Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco
Departamento de Control Automático

# Sobre la solución al problema de aproximación y al problema de la base en espacios de Banach separables

## TESIS

Que presenta

Miguel Ángel Maldonado Rosas

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Control Automático

Director de la Tesis:

Dr. Gabriel Daniel Villa Salvador

México, D.F. Noviembre 2013

# Agradecimientos

Agradezco a todas aquellas personas que de alguna manera han intervenido en mi formación académica, de manera especial al Profesor Gabriel Villa por su invaluable ayuda y paciencia en la realización del presente trabajo.

A mis padres y hermanos que, de una u otra forma, me han animado mucho con la continuación de mis estudios y, en particular, me han alentado en la realización de esta tesis.

A mis amigos de la maestría quienes hicieron de estos últimos dos años una experiencia extraordinaria.

A mi nueva amiga y a los de toda la vida quienes son ya una parte muy importante de mí, ustedes me han hecho pasar momentos inolvidables.

Agradezco también al CONACyT por el apoyo económico, sin el cual me hubiera sido imposible continuar mis estudios.

A todos ¡muchas gracias!

# Índice general

# Resumen

Las bases algebraicas, para los espacios lineales de dimensión finita, o las bases ortonormales, en los espacios de Hilbert, son herramientas muy importantes para el estudio de dichos espacios. Si queremos investigar a los espacios de Banach en general, es natural tratar de encontrar una noción correspondiente. La base de Schauder es una alternativa a esto, dicha base ha mostrado ser una buena herramienta para el estudio de la estructura de los espacios de Banach clásicos. Sin embargo, no todo espacio de Banach tiene una base de Schauder.

El problema de la existencia de una base de Schauder en los espacios de Banach separables es conocido como el problema de la base, éste fue resuelto, en 1973, por Per Enflo. Él probó que existe un espacio de Banach separable que tiene un subespacio sin base de Schauder, incluso cuando el espacio completo tiene una.

En esta tesis se presenta el problema de la base, su relación con el problema de aproximación y se muestra de manera más detallada la construcción del espacio de Banach que da solución, de manera simultánea, a dichos problemas.

# Abstract

The algebraic basis, for a finite dimensional linear space, or the orthonormal basis, in the Hilbert spaces, are very importan tools for the study of these spaces. If we want to investigate the general Banach spaces, it is natural to try to find a corresponding notion. The Schauder basis is an alternative to this, and it has proved to be an extremely useful tool in the study of the structure of classical Banach spaces. However, not every Banach space has a Schauder basis.

The problem of the existence of a Schauder basis in every separable Banach space is known as the basis problem, it was solved, in 1973, by Per Enflo. He proved that there exist a separable Banach space that had a subspace without Schauder basis, though the whole space has one.

This thesis presents the basis problem, its relation with the approximation problem and is shown in more detail the construction of the Banach space that resolved the above problems.

# Introducción

La idea de una base para los espacios lineales es la de un conjunto mínimo de elementos tales que, puestos juntos de una manera única, podemos obtener cualquier otro elemento del espacio, es decir, son nuestros bloques para construir el espacio completo.

En cualquier espacio lineal podemos formar combinaciones lineales «finitas», de aquí se parte para construir lo que se llama una *base de Hamel* (o *algebraica*) para dicho espacio lineal. Esta base sirve perfectamente para los espacios de dimensión finita.

Ya que todo espacio de Banach es, en particular, un espacio lineal, tiene una base de Hamel. Sin embargo, al tratar a los espacios de Banach infinito–dimensionales con las bases de Hamel empiezan a aparecer ciertas dificultades como son, entre otras, no poseer de forma explícita la base de Hamel, la no continuidad de los coeficientes funcionales, una cantidad no numerable de elementos de dicha base, etc. Por ello es necesario encontrar una noción de base adecuada para los espacios de Banach de dimensión infinita.

Los espacios de Banach tienen una norma y, por lo tanto, una idea natural de convergencia. Esta es una buena razón para no restringirnos únicamente a combinaciones lineales «finitas», así que se aprovecha la topología de los espacios de Banach para generalizar el concepto de combinación lineal «finita» al de serie, lo que sería una combinación lineal «infinita». De lo anterior nace la *base de Schauder* para los espacios de Banach y con ello todo elemento del espacio puede ser representado como una serie.

Se sabe que no todo espacio de Banach tiene una base de Schauder, por ello surge la pregunta de cómo saber si un espacio tiene o no una base de Schauder. Desafortunadamente no existe una respuesta a esta pregunta, por lo que surgen otras, más concretas, que nos llevarán en la misma dirección.

Una propiedad que tiene todo espacio de Banach con base de Schauder es que es separable. Por otro lado, muchos de los espacios separables conocidos tenían base de Schauder y del resto no se conocía una base pero tampoco se sabía si podían tenerla o no.

Por lo anterior, surge la pregunta de si todo espacio de Banach separable tiene una base de Schauder, esta interrogante se conoce como el *Problema de la Base* y tiene una respuesta. El Problema de la Base fue resuelto de manera indirecta, de hecho dando la solución a otro problema.

Todo espacio de Banach que cuenta con base de Schauder tiene también lo que se conoce como la *Propiedad de Aproximación*, esto es que todo *operador completamente continuo* es límite uniforme de *operadores de rango finito*. Se conocía que en todo espacio de Hilbert cada operador completamente continuo es límite uniforme de operadores de rango finito, es decir, que tiene la Propiedad de Aproximación. La pregunta natural era entonces si sucedía lo mismo para todo espacio de Banach en general y a esto se le conoce como el *Problema de Aproximación*.

Per Enflo construyó en 1973, cuarenta años después de haber sido formulado el problema, un espacio de Banach separable en el que algunos operadores completamente continuos no son límite uniforme de operadores de rango finito y así, dicho espacio, no puede tener una base de Schauder.

El presente trabajo formula el Problema de la Base y el de Aproximación, la relación entre éstos y da una explicación más detallada de su solución, es decir, de la construcción del espacio que da respuesta, de forma negativa, a los problemas anteriores.

# Capítulo 1

# Espacios de Banach y la Propiedad de Aproximación

Los espacios de Banach serán los principales objetos matemáticos de nuestro interés en este trabajo. Estos espacios tiene una estructura algebraica, a saber, la de espacio lineal[1] y otra topológica, la cual es dada por una norma. Antes de introducir formalmente el concepto de espacio de Banach (Definición 1.7) enunciaremos ciertos conceptos que iremos necesitando a lo largo del presente trabajo.

## 1.1. Espacios de Banach

Un espacio lineal sobre el campo $\mathbb{K}$ es un conjunto $X$, cuyos elementos llamaremos vectores, que tiene definidas dos operaciones $+ : X \times X \to X$ y $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$, las cuales cumplen ciertas propiedades que no se enuncian pero pueden ser encontradas en [10]. El campo, representado por $\mathbb{K}$, será o el campo de los número reales $\mathbb{R}$ o el campo de los números complejos $\mathbb{C}$ indistintamente y sus elementos serán llamados escalares. De ahora en más usaremos la frase «espacio lineal» por la cual se deberá entender «espacio lineal sobre el campo $\mathbb{K}$».

**Definición 1.1.** *Sea $E$ un subconjunto de un espacio lineal $X$. Decimos que $E$ es* ***linealmente independiente*** *si para cada subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq E$ y para algunos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tenemos que*

$$\text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \quad \text{entonces} \quad \alpha_i = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n,$$

*donde la suma finita se denominará* ***combinación lineal****.*

[1]El término *vectorial* es equivalente a *lineal*, pero nosotros preferimos usar el segundo.

**Definición 1.2.** *El **espacio lineal generado** por un subconjunto $E := \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ de un espacio lineal $X$, es el espacio lineal mínimo que contiene a $E$. Explícitamente es el conjunto de todas la combinaciones lineales de vectores de $E$, es decir,*

$$\mathcal{L}(E) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i} : \lambda_i \in \mathbb{K}, x_{\alpha_i} \in E \text{ para } i = 1, \ldots, n \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.1}$$

Las definiciones anteriores únicamente tienen que ver con la parte algebraica de un espacio de Banach. Ahora pasemos a la parte topológica de los espacios de Banach y en particular a una de sus componentes principales, la convergencia.

**Definición 1.3.** *Un espacio lineal $X$ es **normado** cuando tiene definida una función, llamada **norma**, $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ cumple*

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

*donde $|\alpha|$ es el módulo usual en $\mathbb{K}$.*

Todo espacio normado $X$ es, en particular, un espacio métrico ya que la función $d$ dada por $d(x, y) := \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$, es una métrica en $X$. Así los conjuntos, indexados por $r > 0$,

$$B_r(x) := \{y \in X : \|x - y\| < r\}$$

forman una base de vecindades para el punto $x$ de $X$, y el conjunto

$$\{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$$

genera una topología en el espacio normado $X$ [6]. A esta topología es a la que nos referiremos cuando se hable de la topología de un espacio normado.

**Definición 1.4.** *Sean $X$ un espacio lineal y $\{x_n\}$ una sucesión*[2] *en $X$. Decimos que $\{x_n\}$* ***converge*** *a $x \in X$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

*lo que escribiremos como $x_n \to x$.*

**Definición 1.5.** *Una* ***sucesión de Cauchy*** *o* ***sucesión fundamental*** *en un espacio normado*[3] *$\{x_n\}$ es aquella en la cual, dado un $\epsilon > 0$, podemos encontrar un número natural $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que $\forall m, n > n_0$ se cumpla que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.*

Las sucesiones de Cauchy tienen la propiedad de que sus elementos «finales», cuando $n \to \infty$, se van acercando tanto como deseemos, esto es que $\epsilon \to 0$, tan sólo con tomar un índice suficientemente grande. Dichas sucesiones tienen una relación muy cercana con las sucesiones convergentes. Tenemos que, en un espacio métrico, toda sucesión que converge es de Cauchy [10], sin embargo la inversa no es siempre cierta. Sin embargo, como en las sucesiones de Cauchy sus elementos se acercan tanto que pareciera que se acercan a algún límite, podemos «agregar» dicho punto al espacio para hacer que dicha sucesión converja. De lo anterior surge el concepto de espacio *completo*.

**Definición 1.6.** *Un espacio normado se llama* ***completo*** *cuando toda sucesión de Cauchy del espacio es convergente.*

Los espacios en los que no toda sucesión de Cauchy converge los podemos completar de manera única al agregar los «puntos» a los cuales las sucesiones de Cauchy no convergentes «quieren» converger. Por ello podemos hablar siempre de espacios completos. El espacio original resultará ser un subespacio *denso* en su completación [10].

**Definición 1.7.** *Un* ***espacio de Banach*** *es un espacio lineal normado completo.*

Una de las razones por las que queremos trabajar con espacios completos es que pretendemos que sus elementos sean representados en forma de series convergentes. Recordemos que la convergencia de las series se obtiene de la convergencia de sucesiones (Definición 1.4),

[2] A lo largo del trabajo representaremos la sucesiones de esta manera, cuando el conjunto es finito se ponen los límites de forma explícita, es decir, $\{x_n\}_{n=1}^{k}$.

[3] La definición es, en general, para los espacios métricos pero, dado que trabajaremos sólo con espacios de Banach, nos restringiremos únicamente a los espacios normados.

en específico de la sucesión de sumas parciales asociada a la serie, de ahí la importancia de la completez.

Antes de continuar con la discusión, daremos algunos ejemplos de espacios de Banach que, posteriormente, serán utilizados como ejemplos o contraejemplos de ciertos hechos. Se pueden encontrar muchos más ejemplos de espacios de Banach en textos como [2].

**Ejemplo 1.8.** *El conjunto*

$$\ell_\infty := \{x = \{x_n\} : x_n \in \mathbb{K}, \{x_n\} \text{ es una sucesión acotada}\}$$

*es un espacio lineal de sucesiones con entradas en* $\mathbb{K}$ *y operaciones entrada a entrada. Además, si definimos una norma en este espacio como* $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$*,* $\ell_\infty$ *es un espacio de Banach [4].*

**Ejemplo 1.9.** *Sean* $\mathfrak{M}$ *una* $\sigma$*–álgebra y* $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *una medida en un conjunto* $X$*. Si* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *es un espacio de medida, y* $1 \leq p < \infty$*, el conjunto*[4]

$$L^p(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es } \mathfrak{M} - \text{medible}, \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

*es también un espacio de Banach con la norma*

$$\|f\| := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

*Para* $p = 2$ *tenemos que* $L^p(X)$ *es un espacio de Hilbert [4].*

**Ejemplo 1.10.** *Sea* $I$ *un conjunto arbitrario. Introducimos el espacio* $\ell_p(I)$*, para* $1 \leq p < \infty$*, como el conjunto de todas las funciones* $f : I \to \mathbb{K}$ *tales que*

$$\sum_{i \in I} |f(i)|^p < \infty,$$

*con la norma*

$$\|f\| := \left( \sum_{i \in I} |f(i)|^p \right)^{1/p}$$

*donde la suma está definida por*

$$\sum_{i \in I} |f(i)|^p = \sup \left\{ \sum_{i \in F} |f(i)|^p : F \text{ es un subconjunto finito de } I \right\}.$$

*Así definido, el espacio* $\ell_p(I)$ *es un espacio de Banach [4].*

[4] Damos por entendido que $f$ representa una clase de equivalencia y no una función como tal.

**Ejemplo 1.11.** *El conjunto $C([a,b])$ formado por todas las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que son continuas es un espacio lineal, con la norma $\|f\| := \sup\{|f(t)| : t\in[a,b]\}$ es un espacio de Banach [4].*

**Definición 1.12.** *Sea $E$ un subconjunto de un espacio lineal normado, decimos que la* ***clausura*** *de $E$, denotada por $\overline{E}$, es el conjunto cerrado mínimo que contiene a $E$.*

**Proposición 1.13.** *Sea $Y$ un subespacio de un espacio de Banach $X$. Entonces $Y$ es de Banach si y sólo si es cerrado.*

La demostración del resultado anterior se puede encontrar en [4].

Recordemos que en un espacio topológico, un conjunto es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación. Así, para obtener la cerradura de un conjunto tan sólo tenemos que agregarle todos sus puntos de acumulación. También se tiene que en un espacio métrico $X$, $x\in X$ pertenece a la clausura del subconjunto no vacío $E$ de $X$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}$ en $E$ tal que $x_n\to x$ [6].

Más adelante nos será de importancia el subespacio de Banach generado por una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio de Banach $X$. Por ello daremos la forma explícita del espacio lineal generado por dicha sucesión, por (1.1) tenemos que será el conjunto

$$\mathcal{L}(\{x_n\}) = \left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_{n_i} : \lambda_i\in\mathbb{K}, x_{n_i}\in\{x_n\} \text{ para } i=1,\ldots,m, \text{ y } m\in\mathbb{N}\right\}. \tag{1.2}$$

La clausura de $\mathcal{L}(\{x_n\})$ será entonces el conjunto

$$\overline{\mathcal{L}(\{x_n\})} = \{x\in X : \text{ existe un sucesión } \{y_n\} \text{ en } \mathcal{L}(\{x_n\}) \text{ tal que } y_n\to x\}.$$

Como notación tendremos que $[A] := \overline{\mathcal{L}(A)}$ para un subconjunto $A$ de un espacio de Banach $X$.

Es conveniente hacer la siguiente observación, que para nosotros será muy importante más adelante en el texto. Como mencionamos anteriormente, para que un elemento pertenezca a $\overline{\mathcal{L}(\{x_n\})}$ necesitamos de una sucesión de combinaciones lineales que converja a él, esto no significa que dicho elemento se pueda escribir en forma de serie. Con ello se advierte que no necesariamente se tiene la siguiente igualdad

$$\overline{\mathcal{L}(\{x_n\})} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i : \lambda_i\in\mathbb{K}\right\} \tag{1.3}$$

donde $\{x_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Lo anterior es importante ya que, como veremos más adelante, en los espacios de Banach que cuenten con una *base de Schauder* (Definición 2.9) todo elemento suyo podrá ser escrito en forma de serie, con lo cual el espacio puede ser representado como la parte derecha de (1.3). Sin embargo, el espacio de Banach que construiremos es un espacio, sin *base de Schauder*, generado por una sucesión, con lo cual tendrá la forma de la parte izquierda de (1.3) y la igualdad no será cierta.

Un ejemplo de la no igualdad de (1.3) lo da el Teorema de Aproximación de Weierstrass, el cual establece que cualquier función $f$ en el espacio de las funciones continuas real–valuadas $C([a,b])$ puede ser aproximada por un polinomio. En [15] se muestra que $f$ puede ser aproximada de manera uniforme tanto como queramos, tomando $n$ suficientemente grande, por los polinomios

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x) \tag{1.4}$$

donde $B_i^n$ son los polinomios de Bernstein asociados a la función $f$ dados por

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-1}.$$

Podemos notar que la mejor aproximación es cuando $n \to \infty$ y así (1.4) será una serie, pero debemos observar que, para cada $n$ elegido, los coeficientes de tal serie se van modificando, esto es, son dependientes de $n$. Sin embargo, en los espacios de Banach que cuentan con *base de Schauder* los coeficientes son independientes de $n$.

**Definición 1.14.** *Decimos que un espacio lineal normado $X$ es* ***separable****, si existe un subconjunto $M$ numerable denso, esto es $|M| = \aleph_0$ y $\overline{M} = X$ respectivamente. Aquí $\aleph_0$ es la cardinalidad del conjunto de los números naturales.*

Una caracterización de un conjunto $Y$ denso en un espacio métrico $X$ es que para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un $y \in Y$ que satisface $\|x - y\| < \epsilon$, es decir, podemos aproximar cualquier elemento de $X$ a través de un elemento en $Y$ tanto como deseemos.

Mencionemos dos hechos importantes sobre los espacios separables que serán valiosos cuando construyamos el contraejemplo al problema de las bases. La demostración, del primero, se puede encontrar en [19] y, la del segundo, en [13].

**Proposición 1.15.** *Sea* $X := \prod_{i \in I} X_i$. *Entonces* $X$ *es separable si* $|I| \leq c$ *y cada* $X_i$ *es separable para* $i \in I$. *Aquí* $c$ *es la cardinalidad del continuo.*

La topología de $X$ es aquella que tiene como subbase topológica al conjunto $\{p_i^{-1}(U_i) : U_i$ es un conjunto abierto en $X_i, i \in I\}$, donde $p_i : X \to X_i$ es la $i$–ésima función proyección.

**Proposición 1.16.** *Sea* $Y$ *un subespacio de un espacio de Banach* $X$ *separable. Entonces* $Y$ *es también separable.*

## 1.2. Operadores en espacios de Banach

Ahora nos dedicaremos a las funciones o mapeos $T : X \to Y$ entre espacios normados. En particular mencionaremos las funciones lineales y continuas, las cuales son las que, por un lado, preservan la estructura lineal y, por otro lado, tienen relación con la topología. Es importante hacer distinción entre los distintos tipos de funciones, por ello llamaremos *operadores* a las funciones en las cuales $Y = X$ y cuando $Y = \mathbb{K}$ las nombraremos *funcionales.*

**Definición 1.17.** *Denotaremos por* $\mathcal{B}(X, Y)$ *al conjunto* $\{T : X \to Y : T$ *es lineal y continua*$\}$. *Al conjunto de operadores lo denotamos por* $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ *y al de funcionales como* $X^* := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

Las funciones lineales continuas tienen una caracterización la cual es frecuentemente utilizada, tanto que se prefiere, generalmente, usar dicha propiedad como sinónimo de continuidad, así a dichas funciones también se les llama **acotadas**. Lo anterior se establece en el resultado siguiente, demostrado en [13].

