



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Sincronización de Osciladores mediante
el uso de excitación paramétrica**

Tesis que presenta

M.C. Olivia Trilce Mimila Prost

Para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE CONTROL AUTOMÁTICO

Director de la Tesis: Dr. Joaquín Collado M.

México, D.F.

Diciembre 2012

Índice general

Índice de figuras	v
Agradecimientos	XIII
Resumen	XV
Introducción	XVII
1. Preliminares	1
1.1. Sincronización	1
1.1.1. Historia-Antecedentes	1
1.1.2. Condiciones para sincronización	4
1.2. Oscilador de van der Pol	5
1.2.1. Descripción matemática, caso cuasi-lineal	7
1.3. Excitación paramétrica	8
1.3.1. Historia-Antecedentes	9
1.4. Herramientas Matemáticas	10
1.4.1. Historia-Antecedentes	10
1.4.2. Perturbaciones Regulares	11
1.4.3. Promediación	15
2. Oscilador de van der Pol cuasi-lineal Excitado Paramétricamente	19
2.1. Efecto en la frecuencia	19
2.2. Efecto en la amplitud	22
2.2.1. Observaciones en el plano de fase	23
2.2.2. Análisis	24
2.3. Conclusiones	35
3. Par de Osciladores de Van der Pol cuasi-lineales Acoplados	37
3.1. Acoplamiento Unidireccional	37
3.1.1. vdP forzado y con excitación paramétrica	38
3.1.2. vdP forzante y con excitación paramétrica	40
3.1.3. vdP forzante y forzado con excitación paramétrica	42

3.1.3.1.	Frecuencia de excitación paramétrica al doble de la frecuencia del vdP forzante	42
3.1.3.2.	Frecuencia de excitación paramétrica al doble de la frecuencia del vdP forzado	44
3.1.3.3.	Frecuencia de excitación paramétrica al doble de la frecuencia natural de cada oscilador	46
3.2.	Acoplamiento Bidireccional	48
3.2.1.	Ambos excitados paraméricamente y acoplados simétricamente	48
3.2.2.	Análisis por promediación	49
3.2.3.	Intensidad de acoplamiento	52
3.3.	Conclusiones	54
4.	Ecuación Generalizada del Oscilador de van der Pol casi-lineal excitado Paraméricamente	57
4.1.	Efecto de la excitación paramétrica	57
4.2.	Ecuación Generalizada	57
4.2.1.	Análisis por promediación	58
4.2.2.	Vinculo entre ecuaciones	58
4.2.3.	Modelo en coordenadas polares	59
4.3.	Ejemplos: sincronización	62
4.4.	Conclusiones	64
5.	Resultados Experimentales	65
5.1.	Osciladores no lineales excitados paraméricamente	65
5.2.	Osciladores No lineales Acoplados Unidireccionalmente	68
5.2.1.	Sin excitación paramétrica	68
5.2.2.	Con excitación paramétrica	70
5.3.	Osciladores No lineales Acoplados Bidireccionalmente	75
5.3.1.	Con excitación paramétrica	75
5.4.	Conclusiones	77
6.	Conclusiones Generales y Trabajo Futuro	79
	Bibliografía	81
A.	Publicaciones	85
A.1.	Artículos en Congreso	85
A.2.	Artículos en Revista	85

Índice de figuras

1.1. Oscilador armónico para condiciones iniciales $x_0 = [1, 2.5, 4]$, $\dot{x}_0 = 0$ vs oscilador auto-sostenido $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 2)$	4
1.2. Regiones de sincronización en función de la desintonización ($\Delta\omega$) y de la intensidad de acoplamiento ($k_1 < k_2 < k_3$)	5
1.3. Plano de Fase del oscilador de van der Pol para $\varepsilon = [0.01, 1, 10]$	7
2.1. a) Tres valores de ω_b (sólida) correspondientes a las tres posibles soluciones de 2.9 para $\omega_{b_0} = 1.3$, $\varepsilon = 0.1 = \alpha$. Restricciones $\omega_b = \pm \frac{\Omega}{2}$ (punteada). b) Acercamiento de la a) alrededor de $\Omega = 2\omega_b$	22
2.2. a) Valores extremos de las nullclines para $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectivamente. b) ciclos límite extremos para $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectivamente.	23
2.3. Ciclos límite de la solución numérica (sólida) y de la solución aproximada (punteada) para $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectivamente.	24
2.4. Puntos de equilibrio de la fase $\dot{\psi}$ para $\Omega = 2\omega_0$	26
2.5. Puntos de equilibrio para \dot{a} cuando $\psi \rightarrow \psi_{eq_0}$ ó $\psi \rightarrow \psi_{eq_1}$ (curva más cercana al origen); y cuando $\psi \rightarrow \psi_{eq_2}$ ó $\psi \rightarrow \psi_{eq_3}$ (curva más alejada del origen)	27
2.6. Solución numérica $x(t)$ acotada por la amplitud aproximada $\pm a(t)$ para amplitudes de excitación paramétrica $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectivamente.	28
2.7. Puntos de equilibrio de la fase $\dot{\psi}$ para $\Omega \neq 2\omega_0$	29
2.8. Puntos de equilibrio para \dot{a} cuando $\psi \rightarrow \psi_{eq_0}$	30
2.9. Puntos de equilibrio para una frecuencia de excitación paramétrica $\Omega < \sqrt{2}\omega_b$	31
2.10. Puntos de equilibrio para una frecuencia de excitación paramétrica $\sqrt{2}\omega_b < \Omega < 2\omega_b$	32
2.11. Puntos de equilibrio para una frecuencia de excitación paramétrica $\Omega > 2\omega_b$	33
2.12. Solución numérica $x(t)$ acotada por la aproximación de la amplitud $\pm a(t)$ para $\alpha = 0.1$ y a) $\Omega = 3\omega_b, \mu = 0$ y b) $\Omega = 1.9223\omega_b, \mu = 0.0025$	34
3.1. Osciladores de van der Pol acoplados unidireccionalmente. a) caso forzado con excitación paramétrica; b) caso forzante con excitación paramétrica.	38
3.2. Osciladores de van der Pol acoplados unidireccionalmente. Caso forzado y excitado paraméricamente.	38

3.3. Espectro de frecuencia del oscilador de vdP excitado paramétricamente y forzado por un segundo oscilador de vdP.	40
3.4. Osciladores de van der Pol acoplados unidireccionalmente. Caso forzante y excitado paramétricamente.	41
3.5. Espectro de frecuencia del oscilador de vdP forzado por un segundo oscilador de vdP excitado paramétricamente.	41
3.6. Osciladores de van der Pol acoplados unidireccionalmente. Tanto el oscilador forzado como el forzante son excitados paramétricamente.	42
3.7. Espectro de Frecuencia del oscilador de vdP forzado cuando $\Omega = 2\omega_a$ para diferentes intensidades de acoplamiento.	44
3.8. Espectro de Frecuencia del oscilador de vdP forzado cuando $\Omega = 2\omega_b$ para diferentes intensidades de acoplamiento.	46
3.9. Espectro de Frecuencia del oscilador de vdP forzado para diferentes instensidades de acoplamiento, cuando la frecuencia de excitación paramétrica de cada vdP es el doble de su frecuencia natural.	47
3.10. Acoplamiento bidireccional de dos vdP's excitados paramétricamente	48
3.11. a)→c) Resultados conocidos para el oscilador de vdP con/sin acoplamiento con otro vdP y con/sin excitación paramétrica aplicada. d) Resultado por obtenerse de un par de vdP's excitados paramétricamente y acoplados entre si.	49
3.12. Diferencia entre las amplitudes y fases del par de sistemas auxiliares (3.17).	51
3.13. Soluciones propuestas (3.11) & (3.12) comparadas con la solución numérica del sistema (3.10)	52
3.14. Espectro de Frecuencia del par de osciladores de vdP acoplados bidireccional y simétricamente para la intensidad de acoplamiento critico k_c y la nueva intensidad de acoplamiento k_{n6}	53
4.1. Solución numérica del vdP excitado paramétricamente con $\Omega = 2\omega_0$ y la solución numérica de la ecuación generalizada correspondiente. a) para $\varepsilon = 0.01$; b) para $\varepsilon = 0.1$	59
4.2. Radio $r(t)$; Plano de fase \dot{x} vs x para $\varepsilon = 0.01$	60
4.3. Radio $r(t)$; Plano de fase \dot{x} vs x para $\varepsilon = 0.1$	61
4.4. Solución numérica de la ecuación generalizada del vdP y del modelo de coordenadas polares reexpresado en coordeandas rectangulares.	61
5.1. $R_{11} = 10Kk\Omega$, $R_{12} = R_F = 1Kk\Omega$, $R_{21} = 62.89Kk\Omega$, $R_{31} = 270Kk\Omega$, $R_{32} = 1Mk\Omega$, $R_{41} = R_{42} = 4.7Kk\Omega$, $R_{51} = R_{52} = 18Kk\Omega$, $R_{2F} = 15Kk\Omega$, $R_K = 0$; $C = C_F = 10nF$. 66	
5.2. $x_1(t)$ con ganacia de amplitud $\Delta x_1 = 0.985V$ y nueva frecuencia $f_{1x} = 35.461KHz$ por presencia de la excitación paramétrica de amplitud $C_x = 0.125nF$ y frecuencia $f_x = 86.580KHz$	66

5.3. $x_2(t)$ con ganancia de amplitud $\Delta x_2 = 2.092V$ y nueva frecuencia $f_{2_x} = 31.447\text{KHz}$ por presencia de la excitación paramétrica de amplitud $C_x = 0.125\text{nF}$ y frecuencia $f_x = 86.580\text{KHz}$	67
5.4. Plano de fase (x_1, x_2) en ausencia de acoplamiento y sin excitación paramétrica. . .	69
5.5. a) oscilador 1 forzando al oscilador 2. b) oscilador 1 forzado por el oscilador 2. . . .	69
5.6. Cerrando el interruptor a) el oscilador 1 forza al oscilador 2. Cerrando el interruptor b) el oscilador 1 es forzado por el oscilador 2. En ausencia de excitación paramétrica $u_x = 0$	70
5.7. $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 1M\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 44.248\text{KHz}$. .	71
5.8. Plano de fase (x_1, x_2) para $R_k = 1M\Omega$ en ausencia de excitación paramétrica. . . .	71
5.9. Configuraciones de acoplamiento entre osciladores no lineales excitados paramétrica-mente: a) oscilador 1 forzando al oscilador 2. b) oscilador 1 forzado por el oscilador 2. c) oscilador 1 forzando al oscilador 2. d) oscilador 1 forzado por el oscilador 2. . .	72
5.10. $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 10k\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 43.478\text{KHz}$. .	73
5.11. Plano de fase (x_1, x_2) para los cuatro casos con excitación paramétrica.	73
5.12. $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 39K\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 31.348\text{KHz}$. .	74
5.13. $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 1M\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 30.796\text{KHz}$. .	74
5.14. $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 1M\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 31.250\text{KHz}$. .	75
5.15. Osciladores no lineales excitados paraméricamente y acoplados bidireccionalmente .	76
5.16. Circuito de dos osciladores de tipo Duffing excitados paraméricamente y acoplados bidireccionalmente como en (5.2).	77
5.17. $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 1M\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 26.490\text{KHz}$. .	78

CHAPITRE XXIII

- Bonjour, dit le petit prince.

- Bonjour, dit le marchand.

C'était un marchand de pilules perfectionnées qui apaisent la soif.

On en avale une par semaine et l'on n'éprouve plus le besoin de boire.

- Pourquoi vends-tu ça ? dit le petit prince.

- C'est une grosse économie de temps, dit le marchand.

Les experts ont fait des calculs. On épargne cinquante-trois minutes par semaine.

- Et que fait-on des cinquante-trois minutes ?

- On en fait ce que l'on veut...

*"Moi, se dit le petit prince, si j'avais cinquante-trois minutes à dépenser,
je marcherais tout doucement vers une fontaine..."*

(Le Petit Prince. Antoine de Saint-Exupéry)

CAPÍTULO XXIII

- Buenos días - dijo el principito.

- Buenos días - dijo el vendedor.

Era un vendedor de píldoras perfeccionadas que calman la sed.

Se toma una por semana y no se siente más la necesidad de beber.

- ¿Por qué vendes eso? - dijo el principito.

- Es una gran economía de tiempo - dijo el vendedor.

Los expertos han hecho cálculos. Se ahorran cincuenta y tres minutos por semana.

- Y ¿qué se hace con esos cincuenta y tres minutos?

- Se hace lo que se quiere...

"Yo - se dijo el principito - si tuviera cincuenta y tres minutos para gastar,

caminaría lentamente hacia una fuente..."

(El Principito. Antoine de Saint-Exupéry)

Agradecimientos

A mis padres: Catherine y Jaime por su callada y disimulada impaciencia a lo largo de la prolongada espera aguardando la culminación de este proyecto. Por ser soportes incondicionales, guías prudentes y observadores contenidos.

A mi asesor: el Dr. Joaquín Collado por la confianza depositada, permitiéndome desarrollar el presente trabajo a mi estilo y ritmo.

A mi familia: Victor, Guadalupe, David y Olivier por su cariño y presencia. Por ser influencia positiva y despertar en mi el deseo por devolverles algo de la inspiración que me transmiten.

A los miembros del jurado por leer y comentar el contenido del presente trabajo permitiendo el enriquecimiento del mismo.

Al Dr. Rubén Garrido por el préstamo del equipo de laboratorio necesario para el desarrollo de la fase experimental del presente trabajo.

Al personal de asistencia secretarial del Departamento de Control Automático (DCA) por facilitar las tareas burocráticas del departamento; al personal auxiliar de investigación del DCA por las consultas atendidas y las facilidades prestadas en cuestiones de cómputo.

Al personal de servicios bibliotecarios por el auxilio prestado en la obtención de documentos no convencionales para complementar la investigación histórica del presente trabajo.

Al CONACYT y CINVESTAV por la beca y los apoyos económicos otorgados para la realización y culminación del presente trabajo.

Resumen

En la presente investigación se estudia el fenómeno de sincronización entre un par de osciladores de van der Pol cuasi-lineales explorando particularmente la posibilidad de conseguirla de manera más *sencilla* haciendo uso de la excitación paramétrica. Se determina el efecto que tiene la excitación paramétrica en el oscilador de van der Pol cuasi-lineal libre para posteriormente aprovechar las nuevas propiedades adquiridas en el estudio de la sincronización de dos osciladores acoplados unidireccionalmente y bidireccionalmente; estos resultados son también corroborados experimentalmente. Además se propone una ecuación generalizada del oscilador de van der Pol cuasi-lineal excitado paramétricamente para ser empleado en futuros análisis de sincronización con modelos de fase.

Introducción

El fenómeno la sincronización ha sido fuente de intriga desde mucho tiempo atrás, la primer observación documentada y estudiada se remonta a la segunda mitad del siglo XVII, durante la época en que la creación de instrumentos para la medición del tiempo en los viajes marítimos estaba en auge y en Europa se trabajaban en el desarrollo de un reloj robusto y preciso para esa función; fue en este proceso que se dio el descubrimiento de la sincronización de un par de relojes de péndulo posados sobre una misma viga y se dieron los primeros experimentos y explicaciones de dicho fenómeno. Otro caso conocido de sincronización es el descrito en el siglo XIX vinculado a la afinación de tubos de órgano que en ciertas condiciones de desafinación entre ellos logran sonar al unísono o apagar su sonido mutuamente. Con el desarrollo de la ingeniería eléctrica y de las radiocomunicaciones, los generadores de triodo fueron fuente de muchas investigaciones vinculadas con la sincronización, principalmente en el área de la radiodifusión que emplea de manera provechosa la sincronización en aplicaciones variados.

Además de presentarse en toda clase de objetos artificiales, la sincronización es un fenómeno universal que probablemente impacta mucho más al manifestarse en objetos naturales dada la impresión de desorden que suele asociárseles. Entre los espectáculos más asombrosos, descrito apenas el siglo pasado, es el de las luciérnagas en Asia que centellean rítmicamente, al caer la noche inician en desorden, y conforme ésta avanza alcanzan la sincronización de la población completa, encendiendo y apagando el paisaje donde se encuentran. Una imagen con la que estamos mucho más familiarizados es la de la Luna mostrándonos siempre la misma cara, manifestando que está en sincronía con el movimiento de nuestro planeta. En dimensiones mucho más pequeñas, se sabe que procesos internos de los seres vivos se dan como consecuencia de la sincronización de neuronas, desencadenando reacciones de toda índole en el organismo.

En la presente investigación se estudia el fenómeno de sincronización entre un par de osciladores de van der Pol cuasi-lineales explorando particularmente la posibilidad de conseguirla de manera más *sencilla* haciendo uso de la excitación paramétrica. Como punto de partida se define que la excitación paramétrica a ser considerada es de pequeña amplitud, periódica, y se encuentra aplicada en el parámetro que define la frecuencia natural del oscilador de van der Pol. Una vez conocidas las características del sistema excitado paraméricamente con el que se trabajará, se analiza éste como un elemento aislado, es decir, sin acoplarlo aun ningún otro sistema, con la intención de determinar el efecto preciso que genera la presencia de la excitación paramétrica en el oscilador, esto es, ¿qué

impacto tiene la variación periódica del parámetro que define la frecuencia natural del oscilador de van der Pol en su frecuencia y amplitud final de oscilación?

Para conocer si existe algún efecto en la frecuencia y/o la amplitud de oscilación del oscilador de van der Pol cuasi-lineal libre cuando se encuentra excitado paramétricamente, éste es analizado mediante las técnicas clásicas para sistemas no lineales oscilatorios permitiendo determinar con precisión la proporción de cambio que sufren la frecuencia y la amplitud de oscilación finales por la presencia de la señal externa. Para el análisis se emplea la teoría de perturbaciones regulares que permite determinar el efecto de la excitación paramétrica en la frecuencia de oscilación resultante; y se realiza un análisis en el plano de fase seguido de la aplicación del método de promediación para determinar el efecto en la amplitud resultante.

Una vez conocidas las modificaciones que presenta el oscilador de van der Pol cuasi-lineal al ser excitado paramétricamente se pueden suponer las ventajas o desventajas que ésta puede proporcionar al momento de ser usada en un sistema de osciladores acoplados a los que se busca sincronizar. Partiendo del caso más sencillo de sincronización, es decir, con acoplamiento unidireccional, se exploran todas las configuraciones posibles de pares de osciladores acoplados y excitados (o no) paramétricamente, determinándose así la intensidad de acoplamiento mínima que permita lograr la sincronización para cada uno de los casos abordados, y se establece la relación de orden que guardan entre si estas intensidades de acoplamiento de acuerdo con la configuración a la que están asociadas.

Tras el estudio del caso de sincronización de osciladores acoplados unidireccionalmente, se aborda el caso de acoplamiento bidireccional con la intención de determinar si se puede aprovechar la presencia de la excitación paramétrica de manera análoga al caso de acoplamiento unidireccional. Nuevamente, se recurre al análisis matemático de las ecuaciones que describen al sistema cuando ambos osciladores están excitados paramétricamente y acoplados de manera simétrica entre si. El método de perturbaciones regulares presenta una gran desventaja en esta situación, por lo que se recurre al método de promediación lo que permite vislumbrar el comportamiento de cada oscilador en estas condiciones de acoplamiento. A partir de ello se propone una expresión que refleje lo observado y sea empleada para sugerir el ajuste necesario en la intensidad de acoplamiento para la obtención de la sincronización.

Una vez tratados estos casos de sincronización de osciladores mediante las herramientas tradicionales de análisis de sistemas no lineales oscilatorios, se propuso generar una expresión matemática generalizada que tenga un comportamiento idéntico al del oscilador de van der Pol cuasi-lineal excitado paramétricamente, es decir, que refleje aquellos ajustes en amplitud y frecuencia que se pusieron de manifiesto en el análisis realizado como parte inicial de esta investigación. Esto con la intención de contar con una expresión que pueda ser llevada a una forma sencilla de amplitud-fase y que pueda ser empleada para el análisis de la sincronización de osciladores en términos parecidos a los realizados con *modelos de fase*. Buscando corroborar de manera más extendida la expresión propuesta, ésta es empleada para repetir algunos de los casos de sincronización unidireccional

tratados en el tercer capítulo, comprobándose su validez en dichas condiciones.

El desarrollo del trabajo se distribuye en cinco capítulos y un apéndice, el primero de ellos dedicado a aspectos preliminares con el fin de proporcionar elementos útiles para la familiarización con los fenómenos de sincronización y de excitación paramétrica, así como de las herramientas matemáticas para el análisis de sistemas oscilatorios, la teoría de perturbaciones y el método de promediación aplicado a osciladores. En el segundo capítulo se realiza el análisis exhaustivo del oscilador de van der Pol cuasi-lineal excitado paramétricamente buscando determinar el efecto que la señal de excitación provoca en la amplitud y la frecuencia del oscilador y vinculando dichos efectos con las características bien conocidas del van der Pol cuasi-lineal libre. En el tercer capítulo se aborda el problema de sincronización de dos osciladores aplicando la excitación paramétrica en diferentes configuraciones para así determinar si su uso puede facilitar o no la obtención de la sincronización, abordándose el caso de sincronización con acoplamiento unidireccional seguido del caso de acoplamiento bidireccional. En el cuarto capítulo se propone, a partir de los resultados analíticos del segundo capítulo una ecuación generalizada del oscilador de van der Pol excitado paramétricamente para el caso en que la frecuencia de excitación paramétrica es del doble de la frecuencia natural del oscilador y se replican algunos casos analizados en el tercer capítulo para corroborar su validez; además se obtuvo la transformación en coordenadas polares útil para estudiar la sincronización de osciladores en el contexto de los modelos de fase. En el quinto capítulo se presentan los resultados obtenidos en los trabajos experimentales realizados para complementar los análisis teóricos del segundo y tercer capítulo. El sexto capítulo corresponde a las conclusiones generales del trabajo y propone algunas ideas para la extensión de esta investigación. Finalmente, en el apéndice aparecen los artículos que generó esta Tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo se presentan los conceptos principales vinculados al tema desarrollado a lo largo de la tesis:

- la sincronización, fenómeno que da origen a nuestra investigación;
- el oscilador de van der Pol, objeto principal de estudio a lo largo de la investigación;
- la excitación paramétrica, herramienta a través de la cual se busca modificar la forma en que se consigue la sincronización de los osciladores de van der Pol
- y finalmente el arsenal matemático que permitirá el análisis del sistema y todos los fenómenos vinculados al mismo, en particular la teoría de perturbaciones y promediación.

