

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL**

**DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO**

# **Control no lineal de un sistema de levitación magnética basado en estimación de parámetros electromagnéticos**

Tesis que presenta

**Ing. David Luviano Cruz**

Para obtener el grado de

**Maestro en ciencias**

En la especialidad de

**Control Automático**

Director de tesis:

**Dr. Wen Yu Liu**

**México, D.F.**

**Julio, 2012**

## AGRADECIMIENTO

El culminar el programa de maestría no podría haber sido posible sin la guía en los momentos más difíciles de Dios, sin lugar a duda sus bendiciones han sido parte medular en mi vida y en la finalización de este proyecto. Por todo, agradezco a Dios siempre estar a mi lado.

Mis padres Gerardo y Norma así como Marlene mi hermana y su familia, han sido el combustible en mi corazón y mente para lograr mis metas, saber que siempre tengo el respaldo de mi familia me ha llevado a motivarme día a día y lograr la superación no importando la distancia y la pérdida de momentos agradables juntos. Por la gran formación moral y el amor incondicional que me han brindado muchas gracias.

El éxito obtenido al terminar el posgrado no hubiera sido posible sin el apoyo, cariño, tiempo y comprensión de mi abuelita Luz María, siempre estuvo allí para mí no importando lo temprano ni tarde fuera el día, ofreciéndome en todo momento lo mejor de sí, mi más sincero y amoroso agradecimiento a ella por brindarme su hogar, sus atenciones y su cariño.

Un agradecimiento muy especial a mis abuelos Miguel (q.e.p.d) y Asunción (q.e.p.d) quienes siempre me dieron su amor y cariño en mi niñez, invitándome siempre a ser una persona de bien y provecho. Al igual que mi abuelo José (q.e.p.d) quien siempre llevara un lugar especial en mi corazón.

Un especial agradecimiento a mis tíos Andrés, Eduardo y particular a mi tío Antonio, quienes siempre me brindaron su apoyo, consejos y hospitalidad, Gracias.

Mis más profundos agradecimientos a mi director de tesis el Dr. Wen que sin su apoyo, guía y solidaridad no hubiese sido posible terminar la presente tesis en tiempo y forma.

Al CONACYT ya que sin su apoyo económico hubiese sido imposible culminar mis estudios de posgrado.

Por último siempre estaré sinceramente agradecido con mi gran amigo Félix el cual me brindo su amistad incondicionalmente durante la maestría, siempre apoyándome humildemente en cualquier duda, siendo el parte importante en mi formación académica.

## Abstract

In this paper we analyze a magnetic levitation system attractive type of one degree of freedom (movement in the vertical plane), these systems are the union of a mechanical subsystem and electrical subsystem. Systems involving magnetic interactions are difficult to model and thus to obtain exact analytical expressions involving phenomena such as magnetization or hysteresis, therefore experimental data from a feed-forward neural network is proposed to estimate the parameter of the electromagnetic force  $C$  which varies depending on the position of the levitated object.

Nonlinear control laws such as fuzzy logic control backstepping and are used in simulation to test the validity of the estimation by neural networks in the mathematical model.

## **Resumen**

En el presente trabajo se analiza un sistema de levitación magnética del tipo atractivo de un grado de libertad (movimiento en el plano vertical) , estos sistemas son la unión de un subsistema mecánico y un subsistema eléctrico. Sistemas que envuelven interacciones magnéticas son complicados de modelar y por consiguiente de obtener expresiones analíticas exactas ya que intervienen fenómenos como magnetización o histéresis, por lo tanto a partir de datos experimentales una red neuronal feed-forward es propuesta para estimar el parámetro de la fuerza electromagnética  $C$  el cual varía en función de la posición del objeto levitado.

Leyes de control no lineales tales como backstepping y control lógico difuso son empleadas en simulación para probar la validez de la estimación por redes neuronales en el modelo matemático.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Motivación . . . . .	6
1.2. Estructura de la tesis . . . . .	7
<b>2. Modelo de un sistema de levitación magnética</b>	<b>9</b>
2.1. Modelo completo . . . . .	11
2.2. Sistema linealizado . . . . .	15
2.3. Estabilidad de puntos de equilibrio . . . . .	17
<b>3. Estimación del parámetro de la fuerza electromagnética</b>	<b>21</b>
3.1. Parámetro de la fuerza electromagnética . . . . .	21
3.2. Estimación con redes neuronales . . . . .	26
<b>4. Linealización exacta</b>	<b>35</b>
4.1. Linealización por medio de retroalimentación completa de estados . .	36
4.2. Ley de control . . . . .	41
4.3. Simulaciones . . . . .	43
<b>5. Control aplicando "backstepping"</b>	<b>49</b>
5.1. Método constructivo . . . . .	51

5.2. Ley de control . . . . .	55
5.3. Simulaciones . . . . .	59
<b>6. Control difuso</b>	<b>65</b>
6.1. Introducción . . . . .	65
6.2. Sistema difuso . . . . .	67
6.3. Simulaciones . . . . .	75
6.3.1. Señal de referencia: Escalón . . . . .	78
6.3.2. Trayectoria Sinusoidal de Referencia . . . . .	81
<b>7. Comparaciones y conclusiones</b>	<b>85</b>
7.1. Comparaciones . . . . .	85
7.2. Conclusiones . . . . .	88
7.3. Trabajo futuro . . . . .	89

# Índice de figuras

- 2.1. Sistema de suspension magnetico . . . . . 10
- 3.1. Minimal control function . . . . . 23
- 3.2. Dependencia entre posicion de equilibrio  $X_0$  y la corriente de equilibrio  
 $I_0$  . . . . . 24
- 3.3. Dependencia entre posicion de equilibrio  $X_0$  y el parametro electro-  
magnetico  $C$  . . . . . 25
- 3.4. Dependencia entre  $X_0, I_0, C$  . . . . . 26
- 3.5. Red neuronal para aproximar el parametro electromagnetico  $C$  . . . . . 27
- 3.6. Funcion de transferencia sigmoide . . . . . 28
- 3.7. Error medio cuadratico de red neuronal . . . . . 33
- 4.1. Respuesta al escalon, Linealizacion exacta por retroalimentacion de  
estado . . . . . 45
- 4.2. Corriente respuesta escalon, linealizacion exacta . . . . . 45
- 4.3. Señal de control para respuesta escalon; linealizacion exacta . . . . . 46
- 4.4. Seguimiento señal senoidal linealizacion exacta . . . . . 47
- 4.5. Corriente electrica seguimiento de señal senoidal linealizacion exacta. 47
- 4.6. Señal de control seguimiento señal senoidal linealizacion exacta . . . . . 48



5.1.	Respuesta al escalon ,Backstepping . . . . .	60
5.2.	Corriente electrica, Respuesta al escalon, Backstepping . . . . .	60
5.3.	Señal de control, Respuesta al Escalon, Backstepping . . . . .	61
5.4.	Respuesta a seguimiento senoidal, Backstepping . . . . .	62
5.5.	Corriente electrica, Referencia Senoidal, Ley de control por Backstepping	62
5.6.	Señal de Control, Referencia Senoidal , Backstepping . . . . .	63
6.1.	Configuracion basica de un controlador logico difuso . . . . .	67
6.2.	Algunas funciones de membresia tipicas . . . . .	71
6.3.	Representacion diagramatica de varias estrategias de desdifusificacion	74
6.4.	Funcion de membresia entrada $e$ al sistema difuso . . . . .	76
6.5.	funcion de membresia entrada $\dot{e}$ al sistema difuso . . . . .	76
6.6.	Funcion de mebresia de salida $V$ del sistema difuso . . . . .	77
6.7.	Superficie de salida del controlador logico difuso . . . . .	79
6.8.	Posicion de la Bola Metalica;Respuesta al escalon; Control Logico Difuso	80
6.9.	Corriente electrica; Respuesta al escalon; Control logico Difuso . . . .	80
6.10.	Señal de Control ; Respuesta al escalon; Control Logico Difuso . . . .	81
6.11.	Posicion de la bola a una referencia senoidal; Control Logico difuso .	82
6.12.	Corriente electrica; Referencia senoidal; Control difuso . . . . .	83
6.13.	Señal de control $u$ a una referencia senoidal ; Control logico difuso . .	83

# Capítulo 1

## Introducción

El fenómeno de la levitación ha fascinado a filósofos a través de los años y ha atraído la atención de científicos en tiempos recientes como un medio de eliminar la fricción o el contacto entre superficies. Las interacciones magnéticas son conocidas desde tiempos antiguos, uno de las mayores inquietudes en el estudio del magnetismo refiere a alcanzar la levitación, es decir, obtener una suspensión estable de un objeto en contra de la fuerza gravitatoria con la ayuda de campos magnéticos.

El estudio de los sistemas de levitación magnética presentan un gran potencial debido al gran número de aplicaciones en lo que son empleados. Estos sistemas tienen variados usos tales como rodamiento sin fricción, trenes de alta velocidad de levitación magnética, levitación de modelos en túneles de viento, amortiguamiento de vibraciones, levitación de metal fundido en hornos de inducción [8]. Estos sistemas tienen dinámicas no lineales que son inestables en lazo abierto por lo tanto una ley de control es requerido para estabilizarlo. Estos sistemas son conocidos como Maglev (Magnetically Levitated System) los cuales pueden ser divididos en dos tipos:

**Tipo repulsión:** En este tipo de sistemas de suspensión electromagnética, la parte

suspendida repele la parte fija. Este tipo de sistema es realizable con materiales de permeabilidad  $\mu$  menores que la unidad (materiales diamagnéticos) y con materiales superconductores con  $\mu = 0$ . Estos sistemas son naturalmente estables con coeficiente de amortiguamiento pequeño [9].

**Tipo atracción:** En este tipo de sistemas la parte suspendida es atraída por la parte fija del sistema (electroimán). La realización de este tipo de sistemas es posible con materiales ferromagnéticos o imanes permanentes. Este tipo de maglev tiene ventajas significativas ya que provee fuerza de atracción a velocidades cero, pero el sistema es naturalmente inestable [9].

## 1.1. Motivación

El sistema de levitación electromagnética (Maglev) es un sistema que debido a la integración de sus elementos, el subsistema de control y el subsistema actuador se convierte en un tema de especial interés para su estudio. El problema de controlar con precisión la altura vertical de una bola de acero ferromagnética mediante la levitación de ella en contra de la fuerza de gravedad es abordado. La levitación se realiza por medio de la fuerza electromagnética generada por la manipulación de la corriente eléctrica a través de la bobina para generar una fuerza electromagnética la cual puede contrarrestar el peso de la bola metálica y mantenerla suspendida en el aire.

Sistemas que envuelven interacciones electromagnéticas son muy difíciles de modelar matemáticamente ya que intervienen fenómenos tales como magnetización, histéresis los cuales generan incertidumbres al momento de desarrollar una expresión analítica del sistema. Por lo anterior y basados en el funcionamiento del sistema de levitación magnética una red neuronal es empleada para aproximar el parámetro de la fuerza

electromagnética  $C$  en el modelo de la planta, el cual de otro modo seria complicado modelar.

Por lo anterior leyes de control que dominen la dinámica del sistema de levitación son necesarios los cuales son dependientes de los estados del sistema y del parámetro electromagnético  $C$ . Comúnmente este tipo de sistemas es linealizado al rededor de un punto de equilibrio y posteriormente se emplean la amplia gama de controladores lineales que existe, por lo tanto, en el presente trabajo se pretende realizar un análisis de la obtención del modelo matemático del sistema así como los parámetros físicos que vienen envueltos en ella, con la finalidad de obtener un modelo matemático simple pero apegado a los fenómenos que lo rigen en la vida real. Una serie de controladores no lineales serán presentado con la finalidad de ampliar el rango de operación del sistema de levitación, al no estar solo limitado a la región cercana al punto de operación, se puede extender al seguimiento de señales que varían en el tiempo.

## 1.2. Estructura de la tesis

El presente trabajo esta organizado de manera que el Capitulo 1 esta enfocado a la introducción del problema planteado y del contexto actual en el cual se desempeña

El capitulo 2 desarrolla desde las leyes fundamentales que rigen al circuito electromagnético el modelo matemático que sera usado en los posteriores capítulos

El capitulo 3 se enfoca al parámetro de la fuerza electromagnética, la manera en que este parámetro varia en función de la posición que la bola levitada guarda y de la corriente consumida por el circuito, se emplea una red neuronal para aproximar el comportamiento no lineal de este parámetro y de esta manera producir leyes de control mas precisas que garanticen un mejor desempeño.

El capitulo 4,5 y 6 desarrollan estrategias de control no lineal para el sistema

de levitación, tales como linealización exacta, Backstepping y el control lógico difuso la cual es una técnica de control no convencional respectivamente, además son presentadas simulaciones y se añaden perturbaciones aditivas del tipo de ruido blanco gaussiano con la idea de asemejar el ruido encontrado en las mediciones experimentales

El capítulo 7 habla de las conclusiones llegadas en la tesis, las limitaciones de ella así como los trabajos a futuro propuestos.

# Capítulo 2

## Modelo de un sistema de levitación magnética

Esta sección esta enfocada al desarrollo del modelo matemático de un sistema de levitación magnética de un grado de libertad, tipo atractivo usado para suspender un objeto ferromagnético distancias predeterminadas. El sistema de levitación magnética considerado es constituido por una bola ferromagnética suspendido en un campo magnético controlado por medio de la manipulación de la diferencia de potencial en el devanado eléctrico. La bola ferromagnética tiene dos grados de libertad, el análisis esta enfocado solo en el movimiento de traslación realizado en el plano vertical, mientras se ignora la rotación de la bola alrededor de su eje.

La bola ferromagnética sufre la influencia de dos fuerzas

- El campo gravitatorio
- La fuerza de sustentación electromagnética  $F_{EM}$  producida por el campo generado por la bobina.

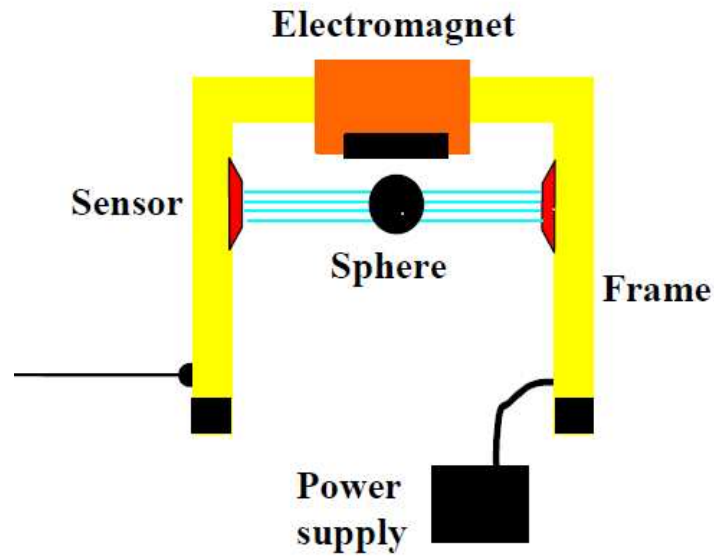


Figura 2.1: Sistema de suspensión magnético

Los sistemas de suspensión magnéticos son sistemas que cuentan con dinámicas no lineales las cuales son inestables en lazo abierto, por lo que una retroalimentación de control es necesario para estabilizarlos [1]. En el modelo matemático propuesto las variables de estado usadas son la posición de la bola, la velocidad de la bola y la corriente que pasa a través del circuito electromagnético. Se puede desarrollar el modelo matemático del sistema de levitación por medio de las ecuaciones diferenciales apropiadas de acuerdo a los principios mecánicos y eléctricos.

## 2.1. Modelo completo

Se considera que la posición  $x$  de la bola se incrementa de manera positiva en dirección hacia abajo del electro magneto. Usando los principios fundamentales dinámicos, la dinámica de la bola ferromagnética expresado mediante la ley de Newton para el equilibrio de fuerzas tiene la siguiente forma no lineal

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = mg - f_e(i, x, t) \quad (2.1)$$

donde

- $m$  = masa del objeto levitado
- $g$  = fuerza de gravedad
- $x(t)$  = Distancia entre el electromagneto y la bola
- $i(t)$  = Corriente eléctrica a través de la bobina

La expresión para el balance energético dentro del sistema

$$dW_e = dW_{mec} + dW_t + dW_m \quad (2.2)$$

donde los términos representan la variación de la energía eléctrica  $dW_e$ , la variación de la energía mecánica  $dW_{mec}$ , la variación de la energía térmica  $dW_t$  y la variación de la energía magnética  $dW_m$ . La variación de la energía magnética cuando el flujo magnético esta cambiando y los cuerpos están moviendo dentro del campo magnético viene dado por:

$$dW_m = i\Phi - f_e dx \quad (2.3)$$

La fuerza de levitación electromagnética puede ser determinada usando los teoremas de fuerzas generalizadas [10]



$$f_e = - \left[ \frac{\partial W_m}{\partial x} \right]_{i=\text{cte.}} \quad (2.4)$$

La energía específica magnética de la bobina es:

$$W_m = \frac{\Phi i(t)}{2} = \frac{L(x, t) i(t)^2}{2} \quad (2.5)$$

$L(x, t)$  es la inductancia del electromagneto, donde es influenciado por el objeto levitado, el cual puede ser determinado por cálculo directo o usando reluctancia o permeabilidad. Las referencias bibliográficas empleadas especifican el hecho que la permeabilidad del entrehierro (la región entre la bobina y el núcleo ferromagnético) corresponde exclusivamente a la zona del polo cuando la superficie polar es mucho más amplia que el espesor.