**Proposición 1.18.** *Sea* $T : X \to Y$ *una función lineal entre espacios normados. Entonces lo siguiente es equivalente*

1. $T$ *es continua.*
2. *Existe una constante* $\gamma > 0$ *tal que* $\|Tx\| \leq \gamma \|x\|$ *para todo* $x$ *en* $X$.

Con ello podemos utilizar al mínimo $\gamma$ que cumple lo anterior y definir una norma en $\mathcal{B}(X, Y)$, es decir,

$$\|T\| := \text{ínf}\{\gamma : \|Tx\| \leq \gamma \|x\|, x \in X\}. \tag{1.5}$$

La demostración de que esta función es una norma se encuentra en [16]. Ahí también se muestra que la definición siguiente es equivalente a (1.5).

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1, x \in X\}. \tag{1.6}$$

### 1.2.1. Operadores compactos y de rango finito

El contraejemplo de Per Enflo [3] al *Problema de la Base* en los espacios de Banach separables no da directamente un espacio de Banach separable sin base de Schauder. Él resolvió este problema indirectamente, de hecho resolviendo otro, a saber, el problema de la *Propiedad de Aproximación*. Ahora bien el segundo problema implica el primero. Las siguientes definiciones y resultados están encaminados a mostrar cual es la *Propiedad de Aproximación* y más adelante veremos su relación con las *bases de Schauder*.

**Definición 1.19.** *Un mapeo lineal $T : X \to Y$ se llama* ***compacto*** *o* ***completamente continuo*** *si para todo conjunto $A$ acotado en $X$ el subconjunto $T(A)$ es relativamente compacto en $Y$, es decir, $\overline{T(A)}$ es compacto. El conjunto de todos los mapeos completamente continuos se denotará por $\mathcal{C}(X, Y)$.*

Se puede ver que un operador completamente continuo es acotado, en efecto, como el conjunto $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es acotado, la imagen de $S$ bajo $T$ será compacta, lo cual implica que $\sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} < \infty$, lo cual es la equivalencia (1.6), de aquí que $T$ sea acotado.

Es importante señalar de que la inversa no es cierta, es decir, un operador acotado no tiene por que ser completamente continuo. Por ejemplo, si la dimensión de $X$ no es finita, el operador identidad $I : X \to X$ transforma la bola unitaria $U$, que es acotada, en sí misma, que no es compacta, en general.

**Definición 1.20.** *Una mapeo lineal $T : X \to Y$ se dice de* ***rango finito*** *si $\dim(T(X)) < \infty$. El conjunto de todos estos operadores de denotará como $\mathcal{K}(X, Y)$. Aquí $\dim(X)$ denota la dimensión de $X$ como espacio lineal (ver Definición 2.1).*

En las Proposiciones 1.21 y 1.22 veremos, primero que los operadores de rango finito son completamente continuos y, segundo, que si tenemos una sucesión convergente de operadores totalmente continuos, entonces el límite también lo es [16].

**Proposición 1.21.** *Si* $T \in \mathcal{K}(X)$*, entonces* $T \in \mathcal{C}(X)$*.*

**Proposición 1.22.** *Sea* $\{T_n\}$ *una sucesión en* $\mathcal{C}(X)$ *tal que* $T_n \to T$*, con la topología inducida por la norma de operadores, entonces* $T \in \mathcal{C}(X)$*.*

Es bien conocido que en los espacios de Hilbert $H$ no hay más operadores completamente continuos que los anteriores, es decir, $\overline{\mathcal{K}(H)} = \mathcal{C}(H)$ [13]. Pero en general en los espacios de Banach dicho resultado es falso.

## 1.3. Propiedad de Aproximación

Anteriormente hemos visto que todo operador de rango finito es completamente continuo, aún más, sucesiones convergentes de operadores completamente continuos tienen límites completamente continuos. Además indicamos que todo espacio de Hilbert $H$ tiene la propiedad de que $\overline{\mathcal{K}(H)} = \mathcal{C}(H)$.

Existen otros espacios de Banach, que no son de Hilbert, que tienen también esta misma propiedad. Ejemplos de esto son los espacios $\ell_p(\mathbb{N})$ (Ejemplo 1.10) para $1 \leq p < \infty$ y $p \neq 2$ [16]. De aquí surge la pregunta de si para cualquier espacio de Banach $X$ se cumple $\overline{\mathcal{K}(X)} = \mathcal{C}(X)$. Esto es lo que se llama el *Problema de Aproximación* y este es el otro problema que, como mencionábamos antes, Per Enflo resolvió en el mismo artículo [3].

**Definición 1.23.** *Se dice que un espacio de Banach* $X$ *tiene la* ***Propiedad de Aproximación*** *si el conjunto de operadores de rango finito* $\mathcal{K}(X)$ *es denso en el conjunto de operadores completamente continuos* $\mathcal{C}(X)$*.*

Veamos ahora una condición suficiente para que un espacio de Banach tenga la Propiedad de Aproximación.

**Proposición 1.24.** *Sea* $X$ *un espacio de Banach. Supongamos que para cada conjunto compacto* $C \subseteq X$ *y para todo* $\epsilon > 0$ *existe un operador lineal acotado de rango finito* $T : X \to X$ *tal que* $\|Tx - x\| < \epsilon$ *para todo* $x \in C$*. Entonces* $X$ *tiene la Propiedad de Aproximación.*

*Demostración.* Sean $Y$ un espacio de Banach arbitrario y $T : Y \to X$ un operador compacto. Entonces $\overline{T(U)}$ es un conjunto compacto en $X$, donde $\overline{U}$ denota la bola unitaria cerrada en $Y$. Por hipótesis, para cada $\epsilon_n = 1/n$ existe un operador de rango finito $T'_n$ tal que $\|T'_n x - x\| < 1/n$ para cada $x$ en $T(\overline{U})$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|T'_n T - T\| &= \sup\{\|T'_n Ty - Ty\| : y \in Y, \|y\| \leq 1\}\\ &= \sup\{\|T'_n x - x\| : x \in T(\overline{U})\} \leq \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Con lo cual $T$ es el límite en $\mathcal{C}(Y, X)$ de la sucesión $\{T'_n T\}$ de operadores de rango finito, y por tanto $X$ tiene la Propiedad de Aproximación. ■

Esto lo podemos entender como que queremos aproximar el operador identidad $I$ a través de operadores $T \in \mathcal{K}(X)$ en todos los conjuntos compactos $K \subseteq X$.

# Capítulo 2

# Problema de la Base en espacios de Banach separables

En esta sección desarrollaremos lo que es el Problema de la Base en los espacios de Banach. Como un preliminar daremos la idea principal de qué es una base en un espacio de Banach y los distintos tipos de bases que tenemos según las propiedades que vaya teniendo el espacio.

## 2.1. Bases en espacios de Banach

La idea de base en un espacio de Banach es la de un conjunto mínimo de elementos del espacio con el cual, a través de las operaciones y la topología, podemos obtener el resto de los elementos del espacio.

La forma en que se utiliza la topología es la siguiente: el espacio debe contener un conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$, $I$ puede ser de cualquier cardinalidad, con el cual podemos representar a todo elemento del espacio como una «suma»[1], esto es

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i.$$

El objetivo es representar a cada elemento del espacio como una serie, por ello $I$ deberá ser numerable. Como se verá más adelante, un espacio que contenga dicho conjunto es separable. La existencia de espacios de Banach no separables nos dice que este conjunto, que será la base, no existe en todo espacio de Banach, de ello surge la pregunta de si todo espacio de Banach separable contiene un conjunto numerable con dicha característica, es decir, tiene una base o no. De forma general este problema se refiere a las bases en los espacios lineales

[1] Para que dicha suma sea convergente es necesario que, para cada $x$, exista un conjunto a lo más numerable de índices $i \in I$ tales que $\alpha_i \neq 0$.

topológicos separables [9], pero nosotros estamos interesados en los espacios de Banach separables, particularmente en lo que se llama *el Problema de la Base en los espacios de Banach separables*, que veremos en este apartado.

### 2.1.1. Base algebraica

Primero veremos lo que se llama una *base algebraica*, el nombre viene de que esta base tiene su origen únicamente en la parte algebraica del espacio de Banach, es decir, en la estructura de espacio lineal. Esto lo hacemos ya que las demás bases que tratemos serán subconjuntos de ésta. Se hace notar que, ya que no es necesaria la topología en este caso, la siguiente es una definición para los espacios lineales en general.

**Definición 2.1.** *Una* ***base algebraica*** *o* ***base de Hamel****, para el espacio lineal $X$, es un subconjunto $\{x_i : i \in I\}$ el cual cumple que*

*a) el espacio generado por combinaciones lineales es $X$, esto es, $\mathcal{L}(\{x_i : i \in I\}) = X$ y*

*b) $\{x_i : i \in I\}$ es linealmente independiente.*

Usando el Lema de Zorn se demuestra (Teorema 2.2) que en todo espacio lineal podemos encontrar una base de Hamel. La cardinalidad de dicha base es la que da el concepto de *dimensión* de un espacio lineal. Recordemos que en los espacios normados de dimensión finita todas las normas son equivalentes y la finitud de la base hace innecesaria la representación de los elementos por medio de series. Por tanto no es necesaria la conexión entre la base y la topología.

**Teorema 2.2.** *Todo espacio lineal $X \neq \{0\}$ tiene una base de Hamel.*

*Demostración.* Definamos $\mathcal{A}$ como el conjunto de todos los subconjuntos linealmente independientes de $X$. Tenemos que $(\mathcal{A}, \subseteq)$ es un orden parcial. Se tiene que $\mathcal{A}$ es no vacío ya que si $A = \{x\}$, con $x \neq 0$, tenemos entonces $A \in \mathcal{A}$. Ahora sea $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i\}_{i \in I}$ una cadena en $\mathcal{A}$, esto es que para cualesquiera $i_1, i_2 \in I$ se tiene $\mathcal{B}_{i_1} \subseteq \mathcal{B}_{i_2}$ o $\mathcal{B}_{i_2} \subseteq \mathcal{B}_{i_1}$. Veamos que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \in \mathcal{A}$. En efecto, tomemos un conjunto finito $b_1, \ldots, b_m \in \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{B}_i$ y veamos que es linealmente independiente. Para este fin, se tiene que en la igualdad $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0$, cada $b_i$ está en algún $\mathcal{B}_i \in \mathcal{B}$ y puesto que $\mathcal{B}$ es una cadena, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$\mathcal{B}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{B}_m$, por lo que $b_i \in \mathcal{B}_m$ con $i = 1, \ldots, m$. Se sigue que $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \ldots, m$ lo cual nos da como resultado que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \in \mathcal{A}$. Además, claramente $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ es cota superior de la cadena $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$. Tenemos que $(\mathcal{A}, \subseteq)$ cumple con las hipótesis del Lema de Zorn, por tanto existe $S \in \mathcal{A}$ que es elemento maximal. Ya casi tenemos que $S$ es la base de Hamel que queríamos obtener para $X$, únicamente nos falta mostrar que $x \in \mathcal{L}(S)$ $\forall x \in X$. En caso de que $x \notin \mathcal{L}(S)$ para algún $x \in X$ entonces $S \cup \{x\}$ es linealmente independiente, lo cual contradice la maximalidad de $S$. Por tanto no existe dicho $x$ y concluimos que $X = \mathcal{L}(S)$. ∎

Hemos mencionado que la base de Hamel es importante para los espacios de dimensión finita, pero dicha base tiene ciertos inconvenientes para los espacios de dimensión infinita. Una muy importante es que en la prueba de su existencia se usa el Lema de Zorn, por tanto es existencial y esto no es suficiente para obtenerla explícitamente. Otro es que esta base tiene únicamente relación con la parte algebraica. Más exactamente, supongamos que $X$ es un espacio de Banach con base de Hamel $\{b_i\}_{i \in I}$ y tomemos una sucesión $\{x_n\}$ en $X$ que converja a $x \in X$. Todos los elementos de la sucesión y el mismo $x$ tienen representación en la base de Hamel, esto es, $x_n = \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_{n,i} b_i$ y $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i b_i$. Ahora bien, la base de Hamel no garantiza que para todo $i \in I$ se cumpla que $\alpha_{n,i} \to \alpha_i$ cuando $n \to \infty$. Un ejemplo de ello se puede encontrar en [18]. Además, en los espacios de Banach, usando el teorema de Categoría de Baire, se prueba que sólo podemos tener bases de Hamel o finitas o no numerables [18], es decir, la cardinalidad de la base de Hamel en los espacios de Banach de dimensión infinita es, como mínimo, la del continuo, lo cual no pasa, en general, en espacios normados. Esto es un problema al querernos aproximar a través de series, ya que, por definición, las series son numerables.

### 2.1.2. Base topológica

Al agregar a un espacio lineal una topología se hace de manera tal que esta última tenga una relación con la parte algebraica, esto es, con las operaciones.

**Definición 2.3.** *Un **espacio lineal topológico** es un espacio lineal dotado con una topología de forma tal que las operaciones $+$ y $\cdot$ son continuas en dicha topología.*

**Definición 2.4.** *Una sucesión $\{x_n\}$en un espacio lineal topológico se llama **base topológica***

*si, para cada $x \in X$, existe una única sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tal que*

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \qquad \left(\text{lo cual se escribe como } x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i\right).$$

La definición anterior es la forma en que se utiliza la topología para generar los elementos del espacio topológico, aparte de las combinaciones lineales, de hecho se puede tomar como una generalización de estas últimas al caso infinito. Notar que ahora tenemos, por definición, una cantidad numerable de elementos en la base topológica, por tanto se ha reducido, para los espacios de dimensión infinita, la cardinalidad de la «base», ya que en la base algebraica teníamos un cantidad no numerable. Por otro lado, la definición de la base topológica es existencial, es decir, está basada en la existencia de una sucesión que cumpla cierta hipótesis por tanto no hemos tomado, en este caso, un conjunto de elementos que cuenten con cierta propiedad que les da el espacio en el que se encuentran, como ejemplo recordemos que los elementos que forman la base algebraica tienen la propiedad de ser linealmente independientes. Esto, como veremos más adelante, traerá ciertos problemas.

La Definición 2.4 trae asociadas consigo las definiciones siguientes.

**Definición 2.5.** *Sea $X$ un espacio lineal topológico con base topológica $\{x_n\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, el funcional $x_m^* : X \to \mathbb{K}$ dado por $x_m^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i\right) = \lambda_m$ se llama la* ***m–ésima coordenada funcional*** *asociada a la base topológica $\{x_n\}$.*

**Definición 2.6.** *Sea $X$ espacio lineal topológico con base topológica $\{x_n\}$ y coeficientes funcionales $\{x_n^*\}$. Se llama* ***suma parcial*** *o* ***proyección n–ésima*** *al operador $P_n : X \to X$ definido por*

$$P_n x = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) x_i\right) := \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) x_i.$$

Antes mencionamos que nuestros fines son los espacios de Banach, pero éstos son en particular espacios topológicos lineales ya que las operaciones son continuas en la topología generada por la norma, de aquí que las definiciones anteriores sean también válidas en los espacios de Banach. Resulta que en un espacio normado de dimensión numerable la base de Hamel coincide con la topológica [9], por lo tanto las funciones coordenadas no son, en general, continuas (el mismo ejemplo referenciado para las bases de Hamel [18]). Por tanto, tenemos espacios lineales topológicos con base topológica que no tienen funciones coordenadas continuas, ello llevó a Schauder a pedir, de manera explícita, que dichas funciones tengan esta propiedad, que es lo que se llamará *base de Schauder*.

### 2.1.3. Base ortonormal

En el conjunto de los espacios de Banach podemos encontrar unos muy importantes, llamados espacios de Hilbert definidos de la manera siguiente.

**Definición 2.7.** *Un* ***espacio de Hilbert*** $H$ *es un espacio de Banach en el cual la norma proviene de un producto interno, es decir una función* $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ *que cumple ciertas propiedades encontradas en [10]. La norma de* $x \in H$ *es obtenida por* $\|x\| = (x,x)^{1/2}$.

El *producto interno* es una función que a pares de elementos del espacio de Hilbert les da una propiedad llamada ortogonalidad, es decir, dos elementos de $x, y$ del espacio de Hilbert $H$ se llaman *ortogonales* si $(x, y) = 0$. Si además $(x, x) = 1$ y $(y, y) = 1$, el par $x, y$ se llama *ortonormal*. Esta propiedad es aprovechada para elegir cierto subconjunto del espacio de Hilbert que formará lo que se llama la *base ortonormal*.

**Definición 2.8.** *Un conjunto ortonormal* $\{\phi_i\}_{i\in I}$*, en un espacio de Hilbert* $H$*, se llama* ***base ortonormal*** *de* $H$ *si, para todo* $x \in H$*, tenemos que*

$$x = \sum_{i\in I}(x, \phi_i)\phi_i.$$

*Lo cual significa que, dado un* $\epsilon > 0$ *existe un* $J \subseteq I$ *finito tal que si* $A$ *es finito y* $J \subseteq A$*, entonces*

$$\left\| x - \sum_{i\in A}(x, \phi_i)\phi_i \right\| < \epsilon.$$

Se demuestra que todo espacio de Hilbert contiene una base ortonormal y, además, si el espacio es separable la cardinalidad de dicha base es a lo más numerable [10]. La definición de base de Schauder (Definición 2.9), para espacios de Banach, es una generalización de la base ortogonal, para los espacios de Hilbert separables, en el sentido de que la base ortogonal en un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es una base de Schauder (Ejemplo 2.15).

## 2.2. Base de Schauder

**Definición 2.9.** *Una sucesión $\{x_n\}$, en un espacio de Banach $X$, se llama* ***base de Schauder*** *de $X$ si para cada $x \in X$ existe una única sucesión $\{\lambda_n\}$ de escalares tal que*

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Para los espacios de Banach tan sólo es necesario pedir que exista la sucesión única ya que las funciones coordenadas resultan ser continuas siempre (Proposición 2.13). A diferencia de los espacios lineales con sus bases algebraicas o de los espacios de Hilbert con sus bases ortogonales, no todo espacio de Banach tiene base de Schauder.

De la definición parece difícil saber cuando un espacio tiene una base Schauder, sin embargo, dada una sucesión podemos saber si es o no una base de Schauder para el espacio. Las características que debe cumplir tal sucesión están en la siguiente proposición cuya demostración se puede encontrar en [14].

**Proposición 2.10.** *Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio de Banach $X$ es una base de Schauder si y sólo si cumple las condiciones siguientes:*

1. $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2. *Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que, para toda sucesión finita de escalares $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ y $l < m$, se tiene*

$$\left\| \sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i \right\| \leq k \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \right\|.$$

3. $\overline{\mathcal{L}(\{x_n\})} = X$.

Ahora daremos algunas propiedades con las que cuentan los espacios que tienen bases de Schauder.

