



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

“Ecuación discreta de Hill sin y con amortiguamiento”

TESIS

Que presenta

ING. LUIS GUILLERMO VENEGAS PINEDA

Para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
CONTROL AUTOMÁTICO

Director de la Tesis:

Dr. Joaquín Collado Moctezuma

Ciudad de México

Septiembre 2019

Ya no importa cuán estrecho haya sido el camino,
ni cuantos castigos lleve a mi espalda,
soy el amo de mi destino,
soy el capitán de mi alma.

William Ernest Henley

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi familia. A mi padre, Narciso Venegas Vargas, por sus incontables sacrificios e incansable esfuerzo por brindarme una buena educación y futuro. A mi madre, Ma del Rosario Pineda Catalán, por sus siempre atinados consejos e incomparable dedicación en cada momento de mi vida. A ambos por su determinación, sus palabras y ejemplos para ayudarme a ser la persona que soy, pero sobre todas las cosas por su siempre incondicional apoyo, cariño y comprensión. A mi hermano, Alberto Eduardo Venegas Pineda, por constantemente guiarme al camino que debo seguir.

A mi pareja, Michelle Acevedo Velázquez, por ser la mayor motivación cada día, por convertirse en la mejor amiga y compañera con una sorprendente capacidad de escuchar y más importante, por siempre estar a mi lado aún en los momentos más adversos. Por toda la luz y felicidad que has traído a mi.

Al Doctor Joaquín Collado, por su amistad, consejos y enseñanzas; por ser un guía personal y profesional.

A mis grandes amigos, por todas las alegrías y lecciones a lo largo de toda mi vida.

Agradezco profundamente al CONACYT por el apoyo económico recibido con la beca número CVU: 861943.

A todos mi eterna gratitud, ya que sin ellos jamás habría alcanzado las metas que me he fijado.

Luis Venegas P.

Resumen

En el presente documento se estudia la ecuación discreta de Hill con amortiguamiento. Una breve introducción sobre los sistemas Hamiltonianos y las propiedades de la ecuación de Hill, tanto en tiempo continuo como en discreto, es proporcionada. Se analizan las principales características de la ecuación discreta de Hill amortiguada, así como el efecto que tiene el término disipativo sobre las regiones estables y las lenguas de Arnold del diagrama de Strutt del sistema mencionado. Además, se estudia la relación existente entre las curvas de transición dadas por una ecuación discreta de Hill con amortiguamiento y las líneas de velocidad de escape a infinito de una ecuación discreta de Hill sin amortiguamiento asociada.

Palabras clave: Ecuación de Hill, amortiguamiento, Lenguas de Arnold, diagrama de Strutt, velocidad de escape a infinito.

Abstract

In the present document the discrete Hill's equation with damping is studied. A brief introduction on Hamiltonian systems and the Hill's equation properties, both in continuous and discrete time, is provided. The main features of the damped discrete Hill's equation are analyzed, as well as the dissipative term effect on the stable regions and the Arnold Tongues of the Strutt diagram in the aforementioned system. Also, the existence of a relationship between the transition curves given by a discrete damped Hill's equation and the escape to infinity speed lines of an associated undamped discrete Hill's equation is studied.

Keywords: Hill's equation, damping, Arnold Tongues, Strutt diagram, escape to infinity speed.

Contenido

Agradecimientos	v
Resumen	vii
1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Matriz de Transición de Estados	5
2.2. Teoría de Floquet	6
2.2.1. Reducibilidad	8
2.2.2. Estabilidad	9
2.3. Sistemas Hamiltonianos	10
2.4. Ecuación de Hill en Tiempo Continuo	12
2.5. Ecuación Discreta de Hill sin amortiguamiento	15
2.5.1. Ecuación de Euler-Lagrange en tiempo continuo	15
2.5.2. Ecuación de Euler-Lagrange en tiempo discreto	15
2.5.3. Ecuación de Hill Discreta: Caso escalar	16
3. Resultados principales	21
3.1. Obtención de la ecuación de Hill discreta con amortiguamiento	21
3.2. Diferencias entre las ecuaciones discretizada y discreta de Hill	23
3.2.1. Ecuación de Hill discretizada sin amortiguamiento	23
3.2.2. Ecuación de Hill discreta sin amortiguamiento	27
3.2.3. Ecuación de Hill discretizada con amortiguamiento	29

3.2.4. Ecuación de Hill discreta con amortiguamiento	32
3.2.5. Relación entre una ecuación discreta de Hill con amortiguamiento y una ecuación discreta de Hill sin disipación asociada	37
4. Simulaciones	43
5. Trabajo a Futuro	51
5.1. Ecuación de Hill: Caso con dos grados de libertad	51
6. Conclusiones	55
Publicaciones	57
Bibliografía	58

Lista de Figuras

2.1. Ecuación de Meissner Discreta con $K = 6$ y sin amortiguamiento. . . .	17
3.1. Ecuación de Meissner sin amortiguamiento discretizada.	25
3.2. Ecuación de Mathieu sin amortiguamiento discretizada.	25
3.3. Ecuación de Meissner sin amortiguamiento discreta.	28
3.4. Ecuación de Mathieu sin amortiguamiento discreta.	29
3.5. Ecuación de Meissner con amortiguamiento discretizada, $\delta = 0.01$	31
3.6. Ecuación de Mathieu con amortiguamiento discretizada, $\delta = 0.01$	31
3.7. Ecuación de Meissner con amortiguamiento discreta, $\delta = 0.01$	34
3.8. Ecuación de Mathieu con amortiguamiento discreta, $\delta = 0.01$	34
3.9. Puntos de transición para las curvas de transición de la ecuación discreta de Meissner con amortiguamiento, $\delta = 0.05$	35
3.10. Puntos de transición para las curvas de transición de la ecuación discreta de Mathieu con amortiguamiento, $\delta = 0.05$	36
3.11. Curvas de transición de la ecuación discreta de Meissner con $K = 5$ y diferentes valores de amortiguamiento δ	40
3.12. Curvas de velocidad de escape a infinito de la ecuación discreta de Meiss- ner sin amortiguamiento con $K = 5$ y diversos valores para la velocidad ζ	41
4.1. Forma de onda de la función $p(t) = \cos(t) + \cos(2t)$	44
4.2. Diagrama de Strutt para la ecuación de Hill con $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$, $K = 5$, $\delta = 0$ y $T = 2\pi$	46

-
- 4.3. Diagrama de Strutt para la ecuación de Hill con $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$,
 $K = 5$, $\delta = 0.05$ y $T = 2\pi$ 46
- 4.4. Puntos de transición de la ecuación de Hill con $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$,
 $K = 5$, $\delta = 0.05$, $\beta = 1.5$ y $T = 2\pi$ 47
- 4.5. Curvas de transición de la ecuación discreta y amortiguada de Hill con
 $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$, $K = 5$, $T = 2\pi$ y diversos valores del término δ . 48
- 4.6. Curvas de velocidad de escape a infinito de la ecuación discreta de Hill
sin amortiguamiento con $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$, $K = 5$, $T = 2\pi$ y
diferentes valores para el término ζ 49
- 5.1. Regiones de estabilidad para el polinomio reducido en blanco. Rojo para
algún $\lambda < -1$; verde para algún $\lambda > 1$; amarillo para algún $\lambda < -1$ y otro
 $\tilde{\lambda} > 1$; rosa para dos multiplicadores $\lambda < 1$; cyan para dos multiplicadores
 $\lambda > 1$; azul para dos multiplicadores no reales fuera del disco unitario. . 53

Lista de Tablas

3.1. Valores equivalentes de amortiguamiento δ y velocidad de escape a infinito ζ^{-1} para la ecuación discreta de Meissner.	42
4.1. Valores equivalentes de amortiguamiento δ y velocidad de escape a infinito ζ^{-1} para la ecuación de Hill discreta con la secuencia de activación $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$	50

Capítulo 1

Introducción

Durante un largo periodo, las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos, $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, con $A(t+T) = A(t)$ una matriz cuadrada de dimensión n , han sido objeto de estudio para describir diversos sistemas físicos [3], [43]. La ecuación de Hill [7], $\ddot{x}(t) + [\alpha + \beta p(t)]x(t) = 0$, $p(t+T) = p(t)$, fue introducida en 1870 por George Hill en [19]. Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden con una función periódica utilizada para describir las variaciones en la órbita lunar. Esta ecuación ha sido ampliamente empleada en el estudio de problemas en ingeniería y física [9], [28], [43]. En el lapso de publicación de los resultados obtenidos por Hill apareció el Teorema de Floquet [12]; actualmente cualquier estudio sobre la ecuación de Hill se basa en dicha teoría.

A finales de la década de 1940 y hasta la década de 1980, dos renombrados académicos rusos, Krein y Yakubovich, establecieron los fundamentos de los sistemas Hamiltonianos con coeficientes periódicos [25], [43]. Otras importantes contribuciones fueron hechas por Gelfand-Lindskii [16], Starzhinskii [39], Bolotin [5], Atkinson [4], y Eastham [11]; por sobre todos ellos fue el mismo Lyapunov quien contribuyó con cerca de la mitad de su tesis doctoral al problema de la estabilidad de sistemas lineales periódicos [27]. Algunas relaciones del caso escalar con las teoría de Sturm-Liouville aparecen en Atkinson [4], Eastham [11], Yakubovich-Starzhinskii [43], y en Marchenko [29].

El fenómeno de la resonancia paramétrica ocurre cuando a un sistema naturalmente oscilatorio se le aplica una variación periódica sobre un parámetro, a dicha alteración se le denomina excitación paramétrica. El principal efecto de la resonancia paramétrica consiste en estabilizar o inestabilizar el sistema a partir de la frecuencia natural y la amplitud de la señal insertada. Algunos ejemplos de sistemas con este tipo de fenómeno son:

1. El péndulo de Kapitsa: El ganador del premio Nobel, Piotr Kapitsa [23] usó la teoría de perturbaciones para encontrar una condición en la cual el punto de equilibrio superior de un sistema pendular pueda ser estabilizado variando periódicamente el punto de suspensión. Básicamente, si el punto de suspensión de un péndulo de masa M y longitud L es variado periódicamente con $z = A \cos(\omega t)$, entonces el punto de equilibrio superior será estable si $A\omega > \sqrt{2gL}$, donde $g = 9.81 [m/s^2]$ es la aceleración gravitacional.
2. El puente de Tacoma: Inaugurado en julio de 1940 y siendo el tercer puente colgante de mayor longitud en Estados Unidos, colapsó tan solo cuatro meses después debido a una oscilación inestable provocada por la resonancia paramétrica generada entre una ráfaga de viento y el coeficiente de elasticidad de la estructura.

Ha sido demostrado que la ecuación de Hill tiene dos tipos de soluciones, ya sean acotadas o no acotadas [9]. El tipo de comportamiento del sistema depende directamente de los valores (α, β) . El plano $\alpha - \beta$ es llamado diagrama de Strutt y las zonas inestables del mismo reciben el nombre de Lenguas de Arnold, publicadas por primera vez en 1928 por van der Pol y M. J. Strutt ¹ [42], aunque el nombre fuera atribuido posteriormente [2]. Las curvas que dividen las regiones estables e inestables en el diagrama de Strutt son llamadas Curvas de Transición, las cuales se caracterizan por tener al menos una solución T-periódica ó 2T-periódica [28]. Las curvas de velocidad de escape a infinito son líneas dentro de las lenguas de Arnold que se distinguen por tener la misma razón

¹Aseguraron haber obtenido las Lenguas de Arnold para la ecuación de Mathieu, i.e. $p(t) = \cos(t)$, sin embargo su diagrama correspondía a las regiones de estabilidad de la ecuación de Meissner, i.e. $p(t) = \cos(t)$.

de crecimiento. La existencia de dichas curvas ha sido notada en diferentes referencias como [44], en donde son llamadas Líneas de contorno; [31], en donde se estableció una relación entre la ecuación amortiguada de Mathieu y dichas curvas; [13], en el cual las líneas de contorno reciben el nombre de Curvas Iso- μ y se ha demostrado la existencia de una relación entre estas fronteras y una ecuación de Hill amortiguada; y [34], en donde una caracterización de las regiones estables e inestables ha sido obtenida empleando un procedimiento de wavelet - Garlekin.

Una versión ampliamente estudiada de la ecuación de Hill es la ecuación de Mathieu [31], [44]. En [35] una explicación bastante entendible de la ecuación de Mathieu es dada, introduciendo términos no lineales y amortiguamiento; un estudio de un par de ecuaciones de Mathieu acopladas puede ser encontrado en [17]. Los exponentes característicos de la ecuación de Mathieu han sido estudiados en [26], [40] y [41].

Aproximaciones discretas de la ecuación de Mathieu son tratadas en [30] y [36], en este último empleando el principio variacional expuesto en [15]. Finalmente, estudios de la ecuación amortiguada de Mathieu pueden ser encontrados en [18], [21] y [33], en donde se presentan curvas de transición para diferentes valores de amortiguamiento.

El trabajo a continuación presentado busca estudiar la versión amortiguada de la ecuación discreta de Hill, sus principales características y el efecto que tiene la presencia de un término de disipación sobre el sistema.

Aunado a lo anterior, se busca establecer las diferencias existentes entre la ecuación discretizada y la variante discreta de dicho sistema, así como obtener las Lenguas de Arnold de la ecuación discreta de Hill con amortiguamiento. Partiendo de lo último, se busca una relación que asocie las curvas de transición del sistema discreto y amortiguado con líneas presentes en las zonas inestables de un sistema discreto no amortiguado correspondiente.

El presente documento está organizado en secciones; en el primer Capítulo se da una breve introducción sobre la teoría de sistemas Hamiltonianos, además de una explicación acerca de la ecuación de Hill y la excitación paramétrica. El segundo Capítulo está dedicado a aspectos teóricos necesarios para el desarrollo del trabajo expuesto. Posteriormente, en el Capítulo tercero se presentan los resultados principales del estudio realizado; el Capítulo cuarto está dedicado a la validación gráfica y numérica de dichos resultados mediante el desarrollo detallado de un ejemplo práctico. En el quinto Capítulo se muestra posible trabajo a futuro y finalmente, el sexto Capítulo contiene las conclusiones del documento expuesto y las referencias empleadas.

Capítulo 2

Preliminares

En la sección presente se introducen conceptos necesarios para el desarrollo del resultado principal del trabajo expuesto.

2.1. Matriz de Transición de Estados

Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{2.1}$$

Dónde $A(t)$ es una matriz de dimensión n con funciones continuas de $t \in \mathbb{R}$ como entradas. Para cada estado inicial $x_i(t_0)$, existe una solución única $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Dichas soluciones pueden introducirse en un arreglo como $X = [X_1, X_2 \dots, X_n]$, una matriz cuadrada de dimensión n . Dado que cada solución $x_i(t)$ satisface al sistema (2.1), se tiene que

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

Si la matriz $X(t_0)$ es no singular, entonces $X(t)$ es llamada una matriz fundamental del sistema (2.1). La matriz fundamental de un sistema no es única, debido a que los estados iniciales pueden ser elegidos de manera arbitraria siempre y cuando sean linealmente independientes.

Definición 1. Sea $X(t)$ una matriz fundamental cualquiera del sistema (2.1), entonces

$$\Phi(t, t_0) \triangleq X(t)X^{-1}(t_0)$$

recibe el nombre de Matriz de Transición de estados de (2.1) [8].

Teorema 1. [Matriz de Transición de Estados] Sea $t_0 \in \mathbb{R}$, $\Phi(t_0) = x_0$, $\Phi(t, t_0)$ denota la matriz de transición de estados del sistema (2.1) para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $\Phi(t, t_0)$ es la única solución de la ecuación matricial

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

con la característica de que $\Phi(t_0, t_0) = I_n$, la matriz identidad de dimensión n .

2. $\Phi(t, t_0)$ es no singular para todo $t \in \mathbb{R}$.
3. Para cualquier $t, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$, se tiene que $\Phi(t, \tau) = \Phi(t, \sigma)P(\sigma, \tau)$ (Propiedad de semigrupo).
4. $[\Phi(t, t_0)]^{-1} \triangleq \Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$ para todo $t, t_0 \in \mathbb{R}$
5. La única solución $\phi(t, t_0, x_0)$ del sistema (2.1), con $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ específica, está dada por $\phi(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

Las demostraciones de los puntos anteriores pueden ser encontradas en [1].

2.2. Teoría de Floquet

Una función f se dice periódica, con periodo fundamental T , si se cumple que $f(t+T) = f(t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Sea entonces el siguiente sistema lineal homogéneo periódico

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{2.2}$$

Y sea $\Phi(t, t_0)$ la matriz de transición de estados de (2.2).