Determinar analíticamente la fuerza magnética para un sistema de levitación magnética experimental es extremadamente difícil ya que una combinación de electromagneto y un material ferromagnético es usado para el modelo [5]. Por lo tanto, podemos tomar de forma simplificada la inductancia  $L(x)$  como una función no lineal de la posición  $x$  de la bola ferromagnética [2].

$$L(x, t) = L_1 + \frac{L_0 x_0}{x(t)} \quad (2.6)$$

donde

- $x_0$  = posición arbitraria de referencia para la medición de la inductancia
- $L_0$  = Inductancia incremental producida por la bola ferromagnética correspondiente a  $x_0$
- $x(t)$  = Distancia efectiva entre la bola y el electromagneto
- $L_1$  = Inductancia del electromagneto cuando la bola se encuentra alejada tal que su efecto puede ser despreciado

La cual es una aproximación en donde se asume que esta inductancia varia inversamente proporcional con respecto a la posición  $x$  de la bola ferromagnética. Derivando la expresión 2.4

$$f_e(i, x, t) = -\frac{\partial W(i, x, t)}{\partial x} = -\frac{i^2(t)dL(x, t)}{2dx} \quad (2.7)$$

Sustituyendo

$$f_e(i, x, t) = \frac{L_0x_0}{2} \left[ \frac{i(t)}{x(t)} \right]^2 = C \left[ \frac{i(t)}{x(t)} \right]^2 \quad (2.8)$$

donde

$$C = \frac{L_0x_0}{2} \quad (2.9)$$

El cual es un parámetro electromagnético el cual depende del punto de referencia considerado, caracterizado por  $x_0$ . Quedando finalmente

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = mg - C \left[ \frac{i(t)}{x(t)} \right]^2 \quad (2.10)$$

Para la parte eléctrica del sistema se tiene la ley de Kirchhoff [4].

$$e(t) = Ri(t) + \frac{d[L(x, t)i(t)]}{dt} \quad (2.11)$$

donde

$R$  = Resistencia del circuito en Ohm

$e(t)$  = Diferencia de potencial aplicado al circuito eléctrico Volts

$L(x)$  = inductancia como una función de posición de la bola

Recordando:

$$L(x, t) = L_1 + \frac{L_0x_0}{x(t)} \quad (2.12)$$

Usando en la ecuación 2.11 lo anterior tenemos:

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} - L_0x_0 \frac{i(t)}{x^2} \frac{dx}{dt} \quad (2.13)$$

**Definición 1** *El parámetro de la fuerza electromagnética del sistema de levitación magnética es definido como:*

$$C = \frac{L_o x_0}{2} \quad (2.14)$$

donde

$x_0$  = posición arbitraria de referencia para la medición de la inductancia

$L_0$  = Inductancia incremental producida por la bola ferromagnética correspondiente a  $x_0$

Sustituyendo:

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} - 2C \frac{i(t)}{x(t)^2} \frac{dx}{dt} \quad (2.15)$$

Con lo desarrollado en la sección precedente y definiendo

$x_1$  = Posición  $x$

$x_2$  = Velocidad de la bola

$x_3$  = Corriente a través del circuito  $i$

$u$  = Diferencia de potencial aplicado al circuito  $e$

Las ecuaciones del sistema de levitación magnética en el espacio de estados es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{C}{m} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L(x)} x_3 + \frac{2C}{L(x)} \frac{x_2 x_3}{x_1^2} + \frac{u}{L(x)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned}
 L(x) &= \text{Inductancia de la bobina} \\
 g &= \text{Fuerza de gravedad} \\
 C &= \frac{L_0 x_0}{2} \text{ parámetro de la fuerza electromagnética} \\
 m &= \text{Masa de la bola} \\
 R &= \text{Resistencia del circuito}
 \end{aligned}$$

## 2.2. Sistema linealizado

Sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.17}$$

donde  $f : D \rightarrow R^n$  es un mapeo continuamente diferenciable de un dominio  $C \subset R^n$  en  $R^n$  [11]. Suponiendo que el origen  $x = 0$  esta en  $D$  y es un punto de equilibrio para el sistema tal que  $f(0) = 0$ . Por el teorema del valor medio

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x \tag{2.18}$$

donde  $z_i$  es un punto del segmento de línea que conecta  $x$  con el origen. La anterior igualdad es validad para cualquier punto  $x \in D$  tal que la línea de segmento conectando  $x$  con el origen se encuentre enteramente en  $D$ . Ya que  $f(0) = 0$

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x \tag{2.19}$$

De aquí tenemos:

$$f(x) = Ax + g(x) \tag{2.20}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f}{\partial x}(0) \\ g_i(x) &= \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x \end{aligned} \quad (2.21)$$

La función  $g_i(x)$  satisface:

$$|g_i(x)| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\| \quad (2.22)$$

Por continuidad de  $\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]$  tenemos:

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ como } \|x\| \rightarrow 0 \quad (2.23)$$

Lo que sugiere que en una vecindad cercana a el origen se puede aproximar el sistema no lineal  $\dot{x} = f(x)$  por su linealización alrededor del origen

$$\dot{x} = Ax \quad (2.24)$$

donde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \quad (2.25)$$

La aproximación lineal del modelo matemático del sistema de levitación magnética esta dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.26)$$

$$y = Cx \quad (2.27)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2Cx_{3eq}^2}{mx_{1eq}^3} & 0 & -\frac{2Cx_{3eq}}{mx_{1eq}^2} \\ 0 & \frac{2Cx_{3eq}}{Lx_{1eq}^2} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

De acuerdo a la relación 2.30 solo nos interesa como salida del sistema la posición  $x$  de la bola ferromagnética. Donde  $x_{1eq}, x_{3eq}$  satisfacen la condición

$$x_{3eq}^2 = \frac{gm}{C} x_{1eq}^2 \quad (2.31)$$

La variación de  $L(x)$  con la posición de medición de la inductancia  $x_0$  es despreciada ya que segun [4],

$$\frac{L_0 x_0}{x} \quad (2.32)$$

Es normalmente 25 veces mas pequeño que el parámetro  $L_1$  el cual es la inductancia de la bobina sin la presencia de bola ferromagnética.

## 2.3. Estabilidad de puntos de equilibrio

Un importante punto en el estudio de las ecuaciones de estado de un sistema es el concepto de punto de equilibrio. Un punto  $x = x^*$  en el espacio de estados se dice que es un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  si tiene la propiedad que cuando el estado del sistema comienza en  $x^*$ , el sistema se mantendrá en  $x^*$  para tiempo futuro [11]. Los puntos de equilibrios para sistemas autónomos son las raíces reales de la ecuación:

$$f(x) = 0 \quad (2.33)$$

Un punto de equilibrio podría ser aislado o podría ser un continuo de puntos de equilibrio. Analizando las ecuaciones en el espacio de estados para el sistema de levitación magnética (ecuación 2.16).

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= g - \frac{C}{m} \left[ \frac{x_3}{x_1} \right]^2 \\ 0 &= -\frac{R}{L(x)} x_3 + \frac{u}{L(x)} \end{aligned} \tag{2.34}$$

De lo anterior

$$\begin{aligned} gm &= C \left( \frac{x_{3eq}}{X_{1eq}} \right)^2 \\ Rx_{3eq} &= u_{eq} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Por lo tanto los puntos de equilibrio del sistema de levitación magnética ecuación 2.16.

$$x_{2eq} = 0 \tag{2.36}$$

En donde  $x_{1eq}$  y  $x_{3eq}$  cumplen lo siguiente:

$$x_{3eq}^2 = \frac{gm}{C} x_{1eq}^2 \tag{2.37}$$

Lo que señala que el sistema de levitación magnética tiene un continuo de puntos de equilibrio los cuales deben de satisfacer la relación 2.37. El siguiente teorema muestra las condiciones bajo las cuales se puede hallar conclusiones acerca de la estabilidad del origen como un punto de equilibrio para los sistemas no lineales por medio de investigar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema linealizado [11].

**Teorema 1** Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.38)$$

donde  $f : D \rightarrow R^n$  es continuamente diferenciable y  $D$  es una vecindad al origen.

Sea

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} \quad (2.39)$$

Entonces

- El origen es asintóticamente estable si  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  para todos los valores característicos de  $A$
- El origen es inestable si  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$  para uno o mas valores característicos de  $A$

**Prueba 1** Para el sistema de levitación magnético su sistema linealizado referido en las ecuaciones 2.28 ,2.29, 2.30 .Al calcular los valores los valores característicos de la matriz  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2Cx_{3eq}^2}{mx_{1eq}^3} & 0 & -\frac{2Cx_{3eq}}{mx_{1eq}^2} \\ 0 & \frac{2Cx_{3eq}}{Lx_{1eq}^2} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -\frac{2Cx_{3eq}^2}{mx_{1eq}^3} & \lambda & \frac{2Cx_{3eq}}{mx_{1eq}^2} \\ 0 & -\frac{2Cx_{3eq}}{Lx_{1eq}^2} & \lambda + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Al calcular el determinante de  $(\lambda I - A)$

$$\operatorname{Det}(\lambda I - A) = \lambda^3 + \lambda^2 \frac{R}{L} + \lambda \left[ \frac{4Cx_{30}^2}{Lmx_{10}^4} - \frac{2Cx_{30}}{mx_{10}^3} \right] - \frac{2Cx_{30}^2 R}{Lmx_{10}^3} \quad (2.42)$$



Ya que en el presente análisis del sistema de levitación magnética la posición  $x_1$  y la corriente  $x_3$  son siempre positivas, el término

$$\frac{2Cx_{30}^2 R}{Lmx_{10}^3} \quad (2.43)$$

Sera siempre positivo, por lo que si alguno de los coeficientes es cero o negativo ante la presencia de al menos un coeficiente positivo en el polinomio característicos, implica ello que hay una raíz o raíces imaginarias que tiene parte real positiva, en tal caso el sistema no es estable [15]. De lo anterior se demuestra que el sistema de levitación magnética :

- 1) Cuenta con un continuo de puntos de equilibrio.
- 2) Los puntos de equilibrio del sistema de levitación son inestables.

# Capítulo 3

## Estimación del parámetro de la fuerza electromagnética

### 3.1. Parámetro de la fuerza electromagnética

El sistema de levitación magnética considerado es un sistema no lineal, inestable y sobre todo afectado por incertidumbres debido a la falta de conocimientos acerca de alguno de sus parámetros tales como magnetización, histéresis etc. Por lo tanto para lograr la posibilidad de simular y diseñar leyes de control para el sistema, un modelo que sea capaz de capturar el comportamiento real del sistema sería de gran utilidad.

La levitación de la bola ferromagnética es obtenida cuando la fuerza electromagnética cancela la fuerza gravitacional [12],[4] [2]. En ese momento la aceleración de la bola es cero y el movimiento del sistema es descrito por la ecuación:

$$mg = C \left[ \frac{I_0}{X_0} \right]^2 \quad (3.1)$$

La expresión 3.1 indica que el parámetro  $C$  varia de acuerdo a el punto de levitación (punto de equilibrio) el cual es caracterizado por el par  $x_{1eq} = X_0, x_{3eq} = I_0$ . Lo que significa que el parámetro no es constante, incluso si es considerado constante se obtiene una buena aproximación de el modelo para un punto de equilibrio [48],[4]. No obstante este modelo donde se considere el parámetro  $C$  constante no sera un modelo general en una situación donde la levitación de la bola ferromagnética es deseada a varias distancias como en el caso del seguimiento de una señal sinusoidal .

Tomando en cuenta lo descrito anteriormente una solución podría ser desarrollar un modelo matemático para el parámetro electromagnético  $C$ , lo cual es sumamente complicado ya que fenómenos como la histéresis o magnetización son difíciles de modelar.

Para determinar la posición de equilibrio  $X_0$  y la corriente de equilibrio  $I_0$  así como el valor del parámetro  $C$  se usa una aproximación experimental [5],[4],[3] donde la corriente del circuito y posición de la bola son medidas. La bola ferromagnética es localizada en un estante no magnético directamente debajo del electromagneto. La posición exacta es registrada por el sensor de posición, luego una rampa suave de voltaje es aplicado al circuito magnético y la posición resultante y la corriente consumida por el electromagneto es medido [4]. En el primer instante de movimiento de la bola cuando la fuerza magnética es igual a la fuerza de gravedad la posición de la bola  $x(t) = X_0$  y el valor de la corriente  $i(t) = I_0$  es guardado. Estos valores representan diferentes puntos de equilibrio para el sistema de levitación magnética.

Por lo tanto la constante de fuerza  $C$  es determinado usando los valores experimentales para  $X_0, I_0$  y la expresión 3.2 después de la sustitución en los valores medidos para la posición y corriente.

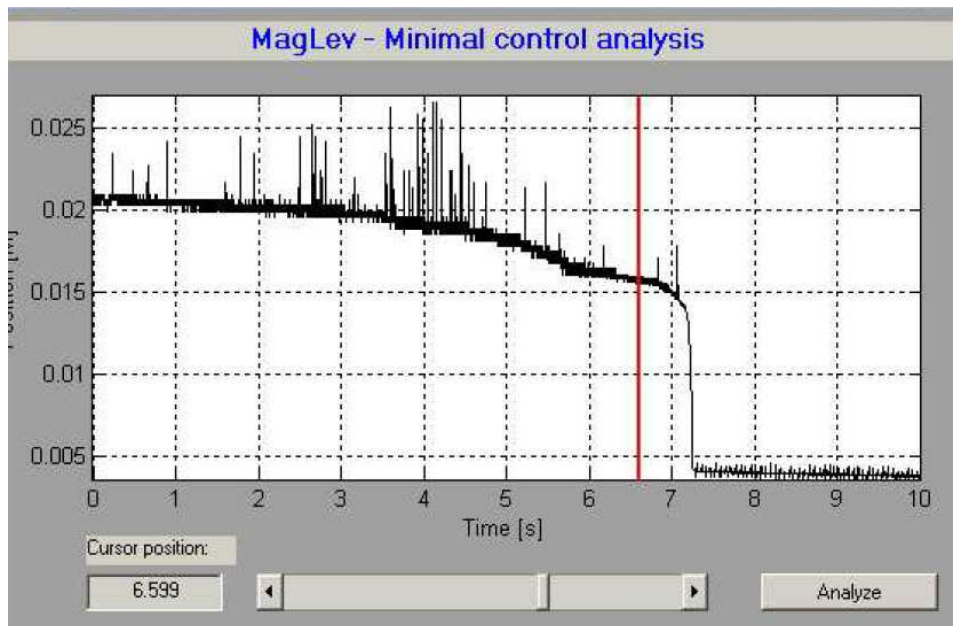


Figura 3.1: Minimal control function

$$C = \frac{mg}{\left(\frac{I_0}{X_0}\right)^2} \quad (3.2)$$

Aprovechando las ventajas del prototipo experimental ITEKO Krakow presente en el laboratorio , podemos utilizar la función "minimal control identification" figura 3.1 para realizar el experimento antes descrito [6].

A continuación se presenta una tabla con una serie de datos experimentales obtenidos para la posición de equilibrio  $X_0$  y la corriente eléctrica de equilibrio  $I_0$ .

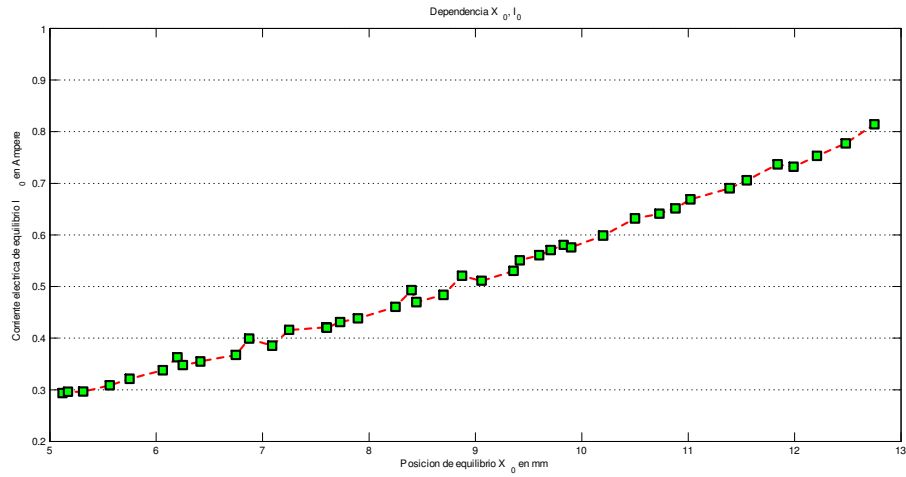


Figura 3.2: Dependencia entre posición de equilibrio  $X_0$  y la corriente de equilibrio  $I_0$

Corriente de equilibrio $I_0$ Amp	Posición de equilibrio $X_0$ mm.	Parámetro $C \frac{Nm^2}{A^2} 10^{-5}$
0,2936	5,12	2,9866
0,2961	5,17	2,9933
0,3214	5,75	3,1421
0,3547	6,41	3,2133
0,3991	6,87	2,914
0,4384	7,89	3,185
0,493	8,41	3,1702
...	...	...

Basados en los datos obtenidos de manera experimental se observa una dependencia lineal entre la posición de equilibrio de la bola  $X_0$  y la corriente de equilibrio  $I_0$  como lo muestra la figura 3.2.

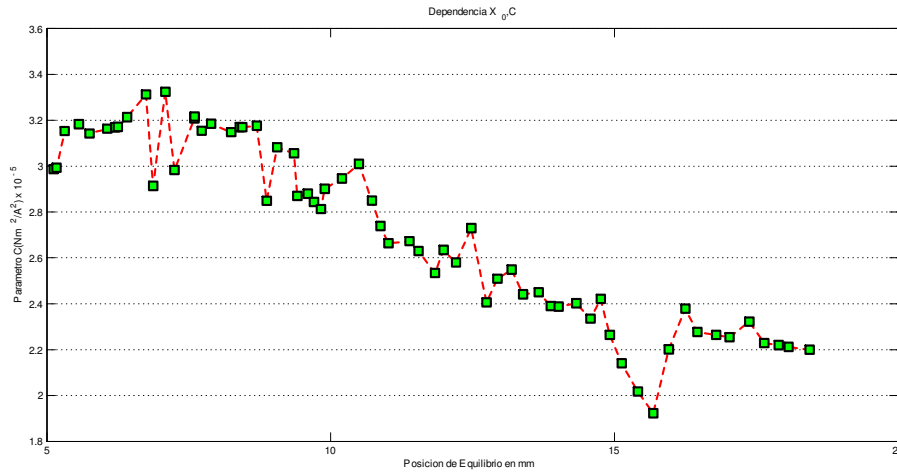


Figura 3.3: Dependencia entre posición de equilibrio  $X_0$  y el parámetro electromagnético  $C$

Los valores experimentales para  $X_0, I_0, C$  representados por la figura 3.3 indica que el valor del parámetro  $C$  en el modelo matemático del levitador magnético no puede ser considerado constante ya que para cada punto caracterizado por el par  $X_0, I_0$  donde la fuerza electromagnética vence a la fuerza gravitacional toma diferentes valores.

El parámetro electromagnético  $C$  representa una simplificación en la definición del modelo matemático del sistema de levitación magnética, ya que encontrar una expresión analítica para este parámetro es difícil, la dificultad se centra en modelar una serie de fenómenos no lineales tales como: la magnetización de la bola ferromagnética, histéresis, campos magnéticos etc.[48],[1].

La figura 3.3 muestra que el parámetro electromagnético  $C$  obtenido para un específico punto de equilibrio no provee una adecuada descripción de el sistema fuera de la considerada zona lineal.

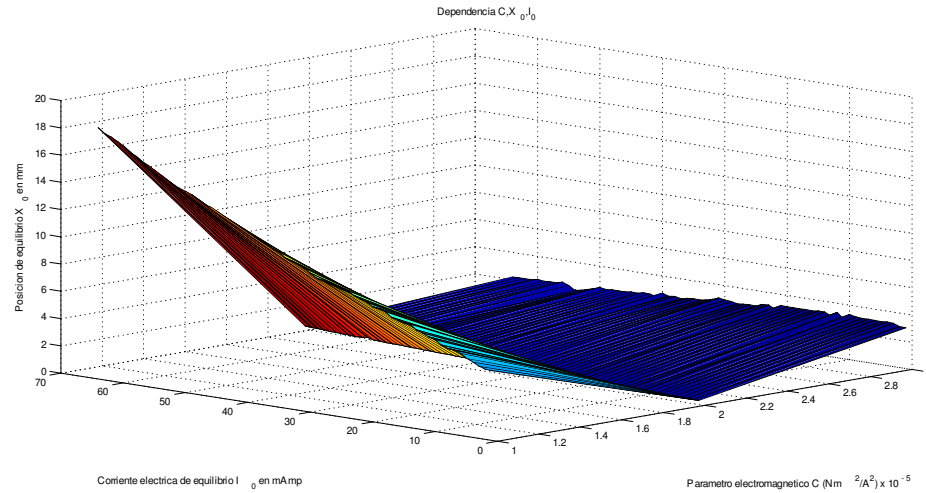


Figura 3.4: Dependencia entre  $X_0$ ,  $I_0$ ,  $C$

## 3.2. Estimación con redes neuronales

Con la intención de capturar el comportamiento real del parámetro electromagnético  $C$  en el modelo del sistema de levitación magnética. Se introduce una red neuronal capaz de proporcionar una aproximación a este parámetro el cual será entrenado usando datos experimentales obtenidos [4],[7].