1.1. Sincronización

Definición 1.1 *Sincronización es el ajuste de los ritmos de dos o más objetos oscilatorios similares acoplados. Dicho ajuste se manifiesta en un comportamiento colectivo que no es intrínseco a ninguno de los objetos oscilatorios individualmente y es consecuencia de la interacción existente entre ellos. La sincronización es un fenómeno esencialmente no lineal que se presenta únicamente en los sistemas auto-sostenidos. [3] [19] [24] [35] [37]*

1.1.1. Historia-Antecedentes

El primer oscilador auto-sostenido con un propósito fue inventado y construido en 1656 por Christiaan Huygens, quien adaptó un péndulo a un viejo reloj “Pre-Galileano” transformándolo en un instrumento de precisión con una elevada tasa de estabilidad [13]. Este instrumento también sería el elemento clave de la primer observación reportada del fenómeno de sincronización descrita por el mismo Huygens en una misiva a su padre donde se refiere a ella como la “simpatía de dos péndulos” y que describe de la siguiente manera:

“... vale la pena notar que al suspender dos de estos relojes (para uso en el mar) en una misma viga de madera, los movimientos de cada péndulo con oscilaciones opuestas a las del otro, están

en tal acuerdo que nunca retroceden lo más mínimo y el sonido de ambos es simultáneo. Además, si este acuerdo es perturbado por alguna interferencia, se restablece por si mismo en un corto tiempo. Por mucho tiempo estuve sorprendido por este resultado inesperado, pero tras un cuidadoso examen finalmente encontré que la causa radica en que las oscilaciones del péndulo comunican algo de movimiento a los relojes. Este movimiento impreso en la viga, necesariamente lleva a que los péndulos alcancen un estado de oscilaciones exactamente opuestas cesando completamente el movimiento de la viga.”[35] [3]

La conclusión a la que llegó Huygens fue producto de al menos una semana de experimentos, reportados detalle a detalle en sus cartas, realizando diversidad de ajustes en su sistema (colocando ambos péndulos frente a frente, de espaldas, distanciados: 3 pies, 4 pies, 6 pies; con objetos separándolos, sobre muros diferentes, etc.) y tomando nota del efecto en el comportamiento de los péndulos (A se adelantó 5 segundos, A&B coinciden completamente, B se adelantó 15 segundos, A&B no tienen nada en común, etc.). Tras diversas modificaciones y la observación de sus respectivas consecuencias, Huygens encontró la causa de la simpatía entre el par de relojes: la barra sobre la que estaban colgados. Ésta sufría de “imperceptibles jalones” por parte de cada uno de los péndulos, acelerando o frenando al otro péndulo, de acuerdo a su posición y dirección, hasta que finalmente se alcanzaba la “simpatía”. En ese momento los péndulos oscilaban en contra-fase perfecta, anulándose mutuamente los jalones.[35]

Esta primera observación documentada pone en evidencia de manera tangible la importancia de la *interacción* para que se dé el fenómeno de sincronización.

Finalizando el siglo XIX un fenómeno similar fue descubierto por Lord Rayleigh (Sir John William Strutt) en el contexto acústico. Mediante la observación de dos tubos de órgano colocados a proximidad notó que, existiendo una desafinación suficientemente pequeña entre ellos, ambos sonaban al unísono, es decir, se manifiesta la sincronización mutua.

En las primeras décadas del siglo XX, con el desarrollo de la ingeniería eléctrica y de radio, J.J. Vincent y W. H. Eccles descubrieron la propiedad de sincronización del generador de triodo demostrada mediante experimentos donde dos generadores de frecuencias ligeramente distintas eran acoplados entre si forzándose la vibración del sistema a una frecuencia común. Poco tiempo después, E. Appleton y B. van der Pol replicaron y extendieron estos experimentos y además iniciaron estudios teóricos de este efecto, haciendo una gran aportación al mundo de las radio comunicaciones, cuyo elemento base eran los generadores de triodo, pues su hallazgos permitían hacer uso de un oscilador de baja energía fijara la frecuencia de los generadores de transmisión. [1] [42]

Después de la Segunda Guerra Mundial, accidentalmente se descubrió el fenómeno de la sincronización de rotores desbalanceados (forzados por motores asíncronos) montados sobre una superficie vibratoria que bajo ciertas condiciones rotaban sincronamente, esto a pesar de diferencias en sus parámetros y en ausencia de conexiones mecánicas o eléctricas entre los rotores. I.I. Blekhman

considera que a partir de este descubrimiento se fue desarrollando el concepto de universalidad del fenómeno de sincronización pues además de presentarse en osciladores artificiales, la sincronización también está presente en una impresionante cantidad de objetos oscilatorios naturales. Un ejemplo bien conocido por todos es el de la Luna que está permanentemente orientada con la misma cara hacia la Tierra lo que evidencia la igualdad entre sus velocidades angulares en el movimiento rotacional y orbital. Similarmente existen varios trabajos, de los años setenta, sobre la sincronización del movimiento de cuerpos celestiales, como lo es la relación Venus-Tierra-Sol que cuando coinciden sobre una misma línea, la superficie de Venus visible desde la Tierra es siempre la misma; o el encuentro de las lunas de Júpiter, Dione y Encelada, que siempre sucede en el mismo punto de la órbita traslacional de Encelada; o estudios como el de Molchanov realizados sobre los (entonces) nueve planetas del sistema solar y que da una fuerte impresión de que están en un régimen de sincronía o muy cerca de éste. [3]

Desde finales del siglo pasado el interés por los fenómenos de sincronización presentes en sistemas biológicos ha sido creciente. Los trabajos sobre esta sincronización incluyen el concerniente a conjuntos de células, como por ejemplo: el nodo sinoauricular (conjunto de células marcapasos del corazón) que al dispararse en conjunto generan un potencial de acción que estimula la contracción del músculo cardíaco generándose un latido [35]; las neuronas sincronizadas en la corteza visual pueden ser responsables del reconocimiento de patrones [35]; las neuronas del conjunto corticostriatal que presentan excesiva sincronización están asociadas con los temblores incontrolables de la enfermedad de Parkinson [7]. También se ha estudiado la sincronización en seres pluricelulares, por ejemplo: en humanos, la sincronización de la frecuencia cardíaca con la respiratoria durante la realización de ejercicio [39] o en reposo bajo anestesia [23], similarmente el forzar la frecuencia respiratoria con un ventilador artificial [35]; en los seres vivos en general se ha estudiado su sincronización con los ritmos estacionales definidos por las señales del entorno, especialmente los cambios en la luz solar [10], [35]. Además se ha estudiado la sincronía en poblaciones de animales, como por ejemplo: las luciérnagas *Pteroptyx malacca* cuyos machos reunidos por la noche destellan al unísono para atraer a las hembras [5] y que han sido modeladas como una población de osciladores del tipo integra-dispara [31], [11]; una audiencia aplaudiendo al unísono [40]; el aleteo de una bandada de patos y el movimiento de un cardumen [3]; entre otros estudios realizados sobre la sincronización.

Hoy en día la sincronización como un fenómeno universal está ampliamente aceptada y los hallazgos en un área de estudio puede auxiliar en la comprensión y explicación de fenómenos en otras disciplinas. En [9] se resumen ejemplos del diseño de protocolos de sincronización-temporización en redes inalámbricas y de sensado emulando la sincronización de las luciérnagas; en [50] se dan ejemplos de la extracción de comunidades en redes complejas mediante una estrategia de sincronización local análoga a la de osciladores de fase.

La sincronización es considerada, dentro de los fenómenos de auto-organización, como uno de los problemas científicos más importantes del último cuarto del siglo XX [8]

1.1.2. Condiciones para sincronización

Siendo la sincronización *la habilidad que muestran dos o más objetos oscilatorios de ajustar sus ritmos naturales como consecuencia de una débil interacción entre ellos*, los elementos básicos para que ésta se presente son: los **objetos oscilatorios**, la **interacción** y alguna no-linealidad.

Los **objetos oscilatorios** que se consideran en el presente trabajo son los denominados osciladores auto-sostenidos. Éstos son sistemas dinámicos activos, i.e. con una fuente de energía interna, disipación y no linealidades, que presentan movimientos oscilatorios determinísticos cuya forma y ritmo únicamente dependen de los parámetros del sistema sin importar las condiciones iniciales. La trayectoria de su solución en el plano de fase tras la culminación del transitorio corresponde a una curva cerrada conocida como ciclo límite atractor, lo que se traduce en una oscilación estable a perturbaciones pequeñas, pues vuelve asintóticamente al ciclo límite [2] [15] [35]. Tradicionalmente se decía que debían ser sistemas autónomos [15] [35]; actualmente esta condición se ha relajado permitiendo que el sistema sea no autónomo, i.e. la fuente de energía puede depender del tiempo, pero en tales casos el espectro de frecuencia del oscilador no debe presentar armónicos ni sub-armónicos de la frecuencia de la fuente. [2]

Un contraejemplo de osciladores auto-sostenidos es el oscilador armónico no amortiguado, que a pesar de no detener sus oscilaciones, tiene una amplitud en función de las condiciones iniciales. Este oscilador se ejemplifica para diferentes condiciones iniciales en la Figura 1.1, así como un oscilador autosostenido.

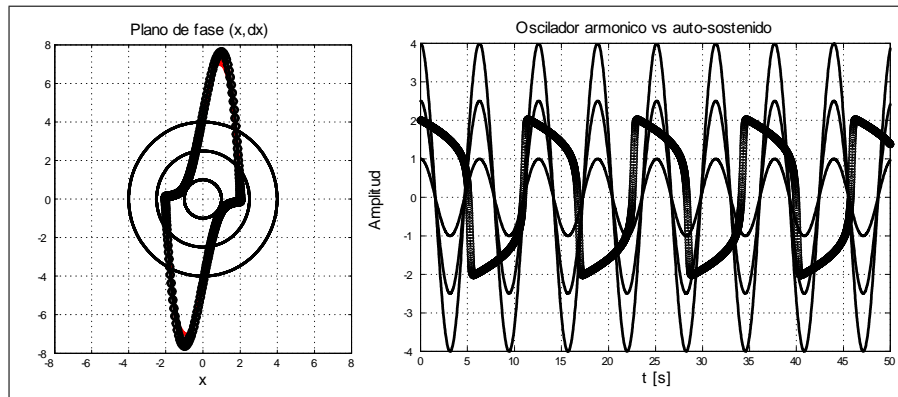


Figura 1.1: Oscilador armónico para condiciones iniciales $x_0 = [1, 2.5, 4]$, $\dot{x}_0 = 0$ vs oscilador auto-sostenido $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 2)$

La **interacción** es la responsable de la existencia de una influencia entre los objetos oscilatorios involucrados. La intensidad de acoplamiento describe que tan débil o fuerte es la interacción; en caso de presentarse una intensidad de acoplamiento demasiado fuerte se considera que el sistema acoplado en realidad es un solo sistema que no puede ser descompuesto, por lo que no puede hablarse de sincronización bajo dichas condiciones. La interacción entre los osciladores puede darse

de manera bidireccional o mutua, cuando existe influencia recíproca, y de manera unidireccional o forzada, cuando únicamente existe influencia de uno sobre el otro [24] [35].

Además de estos dos elementos fundamentales, la **desintonización** también es primordial pues la sincronización va a ser posible únicamente en un intervalo limitado de ella. La desintonización se considera como la diferencia entre los ritmos naturales de los osciladores involucrados, expresándola como $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$, donde ω_i es la frecuencia natural del i -ésimo oscilador. Se dice que se ha alcanzado la sincronización cuando $\Delta\Omega = |\Omega_1 - \Omega_2| \equiv 0$, donde Ω_i es la frecuencia del i -ésimo oscilador una vez establecido el acoplamiento. Cuanto menor sea la diferencia entre las frecuencias naturales mayor la posibilidad de alcanzar la sincronización. Además, el intervalo de desintonización cambia en función de la intensidad de acoplamiento existente pues a mayor intensidad también será mayor la región de desintonización para la cual se pueda lograr la sincronización [35]. Esto se esquematiza en la Figura 1.2.

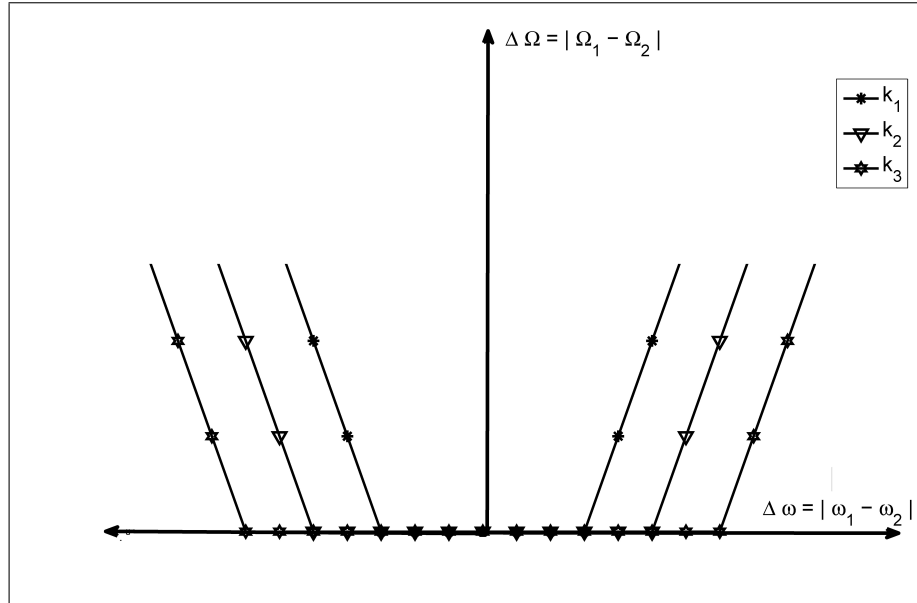


Figura 1.2: Regiones de sincronización en función de la desintonización ($\Delta\omega$) y de la intensidad de acoplamiento ($k_1 < k_2 < k_3$).

1.2. Oscilador de van der Pol

El oscilador de van der Pol debe su nombre a Balthasar van der Pol, quien durante la primera mitad del siglo veinte fue pionero en el campo de la radio y las telecomunicaciones, experimentando, en conjunto con Appleton, con oscilaciones en triodos de tubo al vacío, llegando a la conclusión que las trayectorias para todas las condiciones iniciales convergen a la misma órbita periódica de amplitud finita. [43] [44]

En su publicación [41] van der Pol comenta sobre el modelo del oscilador lineal con amortiguamiento positivo y negativo, observando que éste último no puede corresponder a un sistema físicamente realizable dado que su amplitud crecería indefinidamente. Dicha observación le llevó a suponer que el amortiguamiento debía ser función de la amplitud y que debía cambiar de signo para poder presentar una naturaleza oscilatoria sostenida y así estar en acuerdo con lo observado experimentalmente. Propuso una expresión no lineal para describir al sistema de oscilaciones sostenidas:

$$\ddot{v} + \varepsilon (v^2 - 1) \dot{v} + v = 0 \quad \varepsilon > 0 \quad (1.1)$$

El oscilador de van der Pol es considerado, de acuerdo con [13], como el modelo básico para las oscilaciones sostenidas en sistemas de un grado de libertad. Un oscilador *auto-sostenido* como lo describe Mandelstam es: ...hablando de la generación, la creación de oscilaciones... "se necesita un arreglo que haga posible que oscilaciones no amortiguadas estables surjan...sus oscilaciones son estables en el sentido que si las iniciamos en algún estado arbitrario, dentro de un amplio límite, oscilan con un periodo definido y a una amplitud definida. Tienen una tendencia, que no respeta las condiciones iniciales, para asentarse en un régimen definido". [13]

B. van der Pol en su publicación [41] sobre osciladores de relajación estudia analíticamente la ecuación (1.1) para el caso $\varepsilon \ll 1$ y gráficamente para el caso de relajación, que corresponde a $\varepsilon \gg 1$, determinando, en el primer caso, que la solución es de forma cuasi-senoidal con amplitud $a = 2$; y en el segundo caso empleando la técnica de isoclinas para construir los planos de fase bien conocidos del vdP para los casos: cuasi-lineal, no lineal, y fuertemente no lineal, corroborando el resultado analítico del caso cuasi-lineal y mostrando que efectivamente el sistema alcanza oscilaciones sostenidas de amplitud y frecuencia bien definidas.

En este mismo artículo [41], vdP acuña el término de “oscilador de relajación” cuando, al considerar los factores físicos de la ecuación y cómo éstas representan la circulación de electricidad en un sistema RLC, determina que el tiempo de relajación del sistema, $T = RC$, corresponde al periodo de oscilación del vdP libre ($\varepsilon \gg 1$).

Una gran diversidad de fenómenos físicos y biológicos pueden ser representados mediante la forma general del oscilador de vdP libre:

$$m\ddot{v} + \dot{v}f(v) + g(v) = 0$$

o ligeramente modificada, por ejemplo: las oscilaciones en triodos de tubo al vacío [43], el multivibrador [41], el latido del corazón [45] [49] [14], el potencial de acción de las neuronas [17], la interacción de dos placas en una falla geológica [17], el marcapasos circadiano humano [21], entre otros.

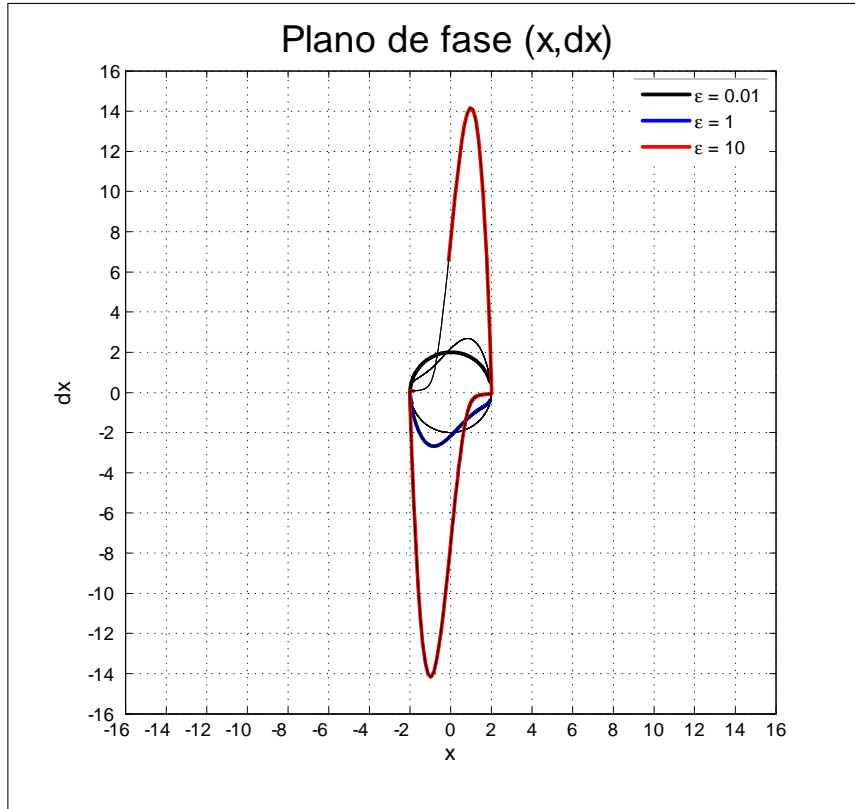


Figura 1.3: Plano de Fase del oscilador de van der Pol para $\varepsilon = [0.01, 1, 10]$

1.2.1. Descripción matemática, caso cuasi-lineal

La ecuación diferencial no lineal del oscilador de van der Pol empleada a lo largo del presente trabajo es la siguiente:

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \varepsilon > 0; \varepsilon \ll 1 \quad (1.2)$$

donde ω_0 corresponde a la frecuencia natural del oscilador y ε define el grado de no linealidad del oscilador ($\varepsilon \ll 1$ cuasi lineal; $\varepsilon \gg 1$ fuertemente no lineal).

Tratándose de un oscilador ligeramente no lineal, la solución del sistema puede obtenerse empleando las siguientes técnicas clásicas de aproximación: Perturbaciones Regulares y *Promediación*, las cuales se explicarán con mayor detalle más adelante.

Por medio de la técnica de perturbaciones regulares se obtiene la solución como una expansión en términos del coeficiente ε , en este caso se trunca en el primer término, ε^1 , obteniéndose la aproximación:

$$x(t) = 2 \cos(\omega_0 t) + \varepsilon \left[-\frac{1}{4\omega_0} \sin(3\omega_0 t) \right] \quad (1.3)$$

Mediante el método de promediación, se obtiene una solución similar que incorpora el desfase debido a las condiciones iniciales del sistema:

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 2 \cos(\omega_0 t + b_0) \quad (1.4)$$

Para una versión completa y detallada de la obtención de la solución del oscilador de van der Pol libre empleando las técnicas mencionadas, referirse a [24].

1.3. Excitación paramétrica

A diferencia de un oscilador forzado, en cuya ecuación diferencial la fuerza periódica externa puede expresarse matemáticamente como un término aislado, para un oscilador excitado paramétricamente dicho término se encuentra *ligado* a un parámetro del sistema. De acuerdo con [29], la excitación paramétrica corresponde a:

Definición 1.2 *La condición de auto-excitación causada por una variación periódica de un parámetro del sistema.*

y se pueden tener dos tipos de excitación paramétrica: [29]

Definición 1.3 *Heteroparamétrica: cuando la variación del parámetro está expresada explícitamente como función del tiempo; o*

Definición 1.4 *Autoparamétrica: cuando la variación del parámetro depende de una cantidad física y por lo tanto es implícitamente una función del tiempo.*

La excitación paramétrica esta estrechamente ligada al fenómeno de resonancia paramétrica.