**Proposición 2.11.** *Los elementos de una base de Schauder $\{x_n\}$ del espacio de Banach $X$ son linealmente independientes.*

*Demostración.* Supongamos que $x \in X$ puede ser escrito de dos maneras distintas como combinación lineal finita de elementos de la base de Schauder $\{x_n\}$, esto es, para $l, m \in \mathbb{N}$ se cumple $x = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i$, y donde $\alpha_i \neq \beta_i$ para algún $i$. Así, con $\{\alpha'_n\} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0, 0, \ldots)$ y $\{\beta'_n\} = (\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, 0, \ldots)$, tendremos $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha'_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \beta'_i x_i$, lo cual contradice la unicidad de la sucesión de coeficientes. Por tanto $x$ tiene una única forma de escribirse como combinación lineal finita de elementos de la base de Schauder del espacio. ■

Los espacios de Banach con base de Schauder son una generalización de los espacios de dimensión finita, es decir, tal espacio se puede identificar con un subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Explícitamente tenemos lo siguiente.

Supongamos que $X$ es un espacio de Banach con base de Schauder $\{x_n\}$, lo que implica que para cada $x \in X$ tenemos una única sucesión $\{\alpha_n\}$ de escalares. Definamos el espacio siguiente

$$Y := \left\{ \{\alpha_n\} \subset \mathbb{K} : \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in X \right\}.$$

Se tiene que $Y$ es un espacio lineal y también es un espacio de Banach si lo dotamos con la norma $\|\{\alpha_n\}\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|$ [18].

Con ello podemos definir también otra norma, equivalente a la original, en $X$ dada por la anterior, es decir,

$$\|x\|' := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|. \tag{2.1}$$

Entonces la aplicación $\{\alpha_n\} \to \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$, es un isomorfismo (mas no una isometría, ya que, en general, $\|x\| \leq \|x\|'$) [14]. Por tanto podemos ver que de esta forma los espacios con base de Schauder son una generalización a los espacios de dimensión finita ya que se puede ver, como mencionamos antes, como subespacios de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, además de que también son separables.

**Proposición 2.12.** *Todo espacio de Banach $X$ que tiene base de Schauder $\{x_n\}$ es separable.*

*Demostración.* La base de Schauder la podemos tomar normalizada, es decir, $\|x_i\| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por la definición de dicha base, dado $\epsilon/2$ podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \right\| < \frac{\epsilon}{2},$$

pero sabemos que $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$[2] es denso en $\mathbb{K}$, de ahí que podamos encontrar $\alpha'_1, \dots, \alpha'_N \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ tales que $|\alpha_i - \alpha'_i| < \epsilon/2N \quad \forall 1 \leq i \leq N$. Aplicando estas aproximaciones y con la ayuda de la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{i=1}^{N} \alpha'_i x_i \right\| &= \left\| x - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{N} \alpha'_i x_i \right\| \\
&\leq \left\| x - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{N} \alpha'_i x_i \right\| \\
&= \left\| x - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha'_i) x_i \right\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i - \alpha'_i| \|x_i\| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\epsilon}{2N} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto el conjunto $\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i x_i : r_i \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \right\}$ es denso en $X$. Por otro lado el conjunto $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ es numerable y sabemos que la unión numerable de numerables es numerable, por tanto hemos encontrado un conjunto denso numerable en $X$, lo que implica su separabilidad. ■

Gracias a esto es sencillo demostrar la existencia de espacios de Banach que no cuentan con base de Schauder, ejemplo de esto sería cualquier espacio de Banach no separable. En particular tenemos que el espacio de Banach $\ell_\infty$ (Ejemplo 1.8) y el espacio $\ell_p(I)$ con $I$ no numerable (Ejemplo 1.10) son espacios de Banach sin base de Schauder ya que son no separables [4].

Demostremos ahora que las coordenadas funcionales son lineales y acotadas, es decir, son elementos de $X^*$, al contrario de lo que pasa con ciertos casos en las bases de Hamel y topológicas. Además de ser la razón de que en la definición de base de Schauder para los espacios de Banach no sea pedida explícitamente la continuidad de tales funciones.

**Proposición 2.13.** *Sea $X$ un espacio de Banach con base de Schauder $\{x_n\}$. Entonces las coordenadas funcionales son lineales y acotadas.*

[2] $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ representará a $\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o a $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

*Demostración.* Para la linealidad tenemos que si $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x)x_i \quad \forall x \in X$ tenemos que, para todo $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \lim_{n\to\infty} \left( \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^*(y)x_i \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha x_i^*(x) + \beta x_i^*(y)\right) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha x_i^*(x) + \beta x_i^*(y)\right) x_i, \end{aligned}$$

por otro lado

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(\alpha x + \beta y)x_i$$

así, por la unicidad de los coeficientes, $x_i^*(\alpha x + \beta y) = \alpha x_i^*(x) + \beta x_i^*(y)$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Para mostrar la continuidad dotemos al espacio $X$ con la norma dada por (2.1). Al ser equivalente con $\|\cdot\|$ tenemos la existencia de una constante $M$, la cual es de hecho mayor o igual que la unidad, tal que para todo $x \in X$ se cumple

$$\|x\|' \leq M\|x\|. \tag{2.2}$$

Dado que todos los elementos de la base son distintos de cero, podemos obtener la siguiente cota

$$\begin{aligned} |x_n^*(x)| &= \frac{\|x_n^*(x)x_n\|}{\|x_n\|} = \frac{\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^*(x)x_i\right\|}{\|x_n\|} \\ &\leq \frac{\|\sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1} x_i^*(x)x_i\right\|}{\|x_n\|} \\ &\leq \frac{2\|x\|'}{\|x_n\|} \leq \frac{2M}{\|x_n\|}\|x\| \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $\|x_n^*\| \leq 2M/\|x_n\|$. ∎

Al igual que las coordenadas funcionales, las proyecciones son acotadas.

**Proposición 2.14.** *Sea $X$ un espacio de Banach con base de Schauder $\{x_n\}$. Entonces sus proyecciones $P_n$ son acotadas.*

*Demostración.* Mostraremos la continuidad de $P_n$, de nuevo, a través de la norma (2.1)

$$\left\| P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i\right\|' \leq M\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i\right\|.$$

La última desigualdad se obtiene por la relación (2.2), con lo cual $\|P_n\| \leq M$ y por tanto uniformemente acotadas, así terminamos la demostración. ∎

### 2.2.1. Ejemplos de bases de Schauder

Algunos ejemplos de bases de Schauder son los siguientes:

**Ejemplo 2.15.** *Sea $H$ cualquier espacio de Hilbert separable de dimensión infinita con base ortonormal $\mathcal{H} = \{e_n\}$, entonces dicha base es también base de Schauder. Esto se debe a que al ser separable el espacio tiene dimensión de Hilbert a lo maś numerable y como es de dimensión infinita debe de tener base numerable. Entonces todo elemento $x$ de $H$ será representado por*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$$

*y la sucesión $\{(x, e_i)\}$ es única.*

**Ejemplo 2.16.** *Sea $X$ el espacio de Banach $\ell_p(\mathbb{N})$ (Ejemplo 1.10), para $1 \leq p < \infty$. Sea $\{e_n\}$ la sucesión en la cual cada $e_n \in X$ tiene cero en cada entrada excepto en la $n$-ésima componente y en la cual tiene un 1, es decir, $e_n^i = \delta_{ni}$. Resulta así que $\{e_n\}$ es una base de Schauder para $X$ llamada base estándar de vectores unitarios.*

**Ejemplo 2.17.** *El sistema de Haar [17] es un ejemplo de base para los espacios $L_p(0, 1)$ (Ejemplo 1.9) con $1 \leq p < \infty$, con $p = 2$ dicho sistema es, también, una base de Hilbert.*

En 1927 J. Schauder dio una base de Schauder para el espacio de Banach $C[0, 1]$, de hecho este artículo fue del cual salió la noción de base de Schauder.

**Ejemplo 2.18.** *El espacio de Banach $C([0, 1])$ (Ejemplo 1.11), con la norma del supremo, tiene como base de Schauder (Figura 2.1) a la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ [16] dada de la siguiente* *manera.* $s_0(t) = 1$, $s_1(t) = t$ *con* $t \in [0,1]$. *Para* $n \geq 2$, *sea* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $2^{m-1} < n \leq 2^m$, *definamos*

$$s_n(t) = \begin{cases} 2^m\left(t - \left(\frac{2n-2}{2^m} - 1\right)\right) & \frac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n-1}{2^m} - 1 \\ 1 - 2^m\left(t - \left(\frac{2n-2}{2^m} - 1\right)\right) & \frac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n}{2^m} - 1 \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

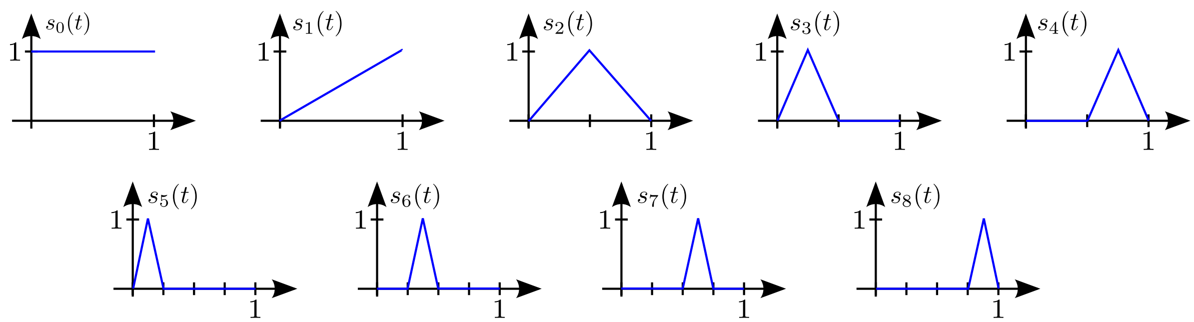


FIGURA 2.1: *Primeros nueve términos de la base de Schauder para el espacio* $C([0,1])$.

Este ejemplo es muy interesante ya que, por un lado, muestra, evidentemente, que $C([0,1])$ tiene una base de Schauder y por ello es separable. Por otro lado, se puede mostrar que cualquier espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C([0,1])$ [4]. Además, el ejemplo de Per Enflo es un espacio de Banach separable, por tanto es un subespacio de $C[0,1]$, que no tiene base de Schauder.

## 2.3. Problema de la Base en los espacios de Banach separables

Ya hemos visto que los espacios de Banach que sí cuentan con base de Schauder son separables, por lo tanto existen espacios de Banach sin base de Schauder, a saber los espacios no separables. Por otro lado tenemos que las bases ortogonales en los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita son a su vez bases de Schauder (Ejemplo 2.15), además los espacios de Banach separables conocidos tienen base de Schauder también (Ejemplos 2.16, 2.17 y 2.18).

Entonces, visto desde la perspectiva de las propiedades mínimas que necesitamos para tener bases de Schauder en los espacios de Banach, la pregunta que surge de manera natural es si todo espacio separable tiene base de Schauder y esto es lo que se conoce como *el problema de la base en los espacios de Banach separables*. La solución a este problema resultó ser no tan sencilla y fue dada por Per Enflo, en [3], cuarenta años después de haber sido establecida. La respuesta al problema es negativa, es decir, existen espacios de Banach separables que no tienen base de Schauder.

### 2.3.1. Base de Schauder y la Propiedad de Aproximación

Finalmente, mostraremos que todo espacio de Banach con base de Schauder tiene también la Propiedad de Aproximación, resultado que tiene como consecuencia el vínculo entre el Problema de Aproximación y el Problema de la Base en los espacios de Banach separables.

**Teorema 2.19.** *Sea $X$ un espacio de Banach con base de Schauder $\{x_n\}$. Entonces $X$ tiene la Propiedad de Aproximación.*

*Demostración.* Por la Proposición 1.24 es suficiente con encontrar, para cada conjunto compacto $C \subseteq X$ y $\epsilon > 0$, un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_N x - x\| < \epsilon$.

Sea $M := \sup\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Por la compacidad del conjunto $C$ podemos elegir $x_1, \ldots, x_k \in C$ tales que $\min\{\|x - x_i\| : i = 1, \ldots, k\} \leq \dfrac{\epsilon}{2(1+M)}$ para todo $x \in C$.

Elijamos ahora un $x \in C$ fijo pero arbitrario, entonces existe un $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\|x - x_j\| \leq \dfrac{\epsilon}{2(1+M)}$. Ya que $X$ tiene base de Schauder tenemos que $\lim_{n\to\infty} \|x_j - P_n x_j\| = 0$ lo cual implica que existe un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_j - P_n x_j\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq n_\epsilon$. Por lo anterior

$$
\begin{aligned}
\|x - P_n x\| &= \|x - P_n x + x_j - x_j + P_n x_j - P_n x_j\| \\
&\leq \|x - x_j\| + \|P_n x_j - P_n x\| + \|x_j - P_n x_j\| \\
&< \|x - x_j\| + \|P_n\| \|x_j - x\| + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \|x - x_j\| + M\|x_j - x\| + \frac{\epsilon}{2} \\
&= (1+M)\|x - x_j\| + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq (1+M)\frac{\epsilon}{2(1+M)} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}
$$

∎

# Capítulo 3

# Preliminares para la construcción del contraejemplo

## 3.1. Funciones de Rademacher y de Walsh

En esta sección definiremos las funciones de Walsh, las cuales serán la base del espacio que será construído como contraejemplo. Dichas funciones están definidas a partir de las funciones de Rademacher, que son un sistema ortogonal en $L^2([0,1])$ aunque no completo, de hecho la completación del sistema de Rademacher en $L^2([0,1])$ es el sistema de funciones de Walsh.

Consideremos la función periódica $R_0$, de período 1, definida en $[0,1)$ por

$$R_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -1 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

**Definición 3.1.** *El conjunto de funciones*

$$R_k(x) := R_0(2^k x) \tag{3.2}$$

*para $k = 0, 1, 2, \ldots$ y $x$ real se llama el* ***sistema de funciones de Rademacher****.*

La $k$–ésima función de Rademacher $R_k$ es constante en los intervalos diádicos $[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}})$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tomando el valor 1 para $m$ par y $-1$ para $m$ impar. Tiene, también, discontinuidades en cada $x = \frac{m}{2^{k+1}}$ y siempre es continua en por la derecha. Las funciones de Walsh pueden tener sentido en todo el eje real, ya que se definen a partir de las funciones de Rademacher, sin embargo, son consideradas frecuentemente en el intervalo $[0,1)$.

**Definición 3.2.** *Sea $A$ un subconjunto finito de enteros no negativos. Entonces se define la función de Walsh $w_A : [0,1) \to \{-1, 1\}$, como producto de $|A|$ funciones de Rademacher, de* *la siguiente manera*

$$w_A = \prod_{k \in A} R_k. \tag{3.3}$$

*Si* $A = \emptyset$ *definimos a la función de Walsh* $w_\emptyset$ *como la función constante 1 en* $[0,1)$*. Esto es* $w_\emptyset = 1_{[0,1)}$.

Hasta ahora únicamente hemos definido las funciones de Walsh, para que sean una base tenemos que darles un orden. Se conocen como sistema de Walsh a tres distintos sistemas ortonormales completos. En los tres sistemas el conjunto de funciones es el mismo, lo que los diferencía es el sistema de numeración, a saber, la numeración original de Walsh, el de Walsh–Kaczmarz y, finalmente, el de Walsh–Paley. Nosotros trabajaremos con el sistema Walsh–Paley, el cual describiremos ahora.

Escribamos a $n \in \mathbb{N}$ en su expansión diádica, es decir,

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i 2^i, \tag{3.4}$$

donde $\alpha_i \in \{0,1\}$. Dado que $n$ es un número entero positivo, la suma necesariamente es finita por lo que $\alpha_i$ es distinta de cero únicamente para un número finito de índices $i$. La igualdad (3.4) nos permite poner en correspondencia a $n$ con la sucesión $\{\alpha_i\}$. Dicho esto, definimos, para $n = 0$, $w_0 := 1$ y, para $n$ entero no negativo, la $n$–ésima función de Walsh como

$$w_n = \prod_{i=0}^{\infty} R_i^{\alpha_i}. \tag{3.5}$$

**Definición 3.3.** *El conjunto de funciones de Walsh ordenado por la relación (3.5) es lo que se llama el* ***sistema de Walsh–Paley****.*

Notemos que, según (3.4), las funciones de Rademacher son un subconjunto de las funciones de Walsh, de hecho tenemos que $R_k = w_{2^k}$. Por lo anterior y debido a que el sistema de Walsh–Paley es un sistema ortonormal y completo en $L^2([0,1])$ [22], se tiene que las funciones de Walsh son la completación del sistema de Rademacher. De hecho el sistema de Walsh–Paley forma una base de Schauder para $L^p$ con $1 < p < \infty$ [17].

Si definimos a $\Delta_0^{(0)} := [0,1)$ y a

$$\Delta_m^{(k)} := \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right) \quad 0 \leq m \leq 2^k - 1, \tag{3.6}$$

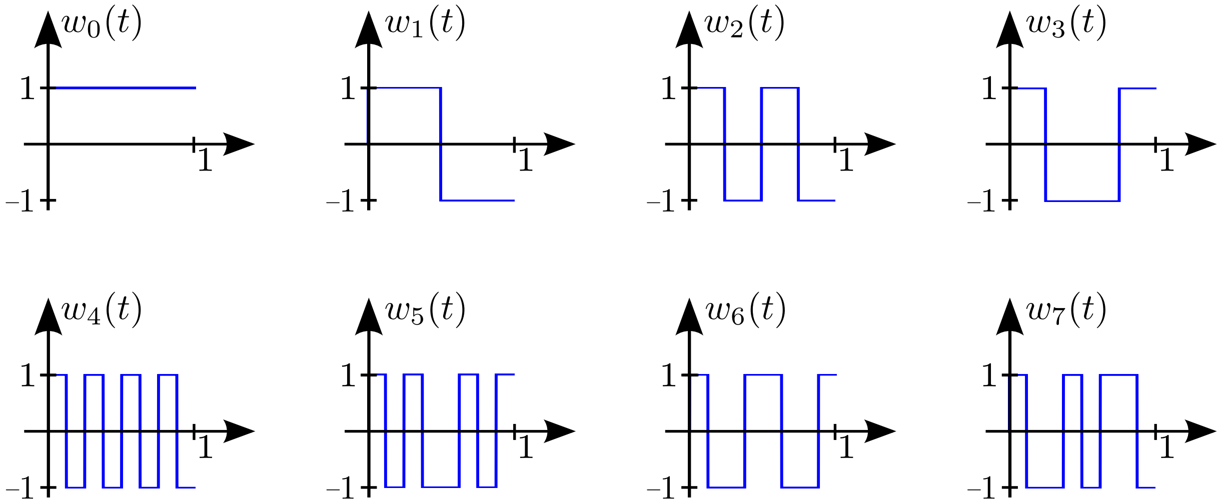


FIGURA 3.1: *Primeros términos del sistema de Walsh.*

las funciones de Walsh son constantes en sus respectivos intervalos diádicos $\Delta_m^{(k)}$ para $k \geq 0$. Las funciones de Walsh pueden ser también definidas en el intervalo $[0, 1]$ de una manera equivalente.

## 3.2. El grupo diádico

Las funciones de Walsh con el orden de Walsh–Paley serán un conjunto muy importante en el desarrollo del espacio de Banach construido más adelante, pero no las ocuparemos en la forma de la Definición 3.2. Por lo anterior daremos una interpretación distinta de dichas funciones que servirá mejor para nuestros fines.