Teorema 2. [Floquet] Dado el sistema lineal periódico (2.2), su matriz de transición de estados satisface:

$$\Phi(t, t_0) = P^{-1}(t)e^{R(t-t_0)}P(t_0) \quad (2.3)$$

Dónde R es una matriz cuadrada de dimensión n , no necesariamente real aún si (2.2) es real, y la matriz $P(t)$ es T -periódica e invertible, i.e. $P(t+T) = P(t)$. [6]

Sin pérdida de generalidad, considere el instante inicial $t_0 = 0$ en (2.3) y empleando las propiedades de la matriz de transición de estados presentadas anteriormente, se obtiene la versión más empleada del teorema de Floquet.

Corolario 2.1. [Teorema de Floquet] Dado el sistema (2.2), para $t_0 = 0$, su matriz de transición de estados satisface:

$$\Phi(t, 0) = P^{-1}(t)e^{Rt} \quad (2.4)$$

Finalmente, evaluando (2.4) en $t = T$, considerando que $P(T) = I_n$ dada la periodicidad del sistema (2.2), entonces

$$M = \Phi(T, 0) = e^{RT} \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) es llamada la matriz de Monodromía del sistema (2.2).

Comentario. La Matriz de Monodromía, definida por (2.5), es dependiente del tiempo inicial t_0 , pero no así su espectro. Sea $M_{t_0} = \Phi(t_0 + T, t_0)$, entonces usando (2.3) para $t = T$

$$\begin{aligned} \Phi(t_0 + T, t_0) &= P^{-1}(t_0 + T)e^{RT}P(t_0) \\ &= P^{-1}(t_0)e^{RT}P(t_0) \\ &= P^{-1}(t_0)MP(t_0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) muestra que las matrices M y M_{t_0} son similares, por lo que mientras se restrinja el uso de la Matriz de Monodromía a su espectro, no existe diferencia entre emplear M o M_{t_0} [10].

A continuación, se presentan dos importantes consecuencias del Teorema de Floquet: Reducibilidad y Estabilidad.

2.2.1. Reducibilidad

Sea el sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, realizando el cambio de variable $z(t) = T(t)x(t)$, dónde la matriz $T(t)$ es cuadrada de dimensión n y satisface las condiciones:

1. La matriz $T(t)$ es diferenciable e invertible para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. Las matrices $T(t)$, $\dot{T}(t)$ y $T^{-1}(t)$ son acotadas.

Entonces la matriz de transformación $T(t)$ es llamada una Transformación de Lyapunov. Para propiedades de la Transformación de Lyapunov ver [6], [14].

Definición 2. Un sistema lineal y variante en el tiempo, no necesariamente periódico $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, se dice Reducible si existe una Transformación de Lyapunov lineal y variante en el tiempo $T(t)$, tal que $z(t) = T(t)x(t)$

$$\dot{z}(t) = \left[T^{-1}(t)A(t)T(t) + T^{-1}(t)\dot{T}(t) \right] z(t)$$

Dónde la matriz $R = \left[T^{-1}(t)A(t)T(t) + T^{-1}(t)\dot{T}(t) \right]$ es constante.

Cualquier sistema (2.2) T -periódico es reducible, dicho resultado se expresa formalmente en el siguiente teorema con todos los símbolos referidos a la factorización dada en (2.4).

Teorema 3. *Dado cualquier sistema T -periódico (2.2), el cambio de variable $z(t) = T(t)x(t)$ transforma al sistema en uno lineal e invariante en el tiempo de la forma*

$$\dot{z}(t) = Rz(t)$$

Comentario. El resultado anterior es altamente útil para análisis, pero no para síntesis debido a que se requiere la solución del sistema para poder realizar el cambio de variable.

2.2.2. Estabilidad

Dada la definición de estabilidad en el sentido de Lyapunov [24], [27]:

Definición 3. La solución cero de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, es

1. Estable: Si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $x(t_0) < \delta \Rightarrow x(t) < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$; $t, t_0 \in \mathbb{R}$.
2. Asintóticamente Estable: Si la solución cero del sistema es estable y además

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Sea el sistema (2.2) para $t \geq 0$, dónde t puede ser expresado como $t = kT + \tau$, k un entero no negativo y $\tau \in [0, T)$, entonces la solución para $t_0 = 0$ y $x(0) = x_0$ satisface:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, 0)x_0 \\ &= \Phi(kT + \tau, 0)x_0 \\ &= \Phi(kT + \tau, kT)\Phi(kT, (k-1)T)\Phi(kT, (k-1)T) \dots \Phi(T, 0)x_0 \\ &= \Phi(\tau, 0) \underbrace{\Phi(T, 0)\Phi(T, 0) \dots \Phi(T, 0)}_{k \text{ veces}} x_0 \\ &= \Phi(\tau, 0)M^k x_0 \end{aligned}$$

Del último paso se puede concluir que el sistema será:

1. Asintóticamente Estable: $x(t) \rightarrow 0$ si y sólo si $\sigma(M) \subset \mathring{D}_1 \triangleq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
2. Estable: La solución $x(t)$ permanecerá acotada para todo $t \geq 0$ si y sólo si $\sigma(M) \subset \bar{D}_1 \triangleq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y si $\lambda \in \sigma(M)$ y $|\lambda| = 1$, dónde λ es una raíz simple del polinomio mínimo de M [10].

2.3. Sistemas Hamiltonianos

La segunda Ley de Newton tiene como consecuencia la existencia de sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden en \mathbb{R}^n y a su vez, sistemas de ecuaciones de primer orden en \mathbb{R}^{2n} , un espacio dimensional par. El formalismo Hamiltoniano es la estructura matemática natural en la cual se desarrolla la teoría de sistemas mecánicos conservativos.

Un sistema Hamiltoniano es un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias con la forma

$$\dot{q} = \mathcal{H}_p, \quad \dot{p} = -\mathcal{H}_q \quad (2.7)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}(t, q, p), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}(t, q, p), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Dónde $\mathcal{H}(t, q, p)$ es una función suave y real llamada Hamiltoniana, definida para $(t, q, p) \in \mathbb{O}$, un conjunto abierto en $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. La función Hamiltoniana representa la energía del sistema y para el caso en que $\mathcal{H}(q, p)$ no dependa explícitamente del tiempo t , esta cantidad se preserva a lo largo de las soluciones de (2.7), entonces el sistema se denomina Conservativo [32]. En lo subsecuente, se tratará exclusivamente con sistemas Hamiltonianos lineales y dependientes del tiempo, es decir $\mathcal{H}(t, q, p)$ no describe un sistema conservativo. La función Hamiltoniana es una forma cuadrática homogénea, i.e.

$$\mathcal{H}(t, q, p) = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}^T H(t) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$$

Con $H(t)$ una matriz simétrica de dimensión $2n$ llamada la Matriz Hamiltoniana. Con lo anterior, el sistema Hamiltoniano (2.7) puede ser descrito como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = JH(t) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$$

Dónde $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ cumple las igualdades $J^{-1} = J^T = -J$.

Además, si un sistema Hamiltoniano es T-periódico, entonces se satisface la condición $H(t + T) = H(t)$.

Definición 4. Una matriz de orden par $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es llamada Matriz Hamiltoniana, si $P = JH$, con H una matriz simétrica. De manera equivalente, si se satisface la ecuación $JP + P^T J = 0$. [32]

Partiendo de la ecuación $JP + P^T J = 0$ de la definición anterior, se tiene que $P = J^{-1}(-P^T)J$, es decir las matrices P y $-P^T$ son similares, entonces tienen el mismo espectro, i.e. $\sigma(P) = \sigma(-P^T) = \sigma(-P)$. Por lo tanto, el espectro de las matrices Hamiltonianas constantes es simétrico con respecto al eje imaginario.

Teorema 4. Sea $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ una matriz Hamiltoniana, entonces si $\lambda \in \sigma(P) \Rightarrow -\lambda \in \sigma(P)$. Por lo anterior, el polinomio característico es de orden par.

Comentario. Una característica importante de las matrices Hamiltonianas es que su traza siempre vale cero.

Las matrices Hamiltonianas están relacionadas de manera estrecha con las matrices simplécticas.

Definición 5. Una matriz real de orden par $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es simpléctica si

$$M^T J M = J. \quad (2.8)$$

Entre las características de mayor relevancia sobre las matrices simplécticas destaca el que su espectro es simétrico con respecto al círculo unitario. De la definición de las matrices simplécticas (2.8) y el hecho de que siempre existe su matriz inversa se tiene que $M^T = JM^{-1}J^{-1}$, entonces $\sigma(M^T) = \sigma(M^{-1}) = \sigma(M) \Rightarrow$ si $\lambda \in \sigma(M)$ entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(M)$.

Teorema 5. Sea $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ una matriz simpléctica, entonces si $\lambda \in \sigma(M) \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(M)$. De forma equivalente, el polinomio característico de una matriz simpléctica es recíproco [32] o palíndromo [22], es decir

$$p_M(\lambda) = \lambda^{2n} p_M(\lambda^{-1})$$

Finalmente, la propiedad que relaciona las matrices Hamiltonianas y las simplécticas en un sistema Hamiltoniano es:

Teorema 6. Sea $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = JH(t) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$ para alguna $H(t) = H^T(t)$, un sistema Hamiltoniano lineal y variante en el tiempo (no necesariamente periódico), entonces su matriz de transición de estados es simpléctica.

Comentario. Note que un sistema Hamiltoniano no puede ser asintóticamente estable dadas las simetrías de los valores característicos.

2.4. Ecuación de Hill en Tiempo Continuo

A continuación se presenta la ecuación de Hill en tiempo continuo así como sus principales características y propiedades.

Sea el sistema

$$\ddot{y}(t) + [\alpha + \beta p(t)]y(t) = 0 \quad (2.9)$$

Dónde $p(t)$ es una función de excitación T -periódica, los parámetros α y β representan el cuadrado de la frecuencia natural para $\beta = 0$ y la amplitud de la excitación paramétrica, respectivamente.

Definiendo el vector de estado $x \triangleq \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$, es posible reescribir el sistema (2.9) como

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(t)) & 0 \end{bmatrix}, \quad A(t+T) = A(t) \quad (2.10)$$

La matriz $A(t)$ de (2.10) puede ser escrita de la siguiente forma

$$A(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} (\alpha + \beta p(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H(t)}$$

Con J como en (2.3) para $n = 1$ y $H(t+T) = H(t)$ satisface la condición para sistemas Hamiltonianos lineales. Por lo anterior y lo descrito en la sección precedente, la matriz de transición de estados de la ecuación de Hill es simpléctica para todo tiempo

$t \in \mathbb{R}$, entonces la matriz de monodromía M es también simpléctica y su polinomio característico es de la forma

$$p_M(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + 1 \quad (2.11)$$

Definición 6. Los valores propios de la matriz de monodromía M reciben el nombre de multiplicadores de la ecuación de Hill (2.10) y se denotan con λ . Particularmente para sistemas Hamiltonianos, son simétricos con respecto al círculo unitario.

Definición 7. Para cada multiplicador λ_i existe una infinidad de números, llamados exponentes característicos ρ_i , asociados mediante $\lambda_i = e^{\rho_i T}$.

Las raíces del polinomio característico $p_M(\lambda)$ de (2.10) están dadas por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(M) \pm \sqrt{\text{tr}^2(M) - 4}}{2} \quad (2.12)$$

Partiendo de la ecuación (2.12) y de las condiciones de estabilidad presentadas anteriormente, se tienen tres casos posibles:

1. Si $\text{tr}^2(M) < 4$ se tendrán raíces (multiplicadores) complejos conjugados con módulo

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \frac{\text{tr}^2(M) + 4 - \text{tr}^2(M)}{4} = 1$$

Los valores propios son diferentes, lo que lleva a que el polinomio característico y el mínimo de M son iguales. Lo anterior corresponde a un sistema estable.

2. Si $\text{tr}(M)^2 > 4$ los multiplicadores serán reales y recíprocos. De la ecuación (2.11) se tiene que $\text{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2$ y $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ por lo que $\lambda_1 = \lambda_2^{-1}$. Entonces, un valor característico se encuentra fuera del círculo unitario, lo que corresponde a un caso inestable.

3. Si $\text{tr}(M)^2 = 4$ existen dos casos:

- Si $\text{tr}(M) = 2$, los valores propios serán iguales con valor de 1.
- Si $\text{tr}(M) = -2$, los multiplicadores son iguales y valdrán -1.

Para este escenario, la ecuación de Hill será estable sí y sólo sí la matriz de monodromía M es diagonal o escalar, en cualquier otro caso la solución será inestable.

Las fronteras que dividen las regiones de estabilidad e inestabilidad corresponden al último caso, i.e. cuando $|tr(M)| = 2$ [28].

Comentario. Cuando los multiplicadores característicos son iguales a ± 1 y la matriz de Monodromía es diagonal, se dice que se tiene un punto de Coexistencia. Lo anterior se debe a la presencia de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Hill: T-periódicas para multiplicadores iguales a $+1$ y 2T-periódicas para aquellos con valor -1 .

Comentario. Un plano $\alpha - \beta$ en el que se muestren las zonas de estabilidad - inestabilidad de las soluciones de la ecuación de Hill es conocido como un diagrama de Ince-Strutt. Las regiones inestables reciben el nombre de Lenguas de Arnold y en [38] se demuestra detalladamente que dichas curvas se originan en los puntos $\alpha = k^2/4$, para $\beta = 0$, cuando $T = 2\pi$ con $k = 0, 1, 2, \dots$

2.5. Ecuación Discreta de Hill sin amortiguamiento

2.5.1. Ecuación de Euler-Lagrange en tiempo continuo

Recordando la función Lagrangiana en tiempo continuo:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - V(q) \quad (2.13)$$

En dónde $M = M^T > 0$ es conocida como la matriz de inercia, $q \in \mathbb{R}^n$ son llamadas las coordenadas generalizadas del sistema y $V(q)$ es una función de potencial. Obteniendo la primera variación de $\int_0^T \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$, se tiene:

$$\delta \int_0^T \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \int_0^T \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial q} \right] \Big|_0^T$$

Asumiendo que las variaciones admisibles en los extremos terminales son nulas, i.e. $\delta q(T) = \delta q(0) = 0$, se deduce la ecuación de Euler-Lagrange en tiempo continuo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) = 0$$

Finalmente, para (2.13) se obtiene la ecuación de Newton:

$$M \ddot{q} = -\nabla V(q) \quad (2.14)$$

2.5.2. Ecuación de Euler-Lagrange en tiempo discreto

El procedimiento para obtener la variante discreta es similar al presentado anteriormente. Empleando el método de discretización de diferencias hacia adelante (Forward Euler) en la ecuación (2.13) para aproximar la primera derivada, se tiene:

$$\mathcal{L}_d(q_0, q_1, \Delta t) = \Delta t \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_1 - q_0}{\Delta t} \right)^T M \left(\frac{q_1 - q_0}{\Delta t} \right) - V(q_0) \right] \quad (2.15)$$

Con $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^n$ dos posiciones y $\Delta t \in \mathbb{R}$ el periodo de muestreo empleado durante la discretización de (2.13). Computando la primera variación de $\sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{L}_d(q_k, q_{k+1}, \Delta t)$, se

obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{L}_d(q_k, q_{k+1}, \Delta t) &= \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_{k+1}}(q_{k-1}, q_k, \Delta t) + \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_k}(q_k, q_{k+1}, \Delta t) \right] \delta q_k \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_0}(q_0, q_1, \Delta t) \delta q_0 + \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_N}(q_{N-1}, q_N, \Delta t) \delta q_N \end{aligned}$$

Asumiendo nuevamente que las variaciones admisibles en los extremos terminales son nulas, i.e. $\delta q_0 = \delta q_N = 0$, se obtiene el equivalente discreto de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_{k+1}}(q_{k-1}, q_k, \Delta t) + \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_k}(q_k, q_{k+1}, \Delta t) = 0$$

Para (2.15), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_{k+1}}(q_{k-1}, q_k, \Delta t) &= M \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_k}(q_k, q_{k+1}, \Delta t) &= - \left[M \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\Delta t} \right) + \delta \nabla V(q_k) \right] \end{aligned}$$

De donde se puede deducir el equivalente en tiempo discreto de la ecuación de Newton (2.14):

$$M \left(\frac{q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}}{(\Delta t)^2} = -\nabla V(q_k) \right) \quad (2.16)$$

Finalmente, considerando el caso escalar de (2.16), i.e. $M = m \in \mathbb{R}^1, q_k \in \mathbb{R}^1$ con $V(q_k) = \frac{1}{2}bq_k^2$, se obtiene el modelo discreto del sistema masa - resorte - amortiguador:

$$q_{k+1} + \left(\frac{(\Delta t)^2}{m} b - 2 \right) q_k + q_{k-1} = 0 \quad (2.17)$$

2.5.3. Ecuación de Hill Discreta: Caso escalar

Partiendo de la ecuación (2.17), se tiene la ecuación de Hill discreta:

$$q_{k+2} + [\alpha + \beta p(k)] q_{k+1} + q_k = 0 \quad (2.18)$$

Dónde $\alpha = \frac{(\Delta t)^2 b}{m} - 2$, el término agregado $\beta p(k) q_{k+1}$ corresponde a la excitación paramétrica del sistema, con $\beta \in \mathbb{R}$ constante y $p(k+K) = p(k)$ es una secuencia

K -periódica con $k \in \mathbb{Z}$ [36].