Definición 1.5 *Resonancia paramétrica es una inestabilidad que aparece debida a una variación periódica de algún coeficiente, llamada excitación paramétrica*

El bien conocido fenómeno de **resonancia ordinaria** en osciladores forzados, el cual consiste en que para una pequeña amplitud de la excitación externa se puede generar una respuesta muy grande siempre y cuando la frecuencia de excitación sea cercana a la(s) frecuencia(s) natural(es), difiere del caso de **resonancia paramétrica**, en cuyo caso una pequeña amplitud de la excitación paramétrica generará una gran respuesta si la frecuencia de excitación está alejada de la(s) frecuencia(s) natural(es) del sistema y es cercana al doble de la frecuencia natural (resonancia paramétrica principal) o a múltiplos racionales de la frecuencia natural. Para la **resonancia ordinaria** el espectro de frecuencias para el cual las vibraciones incrementan su amplitud es un conjunto discreto constituido por la(s) frecuencia(s) natural(es) del sistema; en cambio para la **resonancia**

paramétrica, se trata de la unión de un número contable de intervalos de frecuencias cuya longitud va disminuyendo conforme aumenta la frecuencia del parámetro excitado. En el fenómeno de **resonancia ordinaria**, el incremento de la amplitud de oscilación cumple generalmente con una ley lineal, en cambio en la **resonancia paramétrica** se trata de un incremento exponencial. [34] [6] [48]

La excitación paramétrica únicamente puede ocurrir si en el sistema existen previamente oscilaciones naturales, al menos débiles, y si la variación periódica del parámetro corresponde a la modulación de algún elemento que almacena energía (por ejemplo: capacitor y/o inductor en el caso de circuitos eléctricos). Esto significa que el incremento de la energía depende de la energía previamente almacenada en el sistema. [6]

Los sistemas excitados paraméricamente implican ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes que varían de forma periódica, de ahí que su estudio se basa en la Teoría de Floquet sobre ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos [34], y más especialmente a las ecuaciones de tipo Mathieu-Hill.

1.3.1. Historia-Antecedentes

El fenómeno de resonancia paramétrica probablemente fue observado por primera vez por Faraday en 1831 cuando notó que las ondas en la superficie de un cilindro lleno de fluido sometido a oscilaciones verticales presentaban un periodo del doble del cilindro. [34] [28] [29]

Posteriormente, en 1859 Melde realiza y documenta un experimento en el cual ata un hilo al mango de un diapasón *masivo* que vibra en la dirección del hilo, experimentando con diferentes combinaciones de masa-tensión del hilo y frecuencia-volumen del diapasón (i.e. amplitud de onda), concluyó que las oscilaciones del diapasón causan fluctuaciones periódicas longitudinales en la tensión del hilo que a su vez provocan vibraciones transversales a una frecuencia de la mitad de la frecuencia del diapasón; es decir que la variación periódica de la amplitud del hilo induce una oscilación transversal del mismo. [34] [28] [29]

En 1887 Strutt proporciona las bases teóricas para las observaciones de Melde y realiza más experimentos de la misma naturaleza que éste. Para 1906 Stephenson extiende la propuesta teórica que Strutt hiciera y observa la posibilidad de provocar vibraciones transversales cuando la frecuencia de excitación longitudinal es un múltiplo racional de la frecuencia natural lateral del hilo; además en 1908, en el contexto del equilibrio estático de columnas portadoras de carga, Stephenson es el primero en precisar que bajo la influencia de una carga periódica puede estabilizarse a una columna estáticamente inestable (o inestabilizar una estable) a pesar de que el valor constante de la carga sea del doble de la *carga de Euler* (carga crítica)¹. [34] [29]

¹La carga de Euler es la máxima carga axial que una columna puede portar sin que se doble ante la mínima fuerza lateral aplicada sobre ella. [12]

En el siglo XX, en [30] se menciona que al variar un parámetro al doble de la frecuencia natural del oscilador lineal libre, conocido como resonancia 1 : 2, la amplitud de oscilación crece, y en el caso no lineal, la amplitud alcanza un valor finito y estable. En 1926 se da la primer descripción del uso de la resonancia paramétrica, por Mandelstam y Papalexi, quienes crearon un generador paramétrico que transforma la potencia mecánica absorbida por la variación de uno de sus parámetros en eléctrica, a través de corriente alterna; experimentaron tanto con elementos lineales como no lineales en el circuito y observaron que en el primer caso la tensión crece hasta destruir la inductancia, fuente de motivación para cambiar por los elementos no lineales, con los cuales se logra un comportamiento estable donde la tensión incrementa hasta alcanzar un valor finito [34] [29]. Más recientemente, en [46] se desarrolló un análisis de la ecuación de van der Pol-Mathieu restringido a una frecuencia de excitación paramétrica cercana a la resonancia 1 : 2 determinando las condiciones para la existencia de soluciones cuasi-periódicas.

1.4. Herramientas Matemáticas

El estudio de sistemas no lineales intrínsecamente acarrea dificultades en su análisis matemático, a diferencia del análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo, para los cuales se cuenta con una teoría claramente desarrollada y aplicable a todos los sistemas lineales invariantes en el tiempo, en el caso de los sistemas no lineales se cuenta con algunas herramientas matemáticas que pueden emplearse para ciertas familias de sistemas no lineales, lo que significa que la teoría de sistemas no lineales es, en cierto sentido, la *teoría de casos particulares*. [8]

En el presente trabajo el sistema no lineal estudiado pertenece a la familia de los osciladores débilmente no lineales y las herramientas que tradicionalmente se emplean para el análisis de estos sistemas son: el método de pequeños parámetros, el método de amplitudes de variación lenta, la teoría de perturbaciones, el método estroboscópico, el método de promediación, entre otros [8].

De las técnicas previamente mencionadas, en el desarrollo de esta investigación se emplean principalmente: la técnica de promediación y la teoría de perturbaciones regulares.

1.4.1. Historia-Antecedentes

La teoría de perturbaciones es bastante antigua, pero evolucionó rápidamente tras la fundación del análisis matemático, en el siglo XVIII. Muchos de los resultados clásicos de esta teoría están relacionados con trabajos de Newton, Euler, Lagrange, Laplace y otros, trabajando en el campo de investigación más prolífico de ese entonces, la Mecánica Celeste. La formulación de la teoría surge como consecuencia de la búsqueda por relacionar la teoría gravitacional de Newton con las observaciones del movimiento de los astros, tratando de explicar las desviaciones debidas a la interacción de los grandes planetas, la influencia de los satélites, la resistencia del ether entre otras *perturbaciones*. [47] [8] [38]

Esta teoría puede rastrearse en muchos libros sobre mecánica celeste y dinámica de los siglos XIX y XX, pero para que se establecieran los fundamentos más *rígidos* de la Teoría de Perturbaciones fue necesaria la llegada de Poincaré y de Stieljes, quienes publicaron (por separado) en 1886 sus artículos referentes a las series asintóticas. En particular, Poincaré en su texto “Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste” pone a consideración la determinación de soluciones periódicas como una expansión en series con respecto a un parámetro pequeño, y demuestra que se puede describir una solución periódica como un serie convergente de potencias de dicho parámetro pequeño (ε) donde los coeficientes son funciones acotadas del tiempo que cumplen con una condición de no-secularidad justificada para soluciones periódicas. [47] [8] [38]

En el siglo XX surgen nuevos campos de aplicación para la Teoría de Perturbaciones por ejemplo: Prandtl (1905) publica sobre el movimiento de un fluido o gas a lo largo de un cuerpo considerando *poca* viscosidad; trabajos similares, pero aplicados a una superficie de sustentación (perfil alar) desplazándose en el aire son publicados en 1934 por Prandtl con Teitjens y más recientemente en 1998 por Van Ingens respectivamente.[47] [38]

El fenómeno más actual de aplicación de la Teoría de Perturbaciones está asociado a la teoría de oscilaciones no lineales en la electrónica y la mecánica, destacan nombres como el de Balthasar van der Pol, quien desarrollara un método para generar soluciones aproximadas mediante un cambio de coordenadas tras el cual obtiene una ecuación para la dinámica de la amplitud de la oscilación; este resulta ser un ejemplo del método de variación de constantes de Lagrange. [47] [38]

En la segunda mitad del siglo XVIII aparecen nuevas ideas para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales. Partiendo del método tradicional de perturbaciones, Clairaut contrarresta la aparición de términos seculares ajustando la expansión para eliminar este efecto, para ello primero integra considerando constantes aquellas cantidades que varían lentamente, y segundo emplea un procedimiento para eliminar los términos seculares; esto corresponde a una versión temprana de la técnica de promediación. Lagrange y Laplace desarrollan esta técnica de aproximación y la emplean ampliamente. En el trabajo de “Mécanique Céleste” de Laplace pueden encontrarse muchos ingredientes de la actual técnica de promediación principalmente en su estudio sobre la configuración Sol-Júpiter.[38]

La primer prueba de la validez asintótica del método de promediación la da Fatou, en 1928, obteniendo estimados de $O(\varepsilon)$ en la escala de tiempo de $\frac{1}{\varepsilon}$; Mandelstam y Papelexi obtienen resultados similares en la Unión Soviética, pero la mayor aportación la realizan Krylov y Bogoliubov quienes desarrollan y demuestran el método de promediación para el caso de campos vectoriales casi periódicos. [22]

1.4.2. Perturbaciones Regulares

La teoría de perturbaciones emplea métodos matemáticos para encontrar una solución aproximada a un problema que no puede ser resuelto exactamente, partiendo de la solución de un problema

no perturbado o reducido que sí puede ser resuelto exactamente. La solución exacta del problema no perturbado es empleada como una primer aproximación de la solución del problema complejo, el cual difiere del problema no perturbado sólo por algunos términos *pequeños*. Entonces se busca, a través de una serie de correcciones sucesivas frecuentemente en forma de una serie de potencias del *parámetro de perturbación*, que la aproximación inicial se acerque a la solución del problema complejo. [32]

Ecuaciones Diferenciales Perturbadas de Segundo Orden

Considerando la ecuación diferencial de segundo orden:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \varepsilon f(t, y, \dot{y}, \varepsilon) ; y(0) = \alpha, \dot{y}(0) = \beta \quad (1.5)$$

Los métodos de perturbaciones dependen de la capacidad de resolver el problema reducido $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$, y los problemas lineales no homogéneos de la forma $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t)$. [32]

Teorema 1.1 *Sea f definida para todo t en un intervalo compacto $0 \leq t \leq T$, $\forall y, \dot{y}; \forall \varepsilon$ cercano a cero. Sea f tal que tiene derivadas parciales continuas hasta el orden r . Sean los intervalos compactos A y B especificados para α y β .*

Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que la solución:

$$y = \varphi(t; \alpha, \beta; \varepsilon)$$

de (1.5) existe para $\forall t \in [0, T], |\varepsilon| < \varepsilon_0, \alpha \in A$ y $\beta \in B$. Más aun esta solución es única y suave como f ; esto significa que cuenta con derivadas parciales continuas hasta un orden $(r - 1)$ con respecto a todos sus argumentos t, α, β y ε (incluidas derivadas parciales combinadas).[32]

De este Teorema y del Teorema de Taylor que para cualquier $k \leq r - 1$, φ tiene una aproximación asintótica de la forma:

$$\varphi(t, ; \alpha, \beta; \varepsilon) = \sum_{n=0}^k \varphi_n(t; \alpha, \beta) \varepsilon^n + O(\varepsilon^{k+1}) \quad (1.6)$$

uniformemente para $0 \leq t \leq T$ y para α, β en subconjuntos compactos. (i.e. dado $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, existe $c > 0$ tal que el error en (1.6) es menos o igual a $c\varepsilon^{k+1}$ para $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1, 0 \leq t \leq T, \alpha \in A, \beta \in B$).

Al hablar de soluciones aproximadas o estimaciones, surge la necesidad de comparar funciones. Para la comparación de una función con otra, o con alguna constante, se pueden emplear los símbolos de orden de Landau: O y o .

Definición 1.6 [38] [47] *Si una función $f(\varepsilon)$ es continua en $(0, \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$ y existe el $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon)$ se dice que la función es:*

a) **O Mayúscula** $f(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ si existe una constante $k > 0$ tal que en el intervalo $(0, \varepsilon_0]$, se cumple $|f(\varepsilon)| \leq k|\varepsilon|$ para $\varepsilon \rightarrow 0$;

se dice que la función es:

b) **o minúscula** $f(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$.

Similarmente, comparando la función $f(\varepsilon)$ con la función continua $g(\varepsilon)$ se tiene que es:

a) **O Mayúscula** $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ si existe una constante $C > 0$ tal que en el intervalo $(0, \varepsilon_0]$ $|f(\varepsilon)| \leq C|g(\varepsilon)|$ para $\varepsilon \rightarrow 0$;

se dice que la función es:

b) **o minúscula** $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0$.

Sabiendo de la existencia de la aproximación asintótica a continuación se explica el cómputo de los coeficientes φ_n .

Considerando el problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \ddot{y} - y &= \varepsilon y^2 \\ y(0) &= \alpha \quad \dot{y}(0) = \beta \end{aligned} \tag{1.7}$$

que es un caso particular de (1.5).

De (1.7) la función $f(t, y, \dot{y}, \varepsilon) = y^2$ es infinitamente diferenciable y de acuerdo con el Teorema 1.1 se tiene una solución única para $|\varepsilon|$ menor que algún ε_0 . La expansión asintótica es de la forma:

$$y = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + O(\varepsilon^3) \tag{1.8}$$

uniformemente para α, β , y t en un intervalo compacto.

Teorema 1.2 Suponiendo que $\mathbf{y}(\mathbf{x}; \mathbf{p}; \varepsilon)$ tiene derivadas parciales continuas hasta el orden k , donde $k \leq r - 2$, la aproximación de Taylor

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \mathbf{y}_1(\mathbf{x}, \mathbf{p})\varepsilon + \cdots + \mathbf{y}_k(\mathbf{x}, \mathbf{p})\varepsilon^k + O(\varepsilon^{k+1})$$

diferenciada término a término da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i} &= \frac{\partial \mathbf{y}_0}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial x_i}\varepsilon + \cdots + \frac{\partial \mathbf{y}_k}{\partial x_i}\varepsilon^k + O(\varepsilon^{k+1}) \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial p_j} &= \frac{\partial \mathbf{y}_0}{\partial p_j} + \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial p_j}\varepsilon + \cdots + \frac{\partial \mathbf{y}_k}{\partial p_j}\varepsilon^k + O(\varepsilon^{k+1}) \end{aligned}$$

Por el Teorema 1.1, y el Teorema 1.2 se puede derivar la expansión asintótica (1.8) y al sustituirla en (1.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} (\ddot{y}_0 - y_0) + \varepsilon(\ddot{y}_1 - y_1) + \varepsilon^2(\ddot{y}_2 - y_2) + O(\varepsilon^3) &= 0 + \varepsilon y_0^2 + \varepsilon^2(2y_0y_1) + O(\varepsilon^3) \\ y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + O(\varepsilon^3) &= \alpha \\ \dot{y}_0(0) + \varepsilon \dot{y}_1(0) + \varepsilon^2 \dot{y}_2(0) + O(\varepsilon^3) &= \beta \end{aligned} \quad (1.9)$$

Teorema 1.3 *Si una función $\mathbf{y}(\mathbf{x}; \mathbf{p}; \varepsilon)$ tiene una expansión asintótica ordinaria empleando pesos $\delta_0, \dots, \delta_k$, entonces esa expansión es única; esto es, si $y \sim \sum \mathbf{y}_n \delta_n$ y $y \sim \sum \tilde{\mathbf{y}}_n \tilde{\delta}_n$, entonces $\delta_n = \tilde{\delta}_n$ para $n = 0, \dots, k$. Esto es cierto aun si la expansión es válida solo punto a punto en \mathbf{x} y \mathbf{p} . [32]*

El Teorema anterior implica que los coeficientes de las potencias de ε en ambos lados de (1.9) pueden igualarse, tanto en la ecuación diferencial como en las condiciones iniciales. De este modo se obtiene una secuencia de problemas lineales:

$$\ddot{y}_0 - y_0 = 0, \quad y_0(0) = \alpha, \quad \dot{y}_0(0) = \beta \quad (1.10)$$

$$\ddot{y}_1 - y_1 = y_0^2, \quad y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0 \quad (1.11)$$

$$\ddot{y}_2 - y_2 = 2y_0y_1, \quad y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 0 \quad (1.12)$$

Resolviendo el primer problema lineal, (1.10), se tiene como solución:

$$y_0 = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) e^t + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) e^{-t}$$

Sustituyéndola en (1.11) se obtiene el problema no homogéneo siguiente:

$$\ddot{y}_1 - y_1 = \frac{(\alpha + \beta)^2}{4} e^{2t} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} e^{-2t}$$

Cuya solución es:

$$y_1 = \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta - 2\beta^2}{6} \right) e^t + \left(\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\beta^2}{6} \right) e^{-t} + \frac{(\alpha + \beta)^2}{12} e^{2t} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} e^{-2t}$$

Continuando sistemáticamente con este procedimiento, se sustituyen y_0, y_1 en (1.12) y se obtiene una expresión para la solución de y_2 .

Entonces la solución aproximada del problema (1.7) truncada en el término ε^2 se encuentra acotada por una constante multiplicada por ε^3 , es decir, el error de estimación es del orden de $O(\varepsilon^3)$, y se expresa como:

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) e^t + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) e^{-t} \\ &+ \varepsilon \left[\left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta - 2\beta^2}{6} \right) e^t + \left(\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\beta^2}{6} \right) e^{-t} + \frac{(\alpha + \beta)^2}{12} e^{2t} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} e^{-2t} \right] \\ &+ \varepsilon y_2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Soluciones periódicas y Series de Lindstedt

Sea un sistema cuasi lineal de segundo orden de la forma:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \varepsilon f(t, y, \dot{y}, \varepsilon) \quad (1.14)$$

donde $f(t + T, y, \dot{y}, \varepsilon) = f(t, y, \dot{y}, \varepsilon)$ o es independiente de t , y con solución periódica.

Aplicando el método descrito en la sección anterior al problema (1.14) se generan soluciones uniformemente válidas para intervalos de tiempo finito. Esta limitante en el tiempo de validez de la aproximación es consecuencia de la aparición de términos seculares que son no acotados conforme $t \rightarrow \infty$. En el análisis de problemas como (1.14) la existencia de términos seculares es relevante pues tratándose de sistemas de solución exacta acotada, y más aun, periódica, la existencia de términos seculares² implica un eventual distanciamiento entre la solución aproximada y la solución exacta. [32]

El método propuesto por Lindstedt está basado en la idea fundamental de que la presencia de la no linealidad modifica la frecuencia de oscilación con respecto a la del sistema lineal, ω_0 y $\omega(\varepsilon)$ respectivamente. Para incorporar esta alteración en la frecuencia, se introduce una nueva variable $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$, donde los parámetros incorporados $\omega_i, i \geq 1$ son elegidos para prevenir la aparición de términos seculares. [33] [36]

Así, además de la expansión asintótica de la solución, y , se tiene la expansión asintótica de la nueva frecuencia ω :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

y se sigue la metodología descrita en la sección anterior.

Ambas expansiones (1.15) se sustituyen en (1.14), se igualan los coeficientes de ε a ambos lados de la igualdad y se obtiene la secuencia de problemas lineales homogéneos y no homogéneos asociados. Las soluciones de estos problemas sucesivamente independientes constituyen los términos de la solución aproximada, que multiplicado por su correspondiente potencia del parámetro de perturbación, actúa como una corrección sucesiva de la aproximación previa.

1.4.3. Promediación

La técnica de *promediación*, como su nombre lo indica, busca aproximar la solución de un sistema no lineal a través del análisis de un “sistema promediado” partiendo del problema en la siguiente forma estándar:

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \quad (1.16)$$

²Los términos seculares son aquellos que aparecen en la expansión y que contienen explícitamente el tiempo, como $t \sin(\omega t)$ ó $t^n \cos(\omega t)$ y por lo tanto crecen sin cota conforme $t \rightarrow \infty$. [29]

donde ε es un parámetro pequeño positivo y $f(x, t, \varepsilon)$ es T -periódica en t ; esto es:

$$f(t + T, x, \varepsilon) = f(t, x, \varepsilon) \quad , \quad \forall (t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D \times [0, \varepsilon_0]$$

para algún dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. [20]

La solución aproximada del sistema estándar corresponde a la solución del "sistema promediado", obtenido promediando $f(x, t, \varepsilon)$ con $\varepsilon = 0$. [20]

Cuando el sistema a ser analizado no se encuentra en la forma (1.16), puede ser llevado a la misma mediante la reformulación descrita a continuación. [38]

Reformulación para obtener la forma Estándar

Sea el sistema perturbado, x , y el sistema no perturbado, y , con ecuaciones dinámicas:

$$\dot{x} = f(t, x) + \varepsilon g(\tau, x, \varepsilon) ; x(t_0) = x_0 \quad (1.17)$$

$$\dot{y} = f(t, y) \quad ; y(t_0) = x_0 \quad (1.18)$$

Asumiendo que puede resolverse explícitamente (1.18) y que depende de la condición inicial del sistema perturbado, x_0 , entonces se tiene $y = y(t, z = x_0)$, $y(0, z) = x_0$, $z \in \mathbb{R}^n$. Esto se considera una transformación como $x = y(t, z)$ (método de variación de constantes).

Obteniendo la ecuación diferencial para z a partir de (1.17) y (1.18) se tiene:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{dz}{dt} = f(t, x) + \varepsilon g(\tau, x, \varepsilon)$$

Por (1.18) se cumple:

$$\frac{\partial y}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \varepsilon g(\tau, x, \varepsilon)$$

Asumiendo que $\frac{\partial y}{\partial z}$ es no singular, se puede despejar:

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^{-1} g(\tau, x, \varepsilon)$$

que corresponde a la forma estándar (1.16).

Particularmente, cuando (1.17) es cuasi-lineal, es decir, $f(t, x, \varepsilon) = A(t)x$ para $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ continua, el problema no perturbado $\dot{y} = A(t)y$ tiene n soluciones linealmente independientes con las cuales se construye la matriz fundamental $\Phi(t)$, elegida tal que $\Phi(t_0) = I$.

Mediante el procedimiento de variación de constantes se aplica la transformación $x = \Phi(t)z$, y se obtiene la forma estándar para el caso cuasi-lineal:

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon \Phi^{-1}(t) g(t, \Phi(t)z, \varepsilon)$$

En caso que la matriz A sea constante, la matriz fundamental del sistema cuasi-lineal corresponde a $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$, y la forma estándar es:

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon e^{-A(t-t_0)} g\left(t, e^{A(t-t_0)} z, \varepsilon\right)$$

Cuando el sistema ha sido expresado en la forma estándar se puede proceder con el cálculo de una solución aproximada .

Promediación aplicada a osciladores

Considerando el sistema de segundo orden en forma estándar:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (1.19)$$

correspondiente a un oscilador débilmente no lineal, se sabe que para $\varepsilon = 0$ la solución es:

$$x(t) = a \cos \phi \quad ; \quad \phi = \omega_0 t + b \quad (1.20)$$

donde las condiciones iniciales del sistema definen las constantes a y b .

