetros* δ *y* ν *en los rangos* $0 < \delta \leq 0.95$ *y* $0 < \nu \leq 3$.

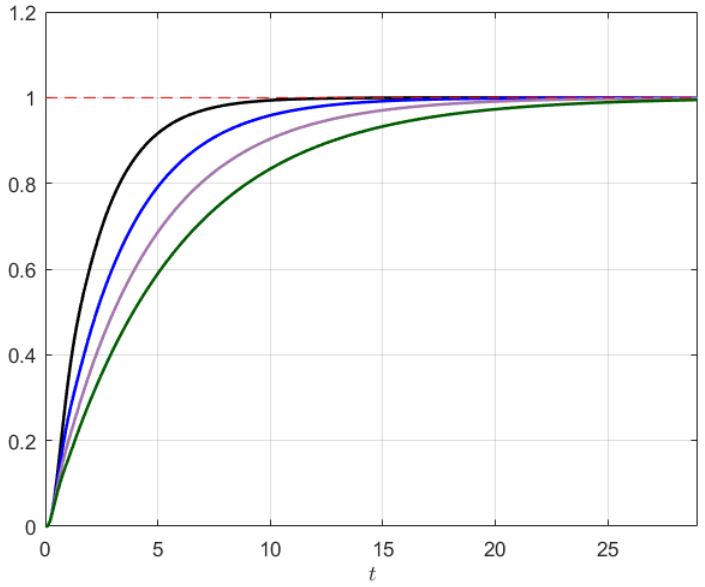

Figura 4.5: Salida del sistema perturbado de segundo orden subamortiguado (4.1) con controlador PR (4.44) con; ■ $\Delta\delta = 0$, ■ $\Delta\delta = 0.3$, ■ $\Delta\delta = 0.6$, ■ $\Delta\delta = 0.95$,- - -Referencia.

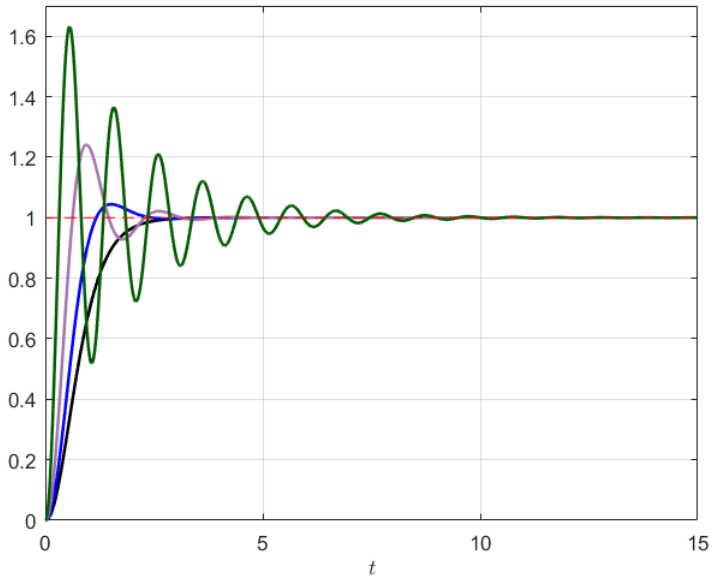

Figura 4.6: Salida del sistema perturbado de segundo orden subamortiguado (4.1) con controlador PR (4.44) con; ■ $\Delta\nu = 0$, ■ $\Delta\nu = 0.3$, ■ $\Delta\nu = 1$, ■ $\Delta\nu = 3$, - - - Referencia.

4.3.2 Cotas de robustez para un sistema de segundo orden subamortiguado en lazo cerrado con un controlador PR obtenidas mediante funcionales de Lyapunov-Krasovskii

A continuación, se estudia mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii la estabilidad robusta del sistema de segundo orden subamortiguado (4.1) con lazo de control PR (4.6) con respecto a los parámetros δ y ν perturbados. Sea el sistema en lazo cerrado (4.6)

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h),$$

donde

$$A_0 \doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 - b\gamma_1 & -2\delta\nu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

$$A_1 \doteq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Sean $\Delta\delta$, $\Delta\nu \in \mathbb{R}$ perturbaciones a los parámetros δ y ν respectivamente. Se define la matriz $\overline{A}_0 = A_0 + \Delta_0$, donde Δ_0 es una matriz desconocida que contiene los términos perturbados y está dada por