**Definición 3.4.** *Un conjunto $G$ se denomina* ***grupo*** *si está dotado de una operación $\cdot : G \times G \to G$ que, para todo $a, b \in G$, cumple las siguientes condiciones:*

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- *existe $e \in G$, llamado la unidad por la izquierda del grupo $G$, tal que $e \cdot a = a$,*
- *existe, para $a \in G$, el elemento $a^{-1}$ tal que $a^{-1}a = e$.*

*Si además se cumple que, para todo $a, b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a$, entonces el grupo se llama* ***abeliano****.*

**Definición 3.5.** *Se llama **grupo diádico** al grupo $D$ dado por el conjunto de todas las sucesiones cuyos elementos son ó 0 ó 1 con la operación de grupo dada por la suma módulo 2, esto es,*

$$D := \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} = \{\overline{a} = \{a_n\} : a_n \in \{0,1\}\}$$

*y si $\overline{a} = \{a_n\}, \overline{b} = \{b_n\} \in D$ se tiene que*

$$\overline{a} + \overline{b} = \{a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots\}$$

*donde la adición se da siguiendo la tabla siguiente*

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Podemos generar una función entre $D$ y $[0,1]$ expandiendo cada número real de $[0,1]$ en su forma binaria, es decir, escribiendo a $t \in [0,1]$ como

$$t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t_j}{2^{j+1}} \tag{3.7}$$

Ahora bien, esta función no es biyectiva ya que los números racionales diádicos[1] tienen dos representaciones, una finita y otra infinita, de la forma (3.7). Por lo anterior se usa el llamado intervalo modificado $[0,1]^*$, el cual consiste en todas las expresiones de la forma

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t_j}{2^{j+1}} \tag{3.8}$$

pero no la suma, esto significa las dos expresiones para los número diádicos serán distintas. Por ello podemos ver al intervalo $[0,1]^*$ como el intervalo $[0,1]$ en el cual cada número diádico $x$ ha sido dividido en dos, uno izquierdo $x^-$ (el cual es la representación diádica infinita) y otro derecho $x^+$ (el cual es la representación diádica finita).

Denotemos por $\{w'(t)\}_{n=0}^{\infty}$ las funciones cuyo dominio de definición es el intervalo modificado $[0,1]^*$ y sus valores están dados por

$$w_n'(t) = (-1)^{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t_i} \tag{3.9}$$

[1] Números de la forma $\frac{m}{2^n}$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$.

donde $n$ tiene expansión diádica de la forma (3.4) y $t$ de la forma (3.7). Notemos que si $n = 2^i$ entonces $w'_{2^i}(t) = (-1)^{t_i}$, este conjunto de funciones será denotado como $\{R'_i(t)\}$. Por lo anterior tenemos que

$$w'_n(t) = (-1)^{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t_i} = \prod_{i=0}^{\infty}((-1)^{t_i})^{\alpha_i} = \prod_{i=0}^{\infty}(R'_i(t))^{\alpha_i}. \tag{3.10}$$

Esto es ya análogo a (3.5). Según la definición (3.9), para cada $n < 2^{k+1}$, la función $w'_n(t)$ es constante, con valor 1 o $-1$, en los conjuntos de la forma $\{t \in D : t_j = t_j^0, j = 0, 1, \ldots, k\}$ para cada elección fija de elementos $\{t_j^0 : j = 0, 1, \ldots, k\}$. Estos conjuntos los podemos indexar por número enteros $0 \leq m < 2^{k+1}$ de la siguiente manera: para cada $m$ sea $\{t_j^0 : j = 0, 1, \ldots, k\}$ tal que

$$m = \sum_{j=0}^{k} t_j^0 2^{k-j}. \tag{3.11}$$

Si definimos

$$\Delta_m'^{(k+1)} := \{t \in D : t_j = t_j^0, j = 0, 1, \ldots, k\} \tag{3.12}$$

la transformación $\lambda : D \to [0,1]$ en la que a cada $t \in D$ se le asocia el número $t' = \lambda(t)$, $t' \in [0,1]$, de tal forma que se satisface (3.7). Debido a los números diádicos la función $\lambda$ no es biyectiva, pero se prueba que la imagen del conjunto $\Delta_m'^{(k+1)}$ es la clausura del conjunto $\Delta_m^{(k+1)}$, con lo cual obtenemos la equivalencia entre (3.5) y (3.10).

## 3.3. Propiedades

Mostremos algunas propiedades de ciertos conjuntos de funciones de Walsh reunidas en los Lemas 3.6 y 3.10. Anteriormente hemos mostrado que las funciones de Rademacher, $R_j : [0,1]^* \to \{-1, 1\}$, se pueden definir como $R_j(a) = (-1)^{a_j}$, para $a \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$. Si tomamos únicamente las funciones de Rademacher definidas en $\mathbb{Z}_2^{2n}$ tendremos, por tanto, sólo $2n$ de ellas.

De acuerdo con la interpretación anterior de las funciones de Walsh y que cada una de ellas es producto de $m$ diferentes funciones de Rademacher, podemos escribir una función de Walsh, evaluada en $a \in \mathbb{Z}_2^{2n}$, de la siguiente manera[2] $w^m(a) = \prod_{i=1}^{m} R_i(a) = \prod_{i=1}^{m}(-1)^{a_i}$. Sea

[2]Esta notación hace notar que $w^m$ es una función de Walsh que es producto de $m$ distintas funciones de Rademacher, no tiene nada que ver con la numeración de Walsh–Paley.

$W_n^m$ el conjunto de todas las funciones $w^m$. Dado que para cada $1 \leq m \leq 2n$ podemos escoger $\binom{2n}{m}$ combinaciones de $m$ funciones de Rademacher distintas, tenemos que $|W_n^m| = \binom{2n}{m}$.

Sea $F_m = \displaystyle\sum_{w^m \in W^m} w^m$ y, para $a \in \mathbb{Z}_2^{2n}$, definamos $|a| = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} a_i$, esto es, el número de coordenadas distintas de cero de $a$. El lema siguiente muestra un conjunto de propiedades de la función $F_m$ que serán utilizadas posteriormente.

**Lema 3.6.** *1.* $F_m(0) = \|F_m\|_\infty = \dbinom{2n}{m}$.

*2.* $F_m(a) = (1 - mn^{-1})\|F_m\|_\infty$ *para* $|a| = 1$.

*3.* $|F_{n-1}(a)| = |F_{n+1}(a)| \leq n^{-1}\|F_{n-1}\|_\infty = n^{-1}\|F_{n+1}\|_\infty$ *si* $0 < |a| < 2n$.

*4.* $F_m(a) = (-1)^m F_m(b)$ *si* $|a| + |b| = 2n$.

*Demostración.* 1. Por definición $\|F_m\|_\infty$ es el mayor valor que tomará $F_m$ al recorrer $a$ en todo $\mathbb{Z}_2^{2n}$. Ahora bien $F_m$ es la suma de valores 1 y $-1$, por lo cual obtendremos el mayor valor de $F_m$ cuando todos los sumandos sean 1. Lo anterior se obtiene cuando $a = 0$. En este caso, se tendrán $\binom{2n}{m}$ sumandos todos iguales a uno. De ahí se sigue el resultado.

2. Por definición tenemos que $w^m(a) = \prod_{i=1}^m (-1)^{a_i}$ observamos que $F_m$ no depende de para qué índice $i$ la entrada $a_i = 1$, tan sólo depende de la cantidad de entradas con valor 1, con esto $F_m$ depende de $|a|$. Por lo anterior, podemos suponer que $a = (1, 0, \ldots, 0)$. De las $2n$ funciones de Rademacher que podemos tomar vamos a dejar fuera a $R_1$. Por un lado tenemos $\dbinom{2n-1}{m}$ funciones de $W_n^m$ que no tienen a $R_1$ en su representación como producto de funciones de Rademacher, todas ellas toman el valor 1 en $a$. Por otro lado, hay $\dbinom{2n-1}{m-1}$ funciones que tienen a $R_1$, junto con otras $m-1$ funciones distintas, en su representación de Rademacher, estas funciones toman el valor $-1$ en $a$.

Por lo tanto obtenemos que

$$\begin{aligned}
F_m(a) &= \binom{2n-1}{m} - \binom{2n-1}{m-1} \\
&= \frac{(2n-1)!}{m!(2n-1-m)!} - \frac{(2n-1)!}{(m-1)!(2n-1-m+1)!} \\
&= \frac{(2n)!(2n-m)}{2n(2n-m)!m!} - \frac{(2n)!m}{2n(m!)(2n-m)!} \\
&= \frac{(2n)!}{m!(2n-m)!}\frac{1}{2n}(2n-m-m) \\
&= \binom{2n}{m}\left(1-\frac{m}{n}\right) = \|F_m\|_\infty \left(1-\frac{m}{n}\right).
\end{aligned}$$

Los pasos se obtuvieron aplicando, de manera adecuada, varias veces la identidad $n! = n(n-1)!$.

3. Formemos, para un $a \in \mathbb{Z}_2^{2n}$ fijo y $z \in \mathbb{C}$, el polinomio

$$\sum_{m=0}^{2n} z^m F_m(a) = \prod_{i=1}^{2n}(1 + zR_i(a)) = \prod_{i=1}^{2n}(1 + (-1)^{a_i} z) \tag{3.13}$$

donde la primer igualdad se obtiene al desarrollar el producto. Para $|a| = r$ tendremos que

$$\sum_{m=0}^{2n} z^m F_m(a) = (1-z)^r(1+z)^{2n-r}, \tag{3.14}$$

esto se debe a que tendremos, en la parte derecha de la igualdad (3.13), $r$ índices $i$ para los cuales $a_i = 1$ y $2n - r$ índices $i$ en los que $a_i = 0$. Dado que un polinomio es una función analítica en todo el plano complejo, podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy para la $k$–ésima derivada, esto es, el teorema siguiente.

**Teorema 3.7.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y conexo, $\gamma$ una curva cerrada en $\Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica en $\Omega$. Entonces*

$$n(\gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw \quad z \in \Omega \setminus \gamma^* \tag{3.15}$$

*donde* $\gamma^*$ *es el rango de la curva* $\gamma$ *y* $n(\gamma, z)$ *es el índice*[3] *de la curva* $\gamma$ *alrededor del punto* $z$.

Tomando como $\gamma$ a la frontera del disco unitario, $z = 0$ y sustituyendo (3.14) en la fórmula de Cauchy (3.15) obtenemos

$$F_m(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{(1-z)^r(1+z)^{2n-r}}{z^{m+1}} dz. \tag{3.16}$$

donde $n(\gamma, 0) = 1$. Tomando las identidades

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\theta} &= -2i \operatorname{sen}(\theta/2) e^{i\theta/2} \\ 1 + e^{i\theta} &= 2\cos(\theta/2) e^{i\theta/2} \end{aligned}$$

obtenemos

$$(1 - e^{i\theta})^r (1 + e^{i\theta})^{2n-r} = 2^n (-i)^r \operatorname{sen}^r(\theta/2) \cos^{2n-r}(\theta/2) e^{i\theta n}. \tag{3.17}$$

Si hacemos el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, lo que implica que $dz = ie^{i\theta} d\theta$, y sustituimos la igualdad (3.17) en (3.16) obtenemos

$$F_m(a) = \frac{2^{2n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-i)^{-r} e^{i(n-m)\theta} \operatorname{sen}^r\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{2n-r}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta. \tag{3.18}$$

En particular tendremos

$$\begin{aligned} |F_{n-1}(a)| = |F_{n+1}(a)| &\leq \frac{2^{2n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \operatorname{sen}^r\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{2n-r}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta \\ &= \frac{2^{2n}}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^r\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{2n-r}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Con las identidades

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(\theta)}{2} \\ \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\theta)}{2} \end{aligned}$$

[3]Este índice se puede interpretar como el número de vueltas que la curva $\gamma$ le da al punto $z$.

obtenemos

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{2(n-1)}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}\left(\frac{1+\cos(\theta)}{2}\right)^{n-1},$$
$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^{2(n-1)}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}\left(\frac{1-\cos(\theta)}{2}\right)^{n-1},$$

y con esto la integral (3.19) toma el mismo valor para $r = 2$ y $r = 2n-2$, además es igual a $|F_n(a)|$. Para $2 < r < 2n-2$ el integrando es un valor geométrico medio entre $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{2(n-1)}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ y $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^{2(n-1)}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, por ello la integral (3.19), con $2 < r < 2n-2$, es menor que la misma para $r = 2$.

Calculemos pues $|F_n(a)|$ para $|a| = 2$. Por las mismas razones que en 2, podemos tomar $a = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ con lo cual podemos combinar tan sólo $2n-2$ funciones. Con ello tenemos $\binom{2n-2}{n}$ funciones de Walsh que no tienen a $R_1$ y $R_2$ en su representación como producto de $n$ funciones de Rademacher (todas ellas toman el valor 1 en $a$), hay $2\binom{2n-2}{n-1}$ funciones de Walsh que tienen a $R_1$ o $R_2$, pero no las dos juntas (todas ellas toman el valor $-1$ en $a$) y, finalmente, existen $\binom{2n-2}{n-2}$ funciones que tienen tanto a $R_1$ como a $R_2$ en su representación como producto (todas ellas toman el valor 1 en $a$). Con lo anterior y utilizando la identidad $n! = n(n-1)!$ se obtiene que

$$|F_n(a)| = \left|\binom{2n-2}{n} - 2\binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-2}{n-2}\right| = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}. \tag{3.20}$$

Además, como

$$\begin{aligned} n^{-1}\|F_{n-1}\|_\infty = n^{-1}\|F_{n+1}\|_\infty &= \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{(n+1)} = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

obtenemos la desigualdad deseada, es decir,

$$|F_{n-1}(a)| = |F_{n+1}(a)| \leq n^{-1}\|F_{n-1}\|_\infty = n^{-1}\|F_{n+1}\|_\infty.$$

4. En la prueba de 2 vimos que $F_m$ depende de $|a|$ y no del orden de sus elementos. Por ello y con la condición $|a| + |b| = 2n$ podemos suponer que $a$ y $b$ son complementarios, esto es, $a_i + b_i = 1$ para $1 \leq i \leq 2n$. De lo anterior obtenemos que $R_j(a) = -R_j(b)$

para todo $1 \leq i \leq 2n$. Por tanto conseguimos que

$$\begin{aligned} F_m(a) &= \sum_{w^m \in W^m} w^m(a) = \sum_{w^m \in W^m} R_{n_1}(a) \cdots R_{n_m}(a) \\ &= \sum_{w^m \in W^m} (-1) R_{n_1}(b) \cdots (-1) R_{n_m}(b) = \sum_{w^m \in W^m} (-1)^m w^m(b) \\ &= (-1)^m \sum_{w^m \in W^m} w^m(b) = (-1)^m F_m(b). \end{aligned}$$

■

**Definición 3.8.** *Sea $X$ un espacio de Banach generado por la sucesión $\{e_n\}$, cuyos elementos son linealmente independientes y sea, también, $T$ un operador en $X$. Decimos que $T$ es un operador de **expansión finita** si para $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $Te_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_i$ es una suma finita, esto es que existe tan sólo una cantidad finita de índices $i$ tales que $\alpha_{ik} \neq 0$.*

**Definición 3.9.** *Sea $B$ un espacio de Banach generado por la sucesión $\{e_n\}$, cuyos elementos son linealmente independientes, y sea $T : B \to B$ un operador de expansión finita. Sea $M$ un subconjunto finito de $\{e_n\}$. Definimos los funciones $Tr$ y $\tilde{T}r$ de la manera siguiente:*

1. $Tr(M, T) := \sum_{e_i \in M} \alpha_{ii}$,
2. $\tilde{T}r(M, T) := \frac{1}{|M|} \sum_{e_i \in M} \alpha_{ii}$.

Definamos también a $C(\mathbb{Z}_2^{2n})$ como el espacio de Banach de funciones $g : \mathbb{Z}_2^{2n} \to \mathbb{R}$ con la norma del supremo. Sea $p$ una permutación en $\mathbb{Z}_2^{2n}$, entonces tenemos que $R_j(p(a)) = R_{p^{-1}(j)}(a)$, en efecto definamos $q = p^{-1}(j)$, entonces $R_j(p(a)) = (-1)^q = (-1)^{p^{-1}(j)} = R_{p^{-1}(j)}(a)$. Tomemos $U_p : [W_n^m] \to [W_n^m]$ definida por $(U_p w^m)(a) = w^m(p(a))$, entonces $U_p$ es una isometría de $[W_n^m]$.

Si $t : a \to a + b$ tenemos que $R_j(t(a)) = (-1)^{b_j} R_j(a)$ ya que $R_j(t(a)) = R_j(a + b) = (-1)^{a_j + b_j} = (-1)^{b_j} R_j(a)$. Tomemos $U_t : [W_n^m] \to [W_n^m]$ definida por $(U_t w^m)(a) = w^m(t(a))$, entonces $U_t$ también es una isometría de $[W_n^m]$.

Con lo anterior, definamos a $G$ como el grupo de isometrías del espacio $[W_n^{n-1} \cup W_n^{n+1}]$ generado por todas las isometrías $U_p$ y $U_t$. Veamos que podemos elegir, a través de alguna isometría $U \in G$, a $[W_n^{n-1} \cup W_n^{n+1}]$ de tal forma que satisfaga una cierta desigualdad muy importante a la hora de construir el contraejemplo.

**Lema 3.10.** *Sea $T$ un operador lineal en $[W_n^{n-1} \cup W_n^{n+1}]$. Entonces existe una isometría $U \in G$ tal que, para $f = F_{n-1}/\|F_{n-1}\| - F_{n+1}/\|F_{n+1}\|$, cumple*

$$|\tilde{T}r(W_n^{n-1}, T) - \tilde{T}r(W_n^{n+1}, T)| \leq \frac{2}{n}\frac{\|TUf\|}{\|Uf\|}.$$

*Demostración.* Veamos que si $a \in \mathbb{Z}_2^{2n}$ es tal que $|a| = 0$ o $2n$ tenemos, por (1) y (4) del Lema 3.6, que

$$\left|\left(\frac{F_{n-1}}{\|F_{n-1}\|} - \frac{F_{n+1}}{\|F_{n+1}\|}\right)(a)\right| = 0 \leq \frac{2}{n} \tag{3.21}$$

y para $a \in H$ tal que $0 < |a| < 2n$ tenemos, por (3) del Lema 3.6, que

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{F_{n-1}}{\|F_{n-1}\|} - \frac{F_{n+1}}{\|F_{n+1}\|}\right)(a)\right| &\leq \left|\left(\frac{F_{n-1}}{\|F_{n-1}\|}\right)(a)\right| + \left|\left(\frac{F_{n+1}}{\|F_{n+1}\|}\right)(a)\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\frac{\|F_{n-1}\|}{\|F_{n-1}\|} + \frac{1}{n}\frac{\|F_{n+1}\|}{\|F_{n+1}\|} = \frac{2}{n}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Así, con (3.21) y (3.22) se cumple que

$$\|Uf\| = \|f\| \leq \frac{2}{n} \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \frac{2}{n}\frac{1}{\|Uf\|} \tag{3.23}$$

para cualquier $U \in G$.