Cuando se tiene $\varepsilon \neq 0$, pero suficientemente pequeño, puede considerarse que la solución de (1.19) todavía es de la forma (1.20), pero con las constante a y b dependientes del tiempo.[33]

Contando con las dos ecuaciones (1.19) y (1.20) para las tres variables $\{x, a, b\}$, se elige como tercera condición:

$$\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin \phi \quad (1.21)$$

Derivando con respecto al tiempo la expresión de la solución (1.20):

$$\dot{x}(t) = \dot{a} \cos \phi - a(\omega_0 + \dot{b}) \sin \phi \quad (1.22)$$

e igualándola con (1.21) se obtiene:

$$\dot{a} \cos \phi - a\dot{b} \sin \phi = 0 \quad (1.23)$$

Derivando con respecto al tiempo la expresión propuesta (1.21) se tiene:

$$\ddot{x}(t) = -\dot{a}\omega_0 \sin \phi - a(\omega_0^2 + \omega_0 \dot{b}) \cos \phi \quad (1.24)$$

Haciendo las correspondientes sustituciones de \dot{x} y \ddot{x} , previamente calculadas, en (1.19) y simplificando se tiene:

$$\dot{a}\omega_0 \sin \phi + a\omega_0 \dot{b} \cos \phi + \omega_0^2 a \cos \phi = -\varepsilon f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) \quad (1.25)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1.23) y (1.25) para \dot{a} y \dot{b} , se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) \\ -\frac{\varepsilon}{a\omega_0} \cos \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

El procedimiento hasta ahora no ha incorporado ninguna aproximación, por lo que (1.20) y (1.26) son equivalentes a (1.19). Observando el lado derecho de las ecuaciones (1.20) y (1.26) puede notarse que para ambos casos es periódico con respecto a ϕ , así $\dot{a} = O(\varepsilon)$ y $\dot{b} = O(\varepsilon)$, por lo tanto a y b son variables que varían lentamente durante el periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. [33] [36]

Dada la naturaleza *lenta* de a y b , se realiza la integración de (1.26) sobre el periodo $\frac{2\pi}{\omega_0}$ y considerándolas constantes en dicho periodo de integración, obteniéndose las siguientes ecuaciones de *flujo lento*:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) d\phi \\ -\frac{\varepsilon}{a2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) d\phi \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Finalmente, la solución *promediada* del sistema original (1.19) es la solución del sistema no perturbado, $x(t) = a \cos(\omega_0 t + b)$ donde las variables $a(t)$ y $b(t)$ son solución del sistema auxiliar (1.27).

Esta solución tiene validez para un tiempo $\frac{1}{\varepsilon}$. [38]

Capítulo 2

Oscilador de van der Pol cuasi-lineal Excitado Paramétricamente

En el presente capítulo se analiza el oscilador de Van der Pol cuasi-lineal cuando el parámetro que define su frecuencia natural se encuentra excitado periódicamente, esto con la intención de determinar el efecto que tiene dicha perturbación sobre su frecuencia y amplitud de oscilación resultante.

Recordando la ecuación diferencial no lineal que describe al oscilador de Van der Pol cuasi-lineal:

$$\ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_0^2 x_b = 0 \quad \varepsilon > 0, \varepsilon \ll 1 \quad (2.1)$$

Al aplicar la excitación paramétrica en el término de la frecuencia natural, la ecuación diferencial se expresa como:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b (1 + \alpha \cos \Omega t) &= 0 \\ \text{o} \\ \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b &= \underline{-\alpha \omega_{b_0}^2 x_b \cos \Omega t} \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.1. Efecto en la frecuencia

Teorema 2.1 *El oscilador de vdP cuasi lineal ($\varepsilon \ll 1$) excitado paramétricamente como en (2.2) para una amplitud de excitación paramétrica pequeña ($\alpha \ll 1$) no sufre cambio en su frecuencia de oscilación $\forall \Omega$. Esto es $\omega_b = \omega_{b_0}$.*

Prueba. Considerando el siguiente cambio en la escala de tiempo: $\tau \triangleq \omega_b t$; y definiendo: $x' \triangleq \frac{dx}{d\tau}$ y $x'' \triangleq \frac{d^2x}{d\tau^2}$; al sustituirlas en (2.2) se tiene:

$$\begin{aligned} x_b'' \omega_b^2 + \varepsilon (x_b^2 - 1) \omega_b x_b' + \omega_{b_0}^2 x_b &= \varepsilon A x_b \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \\ \text{donde } -\alpha &= A = O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sea $x_b = x_{b_0} + \varepsilon x_{b_1} + \varepsilon^2 x_{b_2} + \dots$ y expandiendo la aproximación de la frecuencia como en el Método de Lindstedt [33], $\omega_b = \omega_{b_0} + \varepsilon \omega_{b_1} + \varepsilon^2 \omega_{b_2} + \dots$, se sustituyen estas dos aproximaciones en (2.3) y agrupando los coeficientes de ε se obtiene la siguiente sucesión de ecuaciones diferenciales lineales:

- coeficientes de ε^0 :

$$x''_{b_0} + x_{b_0} = 0 \quad (2.4)$$

- coeficientes de ε^1 :

$$x''_{b_1} + x_{b_1} = -2 \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}} x''_{b_0} + \frac{x'_{b_0}}{\omega_{b_0}} (1 - x_{b_0}^2) + \frac{Ax_{b_0}}{\omega_{b_0}^2} \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \quad (2.5)$$

- coeficientes de ε^2 :

$$\begin{aligned} x''_{b_2} + x_{b_2} = & -2 \frac{\omega_{b_2}}{\omega_{b_0}} x''_{b_0} - \frac{\omega_{b_1}^2}{\omega_{b_0}^2} x''_{b_0} - 2 \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}} x''_{b_1} + \frac{x'_{b_1}}{\omega_{b_0}} (1 - x_{b_0}^2) \\ & + \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}^2} x'_{b_0} - \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}^2} x_{b_0}^2 x'_{b_0} + \frac{x_{b_1}}{\omega_{b_0}} \left(-2x_{b_0} x'_{b_0} + \frac{A}{\omega_{b_0}} \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (2.4) considerando $x_b(0) = A_0$ y $x'_b(0) = 0$, es decir, para condiciones iniciales: $x'_{b_0}(0) = x'_{b_1}(0) = \dots = 0$, $x_{b_1}(0) = x_{b_2}(0) = \dots = 0$ se tiene que la solución es $x_{b_0} = A_0 \cos \tau$. Al sustituirla en (2.5) se obtiene:

$$x''_{b_1} + x_{b_1} = 2A_0 \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}} \cos \tau + \left[-\frac{A_0}{\omega_{b_0}} + \frac{A_0^3}{4\omega_{b_0}^3} \right] \sin \tau + \frac{A_0^3}{4\omega_{b_0}^3} \sin 3\tau + \frac{AA_0}{\omega_{b_0}} \cos \tau \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \quad (2.7)$$

Para evitar resonancia se requiere eliminar los términos seculares, lo que corresponde a anular los coeficientes de $\sin \tau$ y $\cos \tau$: $\left(-\frac{A_0}{\omega_{b_0}} + \frac{A_0^3}{4\omega_{b_0}^3} \right) = 0$ y $2A_0 \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}} = 0$. Esto se consigue para $\omega_{b_1} = 0$ y $A_0 = 2$.

Sustituyendo en (2.7) y resolviendo se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{b_1} = & \frac{3}{4\omega_{b_0}} \sin \tau - \frac{1}{4\omega_{b_0}} \sin 3\tau \\ & + \frac{A}{\omega_{b_0}^2} \left[\frac{2\omega_b^2}{\Omega^2 - 4\omega_b^2} \cos \tau - \left(\frac{\omega_b^2}{\Omega^2 + 2\Omega\omega_b} \cos \gamma_1 \tau + \frac{\omega_b^2}{\Omega^2 - 2\Omega\omega_b} \cos \gamma_2 \tau \right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde

$$\gamma_1 = \frac{\Omega}{\omega_b} + 1; \gamma_2 = \frac{\Omega}{\omega_b} - 1$$

Sustituyendo ahora $A_0 = 2, \omega_{b_1} = 0$ y (2.8) y en (2.6) se tiene:

$$\begin{aligned}
x''_{b_2} + x_{b_2} &= \cos \tau \left[\frac{4\omega_{b_2}}{\omega_{b_0}} + \frac{1}{4\omega_{b_0}^2} - \frac{A^2\omega_b^2}{\omega_{b_0}^4 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right] + \sin \tau \left[\frac{4A\omega_b^2}{\omega_{b_0}^3 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right] \\
&+ \cos 3\tau \left[-\frac{3}{2\omega_{b_0}^2} \right] + \sin 3\tau \left[\frac{10A\omega_b^2}{\omega_{b_0}^3 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right] \\
&+ \cos 5\tau \left[\frac{5}{4\omega_{b_0}^2} \right] \\
&+ \mathbf{t.f.s.}^*
\end{aligned}$$

***t.f.s.** términos de frecuencia superior

En este caso, para evitar la resonancia se tienen dos restricciones simultáneas:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{4\omega_{b_2}}{\omega_{b_0}} + \frac{1}{4\omega_{b_0}^2} - \frac{A^2\omega_b^2}{\omega_{b_0}^4 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right) = 0 \\
&\text{y} \\
&\left(\frac{4A\omega_b^2}{\omega_{b_0}^3 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right) = 0
\end{aligned}$$

Sustituyendo $\omega_b = \omega_{b_0} + \varepsilon^2\omega_{b_2}$, se obtiene un polinomio de ω_{b_2} de tercer grado, i.e. con tres posible soluciones:

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_{b_2}^3 (-64\varepsilon^4\omega_{b_0}) + \omega_{b_2}^2 (-128\varepsilon^2\omega_{b_0}^2 - 4\varepsilon^4 - 4\alpha^2\varepsilon^4\omega_{b_0}^2 + 16\alpha\varepsilon^4\omega_{b_0}) \\
&+ \omega_{b_2} (16\Omega^2\omega_{b_0} - 64\omega_{b_0}^3 - 8\varepsilon^2\omega_{b_0} - 8\alpha^2\varepsilon^2\omega_{b_0}^3 + 32\alpha\varepsilon^2\omega_{b_0}^2) + (\Omega^2 - 4\omega_{b_0}^2 - 4\alpha^2\omega_{b_0}^4 + 16\alpha\omega_{b_0}^3)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

En la Figura 2.1.a se muestran las tres frecuencias ω_b correspondientes a cada una de las posibles soluciones para valores particulares de ω_{b_0} , ε y α en el rango de frecuencias de excitación paramétrica $\Omega = [0, 5]$.

Finalmente la expresión de la solución del oscilador de van der Pol cuasi-lineal excitado paramétricamente queda como $x_b(t) = x_{b_0} + \varepsilon x_{b_1}$, esto es:

$$\begin{aligned}
x_b(t) &= 2 \cos \omega_b t + \varepsilon \frac{3}{4\omega_{b_0}} \sin \omega_b t - \varepsilon \frac{1}{4\omega_{b_0}} \sin 3\omega_b t - \alpha \varepsilon \frac{2\omega_b^2}{\Omega^2 - 4\omega_b^2} \cos \omega_b t \\
&+ \alpha \varepsilon \frac{\omega_b^2}{\Omega^2 + 2\omega_b\Omega} \cos (\Omega + \omega_b) t + \alpha \varepsilon \frac{\omega_b^2}{\Omega^2 - 2\omega_b\Omega} \cos (\Omega - \omega_b) t
\end{aligned} \tag{2.10}$$

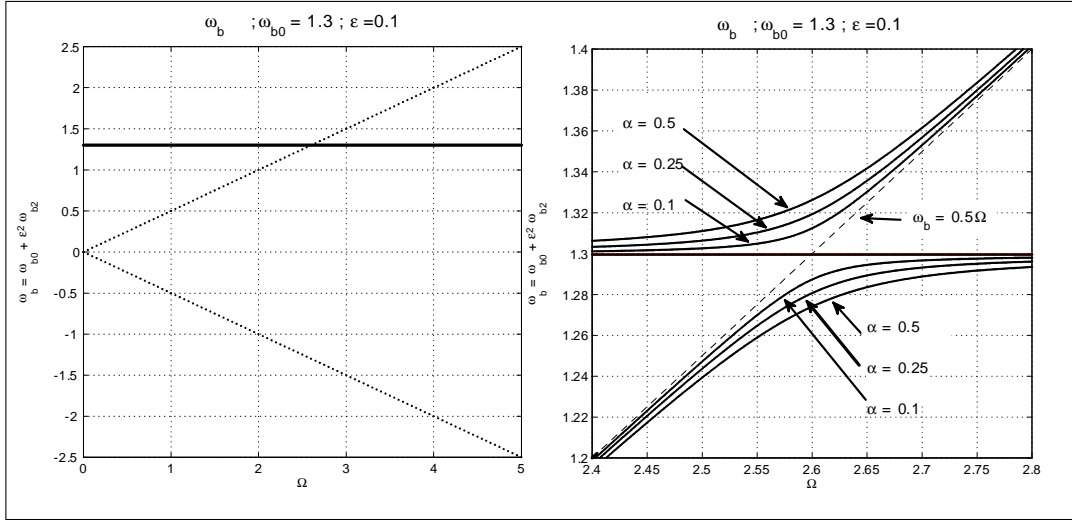


Figura 2.1: a) Tres valores de ω_b (sólida) correspondientes a las tres posibles soluciones de 2.9 para $\omega_{b0} = 1.3, \varepsilon = 0.1 = \alpha$. Restricciones $\omega_b = \pm \frac{\Omega}{2}$ (punteada). b) Acercamiento de la a) alrededor de $\Omega = 2\omega_b$.

A partir de (2.10) se pone en evidencia mediante un análisis de denominadores que existen restricciones para el valor que puede tomar ω_b , siendo éstas:

- ▶ $\Omega^2 - 4\omega_b^2 \neq 0 \Rightarrow \pm\omega_b \neq \pm \frac{\Omega}{2}$
- ▶ $\Omega^2 + 2\omega_b\Omega \neq 0 \Rightarrow \omega_b \neq -\frac{\Omega}{2}$
- ▶ $\Omega^2 - 2\omega_b\Omega \neq 0 \Rightarrow \omega_b \neq \frac{\Omega}{2}$

Estas restricciones se muestran en la figura 2.1.b así como las tres frecuencias que se obtuvieron a partir del sistema (2.9). El valor de la frecuencia resultante libre de restricciones corresponde a $\omega_b \approx \omega_{b0}$. ■

2.2. Efecto en la amplitud

Mediante una serie de observaciones en el plano de fase se determina cualitativamente el efecto de la excitación paramétrica en la amplitud del oscilador de vdP cuasi-lineal excitado paramétricamente para posteriormente corroborar y sustentar estas observaciones analíticamente.

2.2.1. Observaciones en el plano de fase

Partiendo de la ecuación (2.2) y definiendo $x_1 \triangleq x_b$, $x_2 \triangleq \dot{x}_b$ se obtiene el sistema expresado en variables de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon (x_1^2 - 1) x_2 - \omega_{b0}^2 x_1 (1 + \alpha \cos \Omega t)\end{aligned}$$

Considerando que $\alpha \ll 1$ se tiene que el único punto de equilibrio del sistema es $(x_1, x_2) = (0, 0)$, y las nuliclinas¹ están dadas por :

$$\begin{aligned}x_2 &= 0 \\ x_2 &= \frac{\omega_{b0}^2 x_1 (1 + \alpha \cos \Omega t)}{\varepsilon (1 - x_1^2)}\end{aligned}$$

En la Figura 2.2.a se observa el efecto de α en la segunda nuliclina x_2 , ésta varía entre el par de líneas del mismo color a lo largo de un periodo $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. El movimiento periódico de dicha nuliclina no tiene ningún efecto en el punto de equilibrio, $(x_1, x_2) = (0, 0)$, pero si en el ciclo límite atractor, como se muestra en 2.2.b.

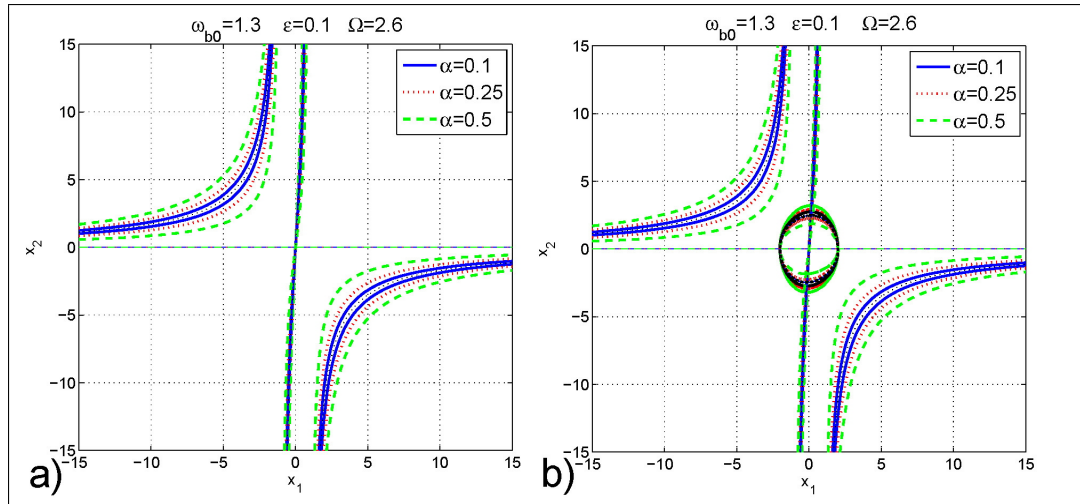


Figura 2.2: a) Valores extremos de las nullclines para $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectivamente. b) ciclos límite extremos para $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectivamente.

Debido a la “modulación” que sufre el ciclo límite atractor para cada tiempo $t \in [0, T)$, $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, surge un un ciclo límite atractor *resultante* como se muestra en la Figura 2.3.

Observación 2.1 *La amplitud del oscilador de van der Pol cuasi-lineal excitado paramétricamente sufre una modificación en su amplitud en función de la magnitud, α , de la excitación paramétrica.*

¹Se denomina *nuliclina* x_i a la curva conformada por todos los puntos para los cuales $\dot{x}_i = 0$. [4]

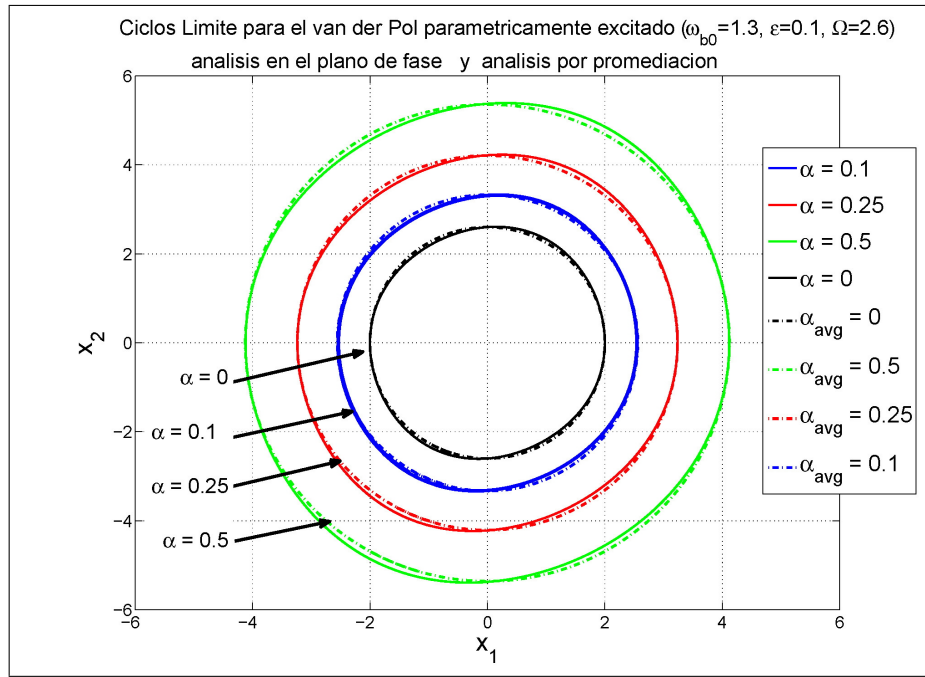


Figura 2.3: Ciclos límite de la solución numérica (sólida) y de la solución aproximada (punteada) para $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectivamente.

2.2.2. Análisis

Definición 2.1 La ganancia, $\bar{\chi}(\alpha)$, se define como el factor de ganancia de amplitud del vdP para una excitación paramétrica aplicada con una frecuencia del doble de la frecuencia natural del oscilador de vdP ($\Omega = 2\omega_b$).

Teorema 2.2 La amplitud del oscilador del vdP cuasi-lineal ($\epsilon \ll 1$) excitado paramétricamente en su término de la frecuencia natural, como en (2.2), a una frecuencia $\Omega = 2\omega_b$, (resonancia 1 : 2) presenta una ganancia $\bar{\chi}(\alpha)$ en función de la magnitud de la excitación paramétrica, α .

La ganancia de amplitud está dada por:

$$\bar{\chi}(\alpha) = \sqrt{1 + \frac{\alpha\omega_{b0}^2}{2\epsilon\omega_b}} \quad (2.11)$$

por lo que la amplitud final que alcanza la solución es:

$$x(t) = 2\bar{\chi}(\alpha) = 2\sqrt{1 + \frac{\alpha\omega_{b0}^2}{2\epsilon\omega_b}} \quad (2.12)$$

Prueba. Se reexpresa el sistema (2.2) como:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_b + \omega_{b0}^2 x_b &= -\epsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b - \alpha\omega_{b0}^2 x_b \cos \Omega t \\ \ddot{x}_b + \omega_{b0}^2 x_b &= f(x_b, \dot{x}_b) \end{aligned}$$

Y se propone una solución de la forma:

$$\begin{aligned}x_b &= a(t) \cos(\omega_b t + \psi(t)) = a \cos \phi \\ \dot{x}_b &= -a(t) \omega_b \sin(\omega_b t + \psi(t)) = -a \omega_b \sin \phi\end{aligned}\quad (2.13)$$

Observación 2.2 De la sección anterior se considera $\omega_b \approx \omega_{b_0}$.