Definiendo el vector de estado $y_k = [q_k \ q_{k+1}]^T$, es posible reescribir la ecuación (2.18) como:

$$y_{k+1} = A_k y_k \quad (2.19)$$

$$\text{Con } A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -(\alpha + \beta p(k)) \end{bmatrix}, \quad A_{k+K} = A_k.$$

Empleando las Definiciones 4 y 5 se puede comprobar que la Matriz A_k es simpléctica, el sistema (2.19) es Hamiltoniano y, debido a estas afirmaciones es posible emplear el Teorema 2 junto con el Corolario 2.1 para determinar la estabilidad de (2.19) [32].

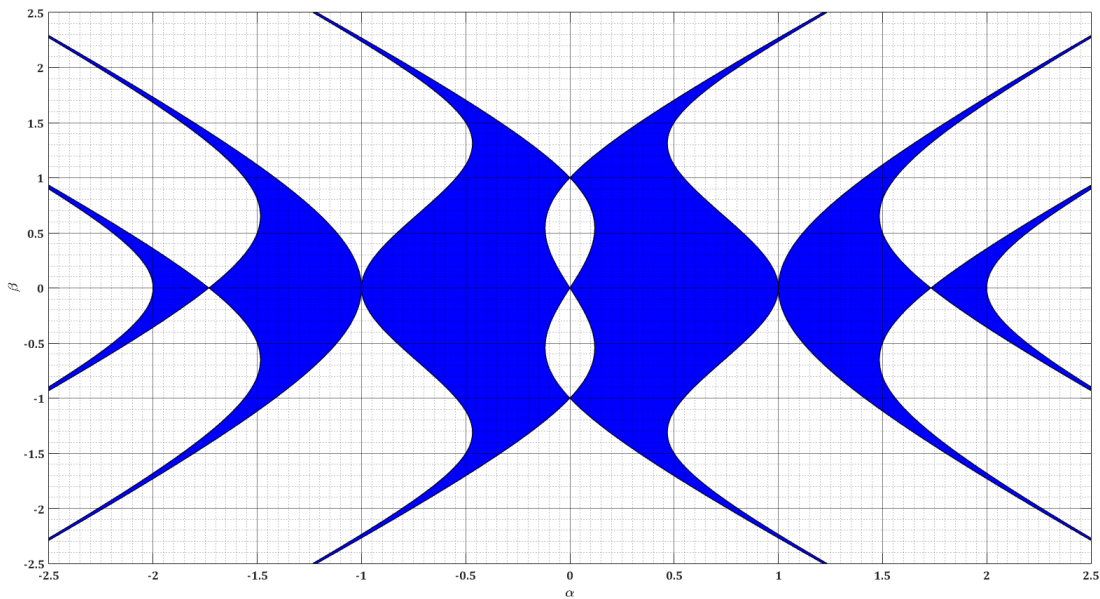


Figura 2.1: Ecuación de Meissner Discreta con $K = 6$ y sin amortiguamiento.

En la Figura 2.1 se puede apreciar el diagrama de Strutt de la versión discreta de la ecuación de Meissner $q_{k+2} + [\alpha + \beta \text{sign}(\cos(K))]q_{k+1} + q_k = 0$, para $K = 6, T = 2\pi$. Se puede observar que existe un número finito $(K+1)$ de Lenguas de Arnold, a diferencia del caso continuo que presenta una infinidad. En la Figura 2.1 y a lo largo del documento, las zonas estables están marcadas con color azul, mientras que las lenguas de Arnold aparecen en color blanco.

Comentario. La ecuación (2.19) es independiente de la secuencia $p(k)$ empleada, por lo que las Lenguas de Arnold de toda ecuación de Hill discreta que tenga el mismo periodo fundamental K comenzarán en los mismos puntos [36].

Teorema 7. *Las Lenguas de Arnold de la ecuación de Hill discreta (2.19) se originan en:*

$$\left| l_0(-\alpha)^K + l_1(-\alpha)^{K-2} + l_2(-\alpha)^{K-4} + \cdots + l_{\frac{K-i}{2}}(-\alpha)^i \right| = 2 \quad (2.20)$$

$$\text{Con } i = \begin{cases} 1, & \text{si } K \text{ es par} \\ 0, & \text{si } K \text{ es impar} \end{cases}$$

$$l_0 = 1$$

$$l_1 = -K$$

$$l_2 = -\frac{K(K-1)}{2!} - \frac{(K-2)}{1!}l_1$$

$$\vdots$$

$$l_{\frac{K-i}{2}} = -\frac{K(K-1)\cdots(K-\frac{K-i}{2}-1)}{\frac{K-i}{2}!} \cdots - \frac{2+i}{1!}l_{\left(\frac{K-i}{2}-1\right)}$$

Demostración. Como se ha expuesto, las regiones inestables de la ecuación discreta de Hill sin amortiguamiento se originan en el eje β , por lo que se analiza la matriz de Monodromía M del sistema para $\beta = 0$, i.e.

$$M = A_{K-1}A_{K-2}\cdots A_0|_{\beta=0} = A_k^K$$

En dónde la matriz $A_k|_{\beta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix}$.

El polinomio característico de la matriz A_k es de la forma

$$\rho_{A_k}(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + 1 \quad (2.21)$$

Partiendo de la ecuación (2.21), el espectro de A_k está formado por los valores característicos

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

Recordando la teoría de matrices simpléticas, el polinomio característico de M es dado por

$$\rho_M(\lambda) = \lambda^2 - Tr(M)\lambda + 1$$

Entonces, las fronteras de transición comenzarán en $|Tr(M)| = 2$ y dado que el espectro de dicha matriz está formado por $\sigma(M) = \{\lambda_1^K, \lambda_2^K\}$ se tiene que la traza de la matriz de monodromía será

$$Tr(M) = \lambda_1^K + \lambda_2^K \tag{2.22}$$

Finalmente, sustituyendo el término $-\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$ en (2.22) se obtiene el polinomio de la ecuación (2.20). ■

Capítulo 3

Resultados principales

3.1. Obtención de la ecuación de Hill discreta con amortiguamiento

Recordando la ecuación diferencial lineal homogénea general de segundo orden

$$m\ddot{y}(t) + \delta\dot{y}(t) + Ry(t) = 0 \quad (3.1)$$

Dónde $m, \delta, R \in \mathbb{R}$ son términos constantes y $t \in \mathbb{R}$ representa el tiempo. Como se ha mencionado en la introducción del presente trabajo, la ecuación (3.1) ha sido ampliamente estudiada ya que es útil para representar una gran gama de sistemas físicos.

En el desarrollo de este trabajo, se ha optado por seguir un procedimiento diferente al mostrado en la sección precedente, lo anterior debido a la complejidad que conlleva el considerar efectos disipativos dentro de un sistema dinámico al obtener las ecuaciones discretas de Euler-Lagrange.

Para realizar el proceso de discretización, se hace uso del método Trapezoidal o de diferencias centradas que, como se demuestra en [36], preserva la estructura simpléctica y Hamiltoniana de los sistemas periódicos. Dicho método está descrito por la ecuación

$$s = \frac{2}{h} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (3.2)$$

Dónde s representa la indeterminada en el dominio de Laplace y h el periodo de discretización.

En primer lugar, es necesario transformar la ecuación (3.1) al dominio frecuencial, para ello se hace uso de la Transformada de Laplace. Considerando condiciones iniciales nulas, se obtiene el equivalente frecuencial de (3.1) dado por

$$ms^2Y(s) + \delta sY(s) + RY(s) = 0 \quad (3.3)$$

Factorizando y despejando términos de (3.3) para simplificar, se obtiene

$$ms^2 + \delta s + R = 0 \quad (3.4)$$

Ahora, aplicando el método de diferencias centradas definido por (3.2) a (3.4), se tiene

$$m \left[\frac{2}{h} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right]^2 + \delta \left[\frac{2}{h} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right] + R = 0 \quad (3.5)$$

Expandiendo y reescribiendo (3.5)

$$4m(z^2 - 2z + 1) + 2\delta h(z^2 - 1) + Rh^2(z^2 + 2z + 1) = 0 \quad (3.6)$$

Agrupando términos de (3.6) y expresando dicho resultado como una ecuación en diferencias, se obtiene

$$(4m + 2\delta h + RT^2)z_{k+2} + (-8m + 2Rh^2)z_{k+1} + (4m - 2\delta h + RT^2)z_k = 0 \quad (3.7)$$

Ahora, sea $\alpha = -8m + 2Rh^2$ y añadiendo el elemento de excitación paramétrica $\beta p(k)z_{k+1}$

$$(4m + 2\delta h + Rh^2)z_{k+2} + (\alpha + \beta p(k))z_{k+1} + (4m - 2\delta h + Rh^2)z_k = 0 \quad (3.8)$$

Finalmente y por simplicidad, es posible expresar (3.8) como

$$\alpha_d z_{k+2} + \beta_d z_{k+1} + \gamma_d z_k = 0 \quad (3.9)$$

Dónde

$$\begin{aligned} \alpha_d &= (4m + 2\delta h + Rh^2) \\ \beta_d &= \alpha + \beta p(k) \\ \gamma_d &= (4m - 2\delta h + Rh^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

La ecuación (3.9) será llamada de ahora en adelante la ecuación de Hill discreta con amortiguamiento. Definiendo el vector de estados $\tilde{z}_k = [z_k \ z_{k+1}]^T$, se puede escribir la ecuación (3.9) en la forma matricial

$$\tilde{z}_{k+1} = A_k \tilde{z}_k \tag{3.11}$$

Con $A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\gamma_d}{\alpha_d} & -\frac{\beta_d}{\alpha_d} \end{bmatrix}$, $A_k(K+k) = A_k(k)$.

3.2. Diferencias entre las ecuaciones discretizada y discreta de Hill

En la presente sección se aclaran las principales diferencias que existen entre la ecuación discretizada de Hill y la variante discreta de la misma, con y sin la presencia de un término disipativo en ambos casos.

3.2.1. Ecuación de Hill discretizada sin amortiguamiento

La versión discretizada de Hill consiste en una aproximación a la versión continua. Para su obtención, se debe someter a un proceso de discretización la ecuación de Hill (2.10). Como se menciona en la introducción del presente documento, se hará uso del método de discretización trapezoidal o de diferencias centradas debido a que se ha demostrado que preserva las estructuras simpléctica y hamiltoniana de los sistemas Hamiltonianos.

Recordando la ecuación de Hill en tiempo continuo (2.9).

$$m\ddot{y}(t) + \delta\dot{y}(t) + R[\alpha + \beta p(t)]y(t) = 0 \tag{3.12}$$

Definiendo el vector de estados $x \triangleq [y \ \dot{y}]^T$, se puede reescribir el sistema (3.12) en su forma matricial

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R}{m}(\alpha + \beta p(t)) & -\frac{\delta}{m} \end{bmatrix}, \quad A(t+T) = A(t) \tag{3.13}$$

Para $\delta = 0$, la matriz $A(t)$ toma la forma

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R}{m}(\alpha + \beta p(t)) & 0 \end{bmatrix}$$

La discretización para (3.13) con $\delta = 0$ por el método de diferencias centradas está definida por

$$z_{k+1} - z_k = \frac{1}{2}hA_{k+1}z_{k+1} + \frac{1}{2}hA_kz_k \quad (3.14)$$

Despejando z_{k+1} de (3.14), se obtiene la forma deseada

$$z_{k+1} = \left[I_n - \frac{1}{2}hA_{k+1} \right]^{-1} \left[I_n + \frac{1}{2}hA_k \right] z_k \quad (3.15)$$

Aplicando (3.15) a (3.13) se tiene

$$\tilde{z}_{k+1} = Q_k \tilde{z}_k \quad (3.16)$$

Dónde

$$Q_k = \left[I_n - \frac{1}{2}hA_{k+1} \right]^{-1} \left[I_n + \frac{1}{2}hA_k \right] = \begin{bmatrix} \frac{4m-h^2R(\alpha+\beta p(k))}{4m+h^2R(\alpha+\beta p(k))} & \frac{4hm}{4m+h^2R(\alpha+\beta p(k))} \\ \frac{4hR(\alpha+\beta p(k))}{4m+h^2R(\alpha+\beta p(k))} & \frac{4m-h^2R(\alpha+\beta p(k))}{4m+h^2R(\alpha+\beta p(k))} \end{bmatrix}$$

El resultado de la discretización (3.16), para las ecuaciones de Mathieu ($\ddot{y}(t) + [\alpha + \beta \cos(k)]y(t) = 0$) y la ecuación de Meissner ($\ddot{y}(t) + [\alpha + \beta \text{sign}(\cos(k))]y(t) = 0$) se puede apreciar en las Figuras 3.1 y 3.2, para un periodo fundamental en tiempo continuo $T = 2\pi$ y una resolución de 300×300 en cada eje.

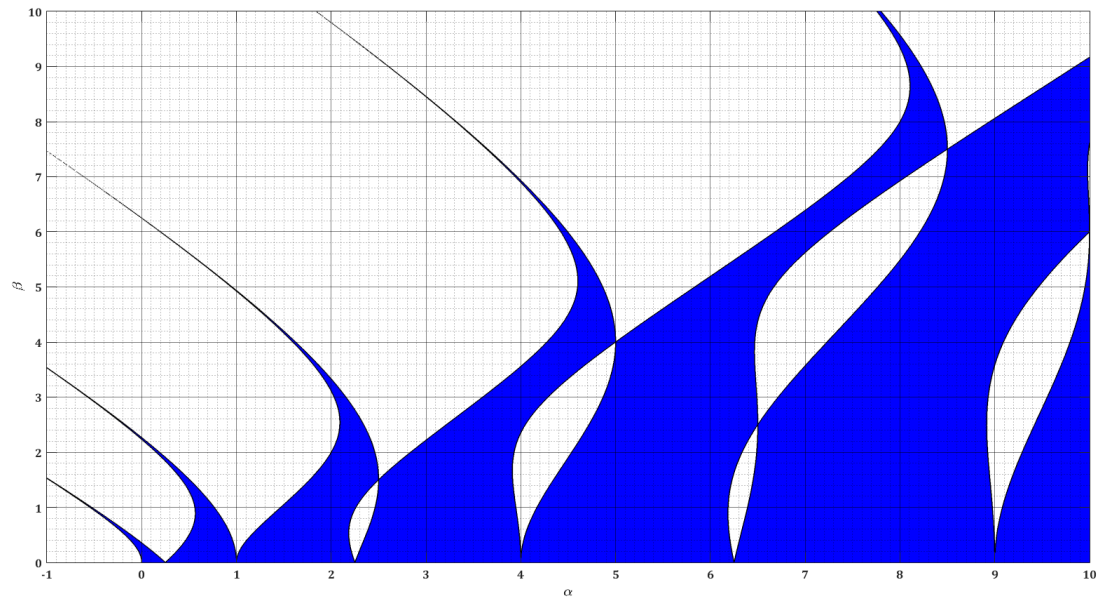


Figura 3.1: Ecuación de Meissner sin amortiguamiento discretizada.