**Definición 2** *Una red neuronal es un procesador paralelo distribuido compuesto de unidades simples de procesamiento, las cuales son propensas por naturaleza a guardar conocimiento experimental y hacerlo este disponible para su uso.*

La red neuronal empleada para la aproximación del parámetro electromagnético  $C$  es una red del tipo feed-forward que cuenta con 2 entradas, 12 neuronas en la capa oculta y una neurona en la capa de salida como lo muestra la figura 3.5

La función de activación para las neuronas en la capa oculta es la función de transferencia sigmoidea figura 3.6 :

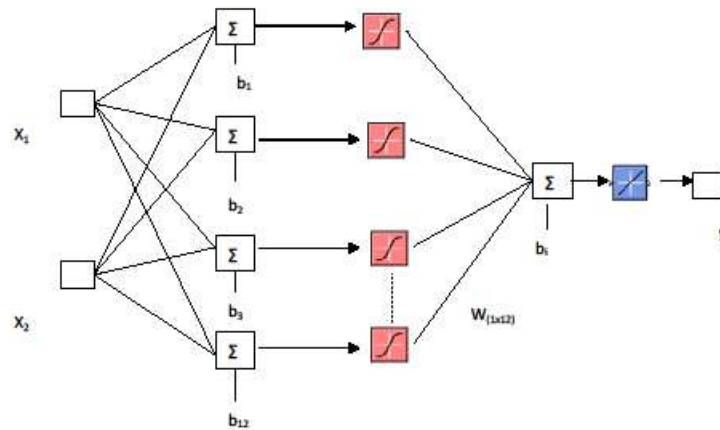


Figura 3.5: Red neuronal para aproximar el parametro electromagnetico  $C$

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{-ax}} \quad (3.3)$$

La cual es la mas común función de activación usada en la construcción de redes neuronales artificiales .La cual define una función estrictamente creciente que exhibe un gran balance entre un comportamiento lineal y no lineal. El valor  $a$  es el parámetro de pendiente de la función sigmoidea, variando el parámetro  $a$  se obtienen funciones sigmoideas de diferentes pendientes. En el limite conforme el parámetro de pendiente  $a$  se acerca al infinito la función sigmoidea se aproxima a una función umbral (threshold)[13],[14].Es importante hacer notar que la función sigmoidea es diferenciable mientras que la función umbral no lo es.

Para la neurona de salida de le red neuronal es usada una función lineal, la cual es común en para funciones de ajuste (function fitting):

$$y = x \quad (3.4)$$



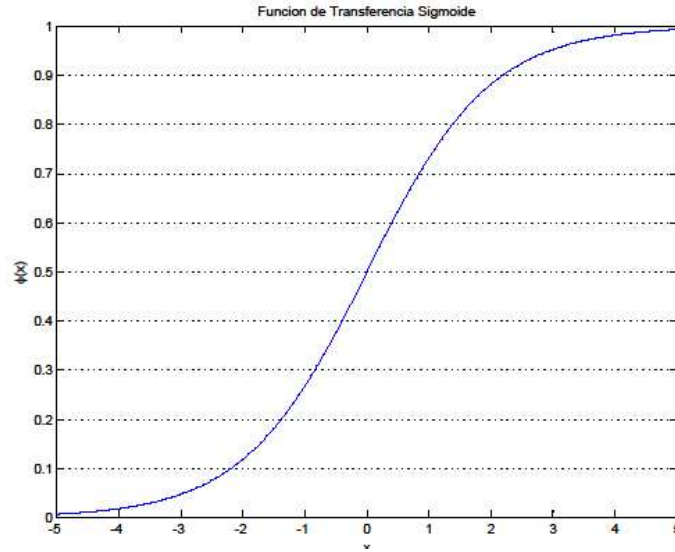


Figura 3.6: Funcion de transferencia sigmoide

Las dos entradas de la red neuronal artificial representan la posición de la bola ferromagnética y la corriente eléctrica a través de la bobina del electromagneto. Cuando la levitación de la bola ocurre estos valores coinciden con los valores para la posición de equilibrio y la corriente eléctrica de equilibrio  $X_0, I_0$

$$mg = C \left[ \frac{I_0}{X_0} \right]^2 \quad (3.5)$$

Las entradas a la red neuronal artificial:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

La salida de la red neuronal representa la aproximación del parámetro electromagnético  $C$ . Este valor es determinado de acuerdo [13, 14, 50].

$$\hat{C} = W_i [\varphi (W_a X + B_a)] + b_i \quad (3.7)$$

Donde

$\hat{C}$  = Salida de la red neuronal, aproximación del parámetro  $C$

$X$  = Vector de entrada de dimensión  $2 \times 1$

$W_a$  = Matriz de dimensión  $12 \times 2$  que contiene los pesos de la capa oculta

$B_a$  = Vector de offsets para la capa oculta  $12 \times 1$

$W_i$  = Matriz de dimensión  $1 \times 12$  de los pesos de la capa de salida

$b_i$  = Offset de la neurona de salida  $1 \times 1$

El algoritmo de entrenamiento Levenberg-Marquadt Backpropagation fue usado en la red neuronal para la aproximación del parámetro electromagnético  $C$  el cual asegura rápida convergencia. El algoritmo Levenberg-Marquadt es una aproximación al método de Newton [13, 14, 50].

**Definición 3** *El error de estimación es definido como:*

$$e_i = C - \hat{C} \quad (3.8)$$

donde:

$C$  = Salida deseada

$\hat{C}$  = Salida de la red neuronal, aproximación del parámetro  $C$

Las actualizaciones de los pesos viene dado por

$$\begin{aligned} W_i(k+1) &= W_i(k) - [J^T(k)J(k) + \mu I]^{-1} J^T(k) + e_i(k) \\ W_a(k+1) &= W_a(k) - [J^T(k)J(k) + \mu I]^{-1} J^T(k) + e_i(k) \\ B_a(k+1) &= B_a(k) - [J^T(k)J(k) + \mu I]^{-1} J^T(k) + e_i(k) \\ b_i(k+1) &= b_i(k) - [J^T(k)J(k) + \mu I]^{-1} J^T(k) + e_i(k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $J(X)$  es la matriz Jacobiana.

Teniendo una función  $V(x)$  el cual se quiere minimizar con respecto a el parámetro  $x$  el método de Newton sería:

$$\Delta X = - [\Delta^2 V(x)]^{-1} \Delta V(x) \quad (3.10)$$

Donde  $\Delta^2 V(x)$  es el Hessiano de la matriz y  $\Delta V(x)$  es el gradiente. Asumiendo que  $V(x)$  es una suma de funciones cuadradas

$$V(x) = \sum_{i=1}^N e_i^2(x) = e_i^T e_i \quad (3.11)$$

La tarea de la red neuronal es aprender asociaciones entre un conjunto específico de pares de entradas-salidas  $(p_1, t_1), (p_2, t_2), \dots, (p_Q, t_Q)$ . El índice de desempeño de la red neuronal es

$$V = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q (t_q - a_q^M)^T (t_q - a_q^M) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q e_q^T e_q \quad (3.12)$$

donde  $a_q^M$  es la salida de la red neuronal cuando la  $q$ -ésima entrada  $p_q$  es presentada y  $e_q = t_q - a_q^M$  es el error de la  $q$ -ésima entrada.

$$\Delta V(x) = J^T(x) e(x) \quad (3.13)$$

$$\Delta^2 V(x) = J^T(x) J(x) + S(x)$$

donde  $J(X)$  es la matriz Jacobiana

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial e_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial e_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial e_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial e_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial e_2(x)}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial e_N(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial e_N(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial e_N(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$S(x) = \sum_{i=1}^N e_i(x) \Delta^2 e_i(x) \quad (3.14)$$

Para el método Gauss-Newton es asumido que  $S(x) \approx 0$  y la ley de actualización se convierte en [13, 50] :

$$\Delta x = [J^T(x)J(x)]^{-1} J^T(x)e(x) \quad (3.15)$$

Al usar la modificación Levenberg-Marquardt a el método Gauss-Newton :

$$\Delta x = [J^T(x)J(x) + \mu I]^{-1} J^T(x)e(x) \quad (3.16)$$

El parámetro  $\mu$  es multiplicado por algún factor  $\beta$  cuando en un paso resulte en un aumento de la función  $V(x)$  que queremos minimizar. Cuando un paso reduce  $V(x)$  entonces  $\mu$  es dividido por  $\beta$ . Para el problema de ajuste de una curva por medio de una red neuronal los términos de la matriz Jacobiana puede ser calculado por medio de una modificación al algoritmo backpropagation.

La red neuronal para calcular la aproximación del parámetro electromagnético  $C$  fue entrenada con una serie de valores obtenidos de manera experimental para  $X_0, I_0, C$  , los cuales fueron determinados cuando los puntos de equilibrio fueron alcanzados segun la ecuación 3.1, como se observa en la tabla 3.1.

La función  $V(x)$  que se busco minimizar fue el error de entrenamiento definido como el error medio cuadrático entre la salida de la red neuronal y la salida deseada figura 3.7

La certeza de la red neuronal fue comprobada usando otros valores experimentales para el parámetro electromagnético  $C$  los cuales fueron comparados con la salida de la red neuronal como se observa en la tabla 3.2.

Corriente de equilibrio $I_0$ Amp	Posición de Equilibrio $X_0$ en mm	Parámetro C $\frac{Nm^2}{A^2} 10^{-5}$
0.2936	5.12	2.9866
0.2961	5.17	2.9933
0.2965	5.3125	3.1533
0.3089	5.5625	3.1833
0.3214	5.75	3.1421
0.3378	6.0625	3.163
0.363	6.212	3.1697
0.3478	6.251	3.1712
0.3547	6.41	3.2133
0.3991	6.87	2.914
0.4384	7.89	3.185
0.493	8.41	3.1702
...	...	...

Cuadro 3.1: Datos de entrenamiento usado en la red neuronal

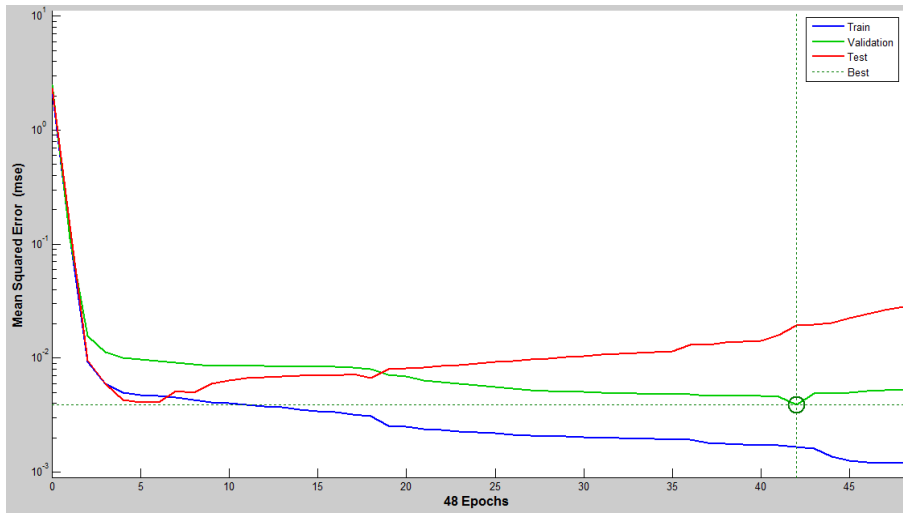


Figura 3.7: Error medio cuadratico de red neuronal

Corriente $I_0$ Amp	Posición $X_0$ en mm	C Objetivo $10^{-5}$	C Salida NN $10^{-5}$
0.3647	7.15	3.774	3.710
0.6067	10.3	2.83	2.855
1.027	15.77	2.316	2.28
1.07	16.33	2.288	2.261
1.114	16.97	2.261	2.259
1.164	17.55	2.234	2.244
1.214	18.28	2.209	2.199
..	..	..	..

Cuadro 3.2: Validacion de red neuronal



# Capítulo 4

## Linealización exacta

Los sistemas de levitación magnética (Maglev) cuentan con dinámicas no lineales los cuales son inestables en lazo abierto, por lo tanto, una ley de control es requerido para estabilizar al sistema, la mayoría de las leyes de control generadas para este tipo de sistemas han sido diseñadas utilizando técnicas de control lineal basados en un modelo lineal aproximado encontrado perturbando la dinámica del sistema cerca de un deseado punto de operación (punto de equilibrio)[4, 8] ,ya que el modelo lineal del sistema es valido solo en una pequeña vecindad a el punto de equilibrio la resultante ley de control lineal se espera que funcione adecuadamente en dicha vecindad al punto de operación.

La estrategia de control antes descrita es ampliamente usada ya que es relativamente fácil el diseñar un controlador lineal para estabilizar el modelo lineal del sistema y por ende el modelo no linealizado en una vecindad del punto de operación. Sin embargo, esta metodología tiene algunos inconvenientes tales como si una perturbación actúa sobre el sistema este desvía relativamente lejos del punto de operación y se puede volver inestable. Además los controladores lineales necesitan algún tipo



de procedimiento de sintonización para cambiar los puntos de operación. Por lo tanto es una importante tarea diseñar controladores no lineales de gran rendimiento para manipular la posición del objeto levitado.

Nuestro interés en esta tesis es presentar técnicas de control no lineal para el sistema de levitación magnética tomando como premisa que todos los estados del sistema (posición, velocidad y corriente) están disponibles, dichos controladores no lineales tales como linealización exacta por retroalimentación, backstepping, modos deslizantes y técnicas difusas son utilizados para la regulación o seguimiento en la altura de la bola metálica levitada por medio de un electromagneto, tomando como señales de referencia escalones o señales sinusoidales

## 4.1. Linealización por medio de retroalimentación completa de estados

En la técnica de control por medio de linealización exacta se aprovecha que al modelo matemático del sistema de levitación magnética existe un difeomorfismo  $T : D \rightarrow R^3$  que contiene al origen y un cambio de variables  $z = T(x)$  tal que transforma el modelo no lineal en la forma  $\dot{z} = Az + B\gamma(x)[u - \alpha(x)]$ , de esta manera el sistema se linealiza de manera exacta en un modelo lineal observable [11].

**Definición 4** [11] *Un sistema no lineal*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

donde  $f : D \rightarrow R^n$  y  $g : D \rightarrow R^{n \times p}$  son suficientemente suaves en un dominio  $D \subset R^n$ , se dice que es linealizable por retroalimentación de estado si existe un difeomorfismo  $T : D \rightarrow R^n$  tal que  $D_z = T(D)$  contiene el origen y el cambio de

variables  $z = T(x)$  transforma el sistema (4.1) en la forma

$$z = Ax + B\gamma(x) [u - \alpha(x)]$$

con el par  $A, B$  controlable y  $\gamma(x)$  no singular para toda  $x \in D$ .

Cuando un cambio de variables  $z = T(x)$  es usado para transformar la ecuación de estado desde las coordenadas  $x$  a las coordenadas  $z$ , el mapeo  $T$  debe de ser invertible, debe de existir un mapeo inverso  $T^{-1}(z)$  para toda  $z \in T(D)$  donde  $D$  es el dominio de  $T$ . Ya que la derivadas de  $z$  y de  $x$  deben de ser continuas se requiere que  $T^{-1}(\cdot)$  y  $T(\cdot)$  sean continuamente diferenciable, a ellos se le denomina difeomorfismo.

En un sistema dinámico de una sola entrada y una sola salida tal como el sistema de levitación magnético donde la entrada de control es el voltaje aplicado al circuito eléctrico y la salida es la altura de bola metálica, la estructura mas conveniente para una retroalimentación estética de estados es una en la cual la variable de entrada  $u$  es igual a

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (4.2)$$

donde  $v$  es la entrada de referencia externa, la composición de este tipo de controlador con un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

nos da como resultado un sistema en lazo cerrado caracterizado por :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Las funciones  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  que caracterizan la ley de control (4.2) están definidas en un adecuado conjunto abierto de  $R^n$ , donde  $\beta(x)$  es asumida diferente de cero para toda  $x$  en este conjunto. Considerando el sistema de una sola entrada-una sola salida (4.3) donde  $f, g$  y  $h$  son funciones suficientemente suaves en un dominio  $D \subset R^n$ . El mapeo  $f : D \rightarrow R^n$  y  $g : D \rightarrow R^n$  son llamados campos vectoriales en  $D$ . La derivada de  $\dot{y}$  esta dado por

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (4.5)$$

donde

$$L_f h(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x) \quad (4.6)$$

es llamada la derivada de Lie de  $h$  con respecto a  $f$  a lo largo de  $f$ . La siguiente notación es usada en lo que resta de la sección:

$$\begin{aligned} L_g L_f h(x) &= \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} g(x) & (4.7) \\ L_f^2 h(x) &= L_f L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} f(x) \\ L_f^k h(x) &= L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x) \\ L_f^0 h(x) &= h(x) \end{aligned}$$

**Definición 5** *El sistema no lineal (4.3) es dicho que tiene grado relativo  $\rho$ ,  $1 \leq \rho \leq n$ , en una región  $D_0 \subset D$  si*

$$\begin{aligned} L_g L_f^{i-1} h(x) &= 0 \text{ con } i = 1, 2, \dots, \rho - 1 & (4.8) \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) &\neq 0 \end{aligned}$$

para toda  $x \in D_0$ .