Reexpresando $f(x_b, \dot{x}_b)$ como $f(a \cos \phi, -a \omega_b \sin \phi)$, sustituyendo en el sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{-1}{2\pi\omega_b} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a \omega_b \sin \phi) \sin \phi d\phi \\ \dot{\psi} &= \frac{-1}{2\pi a \omega_b} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a \omega_b \sin \phi) \cos \phi d\phi\end{aligned}$$

y simplificando se llega a:

$$\dot{a} = \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) + \frac{\alpha \omega_{b_0}^2 a}{8\pi \omega_b} \int_0^{2\pi} [\sin(\Omega t + 2\phi) + \sin(-\Omega t + 2\phi)] d\phi \quad (2.14)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\alpha \omega_{b_0}^2}{8\pi \omega_b} \int_0^{2\pi} [\cos(\Omega t + 2\phi) + 2 \cos \Omega t + \cos(\Omega t - 2\phi)] d\phi \quad (2.15)$$

Sea $\Omega = 2\omega_b$, entonces las ecuaciones diferenciales, del sistema auxiliar, que describen el comportamiento de la amplitud y la fase de la solución propuesta (2.13) son:

$$\dot{a} = \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) + \frac{\alpha \omega_{b_0}^2 a}{4\omega_b} \sin(2\psi) \quad (2.16)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\alpha \omega_{b_0}^2}{4\omega_b} \cos(2\psi) \quad (2.17)$$

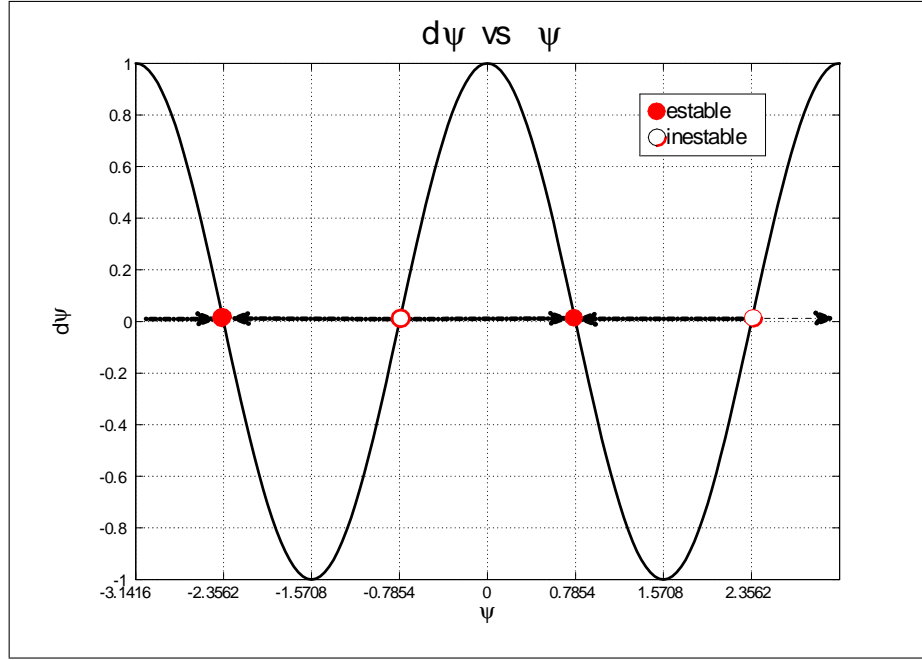
Analizando ambas ecuaciones, se observa que la dinámica de la fase está desacoplada de la dinámica de la amplitud. Los puntos de equilibrio de la fase son $\psi_{eq} = \left\{ \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4} \right\}$ donde los puntos $\psi_{eq1} = \frac{\pi}{4}, \psi_{eq4} = -\frac{3\pi}{4}$ son estables y el segundo par $\psi_{eq3} = \frac{3\pi}{4}, \psi_{eq2} = -\frac{\pi}{4}$ son inestables, como se aprecia en la Figura 2.4.

La región de atracción de cada punto de equilibrio estable es:

$$\begin{aligned}\psi &\longrightarrow \psi_{eq1} \quad \forall \psi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \\ \psi &\longrightarrow \psi_{eq4} \quad \forall \psi \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right) \bmod \pi\end{aligned}\quad (2.18)$$

Analizando la ecuación de amplitud se observa que sus puntos de equilibrio cuando la fase tiende a $\psi \longrightarrow \psi_{eq4}, \psi_{eq1}$, son:

$$a_{\bar{eq}} = \left\{ 0, \pm 2 \sqrt{1 + \frac{2\zeta}{\varepsilon}} \right\}$$


 Figura 2.4: Puntos de equilibrio de la fase $\dot{\psi}$ para $\Omega = 2\omega_0$.

y los puntos de equilibrio cuando la fase tiende a $\psi \rightarrow \psi_{eq2}, \psi_{eq3}$ son:

$$a_{eq} = \left\{ 0, \pm 2\sqrt{1 - \frac{2\varsigma}{\varepsilon}} \right\}$$

donde $\varsigma = \frac{\alpha\omega_b^2}{4\omega_b}$. Esto se observa en la Figura 2.5 .

Está claro por (2.18) que para fases en el rango $\psi \in (-\pi, \pi)$ todo el dominio de ψ es región de atracción de ψ_{eq1} y ψ_{eq4} , así pues, la amplitud de oscilación del van der Pol excitado paramétricamente alcanza los puntos de equilibrio $\bar{a} = 2\sqrt{1 + \frac{2\varsigma}{\varepsilon}}$ y prácticamente nunca alcanza los valores de

$$\underline{a} = 2\sqrt{1 - \frac{2\varsigma}{\varepsilon}}.$$

Esto se corrobora mediante la linealización alrededor de cada par de puntos de equilibrio (ψ, a) . Las conclusiones de tal análisis se condensan en la siguiente tabla:

punto de equilibrio	naturaleza	punto de equilibrio	naturaleza
$P_1 = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$	punto silla	$P_7 = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$	foco inestable
$P_2 = \left(\frac{\pi}{4}, +\bar{a}\right)$	nodo estable	$P_8 = \left(-\frac{\pi}{4}, +\underline{a}\right)$	punto silla
$P_3 = \left(\frac{\pi}{4}, -\bar{a}\right)$	nodo estable	$P_9 = \left(-\frac{\pi}{4}, -\underline{a}\right)$	punto silla
$P_4 = \left(-\frac{3\pi}{4}, 0\right)$	punto silla	$P_{10} = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$	foco inestable
$P_5 = \left(-\frac{3\pi}{4}, +\bar{a}\right)$	nodo estable	$P_{11} = \left(\frac{\pi}{4}, +\underline{a}\right)$	punto silla
$P_6 = \left(-\frac{3\pi}{4}, -\bar{a}\right)$	nodo estable	$P_{12} = \left(\frac{\pi}{4}, -\underline{a}\right)$	punto silla

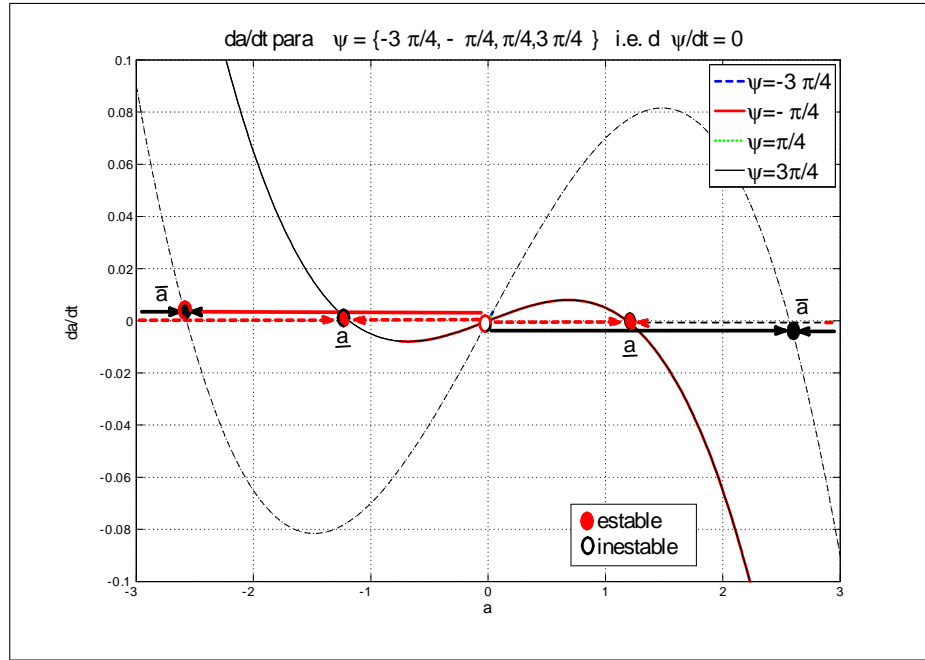


Figura 2.5: Puntos de equilibrio para \dot{a} cuando $\psi \rightarrow \psi_{eq_0}$ ó $\psi \rightarrow \psi_{eq_1}$ (curva más cercana al origen); y cuando $\psi \rightarrow \psi_{eq_2}$ ó $\psi \rightarrow \psi_{eq_3}$ (curva más alejada del origen)

Dado que la variable $a(t)$ corresponde a la amplitud de oscilación de la solución propuesta (2.13), se tiene que los puntos de equilibrio de $a(t)$ constituyen una cota inferior ($\underline{a} < 0$) y superior ($\bar{a} > 0$) de la solución $x(t)$. Se puede observar esto en la Figura 2.6 para diferentes amplitudes de la excitación paramétrica.

En el plano de fase, la diferencia entre la solución propuesta (2.13) y la solución numérica es prácticamente nula. Esto puede apreciarse en la Figura 2.3 donde la aproximación se muestra con la línea punteada. ■

Observación 2.3 Las cotas \bar{a} y sus correspondientes fases presentadas coinciden con los puntos de equilibrio estables obtenidos en [46] cuando $d = 0$ y tras la realización del debido cambio de coordenadas. Así pues se confirma que $|\bar{a}|$ es la amplitud que alcanza la solución del sistema (2.2) para toda condición inicial.

Definición 2.2 La ganancia, $\chi(\alpha, \Omega)$, se define como la ganancia de amplitud para una excitación paramétrica con frecuencia diferente al doble de la frecuencia natural del oscilador de van der Pol ($\Omega \neq 2\omega_b$).

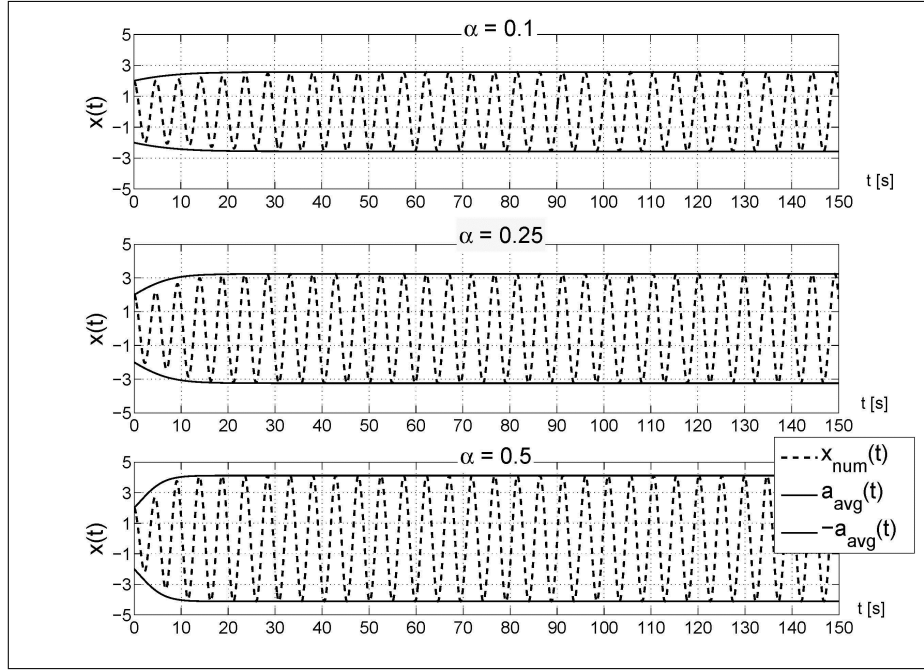


Figura 2.6: Solución numérica $x(t)$ acotada por la amplitud aproximada $\pm a(t)$ para amplitudes de excitación paramétrica $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectivamente.

Teorema 2.3 *La amplitud del oscilador del vdP cuasi-lineal ($\varepsilon \ll 1$) excitado paramétricamente en su término de la frecuencia natural, como en (2.2), a una frecuencia $\Omega > \sqrt{2}\omega_b$, $\Omega \neq 2\omega_b$, $\Omega \neq n\omega_b$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ presenta una ganancia $\chi(\alpha, \Omega)$ en función de la magnitud de la excitación paramétrica, α .*

La ganancia de amplitud está dada por:

$$\chi(\alpha, \Omega) = \sqrt{1 + \frac{2|\mu|}{\varepsilon}} \quad (2.19)$$

donde μ está definida como

$$\mu \triangleq \frac{\alpha\omega_{b_0}^2\omega_b}{2\pi(4\omega_b^2 - \Omega^2)} \left\{ \cos\left(\frac{\Omega\psi_{eq}}{\omega_b}\right) - \cos\left(\frac{\Omega(2\pi - \psi_{eq})}{\omega_b}\right) \right\}$$

Por lo que la amplitud final que alcanza la solución es:

$$x(t) = 2\chi(\alpha, \Omega) = 2\sqrt{1 + \frac{2|\mu|}{\varepsilon}} \quad (2.20)$$

Prueba. Para $\Omega \neq 2\omega_{b_0}$ el sistema auxiliar (2.14),(2.15) corresponde a :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) + a \frac{\alpha\omega_{b_0}^2\omega_b}{2\pi(4\omega_b^2 - \Omega^2)} \left\{ \cos\left(\frac{\Omega\psi}{\omega_b}\right) - \cos\left(\frac{\Omega(2\pi - \psi)}{\omega_b}\right) \right\} \\ \dot{\psi} &= \frac{\alpha\omega_{b_0}^2(\Omega^2 - 2\omega_b^2)}{2\pi\Omega(\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \left\{ \sin\left(\frac{\Omega\psi}{\omega_b}\right) + \sin\left(\frac{\Omega(2\pi - \psi)}{\omega_b}\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nuevamente la fase es independiente de la amplitud, y sus puntos de equilibrio están dados por la expresión:

$$\psi_{eq_m} = \frac{\omega_b}{\Omega} \left[\arctan \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi\Omega}{\omega_b} \right)}{\cos \left(\frac{2\pi\Omega}{\omega_b} \right) - 1} \right) - m\pi \right], m = 0, 1$$

La estabilidad de estos dos puntos de equilibrio depende de la frecuencia de la excitación paramétrica (Ω) de la siguiente manera: ψ_{eq_0} es estable para $\sqrt{2}\omega_b < \Omega < 2\omega_b$ e inestable para cualquier otra frecuencia de excitación paramétrica; la estabilidad de ψ_{eq_1} es la opuesta a la estabilidad de ψ_{eq_0} ; esto puede ver en la Figura 2.7 donde se gráfica la ecuación diferencial de ψ para diferentes valores de Ω :

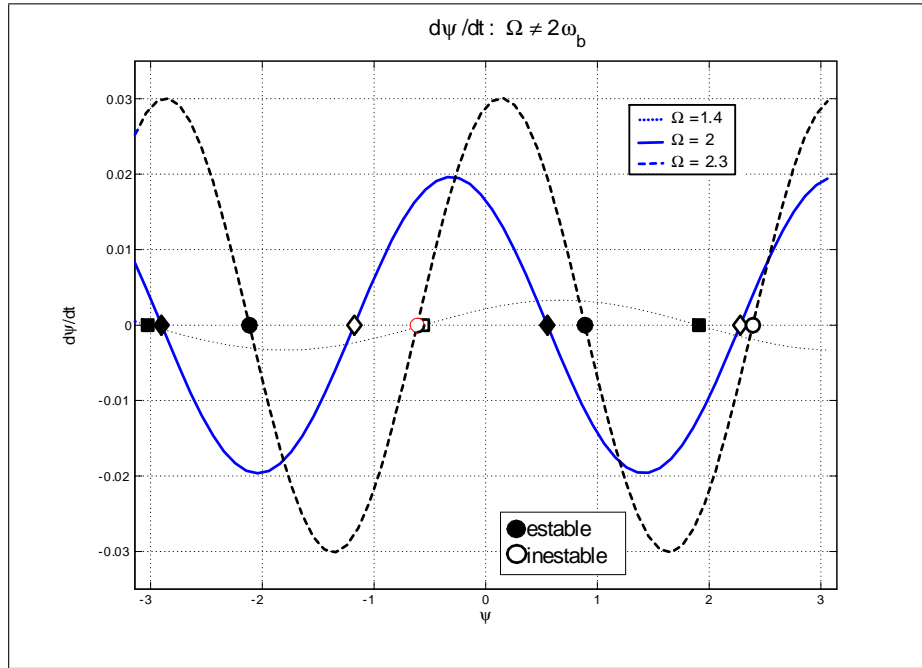


Figura 2.7: Puntos de equilibrio de la fase $\dot{\psi}$ para $\Omega \neq 2\omega_0$.

En estado estacionario de ψ , i.e. cuando ha alcanzado un punto de equilibrio, el análisis puede realizarse sobre la ecuación diferencial de la amplitud:

$$\dot{a} = \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) + a\mu$$

donde

$$\mu = \frac{\alpha\omega_{b_0}^2\omega_b}{2\pi(4\omega_b^2 - \Omega^2)} \left\{ \cos \left(\frac{\Omega\psi_{eq}}{\omega_b} \right) - \cos \left(\frac{\Omega(2\pi - \psi_{eq})}{\omega_b} \right) \right\} \quad (2.22)$$

Sus puntos de equilibrio son $a = \left\{ a_0 = 0, a_{\overline{eq}} = \pm 2\sqrt{1 + \frac{2|\mu|}{\varepsilon}}, a_{\underline{eq}} = \pm 2\sqrt{1 - \frac{2|\mu|}{\varepsilon}} \right\}$. Los puntos $a_{\overline{eq}}$ y $a_{\underline{eq}}$ son siempre estables, mientras que a_0 siempre es inestable. Esto puede apreciarse en las Figura 2.8 donde se muestra la ecuación diferencial de la amplitud, a , cuando se ha alcanzado la fase de equilibrio ψ_{eq_0} .

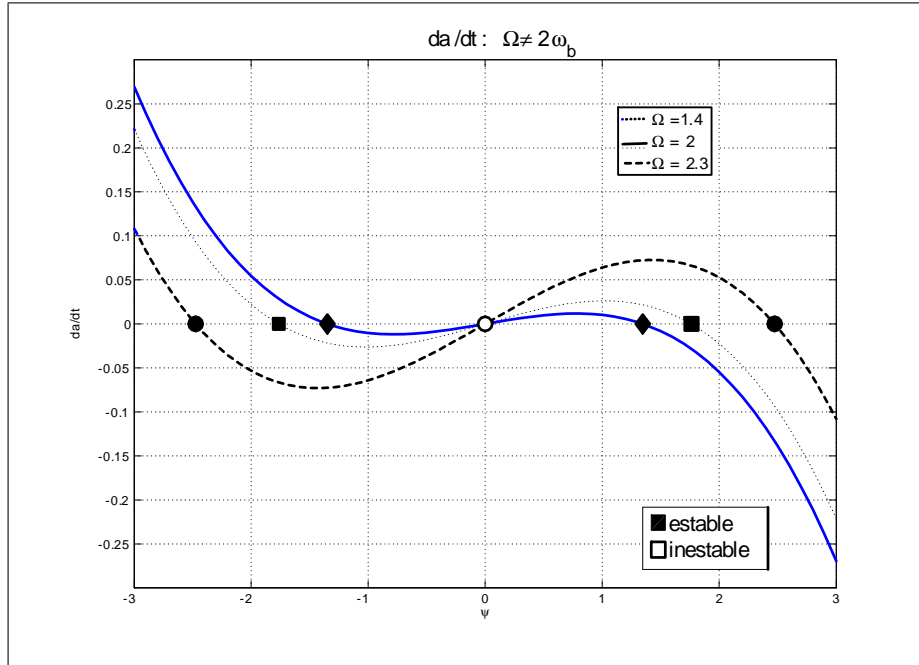


Figura 2.8: Puntos de equilibrio para \dot{a} cuando $\psi \rightarrow \psi_{eq_0}$.

El sistema (2.21) tiene seis puntos de equilibrio que corresponden a todas las posibles parejas de puntos de equilibrio de sus dos ecuaciones diferenciales. La existencia y estabilidad de cada punto de equilibrio depende del valor de la frecuencia de excitación paramétrica (Ω) y se determinó mediante la linealización alrededor de cada uno de ellos. Las conclusiones de dichos análisis se condensan en las siguientes tablas y se aprecia en las correspondientes Figuras 2.9, 2.10 y 2.11 que muestran los puntos de equilibrio en el plano de fase (ψ, a) de acuerdo al rango de frecuencia de excitación paramétrica.

Para una frecuencia de excitación paramétrica inferior a $\sqrt{2}\omega_b$:

$\Omega < \sqrt{2}\omega_b$	
punto de equilibrio	naturaleza
$P_1 = (\psi_{eq0}, a_0)$	nodo inestable
$P_2 = (\psi_{eq0}, a_{\overline{eq}})$	punto silla
$P_3 = (\psi_{eq0}, a_{\underline{eq}})$	no se manifiesta
$P_4 = (\psi_{eq1}, a_0)$	punto silla
$P_5 = (\psi_{eq1}, a_{\overline{eq}})$	no se manifiesta
$P_6 = (\psi_{eq1}, a_{\underline{eq}})$	nodo estable

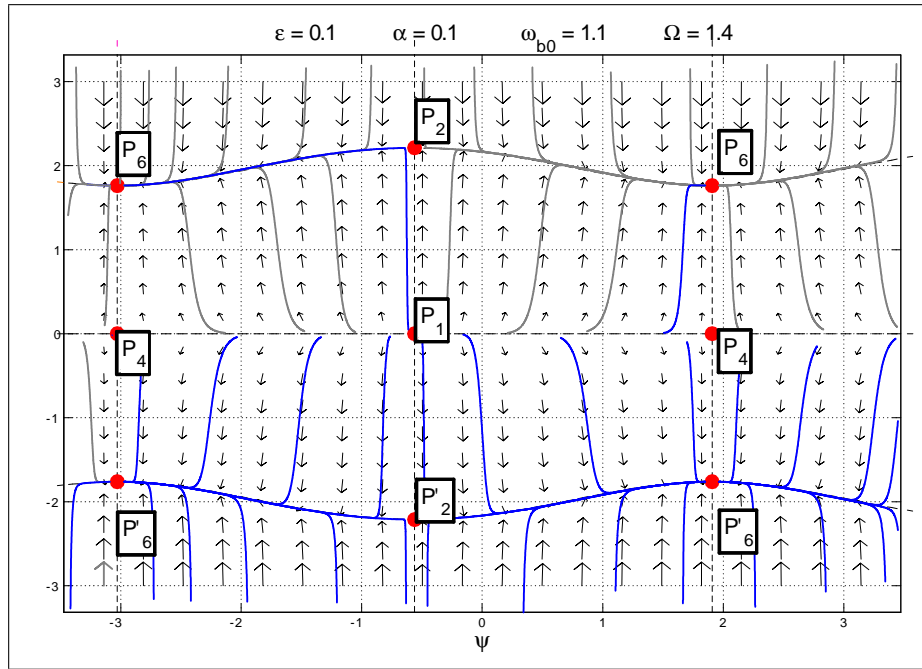


Figura 2.9: Puntos de equilibrio para una frecuencia de excitación paramétrica $\Omega < \sqrt{2}\omega_b$.