Por otro lado, definamos $\tilde{T} = \frac{1}{|G|}\sum_{U\in G} U^{-1}TU$. Dadas las propiedades de $U$, recordemos que o cambia signos o permuta elementos, tenemos que

$$\tilde{T}r(W_n^{n-1}, \tilde{T}) = \tilde{T}r(W_n^{n-1}, T) \quad \text{y} \quad \tilde{T}r(W_n^{n+1}, \tilde{T}) = \tilde{T}r(W_n^{n+1}, T). \tag{3.24}$$

Observemos también que la imagen de $x \in [W_n^{n-1} \cup W_n^{n+1}]$ bajo el operador $\tilde{T}$ tiene como coeficientes al promedio de todos los coeficientes que toma la imagen de $x$ bajo $T$ en cada espacio isométrico, dado por $U \in G$, a $[W_n^{n-1} \cup W_n^{n+1}]$. Por ello podemos escoger para cada $x \in [W_n^{n-1} \cup W_n^{n+1}]$ un $U$ tal que

$$\|TUx\| \geq \|\tilde{T}x\|. \tag{3.25}$$

Ahora, para cada par $w_1, w_2 \in W_n^{n-1} \cup W_n^{n+1}$ existe un $U_t$ tal que $U_t w_1 = w_1$ y $U_t w_2 = -w_2$, en efecto, sean $w_1 = \prod_{i=1}^{r_1} R_{n_{1,i}}$ y $w_2 = \prod_{i=1}^{r_2} R_{n_{2,i}}$ donde $r_j = n-1$ o $n+1$ si $w_j \in W_n^{n-1}$

o $W_n^{n+1}$ respectivamente. Ya que $w_1 \neq w_2$ existe al menos un índice $i$ en $1 \leq i \leq r_2$ tal que $R_{n_{2,i}} \neq R_{n_{1,j}}$ para toda $1 \leq j \leq r_1$, entonces el elemento $b \in \mathbb{Z}_2^{2n}$ correspondiente a la transformación $U_t$ será $b = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, donde el 1 está en la entrada $n_{2,i}$.

Con lo anterior se satisface $\tilde{T}w = k_w w$, esto se debe a que para toda $U \in G$ tenemos que $U^{-1}\tilde{T}U = \tilde{T}$ lo cual implica que $\tilde{T}U = U\tilde{T}$ y si $W_n^{n-1} \cup W_n^{n+1} = \{w\} \cup \{w_i\}_{i=1}^s$ escribimos $\tilde{T}w = \alpha_w w + \sum_{i=1}^s \alpha_i w_i$. Mostremos que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, s$, en efecto, sea $U_j$ tal que $U_j w = w$ y $U_j w_j = -w_j$ entonces

$$\begin{aligned} U\tilde{T}w &= U\left(\alpha_w w + \sum_{i=1}^s \alpha_i w_i\right) = \alpha_w w - \alpha_j w_j + \sum_{i=1, i\neq j}^s \alpha_i w_i, \\ \tilde{T}Uw &= \tilde{T}w = \alpha_w w + \alpha_j w_j + \sum_{i=1, i\neq j}^s \alpha_i w_i, \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\alpha_j = -\alpha_j$ por lo que $\alpha_j = 0$. Además, como para cada par $w_1^{n-1}, w_2^{n-1}$ o $w_1^{n+1}, w_2^{n+1}$ existe una isometría $U_p$ que mapea el primero en el segundo tenemos que, por (3.24), $\alpha_w = \tilde{T}r(W_n^{n-1}, \tilde{T}) = \tilde{T}r(W_n^{n-1}, T)$ si $w \in W_n^{n-1}$ o $\alpha_w = \tilde{T}r(W_n^{n+1}, \tilde{T}) = \tilde{T}r(W_n^{n+1}, T)$ si $w \in W_n^{n+1}$. Así $\alpha_w$ no depende de $w$ y, por (1) del Lema 3.6 tenemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}f\| \geq |(\tilde{T}f)(0)| &= \left|\left(\frac{\tilde{T}F_{n-1}}{\|F_{n-1}\|} - \frac{\tilde{T}F_{n+1}}{\|F_{n+1}\|}\right)(0)\right| \\ &= \left|\left(\frac{1}{\|F_{n-1}\|}\sum_{w\in W^{n-1}} \tilde{T}w - \frac{1}{\|F_{n+1}\|}\sum_{w\in W^{n+1}} \tilde{T}w\right)(0)\right| \\ &= \left|\left(\frac{1}{\|F_{n-1}\|}\sum_{w\in W^{n-1}} k_w w - \frac{1}{\|F_{n+1}\|}\sum_{w\in W^{n+1}} k_w w\right)(0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\|F_{n-1}\|}\sum_{w\in W^{n-1}} \tilde{T}r(W^{n-1}, T) - \frac{1}{\|F_{n+1}\|}\sum_{w\in W^{n+1}} \tilde{T}r(W^{n+1}, T)\right| \\ &= \left|\tilde{T}r(W^{n-1}, T) - \tilde{T}r(W^{n+1}, T)\right|. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Finalmente, escojamos un $U \in G$ que cumpla (3.25). Por (3.23) y (3.26) queda mostrado el lema, es decir

$$|\tilde{T}r(W_n^{n-1}, T) - \tilde{T}r(W_n^{n+1}, T)| \leq \|\tilde{T}f\| \leq \|TUf\| \leq \frac{2}{n}\frac{\|TUf\|}{\|Uf\|}.$$

■

# Capítulo 4

# Contraejemplo al Problema de la Base en espacios de Banach separables

En este capítulo se construirá un espacio de Banach separable que no tiene la Propiedad de Aproximación y, como consecuencia, no tiene base de Schauder. Por lo anterior, se resuelve el Problema de la Base en espacios de Banach separables de forma negativa.

Las características que va a tener el espacio de nuestro interés se encuentran en las hipótesis del Teorema 4.1, el cual es el resultado principal de este trabajo. En lo que sigue, usaremos $\|\cdot\|_A$ para indicar la norma $\|\cdot\|$ del espacio $X$ restringida al subconjunto $A$.

**Teorema 4.1.** *Existe un espacio de Banach separable $B$ y una sucesión $\{[M_n]\}$ de subespacios de $B$ finito–dimensionales, con $\dim([M_n]) \to \infty$, y una constante $C$ tal que para todo operador $T$ de rango finito se tiene que $\|T - I\|_{[M_n]} \geq 1 - C\|T\|/\log(\dim([M_n]))$.*

Observemos que $\{C\|T\|/\log(\dim([M_n]))\}$ es una sucesión, indexada por $n$, que tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por tanto, en dicho límite, tendremos que entre el operador identidad $I$ y cualquier operador de rango finito $T$ existe una distancia distinta de cero en el espacio $[M_n]$, en particular en los conjuntos compactos contenidos en él. Por ello, Proposición 1.24, el espacio de Banach $B$, con tales características, no tiene la Propiedad de Aproximación.

Los pasos a seguir para la demostración del Teorema 4.1 serán los siguientes

1. Mostraremos, Sección 4.1, resultados con los que la función $\tilde{T}r$ (Definición 3.9) «separará» a los operadores de rango finito del operador identidad $I$. El Lema 4.5 nos proporciona las características que deben tener los espacios $[M_n]$ para que, junto con la función $\tilde{T}r$, obtenegamos la demostración del Teorema 4.1.

2. Daremos, Sección 4.2, un espacio de Banach particular, llamado $B_1$, que contendrá al espacio de Banach[1] $B$ del Teorema 4.1. En el espacio $B_1$ escogeremos una sucesión de subconjuntos finitos $M_n$, cuyos elementos son seleccionados bajo seis condiciones específicas, que serán las bases de los espacios $[M_n]$. Mostraremos también que dichos espacios cumplen las hipótesis del Lema 4.5. El espacio $B$ será el espacio de Banach generado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, esto es, $B = \overline{\mathcal{L}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)}$.

3. Finalmente, en la Sección 4.3, construiremos cada $M_n$ de forma tal que satisfaga las seis condiciones mencionadas en el paso anterior, con lo cual el Teorema 4.1 quedará demostrado.

## 4.1. Idea principal para la construcción del espacio de Banach $B$

El espacio de Banach $B$ construido es un espacio que está generado por una sucesión $\{e_n\}$ de vectores en $B_1$, cuyos elementos son linealmente independientes. La función $\tilde{T}r$ hace corresponder un número a cada operador en cada conjunto $M_n$. Ésta función tendrá como límites $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{T}r(M_n, I) \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{T}r(M_n, T) = 0$ para cualquier operador $T \in \mathcal{K}(B)$. Con esta función y con el Lema 4.4, aplicado al operador $I - T$, obtenemos la conclusión del Teorema 4.1, es decir, una distancia distinta diferente de cero entre cualquier operador de rango finito y la identidad en ciertos subespacios, lo cual nos asegura que dicho espacio así construído no tendrá la propiedad de aproximación.

Recordemos que, en un espacio de Banach $X$, los operadores $T : X \to X$ de rango finito son aquellos que cumplen $\dim(T(X)) < \infty$, es decir, existe un subconjunto finito, llamémosle $\mathcal{B}_T$, de una base de Hamel del espacio $X$ que genera a $T(X)$. Ahora bien, regresando al espacio $B$, el conjunto $\mathcal{B}_T$ asociado a un operador $T : B \to B$ de rango finito no tiene que tener relación alguna con la sucesión que genera al espacio $B$. Sin embargo, la Definición 3.8 y el Lema 4.2 nos dan una relación entre el operador $T$ y la sucesión $\{e_n\}$.

Recordemos (Definiciones 3.8 y 3.9) que, en un espacio de Banach $X$ generado por la sucesión $\{e_n\}$, $T$ es un operador de expansión finita si para $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $Te_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_i$

[1]De ahora en adelante nos referiremos a este espacio como *el espacio $B$*.

es una suma finita y que $\tilde{T}r(M,T) := \frac{1}{|M|}\sum_{e_i \in M} \alpha_{ii}$.

El siguiente lema nos dice que cualquier operador $T$ de rango finito ($T \in \mathcal{K}(B)$) puede ser aproximado tanto como queramos por un operador de expansión finita.

**Lema 4.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach generado por una sucesión de vectores $\{e_n\}$, cuyos elementos son linealmente independientes. Si $T \in \mathcal{K}(X)$, entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un operador de rango finito de expansión finita $T'$ en $X$ tal que $\|T - T'\| < \epsilon$.*

*Demostración.* Sean $\|T\| = K$ y $x_1, \ldots, x_r$ una base para el rango del operador $T$. Ya que $X = \overline{\mathcal{L}(\{e_n\})}$ podemos aproximar $x_i$, con $1 \leq i \leq r$, tanto como deseemos con algún vector $x_i' \in \mathcal{L}(\{e_n\})$. Por lo cual también podemos aproximar, tanto como deseemos, una suma finita de los $r$ vectores base, es decir,

$$\left\|\sum_{j=1}^{r} b_j x_j - \sum_{j=1}^{r} b_j x_j'\right\| \leq \frac{\epsilon}{K}\left\|\sum_{j=1}^{r} b_j x_j\right\|.$$

Si $Tx = \sum_{j=1}^{r} b_j x_j$ definimos el operador de expansión finita como $T'x = \sum_{j=1}^{r} b_j x_j'$. Así obtenemos

$$\|Tx - T'x\| = \left\|\sum_{j=1}^{r} b_j x_j - \sum_{j=1}^{r} b_j x_j'\right\| \leq \frac{\epsilon}{K}\left\|\sum_{j=1}^{r} b_j x_j\right\| = \frac{\epsilon}{K}\|Tx\| \leq \frac{\epsilon}{K}\|T\|\|x\| = \epsilon\|x\|$$

de donde $\|T - T'\| \leq \epsilon$.

■

**Definición 4.3.** *Decimos que la sucesión $\{e_n\}$ tiene la **propiedad A** si para cada suma finita $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i$ se cumple $\left\|\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i\right\| \geq \|\alpha_k e_k\|$ para todo $1 \leq k \leq r$.*

**Lema 4.4.** *Sea $X$ un espacio de Banach generado por la sucesión $\{e_n\}$, la cual tiene la propiedad A. Sea $T : X \to X$ un operador de expansión finita y sea también $M$ un subconjunto finito de $\{e_n\}$. Entonces $|\tilde{T}r(M,T)| \leq \|T\|_{[M]}$.*

*Demostración.* Para $e_k \in M$ se cumple

$$|\alpha_{kk}| = \frac{\|\alpha_{kk} e_k\|}{\|e_k\|} \leq \frac{1}{\|e_k\|}\left\|\sum_{e_i \in M} \alpha_{ik} e_i\right\| \leq \|T\|_{[M]}.$$

■

Finalmente, enunciemos el lema más importante de esta sección, ya que nos proporciona las características que debe tener el espacio de Banach $B$.

**Lema 4.5.** *Sea $X$ un espacio de Banach generado por la sucesión $\{e_n\}$, la cual tiene la propiedad A. Supongamos que existen una sucesión $\{M_n\}$ de subconjuntos finitos mutuamente disjuntos de $\{e_n\}$ y constantes $a > 1$ y $K > 0$ tales que para todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple*

1. $\dim([M_{m+1}]) > (\dim([M_m]))^a$ *y,*
2. $|\tilde{T}r(M_{m+1}, T') - \tilde{T}r(M_m, T')| \leq \dfrac{K\|T'\|}{\log(\dim([M_m]))}$

*para todo operador de expansión finita $T'$ en $X$. Entonces existe una constante $C$ tal que para cualquier operador de rango finito $T$ en $X$ se satisface que*

$$\|I - T\|_{[M_m]} \geq 1 - \frac{C\|T\|}{\log(\dim([M_m]))}$$

*donde $C = \frac{K}{1-a^{-1}}$.*

*Demostración.* Supongamos que $T'$ es un operador de expansión finita de rango finito. Notemos que $I$ es también un operador de expansión finita, ya que $Ie_k = e_k$ para toda $e_k \in \{e_n\}$, de donde $\alpha_{kk} = 1$. Además, el conjunto de operadores de expansión finita es cerrado respecto a la suma. Calculemos

$$\begin{aligned}
\|I - T'\| &\geq \left|\tilde{T}r(M_m, I - T')\right| && (4.1)\\
&= \left|\tilde{T}r(M_m, I) - \tilde{T}r(M_m, T')\right| && (4.2)\\
&\geq \left|\tilde{T}r(M_m, I)\right| - \left|\tilde{T}r(M_m, T')\right| && (4.3)\\
&= \frac{1}{|M_m|}\sum_{e_i \in M_m} 1 - \left|\sum_{k=m}^{\infty}\Big(\tilde{T}r(M_{k+1}, T) - \tilde{T}r(M_k, T')\Big)\right| && (4.4)\\
&\geq 1 - \sum_{k=m}^{\infty}\left|\tilde{T}r(M_{k+1}, T') - \tilde{T}r(M_k, T')\right| && (4.5)\\
&\geq 1 - K\|T'\|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{\log(\dim([M_k]))} && (4.6)\\
&\geq 1 - K\|T'\|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{\log(\dim([M_m])^{a^k})} && (4.7)
\end{aligned}$$

$$\geq \quad 1 - \frac{K\|T'\|}{\log(\dim([M_m]))} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{a^k} \tag{4.8}$$

$$\geq \quad 1 - \frac{K}{1-a^{-1}} \frac{\|T'\|}{\log(\dim([M_m]))} \tag{4.9}$$

donde (4.1) se debe al Lema 4.4. Puesto que la función $\tilde{T}r$ es lineal respecto al segundo argumento obtenemos (4.2). Las desigualdades (4.6) y (4.7) los obtenemos aplicando las hipótesis del lema. Por último, obtenemos (4.9) al agregar términos necesarios para completar la serie geométrica, esto se puede debido a que $a > 1$.

Finalmente, por el Lema 4.2 podemos extender el resultado, probado ya para los operadores de expansión finita, a los operadores de rango finito. ■

Observemos que, para satisfacer la Hipótesis 2, tendremos que elegir las bases $M_n$ de forma tal que la función $\tilde{T}r$ no asigne, a los operadores de expansión finita, valores muy alejados en los conjuntos sucesivos $M_n$ y $M_{n+1}$. Esto se logra, más adelante, de una forma muy interesante.

Debemos hacer notar lo siguiente: el Lema 4.5 nos dice que un espacio de Banach con las características ahí descritas es un espacio de Banach sin la Propiedad de Aproximación. Sin embargo, lo anterior no significa que aquellos espacios que cumplen las hipótesis del Lema 4.5 sean los únicos espacios de Banach sin la Propiedad de Aproximación.

Tan sólo resta construir un espacio de Banach que cumpla las hipótesis del Lema 4.5 para así probar el Teorema 4.1. Pasemos, pues, a la construcción del espacio $B$.

## 4.2. Construcción del espacio de Banach B

Ahora construiremos un espacio de Banach particular que satisfaga las hipótesis del Lema 4.5, para ello recurriremos a los espacios $C(K)$ y sus propiedades, dados en el Capítulo 3.

Elijamos dos sucesiones crecientes $\{k_m\}$ y $\{n_m\}$ de números naturales. Formemos ahora, para cada par $(k_m, n_m)$ y para todo $m \in \mathbb{N}$, los conjuntos $K_{m,j} = \mathbb{Z}_2^{2n_m}$ y a $K_m$ como la unión disjunta de los anteriores $K_{m,j}$, esto es, $K_m = K_{m,1} \uplus \cdots \uplus K_{m,k_m}$. Si observamos, $K_{m,j}$ es independiente de $j$, por ello $K_m$ es unión disjunta de $k_m$ conjuntos idénticos, por lo cual podemos escribir $K_m = \{1, \ldots, k_m\} \times \mathbb{Z}^{2n_m}$, cuya cardinalidad será $|K_m| = 2^{2n_m} k_m$.

Tomemos ahora el espacio de Banach de funciones real–valuadas sobre $K_m$ con la norma infinito, esto es,

$$C(K_m) = \{f : K_m \to \mathbb{R} : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Notemos que $C(K_m)$ es de dimensión finita ya que $K_m$ es finito, por ello el espacio $C(K_m)$ es separable. Definamos ahora el espacio de Banach $B_1$ que contendrá al espacio $B$ del Teorema 4.1.

**Definición 4.6.** *Sea*

$$B_1 := \{f = (f_1, \dots, f_m, \dots) : f_m \in C(K_m) \text{ y } \|f\| < \infty\}$$

*donde* $\|f\|^2 := \sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_\infty^2 < \infty$.

Debido a que el espacio $B_1$ es un producto de una cantidad numerable de espacios separables tenemos, por la Proposición 1.15, $B_1$ es separable. El espacio de Banach $B$ será un subespacio de $B_1$ con lo cual, por la Proposición 1.16, $B$ es separable. Con esto sólo falta que probemos que $B$ no tiene la Propiedad de Aproximación.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ tomemos del conjunto $\{f = (0, \dots, 0, f_m, f_{m+1}, 0, \dots) : f \in B_1\}$ los conjuntos finitos $M_m$ cuyos elementos son tomados bajo ciertas condiciones, mencionadas más adelante. Podemos considerar a $M_m$ como un subconjunto de $C(K_m) \oplus C(K_{m+1})$. El espacio de Banach en el que estamos interesados será $B = \overline{\mathcal{L}(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)}$.

Las condiciones que deben cumplir los elementos serán divididas en dos partes. Las primeras tres nos hablan acerca de las propiedades que deben de cumplir los elementos de $M_m$ en cada componente, con estas tres condiciones podemos dividir al conjunto $M_m$ en subconjuntos $M_{m,j}$ y $N_{m,j}$. Las tres últimas nos enuncian las propiedades que deberán satisfacer los conjuntos $M_{m,j}$ y $N_{m,j}$ para que los conjuntos $M_m$ sean los que cumplen nuestros objetivos.

