

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS Y
BIOLÓGICOS**

TESIS

Que para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

En la especialidad de
CONTROL AUTOMÁTICO

presenta

Antonio Concha Sánchez

Director de Tesis

Rubén Alejandro Garrido Moctezuma

Ciudad de México, D. F.

Agosto 2013

Para mis padres, esposa e hijo

Agradecimientos

A Dios, por la familia que tengo.

A mi esposa Gladys, por el gran amor y apoyo incondicional que me ha brindado.

A mi hijo Antonio, por venir al mundo llenándome de una gran felicidad.

A mis padres Gabino y María Alberta, quienes son la base de mi educación y principios, porque me han apoyado en todas las decisiones que he tomado, y por todo el amor que me han brindado

A mis hermanas Yajaira y Marisol, quienes son personas importantes para mí y siempre han estado presentes en los detalles importantes de mi vida.

A mi sobrinos Jaqueline Fatima y Oliver Axel, por disfrutar de la vida y por todos momentos de alegría que me han brindado.

A mis maestros. En especial al Dr. Rubén A. Garrido Moctezuma, por darme la oportunidad de trabajar con él, por su disponibilidad, paciencia, amabilidad y por su valiosa asesoría.

A mis amigos y amigas, en especial a Suresh Thenozhi por su apoyo y amistad.

A los ingenieros Gerardo Castro, Jesús Meza y Roberto Lagunes, por el apoyo brindado en el laboratorio del Departamento de Control Automático, ya que fue fundamental para el desarrollo de esta tesis.

Al Cinvestav y al Conacyt, por el apoyo otorgado para realizar estos estudios.

Resumen

En esta tesis se estudia la identificación paramétrica de los modelos de dos sistemas mecánicos y de un sistema biológico. Los sistemas mecánicos corresponden a un servomecanismo de corriente directa y a un edificio, y el sistema biológico es una neurona, la cual se modela mediante el modelo de FitzHugh-Nagumo.

En el caso del modelo del servomecanismo se proponen dos algoritmos de identificación. El primero se llama Método de Identificación Recursivo Algebraico (MIRA) y el segundo se llama Método basado en las Respuestas en Estado Estacionario (MREE). El MIRA combina el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo convencional (MCR) y una parametrización obtenida mediante el Cálculo Operacional y empleada originalmente por un Algoritmo de Identificación Algebraico (MIA) presentado recientemente en la literatura. El procedimiento para obtener esta parametrización elimina las perturbaciones constantes que afectan al servomecanismo y filtra el ruido de medición de alta frecuencia. El MIRA emplea el MCR para evitar el problema de singularidades que presenta el MIA, identifica en lazo cerrado los parámetros de un servomecanismo controlado en posición, y utiliza un controlador Proporcional Derivativo para estabilizar el lazo. Resultados obtenidos con una plataforma experimental que emplea un motor de CD con escobillas permiten comparar los parámetros estimados por el MIA y por el MIRA. Por otro lado, el MREE estima los parámetros de un servomecanismo controlado en velocidad. Un controlador Proporcional Integral, el cual es alimentado sólo por mediciones de la posición, estabiliza el lazo en velocidad sin el conocimiento de los parámetros del servo. El MREE requiere de cálculos numéricos simples, y utiliza las respuestas en estado estacionario del servo producidas por velocidades de referencia constantes y sinusoidales. Estas señales producen bajos niveles de vibración en el servo en comparación con las señales aleatorias comúnmente utilizadas por el MCR. Mediante experimentos realizados en un prototipo de laboratorio que utiliza un motor de CD sin escobillas se compara el MREE con el MCR.

Para la identificación del modelo de un edificio se propone un algoritmo de identificación llamado Método de Identificación Recursivo de Edificios (MIRE), el cual utiliza las mediciones de aceleración del terreno y de cada piso del edificio. Se supone que estas mediciones tienen perturbaciones constantes y ruido de medición, y que la excitación para la identificación proviene del movimiento del terreno inducido por un sismo. La técnica

propuesta se basa en el algoritmo de Mínimos Cuadrados recursivo con factor de olvido y en una parametrización de la estructura usando integrales evaluadas en ventanas de tiempo finito. Estos filtros pasan la frecuencia típica de las estructuras excitadas mediante un sismo, eliminan las perturbaciones constantes presentes en las mediciones de aceleración, y atenúan el ruido de medición. Para confirmar la efectividad del MIRE, éste se evalúa mediante simulaciones numéricas empleando el modelo de un edificio de tres pisos.

Finalmente, en el caso del modelo de FitzHugh-Nagumo (FHN) de una neurona, se propone un algoritmo de identificación denominado Método de Identificación Basado en Integrales (MIBI), el cual identifica los parámetros de dicho modelo utilizando sólo mediciones ruidosas del potencial de membrana de la neurona. Al integrar el modelo de FHN sobre intervalos de tiempo finito se elimina la variable de recuperación de dicho modelo, obteniéndose una parametrización basada en integrales de la variable del potencial de membrana. El MIBI utiliza el método de Mínimos Cuadrados fuera de línea para la estimación de los parámetros del modelo FHN y emplea la wavelet Daubechies para atenuar el ruido de medición del potencial de membrana. A diferencia de un método de estimación que fue propuesto recientemente en la literatura y denominado Método de Identificación Basado en Derivadas (MIBD), el MIBI no utiliza derivadas del potencial de membrana y puede emplearse cuando la corriente aplicada a la neurona es discontinua. Cabe comentar que el desempeño del MIBI se valida mediante simulaciones numéricas, y los parámetros obtenidos mediante este método se comparan con los parámetros estimados por el MIBD.

Abstract

This thesis studies the parametric identification of two mechanical systems and a biological system. The mechanical systems corresponds to a DC servomechanism and a building; the biological system is a neuron whose behavior is described through the FitzHugh-Nagumo model.

In the case of the servomechanism model, two identification algorithms are proposed. The first is named the Algebraic Recursive Identification Method (MIRA) and the second is called the Steady State Response Method (MREE). The MIRA combines the conventional recursive Least Squares algorithm (MCR) and a parametrization derived from the Operational Calculus and employed by an algebraic identification algorithm (MIA) recently proposed in the literature. The procedure for obtaining this parametrization eliminates the effect of constant disturbances affecting the servomechanism and filters out the high frequency measurement noise. The MIRA employs the MCR for circumventing the problem of singularities found on the MIA; moreover, the MIRA performs closed-loop parameter identification of a position-controlled servomechanism using a standard PD controller. Experimental results on a laboratory prototype that employs a brushed DC motor allow comparing the parameter estimates obtained by the MIA and by the MIRA. On the other hand, the MREE estimates the parameters of a velocity-controlled servomechanism. A Proportional Integral controller, fed by position measurements, stabilizes the loop without knowledge about the servo parameters. The MREE relies on simple numerical calculations, and uses the steady state response produced by constant and sine wave velocity reference inputs. These references do not produce high levels of vibration on the servo compared with random signals commonly used with the MCR. Experiments carried out on a brushless DC motor permits comparing the MREE and the MCR.

In order to estimate the parameters of a building an identification algorithm is proposed, which is called the Buildings Recursive Identification Method (MIRE). It uses the acceleration measurements of the ground and of each floor of the building. It is assumed that these measurements have offsets and noise, and that the structure is excited by a seismic activity. The proposed scheme is based on the Least Squares algorithm with forgetting factor and a parametrization of the structure using integrals over finite time intervals. These filters pass the typical frequency bandwidth of structures undergoing earthquake excitation,

eliminate the offsets, and attenuate the measurement noise. To confirm the effectiveness of the MIRE, it is evaluated through numerical simulations employing a three-story building model.

Finally, in the case of the FitzHugh-Nagumo (FHN) neuron model, an identification algorithm is proposed which is denominated the Integral Based Identification Method (MIBI). It is assumed that only the measurements of the membrane potential are available and contain noise. By integrating the FHN model over finite time periods, the unmeasurable recovery variable of this model is eliminated thus obtaining a parametrization based on integrals of the measurable membrane potential variable. The MIBI uses the off-line Least Squares algorithm for estimating the FHN parameters and the Daubechies wavelet denoising technique for removing the measurement noise. Unlike an identification technique recently published and termed as the Derivative Based Identification Method (MIBD), the MIBI does not rely on the time derivatives of the membrane potential, and is not limited to continuously differentiable input current stimulus. It is worth mentioning that the performance of the MIBI is validated by means of numerical simulations, and the parameters identified by this method are compared with the ones obtained by the MIBD.

Contenido

Lista de Figuras	III
Lista de Tablas	V
Lista de Publicaciones	VI
1. Introducción	1
1.1. Técnicas de identificación de parámetros	2
1.2. Identificación en lazo abierto y en lazo cerrado	4
1.3. Identificabilidad paramétrica	7
1.4. Objetivos principales	8
1.5. Objetivos específicos	9
1.6. Descripción de la tesis	11
2. Identificación paramétrica de un servomecanismo de Corriente Directa (CD)	12
2.1. Introducción	12
2.2. Modelo del servomecanismo de CD	16
2.3. Primer paso de la identificación	18
2.3.1. Método de identificación Algebraico (MIA)	18
2.3.2. Método de Identificación Recursivo Algebraico (MIRA)	19
2.4. Segundo paso de la identificación	21
2.5. Validación del modelo	23
2.5.1. Ley de control	23
2.6. Resultados experimentales	24
2.7. Resumen	27
3. Estimación de la inercia y de la fricción de un servo controlado en velocidad usando mediciones de su posición	33
3.1. Introducción	33
3.2. Plataforma experimental	35
3.3. Control de velocidad usando mediciones de posición	36
3.3.1. Análisis de estabilidad del sistema de control	38
3.4. Primer paso del MREE	40
3.4.1. Estimación experimental de la fricción	42
3.5. Segundo paso del MREE	43
3.5.1. Estudio del comportamiento de las inercias estimadas J_1 y J_2	45

3.5.2. Selección entre J_1 y J_2	47
3.6. Comparación con el método de Mínimos Cuadrados Recursivo (MCR)	48
3.6.1. Estimación experimental de β , μ , τ_c y J utilizando el MCR	50
3.7. Validación del modelo	53
3.7.1. Análisis de estabilidad	54
3.7.2. Medida de la calidad del modelo	55
3.7.3. Experimentos de validación de modelo	55
3.8. Resumen	56
4. Identificación paramétrica de un edificio	59
4.1. Introducción	59
4.2. Modelo de un edificio	61
4.2.1. Modelo de un edificio de n grados de libertad	62
4.3. Parametrización del modelo	64
4.3.1. Atenuación del ruido de medición	71
4.4. Algoritmo de identificación	72
4.5. Simulaciones numéricas	73
4.6. Resumen	74
5. Identificación paramétrica del modelo neuronal de FitzHugh-Nagumo (FHN)	78
5.1. Introducción	78
5.2. Modelo de FHN	80
5.3. Método de Identificación Basado en Integrales (MIBI)	80
5.3.1. Atenuación del ruido de medición	82
5.4. Método de Mínimos Cuadrados fuera de línea	82
5.5. Simulaciones numéricas	83
5.6. Resumen	86
6. Conclusiones	89
6.1. Trabajos futuros	92
A. Obtención del modelo de un servomecanismo de CD	94
B. Circuito del amplificador usado con el motor de CD con escobillas	98
C. Parametrización usada por el MIA	99
D. Análisis de las inercias estimadas J_1 y J_2	101
E. Propiedades del operador I_n de integración múltiple	105
Referencias	107
F. Trabajos publicados	124

Lista de Figuras

1.1. Sistema de control.	4
1.2. Identificación directa en lazo cerrado.	5
1.3. Identificación unión entrada-salida.	6
2.1. Modelo del servomecanismo de CD.	16
2.2. Identificación en lazo cerrado del servomecanismo.	18
2.3. Señal de referencia del sistema en lazo cerrado	21
2.4. Sistema de control para el seguimiento de una trayectoria.	23
2.5. Prototipo de laboratorio.	25
2.6. Señales de posición, velocidad y control del servomecanismo	29
2.7. Parámetros estimados por el MIA	30
2.8. Parámetros estimados por el MIRA	31
2.9. Validación del modelo del servomecanismo	32
3.1. Plataforma de experimentación.	37
3.2. Control de velocidad usando mediciones de posición.	37
3.3. Señales empleadas para estimar la fricción	43
3.4. Señal de control τ correspondiente a la referencia \dot{q}_d en la Fig. 3.3 (a).	44
3.5. Inercias estimadas J_1 y J_2 con respecto a la frecuencia.	48
3.6. Error en la identificación del momento de inercia.	49
3.7. Velocidad de referencia durante la identificación con el MCR.	51
3.8. Sistema de control para el seguimiento de una trayectoria.	54
3.9. Parámetros estimados por el MCR.	57
3.10. Trayectoria y errores de seguimiento.	58
4.1. Estructura de un grado de libertad sujeta a la excitación de un sismo.	62
4.2. Estructura con n grados de libertad.	63
4.3. Diagrama de bloques asociado a la técnica de identificación propuesta.	70
4.4. Filtros empleados para atenuar el ruido de medición.	71
4.5. Aceleración medida del terreno	75
4.6. Aceleración medida del primer piso	75
4.7. Aceleración medida del segundo piso	76
4.8. Aceleración medida del tercer piso	76
4.9. Parámetros estimados de una estructura de tres grados de libertad.	77

5.1. Espectro del potencial de membrana medido	85
5.2. Señal de salida de la wavelet Daubechies	86
5.3. Comparación entre los estados estimados y los estados nominales.	88
A.1. Diagrama de bloques equivalente al de la Fig. 2.1.	94
A.2. Diagrama de bloques reducido	95
A.3. Diagrama de bloques más reducido	96
B.1. Circuito esquemático del amplificador de potencia que alimenta al motor de CD con escobillas.	98
D.1. Análisis de las inercias estimadas J_1 y J_2 con respecto a la frecuencia. . . .	103

Lista de Tablas

2.1. Parámetros nominales del servomotor de CD con escobillas.	17
2.2. Parámetros identificados por el MIA y el MIRA.	28
2.3. Validación del modelo estimado por el MIRA.	28
3.1. Parámetros nominales del servomotor de CD sin escobillas	36
3.2. Ganancias del controlador utilizadas en los experimentos.	40
3.3. Resumen de los pasos del MREE.	50
3.4. Parámetros estimados por el MCR	52
3.5. Comparación de los parámetros estimados por el MCR y por el MREE. . .	56
5.1. Parámetros estimados cuando la señal de entrada es una senoide.	87
5.2. Parámetros estimados cuando la señal de entrada es discontinua	87
5.3. Calidad de los modelos identificados	88
6.1. Métodos de Identificación propuestos.	90

Lista de Publicaciones

Publicaciones en congresos nacionales

Rubén Garrido y Antonio Concha, Estudio comparativo experimental de métodos de identificación en lazo cerrado para un servomecanismo. En *Congreso Mexicano de Robótica (COMRob)*, Celaya, Guanajuato, México, Septiembre 29- Noviembre 2, 2009.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Identificación algebraica de un servomecanismo de corriente directa empleando el Método de Mínimos Cuadrados. En *Congreso Nacional de Control Automático (AMCA)*, Puerto Vallarta, Jalisco, México, Octubre 6-8, 2010.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Combinación de un Método Algebraico y del Método de Mínimos Cuadrados para la identificación de un servomecanismo de CD. En *Congreso Mexicano de Robótica (COMRob)*, Mazatlán, Sinaloa, México, Noviembre 3-6, 2010.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Identificación de un servomecanismo controlado en velocidad usando mediciones de su posición. En *Congreso Nacional de Control Automático (AMCA)*, Cd. del Carmen, Campeche, México, Octubre 17-19, 2012.

Sometido a congreso nacional

Rubén Garrido y Antonio Concha, Identificación del modelo de FitzHugh-Nagumo usando integrales del potencial de membrana. En *Congreso Nacional de Control Automático (AMCA)*, Ensenada, Baja California, México, Octubre 16-18, 2013.

Publicaciones en congresos internacionales

Rubén Garrido y Antonio Concha, Combining Algebraic Identification and a Least Squares method for DC servomechanism identification. En *7th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, Septiembre 8-10, 2010.

Alberto Soria, Rubén Garrido y Antonio Concha, Low cost closed loop identification of a DC motor. En *7th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, Septiembre 8-10, 2010.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Algebraic identification of a DC servomechanism using a Least Squares algorithm. En *American Control Conference*, San Francisco, CA, EUA, Junio 29-Julio 1, 2011.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Parametric identification of seismically excited buildings using acceleration measurements. En *8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, Mérida, Yucatán, México, Octubre 26-28, 2011.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Estimation of the parameters of structures using acceleration measurements. En *16th IFAC Symposium on System Identification*, Bruselas, Bélgica, Julio 11-13, 2012.

Publicación en revista internacional

Rubén Garrido y Antonio Concha, An Algebraic Recursive method for parameter identification of a Servo model. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 18, no. 5, pág. 1572-1580, 2013.

Sometidos a revista internacional

Rubén Garrido y Antonio Concha, Inertia and friction estimation of a velocity controlled servo using position measurements. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Estimating the parameters of the FitzHugh-Nagumo neuron model using integrals over finite time periods of the membrane potential. *Chaos*, 2013.

Capítulo 1

Introducción

La identificación paramétrica es un proceso que consiste en utilizar las señales de entrada y de salida de un sistema dinámico para calibrar un modelo matemático que represente adecuadamente las características del sistema. El modelo matemático de un sistema puede ser una ecuación diferencial, en diferencias, de estado o una función de transferencia. Fundamentalmente, el modelo matemático se obtiene mediante la aplicación de las leyes de la física que determinan el comportamiento del sistema, por ejemplo las leyes de Newton, la ley de Faraday, etc; Al modelo obtenido de esta manera se le denomina modelo paramétrico o modelo de caja blanca y posee un número finito de parámetros cuyos valores se estiman utilizando técnicas de identificación [Raol04]. Generalmente, estas técnicas determinan los parámetros de un modelo mediante la optimización de un criterio, por ejemplo, la minimización de los errores cuadráticos medios entre la respuesta del modelo y la respuesta del sistema. Por otro lado, existen modelos no paramétricos también llamados modelos de caja negra, los cuales representan la relación entre la entrada y la salida del sistema por medio de una tabla o de una curva; estos modelos no exhiben cierta estructura y generalmente son de dimensión infinita. Los modelos no paramétricos típicamente se obtienen utilizando la respuesta del sistema al impulso, al escalón o a la frecuencia [Johansson94, Isermann11b]. Cabe mencionar que también existen modelos de caja gris, los cuales combinan modelos de caja blanca y modelos de caja negra.

La identificación paramétrica se aplica en una gran variedad de sistemas tales como: biológicos, eléctricos, mecánicos, térmicos, etc. La identificación puede ser llevada a cabo fuera de línea, cuando los datos de entrada y salida del sistema se coleccionan durante un período de tiempo y posteriormente se utilizan en un algoritmo diseñado para

identificar el modelo del sistema; o en línea o recursiva, cuando el modelo se actualiza en los instantes en que hay disponibles nuevos datos de entrada y salida del sistema. La estimación paramétrica es de gran importancia en diferentes aplicaciones, por ejemplo, para simular el comportamiento del sistema bajo condiciones peligrosas que podrían dañarlo, para predecir el estado futuro del proceso, para el diseño de observadores con los cuales se estimen variables no disponibles, para la detección de fallas en un sistema al encontrar cambios en los parámetros, para el diseño de sistemas de control, etc [Söderström89, Isermann11b].

En la actualidad la identificación paramétrica tiene un auge importante debido principalmente a la aparición de procesadores digitales de alta velocidad, tarjetas de adquisición de datos y plataformas de simulación las cuales facilitan la implementación de los algoritmos de identificación. Históricamente se ha colocado a esta línea de investigación dentro del área de control, aunque dentro de la identificación de sistemas hay una convergencia de varias áreas: Control Automático, Instrumentación, Procesamiento Digital de Señales, etc.

1.1. Técnicas de identificación de parámetros

Los procesos físicos generalmente son descritos mediante modelos en tiempo continuo; por lo tanto, en los últimos años la identificación paramétrica de modelos en tiempo continuo lineales y no lineales utilizando datos muestreados de la entrada y de la salida del sistema se ha convertido en un tópico que ha recibido atención especial y se ha estudiado en libros como [Sinha91, Johansson93, Garnier08, Young11, Isermann11b] y en una gran cantidad de artículos como [Young81, Sagara90, Johansson94, Unbehauen98, Li01, Garnier03, Rao05a], por mencionar solo algunos. Además, la identificación de modelos en tiempo continuo se ha estudiado en libros de gran importancia en el área de control adaptable como [Sastry89, Narendra89, Slotine91, Ioannou96, Ioannou06].

Existen dos técnicas utilizadas para la identificación de modelos en tiempo continuo, las cuales son [Rao05a]:

- Técnica indirecta: primeramente se estiman los parámetros de un modelo en tiempo discreto, posteriormente este modelo se convierte a un modelo en tiempo continuo.
- Técnica directa: se identifica directamente el modelo en tiempo continuo.

El segundo paso de la técnica indirecta, es decir, la obtención de un modelo en tiempo continuo a partir del modelo discreto estimado no es fácil. Esto es debido a que

aparecen dificultades cuando el período de muestreo es muy pequeño o cuando es muy grande. Mientras que con un período de muestreo grande se puede perder información de las señales del sistema, un período de muestreo muy pequeño puede crear problemas numéricos debido a que los polos del modelo discreto se encontrarían en una área pequeña del plano z cercana al círculo unitario [Rao05a]. Estas limitaciones no se tienen con la técnica directa, sin embargo, el principal inconveniente de esta técnica es el cálculo de las derivadas en el tiempo de la salida del sistema. Estas derivadas se pueden estimar mediante el uso de observadores de modos deslizantes [Floret01, Davila06], observadores de alta ganancia [Tornambè89, Martínez-Guerra98, Niethammer01, Chavez02, Mendoza04] u observadores algebraicos [Fliess08a]. La reconstrucción de dichas derivadas se puede evitar utilizando métodos de preprocesamiento de señales tales como: filtros lineales [Young70, Tsang94, Chou99, Wang01, Ahmed06], métodos integrales [Diamessis65, Sagara90, Fliess03, Aguilar08, Ouvrard11] o funciones de modulación [Berhe98, Bastogne01]. Cada método de preprocesamiento se caracteriza por sus ventajas específicas como: conveniencia matemática, simplicidad en la implementación numérica, manejo de condiciones iniciales, exactitud, etc. En [Garnier03, Rao05a] se presenta una descripción detallada de la mayoría de las técnicas de preprocesamiento existentes. Una vez que se ha empleado algún observador o algún método de preprocesamiento de señales en la técnica directa, el siguiente paso consiste en utilizar algún método de identificación que estime los parámetros del modelo en tiempo continuo. Para ello se pueden utilizar la mayoría de los algoritmos desarrollados para la identificación de modelos en tiempo discreto como: el Método de Mínimos cuadrados [Ljung87, Söderström97], el Método de Variable Instrumental [Young70] el cual es una generalización del método anterior y proporciona mejores resultados en los casos en que hay correlación entre el ruido de medición y la entrada del sistema; el Método de Máxima Verosimilitud [Johansson94], Redes Neuronales [Rao05b], Algoritmos Genéticos [Kristinsson92] o mediante la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas [Martínez-Guerra98, Floret01, Chavez02, Fliess03, Suárez03]. No obstante, esta última técnica es de tipo algebraico y pueden existir singularidades en los parámetros identificados.

Cabe mencionar que existen otras metodologías para identificar modelos en tiempo continuo y que no requieren del cálculo de las derivadas en el tiempo de la salida del sistema. Estas metodologías son muy simples y se basan en la respuesta en estado estacionario del sistema ante entradas tradicionales como constantes, rampas y sinusoides. Con estas técnicas se pueden estimar retardos del sistema o constantes de tiempo [Isermann11b], coeficientes

de fricción [Canudas97, Kelly00], inercias [Andoh07b, Andoh07a], etc.

1.2. Identificación en lazo abierto y en lazo cerrado

Las técnicas de identificación de parámetros se pueden clasificar en:

- Técnicas de identificación en lazo abierto.
- Técnicas de identificación en lazo cerrado.

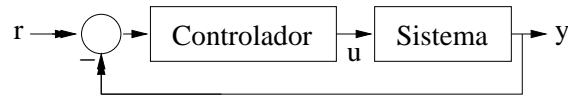


Figura 1.1: Sistema de control.

Ejemplos de métodos de identificación en lazo abierto donde el controlador del sistema puede o no estar instalado (Fig 1.1), son los métodos de Mínimos Cuadrados y los métodos basados en la curva de respuesta del sistema ante una entrada escalón [Alfaro01].

Existen casos en donde no es posible aplicar directamente algún método de identificación en lazo abierto. Tal es el caso de sistemas inestables o marginalmente estables en lazo abierto, ya que su operación en esta condición podría ocasionar graves daños. Por ejemplo, en los procesos industriales que son inestables en lazo abierto o cuya eficiencia es pobre en esta condición, sólo es posible obtener datos experimentales cuando dichos procesos operan en lazo cerrado. Lo anterior también es aplicable a sistemas electromecánicos tales como máquinas herramientas o robots manipuladores. Dentro de las técnicas de identificación en lazo cerrado se encuentran los métodos de oscilación mantenida, métodos de realimentación usando relevador y métodos de control Proporcional (P) [Cheng89, Alfaro01].

Las técnicas de identificación en lazo cerrado se pueden clasificar en tres grupos [Söderström89, Forssell97]:

- Identificación directa en lazo cerrado (IDLC).
- Identificación indirecta en lazo cerrado (IILC).
- Identificación unión entrada-salida (IUES).

En el enfoque IDLC los datos de entrada y de salida del sistema sirven como entrada para el algoritmo de identificación ignorándose la posible realimentación [Forssell97]. Lo anterior implica que este método puede aplicarse a sistemas con mecanismos de realimentación arbitraria. La Fig. 1.2 muestra la manera en cómo se realiza la identificación con el enfoque IDLC.

Si el controlador y la señal de referencia son conocidos, entonces puede llevarse a cabo la identificación mediante el enfoque IILC [Forssell97]. Este enfoque puede ser aplicado a sistemas con realimentación lineal y no lineal. Para explicar la idea de esta metodología considérese el sistema de control mostrado en la Fig. 1.2 y supóngase que el controlador es lineal. Primeramente, con esta técnica se obtiene un estimado \hat{G} de la función de transferencia en lazo cerrado G entre y y r , la cual está dada por:

$$G = \frac{CS}{1 + CS} \quad (1.1)$$

donde S y C son las funciones de transferencia del sistema y del controlador, respectivamente. Posteriormente, el conocimiento del controlador C se utiliza para obtener un estimado \hat{S} de S mediante la siguiente expresión:

$$\hat{S} = \frac{\hat{G}}{C(1 - \hat{G})} \quad (1.2)$$

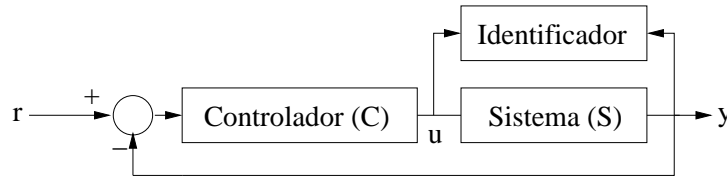


Figura 1.2: Identificación directa en lazo cerrado.

Por otro lado, la identificación con el enfoque IUES no requiere del conocimiento del controlador. Se considera que la señales de referencia r y la señal adicional w mostradas en la Fig. 1.3 excitan al sistema de control. Para un sistema de control lineal se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{CS}{1 + CS} & \frac{S}{1 + CS} \\ \frac{C}{1 + CS} & \frac{1}{1 + CS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

El modelo del sistema puede entonces obtenerse al identificar las funciones de transferencia mostradas en (1.3). Por ejemplo, el estimado \hat{S} de la función de transferencia S puede ser obtenido mediante la expresión:

$$\hat{S} = \frac{\hat{G}_{11}}{\hat{G}_{21}}$$

donde \hat{G}_{11} y \hat{G}_{21} son los estimados de G_{11} y G_{21} . Si el controlador C se desconoce, se puede obtener su estimado \hat{C} mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{C} = \frac{\hat{G}_{11}}{\hat{G}_{12}}$$

donde \hat{G}_{12} es un estimado de G_{12} .

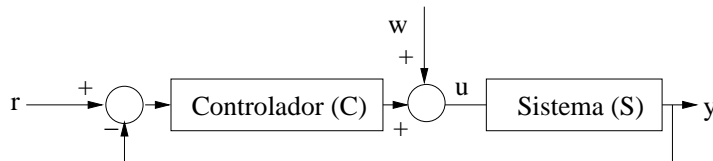


Figura 1.3: Identificación en lazo cerrado: Enfoque IUES.

En la literatura existen varios métodos para la identificación de los modelos de sistemas funcionando en lazo cerrado [Forssell97, Hof98, Forssell99, Gilson05, Gilson08]. Las referencias [Gilson05] y [Gilson08] presentan métodos de Variable Instrumental para la estimación de modelos en tiempo discreto y de modelos en tiempo continuo, respectivamente. Con estos métodos se evita el problema de correlación que existe entre la señal de entrada del sistema y el ruido de medición; esta correlación es inducida por el lazo de realimentación del sistema en lazo cerrado. En [Dasgupta96, Linard99, Xu03] se identifican los modelos de sistemas no lineales con parámetros variantes en el tiempo. Las referencias [Dasgupta96, Linard99] utilizan la metodología IILC y estiman los parámetros de la factorización Youla-Kucera la cual permite transformar un problema de identificación en lazo cerrado a uno de identificación en lazo abierto. La referencia [Xu03] emplea un controlador por modos deslizantes para estabilizar a un sistema múltiple entrada múltiple salida. Cuando el sistema se encuentra en el modo deslizante se estiman los parámetros desconocidos del modelo del sistema mediante el algoritmo de Mínimos Cuadrados; cabe notar que en

este caso es necesario conocer previamente valores máximos y mínimos de los parámetros a identificar. La referencia [Fliess08b] estima modelos lineales en tiempo continuo utilizando el enfoque IDLC y una parametrización de los modelos basada en integrales. Los parámetros estimados con este método se obtienen de manera algebraica y se utilizan para el diseño de Controladores Proporcionales Integrales Generalizados [Fliess02]. En [Garnier00] se emplea la técnica IILC para la identificación de modelos lineales en tiempo continuo y se emplean los filtros lineales GPMF (Generalized Poisson Moment Functionals, en inglés) para evitar el cálculo de las derivadas de la salida del sistema. Esta referencia también emplea el Método de Mínimos Cuadrados con eliminación de sesgo, el cual fue introducido en [Zheng95] y permite la obtención de parámetros sin sesgo en presencia de ruido de medición. La referencia [Lakshminarayanan01] utiliza la técnica IUES para estimar el modelo de un proceso químico industrial mediante datos experimentales. En [Landau01] se estudia un esquema recursivo de tipo error de salida para identificar el modelo de sistemas no lineales operando en lazo cerrado. Desafortunadamente, el modelo, cuyos parámetros no son conocidos, debe cumplir con restricciones dependientes de estos parámetros. En [Huang06] se propone un método de identificación para sistemas no lineales de segundo orden utilizando una técnica de estimación de parámetros basada en un observador. El sistema que se desea identificar se estabiliza previamente mediante un controlador de alta ganancia. Una característica de este método es que el vector regresor debe ser derivable respecto al tiempo.

1.3. Identificabilidad paramétrica

Antes de aplicar algún método de identificación se tiene que verificar que los parámetros del modelo bajo estudio son identificables. En la literatura se han introducido varias definiciones acerca de la identificabilidad paramétrica. En [Isermann11b] se dice que un vector de parámetros θ es identificable, si el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ converge a θ . En dicha referencia se menciona que los parámetros de un modelo lineal descrito en la forma general de regresión lineal son identificables, si la señal de entrada del sistema contiene al menos tantos puntos espectrales como parámetros del modelo. Nótese que una señal sinusoidal de frecuencia ω_0 contribuye con dos puntos en el espectro, los cuales están localizados en $+\omega_0$ y $-\omega_0$ [Sastry89]. Por lo anterior, si la señal de entrada del sistema es la suma de n sinusoides y el número de parámetros del modelo es m , entonces n debe ser mayor o igual que $m/2$ para que se puedan estimar dichos parámetros. Por otro lado, existen

metodologías que emplean el Álgebra Diferencial para determinar si dado un conjunto de mediciones de entrada y salida, es posible obtener los parámetros del modelo de un sistema. En [Diop91] se dice que el vector de parámetros θ es algebraicamente identificable si cada $\theta_i \in \theta$ satisface una ecuación diferencial que depende de la entrada y de la salida del sistema, y de las derivadas de estas señales.

1.4. Objetivos principales

Los objetivos fundamentales que se contemplan en esta tesis son:

- La estimación en lazo cerrado de cuatro parámetros de un modelo en tiempo continuo y no lineal de un servomecanismo de corriente directa (CD) controlado en posición; este modelo considera fricción viscosa y de Coulomb, y perturbaciones constantes. Para realizar la identificación de dichos parámetros, se propone un algoritmo que combina el método de Mínimos Cuadrados recursivo en tiempo discreto y una parametrización obtenida mediante el Cálculo Operacional y empleada por un Método de Identificación Algebraico (MIA) propuesto recientemente en la literatura [Fliess03, Fliess08b]. A la técnica propuesta se le llamará Método de Identificación Recursivo Algebraico (MIRA).
- La identificación de la inercia, de la fricción viscosa y de Coulomb, y de una perturbación constante de un servomecanismo de CD controlado en velocidad usando mediciones de su posición. Para ello se propone un método que requiere de cálculos numéricos simples y que emplea las respuestas en estado estacionario del servo producidas al aplicar velocidades de referencia constantes y sinusoidales. Al método propuesto se le denominará Método basado en las Respuestas en Estado Estacionario (MREE).
- La obtención de los parámetros de un modelo en tiempo continuo y lineal de un edificio excitado mediante un sismo. Para ello se utilizan las mediciones de aceleración del terreno y de cada piso del edificio, las cuales se supone que están contaminadas con ruido de medición y perturbaciones constantes. Además, se propone un esquema de identificación basado en el algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo discreto con factor de olvido y en una parametrización de la estructura civil utilizando integrales

evaluadas en intervalos de tiempo finito. Al esquema propuesto se le llamará Método de Identificación Recursivo de Edificios (MIRE).

- La propuesta de un algoritmo de identificación que estime los parámetros de un modelo en tiempo continuo y no lineal de una neurona. El modelo neuronal es el de FitzHugh-Nagumo (FHN) [FitzHugh61] y se estimará utilizando sólo mediciones de la variable de potencial de membrana, las cuales contienen ruido. Además, se obtendrá una parametrización del modelo de FHN basada en integrales evaluadas en períodos de tiempo finito y que elimina la variable de recuperación del modelo FHN, la cual es no medible. El algoritmo propuesto utiliza el método de Mínimos Cuadrados fuera de línea para estimar los parámetros del modelo de FHN y emplea la wavelet Daubechies db8 [Daubechies92] para atenuar el ruido de medición. El algoritmo propuesto se nombrará Método de Identificación Basado en Integrales (MIBI)

Cabe mencionar que el modelo de FHN tiene varias aplicaciones en sistemas mecánicos. Por ejemplo, mediante modelos de FHN se pueden construir redes neuronales que controlen el movimiento de robots bípedos, cuadrúpedos, hexápodos y octópodos [Collins94, Golubitsky98, Wu09]. Además, mediante estas redes neuronales se puede lograr que un robot baile al son de la música [Aucouturier08].

1.5. **Objetivos específicos**

Los objetivos específicos planteados con el MIRA son:

- Mostrar teórica y experimentalmente que el MIRA evita el problema de singularidades que presenta el MIA.
- Verificar que los parámetros estimados con el MIA y el MIRA son muy cercanos a los parámetros nominales del servomecanismo, los cuales son obtenidos usando la información técnica del prototipo empleado en los experimentos.
- Validar el modelo identificado por cada algoritmo de identificación, calculando con los parámetros estimados del modelo una ley de control para el seguimiento de una trayectoria.

Los objetivos específicos planteados con el MREE son:

- Describir claramente cómo se controla la velocidad del servo utilizando sólo mediciones de su posición y sin emplear diferenciación numérica de estas mediciones.
- Comparar experimentalmente el MREE con el algoritmo convencional de Mínimos Cuadrados Recursivo (MCR).
- Mostrar que las señales de control producidas por las referencias que emplea el MREE son menos bruscas que la señal de control producida por una referencia de ruido blanco utilizada por el MCR.
- Validar el modelo estimado por el MREE mediante una ley de control para el seguimiento de una trayectoria.

Los objetivos específicos respecto a la identificación del modelo de un edificio son los siguientes:

- Probar que el MIRE elimina perturbaciones constantes que están presentes en las mediciones de aceleración y atenúa el ruido de medición. Cabe resaltar que la mayoría de los trabajos sobre la identificación de estructuras civiles consideran la presencia de ruido de medición en las mediciones de aceleración pero no consideran perturbaciones constantes.
- Verificar el desempeño del MIRE mediante la identificación de los parámetros del modelo de un edificio de tres grados de libertad. Para ello se simulará el comportamiento de dicha estructura.

En el caso del MIBI se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Mostrar que la parametrización propuesta mediante integrales evaluadas en ventanas de tiempo finito elimina la variable de recuperación del modelo FHN.
- Verificar que la wavelet Daubechies es muy efectiva para atenuar el ruido de medición presente en el potencial de membrana de la neurona.
- Probar que el MIBI puede ser empleado cuando la corriente aplicada a la neurona es discontinua. Esto, a diferencia de un método propuesto recientemente en la literatura y denominado Método de Identificación Basado en Derivadas (MIBD), el cual sólo puede empleado cuando la corriente aplicada a la neurona es continuamente diferenciable.

1.6. Descripción de la tesis

El contenido de esta tesis queda distribuido en cinco Capítulos y se explica a continuación. En el Capítulo 2 se estima el modelo de un servomecanismo controlado en posición. Se presenta el MIRA y el MIA, y se describe un método que permite validar el modelo identificado por cada algoritmo. Además, se muestran los resultados experimentales así como la plataforma sobre la cual se programan los algoritmos de identificación. El Capítulo 3 describe la identificación del modelo de un servo controlado en velocidad. Se presenta el MREE y los parámetros estimados por este método se comparan con los obtenidos por el MCR. También, se validan experimentalmente los modelos estimados por el MREE y por el MCR. En el Capítulo 4 se realiza la identificación del modelo de un edificio; se presenta el MIRE y se describe en detalle la parametrización lineal de la estructura obtenida usando integrales evaluadas en tiempo finito. Además, mediante la simulación de un edificio de tres grados de libertad se evalúa la efectividad del MIRE. El Capítulo 5 presenta lo siguiente: el MIBI utilizado para estimar los parámetros del modelo neuronal FHN, la parametrización de este modelo, y los resultados obtenidos con el MIBI mediante simulaciones numéricas. Además, en el Capítulo 5 se comparan los parámetros estimados por el MIBI con los estimados por el MIBD. Finalmente, en el Capítulo 6 se establecen las conclusiones y las líneas de investigación futuras asociadas a este trabajo.

Capítulo 2

Identificación paramétrica de un servomecanismo de Corriente Directa

En este capítulo se presenta el MIA y el método propuesto MIRA, los cuales identifican cuatro parámetros del modelo de un servomecanismo controlado en posición. También, se muestran los resultados experimentales obtenidos con cada uno de dichos métodos.

2.1. Introducción

Los servomecanismos de Corriente Directa (CD) son utilizados en una gran variedad de aplicaciones industriales que requieren control de velocidad y posición; ejemplos de su aplicación incluyen robots, máquinas herramienta y válvulas de control de procesos. Los parámetros del modelo de un servomecanismo son necesarios para el diseño de controladores que permitan obtener movimientos de alta precisión. Además, el modelo identificado puede ser simulado numéricamente con la finalidad de evaluar el comportamiento del servomecanismo ante diversas entradas. El proceso de estimación de los parámetros del servomecanismo puede llevarse a cabo tanto en lazo abierto como en lazo cerrado. Nótese que el modelo lineal de un servomecanismo controlado en posición tiene una función de transferencia con un polo sobre el eje imaginario; por lo tanto, una entrada acotada en el sistema en lazo abierto no necesariamente produce una salida acotada. Esta característica dificulta su iden-

tificación en lazo abierto razón por la cual es necesario estimar los parámetros del modelo cuando el servomecanismo funciona en lazo cerrado. Este aspecto es crítico si además el servomotor está conectado a algún dispositivo o carga mecánica, por ejemplo, un robot o una máquina herramienta. En tales casos primero es necesario estabilizar al servomecanismo y posteriormente aplicar alguna técnica de identificación.

En [Tan01, Besancon02, Adam02, Tan03a, Kim06, Garrido06, Chen09, Garrido12] se presentan técnicas de identificación en lazo cerrado utilizadas para la estimación de los parámetros de servomecanismos controlados en posición. Las referencias [Tan01, Besancon02, Tan03a, Kim06, Chen09] utilizan un relevador en el lazo de realimentación del servomecanismo para producir ciclos límites estables, tal y como se hace en el caso de procesos industriales con propósitos de sintonización de controladores [Åström94]. La oscilación estable generada por el relevador permite excitar al motor y así identificar sus parámetros. Sin embargo, la sintonización del relevador puede ser difícil y consumir demasiado tiempo. Un enfoque que no utiliza relevador está dado en [Adam02]. En este caso, el lazo se cierra empleando una ley de control Proporcional. Los autores emplean un algoritmo de Mínimos Cuadrados fuera de línea y los parámetros obtenidos son utilizados para el diseño de un controlador robusto. La referencia [Garrido06] presenta una técnica de identificación de tipo error de salida; en este caso, el servomecanismo y un modelo lineal de dos parámetros son controlados simultáneamente mediante una ley de control Proporcional Derivativa (PD), la cual estabiliza trivialmente al servo. En [Garrido12] se emplea un método de identificación de tipo error de entrada basado en la misma idea que en [Garrido06]; sin embargo, en lugar de utilizar el error de salida, el método en esta última referencia emplea el error de entrada e identifica cuatro parámetros de un modelo no lineal del servo.

Técnicas de identificación en lazo cerrado para la identificación de los parámetros de servomecanismos controlados en velocidad se presentan en [Kara04, Fuh07]. La referencia [Kara04] propone una técnica para la identificación de un motor de CD con fricción de Coulomb y zona muerta. En este caso, un algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo discreto y con factor de olvido estima los parámetros usando un modelo de Hammerstein del motor. La técnica presentada en [Fuh07] permite identificar un servomotor usando señales de excitación caóticas; los autores de este artículo concluyen a partir de experimentos con un prototipo de laboratorio que la selección de las señales de excitación tiene un papel fundamental en el procedimiento de identificación.

La referencia [Davila06] presenta un método de identificación de sistemas mecánicos

basado en modos deslizantes de segundo orden. Este método puede ser utilizado para estimar los parámetros de un motor de CD que funcione en lazo abierto o en lazo cerrado. En [Vasanthakumar06] se utilizan varios métodos de identificación para estimar los parámetros de un motor de CD controlado en posición. La identificación de los parámetros se realiza en lazo abierto. En esta referencia se utilizan las técnicas de identificación siguientes: respuesta al escalón, respuesta en frecuencia, Mínimos Cuadrados e identificación subespacial. Basándose en los resultados obtenidos con los diferentes métodos de identificación utilizados se concluye que la mejor técnica de identificación es la de Mínimos Cuadrados.

Es importante mencionar el MIA basado en el Cálculo Operacional y presentado en las referencias [Fliess03, Fliess08b]. El MIA se aplicó en los trabajos [Sira-Ramírez07, Mamani09, Becedas10] para estimar los parámetros de un motor de CD. La referencia [Sira-Ramírez07] utiliza el MIA para identificar un modelo de segundo orden del motor de CD, el cual es controlado en velocidad y está sujeto a perturbaciones constantes. Las referencias [Mamani09, Becedas10] emplean el MIA para la identificación en lazo cerrado de un servomotor de CD controlado en posición. La referencia [Becedas10] presenta un estudio comparativo entre el método tradicional de Mínimos Cuadrados y el MIA. En esta última referencia el algoritmo de Mínimos Cuadrados usa una parametrización obtenida de un modelo discreto del servo; por lo tanto, para obtener los parámetros del modelo en tiempo continuo del servo se necesita una transformación del dominio discreto al continuo. Además, los autores realizan el estudio comparativo mediante simulaciones numéricas.

El MIA tiene varias características interesantes. Aplicando el Cálculo Operacional al modelo de un sistema lineal se eliminan las perturbaciones constantes y el efecto de las condiciones iniciales; además, el MIA filtra el ruido de alta frecuencia. Otro atributo del MIA es que no es un método asintótico y proporciona los parámetros estimados en un período de tiempo corto. Dicho enfoque funciona con casi todas las señales de excitación; sin embargo, un problema es la posibilidad de singularidades en las soluciones de los parámetros estimados, o que estas soluciones correspondan a un cociente de dos números pequeños, lo cual no es deseable normalmente [Narendra89, Ioannou96]. Por ejemplo, si el objetivo del MIA es detectar fallas paramétricas [Isermann11a] en un sistema mediante las desviaciones de los parámetros estimados con respecto a los parámetros nominales, entonces los cambios abruptos de los estimados que ocurren en los instantes de singularidad serían detectados erróneamente como fallas. El artículo [Beltran-Carbajal05] reporta singularidades cuando se identifican los parámetros de un sistema masa-resorte-amortiguador de un grado

de libertad. Recientemente, la referencia [Cortés-Romero11] modificó el MIA, combinándolo con el algoritmo de Mínimos Cuadrados Fuera de Línea (MCFL) para la estimación de los parámetros de un motor de inducción: esta técnica estima los parámetros en un período de tiempo corto y elimina el problema de singularidades si existe la inversa de una matriz que depende del vector regresor [Goodwin77, pág. 24].

Motivados por las características del MIA, en esta tesis se propone un procedimiento de identificación basado en la parametrización utilizada por el MIA y combinada con el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo (MCR). El método propuesto aprovecha las ventajas de dicha parametrización, i.e, elimina el efecto de las perturbaciones constantes permitiendo que el algoritmo de Mínimos Cuadrados produzca estimados sin sesgo; además, al utilizar el MCR no se requiere de la inversión de una matriz, y de esta manera se evita completamente el problema de singularidades. Asimismo, la carga computacional que requiere el MCR es menor que la que requiere el MCFL. El método de identificación propuesto se llama Método de Identificación Recursivo Algebraico y se denota como MIRA. Con respecto a la identificación del modelo de un servomecanismo el MIRA tiene las siguientes características:

- lleva a cabo la identificación paramétrica en lazo cerrado y utiliza un controlador Proporcional Derivativo estándar para cerrar el lazo.
- consiste en dos pasos. En el primer paso identifica la parte lineal del modelo de un servomecanismo, la cual se parametriza mediante dos parámetros; en el segundo paso el MIRA estima una perturbación constante y el coeficiente de la fricción de Coulomb.
- puede ser detenido al final del primer paso. Entonces, el modelo lineal obtenido puede combinarse con una ley de control robusta para compensar la fricción de Coulomb y los pares de perturbación. Algunas leyes de control robusta que podrían compensar dichos pares son: técnica de modos deslizantes [Utkin99] y técnica de atenuación de perturbación basada en modelo [Choi99].

Es importante señalar que al dividir el proceso de identificación del MIRA en dos pasos se pueden utilizar señales de excitación con contenido espectral simple. La identificación de los cuatro parámetros al mismo tiempo demandaría el uso de señales con más riqueza espectral, y por lo tanto, el servo se excitaría con señales más violentas y potencialmente perjudiciales.

2.2. Modelo del servomecanismo de CD

El servomecanismo bajo estudio consiste de un amplificador, de un servomotor de Corriente Directa (CD) con escobillas acoplado a un disco de latón, y de un codificador óptico que mide la posición del motor. Su diagrama de bloques se muestra en la Fig. 2.1

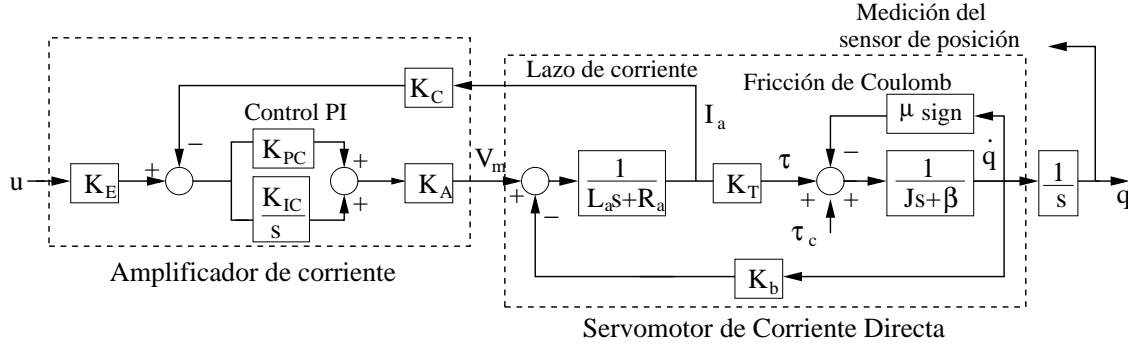


Figura 2.1: Modelo del servomecanismo de CD.

El amplificador está configurado en modo corriente. Esta característica se encuentra en prácticamente la totalidad de los amplificadores industriales y equivale a cerrar un lazo de realimentación mediante una ley de control Proporcional Integral (PI) utilizando la corriente de armadura I_a . La variable u es el voltaje de control, K_E es una ganancia de entrada del amplificador, K_{PC} y K_{IC} son respectivamente las ganancias proporcional e integral del controlador PI del lazo de corriente, K_C es la ganancia de dicho lazo, K_A es la ganancia del puente H del amplificador. Las variables V_m , τ , R_a , L_a , K_T , K_b , J y β son respectivamente el voltaje de entrada del motor, el par aplicado al servo, la resistencia de armadura, la inductancia de armadura, la constante de par, la constante de fuerza contraelectromotriz, la inercia y la fricción viscosa. J es la suma de la inercia del servomotor J_m , la inercia del disco de latón J_d y la inercia del codificador óptico J_e . El parámetro μ representa el coeficiente de fricción de Coulomb y el parámetro τ_c corresponde a perturbaciones constantes o a voltajes constantes parásitos producidos dentro del amplificador. Las variables q y \dot{q} son respectivamente la posición y la velocidad angular del servo. La Tabla 2.1 muestra los valores de los parámetros del servomecanismo; estos valores son obtenidos mediante las hojas de datos del servomotor y del amplificador [Moog, Copleya]. Los parámetros asociados a la fricción de Coulomb y a la perturbación constante no están disponibles en la

hoja de datos del servomotor. Cabe mencionar que en el Apéndice B se presenta el circuito esquemático del amplificador de potencia, en el cual aparecen las ganancias K_E , K_{PC} , K_{IC} , K_A y K_C descritas previamente.

Tabla 2.1: Valores de los parámetros del servomecanismo.

Constante	Valor	Unidades
β	1.784×10^{-3}	(N)(m)(s)/(rev)
K_E	0.64	
K_{PC}	4.7	
K_{IC}	21276.6	s^{-1}
K_C	0.2	V/A
K_A	12	
R_a	4.9	Ω
L_a	12	mH
K_b	2.6389	V/rev/s
K_T	0.42	(N)(m)/(A)
$K = K_E K_T / K_C$	1.344	(N)(m)/(V)
J_m	2.44×10^{-3}	(kg)(m ²)
J_d	6.867×10^{-3}	(kg)(m ²)
J_e	4.3982×10^{-6}	(kg)(m ²)
$J = J_m + J_d + J_e$	9.3113×10^{-3}	(kg)(m ²)

La función del lazo de corriente en la Fig. 2.1 es mantener la corriente de armadura I_a proporcional al voltaje de control u y al par τ aplicado al servomotor. Debido a que la ganancia integral K_{IC} del amplificador tiene un valor elevado, la constante de tiempo eléctrica del servomecanismo es más pequeña que la constante de tiempo mecánica. Por lo tanto, el transitorio debido a la dinámica eléctrica se puede ignorar. Esta simplificación permite obtener el siguiente modelo del servomecanismo

$$J\ddot{q}(t) + \beta\dot{q}(t) + \mu\text{sign}(\dot{q}(t)) = \tau(t) + \tau_c \quad (2.1)$$

donde

$$K = \frac{K_E K_T}{K_C} \quad (2.2)$$

El modelo (2.1) es válido para motores de CD con o sin escobillas si el amplificador que alimenta al servomotor opera en modo corriente [Younkin03]. Defínanse las siguientes relaciones

$$a = \frac{\beta}{J}, \quad b = \frac{K}{J}, \quad c = \frac{\mu}{J}, \quad d = \frac{\tau_c}{J} \quad (2.3)$$

Entonces, la expresión (2.1) se puede reescribir como:

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) - c\text{sign}(\dot{q}(t)) + d \quad (2.4)$$

En el Apéndice A se describe en detalle la obtención del modelo (2.4).

2.3. Primer paso de la identificación

La Fig. 2.2 muestra como el MIA y el MIRA utilizan las señales del servomecanismo para estimar los parámetros a y b que corresponden a la parte lineal del modelo (2.4). El siguiente controlador PD estabiliza el lazo en posición sin el conocimiento de los parámetros del servomecanismo

$$u(t) = k_p(q_r(t) - q(t)) - k_d\dot{q}(t) \quad (2.5)$$

La variable q_r es la señal de referencia del sistema en lazo cerrado.

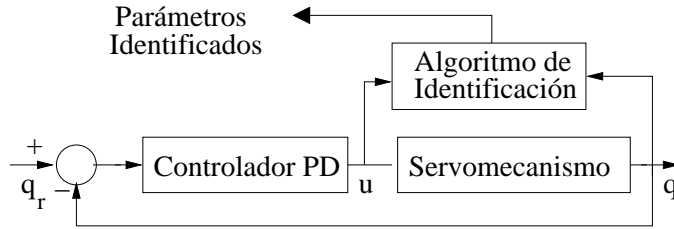


Figura 2.2: Identificación en lazo cerrado.

2.3.1. Método de identificación Algebraico

Para aplicar el MIA supóngase que el motor gira en una dirección. Esta suposición permite escribir la ecuación (2.4) como sigue:

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) + \nu \quad (2.6)$$

Nótese que $\nu = -c + d$ si $\text{sign}(\dot{q}(t))=1$ y $\nu = c + d$ si $\text{sign}(\dot{q}(t)) = -1$. Aplicando el Cálculo Operacional [Fliess03] a la última expresión produce la siguiente parametrización [Mamani09, Becedas10], cuya obtención se describe en detalle en el Apéndice (C)

$$z_1(t) = \phi_{11}(t)a + \phi_{12}(t)b \quad (2.7)$$

donde¹

$$z_1(t) = t^3 q - 9 \int t^2 q + 18 \int^{(2)} t q - 6 \int^{(3)} q$$

$$\phi_{11}(t) = - \int t^3 q + 6 \int^{(2)} t^2 q - 6 \int^{(3)} t q \quad (2.8)$$

$$\phi_{12}(t) = \int^{(2)} t^3 u - 3 \int^{(3)} t^2 u$$

Integrando ambos lados de (2.7) resulta en

$$z_2(t) = \phi_{21}(t)a + \phi_{22}(t)b \quad (2.9)$$

$$z_2(t) = \int_0^t z_1(\tau) d\tau, \quad \phi_{21}(t) = \int_0^t \phi_{11}(\tau) d\tau, \quad \phi_{22}(t) = \int_0^t \phi_{12}(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

Las expresiones (2.7) y (2.9) forman el siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Al resolver (2.11) se obtienen los siguientes estimados de a y b :

$$\hat{a} = \frac{n_{\hat{a}}(t)}{\Phi(t)} = \frac{z_1(t)\phi_{22}(t) - z_2(t)\phi_{12}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)}$$

$$\hat{b} = \frac{n_{\hat{b}}(t)}{\Phi(t)} = \frac{z_2(t)\phi_{11}(t) - z_1(t)\phi_{21}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)} \quad (2.12)$$

Nótese que el determinante $\Phi(t) = 0$ para $t = 0$ y la solución tiene una singularidad, además, $\Phi(t)$ puede ser cero en otros instantes de tiempo. De acuerdo a [Fliess03], para $t > 0$, casi todas las señales u y q satisfacen una condición de trayectoria persistente, es decir, estas señales producen $\Phi(t) \neq 0$.

2.3.2. Método de Identificación Recursivo Algebraico

El MIRA puede utilizar las parametrizaciones (2.7) o (2.9); en esta tesis se utiliza la parametrización (2.7) sin una razón particular. Las integrales que aparecen en

¹ $\int^n \sigma(t)$ representa la integral iterada $\int_0^t \int_0^{\gamma_1} \dots \int_0^{\gamma_{n-1}} \sigma(\gamma_n) d\gamma_n \dots d\gamma_2 d\gamma_1$. Además, se usa la notación $(\int^1 \sigma(t)) = (\int \sigma(t)) = (\int_0^t \sigma(\gamma_1) d\gamma_1)$.

dicha parametrización se reinician cada T_r segundos; esta reinicialización impide que las integrales tomen valores elevados. Nótese que (2.7) también es válida para $t = kT_s$; $k = 0, 1, 2, \dots$, donde T_s es el período de muestreo. Entonces, es posible escribir (2.7) como

$$z_1(kT_s) = \phi_{11}(kT_s)a + \phi_{12}(kT_s)b \quad (2.13)$$

Omitiendo el período de muestreo T_s y definiendo $\phi(k) = [\phi_{11}(k) \ \phi_{12}(k)]^T$ y $\theta = [a \ b]^T$ finalmente resulta en

$$z_1(k) = \phi^T(k)\theta \quad (2.14)$$

El término ϕ se conoce como vector regresor. La parametrización (2.14) permite usar el siguiente algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo discreto [Ljung87, Nelles01]:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + L(k)\epsilon(k)$$

$$L(k) = \frac{P(k-1)\phi(k)}{1 + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)} \quad (2.15)$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1 + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}$$

$$\epsilon(k) = z_1(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k-1)$$

El vector $\hat{\theta}$ es un estimado de θ , $P(k)$ es la matriz de covarianza y $\epsilon(k)$ es el error de estimación. Comparado con el MIA, es claro que MIRA elimina completamente el problema de singularidades pues éstas no aparecen en (2.15). Para que el vector de parámetros estimados θ por el MIRA converja al vector de parámetros reales θ , el vector regresor $\phi(k)$ debe cumplir cualquiera de las siguientes condiciones de excitación persistente (EP) [Goodwin84, Ioannou06], las cuales reemplazan a la condición de trayectoria persistente dada en [Fliess03] para el MIA.

Definición 1 *Un vector $\phi(k) \in \mathbb{R}^n$ satisface una condición de EP débil si*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \sum_{j=1}^k \phi(j)\phi^T(j) = \infty \quad (2.16)$$

donde $\lambda_{\min}[\cdot]$ es el valor propio más pequeño de una matriz.

Definición 2 Un vector $\phi(k) \in R^n$ satisface una condición de EP fuerte si

$$\sum_{j=k}^{k+l-1} \phi(j)\phi^T(j) \geq \alpha_0 l I \quad (2.17)$$

para algún $\alpha_0 > 0$, $l > 1$ y $\forall k \geq 1$. El término I en (2.17) es la matriz identidad.

El tiempo de reinicialización T_r del MIRA es un parámetro de diseño que necesita ser sintonizado. Con base a la experiencia a lo largo de este trabajo este parámetro puede ser seleccionado de 1 a 10s. Con un valor más pequeño de T_r las integrales en (2.8) serían evaluadas en un período más pequeño, lo cual causaría una convergencia lenta de los parámetros estimados \hat{a} y \hat{b} . Además, T_r no debería tomar valores elevados porque si el ruido de medición tiene componentes de baja frecuencia, éstos serían amplificados considerablemente y los parámetros estimados no convergerían a los parámetros verdaderos.

2.4. Segundo paso de la identificación

Los estimados \hat{a} y \hat{b} obtenidos usando el MIA y el MIRA permiten calcular los estimados \hat{c} y \hat{d} de los parámetros restantes c y d mediante la siguiente metodología. Supóngase que después de un tiempo t_0 el MIA y el MIRA proporcionan los estimados \hat{a} y \hat{b} , y defínase la referencia triangular $q_r(t)$ mostrada en la Fig. 2.3

$$q_r(t) = \begin{cases} m(t - t_0) + q_r(t_0), & \text{si } t \in [t_0, t_0 + h] \\ -m[t - (t_0 + 2h)] + q_r(t_0), & \text{si } t \in [t_0 + h, t_f] \end{cases} \quad (2.18)$$

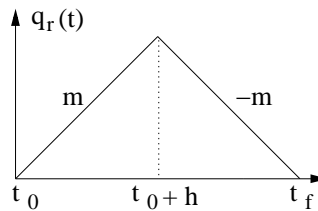


Figura 2.3: Señal de referencia $q_r(t)$ utilizada en el segundo paso de la identificación.

Los términos m y $-m$ corresponden a las pendientes de $q_r(t)$ y $h = \frac{t_f - t_0}{2}$. Si la ganancia de la ley de control PD es suficientemente grande, entonces, en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ se cumplen las igualdades $\dot{q} = m$, $\text{sign}(\dot{q})=1$, $\ddot{q} = 0$. Por lo tanto, el modelo (2.4) en este intervalo de tiempo está dado por

$$c - d = -am + bu(t), \quad t \in [t_0, t_0 + h] \quad (2.19)$$

El modelo estimado correspondiente de (2.19) es

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0, t_0 + h] \quad (2.20)$$

Nótese que en (2.20) se utilizan los estimados \hat{a} y \hat{b} obtenidos previamente en el paso 1.

Equivalentemente, durante el intervalo $[t_0 + h, t_f]$ se cumplen las igualdades $\dot{q}(t) = -m$, $\text{sign}(\dot{q}) = -1$, y $\ddot{q} = 0$. Por lo tanto, el modelo (2.4) está dado por

$$-c - d = am + bu(t), \quad t \in [t_0 + h, t_f] \quad (2.21)$$

El modelo estimado en este intervalo de tiempo es

$$-\hat{c} - \hat{d} = \hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0 + h, t_f] \quad (2.22)$$

Por otro lado, la ecuación (2.20) es equivalente a

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t - h), \quad t \in [t_0 + h, t_f] \quad (2.23)$$

Como a , b , c , y d son constantes, entonces las señales de control $u(t)$ y $u(t - h)$ en (2.19) y en (2.21) también son constantes. Defínase

$$u_m = u(t - h), \quad u_{-m} = u(t), \quad t \in [t_0 + h, t_f] \quad (2.24)$$

Empleando esta definición y resolviendo para \hat{c} y \hat{d} usando (2.22) y (2.23) finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{c} &= -[\hat{a}m + \hat{b}u_m + \hat{d}] \\ \hat{d} &= -\frac{\hat{b}[u_m + u_{-m}]}{2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.5. Validación del modelo

La validación de los modelos identificados por el MIA y por el MIRA se realiza mediante el diseño una ley de control calculada con base a este modelo. El objetivo de la ley de control es el seguimiento de una trayectoria. La Fig. 2.4 muestra el sistema de control para el seguimiento de una trayectoria, donde r es la trayectoria y $\varepsilon = r - q$ es el error de seguimiento. El error ε se muestrea p veces y el valor de cada muestra ε_i de ε se utiliza para calcular el error cuadrático

$$E = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i^2$$

el cual es una medida de la calidad de seguimiento.

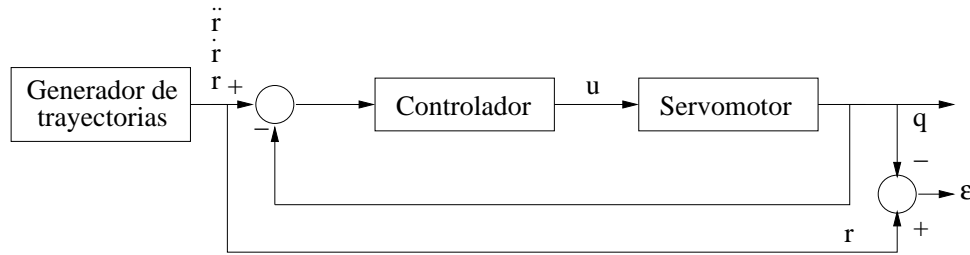


Figura 2.4: Sistema de control para el seguimiento de una trayectoria.

2.5.1. Ley de control

La siguiente expresión define la ley de control aplicada al servomecanismo

$$u(t) = \frac{1}{\hat{b}} [\lambda_1 \dot{\varepsilon}(t) + \lambda_2 \varepsilon(t) + \ddot{r}(t) + \hat{a}\dot{q}(t) + \hat{c}\text{sign}(\dot{q}(t)) - \hat{d}] \quad (2.26)$$

Los parámetros λ_1 , λ_2 son constantes positivas. El objetivo de (2.26) es compensar los efectos de la fricción viscosa y de la fricción Coulomb, así como el efecto de la perturbación constante. Sumando y restando $\hat{b}u$ a $\ddot{\varepsilon}(t) = \ddot{r}(t) - \ddot{q}(t)$ y usando (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}(t) &= \ddot{r}(t) - \ddot{q}(t) + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \\ &= \ddot{r}(t) + a\dot{q}(t) - bu(t) + c\text{sign}(\dot{q}(t)) - d + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sustituyendo la ley de control (2.26) en la ecuación anterior produce la siguiente dinámica del error

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \lambda_1 \dot{\varepsilon}(t) + \lambda_2 \varepsilon(t) = \tilde{\theta}^T \psi(t) \quad (2.28)$$

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{b} - b \\ \hat{c} - c \\ \hat{d} - d \end{pmatrix}, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} -\dot{q}(t) \\ u(t) \\ -\text{sign}(\dot{q}(t)) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Si $\tilde{\theta}$ es igual a cero, entonces la ley de control cancela la fricción y los pares de perturbación, y como consecuencia el error ε tendrá una convergencia exponencial a cero. Si el error de seguimiento ε no es cero, entonces el error cuadrático E será una medida de la cercanía a cero del error paramétrico $\tilde{\theta}$.

2.6. Resultados experimentales

El prototipo de laboratorio (Fig. 2.5) consiste de un servomotor de la marca Moog, modelo C34-L80-W40 [Moog] y es energizado por un amplificador de potencia Copley Controls, modelo 423 [Copleya], configurado en modo corriente. La posición angular del motor se mide por medio de un codificador óptico BEI, modelo L15 cuya resolución es de 2500 pulsos por revolución. Los algoritmos de identificación son implementados usando el software Matlab-Simulink operando bajo el programa WINCON de Quanser Consulting. La adquisición de datos se lleva a cabo a través de una tarjeta Q8 también de Quanser Consulting. La electrónica asociada a la tarjeta Q8 multiplica por 4 la resolución del decodificador óptico. La programación se realiza en una computadora con procesador Intel Core 2, y la tarjeta Q8 se localiza en un puerto PCI de la computadora. Un aislador galvánico aísla eléctricamente las señales de la tarjeta de adquisición de datos de las del amplificador.

Para evaluar las integrales que aparecen en las señales z_i y en los regresores ϕ_{ij} , $i, j = 1, 2$ de (2.7) y de (2.9) se emplea el método de integración trapezoidal [Sagara90, Ellis00]. El período de muestreo es de $T_s = 1\text{ms}$ y el tiempo empleado para reinicializar las integrales del MIRA es $T_r = 5\text{s}$. El valor inicial de la matriz de covarianza del algoritmo de Mínimos Cuadrados usado por el MIRA es $P(0) = \text{diag}(10000, 10000)$.

Las ganancias del controlador PD son $k_p = 10$ y $k_d = 0.34$. El siguiente filtro lineal pasa altas

$$G(s) = \left(\frac{220s}{s + 220} \right) \quad (2.30)$$

estima la velocidad del servomotor a partir de mediciones de la posición. La transformación bilineal convierte el filtro (2.30) con variable s en el siguiente filtro en tiempo discreto con

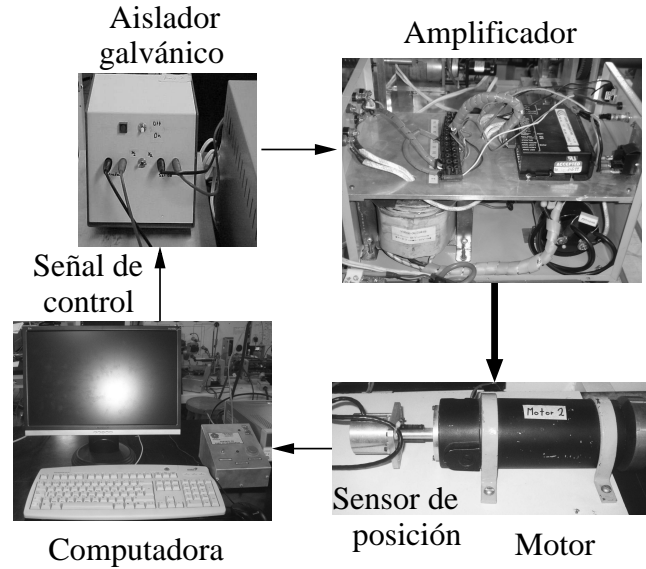


Figura 2.5: Prototipo de laboratorio.

variable z

$$G(z) = \left(\frac{198.2z - 198.2}{z - 0.8018} \right)$$

Para ello se utiliza el período de muestreo T_s definido anteriormente.

En lo que sigue se utilizará la notación (rev) para indicar revoluciones del eje del motor. La Fig. 2.6 (a) muestra la señal de excitación $q_r(t)$ empleada durante los experimentos. En el intervalo de tiempo 0-10s la señal de excitación está dada por $q_r = 11t + 4\sin(0.8\pi t) + 0.25\sin(1.6\pi t)$. En este intervalo de tiempo se realiza la identificación de los parámetros a y b del servomecanismo. Nótese que el término $11t$ es una rampa y ocasiona que el término $\text{sign}(\dot{q}(t))$ sea constante ya que el servo gira en una sola dirección. Por otro lado, la señal $4\sin(0.8\pi t) + 0.25\sin(1.6\pi t)$ tiene riqueza espectral suficiente para identificar los parámetros a y b del modelo del servo; i.e., esta señal satisface una condición de riqueza suficiente [Sastrey89] y por lo tanto produce un vector regresor ϕ que satisface la condición de EP en (2.16); además, dicha señal sinusoidal es suave y no provoca señales de control bruscas. La Fig. 2.6 (a) también muestra la señal $q(t)$; la diferencia entre las señales $q_r(t)$ y $q(t)$ es menor a 0.8 (rev) y no puede observarse en dicha figura

La ecuación (2.18) define la señal de excitación para el intervalo de tiempo 10-20s, en el cual se estiman los parámetros c y d . Los parámetros de esta ecuación son $t_0=10s$,

$t_f=20s$, $h=5s$ y $m=11$. Las Figuras 2.6 (b) y 2.6 (c) muestran respectivamente la velocidad del servomotor $\dot{q}(t)$ y la señal de control $u(t)$ obtenida al aplicar la señal de excitación $q_r(t)$. Los valores u_m y u_{-m} de la señal de control definidos en (2.24) y utilizados en (2.25) son respectivamente 0.03 y -0.054 volts (V).

La Fig. 2.7 muestra la evolución de los parámetros estimados por el MIA. En el intervalo de tiempo 0-0.5s se asignó a los estimados \hat{a} , \hat{b} el valor de 1, debido al problema de singularidad que presenta el MIA en $t = 0$. Estos convergen a valores constantes en el intervalo de tiempo 3.5-4s; sin embargo, dichos estimados varían bruscamente después de 4s y tienen valores elevados cerca de $t=5.478s$, $t=5.6625s$, $t=8.156s$ y $t=8.4464s$. Este comportamiento ocurre debido a que el determinante $\Phi(t)$ en (2.12) tiene un valor cercano a cero en estos instantes de tiempo. Nótese que \hat{a} y \hat{b} pueden tener un comportamiento libre de cambios bruscos con otras señales de referencia $q_r(t)$ diferentes a la mostrada en la Fig. 2.6 (a). Los parámetros \hat{a} y \hat{b} estimados en $t=4s$ junto con (2.25) permiten obtener $\hat{c}=3.9738$ y $\hat{d}=1.7388$.

La Fig. 2.8 presenta la evolución en el tiempo de los parámetros estimados por el MIRA. Los estimados \hat{a} y \hat{b} del MIRA convergen a valores constantes después de 3.5s, y además no presentan un cambios bruscos como los estimados \hat{a} y \hat{b} del MIA. Los estimados \hat{c} y \hat{d} del MIRA se obtuvieron al utilizar los parámetros \hat{a} y \hat{b} identificados en $t=4s$. Los valores de estos estimados son $\hat{c} = 3.9322$ y $\hat{d} = 1.7442$. La Fig. 2.8 (c) muestra la evolución en el tiempo de Ω_k para $k = 10000$. Nótese, que el regresor $\phi(k)$ debe satisfacer la condición de EP (2.16) cuando k tiende a infinito, lo cual no se puede verificar en la práctica. Sin embargo, en la Fig. 2.8 (c) se muestra que Ω_k crece conforme k se incrementa, este comportamiento indica que la matriz $P(k)$ decrece conforme k se incrementa y que los parámetros estimados convergen a los parámetros verdaderos [Landau11].

El MIA y el MIRA identificaron los parámetros del servo en el intervalo de tiempo 0-20s; no obstante, ambos métodos pueden identificar estos parámetros en un intervalo de tiempo más corto. Por ejemplo, la estimación de a y de b pudo haberse llevado a cabo en el intervalo de tiempo 0-4s en lugar del intervalo 0-10s. Sin embargo, para mostrar el problema de singularidades del MIA estos parámetros fueron estimados hasta un intervalo de 10s. Por otro lado, los estimados \hat{c} y \hat{d} de cada método pueden ser obtenidos en un tiempo menor al reducirse el valor del parámetro h en (2.18).

Los modelos identificados mediante el MIA y el MIRA se utilizan para calcular la ley de control (2.26) donde $\lambda_1 = 10$ y $\lambda_2 = 25$. La Fig. 2.9 (a) muestra la trayectoria $r(t)$

usada para la validación de los modelos. Además, las Figuras 2.9 (b) y 2.9 (c) presentan el error de seguimiento de trayectoria $\varepsilon(t)$ obtenido cuando la ley de control (2.26) se calcula usando los parámetros obtenidos por el MIA y por el MIRA, respectivamente.

La Tabla 2.2 resume los parámetros estimados por el MIA y el MIRA, y muestra el error cuadrático E calculado con $p=18,000$. Las muestras del error de seguimiento $\varepsilon(t)$ se adquirieron en el intervalo de tiempo 2-20s, debido a que después de 2s el error $\varepsilon(t)$ converge a una vecindad cercana a cero. Esta Tabla también muestra los parámetros nominales del servomecanismo, los cuales son obtenidos al sustituir los valores de la Tabla 2.1 en la ecuación (2.3). Los resultados experimentales indican que los parámetros producidos por ambos métodos son similares a los parámetros nominales \hat{a} and \hat{b} . Además, el error cuadrático E es similar para ambos métodos.

Finalmente, la Tabla 2.3 presenta los errores medios cuadráticos E obtenidos en los siguientes tres casos: cuando $\hat{c} = \hat{d} = 0$, $\hat{d} = 0$ y $\hat{c} = 0$; donde los parámetros diferentes de cero en cada caso son los identificados por el MIRA. Al comparar las Tablas 2.2 y 2.3 se observa que el valor más pequeño de E se obtiene cuando todos los parámetros estimados \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} and \hat{d} son utilizados en la ley de control (2.26).