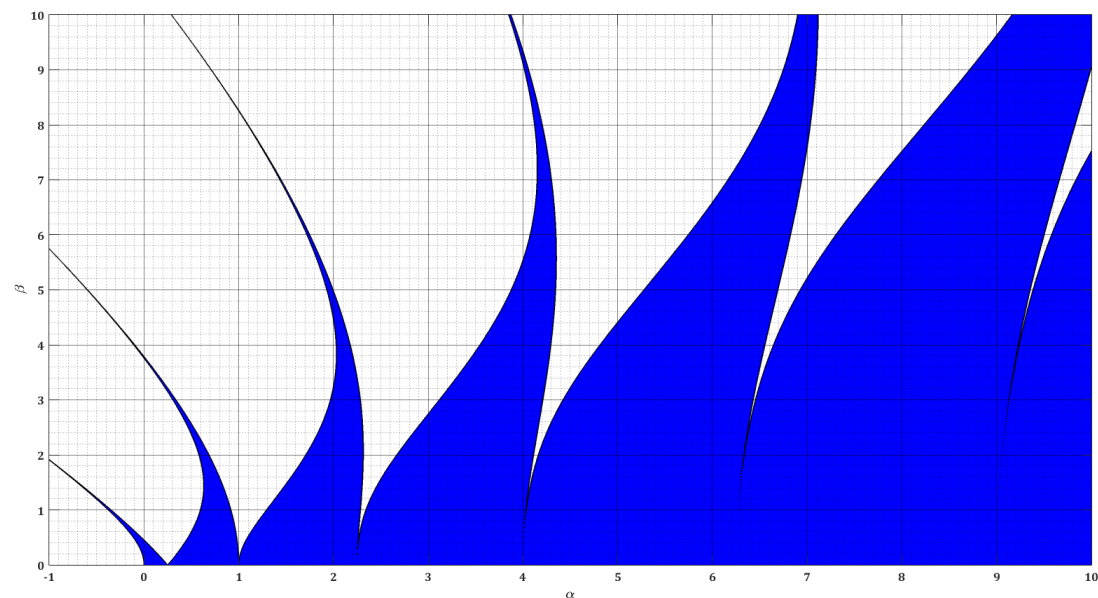


Figura 3.2: Ecuación de Mathieu sin amortiguamiento discretizada.

Como se puede apreciar en las Figuras 3.1 y 3.2, ambos resultados son de gran similitud al caso continuo de cada ecuación y conforme el periodo de discretización se reduce la gráfica tiende en mayor medida al diagrama resultante en tiempo continuo.

Teorema 8. *El sistema periódico en tiempo discreto (3.16) es equivalente a un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo [37].*

Demostración. Sea el vector de estados $x_k = [y_k \ y_{k+1} \ \dots \ y_{k+K-1}]^T$, entonces es posible transformar ² (3.16) en

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ \vdots \\ y_{k+K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{K-1} \dots Q_1 Q_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_0 Q_{K-1} \dots Q_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & Q_{K-2} \dots Q_0 Q_{K-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+K-1} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17), por simplicidad, será descrita como

$$x_{k+1} = \tilde{Q} x_k \quad (3.18)$$

Dónde \tilde{Q} es una matriz diagonal a bloques constante. ■

Corolario 8.1. *Sea $M = \Phi(K, 0) = Q_{K-1} Q_{K-2} \dots Q_1 Q_0$ la matriz de Monodromía del sistema (3.16), entonces (3.16) será:*

- *Estable:* $y(t)$ permanece acotada para todo $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ sí y sólo sí $\sigma(M) \subset \bar{D}_1 \triangleq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y si $\lambda \in \sigma(M)$ y además $|\lambda| = 1$, dónde λ es una raíz simple del polinomio mínimo de M .
- *Inestable:* Si existe $\mu \in \sigma(M) : |\mu| > 1$ ó si $\sigma(M) \subset \bar{D}_1$, y existe $\mu : |\mu| = 1, \mu$ no es una raíz simple del polinomio mínimo de M .

Demostración. El polinomio característico del sistema (3.18) se obtiene a partir de

$$\det(\lambda I_n - \tilde{Q}) = \sum_{i=1}^K \det(\lambda I_n - \tilde{Q}_{ii})$$

Pero se sabe también que

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - Q_{K-1} \dots Q_0) &= \det(\lambda I_n - Q_0 Q_{K-1} \dots Q_1) \\ &= \vdots \\ &= \det(\lambda I_n - Q_{K-2} \dots Q_0 Q_{K-1}) \end{aligned}$$

²Este procedimiento es conocido como "Lifting Technique" [37].

Lo que implica que

$$\sigma(Q_{K-1} \dots Q_1 Q_0) = \sigma(Q_0 Q_{K-1} \dots Q_1) = \dots = \sigma(Q_{K-2} \dots Q_0 Q_{K-1})$$

Por lo tanto, la estabilidad del sistema (3.16) está dada por los valores característicos de la matriz de monodromía $M = Q_{K-1} \dots Q_1 Q_0$. ■

3.2.2. Ecuación de Hill discreta sin amortiguamiento

Recordando la ecuación de Hill discreta (3.9), mostrada en la sección anterior del presente documento

$$\alpha_d z_{k+2} + \beta_d z_{k+1} + \gamma_d z_k = 0$$

Con $p(k + K) = p(k)$ es una secuencia K -periódica y las constantes $\alpha_d, \beta_d, \gamma_d$ definidas por (3.10)

$$\alpha_d = (4m + 2\delta h + Rh^2)$$

$$\beta_d = \alpha + \beta p(k)$$

$$\gamma_d = (4m - 2\delta h + Rh^2)$$

Sea el vector de estados $\tilde{z}_{k+1} = [z_k \ z_{k+1}]^T$, es posible transformar la ecuación (3.9) a su forma matricial (3.11)

$$\tilde{z}_{k+1} = A_k \tilde{z}_k, \quad A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\gamma_d}{\alpha_d} & -\frac{\beta_d}{\alpha_d} \end{bmatrix}, \quad A_{k+K} = A_k$$

Ahora, dado que el amortiguamiento en este sistema es nulo, i.e. $\delta = 0$, los coeficientes (3.10) toman la forma

$$\begin{aligned} \alpha_d = \gamma_d &= (4m + Rh^2) \\ \beta_d &= \alpha + \beta p(k) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Y por tanto (3.11) toma la forma

$$\tilde{z}_{k+1} = A_k \tilde{z}_k, \quad A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{\beta_d}{\alpha_d} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

En las Figuras 3.3 y 3.4 se pueden apreciar las regiones de estabilidad e inestabilidad de las variantes discretas de las ecuaciones de Meissner y Mathieu, respectivamente, con $K = 7$, $T = 2\pi$ y una resolución de 300×300 .

Como se puede apreciar en las Figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 existen claras diferencias entre la ecuación de Hill discretizada y la versión discreta de la misma. Entre dichas diferencias cabe destacar el número de lenguas de Arnold, ya que mientras el caso discretizado tiene una infinidad de Lenguas de Arnold, en la variante discreta existe un número finito de dichas zonas inestables, dado por $(K + 1)$. Además, los puntos en donde se originan las lenguas de Arnold son completamente diferentes, dado que para el caso discretizado todas las regiones inestables crecen en el semiplano $\alpha \geq 0$, mientras que en el caso discreto estas zonas crecen a lo largo de todo el eje α . Finalmente, cuando se habla de la ecuación de Hill discreta, para K par existe simetría del resultado con respecto a ambos ejes y para un valor de K impar, se tiene simetría respecto al eje $\beta = 0$ y al origen del plano.

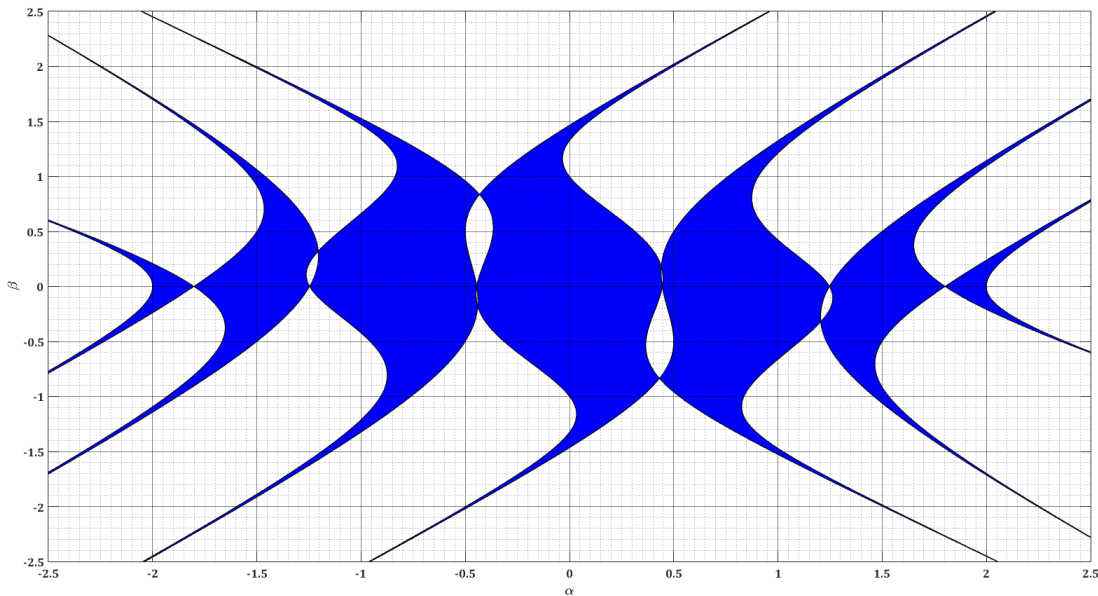


Figura 3.3: Ecuación de Meissner sin amortiguamiento discreta.

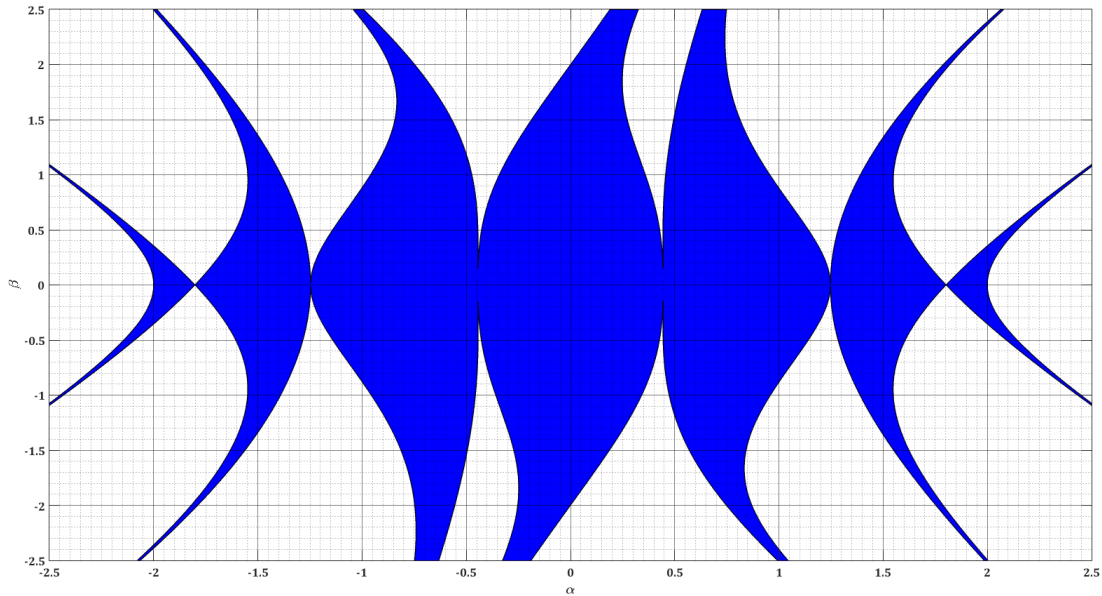


Figura 3.4: Ecuación de Mathieu sin amortiguamiento discreta.

3.2.3. Ecuación de Hill discretizada con amortiguamiento

En la sección presente se estudiará el caso discretizado de la ecuación de Hill pero ahora con la presencia de un factor de amortiguamiento que actúa sobre el sistema. Se presentan las propiedades de esta variante, así como una discusión sobre las similitudes y diferencias que existen con relación al caso en el que no existe dicho término disipativo, abordado anteriormente.

Recordando la ecuación (3.13)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

Con

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}(\alpha + \beta p(t)) & -\frac{\delta}{m} \end{bmatrix}, \quad A(t+T) = A(t)$$

Empleando el método de discretización trapezoidal (3.14) en la ecuación (3.13) con $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

$$z_{k+1} - z_k = \frac{1}{2}hA_{k+1}z_{k+1} + \frac{1}{2}hA_kz_k$$

O su forma despejada, mostrada en la ecuación (3.15)

$$z_{k+1} = \left[I_n - \frac{1}{2}hA_{k+1} \right]^{-1} \left[I_n + \frac{1}{2}hA_k \right] z_k$$

Ahora, aplicando (3.15) a (3.13) se tiene el sistema discretizado

$$\tilde{z}_{k+1} = Q\tilde{z}_k \tag{3.21}$$

En dónde, la matriz Q es cuadrada de la forma

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{4m-h^2R(\alpha+\beta p(k))+2h\delta}{4m+h^2R(\alpha+\beta p(k))+2h\delta} & \frac{4hm}{4m+h^2R(\alpha+\beta p(k))+2h\delta} \\ \frac{4hR(\alpha+\beta p(k))}{4m+h^2R(\alpha+\beta p(k))+2h\delta} & \frac{4m-h^2R(\alpha+\beta p(k))-2h\delta}{4m+h^2R(\alpha+\beta p(k))+2h\delta} \end{bmatrix}$$

Cabe notar que, a diferencia de la matriz Q de la ecuación (3.16), en (3.21) se presenta el término δ correspondiente al amortiguamiento del sistema.

Comentario. Se especifica el término δ positivo para que exista una disipación de energía, en caso en que $\delta = 0$ se tendría energía constante y finalmente, para $\delta < 0$ se trataría de una especie de inyección de energía al sistema.

Es clara la gran similitud que existe entre los sistemas (3.16) y (3.21), lo anterior se debe a que representan el mismo sistema discretizado con la diferencia de la presencia del término disipativo en la primera diferencia de la ecuación (3.9).

En las Figuras 3.5 y 3.6 se presentan las lenguas de Arnold de las ecuaciones discretizadas de Meissner y Mathieu, respectivamente, con $\delta = 0.01$. Comparando las Figuras 3.1 con 3.5 y 3.2 con 3.6 se puede observar que los sistemas son altamente similares. En realidad, los sistemas discretizados con presencia de amortiguamiento de las Figuras 3.5 y 3.6 corresponden a los mostrados en las Figuras 3.1 y 3.2 pero con regiones de estabilidad de mayor tamaño. Lo anterior se debe a la presencia del término disipativo, ya que al agregar dicho elemento las regiones inestables se ven reducidas, permitiendo así la conexión de las zonas estables.

En la ecuación (3.21), a medida que el valor de δ sea incrementado, las regiones de estabilidad tenderán a crecer de manera proporcional y por tanto las lenguas de Arnold serán reducidas. Además, las lenguas de Arnold de (3.21) ya no se originan en el eje $\beta = 0$, como ocurre en el caso no amortiguado (3.16).

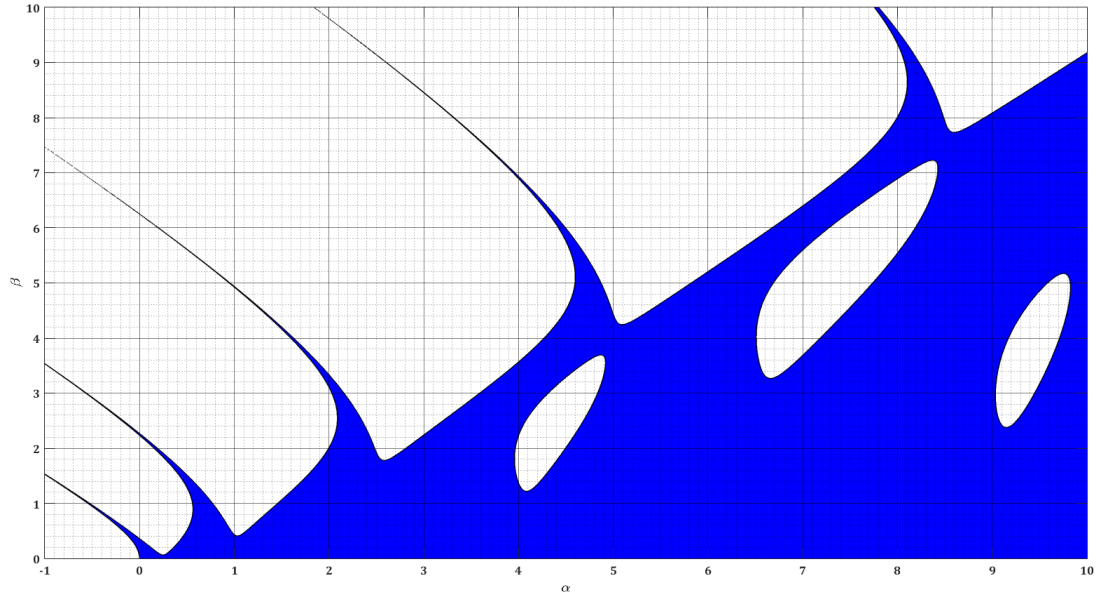


Figura 3.5: Ecuación de Meissner con amortiguamiento discretizada, $\delta = 0.01$.