Recordando el modelo en el espacio de estados para el sistema de levitación magnética dado por la expresión (2.16) y reorganizándolo en la forma (4.3)  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{C}{m} \frac{x_3^2}{x_1} \\ -\frac{R}{L(x)}x_3 + \frac{2C}{L(x)} \frac{x_2 x_3}{x_1^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L(x)} \end{bmatrix} u \quad (4.9)$$

Con salida del sistema:

$$y = h(x) = x_1 \quad (4.10)$$

donde:

$x_1$  = Posición  $x$

$x_2$  = Velocidad de la bola

$x_3$  = Corriente a través del circuito  $i$

$u$  = Diferencia de potencial aplicado al circuito eléctrico

Calculando el grado relativo del modelo matemático anterior tenemos:

$$L_g L_f^0 h(x) = \frac{\partial (L_f^0 h(x))}{\partial x} g(x) = \frac{\partial (h(x))}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L(x)} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.11)$$

$$L_g L_f^1 h(x) = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} g(x) = \frac{\partial x_2}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L(x)} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
L_g L_f^2 h(x) &= \frac{\partial (L_f^2 h(x))}{\partial x} g(x) = \frac{\partial \left( g - \frac{C}{m} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 \right)}{\partial x} g(x) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2Cx_3^2}{mx_1^3} & 0 & \frac{-2Cx_3}{mx_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L(x)} \end{bmatrix} = \frac{-2Cx_3}{mx_1^2 L(x)} \neq 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por lo tanto el grado relativo del modelo matemático del sistema de levitación magnética es  $\rho = n = 3$  que es el mismo grado del sistema. Considerando un sistema no lineal que tenga grado relativo  $\rho = n$  es decir exactamente igual a la dimensión del espacio de estados. Un cambio de coordenadas requerido para la construcción de una retroalimentación que linealice el sistema esta dado por [11, 20]:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \dots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \dots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Para el caso del modelo matemático del sistema de levitación el cambio de coordenadas viene dado por:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ g - \frac{C}{m} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

El estado del sistema es restringido a la región donde  $x_1 > 0$  y  $x_3 > 0$  para asegurar que la transformación (4.15) es invertible. Ninguna función extra es necesitada para completar la transformación, en las nuevas coordenadas

$$z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1}h(x) \text{ con } 1 \leq i \leq n$$

El sistema aparecerá descrito por las ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 & (4.16) \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ z_{n-1} &= z_n \\ z_n &= b(z) + a(z)u \end{aligned}$$

donde  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,

## 4.2. Ley de control

Suponiendo que la siguiente ley de control por retroalimentación de estado es escogida

$$u = \frac{1}{a(z)} (-b(z) + v)$$

la cual existe y es bien definida, el resultante sistema en lazo cerrado es gobernado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 & (4.17) \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ z_{n-1} &= z_n \\ z_n &= v \end{aligned}$$

El cual es un sistema lineal y controlable. Aplicando lo analizado anteriormente al sistema de levitación magnética junto con el cambio de variable expresado por (4.15), el sistema queda expresado en las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 \\ z_2 &= z_3 \\ z_3 &= \alpha(x) + \beta(x)u \end{aligned} \quad (4.18)$$

Si se escoge la siguiente retroalimentación de estados [4]

$$u = \frac{1}{\beta(x)} (-\alpha(x) + w) \quad (4.19)$$

donde

$$\alpha(x) = \frac{2\hat{C}}{m} \left( \left( 1 - \frac{2\hat{C}}{x_1 L(x)} \right) \frac{x_2 x_3^2}{x_1^3} + \frac{R}{L(x)} \frac{x_3^2}{x_1^2} \right) \quad (4.20)$$

$$\beta(x) = -\frac{2\hat{C}x_3}{mL(x)x_1^2}$$

$$\hat{C} = \text{Estimación de parámetro } C \text{ vía redes neuronales} \quad (4.21)$$

La corriente es mantenida positiva y acotada  $x_3 > 0$  de ese modo es mantenida la invertibilidad del término  $\beta(x)$ , lo anterior da como resultado la siguiente representación en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

donde

$$\begin{aligned} z_1 &= \text{Posición de la pelota} \\ z_2 &= \text{Velocidad de la pelota} \\ z_3 &= \text{aceleración de la pelota} \end{aligned}$$

### 4.3. Simulaciones

Para comparar el rendimiento de la linealización exacta por retroalimentación de estado se realizaron simulaciones para analizar su respuesta a entradas escalón y su habilidad para el seguimiento de trayectorias de referencias sinusoidales. Sea una trayectoria arbitraria de referencia [4, 11]  $z_{1ref}(t), z_{2ref}(t), z_{3ref}(t)$  y una referencia de entrada  $j_{ref}(t)$  dados tales que

$$\begin{aligned} z_{1ref}(t) &= x_{1ref}(t) \\ z_{2ref}(t) &= \frac{dz_{1ref}(t)}{dt} \\ z_{3ref}(t) &= \frac{dz_{2ref}(t)}{dt} \\ j_{ref}(t) &= \frac{dz_{3ref}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Una retroalimentación lineal para  $w$  es escogido

$$w = K_0 \int_0^t (z_{1ref} - z_1) dt + K_1 (z_{1ref} - z_1) + K_2 (z_{2ref} - z_2) + K_3 (z_{3ref} - z_3) + j_{ref} \quad (4.24)$$

Expresado en las variables  $X$

$$w = K_0 \int_0^t (z_{1ref} - x_1) dt + K_1 (z_{1ref} - x_1) + K_2 (z_{2ref} - x_2) + K_3 \left[ z_{3ref} - \left( g - \frac{C}{m} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 \right) \right] + j_{ref} \quad (4.25)$$

Ya que el sistema (4.22) está expresado en la forma canónica controlable, escogiendo valores positivos para las ganancias  $K_0, K_1, K_2, K_3$  se asegura la localización de los polos en lazo cerrado del sistema en el semiplano izquierdo complejo asegurando un seguimiento en la trayectoria de referencia.



La primera simulación consiste en una respuesta escalón de 4,5 mm , con valor inicial de 18,5 mm y final de 14 mm. Los parámetros del sistema escogidos para la simulación fueron los siguientes

$$\begin{aligned} \text{masa } m &= 12 \text{ gramos} \\ \text{Resistencia } R &= 30 \text{ Ohm} \\ \text{Inductancia } L &= 0,8 \text{ Henrys} \end{aligned}$$

Como se muestra en la figura (4.1) la posición inicial de la bola metálica es de una altura de 18,5 mm, las ganancias para el controlador señalado en la expresión (4.25) fueron las siguientes

$$\begin{aligned} K_0 &= 2 \\ K_1 &= 15 \\ K_2 &= 5 \\ K_3 &= 5 \end{aligned} \tag{4.26}$$

La figura (4.2) muestra la corriente eléctrica generada por la señal de control mostrada en la figura (4.3), la condición inicial para la corriente fue  $x_3 = i = 0,5669$  amp y  $x_2 = 0 \frac{m}{s}$ .

Para probar la capacidad de seguimiento de trayectoria de la ley de control se escogió una señal sinusoidal como referencia

$$\begin{aligned} z_{1ref} &= 0,005 \text{sen}(2\pi t) + ,0185 \text{ metros} \\ z_{2ref}(t) &= \frac{dz_{1ref}(t)}{dt} \\ z_{3ref}(t) &= \frac{dz_{2ref}(t)}{dt} \\ j_{ref}(t) &= \frac{dz_{3ref}(t)}{dt} \end{aligned} \tag{4.27}$$

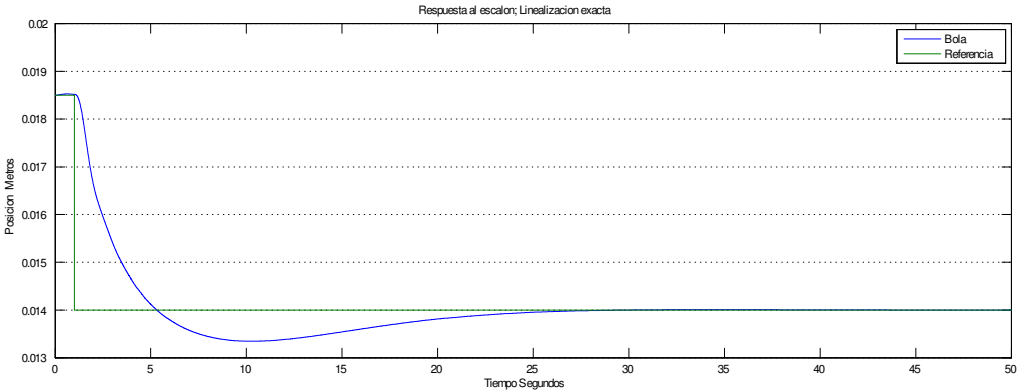


Figura 4.1: Respuesta al escalon, Linealizacion exacta por retroalimentacion de estado

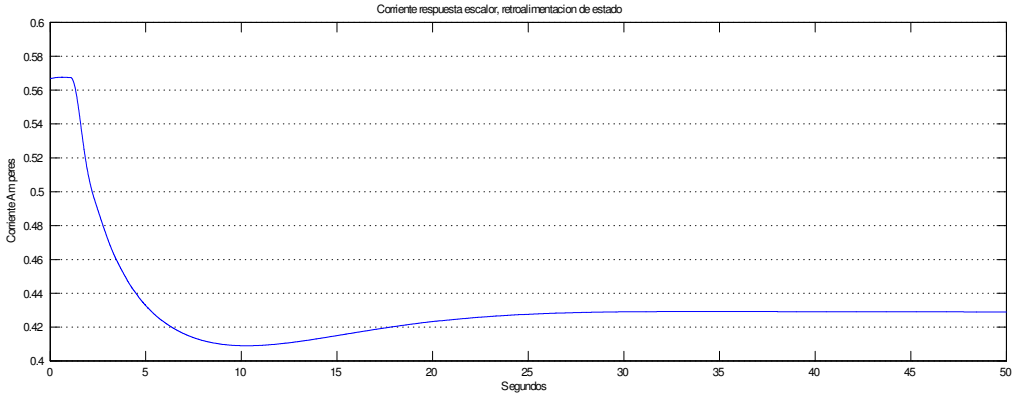


Figura 4.2: Corriente respuesta escalon, linealizacion exacta

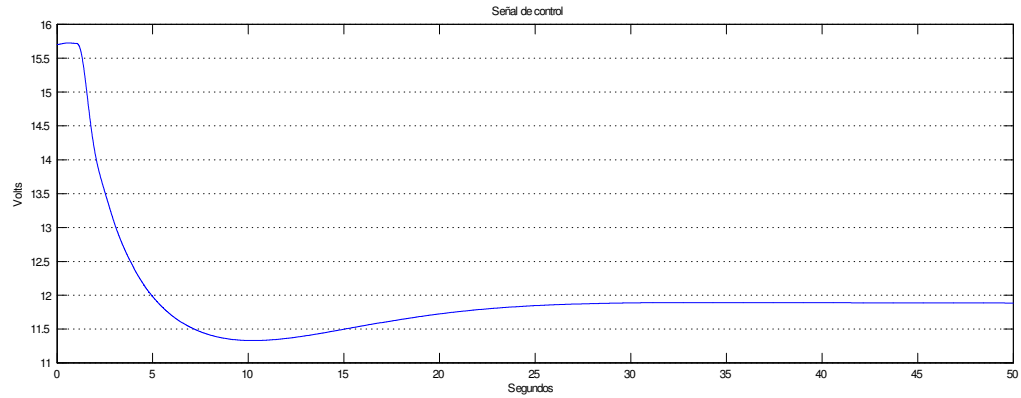


Figura 4.3: Señal de control para respuesta escalon; linealización exacta

Con los siguientes valores de ganancias para  $K_i$  para  $i = 1, 2, 3$  utilizados en la ley de control (4.25)

$$K_0 = 100 \quad (4.28)$$

$$K_1 = 75$$

$$K_2 = 300$$

$$K_3 = 12$$

La figura (4.4) muestra un seguimiento aceptable de la señal de referencia sinusoidal, las condiciones iniciales escogidas son  $x_1 = 18,5$  mm,  $x_3 = i = 0,5669$  amp,  $x_2 = 0 \frac{m}{s}$ .

La corriente eléctrica y la señal de control para el seguimiento de la señal sinusoidal son mostradas en la figura (4.5) y (4.6) respectivamente.

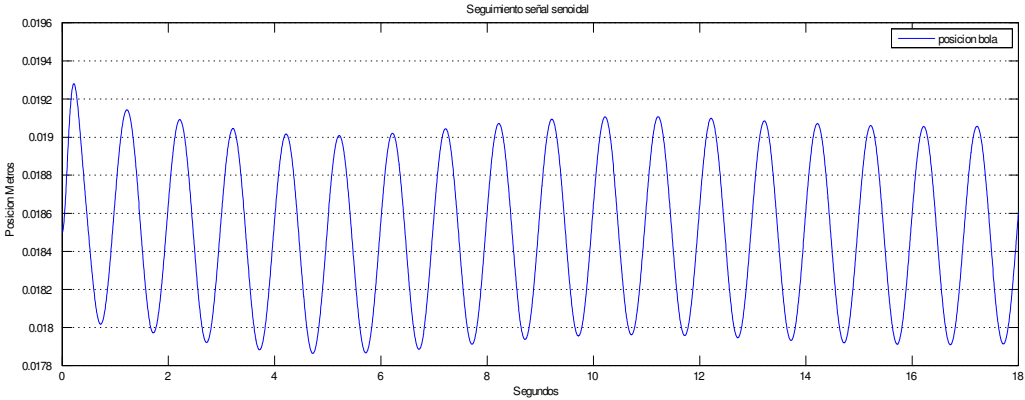


Figura 4.4: Seguimiento señal senoidal linealizacion exacta

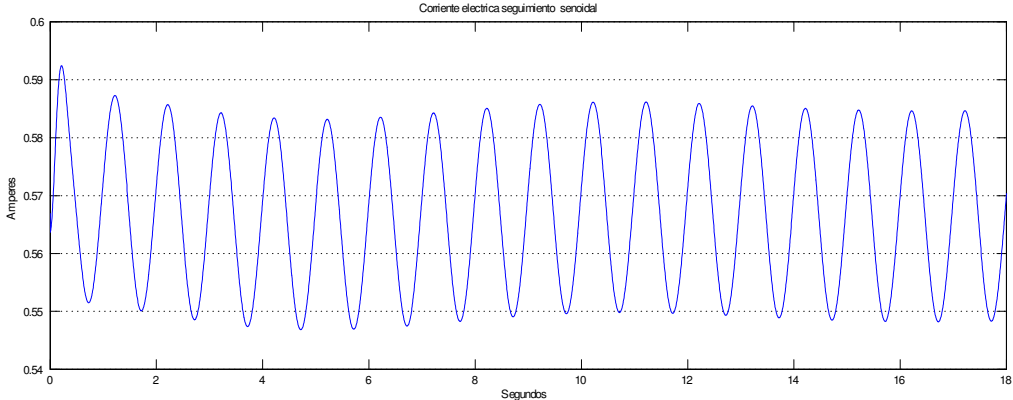


Figura 4.5: Corriente electrica seguimiento de señal senoidal linealizacion exacta.

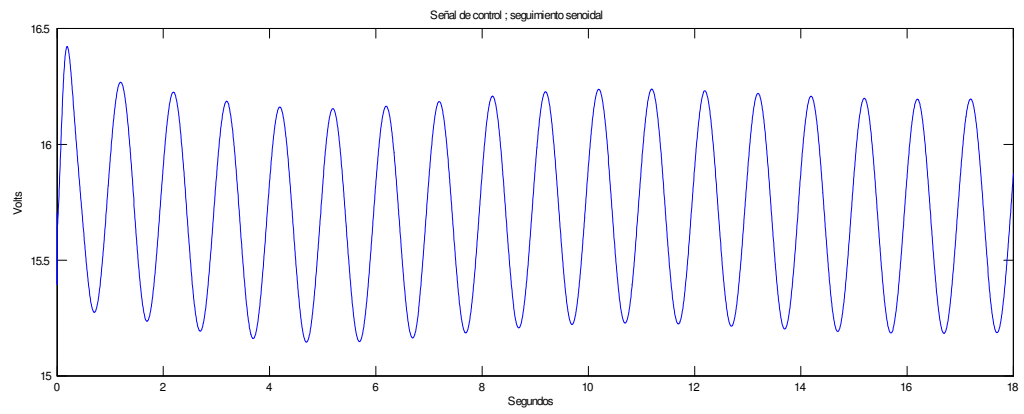


Figura 4.6: Señal de control seguimiento señal senoidal linealización exacta

# Capítulo 5

## Control aplicando "backstepping"

La técnica de diseño de controladores por medio de backstepping es una eficiente y popular herramienta para afrontar los problemas de estabilización global asintótica (GAS) y de seguimiento de señales de referencia en sistemas no lineales con parámetros desconocidos o inciertos, sus inicios datan en los primeros años de la década de los 90's como un resultado de Petar Kokotovic y sus colaboradores [16]. Este enfoque de ley de control depende en gran medida de los trabajos de Lyapunov y su teoría publicada en el siglo XIX [22].

La técnica clásica de Backstepping es un tipo de diseño recursivo en el dominio del tiempo, que puede ser implementado a sistemas lineales con una estructura triangular baja y a sistemas no lineales en forma denominada "strict-feedback form"[11, 16, 21]. En este contexto es posible extender la técnica clásica de Backstepping a una subclase de sistemas no lineales puros retroalimentados (pure feedback), afines en control [16], los cuales incluyen los sistemas no lineales en una forma strict-feedback[23], sea el sistema no lineal afín en el control :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2^{\alpha_1} \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3^{\alpha_2} \\
 &\dots \\
 \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{\alpha_{n-1}} \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)u
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

con  $f_i(\cdot)$  y  $g_i(\cdot)$  funciones no lineales conocidas, localmente Lipschitz para  $i = 1, 2, \dots, n$ . El sistema (5.1) tiene una sola entrada-una sola salida conteniendo  $n \in \mathbb{N}$  ecuaciones de estados, con el par entrada-salida de grado relativo  $n$ .

**Definición 6** *Es llamado una forma strict-feedback a cualquier sistema no lineal que pertenece a la clase (5.1) con  $\alpha_{j-1} = 1$  para  $j = 2, \dots, n$  [22].*

**Definición 7** *Cualquier sistema no lineal es llamado de la forma pure-strict-feedback si mantiene la estructura expresado por (5.1) con  $\alpha_{j-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  para  $j = 2, \dots, n$ . [22]*

Es importante mencionar que sistemas de la forma pure-strict-feedback es mas general que las formas strict-feedback, ya que estas ultimas están incluidas en las primeras. La diferencia entre sistemas de la forma strict feedback y la forma pure strict feedback radica en los exponentes del termino  $\alpha_i$  de las variables  $x_j^{\alpha_{i-1}}$  con  $j = 2, 3, \dots, n$ . en el cual son valores constantes en el caso de la forma strict feedback:  $\alpha_{j-1} = 1$ .

Un amplio rango de controladores no lineales pueden ser utilizados para estabilizar sistemas expresados en la forma anterior tales como modos deslizantes, linealización

exacta por retroalimentación, métodos pasivos, control no lineal predictivo, backstepping [16]. Numerosas aplicaciones pueden ser beneficiadas de la extensión de la definición de los sistemas en forma pure-strict-feedback por ejemplo los sistemas de levitación magnética [4, 24].