2.7. Resumen

El MIA y el MIRA identifican en dos pasos los cuatro parámetros del modelo de un servomecanismo de CD controlado en posición. En el primer paso, los algoritmos identifican la parte lineal del modelo; en el segundo paso, se utilizan los parámetros obtenidos en el paso 1 para estimar una perturbación constante y el coeficiente de fricción de Coulomb. Los resultados experimentales muestran que en ciertos instantes de tiempos el MIA produce valores elevados de los parámetros estimados; este comportamiento se debe a que el determinante empleado para solucionar un conjunto de ecuaciones simultaneas es cercano a cero. Por otro lado, el MIRA está libre de singularidades. Ambos métodos estiman parámetros similares a los obtenidos usando la hoja de datos del motor y del amplificador. La validación del modelo identificado por el MIA y la del modelo estimado por el MIRA se realizó mediante el diseño una ley de control para el seguimiento de una trayectoria. Los resultados experimentales indican que el error de seguimiento obtenido con cada uno de los dos modelos es muy pequeño, lo cual permite concluir que los parámetros estimados son muy cercanos a los parámetros reales. El MIRA también podría ser empleado para identificar parámetros

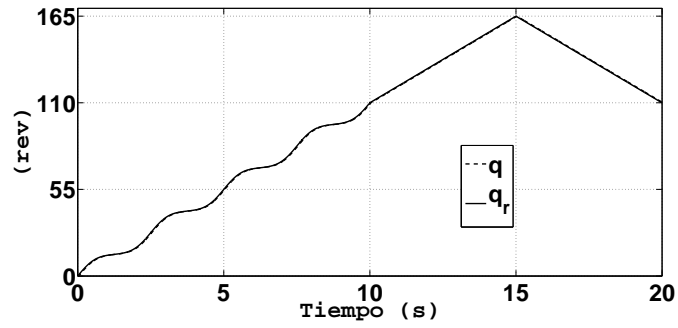
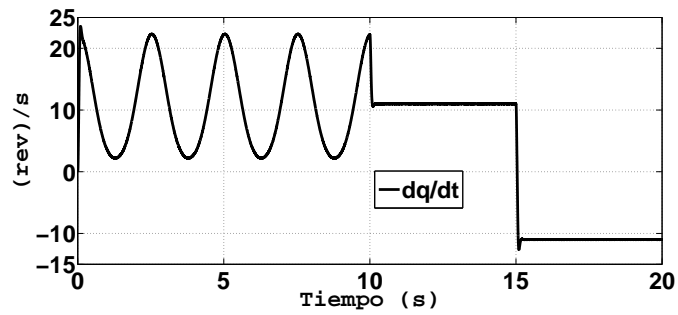
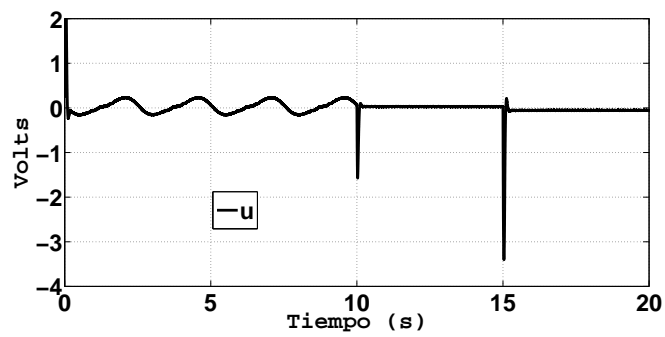
variantes en el tiempo, i.e., el MIRA podría identificar cambios en la fricción viscosa y cambios en la ganancia del amplificador del servo; la única modificación que se tendría que hacer al MIRA para que identificará dichos cambios paramétricos sería la reinicialización de la matriz de ganancia $P(k)$ [Goodwin84]. Por otro lado, el MIRA también puede utilizarse para identificar robots manipuladores [Yoon10] y exoesqueletos [Perry07]; en estos casos el servomecanismo se conecta a la carga mediante cajas de engranes, y es posible aplicar una señal de excitación rampa sin producir movimientos grandes en la carga.

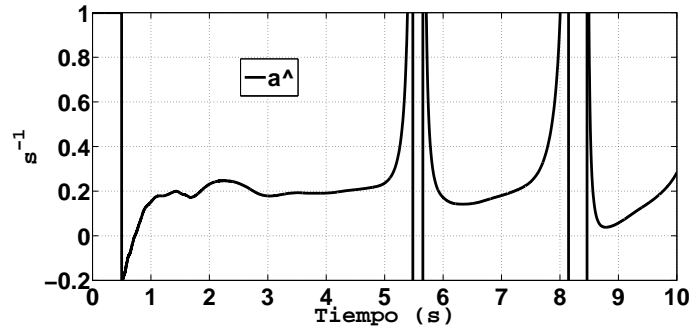
Tabla 2.2: Parámetros identificados.

	\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}	E
Parámetros nominales	0.1916	144.34	—	—	—
MIA	0.1912	144.9	3.9738	1.7388	4.9280
MIRA	0.1975	145.35	3.9322	1.7442	5.0686

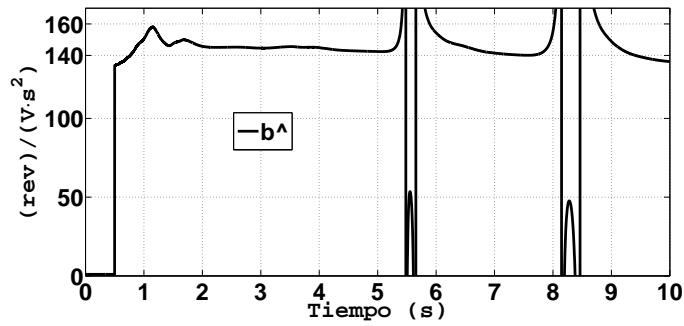
Tabla 2.3: E obtenido con los estimados del MIRA.

\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}	E
0.1975	145.35	0	0	17.1336
0.1975	145.35	0	1.7442	15.8823
0.1975	145.35	3.9322	0	7.5595

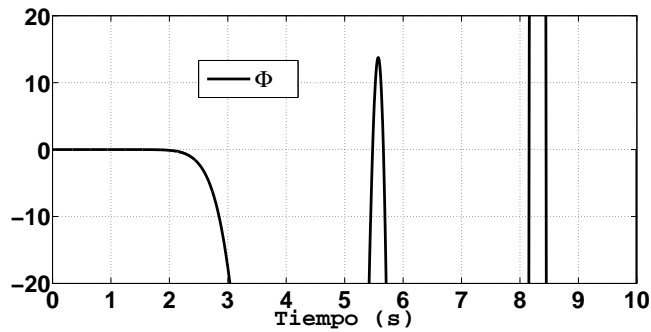
(a) $q_r(t)$ y $q(t)$.(b) $\dot{q}(t)$.(c) $u(t)$.Figura 2.6: Señales $q(t)$, $\dot{q}(t)$ y $u(t)$.



(a) \hat{a} .



(b) \hat{b} .



(c) Φ .

Figura 2.7: Evolución de los parámetros estimados por el MIA y del determinante Φ de la ecuación (2.12).

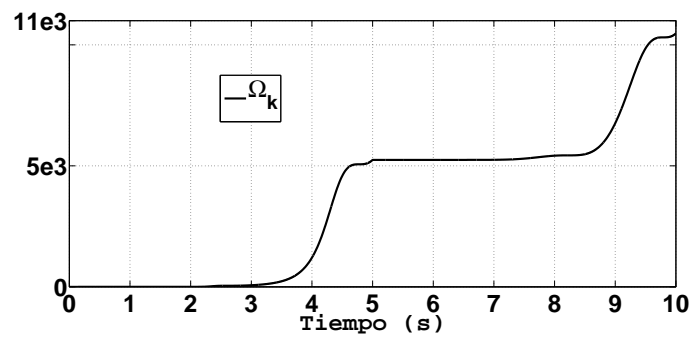
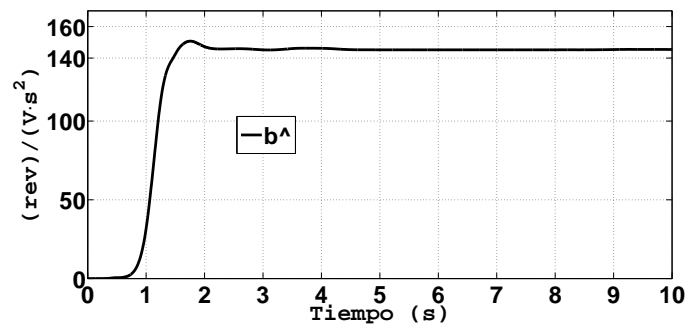
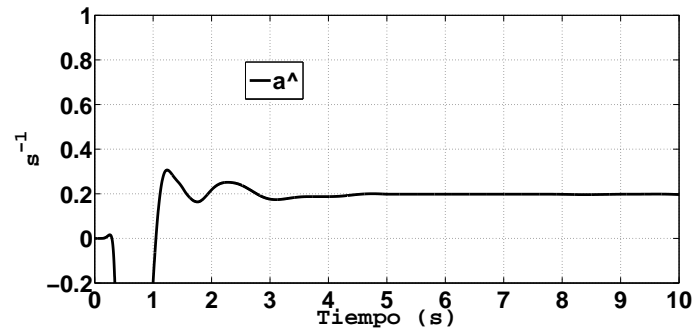
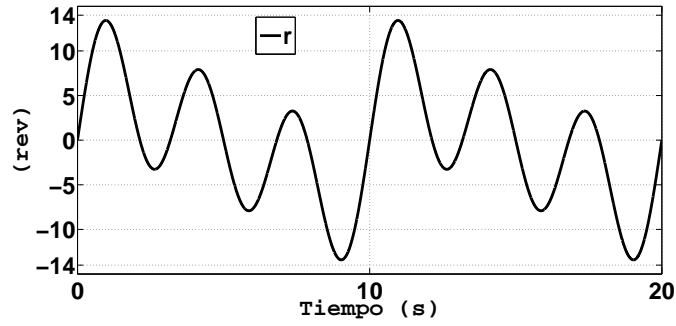
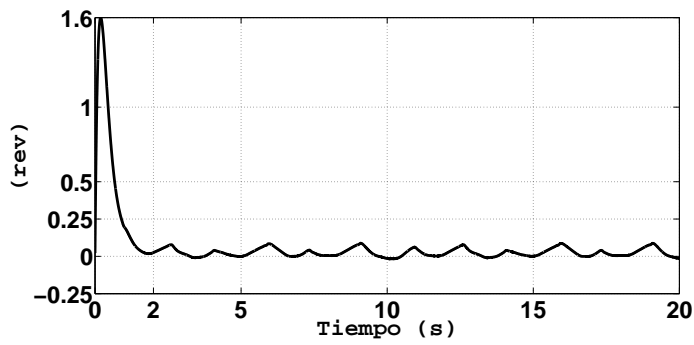


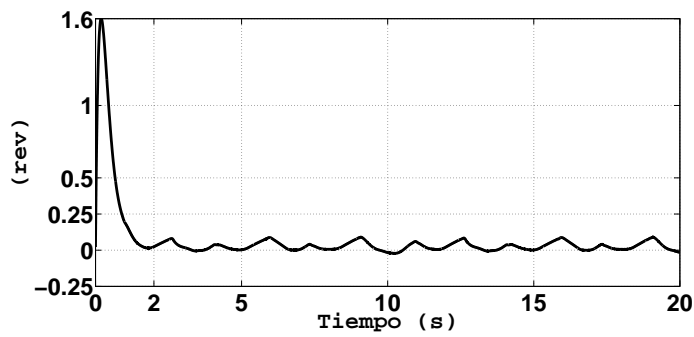
Figura 2.8: Evolución de los parámetros estimados por el MIRA y Ω_k en (2.16).



(a) Trayectoria r .



(b) Error ε correspondiente a los estimados por el MIA.



(c) Error ε correspondiente a los estimados por el MIRA.

Figura 2.9: Trayectoria r y errores de seguimiento ε .

Capítulo 3

Estimación de la inercia y de la fricción de un servo controlado en velocidad usando mediciones de su posición

En este capítulo se presenta el método propuesto MREE que estima los parámetros de un servo controlado en velocidad utilizando las respuestas en estado estacionario del servo producidas por velocidades de referencia constantes y sinusoidales. El control de velocidad se lleva a cabo empleando sólo mediciones de la posición del servo.

3.1. Introducción

La estimación de la fricción y de la inercia de servomecanismos ha sido de interés en los años recientes. Las técnicas adaptables se utilizan ampliamente para la identificación de dichos parámetros [Tan03b, Chaturvedi06a, Chaturvedi06b, Xie07]; en estas técnicas el algoritmo que estima la inercia es un elemento de un sistema en lazo cerrado adaptable; dichas técnicas necesitan satisfacer una condición de excitación persistente para garantizar que el estimado de la inercia converge al valor real de la inercia. Por otro lado, las técnicas basadas en observadores tales como el filtro de Kalman y observadores de incertidumbre también se han utilizado en varias referencias relacionadas con

la identificación paramétrica de servos [Awaya92, Fujita92, Kobayashi95, Kim96, Hong96, Lee04, Yang05, Choi06, Lee07, Li09, Huang10, Du11]. Las referencias [Kwon06, Jee12] utilizan el principio de ortogonalidad propuesto en [Li09] para la estimación de la inercia. Métodos de optimización y particularmente el algoritmo de Mínimos Cuadrados se utilizan en [Canudas97, Elhami97, Kweon99, Tafazoli99, Villwock08, Brancati10] para estimar los parámetros de la inercia y de la fricción de servos. Al igual que los algoritmos de identificación adaptable, el método de Mínimos Cuadrados necesita satisfacer una condición de excitación persistente para garantizar la convergencia paramétrica. Las referencias [Chen02, Villwock08, Kong12] reportan métodos de identificación basados en la respuesta en frecuencia. En [Villwock08], los autores combinan el método Welch de la respuesta en frecuencia con el algoritmo de optimización de Levenberg-Marquard. Los métodos presentados en [Besancon02, Kim06, Chen09] utilizan un relevador en el lazo de realimentación del servo para producir ciclos límites estables, los cuales son empleados para identificar los parámetros de la fricción. Técnicas de inteligencia computacional como algoritmos genéticos y redes neuronales se han empleado en [Sediki12] para la identificación de los parámetros de un servo y en [Iwasaki05] para la estimación de modelos lineales de sistemas mecatrónicos. Una técnica diferente a las anteriores y que emplea la energía cinética se presenta en [Babau07]; esta técnica estima la energía cinética de máquinas de inducción, la cual posteriormente se usa para calcular su momento de inercia.

En la literatura también se presentan métodos de identificación basados en la respuesta en estado estacionario del servo ante entradas tradicionales como constantes, rampas y sinusoides. Una ventaja de utilizar dichas entradas es que no producen vibraciones en el servo. La referencia [Kelly00] aplica un par creciente con forma de rampa a un servo controlado en lazo abierto para estimar los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb. La técnica descrita en [Canudas97] emplea señales constantes y sinusoidales, las cuales se combinan con el método Simplex para estimar los parámetros del modelo de fricción LuGre [Canudas95]. En la referencia [Andoh07b] el autor aplica una señal periódica al servo y propone una fórmula simple que permite calcular la inercia; dicha fórmula es el valor promedio del producto del par de referencia y de la posición del servo; esta referencia supone que el modelo del servo no contiene fricción de Coulomb. La referencia [Andoh07a] describe otro método interesante que utiliza señales sinusoidales para excitar a un servomecanismo controlado en posición; esta referencia estima la inercia suponiendo conocimiento previo de una cota inferior de la inercia e ignorando los efectos debidos a los pares de fricción viscosa

y de Coulomb.

En este capítulo se propone un método de identificación que consiste en dos pasos, el cual se llama Método basado en la Respuesta en Estado Estacionario y se denota como (MREE). Este método requiere de cálculos numéricos simples, y utiliza las respuestas en estado estacionario de un servomecanismo controlado en velocidad y excitado mediante señales de referencia constantes y sinusoidales. El primer paso del método emplea tres velocidades de referencia constantes para identificar los coeficientes de fricción viscosa de Coulomb y una perturbación constante. El segundo paso del método estima la inercia del servo utilizando como velocidad de referencia una señal sinusoidal más una señal constante; además, el segundo paso emplea el coeficiente de fricción viscosa estimado en el primer paso. Las señales de referencia empleadas por el MREE no producen altos niveles de vibración en el servo en comparación con las señales de referencia aleatorias que utiliza típicamente el algoritmo de Mínimos Cuadrado Recursivo (MCR). Un controlador Proporcional Integral (PI), el cual se alimenta sólo con mediciones de la posición del servo y de la velocidad de referencia, estabiliza el lazo en velocidad sin el conocimiento de los parámetros del servo. En contraste con la referencia [Andoh07a], el MREE no requiere del conocimiento previo de la inercia.

3.2. Modelo del servo y plataforma experimental

El servomecanismo que se estudia en este capítulo consiste de un servomotor de CD sin escobillas conectado a un disco de latón, de un servoamplificador que opera en modo corriente, y de un decodificador óptico. El modelo del servomecanismo de CD sin escobillas es el mismo que el modelo del servo de CD con escobillas dado en (2.1), y se vuelve a mostrar a continuación

$$J\ddot{q}(t) + \beta\dot{q}(t) + \mu\text{sign}(\dot{q}(t)) = \tau(t) + \tau_c, \quad \tau(t) = Ku, \quad K = \frac{K_E K_T}{K_C} \quad (3.1)$$

En la Sección 2.2 se definen cada uno de los parámetros de dicho modelo; la ganancia K se supone conocida. La Tabla 3.1 presenta el valor de los parámetros del servomecanismo de CD sin escobillas, los cuales se obtuvieron mediante la hoja de datos del servomotor y la del servoamplificador. Los parámetros β , μ y τ_c no se encuentran disponibles en dichas hojas de datos.

Tabla 3.1: Valores nominales de los parámetros del servomecanismo.

Constante	Valor	Unidades
K_E	1	
K_C	0.5	V/A
K_T	0.2417	(N)(m)/(A)
$K = K_E K_T / K_C$	0.4834	(N)(m)/(V)
J_m	8.2938×10^{-4}	(kg)(m ²)/rev
J_d	6.02×10^{-3}	(kg)(m ²)/rev
$J = J_m + J_d$	6.85×10^{-3}	(kg)(m ²)/rev

Mediante las siguientes relaciones

$$a = \frac{\beta}{J}, \quad c = \frac{\mu}{J}, \quad d = \frac{\tau_c}{J}, \quad e = \frac{1}{J} \quad (3.2)$$

se puede reescribir el modelo (3.1) como

$$\ddot{q}(t) + a\dot{q}(t) + c\text{sign}(\dot{q}(t)) = e\tau(t) + d \quad (3.3)$$

El prototipo de laboratorio se muestra en la Fig. 3.1. El servomotor y el amplificador son de la Marca Copley Controls, modelos CBL233BE-001 y 5224AC [Copleyb, Copleyc], respectivamente; además, el decodificador óptico tiene 4000 pulsos por revolución. El amplificador del servo de CD sin escobillas utiliza un controlador PI para cerrar el lazo de la corriente de armadura, y su circuito esquemático es similar al del amplificador del servo de CD con escobillas mostrado en el Apéndice B. Para implementar el MREE se utiliza la computadora y tarjeta de adquisición de datos descritos en la Sección 2.6. Además, todos los algoritmos de identificación y de control descritos en este Capítulo se programaron utilizando Matlab-Simulink, y un período de muestreo T_s de 0.1ms.

3.3. Control de velocidad usando mediciones de posición

Considérese el sistema en lazo cerrado mostrado en la Fig. 3.2, donde la velocidad del servo \dot{q} se controla usando mediciones de posición q . El objetivo de control es que \dot{q} sea igual a la velocidad deseada \dot{q}_d , la cual se supone diferenciable con respecto del tiempo. El siguiente controlador estabiliza el lazo sin el conocimiento de los parámetros del servomecanismo

$$\tau = K_P \dot{\xi} + K_I \xi \quad (3.4)$$

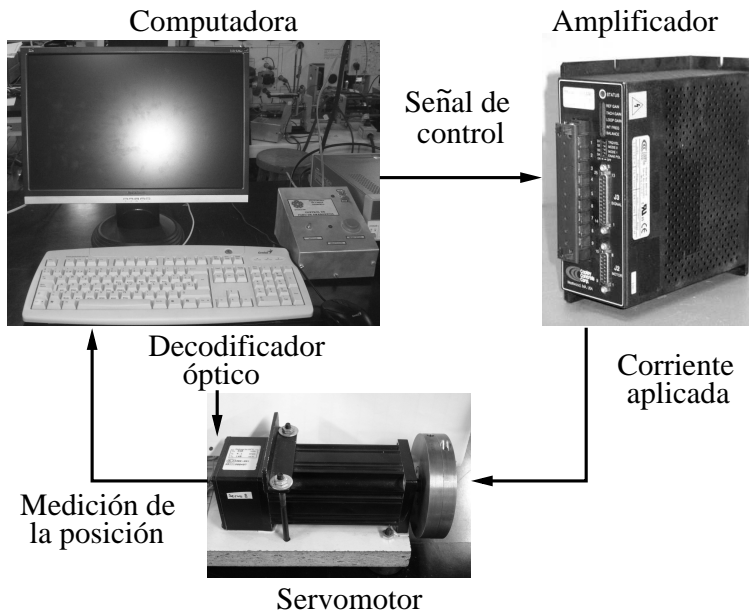


Figura 3.1: Plataforma de experimentación.

donde K_P y K_I son ganancias positivas. La variable $\dot{\xi}$ se considera un estimado del error de velocidad \dot{q} definido como:

$$\dot{q} = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (3.5)$$

La señal ξ es la integral de $\dot{\xi}$, por lo tanto, el controlador τ en (3.4) es un Proporcional Integral (PI), donde la acción proporcional corresponde a $K_P \dot{\xi}$ y la acción integral corresponde a $K_I \xi$.

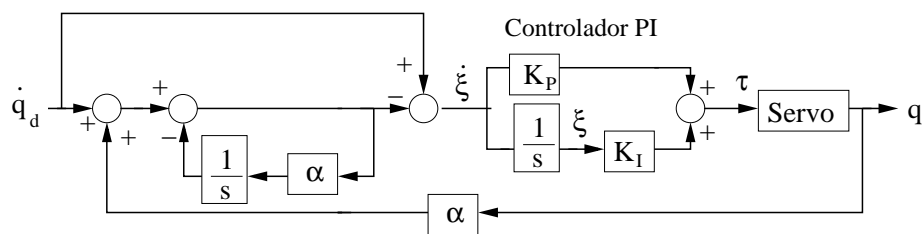


Figura 3.2: Control de velocidad usando mediciones de posición.

3.3.1. Análisis de estabilidad del sistema de control

La siguiente expresión en el dominio de la frecuencia se obtiene del sistema en lazo cerrado mostrado en la Fig. 3.2:

$$\mathcal{L}[\vartheta] = \frac{s}{s + \alpha} \mathcal{L}[\alpha q + \dot{q}_d] \quad (3.6)$$

donde \mathcal{L} es el operador de la transformada de Laplace.

La ecuación (3.6) en el dominio del tiempo está dada por

$$\dot{\vartheta} = -\alpha\vartheta + \alpha\dot{q} + \ddot{q}_d \quad (3.7)$$

De la Fig. 2.1 también se tiene la siguiente expresión

$$\dot{\xi} = \dot{q}_d - \vartheta \quad (3.8)$$

Tomando la derivada en el tiempo de (3.8) resulta en

$$\ddot{\xi} = \ddot{q}_d - \dot{\vartheta} \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.7) en (3.9) produce

$$\ddot{\xi} = \alpha[\vartheta - \dot{q}] \quad (3.10)$$

Si la variable ϑ en (3.8) se reemplaza en (3.10) se obtiene

$$\ddot{\xi} = -\alpha[\dot{\xi} - \dot{q}_d + \dot{q}] \quad (3.11)$$

Usando (2.7), la ecuación (3.11) puede ser reescrita como:

$$\ddot{\xi} = -\alpha[\dot{\xi} - \dot{q}] \quad (3.12)$$

Por otro lado, sustituyendo la ley de control (3.4) en el modelo del servomecanismo (3.3) resulta en

$$\ddot{q} + a\dot{q} + c\text{sign}(\dot{q}) = eK_P\dot{\xi} + eK_I\xi + d \quad (3.13)$$

Sumando y restando los términos \ddot{q}_d y $a\dot{q}_d$ a la ecuación anterior y usando (3.5) produce

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d + a\dot{q}_d - a\dot{q} - eK_P\dot{\xi} - eK_I\xi + c\text{sign}(\dot{q}) - d \quad (3.14)$$

Las ecuaciones (3.12) y (3.14) forman la siguiente expresión en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ -eK_I & -eK_P & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (3.15)$$

$$v = \ddot{q}_d + a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}) - d$$

La ecuación (3.15) tiene la forma

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (3.16)$$

El sistema (3.16) es estable si las raíces de la ecuación característica de A , que es $\det(sI - A) = 0$, tienen parte real negativa [Dorf98]. Defínase

$$p(s) = \det(sI - A) \quad (3.17)$$

La ecuación característica de A está dada por

$$p(s) = s^3 + (a + \alpha)s^2 + (\alpha a + \alpha eK_P)s + \alpha eK_I = 0 \quad (3.18)$$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz [Dorf98] a (3.18) se obtienen las siguientes condiciones que garantizan que las raíces de este polinomio tienen parte real negativa

$$(a + \alpha) > 0, \quad \alpha eK_I > 0 \quad (3.19)$$

$$(a + \alpha)(a + eK_P) > eK_I \quad (3.20)$$

Las dos desigualdades en (3.19) se satisfacen porque todos los parámetros que aparecen en ellas son positivos. La desigualdad (3.20) se cumple si

$$K_P > \frac{K_I}{\alpha} \quad (3.21)$$

Nótese que esta condición no depende de los parámetros del servo. La Tabla 3.2 muestra las ganancias K_P , K_I y α empleadas para todos los experimentos descritos en este Capítulo. Cabe mencionar que los dos integradores que aparecen en la Fig. 3.2 se implementan mediante el método numérico de integración trapezoidal [Ellis00].

Tabla 3.2: Ganancias K_P , K_I y α utilizadas en los experimentos.

Constante	Valor
K_P	K=0.4834
K_I	5K=2.417
α	50

3.4. Primer paso del MREE: estimación de β , μ y τ_c

Para estimar los parámetros β , μ y τ_c usando el método propuesto MREE se utiliza la respuesta en estado estacionario del sistema en lazo cerrado producida por una secuencia de tres velocidades de referencia constantes. Las siguientes párrafos presentan las condiciones que deben satisfacer dichas velocidades de referencia para poder estimar los parámetros β , μ y τ_c . Para empezar considere lo siguiente:

Suposición 1 *El sistema (3.16) es estable, i.e., las ganancias K_P y K_I del controlador en (3.4) y α en (3.6) satisfacen (3.21).*

Si la referencia \dot{q}_d es constante; entonces v en (3.15) toma el valor constante v_{ss} dado por

$$v_{ss} = a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}) - d \quad (3.22)$$

donde $\text{sign}(\dot{q})$ puede ser 1 o -1.

La transformada de Laplace de v es la siguiente

$$V(s) = \frac{v_{ss}}{s} \quad (3.23)$$

Por otro lado, la transformada de Laplace $X(s)$ de x en (3.16) tiene la siguiente expresión

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BV(s) \quad (3.24)$$

donde $X(s) = \left[\mathcal{L}[\xi], \mathcal{L}[\dot{\xi}], \mathcal{L}[\ddot{q}] \right]^T$.

De acuerdo al teorema del valor final [Dorf98], el estado estacionario $x_\star = \left[\xi_\star, \dot{\xi}_\star, \ddot{q}_\star \right]^T$ de x se obtiene mediante

$$x_\star = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (3.25)$$

La respuesta en x debido a las condiciones iniciales $x(0)$ converge exponencialmente a cero, entonces

$$x_\star = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI - A)^{-1}BV(s) \quad (3.26)$$

El término $(sI - A)^{-1}B$ está dado por

$$(sI - A)^{-1}B = \left[\frac{\alpha}{p(s)}, \frac{\alpha s}{p(s)}, \frac{(s + \alpha)s}{p(s)} \right]^T \quad (3.27)$$

donde $p(s)$ se define en (3.18). Sustituyendo (3.23) y (3.27) en (3.26) resulta en

$$[\xi_*, \dot{\xi}_*, \dot{q}_*]^T = \left[\frac{v_{ss}}{eK_I}, 0, 0 \right]^T \quad (3.28)$$

Como \dot{q} converge a cero, \dot{q} converge a \dot{q}_d . Por lo tanto, en estado estacionario se tiene de (3.28) lo siguiente:

$$a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}_d) - d = eK_I\xi_* \quad (3.29)$$

Sustituyendo a , c , d y e de (3.2) en la ecuación (3.29) se obtiene

$$\beta\dot{q}_d + \mu\text{sign}(\dot{q}_d) - \tau_c = K_I\xi_* \quad (3.30)$$

Las referencias constantes \dot{q}_{d1} , \dot{q}_{d2} y \dot{q}_{d3} producen respectivamente las señales en estado estacionario ξ_{1*} , ξ_{2*} , y ξ_{3*} . Entonces, se obtienen las siguientes tres ecuaciones

$$\beta\dot{q}_{di} + \mu\text{sign}(\dot{q}_{di}) - \tau_c = K_I\xi_{i*} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.31)$$

Las expresiones en (3.31) pueden escribirse como

$$\Psi\theta = Q \quad (3.32)$$

$$\theta = [\beta, \mu, \tau_c]^T, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} & \text{sign}(\dot{q}_{d1}) & -1 \\ \dot{q}_{d2} & \text{sign}(\dot{q}_{d2}) & -1 \\ \dot{q}_{d3} & \text{sign}(\dot{q}_{d3}) & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = K_I \begin{bmatrix} \xi_{1*} \\ \xi_{2*} \\ \xi_{3*} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Cuando la matriz Ψ^{-1} existe el sistema de ecuaciones (3.32) puede resolverse mediante

$$\hat{\theta} = \Psi^{-1}Q \quad (3.34)$$

El determinante $|\Psi|$ de la matriz Ψ está dado por

$$\begin{aligned} |\Psi| = & \dot{q}_{d1}[\text{sign}(\dot{q}_{d3}) - \text{sign}(\dot{q}_{d2})] + \dot{q}_{d2}[\text{sign}(\dot{q}_{d1}) - \text{sign}(\dot{q}_{d3})] \\ & + \dot{q}_{d3}[\text{sign}(\dot{q}_{d2}) - \text{sign}(\dot{q}_{d1})] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Cuando se satisface lo siguiente

$$\text{sign}(\dot{q}_{d1}) = -\text{sign}(\dot{q}_{d2}), \quad \text{y} \quad \text{sign}(\dot{q}_{d2}) = \text{sign}(\dot{q}_{d3}) \quad (3.36)$$

el determinante $|\Psi|$ en (3.35) se reduce a

$$|\Psi| = 2\text{sign}(\dot{q}_{d1})[\dot{q}_{d2} - \dot{q}_{d3}] \quad (3.37)$$

Si

$$\dot{q}_{d2} \neq \dot{q}_{d3} \quad (3.38)$$

y se cumplen las igualdades en (3.36) entonces $|\Psi|$ es diferente de cero, existe la matriz inversa Ψ^{-1} y se puede obtener el estimado $\hat{\theta}$ usando la ecuación (3.34).

A continuación se mencionan dos comentarios acerca de la estimación de β , μ y τ_c . Primero, las desigualdades (3.36) y (3.38) proporcionan reglas para diseñar las velocidades de referencia \dot{q}_{di} $i = 1, 2, 3$. Segundo, la matriz Ψ depende sólo de las señales de referencia \dot{q}_{di} $i = 1, 2, 3$; por lo tanto, dicha matriz no se ve afectada por ruido de medición. Nótese también que la acción integral del controlador PI produce las señales ξ_{i^*} $i = 1, 2, 3$ del vector Q en (3.32); por lo tanto, el integrador atenúa el ruido de alta frecuencia presente en dichas señales.

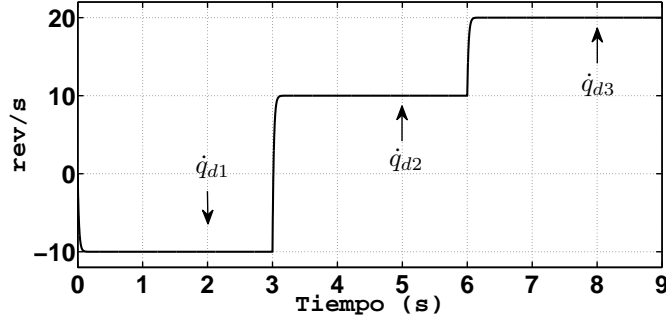
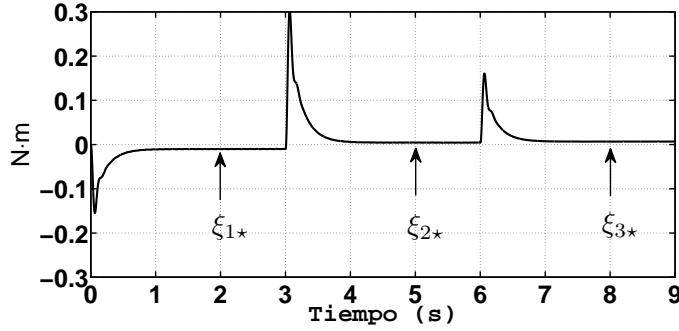
3.4.1. Estimación experimental de β , μ y τ_c

El prototipo experimental descrito en la sección 3.2 permite validar al primer paso del MREE. La Fig. 3.3 (a) exhibe las tres referencias \dot{q}_{d1} , \dot{q}_{d2} y \dot{q}_{d3} , las cuales corresponden a señales escalón filtradas y satisfacen (3.36) y (3.38). Las señales escalón se filtran mediante el filtro $G_s = 50/(s + 50)$ y se aplican respectivamente en los instantes de tiempo 0s, 3s, y 6s. La Fig. 3.3 (b) presenta las señales en estado estacionario ξ_{1^*} , ξ_{2^*} y ξ_{3^*} , y la Fig. 3.4 muestra la señal de control. Las referencias \dot{q}_{di} y las señales ξ_{i^*} , $i = 1, 2, 3$ permiten obtener las siguientes matrices Ψ y Q definidas en (3.33)

$$\Psi = \begin{bmatrix} -10 & -1 & -1 \\ 10 & 1 & -1 \\ 20 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = K_I \overbrace{\begin{bmatrix} -0.0102 \\ 0.00434 \\ 0.00674 \end{bmatrix}}^{\xi^*} \quad (3.39)$$

Sustituyendo las matrices Ψ y Q en (3.34) resulta lo siguiente

$$\hat{\theta} = [\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\tau}_c]^T = \left[6 \times 10^{-4} \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rev}}, 11.8 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}, 7.1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \right]^T \quad (3.40)$$

(a) Referencias \dot{q}_{d1} , \dot{q}_{d2} y \dot{q}_{d3} .(b) Señales ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 .Figura 3.3: Señales empleadas para estimar β , μ y τ_c .

3.5. Segundo paso del MREE: estimación de la inercia J

El MREE identifica la inercia del servo utilizando la respuesta en estado estacionario del sistema en lazo cerrado obtenida al aplicar una velocidad de referencia compuesta por una señal sinusoidal más una señal constante. Además, el MREE emplea el estimado $\hat{\beta}$ de la fricción viscosa mostrado en la Sección 3.4.1. Considere la Suposición 1 dada en la Sección 3.4 y

Suposición 2 La referencia \dot{q}_d es una senoide más una señal constante, *i.e.*,

$$\dot{q}_d = \eta + \kappa \sin(\omega t), \quad \eta > 2\kappa \quad (3.41)$$

donde η y κ son constantes positivas y ω es la frecuencia angular de \dot{q}_d .

La referencia \dot{q}_d en (3.41) no cambia de signo y provoca que el motor gire en un sólo sentido; por lo tanto, el signo de la velocidad \dot{q} tampoco cambia.

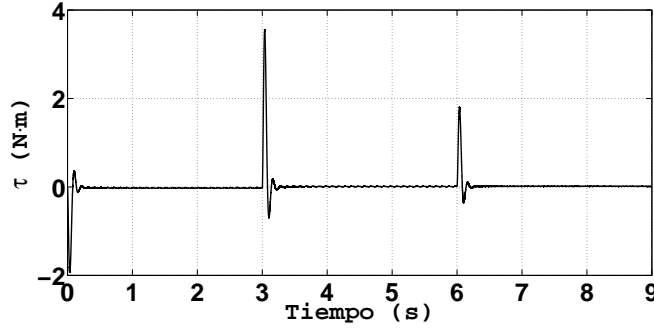


Figura 3.4: Señal de control τ correspondiente a la referencia \dot{q}_d en la Fig. 3.3 (a).

Si \dot{q}_d es la señal en (3.41), entonces v en (3.15) está dado por

$$v = \omega\kappa \cos(\omega t) + a\eta + a\kappa \sin(\omega t) + c\text{sign}(\dot{q}) - d \quad (3.42)$$

Defínanse los términos constante y sinusoidal de v respectivamente como v_c y v_s , es decir,

$$\begin{aligned} v_c &= a\eta + c\text{sign}(\dot{q}) - d \\ v_s &= \omega\kappa \cos(\omega t) + a\kappa \sin(\omega t) = r_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde la amplitud r_0 y fase φ de v_s están dados por

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{(\omega\kappa)^2 + (a\kappa)^2} = \sqrt{\frac{(\omega\kappa J)^2 + (\beta\kappa)^2}{J^2}}, \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

La siguiente función de transferencia se obtiene del sistema en lazo cerrado (3.15)

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\xi]}{\mathcal{L}[v]} = \frac{\alpha}{p(s)} \quad (3.45)$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}[\xi] = G(s)\mathcal{L}[v] = G(s)\mathcal{L}[v_c] + G(s)\mathcal{L}[v_s] \quad (3.46)$$

Defínanse las siguientes expresiones

$$\mathcal{L}[\xi_c] = G(s)\mathcal{L}[v_c], \quad \mathcal{L}[\xi_s] = G(s)\mathcal{L}[v_s] \quad (3.47)$$

Usando (3.47) permite reescribir (3.46) como

$$\mathcal{L}[\xi] = \mathcal{L}[\xi_c] + \mathcal{L}[\xi_s] \quad (3.48)$$

La representación en el dominio del tiempo de (3.48) es $\xi = \xi_c + \xi_s$. Además, el estado estacionario ξ_{c^*} de ξ_c es una constante y el estado estacionario ξ_{s^*} de ξ_s es una senoide, la cual tiene la misma frecuencia ω que v_s y tiene una amplitud Γ dada por

$$\Gamma = r_0 |G(j\omega)|, \quad |G(j\omega)| = \left| \frac{\alpha}{p(j\omega)} \right| \quad (3.49)$$

Sustituyendo $p(s)$ de (3.18) en (3.49) y usando las relaciones en (3.2) produce

$$|G(j\omega)| = \frac{\alpha J}{\sqrt{[-\omega^3 J + (\beta + K_P)\omega\alpha]^2 + [\alpha K_I - (\beta + J\alpha)\omega^2]^2}} \quad (3.50)$$

Reemplazando $|G(j\omega)|$ de (3.50) en $\Gamma^2 = r_0^2 |G(j\omega)|^2$ produce

$$\Gamma^2 = \frac{[(\omega\kappa J)^2 + (\beta\kappa)^2] \alpha^2}{[-\omega^3 J + (\beta + K_P)\omega\alpha]^2 + [\alpha K_I - (\beta + J\alpha)\omega^2]^2} \quad (3.51)$$

La siguiente ecuación cuadrática en términos de la inercia J se obtiene de (3.51)

$$\lambda_2 J^2 + \lambda_1 J + \lambda_0 = 0 \quad (3.52)$$

$$\lambda_0 = [(\beta + K_P)^2 \alpha^2 + \beta^2 \omega^2 - 2\alpha K_I \beta] \omega^2 + \alpha^2 K_I^2 - \frac{(\alpha\kappa\beta)^2}{\Gamma^2} \quad (3.53)$$

$$\lambda_1 = -2\alpha [\omega^2 K_P + \alpha K_I] \omega^2 \quad (3.54)$$

$$\lambda_2 = \left[\omega^4 + \alpha^2 \omega^2 - \left(\frac{\alpha\kappa}{\Gamma} \right)^2 \right] \omega^2 \quad (3.55)$$

La ecuación (3.52) tiene dos soluciones, las cuales son

$$J_1 = \frac{-\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_0}}{2\lambda_2}, \quad J_2 = \frac{-\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_0}}{2\lambda_2} \quad (3.56)$$

Para calcular J_1 y J_2 se necesita el valor de la amplitud Γ en estado estacionario de ξ_s , los parámetros del controlador K_P , K_I y α , los parámetros κ y ω de la señal de referencia \dot{q}_d , y un estimado $\hat{\beta}$ de la fricción viscosa del servo, el cual se utiliza en lugar de β . Por otro lado, al tenerse dos soluciones para la inercia se tiene el problema de seleccionar una de ellas, la siguiente sección se enfoca en este problema.

3.5.1. Estudio del comportamiento de las soluciones J_1 y J_2

Con la finalidad de estudiar el comportamiento de las soluciones J_1 y J_2 con respecto a la frecuencia ω de la señal de referencia (3.41), éstas se obtienen experimentalmente utilizando el servo descrito en la Sección 3.2, cuya inercia J y ganancia K se muestran en

la Tabla 3.1. La frecuencia angular ω de \dot{q}_d varía desde $\omega = \pi$ rad/s hasta $\omega = 40\pi$ rad/s con incrementos de π rad/s. El estimado $\hat{\beta}$ en (3.40) se utiliza para calcular J_1 y J_2 . La amplitud Γ se calcula restando los valores máximo y mínimo de ξ_{s^*} , los cuales se obtienen en línea usando el bloque *Min Max Running Resettable* de Simulink. También, se utilizan los parámetros $\eta = 10$ y $\kappa = 2$ de la señal de referencia \dot{q}_d .

La Fig. 3.5 presenta las soluciones J_1 y J_2 con respecto a la frecuencia ω . Esta figura también muestra las frecuencias ω_σ y ω_z , las cuales se definen en el Apéndice D y cuyo significado estará claro en los siguientes párrafos. Nótese que J_1 tiene un valor cercano a $J = 6,85 \times 10^{-3}$ (kg)(m²)/rev en el intervalo $[\pi, 51]$ rad/s; además, J_1 decrece hacia cero desde $\omega_\sigma = 61$ rad/s. Por otro lado, J_2 tiene un valor cercano a $-J$ en $\omega = \pi$ rad/s y es negativa en el intervalo $[\pi, \omega_z)$, $\omega_z = 43$ rad/s; además, la solución J_2 es positiva para frecuencias mayores a ω_z , es igual a J_1 en ω_σ y desde esta frecuencia J_2 mantiene un valor cercano a J .

Defínanse los siguientes porcentajes de error en la identificación del momento de inercia del servo

$$\tilde{J}_1(\%) = \frac{|J_1 - J|}{J} \times 100, \quad \tilde{J}_2(\%) = \frac{|J_2 - J|}{J} \times 100 \quad (3.57)$$

El valor de J en las definiciones anteriores es el que se muestra en la Tabla 3.1. La Figura 3.6 presenta a $\tilde{J}_1(\%)$ y $\tilde{J}_2(\%)$ con respecto a ω . Esta Figura muestra que $\tilde{J}_1(\%)$ y $\tilde{J}_2(\%)$ son menores a 2.5% en los intervalos $[3, 14, 51]$ rad/s y $[65, 40\pi]$ rad/s, respectivamente.

En el Apéndice D se analiza matemáticamente el comportamiento de J_1 y J_2 con respecto a la frecuencia ω de \dot{q}_d . Este estudio respalda los resultados experimentales mostrados en las Figuras 3.5 y 3.6 y prueba que

$$J_1 = J \text{ si } \omega \leq \omega_\sigma \text{ y } J_2 = J \text{ si } \omega > \omega_\sigma \quad (3.58)$$

Además, en dicho Apéndice se demuestra que J_1 y J_2 tienen los siguientes signos con respecto a ω

$$\begin{aligned} J_1 &> 0, \quad J_2 < 0 \text{ si } \omega < \omega_z \\ J_1 &> 0, \quad J_2 > 0 \text{ si } \omega > \omega_z \end{aligned} \quad (3.59)$$

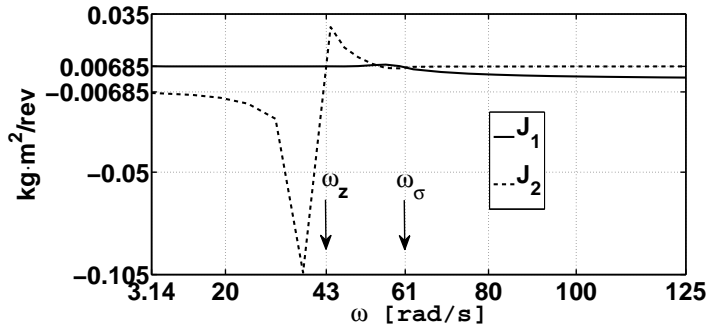
Nótese que ω_σ es la frecuencia en la cual J_2 comienza a tomar el valor de J y ω_z es la frecuencia en la cual J_2 cambia su signo de negativo a positivo.

3.5.2. Selección entre J_1 y J_2

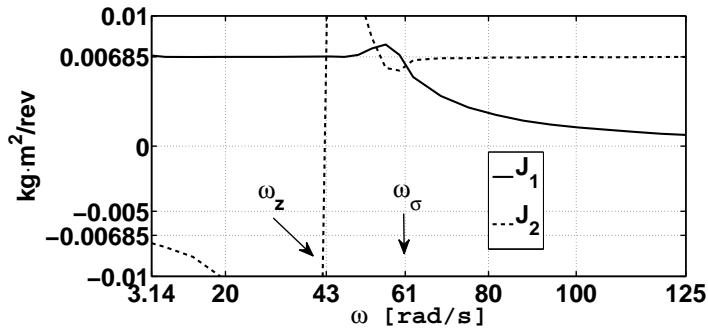
Conociendo el comportamiento de J_1 y de J_2 dado en (3.58) y en (3.59) se propone el siguiente procedimiento de estimación de J :

1. Seleccionar una frecuencia ω de \dot{q}_d en (3.41), tomar $\eta > 2\kappa$, y calcular J_1 y J_2 en (3.56).
2. Si la referencia \dot{q}_d produce una solución J_1 positiva y una solución J_2 negativa, entonces se selecciona $J_1 = \hat{J}$ y se termina el procedimiento de estimación de J ; nótese que estos signos de J_1 y de J_2 se obtienen cuando la frecuencia ω de \dot{q}_d es menor a ω_z (ver (3.59) y Fig. 3.5). Por otro lado, si la referencia \dot{q}_d produce soluciones positivas de J_1 y J_2 puede ser difícil saber cual de estas soluciones seleccionar como el estimado de J . Este problema puede ser resuelto con cualquiera de las siguientes dos alternativas:
 - (a) Decrementar la frecuencia ω de \dot{q}_d hasta que las soluciones J_1 y J_2 en (3.56) satisfagan $J_1 > 0$ y $J_2 < 0$; en este caso $J_1 = \hat{J}$.
 - (b) Incrementar ω hasta que J_2 se haya establecido en un valor constante y seleccionar $J_2 = \hat{J}$. De acuerdo a la ecuación (3.58) y a la Fig. 3.5 este valor constante es J .

El prototipo de laboratorio mostrado en la sección (3.2) permite probar el procedimiento descrito en los puntos 1 y 2. Aplicando la referencia $\dot{q}_d = 10 + 2\sin(6\pi t)$ se obtiene $J_1 = 0,006847$ y $J_2 = -0,0102$; por lo tanto, el estimado corresponde a $\hat{J} = J_1 = 0,006847$ (kg)(m²)/(rev); la Tabla 3.5 muestra este valor. Por otro lado, la Tabla 3.3 resume todos los pasos que emplea el MREE para identificar los parámetros β , μ , τ_c y J . Nótese que el MREE requiere la solución de tres ecuaciones algebraicas para la estimación de la fricción y de la perturbación constante, y también requiere del cálculo de dos raíces cuadradas correspondientes a J_1 y J_2 .



(a) J_1 y J_2 .



(b) Vista de J_1 y J_2 en el intervalo -0.01 a 0.01.

Figura 3.5: J_1 y J_2 con respecto a la frecuencia ω .

3.6. Comparación con el método de Mínimos Cuadrados Recursivo (MCR)

El MREE se compara con el método de Mínimos Cuadrados Recursivo, el cual se denotará como MCR. Para aplicar el MCR considere lo siguiente:

Suposición 3 La referencia \dot{q}_d se compone de ruido blanco filtrado más una señal constante; además, \dot{q}_d no cambia de signo y provoca una rotación unidireccional en el motor tal que $\text{sign}(\dot{q}) = \text{sign}(\dot{q}_d)$.

Para aplicar el MCR se requiere filtrar ambos lados del modelo del servomecanismo (3.1). El filtro lineal estable $F(s) = \lambda_2/\lambda(s)$, $\lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2$ permite obtener la siguiente expresión

$$z(t) = \phi_{MC}^T(t)\theta_{MC}, \quad z(t) = h_0(t) * \tau(t) \tag{3.60}$$

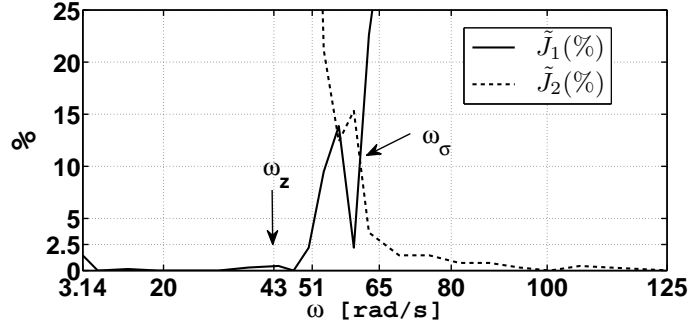


Figura 3.6: $\tilde{J}_1(\%)$ y $\tilde{J}_2(\%)$ con respecto a ω .

$$\phi_{MC}(t) = \begin{bmatrix} h_2(t) * q(t) \\ h_1(t) * q(t) \\ h_0(t) * 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_{MC} = \begin{bmatrix} J \\ \beta \\ \delta_1 \end{bmatrix}, \quad \delta_1 = \mu \text{sign}(\dot{q}_d(t)) - \tau_c \quad (3.61)$$

$$h_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_i(s)], \quad H_i(s) = \left[\frac{\lambda_2 s^i}{\lambda(s)} \right], \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.62)$$

Los operadores $*$ y \mathcal{L}^{-1} denotan respectivamente la convolución y la transformada inversa de Laplace.

Sustituyendo $t = kT_s$; $k = 0, 1, 2, \dots$ en (3.60) produce

$$z(kT_s) = \phi_{MC}^T(kT_s) \theta_{MC} \quad (3.63)$$

Omitiendo T_s resulta en

$$z(k) = \phi_{MC}^T(k) \theta_{MC} \quad (3.64)$$

El vector de parámetros θ_{MC} se estima mediante el MCR dado en (2.15), pero en esta ecuación se reemplaza z_1 , θ y ϕ por z , θ_{MC} y ϕ_{MC} . El vector estimado $\hat{\theta}_{MC}$ converge a θ_{MC} si el vector $\phi_{MC}(k)$ en (3.64) cumple cualquiera de las condiciones de EP dadas en (2.16) y en (2.17). Nótese que el MCR requiere del cálculo de nueve ecuaciones en diferencias, seis de ellas están relacionadas con la matriz de covarianza $P(k)$, y las otras tres ecuaciones corresponden al vector de parámetros los estimados $\hat{\theta}_{MC}(k)$. Entonces, es claro que el MCR requiere de un mayor esfuerzo computacional que el MREE.

Tabla 3.3: Resumen de los pasos del MREE.

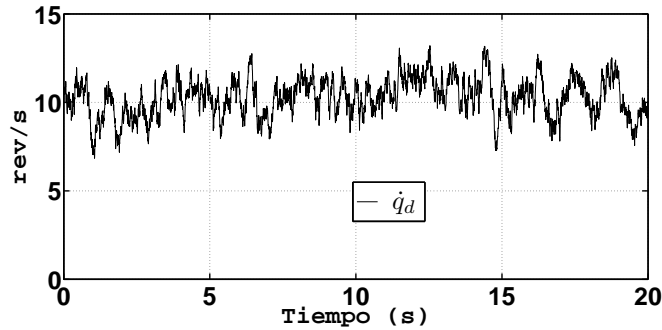
Paso 1.	Aplicar un controlador PI al servo. Véase Fig. 3.2. Las ganancias PI deben satisfacer $K_P > K_I/\alpha$.
Paso 2.	Aplicar secuencialmente tres señales escalón \dot{q}_{d1} , \dot{q}_{d2} , y \dot{q}_{d3} tales que $\text{sign}(\dot{q}_{d1}) = -\text{sign}(\dot{q}_{d2})$ $\text{sign}(\dot{q}_{d2}) = \text{sign}(\dot{q}_{d3})$, $\dot{q}_{d1} \neq \dot{q}_{d2}$. Guardar los valores $\xi_{1\star}$, $\xi_{2\star}$ y $\xi_{3\star}$.
Paso 3.	Construir la matriz Φ y el vector Q (3.33) y resolver $\hat{\theta} = \Phi^{-1}Q$ donde $\hat{\theta} = [\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\tau}_c]^T$.
Paso 4.	Elegir constantes η y κ tales que $\eta > 2\kappa$, y seleccionar una frecuencia ω ; entonces aplicar al sistema en lazo cerrado la referencia $\dot{q}_d = \eta + \kappa \sin(\omega t)$.
Paso 5.	Medir la señal Γ (3.49), la cual corresponde a la amplitud de la señal de salida ξ cuando el sistema en lazo cerrado se encuentra en estado estacionario.
Paso 6.	Calcular J_1 y J_2 (3.56). Si $J_1 > 0$ y $J_2 < 0$ Entonces seleccionar $\hat{J} = J_1$. El proceso de estimación termina. Si $J_1 > 0$ y $J_2 > 0$, entonces realizar uno de los dos procedimientos siguientes: a. Disminuir ω hasta obtener $J_1 > 0$ y $J_2 < 0$ y tomar $\hat{J} = J_1$. b. Incrementar ω hasta que J_2 alcance un valor constante y seleccionar $\hat{J} = J_2$. El proceso de estimación termina.

3.6.1. Estimación experimental de β , μ , τ_c y J utilizando el MCR

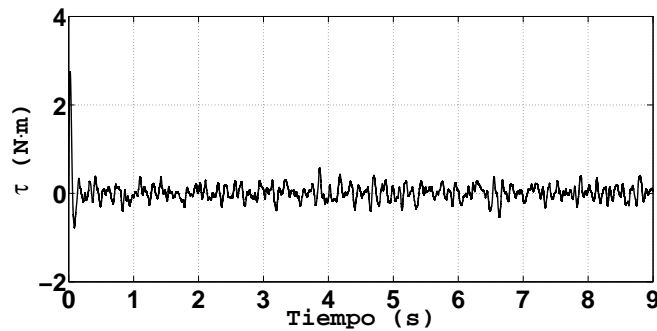
La Fig. 3.7 (a) presenta la referencia $\dot{q}_d = \dot{q}_{dc} + \dot{q}_w$ utilizada para el proceso de identificación con el MCR. La parte constante \dot{q}_{dc} de \dot{q}_d corresponde a 10 rev/s, y la señal \dot{q}_w de \dot{q}_d se obtiene al filtrar la salida del bloque *Band Limited White Noise* de Simulink, cuyos parámetros son: Noise power=0.6, sample time=0.1ms, y seed=23341. La salida de este bloque se filtra usando $P(s) = 5/(s + 5)$ para reducir el contenido de alta frecuencia de \dot{q}_w . La referencia \dot{q}_d tiene suficiente riqueza espectral para identificar los parámetros J , β y δ_1 , y ocasiona que el vector regresor $\phi_{LS}(k)$ cumpla las condiciones de EP en (2.16) y en (2.17). La Fig. 3.7 (b) muestra la señal de control generada por la señal \dot{q}_d . Nótese que esta señal tiene un comportamiento más brusco que la señal de control en la Fig. 3.4 y que la señal de control sinusoidal relacionada con la identificación de la inercia.

El valor inicial de la matriz de ganancia $P(k)$ y del vector estimado $\hat{\theta}_{MC}(k)$ son $P(0) = \text{diag}(10000, 10000, 10000)$ y $\hat{\theta}_{MC}(0) = 0$. Los parámetros de los filtros H_i , $i = 0, 1, 2$ en (3.62) son: $\lambda_1 = 40$ y $\lambda_2 = 400$. Para los experimentos, estos filtros y el filtro $P(s)$ definido en el párrafo anterior se utilizan en tiempo discreto. La transformación bilineal y el período de muestreo $T_s=0.1\text{ms}$ se emplean para transformar dichos filtros en tiempo continuo a sus equivalentes en tiempo discreto.

La Fig. 3.9 presenta los estimados obtenidos usando el MCR, y la Tabla 3.4 muestra el valor medio de dichos estimados, el cual se calcula desde $t = 5$ a $t = 10\text{s}$.



(a) Referencia \dot{q}_d durante la identificación con el MCR.



(b) Señal de control generada por la referencia \dot{q}_d .

Figura 3.7: Referencia \dot{q}_d y señal de control

Como el signo de la referencia \dot{q}_d es positivo, el parámetro δ_1 en la ecuación (3.61) está dado por:

$$\mu - \tau_c = \delta_1 \quad (3.65)$$

Tabla 3.4: Estimados \hat{J} , $\hat{\beta}$, $\hat{\delta}_1$, $\hat{\mu}$ y $\hat{\tau}_c$ utilizando el MCR.

Estimado	Valor	Unidades
\hat{J}	6.835×10^{-3}	$(\text{kg})(\text{m}^2)/(\text{rev})$
$\hat{\beta}$	4.52×10^{-4}	$(\text{N})(\text{m})(\text{s})/(\text{rev})$
$\hat{\delta}_1$	4.556×10^{-3}	$(\text{N})(\text{m})$
$\hat{\mu}$	12.3×10^{-3}	$(\text{N})(\text{m})$
$\hat{\tau}_c$	7.8×10^{-3}	$(\text{N})(\text{m})$

Para estimar los parámetros μ y τ_c se necesita una segunda ecuación que sea independiente de (3.65). Ésta se puede obtener al realizar un nuevo experimento pero utilizando únicamente una referencia constante negativa $\dot{q}_d = -\dot{q}_{dc}$. De (3.30), la señal constante $\dot{q}_d = -\dot{q}_{dc}$ produce

$$-\mu - \tau_c = \delta_2, \quad \delta_2 = K_I \xi_\star - \beta \dot{q}_{dc} \quad (3.66)$$

Las ecuaciones (3.65) y (3.66) forman el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Resolviendo para μ y τ_c se obtiene

$$\mu = 0.5[\delta_1 - \delta_2], \quad \tau_c = -0.5[\delta_1 + \delta_2] \quad (3.68)$$

Los siguientes estimados $\hat{\mu}$ y $\hat{\tau}_c$ se obtienen al reemplazar en (3.68) los parámetros δ_1 , δ_2 por $\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$.

$$\hat{\mu} = 0.5[\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2], \quad \hat{\tau}_c = -0.5[\hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2] \quad (3.69)$$

El primer experimento proporciona el estimado $\hat{\delta}_1$ de la Tabla 3.4. Por otro lado, $\hat{\delta}_2$ es el siguiente estimado

$$\hat{\delta}_2 = K_I \xi_\star - \hat{\beta} \dot{q}_{dc} \quad (3.70)$$

En esta última ecuación, el primer experimento proporciona el estimado $\hat{\beta}$ mostrado en la Tabla 3.4, y el segundo experimento proporciona el valor de ξ_\star . Usando $\dot{q}_{dc} = -10$ produce $\xi_\star = -0,0102$ (ver (3.39)). Sustituyendo estos valores de \dot{q}_{dc} y ξ_\star , la ganancia $K_I = 5K$, y el estimado $\hat{\beta}$ mostrado en la Tabla 3.4 en (3.70) se obtiene $\hat{\delta}_2 = -20.1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$. Este parámetro $\hat{\delta}_2$ y el estimado $\hat{\delta}_1$ dado en la Tabla 3.4 se reemplazan en (3.69) para obtener los estimados $\hat{\mu}$ y $\hat{\tau}_c$ mostrados en dicha Tabla.

Cabe mencionar que los parámetros estimados de la fricción de Coulomb $\hat{\mu}$, y de la perturbación constante $\hat{\tau}_c$ presentados en la Tabla 3.4 son similares a los obtenidos en (3.40) por el método propuesto MREE. El estimado de la inercia \hat{J} en la Tabla 3.4 también es similar al producido por el MREE en la sección 3.5.1. Además, ambos métodos, el MCR y el MREE, producen estimados de la inercia \hat{J} cercanos al valor nominal de J mostrado en la Tabla 2.1. Sin embargo, el estimado de la fricción viscosa $\hat{\beta}$ obtenido por el MREE es significativamente diferente al obtenido por el MCR. Esta diferencia puede ser debido al término $h_1 * q$ que aparece en el regresor del MCR, el cual está asociado a la fricción viscosa y se comporta esencialmente como un estimado de la velocidad obtenida por medio del filtro pasa banda $H_1(s)$. Al filtrar la señal cuantizada del decodificador óptico mediante $H_1(s)$ se producen estimados de la velocidad con sesgo [Kavanagh99], lo cual puede afectar la estimación de $\hat{\beta}$.

Nótese también que los estimados $\hat{\beta}$, \hat{J} y $\hat{\delta}_1$ del MCR tienen poca variación a partir de 5s, y que su valor medio se calcula de $t = 5s$ a $t = 10s$. Por otro lado, para la estimación de δ_2 se necesitan 3s. Por lo tanto, el MCR requiere de 13s para la estimación de todos los parámetros del servo. En el caso del MREE se necesitan 9s para la estimación de β , μ y τ_c , y se requieren 3s para la estimación de J si la frecuencia seleccionada ω produce $J_1 > 0$ y $J_2 < 0$; cada experimento adicional para la estimación de J requiere de 3s.

3.7. Validación del modelo

La validación del modelo identificado por el MREE se realiza mediante la siguiente ley de control para el seguimiento de una trayectoria, la cual utiliza los parámetros previamente estimados

$$\tau = \left[\hat{J}\ddot{r} + \hat{\beta}\dot{r} + \hat{\mu}\text{sign}(\dot{r}) - \hat{\tau}_c + \lambda\dot{\zeta} \right] \quad (3.71)$$

La Fig. 3.8 muestra un diagrama de bloques de la ley de control (3.71), cuyo objetivo es que la velocidad del servomecanismo \dot{q} sea igual a la trayectoria deseada \dot{r} . La señal $\dot{\zeta}$ en (3.71) se considera un estimado del error de seguimiento $\dot{\epsilon} = \dot{r} - \dot{q}$. La derivada en el tiempo de $\dot{\zeta}$ satisface

$$\ddot{\zeta} = -\gamma[\dot{\zeta} - \dot{\epsilon}] \quad (3.72)$$

donde γ es una constante positiva. La variable $\ddot{\zeta}$ se obtiene siguiendo el mismo procedimiento que produce $\ddot{\xi}$ en (3.12).

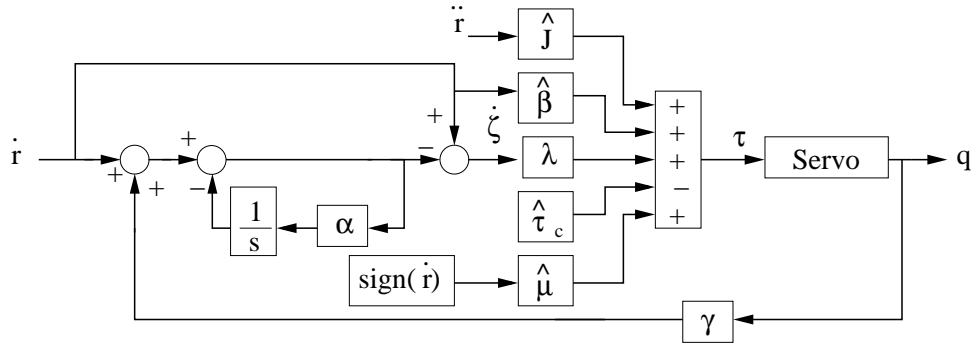


Figura 3.8: Sistema de control para el seguimiento de una trayectoria.

3.7.1. Análisis de estabilidad

Sustituyendo la ley de control (3.71) en el modelo del servomecanismo (3.1) genera

$$J\ddot{q}(t) + \beta\dot{q}(t) + \mu\text{sign}(\dot{q}) = \tau_c + \hat{J}\ddot{r} + \hat{\beta}\dot{r} + \hat{\mu}\text{sign}(\dot{r}) - \hat{\tau}_c + \lambda\dot{\zeta} \quad (3.73)$$

Sumando y restando los términos $J\ddot{r}$ y $\beta\dot{r}$ en la ecuación anterior se obtiene

$$J\ddot{\varepsilon}(t) + \beta\dot{\varepsilon}(t) + \lambda\dot{\zeta} = \kappa_p \quad (3.74)$$

$$\kappa_p = -\tilde{J}\ddot{r} - \tilde{\beta}\dot{r} + \tilde{\tau}_c - \hat{\mu}\text{sign}(\dot{r}) + \mu\text{sign}(\dot{q}) \quad (3.75)$$

$$\tilde{J} = \hat{J} - J, \quad \tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta, \quad \tilde{\tau}_c = \hat{\tau}_c - \tau_c \quad (3.76)$$

La ecuación (3.74) es equivalente a

$$\ddot{\varepsilon}(t) = -\frac{\beta}{J}\dot{\varepsilon}(t) - \frac{\lambda}{J}\dot{\zeta} + \frac{\kappa_p}{J} \quad (3.77)$$

La ecuación anterior junto con (3.72) forman la siguiente representación en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \ddot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma \\ -\frac{\lambda}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \kappa_p \quad (3.78)$$

La ecuación característica $g(s)$ del sistema (3.78) está dada por

$$g(s) = s^2 + \left(\gamma + \frac{\beta}{J}\right)s + \frac{\lambda\gamma}{J} = 0 \quad (3.79)$$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz a $g(s)$ resulta que el sistema (3.78) es estable porque todos los coeficientes de $g(s)$ son positivos.

3.7.2. Medida de la calidad del modelo

Para validar los modelos identificados considere que

Suposición 4 *La referencia \dot{r} no cambia de signo y provoca que el servo gire en una sola dirección tal que $\text{sign}(\dot{q}) = \text{sign}(\dot{r})$.*

Esta última suposición implica que la ley de control τ en (3.71) reduce los efectos debidos al par de perturbación κ_p en (3.75). Defínase $\tilde{\mu} = \hat{\mu} - \mu$ and $\tilde{\Theta} = [\tilde{J}, \tilde{\beta}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}_c]$. Por lo tanto, κ_p en (3.75) se puede reescribir como $\kappa_p = \tilde{\Theta}\varsigma^T$, donde

$$\tilde{\Theta} = [\tilde{J}, \tilde{\beta}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}_c], \quad \varsigma = [-\ddot{r}, -\dot{r}, -\text{sign}(\dot{r}), 1] \quad (3.80)$$

Nótese que $\|\kappa_p\| \leq \|\tilde{\Theta}\| \|\varsigma\|$ y ς está acotado. Si $\tilde{\Theta}$ es igual a cero también lo es κ_p , y las señales $\dot{\zeta}$ y $\dot{\varepsilon}$ tienen una convergencia exponencial a cero. Si $\tilde{\Theta} \neq 0$ las señales $\dot{\zeta}$ y $\dot{\varepsilon}$ no convergen a cero y permanecen acotadas por una cota que depende del tamaño de $\|\tilde{\Theta}\|$. Para medir el efecto de $\tilde{\Theta}$ en $\dot{\zeta}$, esta señal se muestrea p veces y el valor de cada muestra $\dot{\zeta}_i$ de $\dot{\zeta}$ se utiliza para calcular el siguiente índice de desempeño

$$E = \sum_{i=1}^p \dot{\zeta}_i^2 \quad (3.81)$$

3.7.3. Experimentos de validación de modelo

La Tabla 2.2 resume los parámetros estimados por el MREE y por el MCR. Los modelos identificados mediante el MREE y el MCR se utilizan para calcular la ley de control (3.71), donde $\lambda = 0.03425$ y $\gamma = 20$. La Fig. 3.10 (a) presenta la trayectoria \dot{r} usada para la validación de los modelos, y las Figuras 3.10 (b) y 3.10 (c) muestran el error de seguimiento $\dot{\zeta}$ obtenido cuando dicha ley de control se calcula usando los parámetros estimados por el MREE y por el MCR, respectivamente. La trayectoria \dot{r} en rev/s está dada por

$$\dot{r}(t) = 12 + 2.57 \cos(2\pi 0.1t) + 3.77[\cos(2\pi 0.15t) + \cos(2\pi 0.2t)] \quad (3.82)$$

Por otro lado, la Tabla 3.5 presenta el valor de E en (3.81) calculado para $p=275,000$. Las muestras del error de seguimiento $\dot{\zeta}$ se adquirieron en el intervalo 2.5-30s, porque después de 2.5s esta señal converge a una vecindad cercana a cero. Note que ambos métodos producen casi el mismo desempeño en términos del error cuadrático E , pero el MREE tiene un desempeño ligeramente mejor que el MCR.

Tabla 3.5: Comparación de los parámetros estimados por el MCR y por el MREE.

	\hat{J}	$\hat{\beta}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\tau}_c$	E
MREE	0.006845	0.0006	0.0118	0.006778	21.01
MCR	0.006835	0.000452	0.0123	0.0078	25.25

3.8. Resumen

Se presentó un nuevo método de identificación paramétrica simple que consiste en dos pasos y que se llama Método basado en las Respuestas en Estado Estacionario (MREE). Este método estima la inercia, los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, y una perturbación constante del modelo de un servomecanismo controlado en velocidad. Un controlador Proporcional Integral cierra el lazo usando mediciones de la posición del servo, y no requiere de estimados de la velocidad obtenidos al diferenciar numéricamente la posición. El MREE se compara experimentalmente con el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo (MCR). Ambos métodos proporcionan estimados similares; sin embargo, el MREE emplea señales de excitación constantes y sinusoidales, en lugar de señales aleatorias. Además, el MREE proporciona reglas para las señales de referencia que garantizan la identificación de los parámetros nominales del servo. Para validar el modelo estimado por el MREE y el modelo identificado por el MCR se calcula una ley de control para el seguimiento de una trayectoria, la cual utiliza el modelo estimado. Los experimentos indican que con el modelo estimado por el MCR se produce mayor error de seguimiento que con el modelo estimado por el MREE.

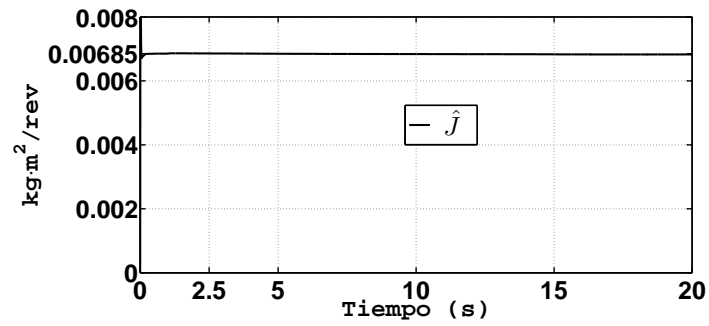
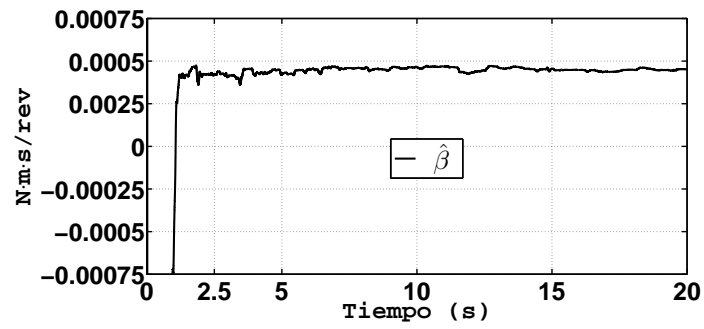
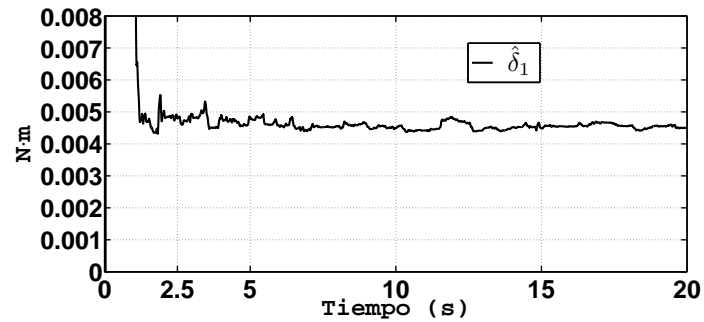
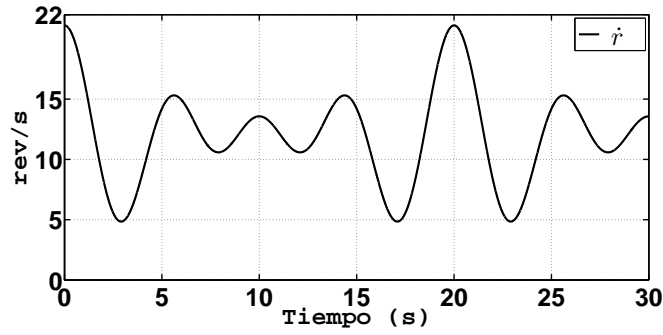
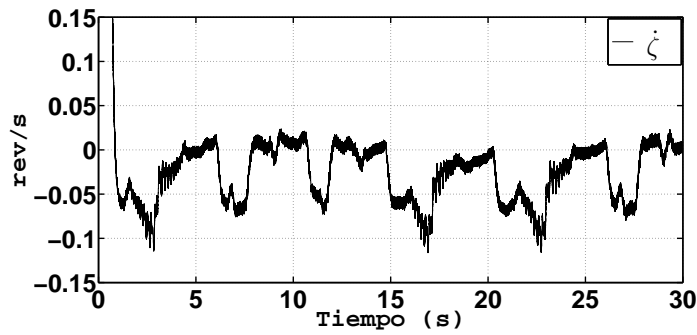
(a) \hat{j} .(b) $\hat{\beta}$.(c) $\hat{\delta}_1$.

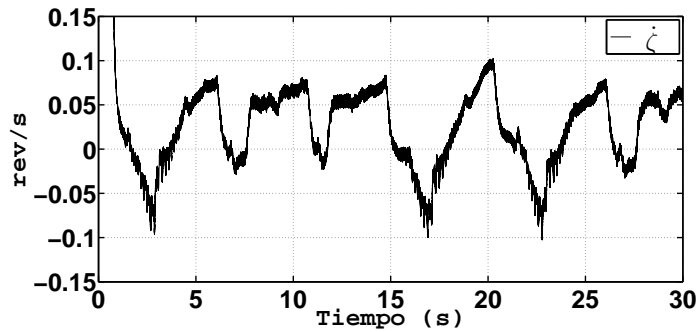
Figura 3.9: Parámetros estimados por el MCR.



(a) Trayectoria de velocidad deseada \dot{r} .



(b) Error de seguimiento $\dot{\zeta}$ correspondiente a los estimados producidos por el MREE.



(c) Error de seguimiento $\dot{\zeta}$ correspondiente a los estimados producidos por el MCR.

Figura 3.10: Trayectoria \dot{r} y errores de seguimiento $\dot{\zeta}$.

Capítulo 4

Identificación paramétrica de un edificio

En este capítulo se presenta el Método de Identificación Recursivo de Edificios (MIRE) que identifica los parámetros de un edificio excitado mediante un sismo. Se suponen disponibles las mediciones de la aceleración del terreno y de la aceleración de cada piso del edificio, las cuales están contaminadas por ruido y perturbaciones constantes.

4.1. Introducción

La identificación paramétrica de estructuras ha sido un tema de investigación en las últimas tres décadas [Kerschen06]. Los parámetros que definen las características vibratorias de una estructura son su masa, su amortiguamiento y su rigidez. El conocimiento de estos parámetros es muy importante para determinar las propiedades dinámicas de una estructura tales como su frecuencia natural y período de vibración, y para determinar la respuesta de la estructura ante fuerzas externas tales como sismos y viento. Además, dichos parámetros son necesarios para el diseño de técnicas de control que atenúen las vibraciones de las estructuras sometidas a fuerzas externas [Jansen99, Spencer03].

Generalmente los algoritmos de identificación paramétrica de estructuras utilizan mediciones de aceleración. La razón es que en la mayoría de los casos no es posible medir desplazamientos y velocidades absolutas en una estructura porque es difícil establecer una referencia inercial. Por ejemplo, durante un sismo, la base sobre la cual se encuentra la estructura se mueve y por lo tanto no proporciona una referencia estática [Dyke96a, Gavin98,

Jiménez07].