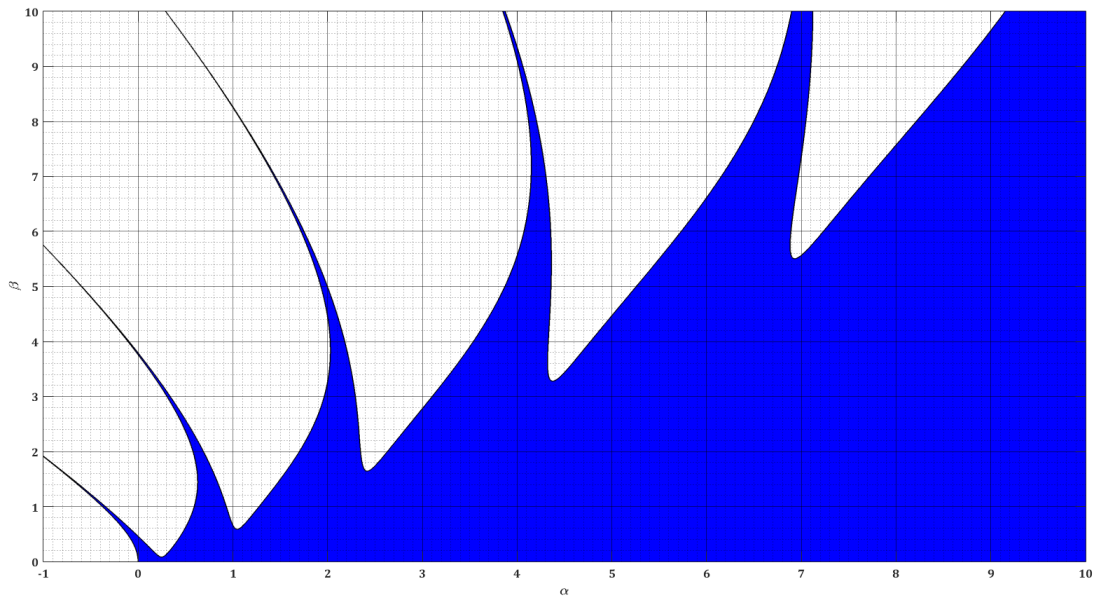


Figura 3.6: Ecuación de Mathieu con amortiguamiento discretizada, $\delta = 0.01$.

Como se ha mencionado en la introducción de este trabajo, existen diversos estudios sobre la ecuación de Hill amortiguada y en [13] se ha demostrado la existencia de una relación entre las curvas de velocidad de escape a infinito (curvas Iso- μ) de una ecuación de Hill no amortiguada y la presencia del término disipativo sobre una ecuación de Hill asociada. Lo anterior se expresa formalmente para la ecuación de Hill en tiempo continuo en el siguiente teorema.

Teorema 9. *Las curvas Iso- μ de una ecuación de Hill no amortiguada*

$$\ddot{y}(t) + [\alpha + \beta p(t)]y(t) = 0 \quad (3.22)$$

Dónde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $p(t+T) = p(t)$, con una razón de crecimiento γ , son equivalentes a las curvas de transición de una ecuación de Hill con amortiguamiento asociada

$$\ddot{x}(t) + \delta \dot{x} + [\alpha_1 + \beta p(t)]x(t) = 0 \quad (3.23)$$

Con $\alpha_1, \delta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, sí y sólo sí

$$\begin{aligned} \gamma &= e^{\frac{1}{2}\delta T} \\ \alpha &= \alpha_1 - \frac{1}{4}\delta^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

En dónde $\gamma = \max[|\Phi_y(T, 0)|]$. La prueba del teorema anterior, así como propiedades de dicha relación, se encuentran en [13].

3.2.4. Ecuación de Hill discreta con amortiguamiento

A continuación se muestra el análisis de la versión discreta de la ecuación amortiguada de Hill. Se presenta la obtención de la forma matricial de dicho sistema, gráficas de casos particulares y un comparativo tanto con la ecuación discreta de Hill sin amortiguamiento como con la ecuación discretizada de Hill amortiguada.

Partiendo de la ecuación discreta de Hill con amortiguamiento (3.9)

$$\alpha_d z_{k+2} + \beta_d z_{k+1} + \gamma_d z_k = 0$$

En donde $p(k + K) = p(k)$ es una secuencia con periodo fundamental K y además, se definen las constantes $\alpha_d, \beta_d, \gamma_d$ (3.10) como

$$\begin{aligned}\alpha_d &= (4m + 2\delta h + Rh^2) \\ \beta_d &= \alpha + \beta p(k) \\ \gamma_d &= (4m - 2\delta h + Rh^2)\end{aligned}$$

Sea entonces el vector de estados definido por $\tilde{z}_{k+1} = [z_k \ z_{k+1}]^T$, para llevar la ecuación (3.9) a una forma matricial dada por

$$\tilde{z}_{k+1} = A_k \tilde{z}_k, \quad A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\gamma_d}{\alpha_d} & -\frac{\beta_d}{\alpha_d} \end{bmatrix}, \quad A_{k+K} = A_k \quad (3.25)$$

Comentario. Comparando con la ecuación discreta de Hill sin amortiguamiento (3.20), se nota que la presencia de amortiguamiento en el sistema ocasiona que la igualdad entre los coeficientes α_d y γ_d de (3.19) no se cumpla.

Comentario. Para $\delta > 0$, (3.9) puede ser expresada de una forma general como

$$(D + L\delta)z_{k+2} + [\alpha + \beta p(k)]z_{k+1} + (D - L\delta)z_k = 0, \quad D = 4m + Rh^2$$

Por lo tanto, para introducir un amortiguamiento a la ecuación (3.8) es necesario añadir un término proporcional a $(L\delta)$ a la segunda diferencia z_{k+2} y sustraer el mismo valor $(-L\delta)$ a z_k .

En las Figuras 3.7 y 3.8 se presenta el diagrama de Ince-Strutt para las ecuaciones discretas de Meissner y Mathieu, respectivamente, con $K = 7$, un periodo fundamental continuo $T = 2\pi$, un amortiguamiento $\delta = 0.01$ y una resolución de 300×300 .

Comparando las Figuras 3.3 con 3.7 y 3.4 con 3.8 se puede apreciar que las regiones inestables del caso no amortiguado son menores que en el escenario libre de la presencia del término disipativo. Como consecuencia inmediata de lo anterior, las lenguas no se originan en el eje que corresponde a $\beta = 0$ y a medida que el valor del amortiguamiento δ sea incrementado, las regiones estables tenderán a crecer.

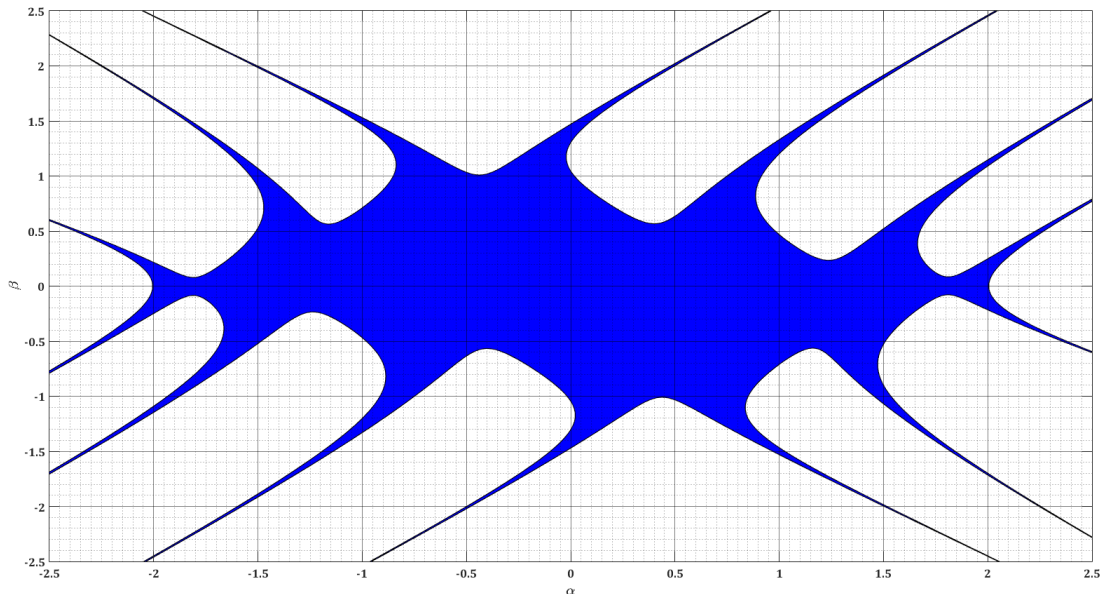


Figura 3.7: Ecuación de Meissner con amortiguamiento discreta, $\delta = 0.01$.

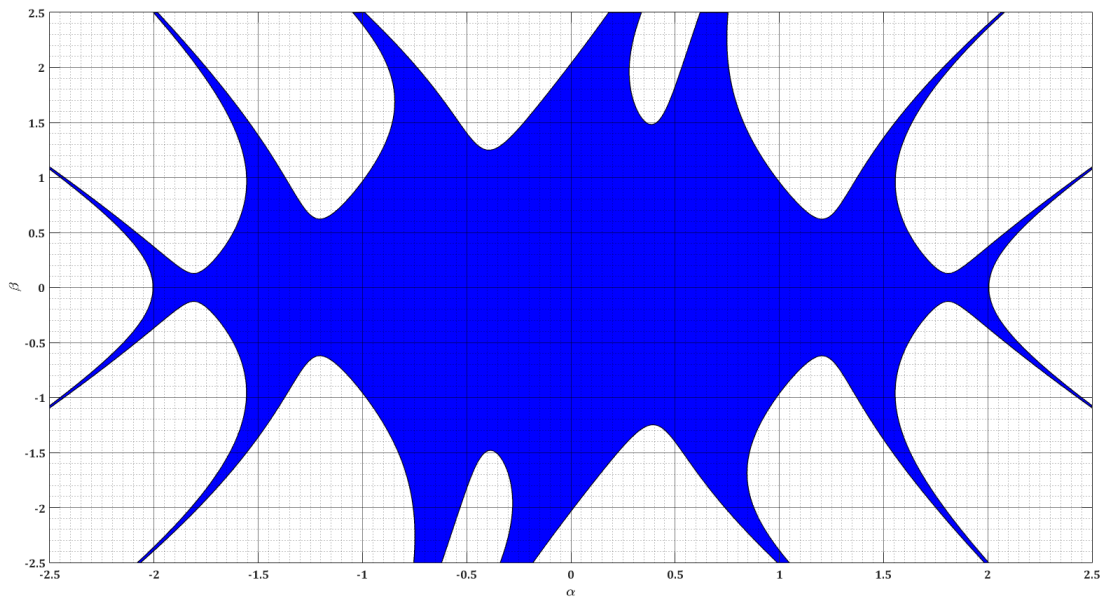


Figura 3.8: Ecuación de Mathieu con amortiguamiento discreta, $\delta = 0.01$.

Como ya se ha mencionado anteriormente, las lenguas de Arnold no se originan en el eje $\beta = 0$, sin embargo es posible determinar los valores de α en los cuales se tienen puntos de transición para un valor de β dado.

Debido a la periodicidad del sistema, se tienen soluciones K-periódicas de $\tilde{z}_{k+1} = A_k \tilde{z}_k$, es decir:

$$\tilde{z}_k = \tilde{z}_{k+K} = \Phi(k + K, 0)\tilde{z}_0 = \Phi(k + K, K)\Phi(K, 0)\tilde{z}_0 = \Phi(k, 0)M\tilde{z}_0$$

Analizar la matriz de Monodromía M para α y β variantes requeriría resolver el polinomio característico $\rho_{A_k}(\lambda)$ de M para dos variables, por lo que se fija un valor de $\beta = \tilde{\beta}$ constante y se buscan las soluciones del polinomio. Debido a lo anterior, se tiene que:

$$M = A_{K-1}A_{K-2} \dots A_0 \Big|_{\beta=\tilde{\beta}}$$

Dónde

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\gamma_d}{\alpha_d} & -\frac{\tilde{\beta}_d}{\alpha_d} \end{bmatrix}$$

En las Figuras 3.9 y 3.10 se presentan los planos $\alpha - \beta$ para las ecuaciones discretas de Meissner y Mathieu respectivamente, con $K = 9$, un periodo fundamental $T = 2\pi$, un valor de amortiguamiento $\delta = 0.05$ y $\tilde{\beta} = 1.5$. La línea verde delimita el valor de $\tilde{\beta}$ fijado y los puntos de cruce son destacados con marcadores rojos.

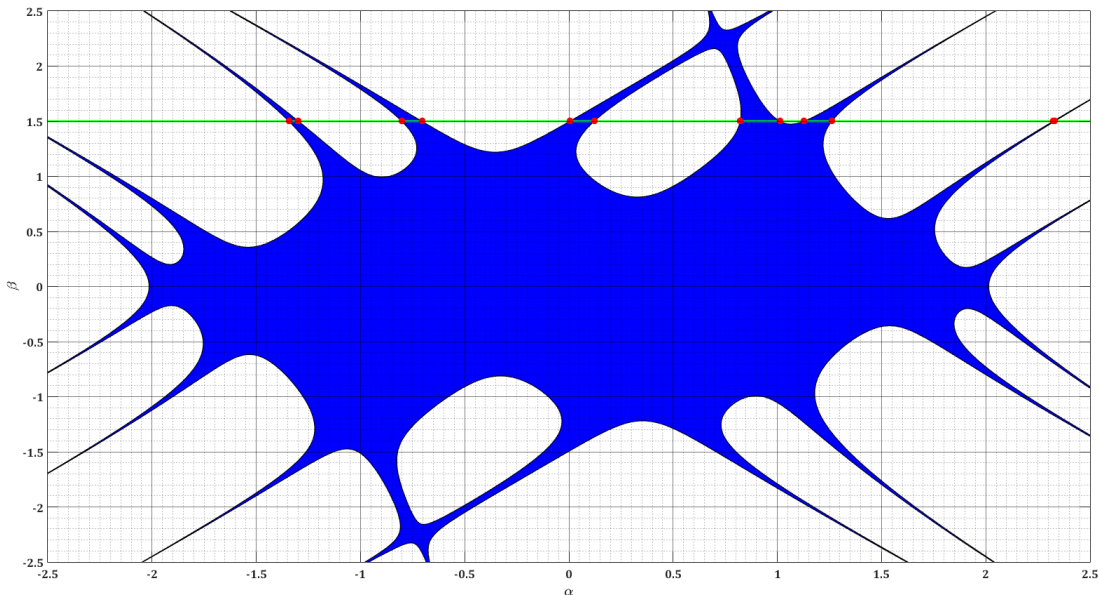


Figura 3.9: Puntos de transición para las curvas de transición de la ecuación discreta de Meissner con amortiguamiento, $\delta = 0.05$.

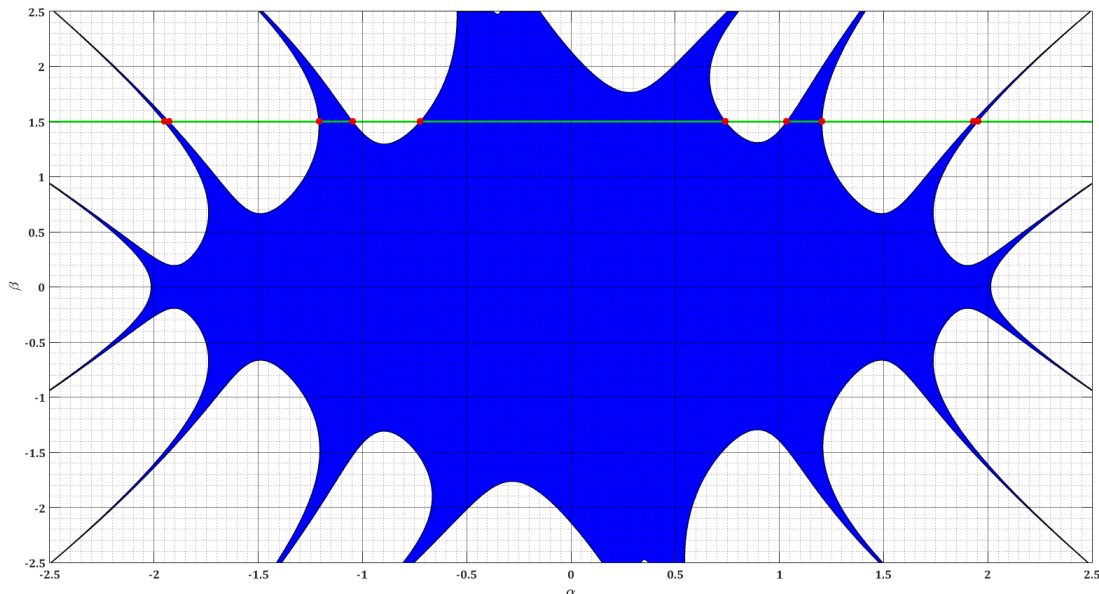


Figura 3.10: Puntos de transición para las curvas de transición de la ecuación discreta de Mathieu con amortiguamiento, $\delta = 0.05$.