El modelo del sistema levitación magnética en el espacio de estados cumple con la definición ofrecida para los sistemas no lineales en forma pure-strict-feedback con valores  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_2 & (5.2) \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{C}{mx_1^2}x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L(x)}x_3 + \frac{2C}{L(x)}\frac{x_2x_3}{x_1^2} + \frac{u}{L(x)} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Posición } x \\ x_2 &= \text{Velocidad de la bola} \\ x_3 &= \text{Corriente a través del circuito } i \\ u &= \text{Diferencia de potencial aplicado al circuito } e \end{aligned}$$

## 5.1. Método constructivo

El enfoque utilizado por la técnica Backstepping consiste de  $n$  pasos constructivos y procedimiento sistemático, aplicado a un sistema no lineal en forma strict feedback con el objetivo de obtener al final una ley de control  $u$  estabilizante. En el caso específico de los sistemas no lineales en forma pure strict feedback tal como el sistema de levitación magnética es aplicado prácticamente el mismo procedimiento salvo con



ligeros cambios en la función de Lyapunov de control. La idea principal es construir sistemáticamente una ley de control  $u$  capaz de asegurar el seguimiento a una señal de referencia, por lo tanto es asumido que todos los estados del sistema están disponibles para medición y consecuentemente para su uso como retroalimentación de estado completa [16].

Comenzando con el procedimiento de diseño [21, 23], reescribiendo el subsistema consistente en la primera ecuación del sistema (5.1)

$$\dot{x}_1 = f_1(x) + g_1(x_1)x_2^{\alpha_1} \quad (5.3)$$

Se desea encontrar el valor de  $x_2^{\alpha_1}$  que garantice la estabilidad asintótica del subsistema (5.3) y la convergencia asintótica de la señal de error variante en el tiempo  $\varepsilon_1 = x_1(t) - x_{1ref}(t)$  hacia el valor cero, donde  $x_{1ref}(t)$  es la trayectoria de referencia deseada para el estado  $x_1(t)$ . Usando la terminología clásica empleada en [16], se introduce un control virtual  $\phi_{x_2}^{\alpha_1}$  el cual reemplaza el valor de  $x_2^{\alpha_1}$  en la expresión (5.3) además se usara la siguiente función de Lyapunov de control o función candidata de Lyapunov [25]:

$$V_1(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2$$

Si se impone  $\dot{V}(x) < 0$  es posible obtener explícitamente el control virtual  $\phi_{x_2}^{\alpha_1}$ . Escogiendo

$$\dot{V}_1(x) = -k\varepsilon_1^2 < 0$$

con  $k_1 \in R^+$  un parámetro de ajuste para controlar la pendiente de  $V_1(x)$  y por lo tanto manipular la razón de convergencia de  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ . Para el segundo paso del procedimiento de diseño[23], se toman las primeras dos ecuaciones del sistema (5.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2^{\alpha_1} \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Se desea conocer cual debería de ser el valor de  $x_3^2$  para que la estabilidad asintótica del subsistema (5.4) y la convergencia asintótica a cero de la señal de error

$$\varepsilon_2 = x_2^{\alpha_1} - \phi_{x_2}^{\alpha_1} \quad (5.5)$$

este garantizada. En otras palabras necesitamos calcular el control virtual  $\phi_3^{\alpha_2}$  que establece el valor analítico deseado de  $x_3^2$ , y luego considerar este control virtual  $\phi_3^{\alpha_2}$  en lugar de  $x_3^2$  en el subsistema (5.4). La forma analítica del control virtual  $\phi_3^{\alpha_2}$  sera calculad imponiendo:

$$\dot{V}_2(x_1, x_2) < 0 \quad (5.6)$$

donde la función de lyapunvo de control esta definida por:

$$V_2(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 \quad (5.7)$$

Es posible imponer

$$\dot{V}_2(x) = -k_1\varepsilon_1^2 - k_2\varepsilon_2^2 < 0 \quad (5.8)$$

con  $k_2 \in R^+$ . En este punto somos capaces de asegurar estabilidad asintótica del subsistema parcial (5.4).

Los dos parámetros de ajuste  $k_1, k_2$  están destinados a imponer la forma de las funciones  $V_1, V_2$  y por lo tanto controlar la velocidad de convergencia asintótica del subsistema. El procedimiento de diseño continuara paso a paso como es descrito anteriormente, poniendo atención en el paso n-esimo  $n^{th}$  (el ultimo), analizando el sistema completo expresado en (5.1) se define:

$$\varepsilon_n = x_n^{\alpha_{n-1}} - \phi_{x_n}^{\alpha_{n-1}} \quad (5.9)$$

y la función candidata de lyapunov para asegurar estabilidad asintótica global (GAS):

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\varepsilon_i^2 \quad (5.10)$$

Con el objetivo de dar una visión de el sentido de la función de Lyapunov total (5.10) uno puede notar ya que el objetivo es controlar la evolución de las variables de estado  $x$ , se ha construido una Función de Lyapunov de control capas de reducir el error de seguimiento entre las variables de estado y sus valores deseados.

Si se impone en el paso final  $n$

$$\dot{V}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \sum_{i=1}^n k_i \varepsilon_i^2 < 0 \quad (5.11)$$

se obtiene la ley de control final  $u$ . En la conclusión del paso numero  $n$  de este procedimiento de diseño da como resultado la construcción de una retroalimentación global estabilizante y de una Función de Lyapunov de Control.

Al analizar la ley de control final  $u$  es fácil notar el inconveniente de tener términos que contienen las variables de estado  $x_i$  en el denominador, esto es debido al numero de las potencias  $\alpha_i \in R^+$  en el sistema (5.1), mientras que el exponente  $\alpha_i \neq 1$  la derivada temporal :

$$\frac{d}{dt} (x_i^{\alpha_i-1}) = \alpha_{i-1} x_i^{\alpha_i-1} \frac{dx_i}{dt} \quad (5.12)$$

genera un problema de singularidad ya que la multiplicación de términos  $x_i^{\alpha_i-1}$  aparecerá en el denominador dentro de cada control virtual  $\phi_{x_i}^{\alpha_i-1}$ . Este problema no aparece en los sistemas en la forma strict-feedback ya que el grado del exponente en el sistema (5.1) siempre es  $\alpha_i = 1$ . Por esta razón es importante tomar especial atención en evitar problemas de singularidad en el cual  $x_i \rightarrow 0 \implies u \rightarrow \infty$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## 5.2. Ley de control

Poniendo atención en el modelo en el espacio de estados del sistema de levitación magnética

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 & (5.13) \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{C}{mx_1^2}x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L(x)}x_3 + \frac{2C}{L(x)}\frac{x_2x_3}{x_1^2} + \frac{u}{L(x)}\end{aligned}$$

Se pretende calcular analíticamente una retroalimentación asintótica global estabilizante por medio de la ley de control  $u$  [22]. La ley de control final será calculado en 3 pasos constructivos ya que ese es el número de variables de estado del modelo de levitación magnética.

En el primer paso tomamos la primera ecuación de estado del sistema (5.13):

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.14)$$

Definimos el control virtual  $\phi_{x_2}$  y lo reemplazamos por  $x_2$  en (5.14)

$$\dot{x}_1 = \phi_{x_2} \quad (5.15)$$

Definiendo

$$\varepsilon_1 \triangleq x_1 - x_{1ref} \quad (5.16)$$

Siendo  $x_{1ref}$  la trayectoria deseada para la posición de la bola  $x_1$ . Es escogido una función de control de Lyapunov tal como

$$V_1(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 \quad (5.17)$$

Imponemos la condición para la derivada temporal de  $V_1(x)$

$$\dot{V}_1(x) = -k_1\varepsilon_1^2 < 0 \quad (5.18)$$

con  $k_1 > 0$  para asegurar la convergencia asintótica global de  $\varepsilon_1(t) \rightarrow 0$ . Si escogemos el control virtual como [16, 22]:

$$\phi_{x_2} = \dot{x}_{1ref} - k_1\varepsilon_1 = \dot{x}_{1ref} - k_1(x_1 - x_{1ref}) \quad (5.19)$$

Derivando a lo largo de las trayectorias de (5.17)

$$\dot{V}_1(x) = \varepsilon_1\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1ref}) \quad (5.20)$$

Ya que

$$\dot{x}_1 = \phi_{x_2} = \dot{x}_{1ref} - k_1(x_1 - x_{1ref}) \quad (5.21)$$

sustituyendo (5.21) en (5.20) tenemos:

$$\dot{V}_1(x) = \varepsilon_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1ref}) = \varepsilon_1(\dot{x}_{1ref} - k_1(x_1 - x_{1ref}) - \dot{x}_{1ref}) = -k_1\varepsilon_1^2 < 0 \quad (5.22)$$

Para el segundo paso se considera el subsistema consistente en las dos primeras ecuaciones de (5.13)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{C}{mx_1^2}x_3^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

se define el control virtual  $\phi_{x_3^2}$  y se reemplaza por  $x_3^2$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{C}{mx_1^2}\phi_{x_3^2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

es definido

$$\varepsilon_2 \triangleq x_2 - \phi_{x_2} \quad (5.25)$$

Usando como función de control de Lyapunov:

$$V_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 - \frac{1}{2}k_2\varepsilon_2^2$$

Imponiendo a la derivada de  $V_2$  a lo largo de las trayectorias del sistema ser:

$$\dot{V}_2(x_1, x_2) = -k_1\varepsilon_1^2 - k_2\varepsilon_2^2 < 0 \quad (5.26)$$

con  $k_1, k_2 > 0$ . Si se escoge el control virtual como [16, 22]:

$$\phi_{x_3} = -\frac{mx_1^2}{C} [-g + \ddot{x}_{1ref} - (k_1 + k_2)(x_2 - \dot{x}_{1ref}) - (1 + k_1k_2)(x_1 - x_{1ref})] \quad (5.27)$$

Derivando a  $V_2(x_1, x_2)$  a lo largo de las trayectorias del sistema

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x_1, x_2) &= \varepsilon_1\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_2\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1[\dot{x}_1 - \dot{x}_{1ref}] + \varepsilon_2[\dot{x}_2 - \dot{\phi}_{x_2}] \\ &= \varepsilon_1[x_2 - \dot{x}_{1ref}] + \varepsilon_2\left[\left(g - \frac{C}{mx_1^2}\phi_{x_3}\right) - \ddot{x}_{1ref} + k_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1ref})\right] \\ &= \varepsilon_1[x_2 - \dot{x}_{1ref}] + \varepsilon_2[-k_2(x_2 - \dot{x}_{1ref}) - (1 + k_1k_2)(x_1 - x_{1ref})] \\ &= \varepsilon_1[x_2 - \dot{x}_{1ref}] + \varepsilon_2[-k_2(x_2 - \dot{x}_{1ref} - k_1(x_1 - x_{1ref}))] - \varepsilon_2[x_1 - x_{1ref}] \end{aligned} \quad (5.28)$$

Recordando que

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= x_2 - \phi_{x_2} = x_2 - [\dot{x}_{1ref} - k_1(x_1 - x_{1ref})] \\ \varepsilon_1 &= x_1 - x_{1ref} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Sustituyendo en (5.28):

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x_1, x_2) &= -\varepsilon_1[x_2 - \dot{x}_{1ref} - \varepsilon_2] - k_2\varepsilon_2^2 \\ &= -\varepsilon_1[x_2 - \dot{x}_{1ref} - x_2 + \dot{x}_{1ref} - k_1(x_1 - x_{1ref})] - k_2\varepsilon_2^2 \\ &= -k_1\varepsilon_1^2 - k_2\varepsilon_2^2 < 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Para el tercer paso se considera el sistema completo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{C}{mx_1^2}x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L(x)}x_3 + \frac{2C}{L(x)}\frac{x_2x_3}{x_1^2} + \frac{u}{L(x)}\end{aligned}\quad (5.31)$$

Definiendo

$$\varepsilon_3 = x_3^2 - \phi_{x_3^2} \quad (5.32)$$

Junto con la función de control de Lyapunov:

$$V_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3^2 \quad (5.33)$$

Si se escoge la entrada de control  $u$  como [16, 22]:

$$\begin{aligned}u &= Rx_3 - 2\hat{C}\frac{x_2x_3}{x_1^2} - \frac{L(x)}{2}(k_1 + k_2 + k_3)x_3 + \frac{L(x)}{2x_3} \left[ \frac{\hat{C}}{mx_1^2} [x_2 - \dot{x}_{1ref} + k_1(x_1 - x_{1ref})] \right. \\ &\quad + \frac{mx_1}{\hat{C}} [(1 + k_1k_2)(x_1 - x_{1ref}) + g + (k_1 + k_2)(x_2 - \dot{x}_{1ref}) - \ddot{x}_{1ref}] (k_3x_1 + 2x_2) \\ &\quad \left. + \frac{mx_1^2}{\hat{C}} [(1 + k_1k_2)(x_2 - \dot{x}_{1ref}) + (k_1 + k_2)(g - \ddot{x}_{1ref}) - \ddot{x}_{1ref}] \right]\end{aligned}\quad (5.34)$$

donde  $\hat{C}$  es la estimación de parámetro electromagnético vía red neuronal, la singularidad presentada en el denominador de la expresión (5.34) por el parámetro  $\hat{C}$  es evitada imponiendo que la altura de la bola metálica  $x_1 \neq 0$  y la corriente eléctrica a través del circuito sera  $x_3 \neq 0$ . En términos físicos, la bola metálica no toque el devanado eléctrico que produce la fuerza electromagnética.

Se impone al sistema

$$\dot{V}_3(x_1, x_2, x_3) = -k_1\varepsilon_1^2 - k_2\varepsilon_2^2 - k_3\varepsilon_3^2 < 0 \quad (5.35)$$

Con lo anterior se asegura estabilidad asintótica Global (GAS) para el sistema de levitación magnética (5.31).

### 5.3. Simulaciones

Para probar el rendimiento del controlador por backstepping se realizaron simulaciones para analizar su respuesta a entradas escalón y su habilidad para el seguimiento de trayectorias de referencias sinusoidales

En la primera simulación es escogido un escalón de valor inicial  $18,5mm$  y de valor final  $17mm$  como señal de referencia , los parámetros del sistema fueron

$$\text{masa } m = 12 \text{ gramos}$$

$$\text{Resistencia } R = 30 \text{ Ohm}$$

$$\text{Inductancia } L = 0,8 \text{ Henry}$$

Las ganancias utilizadas para la ley de control (5.34) usadas en la simulación fueron:

$$k_1 = 50$$

$$k_2 = 50$$

$$k_3 = 50$$

En todas las simulaciones los estados se mantienen acotados  $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$  , la figura (5.1) muestra la respuesta al escalón por medio de la técnica backstepping (5.34), la cual tiene una respuesta en estado transitorio mas pequeña que la respuesta al escalón al aplicar la ley de control por linealización exacta (4.24).

La figura (5.2) muestra la gráfica del estado  $x_3$  (corriente eléctrica) la cual en todo momento se mantiene acotada y con valores positivos  $x_3 > 0$ .



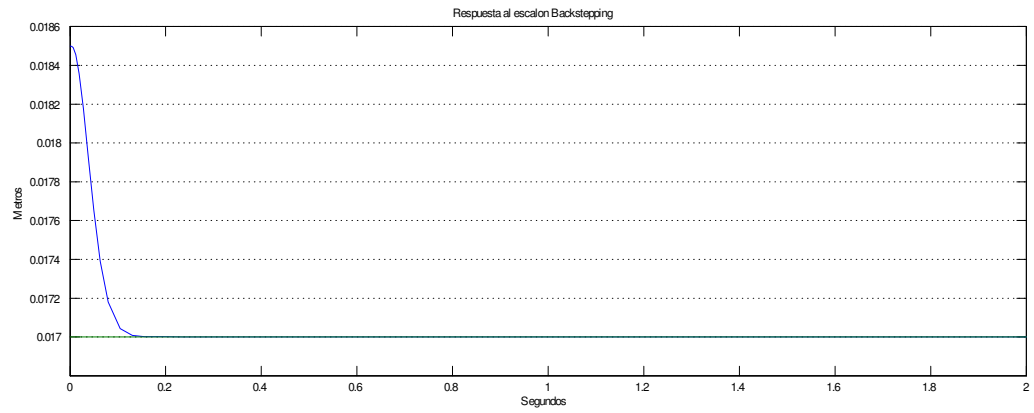


Figura 5.1: Respuesta al escalon ,Backstepping

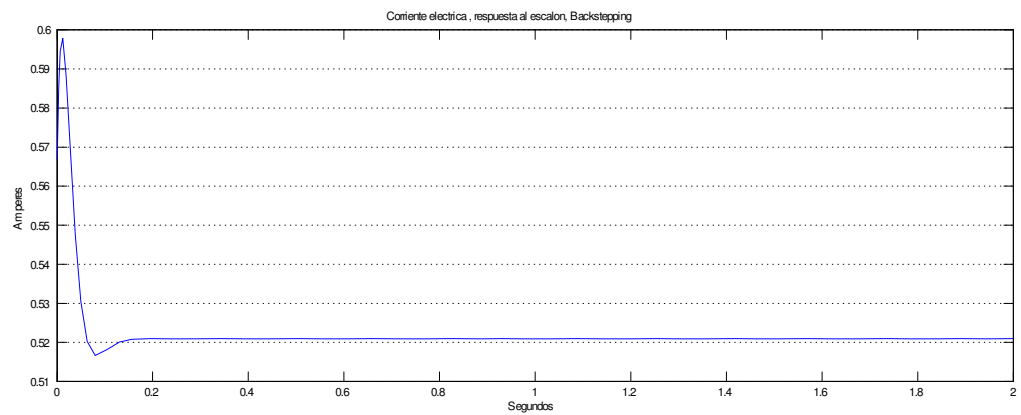


Figura 5.2: Corriente electrica, Respuesta al escalon, Backstepping

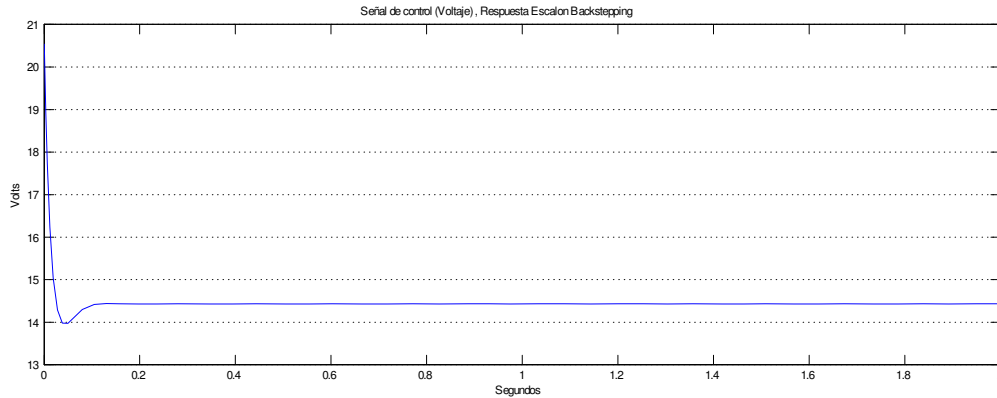


Figura 5.3: Señal de control, Respuesta al Escalon, Backstepping

La señal de control empleada en la respuesta al escalón es mostrada en la figura (5.3)

En el caso de seguimiento a una señal de referencia fue escogida una señal del tipo sinusoidal

$$x_{1ref} = 0,005\text{sen}(4\pi t) + 0,0178 \text{ metros}$$

Para validar las propiedad de robustez de la ley de control por medio de backstepping se añadió un ruido blanco gaussiano en cada variable de estado  $x_i(t)$  con  $i = 1, 2, 3$  en la mitad de cada tiempo de simulación. El ruido blanco Gaussiano es equivalente al ruido eléctrico encontrado en todos los equipos de medición tales como sensores, tarjetas de adquisición de datos etc. [26, 27]. Las simulaciones son ejecutadas con el ruido blanco gaussiano como perturbación aditiva a cada uno de los estados del sistema.