En la literatura se han propuesto varias técnicas de identificación de estructuras. La estimación paramétrica llamada análisis modal es indudablemente la técnica más popular [Kerschen06]. Mediante esta técnica se estiman las frecuencias naturales, los modos de vibración y los factores de amortiguamiento de una estructura [Juang85]. En [Lus99, Kang05, Ku07] se presentan métodos que estiman los parámetros modales usando mediciones de aceleración. La referencia [Kang05] presenta un esquema de identificación en el dominio del tiempo que estima los parámetros de rigidez y de amortiguamiento de una estructura. Estos parámetros se obtienen mediante la minimización de una integral que contiene los errores medios cuadráticos entre las aceleraciones medidas y las calculadas por un modelo numérico de la estructura. En [Dyke96b] se realiza la identificación de edificios en el dominio de la frecuencia. En este caso, se determinan experimentalmente las funciones de transferencia que relacionan cada una de las entradas del sistema con cada una de sus salidas. Las entradas son la aceleración del terreno del edificio y la fuerza de control aplicada por un amortiguador magnetoreológico (MR); y las salidas son el desplazamiento del amortiguador MR relativo a la estructura y las aceleraciones de los pisos del edificio. La referencia [Jiménez07] presenta un observador adaptable que estima los parámetros, los desplazamientos y las velocidades de cada uno de los pisos de un edificio excitado mediante un sismo. El observador utiliza las mediciones de aceleración del terreno y de cada piso, así como las mediciones de fuerza de un amortiguador MR empleado para atenuar las vibraciones de la estructura. En [Jiménez10] se extiende el trabajo presentado en [Jiménez07] y se propone una nueva parametrización de la estructura, la cual requiere menor esfuerzo computacional que la parametrización propuesta en [Jiménez07]. Además en [Jiménez10] se presentan resultados experimentales con un edificio a escala reducida a comparación de la referencia [Jiménez07] que sólo presenta simulaciones numéricas. La referencia [Angeles05] propone un algoritmo basado en el método de Mínimos Cuadrados que identifica los parámetros del modelo tridimensional de un edificio sujeto a dos señales de excitación sísmica, las cuales son horizontales y ortogonales. Es importante mencionar que la mayoría de las técnicas de identificación presentadas en este párrafo consideran la presencia de ruido de medición, pero ninguna considera la presencia de perturbaciones constantes en las mediciones de aceleración. Es bien sabido que los acelerómetros usualmente presentan un voltaje constante de perturbación en su salida. Por lo tanto, en la mayoría de los casos existe una diferencia constante entre la aceleración medida y la aceleración real [Gavin98]. Dicho voltaje de perturbación aparece debido a los

cambios de temperatura del acelerómetro y a los cambios de su voltaje de alimentación [ADI, Dao02].

En este capítulo se presenta el Método de Identificación Recursivo de Edificios (MIRE) que estima los parámetros de un edificio excitado mediante un sismo. Las mediciones de la aceleración del terreno y la aceleración de cada piso del edificio se suponen disponibles y tienen ruido y perturbaciones constantes. El algoritmo propuesto se basa en una parametrización obtenida mediante integrales evaluadas en ventanas de tiempo finito. Estos filtros tienen respuesta finita al impulso (Finite Impulse Response (FIR), en inglés) y eliminan las perturbaciones constantes en un período de tiempo finito y pequeño. Además, dichos filtros permiten el paso del ancho de banda típico de las estructuras sujetas a la excitación de un sismo, y atenúan el ruido de medición.

4.2. Modelo de un edificio

La Fig. 4.1 muestra una estructura de un grado de libertad, la cual está sujeta a excitación sísmica. Ésta consiste en una masa m concentrada en el techo, en dos columnas que proporcionan la rigidez total k al sistema, y en un amortiguador viscoso c que disipa las vibraciones del sistema. Dicha estructura puede ser considerada como la idealización de un edificio de un piso. Nótese que los componentes de una estructura como columnas, paredes y vigas tienen masa, rigidez y disipan energía. Sin embargo, en un sistema idealizado sólo se consideran tres componentes independientes, uno que concentra la masa m , otro que concentra la rigidez k , y otro que concentra el amortiguamiento c .

El desplazamiento del terreno debido a la excitación sísmica se denota como x_g , el desplazamiento total o absoluto de la estructura se denota por x_a , y el desplazamiento relativo entre el techo de la estructura y la base de ésta se denota por x (Fig. 4.1). En cada instante de tiempo estos desplazamientos se relacionan mediante:

$$x_a(t) = x(t) + x_g(t) \quad (4.1)$$

Sólo el movimiento relativo $x(t)$ debido a la deformación de la estructura produce la fuerza de rigidez $F_R = kx(t)$ y la fuerza de amortiguamiento $F_A = c\dot{x}(t)$ [Chopra01]. La aceleración de la estructura está dada por:

$$\ddot{x}_a(t) = \ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t) \quad (4.2)$$

La fuerza total aplicada a la estructura es

$$F_T = -F_R - F_A = -kx(t) - c\dot{x}(t) \quad (4.3)$$

Utilizando la segunda ley de Newton en la estructura de un grado de libertad se obtiene:

$$F_T = m\ddot{x}_a \quad (4.4)$$

Sustituyendo (4.2) y (4.3) en (4.4) se obtiene el modelo de la estructura de un grado de libertad dado por:

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}_g) + c\dot{x} + kx = 0 \quad (4.5)$$

En la siguiente sección se presenta el modelo matemático de una estructura de n grados de libertad, el cual emplea una formulación matricial para la masa, rigidez y amortiguamiento en lugar de una formulación escalar.

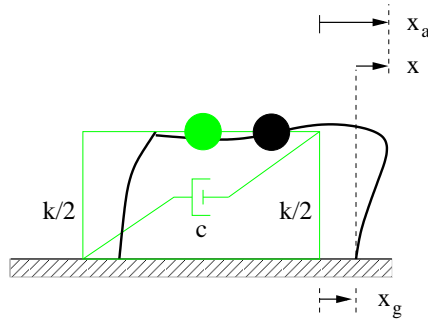


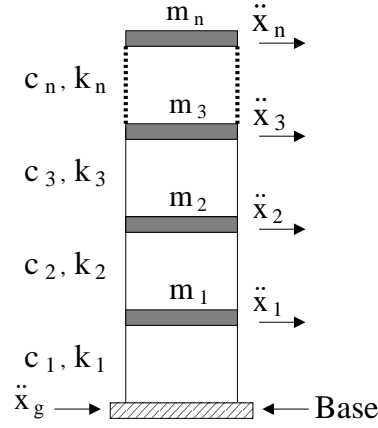
Figura 4.1: Estructura de un grado de libertad sujeta a la excitación de un sismo.

4.2.1. Modelo de un edificio de n grados de libertad

La Fig. 4.2 muestra la estructura considerada en este trabajo, la cual se puede idealizar como un sistema de masas concentradas con n grados de libertad.

El comportamiento de esta estructura se puede describir por medio del siguiente modelo lineal invariante en el tiempo [Chopra01]:

$$M(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (4.6)$$

Figura 4.2: Estructura con n grados de libertad.

donde M , C y K son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. La definición de estas matrices es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

donde los parámetros c_i y k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) son respectivamente los coeficientes laterales de amortiguamiento y de rigidez de la columna entre el i -ésimo piso y el $(i - 1)$ -ésimo piso. Los componentes del vector $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n]^T$ son los desplazamientos de cada piso, medidos con respecto a la base. Las variables \dot{x} y \ddot{x} son respectivamente los vectores de velocidad y de aceleración. El termino \ddot{x}_g representa la aceleración absoluta del terreno inducida por el evento sísmico, finalmente, $l = [1 \ 1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T \in R^n$.

Supóngase lo siguiente:

- Las mediciones de aceleración del terreno y de cada piso están disponibles y tienen

perturbaciones constantes y ruido de medición, es decir,

$$\ddot{x}_m = \ddot{x} + d_* + \xi \quad (4.7)$$

$$\ddot{x}_{gm} = \ddot{x}_g + d_g + \xi_g \quad (4.8)$$

donde $\ddot{x}_m = [\ddot{x}_{1m} \ \ddot{x}_{2m} \ \ddot{x}_{3m} \ \cdots \ \ddot{x}_{nm}]^T$ es un vector que contiene las aceleraciones medidas de los pisos, \ddot{x}_{gm} es la aceleración medida del terreno, $d_* = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ \cdots \ d_n]^T$ y d_g son perturbaciones constantes, $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \cdots \ \xi_n]^T$ y ξ_g son ruidos de medición.

- Las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ son cero. Esta suposición es razonable ya que la estructura se encuentra en reposo antes de un sismo.

Por otro lado, la expresión (4.6) es equivalente a:

$$(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) = -M^{-1}C\dot{x} - M^{-1}Kx \quad (4.9)$$

Los términos $M^{-1}C\dot{x}$ y $M^{-1}Kx$ se pueden parametrizar como [Jiménez07]:

$$\begin{aligned} M^{-1}C\dot{x} &= \dot{u}\theta_c, & M^{-1}Kx &= u\theta_k \\ \theta_c &= \left[\frac{c_1}{m_1} \ \frac{c_2}{m_1} \ \frac{c_2}{m_2} \ \frac{c_3}{m_2} \ \cdots \ \frac{c_n}{m_n} \right]^T, & \theta_k &= \left[\frac{k_1}{m_1} \ \frac{k_2}{m_1} \ \frac{k_2}{m_2} \ \frac{k_3}{m_2} \ \cdots \ \frac{k_n}{m_n} \right]^T \\ u &= - \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & x_2 - x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

\dot{u} es la derivada con respecto al tiempo de u .

En consecuencia (4.9) se puede escribir como:

$$(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) = \dot{u}\theta_c + u\theta_k \quad (4.11)$$

4.3. Parametrización del modelo

La transformada de Laplace de (4.11) está dada por:

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g]) = sU(s)\theta_c + U(s)\theta_k \quad (4.12)$$

donde $U(s) = \mathcal{L}[u]$.

El primer paso para obtener la parametrización utilizada por el algoritmo de identificación consiste en multiplicar (4.12) por s^3 . En el dominio del tiempo esta operación es equivalente a tomar tres veces la derivada con respecto al tiempo de (4.11). Se mostrará que la multiplicación de (4.12) por s^3 elimina la perturbación constante de las señales de aceleración.

Multiplicando (4.12) por s^3 produce

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g])s^3 = U(s)s^4\theta_c + U(s)s^3\theta_k \quad (4.13)$$

La expresión (4.13) es equivalente a:

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g])s^3 = \mathcal{L}[\ddot{u}]s^2\theta_c + \mathcal{L}[\ddot{u}]s\theta_k \quad (4.14)$$

donde \ddot{u} es la segunda derivada de u con respecto al tiempo y está dada por:

$$\ddot{u} = - \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 & \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 - \ddot{x}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddot{x}_n - \ddot{x}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Substituyendo (4.7) en (4.15) se obtiene la siguiente expresión:

$$\ddot{u} = \ddot{u}_m - D - \sigma \quad (4.16)$$

La definición de \ddot{u}_m es similar a la de \ddot{u} , pero \ddot{u}_m se compone de aceleraciones medidas en lugar de aceleraciones ideales. Las definiciones de D y de σ son:

$$D = - \begin{bmatrix} d_1 & d_1 - d_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_2 - d_1 & d_2 - d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n - d_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\sigma = - \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_1 - \xi_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 - \xi_1 & \xi_2 - \xi_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi_n - \xi_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

La transformada de Laplace de (4.16) es

$$\mathcal{L}[\ddot{u}] = \mathcal{L}[\ddot{u}_m] - \frac{1}{s}D - \Sigma(s) \quad (4.19)$$

donde $\Sigma(s) = \mathcal{L}[\sigma]$.

Por otro lado, las transformadas de Laplace de \ddot{x} y \ddot{x}_g en (4.7) y (4.8) son

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = \mathcal{L}[\ddot{x}_m] - d_* \frac{1}{s} - \Xi(s) \quad (4.20)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_g] = \mathcal{L}[\ddot{x}_{gm}] - \frac{d_g}{s} - \Xi_g(s)$$

con $\Xi(s) = \mathcal{L}[\xi]$ y $\Xi_g(s) = \mathcal{L}[\xi_g]$.

Sustituyendo (4.19) y (4.20) en (4.14) resulta

$$Z(s)s^3 = \mathcal{L}[\ddot{u}_m]s^2\theta_c + \mathcal{L}[\ddot{u}_m]s\theta_k + R(s) + \Lambda(s) \quad (4.21)$$

donde

$$Z(s) = \mathcal{L}[\ddot{x}_m] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_{gm}] \quad (4.22)$$

$$R(s) = -D(s\theta_c + \theta_k) + (d_* + ld_g)s^2 \quad (4.23)$$

$$\Lambda(s) = -\Sigma(s)(s^2\theta_c + s\theta_k) + (\Xi(s) + l\Xi_g(s))s^3 \quad (4.24)$$

El término $R(s)$ depende de las perturbaciones constantes que afectan a las mediciones de aceleración, y $\Lambda(s)$ depende del ruido de medición.

Defínanse las siguientes expresiones en el dominio del tiempo:

$$z = \mathcal{L}^{-1}[Z(s)], \quad r = \mathcal{L}^{-1}[R(s)], \quad \lambda = \mathcal{L}^{-1}[\Lambda(s)] \quad (4.25)$$

El valor en estado estacionario r_{ss} de r es cero ya que se cumple

$$r_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) = 0$$

Las definiciones en (4.25) permiten escribir la expresión (4.21) en el dominio del tiempo como:

$$z^{(3)} = u_m^{(4)}\theta_c + u_m^{(3)}\theta_k + r + \lambda \quad (4.26)$$

donde el superíndice (i) , $i = 3, 4$ representa la i -ésima derivada de la variable correspondiente.

El siguiente paso consiste en integrar la ecuación anterior cinco veces sobre intervalos de tiempo finito. Esta operación permitirá obtener términos que dependen de las variables medibles \ddot{u}_m y z en lugar de términos que dependen de sus derivadas. Dicha

operación también permite atenuar los componentes de alta frecuencia del ruido de medición. Para llevar a cabo este procedimiento es útil definir el siguiente operador [Sagara88, Eitelberg88, Sagara90, Garnier03]:

$$I_n\{\rho(t)\} = \frac{\varrho}{\delta^n} \int_{t-\delta}^t \int_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} \cdots \int_{\tau_{n-1}-\delta}^{\tau_{n-1}} \rho(\tau_n) d\tau_n \cdots d\tau_1 \quad (4.27)$$

donde ϱ y δ son constantes positivas, n es el número de integraciones sobre intervalos de tiempo finito de ρ . El período de integración δ se define como

$$\delta = \hbar T_s$$

$\hbar > 0$ se denomina factor de longitud y T_s es el período de muestreo de ρ .

La transformada de Laplace de (4.27) es la siguiente [Sagara88, Sagara90, Garnier03]:

$$\mathcal{L}[I_n\{\rho(t)\}] = \varrho \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^n \mathcal{L}[\rho(t)] = \varrho H_n \mathcal{L}[\rho(t)] \quad (4.28)$$

El operador $I_n(\cdot)$ tiene las siguientes propiedades [Marsden74]:

- $I_n\{\rho_1(t) + \rho_2(t)\} = I_n\{\rho_1(t)\} + I_n\{\rho_2(t)\}$.
- $I_n\{c\rho(t)\} = cI_n\{\rho(t)\}$, donde $c \in \mathbb{R}$.
- Si $|\rho(t)| \leq M$, entonces $|I_n\{\rho(t)\}| \leq M\varrho$.

En el Apéndice E se prueba que la función de transferencia H_n en (4.28) no tiene polos en el origen del plano complejo.

Aplicando el operador $I_5[\cdot]$ a la ecuación (4.26) resulta en:

$$\chi(t) = \phi_1(t)\theta_c + \phi_2(t)\theta_k + I_5[r(t)] + I_5[\lambda(t)] \quad (4.29)$$

donde

$$\phi_1(t) = I_3 \left\{ \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-1)^j \ddot{u}_m(t - j\delta) \right\} \quad (4.30)$$

$$\phi_2(t) = I_4 \left\{ \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-1)^j \ddot{u}_m(t - j\delta) \right\} \quad (4.31)$$

$$\chi(t) = I_2 \left\{ \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (-1)^j z(t - j\delta) \right\} \quad (4.32)$$

El coeficiente binomial utilizando en (4.30), (4.31) y (4.32) se define como:

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

Debido a que \ddot{u}_m y z son señales muestreadas, las integrales que aparecen en las ecuaciones (4.30)-(4.32) se discretizan y se calculan utilizando técnicas de integración numérica como la regla Trapezoidal o la regla de Simpson [Sagara90].

Finalmente, de (4.29) se obtiene la siguiente parametrización empleada para propósitos de identificación:

$$\chi(t) = \phi(t)\theta + I_5[r(t)] + I_5[\lambda(t)] \quad (4.33)$$

donde $\phi(t) = [\phi_1(t) \ \phi_2(t)]$ es el regresor y $\theta = [\theta_c^T \ \theta_k^T]^T$ es el vector de parámetros y se estimará mediante el método de Mínimos Cuadrados con factor de olvido, el cual se describirá en la siguiente sección. El término $I_5[r]$ converge a cero porque r converge a este valor. Además, el término $I_5[\lambda]$ resulta de la atenuación del ruido de medición. A continuación se demuestra que el término $I_5[r]$ converge a cero en el tiempo $t = 5\delta$.

Al usar la ecuación (4.28) se puede expresar la variable $I_5[r]$ en el dominio de la frecuencia como:

$$\mathcal{L}(I_5[r]) = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^5 R(s) \quad (4.34)$$

Sustituyendo $R(s)$ de (4.23) en (4.34) se obtiene

$$\mathcal{L}(I_5[r]) = -D\theta_k \frac{(1 - e^{-\delta s})^5}{s^5} - D\theta_c \frac{(1 - e^{-\delta s})^5}{s^4} + [d + ld_g] \frac{(1 - e^{-\delta s})^5}{s^3} \quad (4.35)$$

La ecuación (4.35) en el dominio del tiempo está dada por:

$$\begin{aligned} I_5[r] = & -\frac{D\theta_k}{4!} \left[\sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} (-1)^j (t - j\delta)^4 \iota(t - j\delta) \right] \\ & - \frac{D\theta_c}{3!} \left[\sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} (-1)^j (t - j\delta)^3 \iota(t - j\delta) \right] \\ & + \frac{d + ld_g}{2!} \left[\sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} (-1)^j (t - j\delta)^2 \iota(t - j\delta) \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde $\iota(t - t_0)$ es la función escalón unitario aplicada en $t = t_0$. Las tres sumatorias en (4.36) que están dentro de los corchetes son cero en $t = 5\delta$. Por ejemplo, la tercera sumatoria de

$t = 5\delta$ a $t = \infty$ está dada por:

$$t^2 - 5[t^2 - 2t\delta + \delta^2] + 10[t^2 - 4t\delta + 4\delta^2] - 10[t^2 - 6t\delta + 9\delta^2] + 5[t^2 - 8t\delta + 16\delta^2] - [t^2 - 10t\delta + 25\delta^2] = 0$$

Similarmente, las otras dos sumatorias son cero después de $t = 5\delta$. Por lo tanto, $I_5[r]$ converge a cero en $t = 5\delta$.

En los siguientes párrafos se obtendrán los filtros en el dominio de la frecuencia que permiten atenuar los componentes de alta frecuencia del ruido de medición.

Usando (4.28) la variable $I_5[\lambda]$ se puede escribir en el dominio de la frecuencia como:

$$\mathcal{L}(I_5[\lambda]) = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^5 \Lambda(s) \quad (4.37)$$

Sustituyendo $\Lambda(s)$ de (4.24) en (4.37) se obtiene:

$$\mathcal{L}(I_5[\lambda]) = -\Sigma(s)(s^2 \varrho G(s)\theta_c + s \varrho G(s)\theta_k) + (\Xi(s) + l\Xi_g(s))s^3 \varrho G(s) \quad (4.38)$$

donde $G(s)$ es el siguiente filtro pasa bajas de quinto orden:

$$G(s) = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^5$$

cuya magnitud está dada por [Sagara88, Eitelberg88, Garnier03]:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{\sin(\pi\omega/\omega_0)}{(\pi\omega/\omega_0)} \right|^5, \quad \omega_c = \frac{2\pi}{\delta} \quad (4.39)$$

el parámetro ω_c determina el ancho de banda del filtro $G(s)$.

Defínanse los siguientes filtros:

$$H_1(s) = s \varrho G(s), \quad H_2(s) = s^2 \varrho G(s), \quad H_3(s) = s^3 \varrho G(s) \quad (4.40)$$

Entonces, la expresión (4.38) se puede reescribir como:

$$\mathcal{L}(I_5[\lambda]) = -\Sigma(s)\theta_c H_2(s) - \Sigma(s)\theta_k H_1(s) + (\Xi(s) + l\Xi_g(s))H_3(s) \quad (4.41)$$

Los componentes de alta frecuencia del ruido de medición se atenúan mediante los filtros H_1 , H_2 y H_3 en (4.40). Éstos se diseñan para pasar el contenido frecuencial de la estructura bajo estudio y para atenuar el ruido de medición. Nótese que el parámetro de diseño de estos filtros es el período de integración δ .

Cabe mencionar que las señales $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ y $\chi(t)$ dadas en (4.30), (4.31) y (4.32) se pueden representar en el dominio de la frecuencia mediante las siguientes expresiones:

$$\mathcal{L}[\phi_1] = H_2(s)\mathcal{L}[\ddot{u}_m], \quad \mathcal{L}[\phi_2] = H_1(s)\mathcal{L}[\ddot{u}_m], \quad \mathcal{L}[\chi] = H_3(s)\mathcal{L}[z] \quad (4.42)$$

La Fig. 4.3 muestra un diagrama de bloques de la técnica de identificación propuesta, así como la implementación de los filtros H_1 , H_2 y H_3 definidos en (4.40).

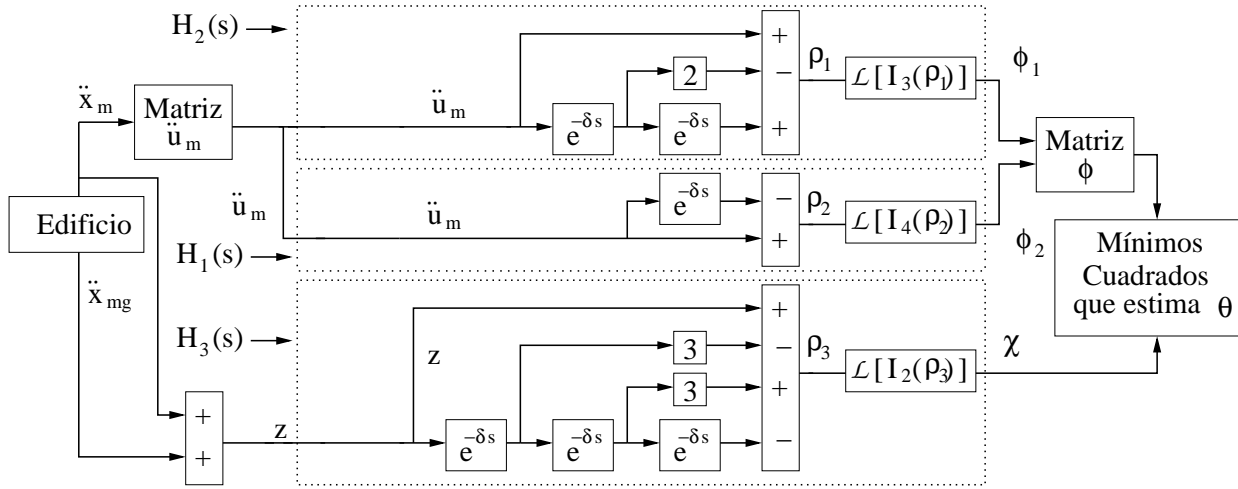


Figura 4.3: Diagrama de bloques asociado a la técnica de identificación propuesta.

La Fig. 4.4 presenta las magnitudes de los filtros en (4.40) con respecto a la frecuencia ω , usando $\delta=0.02s$ y $\varrho=0.025$. Ahí se muestra que los filtros H_i , $i = 1, 2, 3$ dejan pasar un determinado rango de frecuencias; además, en la frecuencia de corte $\omega_c = 314.15$ rad/s de $G(s)$ aparece la primera caída abrupta de la magnitud. Las frecuencias de corte dependen del parámetro ω_c , es decir, si la frecuencia ω_c se incrementa también se incrementarán las frecuencias de corte de H_i , $i = 1, 2, 3$, y viceversa. A partir de las magnitudes mostradas en la Fig. 4.4 se obtienen las frecuencias de corte superior e inferior de H_1 , H_2 y H_3 en rad/s, las cuales son $[\omega_{Hc1} = 122, \omega_{Lc1} = 36]$, $[\omega_{Hc2} = 148, \omega_{Lc2} = 66]$ y $[\omega_{Hc3} = 167, \omega_{Lc3} = 87.5]$, respectivamente. Nótese que las frecuencias de corte ω_{Hci} y ω_{Lci} son aquellas en las cuales la magnitud de la ganancia del filtro H_i se encuentra 3 dB por debajo de su valor máximo.

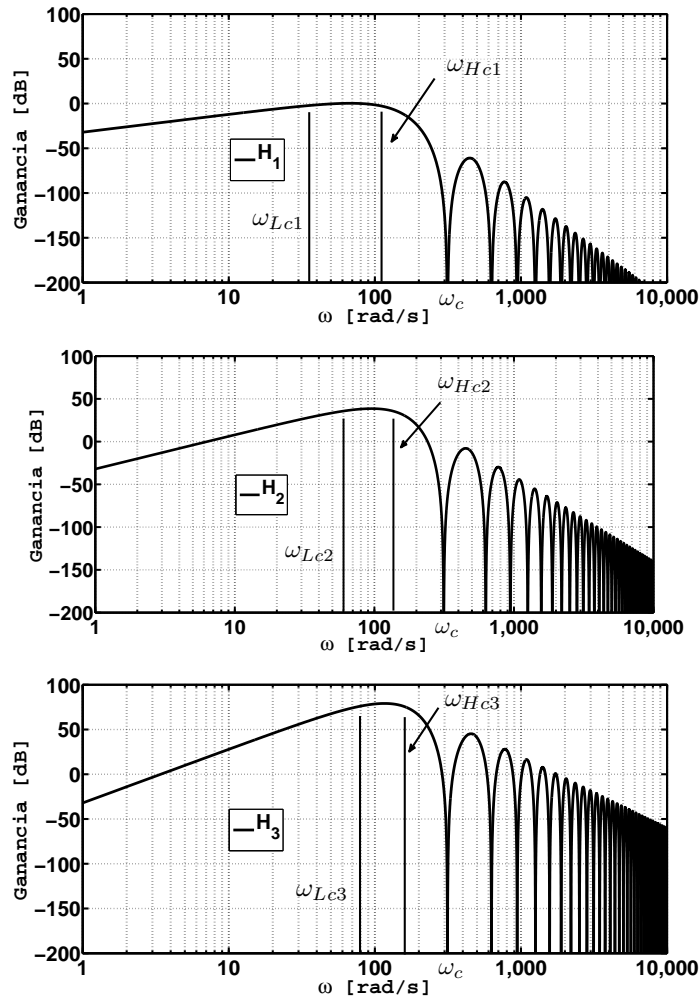


Figura 4.4: Magnitud de los filtros $H_i(s)$, $i = 1, 2, 3$. Las frecuencias de corte ω_{Hci} y ω_{Lci} se indican mediante las líneas continuas verticales.

4.3.1. Atenuación del ruido de medición

El nivel de ruido en los acelerómetros varía directamente con el ancho de banda de la medición [ADI98]. Si se reduce este ancho de banda entonces el nivel de ruido disminuye y se mejora la relación señal/ruido. Dicho ancho de banda se puede reducir mediante los filtros mostrados en (4.40). El nivel de ruido en la salida de los acelerómetros depende de la raíz cuadrada del ancho de banda de la medición, como se muestra en la siguiente ecuación [ADI98]:

$$\text{ruido (rms)} = \iota * \sqrt{\text{BW} * 1.6} \quad (4.43)$$

donde BW es el ancho de banda del filtro que se encuentra en la salida del acelerómetro y se define como la diferencia de las frecuencias de corte superior ω_{H_c} e inferior ω_{L_c} del filtro, es decir, $BW = \omega_{H_c} - \omega_{L_c}$. El parámetro ι se denomina *densidad de ruido* y depende del acelerómetro utilizado.

El ancho de banda de los filtros H_1 , H_2 y H_3 mostrados en la Fig. 4.4 es de 86, 82 y 80 rad/s, respectivamente. El nivel de ruido que corresponde a cada uno de estos anchos de banda se calcula usando la ecuación (4.43).

4.4. Algoritmo de identificación

La ecuación (4.33) también es válida para $t = kT_s$; $k = 0, 1, 2, \dots$, donde T_s es el período de muestreo. Tomando en cuenta la observación anterior es posible escribir (4.33) como:

$$\chi(t) = \phi(kT_s)\theta + I_5[r(kT_s)] + I_5[\lambda(kT_s)] \quad (4.44)$$

Omitiendo el período de muestreo T_s resulta

$$\chi(k) = \phi(k)\theta + I_5[r(k)] + I_5[\lambda(k)] \quad (4.45)$$

Esta parametrización permite utilizar el Método de Mínimos Cuadrados recursivo con factor de olvido (MC-FO) [Åström89], [Söderström89] dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + L(k)\epsilon(k) \\ L(k) &= P(k-1)\phi^T(k)[\beta I + \phi(k)P(k-1)\phi(k)^T]^{-1} \\ P(k) &= [P(k-1) - L(k)\phi(k)P(k-1)]/\beta \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde β es un parámetro tal que $0 < \beta \leq 1$ y se llama factor de olvido, $P = P^T > 0$ es la matriz de covarianza y $\epsilon(k)$ es la salida del error de estimación definido como:

$$\epsilon(k) = \chi(k) - \hat{\chi}(k) \quad (4.47)$$

donde $\chi(k)$ está dado en (4.45) y $\hat{\chi}(k) = \phi(k)\hat{\theta}$.

Substituyendo $\chi(k)$ de (4.45) en (4.47) resulta:

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= \chi(k) - \hat{\chi}(k) = [\phi\theta(k) + I_5[r(k)] + I_5[\lambda(k)] - \phi(k)\hat{\theta}] \\ &= -\phi(k)\tilde{\theta} + I_5[r(k)] + I_5[\lambda(k)] \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ es el error paramétrico.

Supóngase que $I_5[\lambda(k)] = 0$ en (4.48), para que los parámetros estimados $\hat{\theta}$ converjan a su valor real θ la matriz $\phi(k)$ debe satisfacer la siguiente condición de EP dada en (2.17) [Söderström89, Ioannou06]. Ahora considérese $I_5[\lambda(k)] \neq 0$ en (4.48) y suponga que dicha condición de EP se satisface, entonces para relaciones señal/ruido favorables el MC-FO produce buenos resultados [Isermann11b]. Esto significa que los parámetros estimados por este método estarán muy cercanos a los parámetros verdaderos. Los filtros mostrados en (4.40) se diseñan para incluir el contenido frecuencial de la estructura y para reducir el ancho de banda de las mediciones producidas por los acelerómetros. Como consecuencia, la relación señal/ruido sería satisfactoria y el MC-FO produciría buenos resultados en la práctica. El término $I_5[r(k)]$ en (4.48) sólo afectará la respuesta transitoria de $\hat{\theta}$ dependiendo de qué tan rápido converja a cero. Entonces, el MC-FO identificará θ cuando hayan desaparecido los efectos de $I_5[r(k)]$. Es importante mencionar que se utiliza el MC-FO porque su ganancia de adaptación siempre está activa, lo cual no sucede con el método de Mínimos Cuadrados estándar.

4.5. Simulaciones numéricas

A continuación se presenta una simulación numérica para examinar el desempeño del algoritmo propuesto. Se utilizan las siguientes matrices de un edificio de tres pisos, las cuales tienen valores similares a las utilizadas en [Jiménez07]

$$M = \text{diag}(100, 100, 100) \quad (\text{kg})$$

$$C = \begin{bmatrix} 580 & -290 & 0 \\ -290 & 580 & -290 \\ 0 & -290 & 290 \end{bmatrix} \quad (\text{N/m})$$

$$K = 10^6 \begin{bmatrix} 1.28 & -0.64 & 0 \\ -0.64 & 1.28 & -0.64 \\ 0 & -0.64 & 0.64 \end{bmatrix} \quad (\text{N}\cdot\text{s/m})$$

Los vectores θ_c y θ_k obtenidos con estas matrices están dados por:

$$\theta_c = [2.9, 2.9, 2.9, 2.9, 2.9]^T, \quad \theta_k = 10^3 [6.4, 6.4, 6.4, 6.4, 6.4]^T$$

Las tres frecuencias naturales del edificio son $\omega_1=35.608$ rad/s (5.6659 Hz), $\omega_2=99.75$ rad/s (15.87 Hz) y $\omega_3=144$ rad/s (22.918 Hz). Los factores de amortiguamiento asociados son

$\zeta_1=0.8065\%$, $\zeta_2=2.26\%$ y $\zeta_3=3.265\%$. El método numérico de integración trapezoidal permite calcular las integrales de los regresores ϕ_i , $i, j = 1, 2$ y de la señal χ mostrada en (4.30), (4.31) y (4.32), respectivamente. Las integrales de estas variables se evalúan sobre un ventana de longitud $\delta = lT_s=0.02s$, donde $l = 10$ y $T_s = 0.002$. El valor del parámetro ρ en (4.28) es 0.025. El valor inicial de la matriz de adaptación del MC-FO es $P(0) = 10^3 \text{diag}(1,1,1,1,1,1)$ y el factor de olvido es $\beta = 0.9993$. La Fig. 4.4 muestra los diagramas de Bode de los filtros que atenúan el ruido de medición.

Como fuente de excitación sísmica se usó el registro de la componente N-S del sismo El Centro (California, 1940). La amplitud de la excitación se modificó para adecuar los datos acorde a la escala de la estructura. Las mediciones de aceleración de los pisos $\ddot{x}_m = [\ddot{x}_{1m}, \ddot{x}_{2m}, \ddot{x}_{3m}]^T$ y del terreno \ddot{x}_{gm} son contaminadas con las perturbaciones constantes $d_* = [0.174, 0.163, 0.196]^T$ y $d_g=0.156$, respectivamente. Además, se agrega a estas mediciones el ruido producido por el bloque *Random Number* de Simulink, cuyos parámetros son: Mean=0, Variance=0.01, Seed=0 y Sample time=0.002. La Fig. 4.5 presenta la aceleración medida del terreno \ddot{x}_{gm} y las Figuras 4.6, 4.7 y 4.8 muestran la aceleración medida del primer, segundo y tercer piso, respectivamente.

Las Figuras 4.9 (a) y 4.9 (b) muestran la evolución en el tiempo de los parámetros estimados $\hat{\theta}_c$ y $\hat{\theta}_k$, respectivamente. Los valores iniciales son $\hat{\theta}_c(0) = [0, 0, 0, 0, 0]^T$ y $\hat{\theta}_k(0) = 10^3[1, 1, 1, 1, 1]^T$. En las Figuras 4.9 (a) y 4.9 (b) se observa que los parámetros estimados $\hat{\theta}_c$ y $\hat{\theta}_k$ convergen a los parámetros verdaderos en aproximadamente 4s.

4.6. Resumen

Se propuso el algoritmo MIRE que identifica los parámetros del modelo de un edificio utilizando mediciones de aceleración de los pisos y del terreno. El MIRE combina el método de Mínimos Cuadrados con factor de olvido y una parametrización obtenida por medio de integrales evaluadas sobre ventanas de tiempo finito. El algoritmo estima los parámetros incluso cuando las mediciones de aceleración contienen perturbaciones constantes y ruido. El desempeño observado mediante simulaciones numéricas es muy bueno y motiva la realización de futuras pruebas experimentales. Finalmente, cabe mencionar que el MIRE también se puede utilizar para identificar los parámetros de sistemas cuyos modelos tengan una estructura similar a la del modelo del edificio dada en (4.6). Por ejemplo, los modelos de un automóvil [Guglielmino08] y de un sistema de suspensión [Alfi10] tienen

una estructura similar a la presentada en (4.6), y pueden ser identificados por el MIRE utilizando mediciones de aceleración.

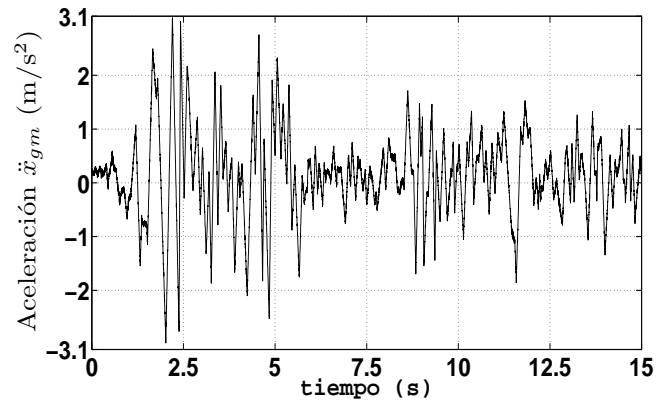


Figura 4.5: Aceleración medida del terreno \ddot{x}_{gm} .

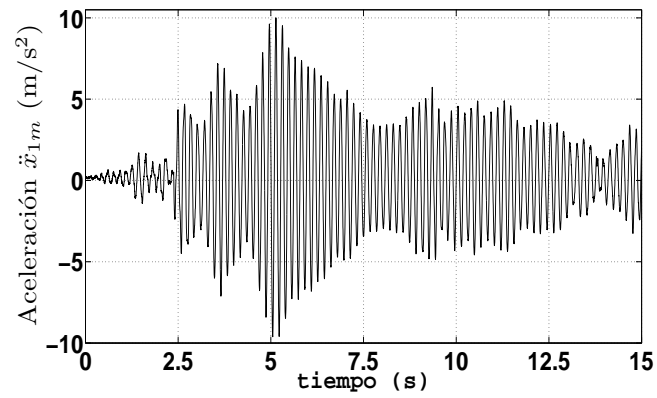
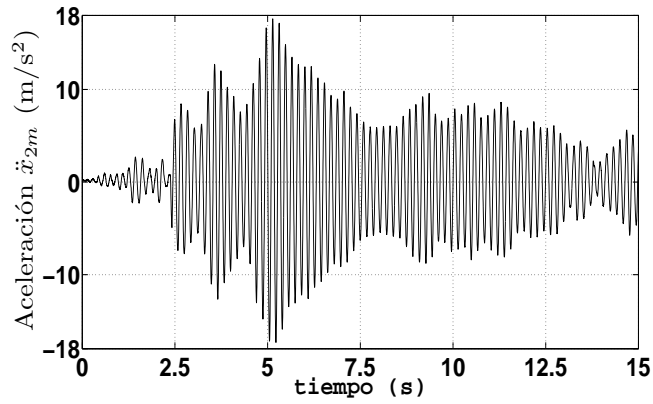
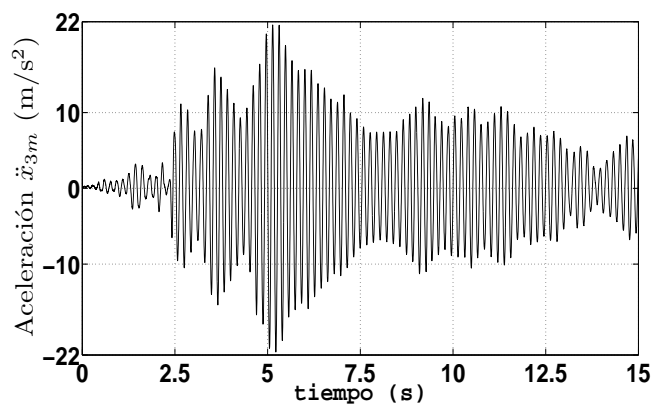


Figura 4.6: Aceleración medida del primer piso \ddot{x}_{1m} .

Figura 4.7: Aceleración medida del segundo piso \ddot{x}_{2m} .Figura 4.8: Aceleración medida del tercer piso \ddot{x}_{3m} .

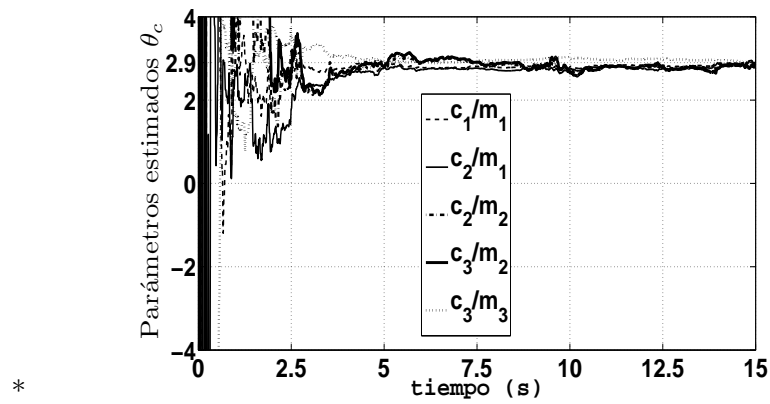
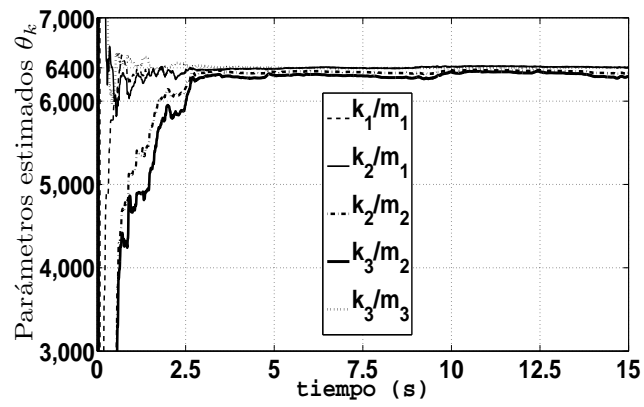
(a) Vector θ_c estimado.(b) Vector θ_k estimado.

Figura 4.9: Parámetros estimados de una estructura de tres grados de libertad.

Capítulo 5

Identificación paramétrica del modelo neuronal de FitzHugh-Nagumo

Este capítulo presenta el método propuesto MIBI, el cual estima los parámetros del modelo neuronal de FitzHugh-Nagumo utilizando sólo mediciones del potencial de membrana, las cuales se supone que contienen ruido.

5.1. Introducción

Las neuronas constituyen las unidades fundamentales del cerebro y es necesario conocer su comportamiento para el estudio de dicho órgano. Varios investigadores han propuesto modelos neuronales [Rabinovich06, Cessac10], los más conocidos son los de: Hodgkin-Huxley (HH) [Hodgkin52], FitzHugh-Nagumo (FHN) [FitzHugh61, Nagumo62], Morris Lecar [Morris81], y Hindmarsh-Rose (HR) [Hindmarsh84]. Los parámetros de estos modelos representan constantes de tiempo, conductancias y umbrales, y su conocimiento es muy importante para determinar el comportamiento de una neurona excitada [Tyukin10, Fairhurst10, Faghieh12].

La identificación paramétrica de modelos neuronales ha sido un tema de investigación en los últimos años. La referencia [Buhry08] identifica los parámetros del modelo de HH usando enfriamiento simulado (simulating annealing, en inglés), algoritmos genéticos

y evolución diferencial. En [Sun11] se propone una técnica adaptable para estimar los parámetros del modelo de HH. Las referencias [Tyukin10, Fairhurst10] proponen un observador adaptable que estima el estado y los parámetros de los modelos neuronales de HR, FHN y Morris-Lecar; en este caso, los autores proponen una transformación de coordenadas con la cual los modelos neuronales pueden ser transformados a la forma canónica observable adaptable. El método presentado en [Deng09] combina el filtro de Kalman sin aroma (Kalman filter unscented [Julier04], en inglés) y una ley de adaptación tipo gradiente para estimar los parámetros de los modelos de FHN y HR. La referencia [Tokuda02] compara dos técnicas adaptables que identifican el modelo de HR. Por otro lado, las referencias [Ramsay07, Liang08, Faghih12, Che12] proponen técnicas de estimación paramétrica del modelo de FHN. Para estimar este modelo la referencia [Che12] propone un método de identificación que emplea el algoritmo de Mínimos Cuadrados y una técnica de atenuación de ruido utilizando la wavelet Daubechies [Daubechies92]; este método se llamará en lo sucesivo Método de Identificación Basado en Derivadas (MIBD), el cual necesita la primera y la segunda derivada del potencial de membrana, y funciona sólo cuando la corriente aplicada a la neurona es continuamente diferenciable. Por ejemplo, los pulsos de corriente empleados frecuentemente para excitar a las neuronas no pueden ser utilizados cuando se identifica con el MIBD. Además, la obtención de dichas derivadas del potencial de membrana puede amplificar componentes de alta frecuencia del ruido. Por otro lado, las referencias [Ramsay07, Liang08] presentan métodos estadísticos para estimar los parámetros del modelo de FHN; en [Ramsay07] se realiza una expansión de funciones base para representar la variable de potencial de membrana, y en [Liang08] se estima la derivada de esta variable para propósitos de identificación. Finalmente, en [Faghih12] se estima el umbral de un modelo de FHN variante en el tiempo.

En este capítulo se propone un método de identificación que estima los parámetros del modelo neuronal de FitzHugh-Nagumo; el algoritmo propuesto se llama Método de Identificación Basado en Integrales (MIBI). El MIBI tiene el mismo objetivo que el MIBD, i.e, eliminar la variable de recuperación del modelo de FHN obteniendo una parametrización que depende sólo de la variable del potencial de membrana. Sin embargo, el MIBI emplea una parametrización basada en integrales evaluadas en ventanas de tiempo finito en lugar de una parametrización que depende de las derivadas del potencial de membrana. Además, en comparación con el MIBD, el MIBI se puede utilizar cuando la corriente aplicada a la neurona es discontinua. Como en el caso del MIBD, el MIBI emplea la wavelet Daubechies

db8 para atenuar el ruido presente en las mediciones del potencial de membrana, y la señal obtenida mediante dicha wavelet se emplea subsecuentemente por el algoritmo de Método de Mínimos Cuadrados fuera de línea, el cual produce estimados de los parámetros del modelo de FHN.

5.2. Modelo de FHN

El modelo de FitzHugh-Nagumo (FHN) fue propuesto por FitzHugh y por Nagumo y es una reducción en dos variables del modelo Hodgkin-Huxley de cuatro variables. El modelo de FHN describe la dinámica del potencial de membrana en el axón gigante de una neurona de calamar, al ser aplicada una estimulación eléctrica externa. Este modelo reproduce características de los impulsos eléctricos de los nervios y de las fibras musculares cardiacas, y es útil en la genética, la biología, la ingeniería, y en sistemas de transferencia de masa y de calor [Collins94, Golubitsky98, Liang08]. El modelo de FHN se describe por medio de las siguientes dos ecuaciones acopladas [FitzHugh61]

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) + bx_1^3(t) - x_2(t) + u(t) \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = dx_2(t) + ex_1(t) + f \quad (5.2)$$

La variable x_1 representa el potencial de membrana, x_2 se conoce como variable de recuperación y u es la corriente externa aplicada a la neurona. Se supone que los parámetros a , b , d y e son desconocidos y que se estimarán mediante el método de identificación propuesto. También se supone que sólo las mediciones del potencial de membrana x_1 están disponibles y que tienen ruido de medición.

5.3. Método de Identificación Basado en Integrales (MIBI)

Integrando la ecuación (5.2) del tiempo inicial $t - \delta$ al tiempo final t resulta en

$$x_2(t) = x_2(t - \delta) + d \int_{t-\delta}^t x_2(\tau) d\tau + e \int_{t-\delta}^t x_1(\tau) d\tau + f\delta \quad (5.3)$$

La expresión puede (5.1) reescribirse como

$$x_2(t) = -\dot{x}_1(t) + ax_1(t) + bx_1^3(t) + u(t) \quad (5.4)$$

Retardando la ecuación (5.4) δ segundos se obtiene

$$x_2(t - \delta) = -\dot{x}_1(t - \delta) + ax_1(t - \delta) + bx_1^3(t - \delta) + u(t - \delta) \quad (5.5)$$

Sustituyendo $x_2(t)$ de (5.4) y $x_2(t - \delta)$ de (5.5) en la ecuación (5.3) se produce la siguiente expresión en términos de $x_1(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(t - \delta) = & (a + d)(x_1(t) - x_1(t - \delta)) + b(x_1^3(t) - x_1^3(t - \delta)) + (-e - ad) \int_{t-\delta}^t x_1(\tau) d\tau \\ & + bd \int_{t-\delta}^t x_1^3(\tau) d\tau - d \int_{t-\delta}^t u(\tau) d\tau - f\delta + [u(t) - u(t - \delta)] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Integrando (5.6) de $t - \delta$ a t permite obtener una expresión que no depende de \dot{x}_1 . Realizando esta operación y utilizando las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \theta_1 = a + d, \quad \theta_2 = b, \quad \theta_3 = -e - ad \\ \theta_4 = -bd, \quad \theta_5 = -d, \quad \theta_6 = -f \end{aligned} \quad (5.7)$$

se obtiene

$$z(t) = \phi^T(t)\theta \quad (5.8)$$

donde

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6]^T, \quad \theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6]^T \quad (5.9)$$

$$z(t) = x_1(t) - 2x_1(t - \delta) + x_1(t - 2\delta) - \int_{t-\delta}^t [u(\tau) - u(\tau - \delta)] d\tau \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \int_{t-\delta}^t [x_1(\tau) - x_1(\tau - \delta)] d\tau, \\ \phi_2(t) &= \int_{t-\delta}^t [x_1^3(\tau) - x_1^3(\tau - \delta)] d\tau \\ \phi_3(t) &= \int_{t-\delta}^t \int_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} x_1(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \\ \phi_4(t) &= \int_{t-\delta}^t \int_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} x_1^3(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1, \\ \phi_5(t) &= \int_{t-\delta}^t \int_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} u(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1, \\ \phi_6(t) &= \delta^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

La ecuación (5.8) está escrita en la forma general de regresión lineal. El vector ϕ es el regresor, y θ es el vector que contiene los parámetros que se estimarán. Las señales z y ϕ_i $i = 1, \dots, 6$ dependen de x_1 y u , y se utilizarán para identificar a θ .

5.3.1. Atenuación del ruido de medición

En la práctica las mediciones del potencial de membrana ξ tienen ruido, i.e,

$$x_{1m}(t) = x_1(t) + \xi(t) \quad (5.12)$$

donde x_{1m} es el potencial de membrana medido. Si las mediciones x_{1m} tienen ruido ξ , entonces ξ necesita atenuarse antes de que las mediciones del potencial de membrana se utilicen para propósitos de identificación paramétrica. Una técnica que es muy efectiva para atenuar ruido es la transformada wavelet, la cual fue empleada previamente por el MIBD [Che12] y se utilizará por el MIBI. Sea x_{1m} la entrada y x_{1w} la salida de la transformada wavelet. Suponiendo una buena atenuación del ruido ξ , la señal de salida de la wavelet x_{1w} es esencialmente igual a x_1 ; por lo tanto, esta salida será empleada en lugar de x_1 para obtener las señales z y ϕ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ dadas en (5.10) y (5.11).

5.4. Método de Mínimos Cuadrados fuera de línea

La ecuación (5.8) también es válida para $t = kT_s$; $k = 0, 1, 2, \dots$, donde T_s es el período de muestreo. Entonces, la expresión (5.8) se puede reescribir como

$$z(kT_s) = \phi^T(kT_s)\theta \quad (5.13)$$

Omitiendo T_s resulta en

$$z(k) = \phi^T(k)\theta \quad (5.14)$$

Utilizando N muestras de z y de ϕ se obtiene el siguiente estimado $\hat{\theta}$ de θ mediante el Método de Mínimos Cuadrados fuera de línea [Ljung87]

$$\hat{\theta}_N^{MC} = \left[\sum_{k=1}^N \phi(k)\phi^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \phi(k)z(k) \quad (5.15)$$

Nótese que la solución $\hat{\theta}_N^{MC}$ existe si la matriz $\sum_{k=1}^N \phi(k)\phi^T(k)$ es invertible. La invertibilidad de esta matriz se cumple si la neurona se excita persistentemente por la señal de entrada [Isermann11b]. Una vez que se ha identificado a $\hat{\theta}$, los parámetros estimados \hat{a} , \hat{b} , \hat{d} , \hat{e} y \hat{f} del modelo de FHN en (5.1) y (5.2) se pueden obtener utilizando las siguientes

relaciones:

$$\begin{aligned}
 \hat{a} &= \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_5 \\
 \hat{b} &= -\hat{\theta}_2 \\
 \hat{d} &= -\hat{\theta}_5 \\
 \hat{e} &= (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_5)\hat{\theta}_5 - \hat{\theta}_3 \\
 \hat{f} &= -\hat{\theta}_6
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.5. Simulaciones numéricas

En esta sección se presentan varias simulaciones para evaluar el desempeño del método propuesto utilizando el siguiente modelo FHN

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_1(t) - \frac{1}{3}x_1^3(t) - x_2(t) + u(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= -0.08x_1(t) + 0.1x_2(t) + 0.07
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

El modelo (5.17) se empleó previamente en [Che12]. Se consideran dos casos, uno donde la entrada $u(t)$ del modelo (5.17) es una senoide

$$u_1(t) = 0.4 \sin(2\pi f_s t) \tag{5.18}$$

y otro donde $u(t)$ es la señal discontinua

$$u_2(t) = 0.4 \text{sign}(\sin(2\pi f_s t)) \tag{5.19}$$

donde $f_s = 0.12$ Hz. El modelo en (5.17) y el MIBI se programaron utilizando Matlab-Simulink. Todas las simulaciones manejan un período de muestreo de $T_s=1\text{ms}$ y el Método de Integración Trapezoidal (MINT). La salida del bloque *Random Number* de Simulink produce el ruido ξ , el cual se suma al potencial de membrana x_1 para obtener las mediciones x_{1m} (5.12). Los parámetros de este bloque son los siguientes: Mean=0, Variance=0.0001, Seed=0, y Sample time= T_s . El Método de Mínimos Cuadrados empleado por el MIBI toma 20,000 muestras de x_{1m} para identificar los parámetros del modelo de FHN; estas muestras se obtuvieron en el intervalo 0-20s. El MINT permite calcular las integrales de la señal z en (5.10) y de los componentes del regresor ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ en (5.11). Las Figuras 5.1 (a) y 5.1 (b) presentan el espectro de x_{1m} cuando la entrada del modelo neuronal es u_1 y u_2 , respectivamente. En estas figuras se observa que el contenido frecuencial de x_{1m} se encuentra

principalmente entre 0 y 0.5 Hz. La wavelet Daubechies db8 se usa para atenuar el ruido presente en las mediciones x_{1m} del potencial de membrana; el nivel de descomposición de la wavelet es 10. La salida x_{1w} de la wavelet Daubechies se usa subsecuentemente en lugar de x_1 en (5.10) y en (5.11) para obtener las señales z y ϕ_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Cabe mencionar que el valor del umbral de ruido asociado a la wavelet db8 lo proporciona la función `ddencmp()` de Matlab. Además, ésta notifica al usuario si el umbral debería ser suave o duro [Donoho95]. Por otro lado, la función `wdencmp()` de Matlab realiza el proceso de atenuación de ruido de la señal x_{1m} usando los parámetros obtenidos previamente mediante la función `ddencmp()`. La Figura 5.2 (a) muestra la señal x_{1m} , y la Figura 5.2 (b) compara la señal de salida x_{1w} de la wavelet y la señal sin ruido x_1 . Se observa que las señales x_{1w} y x_1 son muy similares. Por lo tanto, la wavelet db8 con nivel 10 prácticamente remueve el ruido de medición.

La Tabla 5.1 muestra los parámetros estimados por el MIBI para tres valores diferentes del parámetro δ en (5.10) y en (5.11), i.e. $\delta_1 = 2s$, $\delta_2 = 4s$ y $\delta_3 = 8s$, cuando la entrada u_1 en (5.18) se aplica a (5.17). Esta tabla 5.1 también compara los parámetros identificados por el MIBI con los parámetros obtenidos por el MIBD en [Che12]. Nótese que las simulaciones para el MIBI se ejecutan utilizando las mismas condiciones empleadas en la referencia [Che12] tales como período de muestreo, señal de entrada, ruido de medición y wavelet. En la Tabla 5.1 se observa que los parámetros estimados por el MIBI son muy similares a los estimados por el MIBD. Por otro lado, la Tabla 5.2 presenta los parámetros estimados por el MIBI cuando se usa la entrada $u(2)$ (5.19). Nótese que los parámetros identificados por el MIBI cuando $u = u_1$ son muy similares a los parámetros estimados cuando $u = u_2$. Cabe recordar que el MIBD funciona sólo si la entrada es continuamente diferenciable; por lo tanto, este método no funcionará usando la entrada u_2 .

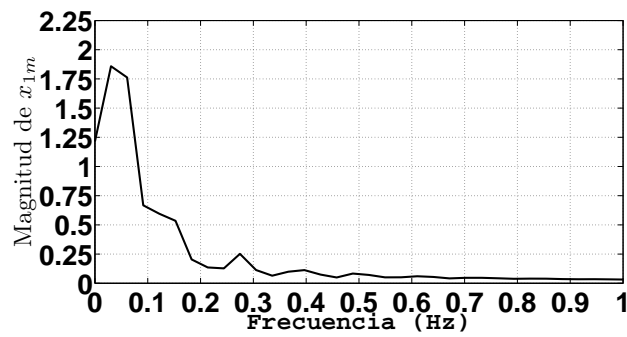
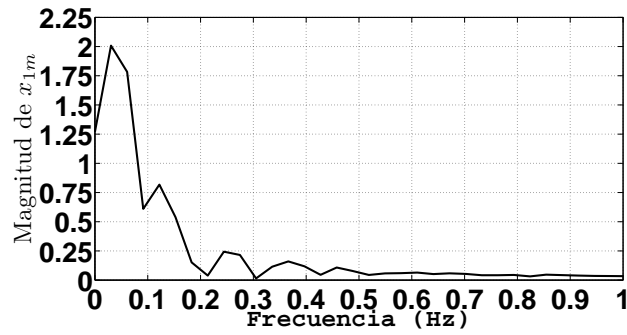
La validación de los modelos identificados por el MIBD y por el MIBI se realiza calculando con estos modelos los estados estimados \hat{x}_1 y \hat{x}_2 de x_1 y x_2 . Para la validación se resuelven las ecuaciones diferenciales ordinarias en (5.17) utilizando los modelos mostrados en la Tabla 5.1. Los errores $\epsilon_1 = \hat{x}_1 - x_1$ y $\epsilon_2 = \hat{x}_2 - x_2$ en la estimación de estado se muestrean p veces y el valor de las muestras $\epsilon_1(j)$ y $\epsilon_2(j)$ se emplean para calcular los siguientes índices

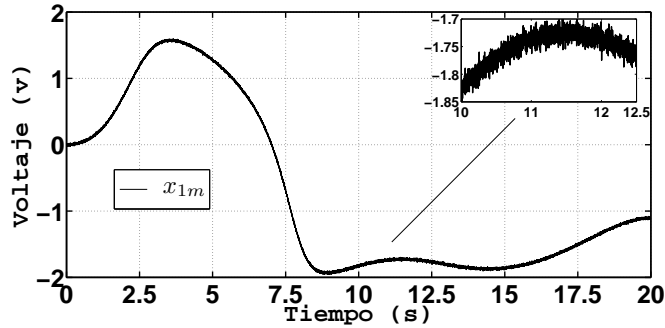
$$E_1 = \sum_{i=1}^p \epsilon_1(i)^2, \quad E_2 = \sum_{i=1}^p \epsilon_2(i)^2 \quad (5.20)$$

los cuales son una medida de la calidad del modelo.

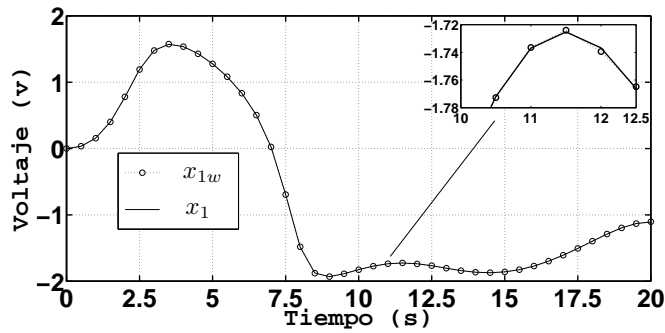
La Tabla 5.3 muestra las sumatorias E_1 y E_2 en (5.20) calculadas para $p = 20,000$.

Se observa que el mejor desempeño se obtiene mediante el MIBI cuando $\delta = \delta_3 = 8s$. Las Figuras 5.3 (a) y 5.3 (b) comparan, respectivamente, las señales \hat{x}_1 y x_1 , y las señales \hat{x}_2 y x_2 ; los estados estimados \hat{x}_1 y \hat{x}_2 se generan utilizando el modelo obtenido con los parámetros mostrados en la Tabla 5.1 que corresponden al MIBI para $\delta = \delta_3$. Estas figuras muestran que el modelo estimado y el modelo nominal tienen un comportamiento similar.

(a) Espectro de x_{1m} cuando $u = u_1$.(b) Espectro de x_{1m} cuando $u = u_2$.Figura 5.1: Espectro de x_{1m} .



(a) x_{1m} .



(b) x_1 vs x_{1w} .

Figura 5.2: Señales x_1 , x_{1m} y x_{1w} .

5.6. Resumen

Se propuso el algoritmo MIBI que identifica los parámetros del modelo de FitzHugh-Nagumo (FHN) de una neurona usando mediciones del potencial de membrana de la neurona. El algoritmo propuesto combina el método de Mínimos Cuadrados fuera de línea, la wavelet Daubechies db8 para atenuar el ruido de medición, y una parametrización obtenida por medio de integrales evaluadas en ventanas de tiempo finito. El MIBI se compara con el MIBD el cual también emplea una parametrización que sólo depende del potencial de membrana. El MIBI tiene las siguientes dos ventajas con respecto al MIBD. Primera, el MIBI no requiere de la estimación de la primera y de la segunda derivada del potencial de membrana. Segunda, el MIBI se puede utilizar cuando la corriente aplicada a la neurona es discontinua. La validación de los modelos obtenidos por el MIBD y por el MIBI se realiza al comparar los estados estimados por dichos modelos con el estado del modelo nominal. Simulaciones numéricas, en las cuales el modelo de FHN se excita con una señal de corriente

Tabla 5.1: Parámetros estimados cuando $u = u_1$.

	δ	\hat{a}	\hat{b}	\hat{d}	\hat{e}	\hat{f}
Valor nominal		1	-0.3333	-0.08	0.1	0.07
MIBD	–	0.98741	-0.33031	-0.078545	0.099275	0.069783
MIBI	δ_1	0.999	-0.3328	-0.0805	0.0988	0.0705
MIBI	δ_2	0.999	-0.3326	-0.0805	0.0990	0.0705
MIBI	δ_3	0.999	-0.3324	-0.0810	0.0999	0.0703

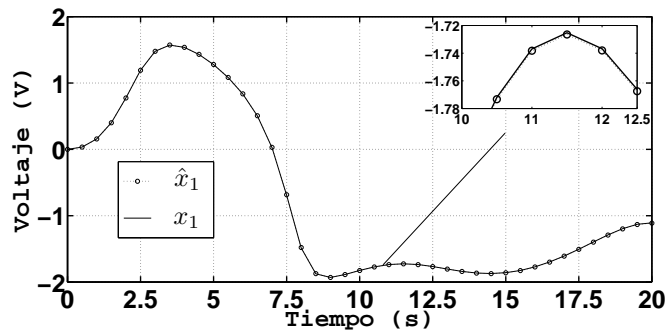
Tabla 5.2: Parámetros estimados cuando $u = u_2$.

	δ	\hat{a}	\hat{b}	\hat{d}	\hat{e}	\hat{f}
Valor nominal		1	-0.3333	-0.08	0.1	0.07
MIBI	δ_1	0.9985	-0.3328	-0.0793	0.0994	0.0698
MIBI	δ_2	1.0002	-0.3336	-0.0797	0.1025	0.0694
MIBI	δ_3	0.9990	-0.3328	-0.0808	0.103	0.0696

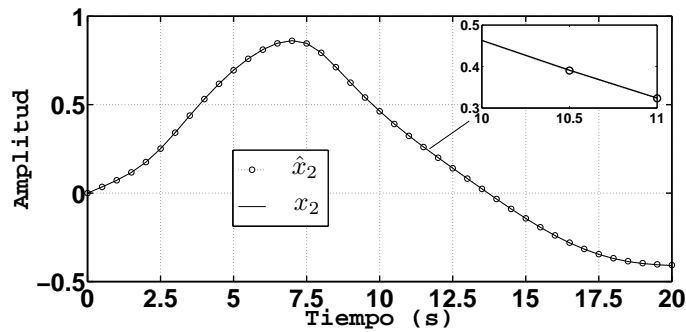
continuamente diferenciable, indican que los parámetros obtenidos por el MIBI son muy similares a los obtenidos por el MIBD. Además, las simulaciones numéricas muestran que el MIBI también funciona cuando la corriente de entrada aplicada a la neurona es discontinua.

Tabla 5.3: Índices de desempeño E_1 y E_2 para los modelos identificados en la Tabla 5.1.

	δ	E_1	E_2
MIBD	–	1.1134	0.4181
MIBI	δ_1	1.0709	0.7164
MIBI	δ_2	0.8561	0.6007
MIBI	δ_3	0.3226	0.1316



(a) x_1 vs \hat{x}_1 .



(b) x_2 vs \hat{x}_2 .

Figura 5.3: Comparación entre los estados estimados y los nominales.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se propusieron cuatro algoritmos de identificación, uno llamado Método de Identificación Recursivo Algebraico (MIRA) que estima los parámetros del modelo de un servomecanismo de CD controlado en posición; un segundo denominado Método basado en las Respuestas en Estado Estacionario (MREE) que identifica la inercia y la fricción de un servo de CD controlado en velocidad; otro llamado Método de Identificación Recursivo de Edificios (MIRE) que estima los parámetros del modelo de un edificio de n grados de libertad utilizando las mediciones de aceleración del terreno y de los pisos del edificio; y uno nombrado Método de Identificación Basado en Integrales (MIBI) el cual obtiene los parámetros del modelo de FitzHugh-Nagumo (FHN) de una neurona utilizando sólo mediciones del potencial de membrana. Se mostró que los cuatro métodos son robustos ante ruido de medición. La Tabla 6.1 resume cada uno de los cuatro métodos. El MREE realiza la identificación utilizando respuestas en estado estacionario; el MIRA y el MIRE llevan a cabo la identificación en línea o de manera recursiva; y el MIBI estima los parámetros fuera de línea. Para que los parámetros estimados por el MIRA y el MIRE converjan a los parámetros verdaderos el vector regresor asociado a dichas técnicas debe cumplir una condición de excitación persistente. Por otro lado, el MREE proporciona reglas para diseñar las señales de referencia que garantizan la identificación de los parámetros nominales del servo; finalmente, el MIBI estima los parámetros del modelo de FHN si existe la inversa de una matriz que depende del vector regresor; la existencia de dicha matriz se garantiza si la neurona se excita persistentemente por la señal de entrada.

El MIRA combina el algoritmo de Mínimos Cuadrados y una parametrización obtenida mediante el Cálculo Operacional y empleada por el Método de Identificación Al-

Tabla 6.1: Métodos de Identificación propuestos.

Método	Modelo que estima	Características
MIRA	servomecanismo	es recursivo
MREE	servomecanismo	basado en respuestas en estado estacionario
MIRE	edificio	es recursivo
MIBI	neurona	realiza la identificación fuera de línea

gebraico (MIA). El MIRA consiste en dos pasos, en el primero identifica la parte lineal del modelo del servomecanismo y en el segundo estima una perturbación constante y el coeficiente de la fricción de Coulomb. Al dividir el proceso de identificación del MIRA en dos pasos se pueden utilizar señales de excitación suaves con un espectro simple, y se evita el uso de señales de excitación violentas y potencialmente perjudiciales para el servomecanismo. El MIRA se comparó con el MIA desde el punto de vista experimental. La validación del modelo identificado por el MIA y la del modelo estimado por el MIRA se realizó mediante el diseño una ley de control para el seguimiento de una trayectoria. De los experimentos realizados con un motor de CD con escobillas se desprenden las siguientes conclusiones:

- En ciertos instantes de tiempo el MIA presenta singularidades, es decir produce valores elevados de los parámetros estimados porque el determinante empleado para solucionar un conjunto de ecuaciones simultaneas es cercano a cero.
- El MIRA elimina el problema de singularidades que presenta el MIA.
- EL MIRA y el MIA generan estimados similares a los obtenidos usando la hoja de datos del motor y del amplificador.
- El tiempo de convergencia paramétrica del MIRA y del MIA es similar, aproximadamente 3.5s.
- El error de seguimiento de trayectoria obtenido con el modelo identificado por el MIRA o con el modelo identificado por el MIA es muy pequeño; por lo tanto, los parámetros estimados por ambos métodos son muy cercanos a los parámetros reales.

Por otro lado, el MREE utiliza las respuestas en estado estacionario obtenidas al aplicar velocidades de referencia constantes y sinusoidales. La ventaja de utilizar estas señales de excitación es que producen señales de control suaves y no provocan vibración en

el servo. El control de velocidad se llevó a cabo reemplazando la velocidad del servo por un filtrado de la posición del motor y de la velocidad de referencia deseada. Al igual que el MIRA, el MREE consiste en dos pasos, en el primero aplica tres velocidades de referencia constantes al servo para estimar los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb y una perturbación constante. En el segundo paso el MREE estima la inercia del servo, para ello utiliza una velocidad de referencia que contiene una señal sinusoidal más una señal constante, y emplea el estimado de la fricción viscosa obtenido en el primer paso. El MREE se comparó experimentalmente con el método de Mínimos Cuadrados Recursivo (MCR) convencional. El MREE requiere del cálculo de 3 ecuaciones algebraicas y de dos raíces cuadradas, a comparación del MCR que requiere del cálculo de 9 ecuaciones en diferencias. De los resultados obtenidos en el laboratorio con un motor de CD sin escobillas se obtienen las siguientes conclusiones:

- El MREE puede identificar la inercia con un error menor al 2.5 %.
- Los parámetros estimados por el MREE y los obtenidos por el MCR son muy similares a los parámetros nominales del servomecanismo.
- El modelo estimado por el MREE al ser validado produce un error de seguimiento menor que el modelo estimado por el MCR.

Por otra parte, el MIRE emplea el algoritmo de Mínimos Cuadrados con factor de olvido y una parametrización obtenida mediante integrales evaluadas en períodos de tiempo finito. El período en el se evalúan las integrales depende del ancho de banda de la estructura bajo estudio. De las simulaciones realizados con un edificio de tres grados de libertad se desprenden las siguientes conclusiones:

- El MIRE estima los parámetros del edificio aún cuando las mediciones de aceleración tienen perturbaciones constantes y ruido.
- El tiempo de convergencia de los parámetros estimados a los reales es de aproximadamente 4s.

Finalmente, el MIBI combina el método de Mínimos Cuadrados fuera de línea, la wavelet Daubechies db8 con nivel 10 para atenuar el ruido de medición, y una parametrización basada integrales evaluadas en ventanas de tiempo finito. El MIBI elimina la variable de

recuperación del modelo de FHN y obtiene una parametrización que depende sólo del potencial de membrana de la neurona. La validación del modelo obtenido mediante el MIBI se realiza al comparar los estados predichos por dicho modelo con el estado de un modelo nominal. El MIBI se compara con un algoritmo de identificación nombrado como Método de Identificación Basado en Derivadas (MIBD), el cual también emplea una parametrización que depende sólo del potencial de membrana. El MIBI tiene las siguientes dos ventajas con respecto al MIBD:

1. El MIBI no requiere de la estimación de la primera y de la segunda derivada del potencial de membrana.
2. El MIBI se puede utilizar cuando la corriente aplicada a la neurona es discontinua.

De las simulaciones realizadas con un modelo de FHN se desprenden las siguientes conclusiones:

- La wavelet db8 con nivel 10 remueve el ruido de medición presente en el potencial de membrana.
- Cuando el modelo de FHN se excita con una señal de corriente continuamente diferenciable, los parámetros obtenidos por el MIBI son muy similares a los obtenidos por el MIBD.
- El MIBI también funciona cuando la corriente de entrada aplicada a la neurona es discontinua.
- El estado estimado que produce el modelo obtenido por el MIBI es muy similar al estado de un modelo nominal.

6.1. Trabajos futuros

- Emplear el MIRA para la estimación de parámetros variantes en el tiempo y para la identificación de robots manipuladores.
- Modificar el MREE para estimar los parámetros de un servomecanismo de CD con desplazamientos limitados.

- Emplear el MIRE para la identificación de otros sistemas utilizando mediciones de aceleración, por ejemplo, automóviles, suspensiones, y sistemas rotacionales compuestos por masas, resortes y amortiguadores.
- Realizar experimentos con edificios a escala reducida que permitan mostrar la eficacia del MIRE en tiempo real.
- Modificar el MIBI para estimar los parámetros del modelo FHN de manera recursiva.

Apéndice A

Obtención del modelo de un servomecanismo de CD

El diagrama de bloques 2.1 se puede reescribir como se muestra en la Fig. A.1. Los valores de los parámetros del diagrama A.1 se muestran en la Tabla 2.1

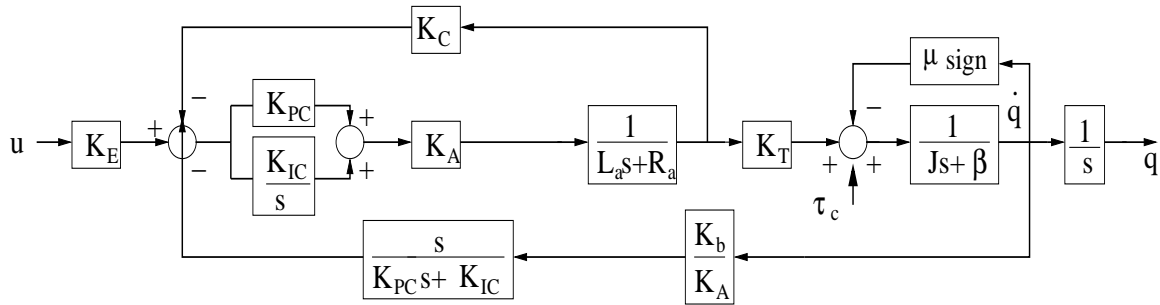


Figura A.1: Diagrama de bloques equivalente al de la Fig. 2.1.

Las ganancias K_{PC} y K_{IC} de la Fig. A.1 están dadas por las siguientes expresiones:

$$K_{PC} = \frac{R_2}{R_1} \quad K_{IC} = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (\text{A.1})$$

donde R_1 y R_2 son resistencias y C_1 es un capacitor. Los valores de estos parámetros son:

$$R_1 = 10\text{k}\Omega, \quad R_2 = 47\text{k}\Omega, \quad C_1 = 4.7\text{nF}$$

En el Apéndice B se presenta el circuito esquemático del amplificador de potencia en el cual aparecen los componentes R_1 , R_2 , C_1 y las ganancias K_E , K_{PC} , K_{IC} , K_A y K_C .

Por otro lado, como el polo $s = -\frac{K_{IC}}{K_{PC}} = -4526.9$ de la función de transferencia $\frac{s}{K_{PC}s + K_{IC}}$ mostrada en la Fig. A.1 está mucho más alejado del origen del plano complejo que el polo $s = -\frac{\beta}{J} = -0.1916$, la función de transferencia $\frac{s}{K_{PC}s + K_{IC}}$ se puede aproximar a bajas frecuencias por $\frac{s}{K_{IC}}$, obteniéndose el diagrama de bloques mostrado en la Fig. A.2.