Para cada $M_m$ elegiremos $k_m t_m$ elementos de $C(K_m) \oplus C(K_{m+1})$ que cumplirán las siguientes tres condiciones siguientes:

1. La componente de $e \in M_m$ en $C(K_{m,j_1})$ es 0 para toda $1 \leq j_1 \leq k_m$ menos una, donde es un elemento de $W_{n_m}^{n_m+1}$. Además, todo elemento de $W_{n_m}^{n_m+1}$ tiene que estar en algún $e$.

2. La componente de $e \in M_m$ en $C(K_{m+1,j_2})$ es o 0 o un elemento de $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$ y, para cada $1 \leq j_2 \leq k_{m+1}$, todo elemento de $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$ está en algún $e$ de $M_m$.

3. Elementos diferentes de $M_m$ nunca tienen la misma componente, distinta de cero, en $C(K_{m,j_1})$ o en $C(K_{m+1,j_2})$.

Dado que podemos ver a $e \in M_m$ como un elemento de $C(K_m) \oplus C(K_{m+1})$. Escribamos $e = (e^1, e^2)$, donde $e^1 \in C(K_m)$ y $e^2 \in C(K_{m+1})$, cada $e^1$ y $e^2$ tienen $k_m$ y $k_{m+1}$ entradas[2] respectivamente. Para $1 \leq j_1 \leq k_m$ llamemos $M_{m,j_1}$ al conjunto de todos los elementos de $M_m$ que tienen una función de $W_{n_m}^{n_m+1}$ en la $j_1$–ésima coordenada de su primera componente. Por la Condición 1, se tienen que tomar todos los elementos, para cada $j_1$, del conjunto $W_{n_m}^{n_m+1}$ no más de una sola vez (Condición 3) y como $|W_{n_m}^{n_m+1}| = t_m$, resulta que cada conjunto $M_{m,j_1}$, con $1 \leq j_1 \leq k_m$, tiene $t_m$ elementos y, obviamente, son disjuntos a pares. Así $|M_m| = k_m t_m$ y cada componente $e^1$ de $e \in M_m$ tiene todas sus entradas cero, menos una y sólo una.

Al limitar cada conjunto $M_m$ a $k_m t_m$ elementos, ya no podemos tener más elementos que los pertenecientes a los conjuntos $M_{m,j_1}$, por ello

$$M_m = \bigcup_{j_1=1}^{k_m} M_{m,j_1}. \tag{4.10}$$

Si para cada $1 \leq j_2 \leq k_{m+1}$ llamamos $N_{m,j_2}$ a los $k_{m+1}$ conjuntos que tienen funciones de $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$ en la $j_2$–ésima coordenada. Las Condiciones 2 y 3 tienen como consecuencia que $|N_{m,j_2}| = t_{m+1}$. Los conjuntos $N_{m,j_2}$ no son disjuntos a pares, ya que si lo fueran tendríamos que $\left|\bigcup_{j_2=1}^{k_{m+1}} N_{m,j_2}\right| = k_{m+1}t_{m+1} > k_m t_m$ lo que no es posible, de aquí que, a diferencia de la componente $e^1$ de $e \in M_m$, la componente $e^2$ pueda tener varias entradas distintas de cero. De manera similar a (4.10) obtenemos que

$$M_m = \bigcup_{j_2=1}^{k_{m+1}} N_{m,j_2}. \tag{4.11}$$

Enunciemos pues las condiciones restantes. Tomando en cuenta que si $\sigma(e)$ es el número de índices $j_2$ tales que $e \in M_m$ está en $N_{m,j_2}$, los subconjuntos $M_{m,j_1}$ y $N_{m,j_2}$ de $M_n$ tienen que satisfacer lo siguiente

4. $|N_{m,i_2} \cap N_{m,j_2}| \leq 2\dfrac{t_{m+1}}{n_{m+1}}$ con $i_2 \neq j_2$,

5. $|N_{m,j_2} \cap M_{m,j_1}| \leq \min\left(\dfrac{t_m}{n_m}, \dfrac{t_{m+1}}{n_{m+1}}\right)$,

[2]Sería correcto llamarlas componentes, pero para hacer diferencia llamaremos entradas a las componentes de las componentes $e^1$ y $e^2$ de $e \in M_m$.

6. $\displaystyle\sum_{e\in M_m}\left|\frac{1}{k_m t_m}-\frac{\sigma(e)}{k_{m+1}t_{m+1}}\right|\leq\frac{1}{n_{m+1}}.$

Supongamos que hemos elegido, para cada $n\in\mathbb{N}$, el conjunto $M_n$ de manera tal que son satisfechas las seis condiciones anteriores. Mostremos que la sucesión de conjuntos $\{M_n\}$ satisface las hipótesis del Lema 4.5.

### El conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ tiene la propiedad A

Por la Definición 4.3 tenemos que las combinaciones lineales del conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ deben satisfacer

$$\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i e_i\right\|\geq\|\alpha_k e_k\|$$

para cada $1\leq k\leq r$, $\alpha_i\in\mathbb{K}$ y $e_i\in\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Dado que los conjuntos $K_{m,i}$ son finitos, el supremo lo podemos tomar como el máximo y tendríamos que probar que, para $K_{m,i}$, se tiene

$$\text{máx}\left\{\left|\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i e_i\right)(p)\right|:p\in K_{m,i}\right\}\geq\text{máx}\{|\alpha_k e_k(p)|:p\in K_{m,i}\}.\tag{4.12}$$

Por construcción, la componente en $K_{m,i}$ de $e_k\in M$ toma o la función cero o una función de Walsh, llamémosla $w_k$. Si dicha componente es cero la Condición (4.12) es satisfecha.

Consideremos entonces que la componente es una función de Walsh $w_k$. Dado que las funciones de Walsh toman únicamente los valores 1 y $-1$, tenemos que la parte derecha de la desigualdad (4.12) es $|\alpha_k|$. Supongamos como falsa la desigualdad anterior, esto es

$$\text{máx}\left\{\left|\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i w_i\right)(p)\right|:p\in K_{m,i}\right\}<|\alpha_k|,\tag{4.13}$$

lo que implica que

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i w_i\right)(p)\right|<|a_k|\quad\forall p\in K_{m,i}.$$

Sabemos, por otro lado, que las funciones de Walsh forman un sistema ortogonal si las tomamos como elementos de $\ell_2$, el cual es un espacio de Hilbert. Con lo cual, cualquier combinación lineal de ellas debe cumplir, para $1\leq k\leq r$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i w_i\right\|_2\geq\|\alpha_k w_k\|_2.$$

Escribiendo de forma explícita la norma tenemos

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{p\in K_{m,i}}\left|\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i w_i\right)(p)\right|^2\right)^{1/2} &\geq \left(\sum_{p\in K_{m,i}}|(\alpha_k w_k)(p)|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{p\in K_{m,i}}|\alpha_k|^2\right)^{1/2}. \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Sin embargo, la suposición (4.13) contradice la desigualdad (4.14), la cual es siempre válida para combinaciones lineales de conjuntos ortogonales como las funciones de Walsh. Por lo anterior la desigualdad (4.12) es válida y así el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ tiene la propiedad A.

### Los espacios $[M_n]$ satisfacen la Hipótesis 1 del Lema 4.5

Para probar la relación que deben mantener las dimensiones de los subespacios $[M_n]$ será necesaria la *fórmula de Stirling*. Esta fórmula describe el comportamiento asintótico del factorial $n!$ en el límite cuando $n \to \infty$. La fórmula de Stirling, demostrada en [11], es la siguiente

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \qquad (4.15)$$

La notación anterior significa que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$ y se dice que las dos sucesiones son *equivalentes*.

También es de utilidad la aproximación, obtenida con la fórmula de Stirling, del valor del coeficiente binomial medio, dada como sigue

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)^2} = 4^n \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \frac{2\sqrt{\pi n}}{2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}. \qquad (4.16)$$

Recordando que $t_m = \binom{2n_m}{n_m - 1}$, encontremos una aproximación de $t_m$ aplicado la fórmula de Stirling (4.15). Obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} t_m &= \binom{2n_m}{n_m - 1} = \frac{(2n_m)!}{(n_m-1)!(n_m+1)!} \\ &\sim \frac{\left(\frac{2n_m}{e}\right)^{2n_m}\sqrt{4\pi n_m}}{\left(\frac{n_m-1}{e}\right)^{n_m-1}\sqrt{2\pi(n_m-1)}\left(\frac{n_m+1}{e}\right)^{n_m+1}\sqrt{2\pi(n_m+1)}} \\ &\sim \frac{2^{2n_m}}{\sqrt{\pi n_m}} \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde en el último paso se tomó en cuenta que $n_m + 1 \sim n_m$ para $n_m$ suficientemente grande, lo mismo para $n_m - 1$.

Daremos ahora la forma en la que se elegirán las sucesiones $\{n_m\}$ y $\{k_m\}$, después mostraremos que, así elegidos los valores $n_m$ y $k_m$, los conjuntos $M_m$ cumplen la Hipótesis 1 del Lema 4.5.

Seleccionemos dos constantes $1 < a$ y $1 < \gamma$ tales que

$$1 < a < \gamma \quad \text{y} \quad a < \frac{2+\gamma}{1+\gamma}, \tag{4.18}$$

un ejemplo de esto sería $\gamma = 3$ y cualquier $a$ del intervalo abierto $(1, 1.25)$.

Definamos las sucesiones

$$\{n_m = [a^m]\} \text{ y } \{k_m = [t_m^\gamma]\} \tag{4.19}$$

donde $[x]$ indica el mayor número entero menor o igual a $x$. Observemos que $a < 1 + \dfrac{1}{1+\gamma}$ y dado que $\gamma > 1$ resulta que $a < 2$. Con lo anterior tenemos que

$$n_m < n_{m+1} < 2n_m. \tag{4.20}$$

Con la aproximación (4.17), podemos observar que la dimensión de $[M_m]$, que recordemos es $k_m t_m$, cumple con lo siguiente

$$\begin{aligned} \log(\dim([M_m])) &= \log(k_m t_m) \sim \log(t_m^{\gamma+1}) = (\gamma+1)\log(t_m) \\ &\sim (\gamma+1)\log\left(\frac{2^{2n_m}}{\sqrt{\pi n_m}}\right) = (\gamma+1)\left(n_m \log(4) - \log(\sqrt{\pi n_m})\right) \\ &< (\gamma+1)\log(4)a^m. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Con lo que también obtenemos, obviamente, que

$$\log(\dim([M_{m+1}])) \sim (\gamma+1)\log(4)a^{m+1}. \tag{4.22}$$

Si sustituimos la aproximación (4.21) en (4.22) conseguimos la siguiente expresión

$$\log(\dim([M_{m+1}])) < a \log(\dim([M_m])).$$

Por tanto, con las sucesiones $\{n_m\}$ y $\{k_m\}$ elegidas como dicta (4.19) logramos que las dimensiones de los subespacios $[M_n]$ satisfagan la Hipótesis 1 del Lema 4.5.

### Los conjuntos $M_n$ satisfacen la Hipótesis 2 del Lema 4.5

Las tres condiciones últimas nos dicen la forma en que, de todas las posibilidades, debemos escoger estas $M_{m,j_1}$ y $N_{m,j_2}$ para que, junto con los Lemas 4.7 y 4.8, enunciados a continuación, nuestra sucesión $M_m$ satisfaga la Hipótesis 2 del Lema 4.5.

**Lema 4.7.** *Si las Condiciones 4 y 5 son satisfechas por $M_m$ y $T$ es un operador de expansión finita en $B$. Entonces*

$$|\tilde{T}r(N_{m,j},T) - \tilde{T}r(M_{m+1,j},T)| \leq \frac{4\|T\|}{n_{m+1}}.$$

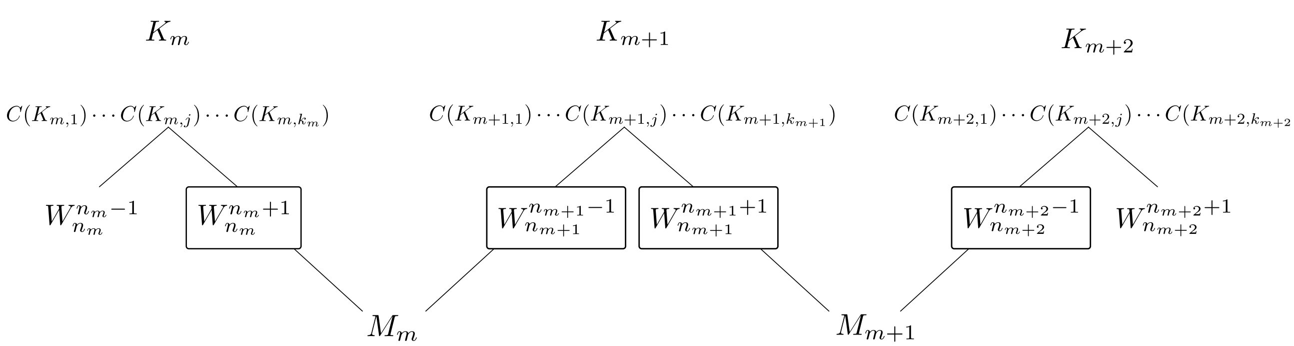


Figura 4.1: *A cada $m$ le corresponde un conjunto $C(K_m)$, el cual tiene $k_m$ copias del conjunto $C(K_{m,1})$. Este último tiene como subconjuntos a $W_{n_m}^{n_m-1}$ y $W_{n_m}^{n_m+1}$.*

*Demostración.* Recordemos, Figura 4.1, que para cada $m \in \mathbb{N}$ creamos $C(K_m)$, donde $K_m = \{1,\ldots,k_m\} \times \mathbb{Z}_2^{2n_m}$. Por lo anterior a cada $x \in C(K_m)$ restringido a $\{j\} \times \mathbb{Z}_2^{2n_m}$ lo podemos ver como una función de $C(K_{m,j})$, ya que $K_{m,j} = \mathbb{Z}_2^{2n_m}$. Éste último conjunto lo definimos en el capítulo anterior como $C(\mathbb{Z}_2^{2n})$ y tiene como subconjuntos a $W_{n_m}^{n_m-1}$ y $W_{n_m}^{n_m+1}$.

Sea $E = [N_{m,j} \cup M_{m+1,j}]$. Creemos una biyección entre $E$ y $[W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1} \cup W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}+1}]$, para ello tomamos el operador de extensión finita $T$ y realizamos la siguiente «restricción»: si $Te_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ definamos a $T'$ como $T'e_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ donde la suma queda restringida a aquellos vectores que pertenecen a $E$. Con esto $\tilde{T}r(N_{m,j}, T) = \tilde{T}r(N_{m,j}, T')$ y $\tilde{T}r(M_{m+1,j}, T) = \tilde{T}r(M_{m+1,j}, T')$. Además, como para todo $m \in \mathbb{N}$ todo elemento de $M_m$ toma el valor cero en $K_{m+1,j}$ excepto aquellos pertenecientes a $N_{m,j}$ y $M_{m+1,j}$, se tiene que $Tx(a) = T'x(a)$ con $a \in K_{m+1,j}$. Así $T'|_{K_{m+1,j}}$ es una biyección entre $E$ y $[W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1} \cup W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}+1}]$.

Sea $|||x||| := \text{máx}\{|x(a)| : a \in K_{m+1,j}\}$ para $x \in E$. Con esta norma y la isometría entre $E$ y $[W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1} \cup W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}+1}]$ podemos usar el Lema 3.10, tomando como $Uf$ el correspondiente de $x \in E$, para obtener

$$\begin{aligned} |\tilde{T}r(M_{m,j}, T) - \tilde{T}r(M_{m+1,j}, T)| &= |\tilde{T}r(M_{m,j}, T') - \tilde{T}r(M_{m+1,j}, T')| \\ &\leq \frac{2}{n_{m+1}} \frac{|||T'x|||}{|||x|||}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dado que

$$|||T'x||| = \text{máx}\{|T'x(a)| : a \in K_{m+1,j}\} = \text{máx}\{|Tx(a)| : a \in K_{m+1,j}\} \leq \|Tx\|,$$

la desigualdad (4.23) queda como

$$|\tilde{T}r(M_{m,j}, T) - \tilde{T}r(M_{m+1,j}, T)| \leq \frac{2}{n_{m+1}} \frac{\|Tx\|}{|||x|||}. \tag{4.24}$$

Por otro lado, tenemos que

$$|||x||| \geq \frac{2}{n_{m+1}} \tag{4.25}$$

ya que existe $a \in K_{m+1,j}$ tal que $x(a) = \frac{2}{n_{m+1}}$. En efecto, para

$$f = \frac{F_{n_{m+1}-1}}{\|F_{n_{m+1}-1}\|} - \frac{F_{n_{m+1}+1}}{\|F_{n_{m+1}+1}\|}$$

y $a \in K_{m+1,j}$ tal que $|a| = 1$ tenemos, por la parte 2 del Lema 3.6, que se satisface

$$\begin{aligned} Uf(a) = f(a) &= \frac{F_{n_{m+1}-1}(a)}{\|F_{n_{m+1}-1}\|} - \frac{F_{n_{m+1}+1}(a)}{\|F_{n_{m+1}+1}\|} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{n_{m+1}-1}{n_{m+1}}\right) \|F_{n_{m+1}-1}\|}{\|F_{n_{m+1}-1}\|} - \frac{\left(1 - \frac{n_{m+1}+1}{n_{m+1}}\right) \|F_{n_{m+1}+1}\|}{\|F_{n_{m+1}+1}\|} \\ &= \left(1 - \frac{n_{m+1}-1}{n_{m+1}}\right) - \left(1 - \frac{n_{m+1}+1}{n_{m+1}}\right) = \frac{2}{n_{m+1}}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Además, si recordamos que únicamente en los conjuntos $K_m, K_{m+1}$ y $K_{m+2}$ (Figura 4.1) hay elementos que no toman el valor cero en $K_{m+1,j}$ y que estos elementos también toman valores distintos de cero en otros conjuntos.

Veamos que se satisface $\|x\| \leq 2|||x|||$ en todo caso, tomando en cuenta que $\|F_{n_{m+1}-1}\| = \|F_{n_{m+1}+1}\| = t_{m+1}$.