La figura (5.5) muestra la gráfica del estado  $x_3$ (corriente eléctrica) la cual se mantiene acotada y positiva  $x_3 > 0$  incluso al agregar la perturbación aditiva.

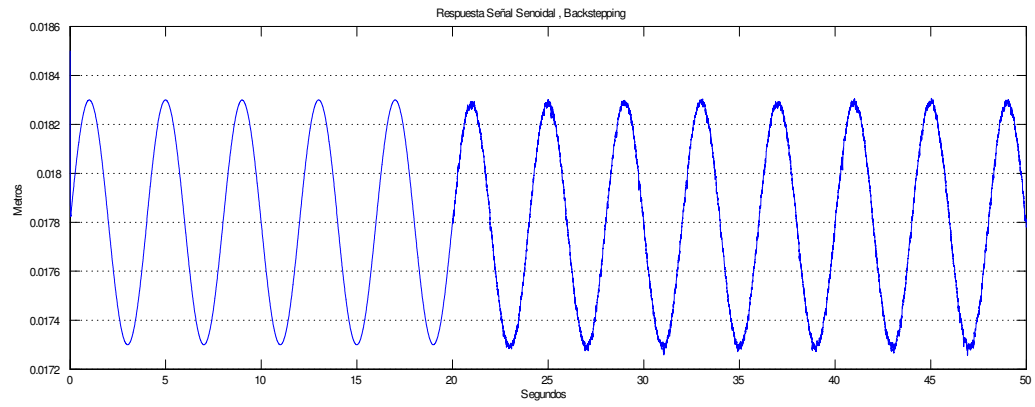


Figura 5.4: Resposta a seguimento senoidal, Backstepping

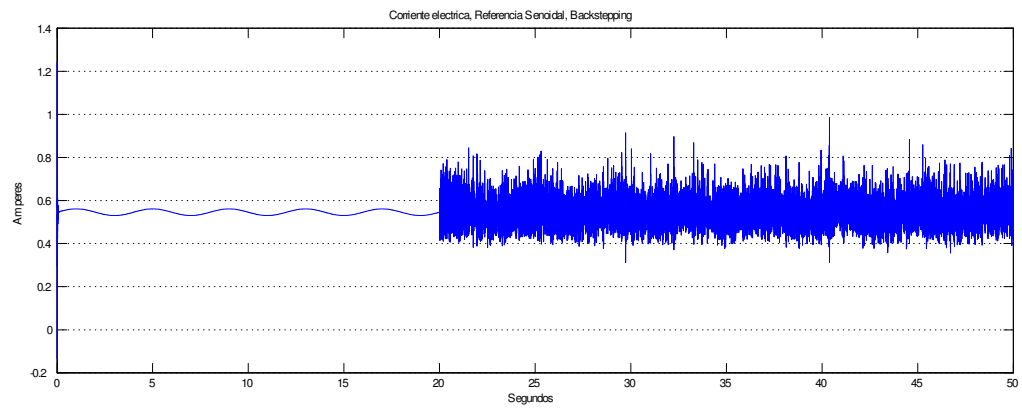


Figura 5.5: Corrente electrica, Referencia Senoidal, Ley de control por Backstepping

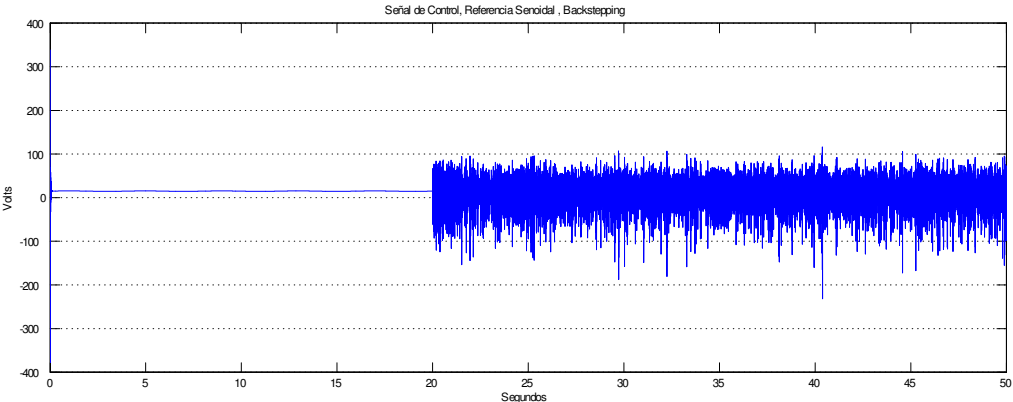


Figura 5.6: Señal de Control, Referencia Senoidal , Backstepping

Como lo señalan las gráficas (5.4,5.5,5.6) la ley de control (5.34) muestra su robustez ante perturbaciones aditivas en los estados del sistema de levitación magnética.



# Capítulo 6

## Control difuso

### 6.1. Introducción

Durante los últimos años el control difuso se ha erigido como una de la mas activa y fructífera áreas para la investigación en las aplicaciones de la teoría de conjuntos difusos, especialmente en los procesos industriales en los cuales no son controlables por medio de métodos convencionales debido a una falta de datos cuantitativos con respecto a las relaciones entrada-salida del sistema[31].

Los controladores difusos están basados en la lógica difusa el cual es un sistema lógico que es mucho mas cercano al espíritu del pensamiento humano y a un lenguaje natural que sistemas tradicionales lógicos. Estos proveen un medio efectivo de capturar la naturaleza aproximada e inexacta del mundo real. Los controladores difusos basados en lógica difusa proporciona un medio de convertir una estrategia lingüística de control basado en un conocimiento experto en una estrategia automática de control.

Los controladores lógico difusos son una atractiva alternativa a los cotroladores

clásicos para el diseño de sistemas de control no lineales desafiantes. Estos no requieren ningún modelo matemático del sistema o ecuaciones matemáticas complejas que gobiernen las relaciones entre entradas y salidas del sistema. Las reglas difusas son fáciles de aprender incluso por personas que no son expertas en el tema, normalmente toma pocas reglas describir sistemas que requieren muchas líneas de programación, lo que reduce el diseño[30].

El control lógico difuso es útil cuando los procesos a controlar son muy complejos para su análisis con técnicas convencionales o cuando las fuentes de información disponibles son inexactas o existen incertidumbres [29]. Al usar lógica difusa el comportamiento del sistema es caracterizado por medio del conocimiento humano el cual directamente es llevado al diseño del algoritmo de control sobre la base de reglas difusas. Estas reglas están en términos de la relación de entradas a sus correspondientes salidas los cuales determinan los parámetros del controlador. Visto desde esta perspectiva la parte esencial de el controlador lógico difuso es un conjunto de reglas lingüística de control relacionadas por los conceptos de implicación difusa y las reglas de inferencia. Por lo tanto el controlador difuso proporciona un algoritmo el cual puede convertir la estrategia de control lingüística basado en un conocimiento experto en una estrategia de control automática.

Cualquier ajuste al controlador difuso solo requiere la modificación de estas reglas difusas en lugar de un rediseño completo del controlador, de lo anterior las técnicas de control basados en lógica difusa no solo simplifica el proceso de diseño si no además reduce las tareas de resolver ecuaciones matemáticas complejas para sistemas no lineales como el sistema de levitación magnética. Como resultado de lo anterior los controladores lógico difusos pueden entregar un mejor desempeño en los casos donde los controladores convencionales no se desarrollen adecuadamente frente a procesos no lineales bajo control[28].

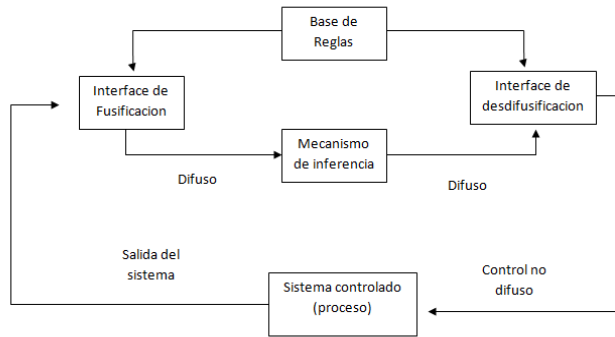


Figura 6.1: Configuración básica de un controlador lógico difuso

Por todo lo anterior expuesto el controlador lógico difuso debe de ser visto como un paso hacia el acercamiento entre el convencional control matemático preciso y las decisiones humanas [32].

Para especificar reglas en la base de reglas, el controlador experto debe de usar una descripción lingüística, de lo anterior, expresiones lingüística son necesarias para las entradas y las salidas y sus respectivas características. Las variables lingüística son usadas para describir las entradas y salidas de los sistemas difusos. Comúnmente las variables lingüística son denotadas por  $\tilde{u}_i$  y  $\tilde{y}_i$  para las entradas y salidas del sistema difuso. Una definición mas formal es dada por Lee [29].

## 6.2. Sistema difuso

El mapeo de las entradas hacia las salidas por medio de un sistema difuso esta en parte caracterizada por un conjunto de reglas condición→acción, o en forma modus ponens (Si-entonces),



**Si** premisa **entonces** consecuencia

Usualmente las entradas de los sistemas difusos están asociadas con la premisa, y las salidas del sistema difuso son asociadas con las consecuencias. Estas reglas **Si-Entonces** pueden ser representadas de muchas maneras. Dos formas posibles son: múltiple entrada-múltiple salida (MIMO) y múltiple entrada-una sola salida (MISO). La forma MISO de una regla lingüística es

$$\text{Si } \tilde{u}_1 \text{ es } \tilde{A}_1^j \text{ y } \tilde{u}_2 \text{ es } \tilde{A}_2^k \text{ y } \dots \text{ y } \tilde{u}_n \text{ es } \tilde{A}_n^l \text{ entonces } \tilde{y}_q \text{ es } \tilde{B}_q^p$$

Lo anterior es un conjunto completo de reglas lingüísticas que el experto especifica en como controlar el sistema o proceso. Se puede demostrar que en un sistema de forma MIMO sus reglas pueden ser descompuestas en un número de reglas de sistema MISO usando reglas simples de lógica. Por ejemplo, una regla MIMO con  $n$  entradas y  $m = 2$  salidas

$$\text{Si } \tilde{u}_i \text{ es } \tilde{A}_1^j \text{ y } \tilde{u}_2 \text{ es } \tilde{A}_2^k \text{ y } \dots \text{ y } \tilde{u}_n \text{ es } \tilde{A}_n^l \text{ entonces } \tilde{y}_1 \text{ es } \tilde{B}_1^r \text{ y } \tilde{y}_2 \text{ es } \tilde{B}_2^s$$

Es lingüísticamente equivalente a las dos reglas

$$\text{Si } \tilde{u}_i \text{ es } \tilde{A}_1^j \text{ y } \tilde{u}_2 \text{ es } \tilde{A}_2^k \text{ y } \dots \text{ y } \tilde{u}_n \text{ es } \tilde{A}_n^l \text{ entonces } \tilde{y}_1 \text{ es } \tilde{B}_1^r$$

$$\text{Si } \tilde{u}_i \text{ es } \tilde{A}_1^j \text{ y } \tilde{u}_2 \text{ es } \tilde{A}_2^k \text{ y } \dots \text{ y } \tilde{u}_n \text{ es } \tilde{A}_n^l \text{ entonces } \tilde{y}_2 \text{ es } \tilde{B}_2^s$$

La colección de reglas de control difusas que son expresadas como enunciados condicionales difusos forman la base de reglas o el conjunto de reglas de un controlador lógico difuso. Las reglas de control difusas son más convenientes formularlas en

variables lingüística que en términos numéricos. La elección adecuada de variables de estado del proceso y las variables de control es esencial en el proceso de un sistema difuso, además la elección adecuada de variables lingüística tiene un efecto sustancial en el desempeño de un controlador lógico difuso. La experiencia y el conocimiento de ingeniería juega un papel importante en esta etapa de selección.

En particular la elección de variables lingüística y de sus funciones de membresía tienen una fuerte influencia en la estructura lingüística de un controlador lógico difuso. Típicamente las variables lingüística en un controlador lógico difuso son el estado, error, derivada del error, señal integral del error etc.

Existen dos principales enfoques para la derivación de reglas de control difusas. La primera es un método heurístico en el cual un conjunto de reglas de control difusas es formado por medio de el análisis de la conducta del sistema controlado. Las reglas de control son obtenidas de tal manera que la desviación desde un estado deseado puede ser corregido y los objetivos de control pueden ser alcanzados. La obtención de las reglas es puramente heurística en naturaleza y recae en el conocimiento cualitativo del comportamiento del proceso a controlar. Muchos métodos de ajuste para la selección de reglas han sido estudiados[41, 42].

El segundo enfoque es básicamente un método determinista el cual puede sistemáticamente determinar las estructura lingüística y los parámetros de las reglas de control difuso que satisfacen los objetivos de control y las restricciones del sistema. Mamdani propuso un algoritmo descriptivo [41] para obtener las mejores reglas de control por medio de restringir la respuesta del sistema a una prescrita banda difusa el cual es especificado por reglas difusas. King y Mamdani [42] introducen otro método útil denominado mapeo escalable el cual debe de ser ajustado primero para que la trayectoria del sistema pueda terminar en un estado deseado.

Existen dos propiedades generales de las bases de reglas difusas ;

1. La completad: Existe conclusiones para toda posible entrada al controlador difuso. Intuitivamente un control difuso siempre podrá inferir una adecuada acción de control para todo estado del proceso.
2. Consistencia: Las conclusiones que las reglas realizan no entran en conflicto con conclusiones de otras reglas

Por ultimo, si todos los términos de son utilizados en todas las reglas y una regla es formada por cada posible combinación de los elementos de las premisas entonces existe

$$\prod_{i=1}^n N_i = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_n$$

reglas en la base de reglas. En este caso el numero de reglas crece exponencialmente con un incremento de el numero de entradas al controlador difuso o al incrementar las funciones de membresía.

Los conjuntos difusos y la lógica difusa son utilizados para cuantificar heurísticamente el significado de las variables lingüística, valores lingüístico y reglas lingüística los cuales son especificados por el experto. Sea  $U_i$  que denote un universo de discurso y sea  $\tilde{A}_i^j \in \tilde{A}_i$  el conjunto de las valores lingüístico para una variable linguistica  $\tilde{u}_i$ . La función  $\mu(u_i)$  asociada con  $\tilde{A}_i^j$  que mapea  $U_i$  hacia  $[0, 1]$  es llamada una función de membresía.

$$\mu(u_i) : U \rightarrow [0, 1]$$

Esta función de membresía describe la certeza que un elemento de  $U_i$  denotado por  $u_i$ , con una descripción linguistica  $\tilde{u}_i$  puede ser clasificada lingüísticamente como  $\tilde{A}_i^j$ . Las funciones de membresía son subjetivamente especificadas de una manera heurística de acuerdo a la experiencia o intuición.

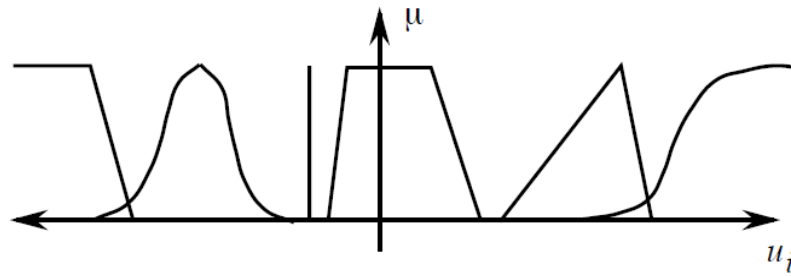


Figura 6.2: Algunas funciones de membresía típicas

Claramente muchas elecciones para la forma de las funciones de membresía son posibles por ejemplo, triangulares, trapezoidales, gaussianas tales como lo muestra la figura (6.2). , y cada una de ellas proveerá un diferente significado para los valores lingüísticos que ellos cuantifican. En la tabla se muestra la caracterización matemática de la función de membresía triangular donde  $c^L$  especifica el punto de saturación y  $w^L$  especifica la pendiente la parte no unitaria y no cerca de  $u^L$ . Similarmente para  $u^R$ , para  $u^C$  se nota que  $c$  es el centro de el triángulo y  $w$  es el ancho de la base.

	Función de Membresía Triangular	
Izquierda	$u^L(u) = \begin{cases} 1 \\ \max \left\{ 0, 1 + \frac{c^L - u}{0,5w^L} \right\} \end{cases}$	si $u \leq c^L$ de otro modo
Centro	$u^C(u) = \begin{cases} \max \left\{ 0, 1 + \frac{u - c}{0,5w} \right\} \\ \max \left\{ 0, 1 + \frac{c - u}{0,5w} \right\} \end{cases}$	si $u \leq c$ de otro modo
Derecha	$u^C(u) = \begin{cases} \max \left\{ 0, 1 + \frac{u - c^R}{0,5w^R} \right\} \\ 1 \end{cases}$	si $u \leq c^R$ de otro modo

El proceso de fusificación esta relacionado con la vaguedad y la imprecisión de un lenguaje natural como el humano. La fusificaciones es una valoración subjetiva el

cual transforma una medida en una valoración de una valor subjetivo y por lo tanto podría ser definido como un mapeo desde un espacio de entrada observado hacia conjuntos difusos in ciertos universos de discursos de entrada. La fusificacion juega un rol importante en el trato con información incierta el cual puede ser objetiva o subjetiva naturalmente.

En aplicaciones de control difuso los datos observados son comúnmente nítidos (crisp en ingles). Ya que la manipulación de datos en un controlador lógico difuso es basado en la teoría de conjuntos difusos , la fusificacion es necesario durante una etapa previa. La experiencia con el diseño de un Controlador lógico difuso recomiendan las principales formas siguientes para el trato del proceso de fusificacion

Un operador de fusificacion conceptualmente convierte un valor nitido en un singleton difuso dentro de cierto universo de discurso. Básicamente un singleton difuso es un valor preciso y de ello ninguna fusificacion es introducido por el proceso de fusificacion en este caso.

Esta estrategia ha sido ampliamente usada en aplicaciones de control lógico difuso ya que es natural y fácil de implementar. Se interpreta como una entrada  $x_0$  como un conjunto difuso  $A$  con la función de membresía  $\mu_A(x) = 0$  excepto en el punto  $x_0$  en el cual  $\mu_A(x) = 1$ .