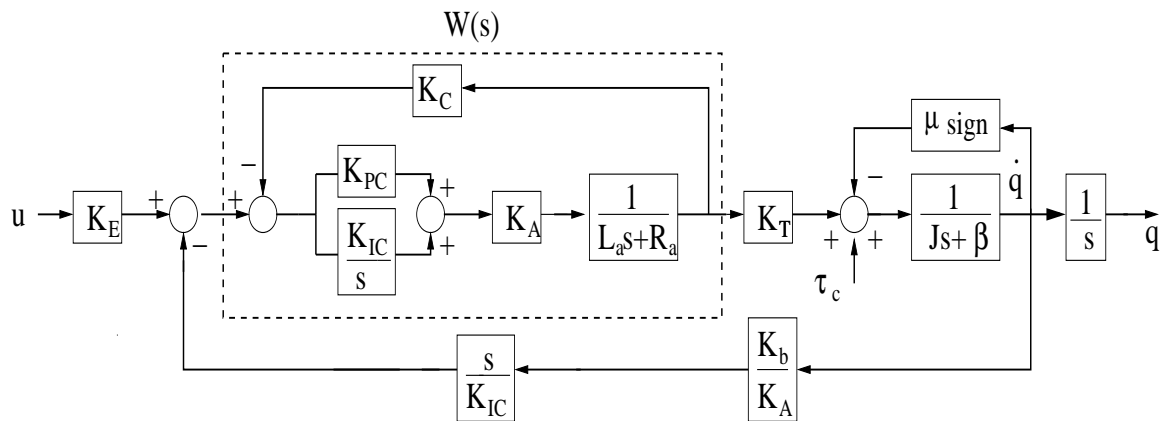


Figura A.2: Diagrama de bloques reducido.

La función de transferencia $W(s)$ de la Figura A.2 está dada por:

$$\begin{aligned}
 W(s) &= \frac{\frac{K_A(K_{PC}s + K_{IC})}{s(L_a s + R_a)}}{1 + \frac{K_C K_A (K_{PC}s + K_{IC})}{s(L_a s + R_a)}} = \frac{K_A(K_{PC}s + K_{IC})}{L_a s^2 + (R_a + K_C K_A K_{PC})s + K_C K_A K_{IC}} \\
 &= \frac{\left(\frac{K_C K_A K_{IC}}{L_a}\right) \left(\frac{K_{PC}}{K_{IC}}s + 1\right)}{s^2 + \left(\frac{R_a + K_C K_A K_{PC}}{L_a}\right)s + \frac{K_C K_A K_{IC}}{L_a}} \left(\frac{1}{K_C}\right) = \frac{\omega_n^2 \left(\frac{K_{PC}}{K_{IC}}s + 1\right)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \left(\frac{1}{K_C}\right)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_C K_A K_{IC}}{L_a}} = 2062.84$$

es la frecuencia natural no amortiguada y

$$2\xi\omega_n = \left(\frac{R_a + K_C K_A K_{PC}}{L_a}\right) = 1348.33$$

donde ξ es el factor de amortiguamiento.

Como los polos de $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$, que son $s_1 = -674.2 + 1949.6i$ y $s_2 = -674.2 - 1949.6i$ están más alejados del origen del plano complejo que el polo $s = -\beta/J = -0.1916$, la función de transferencia $W(s)$ descrita en la ecuación (A.2) se puede aproximar a bajas frecuencias por

$$W(s) = \frac{\omega_n^2 \left(\frac{K_{PC}}{K_{IC}} s + 1 \right)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \left(\frac{1}{K_C} \right) \approx \left(\frac{1}{K_C} \right) \quad (\text{A.3})$$

Así se tiene el diagrama de bloques reducido mostrado en la Fig. A.3.

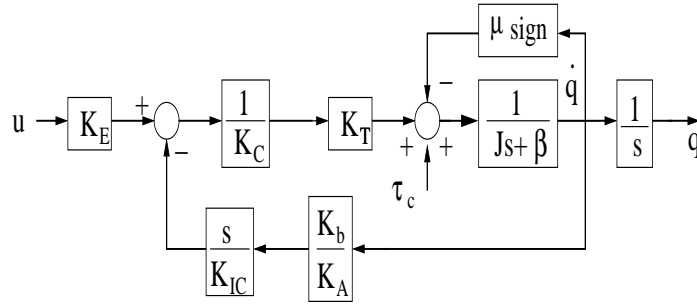


Figura A.3: Diagrama de bloques simplificado.

La función de transferencia $Q(s)/U(s)$ del diagrama A.3 está dada por:

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \left[\frac{K_T}{\left(K_C J + \frac{K_T K_b}{K_{IC} K_A} \right) s + K_C \beta} \right] \left(\frac{K_E}{s} \right) \quad (\text{A.4})$$

El término $\frac{K_T K_b}{K_{IC} K_A} = 4.333 \times 10^{-6}$ es mucho menor que $K_C J = 1.8622 \times 10^{-3}$, o es 429.77 veces más pequeño que $K_C J$. Entonces, $\left(K_C J + \frac{K_T K_b}{K_{IC} K_A} \right)$ en (A.4) se puede aproximar por $K_C J$, obteniéndose la siguiente función de transferencia

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{\left(\frac{K_E K_T}{K_C} \right)}{J s + \beta} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{K}{J s + \beta} \left(\frac{1}{s} \right) \quad (\text{A.5})$$

donde $K = \frac{K_E K_T}{K_C}$.

También se tiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Q(s)}{\mathcal{L}[\tau_c - \mu \text{sign}(\dot{q}(t))]} = \left[\frac{1}{\left(J + \frac{K_T K_b}{K_C K_{IC} K_A} \right) s + \beta} \right] \left(\frac{1}{s} \right) \quad (\text{A.6})$$

donde $\mathcal{L}[\cdot]$ es la transformada de Laplace del argumento $[\cdot]$.

Como el término $\frac{K_T K_b}{K_C K_{IC} K_A}$ es 429.77 veces más pequeño que J , la función de transferencia (A.6) se puede aproximar mediante:

$$\frac{Q(s)}{\mathcal{L}[\tau_c - \mu \text{sign}(\dot{q}(t))]} = \left[\frac{1}{Js + \beta} \right] \left(\frac{1}{s} \right) \quad (\text{A.7})$$

Usando (A.5) y (A.7) se tiene que la salida completa de $Q(s)$ está dada por:

$$Q(s) = \left[\frac{1}{s(Js + \beta)} \right] (KU(s) + \mathcal{L}[\tau_c - \text{sign}(\dot{q}(t))]) \quad (\text{A.8})$$

La expresión (A.8) se puede escribir en el dominio del tiempo como:

$$J\ddot{q}(t) + \beta\dot{q}(t) = Ku(t) + \tau_c - \mu \text{sign}(\dot{q}(t)) \quad (\text{A.9})$$

Definiéndose

$$a = \frac{\beta}{J}, \quad b = \frac{K}{J}, \quad c = \frac{\mu}{J}, \quad d = \frac{\tau_c}{J}$$

se obtiene finalmente

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) - c\text{sign}(\dot{q}(t)) + d \quad (\text{A.10})$$

En conclusión, el modelo (A.10) del servomecanismo es válido a bajas frecuencias y considerando un lazo de realimentación de corriente de armadura de alta ganancia.

Apéndice B

Circuito del amplificador usado en los experimentos con el servomecanismo de CD

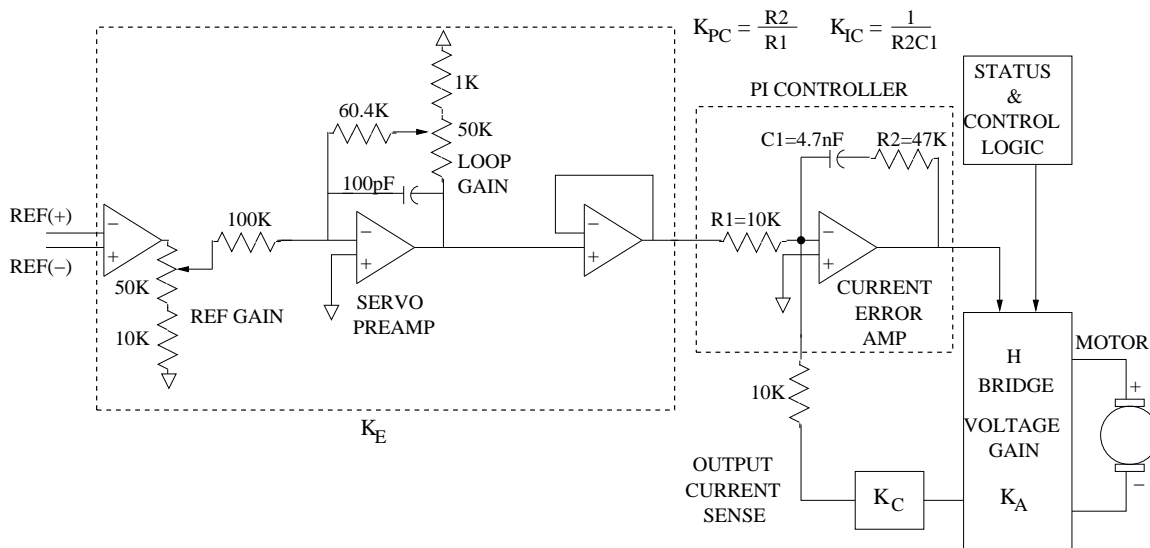


Figura B.1: Circuito esquemático del amplificador de potencia [Copleya].

Apéndice C

Parametrización usada por el MIA

En esta sección se obtiene la parametrización (2.7) empleada por el MIA. La transformada de Laplace de (2.6) está dada por

$$s^2Q(s) - sq(0) - \dot{q}(0) = -a(sQ(s) - q(0)) + bU(s) + \frac{\nu}{s} \quad (\text{C.1})$$

donde $Q(s)$ y $U(s)$ son las transformadas de Laplace de $q(t)$ y $u(t)$ respectivamente. Multiplicando (C.1) por s resulta en

$$s^3Q(s) - s^2q(0) - s\dot{q}(0) = -a(s^2Q(s) - sq(0)) + bsU(s) + \nu \quad (\text{C.2})$$

Derivando (C.2) tres veces con respecto a s se cancelan las condiciones iniciales $q(0)$ y $\dot{q}(0)$ y el término constante ν , generándose la siguiente expresión

$$\frac{d^3}{ds^3}[s^3Q(s)] = -a\frac{d^3}{ds^3}[s^2Q(s)] + b\frac{d^3}{ds^3}[sU(s)] \quad (\text{C.3})$$

donde

$$\frac{d^3}{ds^3}[s^3Q(s)] = s^3\frac{d^3Q(s)}{ds^3} + 9s^2\frac{d^2Q(s)}{ds^2} + 18s\frac{dQ(s)}{ds} + 6Q(s) \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{d^3}{ds^3}[s^2Q(s)] = s^2\frac{d^3Q(s)}{ds^3} + 6s\frac{d^2Q(s)}{ds^2} + 6\frac{dQ(s)}{ds} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{d^3}{ds^3}[sU(s)] = s\frac{d^3U(s)}{ds^3} + 3\frac{d^2U(s)}{ds^2} \quad (\text{C.6})$$

Sustituyendo (C.4), (C.5) y (C.6) en (C.3) produce

$$\begin{aligned} s^3\frac{d^3Q(s)}{ds^3} + 9s^2\frac{d^2Q(s)}{ds^2} + 18s\frac{dQ(s)}{ds} + 6Q(s) &= -a \left[s^2\frac{d^3Q(s)}{ds^3} + 6s\frac{d^2Q(s)}{ds^2} + 6\frac{dQ(s)}{ds} \right] \\ &+ b \left[s\frac{d^3U(s)}{ds^3} + 3\frac{d^2U(s)}{ds^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Multiplicando (C.7) por s^{-3} resulta en

$$Z_1(s) = \Phi_{11}(s)a + \Phi_{12}(s)b \quad (\text{C.8})$$

donde

$$Z_1(s) = \frac{d^3Q(s)}{ds^3} + 9s^{-1}\frac{d^2Q(s)}{ds^2} + 18s^{-2}\frac{dQ(s)}{ds} + 6s^{-3}Q(s) \quad (\text{C.9})$$

$$\Phi_{11}(s) = - \left[s^{-1}\frac{d^3Q(s)}{ds^3} + 6s^{-2}\frac{d^2Q(s)}{ds^2} + 6s^{-3}\frac{dQ(s)}{ds} \right] \quad (\text{C.10})$$

$$\Phi_{12}(s) = \left[s^{-2}\frac{d^3U(s)}{ds^3} + 3s^{-3}\frac{d^2U(s)}{ds^2} \right] \quad (\text{C.11})$$

Finalmente, al aplicar la transformada inversa de Laplace a (C.8) se obtiene siguiente parametrización descrita en el dominio del tiempo

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \phi_{11}(t)a + \phi_{12}(t)b \\ z_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Z_1(s)], \quad \phi_{11}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi_{11}(s)], \quad \phi_{12}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi_{12}(s)] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

donde $z_1(t)$, $\phi_{11}(t)$ y $\phi_{12}(t)$ están dadas en (2.8).

Apéndice D

Análisis de las inercias estimadas

J_1 y J_2

Esta sección estudia el comportamiento de las soluciones J_1 y J_2 con respecto a la frecuencia ω de \dot{q}_d en (3.41). Sustituyendo Γ^2 de (3.51) en λ_0 y en λ_2 definidos respectivamente en (3.53) y en (3.55) permite obtener la siguiente expresión en términos de J

$$\lambda_0 = \frac{\Lambda_{0n}}{\Lambda_d}, \quad \lambda_2 = \frac{\Lambda_{2n}}{\Lambda_d} \quad (\text{D.1})$$

$$\Lambda_{0n} = [2\beta\alpha J^2(K_P\alpha - K_I) + (J\alpha K_P)^2 + 2J\alpha\beta^2 K_P]\omega^2 + [(J\alpha K_I)^2 + 2JK_I(\alpha\beta)^2] \quad (\text{D.2})$$

$$\Lambda_{2n} = 2JK_P\alpha\omega^4 + [-(\alpha K_P)^2 - 2\beta\alpha(\alpha K_P - K_I) + 2\alpha^2 K_I J]\omega^2 - (\alpha K_I)^2 \quad (\text{D.3})$$

$$\Lambda_d = J^2 + \frac{\beta^2}{\omega^2} \quad (\text{D.4})$$

Defínase el discriminante de las soluciones J_1 y J_2 como Δ , i.e,

$$\Delta = \lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_0 \quad (\text{D.5})$$

Reemplazando λ_0 y λ_2 de (D.1) y λ_1 de (3.54) en Δ produce

$$\Delta = \frac{(2\alpha\omega^2)^2 \Sigma^2}{(J^2\omega^2 + \beta^2)^2} \quad (\text{D.6})$$

donde Σ está dado por

$$\Sigma = \left[-JK_I(\alpha J + 2\beta) + \alpha JK_P(2\beta + K_P + \frac{\beta^2}{\alpha J}) \right] \omega^2 - J^2 K_P \omega^4 + \alpha K_I (JK_I + \beta^2) \quad (\text{D.7})$$

Nótese que el término Δ es positivo $\forall \omega > 0$, por lo tanto, J_1 y J_2 sólo tienen valores reales $\forall \omega > 0$. Sustituyendo el discriminante Δ en las soluciones J_1 y J_2 dadas en (3.56) se obtiene

$$J_1 = \frac{-\lambda_1 - \frac{2\alpha\omega^2|\Sigma|}{J^2\omega^2 + \beta^2}}{2\lambda_2}, \quad J_2 = \frac{-\lambda_1 + \frac{2\alpha\omega^2|\Sigma|}{J^2\omega^2 + \beta^2}}{2\lambda_2} \quad (\text{D.8})$$

donde $|\Sigma| = \sqrt{\Sigma^2}$ es el valor absoluto de Σ . Multiplicando los numeradores y denominadores en (D.8) por $(J^2\omega^2 + \beta^2)/(2\alpha\omega^2)$ resulta en

$$J_1 = \frac{\Pi - |\Sigma|}{\Upsilon}, \quad J_2 = \frac{\Pi + |\Sigma|}{\Upsilon} \quad (\text{D.9})$$

donde

$$\Pi = -\frac{\lambda_1(J^2\omega^2 + \beta^2)}{2\alpha\omega^2} = (K_P\omega^2 + \alpha K_I)(J^2\omega^2 + \beta^2) \quad (\text{D.10})$$

$$\Upsilon = \frac{2\lambda_2(J^2\omega^2 + \beta^2)}{2\alpha\omega^2} = \frac{\Lambda_{2n}}{\alpha} \quad (\text{D.11})$$

El término Λ_{2n} está dado en (D.3).

De (D.9) se obtiene lo siguiente

$$J_1 = \begin{cases} J & \text{si } |\Sigma| = \Sigma \\ \frac{\Psi}{\Upsilon} & \text{si } |\Sigma| = -\Sigma \end{cases} \quad J_2 = \begin{cases} \frac{\Psi}{\Upsilon} & \text{si } |\Sigma| = \Sigma \\ J & \text{si } |\Sigma| = -\Sigma \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

donde

$$J = (\Pi - \Sigma)/(\Upsilon), \quad (\text{D.13})$$

$$\Psi = \Pi + \Sigma = [K_P(2\beta^2 + J\alpha K_P) + 2J\beta(\alpha K_P - K_I)]\omega^2 + \alpha K_I(JK_I + 2\beta^2)$$

Defínase $\chi = \omega^2$, entonces la ecuación (D.7) puede ser reescrita como

$$\Sigma = -J^2 K_P \chi^2 + \left[-JK_I(\alpha J + 2\beta) + \alpha JK_P(2\beta + K_P + \frac{\beta^2}{\alpha J}) \right] \chi + \alpha K_I(JK_I + \beta^2) \quad (\text{D.14})$$

La variable Σ en función de χ es una parábola que abre hacia abajo, toma el valor positivo de $\alpha K_I(JK_I + \beta^2)$ en $\chi = 0$ y es cero en $\chi_\sigma = \omega_\sigma^2$ (ver Fig. D.1 (a)). Al conocerse el comportamiento de Σ con respecto a χ , se puede deducir que Σ tiene el siguiente comportamiento con respecto a ω

$$\begin{aligned} \Sigma &\geq 0 & \text{si } \omega &\leq \omega_\sigma \\ \Sigma &< 0 & \text{si } \omega &> \omega_\sigma \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Nótese que ω_σ es la frecuencia en la cual $\Sigma = 0$ y depende de K_P , K_I , α , β y J .

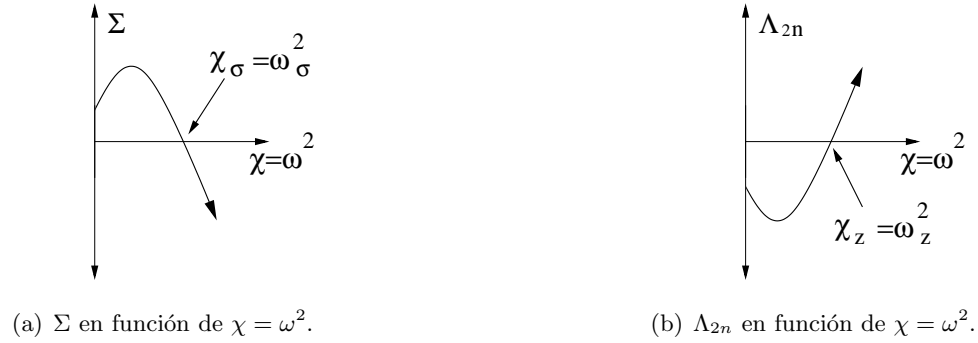


Figura D.1: Comportamiento de Σ y Λ_{2n} con respecto a $\chi = \omega^2$.

Usando (D.15) y la definición del valor absoluto $|\Sigma|$ de Σ se obtienen las siguientes implicaciones

$$\begin{aligned} \omega \leq \omega_\sigma &\Rightarrow \Sigma \geq 0 \Rightarrow |\Sigma| = \Sigma \\ \omega > \omega_\sigma &\Rightarrow \Sigma < 0 \Rightarrow |\Sigma| = -\Sigma \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Por lo tanto, (D.12) se puede reescribir como

$$J_1 = \begin{cases} J & \text{si } \omega \leq \omega_\sigma \\ \frac{\Psi}{\Upsilon} & \text{si } \omega > \omega_\sigma \end{cases} \quad J_2 = \begin{cases} \frac{\Psi}{\Upsilon} & \text{si } \omega \leq \omega_\sigma \\ J & \text{si } \omega > \omega_\sigma \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

En los siguientes párrafos se analiza el signo de las soluciones J_1 y J_2 con respecto a ω . Para este propósito se analizan los signos de los términos λ_0 , λ_1 y λ_2 para todo $\omega > 0$. Usando la desigualdad $K_P > \frac{K_I}{\alpha}$, la cual es la condición de estabilidad dada en (3.21), se obtiene que Λ_{0n} en (D.2) es positiva $\forall \omega > 0$. Además, Λ_d en (D.4) también es positiva $\forall \omega > 0$. Por lo tanto,

$$\lambda_0 > 0 \quad \forall \omega > 0 \quad (\text{D.18})$$

De (3.54) se sigue la siguiente desigualdad

$$\lambda_1 < 0 \quad \forall \omega > 0 \quad (\text{D.19})$$

El signo del término λ_2 depende del signo de Λ_{2n} en (D.3) debido a que Λ_d es positivo $\forall \omega > 0$. El término Λ_{2n} en función de $\chi = \omega^2$ es una parábola que abre hacia arriba, toma

el valor negativo de $-(\alpha K_I)^2$ en $\chi = 0$, y es cero en $\chi_z = \omega_z^2$. (ver Fig. D.1 (b)). Entonces, λ_2 tiene el siguiente comportamiento con respecto a ω

$$\begin{aligned} \lambda_2 < 0 & \text{ si } \omega < \omega_z \\ \lambda_2 > 0 & \text{ si } \omega > \omega_z \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

donde ω_z es una frecuencia positiva tal que $\Lambda_{2n} = 0$ y depende de K_P , K_I , α , β y J .

Las siguientes dos desigualdades se obtienen conociendo que $\sqrt{\Delta} > 0$ y los signos de λ_0 , λ_1 y $\lambda_2 \forall \omega > 0$

$$\sqrt{\Delta} > |\lambda_1| = -\lambda_1 > 0 > \lambda_1 \quad \text{si } \omega < \omega_z \quad (\text{D.21})$$

$$\lambda_1 < 0 < \sqrt{\Delta} < |\lambda_1| = -\lambda_1 \quad \text{si } \omega > \omega_z \quad (\text{D.22})$$

donde Δ está dado en (D.5).

De (D.21) se obtienen las siguientes dos desigualdades, las cuales se satisfacen cuando $\omega < \omega_z$

$$-\lambda_1 - \sqrt{\Delta} < 0, \quad -\lambda_1 + \sqrt{\Delta} > 0 \quad (\text{D.23})$$

Además, de (D.22) se siguen las siguientes dos desigualdades para $\omega > \omega_z$

$$-\lambda_1 - \sqrt{\Delta} > 0, \quad -\lambda_1 + \sqrt{\Delta} > 0 \quad (\text{D.24})$$

Por lo tanto, las soluciones J_1 y J_2 en (3.56) tienen los siguientes signos

$$J_1 > 0, \quad J_2 < 0 \quad \text{si } \omega < \omega_z \quad (\text{D.25})$$

$$J_1 > 0, \quad J_2 > 0 \quad \text{si } \omega > \omega_z \quad (\text{D.26})$$

Apéndice E

Propiedades del operador I_n

En este Apéndice se mostrará que la función de transferencia $H_n(s)$ dada en (4.28) y que se muestra a continuación

$$\frac{\mathcal{L}\{I_n\{\rho(t)\}\}}{\varrho\mathcal{L}\{\rho(t)\}} = H_n(s) = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s}\right)^n \quad (\text{E.1})$$

no tiene polos en el origen del plano complejo.

Primero se mostrará el caso en el que $n = 1$. La función de transferencia $H_1(s)$ está dada por:

$$H_1(s) = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s}\right) \quad (\text{E.2})$$

La función de transferencia $H_1(s)$ contiene el término trascendental $e^{-\delta s}$, el cual puede ser reemplazado mediante la siguiente serie de Laurent alrededor del polo $s = 0$ [Ogata95]

$$e^{-\delta s} = 1 - \delta s + \frac{(\delta s)^2}{2!} - \frac{(\delta s)^3}{3!} + \dots \quad (\text{E.3})$$

Sustituyendo (E.3) en (E.2) resulta

$$H_1(s) = \frac{1}{\delta s} \left[\delta s - \frac{(\delta s)^2}{2!} + \frac{(\delta s)^3}{3!} - \dots \right] = 1 - \frac{(\delta s)}{2!} + \frac{(\delta s)^2}{3!} - \dots \quad (\text{E.4})$$

Por lo tanto, $s = 0$ no es un polo de $H_1(s)$.

Por otro lado, la función de transferencia $H_n(s)$ es el producto de n funciones de transferencia $H_1(s)$ en cascada, i.e.,

$$H_n(s) = \overbrace{H_1(s)H_1(s) \cdots H_1(s)}^{n \text{ productos}} \quad (\text{E.5})$$

Como cada una de las funciones de transferencia $H_1(s)$ no tiene polos en el origen $s = 0$, entonces la función de transferencia $H_n(s)$ tampoco tiene polos en el origen.

Referencias

- [Adam02] Adam, E. y Guestrin, E. Identification and robust control of an experimental servomotor. *ISA Transactions*, 41(2):225–234, 2002.
- [ADI] ADI. *Accelerometer specifications definitions*.
URL http://www.analog.com/en/content/td_accelerometer_specifications_definitions/fca.html
- [ADI98] ADI. *ADXL150/ADXL250 Datasheet*, 1998.
- [Aguilar08] Aguilar, C., Sánchez, J., y Garrido, R. Parametric estimation of the Duffing system by using a modified gradient algorithm. *Physics Letters A*, 372(3):210–214, 2008.
- [Ahmed06] Ahmed, S., Huang, B., y Shah, S. L. Parameter and delay estimation of continuous-time models using a linear filter. *Journal of Process Control*, 16(4):323–331, 2006.
- [Alfaro01] Alfaro, V. Identificación de procesos sobreamortiguados utilizando técnicas de lazo abierto. *Ingeniería en Costa Rica*, 11(1):11–25, 2001.
- [Alfi10] Alfi, A. y Fateh, M. M. Parameter identification based on a modified PSO Applied to Suspension System. *J. Software Engineering and Applications*, 3:221–229, 2010.
- [Andoh07a] Andoh, F. Inertia identification of mechatronic servo systems with infinitesimal motions. *En IEEE Conference on Automation Science and Engineering*. 2007.

- [Andoh07b] Andoh, F. Moment of inertia identification using the time average of the product of torque reference input and motor position. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 22(6):2534–2542, 2007.
- [Angeles05] Angeles, J. y Álvarez Icaza, L. 3D identification of buildings seismically excited. *En Proceedings of the 2005 IFAC World Congress*. 2005.
- [Åström89] Åström, K. y Wittenmark, B. *Adaptive Control*. AddisonWesley, 1989.
- [Åström94] Åström, K. y Hagglund, T. *PID controllers: Theory, Design and Tuning*. Instruments Society of America, 1994.
- [Aucouturier08] Aucouturier, J. J., Ogai, Y., y Ikegami, T. Making a Robot Dance to Music Using Chaotic Itinerancy in a Network of FitzHugh-Nagumo Neurons. *Neural Information Processing*, 4985:647–656, 2008.
- [Awaya92] Awaya, I., Kato, Y., Miyake, I., y Ito, M. New motion control with inertia identification function using disturbance observer. *En International Conference on Industrial Electronics, Control, Instrumentation, and Automation*. 1992.
- [Babau07] Babau, R., Boldea, I., Miller, T. J. E., y Muntean, N. Complete parameter identification of large induction machines from no-load acceleration-deceleration tests. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 54(4):1962–1972, 2007.
- [Bastogne01] Bastogne, T., Garnier, H., y Sibille, P. A PMF-based subspace method for continuous-time model identification. Application to a multivariable winding process. *International Journal of Control*, 74(2):118–132, 2001.
- [Becedas10] Becedas, J., Mamani, G., y Feliu, V. Algebraic parameters identification of DC motors: methodology and analysis. *International Journal of Systems Science*, 41(10):1241–1255, 2010.
- [Beltran-Carbajal05] Beltran-Carbajal, F., Quezada-Andrade, J., Silva-Navarro, G., y Sira-Ramírez, H. Active vibration control using on-line algebraic identification of harmonic vibrations. *En Proceedings of the American Control Conference*. 2005.

- [Berhe98] Berhe, D. y Unbehauen, H. Experimental physical parameter estimation of a DC motor using the HMF method. *Control Engineering Practice*, 6(5):615–626, 1998.
- [Besancon02] Besancon, A. y Blaha, P. Describing function approximation of a two-relay system configuration with application to Coulomb friction identification. *Control Engineering Practice*, 10(6):655–668, 2002.
- [Brancati10] Brancati, R., Russo, R., y Savino, S. Method and equipment for inertia parameter identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(1):29–40, 2010.
- [Buhry08] Buhry, L., Saigui, S., Giremus, A., Grivel, E., y Renaud, S. Parameter estimation of the Hodgkin-Huxley model using metaheuristics: Application to neuromimetic analog integrated circuits. *En Proc. IEEE Biomed. Circuits Syst. Conf.* 2008.
- [Canudas95] Canudas, C., Olsson, H., Astrom, K. J., y Lischinski, P. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):419–425, 1995.
- [Canudas97] Canudas, C. y Lischinski, P. Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 11(1):65–80, 1997.
- [Cessac10] Cessac, B. A review of neural networks as dynamical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(6):1585–1629, 2010.
- [Chaturvedi06a] Chaturvedi, N. A., Bernstein, D. S., Ahmed, J., Bacconi, F., y McClamroch, N. H. Globally convergent adaptive tracking of angular velocity and inertia identification for a 3-DOF rigid body. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(5):841–853, 2006.
- [Chaturvedi06b] Chaturvedi, N. A., Sanyal, A. K., Chellappa, M., Valk, J. L., McClamroch, N. H., y Bernstein, D. S. Adaptive tracking of angular velocity for a planar rigid body with unknown models for inertia and input nonlinearity. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(4):613–627, 2006.

- [Chavez02] Chavez, I., Martínez-Guerra, R., y Osorio-Cordero, A. Parametric identification of linear time varying systems using a proportional reduced order observer. *En American Control Conference*. 2002.
- [Che12] Che, Y., Geng, L. H., Han, C., Cui, S., y Wang, J. Parameter estimation of the FitzHugh-Nagumo model using noisy measurements for membrane potential. *Chaos*, 22:023139, 2012.
- [Chen02] Chen, Y. Y., Huang, P. Y., y Yen, J. Y. Frequency-domain identification algorithms for servo systems with friction. *Transactions on Control Systems Technology*, 10(5):654–664, 2002.
- [Chen09] Chen, S. L., Tan, K. K., y Huang, S. Friction modeling and compensation of servomechanical systems with dual-relay feedback approach. *IEEE Transactions of Control Systems Technology*, 17(6):1295–1305, 2009.
- [Cheng89] Cheng, Y. *Autotuning of PID controllers: Advances in Industrial Control*. Prentice Hall, 1989.
- [Choi99] Choi, B. K., Choi, C. H., y Lim, H. Model-Based Disturbance Attenuation for CNC Machining Centers in Cutting Process. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 4(2):157–168, 1999.
- [Choi06] Choi, J. W., Lee, S. C., y Kim, H. G. Inertia identification algorithm for high-performance speed control of electric motors. *IEEE Proceedings - Electric Power Applications*, 153(3):379–386, 2006.
- [Chopra01] Chopra, A. *Dynamics of Structures: theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall, 2001.
- [Chou99] Chou, C. T., Verhaegen, M., y Johansson, R. Continuous-time identification of SISO systems using Laguerre functions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(2):349–362, 1999.
- [Collins94] Collins, J. J. y Richmond, S. A. Hard-wired central pattern generators for quadrupedal locomotion. *Biological Cybernetics*, 71(5):375–385, 1994.
- [Copleya] Copley. *Copley Controls*.
URL <http://www.copleycontrols.com/motion/pdf/412ce.pdf>

- [Copleyb] Copley. *Copley Controls*.
URL <http://www.copleycontrols.com/motion/pdf/5x24AC.pdf>
- [Copleyc] Copley. *Copley Controls*.
URL <http://www.copleycontrols.com/motion/pdf/CBL-Rotary.pdf>
- [Cortés-Romero11] Cortés-Romero, J., García-Rodríguez, C., Luviano-Juárez, A., y Sira-Ramírez, H. Algebraic Parameter Identification for Induction Motors. *En IECON 2011-37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*. 2011.
- [Dao02] Dao, R. *Thermal Accelerometers Temperature Compensation*. MEMSIC, 2002.
- [Dasgupta96] Dasgupta, S. y Anderson, B. Parametrization for the Closed-Loop identification of nonlinear time-varying systems. *Automatica*, 32(10):1349–1360, 1996.
- [Daubechies92] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.
- [Davila06] Davila, J., Fridman, L., y Poznyak, A. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10):1251–1262, 2006.
- [Deng09] Deng, B., Wang, J., y Che, Y. A combined method to estimate parameters of neuron from a heavily noise-corrupted time series of active potential. *Chaos*, 19:015105, 2009.
- [Diamessis65] Diamessis, J. E. A new method of determining the parameters of physical systems. *Proc. IEEE*, 53:205–206, 1965.
- [Diop91] Diop, S. y Fliess, M. On nonlinear observability. *En Proc. 1st Europ. Control Conf.*, págs. 152–157. 1991.
- [Donoho95] Donoho, D. L. De-noising by soft-thresholding. *IEEE. Trans. Inf. Theory*, 41(3):613–627, 1995.
- [Dorf98] Dorf, R. D. y Bishop, R. H. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley, 1998.

- [Du11] Du, S., Zhao, S., y Chen, Y. Inertia identification for speed control of PMSM servo motor. *En International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*. 2011.
- [Dyke96a] Dyke, S., Spencer, B., Quast, P., Kaspari, D., y Sain, M. Implementation of an Active Mass Driver Using Acceleration Feedback Control. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 11(5):305–323, 1996.
- [Dyke96b] Dyke, S., Spencer, B., Sain, M., y Carlson, J. Experimental Verification of Semi-Active Structural Control Strategies Using Acceleration Feedback. *En Proceedings of the 3rd International Conference on Motion and Vibration Control*. 1996.
- [Eitelberg88] Eitelberg, E. Continuous-time system representation with exact macro-difference expressions. *International Journal of Control*, 47(5):1207–1212, 1988.
- [Elhami97] Elhami, M. R. y Brookfield, D. J. Sequential identification of Coulomb and viscous friction in robot drives. *Automatica*, 33(3):393–401, 1997.
- [Ellis00] Ellis, G. *Control system design guide*. Academic Press, 2000.
- [Faghih12] Faghih, R. T., Savla, K., Dahleh, M. A., y Brown, E. N. Broad range of neural dynamics from a time varying FitzHugh Nagumo model and its spiking threshold estimation. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 59(3):816–823, 2012.
- [Fairhurst10] Fairhurst, D., Tyukin, I., Nijmeijer, H., y Leeuwen, C. V. Observers for canonic models of neural oscillators. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 5(2):146–184, 2010.
- [FitzHugh61] FitzHugh, R. Impulses and physiological states in models of nerve membrane. *Biophys. J.*, 1:445–466, 1961.
- [Fliess02] Fliess, M., Márquez, R., Delaleau, E., y Sira-Ramírez, H. Correcteurs proportionnels-intégraux généralisés. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 7:23–41, 2002.

- [Fliess03] Fliess, M. y Sira-Ramírez, H. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM, Control, Optimization and Calculus of Variations*, 9:151–168, 2003.
- [Fliess08a] Fliess, M., Join, C., y Sira-Ramírez, H. Non-linear estimation is easy. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 4(1):12–27, 2008.
- [Fliess08b] Fliess, M. y Sira-Ramírez, H. Closed-loop parametric identification for continuous time linear systems via New Algebraic Techniques. En H. Granier y L. Wang, eds., *Continuous Time Model Identification from Sampled Data*. Springer-Verlag, 2008.
- [Floret01] Floret, F. y Lamnabhi, F. Parametric identification methodology using sliding modes observer. *International Journal of Control*, 74(18):1743–1753, 2001.
- [Forsell97] Forsell, U. y Ljung, L. Issues in closed-loop identification. Informe técnico, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Suecia, 1997.
- [Forsell99] Forsell, U. y Ljung, L. Closed Loop identification revisited. *Automatica*, 35(7):1215–1241, 1999.
- [Fuh07] Fuh, C. C. y Tsai, H. H. Adaptive parameter identification of servo control systems with noise and high-frequency uncertainties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(3):1437–1451, 2007.
- [Fujita92] Fujita, K. y Sado, K. Instantaneous speed detection with parameter identification for AC servo systems. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 28(4):864–872, 1992.
- [Garnier00] Garnier, H., Gilson, M., y Zheng, W. X. A bias-eliminated least-squares method for continuous-time model identification of closed-loop systems. *International Journal of Control*, 73(1):38–48, 2000.
- [Garnier03] Garnier, H., Mensler, M., y Richard, A. Continuous-time model identification from sampled data: implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 76(13):1337–1357, 2003.

-
- [Garnier08] Garnier, H. y Wang, L. *Continuous Time Model Identification from Sampled Data*. Springer-Verlag, 2008.
- [Garrido06] Garrido, R. y Miranda, R. Autotuning of a DC servomechanism using closed loop identification. *En The 32 Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, IECON 06*. 2006.
- [Garrido12] Garrido, R. y Miranda, R. DC servomechanism parameter identification: A closed loop input error approach. *ISA Transactions*, 51(1):42–49, 2012.
- [Gavin98] Gavin, H., Morales, R., y Reily, K. Drift-free integrators. *Review of Scientific Instruments*, 69:2171–2175, 1998.
- [Gilson05] Gilson, M. y Hof, P. V. Instrumental variable methods for closed-loop system identification. *Automatica*, 41(2):241–249, 2005.
- [Gilson08] Gilson, M., Garnier, H., Young, P. C., y Hof, P. V. Instrumental variable methods for closed-loop continuous-time model identification. *En H. Granier y L. Wang, eds., Continuous Time Model Identification from Sampled Data*. Springer-Verlag, 2008.
- [Golubitsky98] Golubitsky, M., Stewart, I., Buono, P. L., y Collins, J. J. A modular network for legged locomotion. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 115:56–72, 1998.
- [Goodwin77] Goodwin, G. C. y Payne, R. L. *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*. New York: Academic, 1977.
- [Goodwin84] Goodwin, G. C. y Sin, K. S. *Adaptive Filtering, Prediction, and Control*. Prentice Hall, 1984.
- [Guglielmino08] Guglielmino, E., Sireteanu, T., Stammers, C. W., Gheorghe, G., y Giuclea, M. *Semi-active Suspension Control*. Springer Verlag, 2008.
- [Hindmarsh84] Hindmarsh, J. L. y Rose, R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. Lond. B*, 221(1222):87–102, 1984.

- [Hodgkin52] Hodgkin, A. L. y Huxley, A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 117(4):500–544, 1952.
- [Hof98] Hof, P. V. Closed loop issues in system identification. *Annual Reviews in Control*, 22:173–186, 1998.
- [Hong96] Hong, S. J., Kim, H. W., y Sul, S. K. A novel inertia identification method for speed control of electric machine. *En International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation (IECON)*. 1996.
- [Huang06] Huang, J. T. Parametric Identification for Second Order Nonlinear Systems in Closed-Loop Operations. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 128(3):686–690, 2006.
- [Huang10] Huang, W. S., Liu, C. W., Hsu, P. L., y Yeh, S. S. Precision control and compensation of servomotors and machine tools via the disturbance observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(1):420–429, 2010.
- [Ioannou96] Ioannou, P. y Sun, J. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, 1996.
- [Ioannou06] Ioannou, P. y Fidan, B. *Adaptive Control Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2006.
- [Isermann11a] Isermann, R. *Fault-Diagnosis Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [Isermann11b] Isermann, R. y Munchhof, M. *Identification of Dynamic Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [Iwasaki05] Iwasaki, M., Miwa, M., y Matsui, N. GA-based evolutionary identification algorithm for unknown structured mechatronic systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 52(1):300–305, 2005.
- [Jansen99] Jansen, L. y Dyke, S. Semi-Active Control Strategies for MR Dampers: A Comparative Study. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(8):795–803, 1999.

- [Jee12] Jee, S. y Lee, J. Real-time inertia compensation for multi-axis CNC machine tools. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 13(9):1655–1659, 2012.
- [Jiménez07] Jiménez, R. y Álvarez Icaza, L. A real-time estimation scheme for buildings with intelligent dissipation devices. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(6):2427–2440, 2007.
- [Jiménez10] Jiménez, R. y Álvarez Icaza, L. An adaptive observer for a shear building with an energy-dissipation device. *Control Engineering Practice*, 18(4):331–338, 2010.
- [Johansson93] Johansson, R. *System Modeling and Identification*. Prentice Hall, 1993.
- [Johansson94] Johansson, R. Identification of Continuous-Time Models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(4):887–897, 1994.
- [Juang85] Juang, J. y Pappa, R. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 8(5):620–3627, 1985.
- [Julier04] Julier, S. J. y Uhlmann, J. K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3):401–422, 2004.
- [Kang05] Kang, J., Park, S., Shin, S., y Lee, H. Structural system identification in time domain using measured acceleration. *Journal of Sound and Vibration*, 288:1449–1467, 2005.
- [Kara04] Kara, T. y Eker, I. Non linear closed loop identification of DC motor with load for low speed two directional operation. *Electrical Engineering*, 86(2):87–96, 2004.
- [Kavanagh99] Kavanagh, R. C. Performance analysis and compensation of m/t type digital tachometers. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 50(4):965–970, 1999.
- [Kelly00] Kelly, R., Llamas, J., y Campa, R. A measurement procedure for viscous and Coulomb friction. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 49(4):857–861, 2000.

- [Kerschen06] Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A. F., y Golinval, J. C. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(3):505–592, 2006.
- [Kim96] Kim, N. J., Moon, H. S., y Hyun, D. S. Inertia identification for the speed observer of the low speed control of induction machines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 32(6):1371–1379, 1996.
- [Kim06] Kim, M. S. y Chung, S. C. Friction identification of ball-screw driven servomechanisms through the limit cycle analysis. *Mechatronics*, 16(2):131–140, 2006.
- [Kobayashi95] Kobayashi, S., Awaya, I., Kuromaru, H., y Oshitani, K. Dynamic model based auto-tuning digital servo driver'. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 42(5):462–466, 1995.
- [Kong12] Kong, K., Bae, J., y Tomizuka, M. A Compact Rotary Series Elastic Actuator for Human Assistive systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 17(2):288–296, 2012.
- [Kristinsson92] Kristinsson, K. y Dumont, G. A. System identification and control using genetic algorithms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 22(5):1033–1046, 1992.
- [Ku07] Ku, C., Cermak, J., y Chou, L. Random decrement based method for modal parameter identification of a dynamic system using acceleration responses. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 95(6):389–410, 2007.
- [Kweon99] Kweon, T. J. High-performance speed control of electric machine using low-precision shaft encoder. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 14(5):838–849, 1999.
- [Kwon06] Kwon, T. S., Sul, S. K., Nakamura, H., y Tsuruta, K. Identification of the mechanical parameters for servo drive. *En Industry Applications Conference*. 2006.

- [Lakshminarayanan01] Lakshminarayanan, S., Emoto, G., Ebara, S., Tomida, K., y Shah, S. L. Closed loop identification and control loop reconfiguration: an industrial case study. *Journal of Process Control*, 11(5):587–599, 2001.
- [Landau01] Landau, I. D., Anderson, B. D., y Bruyne, F. Recursive identification algorithms for continuous-time nonlinear plants operating in closed loop. *Automatica*, 22(3):469–475, 2001.
- [Landau11] Landau, I. D., Lozano, R., M'Saad, M., y Karimi, A. *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer-Verlag, 2011.
- [Lee04] Lee, K. B., Yoo, J. Y., Song, J. H., y Choy, I. Improvement of low speed operation of electric machine with an inertia identification using ROELO. *IEE Proceedings on Electric Power Applications*, 151(1):116–120, 2004.
- [Lee07] Lee, K. B. y Blaabjerg, F. Robust and stable disturbance observer of servo system for low-speed operation. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 43(3):627–635, 2007.
- [Li01] Li, L. M. y Billings, S. A. Continuous time non-linear system identification in the frequency domain. *International Journal of Control*, 74(18):1052–1061, 2001.
- [Li09] Li, S. y Liu, Z. Adaptive speed control for permanent-magnet synchronous motor system with variations of load inertia. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(8):3050–3059, 2009.
- [Liang08] Liang, H. y Wu, H. Parameter estimation for differential equation models using a framework of measurement error in regression models. *Journal of the American Statistical Association*, 103(484):1570–1583, 2008.
- [Linard99] Linard, N., Anderson, B., y Bruyne, F. Identification of a nonlinear plant under nonlinear feedback using left coprime fraction based representations. *Automatica*, 35:655–667, 1999.
- [Ljung87] Ljung, L. *System Identification: Theory for the user*. Prentice Hall, 1987.

- [Lus99] Lus, H., Betti, R., y Longman, R. Identification of linear structural systems using earthquake-induced vibration data. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28:1449–1467, 1999.
- [Mamani09] Mamani, G., Becedas, J., Feliu-Batle, V., y Sira-Ramírez, H. Open and closed-loop algebraic identification method for adaptive control of DC motors. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 23(12):1097–1103, 2009.
- [Marsden74] Marsden, J. E. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company, 1974.
- [Martínez-Guerra98] Martínez-Guerra, R., Ramírez-Palacios, I. R., y Alvarado-Trejo, E. On Parametric and State estimation: Application to a simple academic example. *En Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. 1998.
- [Mendoza04] Mendoza, J., Aguilar, C., Martínez-Guerra, R., y Garrido, R. On the parameters identification of the Duffing's system by means of a reduced order observer. *Physics Letters A*, 331(5):316–324, 2004.
- [Moog] Moog. *Moog Components Group*.
URL www.polysci.com/docs/moc23series.PDF
- [Morris81] Morris, C. y Lecar, H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophys. J.*, 35(1):193–213, 1981.
- [Nagumo62] Nagumo, J., Arimoto, S., y Yoshizawa, S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, 50(10):2061–2070, 1962.
- [Narendra89] Narendra, K. S. y Annaswamy, A. M. *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, 1989.
- [Nelles01] Nelles, O. *Nonlinear System Identification*. Springer Verlag, 2001.
- [Niethammer01] Niethammer, M., Menold, P. H., y Allgower, F. Parameter and derivative estimation for nonlinear continuous-time system identification. *En 5th IFAC Symposium Nonlinear Control*. 2001.

- [Ogata95] Ogata, K. *Discrete-time control systems*. Prentice-Hall, 1995.
- [Ouvrard11] Ouvrard, R. y Trigeassou, J. C. On embedded FIR filter models for identifying continuous-time and discrete-time transfer functions: the RPM approach. *International Journal of Control*, 84(3):616–632, 2011.
- [Perry07] Perry, J. C., Rosen, J., y Burns, S. Upper-Limb Powered Exoskeleton Design. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 12(4):408–417, 2007.
- [Rabinovich06] Rabinovich, M. I., Varona, P., Selverston, A. L., y Abarbanel, H. D. I. Dynamical principles in neuroscience. *Reviews of Modern Physics*, 78(4):1213–1265, 2006.
- [Ramsay07] Ramsay, J. O., Hooker, G., Campbell, D., y Cao, J. Parameter estimation for differential equations: a generalized smoothing approach. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 69(5):741–796, 2007.
- [Rao05a] Rao, G. P. y Unbehauen, H. Identification of continuous-time systems. *IEE Proceedings on Control Theory Applications*, 153(2):185–219, 2005.
- [Rao05b] Rao, V. S. H. y Yadaiah, N. Parameter identification of dynamical systems. *Chaos, Solutions and Fractals*, 23(4):1137–1151, 2005.
- [Raol04] Raol, J. R., Girija, G., y Singh, J. *Modelling and Parameter Estimation of Dynamic Systems*. IEE Control Engineering Series, 2004.
- [Sagara88] Sagara, S. y Zhao, Z. Numerical Integration Approach to On-line Identification of Continuous-time Systems in presence of measurement noise. *En The 8th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*. 1988.
- [Sagara90] Sagara, S. y Zhao, Z. Y. Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems. *Automatica*, 26(1):63–74, 1990.
- [Sastry89] Sastry, S. y Bodson, M. *Adaptive Control Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall, 1989.

- [Sediki12] Sediki, H., Bechouche, A., Abdeslam, D. O., y Haddad, S. ADALINE approach for induction motor mechanical parameters identification. *Mathematics and Computers in Simulation*, doi: 10.1016/j.matcom.2012.05.003, 2012.
- [Sinha91] Sinha, N. y Rao, G. *Identification of continuous-time systems: methodology and computer implementation*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [Sira-Ramírez07] Sira-Ramírez, H., Barrios, E., y Márquez, R. Fast Adaptive Trajectory Tracking Control for a Completely Uncertain DC Motor via Output Feedback. *En Proc. 46th IEEE Conference on Decision and Control*. 2007.
- [Slotine91] Slotine, J. J. E. y Li, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [Söderström89] Söderström, T. y Stoica, P. *System Identification*. Prentice Hall, 1989.
- [Söderström97] Söderström, T., Fan, H., Carlsson, B., y Bigi, S. Least squares parameter estimation of continuous-time ARX models from discrete-time data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5):659–673, 1997.
- [Spencer03] Spencer, B. y Nagarajaiah, S. State of the art of structural control. *Journal of Structural Engineering*, 129:845–856, 2003.
- [Sun11] Sun, J., Deng, B., Wei, X., Jia, C., Wang, J., y Zhao, J. Parameter estimation in Hodgkin-Huxley model with adaptive method. *En 4th International conference on Biomedical Engineering and Informatics (BMEI)*, págs. 1853–1857. 2011.
- [Suárez03] Suárez, M., Aguilar, C., y Barrón, R. On recovering the parameters and velocity state of the Duffing's oscillator. *Physics Letters A*, 308(1):47–53, 2003.
- [Tafazoli99] Tafazoli, S., Lawrence, P. D., y Salcudean, S. E. Identification of inertial and friction parameters for excavator arms. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(5):966–971, 1999.
- [Tan01] Tan, K. K., Lee, T. H., Huang, S. N., y Jiang, X. J. Friction modelling and adaptive compensation using a relay feedback approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48(1):169–176, 2001.

- [Tan03a] Tan, K., Xie, Y., y Lee, T. Automatic friction identification and compensation with a self-adapting dual relay. *International Journal for Intelligent Automation and Soft Computing*, 9(2):83–95, 2003.
- [Tan03b] Tan, Y., Chang, J., y Tan, H. Adaptive backstepping control and friction compensation for AC servo with inertia and load uncertainties. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 50(5):944–952, 2003.
- [Tokuda02] Tokuda, I., Parlitz, U., Illing, L., Kennel, M., y Abarbanel, H. Parameter estimation for neuron models. *En Proceedings of the 7th experimental chaos conference*. San Diego, 2002.
- [Tornambè89] Tornambè, A. Use of asymptotic observers having-high-gains in the state and parameter estimation. *En Proc. 28th IEEE Conference on Decision and Control*. 1989.
- [Tsang94] Tsang, K. M. y Billings, S. A. Identification of continuous time nonlinear systems using delayed state variable filters. *International Journal of Control*, 60(2):159–180, 1994.
- [Tyukin10] Tyukin, I., Steur, E., Nijmeijer, H., Fairhurst, D., Song, I., Semyanov, A., y Leeuwen, C. V. State and parameter estimation for canonic models of neural oscillators. *International Journal of Neural Systems*, 20(3):193–207, 2010.
- [Unbehauen98] Unbehauen, H. y Rao, G. P. A review of identification in continuous-time systems. *Annual Reviews in Control*, 22:145–171, 1998.
- [Utkin99] Utkin, V., Guldner, J., y Shi, J. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis, 1999.
- [Vasanthakumar06] Vasanthakumar, K. *Performance evaluation of various system identification methods for a servomotor system*. Tesis de Maestría, Universidad Estatal de Nuevo México, Julio 2006.
- [Villwock08] Villwock, S. y Pacas, M. Application of the Welch method for the identification of two- and three-mass-systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(1):457–466, 2008.

- [Wang01] Wang, L. y Gawthrop, P. On the estimation of continuous time transfer functions. *International Journal of Control*, 74(9):889–904, 2001.
- [Wu09] Wu, Q., Liu, C., Zhang, J., y Chen, Q. Survey of locomotion control of legged robots inspired by biological concept. *Science in China Series F: Information Sciences*, 52(10):1715–1729, 2009.
- [Xie07] Xie, W. F. Sliding-mode-observer-based adaptive control for servo actuator with friction. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 54(3):1517–1527, 2007.
- [Xu03] Xu, J. X., Pan, Y. J., y Lee, T. H. A VSS identification scheme for time-varying parameters. *Automatica*, 39(4):727–734, 2003.
- [Yang05] Yang, S. M. y Deng, Y. J. Observer-based inertial identification for auto-tuning servo motor drive. *En Industry Applications Conference*. 2005.
- [Yoon10] Yoon, J., Novandy, B., Yoon, C. H., y Park, K. J. A 6-DOF Gait Rehabilitation Robot With Upper and Lower Limb Connections That Allows Walking Velocity Updates on Various Terrains. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 15(2):201–215, 2010.
- [Young70] Young, P. C. An instrumental variable method for real-time identification of noisy process. *Automatica*, 6(2):271–287, 1970.
- [Young81] Young, P. C. Parameter estimation for continuous-time models: a survey. *Automatica*, 17(1):23–39, 1981.
- [Young11] Young, P. C. *Recursive estimation and time-series analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [Younkin03] Younkin, G. W. *Industrial Servo Control Systems: Fundamentals and Applications*. Marcel Dekker, 2003.
- [Zheng95] Zheng, W. X. y Feng, C. B. A bias correction method for indirect identification of closed-loop systems. *Automatica*, 31(7):1019–1024, 1995.

Apéndice F

Trabajos publicados

La presente tesis originó 9 artículos de congreso y 1 de revista. La lista de los trabajos publicados se muestra a continuación:

Rubén Garrido y Antonio Concha, Estudio comparativo experimental de métodos de identificación en lazo cerrado para un servomecanismo. En *Congreso Mexicano de Robótica (COMRob)*, Celaya, Guanajuato, México, Septiembre 29- Noviembre 2, 2009.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Identificación algebraica de un servomecanismo de corriente directa empleando el Método de Mínimos Cuadrados. En *Congreso Nacional de Control Automático (AMCA)*, Puerto Vallarta, Jalisco, México, Octubre 6-8, 2010.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Combinación de un Método Algebraico y del Método de Mínimos Cuadrados para la identificación de un servomecanismo de CD. En *Congreso Mexicano de Robótica (COMRob)*, Mazatlán, Sinaloa, México, Noviembre 3-6, 2010.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Identificación de un servomecanismo controlado en velocidad usando mediciones de su posición. En *Congreso Nacional de Control Automático (AMCA)*, Cd. del Carmen, Campeche, México, Octubre 17-19, 2012.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Combining Algebraic Identification and a Least Squares method for DC servomechanism identification. En *7th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, Septiembre 8-10, 2010.

Alberto Soria, Rubén Garrido y Antonio Concha, Low cost closed loop identification of a DC motor. En *7th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, Septiembre 8-10, 2010.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Algebraic identification of a DC servomechanism using a Least Squares algorithm. En *American Control Conference*, San Francisco, CA, EUA, Junio 29-Julio 1, 2011.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Parametric identification of seismically excited buildings using acceleration measurements. En *8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, Mérida, Yucatán, México, Octubre 26-28, 2011.

Rubén Garrido y Antonio Concha, Estimation of the parameters of structures using acceleration measurements. En *16th IFAC Symposium on System Identification*, Bruselas, Bélgica, Julio 11-13, 2012.

Rubén Garrido y Antonio Concha, An Algebraic Recursive method for parameter identification of a Servo model. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 18, no. 5, pág. 1572-1580, 2013.

A continuación se muestra el contenido de estos artículos publicados; se presentarán en el orden en el que aparecen en la lista anterior.

Estudio comparativo experimental de métodos de identificación en lazo cerrado para un servomecanismo

Rubén Alejandro Garrido Moctezuma, Antonio Concha Sánchez
CINVESTAV

Departamento de Control Automático
E-mail: garrido, aconcha@ctrl.cinvestav.mx

Resumen—Este artículo trata el problema de identificación de parámetros del modelo de un servomecanismo de Corriente Directa. El trabajo detalla los resultados obtenidos por tres métodos de identificación diferentes: a) modelado físico directo (MFD), b) Mínimos Cuadrados fuera de línea (MCFL), y c) un método propuesto (MP). Los resultados de la estimación dependen de los parámetros correspondientes al momento de inercia del servomotor y de un disco de carga, las constantes de fricción viscosa y de par del servomotor, y la constante del amplificador de corriente. La aportación del artículo es tanto teórica como experimental. Se presentan experimentos que revelan que en ausencia de perturbaciones los métodos MCFL y MP proporcionan estimados similares a los obtenidos por el MFD. Además, los experimentos muestran que ante perturbaciones los métodos MCFL y MP producen estimados diferentes a aquellos obtenidos en ausencia de perturbaciones.

Palabras clave: identificación en lazo cerrado, perturbaciones de entrada, validación de modelo.

I. INTRODUCCIÓN

La estimación de los parámetros del modelo de un servomecanismo es una característica primordial en muchos sistemas de control digital modernos. El modelo identificado sirve para el cálculo de los controladores que eventualmente se le apliquen al servomecanismo. El proceso de estimación de los parámetros del servomecanismo puede llevarse a cabo tanto en lazo abierto como en lazo cerrado dependiendo si el servomecanismo funciona controlado en velocidad o en posición.

Cuando el servomecanismo funciona en lazo abierto y la variable de salida considerada es la velocidad, el modelo correspondiente es estable y se pueden identificar sus parámetros en lazo abierto. Por otro lado, si la variable de salida es la posición, entonces, el modelo en lazo abierto del servomecanismo está expresado mediante la función de transferencia siguiente

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{b}{s(s+a)} \quad (1)$$

donde $Q(s)$ es la posición angular, $U(s)$ es el voltaje de control, a y b son parámetros positivos. Se puede apreciar que el modelo (1) posee un polo en el origen del plano complejo complejo y por lo tanto, una entrada acotada no necesariamente produce una salida acotada. Esta característica dificulta su identificación en lazo abierto razón por la cual es necesario estimar los parámetros a y b cuando

el servomecanismo funciona en lazo cerrado. Este aspecto es crítico si además el servomotor está conectado a algún dispositivo o carga mecánica, por ejemplo, un robot o una máquina de herramienta. En tales casos es necesario primero estabilizar el sistema para posteriormente aplicar alguna técnica de identificación.

Una técnica para crear un movimiento estable cuando la variable de salida es la posición del servomotor consiste en cerrar el lazo de retroalimentación mediante un relevador [1], [2], [3], [4] tal y como se hace en el caso de procesos industriales [5] con propósitos de sintonización de controladores. La oscilación estable generada por el relevador permite excitar al motor y así identificar sus parámetros. Esta metodología se utiliza en [1], [2] para identificar la fricción de Coulomb.

En [6] se presenta una técnica de identificación en lazo cerrado de tipo error de salida. Con esta técnica, un servomecanismo de CD y un modelo del mismo son controlados simultáneamente mediante una ley de control Proporcional Derivativa (PD). La identificación de los parámetros a y b del servomecanismo se realiza resolviendo 2 ecuaciones diferenciales ordinarias. Se presentan resultados experimentales y los parámetros estimados obtenidos se emplean para el cálculo de una ley de control Proporcional Integral Derivativa la cual se diseña utilizando la teoría del Regulador Lineal Cuadrático.

En este trabajo se propone un método de identificación en lazo cerrado en línea para servomecanismos de Corriente Directa. Los resultados de este método se comparan con los estimados obtenidos mediante el modelado físico directo del servomecanismo y con los estimados producidos por el método de Mínimos Cuadrados fuera de línea (MCFL). Se muestra que ante perturbaciones de entrada el método propuesto y el método MCFL producen estimados diferentes a aquellos obtenidos en ausencia de perturbaciones.

El artículo está organizado como sigue: La sección II presenta el modelo del servomecanismo. Las secciones III-VI presentan los algoritmos de identificación utilizados. En las secciones VII y VIII se estudia el comportamiento de los algoritmos ante perturbaciones de entrada en el servomecanismo. La manera en como se valida el modelo identificado se muestra en la sección IX. La sección X está dedicada a la parte experimental. Finalmente en la sección XI se establecen las conclusiones.

II. MODELO DEL SERVOMECANISMO

El servomecanismo bajo estudio consiste de un amplificador, de un servomotor de Corriente Directa (CD) y de un sensor de posición, como se muestra en la Fig. 1. El amplificador está configurado en modo corriente. Esto

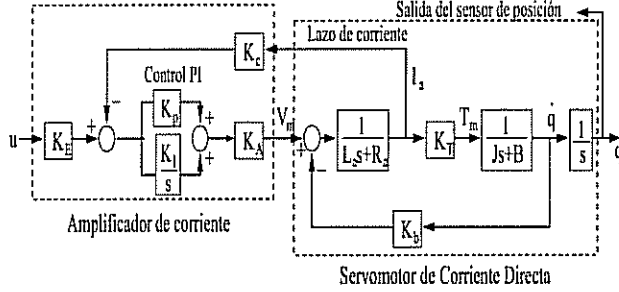


Fig. 1. Modelo del servomecanismo.

equivale a cerrar un lazo de realimentación mediante una ley de control Proporcional Integral (PI) utilizando la corriente de armadura. q es la posición del servomotor, u es el voltaje de control, J y B son respectivamente la inercia y la fricción viscosa del servomecanismo. J es la suma de la inercia del servomotor J_m y de la inercia de un disco de latón J_d utilizado como carga. Los parámetros de la Fig. 1 son proporcionados por los fabricantes del amplificador [7] y del servomotor [8] y se muestran en la Tabla I.

La función del amplificador de corriente es mantener la corriente de armadura del motor I_a proporcional a la entrada de control u . La función de transferencia de u a q está dada por

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{b}{s(s+a)} \quad (2)$$

donde $a = B/J$, $b = K/J$, $K = \frac{K_E K_T}{K_C}$. Este modelo se obtiene asumiendo una ganancia integral K_I de valor elevado.

La expresión (2) en el dominio del tiempo está dada por:

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) \quad (3)$$

Debido a que se asume que sólo la variable q está disponible a través de mediciones, es necesario efectuar la estimación de \dot{q} y \ddot{q} para así obtener una parametrización adecuada del modelo del servomecanismo. La obtención de esta parametrización se describe a continuación.

A. Parametrización del modelo.

La ecuación (2) puede reescribirse como:

$$(s^2 + as)Q(s) = bU(s) \quad (4)$$

Defínase el siguiente polinomio estable

$$\lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2 \quad (5)$$

Tabla I
PARÁMETROS DEL SERVOMECANISMO

Constante	Valor	Unidades
B	1.784×10^{-3}	$(N)(m)(seg)/(rev)$
K_P	4.7	
K_I	21276.6	$(seg)^{-1}$
K_E	0.611	
K_T	0.42	$(N)(m)/(A)$
K_C	0.2	(Ω)
K_A	12	
R_a	4.9	Ω
L_a	12	mH
K_b	2.6389	V/rev/seg
J_m	2.44×10^{-3}	$(kg)(m^2)$
J_d	6.8713×10^{-3}	$(kg)(m^2)$
$J = J_m + J_d$	9.3111×10^{-3}	$(kg)(m^2)$

El proceso de parametrización consiste en sumar en ambos miembros de (4) el término $\lambda(s)Q(s)$, esto es:

$$\lambda(s)Q(s) + (s^2 + as)Q(s) = bU(s) + \lambda(s)Q(s) \quad (6)$$

Mediante manipulaciones matemáticas de (6) se llega a la siguiente expresión:

$$\left[Q(s) - \frac{\lambda_2 Q(s)}{\lambda(s)} \right] \lambda_2 = \alpha \frac{\lambda_2 s Q(s)}{\lambda(s)} + \frac{b \lambda_2 U(s)}{\lambda(s)} \quad (7)$$

donde $\alpha = \lambda_1 - a$. La representación de (7) en el dominio del tiempo está dada por:

$$z(t) = \alpha \phi_1(t) + b \phi_2(t) \quad (8)$$

donde $z(t)$, $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son las transformadas inversas de Laplace de $\left[Q(s) - \frac{\lambda_2 Q(s)}{\lambda(s)} \right] \lambda_2$, $\frac{\lambda_2 s Q(s)}{\lambda(s)}$ y $\frac{\lambda_2 U(s)}{\lambda(s)}$ respectivamente. Finalmente, de (8) se obtiene la siguiente parametrización:

$$z(t) = \phi^T(t) \theta \quad (9)$$

con $\phi(t) = [\phi_1(t) \ \phi_2(t)]^T$ y $\theta = [\alpha \ b]^T$.

III. ALGORITMO DE MÍNIMOS CUADRADOS FUERA DE LÍNEA (MCFL)

El principio del método es el siguiente. Mediante una ley de control PD se cierra el lazo de realimentación para que crear un movimiento estable del servomecanismo. Entonces, se aplica el MCFL para estimar los parámetros del servomecanismo.

El MCFL se resume en la siguiente fórmula [9]:

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = (\Phi_k^T \Phi_k)^{-1} \Phi_k^T Z_k \quad (10)$$

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{k=1}^N \phi(k) \phi^T(k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \phi(k) z(k) \right] \quad (11)$$

donde $Z_k = [z(k), z(k+1), \dots, z(N)]^T$ y $\Phi_k = [\phi(k); \phi(k+1); \dots; \phi(N)]^T$, $N \geq 2$. Es importante notar que el algoritmo proporciona un estimado $\hat{\alpha}$ de $\alpha = \lambda_1 - a$, entonces, una vez que este estimado es obtenido, el estimado \hat{a} del servomecanismo se obtiene mediante la relación $\hat{a} = \lambda_1 - \hat{\alpha}$.

IV. MODELADO FÍSICO DIRECTO (MFD)

Este método de identificación se realiza de forma analítica utilizando los parámetros del servomotor y del amplificador de potencia que proporcionan los fabricantes.

Los parámetros estimados $\hat{a} = B/J$ y $\hat{b} = K/J$ del modelo (3) se obtienen al substituir los valores de B , J y $K = \frac{K_E K_T}{K_c}$ de la Tabla I, es decir,

$$\hat{a} = \frac{B}{J} = \frac{1.784 \times 10^{-3} (N)(m)(seg)/(rev)}{9.31248 \times 10^{-3} (kg)(m^2)} = 0.1929 \frac{1}{seg}$$

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{K}{J} = \frac{K_E K_T}{K_c J} = \frac{(0.611)(0.42)(N)(m)/(A)}{(0.2\Omega)(9.31248 \times 10^{-3} (kg)(m^2))} \\ &= 137.78 \frac{rev}{(V)(seg^2)} \end{aligned} \quad (12)$$

V. ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN PROPUESTO (MP).

La idea del MP es la siguiente. Un controlador PD se aplica al servomecanismo para asegurar que sea estable en lazo cerrado (ver Fig. 2). Una vez excitado el sistema se obtienen las señales \dot{q}_f y u_f a partir del filtrado de las variables q y u respectivamente. El error \bar{e} entre la señal \dot{q}_f y la señal \dot{q}_{fe} de un modelo así como las señales \dot{q}_f y u_f sirven como entradas para una ley de adaptación del algoritmo. De esta manera, los parámetros del modelo se ajustan usando los parámetros obtenidos a partir del algoritmo de identificación.

Una parametrización similar a la mostrada en la sección II-A se describe a continuación. El proceso de parametrización consiste en multiplicar ambos lados de (3) por el filtro estable $F(s) = \lambda_2 / (s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2)$, obteniéndose la siguiente expresión en el dominio del tiempo

$$\ddot{q}_f(t) = -a\dot{q}_f(t) + bu_f(t) \quad (13)$$

donde $\ddot{q}_f(t)$, $\dot{q}_f(t)$ y $u_f(t)$ son las transformadas inversas de Laplace de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} a). \quad \ddot{q}_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[s^2 Q(s)F(s)], \\ b). \quad \dot{q}_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[s Q(s)F(s)] \\ c). \quad u_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[U(s)F(s)] \end{aligned} \quad (14)$$

El subíndice f denota cantidades filtradas.

Se define el siguiente modelo estimado, con \hat{a} y \hat{b} los estimados de los parámetros a y b respectivamente:

$$\ddot{q}_{fe}(t) = -\hat{a}\dot{q}_f(t) + \hat{b}u_f(t) + \alpha\bar{e}(t) \quad (15)$$

q_{fe} es la salida del modelo, α es una constante positiva y

$$\bar{e}(t) = \dot{q}_f(t) - \dot{q}_{fe}(t) \quad (16)$$

es el error de predicción.

La ley de adaptación para los parámetros del modelo es:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\hat{a}}(t) \\ \dot{\hat{b}}(t) \end{pmatrix} = -\Gamma\phi(t)\bar{e}(t) \quad (17)$$

donde Γ es la ganancia de adaptación. El vector regresor $\phi(t)$ está dado por

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}_f(t) \\ -u_f(t) \end{pmatrix} \quad (18)$$

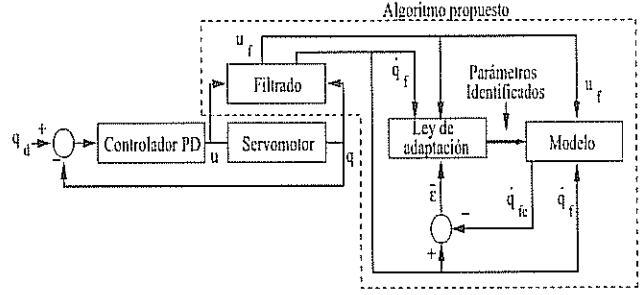


Fig. 2. Método de identificación propuesto.

VI. EXCITACIÓN PERSISTENTE

Para que el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ converja al vector de parámetros real θ , el vector regresor ϕ del algoritmo de identificación que estima $\hat{\theta}$ debe cumplir la siguiente condición de excitación persistente [10]:

Definición 1: Un vector $\phi: R_+ \rightarrow R^{2n}$ es de Excitación Persistente (EP) si existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \delta > 0$ tales que:

$$\alpha_2 I \geq \int_{t_0}^{t_0+\delta} \phi(\tau)\phi^T(\tau)d\tau \geq \alpha_1 I$$

para todo $t_0 \geq 0$.

VII. COMPORTAMIENTO DEL AMCFL ANTE PERTURBACIONES DE ENTRADA

Cuando existe una perturbación de entrada $d(t)$ en el servomecanismo (ver Fig. 3) se tiene la siguiente parametrización alternativa de (8):

$$z(t) = \alpha\phi_1(t) + b\phi_2(t) + \zeta(t) \quad (19)$$

donde $\zeta(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{b\lambda_2 D(s)}{\lambda(s)} \right]$, $\lambda(s)$ se definió en (5) y $D(s)$ es la transformada de Laplace de $d(t)$.

De (19) se obtiene

$$z(t) = \phi^T(t)\theta + \zeta(t) \quad (20)$$

con $\theta = [\alpha, b]^T$ y $\phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t)]^T$. La ecuación (20) en tiempo discreto es la siguiente:

$$z(k) = \phi^T(k)\theta + \zeta(k) \quad (21)$$

Al substituir $z(k)$ de (21) en (11) resulta

$$\hat{\theta} = \theta + \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(k)\phi^T(k) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(k)\zeta(k) \quad (22)$$

Si se asume que $\zeta(k)$ es una variable aleatoria, la suma $(1/N) \sum_{k=1}^N \phi(k)\zeta(k)$ converge a la esperanza matemática $E[\phi(k)\zeta(k)]$ cuando N tiende a infinito. $E[\phi(k)\zeta(k)]$ es cero si $\zeta(k)$ y $\phi(k)$ no están correlacionados. Esto es verdadero si se cumplen las siguientes condiciones [11]: **1).** $\{\zeta(k)\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes de media cero; **2).** La secuencia $\{\phi(k)\} = \{[\phi_1(k), \phi_2(k)]^T\}$ es independiente de la secuencia de ruido de media cero $\{\zeta(k)\}$.

VIII. COMPORTAMIENTO DEL MP ANTE
PERTURBACIONES DE ENTRADA

La salida q_p del sistema de la Fig. 3 es la siguiente:

$$q_p(t) = q(t) + v(t) \quad (23)$$

donde $q(t)$ y $v(t)$ están dadas por:

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}[Q(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{bk_p R(s)}{s^2 + (a + bk_d)s + bk_p} \right] \quad (24)$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{bD(s)}{s^2 + (a + bk_d)s + bk_p} \right] \quad (25)$$

La ley de control u_p del sistema de la Fig. 3 es:

$$u_p(t) = u(t) + w(t) \quad (26)$$

donde $u(t)$ y $w(t)$ son las transformadas inversas de Laplace de las siguientes expresiones:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_p s(s+a)R(s)}{s^2 + (a + bk_d)s + bk_p} \right] \quad (27)$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-b(k_d s + k_p)D(s)}{s^2 + (a + bk_d)s + bk_p} \right] \quad (28)$$

Cuando $d(t) = 0$ se tiene $q_p(t) = q(t)$ y $u_p(t) = u(t)$.

Si $d(t) \neq 0$, la ley de adaptación (17) se modifica de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} a). \quad \dot{\hat{\theta}}_p(t) &= -\Gamma \phi_p(t) \bar{\epsilon}_p(t), \\ b). \quad \phi_p(t) &= \begin{pmatrix} \dot{q}_{pf}(t) \\ -u_{pf}(t) \end{pmatrix}, \\ c). \quad \bar{\epsilon}_p(t) &= \dot{q}_{pf}(t) - \dot{q}_{fe}(t)(t) \end{aligned} \quad (29)$$

donde $\dot{q}_{pf}(t) = \dot{q}_f(t) + \xi(t)$, $u_{pf}(t) = u_f(t) + \sigma(t)$. $\dot{q}_f(t)$ y $u_f(t)$ se definieron en (14-b) y (14-c) respectivamente. $\xi(t)$ y $\sigma(t)$ están dados por:

$$\xi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Xi(s)] = \mathcal{L}^{-1}[sV(s)F(s)] \quad (30)$$

$$\sigma(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Sigma(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)F(s)] \quad (31)$$

donde $F(s)$ es el filtro estable $F(s) = \lambda_2 / (s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2)$ y $V(s)$ y $W(s)$ se establecieron en (25) y (28).

La dinámica del modelo estimado está dada por la siguiente expresión en lugar de (15):

$$\ddot{q}_{fe}(t) = -\hat{a}\dot{q}_{pf}(t) + \hat{b}u_{pf}(t) + \alpha \bar{\epsilon}_p(t) \quad (32)$$

De (32) se tiene que $\bar{\epsilon}_p(t)$ está dado por:

$$\bar{\epsilon}_p(t) = \left[\frac{\ddot{q}_{fe}(t) + \hat{a}\dot{q}_{pf}(t) - \hat{b}u_{pf}(t)}{\alpha} \right] \quad (33)$$

El error de predicción $\bar{\epsilon}(t)$ de (33) puede ser reescrito como:

$$\bar{\epsilon}_p(t) = \bar{\epsilon}(t) + \frac{\hat{a}\xi(t) - \hat{b}\sigma(t)}{\alpha} \quad (34)$$

donde se utilizó (15).

Al comparar el regresor $\phi(t)$ de (18) y el regresor $\phi_p(t)$ de (29-b) se tiene que:

$$\phi_p(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}_{pf}(t) \\ -u_{pf}(t) \end{pmatrix} = \phi(t) + \begin{pmatrix} \xi(t) \\ -\sigma(t) \end{pmatrix} \quad (35)$$

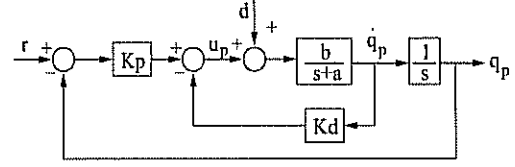


Fig. 3. Servomecanismo sometido a una perturbación de entrada.