Como se muestra en las Figuras 3.9 y 3.10 los puntos de transición marcados para cada una de los diagramas son diferentes a pesar de que se tengan los mismos parámetros. Lo anterior se debe a que en ausencia de un término disipativo las lenguas de Arnold se originan en el eje $\beta = 0$, por lo que la matriz de Monodromía toma la forma:

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Es claro que en (3.26) ya no existe una dependencia por la función de excitación, sin embargo y como se ha mostrado, para el caso amortiguado las regiones inestables no crecen desde el plano $\beta = 0$, por lo que es necesario considerar el efecto de la función periódica empleada sobre el sistema al analizar la matriz de Monodromía del mismo. Este último hecho indica que a menos de que el periodo de muestreo ocasione que dos secuencias K-periódicas sean iguales, los puntos de cruce serán diferentes para dos funciones de excitación dadas.

3.2.5. Relación entre una ecuación discreta de Hill con amortiguamiento y una ecuación discreta de Hill sin disipación asociada

Como se mencionó antes en este mismo capítulo, en [13] se ha demostrado la existencia de una relación entre las curvas de transición que describe una ecuación de Hill con amortiguamiento y las curvas de velocidad de escape a infinito, (llamadas curvas Iso- μ por el autor) de una ecuación de Hill no amortiguada asociada.

En la presente sección se muestra la obtención de una relación que, de manera similar al caso no amortiguado, conecta las curvas de velocidad de escape a infinito de una ecuación de Hill discreta no amortiguada con las curvas de transición de una ecuación de Hill con término disipativo asociado.

Los valores propios ρ_i de una matriz de Monodromía M son llamados los multiplicadores característicos del sistema periódico asociado y cualquier λ_i tal que $\rho_i = e^{\lambda_i T}$ es conocido como un exponente característico.

Ahora, es bien conocido que una solución de cualquier ecuación diferencial no amortiguada con coeficientes periódicos puede ser descrita mediante

$$x(t) = e^{\lambda_i t} p(t); \quad p(t + T) = p(t) \tag{3.27}$$

Entonces, la solución será inestable si la parte real del exponente característico λ_i es un número positivo, particularmente, las curvas de velocidad de escape a infinito corresponden a valores de α y β para los cuales las soluciones tienen la misma razón de crecimiento. Por lo tanto, existe una relación entre la razón de crecimiento y el exponente característico λ_i . Con base en lo establecido por la ecuación (3.27), para que la solución del sistema sea exponencialmente inestable es necesario que $|\rho_i| > 1$. Entonces existe también una relación que conecta la razón de crecimiento con el multiplicador característico ρ_i .

Sea la máxima razón de crecimiento dada por:

$$\zeta = \text{máx}\{|\sigma(M)|\} > 1$$

Dónde $\sigma(M) = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$ y $|\sigma(M)| = \{|\rho_1|, |\rho_2|, \dots, |\rho_n|\}$. Por tanto, las curvas de velocidad de escape a infinito son líneas en las regiones inestables del plano $\alpha - \beta$ donde las soluciones de una ecuación discreta de Hill presentan la misma razón de crecimiento ζ .

Teorema 10. *El diagrama $\alpha - \beta$ de una ecuación discreta y no amortiguada de Hill*

$$\bar{\alpha}y_{k+2} + \bar{\beta}y_{k+1} + \bar{\alpha}y_k = 0 \quad (3.28)$$

Con

$$\bar{\alpha} = 4m + Rh^2$$

$$\bar{\beta} = \alpha + \beta p(k)$$

$m, R, h \in \mathbb{R}$, $y_k \in \mathbb{R}$ y $p(k+K) = p(k)$, con una razón de crecimiento ζ es equivalente a las curvas de transición de una ecuación discreta de Hill con amortiguamiento asociada

$$\tilde{\alpha}x_{k+2} + \tilde{\beta}x_{k+1} + \tilde{\gamma}x_k = 0 \quad (3.29)$$

Dónde

$$\tilde{\alpha} = (4m + Rh^2) + 2\delta h$$

$$\tilde{\beta} = \bar{\beta}$$

$$\tilde{\gamma} = (4m + Rh^2) - 2\delta h$$

$m, R, h, \delta \in \mathbb{R}$, $x_k \in \mathbb{R}$; *sí y sólo sí*

$$\zeta = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}}} \quad (3.30)$$

Y dónde $\zeta = \text{máx}\{|\sigma(\Phi(T, 0))|\}$.

Demostración. Las ecuaciones (3.28) y (3.29) pueden ser descritas como:

$$\hat{y}_{k+1} = A_k \hat{y}_k$$

$$\hat{x}_{k+1} = B_k \hat{x}_k$$

En dónde

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \end{bmatrix}; \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}} & -\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix}; \quad \hat{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix}$$

Ahora, sea la transformación $N : x_k \rightarrow y_k$ definida por

$$x_k = \zeta^K y_k \tag{3.31}$$

Sustituyendo (3.31) en (3.29)

$$\tilde{\alpha}(\zeta^{k+2} y_{k+2}) + \tilde{\beta}(\zeta^{k+1} y_{k+1}) + \tilde{\gamma}(\zeta^k y_k) = 0 \tag{3.32}$$

Comparando la ecuación (3.28) con (3.32), se puede apreciar que las condiciones a satisfacer son:

$$\bar{\alpha} = \tilde{\alpha} \zeta^{k+2}$$

$$\bar{\alpha} = \tilde{\gamma} \zeta^k$$

Entonces

$$\tilde{\alpha} \zeta^{k+2} \equiv \tilde{\gamma} \zeta^k$$

Que finalmente puede ser simplificado como

$$\zeta = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}}}$$

■

El Teorema 10 expresa las condiciones necesarias y suficientes para obtener las curvas de transición de una ecuación discreta de Hill con amortiguamiento a partir de las curvas de velocidad de escape a infinito de otra ecuación discreta de Hill sin disipación asociada y viceversa. Además, dado el Teorema 10 se puede observar que las regiones inestables en el diagrama de Strutt correspondiente a (3.28), las cuales se caracterizan por tener

asociado un multiplicador característico definido por $\rho_i : \zeta > \max|\rho_i|$, desaparecerán al añadir un término disipativo, que puede ser derivado directamente de (3.30) como:

$$\delta = \frac{(\zeta^2 - 1)(Rh^2 + 4m)}{2h(\zeta^2 + 1)} \quad (3.33)$$

Lema 11. *Las regiones inestables cercanas a un punto de coexistencia tienen una razón de crecimiento ζ menor que aquellas zonas no estables lejanas al mismo punto, por ello al agregar el término de amortiguamiento δ , las regiones inestables que se encuentren cerca del punto de coexistencia tenderán a desaparecer, haciendo más grandes y conectando las regiones estables.*

En la Figura 3.11 se muestran las lenguas de Arnold de la ecuación discreta de Meissner amortiguada con diferentes valores del término δ y como comparativo, la Figura 3.12 presenta las curvas de velocidad de escape a infinito de la ecuación discreta no amortiguada de Meissner. Para ambos casos se emplean los siguientes valores: $m = 0.2$, $T = \pi$, $K = 5$, $R = 0.5066$ y una resolución de 1000×1000 .

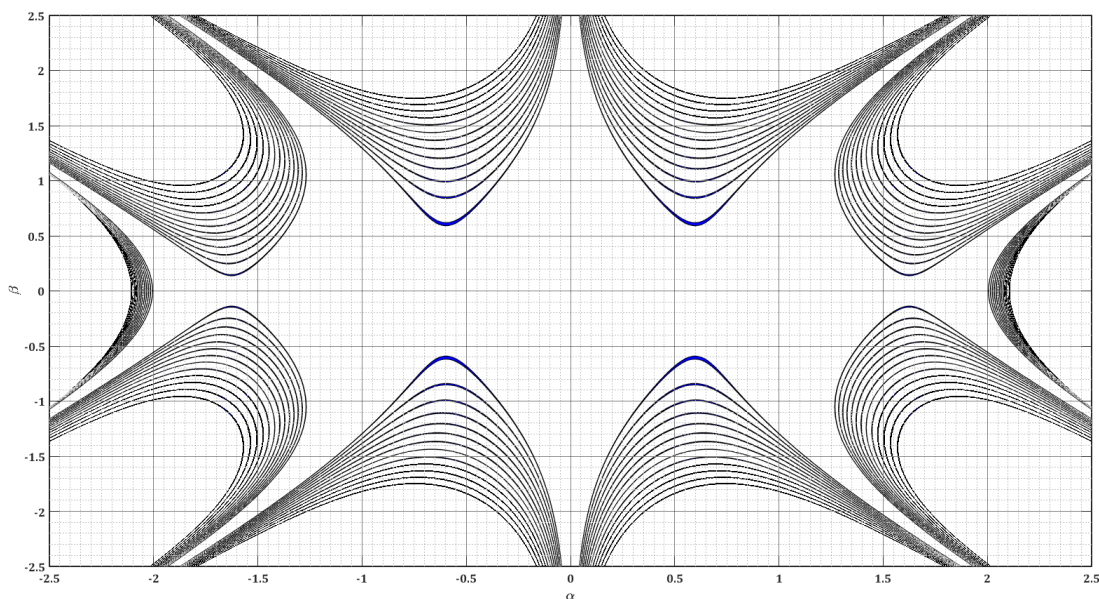


Figura 3.11: Curvas de transición de la ecuación discreta de Meissner con $K = 5$ y diferentes valores de amortiguamiento δ .

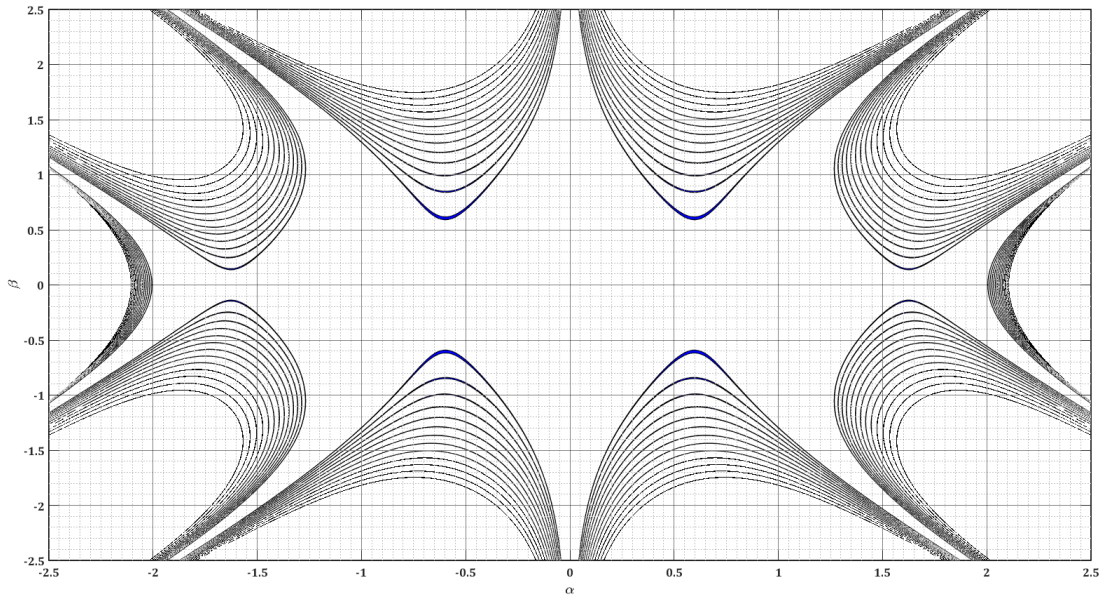


Figura 3.12: Curvas de velocidad de escape a infinito de la ecuación discreta de Meissner sin amortiguamiento con $K = 5$ y diversos valores para la velocidad ζ .

Se puede observar la gran similitud que existe entre los resultados presentados en las Figuras 3.11 y 3.12, confirmando de manera experimental lo presentado en el Teorema 10.

El conjunto de curvas de transición mostrados en la Figura 3.11 representa las fronteras de estabilidad de la ecuación discreta de Meissner con amortiguamiento (3.29) para diversos valores de δ ; a medida que el término disipativo aumente las regiones estables crecerán. Por otra parte, las gráficas presentadas en la Figura 3.12 simbolizan las curvas de velocidad de escape a infinito de la ecuación discreta de Meissner no amortiguada (3.28) y, de manera similar al caso amortiguado, conforme la velocidad de escape aumenta las zonas estables crecen. Ambos resultados están ligados a través de la relación mostrada en la ecuación (3.30).

Comentario. En la Tabla 3.1 se muestran los resultados para ζ^{-1} y no los de ζ , lo anterior debido simplemente a cuestiones de comodidad.

Número de curva	δ	ζ^{-1}
1	0.01	1.012358
2	0.03	1.038421
3	0.05	1.064962
4	0.07	1.092179
5	0.09	1.120322
6	0.11	1.149293
7	0.13	1.179245
8	0.15	1.210214
9	0.17	1.242236
10	0.19	1.275672
11	0.21	1.310272
12	0.23	1.346438
13	0.25	1.384274

Tabla 3.1: Valores equivalentes de amortiguamiento δ y velocidad de escape a infinito ζ^{-1} para la ecuación discreta de Meissner.

En la Tabla 3.1 se muestra el número de lengua de Arnold en orden ascendente desde la curva más interna hasta la última así como los valores de velocidad de escape a infinito ζ^{-1} obtenidos a partir de (3.30) para diferentes coeficientes disipativos δ . Como se puede observar, a medida que el término de amortiguamiento incrementa, la velocidad de escape lo hace de manera proporcional y las regiones de estabilidad crecen, con lo que se comprueba numéricamente lo expuesto en el Lema 11.

Capítulo 4

Simulaciones

A continuación se muestra un ejemplo práctico del uso de los resultados principales presentados en la sección anterior. Se busca detallar y explicar cada uno de los aspectos que se consideran relevantes.

Ejemplo 1:

Sea la ecuación discreta de Hill con amortiguamiento siguiente:

$$\tilde{\alpha}z_{k+2} + \tilde{\beta}z_{k+1} + \tilde{\gamma}z_k = 0 \quad (4.1)$$

Con los coeficientes $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ definidos por:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= (4m + Rh^2) + 2\delta h \\ \tilde{\beta} &= \alpha + \beta p(k) \\ \tilde{\gamma} &= (4m + Rh^2) - 2\delta h \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dónde $m, \delta, R, h, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ representa el término disipativo, T el periodo fundamental de la función de excitación $p(k)$ en tiempo continuo y h el paso de discretización. La constante α equivale a la raíz cuadrada de la frecuencia natural de la función de excitación y β describe la amplitud de la misma.

Sean las constantes $m = 0.2$, $\delta = 0$, $R = 0.1267$, $T = 2\pi$ y la secuencia de excitación en tiempo continuo dada por:

$$p(t) = \cos(t) + \cos(2t) \quad (4.3)$$

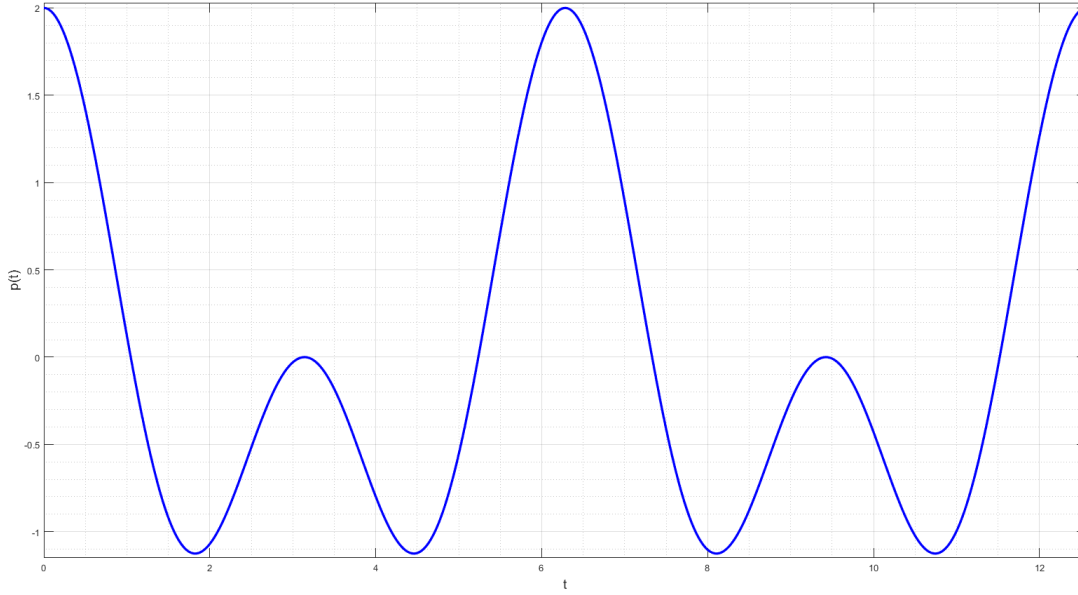


Figura 4.1: Forma de onda de la función $p(t) = \cos(t) + \cos(2t)$.