Para $K_{m+1}$ los conjuntos $N_{m,i}$, con $i \neq j$ y $1 \leq i \leq k_{m+1}$, tienen $|N_{m,i} \cap N_{m,j}|$ elementos con componentes no cero si $a \in K_{m+1,i}$. Con lo cual

$$|x(a)| = |Uf(a)| = |f(a)| \quad = \quad \frac{|F_{n_{m+1}-1}(a)|}{\|F_{n_{m+1}-1}\|} \leq \frac{|N_{m,i} \cap N_{m,j}|}{t_{m+1}}. \tag{4.27}$$

Para $K_m$ son los conjuntos $M_{m,i}$, con $1 \leq i \leq k_m$, los que no se cancelan si $a \in K_{m,i}$. Por tanto

$$|x(a)| = |Uf(a)| = |f(a)| \quad = \quad \frac{|F_{n_{m+1}+1}(a)|}{\|F_{n_{m+1}+1}\|} \leq \frac{|N_{m,j} \cap M_{m,i}|}{t_{m+1}}. \tag{4.28}$$

De manera similar, para $K_{m+2}$ con los conjuntos $M_{m+1,i}$, $1 \leq i \leq k_{m+2}$, $a \in K_{m+2,i}$

$$|x(a)| \leq \frac{|N_{m+1,i} \cap M_{m+1,j}|}{t_{m+1}}. \tag{4.29}$$

Aplicando a (4.27), (4.28) y (4.29) las Condiciones 4 o 5 según corresponda obtenemos que $|x(a)| \leq \frac{1}{n_{m+1}}$ para todo $a$. Por tanto podemos aplicar la desigualdad (4.25), que recordemos es satisfecha para $a \in K_{m+1,j}$, a (4.27), (4.28) y (4.29) obteniendo que (4.25) es válida para cualquier $a$. Con lo cual podemos sustituir esta desigualdad en (4.24) y así

$$|\tilde{T}r(M_{m,j}, T) - \tilde{T}r(M_{m+1,j}, T)| \leq \frac{4}{n_{m+1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{4.30}$$

■

**Lema 4.8.** *Si $M_m$ satisface la Condición 6, entonces para cualquier operador de expansión finita $T$ en $B$ se tiene que*

$$\left| \tilde{T}r(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \frac{\tilde{T}r(N_{m,j}, T)}{k_{m+1}} \right| \leq \frac{\|T\|}{n_{m+1}}.$$

*Demostración.* Si $e \in M_m$, al ser $T$ un operador de expansión finita, podemos escribir $Te = \alpha(e)e + \alpha$ y, por el Lema 4.4, tenemos que

$$|\alpha(e)| \leq \|T\|. \tag{4.31}$$

Por otro lado, con la ayuda de (4.11), conseguimos la igualdad

$$\tilde{T}r(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \frac{1}{k_{m+1}} \tilde{T}r(N_{m,j}, T) = \sum_{e \in M_m} \left( \frac{a(e)}{k_m t_m} - \frac{a(e)\sigma(e)}{k_{m+1} t_{m+1}} \right) \tag{4.32}$$

con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{T}r(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \frac{1}{k_{m+1}} \tilde{T}r(N_{m,j}, T) \right| &= \left| \sum_{e \in M_m} \left( \frac{a(e)}{k_m t_m} - \frac{a(e)\sigma(e)}{k_{m+1} t_{m+1}} \right) \right| \\
&\leq |a(e)| \sum_{e \in M_m} \left| \frac{1}{k_m t_m} - \frac{\sigma(e)}{k_{m+1} t_{m+1}} \right| \\
&\leq \frac{\|T\|}{n_{m+1}}.
\end{aligned}$$

La última desigualdad se obtuvo al aplicar (4.31) y la Condición 6. ■

Supongamos ahora que $M_m$ es tal que satisface los Lemas 4.7 y 4.8, entonces $M_m$ satisface la Hipótesis 2 del Lema 4.5. En efecto, veamos que, sustituyendo por el momento $d = k_{m+1}|\tilde{T}r(M_{m+1}, T) - \tilde{T}r(M_m, T)|$ obtenemos

$$\begin{aligned}
d &= \left| k_{m+1} \tilde{T}r(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{T}r(M_{m+1,j}, T) \right| \\
&= \left| k_{m+1} \tilde{T}r(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{T}r(N_{m,j}, T) + \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{T}r(N_{m,j}, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{T}r(M_{m+1,j}, T) \right| \\
&\leq \left| k_{m+1} \tilde{T}r(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{T}r(N_{m,j}, T) \right| + \left| \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{T}r(N_{m,j}, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{T}r(M_{m+1,j}, T) \right| \\
&\leq \frac{\|T\|}{n_{m+1}} k_{m+1} + \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \frac{4\|T\|}{n_{m+1}} = \frac{5\|T\|}{n_{m+1}} k_{m+1}
\end{aligned}$$

de aquí que

$$|\tilde{T}r(M_{m+1}, T) - \tilde{T}r(M_m, T)| \leq \frac{5\|T\|}{n_{m+1}} \leq \frac{K\|T\|}{n_m} \leq \frac{K\|T\|}{\log(\dim([M_m]))}.$$

Con lo cual hemos demostrado lo que queríamos.

Terminado este punto, hemos mostrado que los subespacios cerrados generados por cada conjunto $M_m$, con $k_m t_m$ elementos que satisfacen las seis condiciones anteriores, cumplen las hipótesis del Lema 4.5. Pasemos ahora a la construcción de los espacios $M_m$.

## 4.3. Construcción de los conjuntos $M_m$

Hemos visto que si elegimos las sucesiones en la forma como están definidas en (4.19), obtenemos que la sucesión $M_m$ cumple con la Hipótesis 1 del Lema 4.5. Supongamos ahora que a $M_m$ le asociamos las sucesiones $\{n_m\}$ y $\{k_m\}$ definidas como en (4.19), con esto tan sólo resta encontrar los $M_{m,j}$ y $N_{m,j}$ que satisfagan con las Condiciones 4, 5 y 6.

Mostremos antes un resultado necesario para lo que sigue. Observemos que, por (4.17), tenemos

$$\frac{t_{m+1}}{t_m^a} \sim \frac{2^{2n_{m+1}}}{\pi^{1/2} n_{m+1}^{1/2}} \frac{\pi^{a/2} n_m^{a/2}}{2^{2an_m}} = \frac{2^{2([a^{m+1}]-a[a^m])}}{\pi^{(1-a)/2}([a^{m+1}]/[a^m]^a)^{1/2}}. \tag{4.33}$$

Sean $[a^m] = a^m - \epsilon$ y $[a^{m+1}] = a^{m+1} - \delta$, con $0 \leq \epsilon < 1$ y $0 \leq \delta < 1$, entonces

$$a[a^m] = a^{m+1} - a\epsilon = [a^{m+1}] + \delta - a\epsilon, \tag{4.34}$$

si definimos $\mu = \delta - a\epsilon$ y dado que $1 < a < 2$ tenemos $|\mu| \leq 1$.

Vemos que, por un lado, $2^{2([a^{m+1}]-a[a^m])} = 2^{-2\mu}$ es una cantidad acotada ya que $|\mu| \leq 1$. Por otro lado, como $a > 1$ tenemos que $[a^m]^a \geq [a^m]$ lo cual implica que $([a^{m+1}]/[a^m]) \geq ([a^{m+1}]/[a^m]^a)$, pero $[a^{m+1}]/[a^m] = a - \mu/[a^m]$, la cual es también una cantidad acotada.

Por lo anterior (4.33) es acotada y menor a 1. Así $t_{m+1} = O(t_m^a)$ y

$$t_{m+1}/k_m = O(t_m^{a-\gamma}). \tag{4.35}$$

### 4.3.1. Elección de los conjuntos $M_{m,j}$ y $N_{m,j}$

En el Capítulo 3 hemos dado una numeración a las funciones de Walsh, a saber la numeración de Walsh–Paley. Dicha numeración de ahora adelante no será necesaria, lo único que nos interesa es que podamos diferenciar a las funciones de los conjuntos $W_{n_m}^{n_m+1}$ y $W_{n_m}^{n_m-1}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por ello daremos otra numeración que será más conveniente para nuestros propósitos. Tomaremos el conjunto $W_{n_m}^{n_m+1}$, el cual tiene $t_m$ elementos, y numeraremos de nuevo estas funciones con una biyección entre los conjuntos $\mathbb{Z}_{t_m}$ (el grupo de los enteros módulo $t_m$) y $W_{n_m}^{n_m+1}$. Teniendo esta biyección en cuenta tendremos a los $t_m$ elementos de $W_{n_m}^{n_m+1}$ ordenados de la siguiente forma

$$W_{n_m}^{n_m+1} = \{w_1, w_2, \ldots, w_{t_m}\}. \tag{4.36}$$

Construyamos ahora un conjunto $M_m$ que satisfaga las seis condiciones. Recordemos que tenemos una forma conveniente de como podemos representar a los elementos de $M_m$. Dado que $e \in C(K_m) \oplus C(K_{m+1})$ tendrá dos componentes, cuya primera componente tiene, a su vez, $k_m$ entradas y la segunda tiene $k_{m+1}$ entradas. Por ello escribiremos a $e \in M_m$ como $e = (e^1, e^2)$ donde $e^1$ es una $k_m$–upla ordenada y $e^2$ es una $k_{m+1}$–upla ordenada.

La Condición 1 establece que cada elemento $e \in M_m$ debe tener su primera componente $e^1$ de la siguiente forma: $e^1 = (0, \ldots, 0, w_i, 0, \ldots, 0)$, es decir, debe tener todas las componentes iguales a cero, menos una, la $j_1$–ésima, en donde tiene una función $w_i$ de $W_{n_m}^{n_m+1}$. Si variamos a los índices $j_1$ e $i$ de la siguiente manera $1 \leq j_1 \leq k_m$ y $1 \leq i \leq t_m$ obtenemos ya los $k_m t_m$ elementos que debe tener $M_m$.

Los elementos del conjunto $M_m$ se pueden presentar como en la Figura 4.2, donde $e_{j,i}$ representa al elemento de $M_m$ que tiene a la $i$–ésima función de $W_{n_m}^{n_m+1}$ (según el orden (4.36)) en la $j$–ésima entrada de $e_{j,i}^1$. Con esta notación es fácil ver que $M_{m,j} = \{e_{j,i} : 1 \leq i \leq t_m\}$ para $1 \leq j \leq k_m$.

$$\begin{array}{ccccl}
e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1t_m} & \\
e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2t_m} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
e_{j1} & e_{j2} & \cdots & e_{jt_m} & M_{m,j} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
e_{k_m1} & e_{k_m2} & \cdots & e_{k_mt_m} &
\end{array}$$

FIGURA 4.2: *Representación del conjunto $M_m$ junto con un subconjunto $M_{m,j}$.*

Los conjuntos $N_{m,j}$ son construidos de manera más compleja. Por (4.35) tenemos que $t_{m+1}/k_m$ es muy pequeño. Sea $L = [k_m/t_{m+1}]$, este número lo podemos interpretar como el número máximo de subconjuntos, disjuntos a pares, de $t_{m+1}$ elementos cada uno, que podemos tomar en una columna de la Figura 4.3.

La forma en que está definido este número $L$ tiene como consecuencias, las cuales serán utilizadas posteriormente, a las desigualdades (4.37) y (4.38), las cuales al ser unidas dan la relación (4.39).

$$L = \left[\frac{k_m}{t_{m+1}}\right] \Rightarrow L \leq \frac{k_m}{t_{m+1}} \Rightarrow 0 \leq k_m - Lt_{m+1}, \tag{4.37}$$

$$L = \left[\frac{k_m}{t_{m+1}}\right] \Rightarrow \frac{k_m}{t_{m+1}} - L < 1 \Rightarrow k_m - Lt_{m+1} \leq t_{m+1}, \tag{4.38}$$

$$0 \leq k_m - Lt_{m+1} < t_{m+1}. \tag{4.39}$$

$$\begin{array}{llll}
e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1t_m} \\
e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2t_m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e_{t_{m+1},1} & e_{t_{m+1},2} & \cdots & e_{t_{m+1},t_m} \\
e_{t_{m+1}+1,1} & e_{t_{m+1}+1,2} & \cdots & e_{t_{m+1}+1,t_m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e_{2t_{m+1},1} & e_{2t_{m+1},2} & \cdots & e_{2t_{m+1},t_m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e_{Lt_{m+1},1} & e_{Lt_{m+1},2} & \cdots & e_{Lt_{m+1},t_m} \\
e_{Lt_{m+1}+1,1} & e_{Lt_{m+1}+1,2} & \cdots & e_{Lt_{m+1}+1,t_m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e_{k_m 1} & e_{k_m 2} & \cdots & e_{k_m t_m}
\end{array}$$

FIGURA 4.3: *Representación del conjunto $M_m$ mostrando el significado del valor $L$.*

Demos una numeración a las $t_{m+1}$ funciones del conjunto $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$, con ello tenemos que

$$W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1} = \{w'_1, w'_2, \cdots, w'_{t_{m+1}}\}. \tag{4.40}$$

Por las numeraciones (4.36) y (4.40), podemos sustituir a $W_{n_m}^{n_m+1}$ y $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$ por $\mathbb{Z}_{t_m}$ y $\mathbb{Z}_{t_{m+1}}$ respectivamente. Por lo cual, los conjuntos $N_{m,j}$ serán escogidos como subconjuntos de $\{1, \ldots, Lt_{m+1}\} \times \mathbb{Z}_{t_m}$ (Figura 4.4). A este último conjunto le vamos dar un *orden lexicográfico* de la siguiente manera: formaremos la sucesión de pares ordenados

$$(j, j\rho + k) \tag{4.41}$$

donde las variables $j$, $\rho$ y $k$ son incrementadas en el orden siguiente: primero incrementamos a $\rho$, después a $k$ y, finalmente, a $j$. Las variables toman los siguientes valores $j = 1, \ldots, Lt_{m+1}$, $k = 0, 1, \ldots, t_m - 1$ y $\rho = 1, 2, \ldots$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & N_{m,L+1} & & \\
 & e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1t_m}\\
N_{m,1} & e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2t_m}\\
 & \vdots & \vdots & & \vdots\\
 & e_{t_{m+1},1} & e_{t_{m+1},2} & \cdots & e_{t_{m+1},t_m}\\
 & e_{t_{m+1}+1,1} & e_{t_{m+1}+1,2} & \cdots & e_{t_{m+1}+1,t_m}\\
N_{m,2} & \vdots & \vdots & & \vdots\\
 & e_{2t_{m+1},1} & e_{2t_{m+1},2} & \cdots & e_{2t_{m+1},t_m}\\
 & \vdots & \vdots & & \vdots\\
N_{m,L} & e_{Lt_{m+1},1} & e_{Lt_{m+1},2} & \cdots & e_{Lt_{m+1},t_m}
\end{array}$$

FIGURA 4.4: *Representación del conjunto* $\{1,\ldots,Lt_{m+1}\}\times\mathbb{Z}_{t_m}$ *junto con algunos de sus subconjuntos* $N_{m,j}$.

Los primeros elementos del orden (4.41) serían

$$\begin{aligned}
&(1,0),(2,0),\cdots,(Lt_{m+1},0),(1,1),(2,1),\cdots,(Lt_{m+1},1),\cdots\\
&\cdots,(1,t_m-1),\cdots,(Lt_{m+1},t_m-1),\cdots
\end{aligned}$$

Elijamos los conjuntos $N_{m,1},N_{m,2},\ldots$, cada uno con $t_{m+1}$ elementos, de manera sucesiva en el orden (4.41), esto es

$$\begin{aligned}
N_{m,1} &= \{(i,0):1\le i\le t_{m+1}\}\\
N_{m,2} &= \{(i,0):t_{m+1}+1\le i\le 2t_{m+1}\}\\
&\vdots\\
N_{m,L} &= \{(i,0):(L-1)t_{m+1}+1\le i\le Lt_{m+1}\}\\
N_{m,L+1} &= \{(i,1):1\le i\le t_{m+1}\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hagamos notar que la variable $j$ cambia de elemento $e$ en el conjunto $N_{m,j}$, $k$ varía de $N_{m,j}$ en $\{1,\ldots,Lt_{m+1}\}\times\mathbb{Z}_{t_m}$ y, por último, la variable $\rho$ toma de nuevo los elementos de $\{1,\ldots,Lt_{m+1}\}\times\mathbb{Z}_{t_m}$. Lo último es debido a que cuando termina de recorrerse la variable $k$, esto es en cada $\rho$, se han tomado ya todos los elementos de $\{1,\ldots,Lt_{m+1}\}\times\mathbb{Z}_{t_m}$ una vez, notemos que por cada incremento de $\rho$ todo $e\in M_m$ se toma una única vez.

Ya que sólo necesitamos $k_{m+1}$ conjuntos $N_{m,j}$ y cada incremento de $\rho$ nos da $Lt_m$ conjuntos, tenemos que limitar la variable $\rho$ hasta el valor

$$\nu = [k_{m+1}/(Lt_m)]. \tag{4.42}$$

Para cada $e \in M_m$ la componente $e^2$ tiene $k_{m+1}$ entradas. Según la numeración (4.40), el conjunto $N_{m,1}$ será $\{e_{i,1} \in M_m : 1 \leq i \leq t_{m+1}\}$ y cada elemento suyo $e$ tendrá una función de $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$ en la primer entrada de la componente $e^2$. Recordemos que no podemos repetir, por lo cual ningún otro elemento de $M_m$ que no esté en $N_{m,1}$ tendrá como primera entrada en su segunda componente algo distinto de cero.

Los elementos del conjunto $N_{m,2} = \{e_{i,1} \in M_m : t_{m+1} + 1 \leq i \leq 2t_{m+1}\}$ tienen en la segunda entrada de la segunda componente las $t_{m+1}$ funciones de $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$. Esto se sigue hasta el conjunto $N_{m,L} = \{e_{i,1} \in M_m : (L-1)t_{m+1} + 1 \leq i \leq Lt_{m+1}\}$ que tiene las $t_{m+1}$ funciones del conjunto $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$ en su $L$–ésima entrada de la segunda componente. Con lo cual hemos tomado ya la primera columna de la Figura 4.4.

El conjunto $N_{m,L+1} = \{e_{i,2} \in M_m : 1 \leq i \leq t_{m+1}\}$ tiene las $t_{m+1}$ funciones en la $L+1$–ésima entrada de la segunda componente $e^2$ de sus elementos. Así se continua hasta acabar con la $t_m$–ésima columna de la Figura 4.4. Hasta aquí todo elemento de $\{1, \ldots, Lt_{m+1}\} \times \mathbb{Z}_{t_m}$ tiene en al menos una entrada de su segunda componente una función de $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$, con lo cual hemos ocupado ya las primeras $Lt_m$ entradas de la componente $e^2$ de cada elemento de $\{1, \ldots, Lt_{m+1}\} \times \mathbb{Z}_{t_m}$.

Recordemos que, por definición, $L = [k_m/t_{m+1}]$ lo que implica que

$$(k_{m+1} > k_m \geq t_{m+1}L) \Rightarrow (k_{m+1}t_{m+1} > t_{m+1}Lt_m) \Rightarrow k_{m+1} > Lt_m.$$

Por el momento hemos formado los primeros $Lt_m$ conjuntos $N_{m,j}$ de los $k_{m+1}$ necesarios. La última desigualdad nos dice que no hemos terminado todavía, pero aún tenemos entradas libres, ya que sólo tenemos hasta las primeras $Lt_m$ entradas ocupadas, en los elementos de $\{1, \ldots, Lt_{m+1}\} \times \mathbb{Z}_{t_m}$. Incrementando $\rho$ a 1 tomaremos por segunda vez cada elemento de $\{1, \ldots, Lt_{m+1}\} \times \mathbb{Z}_{t_m}$ pero esta vez iniciando en la $(L+1)t_m$ entrada. Obviamente son tomados, siguiendo la numeración (4.41), de distinta manera que con $\rho = 0$

Tomando todo elemento de $\{1, \ldots, Lt_{m+1}\} \times \mathbb{Z}_{t_m}$ con $\rho = 1$ llegaremos hasta la entrada $2Lt_m$. Pues bien, no sabemos si se sigue cumpliendo $k_{m+1} > 2Lt_m$ por ello debemos poner un límite a los incrementos de $\rho$. Este límite es $\nu$ (definido en (4.42)), por lo cual tomaremos únicamente $1 \leq \rho \leq \nu$.