Defínase $\delta = \|\hat{\theta}_p - \hat{\theta}\|$. Utilizando (17) y (29-a) δ se expresa como

$$\delta = \left\| \Gamma \begin{pmatrix} \xi(t) \\ -\sigma(t) \end{pmatrix} \bar{\epsilon}(t) + \Gamma \left(\phi(t) + \begin{pmatrix} \xi(t) \\ -\sigma(t) \end{pmatrix} \right) \frac{\hat{a}\xi(t) - \hat{b}\sigma(t)}{\alpha} \right\| \quad (36)$$

Si se utiliza el vector de parámetros estimados $\hat{\theta} = [\hat{a}, \hat{b}]^T$ y se define el vector $\chi(t) = [\xi(t), -\sigma(t)]^T$ que depende de $d(t)$, entonces, la expresión (36) se puede reescribir como:

$$\delta = \|\Gamma \chi(t) \bar{\epsilon}(t) + \frac{1}{\alpha} \Gamma [\phi(t) + \chi(t)] (\chi^T(t) \hat{\theta})\| \quad (37)$$

$$= \|\Gamma \chi(t) \bar{\epsilon}(t) + \frac{1}{\alpha} \Gamma \phi(t) \chi^T(t) \hat{\theta} + \frac{1}{\alpha} \Gamma \chi(t) \chi^T(t) \hat{\theta}\| \quad (38)$$

De (38) se aprecia que δ es función de χ , de $\frac{\chi}{\alpha}$ y de $\frac{\chi \chi^T}{\alpha}$. Por lo tanto, δ es función de $d(t)$, de $\frac{d(t)}{\alpha}$ y de $\frac{d(t)^2}{\alpha}$.

Para α muy grande la ecuación (38) se aproxima por:

$$\delta \approx \|\Gamma \chi(t) \bar{\epsilon}(t)\| = \left\| \Gamma \begin{pmatrix} \xi(t) \\ -\sigma(t) \end{pmatrix} \bar{\epsilon}(t) \right\| \quad (39)$$

Lo anterior muestra que la ganancia α del algoritmo de identificación no atenúa todos los términos asociados a la perturbación. Por otro lado, el efecto de las ganancias proporcional y derivativa del controlador PD sobre las perturbaciones se estudia a continuación.

Se mostrará la transformada de Laplace de $\xi(t)$ y de $\sigma(t)$, en las cuales se utilizarán los siguientes parámetros: $a=0.5$, $b=100$, $\lambda_1=40$, $\lambda_2=400$.

La transformada de Laplace de $\xi(t)$ fue definida en (30) y está dada por:

$$\Xi(s) = \left[\frac{sbD(s)}{s^2 + (a + bk_d)s + bk_p} \right] \left[\frac{\lambda_2}{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2} \right] \quad (40)$$

La Fig. 4 muestra el diagrama de Bode de la magnitud de $\frac{\Xi(s)}{D(s)}$ para diferentes pares de ganancias (k_p, k_d) . Se observa que la magnitud de ξ disminuye al incrementarse las ganancias k_p y k_d . También se puede apreciar que la magnitud de ξ decrece a altas frecuencias.

La transformada de Laplace de $\sigma(t)$ se definió en (31) y es la siguiente:

$$\Sigma(s) = \left[\frac{-b(k_d s + k_p)D(s)}{s^2 + (a + bk_d)s + bk_p} \right] \left[\frac{\lambda_2}{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2} \right] \quad (41)$$

La Fig. 5 presenta el diagrama de Bode de $\frac{\Sigma(s)}{D(s)}$ para diferentes pares de ganancias (k_p, k_d) . Se observa que a bajas

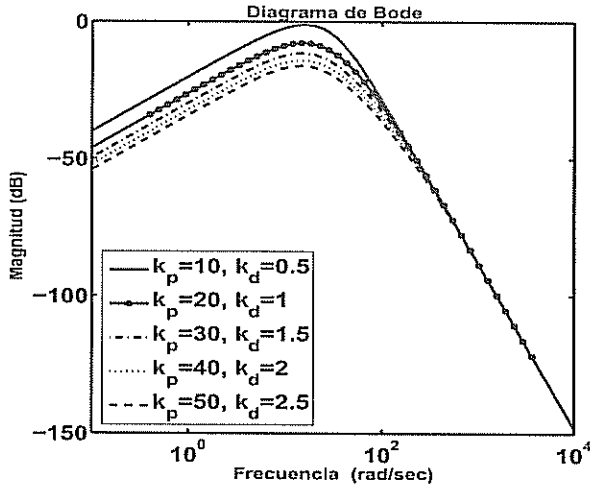


Fig. 4. Diagrama de Bode de la función de transferencia $\frac{\Xi(s)}{D(s)}$.

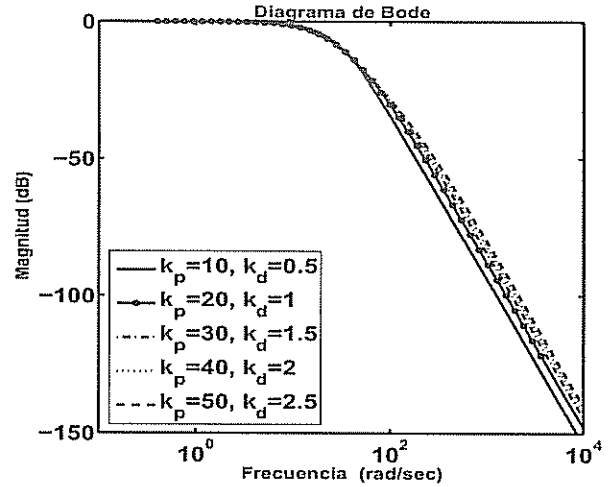


Fig. 5. Diagrama de Bode de la función de transferencia $\frac{\Sigma(s)}{D(s)}$.

frecuencias la magnitud de σ para todos los valores de k_p y k_d es igual a la magnitud de la perturbación $d(t)$. Así, entre mayor sea la magnitud de $d(t)$ a bajas frecuencias mayor será la magnitud de σ . Esto ocasionará que δ en (39) se incremente. Por lo tanto, el método propuesto no tiene buen desempeño ante perturbaciones de baja frecuencia.

De acuerdo a la Fig. 5, la magnitud de $\sigma(t)$ disminuye conforme se incrementa la frecuencia de $d(t)$. Además, del diagrama 4 se observa que la magnitud de $\xi(t)$ decrece a altas frecuencias y al aumentar las ganancias k_p y k_d . Por lo anterior, si $d(t)$ es de alta frecuencia, las ganancias k_p y k_d tienen valores elevados, y además la ganancia α que permite aproximar (38) a (39) tiene un valor muy grande, entonces el valor de δ (39) será pequeño.

IX. VALIDACIÓN DEL MODELO DEL SERVOMECANISMO

La validación del modelo del servomecanismo de CD se realiza mediante el diseño una ley de control calculada en base a este modelo. El objetivo de la ley de control es el seguimiento de un modelo de referencia.

Para evaluar la calidad del modelo identificado del servomecanismo se utiliza el siguiente procedimiento. Primero se toman secuencialmente N muestras del error e de seguimiento de modelo, formándose un vector, i.e. $E = (e_1, e_2, \dots, e_N)^T$, donde e_i es la i -ésima muestra de e . Posteriormente, se calcula la norma Euclidiana de E . Se considera que la calidad del modelo es mejor para valores pequeños de $\|E\|$.

X. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El servomecanismo empleado para los experimentos en de la marca Moog, modelo C34-L80, y es controlado por un amplificador Copley Controls modelo 423 configurado en modo corriente. Las ganancias utilizadas para del controlador PD del servomecanismo son: $k_p = 10$ y $k_d = 0.34$. La posición angular del motor se mide por medio de un

decodificador óptico BEI, modelo L15. La programación se realizó usando el *software* Matlab-Simulink operando bajo el programa WINCON de Quanser Consulting. El periodo de muestreo fue de 0.1ms. Los valores usados para el MP son: $\Gamma = \text{diag}(50, 5000)$ y $\alpha = 500$.

El servomecanismo se sometió a las siguientes perturbaciones de entrada: Señal Constante con amplitud de 0.3 unidades creada mediante el bloque *Constant* de Simulink, y ruido Gaussiano de media cero con varianza de 0.1 creado mediante el bloque *Random Number* de Simulink.

La Tabla II muestra los parámetros estimados por los métodos de identificación cuando no se aplica intencionalmente una perturbación al servomecanismo. Las Tablas III y IV muestran los parámetros estimados en presencia de las perturbaciones Constante y ruido Gaussiano, respectivamente. Las Tablas II, III y IV también presentan la calidad $\|E\|$ del modelo identificado. Por otro lado, en las Figuras 6, 7 y 8 se muestran los parámetros estimados por el MP.

Tabla II

ESTIMADOS CUANDO NO SE APLICAN PERTURBACIONES.

Métodos	\hat{a}	\hat{b}	Calidad del modelo $\ E\ $
MFD	0.193	137.78	75.018
MCFL	0.7308	137.2621	85.0676
MP	0.5952	136.9548	77.7874

Tabla III

ESTIMADOS CUANDO SE APLICA UNA PERTURBACIÓN CONSTANTE.

Métodos	\hat{a}	\hat{b}	Calidad del modelo $\ E\ $
MCFL	0.3559	51.3241	213.3166
MP	-0.1896	48.5320	211.0965

Tabla IV
ESTIMADOS CUANDO SE APLICA RUIDO GAUSSIANO

Métodos	\hat{a}	\hat{b}	Calidad del modelo $\ E\ $
MCFL	0.5585	135.9176	75.7641
MP	0.6538	136.2246	79.8134

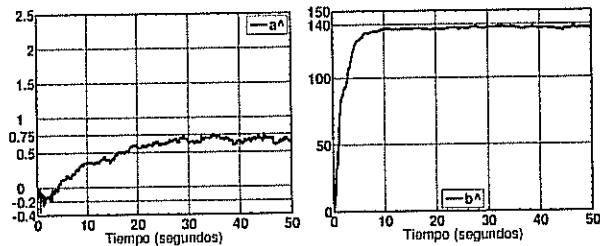


Fig. 6. Estimados por el MP cuando no se aplican perturbaciones.

De acuerdo a la Tabla II, cuando no se aplican perturbaciones al servomecanismo, el MCFL y el MP proporcionan estimados similares a los obtenidos por el MFD.

Los parámetros estimados por el MCFL ante la perturbación de ruido Gaussiano son similares a los parámetros estimados cuando no se aplicaron perturbaciones. Ante la perturbación Constante con valor de 0.3 unidades el MCFL tiene un mal funcionamiento.

En la sección VIII se mostró que el MP tiene buen desempeño ante perturbaciones de entrada de alta frecuencia. Por esta razón, los parámetros estimados en presencia del ruido Gaussiano son semejantes a los parámetros estimados cuando no se aplicaron perturbaciones. Sin embargo, en dicha sección también se probó que el MP tiene un comportamiento inadecuado ante perturbaciones de entrada de baja frecuencia. Por este motivo, existe una gran discrepancia entre los parámetros estimados en presencia de la perturbación Constante y los parámetros estimados cuando no se aplicaron perturbaciones.

XI. CONCLUSIONES

Los resultados experimentales muestran que los métodos de identificación en lazo cerrado MCFL y MP proporcionan estimados similares a los obtenidos por el MFD. También, se mostró que los métodos MCFL y MP tienen buen desempeño sólo ante perturbaciones de media cero y alta frecuencia, respectivamente. Ante perturbaciones Constantes, ambos métodos no proporcionan estimados similares al MFD. Como trabajo futuro será necesario idear métodos de identificación que tomen en cuenta el efecto de las perturbaciones que afectan al servomecanismo.

REFERENCIAS

[1] K.K. Tan, T.H. Lee, P. Vadakkepat, F. M. Leu, Automatic tuning of two degree-of-freedom control for DC servomotor system. In *Intelligent Automation and Soft Computing*, Vol. 6, No. 4, 2000.

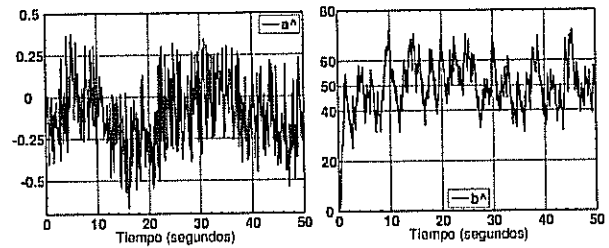


Fig. 7. Estimados por el MP cuando se aplica una perturbación Constante.

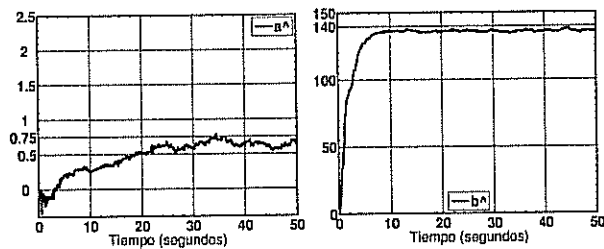


Fig. 8. Estimados por el MP cuando se aplica un ruido Gaussiano.

- [2] K.K. Tan, Y. Xie, T.H. Lee, Automatic friction identification and compensation with a self-adapting dual relay. In *Intelligent Automation and Soft Computing*, Vol. 9, No. 2, 2003.
- [3] A. Besancon-Voda, G. Besancon, Analysis of a two-relay systems configuration, In *Automatica*, Vol. 35, No. 8, 1999.
- [4] K.K. Tan, T.H. Lee, S.N. Huang, X.J. Jiang, Friction modelling and adaptive compensation using a relay feedback approach. In *IEEE Trans. Industrial Electronics*, Vol. 48, No. 1, 2001.
- [5] K.J. Astrom, T. Hagglund, PID controllers: Theory, Design and Tuning. In *Instruments Society of America*, 1994.
- [6] Garrido R., R. Miranda, Autotuning of a DC Servomechanism using Closed Loop Identification. In *IEEE 32nd Annual Conference on Industrial Electronics IECON 2006*, Paris, Octubre 7-10, 2006.
- [7] Controls Copley, www.copleycontrols.com/motion/pdf/412ce.pdf.
- [8] Moog Components, www.polysci.com/docs/moc23series.PDF.
- [9] Oliver Nelles, Nonlinear System Identification, In *Springer Verlag*, 2001.
- [10] Shankar Sastry, Marc Bodson, Adaptive Control Stability, Convergence and Robustness. In *Prentice Hall*, 1989.
- [11] Lennart Ljung, Torsten Söderström, Theory and Practice of Recursive Identification, The MIT Press, 1983.

Identificación algebraica de un servomecanismo de corriente directa empleando el Método de Mínimos Cuadrados

Rubén Alejandro Garrido Moctezuma, Antonio Concha Sánchez
Departamento de Control Automático-CINVESTAV IPN
Gustavo A. Madero D.F 07360, México
E-mail: garrido, aconcha@ctrl.cinvestav.mx
Teléfono: (52)-55- 57473739

Resumen—Este artículo propone una técnica de identificación paramétrica basada en el algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo discreto y en una parametrización obtenida mediante el Cálculo Operacional. En (Fliess y Sira, 2003) y en (Fliess y Sira, 2007) se propuso esta parametrización y se desarrolló un Método de Identificación Algebraico (MIA) para la identificación paramétrica de sistemas lineales. El MIA emplea el Cálculo Operacional para obtener expresiones analíticas con las cuales se determinan los parámetros desconocidos. Estas expresiones tienen una singularidad en $t=0$ y ciertas señales pueden originar singularidades en otros instantes de tiempo. La técnica propuesta emplea la misma parametrización obtenida usando el Cálculo Operacional, la cual es lineal en los parámetros, y utiliza el algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo discreto y en línea. De esta manera, el método propuesto elimina el problema de singularidades; además, se muestra experimentalmente que el MIA y la técnica propuesta tienen desempeños similares.

Palabras clave: Identificación paramétrica, parametrización algebraica, servomecanismo.

I. INTRODUCCIÓN

La estimación de los parámetros del modelo de un servomecanismo es una característica primordial en muchos sistemas de control digital modernos. El modelo identificado sirve para el cálculo de los controladores que se le aplicarán al servomecanismo. El proceso de estimación de los parámetros puede llevarse a cabo tanto en lazo abierto como en lazo cerrado (Garrido y Concha, 2009).

En la literatura existen varias técnicas de identificación utilizadas para la estimación de los parámetros de un sistema (Rao y Unbehauen, 2006). Una técnica que utiliza una parametrización novedosa y emplea señales caóticas para la identificación de un servomecanismo de Corriente Directa (CD) controlado en velocidad se presenta en (Fuh y Tsai, 2007). En dicho trabajo se tratan problemas prácticos que aparecen durante la identificación paramétrica de servomecanismos controlados en velocidad debido a incertidumbres de alta frecuencia y ruido de medición. Se presentan experimentos que revelan que la señal de excitación tiene influencia directa en los resultados de

identificación. En (Garrido y Miranda, 2006) se presenta una técnica de identificación en lazo cerrado de tipo error de salida. Con esta técnica, un servomecanismo de CD y un modelo del mismo son controlados simultáneamente mediante una ley de control Proporcional Derivativa (PD). Se presentan resultados experimentales y, los parámetros estimados obtenidos se emplean para el cálculo de una ley de control Proporcional Integral Derivativa la cual se diseña utilizando la teoría del Regulador Lineal Cuadrático.

Las referencias (Fliess y Sira, 2003) y (Fliess y Sira, 2007) presentan un método de identificación algebraico (MIA) novedoso basado en el Cálculo Operacional. Este enfoque se aplicó en (Mamani et al., 2009) y en (Sira et al., 2009) para la identificación paramétrica de un motor de CD. El MIA tiene varias características interesantes. Primeramente, aplicando el Cálculo Operacional al modelo de un motor de CD se eliminan las perturbaciones constantes y el efecto de las condiciones iniciales; además, el MIA filtra el ruido de alta frecuencia y proporciona los parámetros estimados en un periodo de tiempo corto. Dicho enfoque funciona con casi todas las señales de excitación; sin embargo, existe la posibilidad de singularidades en las soluciones de los parámetros estimados.

En (Mamani et al., 2009) se utiliza el MIA para realizar la identificación en lazo abierto y en lazo cerrado de los parámetros de un motor de CD. Una vez que se obtienen los estimados de la inercia y de la fricción viscosa, se estima el coeficiente de fricción de Coulomb. En (Sira et al., 2009) se aplica el MIA para estimar los parámetros de un motor de CD sujeto a una perturbación de carga constante. Dichos parámetros son utilizados para el diseño de una ley de control adaptable para que el motor siga una trayectoria de velocidad.

El objetivo de este artículo es presentar un procedimiento de identificación en línea basado en la parametrización obtenida usando el Cálculo Operacional combinada con el algoritmo de Mínimos Cuadrados en línea discreto. Este enfoque aprovecha las ventajas de dicha parametrización y no exhibe el problema de singularidades. El artículo está organizado como sigue: La sección II presenta el

modelo de un servomecanismo. La sección III presenta la parametrización obtenida usando el Cálculo Operacional así como el MIA y la técnica propuesta. En la sección IV se describe el método para validar el modelo identificado por cada algoritmo. La sección V está dedicada a la parte experimental. Finalmente en la sección VI se establecen las conclusiones de este trabajo.

II. MODELO DEL SERVOMECHANISMO

El servomecanismo bajo estudio consiste de un amplificador, de un servomotor de Corriente Directa (CD) y de un sensor de posición. Su diagrama de bloques se muestra en la Fig. 1

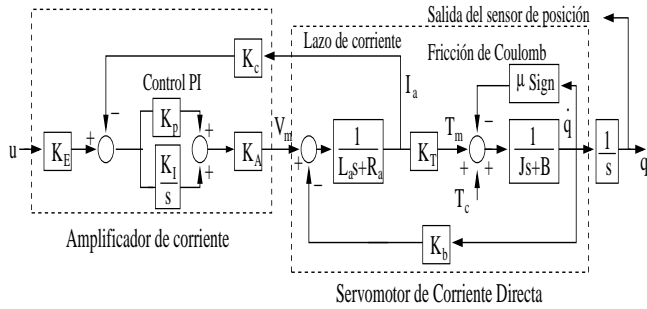


Figura 1. Modelo del servomecanismo.

El amplificador está configurado en modo corriente. Esto equivale a cerrar un lazo de realimentación mediante una ley de control Proporcional Integral utilizando la corriente de armadura I_a . q es la posición del servomotor, u es el voltaje de control, J y B son respectivamente la inercia y la fricción viscosa del servomecanismo. J es la suma de la inercia del servomotor J_m y de la inercia de un disco de latón J_d utilizado como carga. μ representa el coeficiente de fricción de Coulomb. T_c se considera como un par de carga constante o como un voltaje fijo presente en la salida del amplificador de potencia aún cuando la entrada del mismo sea cero.

La función del amplificador de corriente es mantener la corriente de armadura del motor I_a proporcional a la entrada de control u .

El modelo del servomecanismo está dado por:

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) - c\text{sign}(\dot{q}(t)) + d \quad (1)$$

donde $a = B/J$, $b = K/J$, $K = \frac{K_E K_T}{K_C}$, $c = \mu/J$ y $d = T_c/J$. Este modelo se obtiene asumiendo una ganancia integral K_I de valor elevado.

Para la identificación de los parámetros a , b , c y d del servomecanismo, primeramente se estiman los parámetros a y b . Posteriormente se estiman c y d .

III. ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN

La Fig. 2 muestra el esquema de identificación en lazo cerrado de un servomecanismo utilizando ya sea el MIA o el algoritmo propuesto. Para la identificación sólo se utilizan

las señales de entrada u y salida q del sistema. q_r es la señal de referencia del sistema en lazo cerrado. Para asegurar que el servomecanismo sea estable se aplica una ley de control PD. La velocidad \dot{q} utilizada en la ley de control se estima a partir de q mediante un filtro pasa-banda.

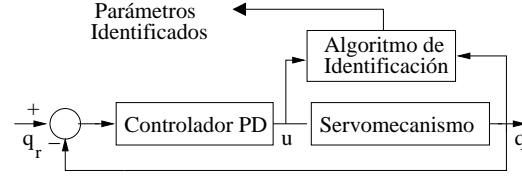


Figura 2. Identificación en lazo cerrado del servomecanismo.

A. Método de identificación algebraico

Si se considera que el motor gira en una sola dirección, entonces $\text{sign}(\dot{q}(t))$ es constante y la ecuación (1) se puede escribir como:

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) + \nu \quad (2)$$

donde $\nu = -c+d$ si $\text{sign}(\dot{q}(t))=1$ ó $\nu = c+d$ si $\text{sign}(\dot{q}(t)) = -1$. Aplicando el Cálculo Operacional (Fliess y Sira, 2003) a la última expresión se obtiene la siguiente parametrización (Mamani et al., 2009)

$$z_1(t) = \phi_{11}(t)a + \phi_{12}(t)b \quad (3)$$

donde¹

$$z_1(t) = t^3 q - 9 \int t^2 q + 18 \int^{(2)} t q - 6 \int^{(3)} q$$

$$\phi_{11}(t) = - \int t^3 q + 6 \int^{(2)} t^2 q - 6 \int^{(3)} t q \quad (4)$$

$$\phi_{12}(t) = \int^{(2)} t^3 u - 3 \int^{(3)} t^2 u$$

Usando ecuaciones diferenciales en lugar de integraciones iteradas se obtienen las siguientes expresiones para $z_1(t)$, $\phi_{11}(t)$ y $\phi_{12}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_{1a} + t^3 q \\ \dot{z}_{1a} &= z_{1b} - 9t^2 q \\ \dot{z}_{1b} &= z_{1c} + 18t q \\ \dot{z}_{1c} &= -6q \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{11} &= \phi_{11a} & \dot{\phi}_{12} &= \phi_{12a} \\ \dot{\phi}_{11a} &= \phi_{11b} - t^3 q & \dot{\phi}_{12a} &= \phi_{12b} \\ \dot{\phi}_{11b} &= \phi_{11c} + 6t^2 q & \dot{\phi}_{12b} &= \phi_{12c} + t^3 u \\ \dot{\phi}_{11c} &= -6t q & \dot{\phi}_{12c} &= -3t^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Multiplicando ambos lados de (3) por s^{-1} resulta

$$z_2(t) = \phi_{21}(t)a + \phi_{22}(t)b \quad (7)$$

¹ $\int_0^t \int_0^{\gamma_1} \dots \int_0^{\gamma_{n-1}} \sigma(\gamma_n) d\gamma_n \dots d\gamma_2 d\gamma_1$. representa la integral iterada $(\int^1 \sigma(t)) = (\int \sigma(t)) = (\int_0^t \sigma(\gamma_1) d\gamma_1)$.

donde $\phi_{21}(t) = \int \phi_{11}(t)$, $\phi_{22}(t) = \int \phi_{12}(t)$, $z_2(t) = \int z_1(t)$.

Las ecuaciones (3) y (7) forman el conjunto siguiente de ecuaciones simultaneas

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Se denotará la matriz de coeficientes $\phi_{ij}(t)$ como Φ .

De (8) se tiene que \hat{a} y \hat{b} están dados por:

$$\hat{a} = \frac{n_{\hat{a}}(t)}{\det(\Phi(t))} = \frac{z_1(t)\phi_{22}(t) - z_2(t)\phi_{12}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)} \quad (9)$$

$$\hat{b} = \frac{n_{\hat{b}}(t)}{\det(\Phi(t))} = \frac{z_2(t)\phi_{11}(t) - z_1(t)\phi_{21}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)}$$

Note que $\det(\Phi(t)) = \phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t) = 0$ para $t = 0$ y la solución tiene una singularidad. Además, acorde a (Fliess y Sira, 2003), para $t > 0$, la mayoría de las señales u y q son persistentes, i.e., estas señales satisfacen una condición Persistente si producen $\det(\Phi(t)) \neq 0$. Más aún, es posible obtener una solución única para los parámetros desconocidos \hat{a} y \hat{b} en (9) después de que transcurre un intervalo de tiempo $[0, \rho]$, $\rho > 0$.

Para filtrar y atenuar los efectos del ruido de media cero presente en la salida q del servomecanismo y por lo tanto en u se utiliza el procedimiento presentado en (Fliess y Sira, 2007); éste consiste en filtrar las señales del numerador y del denominador de \hat{a} y \hat{b} de la siguiente manera:

$$\hat{a} = \frac{g * n_{\hat{a}}(t)}{g * \det(\Phi)(t)} \quad \hat{b} = \frac{g * n_{\hat{b}}(t)}{g * \det(\Phi)(t)} \quad (10)$$

donde g es un filtro con función de transferencia $G(s)$ y $*$ denota el operador convolución. En nuestro caso $G(s) = 1/s$. Por lo tanto, los parámetros \hat{a} y \hat{b} que se estiman usando el método algebraico son los siguientes:

$$\hat{a} = \frac{\int n_{\hat{a}}(t)}{\int \det(\Phi)(t)} \quad \hat{b} = \frac{\int n_{\hat{b}}(t)}{\int \det(\Phi)(t)} \quad (11)$$

Cabe mencionar que las ecuaciones diferenciales (5) y (6) representan la salida de filtros lineales variantes en el tiempo e inestables, los cuales están excitados solamente por la entrada u y salida q del sistema. Debido a que la identificación paramétrica se realiza en un pequeño intervalo de tiempo $[0, \rho]$, una vez que los parámetros son obtenidos se detiene la identificación.

B. Método de identificación propuesto

La metodología propuesta utiliza la parametrización lineal (3), pero las señales z_1 , ϕ_{11} y ϕ_{12} se reinician cada T segundos para evitar que puedan tomar valores elevados. Nótese que debido a que (3) es válida para todo t , también es válida para $t = kh$; $k = 0, 1, 2, \dots$, donde h es el periodo de muestreo y es un submúltiplo del periodo T . Entonces, es posible escribir (3) como:

$$z_1(kh) = \phi_{11}(kh)a + \phi_{12}(kh)b \quad (12)$$

Omitiendo el periodo de muestreo h y definiendo $\phi(k) = [\phi_{11}(k) \ \phi_{12}(k)]^T$ y $\theta = [a \ b]^T$ se obtiene la siguiente expresión

$$z_1(k) = \phi^T(k)\theta \quad (13)$$

Esta parametrización permite usar el siguiente algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo discreto (Ljung, 1987, Nelles 2001):

$$\hat{\theta}(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}(k) \\ \hat{b}(k) \end{pmatrix} = \hat{\theta}(k-1) + L(k)\epsilon(k)$$

$$L(k) = \frac{P(k-1)\phi(k)}{1 + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1 + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}$$

$$\epsilon(k) = z(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k-1) \quad (14)$$

El vector $\hat{\theta}(k)$ es un estimado de θ y $P(k)$ es la matriz de ganancia. Comparado con el MIA, es claro que el método propuesto elimina completamente el problema de singularidades pues éstas no aparecen en (14). Nótese que la siguiente condición de excitación Persistente (Söderström, 1989, Anderson, 1982) reemplaza la condición de excitación Persistente dada en (Fliess y Sira, 2003).

Definición 1: Un vector ϕ satisface la condición de Excitación Persistente (EP) si para todo j existe un entero α tal que:

$$\alpha_1 \geq \sum_{\kappa=j}^{j+\alpha} [\chi^T \phi(\kappa)]^2 \geq \alpha_2 \quad (15)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ y χ es cualquier vector constante con $\|\chi\|=1$.

C. Identificación de los parámetros c y d

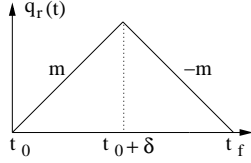
Los estimados \hat{a} y \hat{b} obtenidos usando el MIA y la técnica propuesta permiten calcular los estimados \hat{c} y \hat{d} de los parámetros restantes c y d . Supongamos que después de un tiempo t_0 el MIA y el algoritmo de Mínimos Cuadrados proporcionan los estimados \hat{a} y \hat{b} . Definamos la referencia triangular $q_r(t)$ mostrada en la Fig. 3

$$q_r(t) = \begin{cases} m(t-t_0) + q_r(t_0), & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \delta] \\ -m[t - (t_0 + 2\delta)] + q_r(t_0), & \text{si } t \in [t_0 + \delta, t_f] \end{cases} \quad (16)$$

Los términos m y $-m$ corresponden a las pendientes de $q_r(t)$ y $\delta = \frac{t_f - t_0}{2}$.

Si la ganancia proporcional de la ley de control PD es suficiente grande, entonces $q(t) \approx q_r(t)$. Por lo tanto, en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + \delta]$ se tiene $\dot{q} = m$, $\text{sign}(\dot{q})=1$, $\ddot{q} = 0$. En este intervalo de tiempo el modelo estimado de (1) está dado por:

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta] \quad (17)$$


 Figura 3. Señal de referencia $q_r(t)$.

Equivalentemente, durante el intervalo $[t_0 + \delta, t_f]$ se tiene $\dot{q} = -m$, $\text{sign}(\dot{q}) = -1$, $\ddot{q} = 0$. El modelo estimado en este intervalo de tiempo es:

$$-\hat{c} - \hat{d} = \hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (18)$$

La ecuación (17) es equivalente a:

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t - \delta), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (19)$$

Como \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} y m son constantes, entonces las señales de control en (18) y en (19) deben ser constantes.

Definiendo $u_m = u(t - \delta)$ y $u_{-m} = u(t)$, $t \in [t_0 + \delta, t_f]$ y sumando (18) y (19) se obtiene:

$$-2\hat{d} = \hat{b}[u_m + u_{-m}] \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (20)$$

Por lo tanto, en el intervalo de tiempo $[t_0 + \delta, t_f]$, los estimados \hat{c} y \hat{d} están dados por:

$$\begin{aligned} \hat{c} &= -[\hat{a}m + \hat{b}u_m + \hat{d}] \\ \hat{d} &= -\frac{\hat{b}[u_m + u_{-m}]}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

IV. VALIDACIÓN DEL MODELO DEL SERVOMECHANISMO

La validación del modelo del servomecanismo de CD se realiza mediante el diseño una ley de control calculada con base a este modelo. El objetivo de la ley de control es el seguimiento de un modelo de referencia. La Fig. 4 muestra el sistema de control con modelo de referencia, donde q_m es la salida del modelo y $e = q_m - q$ es el error de seguimiento de modelo.

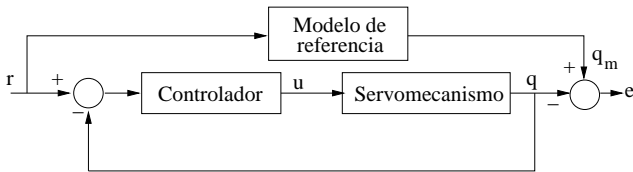


Figura 4. Sistema de control con modelo de referencia.

Para evaluar la calidad del modelo identificado del servomecanismo se utiliza el siguiente procedimiento. Primero se toman secuencialmente N muestras del error e de seguimiento de modelo, formándose el vector $E = (e_1, e_2, \dots, e_N)^T$, donde e_i es la i -ésima muestra de e . Posteriormente, se calcula la norma Euclidiana de E . Entre más pequeño sea el valor de $\|E\|$ se considera que la calidad del modelo es mejor.

A. Ley de control

El modelo de referencia que se considera es el siguiente:

$$\ddot{q}_m(t) = -a_1\dot{q}_m(t) - a_2q_m(t) + r(t) \quad (22)$$

donde a_1, a_2 son parámetros constantes positivos, $r(t)$ es la señal de entrada del modelo de referencia.

La ley de control utilizada está dada por:

$$u(t) = \frac{1}{\hat{b}}[\lambda_1\dot{e}(t) + \lambda_2e(t) + \ddot{q}_m(t) + \hat{a}\dot{q}(t) + \hat{c}\text{sign}(\dot{q}(t)) - \hat{d}] \quad (23)$$

donde $\ddot{q}_m(t)$ se define en (22), λ_1 y λ_2 son parámetros constantes positivos.

Sumando y restando $\hat{b}u$ a $\ddot{e}(t) = \ddot{q}_m(t) - \ddot{q}(t)$ y usando (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \ddot{e}(t) &= \ddot{q}_m(t) - \ddot{q}(t) + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \\ &= \ddot{q}_m(t) + \hat{a}\dot{q}(t) - \hat{b}u(t) + \hat{c}\text{sign}(\dot{q}(t)) - \hat{d} + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Sustituyendo la ley de control (23) en (24) resulta la siguiente dinámica del error e

$$\ddot{e}(t) + \lambda_1\dot{e}(t) + \lambda_2e(t) = \tilde{\theta}^T \psi(t) \quad (25)$$

donde

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{b} - b \\ \hat{c} - c \\ \hat{d} - d \end{pmatrix} \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} -\dot{q}(t) \\ u(t) \\ -\text{sign}(\dot{q}(t)) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El servomotor empleado para los experimentos es de la marca Moog, modelo C34-L80-W40, y está controlado por un amplificador Copley Controls modelo 423 configurado en modo corriente. La Fig. 5 (a) muestra el servomotor utilizado en este trabajo. Las ganancias empleadas en el controlador PD del servomecanismo son: $k_p = 10$ y $k_d = 0.34$. La posición angular del motor se mide por medio de un codificador óptico BEI, modelo L15, cuya resolución es de 2500 pulsos por revolución. La velocidad del motor se estima a partir de las mediciones de posición usando el filtro pasa-banda $G(s) = \left(\frac{220s}{s + 220} \right) \left(\frac{500}{s + 500} \right)$.

La adquisición de datos se realiza a través de una tarjeta Q8 de Quanser Consulting con entradas para codificadores ópticos. Estas entradas multiplican por 4 la resolución del codificador teniendo así 10,000 pulsos por revolución. La tarjeta tiene 12 bits para la conversión digital-analógica, con un rango de voltaje de salida de ± 10 voltios. La programación se realiza usando el *software* Matlab-Simulink operando bajo el programa WINCON de Quanser Consulting. Para evaluar las integrales que aparecen en las señales z_i y en los regresores ϕ_{ij} , $i, j = 1, 2$ de (3) y (7) se emplea el método de integración ODE5 con tamaño de paso de 50 μs . El periodo de muestreo para el algoritmo de Mínimos Cuadrados se fijó a $h = 0.5ms$ y el tiempo empleado para reiniciar las integrales usadas por el método propuesto es

$T = 2.5s$. El valor inicial de la matriz de ganancia P del algoritmo de Mínimos Cuadrados es $P(0) = \text{diag}(10,000, 10,000)$.

La Fig. 5 (b) muestra la señal de referencia $q_r(t) \approx q(t)$ utilizada para la identificación con el MIA o con la técnica propuesta. En el intervalo de tiempo $[0, 5]$ la señal está dada por $q_r = 11t + 4\text{sen}(0.8\pi t)$. En este intervalo de tiempo se realiza la identificación de los parámetros a y b del servomecanismo. La ecuación (16) define la señal de excitación para el intervalo de tiempo $[5, 15]$. La Fig. 5 (c) presenta la velocidad del servomotor \dot{q} . Además, la Fig. 5 (d) muestra la señal de control utilizada en el proceso de identificación.

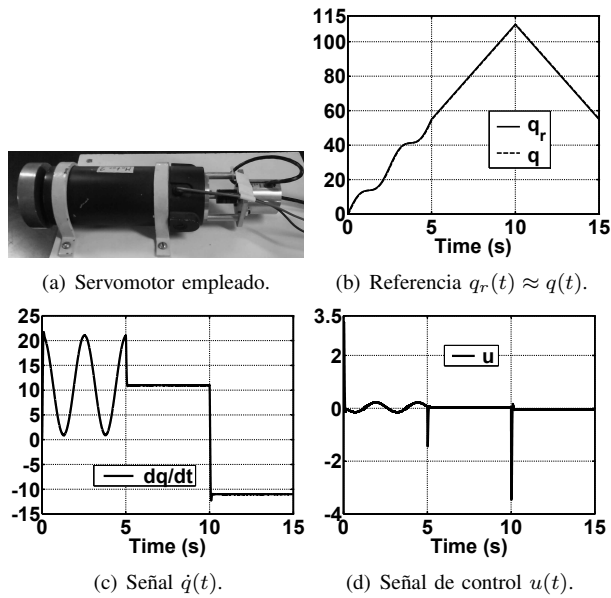


Figura 5. Servomotor usado en el proceso de identificación y señales $q(t)$, $\dot{q}(t)$ y $u(t)$.

Los parámetros estimados \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} y \hat{d} por el MIA se muestran en la Fig. 6. En el intervalo de tiempo $[0, 0.5]$ se asignó a los estimados \hat{a} , \hat{b} el valor de 1, debido a la singularidad que presenta el MIA en $t = 0$.

La Fig. 7, muestra los parámetros estimados \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} y \hat{d} por la metodología propuesta. Se observa que el tiempo de convergencia de estos parámetros es similar al del MIA. La diferencia es que los estimados \hat{a} y \hat{b} del MIA convergen más rápido a una vecindad alrededor de 0.15 y 137, respectivamente.

La Fig. 8 (a) muestra la evolución en el tiempo de $\sum[\chi^T \phi]^2$ de (15), donde $\chi = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$. La suma es reiniciada en 2.5s. De la Fig. 8 (a) se puede apreciar que el regresor ϕ del método propuesto cumple con la condición de Excitación Persistente.

Los modelos identificados usando el MIA y el método propuesto se utilizan para calcular la ley de control (23) con $a_1 = 0.3$, $a_2 = 10$, λ_1 y λ_2 . La Fig. 8 (b) muestra

la salida $q_m(t)$ del modelo de referencia. Además, las Figuras 8 (c) y 8 (d) presentan el error de seguimiento de modelo e cuando la ley de control (23) se calcula usando los parámetros obtenidos mediante el MIA y la técnica propuesta, respectivamente.

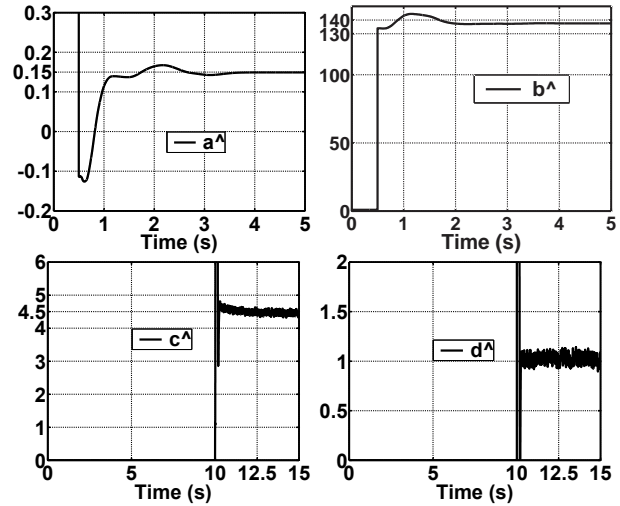


Figura 6. Parámetros estimados por el MIA.

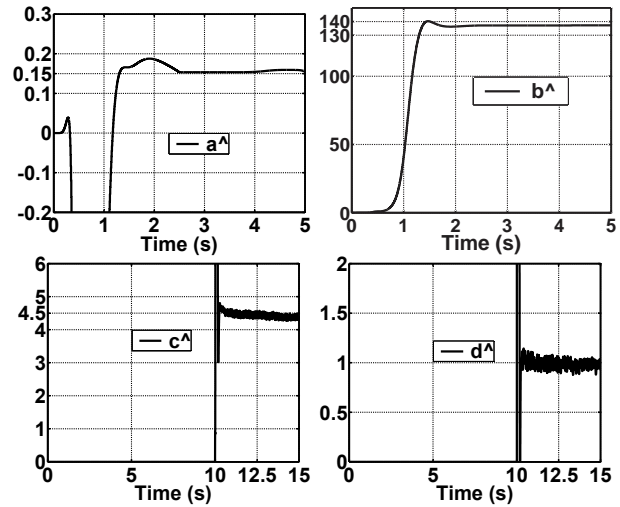


Figura 7. Parámetros estimados por el método propuesto.

La Tabla I resume los parámetros estimados por el MIA y el método propuesto, y presenta la calidad $\|E\|$ del modelo identificado. Esta tabla también presenta los parámetros nominales \hat{a} y \hat{b} del servomecanismo obtenidos en (Garrido y Concha, 2009) usando la hoja de datos del servomotor y del amplificador de potencia. Los parámetros asociados a la fricción de Coulomb y a la perturbación constante no están disponibles en la hoja de datos del servomotor. La calidad

del modelo estimado $\|E\|$ se obtuvo al tomar $N = 300,000$ muestras de e .

VI. CONCLUSIONES

El Método de Identificación Algebraico (MIA) y la metodología propuesta identificaron exitosamente cuatro parámetros del modelo de un servomotor de CD. EL MIA proporciona los parámetros estimados en un periodo de tiempo ligeramente más corto que el método propuesto; sin embargo, el método propuesto está completamente libre de singularidades.

VII. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Gerardo Castro y a Jesús Meza por instalar el prototipo de laboratorio.

REFERENCIAS

R. Garrido, A. Concha (2009). Estudio comparativo experimental de métodos de identificación en lazo cerrado para un servomecanismo. *Congreso Mexicano de Robótica COMROB*.

G. P. Rao, H. Unbehauen (2006). Identification of continuous-time systems. *IEEE Proceedings on Control Theory Applications*, Vol. 153, pag. 185-219.

Chyun-Chao Fuh, Hsun-Heng Tsai (2007). Adaptive parameter identification of servo control systems with noise and high-frequency uncertainties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, pag. 1437-1451.

R. Garrido, R. Miranda (2006). Autotuning of a servomechanism using Closed Loop Identification. *IEEE 32nd Annual Conference on Industrial Electronics IECON*.

M. Fliess, H. Sira-Ramírez (2003). An algebraic framework for linear identification. *ESAIM, Control, Optimization and Calculus of Variations*, Vol. 9, pag. 151-168.

M. Fliess, H. Sira-Ramírez (2007). Closed-loop parametric identification for continuous time linear systems via New Algebraic Techniques. *Continuous Time Model Identification from Sampled Data*, H. Granier & L. Wang (Eds.), Springer, Berlin.

G. Mamani, J. Becedas, V. Feliu-Batle, H. Sira-Ramírez (2009). Open and closed-loop algebraic identification method for adaptive control of DC motors. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*.

H. Sira Ramírez, E. Barrios Cruz, R. Márquez Contreras (2009). Fast Adaptive Trajectory Tracking Control for a Completely Uncertain DC Motor via Output Feedback. *Computación y Sistemas*, Vol. 12, No. 4, pag. 397-408.

Lennart Ljung (1987). *System Identification: Theory for the user*, Prentice Hall.

Oliver Nelles (2001). *Nonlinear System Identification*, Springer Verlag.

T. Söderström, P. Stoica (1989). *System Identification* Prentice Hall.

Brian D. O. Anderson (1982). Exponential Convergence and Persistent Excitation. *Proc. 21st IEEE Conference on Decision and Control*.

TABLA I

PARÁMETROS ESTIMADOS.

	\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}	Calidad del modelo $\ E\ $
Parámetros nominales	0.193	137.78	—	—	
MIA	0.149	137.5	4.5	1.05	28.7375
Método propuesto	0.155	137.3	4.4	0.97	28.8329

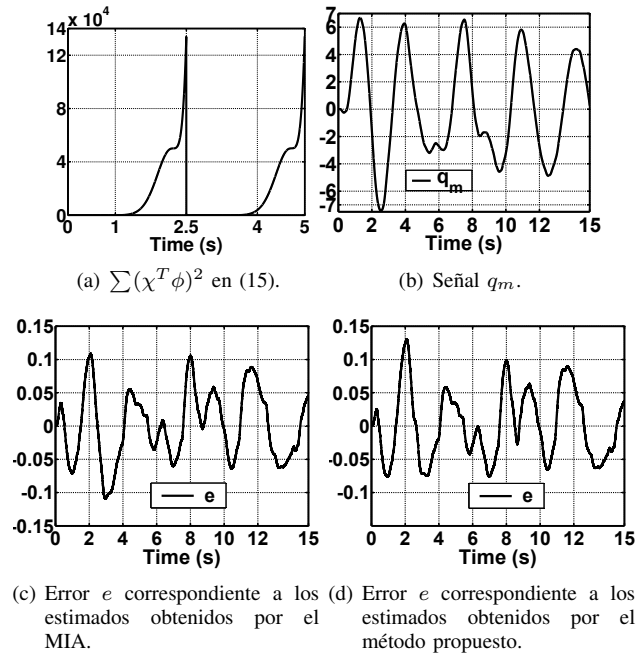


Figura 8. Salida q_m del modelo de referencia y errores de seguimiento e .

Combinación de un Método Algebraico y del Método de Mínimos Cuadrados para la identificación de un servomecanismo de CD

Rubén Garrido Moctezuma, Antonio Concha Sánchez
Departamento de Control Automático, CINVESTAV IPN
Gustavo A. Madero D.F 07360, México
E-mail: garrido, aconcha@ctrl.cinvestav.mx
Teléfono: (52)-55- 57473739

Resumen—Esta contribución presenta un método de identificación que estima cuatro parámetros del modelo de un servomecanismo de CD. El método propuesto utiliza una parametrización obtenida usando el Cálculo Operacional y empleada por un Método de Identificación Algebraico (MIA) presentado recientemente en la literatura. El procedimiento para obtener esta parametrización elimina las perturbaciones constantes que afectan al servomecanismo y filtra el ruido de medición de alta frecuencia. Un algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo continuo usa dicha parametrización para la identificación de los parámetros del servomecanismo y de esta manera se evita el problema de singularidades que presenta el MIA. Resultados experimentales obtenidos con un prototipo de laboratorio permiten comparar los parámetros estimados por el MIA y por el método propuesto.

Palabras clave: Identificación en lazo cerrado, Cálculo Operacional, servomecanismo de CD, Mínimos Cuadrados.

I. INTRODUCCIÓN

Los servomecanismos son elementos importantes en una gran variedad de aplicaciones que requieren control de posición o de velocidad. Se necesitan conocer los parámetros de un servomecanismo para mejorar su respuesta transitoria, estado estacionario y comportamiento dinámico. Por esta razón, las técnicas de identificación paramétrica juegan un rol importante debido a que el modelo identificado permite sintonizar el controlador.

En la literatura [1], [2], [3], [4], [5], [6] se han propuesto varios métodos de identificación paramétrica. La identificación de motores de CD también ha sido de interés en los años recientes. La referencia [7] presenta un método de identificación en el dominio de la frecuencia para servomecanismos con fricción de Coulomb y controlados en posición. En este caso, se utilizan señales binarias como excitación para desacoplar las distorsiones no lineales provocadas por la fricción de Coulomb. La referencia [8] presenta una técnica para la identificación de un motor de CD controlado en velocidad y con fricción de Coulomb y zona muerta. En este caso, un algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo discreto y con factor de olvido estima los parámetros del motor usando un modelo de Hammerstein. La técnica presentada en [9] permite identificar un servomotor controlado en velocidad usando señales de excitación caóticas. Los autores concluyen de experimentos con un prototipo de laboratorio que la selección de las señales de excitación tiene un papel

fundamental en el procedimiento de identificación.

Las referencias [1] y [2] presentan un método de identificación algebraico (MIA) basado en la Teoría de Módulos, Álgebra Diferencial y el Cálculo Operacional. Esta metodología permite eliminar las perturbaciones y el efecto de las condiciones iniciales, y además filtra el ruido de medición de alta frecuencia. No obstante, el MIA puede presentar singularidades en las soluciones de los parámetros estimados. El MIA se aplicó exitosamente en [10] y [11] para la identificación paramétrica de un motor de CD. La referencia [10] emplea el MIA para la identificación en lazo cerrado de un motor de CD controlado en posición. Por otro lado, en la referencia [11] se usó el MIA para la identificación de un servomotor de CD controlado en velocidad sujeto a cargas constantes.

El objetivo de este artículo es presentar una técnica de identificación en línea que combina un algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo continuo y la parametrización obtenida usando el Cálculo Operacional. Este enfoque aprovecha las ventajas de dicha parametrización y no exhibe el problema de singularidades que afectan al MIA. El artículo está organizado como sigue: La sección II presenta el modelo de un servomecanismo. La sección III presenta la parametrización obtenida usando el Cálculo Operacional así como el MIA y la técnica propuesta. La sección IV presenta un método para validar el modelo identificado. La sección V muestra resultados experimentales obtenidos con ambos métodos. Finalmente en la sección VI se establecen las conclusiones de este trabajo.

II. MODELO DEL SERVOMECHANISMO

La Fig. 1 muestra el diagrama de bloques del servomecanismo, el cual consiste de un amplificador, de un servomotor de Corriente Directa (CD) que gira un disco de latón y de un sensor de posición.

El amplificador está configurado en modo corriente, i.e, un controlador Proporcional Integral (PI) cierra un lazo alrededor del amplificador utilizando la corriente de armadura I_a . La variable q es la posición del servomotor, u es el voltaje de control, J y B son respectivamente la inercia y la fricción viscosa del servomecanismo. J es la suma de la inercia del servomotor y de la inercia de un disco de latón utilizado como carga. El parámetro T_c corresponde a

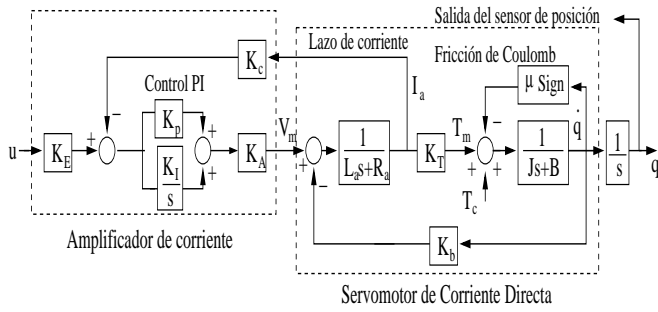


Fig. 1. Diagrama de bloques del servomecanismo.

voltajes parásitos constantes producidos en el interior del amplificador; además, el término μ define el coeficiente de fricción de Coulomb.

La ecuación que describe el modelo del servomecanismo es la siguiente:

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) - c\text{sign}(\dot{q}(t)) + d \quad (1)$$

donde $a = B/J$, $b = K/J$, $K = \frac{K_E K_T}{K_c}$, $c = \mu/J$ y $d = T_c/J$. Este modelo se obtiene asumiendo una ganancia integral K_I de valor elevado; de esta manera, la constante de tiempo eléctrica del servomecanismo es más pequeña que la constante de tiempo mecánica.

III. MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN

La Fig. 2 muestra el esquema de identificación en lazo cerrado de un servomecanismo utilizando ya sea el MIA o el algoritmo propuesto. Para la identificación sólo se utilizan las señales de entrada u y salida q del sistema. Un controlador PD estabiliza el lazo sin el conocimiento de los parámetros del servomecanismo. q_r es la señal de referencia del sistema en lazo cerrado.

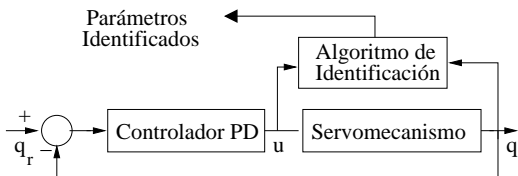


Fig. 2. Identificación en lazo cerrado.

A. Método de identificación algebraico

Para aplicar el MIA supongamos que el motor gira en una dirección. Esta suposición permite escribir la ecuación (1) como sigue:

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) + \varpi \quad (2)$$

donde $\varpi = -c + d$ si $\text{sign}(\dot{q}(t))=1$ ó $\varpi = c + d$ si $\text{sign}(\dot{q}(t)) = -1$. Aplicando el Cálculo Operacional [1] a la expresión (2) se obtiene la siguiente parametrización [10]

$$z_1(t) = \phi_{11}(t)a + \phi_{12}(t)b \quad (3)$$

con¹

$$\begin{aligned} z_1(t) &= t^3 q - 9 \int t^2 q + 18 \int^{(2)} t q - 6 \int^{(3)} q \\ \phi_{11}(t) &= - \int t^3 q + 6 \int^{(2)} t^2 q - 6 \int^{(3)} t q \\ \phi_{12}(t) &= \int^{(2)} t^3 u - 3 \int^{(3)} t^2 u \end{aligned} \quad (4)$$

Usando ecuaciones diferenciales en lugar de integraciones iteradas se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_{1a} + t^3 q & \dot{\phi}_{11} &= \phi_{11a} \\ \dot{z}_{1a} &= z_{1b} - 9t^2 q & \dot{\phi}_{11a} &= \phi_{11b} - t^3 q \\ \dot{z}_{1b} &= z_{1c} + 18t q & \dot{\phi}_{11b} &= \phi_{11c} + 6t^2 q \\ \dot{z}_{1c} &= -6q & \dot{\phi}_{11c} &= -6t q \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{12} &= \phi_{12a} \\ \dot{\phi}_{12a} &= \phi_{12b} \\ \dot{\phi}_{12b} &= \phi_{12c} + t^3 u \\ \dot{\phi}_{12c} &= -3t^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, integrando ambos lados de (3) resulta

$$z_2(t) = \phi_{21}(t)a + \phi_{22}(t)b \quad (6)$$

donde

$$z_2(t) = \int_0^t z_1(\tau) d\tau, \quad \phi_{21}(t) = \int_0^t \phi_{11}(\tau) d\tau,$$

$$\phi_{22}(t) = \int_0^t \phi_{12}(\tau) d\tau$$

Usando (3) y (6) se obtiene el siguiente el conjunto de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Se denotará la matriz de coeficientes $\phi_{ij}(t)$ como $\Phi(t)$. De la ecuación (7) se tiene que los estimados de a y b están dados por:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{n_{\hat{a}}(t)}{\det(\Phi(t))} = \frac{z_1(t)\phi_{22}(t) - z_2(t)\phi_{12}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)} \\ \hat{b} &= \frac{n_{\hat{b}}(t)}{\det(\Phi(t))} = \frac{z_2(t)\phi_{11}(t) - z_1(t)\phi_{21}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)} \end{aligned} \quad (8)$$

Observe que $\det(\Phi(t)) = \phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t) = 0$ para $t = 0$ y la solución tiene una singularidad. Además, acorde a [1], para $t > 0$, con la mayoría de las señales u y q se tiene $\det(\Phi(t)) \neq 0$, y se puede obtener una solución única para los parámetros desconocidos \hat{a} y \hat{b} en (8) en un intervalo de tiempo $(0, \rho]$, $\rho > 0$. Después de este tiempo se detiene la identificación. Es importante mencionar que las señales z_i y los regresores ϕ_{ij} , $i, j = 1, 2$ en (3) y (6) permanecen acotados para un intervalo de tiempo finito.

¹ $\int_0^t \int_0^{\gamma_1} \dots \int_0^{\gamma_{n-1}} \sigma(\gamma_n) d\gamma_n \dots d\gamma_2 d\gamma_1$. representa la integral iterada. Además, $(\int^1 \sigma(t)) = (\int \sigma(t)) = (\int_0^t \sigma(\gamma_1) d\gamma_1)$.

El siguiente procedimiento de filtrado [2] atenua los efectos del ruido de medición de media cero

$$\hat{a} = \frac{g * n_{\hat{a}}(t)}{g * \det(\Phi(t))} \quad \hat{b} = \frac{g * n_{\hat{b}}(t)}{g * \det(\Phi(t))} \quad (9)$$

El término g corresponde a un filtro con función de transferencia $G(s)$ y $*$ denota el operador convolución. Este trabajo utiliza $G(s) = 1/s$ y entonces las expresiones para los estimados son las siguientes:

$$\hat{a} = \frac{\int n_{\hat{a}}(t)}{\int \det(\Phi(t))} \quad \hat{b} = \frac{\int n_{\hat{b}}(t)}{\int \det(\Phi(t))} \quad (10)$$

B. Método de identificación propuesto

La metodología propuesta usa la parametrización (3), pero las integrales definidas en (4) se reinician cada T segundos; esta reinicialización previene que las señales puedan tomar valores elevados. La parametrización (3) permite utilizar el siguiente algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo continuo [12]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{\hat{a}}(t) \\ \dot{\hat{b}}(t) \end{pmatrix} = P(t)\epsilon(t)\phi(t) \\ \dot{P}(t) &= -P(t)\phi(t)\phi^T(t)P(t) \\ \epsilon(t) &= z(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

El vector $\hat{\theta}$ es un estimado de θ , $P(t)$ es la matriz de covarianza y $\epsilon(t)$ es el error de estimación. Comparado con el MIA, es claro que el método propuesto elimina completamente el problema de singularidades pues éstas no aparecen en (11). La convergencia de los parámetros estimados a los valores reales requiere una condición de Excitación Persistente [13], la cual reemplaza la condición Persistente dada en [1].

Definición 1: Un vector $\phi(t) \in R^n$ satisface la condición de excitación Persistente si existen constantes positivas α_1, α_2, T_0 tales que

$$\alpha_2 \geq \int_t^{t+T_0} [\chi^T \phi(\tau)]^2 d\tau \geq \alpha_1, \quad \forall t \geq 0 \quad (12)$$

donde $\chi \in R^n$ con $\|\chi\|=1$.

C. Obtención de los parámetros c y d

Los estimados \hat{a} y \hat{b} obtenidos usando el MIA y la técnica propuesta permiten calcular los estimados \hat{c} y \hat{d} de los parámetros restantes c y d . Supongamos que después de un tiempo t_0 el MIA y el algoritmo de Mínimos Cuadrados proporcionan los estimados \hat{a} y \hat{b} , y definamos la referencia triangular $q_r(t)$ mostrada en la Fig. 3

$$q_r(t) = \begin{cases} m(t - t_0) + q_r(t_0), & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \delta] \\ -m[t - (t_0 + 2\delta)] + q_r(t_0), & \text{si } t \in [t_0 + \delta, t_f] \end{cases} \quad (13)$$

Los términos m y $-m$ corresponden a las pendientes de $q_r(t)$ y $\delta = \frac{t_f - t_0}{2}$. Si la ganancia proporcional de la ley

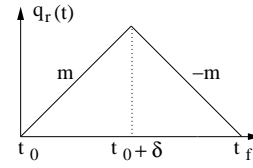


Fig. 3. Señal de referencia $q_r(t)$.

de control PD es suficiente grande, entonces $q(t) \approx q_r(t)$. Por lo tanto, en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + \delta]$ se tiene $\dot{q} = m$, $\text{sign}(\dot{q})=1$, $\ddot{q} = 0$. En este intervalo de tiempo el modelo estimado de (1) corresponde a

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta] \quad (14)$$

Equivalentemente, durante el intervalo $[t_0 + \delta, t_f]$ se tiene $\dot{q} = -m$, $\text{sign}(\dot{q}) = -1$, $\ddot{q} = 0$. El modelo estimado en este intervalo de tiempo es:

$$-\hat{c} - \hat{d} = \hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (15)$$

La ecuación (14) es equivalente a:

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t - \delta), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (16)$$

Como \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} y m son constantes, entonces las señales de control en (15) y en (16) deben ser constantes.

Definiendo $u_m = u(t - \delta)$ y $u_{-m} = u(t)$, $t \in [t_0 + \delta, t_f]$ y sumando (15) y (16) se obtiene:

$$-2\hat{d} = \hat{b}[u_m + u_{-m}] \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (17)$$

Por lo tanto, con las siguientes expresiones se obtienen los estimados \hat{c} y \hat{d}

$$\begin{aligned} \hat{c} &= -[\hat{a}m + \hat{b}u_m + \hat{d}] \\ \hat{d} &= -\frac{\hat{b}[u_m + u_{-m}]}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

IV. VALIDACIÓN DEL MODELO DEL SERVOMECANISMO

La validación del modelo del servomecanismo de CD se realiza mediante el diseño una ley de control calculada con base a este modelo. El objetivo de la ley de control es el seguimiento de una trayectoria. La Fig. 4 muestra el sistema de control para el seguimiento de una trayectoria, donde r es la trayectoria y $e = r - q$ es el error de seguimiento. El error e se muestrea p veces y el valor de cada muestra e_i se utiliza para calcular el error medio cuadrático

$$E = \sum_{i=1}^p e_i^2 \quad (19)$$

el cual es una medida de la calidad del seguimiento.

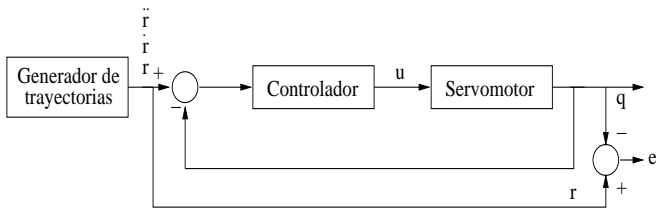


Fig. 4. Sistema de control para el seguimiento de una trayectoria.

A. Ley de control

La siguiente expresión define la ley de control aplicada al servomecanismo

$$u(t) = \frac{1}{\hat{b}}[\lambda_1 \dot{e}(t) + \lambda_2 e(t) + \ddot{r}(t) + \hat{a}\dot{q}(t) + \hat{c}\text{sign}(\dot{q}(t)) - \hat{d}] \quad (20)$$

donde λ_1 y λ_2 son parámetros constantes positivos.

Sumando y restando $\hat{b}u$ a $\ddot{e}(t) = \ddot{r}(t) - \ddot{q}(t)$ y usando (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \ddot{e}(t) &= \ddot{r}(t) - \ddot{q}(t) + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \\ &= \ddot{r}(t) + a\dot{q}(t) - bu(t) + c\text{sign}(\dot{q}(t)) - d + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \end{aligned} \quad (21)$$

Sustituyendo la ley de control (20) en (21) resulta la siguiente dinámica del error e

$$\ddot{e}(t) + \lambda_1 \dot{e}(t) + \lambda_2 e(t) = \tilde{\theta}^T \psi(t) \quad (22)$$

donde

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{b} - b \\ \hat{c} - c \\ \hat{d} - d \end{pmatrix} \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} -\dot{q}(t) \\ u(t) \\ -\text{sign}(\dot{q}(t)) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Si $\tilde{\theta}$ fuera cero entonces el error e convergería exponencialmente a cero y la medida de la calidad de seguimiento E sería la mejor. Sin embargo, debido a que existen dinámicas y no linealidades no consideradas en el modelo del servomecanismo (1), el error e no puede converger exponencialmente a cero.

V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El servomotor empleado para los experimentos es de la marca Moog, modelo C34-L80-W40 (Fig. 5), y está controlado por un amplificador Copley Controls modelo 423 configurado en modo corriente. La posición angular del motor se mide por medio de un codificador óptico BEI, modelo L15, cuya resolución es de 2500 pulsos por revolución. Los algoritmos son codificados usando el *software* Matlab-Simulink operando bajo el programa WINCON de Quanser Consulting. La adquisición de datos se lleva a cabo a través de una tarjeta Q8 también de Quanser Consulting. La programación se realizó en una computadora con procesador Intel Core 2, y la tarjeta Q8 se localiza en un puerto PCI de la computadora.

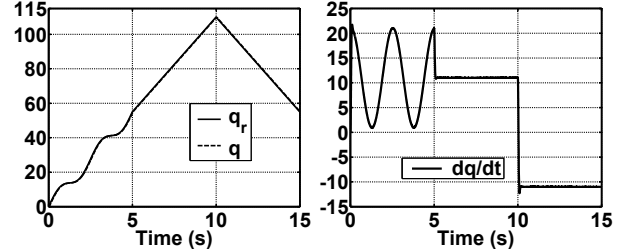
Las ganancias empleadas en el controlador PD del servomecanismo son: $k_p = 10$ y $k_d = 0.34$. La velocidad del motor se estima a partir de las mediciones de posición usando



Fig. 5. Motor de CD usado en las pruebas de laboratorio.

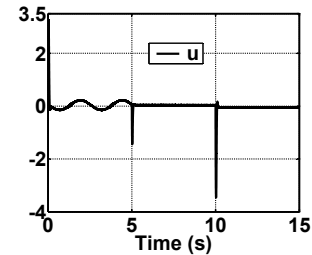
el filtro pasa-banda $G(s) = \left(\frac{220s}{s+220}\right) \left(\frac{500}{s+500}\right)$. Se utilizó el método de integración ODE5 con tamaño de paso de $50 \mu\text{s}$. Este método permite evaluar las integrales que aparecen en las señales z_i y en los regresores ϕ_{ij} , $i, j = 1, 2$ de (3) y (6). El tiempo empleado para reiniciar las integrales usadas por el método propuesto es $T = 2.5\text{s}$. El valor inicial de la matriz de covarianza del algoritmo de Mínimos Cuadrados es $P(0) = \text{diag}(10,000, 10,000)$.

La Fig. 6 (a) muestra la señal de excitación $q_r(t) \approx q(t)$ empleada durante los experimentos. En el intervalo de tiempo $[0, 5]$ la señal está dada por $q_r = 11t + 4\text{sen}(0.8\pi t)$. En este intervalo de tiempo se realiza la identificación de los parámetros a y b del servomecanismo. La ecuación (13) define la señal de excitación para el intervalo de tiempo $[5, 15]$, en el cual se estiman los parámetros c y d . Las Figuras 6 (b) y 6 (c) muestran respectivamente la velocidad del servomotor \dot{q} y la señal de control obtenida al aplicar la señal de excitación $q_r(t)$.



(a) Referencia $q_r(t) \approx q(t)$.

(b) Señal $\dot{q}(t)$.



(c) Señal de control $u(t)$.

Fig. 6. Señales $q(t)$, $\dot{q}(t)$ y $u(t)$.

La Fig. 7 muestra la evolución de los parámetros estimados por el MIA. En el intervalo de tiempo $[0, 0.5]$ se asignó a los estimados \hat{a} , \hat{b} el valor de 1, debido a la singularidad que presenta el MIA en $t = 0$. La Fig. 8 presenta la evolución de los parámetros estimados por la metodología propuesta. Se observa que el tiempo de convergencia de estos parámetros

es similar al del MIA. La diferencia es que los estimados \hat{a} y \hat{b} del MIA convergen más rápido a una vecindad alrededor de 0.15 y 137, respectivamente. El parámetro estimado \hat{c} por el MIA es 4.5 y el obtenido por la técnica propuesta es 3.95. El comportamiento de estimado \hat{d} es el mismo para ambos métodos.

La Fig. 9 muestra la evolución en el tiempo de la integral $\int[\chi^T \phi]^2$ presentada en (12), donde $\chi = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$. Por lo tanto, la señal de excitación empleada para la identificación de \hat{a} y \hat{b} satisface la condición de Excitación Persistente. Los modelos identificados usando el MIA y el método propuesto se utilizan para calcular la ley de control (20) con $\lambda_1 = \lambda_2 = 20$. La Fig. 10 (a) muestra la trayectoria $r(t)$. Además, las Figuras 10 (b) y 10 (c) presentan el error de seguimiento de trayectoria e cuando la ley de control (20) se calcula usando los parámetros obtenidos mediante el MIA y la técnica propuesta, respectivamente.

La Tabla I muestra los parámetros estimados y el error medio cuadrático E en (19), el cual es calculado para $p=200,000$. La tabla también presenta los parámetros nominales \hat{a} y \hat{b} del servomecanismo obtenidos en [14] usando la hoja de datos del servomotor y del amplificador de potencia. Los parámetros asociados a la fricción de Coulomb y a la perturbación constante no están disponibles en la hoja de datos del servomotor. Los resultados experimentales indican que los parámetros estimados por el MIA y por el método propuesto son similares. Además, el error medio cuadrático E es bastante similar para ambos métodos de identificación.

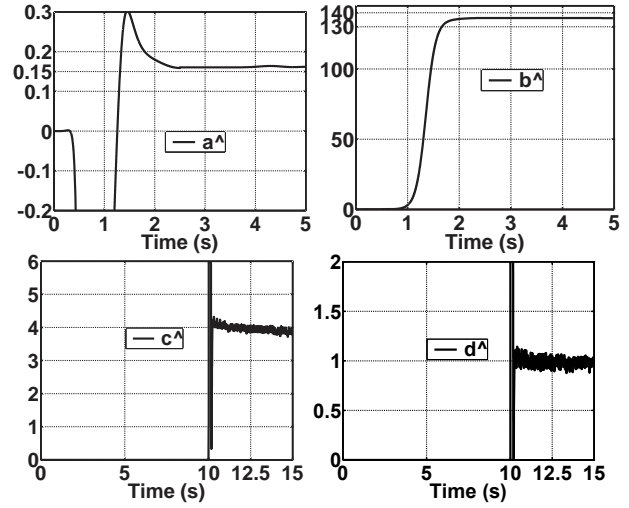


Fig. 8. Parámetros estimados por el método propuesto.

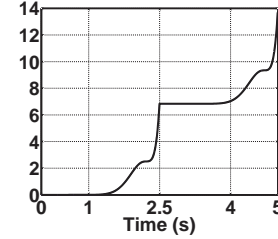


Fig. 9. $\int(\chi^T \phi_r)^2$ definida en (12).

TABLA I
PARÁMETROS IDENTIFICADOS

	\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}	E
Parámetros nominales	0.193	137.78	—	—	
MIA	0.149	137.5	4.5	1.05	80.9684
Método propuesto	0.162	136.2	3.95	0.99	80.6464

VI. CONCLUSIONES

En este artículo se propuso un método de identificación en línea basado en una parametrización obtenida usando el Cálculo Operacional combinado con un algoritmo de Mínimos Cuadrados en tiempo continuo. La técnica propuesta se comparó con un método de Identificación Algebraico (MIA) que utiliza la misma parametrización. Ambos métodos identificaron exitosamente cuatro parámetros del modelo de un servomotor de CD, el cual tiene fricción de Coulomb y perturbaciones constantes. Los resultados experimentales muestran que el MIA proporciona los parámetros estimados en un periodo de tiempo ligeramente más corto que el método propuesto; sin embargo, el método propuesto está libre de singularidades. La validación del modelo identificado por el MIA y por la técnica propuesta se realizó mediante el diseño una ley de control calculada con base a este modelo. El objetivo de la ley de control fue el seguimiento de una trayectoria. Los resultados indican que el error de

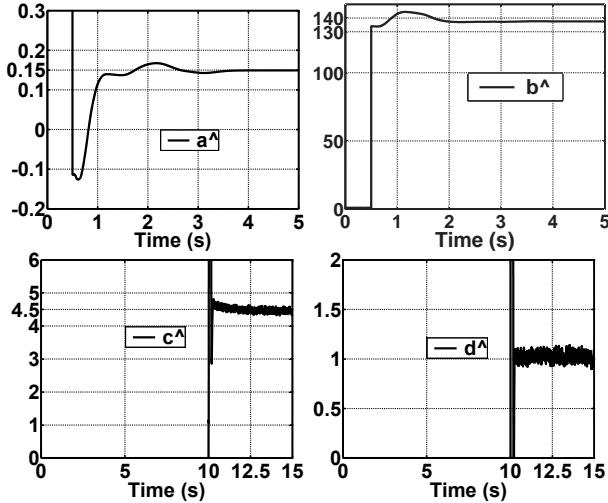
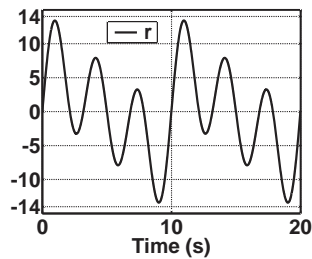
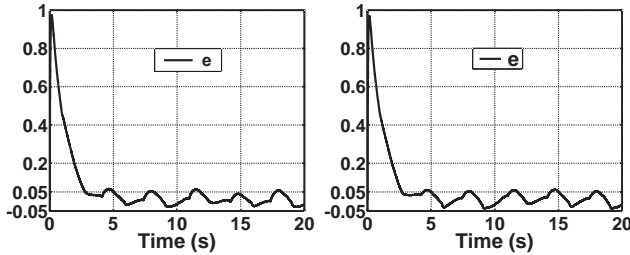


Fig. 7. Parámetros estimados por el MIA.



(a) Trayectoria r .



(b) Error e correspondiente a los estimados obtenidos por el MIA. (c) Error e correspondiente a los estimados obtenidos por el método propuesto.

Fig. 10. Trayectoria r y errores de seguimiento e .

seguimiento usando ambos modelos identificados es muy pequeño.

VII. AGRADECIMIENTOS

Antonio Concha agradece a Conacyt por la beca que ha recibido durante sus estudios de Postgrado. Los autores también agradecen a Gerardo Castro y a Jesús Meza por la instalación del prototipo de laboratorio.

REFERENCIAS

- [1] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification. In *ESAIM, Control, Optimization and Calculus of Variations*, Vol. 9, pag. 151-168, 2003.
- [2] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, Closed-loop parametric identification for continuous time linear systems via New Algebraic Techniques. In *Continuous Time Model Identification from Sampled Data*, H. Granier & L. Wang (Eds.), Springer, Berlin, 2007.
- [3] M. Fliess, C. Join, H. Sira-Ramírez, Non-linear estimation is easy, In *International Journal of Modelling, Identification and Control*, Vol. 4, pag. 12-27, 2008.
- [4] V. Sree Hari Rao, Narri Yadaiah, Parameter identification of dynamical systems, In *Chaos, Solutions and Fractals*, Vol. 23, pag. 1137-1151, 2005.
- [5] G. P. Rao, H. Unbehauen, Identification of continuous-time systems. In *IEE Proceedings on Control Theory Applications*, Vol. 153, pag. 185-219, 2006.
- [6] C. Aguilar-Ibáñez, J. Sánchez-Herrera, Rubén Garrido, Parametric estimation of the Duffing system by using a modified gradient algorithm, In *Physics Letters A*, Vol. 372, pag. 210-214, 2008.
- [7] Yung-Yaw Chen, Pai-Yi Huang, Jia-Yush Yen, Frequency-domain identification algorithms for servo systems with friction, In *Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 10, pag. 654-664, 2002.
- [8] T. Kara, I. Eker, Nonlinear closed loop identification of DC motor with load for low speed two directional operation, In *Electrical Engineering*, Vol. 86, pag. 87-96, 2004.
- [9] Chyun-Chao Fuh, Hsun-Heng Tsai, Adaptive parameter identification of servo control systems with noise and high-frequency uncertainties In *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, pag. 1437-1451, 2007.
- [10] G. Mamani, J. Becedas, V. Feliu-Batle, H. Sira-Ramírez, Open and closed-loop algebraic identification method for adaptive control of DC motors. In *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2009.
- [11] H. Sira Ramírez, E. Barrios Cruz, R. Márquez Contreras, Fast Adaptive Trajectory Tracking Control for a Completely Uncertain DC Motor via Output Feedback. In *Computación y Sistemas*, Vol. 12, No. 4, pag. 397-408, 2009.
- [12] Petros A. Ioannou, Jing Sun, Robust Adaptive Control, In *Prentice Hall*, 1996.
- [13] Shankar Sastry, Marc Bodson, Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness, In *Prentice Hall*, 1989.
- [14] Rubén Garrido, Antonio Concha, Estudio comparativo experimental de métodos de identificación en lazo cerrado para un servomecanismo *Congreso Mexicano de Robótica COMROB*, 2009.