Para una frecuencia de excitación paramétrica superior a $\sqrt{2}\omega_b$ pero menor que el doble de la frecuencia natural:

$\sqrt{2}\omega_b < \Omega < 2\omega_b$	
punto de equilibrio	naturaleza
$P_1 = (\psi_{eq0}, a_0)$	punto silla
$P_2 = (\psi_{eq0}, a_{\overline{eq}})$	nodo estable
$P_3 = (\psi_{eq0}, a_{\underline{eq}})$	no se manifiesta
$P_4 = (\psi_{eq1}, a_0)$	nodo inestable
$P_5 = (\psi_{eq1}, a_{\overline{eq}})$	no se manifiesta
$P_6 = (\psi_{eq1}, a_{\underline{eq}})$	punto silla

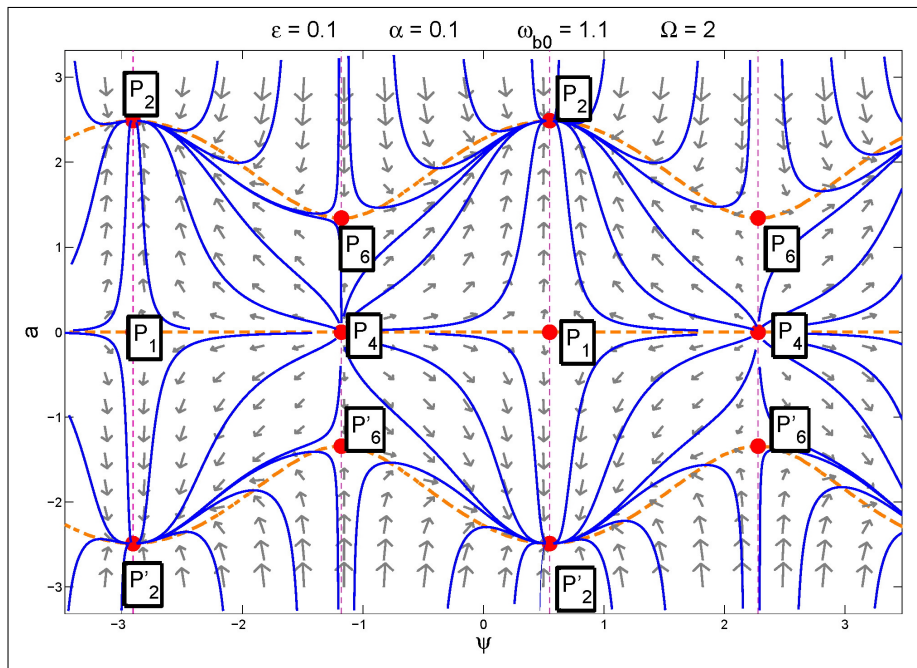


Figura 2.10: Puntos de equilibrio para una frecuencia de excitación paramétrica $\sqrt{2}\omega_b < \Omega < 2\omega_b$.

Para una frecuencia de excitación paramétrica superior al doble de la frecuencia natural:

$\Omega > 2\omega_b$	
punto de equilibrio	naturaleza
$P_1 = (\psi_{eq0}, a_0)$	nodo inestable
$P_2 = (\psi_{eq0}, a_{\overline{eq}})$	no se manifiesta
$P_3 = (\psi_{eq0}, a_{\underline{eq}})$	punto silla
$P_4 = (\psi_{eq1}, a_0)$	punto silla
$P_5 = (\psi_{eq1}, a_{\overline{eq}})$	nodo estable
$P_6 = (\psi_{eq1}, a_{\underline{eq}})$	no se manifiesta

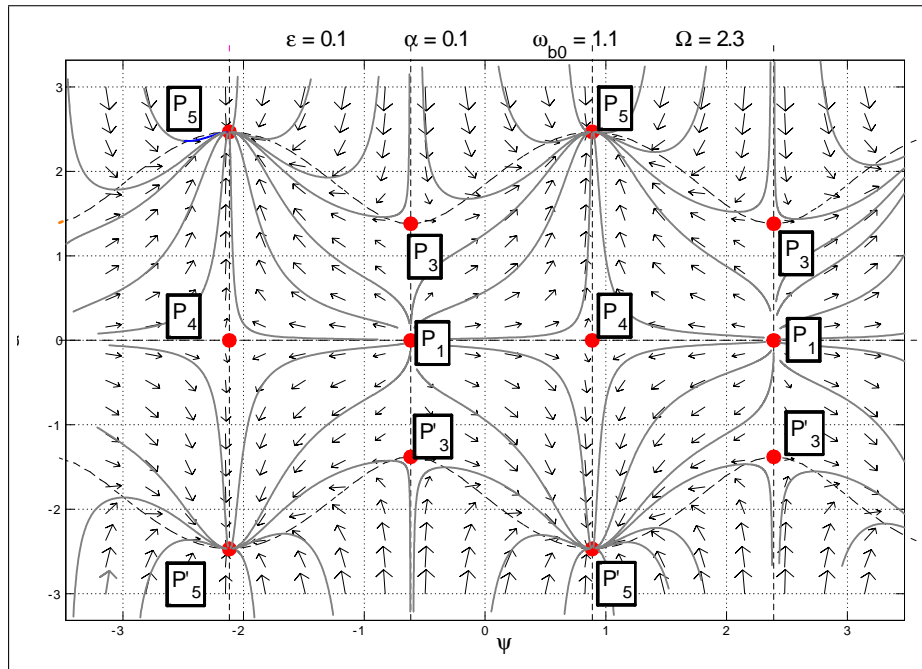


Figura 2.11: Puntos de equilibrio para una frecuencia de excitación paramétrica $\Omega > 2\omega_b$.

Esta claro que para toda frecuencia de excitación paramétrica $\Omega > \sqrt{2}\omega_b$ la amplitud, $a(t)$, alcanza el punto de equilibrio $a_{\overline{eq}}$, es decir, presenta una ganancia de amplitud aunque es menor que la obtenida en el caso en que $\Omega = 2\omega_b$. En cambio, cuando la frecuencia de excitación paramétrica $\Omega < \sqrt{2}\omega_b$ es como si no hubiera aplicación de excitación paramétrica. Así pues, la amplitud de

oscilación, $a(t)$, muestra una ganancia debida a la presencia de la excitación paramétrica para frecuencias $\Omega > \sqrt{2}\omega_b$.

Observación 2.4 Para $\Omega = n\omega_b$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ el sistema se simplifica a la expresión:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) \\ \dot{\psi} &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto la excitación paramétrica no proporciona ninguna ganancia en la amplitud de la oscilación, esto puede verse en la figura 2.12a.

Este sistema corresponde al del vdP libre cuya amplitud tiende a la amplitud $a = 2$ [20] [36] [16]

Siendo $a(t)$ la amplitud asumida de la solución propuesta $x(t)$, resulta ser una cota superior ($a_{\overline{eq}}$) e inferior ($-a_{\overline{eq}}$) de la solución del vdP excitado paramétricamente. Esto puede apreciarse en la Figura 2.12b donde $a(t)$ coincide con la amplitud máxima de $x(t)$ para $\alpha = 0.1$.

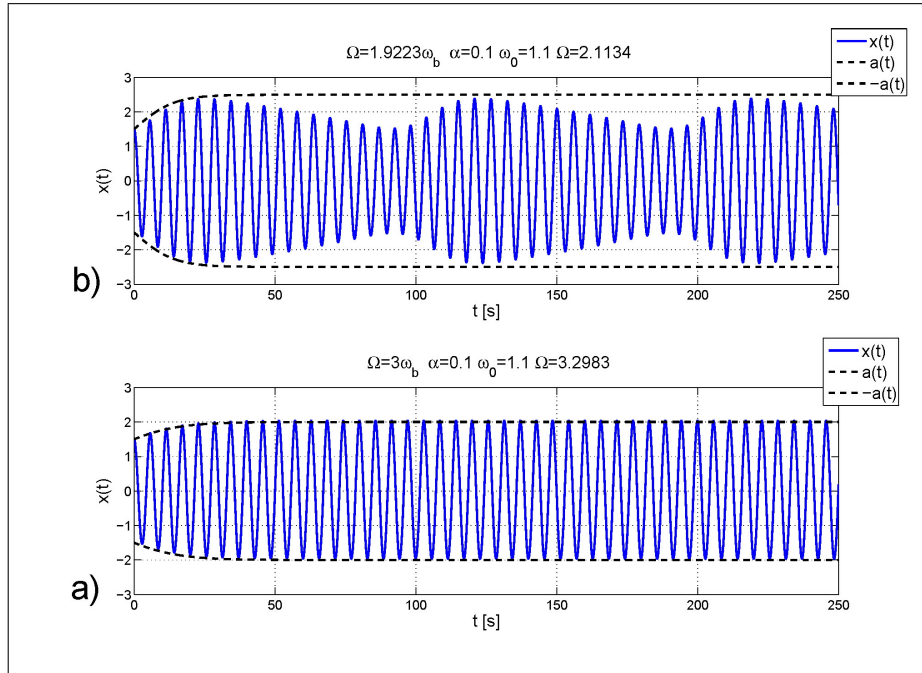


Figura 2.12: Solución numérica $x(t)$ acotada por la aproximación de la amplitud $\pm a(t)$ para $\alpha = 0.1$ y a) $\Omega = 3\omega_b$, $\mu = 0$ y b) $\Omega = 1.9223\omega_b$, $\mu = 0.0025$

■

Teorema 2.4 La amplitud del oscilador del vdP cuasi-lineal ($\varepsilon \ll 1$) excitado paramétricamente en su término de la frecuencia natural, como en (2.2), presenta la ganancia máxima cuando la frecuencia de excitación paramétrica es $\Omega = 2\omega_b$.

Prueba. Comparando la ganancia de amplitud $\bar{\chi}(\alpha)$ obtenida para una frecuencia de excitación $\Omega = 2\omega_{b_0}$ dada por la expresión (2.11) con la ganancia de amplitud $\chi(\alpha, \Omega)$ obtenida para una frecuencia de excitación paramétrica $\Omega \neq 2\omega_b$, dada por la expresión (2.19) cumple:

$$\chi(\alpha, \Omega) < \bar{\chi}(\alpha) \quad (2.23)$$

■

2.3. Conclusiones

En el presente capítulo se analizó el efecto de la excitación paramétrica aplicada en el término de la ecuación diferencial del oscilador de van der Pol cuasi-lineal correspondiente a su frecuencia natural. Se determinó que esta excitación no tiene efecto alguno en la frecuencia de oscilación resultante pero provoca un cambio en la amplitud de oscilación en función de la amplitud de la excitación paramétrica y se puede ver modificada, adicionalmente, por el valor de la frecuencia de la excitación paramétrica.

Se determinaron cuatro posibles situaciones:

1. para $\Omega = 2\omega_b$ es cuando se tiene un incremento en amplitud máximo;
2. para $\Omega = \mathbf{n}\omega_b, \mathbf{n} \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ no existe incremento en la amplitud;
3. para $\Omega > \sqrt{2}\omega_b, \Omega \neq \mathbf{n}\omega_b, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, existe cierto incremento en la amplitud, pero éste es menor al caso $\Omega = 2\omega_b$; y
4. para $\Omega < \sqrt{2}\omega_b, \Omega \neq \mathbf{n}\omega_b, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$ existe un decremento en la amplitud.

En [30] se menciona que la variación de un parámetro al doble de la frecuencia natural, conocido como resonancia 1 : 2, induce un incremento en la amplitud de oscilación que, en el caso lineal produce soluciones no acotadas de las ecuaciones diferenciales ordinarias; y en el caso no-lineal provoca un cambio en la frecuencia de oscilación del sistema que se traduce en una desintonización de la excitación paramétrica, provocando el acotamiento de la solución de la ecuación diferencial ordinaria.

En este capítulo se corroboró esta afirmación y se determinó el valor preciso que alcanza la amplitud de oscilación para el oscilador de van der Pol cuasi-lineal para esa relación de frecuencias y cualquier otra.

Capítulo 3

Par de Osciladores de Van der Pol cuasi-lineales Acoplados

En el presente capítulo se analizan los casos tradicionales de pares de osciladores de van der Pol acoplados entre sí, tanto con acoplamiento bidireccional como unidireccional, pero adicionalmente se considera que dichos osciladores se encuentran excitados paramétricamente, ya sea alternativamente o simultáneamente.

3.1. Acoplamiento Unidireccional

En la presente sección se analiza el caso más simple de sincronización de dos osciladores, esto es, cuando se tiene un acoplamiento unidireccional entre ellos. En esta situación únicamente uno de los osciladores tiene influencia sobre el otro. Los dos roles posibles para dicho oscilador son: a) forzado o b) forzante.

Aplicando los resultados analíticos del capítulo 2 en simulaciones del oscilador de vdP excitado paramétricamente forzado y del oscilador de vdP excitado paramétricamente forzante acoplados a un vdP sin excitación paramétrica, se determinan las cotas inferiores de la intensidad de acoplamiento requerida para conseguir la sincronización en cada uno de estos casos.

Adicionalmente se presenta el caso en que ambos osciladores de vdP se encuentran simultáneamente excitados paramétricamente. Éste deriva en tres situaciones posibles: ambos excitados a la misma frecuencia, correspondiente al doble de la frecuencia natural de alguno de los vdP's; o ambos excitados por frecuencias distintas, correspondientes al doble de su frecuencia natural particular, Para las tres situaciones se determina la intensidad de acoplamiento requerida para lograr la sincronización.

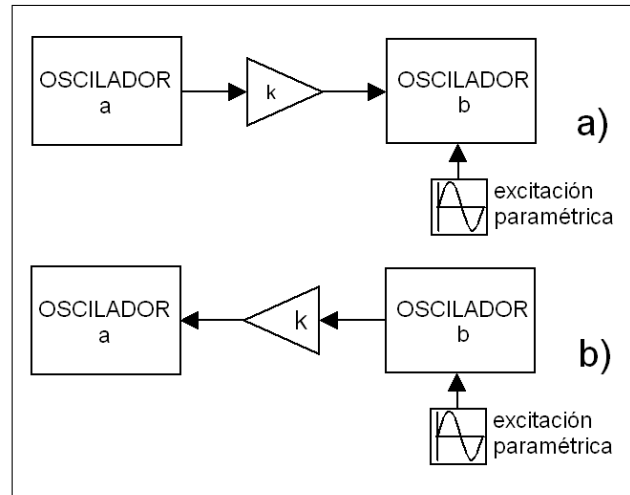


Figura 3.1: Osciladores de van der Pol acoplados unidireccionalmente. a) caso forzado con excitación paramétrica; b) caso forzante con excitación paramétrica.

3.1.1. vdP forzado y con excitación paramétrica

Considérense dos osciladores de van der Pol cuasi-lineales que difieren entre si exclusivamente en su frecuencia natural. Uno de ellos es excitado paramétricamente como en (2.2) y el segundo permanece libre, pero forzando al primer oscilador.

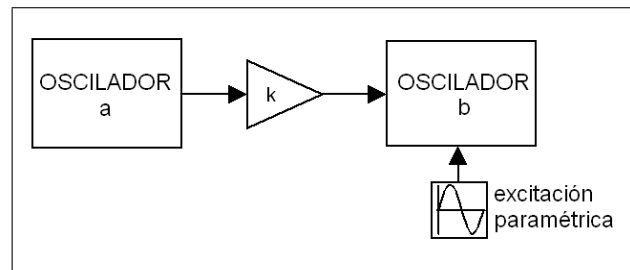


Figura 3.2: Osciladores de van der Pol acoplados unidireccionalmente. Caso forzado y excitado paramétricamente.

Esto se expresa como:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + \varepsilon (x_a^2 - 1) \dot{x}_a + \omega_{a_0}^2 x_a &= 0 \\ \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b &= -\alpha \omega_{b_0}^2 x_b \cos \Omega t + k x_a \end{aligned} \quad (3.1)$$

Se sabe que la excitación paramétrica tiene su mayor efecto cuando la frecuencia de excitación es $\Omega = 2\omega_{b_0}$ y consiste en un incremento de la amplitud de oscilación de la solución. La ganancia

de amplitud, $\bar{\chi}(\alpha)$, está dada por la expresión:

$$\bar{\chi}(\alpha) = \sqrt{1 + \frac{\alpha\omega_0^2}{2\varepsilon\omega}}$$

Dado que $\bar{\chi}(\alpha) > 1$ para $\alpha \neq 0$, entonces:

$$|x_b(t)|_{\alpha \neq 0} > |x_b(t)|_{\alpha=0} \quad \forall t \quad (3.2)$$

Definición 3.1 *La intensidad de acoplamiento crítico, k_c , se define como la intensidad de acoplamiento mínima requerida para lograr la supresión de la frecuencia natural del van der Pol forzado sin excitación paramétrica.*

Definición 3.2 *La nueva intensidad de acoplamiento, k_{n_i} , se define como la nueva intensidad de acoplamiento mínima requerida para lograr la supresión de la frecuencia natural del van der Pol forzado en presencia de la excitación paramétrica ($i \in \mathbb{N}$).*

Dada (3.2) se espera que:

$$k_c < k_{n_1}$$

Más aun, conociendo la intensidad de acoplamiento crítico, la nueva intensidad de acoplamiento se encuentra acotada inferiormente por:

$$k_c < \bar{\chi}(\alpha) k_c < k_{n_1} \quad (3.3)$$

Para confirmar esto, se realizaron una serie de simulaciones del sistema (3.1) para $\alpha = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, $\Omega = 2.2$, $\omega_{b_0} = 1.1$ y $\omega_{a_0} = 1$, contemplando los siguientes valores de intensidad de acoplamiento: $k = \bar{\chi}(\alpha) k_c$ y $k = k_c$. Los resultados se condensan en la Figura 3.3 donde se muestra el espectro de frecuencia del oscilador de vdP forzado para cada intensidad de acoplamiento.

Observación 3.1 *Para $k = k_c$ el oscilador forzante ha conseguido suprimir la frecuencia natural del vdP sin excitación paramétrica aunque esto no se ha conseguido para el oscilador de vdP que se encuentra excitado paramétricamente, i.e. no ha logrado forzarlo.*

Con la nueva intensidad de acoplamiento $k_{n_1} = \bar{\chi}(\alpha) k_c$, el vdP forzado oscila a la frecuencia forzante, tanto con excitación paramétrica como sin ella.

La cota (3.3) es confirmada por estas simulaciones.

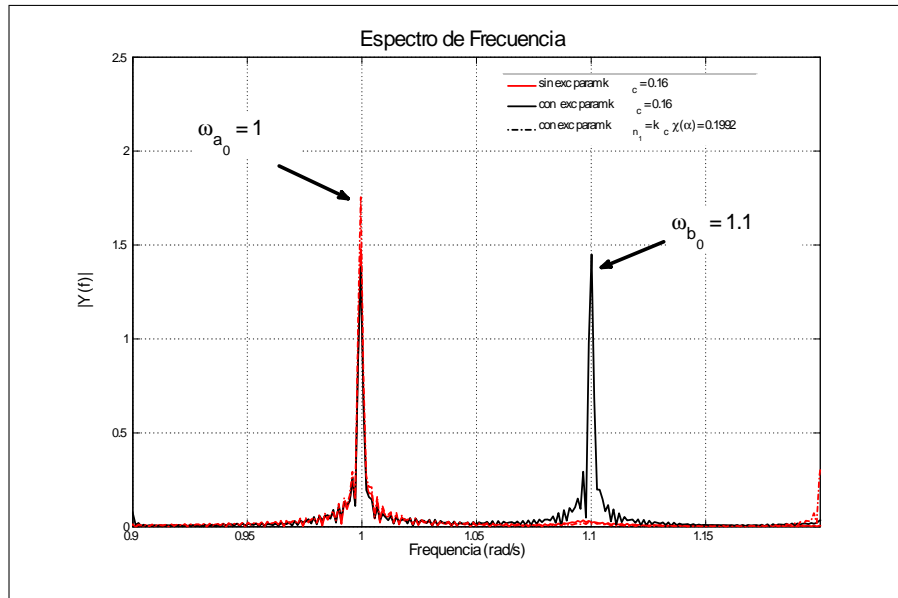


Figura 3.3: Espectro de frecuencia del oscilador de vdP excitado paramétricamente y forzado por un segundo oscilador de vdP.

3.1.2. vdP forzante y con excitación paramétrica

Nuevamente, considérense dos osciladores de vdP cuasi-lineales que difieren entre si exclusivamente en su frecuencia natural. El primer oscilador es forzado por el segundo que se encuentra excitado paramétricamente.