El criterio del máximo produce el punto en el cual la distribución posible de la acción de control difusa alcanza su máximo valor. Una salida nítida  $y_q^{\text{crisp}}$  es escogida como el punto en el universo de discurso de salida  $Y_q$  para el cual el total de los conjuntos implicados  $B_q$  alcanza su valor máximo

$$y_q^{\text{crisp}} \in \left\{ \arg \sup \left\{ \mu_{B_q}(y_q) \right\} \right\}$$

De lo anterior  $\arg \sup_x \{ \mu(x) \}$  regresa el valor de  $x$  que resulta en el supremo

valor alcanzado por la función de membresía  $\mu(x)$ . En ocasiones el supremo puede ocurrir en mas de un punto en  $Y_q$  lo cual se puede evitar usando el criterio del mínimo para representar la implicación y usando funciones de membresía triangulares en el universo de discurso de las salidas.

La estrategia de la media del método máximo genera una acción de control los cuales representan el valor medio de todas las acciones de control locales cuya funciones de membresía alcanzan el máximo. Mas especifico, en el caso de un universo de discurso discreto, la acción de control puede ser expresada como:

$$z_0 = \sum_{j=1}^l \frac{w_j}{l}$$

donde  $w_j$  es el valor de soporte en cuya función de membresía alcanza el máximo valor  $\mu_z(w_j)$ , y  $l$  es el numero de tales valores de soporte.

Una salida nítida  $y_q^{\text{crisp}}$  es escogida usando el centro de área y el área de cada conjunto difuso implicado, lo cual es dado por:

$$y_q^{\text{crisp}} = \frac{\sum_{i=1}^R b_i^q \int_{y_q} \mu_{B_q^i}(y_q) dy_q}{\sum_{i=1}^R \int_{y_q} \mu_{B_q^i}(y_q) dy_q}$$

donde  $R$  es el numero de reglas,  $b_i^q$  es el centro de área de la función de membresía de  $B_q^i$  asociada con el conjunto difuso implicado  $B_q^i$  para la  $i$ -ésima regla, además

$$\int_{y_q} \mu_{B_q^i}(y_q) dy_q$$

denota el área bajo  $\mu_{B_q^i}(y_q)$ . El método de centro de gravedad es fácilmente calculado ya que es común encontrar expresiones cerradas para el termino  $\int_{y_q} \mu_{B_q^i}(y_q) dy_q$ , el cual es el área bajo la función de membresía. El área bajo cada conjunto difuso implicado debe de poder ser calculable, por lo tanto el área bajo cada una de las funciones de membresía de la salida ( que son usados en la consecuencia de una regla) debe de

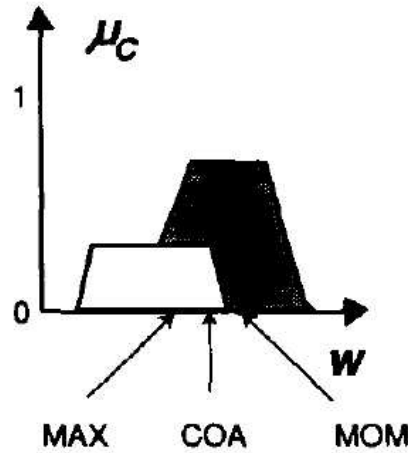


Figura 6.3: Representación diagramática de varias estrategias de desdifusificación

ser finita (esta es la razón por la que no se puede saturar la funciones de membresía en el borde más exterior de el universo de discurso de la salida. Además el sistema difuso debe de estar definido por lo que

$$\sum_{i=1}^R \int_{y_q} \mu_{B_q^i}(y_q) dy_q \neq 0$$

para todo  $u_i$ . Este valor será diferente de cero si existe una regla que este activada para toda posible combinación de las entradas al sistema difuso y los conjuntos difusos resultantes no tengan área con valor cero.

La figura (6.3) muestra una interpretación gráfica de varias estrategias de desdifusificación. Braa and Rutherford [45] presentan análisis detalladas de varias estrategias de desdifusificación y concluye que el método del centro de gravedad genera mejores resultados. Sin embargo la estrategia el método de la media del máximo genera mejor rendimiento en estado transitorio mientras que el método de centro de gravedad ofrece un mejor desempeño en estado estacionario [40].

Cuando la estrategia de desdifusificación por el método del centro de gravedad es empleado resulta que el desempeño del controlador lógico difuso es similar a aquellas obtenidas con un controlador convencional PID [46].

### 6.3. Simulaciones

Para analizar el desempeño de los controladores lógicos difusos, se propone el empleo de un controlador difuso para el sistema de levitación magnético utilizando el método de inferencia Mamdani con operaciones lógicas difusas:

- Intersección: Mínimo
- Unión: Máximo

Las entradas al sistema difuso fueron seleccionadas de la siguiente manera:

- Error ( $e$ )
- Derivada del error ( $\dot{e}$ )

Definimos

$$\begin{aligned} e &= x_1 - x_{1ref} \\ \dot{e} &= \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_{1ref}}{dt} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Posición de la bola metálica} \\ x_{1ref} &= \text{Señal de referencia} \end{aligned}$$



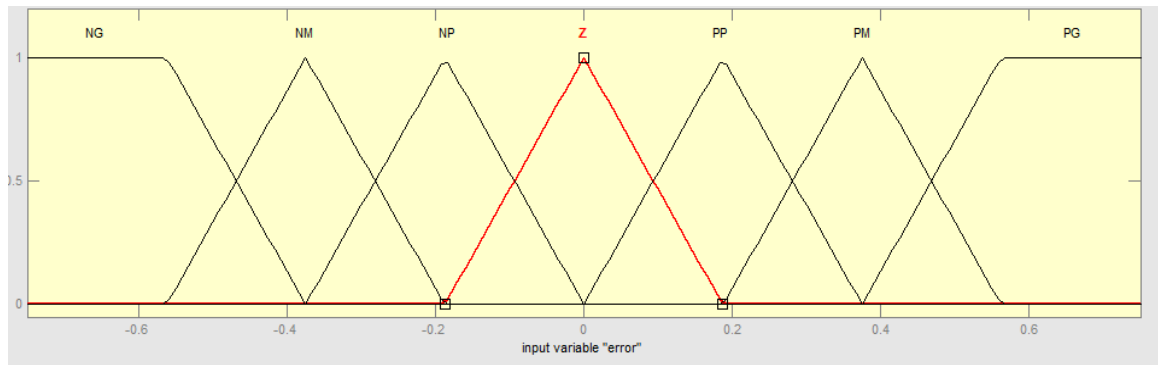


Figura 6.4: Funcion de membresia entrada  $e$  al sistema difuso

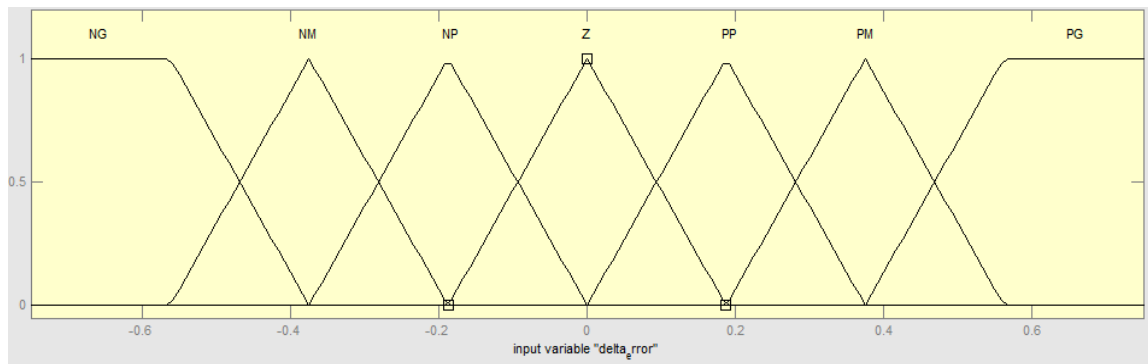


Figura 6.5: funcion de membresia entrada  $\dot{e}$  al sistema difuso

Con un universo de discurso para las entradas  $e, \dot{e}$  en  $[-0,75, 0,75]$ .

Para la salida del sistema difuso se escoge:

- Diferencia de potencial en volt ( $u$ ) con un universo de discurso en  $[-2, 2]$

Las funciones de membresías para las entradas y salidas del sistema difusos tiene la forma de triángulos isosceles.

Las valores lingüística empleados en el sistema difuso se muestran en la tabla (6.1)

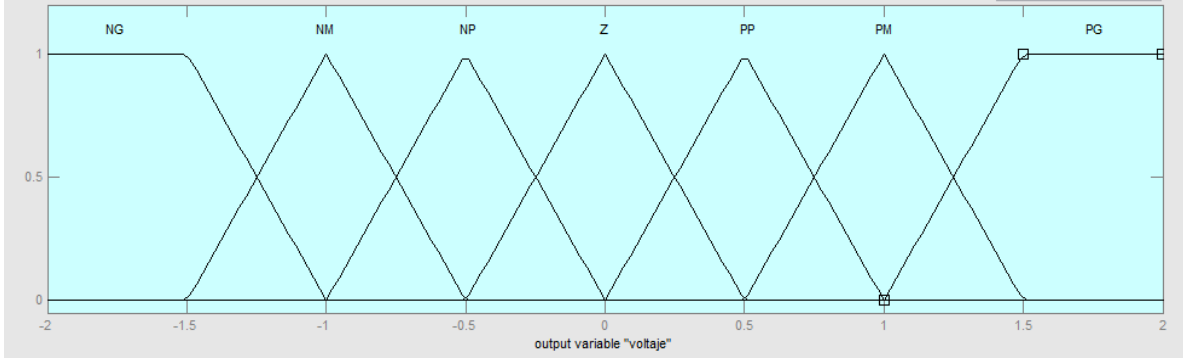


Figura 6.6: Funcion de mebresia de salida  $V$  del sistema difuso

	<b>Valor lingüístico</b>
<b>PG</b>	Positivo Grande
<b>PM</b>	Positivo Mediano
<b>PP</b>	Positivo Pequeño
<b>Z</b>	Cero
<b>NP</b>	Negativo Pequeño
<b>NM</b>	Negativo Mediano
<b>NG</b>	Negativo Grande

Cuadro 6.1: Valores linguisticos empleados en el sistema difuso

$\frac{e}{\dot{e}}$	<b>PG</b>	<b>PM</b>	<b>PP</b>	<b>Z</b>	<b>NP</b>	<b>NM</b>	<b>NG</b>
<b>NG</b>	Z	NP	NM	NG	NG	NG	NG
<b>NM</b>	PP	Z	NP	NM	NG	NG	NG
<b>NP</b>	PM	PP	Z	NP	NM	NG	NG
<b>Z</b>	PG	PM	PP	Z	NP	NM	NG
<b>PP</b>	PG	PG	PM	PP	Z	NP	NM
<b>PM</b>	PG	PG	PG	PM	PP	Z	NP
<b>PG</b>	PG	PG	PG	PG	PM	PP	Z

Cuadro 6.2: Tabla de reglas para el sistema de levitacion magnetica

<b>Parámetro</b>	
Masa ( $m$ )	12 Gramos
Resistencia ( $R$ )	30 Ohm
Inductancia ( $L$ )	0.8 Henry

Cuadro 6.3: Parametros del sistema de levitacion

La base de reglas mostrada en la tabla (6.2) fue generada siguiendo las recomendaciones encontradas en [4, 29, 47, 48, 49]

El método de desfusificación escogido es el Centro de gravedad, ya que ofrece rapidez computacional y cero error en estado estacionario. Los parámetros del sistema escogidos para las simulaciones son se muestran en la tabla (6.3).

### 6.3.1. Señal de referencia: Escalón

Se escogió como señal de referencia un escalón con las características:

$$x_{1ref}(t) = 20 \text{ mm}$$

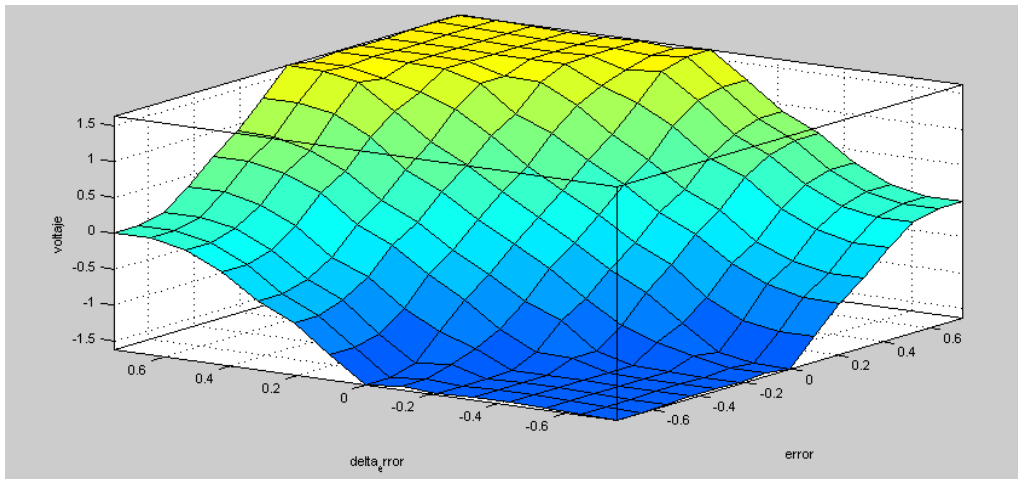


Figura 6.7: Superficie de salida del controlador logico difuso

Factor	Valor
Error $e$	26
Cambio error $\dot{e}$	5
Voltaje $u$	400

Cuadro 6.4: Factores de escalamiento de los universos de discurso

Con condiciones iniciales

$$x_1(0) = 16 \text{ mm}$$

Los factores de escalamiento de los universos de discurso se muestran en la tabla (6.4).

Las figuras (6.8),(6.9) ,(6.10) muestran las gráficas de la posición de la bola metálica, la corriente consumida por el circuito eléctrico y la señal de control en volts respectivamente.

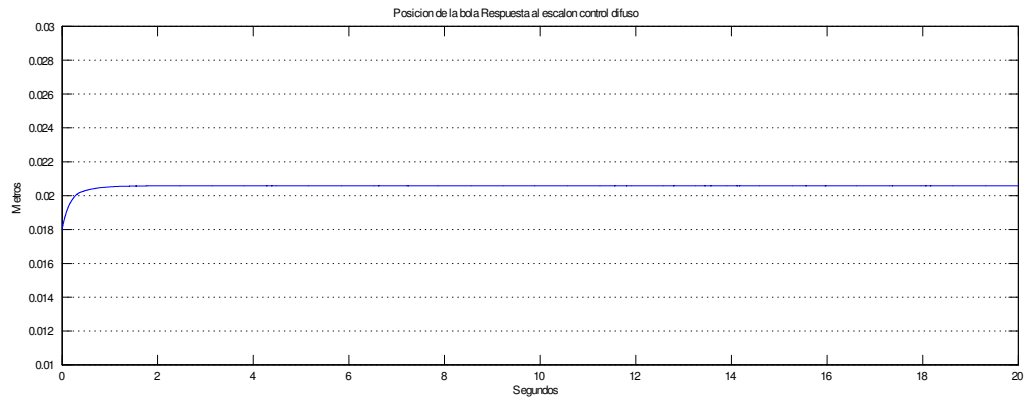


Figura 6.8: Posicion de la Bola Metalica;Respuesta al escalon; Control Logico Difuso

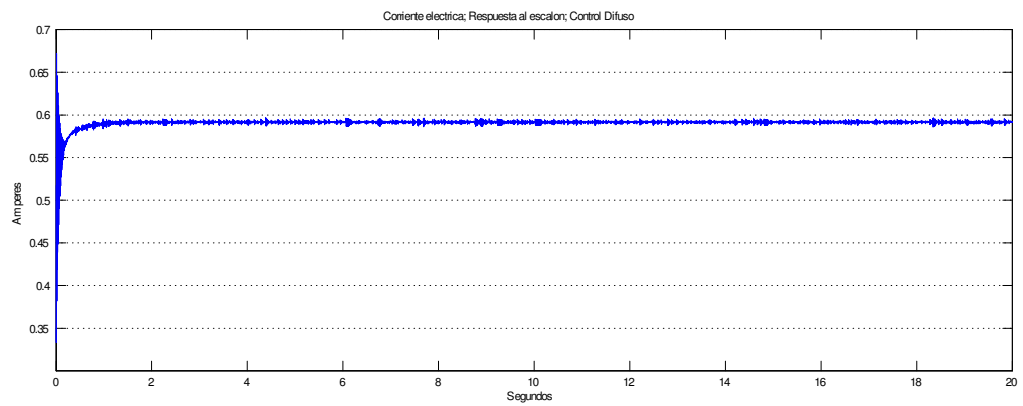


Figura 6.9: Corriente electrica; Respuesta al escalon; Control logico Difuso

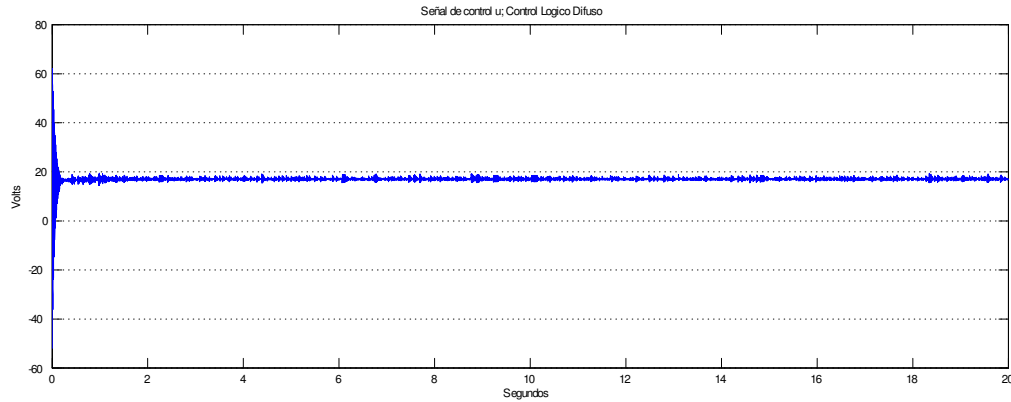


Figura 6.10: Señal de Control ; Respuesta al escalon; Control Logico Difuso

Factor	Valor
Error $e$	130
Cambio error $\dot{e}$	5
Voltaje $u$	150

Cuadro 6.5: Factores de escalamiento de los universos de discurso

### 6.3.2. Trayectoria Sinusoidal de Referencia

Se escogió como señal de referencia un escalón con las características:

$$x_{1ref}(t) = 0,0005 \text{ sen}(4\pi t) + 0,0178 \text{ metros}$$

Con condiciones iniciales

$$x_1(0) = 19 \text{ mm}$$

Los factores de escalamiento de los universos de discurso se muestran en la tabla (6.5).