Identificación de un servomecanismo controlado en velocidad usando mediciones de su posición

Rubén Garrido y Antonio Concha

Departamento de Control Automático, CINVESTAV IPN

Gustavo A. Madero D.F 07360, México

E-mail: garrido, aconcha@ctrl.cinvestav.mx

Teléfono: (52)-55- 57473739

Resumen—Este artículo presenta un método que estima los parámetros de un servomecanismo de Corriente Directa controlado en velocidad utilizando sólo mediciones de su posición. Un controlador Proporcional Integral estabiliza al servomecanismo sin el conocimiento de sus parámetros, y utiliza un estimado de la velocidad obtenido al filtrar la posición del motor. La técnica propuesta consiste de dos pasos, en el primero se utiliza el método de Mínimos Cuadrados fuera de línea para estimar una perturbación constante y los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb; en el segundo paso estos estimados permiten calcular la inercia del servo. La técnica de identificación propuesta utiliza conceptos básicos de un curso introductorio de sistemas de control tales como: transformada de Laplace, ecuación característica, criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz y el teorema del valor final. Resultados experimentales obtenidos con un prototipo de laboratorio permiten evaluar el desempeño del método de identificación propuesto.

Palabras clave: Estimación paramétrica, Mínimos Cuadrados, servomecanismo, control de velocidad.

I. INTRODUCCIÓN

Los servomecanismos de Corriente Directa (CD) son empleados en una gran variedad de aplicaciones que requieren control de posición o de velocidad. Ejemplos de su aplicación incluyen: maquinas herramienta, robots, impresoras, discos duros, etc. La estimación del modelo de servomecanismos de CD ha sido de interés en los años recientes. Las referencias (Kelly, 2000; Basilio, 2002; Basilio y Moreira, 2004) presentan técnicas de identificación de motores de CD que operan en lazo abierto y cuya variable medible es la velocidad. La referencia (Kelly, 2000) estima la fricción viscosa y la de Coulomb aplicando al motor un par creciente con forma de rampa. En (Basilio, 2002) se suministra un par constante para estimar la constante de tiempo mecánica del motor. En (Basilio y Moreira, 2004) una metodología de identificación en el espacio de estados utiliza el método de Mínimos Cuadrados fuera de línea (Strang, 1988) para calcular la inercia y el coeficiente de fricción viscosa del motor. Por otro lado, las referencias (Awaya et al., 1992; Lee et al., 2004; Yang y Deng, 2005; Kobayashi et al., 1995; Kwon et al., 2006) presentan métodos de identificación de servomecanismos que operan en lazo cerrado y que son controlados en velocidad. Las referencias (Awaya et

al., 1992; Lee et al., 2004; Yang y Deng, 2005) estiman la inercia del servo utilizando variables estimadas por un observador lineal tales como velocidad del motor y par de perturbación. La referencia (Kobayashi et al., 1995) emplea un observador de par para estimar la inercia y la fricción viscosa, los cuales posteriormente son utilizados para calcular la fricción de Coulomb. La referencia (Kwon et al., 2006) identifica la inercia y la fricción viscosa de un servo usando una velocidad de referencia cuya derivada en el tiempo es diferente de cero. Por otro lado, la referencia (Andoh, 2007) estima la inercia, las fricciones viscosa y de Coulomb y un par de perturbación de un servomecanismo controlado en posición y estabilizado por una ley de control proporcional derivativa; el autor emplea una posición de referencia periódica para estimar el momento de inercia, y utiliza el método de Mínimos Cuadrados y diferentes velocidades de referencia constantes para estimar los otros tres parámetros. Esta última referencia aplica diferenciación numérica a la posición del servo para obtener un estimado de la velocidad del motor.

Este artículo propone un método simple de identificación en lazo cerrado que estima los parámetros de un servomecanismo controlado en velocidad, los cuales son: Su inercia, su fricción viscosa y de Coulomb y una perturbación constante. Una ley de control Proporcional Integral (PI) estabiliza el lazo de realimentación sin el conocimiento de los parámetros del servomecanismo. El control de velocidad se lleva a cabo utilizando sólo mediciones de la posición del servo, y está basado en la idea propuesta en (Moreno y Kelly, 2002) que consiste en reemplazar la velocidad del motor por un filtrado de su posición y de la velocidad de referencia; este filtrado se realiza mediante un filtro estable de primer orden con grado relativo cero. De esta manera se evita el uso de mediciones de velocidad proporcionadas por tacómetros, las cuales a menudo están contaminadas con ruido; además, no es necesario el diseño de un observador de estado que estime la velocidad del servo. El procedimiento de filtrado también evita la estimación de la velocidad del servo obtenida por medio de la diferenciación numérica de la posición, la cual es medida por un decodificador óptico. Es sabido que esta aproximación no funciona bien, especialmente cuando se reduce el periodo de muestreo

(Jaritz y Spong, 1996). El método de identificación propuesto consiste de dos pasos. En el primer paso se utilizan diferentes velocidades de referencia constantes para estimar los coeficientes de fricción del servo y una perturbación constante; el Método de Mínimos Cuadrados fuera de línea se utiliza para calcular estos parámetros. En el segundo paso se requiere una velocidad de referencia con forma de rampa, y se emplea su pendiente así como los parámetros estimados en el primer paso para el cálculo del momento de inercia.

El artículo está organizado como sigue. La sección II muestra el modelo de un servomecanismo. La sección III describe el control de velocidad del servomecanismo utilizando sólo mediciones de su posición. La sección IV presenta el método de identificación propuesto. En la sección V se explica un método para validar el modelo identificado. La sección VI muestra los resultados experimentales. Finalmente, en la sección VII se establecen las conclusiones de este trabajo.

II. MODELO DE UN SERVOMECHANISMO

La Fig. 1 muestra el diagrama de bloques del servomecanismo, el cual consiste de un servomotor de CD que impulsa a un disco de latón, de un amplificador de potencia y de un codificador óptico que mide la posición del motor.

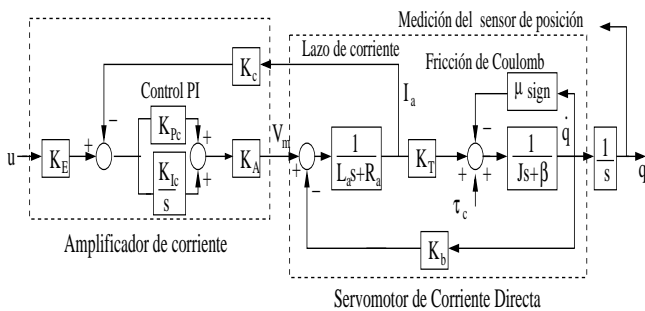


Figura 1. Servomecanismo de CD.

El amplificador está configurado en modo corriente. Esta característica equivale a cerrar un lazo de realimentación mediante una ley de control PI utilizando la corriente de armadura I_a . La variable u es el voltaje de control, K_E es la ganancia de entrada del amplificador, K_{Pc} y K_{Ic} son respectivamente las ganancias proporcional e integral del controlador PI del lazo de corriente, K_c es la ganancia de dicho lazo, K_A es la ganancia del puente H del amplificador. Las variables V_m , R_a , L_a , K_T , K_b , J y β son respectivamente el voltaje de entrada del motor, la resistencia de armadura, la inductancia de armadura, la constante de par, la constante de fuerza contraelectromotriz, la inercia y la fricción viscosa. J es la suma de la inercia del servomotor J_m , la inercia del disco de latón J_d y la inercia del codificador óptico J_e . El parámetro μ representa el coeficiente de fricción de Coulomb y el parámetro τ_c corresponde a perturbaciones constantes o a voltajes constantes parásitos

producidos dentro del amplificador. Las variables q y \dot{q} son respectivamente la posición en revoluciones (rev) y la velocidad angular del servo en rev/s.

La función del lazo de corriente en la Fig. 1 es mantener la corriente de armadura I_a proporcional al voltaje de control u . Debido a que la ganancia integral K_I del amplificador tiene un valor elevado, la constante de tiempo eléctrica del servomecanismo es más pequeña que la constante de tiempo mecánica. Por lo tanto, el transitorio debido a la dinámica eléctrica se puede ignorar. Esta simplificación permite obtener el siguiente modelo del servomecanismo:

$$J\ddot{q} + \beta\dot{q} + \mu\text{sign}(\dot{q}) = \tau + \tau_c \quad (1)$$

donde $\tau = Ku$ es el par aplicado al servo y $K = \frac{K_E K_T}{K_c}$. Esta ganancia K se supone conocida.

Defínanse las relaciones

$$a = \frac{\beta}{J}, \quad b = \frac{1}{J}, \quad c = \frac{\mu}{J}, \quad d = \frac{\tau_c}{J} \quad (2)$$

Entonces, la expresión (1) se puede reescribir como:

$$\ddot{q} + a\dot{q} + c\text{sign}(\dot{q}) = b\tau + d \quad (3)$$

III. CONTROL DE VELOCIDAD USANDO MEDICIONES DE POSICIÓN

Considérese el sistema en lazo cerrado mostrado en la Fig. 2, donde la velocidad del servo \dot{q} se controla usando mediciones de posición q . El objetivo de control es que \dot{q} sea igual a la velocidad deseada \dot{q}_d , la cual se supone diferenciable. La variable ϑ es un estimado de \dot{q} y se obtiene al filtrar q y \dot{q}_d mediante el filtro $s/(s + \alpha)$, donde α es una constante positiva (Moreno y Kelly, 2002). Se propone el siguiente controlador PI, el cual puede estabilizar el lazo sin el conocimiento de los parámetros del servomecanismo

$$\tau = K_P \dot{\xi} + K_I \xi \quad (4)$$

donde K_P y $K_I > 0$ son respectivamente las ganancias proporcional y derivativa del controlador. La señal ξ se considera un estimado del error de velocidad $\dot{\tilde{q}}$ definido como:

$$\dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (5)$$

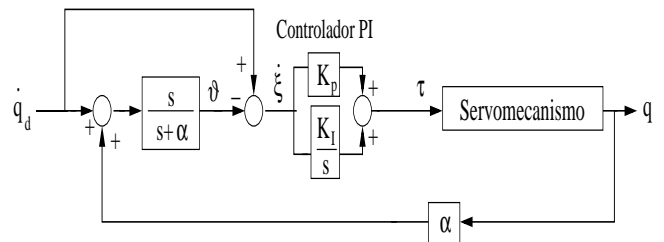


Figura 2. Control de velocidad usando mediciones de posición.

III-A. Análisis de estabilidad del sistema de control

La siguiente expresión en el dominio de la frecuencia se obtiene del sistema en lazo cerrado mostrado en la Fig. 2:

$$\mathcal{L}[\vartheta] = \frac{s}{s + \alpha} \mathcal{L}[\alpha q + \dot{q}_d] \quad (6)$$

donde \mathcal{L} es el operador de la transformada de Laplace.

La ecuación (6) en el dominio del tiempo está dada por

$$\dot{\vartheta} = -\alpha\vartheta + \alpha\dot{q} + \ddot{q}_d \quad (7)$$

De la Fig. 2 también se tiene la siguiente expresión

$$\dot{\xi} = \dot{q}_d - \vartheta \quad (8)$$

Tomando la derivada en el tiempo de (8) resulta en

$$\ddot{\xi} = \ddot{q}_d - \dot{\vartheta} \quad (9)$$

Sustituyendo (7) en (9) produce

$$\ddot{\xi} = \alpha[\vartheta - \dot{q}] \quad (10)$$

Si la variable ϑ en (8) se reemplaza en (10) se obtiene

$$\ddot{\xi} = -\alpha[\dot{\xi} - \dot{q}_d + \dot{q}] \quad (11)$$

Usando (5), la ecuación (11) puede ser reescrita como:

$$\ddot{\xi} = -\alpha[\dot{\xi} - \dot{q}] \quad (12)$$

Por otro lado, sustituyendo la ley de control (4) en el modelo del servomecanismo (3) resulta en

$$\ddot{q} + a\dot{q} + c\text{sign}(\dot{q}) = bK_P\dot{\xi} + bK_I\xi + d \quad (13)$$

Sumando y restando los términos \ddot{q}_d y $a\dot{q}_d$ a la ecuación anterior y usando (5) produce

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d + a\dot{q}_d - a\dot{q} - bK_P\dot{\xi} - bK_I\xi + c\text{sign}(\dot{q}) - d \quad (14)$$

Las ecuaciones (12) y (14) forman la siguiente expresión en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\xi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ -bK_I & -bK_P & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (15)$$

$$v = \ddot{q}_d + a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}) - d$$

La ecuación (15) tiene la forma

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (16)$$

El sistema en lazo cerrado (16) es estable si una señal acotada v produce un estado acotado x . La variable v en (15) es acotada si \ddot{q}_d y \dot{q}_d son acotados, además $c\text{sign}(\dot{q})$ y d son acotados. La estabilidad de (16) está directamente relacionada con la localización de las raíces de la ecuación característica de la matriz A ; esta ecuación es definida como $\det(sI - A) = 0$. Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (16) sea estable es que las raíces de $\det(sI - A)$ tengan parte real negativa (Kuo, 1982; Dorf y

Bishop, 1998). La ecuación característica de A está dada por:

$$p(s) = s^3 + (a + \alpha)s^2 + (\alpha a + \alpha bK_P)s + \alpha bK_I = 0 \quad (17)$$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz (Kuo, 1982; Dorf y Bishop, 1998) a (17) se obtienen las siguientes condiciones que garantizan que las raíces de este polinomio tienen parte real negativa

$$(a + \alpha) > 0, \quad \alpha bK_I > 0 \quad (18)$$

$$(a + \alpha)(a + bK_P) > bK_I \quad (19)$$

Las dos desigualdades en (18) se satisfacen porque todos los parámetros que aparecen en ellas son positivos. La desigualdad (19) se cumple si

$$K_P > \frac{K_I}{\alpha} \quad (20)$$

Notar que esta condición no depende de los parámetros del servo.

Para implementar el filtro (6) en una computadora es necesario representar tal sistema como una ecuación diferencial. La siguiente expresión es equivalente a (6)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\vartheta \\ \vartheta &= x + aq + \dot{q}_d \end{aligned} \quad (21)$$

Por lo tanto, la señal $\dot{\xi}$ en el controlador (4) puede ser obtenida usando (8) y (21) sin emplear mediciones de la velocidad \dot{q} .

IV. ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN PROPUESTO

Supóngase que:

- **(S1)** El sistema (16) es estable, es decir, las ganancias del controlador τ en (4) satisfacen (20).
- **(S2)** Aplicando una referencia \dot{q}_d que no cambia de signo provoca que el servomecanismo gire en una sola dirección.

IV-A. Primer paso de la identificación: estimación de β , μ y τ_c

Si \dot{q}_d es constante entonces v en (15) está dada por

$$v = a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}) - d \quad (22)$$

donde el término $c\text{sign}(\dot{q})$ en (22) es constante por la suposición **(S2)**.

La transformada de Laplace de v es la siguiente

$$V(s) = \frac{a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}) - d}{s} \quad (23)$$

La transformada de Laplace $X(s)$ de x in (16) es

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BV(s) \quad (24)$$

donde $X(s) = [\mathcal{L}[\xi], \mathcal{L}[\dot{\xi}], \mathcal{L}[\dot{q}]]^T$.

De acuerdo al teorema del valor final (Kuo, 1982; Dorf y Bishop, 1998), el estado estacionario $x_* = [\xi_*, \dot{\xi}_*, \dot{q}_*]^T$ de x se obtiene mediante

$$x_* = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (25)$$

La respuesta en x debido a las condiciones iniciales $x(0)$ converge exponencialmente a cero, entonces

$$x_* = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI - A)^{-1}BV(s) \quad (26)$$

El término $(sI - A)^{-1}B$ está dado por

$$(sI - A)^{-1}B = \left[\frac{\alpha}{p(s)}, \frac{\alpha s}{p(s)}, \frac{(s + \alpha)s}{p(s)} \right]^T \quad (27)$$

donde $p(s) = \det(sI - A)$.

Sustituyendo (23) y (27) en (26) resulta en

$$[\xi_*, \dot{\xi}_*, \dot{q}_*]^T = \left[\frac{a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}) - d}{bK_I}, 0, 0 \right]^T \quad (28)$$

Como \dot{q} converge a $\dot{q}_* = 0$, \dot{q} converge a \dot{q}_d . Por lo tanto, en estado estacionario se tiene de (28) lo siguiente:

$$a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}_d) - d = bK_I\xi_* \quad (29)$$

Sustituyendo a , b , c y d de (2) en la ecuación (29) se obtiene

$$\beta\dot{q}_d + \mu\text{sign}(\dot{q}_d) - \tau_c = K_I\xi_* \quad (30)$$

Aplicando las referencias $\dot{q}_{d1}, \dot{q}_{d2}, \dots, \dot{q}_{dn}$ produce las señales en estado estacionario $\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}$, respectivamente. Entonces, se obtienen las siguientes n ecuaciones

$$\beta\dot{q}_{di} + \mu\text{sign}(\dot{q}_{di}) - \tau_c = K_I\xi_{i*} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (31)$$

Las expresiones en (31) pueden escribirse como

$$\Phi\theta = Q, \quad \theta = [\beta, \mu, \tau_c]^T \quad (32)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} & \text{sign}(\dot{q}_{d1}) & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{q}_{dn} & \text{sign}(\dot{q}_{dn}) & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} K_I\xi_{1*} \\ \vdots \\ K_I\xi_{n*} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Cuando el número de ecuaciones n es igual al número de columnas de Φ y Φ^{-1} existe, la expresión (32) se puede resolver mediante $\hat{\theta} = \Phi^{-1}Q$. Cuando $n > 3$, se puede utilizar el método de Mínimos Cuadrados (Strang, 1988), el cual proporciona la siguiente solución

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TQ \quad (34)$$

Esta solución supone que $(\Phi^T\Phi)^{-1}$ existe. Nótese que esta matriz no existe cuando las referencias \dot{q}_{di} , $i = 1, 2, \dots, n$ en (31) son todas positivas o todas son negativas debido a que la segunda y tercera columnas de Φ serían linealmente dependientes. Para garantizar la existencia de dicha matriz se deben de utilizar referencias \dot{q}_{di} con magnitudes diferentes, algunas con valor positivo y otras con valor negativo.

IV-B. Segundo paso de la identificación: estimación de J

Los estimados $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$ y $\hat{\tau}_c$ obtenidos en el primer paso permiten calcular el estimado \hat{J} del parámetro J . Supóngase que ahora la señal \dot{q}_d es una rampa, es decir, $\dot{q}_d = mt$ y $\ddot{q}_d = m$, donde m es la pendiente de la rampa. Con esta señal \dot{q}_d el término v en (15) está dado por

$$v = m + amt + c\text{sign}(\dot{q}) - d \quad (35)$$

La transformada de Laplace de (35) corresponde a

$$V(s) = \frac{am}{s^2} + \frac{m + c\text{sign}(\dot{q}) - d}{s} \quad (36)$$

Sustituyendo (27) y (36) en la expresión de $X(s)$ dada por (24) y tomando $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ resulta en

$$\lim_{s \rightarrow 0} s[\mathcal{L}[\xi], \mathcal{L}[\dot{\xi}], \mathcal{L}[\dot{q}]]^T = [\infty, \rho, \rho]^T, \quad \rho = \frac{am}{bK_I} \quad (37)$$

De acuerdo con el teorema del valor final los valores en estado estacionario $\dot{\xi}_*$ y \dot{q}_* de $\dot{\xi}$ y \dot{q} son

$$[\dot{\xi}_*, \dot{q}_*] = [\rho, \rho] \quad (38)$$

Como el estado estacionario $\dot{\xi}_*$ de $\dot{\xi}$ es la constante ρ , la señal ξ converge exponencialmente a la siguiente rampa ξ_*

$$\xi_* = \rho t + \delta \quad (39)$$

donde δ es la ordenada al origen de ξ_* . Entonces, la ecuación (14) converge exponencialmente a la siguiente expresión:

$$0 = m + amt - \rho(a + bK_P) - bK_I\xi_* + c\text{sign}(m) - d \quad (40)$$

Multiplicando esta última expresión por J y sustituyendo ρ y ξ_* dados respectivamente en (37) y (39) produce

$$0 = mJ + \beta mt - \frac{\beta m(\beta + K_P)}{K_I} - K_I\delta + \mu\text{sign}(m) - \tau_c \quad (41)$$

Al despejar J se obtiene

$$J = \frac{\beta(\beta + K_P)}{K_I} + \frac{K_I\delta - \mu\text{sign}(m) + \tau_c}{m} \quad (42)$$

El siguiente estimado \hat{J} de J puede obtenerse al sustituir en (42) los parámetros estimados $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_c$ y $\hat{\delta}$ por β , μ , τ_c y δ .

$$\hat{J} = \frac{\hat{\beta}(\hat{\beta} + K_P)}{K_I} + \frac{K_I\hat{\delta} - \hat{\mu}\text{sign}(m) + \hat{\tau}_c}{m} \quad (43)$$

donde $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$ y $\hat{\tau}_c$ son obtenidos mediante (34). El estimado $\hat{\delta}$ utilizado en (43) se obtiene tomando muestras de ξ_* en t_1, t_2, \dots, t_l instantes de tiempo, y posteriormente ajustando el conjunto de datos $[\xi_*(t_i), (t_i)]$, $i = 1, 2, \dots, l$ de la línea recta en (39) mediante el método de Mínimos Cuadrados.

V. VALIDACIÓN DEL MODELO

La validación del modelo identificado se realiza mediante la siguiente ley de control para el seguimiento de una trayectoria

$$\tau = \left[\hat{J}\ddot{r} + \hat{\beta}\dot{r} + \hat{\mu}\text{sign}(\dot{r}) - \hat{\tau}_c + \lambda\dot{\zeta} \right] \quad (44)$$

El controlador propuesto (44) se muestra en la Fig. 3 y su objetivo es que la velocidad del servomecanismo \dot{q} sea igual a la trayectoria deseada \dot{r} . La señal ϑ en la Fig. 3 representa un estimado de \dot{q} , $\dot{\zeta}$ en (44) se considera un estimado del error de seguimiento $\dot{e} = \dot{r} - \dot{q}$ y λ es una constante positiva. La derivada en el tiempo de ζ satisface

$$\ddot{\zeta} = -\gamma[\dot{\zeta} - \dot{e}] \quad (45)$$

donde γ es una constante positiva. La variable $\ddot{\zeta}$ se obtiene siguiendo el mismo procedimiento con el que resulta $\ddot{\xi}$ en (12).

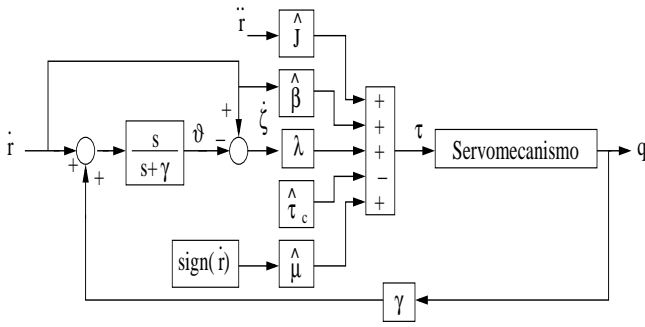


Figura 3. Sistema de control para el seguimiento de una trayectoria.

V-A. Análisis de estabilidad del sistema de control

Sustituyendo la ley de control (44) en el modelo del servomecanismo (1) produce

$$J\ddot{q}(t) + \beta\dot{q}(t) + \mu\text{sign}(\dot{q}) = \tau_c + \hat{J}\ddot{r} + \hat{\beta}\dot{r} + \hat{\mu}\text{sign}(\dot{r}) - \hat{\tau}_c + \lambda\dot{\zeta} \quad (46)$$

Sumando y restando los términos $J\ddot{r}$ y $\beta\dot{r}$ en la ecuación anterior se obtiene

$$J\ddot{e}(t) + \beta\dot{e}(t) + \lambda\dot{\zeta} = \kappa \quad (47)$$

$$\kappa = -\tilde{J}\ddot{r} - \tilde{\beta}\dot{r} + \tilde{\tau}_c - \hat{\mu}\text{sign}(\dot{r}) + \mu\text{sign}(\dot{q}) \quad (48)$$

$$\tilde{J} = \hat{J} - J, \quad \tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta, \quad \tilde{\tau}_c = \hat{\tau}_c - \tau_c \quad (49)$$

La expresión (47) es equivalente a

$$\ddot{e}(t) = -\frac{\beta}{J}\dot{e}(t) - \frac{\lambda}{J}\dot{\zeta} + \frac{\kappa}{J} \quad (50)$$

La ecuación anterior junto con (45) forman la siguiente representación en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma \\ -\frac{\lambda}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \kappa \quad (51)$$

La ecuación característica $g(s)$ del sistema (51) está dada por

$$g(s) = s^2 + \left(\gamma + \frac{\beta}{J} \right) s + \frac{\lambda\gamma}{J} = 0 \quad (52)$$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz a $g(s)$ resulta que el sistema (51) es estable si todos los coeficientes de $g(s)$ son positivos.

V-B. Medida de la calidad del modelo

Supóngase que \dot{r} no cambia de signo, que el motor gira en una sola dirección y el sentido del giro es tal que $\text{sign}(\dot{q}) = \text{sign}(\dot{r})$. Defínase $\tilde{\mu} = \hat{\mu} - \mu$, entonces κ en (48) puede ser reescrito como $\kappa = \tilde{\Theta}\chi^T$, donde

$$\tilde{\Theta} = [\tilde{J}, \tilde{\beta}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}_c], \quad \chi = [-\ddot{r}, -\dot{r}, -\text{sign}(\dot{r}), 1] \quad (53)$$

Si $\tilde{\Theta}$ es igual a cero, lo cual significa que los parámetros estimados son iguales a los verdaderos, entonces $\dot{\zeta}$ y \dot{e} tienen una convergencia exponencial a cero. Para medir la cercanía a cero del vector $\tilde{\Theta}$ se muestrea la señal $\dot{\zeta}$ p veces y el valor de cada muestra $\dot{\zeta}_i$ de $\dot{\zeta}$ se utiliza para calcular el error medio cuadrático

$$E = \sum_{i=1}^p \dot{\zeta}_i^2 \quad (54)$$

VI. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El prototipo de laboratorio consiste de un servomotor de la marca Moog, modelo C34-L80-W40 y es energizado por un amplificador Copley Controls, modelo 423, configurado en modo corriente. La posición del motor se mide por medio de un decodificador óptico con 2500 pulsos por revolución. Los algoritmos de identificación son implementados usando MatLab/Simulink operando bajo el programa Wincon de Quanser Consulting. La adquisición de datos se lleva a cabo a través de una tarjeta Q8 también de Quanser Consulting. La ganancia K del amplificador dada en (1) es de 1.344; las ganancias del controlador PI definido en (4) son $K_P = 1.344$ y $K_I = 6.72$, y el parámetro α en (21) es 50. El período de muestreo es de 1ms, y las ecuaciones diferenciales dadas en (8) y (21) se resuelven utilizando el método de integración de Euler. Para estimar $\theta = [\beta, \mu, \tau_c]^T$ se utilizan 8 velocidades de referencia \dot{q}_d , las cuales permiten obtener las siguientes matrices Φ y Q definidas en (33)

$$\Phi = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & -1 \\ 15 & 1 & -1 \\ 20 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & -1 \\ -10 & -1 & -1 \\ -15 & -1 & -1 \\ -20 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.0320 \\ 0.0376 \\ 0.0433 \\ 0.0482 \\ -0.0527 \\ -0.0582 \\ -0.0621 \\ -0.0669 \end{bmatrix} \quad (K_I \xi^*)$$

Al sustituir las matrices Φ y Q en (34) se obtiene

$$\hat{\theta} = [\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\tau}_c]^T = \left[0.001 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rev}}, 0.0375 \text{ N} \cdot \text{m}, 0.0098 \text{ N} \cdot \text{m} \right]^T \quad (55)$$

Una referencia \dot{q}_d con forma de rampa y con pendiente $m = 5$ se utiliza para estimar el momento de inercia J .

La señal ξ obtenida al aplicar esta señal de referencia \dot{q}_d se observa en la Fig 4, y converge a una línea recta con ordenada al origen δ en aproximadamente 3s. Un estimado $\hat{\delta}=10.8\text{e-}3$ de δ se calcula mediante el método de Mínimos Cuadrados y se obtiene ajustando el conjunto de muestras $[\xi(t_i), t_i], i = 1, 2, \dots, 7, t_1 = 3, t_7 = 6$ y $[t_{i+1}-t_i] = 0.5$. La pendiente m , el estimado $\hat{\delta}$, los estimados en (55) y las ganancias K_P y K_I se sustituyen en (43) para obtener $\hat{J}=0.00914 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Los estimados $\hat{\theta} = [\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\tau}_c]^T$ y \hat{J} así como la ganancia $\lambda=0.0472$ son utilizados en la ley de control (44); además, el parámetro γ en (45) tiene un valor de 19.9. La Fig 5 (a) muestra la trayectoria \dot{r} usada para la validación del modelo, y la Fig 5 (b) presenta el estimado $\dot{\zeta}$ del error \dot{e} del seguimiento de trayectoria. La Tabla I muestra los parámetros estimados y el error medio cuadrático E el cual es calculado para $p=2000$; las muestras de $\dot{\zeta}$ se adquirieron en el intervalo de tiempo 5-25s. Además, la Tabla I presenta los parámetros nominales del servomecanismo obtenidos usando la hoja de datos del servomotor (Moog, 2012) y la del amplificador de potencia (Copley, 2012). Los parámetros asociados a la fricción de Coulomb y a la perturbación constante no están disponibles en la hoja de datos del servomotor. La Tabla I también presenta los valores de E obtenidos cuando $\hat{\tau}_c$ o $\hat{\mu}$ se consideran cero en la ley de control (44). El valor más pequeño de E se obtiene cuando todos los estimados $\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\tau}_c$ y \hat{J} son utilizados en (44).

VII. CONCLUSIONES

Este artículo propuso un método simple que estima la inercia, las fricciones viscosa y de Coulomb y una perturbación constante del modelo de un servomecanismo de CD controlado en velocidad. El control de velocidad se llevó a cabo reemplazando la velocidad del servo por un filtrado de la posición del motor y de la velocidad de referencia deseada. Los resultados experimentales indican que la inercia estimada por el método propuesto es muy cercana a la inercia nominal del servomecanismo.

VIII. AGRADECIMIENTOS

Antonio Concha agradece a CONACYT por la beca que ha recibido durante sus estudios de Postgrado. Los autores también agradecen a Gerardo Castro y a Jesús Meza por la puesta a punto del prototipo de laboratorio.

REFERENCIAS

- Andoh, F. (2007). Moment of inertia identification using the time average of the product of torque reference input and motor position. *IEEE Transactions on Power Electronics* **22**(6), 2534-2542.
- Awaya, I., Y. Kato, I. Miyake y M. Ito (1992). New motion control with inertia identification function using disturbance observer. En: *Proceedings on the 1992 IECON International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation*, San Diego, CA, USA.
- Basilio, J. C. (2002). A laboratory for a first course in control systems. *International Journal of Electrical Engineering Education* **39**(1), 54-70.
- Basilio, J. C. Y M. V. Moreira (2004). State-Space Parameter Identification in a Second Control Laboratory. *IEEE Transactions on Education* **47**(2), 204-210.

- Copley Controls (2012). www.copleycontrols.com/motion/pdf/412ce.pdf.
- Dorf, R. D. Y R. H. Bishop (1988). *Modern Control Systems*. 8th edn, Addison-Wesley.
- Jaritz, A. Y M. Spong (1996). An experimental comparison of robust control algorithms on a direct drive manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(6), 627-640.
- Kelly, R. (2000). A measurement procedure for viscous and coulomb friction. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **49**(4), 857-861.
- Kobayashi, S., I. Awaya, H. Kuromaru y K. Oshitani (1995). Dynamic model based auto-tuning digital servo driver. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **42**(5), 462-466.
- Kwon, T., S. Sul, H. Nakamura y K. Tsuruta (2006). Identification of the Mechanical Parameters for Servo Drive. En: *IEEE Industrial Applications Conference*, Tampa, Florida, USA.
- Kuo, B. C. (1982). *Automatic Control Systems*. 4th edn, Prentice Hall.
- Lee, K. B., J. Y. Yoo, J. H. Song y I. Choy (2004). Improvement of low speed operation of electric machine with an inertia identification using ROELO. *IEE Proceedings on Electric Power Applications* **151**(1), 116-120.
- Moog Components (2012). www.polysci.com/docs/moc23series.PDF.
- Moreno, J. Y R. Kelly (2002). On motor velocity control by using only position measurements: two case studies. *International Journal of Electrical Engineering Education* **39**(2), 118-127.
- Strang, G. (1988). *Linear Algebra and Its Applications*. International Thomson Publishing
- Yang, S., y Y. Deng (2005). Observer-based inertial identification for autotuning servo motor drives. En: *IEEE Industrial Applications Conference*, Hong Kong, China.

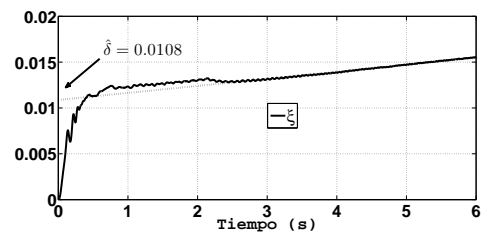


Figura 4. Señal $K_I \xi$ obtenida cuando se aplica $\dot{q}_d = 5t$ rev/s.

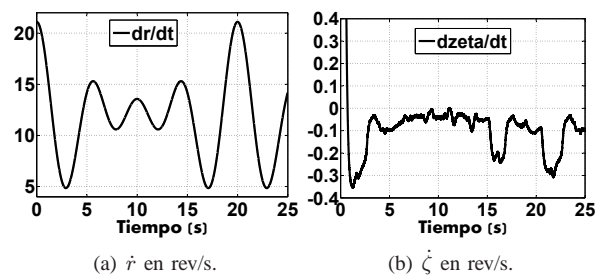


Figura 5. Trayectoria \dot{r} y estimado $\dot{\zeta}$ del error de seguimiento.

TABLA I
PARÁMETROS ESTIMADOS.

	$\hat{\beta}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\tau}_c$	\hat{J}	E
Parámetros nominales	0.001784	—	—	0.0093113	—
Método propuesto	0.001	0.0377	0.0098	0.00914	16.53
—	0.001	0.0377	0	0.00914	43.77
—	0.001	0	0.0098	0.00914	100.5482

Combining Algebraic identification and a Least Squares Method for DC servomechanism identification

Rubén Garrido, Antonio Concha
Department of Automatic Control
CINVESTAV-IPN

Av. IPN 2508 San Pedro Zacatenco, México, D.F. 07360
MEXICO

e-mail: garrido, aconcha@ctrl.cinvestav.mx

Abstract—This contribution presents a parameter identification method for estimating a four-parameter model of a DC servomechanism. The proposed approach uses a parametrization derived using the Operational Calculus and employed in some Algebraic Identification Methods recently proposed in the literature. The procedure for obtaining this parametrization eliminates the constant disturbances affecting the servomechanism and filters out the high frequency measurement noise. A standard continuous-time Least Squares algorithm uses this parametrization for identifying the servomechanism parameters thus circumventing the problem of singularities found on the Algebraic Identification Methods. Experimental results on a laboratory prototype allow comparing the results obtained using both, the Algebraic Identification and the proposed methods.

Keywords: Closed-loop identification, Operational Calculus, DC servomechanism, Least Squares method.

I. INTRODUCTION

Servomechanisms are key elements in a great variety of industrial applications requiring speed and position control. Knowledge of its parameters is necessary to improve their transient, steady state and dynamic characteristics. For this reason, parameter identification techniques play a key role since the identified model allows controller tuning.

Several parameter identification methods have been proposed in the literature [1], [2], [3], [4], [5], [6]. The identification of DC motors has also been of interest in recent years. Reference [7] presents a frequency-domain system identification method for position-controlled servo systems with friction. In this case, binary test signals are used to perform identification and allow decoupling the nonlinear distortions due to Coulomb friction. Reference [8] presents an approach to the identification of a speed-controlled DC motor with Coulomb friction and dead zone. In this case, a recursive discrete-time on-line Least Squares algorithm with forgetting factor estimates the motor parameters using a Hammerstein model. The approach presented in [9] allows identifying a speed-controlled servomotor using chaotic excitation signals. The Authors conclude from experiments in a laboratory prototype that the choice of the excitation signals has fundamental

role in the identification procedure.

References [1], [2] present an algebraic parameter identification approach. This method, which in the sequel will be termed as the Algebraic Identification Method (AIM), is based on the Module Theory, the Differential Algebra and the Operational Calculus. This methodology allows eliminating the disturbances and the effect of the initial conditions and filters out high frequency measurement noise. Nevertheless, the AIM may exhibit singularities in the solutions of the parameter estimates. The AIM was successfully applied in [10] and [11] for the parameter identification of a DC motor. Reference [10] employs the AIM for closed-loop identification of a position controlled DC motor model. In reference [11] the AIM was used for identifying the second-order model of a speed-controlled DC servomotor working under constant loads.

The paper aim is to present an on-line identification technique that combines a continuous-time Least Squares algorithm and the parametrization obtained using the Operational Calculus. This approach exploits the advantages of this parametrization and does not exhibit the problem of singularities affecting the AIM. The paper is organized as follows: Section II shows the servomechanism model. The servo parametrization obtained using the Operational Calculus, the AIM and the proposed method are presented in Section III. Section IV depicts a method for validating the identified model. Section V shows experimental results obtained using both methods. Finally some concluding remarks end the paper.

II. MODEL OF THE SERVOMECHANISM

Figure 1 shows the servomechanism block diagram. The servomechanism consists of a DC servomotor driving a brass disk, a power amplifier and a position sensor.

The amplifier works in current model, i.e. a Proportional Integral (PI) controller closes a loop around the amplifier using the armature current I_a . Variable q is the servomotor position, u is the control voltage, J and B are respectively the inertia and viscous friction. The inertia J comprises the motor and the brass disk inertias. Parameter T_c corresponds to constant

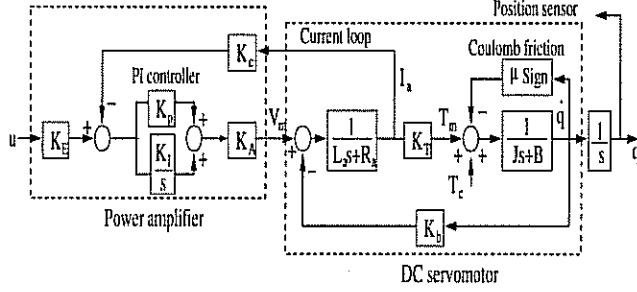


Fig. 1. Servomechanism block diagram.

disturbances or parasitic constant voltages produced inside the power amplifier; moreover, the term μ defines the Coulomb friction coefficient.

The equation that describes the servomechanism model is the following

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) - c\text{sign}(\dot{q}(t)) + d \quad (1)$$

Variables are defined as $a = B/J$, $b = K/J$, $K = \frac{K_E K_T}{K_c}$, $c = \mu/J$ y $d = T_c/J$. This model assumes a high value of integral gain K_I ; in this way, the servomechanism electric time constant is much smaller than the servomechanism mechanical time constant.

III. IDENTIFICATION METHODS

Figure 2 shows how the AIM and the proposed algorithm collect signals from the servomechanism. A PD controller stabilizes the loop without knowledge about the servomechanism parameters, and q_r is the reference signal of the closed loop system.

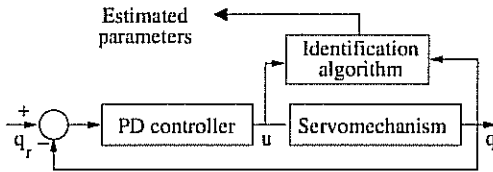


Fig. 2. Identification in closed loop.

A. Algebraic Identification Method

In order to apply the AIM, assume that the motor rotates only in one direction. This assumption allows writing equation (1) as follows

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) + \varpi \quad (2)$$

where $\varpi = -c + d$ if $\text{sign}(\dot{q}(t))=1$ and $\varpi = c + d$ if $\text{sign}(\dot{q}(t)) = -1$. Applying the Operational Calculus [1] to the expression (2) leads to the following parametrization [10]

$$z_1(t) = \phi_{11}(t)a + \phi_{12}(t)b \quad (3)$$

with¹

$$\begin{aligned} z_1(t) &= t^3 q - 9 \int t^2 q + 18 \int^{(2)} t q - 6 \int^{(3)} q \\ \phi_{11}(t) &= - \int t^3 q + 6 \int^{(2)} t^2 q - 6 \int^{(3)} t q \end{aligned} \quad (4)$$

$$\phi_{12}(t) = \int^{(2)} t^3 u - 3 \int^{(3)} t^2 u$$

Using differential equations rather than iterated integrations one obtains the following expression

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_{1a} + t^3 q & \dot{\phi}_{11} &= \phi_{11a} \\ \dot{z}_{1a} &= z_{1b} - 9t^2 q & \dot{\phi}_{11a} &= \phi_{11b} - t^3 q \\ \dot{z}_{1b} &= z_{1c} + 18t q & \dot{\phi}_{11b} &= \phi_{11c} + 6t^2 q \\ \dot{z}_{1c} &= -6q & \dot{\phi}_{11c} &= -6t q \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{12} &= \phi_{12a} \\ \dot{\phi}_{12a} &= \phi_{12b} \\ \dot{\phi}_{12b} &= \phi_{12c} + t^3 u \\ \dot{\phi}_{12c} &= -3t^2 \end{aligned}$$

On the other hand, integrating both sides of (3) yields

$$z_2(t) = \phi_{21}(t)a + \phi_{22}(t)b \quad (6)$$

Where

$$z_2(t) = \int_0^t z_1(\tau) d\tau, \quad \phi_{21}(t) = \int_0^t \phi_{11}(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$\phi_{22}(t) = \int_0^t \phi_{12}(\tau) d\tau$$

Using (3) and (6) permits obtaining the following set of equations

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Denote the matrix with elements $\phi_{ij}(t)$ by $\Phi(t)$. Solving the above equation gives the estimates of a and b , i.e.

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{n_{\hat{a}}(t)}{\det(\Phi(t))} = \frac{z_1(t)\phi_{22}(t) - z_2(t)\phi_{12}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)} \\ \hat{b} &= \frac{n_{\hat{b}}(t)}{\det(\Phi(t))} = \frac{z_2(t)\phi_{11}(t) - z_1(t)\phi_{21}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)} \end{aligned} \quad (9)$$

Observe that $\det(\Phi(t)) = \phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t) = 0$, and for $t = 0$ the solution has a singularity. Furthermore, according to reference [1], for $t > 0$, almost any signals u and q are persistent, i.e., these signals satisfy a Persistent Condition if they produce $\det(\Phi(t)) \neq 0$. Moreover, it is possible to obtain a unique solution \hat{a} and \hat{b} in a finite time interval $[0, \rho]$, $\rho > 0$. After this time, the AIM stops functioning. It is also worth remarking that the signals z_i and the regressors ϕ_{ij} , $i, j = 1, 2$ in (3) and (6) remain bounded for a finite time interval.

¹ $\int_0^t \sigma(\tau) d\tau$ represents the iterated integral $\int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} \sigma(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_2 d\tau_1$. Furthermore, $(\int^1 \sigma(t)) = (\int \sigma(t)) = (\int_0^t \sigma(\tau_1) d\tau_1)$.

The following filtering procedure [2] attenuates the effects of zero-mean measurement noise.

$$\hat{a} = \frac{g * n_{\hat{a}}(t)}{g * \det(\Phi(t))} \quad \hat{b} = \frac{g * n_{\hat{b}}(t)}{g * \det(\Phi(t))} \quad (10)$$

The term g corresponds to a filter with transfer function $G(s)$ and $*$ is the convolution operator. This work uses $G(s) = 1/s$ and then the expressions for the estimates becomes

$$\hat{a} = \frac{\int n_{\hat{a}}(t)}{\int \det(\Phi(t))} \quad \hat{b} = \frac{\int n_{\hat{b}}(t)}{\int \det(\Phi(t))} \quad (11)$$

B. Proposed identification method

The proposed methodology uses the parametrization (3), which is linear in the parameters, but the integrals defined in (4) are reset every T seconds; this resetting prevents these signals from becoming unbounded. The parametrization (3) allows using the following standard on-line continuous time Least Squares algorithm [12]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{\hat{a}}(t) \\ \dot{\hat{b}}(t) \end{pmatrix} = P(t)\epsilon(t)\phi(t) \\ \dot{P}(t) &= -P(t)\phi(t)\phi^T(t)P(t) \\ \epsilon(t) &= z(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

where $\phi(t) = [\phi_{11}(t) \ \phi_{12}(t)]$, vector $\hat{\theta}$ is an estimate of $\theta = [a \ b]$, $P(t)$ is the covariance matrix inverse and $\epsilon(t)$ the estimation error. Compared with the AIM, it is clear that the proposed approach completely eliminates the singularity problem since it does not stem on the solution (9). Convergence of the parameter estimates to their true values requires a Persistence of Excitation condition [13], which replaces the Persistent Condition given in [1].

Definition 1: A vector $\phi(t) \in R^n$ is Persistence of Excitation (PE) if there exist positive constants α_1, α_2, T_0 such that

$$\alpha_2 \geq \int_t^{t+T_0} [\chi^T \phi(\tau)]^2 d\tau \geq \alpha_1, \quad \forall t \geq 0 \quad (13)$$

where $\chi \in R^n$ with $\|\chi\|=1$.

C. Estimating parameters c and d

The estimates $\hat{\theta}$ obtained using the AIM and the approach described above allow computing estimates \hat{c} and \hat{d} of the remaining parameters c and d . Suppose that after a time t_0 the AIM and the Least Squares algorithm provide estimates \hat{a} and \hat{b} , and define the triangle reference $q_r(t)$ shown in Fig. 3

$$q_r(t) = \begin{cases} m(t - t_0) + q_r(t_0), & \text{if } t \in [t_0, t_0 + \delta] \\ -m[t - (t_0 + 2\delta)] + q_r(t_0), & \text{if } t \in [t_0 + \delta, t_f] \end{cases} \quad (14)$$

The terms m and $-m$ correspond to the slopes of $q_r(t)$ and $\delta = \frac{t_f - t_0}{2}$. If the gain of the PD controller stabilizing the servomechanism is high enough, then $q(t) \approx q_r(t)$. As a consequence, in the time interval $[t_0, t_0 + \delta]$ the equalities

$\dot{q}(t) = m$, $\text{sign}(\dot{q})=1$, and $\ddot{q} = 0$ hold. Therefore, from (1) one can see that the estimated model corresponds to

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta] \quad (15)$$

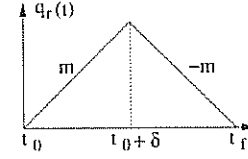


Fig. 3. Reference signal $q_r(t)$.

Equivalently, during the time interval $[t_0 + \delta, t_f]$ the inequalities $\dot{q}(t) = -m$, $\text{sign}(\dot{q}) = -1$, and $\ddot{q} = 0$ hold. The corresponding estimated model is

$$-\hat{c} - \hat{d} = \hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (16)$$

Equation (15) is equivalent to

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t - \delta), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (17)$$

Since the estimates \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , and \hat{d} are constants so do the control signals $u(t)$ and $u(t - \delta)$. Hence, define $u_m = u(t - \delta)$ and $u_{-m} = u(t)$, $t \in [t_0 + \delta, t_f]$. Using this definition and adding (16) and (17) yields

$$-2\hat{d} = \hat{b}[u_m + u_{-m}] \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (18)$$

Therefore, the next expressions give the estimates \hat{c} and \hat{d}

$$\begin{aligned} \hat{c} &= -[\hat{a}m + \hat{b}u_m + \hat{d}] \\ \hat{d} &= -\frac{\hat{b}[u_m + u_{-m}]}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

IV. VALIDATION OF THE IDENTIFIED MODEL

In order to validate the identified models using the AIM and the proposed method, they are employed for computing a model reference tracking control law. The Figure 4 shows the model reference control system, where $e = q_m - q$ is the tracking error. This error is sampled p times and every sampled value e_i is used for computing the mean square error

$$E = \sum_{i=1}^p e_i^2 \quad (20)$$

which is a measure of the tracking quality.

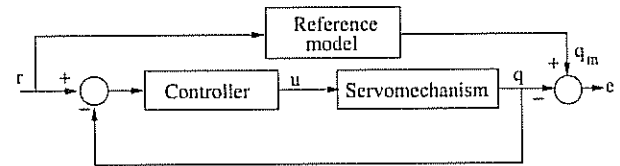


Fig. 4. Model reference control system.

A. Model reference tracking control law

Suppose the following reference model

$$\ddot{q}_m(t) = -a_1\dot{q}_m(t) - a_2q_m(t) + r(t) \quad (21)$$

where the parameters a_1 and a_2 are positive constants and $r(t)$ is a reference. The following expression defines the control law applied to the servomechanism

$$u(t) = \frac{1}{b}[\lambda_1\dot{e}(t) + \lambda_2e(t) + \ddot{q}_m(t) + \hat{a}\dot{q}(t) + \hat{c}\text{sign}(\dot{q}(t)) - \hat{d}] \quad (22)$$

The term $\ddot{q}_m(t)$ is given by (21) and λ_1, λ_2 are positive constants. Adding and subtracting $\hat{b}u$ to $\ddot{e}(t) = \ddot{q}_m(t) - \ddot{q}(t)$ and using (1) leads to

$$\begin{aligned} \ddot{e}(t) &= \ddot{q}_m(t) - \ddot{q}(t) + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \\ &= \ddot{q}_m(t) + a\dot{q}(t) - bu(t) + c\text{sign}(\dot{q}(t)) - d + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \end{aligned} \quad (23)$$

Substituting the control law (22) in this last equation produces the error dynamics

$$\ddot{e}(t) + \lambda_1\dot{e}(t) + \lambda_2e(t) = \bar{\theta}^T\psi(t) \quad (24)$$

with

$$\bar{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \\ \hat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{b} - b \\ \hat{c} - c \\ \hat{d} - d \end{pmatrix} \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} -\dot{q}(t) \\ u(t) \\ -\text{sign}(\dot{q}(t)) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

If $\bar{\theta}$ is equal to zero then the error e will have exponential convergence to zero and the measure of tracking quality E will be the best.

V. EXPERIMENTAL RESULTS

The servomechanism employed for the experiments consists in a servomotor from Moog, model C34-L80-W40 (Fig. 5) driven by a Copley Controls power amplifier, model 423, configured in current mode. The servomotor position is measured by a BEI optical encoder, model L15 with 2500 pulses per revolution. The algorithms are coded using the MatLab/Simulink software platform under the program Wincon from Quanser Consulting. The data acquisition is performed by a Q8 board also from Quanser Consulting. Programming was carried out on a Personal Computer using an Intel Core 2 quad processor, and the Q8 board is allocated in a PCI slot inside this computer.



Fig. 5. DC motor used in the experiments.

The gains of the PD controller are set to $k_p = 10$ and $k_d = 0.34$. The following linear band-pass filter

$$G(s) = \left(\frac{220s}{s+220} \right) \left(\frac{500}{s+500} \right) \quad (26)$$

estimates the servomotor velocity from position measurements. The integration method used is the ODE5 with step size of $50 \mu s$. This method allows evaluating the integrals appearing in the signals z_i and the regressors ϕ_{ij} , $i, j = 1, 2$ of (3) and (6). The time used for resetting the integrals is set to $T = 2.5s$. The initial value for the covariance matrix inverse in the Least Squares algorithm is $P(0) = \text{diag}(10,000, 10,000)$.

Figure 6 (a) shows the excitation signal $q_r(t)$ employed during the experiments. The excitation signal for the time interval $[0, 5]$ is $q_r = 11t + 4\sin(0.8\pi t)$ and corresponds to the identification of parameters a and b . Equation (14) defines the excitation signal for the time interval $[5, 15]$, where the parameters c and d are estimated. Figures 6 (b) and 6 (c) depict respectively the servomotor speed and the control signal obtained by applying the excitation signal $q_r(t)$. The servomotor speed is given in revolutions per second (rps).

Figure 7 shows the time evolution of the parameter estimates produced by the AIM. Estimates \hat{a} and \hat{b} were set to 1 in the time interval $[0, 0.5]$ due to the singularity problem exhibited by this method. Fig. 8 portrays the time evolution of the parameter estimates obtained using the proposed methodology. It is worth noting that the estimates \hat{a} and \hat{b} obtained using the AIM converge faster than the ones obtained using the proposed approach to 0.15 and 137 respectively. However, in both cases the estimates converges to constant values after 2s. The estimate \hat{c} obtained by the AIM is 4.5 and the one estimated by the proposed approach is 3.95. The behavior of the estimate \hat{d} is the same for both techniques.

Figure 9 exhibits the time evolution of the integral $\int[\chi^T\phi]^2$ presented in (13) where $\chi = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$. Therefore, the excitation signal employed for identifying \hat{a} and \hat{b} fulfills a PE condition. The models identified using the AIM and the proposed approach are used for computing control law (22) with $a_1 = 0.3$, $a_2 = 10$, $\lambda_1 = 10$ and $\lambda_2 = 10$. Fig. 10 (a) depicts the output $q_m(t)$ of the reference model, and Fig. 10 (b) and 10 (c) show the tracking error when the control law is computed using the parameter estimates obtained though the AIM and the proposed approach respectively.

The Table I shows the parameter estimates and the mean square error E in (20), which is computed for $p=300,000$. This table also shows the nominal parameters of the servomechanism obtained using the servomotor and power amplifier technical data. The experimental results indicate a good agreement between the estimated parameters produced by the two methods and the nominal parameters \hat{a} and \hat{b} . The parameters associated to the Coulomb friction and the constant disturbance are not available from the technical data. Moreover, the mean square error E is quite similar for the two identification methods.

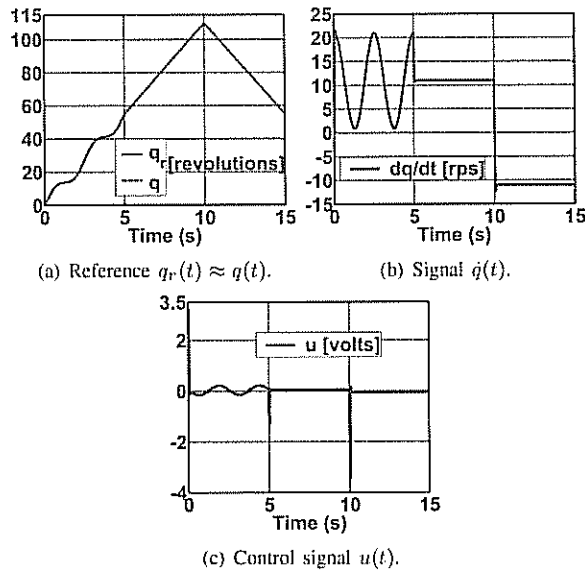


Fig. 6. Signals $q(t)$, $\dot{q}(t)$ and $u(t)$.

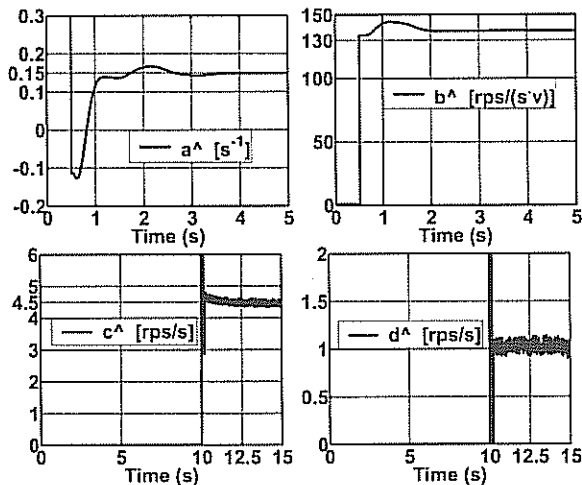


Fig. 7. Parameter estimates produced by the AIM.

VI. CONCLUSIONS

This paper proposed an on-line identification method based on a parametrization obtained using the Operational Calculus combined with a continuous-time Least Squares algorithm. The proposed approach was compared with the Algebraic Identification Method (AIM) that uses the same parametrization. Both methods successfully identified a four-parameter DC servomotor model, which has Coulomb friction and constant disturbances. Experimental results show that the AIM provides parameter estimates in a slightly shorter time period than the proposed approach; however, the later is free of singularities. In order to validate the model estimates obtained using the AIM and the proposed method, they were employed for computing a model reference tracking control law. The results indicate that the tracking error using both identified

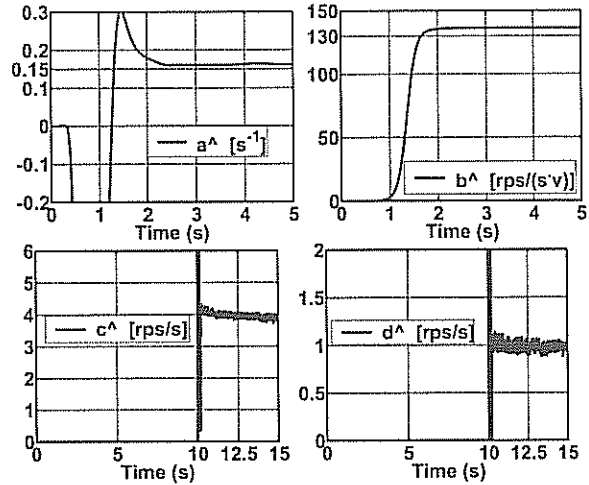


Fig. 8. Parameter estimates obtained by the proposed method.

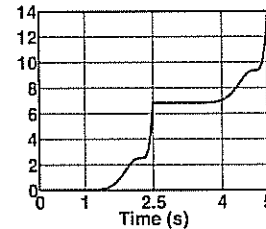


Fig. 9. $J(\chi^T \phi)^2$ defined in (13).

models is very small.

ACKNOWLEDGMENT

Antonio Concha acknowledges the support of CONACYT. The Authors also thank Gerardo Castro and Jesús Meza for setting up the laboratory prototype.

REFERENCES

- [1] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification. In *ESAIM, Control, Optimization and Calculus of Variations*, Vol. 9, pag. 151-168, 2003.
- [2] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, Closed-loop parametric identification for continuous time linear systems via New Algebraic Techniques. In *Continuous Time Model Identification from Sampled Data*, H. Granier & L. Wang (Eds.), Springer, Berlin, 2007.
- [3] M. Fliess, C. Join, H. Sira-Ramírez, Non-linear estimation is easy. In *International Journal of Modelling, Identification and Control*, Vol. 4, pag. 12-27, 2008.
- [4] V. Sree Hari Rao, Narri Yadaiah, Parameter identification of dynamical systems. In *Chaos, Solutions and Fractals*, Vol. 23, pag. 1137-1151, 2005.
- [5] G. P. Rao, H. Unbehauen, Identification of continuous-time systems. In *IEEE Proceedings on Control Theory Applications*, Vol. 153, pag. 185-219, 2006.
- [6] C. Aguilar-Ibáñez, J. Sánchez-Herrera, Rubén Garrido, Parametric estimation of the Duffing system by using a modified gradient algorithm. In *Physics Letters A*, Vol. 372, pag. 210-214, 2008.
- [7] Yung-Yaw Chen, Pai-Yi Huang, Jia-Yush Yen, Frequency-domain identification algorithms for servo systems with friction. In *Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 10, pag. 654-664, 2002.
- [8] T. Kara, I. Eker, Nonlinear closed loop identification of DC motor with load for low speed two directional operation. In *Electrical Engineering*, Vol. 86, pag. 87-96, 2004.

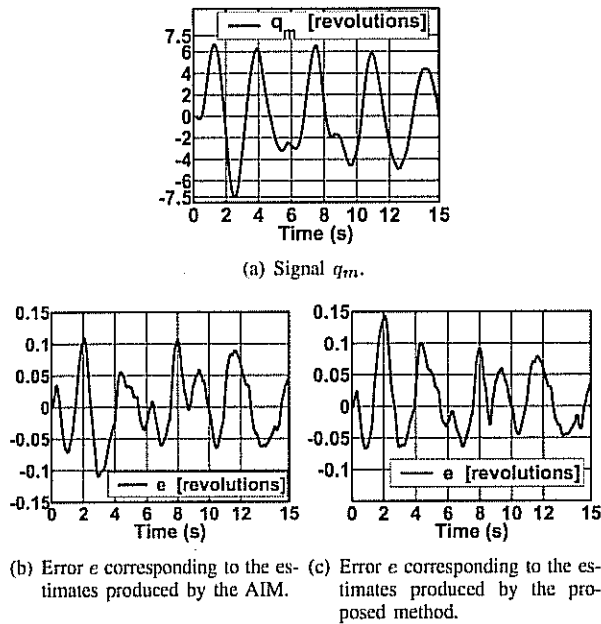


Fig. 10. Output q_m of the reference model and tracking errors e .

TABLE I
IDENTIFIED PARAMETERS.

	\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}	Mean square error E
Nominal parameters	0.193	137.78	—	—	
AIM	0.149	137.5	4.5	1.05	28.7375
Proposed method	0.162	136.2	3.95	0.99	28.4388

[9] Chyun-Chao Fuh, Hsun-Heng Tsai, Adaptive parameter identification of servo control systems with noise and high-frequency uncertainties In *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, pag. 1437-1451, 2007.

[10] G. Mamani, J. Becedas, V. Feliu-Batle, H. Sira-Ramírez, Open and closed-loop algebraic identification method for adaptive control of DC motors. In *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2009.

[11] H. Sira Ramírez, E. Barrios Cruz, R. Márquez Contreras, Fast Adaptive Trajectory Tracking Control for a Completely Uncertain DC Motor via Output Feedback. In *Computación y Sistemas*, Vol. 12, No. 4, pag. 397-408, 2009.

[12] Petros A. Ioannou, Jing Sun, Robust Adaptive Control, In *Prentice Hall*, 1996.

[13] Shankar Sastry, Marc Bodson, Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness, In *Prentice Hall*, 1989.

Low Cost Closed loop Identification of a DC Motor

Alberto Soria, Rubén Garrido y Antonio Concha

Abstract—this paper presents the closed loop identification of a velocity-controlled servomechanism using a data acquisition system based on a microcontroller. The low cost and simplicity of the system enables undergraduate students to build it and to program an identification algorithm. Experiments in a laboratory prototype allow assessing the performance of the system.

Key words: closed loop parameter identification, velocity control, DC motor, microcontroller.

I. INTRODUCTION

The role of laboratories in engineering education is to show to the students how some of the theoretical issues studied at the classroom apply in practical situations. In the case of Automatic Control, Robotics and Mechatronics model-based controllers require knowledge of the model of the device to be controlled; this knowledge includes the structure and the model parameters. In most instances, numerical simulations precede laboratory experiments; in the former case, the student knows the model and estimating the model parameters is not an issue. However, in the case of real-time experiments, frequently the students know beforehand the structure of the model but they face the problem of estimating the model parameters. Another key issue is the stability of the device to be controlled. If it is open loop stable there exists identification methods that work in this case [1], [2]. However, if the device is not open loop stable, or for security reasons the device cannot operate in open loop, then parameter identification must resort on closed loop methods.

System identification courses frequently include computer-aided control system design software packages (CACSD) such as Matlab/Simulink, virtual laboratories, remote or in-situ laboratories. CACSD packages allow implementing thorough numerical simulations the identification algorithms, either manually or using existing tools as the *System Identification Toolbox* with the advantage that only the CACSD is necessary. Virtual laboratories [3] incorporate visual representations of the experiments. The main disadvantage of these approaches is that the students do not necessarily acquire experience with real world data experiments. Remote laboratories [4], [5], [6] permit the use of real prototypes accessible via a standard web browser interface. These facilities allow students to work with real world data; however, the experiments will be limited by the available interface, and, for security reasons, the operating

points of the prototypes are restricted in order to produce a safe behaviour.

Commercial laboratory prototypes are available from a number of vendors [7], [8], [9], [10]. In most cases, these prototypes are sold as turnkey systems; however, they are often expensive, mask implementation details and could be inadequate for a particular type of experiment. On the other hand, custom-made platforms are more flexible and allow a significant reduction in cost since their design fulfils a specific application. With the development of powerful Peripheral Interface Controllers (PIC) [11],[12], it has become easier to implement low cost experimental platforms since the PIC incorporates a number of integrated peripheral such as analog to digital converter (AD), quadrature encoder interfaces (QEI), pulse width modulation (PWM), and serial ports or timers among others.

Graduate and undergraduate control systems engineering programs currently offer system identification laboratories for example [13], [14], [15], [16]. In these programs, discrete or continuous models combined with least squares algorithms allow performing parameter identification; in most cases, the plant under identification works in open loop. The use of a brushed DC motor is commonplace because simple linear models reasonably explain its behaviour and its low cost. Moreover, simple power circuits allow driving this kind of motors.

It is interesting to review works related to system identification in engineering education. Reference [17] presents a real-time laboratory for system modelling, control analysis and design. This reference also mentions the parameter estimation for a dc servo motor but it does not give details on the identification procedure. In [18] the Authors propose a state-space parameter identification methodology. The plant consists of two armature-controlled dc motors connected by their shafts; one of the motor works as a generator. A Least Squares algorithm permits identifying the plant parameters. Reference [19] uses the same experimental setup than that used in [18]. Nevertheless, a Least Squares fit allows estimating the plant static gain and a procedure based on the step response and a Bode plot permit estimating the plant time constant; the implementation is performed using operational amplifiers. Reference [20] shows a laboratory for undergraduate courses consisting on a simple temperature process; here, two transistors heat a small plate cooled by a fan. Inputs are the commands to the transistors and the fan while outputs are the temperatures of the plate and the transistors. Students identify the transfer functions by hand, i.e., selecting the model parameters so that the step response of the model fits the measured one. The Authors of [21] present a temperature control kit employing a microcontroller, a temperature

The authors are with the Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN. Av. IPN 2508 Col. San Pedro Zacatenco. 07360, México D. F. Corresponding author: betosoria@gmail.com.

sensor and a NMosfet transistor. The input is the voltage applied to the control to the NMosfet gate and the output is the Temperature. Parameter identification of a model is performed using the reaction curve method and then a Ziegler-Nichols tuning method is subsequently used to tune a PID controller. Reference [22] describes an undergraduate prototype using a DSP Board, an optical encoder and a DC motor. Identification is carried out in open loop using a Least Squares algorithm.

In this paper we present the parameter identification of a velocity controlled servomechanism using a low cost system based on a microcontroller. A closed loop identification method allows estimating a first order linear model of the servomechanism. A proportional controller closes the loop around the servomechanism and its identified model closed using a proportional controller. The error between the velocity of the motor and the velocity generated by the model feeds a gradient-like algorithm. The parameter estimates are compared with the parameters computed using the servomechanism technical data. The low cost and simplicity of the system enables undergraduate students to build it; programming of the identification algorithm is not complicate because of its low complexity. The experimental prototype includes a DC motor, an optical incremental encoder, an H-Bridge integrated circuit, and a microcontroller with dedicated Pulse Width Modulation and serial modules. Velocity measurements are obtained using a filter from the pulse wave generated by the optical encoder. The identified parameters are transmitted to a PC using a serial interface.

The paper layout is as follows. Section II describes the DC motor model and the identification algorithm. Section III shows servomechanism parameters obtained from its technical data. Section IV describes the PIC microcontroller, its programming and the PC monitoring software. Section V presents the experimental results. The paper ends with some concluding remarks.

II. DC SERVOMECHANISM MODEL

The following equations describe a linear model of a DC motor [23]:

$$M_V = Ri + L \frac{di}{dt} + K_{emf} v \quad (1)$$

$$J \frac{dv}{dt} + Bv = \tau = K_m i$$

with

M_V : Motor input voltage (V)

R : Motor armature resistance (Ω)

J : Motor and load inertia ($\text{Kg m}^2/\text{m}^2$)

L : Motor inductance (H)

K_{emf} : Back emf voltage constant (V/rev/s)

B : viscous-friction coefficient of motor and load (N m s)

τ : motor torque (N m)

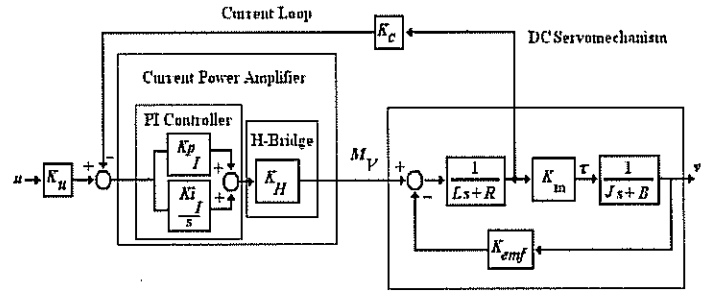


Figure 1. Block diagram of the DC Servomechanism.

v : motor shaft velocity (Rev/s)

i : motor armature current (A)

K_m : torque constant (N m/A)

K_C : Current counts constant (A/ ADC counts)

K_u : Input constant (ADC counts)

The PIC PWM interface drives the integrated circuit LM-18200 H-Bridge in order to move the DC motor. A Proportional Integral (PI) controller regulates the motor current and the corresponding gains are K_{pI}, K_{iI} . This controller is implemented within the PIC microcontroller and uses the AD converter to convert the current flowing in the H-Bridge and computes the control signal given to the PWM. In the PI implementation we directly use the units handled by the PWM and AD converter, thus the units for constants K_C and K_u are given in ADC counts. The current loop allows controlling the current and decreases the electrical time constant making it much faster than the motor mechanical time constant. The gain K_H of the H-bridge is related to the way the PWM interface of the PIC is programmed for a given resolution and frequency.

Figure 1 depicts a block-diagram of the servomechanism including the H-Bridge and the current loop. Since the pole $\frac{K_{iI}}{K_{pI}}$ is far away from the origin than the mechanical pole $-\frac{B}{J}$, at low frequencies, this fact allows obtaining the diagram shown in Figure 2; the corresponding transfer function $\rho(s)$ is:

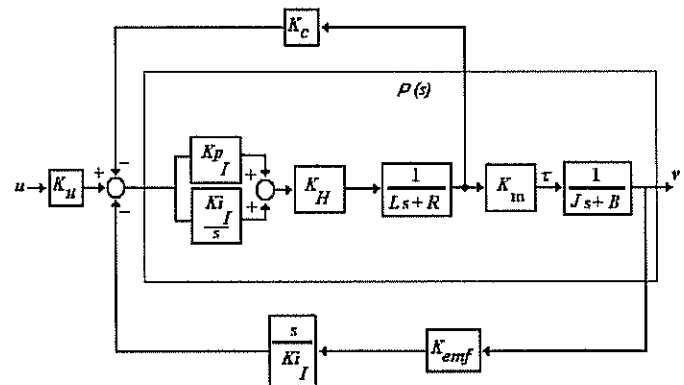


Figure 2. Reduced block diagram.

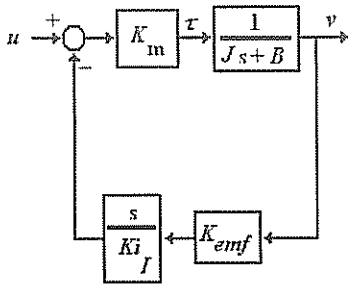


Figure 3. Simplified block diagram.

$$\frac{\omega_n^2 \left(\frac{K_{pI}}{K_{iI}} s + 1 \right)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \left(\frac{K_m}{K_C} \right) \left(\frac{1}{J s + B} \right) \quad (2)$$

with $\omega_n = \sqrt{\frac{K_H K_{iI}}{L}}$ and $2\xi\omega_n = \frac{R + K_m K_{pI}}{L}$. High values of the integral gain increases the undamped frequency ω_n thus allowing to ignore this dynamics. Therefore, at low frequencies, transfer function (2) simplifies to:

$$\left(\frac{K_m}{K_C} \right) \left(\frac{1}{J s + B} \right) \quad (3)$$

This reduced model permits obtaining the diagram shown in Figure 3 and the following transfer function:

$$\left(\frac{K_u K_m}{\left(J + \frac{K_m K_{emf}}{K_{iI}} \right) s + B} \right) \quad (4)$$

Since $\frac{K_m K_{emf}}{K_{iI}}$ is much smaller than J , transfer function (4) becomes:

$$\frac{b}{(s + a)} \quad (5)$$

with $b = \frac{K_u K_m}{J}$ and $a = \frac{B}{J}$

III. IDENTIFICATION METHOD

In the closed loop identification method [24], a proportional controller regulates both the model and the plant (cf. Figure 4):

$$u(t) = k_p e(t) \quad (6)$$

$$u_e(t) = k_p e_e(t) \quad (7)$$

with the velocity error $e(t) = v_d - v(t)$ and v_d the desired velocity. The plant and the model are given by:

$$\dot{v}(t) + av(t) = bu(t) \quad (8)$$

$$\dot{v}_e(t) + \hat{a}v_e(t) = \hat{b}u_e(t) \quad (9)$$

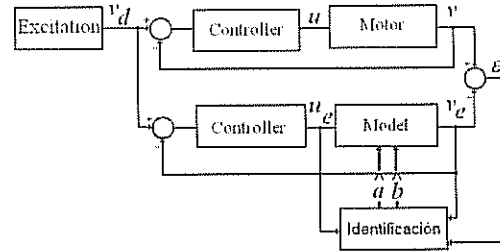


Figure 4. Identification method structure.

where $u(t)$ and $u_e(t)$ are the control signals for the motor and the model respectively. Model output $v_e(t)$ calculation employs the 4th order Runge-Kutta method with h is the sampling period:

$$\begin{aligned} \dot{y}_e(t) &= f(t, y), y(t_0) = y_0 \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(t_n, y_n) \end{aligned} \quad (10)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Applying the proportional control laws (1) y (2) to both systems yields:

$$\dot{v}(t) = -av(t) + bK_p e(t) \quad (11)$$

$$\dot{v}_e(t) = -\hat{a}v_e(t) + \hat{b}K_p e_e(t)$$

Define the identification error between the plant and the model $\varepsilon = v(t) - v_e(t)$. The following equations defines its first time derivative::

$$\dot{\varepsilon}(t) = -(a + bK_p)\varepsilon + (\hat{a} - a)v_e(t) - (\hat{b} - b)u_e(t) \quad (12)$$

This last expression can be written alternatively as:

$$\dot{\varepsilon}(t) = -c\varepsilon(t) + \tilde{\theta}^T \phi \quad (13)$$

where $c = a + bK_p$ con $a > 0, b > 0, K_p > 0$, and vectors $\tilde{\theta}$ and ϕ are defined as:

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta = \begin{bmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{b} - b \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} v_e(t) \\ -u_e(t) \end{bmatrix}$$

The stability proof for (12) follows along the ideas presented in [24] using the following Lyapunov function candidate:

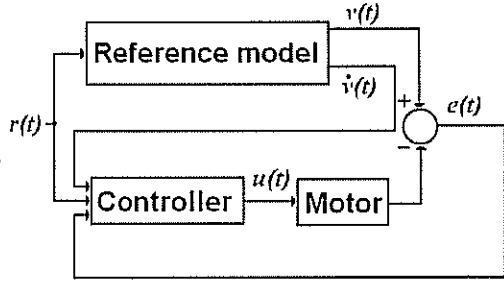


Figure 7. Model Reference following scheme.

$$V(\varepsilon, \theta) = \frac{1}{2} \varepsilon^2(t) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (15)$$

The time derivative of (7) is:

$$\dot{V} = -c\varepsilon^2 + \tilde{\theta}^T \left[\varepsilon \phi + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \right] \quad (16)$$

If an adaptation law is chosen such that:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \phi \varepsilon = - \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_e(t) \\ u_e(t) \end{bmatrix} \varepsilon \quad (17)$$

Then:

$$\dot{V} = -c\varepsilon^2 \quad (18)$$

\dot{V} is negative semi-definite since $c > 0$; thus ε and $\tilde{\theta}$ are bounded. Using Barbalat's lemma [25] it is possible to show that the error $\varepsilon = q(t) - \hat{q}(t)$, converges towards zero. In addition, if signal ϕ fulfils the persistent excitation conditions [25], then the parametric error $\tilde{\theta}$ also converges to zero.