La expresión matemática para este sistema es:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + \varepsilon (x_a^2 - 1) \dot{x}_a + \omega_{a_0}^2 x_a &= kx_b \\ \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b &= -\alpha \omega_{b_0}^2 x_b \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sea $\Omega = 2\omega_{b_0}$, entonces la amplitud máxima que alcanza la solución del oscilador de vdP forzante se expresa como en (2.12); por lo tanto (3.2) es válida y se espera que la intensidad de

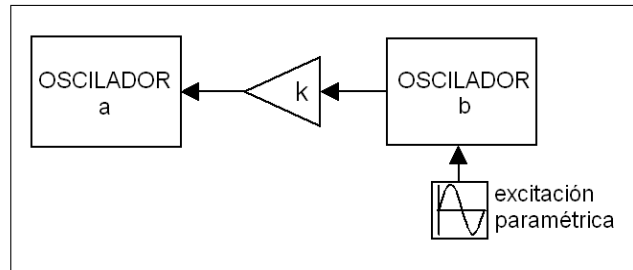


Figura 3.4: Osciladores de van der Pol acoplados unidireccionalmente. Caso forzante y excitado paramétricamente.

acoplamiento requerida para suprimir la frecuencia natural del segundo oscilador sea:

$$k_{n2} < k_c$$

Más aun, conociendo la intensidad de acoplamiento crítico, la nueva intensidad de acoplamiento se encuentra en el rango de valores:

$$\frac{k_c}{\bar{\chi}(\alpha)} < k_{n2} < k_c \quad (3.5)$$

Para confirmar esto, una serie de simulaciones del sistema (3.4) se realizaron con los mismos parámetros que en la sección anterior. Los resultados se resumen en la Figura 3.5

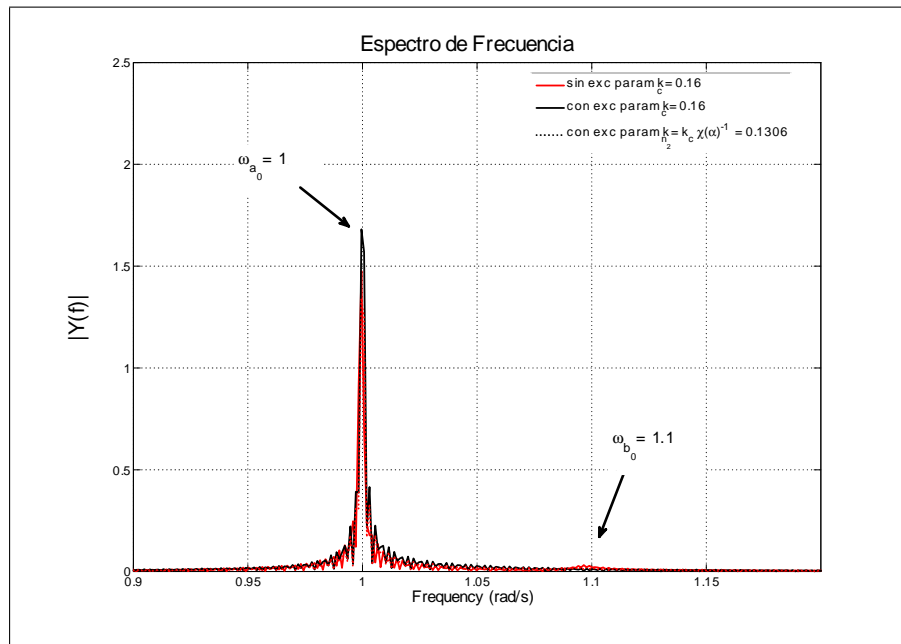


Figura 3.5: Espectro de frecuencia del oscilador de vdP forzado por un segundo oscilador de vdP excitado paramétricamente.

Observación 3.2 Para $k = k_c$ el oscilador forzante con excitación paramétrica ha conseguido suprimir la frecuencia natural del vdP forzado sin excitación paramétrica.

Con la nueva intensidad de acoplamiento $k_{n2} = \frac{k_c}{\chi(\alpha)}$, el vdP forzado sigue oscilando a la frecuencia forzante, a pesar del decremento en la magnitud de la intensidad de acoplamiento.

Las cotas (3.5) son confirmadas por estas simulaciones.

3.1.3. vdP forzante y forzado con excitación paramétrica

Nuevamente, considérense dos osciladores de vdP cuasi-lineales que difieren entre si exclusivamente en su frecuencia natural. Acoplándolos unidireccionalmente, i.e. uno forzando al otro, pero, a diferencia de los dos casos analizados en las secciones anteriores, ahora se aplica la excitación paramétrica como en (2.2) a ambos osciladores simultáneamente.

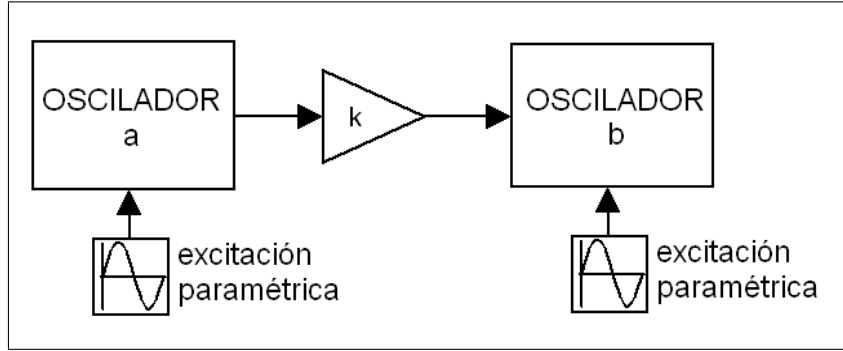


Figura 3.6: Osciladores de van der Pol acoplados unidireccionalmente. Tanto el oscilador forzado como el forzante son excitados paraméricamente.

Este sistema se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + \varepsilon (x_a^2 - 1) \dot{x}_a + \omega_{a0}^2 x_a &= -\alpha \omega_{a0}^2 x_a \cos \Omega t \\ \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b0}^2 x_b &= -\alpha \omega_{b0}^2 x_b \cos \Omega t + k x_a \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dependiendo del valor de la frecuencia de excitación paramétrica, Ω , y la relación que guarda con las frecuencias naturales de los osciladores de vdP a los que excita, ω_{a0} y ω_{b0} , se observan diferentes situaciones que se describirán a continuación.

3.1.3.1. Frecuencia de excitación paramétrica al doble de la frecuencia del vdP forzante

Cuando la excitación paramétrica aplicada a ambos osciladores corresponde al doble de la frecuencia natural del oscilador forzante el sistema se expresa como:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + \varepsilon (x_a^2 - 1) \dot{x}_a + \omega_{a0}^2 x_a &= -\alpha \omega_{a0}^2 x_a \cos (2\omega_{a0} t) \\ \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b0}^2 x_b &= -\alpha \omega_{b0}^2 x_b \cos (2\omega_{a0} t) + k x_a \end{aligned}$$

Dado que $\Omega = 2\omega_{a_0}$, se presenta la situación en que el oscilador forzante corresponde al caso del vdP libre excitado paramétricamente, (2.2), al doble de su frecuencia natural, motivo por el cual se espera un incremento de amplitud de la solución del oscilador de vdP forzante dada por (2.12), por lo tanto se esperaría que la intensidad de acoplamiento requerida para suprimir la frecuencia natural del segundo oscilador sea:

$$k_{n_3} < k_c$$

Pero, simultáneamente el oscilador forzado también se encuentra excitado paramétricamente a una frecuencia muy cercana al doble de su frecuencia natural, así pues, también presentará una ganancia de amplitud, aunque inferior, dada por (2.19).

Conociendo la intensidad de acoplamiento crítico, la nueva intensidad de acoplamiento puede presumirse acotada inferiormente por el producto de la intensidad de acoplamiento crítico y la razón, $\frac{\chi(\alpha, \Omega, \omega_b)}{\bar{\chi}(\alpha, \omega_a)}$, entre la ganancia del oscilador excitado al doble de su frecuencia natural y la ganancia del oscilador excitado a una frecuencia ligeramente diferente al doble de su frecuencia natural:

$$\frac{\chi(\alpha, \Omega, \omega_b)}{\bar{\chi}(\alpha, \omega_a)} k_c < k_{n_3} < k_c \quad (3.7)$$

Para corroborar esto se realizaron una serie de simulaciones con los mismos parámetros empleados en la sección anterior: $\alpha = 0.1 = \varepsilon$, $\omega_a = 1$, $\omega_b = 1.1$, variándose la intensidad de acoplamiento requerida hasta que se alcanza la sincronización.

Definición 3.3 *Se define la frecuencia de sincronización, ω_{syn} , como la frecuencia de oscilación común que alcanzan ambos osciladores al existir un acoplamiento entre ellos.*

Observación 3.3 *Se sabe que el sistema en ausencia de excitación paramétrica y para los mismos parámetros alcanza la sincronización cuando la intensidad de acoplamiento crítico es $k_c = 0.16$.*

Los resultados obtenidos se condensan a continuación:

$\Omega = 2\omega_a = 2$						
k_{n_3}	0.1	0.105	0.11	0.115	0.12	0.16
ω_{syn}	$\omega_{syn} \neq \omega_a$	$\omega_{syn} \neq \omega_a$	$\omega_{syn} \approx \omega_a$	$\omega_{syn} \approx \omega_a$	$\omega_{syn} = \omega_a$	$\omega_{syn} = \omega_a$

Lo cual puede apreciarse similarmente en la Figura 3.7.

Observación 3.4 *Para los parámetros del ejemplo, el valor de la cota inferior es $\frac{\chi(\alpha, \Omega)}{\bar{\chi}(\alpha)} k_c = 0.1398$. Se observa que para una intensidad ligeramente inferior, $k_{n_3} = 0.12$, se ha conseguido que el sistema alcance la sincronización oscilando a la frecuencia forzante, así pues la cota inferior propuesta resulta ser bastante conservadora.*

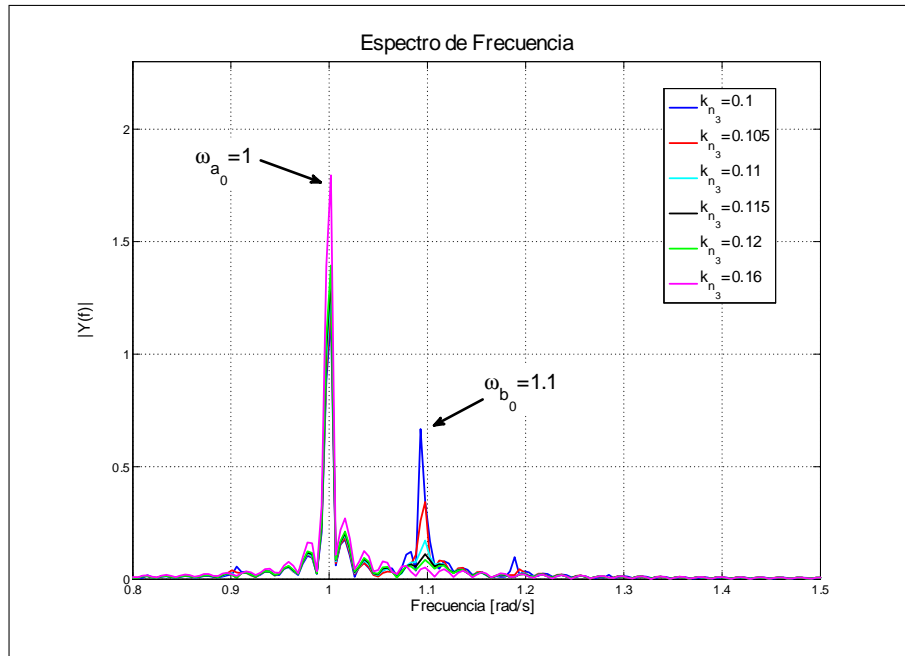


Figura 3.7: Espectro de Frecuencia del oscilador de vdP forzado cuando $\Omega = 2\omega_a$ para diferentes intensidades de acoplamiento.

Observación 3.5 Se tiene que $k_{n_3} < k_{n_2}$, siendo esto consecuencia directa de la presencia de la excitación paramétrica que inserta la componente de frecuencia correspondiente a la frecuencia natural del oscilador forzante y por lo tanto de la frecuencia de sincronización.

Conclusión 3.1 Con la presencia de la excitación paramétrica, tanto en el oscilador forzante como en el forzado, aplicada con una frecuencia del doble de la frecuencia natural del oscilador forzante se alcanza la sincronización con una nueva intensidad de acoplamiento menor que al intensidad de acoplamiento crítico e incluso menor que en el caso en que el oscilador forzante no presenta excitación paramétrica alguna.

3.1.3.2. Frecuencia de excitación paramétrica al doble de la frecuencia del vdP forzado

Cuando la excitación paramétrica aplicada a ambos osciladores corresponde al doble de la frecuencia natural del oscilador forzado el sistema se expresa como:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + \varepsilon (x_a^2 - 1) \dot{x}_a + \omega_{a_0}^2 x_a &= -\alpha \omega_{a_0}^2 x_a \cos(2\omega_b t) \\ \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b &= -\alpha \omega_{b_0}^2 x_b \cos(2\omega_b t) + kx_a \end{aligned}$$

Ahora que $\Omega = 2\omega_{b_0}$ se da la situación en que el oscilador forzante corresponde al caso del vdP libre excitado paramétricamente al doble de una frecuencia distinta a su frecuencia natural, para la cual se espera que el oscilador de vdP presente un incremento de amplitud en su solución proporcional a (2.19). Como consecuencia de esto se esperaría que la intensidad de acoplamiento requerida para suprimir la frecuencia natural del segundo oscilador sea:

$$k_{n_4} < k_c$$

Pero, simultáneamente el oscilador forzado también se encuentra excitado paramétricamente precisamente al doble de su frecuencia natural lo que implica una ganancia de amplitud dada por (2.11). Esta ganancia de amplitud es superior a la del oscilador forzante lo que significaría que la nueva intensidad de acoplamiento sea:

$$k_{n_4} > k_c$$

Conociendo la intensidad de acoplamiento crítico, se propone la siguiente cota inferior para la nueva intensidad de acoplamiento:

$$k_c < \frac{\bar{\chi}(\alpha, \omega_b)}{\chi(\alpha, \Omega, \omega_a)} k_c < k_{n_4} \quad (3.8)$$

Nuevamente, para corroborarlo se simuló el sistema con los mismos parámetros empleados en la sección anterior: $\alpha = 0.1 = \varepsilon$, $\omega_a = 1$, $\omega_b = 1.1$, variándose la intensidad de acoplamiento hasta conseguir la sincronización.

Los resultados obtenidos se condensan a continuación:

$\Omega = 2\omega_b = 2.2$						
k_{n_4}	0.16	0.18	0.185	0.19	0.2	0.21
ω_{syn}	$\omega_{syn} \neq \omega_a$	$\omega_{syn} \neq \omega_a$	$\omega_{syn} \approx \omega_a$	$\omega_{syn} \approx \omega_a$	$\omega_{syn} = \omega_a$	$\omega_{syn} = \omega_a$

Lo cual puede apreciarse similarmente en la Figura 3.8.

Observación 3.6 Para los parámetros del ejemplo, el valor de la cota inferior corresponde al valor $\frac{\bar{\chi}(\alpha, \omega_b)}{\chi(\alpha, \Omega, \omega_a)} k_c = 0.1929$. Se observa que para una intensidad ligeramente superior, $k_{n_4} = 0.2$, se ha conseguido que el sistema alcance la sincronización oscilando a la frecuencia forzante, así pues la cota inferior propuesta es adecuada.

Observación 3.7 Adicionalmente, se tiene que $k_{n_4} > k_{n_1}$, siendo esto consecuencia directa de la presencia de la excitación paramétrica que inserta la componente de frecuencia correspondiente a la frecuencia natural del oscilador forzado, por lo tanto oponiéndose a ser forzado.

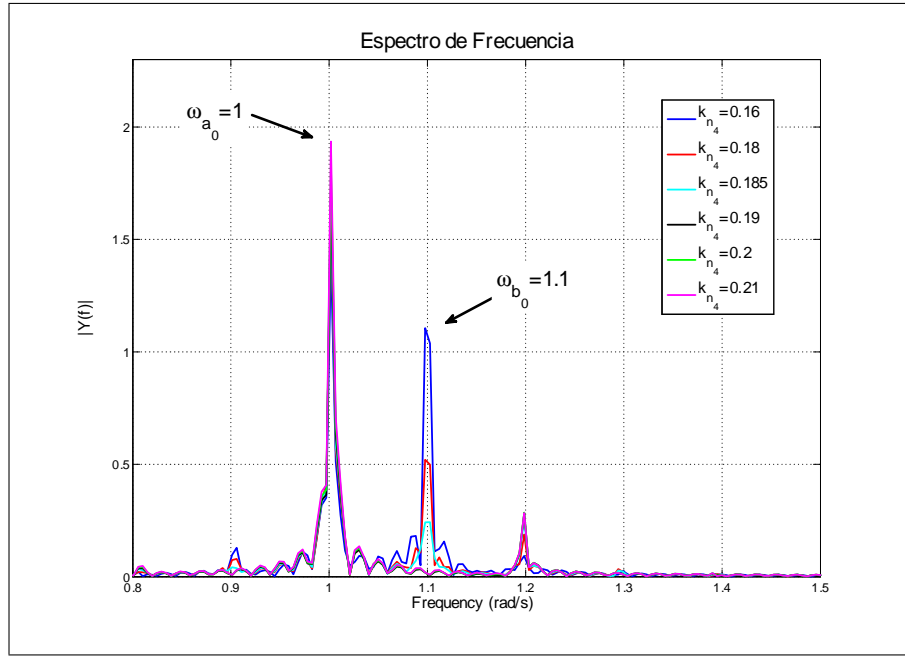


Figura 3.8: Espectro de Frecuencia del oscilador de vdP forzado cuando $\Omega = 2\omega_b$ para diferentes intensidades de acoplamiento.

Conclusión 3.2 *Con la presencia de la excitación paramétrica, tanto en el oscilador forzante como en el forzado, aplicada con una frecuencia del doble de la frecuencia natural del oscilador forzado se alcanza la sincronización con una nueva intensidad de acoplamiento mayor que la intensidad de acoplamiento crítico e incluso superior al requerido cuando el oscilador forzante no presenta excitación paramétrica alguna.*

3.1.3.3. Frecuencia de excitación paramétrica al doble de la frecuencia natural de cada oscilador

Cuando la excitación paramétrica aplicada a cada oscilador corresponde al doble de su frecuencia natural el sistema se expresa como:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_a + \varepsilon (x_a^2 - 1) \dot{x}_a + \omega_{a_0}^2 x_a &= -\alpha \omega_{a_0}^2 x_a \cos(2\omega_a t) \\ \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b &= -\alpha \omega_{b_0}^2 x_b \cos(2\omega_b t) + k x_a\end{aligned}$$

Dado que cada oscilador se encuentra excitado paraméricamente al doble de su frecuencia natural, cada uno sufre un incremento máximo de amplitud proporcional a (2.11). En este contexto no se esperaría un cambio notable en la intensidad de acoplamiento necesaria para conseguir la sincronización del sistema, es decir:

$$k_{n_5} = k_c \quad (3.9)$$

Similarmente a los casos anteriores se simuló el sistema para corroborarlo, los parámetros siguen siendo los mismos: $\alpha = 0.1 = \varepsilon$, $\omega_a = 1$, $\omega_b = 1.1$, variándose la intensidad de acoplamiento hasta conseguir la sincronización.

Los resultados obtenidos se condensan a continuación:

$\Omega_a = 2\omega_a = 2; \Omega_b = 2\omega_b = 2.2$						
k_{n_4}	0.12	0.13	0.14	0.15	0.155	0.16
ω_{syn}	$\omega_{syn} \neq \omega_a$	$\omega_{syn} \neq \omega_a$	$\omega_{syn} \neq \omega_a$	$\omega_{syn} \approx \omega_a$	$\omega_{syn} \approx \omega_a$	$\omega_{syn} = \omega_a$

Lo cual puede apreciarse similarmente en la Figura 3.9.

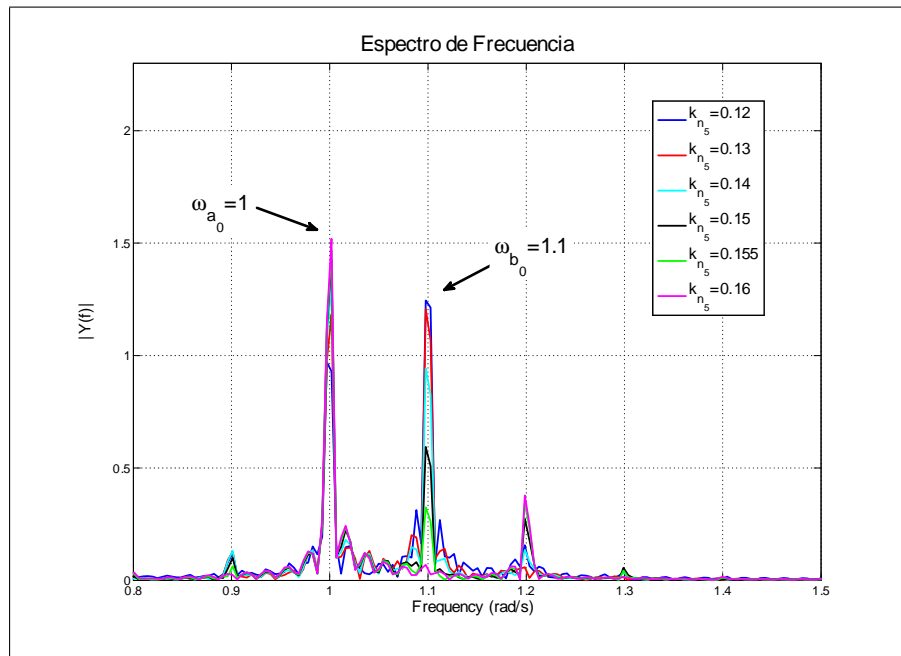


Figura 3.9: Espectro de Frecuencia del oscilador de vdP forzado para diferentes intensidades de acoplamiento, cuando la frecuencia de excitación paramétrica de cada vdP es el doble de su frecuencia natural.

Con la presencia de la excitación paramétrica, tanto en el oscilador forzante como en el forzado, aplicada con una frecuencia del doble de la frecuencia natural del oscilador forzado se alcanza la sincronización con una nueva intensidad de acoplamiento mayor que al intensidad de acoplamiento crítico e incluso superior al requerido cuando el oscilador forzante no presenta excitación paramétrica alguna.

Conclusión 3.3 *La presencia de la excitación paramétrica aplicada simultáneamente a ambos osciladores al doble de su frecuencia natural, respectivamente, se tiene el mismo comportamiento que en ausencia de excitación paramétrica, es decir, $k_{n_s} = k_c = 0.16$, lo cual era de esperarse pues ambos osciladores ganan energía de manera equivalente.*

3.2. Acoplamiento Bidireccional

En la presente sección se analiza el caso de sincronización de dos osciladores de van der Pol cuasi-lineales excitados paramétricamente y acoplados bidireccionalmente entre si, es decir, existe influencia mutua entre los osciladores. La magnitud de dicha influencia se verá condicionada por la intensidad y la simetría del acoplamiento existente entre ellos. Similarmente a la sección anterior, se emplean los resultados analíticos del segundo capítulo aplicado al caso de acoplamiento simétrico de un par de osciladores de van der Pol cuasi-lineales excitados paramétricamente buscando determinar la cota inferior de la intensidad de acoplamiento requerida para conseguir la sincronización en cada uno de los casos.