Los conjuntos $M_{m,j}$ y $N_{m,j}$ elegidos de la manera descrita satisfacen las tres primeras condiciones. Probemos ahora que también satisfacen las Condiciones 4, 5 y 6.

### Prueba de que la Condición cuatro se satisface

La Condición cuatro establece que

$$|N_{m,j_1} \cap N_{m,j_2}| \leq 2\frac{t_{m+1}}{n_{m+1}} \quad \text{para } j_1 \neq j_2. \tag{4.43}$$

Para que dos conjuntos $N_{m,j}$ distintos se intersecten es necesario que tengan un punto en común, esto es, $(j, j\rho_1 + k_1) = (j, j\rho_2 + k_2)$. Debido a que en cada valor de $\rho$ dos conjuntos $N_{m,j}$ distintos son disjuntos tenemos que $\rho_1 \neq \rho_2$.

Supongamos que dos conjuntos $N_{m,j}$, digamos $N_{m,j_1}$ y $N_{m,j_2}$, se intersectan en el punto $(j, j\rho_1 + k_1) = (j, j\rho_2 + k_2)$, entonces los demás elementos comunes a los dos conjuntos son de la forma $(\chi, \chi\rho_1 + k_1) = (\chi, \chi\rho_2 + k_2)$ para algunos $\chi$ tales que $|\chi - j| < t_{m+1}$. Sea $\chi_0$ de tal forma que $\mu := |\chi_0 - j|$ es mínimo, esto es $\mu \leq |\chi - j|$ para cualquier otro $\chi$. Con esto tendremos a lo más $t_{m+1}/\mu$ elementos que pertenecen tanto a $N_{m,j_1}$ como a $N_{m,j_2}$, es decir,

$$|N_{m,j_1} \cap N_{m,j_2}| \leq \frac{t_{m+1}}{\mu}. \tag{4.44}$$

Veamos ahora que $\nu \geq n_{m+1}$, por la definición de $\mu$ se cumple que $(\mu, \mu\rho_1) = (\mu, \mu\rho_2)$ lo que implica que $\mu|\rho_1 - \rho_2|$ es divisible por $t_m$ y como $|\rho_1 - \rho_2| \leq \nu$ se tiene que $\mu \geq \dfrac{t_m}{|\rho_1 - \rho_2|} \geq \dfrac{t_m}{\nu}$. Recordemos que $L = [k_m/t_{m+1}]$ y $\nu = [k_{m+1}/(Lt_m)]$, con ello obtenemos que

$$\frac{t_m}{\nu} \geq \frac{Lt_m^2}{k_{m+1}} \geq \frac{k_m t_m^2}{k_{m+1}t_{m+1}},$$

como además se cumple

$$\frac{k_m t_m^2}{k_{m+1}t_{m+1}} = \frac{t_m^\gamma t_m^2}{t_{m+1}^\gamma t_{m+1}} = \frac{t_m^{2+\gamma}}{t_{m+1}^{1+\gamma}} \sim \frac{t_m^{2+\gamma}}{(k_m t_m^{a-\gamma})^{1+\gamma}} = \frac{t_m^{2+\gamma}}{t_m^{a(1+\gamma)}} = t_m^{2+\gamma-a(1+\gamma)}$$

concluimos que

$$\nu \geq \frac{t_m}{\nu} \sim t_m^{2+\gamma-a(1+\gamma)}.$$

Por otro lado si, para $m$ suficientemente grande, aplicamos (4.16) y (4.20) a $t_m$ conseguimos la siguiente desigualdad

$$
\begin{aligned}
t_m &= \binom{2n_m}{n_m - 1} = \frac{(2n_m)!}{(n_m-1)!(n_m+1)!} = \frac{(2n_m)!}{(n_m!)^2}\frac{n_m}{n_m+1} \\
&\sim \frac{n_m}{n_m+1}\frac{4^{n_m}}{\sqrt{\pi n_m}} \gg 2n_m > n_{m+1}
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

de donde, debido a que las constantes $a$ y $\gamma$ han sido elegidas según (4.18), tenemos que $2+\gamma-a(1+\gamma)>0$ y así, por (4.45), finalmente obtenemos

$$\mu \geq \frac{t_m}{\nu} \sim t_m^{2+\gamma-a(1+\gamma)} > n_{m+1}.$$

**Prueba de que la Condición cinco se satisface**

Ya que la variable $j$ del orden (4.41) no pasa de $k_m$, tenemos como consecuencia que ningún conjunto $N_{m,j}$ tiene dos elementos en la misma fila de la representación de $M_m$ de la Figura 4.2, o lo que es lo mismo, no comparte más de un elemento con el conjunto $M_{m,j}$. Con lo cual obtenemos que

$$|N_{m,j} \cap M_{m,i}| \leq 1$$

y así está probada la Condición 5, debido a (4.19) y (4.45).

**Prueba de que la Condición seis se satisface**

La Condición seis dice que se debe cumplir que

$$\sum_{e\in M_m}\left|\frac{1}{k_m t_m} - \frac{\sigma(e)}{k_{m+1}t_{m+1}}\right| \leq \frac{1}{n_{m+1}}. \tag{4.46}$$

Con los $N_{m,j}$ elegidos de esta manera se cumple que, para los $e \in M_{m,1}\cup\cdots\cup M_{m,Lt_{m+1}}$, $\sigma(e)$ satisface la condición

$$\left|\sigma(e) - \frac{k_{m+1}}{Lt_m}\right| \leq 1 \tag{4.47}$$

esto se debe a que cada $e$ aparece una vez por cada $\rho$, ya que en cada $\rho$ los $N_{m,j}$ son disjuntos. Por ello, $\sigma(e)=\nu$ o $\sigma(e)=\nu-1$ y, por definición, $\nu$ es $\left[\dfrac{k_{m+1}}{Lt_m}\right]$. Por otro lado, $\sigma(e)=0$ para el resto de $e$ en $M_m$. Para el primer caso tenemos que la desigualdad (4.46) queda de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma(e)\neq 0}\left|\frac{1}{k_m t_m}-\frac{\sigma(e)}{k_{m+1}t_{m+1}}\right| &= \sum_{\sigma(e)\neq 0}\frac{1}{k_{m+1}t_{m+1}}\left|\frac{k_{m+1}t_{m+1}}{k_m t_m}-\sigma(e)\right| \\
&= \sum_{\sigma(e)\neq 0}\frac{1}{k_{m+1}t_{m+1}}\left|\frac{k_{m+1}t_{m+1}}{k_m t_m}-\frac{k_{m+1}}{Lt_m}+\frac{k_{m+1}}{Lt_m}-\sigma(e)\right| \\
&\leq \sum_{\sigma(e)\neq 0}\left(\frac{1}{k_{m+1}t_{m+1}}\left|\frac{k_{m+1}t_{m+1}}{k_m t_m}-\frac{k_{m+1}}{Lt_m}\right|\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{k_{m+1}t_{m+1}}\left|\frac{k_{m+1}}{Lt_m}-\sigma(e)\right|\right) \\
&\leq \sum_{\sigma(e)\neq 0}\left(\left|\frac{1}{k_m t_m}-\frac{1}{Lt_m t_{m+1}}\right|+\frac{1}{k_{m+1}t_{m+1}}\right) \qquad (4.48) \\
&= \left(\left|L-\frac{k_m}{t_{m+1}}\right|\frac{1}{Lt_m k_m}+\frac{1}{k_{m+1}t_{m+1}}\right)\sum_{\sigma(e)\neq 0}1 \\
&\leq \left(\frac{1}{Lt_m k_m}+\frac{1}{k_{m+1}t_{m+1}}\right)k_m t_m \qquad (4.49) \\
&= \frac{1}{L}+\frac{k_m t_m}{k_{m+1}t_{m+1}}\leq\frac{1}{n_{m+1}} \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

donde aplicamos la Condición (4.47) para obtener la desigualdad (4.48). La relación (4.49) se cumple, por un lado, del hecho de que $L$ cumple (4.39) y, por el otro, de que únicamente basta contar los $e$ tales que $\sigma(e)\neq 0$, pero si contamos todos los $e$ que están en $M_m$, a saber los $k_m t_m$ elementos, obtenemos una cota más conveniente. Finalmente, (4.50) se da porque los dos sumandos van como $t_{m+1}^{-1}$ y por la relación (4.45), aplicada a $t_{m+1}$, obtenemos el resultado ya que $t_{m+1}\gg 2n_{m+1}>n_{m+1}$.

Para el segundo caso, esto es cuando $\sigma(e)=0$, observamos que el número de $e$ que cumplen $\sigma(e)=0$ es, por (4.38), $(k_m-Lt_m)t_m<t_{m+1}t_m$ con lo cual

$$
\sum_{\sigma(e)=0}\frac{1}{k_m t_m}=\sum_{i=1}^{(k_m-Lt_m)t_m}\frac{1}{k_m t_m}<\sum_{i=1}^{t_{m+1}t_m}\frac{1}{k_m t_m}=\frac{t_{m+1}}{k_m}
$$

que por (4.35) es del orden $O(t_m^{a-\gamma})$ que es menor que $n_{m+1}^{-1}$. Con lo cual la Condición seis es satisfecha.

De esta manera queda demostrado el Teorema 4.1 y así se da respuesta al Problema de Aproximación y al Problema de la Base en Espacios de Banach Separables.

## 4.4. Otros contraejemplos

Una vez que Enflo respondió negativamente al Problema de la Base en espacios de Banach, A. M. Davie dio a conocer que también los espacios $\ell_p$ $(2 < p < \infty)$ tienen subespacios cerrados sin la propiedad de aproximación [1], al igual que S. Kwapien en [12]. A. Szankowski [20], encontró que los espacios de Banach $\ell_p$ con $1 \leq p < 2$ contienen subespacios que no tienen la Propiedad de Aproximación, de hecho su método también obtiene dichos espacios para $2 < p \leq \infty$.

G. W. Johnson y L. V. Petersen [8], con una modificación en la construcción de Davie, mostraron que ciertas clases de espacios de Banach, llamados espacios de sucesiones de Lorentz $d(w, p)$ tienen subespacios cerrados en los cuales también falla la Propiedad de Aproximación. Estos espacios son los siguientes: sea $w = \{w_n\}$ una sucesión no creciente de números positivos con $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$. Para $1 \leq p < \infty$, definimos $d(w, p)$ como el conjunto de todas las sucesiones complejas $a = \{a_n\}$ para las cuales

$$\|a\| = \sup \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|^p w_n \right)^{1/p} < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las permutaciones $\pi$ de enteros positivos.

Se dice que un espacio de Banach $X$ tiene la Propiedad de Aproximación acotada si existe una sucesión $\{A_n\}$ en $\mathcal{K}(X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x - x\| = 0$ para todo $x \in X$. Tenemos que si $X$ tiene base de Schauder $\Rightarrow$ $X$ tiene la Propiedad de Aproximación Acotada $\Rightarrow$ $X$ tiene la Propiedad de Aproximación. Enflo contruyó un espacio que no tiene la Propiedad de Aproximación, T. Figiel y W. B. Johnson [5] encontraron un espacio que tiene la Propiedad de Aproximación pero no la Propiedad de Aproximación Acotada. Enflo se preguntaba sobre la existencia de uno que tuviera la Propiedad de Aproximación Acotada pero que no contará con base de Schauder, en 1987, Szarek [21] encontró dicho espacio.

Finalmente, en cuanto a la Propiedad de Aproximación, W. Yuwen y P. Shaorong [23] demostraron, en 2002, que un operador $T : X \to Y$, con $X, Y$ espacios de Banach, es compacto si y solamente si $T$ es aproximado por una sucesión de operadores un poco más generales que los lineales, llamados homogéneos, cuyo nombre proviene del hecho de que se debilita la propiedad de linealidad del operador a tan sólo la propiedad de homogeneidad, es decir, que cumple $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, ya no tomando la aditividad.

# Conclusiones

Las bases algebraicas son muy importantes en la teoría de los espacios de dimensión finita, al igual que las bases ortonormales en los espacios de Hilbert. Sin embargo, para investigar a los espacios de Banach, y los topológicos en general, es necesario encontrar una idea equivalente a ellas.

Las bases de Schauder son la «generalización» de las bases anteriores, no obstante, son una generalización parcial, es decir, no abarcan a todo espacio de Banach pero han resultado muy valiosas a la hora de trabajar con los espacios que sí la tienen. Por lo anterior es importante caracterizar los espacios de Banach que cuentan con una base de Schauder, sin embargo dicho problema ha resultado ser bastante complicado.

Ya que todo espacio de Banach con base de Schauder es separable, es buena idea descubrir si la inversa en cierta. El contraejemplo de Enflo da como resultado que ni la rica estructura de un espacio de Banach separable, comparada con la de un espacio topológico, es suficiente para garantizar la existencia de una base de Schauder.

Las bases son una herramienta muy importante para el estudio de espacios, por ello la búsqueda de una base adecuada para los espacios de Banach en general se mantiene y ha dado como resultado otras bases, una de las más importantes es la llamada *base de Markushevich* la cual abarca todos los espacios de Banach separables e incluso algunos no separables.

Sin embargo, las bases de Schauder no dejan de ser importantes, aun con la existencia de estas generalizaciones, debido a que los espacios de Banach separables que no cuentan con base de Schauder son espacios que difícilmente se encuentran de «manera natural» y todos los espacios de Banach separables «más usados» tienen una. Por ello es bastante notable la solución al Problema de Aproximación y como consecuencia al Problema de la Base.

# Notaciones

| | |
|---|---|
| $\mathcal{L}(E)$ | Espacio lineal generado por el conjunto de vectores $E$. |
| $\{x_n\}$ | Sucesión. |
| $\mathcal{B}(X,Y)$ | Conjunto de mapeos $T : X \to Y$ lineales y continuos. |
| $\mathcal{B}(X)$ | $\mathcal{B}(X,X)$. |
| $X^*$ | $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$. |
| $\mathcal{C}(X,Y)$ | Conjunto de mapeos $T : X \to Y$ completamente continuos. |
| $\mathcal{K}(X,Y)$ | Conjunto de mapeos $T : X \to Y$ de rango finito. |
| $\|a\|$ | $\|a\|$ el número de coordenadas distintas de cero de $a \in \mathbb{Z}_2^{2n}$. |
| $R_n$ | $n$–ésima función de Rademacher. |
| $w^m$ | Función de Walsh que es producto de $m$ funciones de Rademacher distintas. |
| $W_n^m$ | Conjunto de todas las funciones de Walsh $w^m$. |
| $t_n$ | $t_n = \|W^{n-1}\| = \|W^{n+1}\| = \binom{2n}{n-1}$. |
| $F_m$ | $F_m = \sum_{w^m \in W^m} w^m$. |
| $\tilde{T}r(M,T)$ | $\tilde{T}r(M,T) = \frac{1}{\|M\|} \sum_{e_i \in M} \alpha_{ii}$, donde $M \subseteq \{e_i\}$ finito y $Te_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_i$. |
| $[M_n]$ | $[M_n] = \overline{\mathcal{L}(M_n)}$. |
| $\{k_m\}, \{n_m\}$ | Sucesiones crecientes de números naturales. |
| $K_{m,j}$ | $K_{m,j} = \mathbb{Z}_2^{2n_m}$. |

| | |
|---|---|
| $K_m$ | $K_m = \biguplus_{j=1}^{k_m} K_{m,j} = \{1,\dots,k_m\} \times \mathbb{Z}_2^{2n_m}$. |
| $C(K_m)$ | $C(K_m) = \{f : K_m \to \mathbb{R} : \|f\|_\infty < \infty\}$. |
| $B_1$ | $B_1 := \{f = (f_1,\dots,f_m,\dots) : f_m \in C(K_m) \text{ y } \|f\| < \infty\}$. |
| $M_m$ | $M_m \subseteq C(K_m) \oplus C(K_{m+1})$. |
| $e$ | $e = (e^1, e^2) \in M_m$ tal que $e^1 \in C(K_m)$ y $e^2 \in C(K_{m+1})$. |
| $M_{m,j}$ | Conjunto de todo $e \in M_m$ tal que la $j$–ésima entrada de $e^1$ es una función de $W_{n_m}^{n_m+1}$. |
| $N_{m,j}$ | Conjunto de todo $e \in M_m$ tal que la $j$–ésima entrada de $e^2$ es una función de $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$. |
| $\sigma(e)$ | Número de índices $j$ tal que $e \in N_{m,j}$. |
| $[x]$ | Mayor número entero menor o igual a $x \in \mathbb{R}$. |
| $L$ | $L = \left[\frac{k_m}{t_{m+1}}\right]$. |
| $\nu$ | $\nu = \left[\frac{k_{m+1}}{Lt_m}\right]$. |

# Bibliografía


[1] A. M. Davie. The Approximation Problem for Banach spaces. *Bull. London Math. Soc.*, vol. 5, 1973.

[2] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear operators vol I.* Interscience Publishers, 1958.

[3] P. Enflo. A counterexample to the Approximation Problem in Banach spaces. *Acta Mathematica*, vol. 130, 1973.

[4] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, and V. Zizler. *Functional analysis and infinite–dimensional geometry.* Springer, 2001.

[5] T. Figiel and W. B. Johnson. The Approximation Property does not imply the Bounded Approximation Property. *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 159, 1973.

[6] I. L. Iribarren. *Topología de espacios métricos.* Limusa–Wiley S. A., 1973.

[7] G. J. Jameson. *Topology and normed spaces.* Chapman and Hall, 1974.

[8] G. W. Johnson and L. V. Petersen. A note on Banach spaces without the Approximation Property. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 18, 1977.

[9] P. K. Kamthan and M. Gupta. *Theory of bases and cones.* Pitman Publishing Inc, 1985.

[10] A. Kolmogorov and S. Fomín. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* Editorial Mir, 1975.

[11] L. D. Kudriávtsev. *Curso de análisis matemático.* Editorial Mir, 1981.

[12] S. Kwapien. On Enflo's example of a Banach space without the Approximation Property. *Séminaire Goulaouic–Schwartz 1972–1973: Équations aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle. Centre de Math., École Polytech.*, Exp No. 8, 9 pp, 1973.

[13] L. P. Lebedev and I. I. Vorovich. *Functional analysis in mechanics*. Springer, 2003.

[14] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces I*. Springer–Verlag, 1977.

[15] G. G. Lorentz. *Bernstein Polynomials*. University of Toronto Press, 1953.

[16] R. E. Megginson. *An introduction to Banach space theory*. Springer, 1998.

[17] P. Müler. *Isomorphisms between $H^1$ spaces*. Birkhäuser–Verlag, 2005.

[18] H. Fetter Nathansky and B. Gamba de Buen. *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach*. Grupo Editorial Iberoamérica, 2002.

[19] K. A. Ross and A. H. Stone. Products of separable spaces. *The American Mathematical Monthly*, vol. 71, 1964.

[20] A. Szankowski. Subspaces without the Approximation Property. *Israel Journal of Mathematics*, vol. 130, 1978.

[21] S. J. Szarek. A Banach space without a basis wich has the Bounded Approximation Property. *Acta mathematica*, vol. 159, 1987.

[22] J. L. Walsh. A closed set of normal orthogonal functions. *Amer. J. Math.*, vol. 55, 1923.

[23] W. Yuwen and P. Shaorong. An Approximation Problem of the finite rank operator in Banach spaces. *Science in China*, vol. 46, 2002.