The update laws for each of the parameter estimates is given by:

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma_1 q_e(t) \varepsilon \quad (19)$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_2 u_e(t) \varepsilon$$

The Euler's method allows implementing (18) in the PIC microcontroller, i.e. the time derivative is approximated as follows:

$$\dot{y} \approx \frac{1}{h} (y(t+1) - y(t)) \quad (20)$$

where h is the sampling period. Consequently, applying Euler's approximation to the adaptation parameters (13) we have:

$$\dot{\hat{a}} \approx \frac{1}{h} [\hat{a}(t+1) - \hat{a}(t)] = -\gamma_1 q_e(t) \varepsilon(t) \quad (21)$$

$$\dot{\hat{b}} \approx \frac{1}{h} [\hat{b}(t+1) - \hat{b}(t)] = \gamma_2 u_e(t) \varepsilon(t)$$

If we chose sampling times $t_k = 0, 1, 2, \dots, n$, the discrete adaptation laws become:

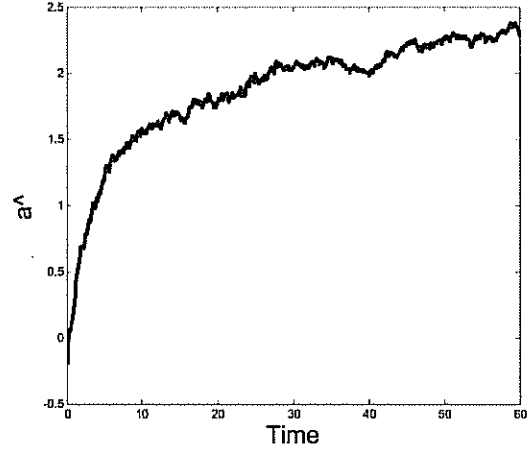


Figure 5. Identification results \hat{a} .

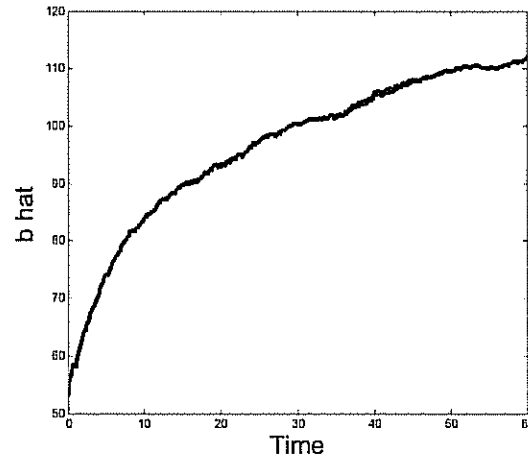


Figure 6. Identification results \hat{b} .

$$\begin{aligned} \hat{a}(t_{k+1}) &= [-\gamma_1 q_e(t_k) \varepsilon(t_k)] h + \hat{a}(t_k) \\ \hat{b}(t_{k+1}) &= [\gamma_2 u_e(t_k) \varepsilon(t_k)] h + \hat{b}(t_k) \end{aligned} \quad (22)$$

IV. THE PIC MICROCONTROLLER, HARDWARE AND SOFTWARE

Figure 11 shows a picture of the system while figure 10 shows the system interconnection in detail. The PIC used in the experiments has the number DsPIC 30f4012. This PIC is targeted mainly for motor control applications and has two modules to interface a motor, namely the Quadrature Encoder (QE) and the Pulse Width Modulation (PWM) modules. The QE allows estimating the DC motor speed while the PWM module together with the LM18200 H-bridge with a carrier frequency of at 20Khz comprise the power amplifier stage controlling the power delivered to the motor. The analog to digital converter (ADC) 10 bit module is used to measure the current in the H-bridge. The timer module permits handling the sampling periods of the excitation signal, the identification routine, speed measurement and model following routine. The UART serial communication module is used to communicate the

experimental data to a PC computer. The PIC software was organized in eight parts:

- i) Main routine comprising the current loop, speed measurement and the main execution loop.
- ii) Initialisation and configuration routines for the QEI, PWM, ADC, timers and UART modules.
- iii) Timers and UART interrupt service routines.
- iv) Identification routine.
- v) Model following routine.
- vi) Delay routines for the PIC.
- vii) General function declarations and definitions.
- viii) DsPIC 30f4012 configuration bits definitions.

The highest priority routines are those called by interrupt scheme: QEI, ADC, timers, and UART modules. The main routine performs module initialisation and calls the first identification and then the model following once the identification is completed.

The optical incremental encoder is the US-Digital E-6 2500 model allowing counts up to 10000 pulses per revolution. We calculate velocity from encoder positions with the filter:

$$\frac{39.64z^2 + 39.64}{z^2 + 1.40z + 0.4811} \quad (23)$$

The motor used is a dual shaft Dynetic Systems brush DC motor 509051. The price for the main components including the quadrature incremental encoder, the motor, the H-Bridge and the DsPIC is around \$115 USD. This price is low-cost if we consider for example the NI-ElvisII system [26] having a price around 40 times higher. Therefore, the proposed system implementation is a reasonable low-cost alternative.

V. EXPERIMENTAL RESULTS

The motor shaft speed v was measured by counting the number of pulses generated every 1ms by the incremental optical encoder. The excitation signal v_d used for the identification is a pseudorandom binary sequence with amplitude of 2 units plus a constant value of 2. This signal is then filtered using the following low pass filter:

$$\frac{10}{s+10} \quad (24)$$

This filter was discretized using the Euler method. The sampling period for the excitation signal v_d was 100ms. The identification loop was sampled at 1ms. The adaptation gains used are $\gamma_1 = 5$ and $\gamma_2 = 2000$. The controller gain is $K_p = 3$. A serial interface at 38400 was used in order to read the data from the PIC. Figure 5 shows the time evolution for parameter \hat{a} and figure 6 shows the time evolution for \hat{b} . In order to verify the soundness of the identified parameters the a model following control scheme presented in figure 7 is proposed. The control law for this scheme is:

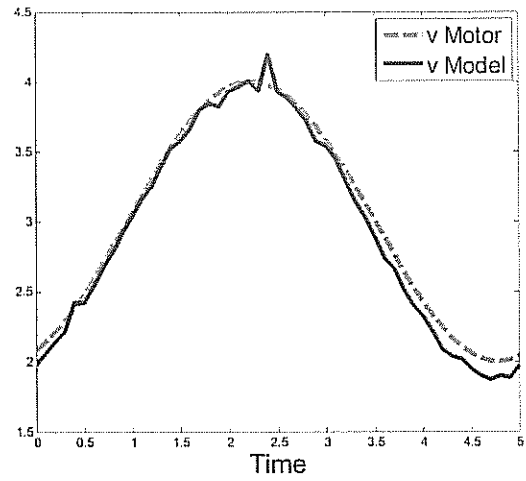


Figure 8. Model Reference and motor signals.

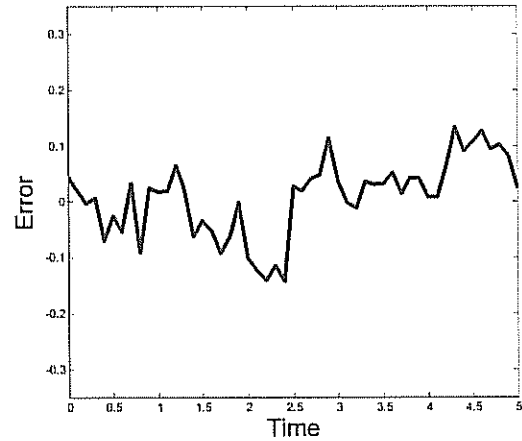


Figure 9. Model Reference following error.

$$u(t) = \frac{\alpha e_m + \dot{v}_m(t) + \hat{a}v(t)}{\hat{b}} \quad (25)$$

with $\dot{v}_m(t) = -\hat{a}v_m(t) + r(t)$ and $e_m(t) = v_m(t) - v(t)$ where $r(t)$ is the reference signal. Figure 8 shows the reference and motor speed signals. Figure 9 shows the tracking error when performing the model following.

VI. CONCLUSIONS

This paper presents the identification of a DC motor using a simple closed loop identification method implemented in a low cost system based on a *PIC* microcontroller. The estimated parameters given by the identification method were tested using a model following scheme between the identified model and the real plant. These experimental results show the feasibility of the approach.

VII. ACKNOWLEDGEMENTS

Authors would like to thank Jesús Meza and Gerardo Castro for the technical assistance for the paper.

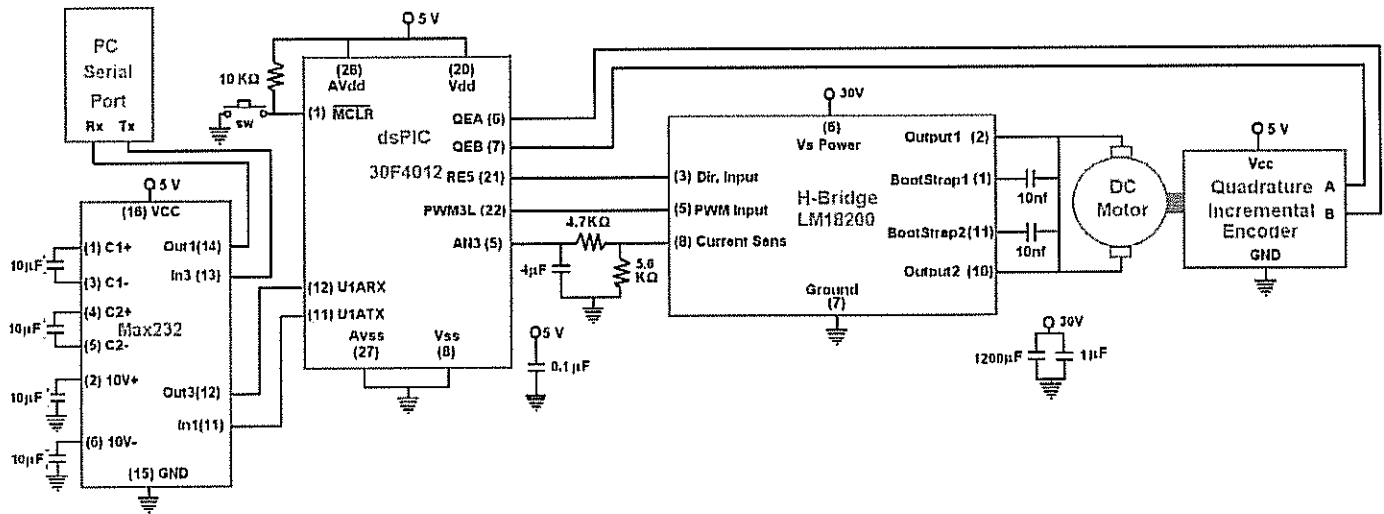


Figure 10. System interconnection.

REFERENCES

- [1] LJUNG, L.- *System Identification: Theory for the User*. 2nd Ed. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall 1999.
- [2] T. SÖDERSTRÖM & P. STOICA.- *System Identification*. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall 1988.
- [3] SCHMID, C.- "The virtual control lab VCLab for education on the web". *Proceeding of the American Control Conference*. Vol. 2. Philadelphia, Pennsylvania USA, June. pp.1314-1318. 1998.
- [4] CASINI, M; GARULLI, A.; PRATTICHIZZO, D. & VICINO A.- "Remote system Identification in the "Automatic Control Telelab". *Proceeding of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, Hawaii USA, December. pp.4956-4961. 2003.
- [5] JIMÉNEZ, L.; PUERTO, O.; REINOSO, O. & NÉCO R. & FERNÁNDEZ C.- "Remote Control Laboratory Using Matlab and Simulink". *Proceeding of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. Vigo Spain, June. pp.2963-2967.
- [6] SHANG S.; ZHU, S.; LIN, Q.; XU Z. & YING S.- "NETLAB-An Internet based laboratory for electrical engineering education". *Journal of Zhejiang University SCIENCE*. Vol 6th. No.5. pp 393-398. 2000.
- [7] Feedback Instruments Limited. Park Rd, Crowborough, East Sussex TN6 2QR, England. www: www.fbk.com.
- [8] TQ Education and Training Ltd.- Bonsall Street, Long Eaton, Nottingham NG 10 2AN, -UK. www: www.tq.com
- [9] Quanser Inc.- 119 Spy Court, Markham Ontario L3R 5H6 Canada. www: www.quanser.com.
- [10] Educational Control Products, 1 Buckskin Court, Bell Canyon CA 91307 U.S.A. www: www.ecpsystems.com.
- [11] MOHANNA, Y.; HAMAD, M.; JABR, R.; ALAEDDINE & BAZZI, O.- "Teaching Microprocessors, Microcontrollers, and Digital Signal Processing Courses Using Only One Target Processor: The Newborn dsPIC30FTM from microchip". *Computer Applications in Engineering Education*. Vol. 15 Issue 2. p. 185-191. 2007.
- [12] LEE, C.; SU, J.; HSIEH C.; LIN, K.; CHANG J. & LIN G.- "A Hands-on Laboratory for Introductory Automatic Control Courses. *Proceedings of the 17th World Congress IFAC*. Seoul, Korea, July 6-11. 2008 p. 9737-9742. 2007.
- [13] UNIVERSITY OF ILLINOIS AT URBANA CHAMPAIGN.- *GE420 Laboratory Assignment 6. DC Motor Discrete Transfer Function Identification*. GE420 Digital Control of Dynamic Systems. Industrial & Enterprise System Engineering.
- [14] POLYTECHNIC INSTITUTE OF NEW YORK UNIVERSITY.- *ME 3411 Automatic Control Laboratory*.
- [15] UNIVERSITY OF MINESOTA DULUTH.- *ME 3222 Control Kinematics Laboratory*.
- [16] UNIVERSITY OF TORONTO. DEP. OF ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING. - *ECE 4115. Real-Time Computer Control. DC Motor Identification*.
- [17] LIM, D.- "AN UNDERGRADUATE LABORATORY COURSE IN REAL-TIME DYNAMIC CONTROL". *IEEE Transactions on Education*. Vol. 48 N^o. 1 pp. 105-110. 2005.
- [18] BASILIO, J. & MOREIRA V.- "State-Space Parameter Identification in a Second Control Laboratory". *IEEE Transaction on Education*. Vol. 47. N^o.2 May. pp. 204-210. 2004.
- [19] BASILIO, J.- "A laboratory for a first course in control systems". *International Journal of Electrical Engineering Education*. Vol. 39. N^o.1.p 54-70. Jan. 2002
- [20] LEVA, A.- "A Hands-On Experimental Laboratory for Undergraduate Courses in Automatic Control". *IEEE Transaction on Education*. Vol. 46. N^o.2.p 263-272. May. 2003.
- [21] IBRAHIM, D.- "Teaching digital control using a low-cost microcontroller-based temperature control kit". *International Journal of Electrical Engineering Education*. Vol. 40. N^o.3.p 175-187. Jul. 2003.
- [22] CHEN Y. & NAUGHTON J.- "An Undergraduate Laboratory Platform for Control System Design Simulation and Implementation". *IEEE Control System Magazine*. p.12-20. June 2000.
- [23] OGATA, K.- *Modern Control Engineering*. 4th Ed. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall 2002.
- [24] GARRIDO, R. & MIRANDA, R.- "Autotuning of a DC servomechanism using Closed Loop Identification". *The 32th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, IECON 06*. Paris, France, 7- 10 october 2006.
- [25] SASTRY, S. & BODSON, M.- *Adaptive Control, Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall. 1989.
- [26] NATIONAL INSTRUMENTS. *NI ELVIS*. Av. Lincoln No. 1355 Local 2 Col. La Playa Ciudad Juárez, Chih. México 32317. www: www.nicom.

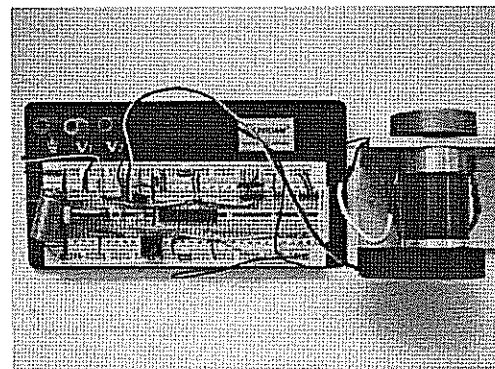


Figure 11. PIC based identification system.

Algebraic identification of a DC servomechanism using a Least Squares algorithm

Rubén Alejandro Garrido Moctezuma, Antonio Concha Sánchez
CINVESTAV

Automatic Control Department

E-mail: garrido, aconcha@ctrl.cinvestav.mx

Abstract—This paper proposes a parameter identification methodology based on a discrete-time Least Squares algorithm and a parametrization obtained using the Operational Calculus. References [4] and [5] proposed previously this parametrization and developed an Algebraic Identification Method (AIM) for parameter estimation of linear systems. The AIM employs the Operational Calculus to obtain analytical expressions for the parameter estimates. These expressions have a singularity at $t=0$ and certain excitation signals may also produce singularities at other time instants. The proposed approach employs the same parametrization obtained using the Operational Calculus, which is linear in the parameters, and employs a standard on-line discrete-time Least Squares algorithm. In this way, the proposed approach completely eliminates the problem of singularities; moreover, it is experimentally shown that the AIM and the proposed approach have similar performances.

Key words: Parameter estimation, algebraic parametrization, servomechanism.

I. INTRODUCTION

Parameter estimation plays a key role in today servo drives since the identified model allows tuning a controller applied to a servomechanism. Moreover, the identification procedure is applied under open loop or closed-loop conditions. There exist in the literature several references dealing with parameter identification techniques [1]. Reference [2] shows a procedure for identifying a velocity-controlled servomotor using chaotic excitation signals. The Authors conclude from experiments in a laboratory prototype that the choice of the excitation signals has fundamental role in the identification procedure. Reference [3] presents an output error closed loop identification method. In this case, the servomechanism and a two-parameter model are simultaneously controlled through a Proportional Derivative (PD) controller. The error between the output of the model and the servomechanism feeds a gradient algorithm. Subsequently, the parameter estimates allows computing a Proportional Integral Derivative (PID) controller using a Linear Quadratic Regulator approach. On the other hand, references [4] and [5] present a novel algebraic identification approach based on the Operational calculus. This approach, which in the sequel will be termed as the Algebraic Identification Method (AIM), was applied for the parameter identification of a DC motor [6] and [7]. This approach has several interesting features. Firstly, applying the Operational Calculus to the model of a DC motor allows eliminating constant disturbances and the effect

of the initial conditions; moreover, it also filters-out high frequency noise and provides parameter estimates in a very short time period. The approach works with almost all kind of excitation signals; however, there exists the possibility of singularities in the solutions of the parameter estimates. Reference [6] employs the AIM for closed-loop identification of a DC motor model. The method simultaneously estimates the servomotor inertia and viscous friction; then, these estimates allow obtaining an estimate of the Coulomb friction. Reference [7] shows the AIM applied for identifying the second-order model of a velocity-controlled DC servomotor under constant loads.

The aim of this work is to present an on-line identification procedure based on the parametrization obtained using the Operational Calculus combined with a discrete-time Least Squares algorithm. This approach, which will be named Algebraic Recursive Identification Method (ARIM), exploits the advantages of this parametrization and does not exhibit the problem of singularities. The paper has the following structure. Section II presents the servomechanism model. Section III shows the parametrization obtained using the Operational Calculus as well as the AIM and the ARIM. Section IV points up the method employed for validating the identified model. Section V depicts the experimental results obtained using both methods. The paper ends with some concluding remarks.

II. SERVOMECHANISM MODEL

The servomechanism consists of a DC servomotor driving a brass disk, a power amplifier and a position sensor; Fig. 1 depicts its block diagram.

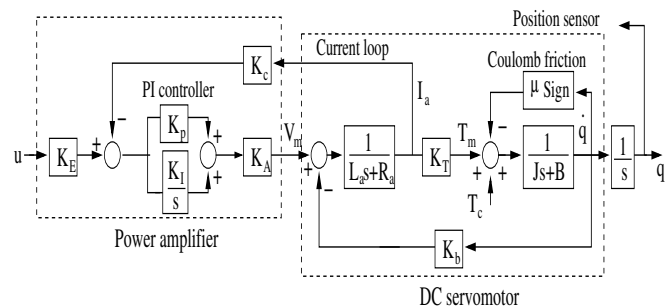


Fig. 1. Servomechanism model.

The amplifier works in current model, i.e. a Proportional Integral (PI) controller closes a loop around the amplifier using the armature current I_a . Variable q is the servomotor position, u is the control voltage, J and B are respectively the inertia and viscous friction. The inertia J comprises the motor and the brass disk inertias. Parameter μ defines the Coulomb friction coefficient and the term T_c corresponds to constant disturbances or parasitic constant voltages produced inside the power amplifier.

The following equation describes the servomechanism model

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) - c\text{sign}(\dot{q}(t)) + d \quad (1)$$

Variables are defined as $a = B/J$, $b = K/J$, $K = \frac{K_E K_T}{K_c}$, $c = \mu/J$ y $d = T_c/J$. This model assumes a high value of integral gain K_I ; in this way, the servomechanism electric time constant is much smaller than its mechanical time constant.

III. IDENTIFICATION ALGORITHMS

Fig. 2 shows how the AIM and the ARIM take the signals from the servomechanism. A PD controller stabilizes the loop without knowledge about the servomechanism parameters.

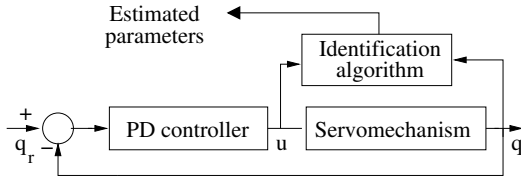


Fig. 2. Closed loop identification.

A. Algebraic Identification Method

In order to apply the AIM, assume that the motor rotates only in one direction. This assumption allows writing equation (1) as follows

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) + \nu \quad (2)$$

Note that $\nu = -c + d$ if $\text{sign}(\dot{q}(t))=1$ and $\nu = c + d$ if $\text{sign}(\dot{q}(t)) = -1$. Applying the Operational Calculus [4] to this last expression yields the following parametrization [6]

$$z_1(t) = \phi_{11}(t)a + \phi_{12}(t)b \quad (3)$$

Where¹

$$\begin{aligned} z_1(t) &= t^3 q - 9 \int t^2 q + 18 \int^{(2)} t q - 6 \int^{(3)} q \\ \phi_{11}(t) &= - \int t^3 q + 6 \int^{(2)} t^2 q - 6 \int^{(3)} t q \\ \phi_{12}(t) &= \int^{(2)} t^3 u - 3 \int^{(3)} t^2 u \end{aligned} \quad (4)$$

¹ $\int_0^t \int_0^{\gamma_1} \dots \int_0^{\gamma_{n-1}} \sigma(\gamma_n) d\gamma_n \dots d\gamma_2 d\gamma_1$. represents the iterated integral $(\int^1 \sigma(t)) = (\int_0^t \sigma(\gamma_1) d\gamma_1)$. Moreover, $(\int^1 \sigma(t)) =$

The following expression gives an alternative writing of (4)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_{1a} + t^3 q \\ \dot{z}_{1a} &= z_{1b} - 9t^2 q \\ \dot{z}_{1b} &= z_{1c} + 18t q \\ \dot{z}_{1c} &= -6q \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{11} &= \phi_{11a} & \dot{\phi}_{12} &= \phi_{12a} \\ \dot{\phi}_{11a} &= \phi_{11b} - t^3 q & \dot{\phi}_{12a} &= \phi_{12b} \\ \dot{\phi}_{11b} &= \phi_{11c} + 6t^2 q & \dot{\phi}_{12b} &= \phi_{12c} + t^3 u \\ \dot{\phi}_{11c} &= -6t q & \dot{\phi}_{12c} &= -3t^2 \end{aligned} \quad (6)$$

On the other hand, integrating both sides of (3) yields

$$z_2(t) = \phi_{21}(t)a + \phi_{22}(t)b \quad (7)$$

With

$$z_2(t) = \int_0^t z_1(\tau) d\tau, \quad \phi_{21}(t) = \int_0^t \phi_{11}(\tau) d\tau,$$

$$\phi_{22}(t) = \int_0^t \phi_{12}(\tau) d\tau$$

Expressions (3) and (7) form the following set of simultaneous equations

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Solving the above system gives the estimates of a and b , i.e.

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{n_{\hat{a}}(t)}{\det(\phi(t))} = \frac{z_1(t)\phi_{22}(t) - z_2(t)\phi_{12}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)} \\ \hat{b} &= \frac{n_{\hat{b}}(t)}{\det(\phi(t))} = \frac{z_2(t)\phi_{11}(t) - z_1(t)\phi_{21}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)} \end{aligned} \quad (9)$$

Note that $\det(\phi(t)) = \phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t) = 0$ for $t = 0$ and the solution has a singularity. Moreover, according to [4], for $t > 0$, almost any signals u and q are persistent, i.e., these signals satisfy a Persistent Condition if they produce $\det(\phi(t)) \neq 0$. Moreover, it is possible to obtain a unique solution \hat{a} and \hat{b} in a finite time interval $[0, \rho]$, $\rho > 0$. After this time, the AIM stops functioning. It is also worth remarking that the signals z_i and the regressors ϕ_{ij} , $i, j = 1, 2$ in (3) and (7) remain bounded for a finite time interval. The following filtering procedure [5] attenuates the effects of zero-mean measurement noise.

$$\hat{a} = \frac{g * n_{\hat{a}}(t)}{g * \det(\phi(t))} \quad \hat{b} = \frac{g * n_{\hat{b}}(t)}{g * \det(\phi(t))} \quad (10)$$

The term g corresponds to a filter with transfer function $G(s)$ and $*$ is the convolution operator. This work uses $G(s) = 1/s$ and then the expressions for the estimates becomes

$$\hat{a} = \frac{\int n_{\hat{a}}(t)}{\int \det(\phi(t))} \quad \hat{b} = \frac{\int n_{\hat{b}}(t)}{\int \det(\phi(t))} \quad (11)$$

B. Algebraic Recursive Identification Method

The ARIM uses the parametrization (3) but the integrals defined in (4) are reset every T seconds; this resetting prevents these signals from becoming unbounded. Note that (3) is also valid for $t = kh$; $k = 0, 1, 2, \dots$, where h is the sampling period. The above remark allows writing (3) as

$$z_1(kh) = \phi_{11}(kh)a + \phi_{12}(kh)b \quad (12)$$

Omitting the sampling period h and defining $\phi(k) = [\phi_{11}(k) \ \phi_{12}(k)]^T$ and $\theta = [a \ b]^T$ finally leads to

$$z_1(k) = \phi^T(k)\theta \quad (13)$$

This parametrization allows using the following standard Least Squares algorithm [8], [9]:

$$\hat{\theta}(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}(k) \\ \hat{b}(k) \end{pmatrix} = \hat{\theta}(k-1) + L(k)\epsilon(k)$$

$$L(k) = \frac{P(k-1)\phi(k)}{1 + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)} \quad (14)$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1 + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)}$$

$$\epsilon(k) = z(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k-1)$$

Vector $\hat{\theta}$ is an estimate of θ , $P(k)$ is the covariance matrix inverse and $\epsilon(k)$ the estimation error. Compared with the AIM, it is clear that the ARIM completely eliminates the singularity problem since it does not stem on the solution (9). Note that the following Persistence of Excitation condition [10], [11] replaces the Persistent Condition given in [4].

Definition 1: A vector $\phi(k) \in R^n$ satisfies a Persistence of Excitation (PE) condition if for all j there exist some α such that

$$\alpha_1 \geq \sum_{\kappa=j}^{j+\alpha} [\chi^T \phi(\kappa)]^2 \geq \alpha_2 \quad (15)$$

For positive constants $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ and for $\chi \in R^n$ with $\|\chi\|=1$.

The estimates $\hat{\theta}$ obtained using the AIM and the ARIM allow computing estimates \hat{c} and \hat{d} of the remaining parameters c and d . Assume that after a time t_0 the AIM and the Least Squares algorithm provide estimates \hat{a} and \hat{b} and define the triangle reference $q_r(t)$ shown in Fig. 3

$$q_r(t) = \begin{cases} m(t - t_0) + q_r(t_0), & \text{if } t \in [t_0, t_0 + \delta] \\ -m[t - (t_0 + 2\delta)] + q_r(t_0), & \text{if } t \in [t_0 + \delta, t_f] \end{cases} \quad (16)$$

The terms m and $-m$ correspond to the slopes of $q_r(t)$ and $\delta = \frac{t_f - t_0}{2}$. If the gain of the PD controller stabilizing the servomechanism is high enough, then $q(t) \approx q_r(t)$. As a consequence, in the time interval $[t_0, t_0 + \delta]$ the equalities $\dot{q}(t) = m$, $\text{sign}(\dot{q})=1$, and $\ddot{q} = 0$ hold. Therefore, the estimated model corresponds to

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta] \quad (17)$$

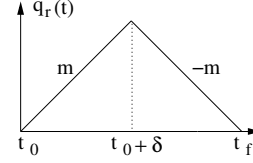


Fig. 3. Reference signal $q_r(t)$.

Equivalently, during the time interval $[t_0 + \delta, t_f]$ the inequalities $\dot{q}(t) = -m$, $\text{sign}(\dot{q}) = -1$, and $\ddot{q} = 0$ hold. The corresponding estimated model is

$$-\hat{c} - \hat{d} = \hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (18)$$

Equation (17) is equivalent to

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t - \delta), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (19)$$

Since the estimates \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , and \hat{d} are constants so do the control signals $u(t)$ and $u(t - \delta)$. Hence, define $u_m = u(t - \delta)$ and $u_{-m} = u(t)$, $t \in [t_0 + \delta, t_f]$. Using this definition and adding (18) and (19) yields

$$-2\hat{d} = \hat{b}[u_m + u_{-m}] \quad t \in [t_0 + \delta, t_f] \quad (20)$$

Therefore, the following expressions give parameter estimates \hat{c} and \hat{d}

$$\begin{aligned} \hat{c} &= -[\hat{a}m + \hat{b}u_m + \hat{d}] \\ \hat{d} &= -\frac{\hat{b}[u_m + u_{-m}]}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

IV. MODEL VALIDATION

In order to validate the identified models using the AIM and the ARIM, they are employed for computing a model reference tracking control law (see Fig. 4). The tracking error $e = q_m - q$ is sampled p times and every sampled value e_i is used for computing the mean square error, which is a measure of the tracking quality

$$E = \sum_{i=1}^p e_i^2$$

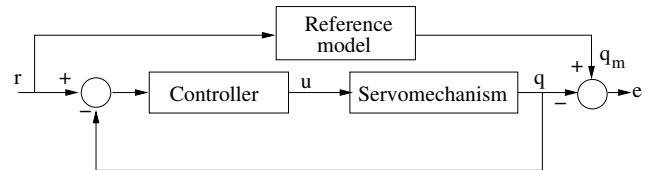


Fig. 4. Model reference control system.

A. Control law

Assume the following reference model

$$\ddot{q}_m(t) = -a_1\dot{q}_m(t) - a_2q_m(t) + r(t) \quad (22)$$

Parameters a_1 and a_2 are positive constants and $r(t)$ is a reference. The next expression defines the control law applied to the servomechanism

$$u(t) = \frac{1}{\hat{b}}[\lambda_1 \dot{e}(t) + \lambda_2 e(t) + \ddot{q}_m(t) + \hat{a}\dot{q}(t) + \hat{c}\text{sign}(\dot{q}(t)) - \hat{d}] \quad (23)$$

The term $\ddot{q}_m(t)$ is given by (22) and λ_1, λ_2 are positive constants. Adding and subtracting $\hat{b}u$ to $\ddot{e}(t) = \ddot{q}_m(t) - \ddot{q}(t)$ and using (1) leads to

$$\begin{aligned} \ddot{e}(t) &= \ddot{q}_m(t) - \ddot{q}(t) + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \\ &= \ddot{q}_m(t) + a\dot{q}(t) - bu(t) + c\text{sign}(\dot{q}(t)) - d + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Substituting the control law (23) in this last equation produces the error dynamics

$$\ddot{e}(t) + \lambda_1 \dot{e}(t) + \lambda_2 e(t) = \tilde{\theta}^T \psi(t) \quad (25)$$

with

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{b} - b \\ \hat{c} - c \\ \hat{d} - d \end{pmatrix} \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} -\dot{q}(t) \\ u(t) \\ -\text{sign}(\dot{q}(t)) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

V. EXPERIMENTAL RESULTS

The laboratory prototype consists in a servomotor from Moog, model C34-L80-W40 (Fig. 5 (a)) driven by a Copley Controls power amplifier, model 423, configured in current mode. A BEI optical encoder, model L15 with 2500 pulses per revolution, allows measuring the servomotor position. The algorithms are coded using the MatLab/Simulink software platform under the program Wincon from Quanser Consulting, and a Q8 board also from Quanser Consulting performs data acquisition. The software runs on a Personal Computer using an Intel Core 2 quad processor, and the Q8 board is allocated in a PCI slot inside this computer. The PD controller gains are set to $k_p = 10$ and $k_d = 0.34$. The following linear band-pass filter

$$G(s) = \left(\frac{220s}{s+220} \right) \left(\frac{500}{s+500} \right)$$

estimates the servomotor velocity from position measurements. The sampling period is $50 \mu\text{s}$ and the ODE5 method allows evaluating the integrals appearing in the signals z_i and the regressors ϕ_{ij} , $i, j = 1, 2$ of (3) and (7). The sampling period for the Least Squares algorithm is fixed to $h = 0.5\text{ms}$ and the time used for resetting the integrals used in the proposed method is set to $T = 2.5\text{s}$. The initial value for the covariance matrix in the Least Squares algorithm is $P(0) = \text{diag}(10,000, 10,000)$.

Fig. 5 (b) shows the excitation signal $q_r(t)$ employed during the experiments. The excitation signal for the time interval $[0, 5]$ is $q_r = 11t + 4\sin(0.8\pi t)$ and corresponds to the identification of parameters a and b . Equation (16) defines the excitation signal for the time interval $[5, 15]$. Fig. 5 (c) and 5 (d) depict respectively the servomotor speed

and the control signal obtained by applying the excitation signal $q_r(t)$.

Fig. 6 shows the time evolution of the parameter estimates produced by the AIM. Estimates \hat{a} and \hat{b} were set to 1 in the time interval $[0, 0.5]$ due to the singularity problem exhibited by this method. Fig. 7 portrays the time evolution of the parameter estimates obtained using the ARIM. It is worth noting that the estimates \hat{a} and \hat{b} obtained using the AIM converge faster than the ones obtained using the ARIM to 0.15 and 137 respectively. However, in both cases the estimates converges to constant values after 2s. The behavior of the estimates \hat{c} and \hat{d} for the two methods is the same.

Fig. 8 (a) shows the time evolution of $\sum[\chi^T \phi]^2$ with $\chi = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$. Therefore, the excitation signal employed for identifying \hat{a} and \hat{b} is fulfills a PE condition. The models identified using the AIM and the ARIM are used for computing control law (23) with $a_1 = 0.3$, $a_2 = 10$, $\lambda_1 = 10$ and $\lambda_2 = 10$. Fig. 8 (b) depicts the output $q_m(t)$ of the reference model, and Fig. 8 (c) and 8 (d) show the tracking error when the control law is computed using the parameter estimates obtained through the AIM and the ARIM respectively.

Table I shows the parameter estimates and the mean square error E , which is computed for $p=300,000$. This table also shows the nominal parameters of the servomechanism obtained using the servomotor and power amplifier technical data. The experimental results indicates a good agreement between the estimated parameters produced by the two methods and the nominal parameters \hat{a} and \hat{b} . The parameters associated to the Coulomb friction and the constant disturbance are not available from the technical data. Moreover, the mean square error E is similar for the two identification methods.

VI. CONCLUSIONS

The Algebraic Identification Method (AIM) and the proposed approach (ARIM) successfully identified a four-parameter DC servomotor model. The former provides parameter estimates in a slightly shorter time period than the proposed approach; however, the later is completely free of singularities.

Table I
PARAMETER ESTIMATES.

	\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}	Mean square error E
Nominal parameters	0.193	137.78	—	—	
AIM	0.149	137.5	4.5	1.05	28.7375
ARIM	0.155	137.3	4.4	0.97	28.8329

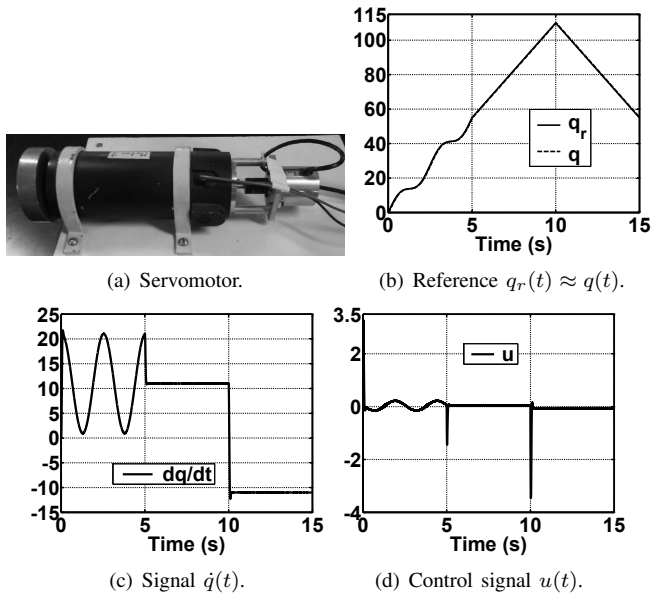


Fig. 5. Servomotor used in the laboratory test and signals $q(t)$, $\dot{q}(t)$ and $u(t)$.

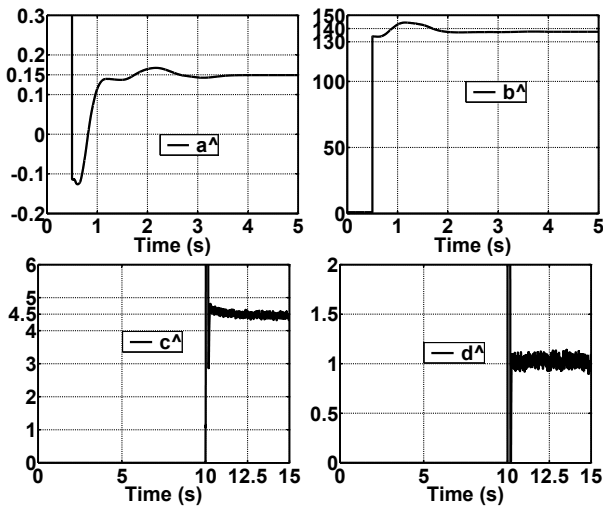


Fig. 6. Parameter estimates produced by the AIM.

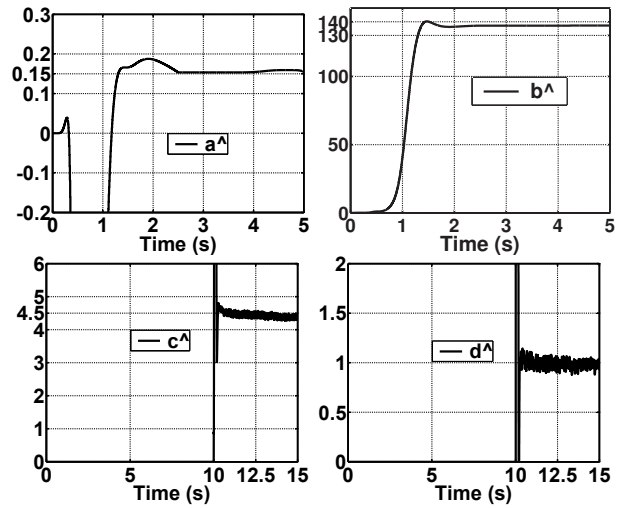


Fig. 7. Parameter estimates obtained by the ARIM.

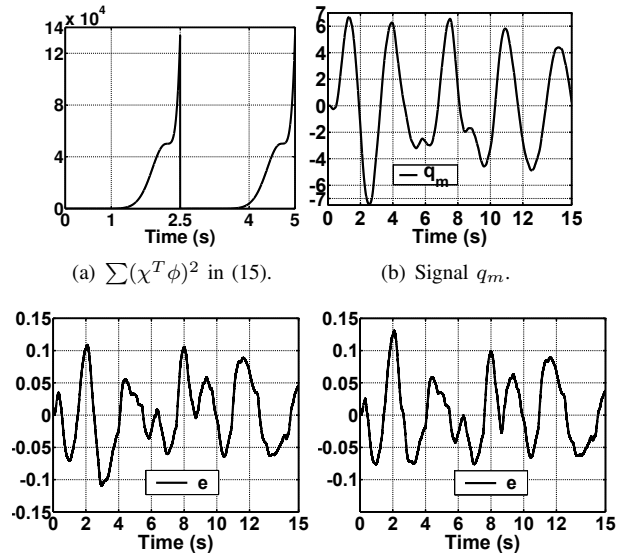


Fig. 8. Output q_m of the reference model and tracking errors e .

REFERENCES

- [1] G. P. Rao, H. Unbehauen, Identification of continuous-time systems. In *IEE Proceedings on Control Theory Applications*, Vol. 153, pag. 185-219, 2006.
- [2] Chyun-Chao Fuh, Hsun-Heng Tsai, Adaptive parameter identification of servo control systems with noise and high-frequency uncertainties In *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, pag. 1437-1451, 2007.
- [3] R. Garrido, R. Miranda, Autotuning of a servomechanism using Closed Loop Identification, In *IEEE 32nd Annual Conference on Industrial Electronics IECON*, 2006.
- [4] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification. In *ESAIM, Control, Optimization and Calculus of Variations*, Vol. 9, pag. 151-168, 2003.
- [5] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, Closed-loop parametric identification for continuous time linear systems via New Algebraic Techniques. In *Continuous Time Model Identification from Sampled Data*, H. Granier & L. Wang (Eds.), Springer, Berlin, 2007.
- [6] G. Mamani, J. Becedas, V. Feliu-Batle, H. Sira-Ramírez, Open and closed-loop algebraic identification method for adaptive control of DC motors. In *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2009.
- [7] H. Sira Ramírez, E. Barrios Cruz, R. Márquez Contreras, Fast Adaptive Trajectory Tracking Control for a Completely Uncertain DC Motor via Output Feedback. In *Computación y Sistemas*, Vol. 12, No. 4, pag. 397-408, 2009.
- [8] Lennart Ljung, System Identification: Theory for the user, Prentice Hall, 1987.
- [9] Oliver Nelles, Nonlinear System Identification, In *Springer Verlag*, 2001.
- [10] T. Söderström, P. Stoica System Identification In *Prentice Hall*, 1989.
- [11] Brian D. O. Anderson, Exponential Convergence and Persistent Excitation, In *Proc. 21st IEEE Conference on Decision and Control*, 1982.

Parametric identification of seismically excited buildings using acceleration measurements

Rubén Garrido, Antonio Concha
CINVESTAV

Departamento de Control Automático
E-mail: garrido, aconcha@ctrl.cinvestav.mx

Abstract—This paper proposes a method that estimates the parameters of a seismically excited building. The acceleration measurements of the ground and of each floor are used for identification purposes. It is assumed that these measurements have offsets and noise. The proposed scheme is based on the Least Squares algorithm with forgetting factor and a parametrization of the structure using high-pass filters and integrals over finite time intervals. These filters pass the typical frequency bandwidth of structures undergoing earthquake excitation, eliminate the offsets and attenuate the measurement noise. To confirm the effectiveness of the proposed method a simulation of a two-story building is presented. The results show that the estimated parameters converge to the true parameters in a short time.

Key words: Parametric identification, Least Squares with forgetting factor, buildings, bandpass filters.

I. INTRODUCTION

The parameter identification of structures has been a topic of investigation in the last three decades [1]. The parameters that define the vibratory characteristics of the structures are the mass, damping and stiffness. The knowledge of these parameters is very important to determine the dynamic properties of the structure such as its the natural frequency and vibration period, and as consequence, the response of the structure due to external forces like earthquakes and wind [2]. Moreover, it is necessary the knowledge of these parameters for applying control techniques that attenuate the vibration of the structures undergoing external forces [3], [4], [5], [6].

In practically all the cases, acceleration measurements feed the identification algorithms. The reason is that in most cases, it is not possible to measure the absolute displacements and velocities in a structure since it is difficult to establish a static reference. For example, during a seismic event, the foundation to which the structure is attached is moving with the ground and does not provide a static reference [7], [8].

Several parameter identification techniques using acceleration measurements have been proposed in the literature. Modal parameter estimation termed *modal analysis* is undoubtedly the most popular approach to perform the identification of structures [1]. This method obtains the dynamic characteristics of a structure in the form of modal parameters, namely the natural frequencies, mode shapes and damping ratios [9], [10], [11]. Identification techniques that estimate the modal parameters using acceleration measurements are proposed in [12], [13], [14]. On the other hand, reference

[15] presents an identification scheme in the time domain that estimates the stiffness and damping parameters of a structure. This parameters are identified through the minimization of an integral of the least-squared errors between measured and calculated accelerations using a numerical model of the structure. Reference [16] carries out the identification of buildings in the frequency domain. In this case, the first step is to experimentally determine the transfer functions from one of the system inputs to one of the outputs. The inputs are the ground acceleration and the control force applied by a magnetorehological damper (MR), and the outputs include the displacement of the MR damper relative to the structure and the accelerations of the building's floors. Subsequently, each of the experimental transfer functions is modeled as a ratio of two polynomials in the Laplace variable s and then used to build a state space representation for the structural system. Reference [17] shows a time domain identification approach of base isolated buildings from recorded response during earthquakes. A Least Squares technique with time segments identify the piece-wise linear properties of the nonlinear structure, and an observer estimates the unmeasured displacements and velocities, and initial conditions at different time segments. Reference [8] presents an adaptive observer that estimates the parameters, displacements and velocities of buildings during a seismic excitation. The observer uses acceleration measurements of the ground and of each floor, and force measurements of a MR damper employed to attenuate the vibrations of the building. Reference [18] proposes an algorithm based on the Least-squares method, which identifies the parameters of a 3D model of a building subjected to two orthogonal components of seismic excitation.

The majority of the identification techniques presented in the last paragraph consider the presence of measurement noise, but none of them consider the presence of offsets in the acceleration measurements. It is well known that the accelerometers usually have an offset voltage in their output. Therefore, there exists a constant difference between the measured and the real acceleration [19].

The aim of this work is to present an on-line algorithm that identifies the ratio of the parameters corresponding to the mass, damping and stiffness of a building excited by a seismic activity. It is assumed that both the ground acceleration and the acceleration of each floor are available, and these

measurements have noise and offsets. The algorithm is based on a parametrization obtained through high-pass filters and integrals over a finite time interval, and combined with the Least Squares method with forgetting factor. This approach eliminates the offsets and attenuates the noise. The paper has the following structure. Section II presents the building model. Section III depicts the parametrization obtained using the filters. The identification algorithm is described in the section IV. Section V shows numerical simulation results. The paper ends with some concluding remarks.

II. BUILDING MODEL

Fig. 1 shows the structure considered in this work, which can be idealized as a lumped mass system with two degrees of freedom¹.

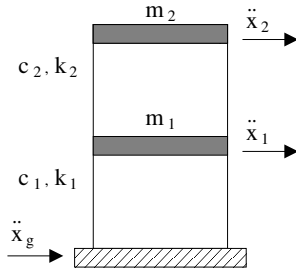


Fig. 1. Structure with two degrees of freedom.

The behavior of this structure can be described by the following linear invariant time model [20]:

$$M(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

where M , C and K are the mass, damping and stiffness matrices, respectively. The definition of these matrices is the following:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

where the parameters c_i and k_i , $i = 1, 2$ are the lateral column damping and stiffness between the i th and $(i-1)$ th floor. The components of the vector $x = [x_1, x_2]^T$ are the corresponding displacements of each floor, measured with respect to the basement. Variables \dot{x} and \ddot{x} are the velocity and the acceleration vectors, respectively. The term \ddot{x}_g represents the absolute ground acceleration induced by the seismic event, finally, $l = [1 \ 1]^T$.

Assume the following:

¹It is considered a structure with two degree of freedom to describe easily the identification algorithm. The obtained results can be extended to structures with more degrees of freedom

- The acceleration measurements of the ground and of each floor are available and have offset disturbances and measurement noise, i.e.,

$$\ddot{x}_m = \ddot{x} + d + \xi \quad (2)$$

$$\ddot{x}_{gm} = \ddot{x}_g + d_g + \xi_g \quad (3)$$

where $\ddot{x}_m = [\ddot{x}_{1m} \ \ddot{x}_{2m}]^T$ is the measured acceleration vector, \ddot{x}_{gm} is the measured ground acceleration, $d = [d_1 \ d_2]^T$ and d_g are constant disturbances, $\xi = [\xi_1 \ \xi_2]^T$ and ξ_g are measurement noise.

- The initial conditions $x(0)$ and $\dot{x}(0)$ are zero. This assumption is reasonable because the structure is at rest before an earthquake.

The expression (1) is equivalent to:

$$(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) = -M^{-1}C\dot{x} - M^{-1}Kx \quad (4)$$

The products $M^{-1}C\dot{x}$ and $M^{-1}Kx$ can be parametrized as [8]:

$$M^{-1}C\dot{x} = \dot{u}\theta_c$$

$$M^{-1}Kx = u\theta_k$$

with

$$\theta_c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 \\ m_1 & m_1 & m_2 \end{bmatrix}^T$$

$$\theta_k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_2 \\ m_1 & m_1 & m_2 \end{bmatrix}^T$$

$$u = - \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

\dot{u} is the derivative of the matrix u with respect to the time.

In consequence, equation (4) can be written as:

$$(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) = \dot{u}\theta_c + u\theta_k \quad (6)$$

III. MODEL PARAMETRIZATION

Define the following filters:

$$F_1(s) = \left(\frac{s\beta}{\zeta(s)} \right), \quad F_2(s) = \left(\frac{s^2\beta}{\zeta(s)} \right), \quad F_3(s) = \left(\frac{\beta s^3}{\zeta(s)} \right)$$

$$\zeta(s) = (s + \mu)^2 \quad (7)$$

where μ and β are positive constants.

The Laplace transform of (6) is the following:

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g]) = sU(s)\theta_c + U(s)\theta_k \quad (8)$$

with $U(s) = \mathcal{L}[u]$.

The first step for obtaining the parametrization used for the identification algorithm consists in multiplying (8) by the high-pass filter F_3 given in (7). It will be shown that this product will eliminate the offset of the acceleration signals.

Multiplying (8) by $F_3(s)$ and using (7) leads to:

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g])F_3(s) = s^2U(s)F_2(s)\theta_c + s^2U(s)F_1(s)\theta_k \quad (9)$$

The expression (9) is equivalent to:

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g])F_3(s) = \mathcal{L}[\ddot{u}]F_2(s)\theta_c + \mathcal{L}[\ddot{u}]F_1(s)\theta_k \quad (10)$$

where \ddot{u} is the second time derivative of u and is given by:

$$\ddot{u} = - \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 & \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Substituting (2) into (11) gives the following relationship

$$\ddot{u} = \ddot{u}_m - D - \sigma \quad (12)$$

with

$$\ddot{u}_m = - \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1m} & \ddot{x}_{1m} - \ddot{x}_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{x}_{2m} - \ddot{x}_{1m} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$D = - \begin{bmatrix} d_1 & d_1 - d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 - d_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\sigma = - \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_1 - \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 - \xi_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

The Laplace transform of (12) is given by:

$$\mathcal{L}[\ddot{u}] = \mathcal{L}[\ddot{u}_m] - \frac{1}{s}D - \Sigma(s) \quad (16)$$

where $\Sigma(s) = \mathcal{L}[\sigma]$.

On the other hand, the Laplace transforms of \ddot{x} and \ddot{x}_g in (2) and (3) are given by:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = \mathcal{L}[\ddot{x}_m] - d\frac{1}{s} - \Xi(s) \quad (17)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_g] = \mathcal{L}[\ddot{x}_{gm}] - \frac{d_g}{s} - \Xi_g(s)$$

with $\Xi(s) = \mathcal{L}[\xi]$ and $\Xi_g(s) = \mathcal{L}[\xi_g]$

Substituting (16) and (17) in (10) yields:

$$Z(s)F_3(s) = \mathcal{L}[\ddot{u}_m]F_2(s)\theta_c + \mathcal{L}[\ddot{u}_m]F_1(s)\theta_k + R(s) + \Lambda(s) \quad (18)$$

where

$$Z(s) = \mathcal{L}[\ddot{x}_m] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_{gm}] \quad (19)$$

$$R(s) = -\frac{1}{s}D(F_2(s)\theta_c + F_1(s)\theta_k) + (d\frac{1}{s} + l\frac{d_g}{s})F_3(s) \quad (20)$$

$$\Lambda(s) = -\Sigma(s)(F_2(s)\theta_c + F_1(s)\theta_k) + (\Xi(s) + l\Xi_g(s))F_3(s) \quad (21)$$

According to the final value theorem [21], the steady state value r_{ss} of r is zero since:

$$r_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) = 0$$

The speed of convergence of r to zero is determined by the root μ of the characteristic polynomial $\zeta(s)$ given in (7).

On the other hand, define the following expressions in the time domain:

$$\ddot{u}_{mf} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\beta}{\zeta(s)} \mathcal{L}[\ddot{u}_m] \right], \quad z_f = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\beta}{\zeta(s)} Z(s) \right] \quad (22)$$

$$r = \mathcal{L}^{-1}[R(s)], \quad \lambda = \mathcal{L}^{-1}[\Lambda(s)]$$

\ddot{u}_{mf} is the signal obtained by low-pass filtering \ddot{u}_m and z_f is the signal obtained by low-pass filtering the variables \ddot{x}_m and \ddot{x}_{gm} . Furthermore, the signals r and λ depend on the offsets and the noise, respectively.

Using the definitions in (22) the expression (18) can be written in the time domain as:

$$z_f^{(3)} = u_{mf}^{(4)}\theta_c + u_{mf}^{(3)}\theta_k + r + \lambda \quad (23)$$

where the superscript represents the i th derivative of the corresponding variable.

The next step is to integrate the above equation five times over finite time intervals. This operation will allow obtaining terms depending on the measurement variables \ddot{u}_{mf} and z_f instead of their derivatives, and to attenuate the measurement noise. To do this procedure, it is useful to define the following operator [22], [23], [24], [25]:

$$I_n\{\rho(t)\} = \frac{1}{\delta^n} \int_{t-\delta}^t \int_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} \cdots \int_{\tau_{n-1}-\delta}^{\tau_{n-1}} \rho(\tau_n) d\tau_n \cdots d\tau_1 \quad (24)$$

whose Laplace transform is:

$$\mathcal{L}\{I_n\{\rho(t)\}\} = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^n \mathcal{L}\{\rho(t)\}, \quad (25)$$

Applying the operator $I_5[\cdot]$ to the equation (23) leads to:

$$\chi = \phi_1\theta_k + \phi_2\theta_c + I_5[r] + I_5[\lambda] \quad (26)$$

where

$$\phi_1 = I_4 \left\{ \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} - 1^j \cdot \ddot{u}_{mf}(t - j\delta) \right\} \quad (27)$$

$$\phi_2 = I_3 \left\{ \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} - 1^j \cdot \ddot{u}_{mf}(t - j\delta) \right\} \quad (28)$$

$$\chi = I_2 \left\{ \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} - 1^j \cdot z_f(t - j\delta) \right\} \quad (29)$$

The expression (26) can be rewritten as:

$$\chi = \phi\theta + I_5[r] + I_5[\lambda] \quad (30)$$

where $\phi(t) = [\phi_1(t) \ \phi_2(t)]$ and $\theta = [\theta_k^T \ \theta_c^T]^T$.

The term $I_5[r]$ converges toward zero because r converges to this value.

The next paragraphs describe the frequency domain filters that permit to attenuate the term λ that depends on the measurement noise.

The variable $I_5[\lambda]$ is written in the frequency domain using (25):

$$\mathcal{L}(I_5[\lambda]) = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^5 \Lambda(s) \quad (31)$$

Substituting $\Lambda(s)$ from (21) in (31) the following expression is obtained:

$$\mathcal{L}(I_5[\lambda]) = -\Sigma(s)(F_2(s)G(s)\theta_c + F_1(s)G(s)\theta_k) + (\Xi(s) + l\Xi_g(s))F_3(s)G(s) \quad (32)$$

where $G(s)$ is the following fifth order low-pass filter:

$$G(s) = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^5$$

whose magnitude and cut-off frequency are given by [23], [25]:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\delta^5} \left| \delta \frac{\sin(\pi\omega/\omega_0)}{(\pi\omega/\omega_0)} \right|^5, \quad \omega_c = \frac{2\pi}{\delta}$$

Define the following bandpass filters:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= F_1(s)G(s), & H_2(s) &= F_2(s)G(s) \\ H_3(s) &= F_3(s)G(s) \end{aligned} \quad (33)$$

Then, the expression (32) can be rewritten as:

$$\mathcal{L}(I_5[\lambda]) = -\Sigma(s)H_2(s)\theta_c - \Sigma(s)H_1(s)\theta_k + (\Xi(s) + l\Xi_g(s))H_3(s) \quad (34)$$

Thus, the measurement noise is filtered out using the bandpass filters H_1 , H_2 and H_3 given in (33). These filters are designed to encompass the frequency band covered by the seismically excited structures in order to keep all relevant information, and to remove the measurement noise [26].

A. Noise reduction

The level of noise in the accelerometers varies directly with the bandwidth of the measurement [27]. As the measurement bandwidth is reduced, the noise drops, improving the signal-to-noise ratio. The bandwidth of the accelerometers can be reduced by adding bandpass filtering like the ones given in (33). It is worth nothing that the accelerometers output noise scales with the square root of the measurement bandwidth. This is shown in the following equation [27]:

$$\text{noise (rms)} = \text{noise density} * \sqrt{\text{BW} * 1.6} \quad (35)$$

where BW is the accelerometer bandwidth in rad/s and the noise density is a parameter that is given in the datasheet of the accelerometer.

IV. IDENTIFICATION ALGORITHM

The on-line continuous time Least Squares method with forgetting factor (LSM-FF) is used to obtain an estimate $\hat{\theta}$ of the vector θ in (30). This algorithm is given by [28], [30]:

$$\dot{\hat{\theta}} = P\phi^T\epsilon \quad (36)$$

$$\dot{P} = \beta P - P\phi^T\phi P \quad (37)$$

where the components of the matrix ϕ are given in (27) and (28), $\beta > 0 \in R$ is the forgetting factor, $P = P^T > 0$ is

the covariance matrix and ϵ is the output estimation error, defined by

$$\epsilon = \chi - \hat{\chi} \quad (38)$$

where χ is given in (29) and $\hat{\chi}$ is defined as $\phi\hat{\theta}$.

Substituting χ from (30) into (38) yields:

$$\epsilon = \chi - \hat{\chi} = [\phi\theta + I_5[r] + I_5[\lambda] - \phi\hat{\theta} = -\phi\tilde{\theta} + I_5[r] + I_5[\lambda] \quad (39)$$

where $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ is the parametric error.

Assume that $I_5[\lambda] = 0$, convergence of the estimated parameters $\hat{\theta}$ to their true values θ , requires that the matrix ϕ fulfills the following Persistent of Excitation (PE) condition [30]:

$$\alpha_2 I \geq \int_t^{t+T_0} \phi^T(\tau)\phi(\tau)d\tau \geq \alpha_1 I, \quad \forall t \geq 0 \quad (40)$$

where $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ and $T_0 > 0$ is a finite time.

Now consider the presence of the term $I_5[\lambda]$ in (39) and assume that the PE condition is fulfilled, then for favorable signal-to-noise ratios the LSM-FF yields good results [28], [29]. It means, that the estimated parameters by this method will be very close to the true parameters.

The bandpass filters shown in (33) are designed to include the frequency band of the structure and to reduce the bandwidth of the accelerometers, as consequence the signal-to-noise ratio will be satisfactory and the LSM-FF will yield good results.

The term $I_5[r]$ in (39) will only affect the transient response of $\hat{\theta}$ depending on how fast $I_5[r]$ converges toward zero [30]. It is important to say that the LSM-FF is used because its adaptation gain is always active, which does not happen with the standard Least Squares. Thus the algorithm will identify θ when the effects of $I_5[r]$ vanishes.

V. NUMERICAL SIMULATIONS

A numerical simulation is presented to examine the performance of the proposed algorithm. The following matrices of a two-story building are used:

$$M = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (\text{kg})$$

$$C = \begin{bmatrix} 580 & -290 \\ -290 & 290 \end{bmatrix} \quad (\text{N/m})$$

$$K = 10^6 \begin{bmatrix} 1.28 & -0.64 \\ -0.64 & 0.64 \end{bmatrix} \quad (\text{N}\cdot\text{s/m})$$

The vectors θ_c and θ_k obtained with these matrices are given by:

$$\theta_c = [2.9, 2.9, 2.9]^T$$

$$\theta_k = [6.4e2, 6.4e2, 6.4e2]^T$$

The next bandpass filters are used:

$$H_i(s) = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^5 \left(\frac{s^i \beta}{(s + \mu)^2} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (41)$$

with $\beta = 0.05$, $\delta = 0.01$ and $\mu = 40$.

Fig. 2 shows the magnitudes of the filters given in (41) with respect to the frequency ω . The upper and lower cut-off frequencies of the filters H_1 , H_2 and H_3 are $[\omega_{Hc1} = 20, \omega_{Lc1} = 80]$, $[\omega_{Hc2} = 40, \omega_{Lc2} = 90]$ and $[\omega_{Hc3} = 90, \omega_{Lc3} = 300]$, respectively. As a consequence, the BW of H_1 , H_2 and H_3 are 60, 50 and 210 rad/s, respectively. The noise reductions corresponding to these bandwidths are obtained using equation (35).

The El Centro (California, 1940) earthquake acceleration is used as a source of seismic excitation data for the building. The amplitude of the excitation is modified to agree with the structure scale. The initial value for the covariance matrix in the Least Squares is $P(0) = 10^3 \text{diag}(1,1,1,1,1)$ and the forgetting factor is set to $\beta = 0.7$. The acceleration measurements of the floors $\ddot{x}_m = [x_{1m}, x_{2m}]^T$ and of the ground \ddot{x}_{gm} are polluted with the constants disturbances $d = [3, 4]^T$ and $d_g = -2$, respectively. Furthermore, a Gaussian noise with zero mean and variance of 0.01 is added to these measurements. Fig. 3 depicts the measured ground acceleration \ddot{x}_{gm} and Figures 4 and 5 show the measured acceleration of the first floor \ddot{x}_{1m} and the second floor \ddot{x}_{2m} , respectively. These Figures are presented in the time interval [0-5] to show the presence of disturbances.

Figures 6 and 7 portrait the time evolution of the parameter estimates of $\hat{\theta}_c$ and $\hat{\theta}_k$, respectively. The initial values are $\hat{\theta}_c(0) = [0, 0, 0]^T$ and $\hat{\theta}_k(0) = [10^4, 10^4, 10^4]^T$. It is worth noting that the estimates $\hat{\theta}_c$ and $\hat{\theta}_k$ converges to the true parameters approximately in 6 seconds.

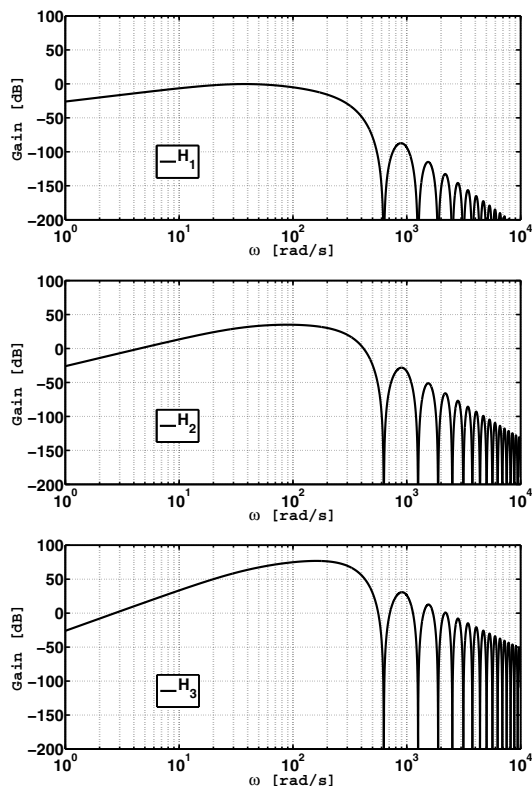


Fig. 2. Bode diagram gain of the filters shown in (41).

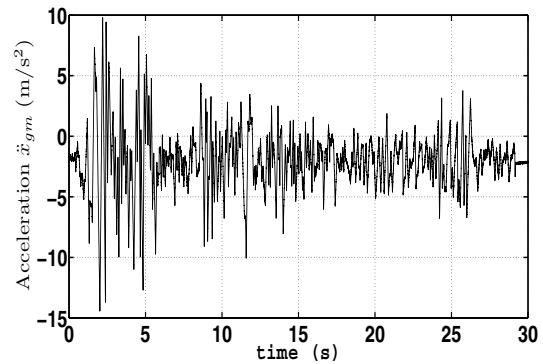


Fig. 3. Measured ground acceleration \ddot{x}_{gm} .

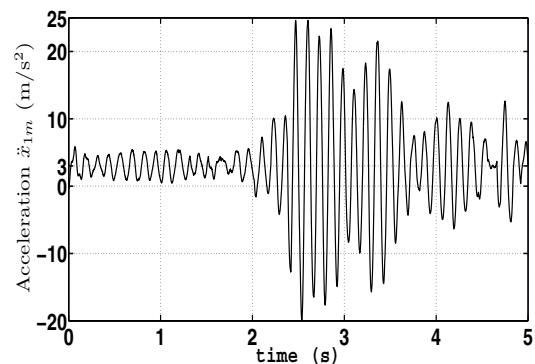


Fig. 4. Measured first floor acceleration \ddot{x}_{1m} .

VI. CONCLUSIONS

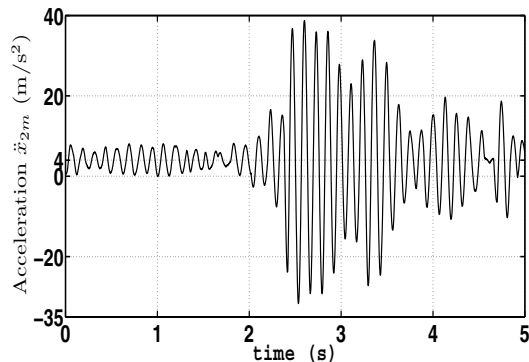
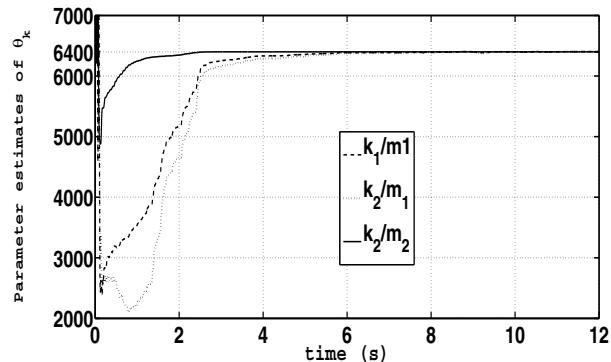
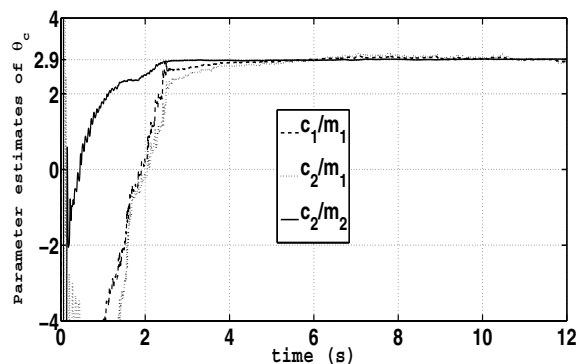
This paper proposed a real-time algorithm that identifies the parameters of a building model using floors and ground acceleration measurements. The proposed approach combine a Least Squares method with forgetting factor and a parametrization obtained by means of high-pass filters and integrals over finite time intervals. The algorithm estimates the parameters even when the acceleration measurements have offsets and noise. The performance observed in the numerical simulation motivates for future experimental tests.

ACKNOWLEDGMENT

Antonio Concha acknowledges the support of CONACYT. The Authors also would like to thank Gerardo Castro, Jesús Meza and Roberto Lagunes for setting up a laboratory prototype that will be used for future experiments.

REFERENCES

- [1] G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis, J. C. Golinval, Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics, In *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, pag. 505-592, 2006.

Fig. 5. Measured second floor acceleration \ddot{x}_{2m} .Fig. 7. Vector θ_k estimated.Fig. 6. Vector θ_c estimated.

- [2] F. J. Rivero Ángeles, Identificación de Estructuras Civiles con Histéresis, Ph.D. Thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Zacatenco, Departamento de Control Automático, 2005.
- [3] M. D. Symans, M. C. Constantinou, Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review, In *Engineering Structures*, Vol. 21, pag. 469-487, 1999.
- [4] L. M. Jansen, S. J. Dyke, Semi-Active Control Strategies for MR Dampers: A Comparative Study, In *Journal of Engineering Mechanics*, 2000.
- [5] R. R. Craig Jr, A. J. Kurdila, State of the Art of Structural Control, In *Journal of Structural Engineering*, 2003.
- [6] Akira Nishitani, Yutaka Inoue, newblock Overview of the application of active/semiactive control to building structures in Japan, In *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 30, pag. 1565-1574, 2001.
- [7] S. J. Dyke, B. F. Spencer Jr., P. Quast, D. C. Kaspari Jr., M. K. Sain, Implementation of an Active Mass Driver Using Acceleration Feedback Control, In *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Vol. 11, pag. 305-323, 1996.
- [8] R. Jiménez, L. Alvarez Icaza, A real-time estimation scheme for buildings with intelligent dissipation devices, In *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, pag. 2427-2440, 2007.
- [9] S. R. Ibrahim, E. C. Mikulcik, A time domain modal vibration test technique, In *Shock and Vibration Bulletin*, Vol. 43, pag. 21-37, 1973.
- [10] J. S. Juang, R.S. Pappa, An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction, In *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 12, pag. 620-627, 1985.
- [11] B. Peeters, H. Van Der Auweraer, P. Guillaume, The PolyMAX frequency domain method: a new standard for modal parameter estimation, In *Shock and Vibration*, Vol. 11, pag. 395-409, 2004.
- [12] R. Y. Tan, W. M. Cheng, System Identification of a non-classically damped linear system, In *Computers & Structures*, Vol. 46, pag. 67-75, 1993.
- [13] H. Lus, R. Betti, R. W. Longman, Identification of linear structural systems using earthquake-induced vibration data, In *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 28, pag. 1449-1467, 1999.
- [14] C. J. Ku, J. E. Cermak, L. S. Chou, Random decrement based method for modal parameter identification of a dynamic system using acceleration responses, In *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 95, pag. 389-410, 2007.
- [15] J. S. Kang, S. K. Park, S. Shin, H. S. Lee, Structural system identification in time domain using measured acceleration, In *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 288, pag. 215-234, 2005.
- [16] S. J. Dyke, B. F. Spencer Jr., M. K. Sain, J. D. Carlson, Experimental Verification of Semi-Active Structural Control Strategies Using Acceleration Feedback, In *the Proceedings of the 3rd International Conference on Motion and Vibration Control*, Vol. 3, pag. 291-323, 296.
- [17] S. Nagarajaiah, Z. Li, Time segmented least squares identification of base isolated buildings, In *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 24, pag. 577-586, 2004.
- [18] JM Angeles, L. Álvarez Icaza, Identificación paramétrica de edificios sujetos a excitación sísmica bidimensional, In *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, Vol. 5, pag. 124-134, 2008.
- [19] H. P. Gavin, R. Morales, K. Reily, Drift-free integrators, In *Review of Scientific Instruments*, Vol. 69, pag. 2171-2175, 1998.
- [20] Anil K. Chopra, Dynamics of Structures: theory and applications to earthquake engineering, In *Prentice Hall*, 2001.
- [21] K. Ogata, Modern Control Engineering, In *Prentice Hall*, 1997.
- [22] S. Sagara, Z. Y. Zhao, Numerical Integration Approach to On-line Identification of Continuous-time Systems in presence of measurement noise, In *8th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, Beijing, PRC, pag. 441-446, 1988.
- [23] S. Sagara, Z. Y. Zhao, Numerical Integration Approach to On-line Identification of Continuous-time Systems, In *Automatica*, Vol. 26, pag. 63-74, 1990.
- [24] Eduard Eitelberg, Continuous-time system representation with exact macro-difference expressions, In *International Journal of Control*, Vol. 47, pag. 1207-1212, 1988.
- [25] H. Garnier, M. Mensler, A. Richard, Continuous-time model identification from sampled data: implementation issues and performance evaluation, In *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 13, pag. 1337-1357, 2003.
- [26] P. C. Young, An instrumental variable method for real-time identification of noisy process, In *Automatica*, Vol. 6, pag. 271-287, 1970.
- [27] ADXL150/ADXL250 Datasheet, Analog Devices, 1998.
- [28] J. J. Slotine, W. Li, Applied Nonlinear Control, In *Prentice Hall*, 1991.
- [29] R. Isermann, M. Münchhof, Identification of Dynamic Systems, In *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2011.
- [30] P. A. Ioannou, J. Sun, Robust Adaptive Control, In *Prentice Hall*, 1996.

Estimation of the parameters of structures using acceleration measurements

Rubén Garrido* and Antonio Concha*

* CINVESTAV, Departamento de Control Automático, 07360 D.F.,
México; e-mail: garrido, aconcha@ctrl.cinvestav.mx

Abstract: This paper proposes a method that estimates the parameters of a seismically excited building. The acceleration measurements of the ground and of each floor are used for identification purposes. It is assumed that these measurements have offsets and noise. The proposed scheme is based on the Recursive Least Squares algorithm with forgetting factor and a parametrization of the structure using integrals over finite time intervals. These filters have finite impulse response, pass the typical frequency bandwidth of structures undergoing earthquake excitation, eliminate the offsets in a small finite time and attenuate the measurement noise. To confirm the effectiveness of the proposed method a simulation of a three-story building is presented. The results show that the estimated parameters converge to the true parameters in a short time.

Keywords: Parametric identification, Least squares, buildings, FIR filter, integrals.

1. INTRODUCTION

The parameter identification of structures has been a topic of investigation in the last three decades [Kerschen et al., 2006]. The parameters that define the vibratory characteristics of a structure are its mass, its damping and its stiffness. The knowledge of these parameters is very important to determine the dynamic properties of the structure such as its natural frequency and vibration period, and as consequence, the response of the structure due to external forces like earthquakes and wind. Moreover, it is necessary the knowledge of these parameters for applying control techniques that attenuate the vibration of the structures undergoing external forces [Spencer Jr. and Nagarajaiah, 2003].

In practically all the cases, acceleration measurements feed the identification algorithms. The reason is that in most cases, it is not possible to measure the absolute displacements and velocities in a structure since it is difficult to establish a static reference. For example, during a seismic event, the foundation to which the structure is attached is moving with the ground and does not provide a static reference [Dyke et al., 1996a], [Jiménez and Icaza, 2007].

Several parameter identification techniques using acceleration measurements have been proposed in the literature. Modal parameter estimation termed *modal analysis* is indubitably the most popular approach to perform the identification of structures [Kerschen et al., 2006]. This method obtains the dynamic characteristics of a structure in the form of modal parameters, namely the natural frequencies, mode shapes and damping ratios. Identification techniques that estimate the modal parameters using acceleration measurements are proposed in [Lus et al., 1999], [Kang et al., 2005] and [Ku et al., 2007], just to mention a few. On the other hand, reference [Dyke et al., 1996b]

carries out the identification of buildings in the frequency domain. In this case, the transfer functions from one of the system inputs to one of the outputs are determined. The inputs are the ground acceleration and the control force applied by a magnetorheological damper (MR), and the outputs include the displacement of the MR damper relative to the structure and the accelerations of the building's floors. Reference [Jiménez and Icaza, 2007] presents an adaptive observer that estimates the parameters, displacements and velocities of buildings during a seismic excitation. The observer uses acceleration measurements of the ground and of each floor, and force measurements of a MR damper employed to attenuate the vibrations of the building. It is important to mention that the majority of the identification techniques presented in this paragraph consider the presence of measurement noise, but none of them consider the presence of offsets in the acceleration measurements. It is well known that the accelerometers usually have an offset voltage in their output. Therefore, there exists a constant difference between the measured and the real acceleration [Gavin et al., 1998].