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(2\nu(\Delta\nu) + (\Delta\nu)^2) & -2(\nu(\Delta\delta) + (\Delta\nu)\delta + (\Delta\nu)(\Delta\delta)) \end{bmatrix}. \tag{4.50}$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado (4.6) se transforma en el siguiente sistema perturbado

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta_0)\, x(t) + A_1 x(t-h), \tag{4.51}$$

y se supone

$$\|\Delta_0\| \leq \rho_0. \tag{4.52}$$

El sistema (4.1) es exponencialmente estable debido a que la matriz (4.7) tiene sus valores propios en el semiplano complejo izquierdo, entonces se desea encontrar condiciones para ρ_0 tales que el sistema perturbado (4.51) sea estable. Para este fin se utiliza la funcional de tipo completo (2.20). La prueba de estabilidad se presenta en dos partes; primero se realiza la derivada respecto al tiempo de la funcional de tipo completo (2.20) evaluada en las trayectorias del sistema perturbado en lazo cerrado (4.51). Enseguida se usa la derivada obtenida para encontrar cotas de robustez que garanticen la estabilidad del sistema en lazo cerrado (4.51) cuando existen perturbaciones paramétricas $\Delta\delta$ y $\Delta\nu$.

Corolario 4.1. *[12] La derivada respecto al tiempo de la funcional de tipo completo (2.20) a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (4.51) es de la forma*

$$\dot{v}_c(x_t) = -w\,(x(t)) + 2x^T(t)\Delta_0^T L(t), \quad \textit{con} \quad w(x(t)) > 0, \tag{4.53}$$

donde

$$L(t) = U(0)x(t) + \int_{t-h}^{t} U(t-h-\theta')A_1 x(\theta')d\theta'. \tag{4.54}$$

Prueba. Sean los términos de la funcional (2.7) definidos como

$$v_c(x_t) = G_1(x_t) + G_2(x_t) + G_3(x_t) + G_4(x_t),$$

y aquí

$$\begin{aligned}
G_1(x_t) &= x^T(t)U(0)x(t),\\
G_2(x_t) &= 2x^T(t)\int_{-h}^{0} U(-h-\theta)A_1x(t+\theta)d\theta,\\
G_3(x_t) &= \int_{-h}^{0} x^T(t+\theta_1)A_1^T\left[\int_{-h}^{0} U(\theta_1-\theta_2)A_1x(t+\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1,\\
G_4(x_t) &= \int_{-h}^{0} x^T(t+\theta)\left[W_1+(h+\theta)W_2\right]x(t+\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Derivando cada término a lo largo de las trayectorias del sistema (4.51) se llega a

$$\dot{v}_c(x_t) = x^T(t)\left[-W+W_1+hW_2\right]x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h)$$

$$-\int_{t-h}^{t} x^T(\theta')W_2x(\theta')d\theta' + 2x^T(t)U(0)\Delta_0x(t) + 2x^T(t)\Delta_0^T\int_{t-h}^{t} U(-h-\theta'+t)A_1x(\theta')d\theta'.$$

Ahora se aplica la Definición 2.4 con $W = W_0 + W_1 + hW_2$, entonces la derivada de la funcional de tipo completo a través de las trayectorias del sistema perturbado (4.51) es

$$\dot{v}_c(x_t) = -w\left(x(t)\right) + 2x^T(t)\Delta_0^T\left[U(0)x(t) + \int_{t-h}^{t} U(t-h-\theta')A_1x(\theta')d\theta'\right], \tag{4.55}$$

con

$$w(x(t)) = x^T(t)W_0x(t) + x^T(t-h)W_1x(t-h) + \int_{t-h}^{t} x^T(\theta')W_2x(\theta')d\theta'. \quad \square.$$

El siguiente Teorema establece condiciones sobre la matriz perturbada Δ_0 para que el sistema perturbado en lazo cerrado (4.51) se mantenga estable.