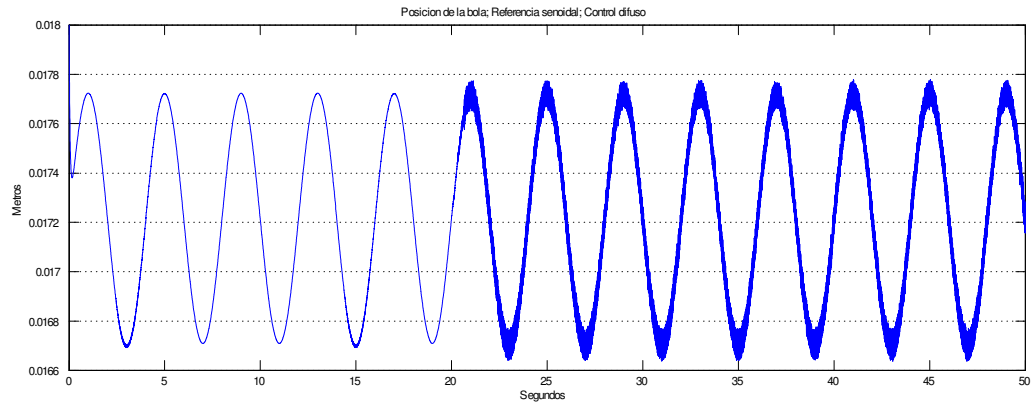


Figura 6.11: Posición de la bola a una referencia senoidal; Control Logico difuso

Para validar las propiedad de robustez del controlador lógico difuso se añadió un ruido blanco gaussiano en cada variable de estado  $x_i(t)$  con  $i = 1, 2$  en la mitad de cada tiempo de simulación. El ruido blanco Gaussiano es equivalente al ruido eléctrico encontrado en todos los equipos de medición tales como sensores, tarjetas de adquisición de datos etc [26, 27]. Las simulaciones son ejecutadas con el ruido blanco gaussiano como perturbación aditiva a cada uno de los estados del sistema.

La figuras (6.11),(6.12) ,(6.13) muestran las gráficas de la posición de la bola metálica, la corriente consumida por el circuito eléctrico y la señal de control en volts respectivamente. Hay que notar que la corriente eléctrica se mantiene siempre positiva y acotada  $x_3 \geq 0$  evitando problemas se singularidades en el modelo matemático del sistema de levitación magnética.

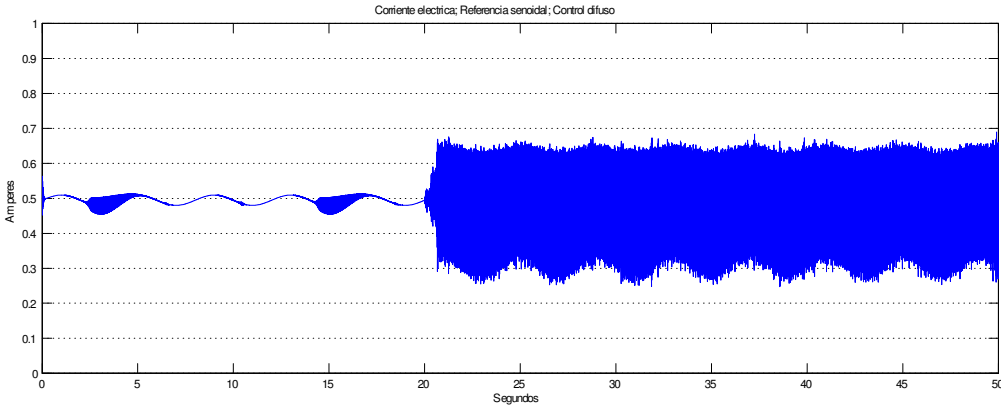


Figura 6.12: Corriente electrica; Referencia senoidal; Control difuso

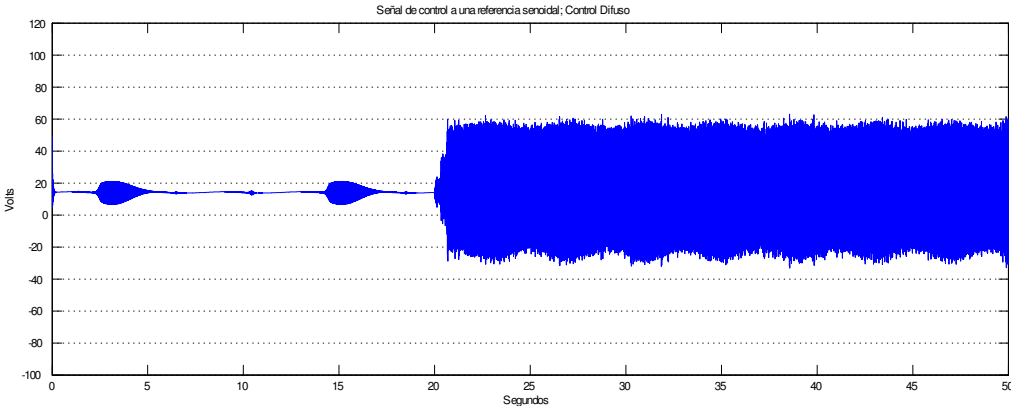


Figura 6.13: Señal de control  $u$  a una referencia senoidal ; Control logico difuso





# Capítulo 7

## Comparaciones y conclusiones

### 7.1. Comparaciones

Una red neuronal feedforward  $2 \times 12 \times 1$  con una capa oculta, entrenada por medio del algoritmo Levenberg-Marquardt es propuesta para tratar de aproximar el comportamiento no lineal del parámetro electromagnético  $C$  y por ende obtener un modelo matemático más preciso, dicha red neuronal es entrenada con una serie de datos experimentales extraídos del prototipo físico provisto por INTECO el cual se encuentra en el laboratorio del departamento de control automático.

El carácter inestable de los puntos de equilibrio del sistema de levitación genera una necesidad de leyes de control que gobiernen su dinámica, bajo este enfoque, fueron escogidos tres estrategias diferentes de control, con el objetivo de comparar su desempeño en términos de respuesta en estado transitorio y estacionario, sobre elongación, cotas sobre los estados y señales de control, todo lo anterior teniendo como premisa que todos los estados del sistema se encuentran disponibles. La comparación de las estrategias de control se realizaron por medio de simulaciones en las cuales

se mantuvieron iguales los parámetros del sistema, y además evitando problemas de singularidades por medio de mantener acotados los estados del sistema. Para analizar las propiedades de robustez fue añadido a cada estado del sistema una perturbación aditiva en forma de ruido blanco gaussiano. El ruido blanco Gaussiano es equivalente al ruido eléctrico encontrado en todos los equipos de medición experimentales tales como sensores, tarjetas de adquisición de datos.

La primera estrategia de control usada fue la linealización exacta del sistema no lineal por medio de una retroalimentación completa de estados, en este apartado, se analiza el modelo matemático para hallar el grado relativo del sistema el cual coincide con el grado del mismo, por lo anterior es posible encontrar una retroalimentación de estados que linealice el sistema no lineal, los resultados de simulación muestran una respuesta lenta en estado transitorio y una gran sobre elongación al aplicar señales de referencia sinusoidales, además de una gran sensibilidad a la variación del parámetro electromagnético  $C$  por lo que la necesidad de un modelo matemático preciso para la sintonización de los parámetros de la ley de control es fundamental, la perturbación aditiva agregada a los estados del sistema degradado en medida amplia el desempeño del controlador por lo que se omite las gráficas correspondientes a este escenario de simulación.

Analizando la estructura del modelo en el espacio de estados del sistema de levitación se puede encontrar que este reúne las condiciones para ser considerado que se encuentra en una forma pure-strict-feedback form, la cual es una generalización de los sistemas en forma strict-feedback, Teodorescu [22] desarrolla un método constructivo para hallar una ley de control estabilizante por medio de la retroalimentación completa de los estados del sistema y de funciones de control de Lyapunov, la cual es implementable al modelo de levitación magnética presentado, simulaciones fueron realizadas para analizar el desempeño de esta ley de control, mostrando mejores re-

sultados en estado transitorio que la linealización exacta, sin embargo muestra una sensibilidad reducida hacia la variación del parámetro electromagnético  $C$  ya que este es utilizado en la retroalimentación en la ley final de control, por otra parte al añadir la perturbación aditiva a los estados del sistema muestra un gran desempeño en el seguimiento de una referencia sinusoidal. Por lo anterior la técnica de control por backstepping se muestra como una técnica con muy buen rendimiento, en contraste, una implementación experimental de este tipo de controladores sería costoso ya que requiere una amplia gama de sensores para medir los estados del sistema necesarios para la retroalimentación.

Por último se propuso un controlador lógico difuso tipo Mamdani con una base de 49 reglas, donde las entradas al sistema difuso es el error y el cambio en el error, la salida del controlador es la diferencia de potencial aplicado al circuito electromagnético, esta estrategia es elegida ya que para implementarla no es necesario una representación matemática exacta para lograr un adecuado desempeño del controlador, siendo solo necesario conocer a plenitud el comportamiento del sistema a controlar, simulaciones fueron realizadas para evaluar el desarrollo del controlador difuso mostrando gran robustez ante las variaciones en el parámetro electromagnético  $C$ , además de tener un estado transitorio rápido sin sobre elongaciones. También fue agregado una perturbación aditiva en forma de ruido blanco gaussiano a los dos estados que participan como entradas al sistema difuso, donde también demostró robustez, la gran ventaja mostrada por este controlador es que para su sintonización solo es necesario modificar los factores de escalamiento del universo de discurso y no realizar un análisis completo como las dos anteriores estrategias de control, agregando, en una aplicación experimental repercutiría en un menor costo ya que requiere un menor número de sensores.

## 7.2. Conclusiones

Los sistemas de suspensión magnéticos vistos como una clase de suspensión libre de contacto y por lo tanto sin desgaste, juega un rol importante en el control de movimientos precisos por lo que ha sido estudiado en muchos campos de investigación tales como ingeniería mecánica, control automático, ingeniería biomédica etc, por lo anterior el desarrollo de nuevas estrategias para este sistema es un campo de investigación en continuo descubrimiento.

Con el objetivo de alcanzar un mejor desempeño total, compensaciones deben de ser tomadas entre la precisión, tiempo de ascenso en estado transitorio, overshoot y desviación en estado estacionario en los sistemas de levitación magnética. En el marco anterior, la presente tesis entrega un análisis del sistema partiendo desde las leyes fundamentales que rigen los fenómenos electromagnéticos y de movimiento presentes en el sistema de levitación, el modelo matemático es desarrollado hasta expresarlo en forma de variables de estado, donde los estados son escogidos para ser la posición de la bola metálica, la velocidad de la bola y la corriente eléctrica que consume el circuito, en esta parte, fueron analizados los puntos de equilibrios del sistema dando como resultado que estos se componen por un continuo de puntos de equilibrios y no por puntos aislados, utilizando el método indirecto de Lyapunov para resolver la estabilidad de puntos de equilibrio de sistemas no lineales se demuestra que el continuo de puntos de equilibrio del sistema de levitación magnética son inestables como se podría suponer desde un principio.

La existencia de un continuo de puntos de equilibrio del sistema de levitación magnética implica que el parámetro de fuerza electromagnética  $C$  utilizado en el modelo matemático del mismo, varía de acuerdo a la distancia de la bola metálica y la corriente consumida por el circuito eléctrico en el instante de levitación la cual

sucede en los puntos de equilibrio, lo anterior lleva a visualizar que el parámetro electromagnético  $C$  tiene una variación del tipo no lineal dependiente de la posición y corriente de equilibrio.

### 7.3. Trabajo futuro

En los trabajos a futuro propuestos en el presente trabajo

- La implementación experimental de las leyes de control expuestas anteriormente utilizando la red neuronal propuesta para aproximar el parámetro electromagnético  $C$ , y evaluar el rendimiento frente a estrategias de control robusto.
- Agregar al análisis del sistema de levitación un grado de libertad adicional lo que llevaría a un panorama mas completo del sistema.
- Lograr una estrategia de control donde se optimice la corriente consumida por el circuito electromagnético utilizada para levitar la bola.
- Explorar estrategias de control donde los estados del sistema usados para la retroalimentación sean mínimo, y con ello minorizar el costo de una aplicación experimental.



# Bibliografía

- [1] Hajjaji, A.E. y Guladsine,M. Modeling and non linear control of magnetic levitation system. IEEE transaction on industrial electronic Vo.48 No.4 2001
- [2] Wong, T.H Desing and levitation of a magnetic levitation control system- an undergraduate project IEEE transaction on education Vol.29 No.4 1986
- [3] Hurley, W.G Electromagnetic design of a magnetic suspension system IEEE transaction on education Vo.40 No.2 1997
- [4] Barie W. y Chiasson, T. Linear and nonlinear state-space controllers for magnetic levitation International journal of system science vol.27 No.11 1996
- [5] Cho, D. ; Kato, Y.; Spilman, D. Sliding mode and classical control of magnetic levitation system IEEE control system 1993.
- [6] INTECO Magnetic levitation system ; user's manual Krakow, March 2005
- [7] E. Alba and J.F. Chicano ; Training Neural networks with GA hybrid algorithms; lectures in computer science;2004 ; Spriger-Verlag
- [8] Jayawant B.V. Electromagnetic suspension and levitation



- [9] Taghirad H. D. ; Abrishamchian M. ; Ghabcheloo R. Elegtromagnetic levitation system: An experimental approach
- [10] Poznyak A. Modelos Matematicos
- [11] Khalil Hassan K. Nonlinear systems Third edition Prentice Hall 2002
- [12] Shiao Y.S. Design and implementation of a controller for a magnetic levitation system Proceedings of the National Science Council Vol. 11 No.2 2001
- [13] Haykin, Simon. Neural networks a comprehensive foundation second edition 1999 Prentice Hall
- [14] Hagan Martin T.; Mehaj , Mohammad B. Training Feedforward Networks with the manquardt algorithm IEEE transaccions on neuran networks Vol.5, No. 6 November 1994
- [15] Ogata, Katsuhiko Ingenieria de control moderna 4 edicion Prencite Hall 2006
- [16] R. Sepulchre, M. Jankovic, P. Kokotovi; Constructive nonlinear control, Springer-Verlag, London U.K. 1997
- [17] N.F. Al-Muthairi ; M. Zribi; Sliding mode control of a magnetic levitation system, Mathematical problems in engineering ; 23 de febrero 2004
- [18] H. Sira-Ramirez; S.Ahmad , M. Zribi ; Dynamical feedback control of robotic manipulators with joint flexibility; IEEE transactions on systems,Man and cybernetics 1992.
- [19] Cihan Karakuzu,Sitki ozturk ; A comparision of fuzzy, neuro and classica control techniques based on an experimental application, university of quafaquaz, Julio 200

- [20] Alberto Isidori; Nonlinear Control Systems ; Third Edition , Springer 1995
- [21] M. Krstic, I. Kanellakopoulos , P.M. Kokotovic Nonlinear and adaptive control design New York:Wiley 1995.
- [22] C.S. Teodorescu, N. Sakamoto, S. Olaru ; Controller design for sine wave tracking on magnetic levitation system: A comparative simulation study IEEE 2010 International conference on control applications
- [23] C.S. Teodorescu, H. Siguerdidjane, S. Olaru, A. Arzande. Towards robust control with constraints for a class of dynamical systems: Theory and application. 2010 American Control Conference
- [24] A. Henni, H. Siguerdidjane ; Robust nonlinear control of a magnetic suspension system; Pro. of the IEEE International Conference in Control Applications, Istanbul 2003.
- [25] R. Sepulchre, M. Jankovic, P.V. Kokotovic; Interlaced system and recursive designs for global stabilization ; 4<sup>th</sup> European Control Conference 1997
- [26] J.R. Brauer, Magnetic Actuators and Sensors, Wiley-IEEE Press, New Jersey USA 2006
- [27] A.M. Pawlac, Sensors and Actuators in Mechatronics: Designs and Applications, Taylor and Francis, New York USA 2007
- [28] Von altrock; fuzzy logic and neurofuzzy applications explained, Prentice Hall 1995
- [29] C.C. Lee ; Fuzzy logic un control systems:fuzzy logic controller part I and Part II, IEEE transactions systems man Cybernetic 1990

- [30] Cihan Karakuzu, A comparison of fuzzy, neuro and classical control techniques based on an experimental application, IEEE 2000
- [31] L.A. Zadeh ; Fuzzy sets, Informat Control 1965
- [32] M.M. Gupta, Y. Tsukamoto ; Fuzzy logic Controllers A perspective ; Proc. Joint Automatic Control Conference ; San Francisco 1980.
- [33] T.Yamakawa; High speed fuzzy controller hardware system; Fuzzy systems simposium ;Japan ;1986
- [34] E.H. Mamdani and S. Assilian ; An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller; International Journal Man. Match. studies vol 7 1975
- [35] W.J. M. Kicker and H.R. Van nauta Lemke; Application of a fuzzy controller in a warm water plant; Automatica vol.12 no. 4 1976
- [36] M. Sugeno and K. Murakami; Fuzzy parking control of model car; 23rd IEEE conf. on desicion and control, Las vegas 1984
- [37] M. Sugeno and M.Nishida; Fuzzy control of model car; Fuzzy sets systems; vol 16 1985.
- [38] T.J. Prock and E.H. Mamdani; A linguistic self-organizing process controller; Automatica vol.15 1979.
- [39] E. Lembessis ; Dynamical learning behavior of a rule-based self-organizing controller; Univ. of London 1984, Ph.D. Thesis
- [40] E.M. Scharf and N.J. Mandic; The application of a fuzzy controller to the control of a multi-degree-freedom robot arm; Industrial applications of fuzzy control 1985.

- [41] N. Baaklini and E. H. Mamdani; Prescriptive methods for deriving control policy in a fuzzy logic controller; *Electr. Letters* vol 11 1975.
- [42] P.J. King and E.H. Mamdani; The application of fuzzy control systems to industrial process; IFAC world congress, MIT 1975.
- [43] Y. Murayama and T. Terano; Optimizing control of diesel engine; *Industrial application of fuzzy control* 1985.
- [44] A. Kaufmann and M.M. Gupta; *Introduction to fuzzy arithmetic*; New york 1985.
- [45] M. Raae and D.A. Rutherford; Fuzzy relations in control settings; *Kybernetes* Vol. No. 3 1978
- [46] W. J. Kicker; Further analysis and applications of a fuzzy logic contro; *Internal Rep* , Queen mary college , London
- [47] A.K. Ahmad, Z. Saad; Control of magnetico levitation systems using fuzzy logic controller. *Second international conference on computational intelligence, modelling and simualtion*; IEEE 2010
- [48] V. Dolga and L. Dolga ; *Modelling and simulation of a magnetic levitation system*; *Fascicle of management and technological engineering*, Vol. VI 2007
- [49] K. M. Passino and S. Yurkovich; *Fuzzy control*; Addison-Wesley; California; 1998
- [50] M.T. Hagan, H. B. Demuth, M. Beale; *Neural network design*; PWS Publishing Company, 1996

El jurado designado por el departamento de control automático del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Aprueba la tesis:

*“Control no lineal de un sistema de levitación magnética basado en estimación de parámetros electromagnéticos”*

Que presenta el Ing. David Luviano Cruz, Para su examen Final de Maestro en ciencias con la especialidad de control automatico, el día 10 de agosto del año 2012.

---

Dr. Wen Yu Liu

---

Dr. Marco A. Moreno Armendáriz

---

Dr. Ieroham Solomon Barouh