The aim of this work is to propose an on-line algorithm that identifies the ratio of the parameters corresponding to the mass, damping and stiffness of a building excited by a seismic activity. It is assumed that both the ground acceleration and the acceleration of each floor are available, and these measurements have noise and offsets. The proposed algorithm is based on a parametrization combined with the Recursive Least Square Method with forgetting factor and obtained through manipulations that include: three differentiations with respect to time of the model structure followed by five integrations over a finite time interval. These manipulations eliminate the acceleration offsets and attenuates the measurement noise. The parametrization consist of finite impulse response (FIR) integrals that allow eliminating the acceleration offsets in a very small finite period of time. These offsets can not be eliminated in finite

time by IIR filters as the State Variable Filter [Young, 1970] since they have a infinitely long impulse response. Furthermore, the FIR integrals present other nice features, for example, they are non-recursive and hence cannot become unstable. This is not the case of the IIR filters that can theoretically become unstable because of its recursive structure [Isermann and Münchhof, 2011]. In addition, it has been a general rule of thumb that the FIR filters are more robust against numerical errors (e.g., roundoff errors and coefficient quantization errors) than the IIR filters [Kwon et al., 1999].

The paper has the following structure. Section 2 presents the building model. Section 3 depicts the parametrization obtained using the filters. The identification algorithm is described in Section 4. Section 5 shows some numerical simulation results. The paper ends with some concluding remarks.

2. BUILDING MODEL

Fig. 1 shows the structure considered in this work, which can be idealized as a lumped mass system with n degrees of freedom.

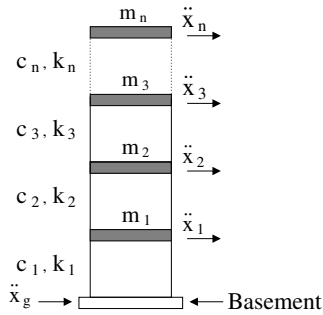


Fig. 1. Structure with n degrees of freedom.

The behavior of this structure can be described by the following linear invariant time model [Chopra, 2001]:

$$M(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

where M , C and K are the mass, damping and stiffness matrices, respectively. The definition of these matrices is the following:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

where the parameters c_i and k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) are respectively the lateral column damping and stiffness between the i th and $(i-1)$ th floor. The components of the vector $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n]^T$ are the corresponding displacements of each floor, measured with respect to the basement. Variables \dot{x} and \ddot{x} are the velocity and the acceleration vectors, respectively. The term \ddot{x}_g represents the absolute ground acceleration induced by the seismic event, finally, $l = [1 \ 1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T \in R^n$.

Assume the following:

- The acceleration measurements of the ground and of each floor are available and have offset disturbances and measurement noise, i.e.,

$$\ddot{x}_m = \ddot{x} + d + \xi \quad (2)$$

$$\ddot{x}_{gm} = \ddot{x}_g + d_g + \xi_g \quad (3)$$

where $\ddot{x}_m = [\ddot{x}_{1m} \ \ddot{x}_{2m} \ \ddot{x}_{3m} \ \cdots \ \ddot{x}_{nm}]^T$ is the measured acceleration vector, \ddot{x}_{gm} is the measured ground acceleration, $d = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ \cdots \ d_n]^T$ and d_g are constant disturbances, $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \cdots \ \xi_n]^T$ and ξ_g are measurement noises.

- The initial conditions $x(0)$ and $\dot{x}(0)$ are zero. This assumption is reasonable because the structure is at rest before an earthquake.

The expression (1) is equivalent to:

$$(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) = -M^{-1}C\dot{x} - M^{-1}Kx \quad (4)$$

The products $M^{-1}C\dot{x}$ and $M^{-1}Kx$ can be parametrized as [Jiménez and Icaza, 2007]:

$$M^{-1}C\dot{x} = \dot{u}\theta_c$$

$$M^{-1}Kx = u\theta_k$$

with

$$\theta_c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ m_1 & m_1 & m_2 & m_2 & \cdots & m_n \end{bmatrix}^T$$

$$\theta_k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ m_1 & m_1 & m_2 & m_2 & \cdots & m_n \end{bmatrix}^T$$

$$u = - \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & x_2 - x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

\dot{u} is the derivative of the matrix u with respect to time.

In consequence, equation (4) can be written as:

$$(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) = \dot{u}\theta_c + u\theta_k \quad (6)$$

3. MODEL PARAMETRIZATION

The Laplace transform of (6) is the following:

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g]) = sU(s)\theta_c + U(s)\theta_k \quad (7)$$

with $U(s) = \mathcal{L}[u]$. The first step for obtaining the parametrization used for the identification algorithm consists in multiplying (7) by s^3 . In the time domain this operation is equivalent to take three times the time derivative with respect to time of the equation (6). It will be shown that this procedure will eliminate the offset from the acceleration signals.

Multiplying (7) by $s^3(s)$ leads to:

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g])s^3 = U(s)s^4\theta_c + U(s)s^3\theta_k \quad (8)$$

The expression (8) is identical to:

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g])s^3 = \mathcal{L}[\ddot{u}]s^2\theta_c + \mathcal{L}[\ddot{u}]s\theta_k \quad (9)$$

where \ddot{u} is the second time derivative of u and is given by:

$$\ddot{u} = - \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 & \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 - \ddot{x}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddot{x}_n - \ddot{x}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Substituting (2) into (10) gives the following relationship

$$\ddot{u} = \ddot{u}_m - D - \sigma \quad (11)$$

where \ddot{u}_m is defined in a similar way as \ddot{u} , but \ddot{u}_m is composed of measured accelerations instead of real accelerations. The definitions of D and σ are the followings:

$$D = - \begin{bmatrix} d_1 & d_1 - d_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_2 - d_1 & d_2 - d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n - d_{n-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\sigma = - \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_1 - \xi_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 - \xi_1 & \xi_2 - \xi_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi_n - \xi_{n-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

The Laplace transform of (11) is given by:

$$\mathcal{L}[\ddot{u}] = \mathcal{L}[\ddot{u}_m] - \frac{1}{s}D - \Sigma(s) \quad (14)$$

where $\Sigma(s) = \mathcal{L}[\sigma]$.

On the other hand, the Laplace transforms of \ddot{x} and \ddot{x}_g in (2) and (3) are given by:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = \mathcal{L}[\ddot{x}_m] - d \frac{1}{s} - \Xi(s) \quad (15)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_g] = \mathcal{L}[\ddot{x}_{gm}] - \frac{d_g}{s} - \Xi_g(s)$$

with $\Xi(s) = \mathcal{L}[\xi]$ and $\Xi_g(s) = \mathcal{L}[\xi_g]$

Substituting (14) and (15) into (9) yields:

$$Z(s)s^3 = \mathcal{L}[\ddot{u}_m]s^2\theta_c + \mathcal{L}[\ddot{u}_m]s\theta_k + R(s) + \Lambda(s) \quad (16)$$

where

$$Z(s) = \mathcal{L}[\ddot{x}_m] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_{gm}] \quad (17)$$

$$R(s) = -D(s\theta_c + \theta_k) + (d + ld_g)s^2 \quad (18)$$

$$\Lambda(s) = -\Sigma(s)(s^2\theta_c + s\theta_k) + (\Xi(s) + l\Xi_g(s))s^3 \quad (19)$$

Define the following expressions in the time domain:

$$z = \mathcal{L}^{-1}[Z(s)], \quad r = \mathcal{L}^{-1}[R(s)], \quad \lambda = \mathcal{L}^{-1}[\Lambda(s)] \quad (20)$$

Therefore, the signals r and λ depend respectively on the offsets and the noise. According to the final value theorem, the steady state value r_{ss} of r is zero since:

$$r_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) = 0$$

Using the definitions in (20), the expression (16) can be written in the time domain as:

$$z^{(3)} = u_m^{(4)}\theta_c + u_m^{(3)}\theta_k + r + \lambda \quad (21)$$

where the superscript represents the i th time derivative of the corresponding variable.

The next step is to integrate the above equation five times over finite time intervals. This operation will allow obtaining terms depending on the measurement variables \ddot{u}_m and z instead of their derivatives, and to attenuate the measurement noise. To do this procedure, it is useful to define the following operator [Sagara and Zhao, 1988], [Sagara and Zhao, 1990], [Eitelberg, 1988], [Garnier et al., 2003]:

$$I_n\{\rho(t)\} = \frac{\rho}{\delta^n} \int_{t-\delta}^t \int_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} \cdots \int_{\tau_{n-1}-\delta}^{\tau_{n-1}} \rho(\tau_n) d\tau_n \cdots d\tau_1 \quad (22)$$

whose Laplace transform is:

$$\mathcal{L}[I_n\{\rho(t)\}] = \rho \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^n \mathcal{L}[\rho(t)], \quad (23)$$

The term $\rho > 0$ is a constant and δ is given by:

$$\delta = lT_s$$

where $l > 0$ is called the length factor and T_s is the sampling period of \ddot{u}_m and z .

Applying the operator $I_5[\cdot]$ to the equation (21) leads to:

$$\chi(t) = \phi_1(t)\theta_k + \phi_2(t)\theta_c + I_5[r(t)] + I_5[\lambda(t)] \quad (24)$$

where

$$\phi_1(t) = I_4 \left\{ \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-1)^j \ddot{u}_m(t - j\delta) \right\} \quad (25)$$

$$\phi_2(t) = I_3 \left\{ \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-1)^j \ddot{u}_m(t - j\delta) \right\} \quad (26)$$

$$\chi(t) = I_2 \left\{ \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (-1)^j z(t - j\delta) \right\} \quad (27)$$

The binomial coefficient used in (25), (26) and (27) is defined by

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

Since the signals \ddot{u}_m and z are sampled, the time-integrals that appear in the equations (25)-(27) are discretized and can be computed using numerical integration techniques such as the Trapezoidal rule or the Simpson's rule [Sagara and Zhao, 1990].

The expression (24) can be rewritten as:

$$\chi(t) = \phi(t)\theta + I_5[r(t)] + I_5[\lambda(t)] \quad (28)$$

where $\phi(t) = [\phi_1(t) \ \phi_2(t)]$ and $\theta = [\theta_k^T \ \theta_c^T]^T$.

The term $I_5[r]$ converges toward zero because r converges to this value. Below is shown that $I_5[r]$ converges to zero at the time $t = 5\delta$.

Using (23) the variable $I_5[r]$ can be expressed in the frequency domain as:

$$\mathcal{L}[I_5[r]] = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^5 R(s) \quad (29)$$

Substituting $R(s)$ from (18) into (29) produces

$$\mathcal{L}[I_5[r]] = -D\theta_k \frac{(1 - e^{-\delta s})^5}{s^5} - D\theta_c \frac{(1 - e^{-\delta s})^5}{s^4} + [d + ld_g] \frac{(1 - e^{-\delta s})^5}{s^3} \quad (30)$$

The equation (30) in the time domain is given by:

$$I_5[r] = -\frac{D\theta_k}{4!} \left[\sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} (-1)^j (t - j\delta)^4 \iota(t - j\delta) \right] - \frac{D\theta_c}{3!} \left[\sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} (-1)^j (t - j\delta)^3 \iota(t - j\delta) \right] + \frac{d + ld_g}{2!} \left[\sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} (-1)^j (t - j\delta)^2 \iota(t - j\delta) \right] \quad (31)$$

where $\iota(t - t_0)$ is the unit step function applied at $t = t_0$. The three summations of (31) that are inside the brackets

are zero at $t = 5\delta$. For instance, the third summation from $t = 5\delta$ to $t = \infty$ is given by:

$$t^2 - 5[t^2 - 2t\delta + \delta^2] + 10[t^2 - 4t\delta + 4\delta^2] - 10[t^2 - 6t\delta + 9\delta^2] + 5[t^2 - 8t\delta + 16\delta^2] - [t^2 - 10t\delta + 25\delta^2] = 0$$

Similarly, the other two summations are zero after $t = 5\delta$. Therefore, $I_5[r]$ converges to zero at $t = 5\delta$.

On the other hand, the next paragraphs describe the frequency domain filters that permit attenuating the term λ depending on the measurement noise.

The variable $I_5[\lambda]$ in (28) can be expressed in the frequency domain as:

$$\mathcal{L}(I_5[\lambda]) = \varrho \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^5 \Lambda(s) \quad (32)$$

Substituting $\Lambda(s)$ from (19) in (32) yields:

$$\mathcal{L}(I_5[\lambda]) = -\Sigma(s)(s^2 \varrho G(s)\theta_c + s \varrho G(s)\theta_k) + (\Xi(s) + l \Xi_g(s))s^3 \varrho G(s) \quad (33)$$

where $G(s)$ is the following fifth order low-pass filter:

$$G(s) = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^5 \quad (34)$$

whose magnitude and cut-off frequency are given by [Sagara and Zhao, 1990], [Garnier et al., 2003]:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\delta^5} \left| \delta \frac{\sin(\pi\omega/\omega_0)}{(\pi\omega/\omega_0)} \right|^5, \quad \omega_c = \frac{2\pi}{\delta}$$

Define the following filters:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= s \varrho G(s), & H_2(s) &= s^2 \varrho G(s) \\ H_3(s) &= s^3 \varrho G(s) \end{aligned} \quad (35)$$

Then, the expression (33) can be rewritten as:

$$\mathcal{L}(I_5[\lambda]) = -\Sigma(s)H_2(s)\theta_c - \Sigma(s)H_1(s)\theta_k + (\Xi(s) + l \Xi_g(s))H_3(s) \quad (36)$$

Thus, the measurement noise is filtered out using the filters H_1 , H_2 and H_3 given in (35). These filters are designed to encompass the frequency band covered by the seismically excited structures in order to keep all relevant information, and to remove the measurement noise [Young, 1970].

Fig. 2 shows the magnitudes of the filters in (35) with respect to the frequency ω , using $\delta = 0.02s$ and $\varrho = 0.025$. It is shown that the filters H_i , $i = 1, 2, 3$ pass frequencies within a certain range, moreover, at the cut-off frequency ω_c of $G(s)$ appears the first sharp decay in the magnitude of these filters. Therefore, the cut-off frequencies of these filters depend on the parameter ω_c . The upper and lower cut-off frequencies of H_1 , H_2 and H_3 are $[\omega_{Hc1} = 122, \omega_{Lc1} = 36]$, $[\omega_{Hc2} = 148, \omega_{Lc2} = 66]$ and $[\omega_{Hc3} = 167, \omega_{Lc3} = 87]$, respectively. Note that the cut-off frequencies ω_{Hci} and ω_{Lci} are the ones at which the Bode gain of the filter H_i is 3 dB below of its maximum value.

3.1 Noise reduction

The noise level in the accelerometers varies directly with the bandwidth of the measurement [ADI, 1998]. As the measurement bandwidth is reduced, the noise drops, improving the signal-to-noise ratio. The bandwidth of the accelerometers can be reduced by adding bandpass filtering like the ones given in (35). The accelerometers output noise

scales with the square root of the measurement bandwidth. This is shown in the following equation [ADI, 1998]:

$$\text{noise (rms)} = \text{noise density} * \sqrt{\text{BW} * 1.6} \quad (37)$$

where BW is the accelerometer bandwidth in rad/s and the noise density is a parameter that is given in the accelerometer datasheet.

In the case of the filters H_1 , H_2 and H_3 shown in the Fig. 2 they have bandwidths of 86, 82 and 80 rad/s , respectively. These bandwidths are simply the difference between the upper and lower cut-off frequencies of the corresponding filter. The noise reduction corresponding to these bandwidths is obtained using equation (37).

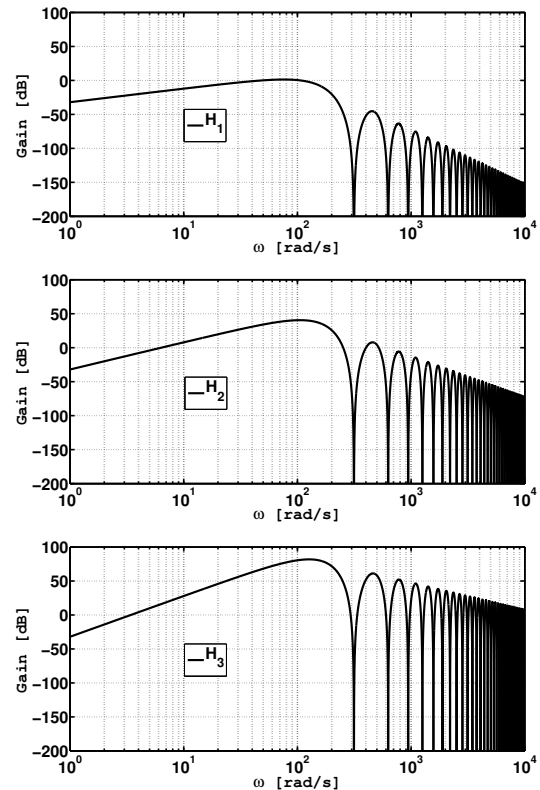


Fig. 2. Bode diagram gain of the filters $H_i(s)$, $i = 1, 2, 3$.

4. IDENTIFICATION ALGORITHM

The equation (28) is also valid for $t = kT_s$; $k = 0, 1, 2, \dots$, where T_s is the sampling period. The above remark allows writing (28) as

$$\chi(t) = \phi(kT_s)\theta + I_5[r(kT_s)] + I_5[\lambda(kT_s)] \quad (38)$$

Omitting the sampling period T_s finally leads to

$$\chi(k) = \phi(k)\theta + I_5[r(k)] + I_5[\lambda(k)] \quad (39)$$

This parametrization allows using the following Recursive Least Squares Method with forgetting factor (LSM-FF) [Aström and Wittenmark, 1989], [Söderström and Stoica, 1989]:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + L(k)\epsilon(k) \\ L(k) &= P(k-1)\phi^T(k)[\beta I + \phi(k)P(k-1)\phi(k)^T]^{-1} \\ P(k) &= [P(k-1) - L(k)\phi(k)P(k-1)]/\beta \end{aligned} \quad (40)$$

where β is a parameter such that $0 < \beta \leq 1$ and is called forgetting factor, $P = P^T > 0$ is the adaptation gain and $\epsilon(k)$ is the output estimation error, defined by

$$\epsilon(k) = \chi(k) - \hat{\chi}(k) \quad (41)$$

where $\chi(k)$ is given in (39) and $\hat{\chi}(k) = \phi(k)\hat{\theta}$.

Substituting $\chi(k)$ from (39) into (41) yields:

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= \chi(k) - \hat{\chi}(k) = [\phi\theta(k) + I_5[r(k)] + I_5[\lambda(k)] - \phi(k)\hat{\theta}] \\ &= -\phi(k)\tilde{\theta} + I_5[r(k)] + I_5[\lambda(k)] \end{aligned} \quad (42)$$

where $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ is the parametric error.

Assume that $I_5[\lambda(k)] = 0$ in (42), thus, convergence of the estimated parameters $\hat{\theta}$ to their true values θ requires that matrix $\phi(k)$ fulfills the following Persistent of Excitation (PE) condition [Söderström and Stoica, 1989]:

$$\alpha_2 I \geq \sum_{\kappa=j}^{j+m} \phi^T(k)\phi(k) \geq \alpha_1 I, \quad \forall j \quad (43)$$

where $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ and m is an integer.

Now consider the presence of the term $I_5[\lambda(k)]$ in (42) and assume that the PE condition is fulfilled, then for favorable signal-to-noise ratios the LSM-FF yields good results [Isermann and Münchhof, 2011]. It means, that the estimated parameters by this method will be very close to the true parameters. The filters shown in (35) are designed to include the frequency band of the structure and to reduce the bandwidth of the accelerometers, as a consequence the signal-to-noise ratio will be satisfactory and the LSM-FF will yield good results.

The term $I_5[r(k)]$ in (42) will only affect the transient response of $\hat{\theta}$ since it converges to zero in finite time. It is important to say that the LSM-FF is used because its adaptation gain is always active, which does not happen with the standard Least Squares. Thus the algorithm will identify θ when the effects of $I_5[r(k)]$ has vanished.

5. NUMERICAL SIMULATIONS

A numerical simulation is presented to examine the performance of the proposed algorithm. The following matrices of a three-story building are used:

$$\begin{aligned} M &= \text{diag}(100, 100, 100) \quad (\text{kg}) \\ C &= \begin{bmatrix} 580 & -290 & 0 \\ -290 & 580 & -290 \\ 0 & -290 & 290 \end{bmatrix} \quad (\text{N/m}) \\ K &= 10^6 \begin{bmatrix} 1.28 & -0.64 & 0 \\ -0.64 & 1.28 & -0.64 \\ 0 & -0.64 & 0.64 \end{bmatrix} \quad (\text{N}\cdot\text{s/m}) \end{aligned}$$

The vectors θ_c and θ_k obtained with these matrices are given by:

$$\begin{aligned} \theta_c &= [2.9, 2.9, 2.9, 2.9, 2.9]^T \\ \theta_k &= 10^3 [6.4, 6.4, 6.4, 6.4, 6.4]^T \end{aligned}$$

The three natural frequencies of the building are $\omega_1=35.608$ rad/s (5.6659 Hz), $\omega_2=99.75$ rad/s (15.87 Hz) and $\omega_3=144$ rad/s (22.918 Hz). The associated damping ratios are $\zeta_1=0.8065\%$, $\zeta_2=2.26\%$ and $\zeta_3=3.265\%$. The trapezoidal numerical integration method allows evaluating the integrals from the regressors $\phi_i, i, j = 1, 2$ and from the signal

χ shown in (25), (26) and (27), respectively. The integrals of these variables are evaluated over a window of length $\delta = lT_s=0.02\text{s}$, where $l = 10$ and $T_s = 0.002$, moreover, the value of ϱ is 0.025. The initial value for the covariance matrix in the Least Squares is $P(0) = 10^3 \text{diag}(1,1,1,1,1)$ and the forgetting factor is set to $\beta = 0.9993$. Fig. 2 shows the Bode plots of the filters that attenuate the measurement noise.

The El Centro (California, 1940) earthquake acceleration is used as a source of seismic excitation data for the building. The amplitude of the excitation is modified to agree with the structure scale. The acceleration measurements of the floors $\ddot{x}_m = [x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}]^T$ and of the ground \ddot{x}_{gm} are polluted with constants disturbances $d = [3, 4, 5]^T$ and $d_g = -2$, respectively. Furthermore, a Gaussian noise with zero mean and variance of 0.01 is added to these measurements. Fig. 3 depicts the measured ground acceleration \ddot{x}_{gm} and Figures 4, 5 and 6 show the measured acceleration of the first, second and third floor, respectively. These Figures are presented in the time interval [0-5] to show the presence of disturbances.

Figures 7 and 8 portrait the time evolution of the parameter estimates of $\hat{\theta}_c$ and $\hat{\theta}_k$, respectively. The initial values are $\hat{\theta}_c(0) = [0, 0, 0, 0, 0]^T$ and $\hat{\theta}_k(0) = 10^3 [1, 1, 1, 1, 1]^T$. It is worth noting that the estimates $\hat{\theta}_c$ and $\hat{\theta}_k$ converges to the true parameters in approximately 4 seconds.

6. CONCLUSION

This paper proposes a real-time algorithm that identifies the parameters of a building model using acceleration measurements of the floors and the ground. The proposed approach combine the Recursive Least Squares method with forgetting factor and a parametrization obtained by means of integrals evaluated over a finite window and that have finite impulse response. The algorithm estimates the parameters even when the acceleration measurements have offsets and noise. The performance observed in the numerical simulation is very good and motivates for future experimental tests.

ACKNOWLEDGEMENTS

Antonio Concha acknowledges the support of CONACYT. The Authors also would like to thank Gerardo Castro, Jesús Meza and Roberto Lagunes for setting up the laboratory prototype that will be used for future experiments.

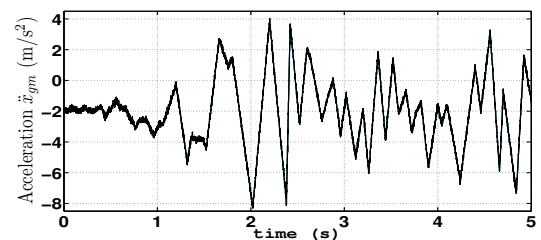


Fig. 3. Measured ground acceleration \ddot{x}_{gm} .

REFERENCES

ADI (1998). ADXL150/ADXL250 Datasheet.

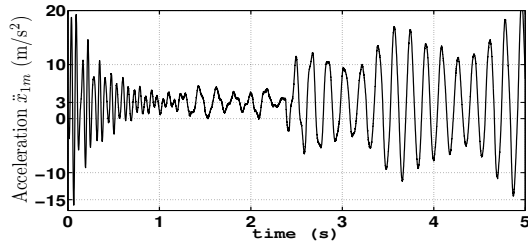


Fig. 4. Measured first floor acceleration \ddot{x}_{1m} .

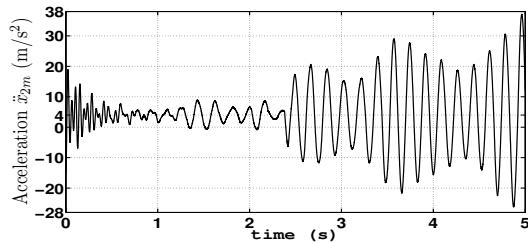


Fig. 5. Measured second floor acceleration \ddot{x}_{2m} .

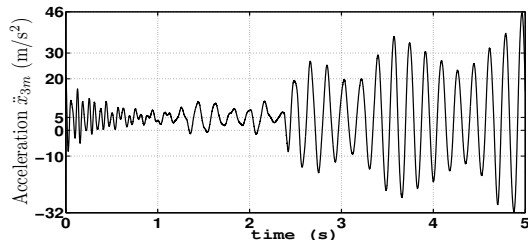


Fig. 6. Measured third floor acceleration \ddot{x}_{3m} .

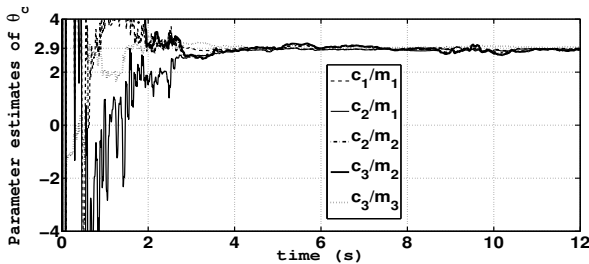


Fig. 7. Vector θ_c estimated.

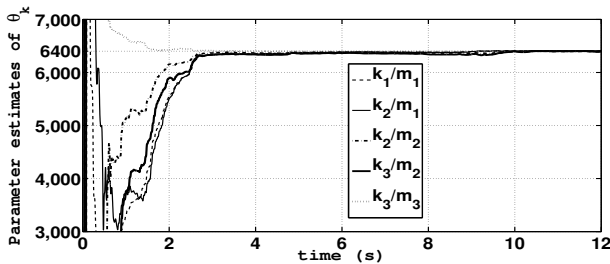


Fig. 8. Vector θ_k estimated.

Aström, K.J. and B. Wittenmark (1989). *Adaptive Control*. AddisonWesley.
 Chopra, A.K. (2001). *Dynamics of Structures: theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall.
 Dyke, S.J., B.F. Spencer Jr., P. Quast, D.C. Kaspari Jr. and M.K. Sain (1996a). Implementation of an Ac-

tive Mass Driver Using Acceleration Feedback Control. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Vol. 11, pag. 305-323.
 Dyke, S.J., B.F. Spencer Jr., M.K. Sain and J.D. Carlson (1996b). Experimental Verification of Semi-Active Structural Control Strategies Using Acceleration Feedback. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Motion and Vibration Control*, Vol. 3, pag. 291-323.
 Eitelberg, E. (1988). Continuous-time system representation with exact macro-difference expressions. *International Journal of Control*, Vol. 47, pag. 1207-1212, 1988.
 Garnier, H., M. Mensler and A. Richard (2003). Continuous-time model identification from sampled data: implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 13, pag. 1337-1357.
 Gavin, H.P., R. Morales and K. Reily (1998). Drift-free integrators. *Review of Scientific Instruments*, Vol. 69, pag. 2171-2175.
 Isermann, R. and M. Mönchhof (2011). *Identification of Dynamic Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
 Jiménez, R. and L. Álvarez Icaza (2007). A real-time estimation scheme for buildings with intelligent dissipation devices. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, pag. 2427-2440.
 Kang, J.S., S.K. Park, S. Shin, H.S. Lee (2005). Structural system identification in time domain using measured acceleration. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 288, pag. 215-234.
 Kerschen, G., K. Worden, A.F. Vakakis and J.C. Golinval (2006). Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, pag. 505-592.
 Ku, C.J., J.E. Cermak and L.S. Chou (2007). Random decrement based method for modal parameter identification of a dynamic system using acceleration responses. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 95, pag. 389-410.
 Kwon, W.H., P.S. Kim and P. Park (1999). A receding horizon Kalman FIR filter for discrete time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, pag. 1787-1791.
 Lus, H., R. Betti and R.W. Longman (1999). Identification of linear structural systems using earthquake-induced vibration data. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 28, pag. 1449-1467.
 Sagara, S. and Z.Y. Zhao (1988). Numerical Integration Approach to On-line Identification of Continuous-time Systems in presence of measurement noise. *8th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, Beijing, PRC, pag. 441-446.
 Sagara, S. and Z. Y. Zhao (1990). Numerical Integration Approach to On-line Identification of Continuous-time Systems. *Automatica*, Vol. 26, pag. 63-74.
 Söderström, T. and P. Stoica (1989). *System Identification*. Prentice Hall.
 Spencer Jr, B.F., and S. Nagarajaiah (2003). State of the Art of Structural Control. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 129, pag. 845-856.
 Young, P.C. (1970). An instrumental variable method for real-time identification of noisy process. *Automatica*, Vol. 6, pag. 271-287.

An Algebraic Recursive Method for Parameter Identification of a Servo Model

Rubén Garrido and Antonio Concha

Abstract—This study proposes a two-step identification method for estimating the four parameters of a nonlinear model of a position-controlled servomechanism. In the first step, the proposed approach, called the algebraic recursive identification method (ARIM), uses a parametrization derived from the operational calculus currently employed in algebraic identification methods (AIM) recently proposed in the literature. The procedure for obtaining this parametrization eliminates the effect of constant disturbances affecting the servomechanism and filters out the high-frequency measurement noise. A recursive least squares algorithm uses the parametrization for estimating the linear part of the servomechanism model, and allows eliminating the singularity problems found in the AIM. The second step uses the parameters obtained in the first step for computing the Coulomb friction coefficient and the constant disturbance acting on the servomechanism. Experimental results on a laboratory prototype allow comparing the results obtained using the AIM and the ARIM.

Index Terms—Algebraic parametrization, least squares, operational calculus, parameter estimation, servomechanism.

I. INTRODUCTION

SERVOMECHANISMS are key elements in a great variety of industrial applications requiring speed and position control. The parameters of a servomechanism model are necessary for the design of high-performance controllers permitting high-precision motion and reducing steady-state tracking errors. Moreover, the identified model is useful for evaluating the servo behavior under specified inputs by means of numerical simulations. A servomechanism model may be identified when it operates in open loop or in closed loop. In this regard, note that the linear model of a position-controlled servomechanism has a transfer function with a pole on the imaginary axis; therefore, the open-loop system is not bounded input bounded output stable. On the other hand, if a position-controlled servomotor drives a mechanical load, for example, a robot arm, then closed-loop identification techniques would be desirable for security reasons since open-loop identification could cause an unbounded motor behavior. A comprehensive study on closed-loop identification is presented in [1] and [2].

Manuscript received November 7, 2011; revised March 15, 2012 and June 6, 2012; accepted July 2, 2012. Date of publication July 30, 2012; date of current version July 11, 2013. Recommended by Technical Editor J. M. Berg. The work of A. Concha was supported by the Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

The authors are with the Department of Automatic Control, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México City 07360, Mexico (e-mail: garrido@ctrl.cinvestav.mx; aconcha@ctrl.cinvestav.mx).

Digital Object Identifier 10.1109/TMECH.2012.2208197

Parameter identification plays a key role in controller design and has been studied from several points of view [3]–[8]. In the particular case of servomechanisms, closed-loop identification approaches of position-controlled servos have been studied in [9]–[15]. The methods presented in [9]–[13] use a relay in the servo feedback loop for producing stable limit cycles in the same way as in the case of industrial processes [16], where the stable limit cycles induced by the relay allow tuning a PID controller. However, tuning the relay controller may be difficult and time consuming. Garrido and Miranda [14] present an output error identification method; in this case, the servomechanism and a two-parameter model are simultaneously controlled through a proportional derivative (PD) controller, which trivially stabilizes the servo. Chen *et al.* [15] present a frequency-domain identification method for servo systems with friction. In this case, binary test signals are used for performing parameter identification and allow decoupling the nonlinear distortions due to Coulomb friction. Closed-loop identification techniques of speed-controlled servos are studied in [17] and [18]. Kara and Eker [17] present an approach for the identification of a dc motor model with the Coulomb friction and dead zone. In this case, a recursive discrete-time least squares algorithm with forgetting factor estimates parameters using a Hammerstein model for the motor. The approach presented in [18] allows identifying a servomotor using chaotic excitation signals. The authors conclude from experiments in a laboratory prototype that the choice of the excitation signals has a fundamental role in the identification procedure. Davila *et al.* [19] present an interesting identification method of mechanical systems via second-order sliding modes that can be applied for estimating the parameters of a dc motor operating in open or in closed loop. Another worth mentioning approach is presented in [20], there, the authors identify the inertia of a second-order model of a dc servomechanism driving a human-assistive system, using the Bode plot obtained from input–output data.

The method presented in [6] and [8] is also worth mentioning; the key idea in these works is the use of an online algebraic identification method based on the operational calculus. This approach, which in the sequel will be termed as the algebraic identification method (AIM), is applied for the parameter identification of a dc motor in [21]–[23]. Sira-Ramírez *et al.* [21] show the AIM applied for identifying a second-order model of a velocity-controlled dc servomotor under constant loads. The authors in [22] and [23] employ the AIM for closed-loop identification of a position-controlled dc motor model. Becedas *et al.* [23] show a comparative study between the traditional recursive least squares method and the AIM. In this last reference, the least squares algorithm uses a parametrization derived from

a discrete-time model of the servo; thus, obtaining the servo parameters estimates requires a transformation from discrete-time to continuous-time. Moreover, the authors perform the comparative study using numerical simulations.

The AIM has several interesting features. First, applying the operational calculus to the model of a linear system eliminates constant disturbances and the effect of the initial conditions; moreover, it also filters-out high-frequency noise. Another attribute of the AIM is its nonasymptotic nature; i.e., compared with standard recursive identification algorithms, convergence of the parameter estimates is accomplished in a short time period. It is also worth remarking that, according to [6], the AIM works with almost all kind of excitation signals. However, a problem is the possibility of singularities in the solutions of the parameter estimates, or these solutions correspond to the ratio of two small numbers, which is not normally desirable [24], [25]. For instance, if the objective of the AIM is to detect parametric faults [26] in a system through deviations of the estimated parameters with respect to the nominal ones, then the abrupt changes of the estimates occurring at the singularity instants would be erroneously detected as faults. Beltran-Carbajal *et al.* [27] report singularity problems when identifying the parameters of a 1 degree-of freedom mass-spring-damper system. Recently, Cortes-Romero *et al.* [28] modified the original AIM by introducing a batch least squares algorithm for estimating the parameters of an induction motor. That approach produces parameter estimates in a short time period, and eliminates the singularity problem if the inverse of a matrix depending on the regressor vector exists [29, pp. 24].

Motivated by the features of the AIM, the goal of this study is to present an identification procedure based on the parametrization obtained using the operational calculus combined with a recursive least squares (RLS) algorithm. This approach exploits the advantages of this parametrization, i.e., it eliminates the effect of constant disturbances allowing to the least squares algorithm to produce unbiased estimates; moreover, using the RLS algorithm does not require the inversion of a matrix; thus, the problem of singularities is completely avoided. Moreover, the computational burden required by the RLS algorithm is smaller compared with its nonrecursive counterpart. The proposed identification method will be called in the sequel the algebraic recursive identification method (ARIM). With respect to the identification of a servomechanism model, the ARIM has the following characteristics.

- 1) It performs closed-loop parameter identification using a two-step procedure, and uses a standard PD controller for closing the loop.
- 2) The first step of the ARIM identifies the linear part of the servomechanism model; it combines a parametrization obtained through the operational calculus and a recursive least squares method; this approach completely eliminates the singularity problems appearing in the AIM.
- 3) The second step of the ARIM employs the parameters obtained in the first step and computes the constant disturbance and the Coulomb friction coefficient.
- 4) It can be stopped at the end of the first step. Thus, the obtained linear model combined with a robust control law

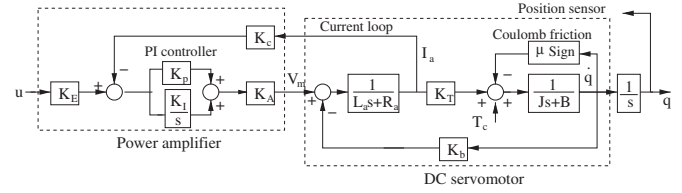


Fig. 1. Servomechanism model.

such as a sliding mode technique [30] or a model-based disturbance attenuation methodology [31] would compensate the Coulomb friction and disturbance torques.

It is worth pointing out that splitting the identification task into two steps allows using excitation signals with simple spectra. Trying to identify the four model parameters at the same time would demand the use of signals with richer spectra, and would imply the application of more aggressive and potentially harmful signals to the servo.

This paper has the following structure. Section II presents the servomechanism model. Section III shows the parametrization obtained using the operational calculus, and describes the way in which the AIM and the ARIM identify the linear part of the servomechanism model. Section IV presents the procedure used for identifying the Coulomb friction and the constant disturbance. Section V points up the method employed for validating the identified model. Section VI depicts the experimental results obtained using both methods. This paper ends with some concluding remarks.

II. SERVOMECHANISM MODEL

The servomechanism consists of a dc servomotor driving a brass disk, a power amplifier, and a position sensor; Fig. 1 depicts its block diagram. The amplifier works in current model, i.e., a proportional integral (PI) controller closes a loop around the amplifier using the armature current I_a .

Variable u is the control voltage, K_E is an input gain of the amplifier, K_P and K_I are, respectively, the proportional and integral gains of the PI current controller, K_C is the current loop gain, K_A is the gain of the H-Bridge inside the amplifier. Variables V_m , R_a , L_a , K_T , K_b , J , and B are, respectively, the motor input voltage, armature resistance, armature inductance, torque constant, back EMF constant, inertia, and viscous friction. The inertia J is the sum of the servomotor inertia J_m , the brass disk inertia J_d and an encoder inertia J_e . Parameter μ defines the Coulomb friction coefficient and the term T_c corresponds to constant disturbances or parasitic constant voltages produced inside the amplifier. Variables q and \dot{q} are, respectively, the servo angular position and velocity. Table I depicts the values of the servomechanism parameters; these values are obtained by means of the servomotor and amplifier datasheets. The parameters associated with the Coulomb friction and the constant disturbance are not available from the servomotor datasheet.

The task of the current loop in Fig. 1 is to keep the armature current I_a proportional to the control voltage u . Since the integral gain K_I of the amplifier has a high value, the servomechanism electric time constant is much smaller than its

TABLE I
VALUES OF THE SERVOMECHANISM PARAMETERS

Constant	Value	Units
B	1.784×10^{-3}	(N)(m)(s)/(rev)
K_E	0.64	
K_p	4.7	
K_I	21276.6	s^{-1}
K_c	0.2	Ω
K_A	12	
R_a	4.9	Ω
L_a	12	mH
K_b	2.6389	V/rev/s
K_T	0.42	(N)(m)/(A)
$K = K_E K_T / K_c$	1.344	(N)(m)/(V)
J_m	2.44×10^{-3}	(kg)(m ²)
J_d	6.867×10^{-3}	(kg)(m ²)
J_e	4.3982×10^{-6}	(kg)(m ²)
$J = J_m + J_d + J_e$	9.3113×10^{-3}	(kg)(m ²)

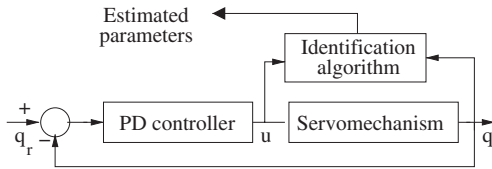


Fig. 2. Closed-loop identification.

mechanical time constant. Therefore, the transient due to the electrical dynamics can be ignored. This simplification permits obtaining the following servomechanism model

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) - c\text{sign}(\dot{q}(t)) + d. \quad (1)$$

The next relationships define the servo model parameters

$$a = \frac{B}{J}, \quad b = \frac{K}{J}, \quad K = \frac{K_E K_T}{K_c} \quad (2)$$

$$c = \frac{\mu}{J}, \quad d = \frac{T_c}{J}. \quad (3)$$

III. FIRST IDENTIFICATION STEP

Fig. 2 shows how the AIM and the ARIM take the signals from the servomechanism to estimate the parameters a and b that correspond to the linear part of the model (1). The PD controller shown below stabilizes the loop without knowledge about the servomechanism parameters

$$u(t) = k_p(q_r(t) - q(t)) - k_d\dot{q}(t). \quad (4)$$

Variable q_r is the reference signal for the closed-loop system.

A. Algebraic Identification Method

In order to apply the AIM, assume that the servomotor rotates only in one direction. This assumption allows writing (1) as follows

$$\ddot{q}(t) = -a\dot{q}(t) + bu(t) + \nu. \quad (5)$$

Note that $\nu = -c + d$ if $\text{sign}(\dot{q}(t)) = 1$ and $\nu = c + d$ if $\text{sign}(\dot{q}(t)) = -1$. Applying the operational calculus [6] to this

last expression yields the following parametrization¹ [22], [23]:

$$z_1(t) = \phi_{11}(t)a + \phi_{12}(t)b \quad (6)$$

$$z_1(t) = t^3 q - 9 \int t^2 q + 18 \int^{(2)} t q - 6 \int^{(3)} q$$

$$\phi_{11}(t) = - \int t^3 q + 6 \int^{(2)} t^2 q - 6 \int^{(3)} t q$$

$$\phi_{12}(t) = \int^{(2)} t^3 u - 3 \int^{(3)} t^2 u. \quad (7)$$

On the other hand, integrating both sides of (6) yields

$$z_2(t) = \phi_{21}(t)a + \phi_{22}(t)b \quad (8)$$

$$z_2(t) = \int_0^t z_1(\tau) d\tau, \quad \phi_{21}(t) = \int_0^t \phi_{11}(\tau) d\tau$$

$$\phi_{22}(t) = \int_0^t \phi_{12}(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Expressions (6) and (8) form the following set of simultaneous equations:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Solving the above system gives the estimates of a and b , i.e.,

$$\hat{a} = \frac{n_{\hat{a}}(t)}{\Phi(t)} = \frac{z_1(t)\phi_{22}(t) - z_2(t)\phi_{12}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)}$$

$$\hat{b} = \frac{n_{\hat{b}}(t)}{\Phi(t)} = \frac{z_2(t)\phi_{11}(t) - z_1(t)\phi_{21}(t)}{\phi_{11}(t)\phi_{22}(t) - \phi_{12}(t)\phi_{21}(t)}. \quad (11)$$

Note that the determinant $\Phi(t)$ is equal to zero for $t = 0$ and the solution has a singularity; moreover, $\Phi(t)$ may be zero at other time instants. According to [6], for $t > 0$, almost any signals u and q are persistent, i.e., these signals satisfy a persistent trajectory condition if they produce $\Phi(t) \neq 0$.

B. Algebraic Recursive Identification Method

The ARIM can use either of the parametrizations (6) or (8). The parametrization (6) is used for no particular reason; furthermore, the integrals appearing in this parametrization are reset every T_r seconds; resetting prevents these integrals from becoming unbounded. Note that (6) is also valid for $t = kh$; $k = 0, 1, 2, \dots$, where h is the sampling period. The aforementioned remark allows writing (6) as

$$z_1(kh) = \phi_{11}(kh)a + \phi_{12}(kh)b. \quad (12)$$

Omitting the sampling period h and using the definitions $\phi(k) = [\phi_{11}(k) \ \phi_{12}(k)]^T$ and $\theta = [a \ b]^T$, finally leads to

$$z_1(k) = \phi^T(k)\theta. \quad (13)$$

¹ $\int^n \sigma(t)$ represents $\int_0^t \int_0^{\gamma_1} \dots \int_0^{\gamma_{n-1}} \sigma(\gamma_n) d\gamma_n \dots d\gamma_2 d\gamma_1$. Moreover, $(\int^1 \sigma(t)) = (\int \sigma(t)) = (\int_0^t \sigma(\gamma_1) d\gamma_1)$.

This parametrization permits using the following standard least squares algorithm [32]:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + L(k)\epsilon(k) \\ L(k) &= \frac{P(k-1)\phi(k)}{1 + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)} \\ P(k) &= P(k-1) - \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1 + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)} \\ \epsilon(k) &= z_1(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k-1).\end{aligned}\quad (14)$$

Vector $\hat{\theta}$ is an estimate of θ , $P(k)$ is the gain matrix, and $\epsilon(k)$ the estimation error. Compared with the AIM, it is clear that the ARIM completely eliminates the singularity problem since it does not stem on the solution (11). Note that the following persistency of excitation (PE) condition given in [32] replaces the persistent trajectory condition given in [6].

Definition 1: A vector $\phi(k) \in R^n$ satisfies a PE condition if

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \left[\sum_{j=1}^k \phi(j)\phi^T(j) \right] = \infty. \quad (15)$$

Here, $\lambda_{\min}[\cdot]$ stands for the smallest eigenvalue of a matrix.

The reset time T_r of the ARIM is a design parameter that needs tuning. Experience shows that the parameter should be selected between 1 and 10 s. With a smaller value of T_r , the integrals in (7) would be evaluated in a small period, and then producing slow converge of the parameter estimates \hat{a} and \hat{b} . Furthermore, T_r should not take large values because if the measurement noise has low-frequency components, they could be greatly amplified thus preventing parameter convergence.

At this point, it is worth noting that the excitation conditions for the AIM and the ARIM are not equivalent. In the case of the AIM, the excitation signal must satisfy a persistent trajectory condition to avoid singularities; in the case of the ARIM, the excitation signal must have a rich spectrum for successful parameter identification. A signal fulfilling the persistent trajectory condition does not necessarily satisfy the PE condition (15), and vice versa.

IV. SECOND IDENTIFICATION STEP

The estimates $\hat{\theta}$ obtained using the AIM and the ARIM described earlier allow computing estimates \hat{c} and \hat{d} of the remaining parameters c and d through the next methodology. Suppose that after a time t_0 , the AIM and the least squares algorithm provide estimates \hat{a} and \hat{b} , thus, define the triangle reference $q_r(t)$ shown in Fig. 3

$$q_r(t) = \begin{cases} m(t - t_0) + q_r(t_0), & \text{if } t \in [t_0, t_0 + \delta] \\ -m[t - (t_0 + 2\delta)] + q_r(t_0) & \text{if } t \in [t_0 + \delta, t_f]. \end{cases} \quad (16)$$

The terms m and $-m$ correspond to the slopes of $q_r(t)$ and $\delta = \frac{t_f - t_0}{2}$. If the gain of the PD controller stabilizing the servomechanism is high enough, then in the time interval $[t_0, t_0 + \delta]$ the equalities $\dot{q}(t) = m$, $\text{sign}(\dot{q}) = 1$, and $\ddot{q} = 0$

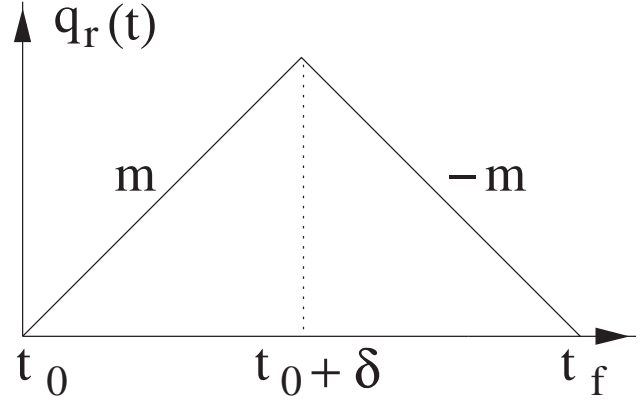


Fig. 3. Reference signal $q_r(t)$.

hold. Therefore, model (1) becomes

$$c - d = -am + bu(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta]. \quad (17)$$

The corresponding estimated model for (17) is

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta]. \quad (18)$$

Note that in (18), the estimates \hat{a} and \hat{b} were previously estimated in step 1.

Equivalently, during the time interval $[t_0 + \delta, t_f]$, the inequalities $\dot{q}(t) = -m$, $\text{sign}(\dot{q}) = -1$, and $\ddot{q} = 0$ hold. Hence, model (1) becomes

$$-c - d = am + bu(t), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f]. \quad (19)$$

The estimated model for this time interval is

$$-\hat{c} - \hat{d} = \hat{a}m + \hat{b}u(t), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f]. \quad (20)$$

Equation (18) is equivalent to

$$\hat{c} - \hat{d} = -\hat{a}m + \hat{b}u(t - \delta), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f]. \quad (21)$$

Since a , b , c , and d are constants so are the control signals $u(t)$ and $u(t - \delta)$ in (17) and (19). Hence, define

$$u_m = u(t - \delta), \quad u_{-m} = u(t), \quad t \in [t_0 + \delta, t_f]. \quad (22)$$

Using this definition and solving for \hat{c} and \hat{d} using (20) and (21) finally yields

$$\begin{aligned}\hat{c} &= -[\hat{a}m + \hat{b}u_m + \hat{d}] \\ \hat{d} &= -\frac{\hat{b}[u_m + u_{-m}]}{2}.\end{aligned}\quad (23)$$

V. MODEL VALIDATION

In order to validate the identified models using the AIM and the ARIM, they are employed for computing a trajectory tracking control law (see Fig. 4). The tracking error $e = r - q$ is sampled p times and every sampled value e_i of e is used for computing the mean square error, which is a measure of the tracking quality

$$E = \sum_{i=1}^p e_i^2.$$

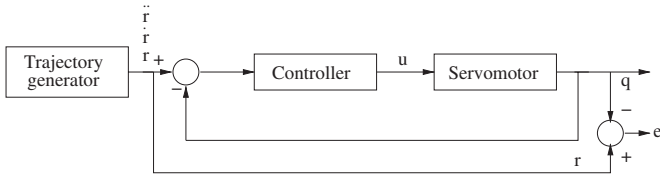


Fig. 4. Trajectory tracking control system.

A. Control Law

The next expression defines the control law applied to the servomechanism

$$u(t) = \frac{1}{\hat{b}} [\lambda_1 \dot{e}(t) + \lambda_2 e(t) + \ddot{r}(t) + \hat{a}\dot{q}(t) + \hat{c}\text{sign}(\dot{q}(t)) - \hat{d}]. \quad (24)$$

Parameters λ_1, λ_2 are positive constants. It is worth noting that the goal of (24) is to counteract the effects of the viscous and Coulomb friction as well as the effect of the disturbance. Adding and subtracting $\hat{b}u$ to $\ddot{e}(t) = \ddot{r}(t) - \ddot{q}(t)$ and using (1) leads to

$$\begin{aligned} \ddot{e}(t) &= \ddot{r}(t) - \ddot{q}(t) + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t) \\ &= \ddot{r}(t) + a\dot{q}(t) - bu(t) + c\text{sign}(\dot{q}(t)) \\ &\quad - d + \hat{b}u(t) - \hat{b}u(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Substituting the control law (24) in this last equation produces the error dynamics

$$\begin{aligned} \ddot{e}(t) + \lambda_1 \dot{e}(t) + \lambda_2 e(t) &= \tilde{\theta}^T \psi(t) \\ \tilde{\theta} &= [\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}]^T = [\hat{a} - a, \hat{b} - b, \hat{c} - c, \hat{d} - d]^T \\ \psi(t) &= [-\dot{q}(t), u(t), -\text{sign}(\dot{q}(t)), 1]^T. \end{aligned} \quad (26)$$

If $\tilde{\theta}$ is equal to zero, then the control law exactly cancels out the friction and the disturbance torques and the error e will have exponential convergence to zero. Otherwise, the tracking error e is nonzero and the mean square error E will be a measure of how close the parametric error $\tilde{\theta}$ is from zero.

VI. EXPERIMENTAL RESULTS

The laboratory prototype (see Fig. 5) consists of a servomotor from Moog, model C34-L80-W40 driven by a Copley Controls power amplifier, model 423, configured in current mode. An optical encoder from BEI, model L15 with 2500 pulses per revolution, allows measuring the servomotor position. The algorithms are coded using the MATLAB/Simulink software platform under the program Wincon from Quanser Consulting, and a Q8 board also from Quanser Consulting performs data acquisition. The electronics associated with the Q8 board multiply by 4 the encoder resolution. The software runs on a Personal Computer using an Intel Core 2 quad processor, and the Q8 board is allocated in a PCI slot inside this computer. A galvanic isolation amplifier allows coupling the data acquisition card to the amplifier.

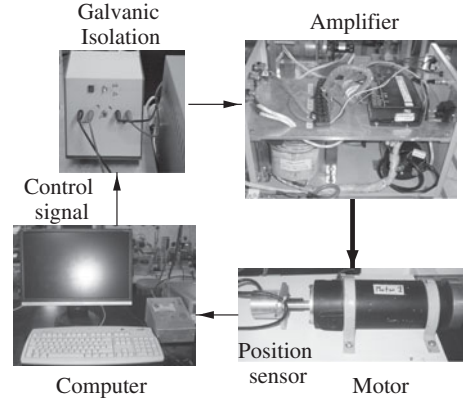
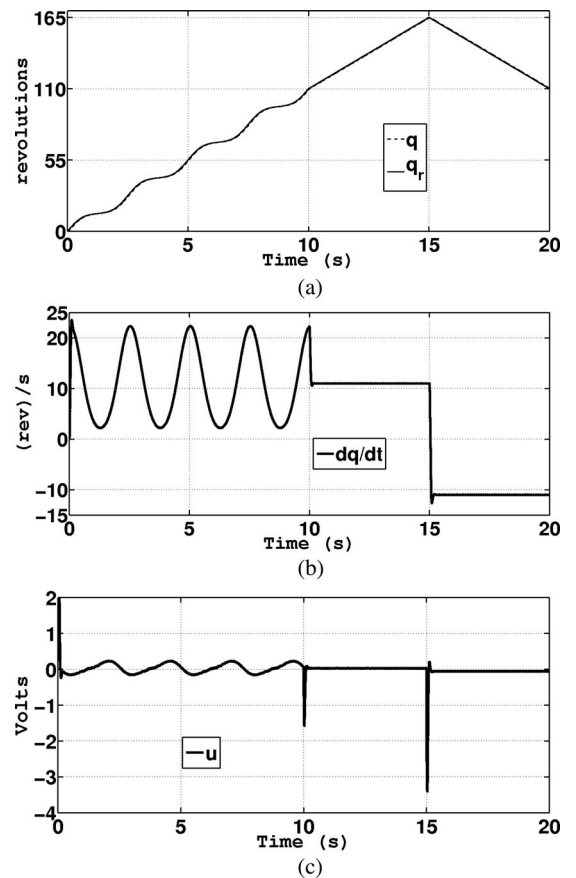


Fig. 5. Laboratory prototype.

Fig. 6. Closed-loop signals. (a) Reference $q_r(t)$ and position $q(t)$. (b) Angular velocity $\dot{q}(t)$. (c) Control signal $u(t)$.

The trapezoidal numerical integration method [33] permits evaluating the integrals appearing in the signals z_i and the regressors ϕ_{ij} , $i, j = 1, 2$ of (6) and (8). The sampling period is fixed to $h = 1$ ms, and the resetting time for the integrals used in the ARIM is set to $T_r = 5$ s. The initial value for the gain matrix in the least squares algorithm of the ARIM is $P(0) = \text{diag}(10\,000, 10\,000)$. The initial values for the least squares estimates are $\hat{a}(0) = 0$, $\hat{b}(0) = 0$.

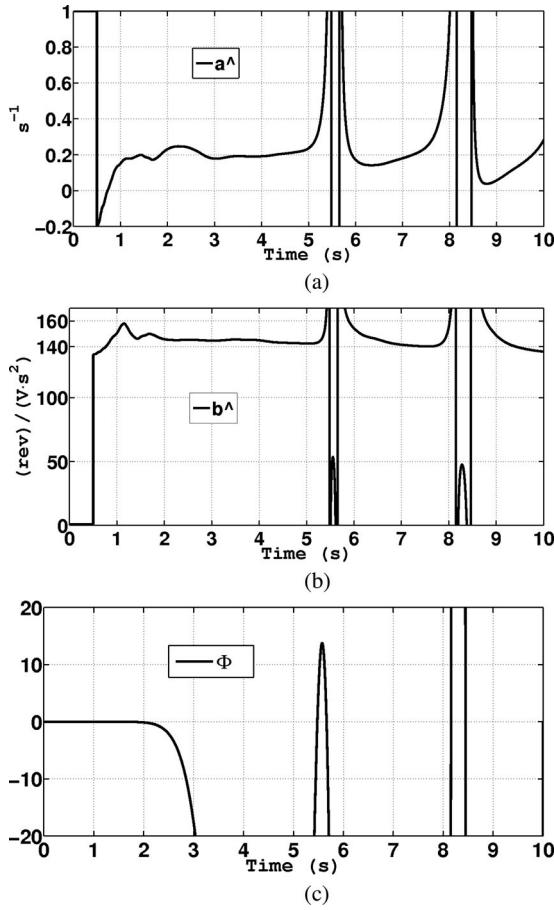


Fig. 7. Parameter estimates produced by the AIM and the term Φ in (11). (a) \hat{a} . (b) \hat{b} . (c) Φ .

The PD controller gains are set to $k_p = 10$ and $k_d = 0.34$. The following linear high-pass filter

$$G(s) = \left(\frac{220s}{s + 220} \right) \quad (27)$$

estimates the servomotor velocity from position measurements. Using the bilinear transformation allows obtaining its corresponding z -transform using the sampling period h defined earlier

$$G(z) = \left(\frac{198.2z - 198.2}{z - 0.8018} \right).$$

In the next paragraphs the notation (rev) will mean motor shaft revolutions.

Fig. 6(a) shows the excitation signal $q_r(t)$ employed during the experiments. The excitation signal for the time interval 0–10 s is $q_r(t) = 11t + 4\sin(0.8\pi t) + 0.25\sin(1.6\pi t)$ and corresponds to the identification of parameters a and b . Note that the term $11t$ is a ramp; this signal renders the Coulomb friction torque constant since the servo rotates only in one direction as assumed in model (5). On the other hand, the two sinusoids $4\sin(0.8\pi t) + 0.25\sin(1.6\pi t)$ have enough spectral richness to identify parameters a and b of the servomechanism model; i.e., these signals fulfill a sufficient richness condition [34] and there-

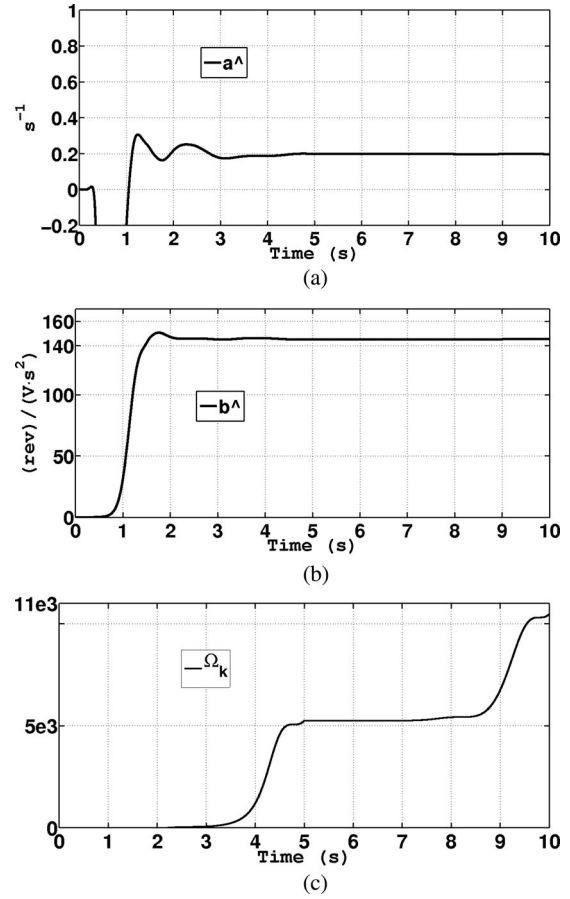


Fig. 8. Parameter estimates obtained by the ARIM and the term Ω_k in (15). (a) \hat{a} . (b) \hat{b} . (c) Ω_k .

fore produce a regressor vector $\phi(k)$ satisfying the PE condition (15), and they are smooth enough to drive the servomotor without producing aggressive control signals. Fig. 6(a) also depicts signal q ; it is worth noting that both signals in this figure superimpose one over another. The aforementioned behavior is due to the relatively high gain employed in the PD controller.

Equation (16) defines the excitation signal for the time interval 10–20 s and corresponds to the identification of parameters c and d . The parameters of this equation are $t_0 = 10$ s, $t_f = 20$ s, $\delta = 5$ s, and $m = 11$. Fig. 6(b) and (c) depicts, respectively, the servomotor speed $\dot{q}(t)$ and the control signal $u(t)$ obtained by applying the excitation signal $q_r(t)$. The control signal values u_m and u_{-m} defined in (22) and used in (23) are, respectively, 0.03 and -0.054 V.

Fig. 7 shows the time evolution of the parameter estimates produced by the AIM. Estimates \hat{a} and \hat{b} were set to 1 in the time interval 0–0.5 s due to the singularity problem of this method in $t = 0$. These estimates converge to constant values in the time interval 3.5–4 s; however, they vary sharply after 4 s and take large values near to the time instants $t = 5.478$ s, $t = 5.6625$ s, $t = 8.156$ s, and $t = 8.4464$ s. This behavior occurs because the determinant $\Phi(t)$ in (11) takes values near to zero at these time instants. Note that \hat{a} and \hat{b} may be free of singularities

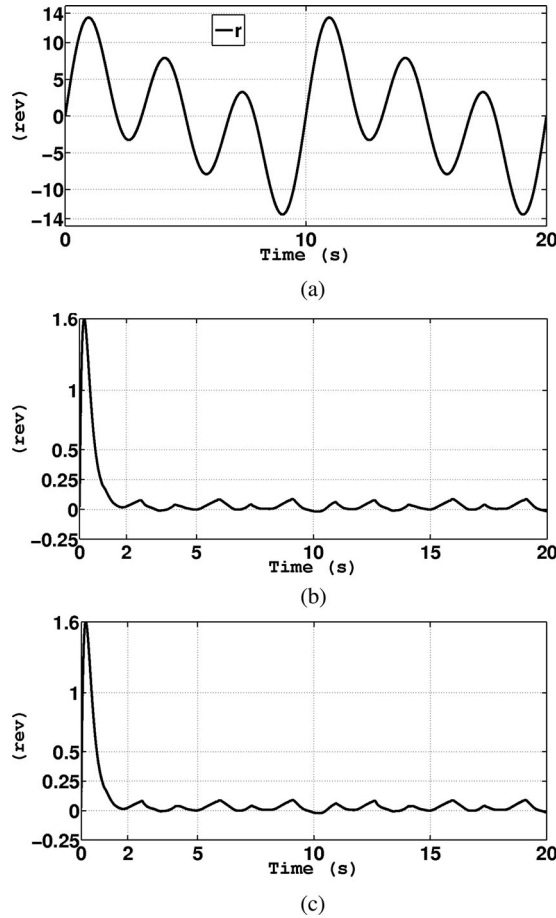


Fig. 9. Tracking errors. (a) Reference r . (b) Tracking error e corresponding to the estimates produced by the AIM. (c) Tracking error e corresponding to the estimates produced by the ARIM.

with others reference signals $q_r(t)$ different to the one shown in Fig. 6(a). The estimates \hat{a} and \hat{b} obtained at $t = 4$ s together with (23) permit obtaining the parameters $\hat{c} = 3.9738$ and $\hat{d} = 1.7388$.

Fig. 8 portrays the time evolution of the parameter estimates produced by the ARIM. The estimates \hat{a} and \hat{b} converge to constant values after 3.5 s. The ARIM estimates \hat{c} and \hat{d} were obtained using the parameters \hat{a} and \hat{b} identified at $t = 4$ s. The values of this estimates are $\hat{c} = 3.9322$ and $\hat{d} = 1.7442$. Fig. 8(c) shows the time evolution of Ω_k for $k = 10\,000$. Note that the regressor vector $\phi(k)$ must fulfill the PE condition (15) for an infinite number k , which is clearly impossible in practice; nonetheless, the behavior depicted in Fig. 8(c) shows that Ω_k grows; this behavior reveals that the gain matrix $P(k)$ decreases then indicating that the parameter estimates converge to the true ones [32].

The AIM and the ARIM identified the servo parameters in the time interval 0–20 s; nevertheless, they may identify these parameters in a smaller time interval. For instance, the estimations of a and b could have been carried out in the time interval 0–4 s instead of the interval 0–10 s. However, in order to show the singularity problem of the AIM these parameters were es-

TABLE II
PARAMETER ESTIMATES

	\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}	E
Nominal parameters	0.1916	144.34	—	—	—
AIM	0.1912	144.9	3.9738	1.7388	4.9280
ARIM	0.1975	145.35	3.9322	1.7442	5.0686

TABLE III
 E OBTAINED WITH THE ESTIMATES OF THE ARIM

\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}	E
0.1975	145.35	0	0	17.1336
0.1975	145.35	0	1.7442	15.8823
0.1975	145.35	3.9322	0	7.5595

timated until 10 s. On the other hand, the estimates \hat{c} and \hat{d} of each method may be obtained in less time by reducing the value of the parameter δ in (16).

The models identified through the AIM and the ARIM are used for computing the control law (24) with $\lambda_1 = 10$ and $\lambda_2 = 25$. Fig. 9(b) depicts the trajectory $r(t)$ used for the models validation, and Fig. 9(c) and (d) shows the tracking error $e(t)$ when the control law is computed using the parameter estimates obtained through the AIM and the ARIM, respectively.

Table II summarizes the estimated parameters by the AIM and the ARIM and shows the mean square error E computed for $p = 18\,000$. The samples of the tracking error $e(t)$ are acquired in the time interval 2–20 s because after 2 s the error $e(t)$ has converged to a neighborhood close to zero. This table also shows the nominal parameters of the servomechanism obtained by substituting the values in Table I into (2). The experimental results indicate a good agreement between the estimated parameters produced by the two methods and the nominal parameters \hat{a} and \hat{b} . Moreover, the mean square error E is similar for both methods.

Finally, the Table III presents the mean square errors E obtained in the next three cases: when $\hat{c} = \hat{d} = 0$, $\hat{d} = 0$, and $\hat{c} = 0$, where the nonzero parameter estimates in each case are the ones identified by the ARIM. Comparing Tables II and III, it is shown that the smaller E is obtained when all the estimated parameters \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , and \hat{d} are used in the control law (24).

VII. CONCLUSION

The main contribution of this work is to propose a two-step identification method called ARIM for estimating a four parameter nonlinear model of a servomechanism. The first step estimates the linear part of the servomechanism model, and combines a parametrization obtained using the Operational Calculus and an RLS algorithm. Using this parametrization eliminates the effect of the initial conditions and constant disturbances; it also filter out high-frequency measurement noise. Moreover, if the measurement noise is zero-mean, the RLS algorithm produces unbiased estimates. On the other hand, using the RLS method allows eliminating the singularity problems associated with standard algebraic identification and nonrecursive least

squares algorithms. The second step uses the estimates obtained from the first step for estimating the constant disturbance and the Coulomb friction coefficient. The ARIM is experimentally compared with an AIM that uses the same parametrization. Experimental results show that at certain time instants, the AIM produces large values of the parameter estimates, a behavior produced when the determinant $\Phi(t)$ used for solving a set of linear equations is close to zero. Aside from the singularity problem, both methods produce estimates similar to those obtained using the technical data of the amplifier and the motor composing the servomechanism. As an alternative validation method, the estimated models are employed for computing a trajectory tracking control law. The experiments indicate that the tracking error using both identified models is very small, which allows concluding that the parameter estimates are close to the real ones. Since the ARIM does not suffer from singularity problems, this feature makes it suitable for tracking of time varying parameters, i.e., when the servomechanism viscous friction and gain changes with time. In this case, the only modification to the basic recursive least squares algorithm is to add resetting to the gain matrix $P(k)$ [32]. In this regard, the AIM could also deal with time-varying parameters by using periodic resetting of the integrals appearing in (6)–(9); nonetheless, the singularities still appear in this case. On the other hand, the ARIM could apply to electromechanical systems such that robot manipulators [35] and exoskeletons [36]; in these cases, the servomotor couples to its load through gearboxes with high reduction ratios, making possible to apply a ramp signal without producing a large movement in the load.

ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank G. Castro and J. Meza for setting up the laboratory prototype, and the anonymous reviewers for their valuable comments.

REFERENCES

- [1] P. Van den Hof, "Closed-loop issues in system identification," *Ann. Rev. Control*, vol. 22, pp. 173–186, Nov. 1998.
- [2] U. Forssell, "Closed-loop identification revisited," *Automatica*, vol. 35, no. 7, pp. 1215–1241, Jul. 1999.
- [3] P. Young, "Parameter estimation for continuous-time models—A survey," *Automatica*, vol. 17, no. 1, pp. 23–39, Jan. 1981.
- [4] N. K. Sinha and G. P. Rao, *Identification of Continuous-Time Systems: Methodology Computer Implementation*. Norwell, MA: Kluwer Academic, 1991.
- [5] H. Garnier, M. Mensler, and A. Richard, "Continuous-time model identification from sampled data: Implementation issues and performance evaluation," *Int. J. Control*, vol. 76, no. 13, pp. 1337–1357, Sep. 2003.
- [6] M. Fliess and H. Sira-Ramírez, "An algebraic framework for linear identification," *ESAIM, Control, Optimization Calculus Variations*, vol. 9, pp. 151–168, Jan. 2003.
- [7] G. P. Rao and H. Unbehauen, "Identification of continuous-time systems," *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 153, no. 2, pp. 185–219, Mar. 2006.
- [8] M. Fliess and H. Sira-Ramírez, "Closed-loop parametric identification for continuous time linear systems via new algebraic techniques," in *Continuous Time Model Identification from Sampled Data*, H. Garnier and L. Wang, Eds., New York: Springer, 2007.
- [9] K. K. Tan, T. H. Lee, S. N. Huang, and X. J. Jiang, "Friction modelling and adaptive compensation using a relay feedback approach," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 48, no. 1, pp. 169–176, Feb. 2001.
- [10] A. Besancon-Voda and P. Blaha, "Describing function approximation of a two-relay system configuration with application to Coulomb friction identification," *Control Eng. Practice*, vol. 10, no. 6, pp. 655–668, Jun. 2002.
- [11] K. K. Tan, Y. Xie, and T. H. Lee, "Automatic friction identification and compensation with a self adapting dual relay," *Int. J. Int. Autom. Soft Comput.*, vol. 9, no. 2, pp. 83–95, 2003.
- [12] M. S. Kim and S. C. Chung, "Friction identification of ball-screw driven servomechanisms through the limit cycle analysis," *Mechatronics*, vol. 16, no. 2, pp. 131–140, Mar. 2006.
- [13] S. L. Chen, K. K. Tan, and S. Huang, "Friction modeling and compensation of servomechanical systems with dual-relay feedback approach," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 17, no. 6, pp. 1295–1305, Nov. 2009.
- [14] R. Garrido and R. Miranda, "Autotuning of a servomechanism using closed loop identification," in *Proc. IEEE 32nd Ann. Conf. Ind. Electron.*, 2006, pp. 258–263.
- [15] Y. Y. Chen, P. Y. Huang, and J. Y. Yen, "Frequency-domain identification algorithms for servo systems with friction," *Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 10, no. 5, pp. 654–664, Sep. 2002.
- [16] K. J. Åström and T. Hagglund, *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. Research Triangle Park, NC: Instrum. Soc. Amer., 1994.
- [17] T. Kara and I. Eker, "Nonlinear closed loop identification of DC motor with load for low speed two-directional operation," *Electr. Eng.*, vol. 86, no. 2, pp. 87–96, 2004.
- [18] C. C. Fuh and H. H. Tsai, "Adaptive parameter identification of servo control systems with noise and high-frequency uncertainties," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 21, no. 3, pp. 1437–1451, Apr. 2007.
- [19] J. Davila, L. Fridman, and A. Poznyak, "Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes," *Int. J. Control*, vol. 79, no. 2, pp. 1251–1262, Feb. 2006.
- [20] K. Kong, J. Bae, and M. Tomizuka, "A compact rotary series elastic actuator for human assistive systems," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 17, no. 2, pp. 288–297, Apr. 2012.
- [21] H. Sira-Ramírez, E. Barrios, and R. Marquez, "Fast adaptive trajectory tracking control for a completely uncertain DC motor via output feedback," in *Proc. 46th IEEE Conf. Decision Control*, 2007, vol. 12, pp. 4197–4202.
- [22] G. Mamani, J. Becedas, V. Feliu-Batle, and H. Sira-Ramírez, "Open and closed-loop algebraic identification method for adaptive control of DC motors," *Int. J. Adaptive Control Signal Process.*, vol. 23, no. 12, pp. 1097–1103, Dec. 2009.
- [23] J. Becedas, G. Mamani, and V. Feliu, "Algebraic parameters identification of DC motors: Methodology and analysis," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 41, no. 10, pp. 1241–1255, Oct. 2010.
- [24] K. S. Narendra, *Stable Adaptive Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [25] P. A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [26] R. Isermann, *Fault-Diagnosis Applications*. New York: Springer-Verlag, 2011.
- [27] F. Beltran-Carbajal, J. Quezada-Andrade, G. Silva-Navarro, and H. Sira-Ramírez, "Active vibration control using on-line algebraic identification of harmonic vibrations," in *Proc. Amer. Control Conf.*, 2005, pp. 4820–4825.
- [28] J. Cortes-Romero, C. Garcia-Rodriguez, A. Luviano-Juarez, and H. Sira-Ramírez, "Algebraic parameter identification for induction motors," in *37th Ann. Conf. IEEE Ind. Electron. Soc.*, Nov. 2011, pp. 1734–1740.
- [29] G. C. Goodwin and R. L. Payne, *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*. New York: Academic, 1977.
- [30] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. New York: Taylor & Francis, 1999.
- [31] B. K. Choi, C. H. Choi, and H. Lim, "Model-based disturbance attenuation for CNC machining centers in cutting process," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 4, no. 2, pp. 157–168, Jun. 1999.
- [32] G. C. Goodwin and K. S. Sin, *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.
- [33] S. Sagara and Z. Y. Zhao, "Numerical integration approach to online identification of continuous-time systems," *Automatica*, vol. 26, no. 1, pp. 63–74, Jan. 1990.
- [34] S. Sastry and M. Bodson, *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [35] J. Yoon, B. Novandy, C. H. Yoon, and K. J. Park, "A 6-DOF gait rehabilitation robot with upper and lower limb connections that allows walking velocity updates on various terrains," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 15, no. 2, pp. 201–215, Apr. 2010.
- [36] J. C. Perry, J. Rosen, and S. Burns, "Upper-limb powered exoskeleton design," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 12, no. 4, pp. 408–417, Aug. 2007.



Rubén Garrido received the B.Eng. degree in electrical engineering from the ESIME-IPN, México City, Mexico, in 1983, the M.Sc. degree in electrical engineering degree from the CINVESTAV-IPN, Mexico City, in 1987, and the Ph.D. degree from the Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, France, in 1993.

He is currently a Professor with the CINVESTAV-IPN, Mexico City. His research interests include robot control, parallel robots, visual servoing, parameter identification, electric, pneumatic, and hydraulic servomechanisms, adaptive control, and neural network control.



Antonio Concha received the B.Eng. degree in electrical engineering from the Universidad de Michoacán, Morelia, Mexico, in 2007, and the M.Sc. degree in automatic control from the CINVESTAV-IPN, Mexico City, Mexico, in 2009, where he is currently working toward the Ph.D. degree in automatic control.

His research interests include parameter and state estimation, electric machine drives, and control systems.