Teorema 4.1. *[12] Sea el sistema (4.6) exponencialmente estable. Dadas las matrices W_1, W_2 y W_0 positivas definidas, entonces el sistema perturbado (4.51) se mantiene exponencialmente estable para toda matriz desconocida Δ_0 si se satisface (4.52) y también las siguientes condiciones*

$$\lambda_{\min}(W_0) \geq \bar{\nu}\rho_0\left(2+ah\right), \tag{4.56}$$

$$\lambda_{\min}\left(W_1\right) \geq 0, \tag{4.57}$$

$$\lambda_{\min}\left(W_1\right) \geq \nu\bar{\rho}_0 a. \tag{4.58}$$

Prueba. Sean

$$\bar{\nu} = \max_{\theta\in[0,h]} \|U(\theta)\|, \qquad a = \|A_1\|.$$

La obtención de las cotas superiores de robustez se logra usando la derivada (4.55) del Corolario 4.1 lo cual implica

$$\dot{v}(x_t) \leq -\|w(x_t)\| + \|2x^T(t)\Delta_0^T L(t)\| \leq 0.$$

De la desigualdad anterior y usando $\|x^T(t)Px(t)\| \leq \lambda_{\min}(P)\|x(t)\|^2$ con $P > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
-x^T(t)W_0x(t) &\leq -\lambda_{\min}(W_0)\|x(t)\|^2,\\
-x^T(t-h)W_1x(t-h)- &\leq \lambda_{\min}(W_1)\|x(t-h)\|^2,\\
-\int_{t-h}^{t} x^T(\theta')W_2x(\theta')dm &\leq -\lambda_{\min}(W_2)\int_{t-h}^{t}\|x(\theta')\|^2d\theta',\\
2x^T(t)\Delta_0^T U(0)x(t) &\leq 2\rho_0\bar{\nu}\|x(t)\|^2,\\
2x^T(t)\Delta_0^T\int_{t-h}^{t} U(-h-\theta'+t)A_1x(\theta')d\theta' &\leq \bar{\nu}\rho_0 a\left(h\|x(t)\|^2 + \int_{t-h}^{t}\|x(\theta')\|^2d\theta'\right).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\dot{v}(x_t) \leq (-\lambda_{\min}(W_0) + 2\rho_0\bar{\nu} + \bar{\nu}\rho_0 ah)\|x(t)\|^2 - \lambda_{\min}(W_1)\|x(t-h)\|^2$$

$$+ (\bar{\nu}\rho_0 a - \lambda_{\min}(W_2))\int_{t-h}^{t}\|x(\theta')\|^2d\theta' \leq 0.$$

Para que la derivada (4.55) se mantenga negativa cada término de la inecuación anterior debe ser negativo, entonces

$$\begin{aligned}
-\lambda_{\min}(W_0) + 2\rho_0\bar{\nu} + \bar{\nu}\rho_0 ah &\leq 0,\\
-\lambda_{\min}(W_1) &\leq 0,\\
\bar{\nu}\rho_0 a - \lambda_{\min}(W_2) &\leq 0,
\end{aligned}$$

y de lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\min}(W_0) \geq \bar{\nu}\rho_0(2+ah),\\
&\lambda_{\min}(W_1) \geq 0,\\
&\lambda_{\min}(W_1) \geq \nu\bar{\rho}_0 a. \quad \square.
\end{aligned}$$

Entonces, se concluye que el sistema en lazo cerrado perturbado (4.51) es estable si se cumplen las condiciones (4.56), (4.57) y (4.58) del Teorema 4.1.

Ejemplo 4.3. *En el presente ejemplo se calcula un valor numérico para la cota de robustez* ρ_0 *establecida en* (4.52)*. Primero se calculan según el Teorema 4.1 las cotas de robustez para la norma de las matriz perturbada* $\|\Delta_0\|$*, después se obtiene una condición de robustez para las perturbaciones en un espacio paramétrico* $(\Delta\delta, \Delta\nu)$*. Los valores para la planta de segundo orden* (4.1) *son* $b = 1$*,* $\gamma_1 = 5$ *y los valores de los parámetros que generan el máximo decaimiento exponencial en el sistema* (4.6) *son* $h^* = 0.3050$ *y* $\gamma_2^* = 7.90229$*. Los valores nominales de los parámetros de la planta* (4.1) *son* $\delta = 0.00055$ *y* $\nu = 2.3968$*.*

Las matrices A_0 *y* A_1 *definidas en (4.7) y (4.8) son respectivamente*

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ -10.7447 & -0.0026 \end{bmatrix}.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7.9023 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.59}$$