La ecuación (4.3) fue usada originalmente por Lyapunov [27] y en tiempo continuo presenta periodicidad $T = 2\pi$. Una gráfica de la forma de onda se puede apreciar en la Figura 4.1

Con lo anterior, la ecuación (4.1) toma la forma

$$5.8z_{k+2} + \left[\alpha + \beta(\cos(k) + \cos(2k)) \right] z_{k+1} + 5.8z_k = 0 \quad (4.4)$$

Definiendo el vector de estados $\hat{z}_k = [z_k \ z_{k+1}]^T$, la ecuación (4.4) se puede reescribir de la forma matricial siguiente:

$$\hat{z}_{k+1} = A_k \hat{z}_k, \quad A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{[\alpha + \beta(\cos(k) + \cos(2k))]}{5.8} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Al construir el plano $\alpha - \beta$ de la ecuación (4.5) se obtiene el diagrama de la Figura 4.2, en donde las zonas estables se encuentran marcadas con color azul y las Lenguas de Arnold se han dejado en tono blanco. Calculando el área estable se obtiene una zona total con un valor de $7.5233u^2$, donde u representan las unidades de longitud empleadas en particular.

Haciendo uso del Teorema 7 se puede obtener el polinomio característico del sistema gracias a la ausencia de amortiguamiento, como:

$$\rho_{A_k}(\alpha) = -\alpha^5 + 5\alpha^3 - 5\alpha \quad (4.6)$$

Para obtener los puntos de origen de las lenguas de Arnold, es necesario resolver la ecuación (4.6) sobre las curvas de transición para $\beta = 0$, i.e.

$$| -\alpha^5 + 5\alpha^3 - 5\alpha | = 2 \quad (4.7)$$

A partir de la solución de la ecuación (4.7), se tiene que los las zonas inestables T-periódicas se originan en $\alpha = -2.0, -0.6180, -0.6180, 1.6180, 1.6180$ y las soluciones 2T-periódicas en $\alpha = -1.6180, -1.6180, 0.6180, 0.6180, 2.0$, como se muestra en la Figura 4.2.

Comentario. Para el caso no amortiguado, si se hiciera uso de cualquier otra secuencia de excitación $p(k)$ el resultado sería el mismo dada la no dependencia del polinomio característico $\rho(\alpha)$ de dicha secuencia.

Ahora para el caso amortiguado, sea el término $\delta = 0.05$, entonces la ecuación (4.1) tomaría la forma siguiente:

$$5.9257z_{k+2} + \left[\alpha + \beta(\cos(k) + \cos(2k)) \right] z_{k+1} + 5.6743z_k = 0 \quad (4.8)$$

Empleando el mismo vector de estados definido anteriormente $\hat{z}_k = \begin{bmatrix} z_k & z_{k+1} \end{bmatrix}^T$, la ecuación (4.8) puede ser descrita por:

$$\hat{z}_{k+1} = A_k \hat{z}_k; \quad A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.0443 & -\frac{\alpha + \beta(\cos(k) + \cos(2k))}{5.9257} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

En la Figura 4.3 se presenta el diagrama de Strutt para la ecuación (4.9) con las zonas estables marcadas en color azul. Calculando el área estable total se tiene un valor de $13.3697u^2$, lo cual es claramente superior al valor del caso no amortiguado.

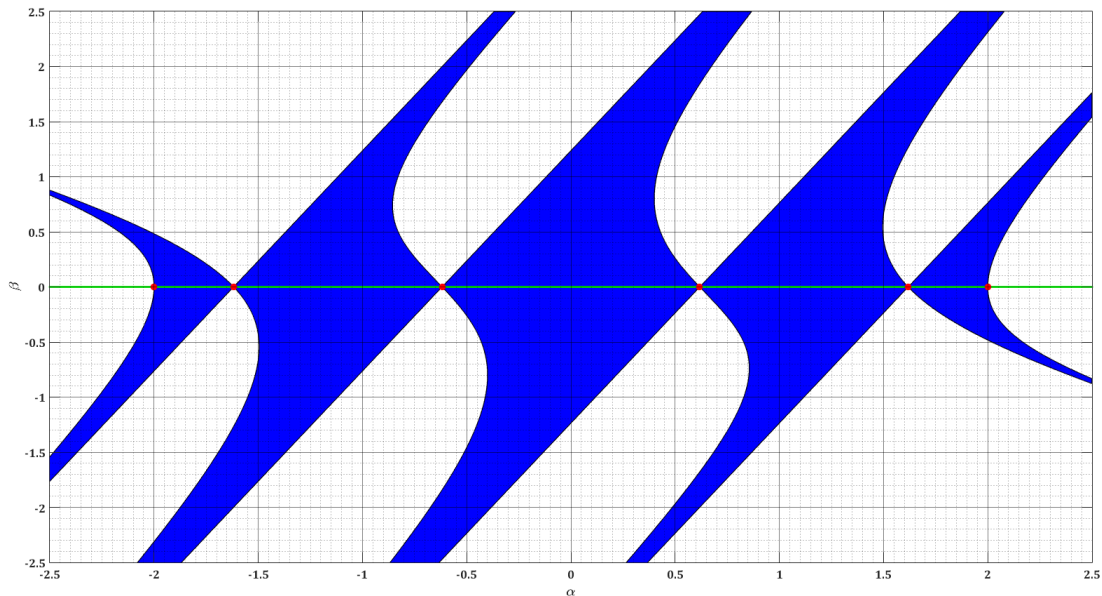


Figura 4.2: Diagrama de Strutt para la ecuación de Hill con $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$, $K = 5$, $\delta = 0$ y $T = 2\pi$.

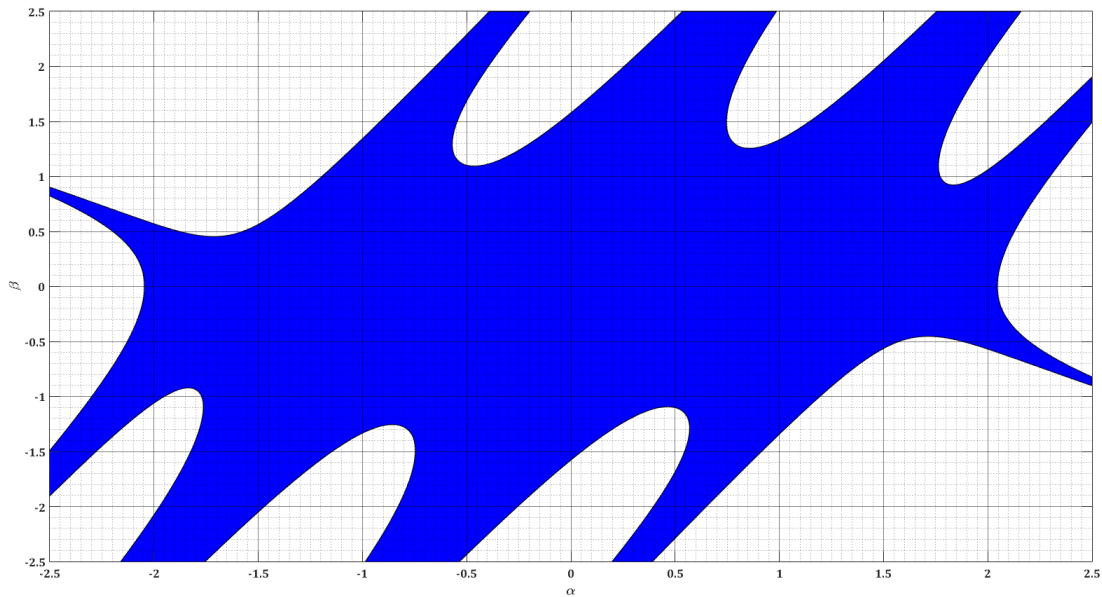


Figura 4.3: Diagrama de Strutt para la ecuación de Hill con $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$, $K = 5$, $\delta = 0.05$ y $T = 2\pi$.

Por otra parte, es claro que las regiones inestables ya no se originan en el eje $\beta = 0$, sin embargo es posible conocer los valores de α , con un β fijo, para los cuales se tiene

la transición entre estabilidad e inestabilidad. Para lo anterior, es necesario obtener el polinomio característico $\rho_{A_k}(\alpha)$, que para $\beta = 1.5$ es de la forma:

$$\rho_{A_k}(\alpha) = -0.55329\alpha^5 + 5.8351\alpha^3 - 4.6684\alpha^2 - 4.6485\alpha + 1.7722 \quad (4.10)$$

Para conocer los puntos de transición sobre el eje fijo $\beta = 1.5$, es necesario resolver la ecuación (4.10) sobre los puntos de cambio, es decir:

$$\left| -0.55329\alpha^5 + 5.8351\alpha^3 - 4.6684\alpha^2 - 4.6485\alpha + 1.7722 \right| = 2 \quad (4.11)$$

Resolviendo la ecuación (4.11) se tiene que existe transición de región en los puntos $\alpha = -3.5042, -0.5452, -0.0519, 1.8239, 2.2773$ para las soluciones T-periódicas y para aquellas 2T-periódicas en $\alpha = -3.4807, -0.9151, 0.7464, 1.1452, 2.5042$. Dichos puntos son presentados en la Figura 4.4.

Comentario. Cabe destacar que ya no existen soluciones repetidas para las soluciones de (4.11), como si sucede en el caso no amortiguado, además en este escenario la selección de la secuencia de excitación $p(k)$ tiene efecto sobre el polinomio característico $\rho_{A_k}(\alpha)$, por lo que no cualquier par de secuencias tendrán los mismos puntos de transición.

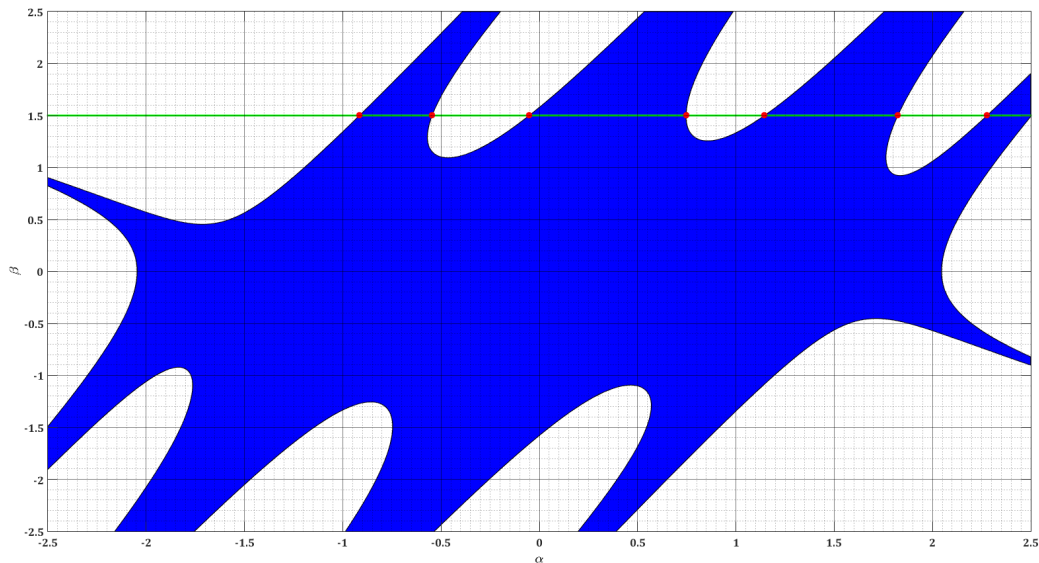


Figura 4.4: Puntos de transición de la ecuación de Hill con $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$, $K = 5$, $\delta = 0.05$, $\beta = 1.5$ y $T = 2\pi$.

A continuación, se muestra la aplicación del Teorema 10 sobre el ejemplo. En la Figura 4.5 se muestran las fronteras de transición para la ecuación discreta de Hill con amortiguamiento (4.9) para diferentes valores de disipación δ y en la Figura 4.6 se presentan las curvas de velocidad de escape a infinito para la ecuación discreta de Hill sin amortiguamiento (4.5) para diversos coeficientes ζ , ambas con la secuencia de excitación $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$. Como se ha comentado anteriormente, a medida que los términos δ y ζ incrementan, las regiones inestables son reducidas, conectando aquellas zonas estables a lo largo de todo el diagrama $\alpha - \beta$.

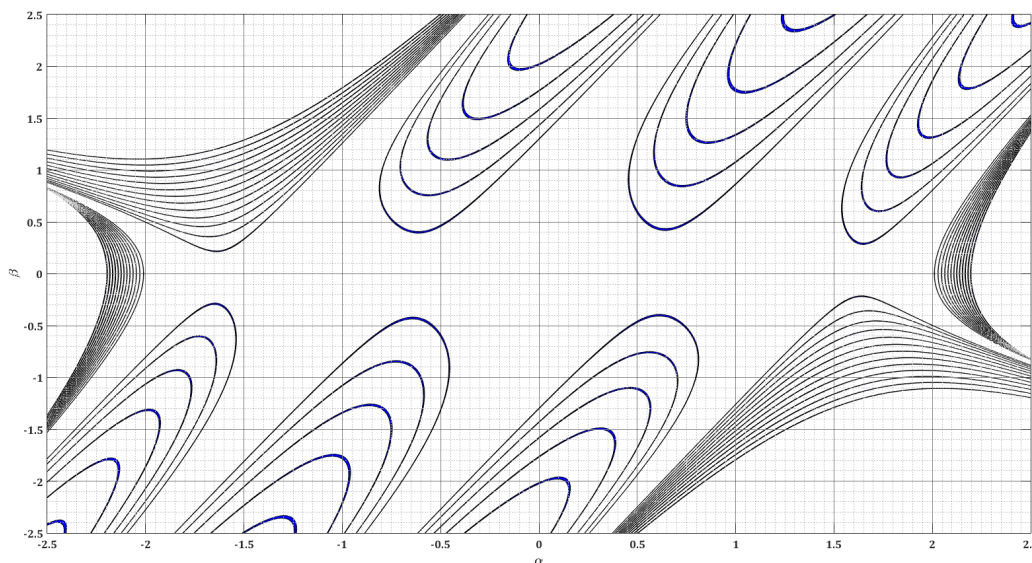


Figura 4.5: Curvas de transición de la ecuación discreta y amortiguada de Hill con $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$, $K = 5$, $T = 2\pi$ y diversos valores del término δ .

Finalmente, en la Tabla 4.1 se muestran los valores de amortiguamiento δ y velocidad de escape a infinito ζ correspondiente a cada una de las curvas de transición de la ecuación de Hill discreta tratada, numeradas de menor a mayor desde la curva más interna a la externa. Se comprueba entonces que existe una relación entre un sistema amortiguado y uno sin disipación, además el incremento del valor de amortiguamiento y de la velocidad de crecimiento son proporcionales.

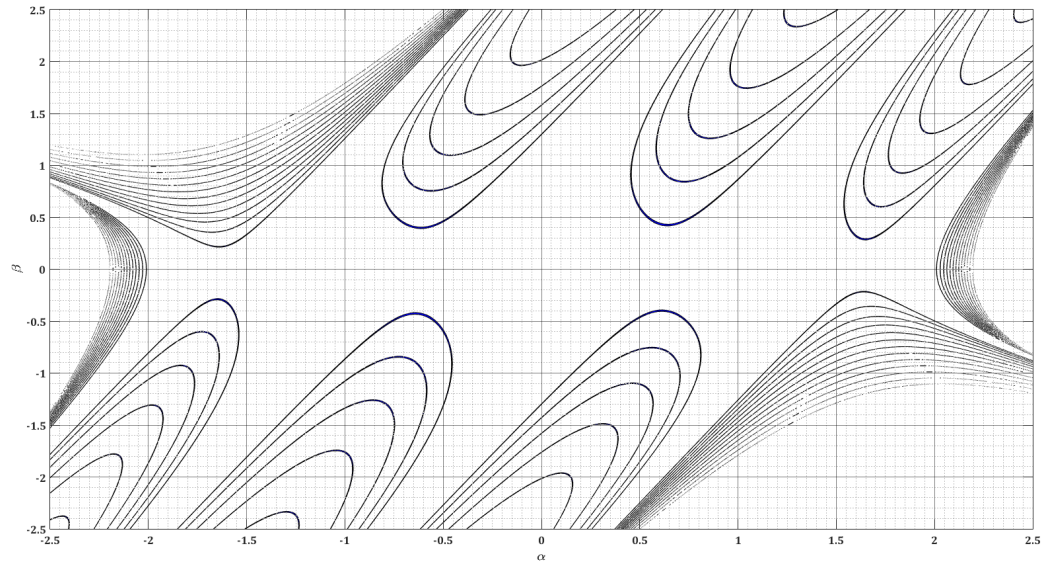


Figura 4.6: Curvas de velocidad de escape a infinito de la ecuación discreta de Hill sin amortiguamiento con $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$, $K = 5$, $T = 2\pi$ y diferentes valores para el término ζ .