La matriz $W = W_0 + W_1 + hW_2$ *se escoge como la matriz Identidad por simplicidad para el cálculo de la matriz de Lyapunov (2.9) por lo que las matrices* $W_0 > 0$*,* $W_1 > 0$ *y* $W_2 > 0$ *se definen como*

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0.1000 & 0 \\ 0 & 0.1000 \end{bmatrix}, \tag{4.60}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.7000 & 0 \\ 0 & 0.7000 \end{bmatrix}, \tag{4.61}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.6557 & 0 \\ 0 & 0.6557 \end{bmatrix}. \tag{4.62}$$

Para que el sistema perturbado en lazo cerrado (4.51) *sea estable, se deben satisfacer las condiciones 1, 2 y 3 del Teorema 4.1, entonces usando el método semianalítico mostrado en la Definición 2.10 para calcular el máximo de la norma de la matriz de Lyapunov* $U(\theta)$ *en el intervalo* $[0, h]$ *se obtiene*

$$\bar{\nu} = \max_{\theta \in [0,h]} \|U(\theta)\| = 2.9493. \tag{4.63}$$

A su vez, la norma inducida por la norma Euclidiana de la matriz A_1 *es*

$$a = \|A_1\| = 7.9023. \tag{4.64}$$

Las 3 condiciones del Teorema 4.1 producen 2 desigualdades con una incógnita para la cota superior de robustez ρ_0*. Para determinar el valor de* Δ_0 *las condiciones* (4.56) *y* (4.58) *deben cumplirse simultáneamente, entonces*

$$\rho_0 = 0.0076,$$

y ésto indica que el máximo valor de la norma de la matriz Δ_1 *que contiene los parámetros perturbados* $\Delta\delta$ *y* $\Delta\nu$ *debe ser* $\|\Delta_1\| \leq 0.0076$. *De lo anterior de puede concluir que la cota superior de robustez* ρ_0 *de* $\|\Delta_0\|$ *y los parámetros* h, b, γ_1, γ_2, δ *y* ν *fijos hacen que las condiciones del Teorema 4.1 se cumplan, y por lo tanto el sistema perturbado (4.51) es exponencialmente estable con* $\|\Delta_0\| < 0.0076$. *En la Figura 3.25 se muestra la convergencia de los estados* $x_1(t)$ *y* $x_2(t)$ *a sus puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado perturbado* (4.51).

Si se desea una condición de robustez en términos de las perturbaciones paramétricas $\Delta\nu$ *y* $\Delta\delta$, *entonces se debe considerar la expresión de la matriz* Δ_0 *en la condición de robustez* (4.52). *Usando la norma inducida de una matriz permite reescribir la condición* (4.52) *como*

$$\|\Delta_0\| = \lambda_{\max}(\Delta_0^T \Delta_0) \leq \rho_0^2. \tag{4.65}$$

Sin embargo, se tiene que $\lambda_{\max}(\Delta_0^T \Delta_0) = 0$, *por lo tanto no se puede establecer mediante* (4.65) *una condición explícita de robustez en términos de las perturbaciones* $\Delta\delta$ *y* $\Delta\nu$. *Es claro que la condición* (4.52) *se cumple para el ejemplo.*

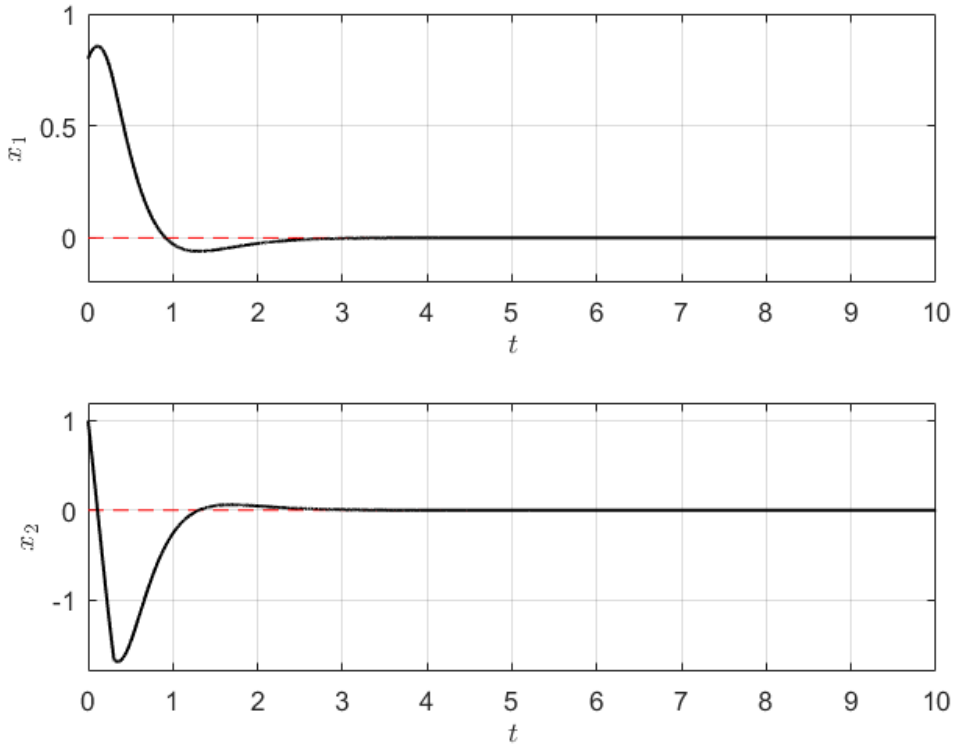

Figura 4.7: Convergencia de los estados del sistema perturbado (4.51) a sus puntos de equilibrio (4.13).

4.4 Conclusiones

Se retomó el estudio de robustez en el dominio de la frecuencia de un sistema de segundo orden subamortiguado con lazo de control PR utilizando el método de D-particiones para establecer ecuaciones que generan el máximo decaimiento exponencial del sistema. Se parte de éste trabajo para estudiar el espacio de parámetros (δ, ν) en el cual se presentó un conjunto de valores en 2D para el cual el sistema de segundo orden en lazo cerrado con un controlador PR es estable. Se profundizó en el dominio temporal el estudio de la estabilidad robusta del sistema de segundo orden con lazo de control PR mediante el uso de funcionales de Lyapunov-Krasovskii probando estabilidad asintótica cuando los parámetros de la planta δ y ν se perturban y se encontraron cotas de robustez que garantizan la estabilidad para el sistema perturbado.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

5.1 Conclusiones

En éste trabajo de tesis se profundizó en el estudio de la estabilidad robusta en los dominios frecuencial y temporal de un sistema de segundo orden subamortiguado en cascada con el filtro Posicast y con un lazo de control PI (Proporcional Integral), y de un sistema de segundo orden subamortiguado en lazo cerrado con controlador PR (Proporcional Retardado).

Se estudia la estabilidad robusta del controlador Proporcional Integral Posicast (PI-Posicast) aplicado en cascada a un sistema de segundo orden subamortiguado. Se logró sintonizar por medio del método frecuencial de D-particiones el controlador PI-Posicast encontrándose de forma gráfica valores para las ganancias del controlador k_p y k_i que generan un decaimiento exponencial máximo. Se probó que el sistema es robusto ante perturbaciones aditivas en los parámetros nominales de la planta δ y ν. Se encontraron cotas de robustez que garantizan la estabilidad en lazo cerrado ante perturbaciones aditivas en los parámetros de la planta aplicando las funcionales de tipo Lyapunov Krasovskii.

También se retomó el estudio de la estabilidad robusta en el dominio de la frecuencia de un controlador Proporcional Retardado (PR) aplicado a un sistema de segundo orden subamortiguado. Se sintonizó el controlador PR por medio de un método previamente publicado que emplea las D-particiones, encontrándose valores de los parámetros h y γ_2 del sistema en lazo cerrado que conducen al máximo decaimiento exponencial. Se probó robustez ante perturbaciones aditivas en los parámetros nominales de la planta δ y ν. En el marco temporal se encontraron cotas de robustez que garantizan la estabilidad del sistema de segundo orden subamortiguado ante perturbaciones aditivas en los parámetros nominales de la planta mediante funcionales Lyapunov Krasovskii.