Comentario. De igual forma que en la Tabla 3.1, la Tabla 4.1 muestra los resultados para ζ^{-1} y no los de ζ , por comodidad y para mantener una relación creciente entre el amortiguamiento y la velocidad de escape.

Número de curva	δ	ζ^{-1}
1	0.01	1.025430
2	0.03	1.078515
3	0.05	1.134687
4	0.07	1.194600
5	0.09	1.258811
6	0.11	1.328197
7	0.13	1.403705
8	0.15	1.486767
9	0.17	1.578531
10	0.19	1.681520
11	0.21	1.798561
12	0.23	1.933861
13	0.25	2.092925

Tabla 4.1: Valores equivalentes de amortiguamiento δ y velocidad de escape a infinito ζ^{-1} para la ecuación de Hill discreta con la secuencia de activación $p(k) = \cos(k) + \cos(2k)$.

Capítulo 5

Trabajo a Futuro

5.1. Ecuación de Hill: Caso con dos grados de libertad

Para tiempo continuo y dos grados de libertad, $y(t) \in \mathbb{R}^2$, la ecuación de Hill en tiempo continuo sin amortiguamiento toma la forma

$$\ddot{y}(t) + [\alpha A + \beta B p(t)]y = 0 \quad (5.1)$$

Dónde se mantienen los mismos parámetros (α, β) y se han agregado las matrices cuadradas $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. De manera similar al caso escalar, si se define el vector de estados $x = [y \ \dot{y}]^T \in \mathbb{R}^4$, es posible expresar la ecuación (5.1) en variables de estado como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -(\alpha A + \beta B p(t)) & 0 \end{bmatrix} x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha A + \beta B p(t) & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}}_{H(t)} x \quad (5.2)$$

Para que el sistema (5.2) sea Hamiltoniano, i.e. $H(t) = H^T(t)$, las siguientes restricciones se deben satisfacer: $A = A^T$; $B = B^T$.

Sin pérdida de generalidad, se puede asumir a la matriz A diagonal con entradas positivas, que representen la raíz cuadrada de las dos frecuencias naturales del sistema sin excitación paramétrica.

Comentario. En [17] se hace un análisis similar para un par de ecuaciones de Hill acopladas.

Debido a las dimensiones de la matriz en (5.2), ahora existen cuatro multiplicadores característicos, valores propios de la matriz de Monodromía del sistema. Dado que se están empleando matrices reales, los valores propios tendrán simetría con respecto al eje real y existirá una simetría alrededor del círculo unitario a causa de la simplecticidad de la matriz de Monodromía del sistema. Ahora existen tres posibilidades para que los multiplicadores abandonen el círculo unitario:

1. Un par de multiplicadores escapando en el punto $+1$.
2. Un par de valores característicos saliendo en el punto -1 .
3. Dos pares conjugados partiendo del círculo unitario en cualquier punto $1 \angle \theta$, $\theta \in (0, \pi)$. En dónde la notación $r \angle \theta$ denota un número complejo con módulo r y argumento θ .

Los primeros dos casos aparecen en el caso escalar, pero el tercero es nuevo para aquellos sistemas con al menos dos grados de libertad y recibe el nombre de la Colisión de Krein de los multiplicadores.

Debido a la simetría del polinomio característico de la matriz de Monodromía $\rho_M(\lambda) = \lambda^4 - A\lambda^3 + B\lambda^2 - A\lambda + 1$, es un polinomio auto-recíproco. En [20] introdujeron la variable $\mu = \lambda + \lambda^{-1}$, con la que el polinomio característico de M es reducido a uno de grado dos dado por:

$$Q(\mu) = \mu^2 - A\mu + B - 2 \quad (5.3)$$

Los valores propios de (5.3) son:

$$\mu_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4B + 8}}{2} \quad (5.4)$$

Y, a partir de (5.4) los valores característicos de $\rho_M(\lambda)$ son dados por:

$$\lambda = \frac{\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2}}{2}$$

Comentario. La propiedad de simetría heredada por la naturaleza Hamiltoniana permite la reducción de orden en el análisis a la mitad.

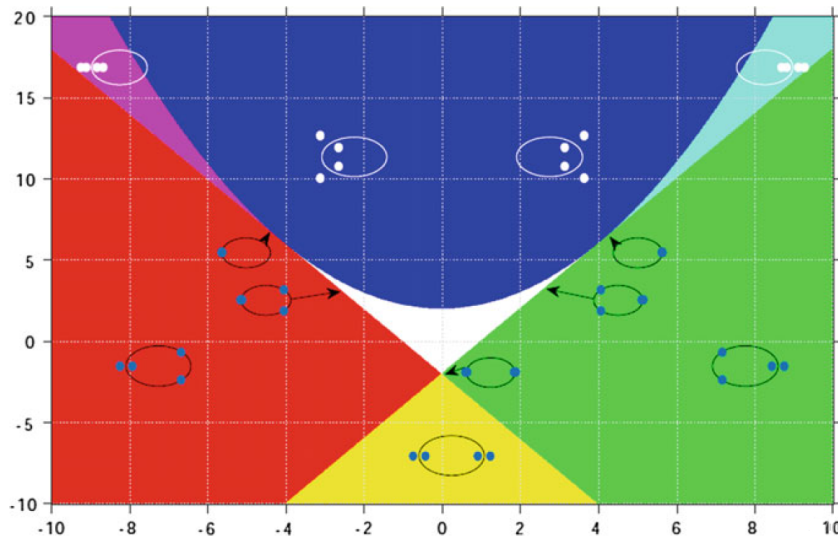


Figura 5.1: Regiones de estabilidad para el polinomio reducido en blanco. Rojo para algún $\lambda < -1$; verde para algún $\lambda > 1$; amarillo para algún $\lambda < -1$ y otro $\tilde{\lambda} > 1$; rosa para dos multiplicadores $\lambda < 1$; cian para dos multiplicadores $\lambda > 1$; azul para dos multiplicadores no reales fuera del disco unitario.

Las fronteras de transición, dadas en los puntos en los que un multiplicador escapa del círculo unitario, son dadas por dos líneas y una parábola:

1. $\lambda = +1, \quad B = 2A - 2$
2. $\lambda = -1, \quad B = -2A - 2$
3. Colisión de Krein, $B = \frac{A^2}{4} + 2$

La Figura 5.1, recuperada de [10], muestra las relaciones anteriores, indicando las posiciones típicas de los multiplicadores. La región en blanco representa los parámetros A, B que producen los multiplicadores de $p_m(\lambda) = \lambda^4 - A\lambda^3 + B\lambda^2 - A\lambda + 1$ en el círculo unitario por la fórmula (5.4). Las regiones con color corresponden a zonas inestables. En la frontera $B = 2A - 2$ existe al menos una solución T-periódica; en la frontera $B = -2A - 2$ existe al menos una solución 2T-periódica; en la frontera parabólica $B = A^2/4 + 2$ existe un par de multiplicadores en el mismo punto del círculo unitario excepto en ± 1 y tiene dos soluciones periódicas de cualquier frecuencia en general. Las zonas inestables ocurren cuando algún par de multiplicadores coinciden en el punto $+1$

o -1 y después de que han abandonado el círculo unitario, pero existen multiplicadores asociados a cada una de las frecuencias naturales de los subsistemas, por lo tanto hay dos posibilidades de escape en cada punto ± 1 , asociadas con los subsistemas, dichas lenguas son llamadas Principales. En el caso de dos grados de libertad, los multiplicadores pueden abandonar el círculo unitario en cualquier punto $r < \theta, \theta \in (0, \pi)$, los cuales generan zonas de inestabilidad llamadas Lenguas de Arnold combinatorias [10]. Existen dos tipos de lenguas combinatorias: suma o diferencia; ver [43] para mayor información. Resulta entonces interesante el estudiar el caso vectorial de la ecuación discreta de Hill, conocer las propiedades que pueda presentar y la forma de las lenguas de Arnold que se generarían en el plano $\alpha - \beta$. Además de probar si las propiedades propias del caso escalar se preservan en esta extensión.

Capítulo 6

Conclusiones

Se han presentado las diferencias existentes entre la versión discreta de la ecuación de Hill y su variante discretizada, así como los métodos de obtención de cada una. Además, se ha mostrado a detalle el efecto que ocasiona la presencia de un término de disipación, demostrando el hecho de que a medida que la variable de amortiguamiento incrementa en magnitud las regiones estables del diagrama de Strutt crecerán, tanto en el caso discreto como en el discretizado.

Aunado a lo anterior, se ha demostrado que la inserción del término disipativo ocasiona que las Lenguas de Arnold no se originen en el eje $\beta = 0$, como sí ocurre en el caso no amortiguado. Lo anterior debido al impacto que tiene la secuencia de activación $p(k)$ en el polinomio característico de la matriz de Monodromía del sistema. Por lo anterior y como se ha presentado, la elección de la secuencia $p(k)$ generará puntos de transición diferentes para cada ecuación empleada.

Por otra parte, se ha planteado y demostrado la existencia de una relación entre las Lenguas de Arnold de un sistema amortiguado y otro asociado libre de disipación.

Finalmente, se ha desarrollado detalladamente un ejemplo práctico, validando numérica y gráficamente los resultados principales obtenidos en el presente documento.

Publicaciones

- Venegas, L. y Collado, J. **Relationship between a Damped Discrete Hill's Equation and an associated Undamped Discrete Hill's Equation**, 16th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), 2019.

Bibliografía

- [1] Antsaklis, P. J. y Michel, A. N. *Linear Systems*. Birkhäuser Boston, (2005).
- [2] Arnold, V. I. *Remarks on the perturbation theory for problems of Mathieu type*. Russian Mathematical Surveys, 38(4), (1983), págs. 215-233.
- [3] Arscott, F. M. *Periodic differential equations: an introduction to Mathieu, Lamé and allied functions*. Vol. 59. Pergamon, (1927), pág. 429.
- [4] Atkinson, F. V. *Discrete and Continuous boundary problems*. Academic Press, New York, (1964).
- [5] Bolotin, V. V. *The dynamic stability of elastic systems*. Holden-Day Inc., (1964).
- [6] Brockett, R. *Finite Dimensional Linear Systems*. John Wiley & Sons, (1969).
- [7] Brown, B. M., Eastham, M. S. y Schmidt, K. M. *Periodic differential operators*. Vol. 228. Periodic Differential Operators. Springer Science & Business Media., (2012).
- [8] Chen, C. T. *Linear System Theory and Design*. 3.^a ed. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., (1998).
- [9] Chulaevsky, V. A. *Almost periodic operators and related nonlinear integrable systems*. Manchester University Press, (1989).
- [10] Collado, J. «Hill's Equation: From 1 to 2 Degrees of Freedom». En: *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory: In Honor of Alexander S. Poznyak*. Ed. por Clempner, J. y Wen, Y. Cham: Springer International Publishing, (2018), págs. 43-71.

-
- [11] Eastham, M. S. P. *The spectral theory of periodic differential equations*. Scottish Academic Press, London, (1973).
- [12] Floquet, G. «Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques». En: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (1883), págs. 47-88.
- [13] Franco, C. A. y Collado, J. «Damped Hill's Equation and Iso- μ Curves of a Related Second Hill's Equation». En: *IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control (CDC)* (2015), págs. 736-740.
- [14] Gantmacher, F. R. *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company, 2 Vols., (1959).
- [15] Gelfand, I. M. y Fomin, S. V. *Calculus of Variations*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, (2012).
- [16] Gelfand, I. M. y Lindschii, V. B. *On the structure of the regions of stability of linear canonical systems of differential equations with periodic coefficients*. Amer. Math. Soc. Transl. (2),8, (1958), págs. 143-181.
- [17] Hansen, J. «Stability diagrams for coupled Mathieu-equations». En: *Ingenieur-Archiv* 55.6 (1985), págs. 463-473.
- [18] Hartono and van der Burgh, A. H. P. «An equation with a time-periodic damping coefficient : Stability diagram and an application». En: *Reports of the Department of Applied Mathematical Analysis* (2002), págs. 02 -07.
- [19] Hill, G. W. *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon*. Vol. 8. Institut Mittag-Leffler, (1886), págs. 1-36.
- [20] Howard, J. E. y MacKay, R. S. «Linear stability of symplectic maps». En: *Journal of mathematical physics* (1987), págs. 1036-1051.
- [21] Hsieh, D. Y. «On Mathieu equation with damping». En: *Journal of Mathematical Physics* 21.4 (1980), págs. 722-725.

- [22] Kalman, D. *Uncommon Mathematical Excursions: Polynomial and Related Realms*. Dolciani Mathematical Expositions. The Mathematical Association of America, (2009).
- [23] Kapitsa, P. L. «Dynamic stability of the pendulum when the point of suspension is oscillating.» En: *Sov. Phys. JETP (En ruso)*. Traducción al inglés: *In collected works of P. Kapitsa*. (1951).
- [24] Khalil, H. K. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, (2001).
- [25] Krein, M. G. *Fundamental aspects of the theory of λ -zones of stability of a canonical system of linear differential equations with periodic coefficients*. To the memory of A. A. Andronov, [En ruso], págs. 414-498, (1955). Traducción al inglés en: *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 120,1-70, (1983).
- [26] Kuznetsova, T. y Smirnov, Y. N. «Tables of characteristic exponents of Mathieu equations». En: *National Aeronautics and Space Administration* (1970).
- [27] Lyapunov, A. M. *The General Problem of the Stability Of Motion*. 1.^a ed. CRC Press, (1992).
- [28] Magnus, W. y Winkler, S. *Hill's equation*. Interscience-Wiley. (1966).
- [29] Marchenko, V. A. *Sturm-Liouville operators and their application*. Kiev Izdatel Naukova Dumka. Traducción al inglés (2011): American Mathematical Soc., (1977).
- [30] Marciniak, A. «Discrete Hill's Equation». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 37 (1983), págs. 15-24.
- [31] McLachlan, N. W. *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford, (1947).
- [32] Meyer, K., Hall, G. y Offin, D. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. 2.^a ed. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag New York, (2009).
- [33] Pedersen, P. «Stability of the solutions to Mathieu-Hill equations with damping». En: *Ingenieur-Archiv* 49.1 (1980), págs. 15-29.

- [34] Pernot, S. y Lamarque, C. H. «A wavelet-Galerkin procedure to investigate time-periodic systems: Transient vibration and stability analysis». En: *Journal of Sound and Vibration* 245.5 (2001), págs. 845 -875.
- [35] Rand, R. H. «Mathieu's Equation». En: *Cornell University* (2016).
- [36] Rodríguez, J. G. «Ecuación de Hill Discreta». En: *CINVESTAV* (2018).
- [37] Rugh, W. J. *Linear System Theory*. 2.^a ed. Prentice Hall, (1996).
- [38] Seyranian, A. P. y Mailybaev, A. A. *Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications*. Vol. 13. Series on Stability, Vibration and Control of Systems. World Scientific Publishing Company, (2003).
- [39] Starzhinskii, V. M. *Survey of works on conditions of stability of the trivial solution of a system of linear differential equations with periodic coefficients*. Vol. 1. Prik. Mat. Meh., (1955), págs. 469-510.
- [40] Sträng, J. E. «On the characteristic exponents of Floquet Solutions to the Mathieu equation». En: *Cornell University*, (2005).
- [41] Tamir, T. «Characteristic Exponents of Mathieu Functions». En: *Mathematics of Computation - Math. Comput.* 16, (1962).
- [42] van der Pol, B. y Strutt, M. J. O. *On the stability of the solutions of Mathieu's equation*. Vol. 5(27). The London, Edinburgh y Dublin Philosophical Magazine, Journal of Science, (1928), págs. 18-38.
- [43] Yakubovich, V. A. y Starzhinskii, V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients*. Vol. 1 & 2. Wiley, (1975).
- [44] Zaroodny, S. J. «An Elementary Review of the Mathieu-Hill Equation of Real Variable Based on Numerical Solutions». En: *Memo. Rep. no. 878* (1955).