5.2 Trabajos futuros

Para dar seguimiento al trabajo referente a esta tesis se propone:

- Realizar un estudio analítico de la σ-estabilización en el sistema de segundo orden subamortiguado con lazo de control PI-Posicast para encontrar fórmulas de sintonización para este controlador.
- Implementar los resultados obtenidos en el presente trabajo mediante experimentos en tiempo real.

Bibliografía

[1] Bellman, R. E., Cooke, K. L. (1963). Differential-difference equations.

[2] Cook, G. (1962). Posicast versus conventional types of compensation in a control system (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).

[3] Cook, G. (1966). An application of half-cycle Posicast. IEEE Transactions on Automatic Control, 11(3), 556-559.

[4] Cooke, K. L., Turi, J. (1994). Stability, instability in delay equations modeling human respiration. Journal of Mathematical Biology, 32(6), 535-543.

[5] Cooke, K. L., Van Den Driessche, P. (1986). On zeroes of some transcendental equations. Funkcialaj Ekvacioj, 29(1), 77-90.

[6] Wouk, A. (1968). Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments (LE El'sgol'ts). SIAM Review, 10(2), 240.

[7] Fridman, E. (2014). Introduction to time-delay systems: Analysis and control. Springer.

[8] Gu, K., Chen, J., Kharitonov, V. L. (2003). Stability of time-delay systems. Springer Science Business Media.

[9] Hung, J. Y. (2003). Feedback control with Posicast. IEEE Transactions on industrial electronics, 50(1), 94-99.

[10] Hung, J. Y. (2007). Posicast control past and present. IEEE Multidisciplinary engineering education magazine, 2(1), 7-11.

[11] Kabakov, I. P. (1946). Concerning the control process for the steam pressure. Inzh. sbornik, 2, 27-60.

[12] Kharitonov, V. (2012). Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Springer Science Business Media.

[13] Krasovskii, N. N. (1956). On the application of the second method of Lyapunov for equations with time delays. Prikl. Mat. Mekh, 20(3), 315-327.

[14] La Salle, J., Lefschetz, S. (2012). Stability by Liapunov's Direct Method with Applications by Joseph L Salle and sólomon Lefschetz (Vol. 4). Elsevier.

[15] Louisell, J. (1998). Numerics of the stability exponent and eigenvalue abscissas of a matrix delay system. In Stability and Control of Time-Delay Systems (pp. 140-157). Springer, Berlin, Heidelberg.

[16] Mondie, S., Kharitonov, V. L. (2005). Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 50(2), 268-273.

[17] Neimark, J. (1949). D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials. Prikladnaya Matematika i Mekhanika, 13(5), 349-380.

[18] Niculescu, S. I. (2001). Delay effects on stability: a robust control approach (Vol. 269). Springer Science Business Media.

[19] Ramírez, A., Garrido, R., Mondié, S. (2015). Velocity control of servo systems using an integral retarded algorithm. ISA transactions, 58, 357-366.

[20] Ramirez, A., Mondié, S., Garrido, R., Sipahi, R. (2015). Design of proportional-integral-retarded (PIR) controllers for second-order LTI systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 61(6), 1688-1693.

[21] Ramirez, A., Sipahi, R., Mondie, S., Garrido, R. (2017). An analytical approach to tuning of delay-based controllers for LTI-SISO systems. SIAM Journal on Control and Optimization, 55(1), 397-412.

[22] Razumikhin, B. S, (1956). On the stability of systems with a delay. Prkl. Mat. Mekh, 20(4):500-512.

[23] Smith, O. J. (1957). Posicast control of damped oscillatory systems. Proceedings of the IRE, 45(9), 1249-1255.

[24] Spiegel, M. R. (1965). Laplace transforms (p. 46). New York: McGraw-Hill.

[25] Villafuerte, R., Mondié, S. (2010). Tuning the leading roots of a second order DC servomotor with proportional retarded control. IFAC Proceedings Volumes, 43(2), 337-342.

[26] Villafuerte, R., Mondié, S., Garrido, R. (2012). Tuning of proportional retarded controllers: theory and experiments. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 21(3), 983-990.

[27] Vrančić, D., Oliveira, P. M. (2012). Design of feedback control for underdamped systems. IFAC Proceedings Volumes, 45(3), 98-103.

[28] Zubov, V. I. (1961). Methods of AM Lyapunov and their application (No. AEC-TR-4439). ERDA Div. Phys. Res..