3.2.1. Ambos excitados paramétricamente y acoplados simétricamente

Considérense dos osciladores de van der Pol cuasi-lineales ($\varepsilon \ll 1$) que difieren entre si exclusivamente en su frecuencia natural. Ambos osciladores son excitados paramétricamente como en (2.2), al doble de su frecuencia natural, y se encuentran acoplados bidireccionalmente como se muestra en la Figura 3.10.

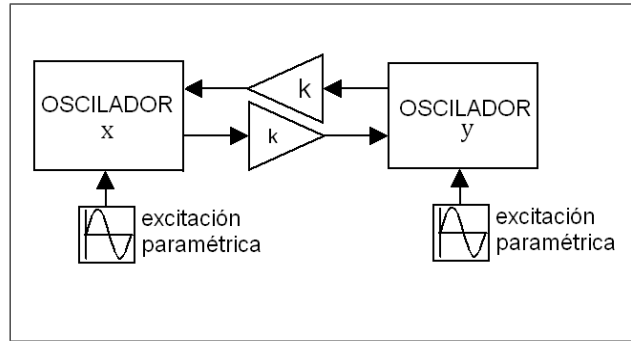


Figura 3.10: Acoplamiento bidireccional de dos vdP's excitados paramétricamente

La expresión matemática de este sistema es:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} + \omega_{x0}^2 x (1 + \alpha \cos \Omega_x t) &= k_x (y - x) \\ \ddot{y} + \varepsilon (y^2 - 1) \dot{y} + \omega_{y0}^2 y (1 + \alpha \cos \Omega_y t) &= k_y (x - y) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se sabe de [16] que en el caso del vdP libre, es decir $k_i = 0, i = \{x, y\}$ y $\alpha = 0$, las soluciones de ambos osciladores tienden a un valor fijo bien conocido: $x(t) \rightarrow 2$ & $y(t) \rightarrow 2$. Por otra parte, se mostró en [24] que al existir un acoplamiento bidireccional y simétrico como el empleado en (3.10) la frecuencia de oscilación que alcanza cada oscilador está dada por la expresión

$$\omega_i = \frac{k_y \omega_{x0} + k_x \omega_{y0}}{k_x + k_y}; i = \{x, y\}$$

y que corresponde a un estado de sincronización en frecuencia.

Recordemos que la excitación paramétrica aplicada al oscilador de vdP libre tiene su mayor efecto cuando la frecuencia de excitación es $\Omega = 2\omega_{i_0}$ $i = \{x, y\}$ y consiste en un incremento de la amplitud de la solución proporcional a $\overline{\chi}_i(\alpha, \omega_i)$, dada por la expresión (2.11), esto es: $x(t) \rightarrow 2\overline{\chi}_x(\alpha, \omega_x)$ & $y(t) \rightarrow 2\overline{\chi}_y(\alpha, \omega_y)$. Estos tres resultados de referencia se condensan en la Figura 3.11a,b,c y orientan hacia la siguiente cuestión, plasmada en la Figura 3.11d: ¿podemos predecir la ganancia de amplitud $\rho_i(\alpha)$, $i = \{x, y\}$ de cada oscilador a partir de $\overline{\chi}_x(\alpha, \omega_x)$ & $\overline{\chi}_y(\alpha, \omega_y)$?

<p>van der Pol: libre y sin excitacion parametrica $k=0$ & $\alpha=0$</p> <p>$x(t) \rightarrow 2$; $\omega_x = \omega_{x_0}$ $y(t) \rightarrow 2$; $\omega_y = \omega_{y_0}$</p> <p>(a)</p>	<p>van der Pol: libre y con excitacion parametrica $k=0$ & $\alpha \neq 0$</p> <p>$x(t) \rightarrow 2\overline{\chi}_x(\alpha, \omega_x)$; $\omega_x = \omega_{x_0}$ $y(t) \rightarrow 2\overline{\chi}_y(\alpha, \omega_y)$; $\omega_y = \omega_{y_0}$</p> <p>(c)</p>
<p>van der Pol: acoplado y sin excitacion parametrica $k \neq 0$ & $\alpha=0$</p> <p>$x(t) \rightarrow 2$; $\omega_x = 0.5(\omega_{x_0} + \omega_{y_0})$ $y(t) \rightarrow 2$; $\omega_y = 0.5(\omega_{x_0} + \omega_{y_0})$</p> <p>(b)</p>	<p>van der Pol: acoplado y con excitacion parametrica $k \neq 0$ & $\alpha \neq 0$</p> <p>$x(t) \rightarrow 2\rho_x(\alpha, \omega_x, \omega_y)$; $\omega_x = 0.5(\omega_{x_0} + \omega_{y_0})$ $y(t) \rightarrow 2\rho_y(\alpha, \omega_x, \omega_y)$; $\omega_y = 0.5(\omega_{x_0} + \omega_{y_0})$</p> <p>(d) ¿ $\rho_x(\alpha, \omega_x, \omega_y)$, $\rho_y(\alpha, \omega_x, \omega_y)$?</p>

Figura 3.11: a)→c) Resultados conocidos para el oscilador de vdP con/sin acoplamiento con otro vdP y con/sin excitación paramétrica aplicada. d) Resultado por obtenerse de un par de vdP's excitados paramétricamente y acoplados entre sí.

Para responder a esta interrogante, se realiza un análisis por promediación del sistema descrito por (3.10).

3.2.2. Análisis por promediación

El método de promediación requiere que el sistema (3.10) sea reexpresado como:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_{x_0}^2 x &= -\varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} - \omega_{x_0}^2 \alpha x \cos \Omega_x t + k_x (y - x) = f_x(x, \dot{x}) \\ \ddot{y} + \omega_{y_0}^2 y &= -\varepsilon (y^2 - 1) \dot{y} - \omega_{y_0}^2 \alpha y \cos \Omega_y t + k_y (x - y) = f_y(y, \dot{y})\end{aligned}$$

Recordando que se trata de un sistema acoplado simétricamente, se considera $k_x = k_y = k$; además se asume que ambos osciladores son excitados paramétricamente a la misma frecuencia, $\Omega_y = \Omega_x = \Omega$, y suponiendo que los osciladores alcanzan la sincronización, i.e. $\omega_x = \omega_y = \omega$, se tiene que $\Omega = 2\omega$.

Definiendo la fase de cada oscilador como $\phi_x \triangleq \omega + \psi(t)$ y $\phi_y \triangleq \omega + \theta(t)$, la solución de cada vdP se propone de la siguiente forma:

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t + \psi(t)) = a \cos \phi_x \quad (3.11)$$

$$y(t) = b(t) \cos(\omega t + \theta(t)) = b \cos \phi_y \quad (3.12)$$

donde las amplitudes $a(t)$, $b(t)$ y las fases $\psi(t)$, $\theta(t)$ cumplen respectivamente con las ecuaciones diferenciales de su sistema auxiliar:

$$\dot{a} = \frac{-1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_x(a \cos \phi_x, -a\omega \sin \phi_x) \sin \phi_x d\phi_x \quad (3.13)$$

$$\dot{\psi} = \frac{-1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f_x(a \cos \phi_x, -a\omega \sin \phi_x) \cos \phi_x d\phi_x \quad (3.14)$$

y

$$\dot{b} = \frac{-1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_y(b \cos \phi_y, -b\omega \sin \phi_y) \sin \phi_y d\phi_y \quad (3.15)$$

$$\dot{\theta} = \frac{-1}{2\pi b\omega} \int_0^{2\pi} f_y(b \cos \phi_y, -b\omega \sin \phi_y) \cos \phi_y d\phi_y \quad (3.16)$$

Al sustituir las soluciones propuestas: (3.11), (3.12) y sus derivadas en las funciones $f(x_x, \dot{x})$ y $f(x_y, \dot{y})$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f_x(a \cos \phi_x, -a\omega \sin \phi_x) &= -\varepsilon a\omega \sin \phi_x + \varepsilon a^3 \omega \sin \phi_x \cos^2 \phi_x + (-\omega_{x_0}^2 \alpha \cos \Omega t - k) a \cos \phi_x + kb \cos \phi_y \\ f_y(b \cos \phi_y, -b\omega \sin \phi_y) &= -\varepsilon b\omega \sin \phi_y + \varepsilon b^3 \omega \sin \phi_y \cos^2 \phi_y + (-\omega_{y_0}^2 \alpha \cos \Omega t - k) b \cos \phi_y + ka \cos \phi_x \end{aligned}$$

y éstas a su vez, sustituidas en los sistemas auxiliares (3.13),(3.14) y (3.15),(3.16), integradas y simplificadas generan el siguiente sistema auxiliar extendido:

$$\dot{a} = \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) + a \frac{\omega_{x_0}^2 \alpha}{4\omega} \sin(2\psi) - \frac{kb}{2\omega} \sin(\psi - \theta) \quad (3.17)$$

$$\dot{\psi} = \frac{k}{2\omega} \left(1 - \frac{b}{a} \cos(\theta - \psi) \right) + \frac{\omega_{x_0}^2 \alpha}{4\omega} \cos(2\psi)$$

$$\dot{b} = \varepsilon \left(\frac{b}{2} - \frac{b^3}{8} \right) + \frac{\omega_{y_0}^2 \alpha b}{4\omega} \sin(2\theta) - \frac{ka}{2\omega} \sin(\theta - \psi)$$

$$\dot{\theta} = \frac{k}{2\omega} \left(1 - \frac{a}{b} \cos(\psi - \theta) \right) + \frac{\omega_{y_0}^2 \alpha}{4\omega} \cos(2\theta)$$

Observación 3.8 Es claro que para $k = 0$ se tienen dos sistemas separados como en (2.16), (2.17), en cuyo caso la ganancia de amplitud está dada por (2.11).

Asumiendo que para $k \gg 1$ existe sincronización completa, i.e. en frecuencia y amplitud, el sistema (3.17) para los parámetros $\alpha = 0.1 = \varepsilon$, $\omega_{x_0} = 1$, $\omega_{y_0} = 1.1$, $\Omega = 2\omega = 2(1.05)$, se comporta como en la Figura 3.12 donde se aprecia $\Delta_a(t) \triangleq a(t) - b(t)$ tiende a cero, i.e. ambas amplitudes tienden al mismo valor; y $\Delta_{ph}(t) \triangleq \psi(t) - \theta(t)$ tiende a cero, i.e. ambas fases tienden al mismo valor.

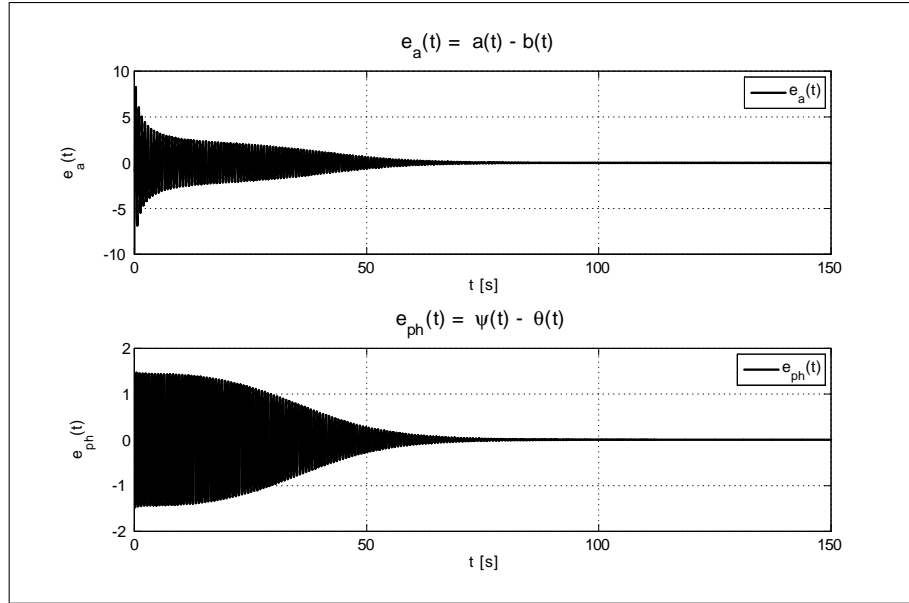


Figura 3.12: Diferencia entre las amplitudes y fases del par de sistemas auxiliares (3.17).

Esto en términos de las soluciones propuestas (3.11) y (3.12) se muestra en la Figura 3.13 donde es claro que estas soluciones se asemejan a las del sistema (3.10).

Observación 3.9 La amplitud de ambos osciladores tiende prácticamente a un mismo valor dado por $a(t) \approx b(t) \geq 2$, es decir, existe una ganancia de amplitud, que comparada con el valor que alcanzaría cada oscilador independientemente permite realizar la siguiente propuesta.

Proposición 3.1 La ganancia de amplitud que experimenta cada vdP al estar acoplado simétricamente a otro vdP, ambos excitados paramétricamente está dada por la expresión:

$$\rho_i(\alpha, \omega_x, \omega_y) = \frac{\overline{\chi_x} + \overline{\chi_y}}{2}; \quad i = \{x, y\} \quad (3.18)$$

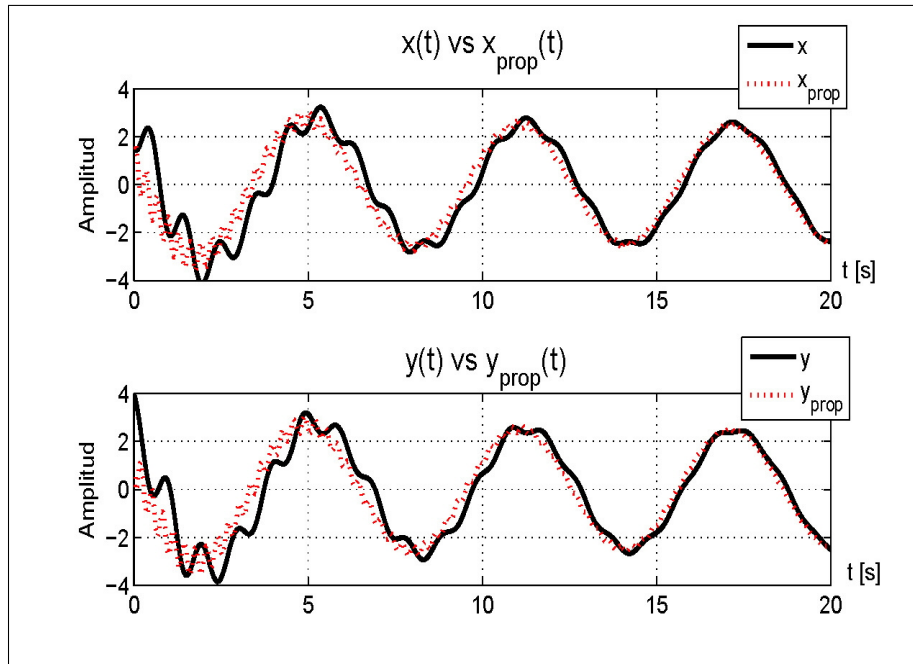


Figura 3.13: Soluciones propuestas (3.11) & (3.12) comparadas con la solución numérica del sistema (3.10)

con $\bar{\chi}_i$ como en (2.11), i.e.

$$\bar{\chi}_i = \sqrt{1 + \frac{\alpha \omega_{i_0}^2}{2\varepsilon \omega_i}}$$

Lo que se traduce en una amplitud de oscilación:

$$a(t) \approx b(t) = 2\rho_i = \bar{\chi}_x + \bar{\chi}_y$$

Conclusión 3.4 El par de osciladores de van der Pol excitados paramétricamente y acoplados entre sí de manera bidireccional y simétrica presentan una ganancia de amplitud efectiva que ya no corresponde a la que experimentan cuando no se encuentran acoplados. La amplitud resultante que alcanzan en estas condiciones es el promedio de las amplitudes finales que cada uno alcanzaría libremente.

3.2.3. Intensidad de acoplamiento

Considérense dos osciladores van der Pol cuasi-lineales excitados paramétricamente de manera simultánea y acoplados bidireccional y simétricamente como en (3.10) se sabe que éstos presentan un incremento en su amplitud de oscilación directamente asociado con la frecuencia de la excitación, las frecuencias naturales y el grado de no linealidad de cada oscilador como se expresa en (3.18).

Sabiendo que la amplitud de oscilación que alcanzan los dos osciladores por la presencia de la excitación paramétrica es mayor que en ausencia de la misma se propone, similarmente a los casos de acoplamiento unidireccional donde la ganancia de amplitud favorecía el forzado del segundo oscilador, una nueva intensidad de acoplamiento, k_{n6} , menor que la intensidad de acoplamiento crítico:

$$k_{n6} < k_c$$

Más aun, conociendo la ganancia de amplitud efectiva que la excitación paramétrica induce en los osciladores acoplados y la intensidad de acoplamiento crítico originalmente necesaria en ausencia de la misma, se propone la siguiente cota inferior para la nueva intensidad de acoplamiento para garantizar la sincronización del par de osciladores:

$$\frac{k_c}{\rho_i(\alpha, \omega_x, \omega_y)} < k_{n6} < k_c$$

donde $\rho_i(\alpha, \omega_x, \omega_y)$ corresponde a la expresión (3.18).

Para confirmar esto, se realizaron una serie de simulaciones del sistema (3.10) considerando los siguientes parámetros: $\alpha = 0.1 = \varepsilon$, $\omega_{x0} = 1$, $\omega_{y0} = 1.1$, $\Omega = 2\omega = 2(1.05)$ y la intensidad de acoplamiento crítico $k_c = 1.078$. Los resultados se resumen en la Figura 3.14.

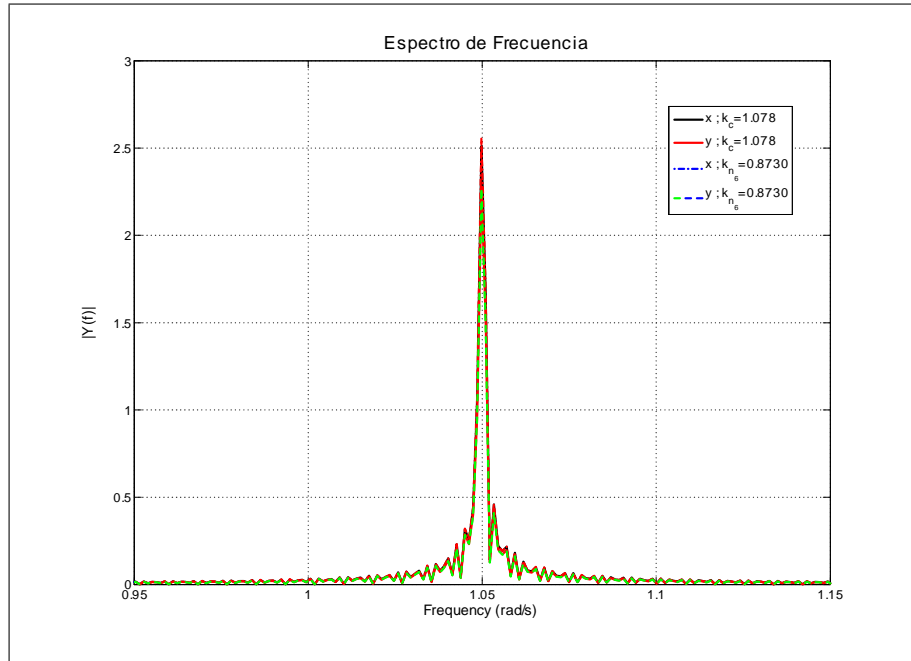


Figura 3.14: Espectro de Frecuencia del par de osciladores de vdP acoplados bidireccional y simétricamente para la intensidad de acoplamiento crítico k_c y la nueva intensidad de acoplamiento k_{n6} .

Observación 3.10 *Para los parámetros del ejemplo, el valor de la cota inferior de la nueva intensidad de acoplamiento es $k_{n_6} = \frac{k_c}{\rho_i(\alpha, \omega_x, \omega_y)} = 0.873$. Se sabe que para la intensidad de acoplamiento crítica consigue que el sistema alcance la sincronización oscilando a la frecuencia central entre ambas frecuencias naturales; este mismo resultado se obtiene con el valor de la cota inferior sugerida.*

Conclusión 3.5 *Con la presencia de la excitación paramétrica aplicada en ambos osciladores de van der Pol cuasi-lineales acoplados bidireccional y simétricamente se alcanza la sincronización de éstos con una nueva intensidad de acoplamiento menor que la intensidad de acoplamiento crítico.*

Conclusión 3.6 *Se obtuvo la cota inferior para la nueva intensidad de acoplamiento en función de la ganancia de amplitud promedio que alcanzan los dos osciladores como consecuencia de la excitación paramétrica.*

3.3. Conclusiones

En el presente capítulo se aplicaron los resultados analíticos obtenidos en el segundo capítulo al caso de dos osciladores de vdP acoplados entre sí, tanto en forma unidireccional como bidireccional.

La primera sección se enfoca en la sincronización más simple, la que se da cuando el acoplamiento es unidireccional. Conociendo la intensidad de acoplamiento crítica (k_c) requerida en ausencia de excitación paramétrica del vdP forzado y el incremento de amplitud en la solución del oscilador de vdP como consecuencia directa de la presencia de la excitación paramétrica, se mostró que la nueva intensidad de acoplamiento (k_{n_1}) necesaria para que el oscilador forzado presente únicamente oscilaciones a la frecuencia del oscilador forzante debe ser mayor que la frecuencia crítica y se propuso una cota inferior que define los valores a partir de los cuales se garantiza la obtención de la sincronización. Similarmente para el caso del vdP forzante excitado paraméricamente se determinó que la nueva intensidad de acoplamiento (k_{n_2}) debe ser menor que la intensidad de acoplamiento crítica y se propuso una cota inferior que define los valores para los cuales se garantiza la sincronización. Por medio de simulaciones de ambas situaciones se corroboró la pertinencia de las cotas propuestas.

Todavía en el contexto del acoplamiento unidireccional, cuando ambos osciladores de vdP se encuentran simultáneamente excitados paraméricamente cada uno al doble de su frecuencia natural se observó que la intensidad de acoplamiento (k_{n_5}) no precisa de ningún ajuste para conseguirse la sincronización; en cambio cuando son excitados paraméricamente al doble de la frecuencia natural del oscilador forzante, la nueva intensidad de acoplamiento (k_{n_3}) es notablemente inferior que cuando solamente el forzante está excitado (k_{n_2}); y cuando son excitados paraméricamente al doble de la frecuencia natural del oscilador forzado la nueva intensidad de acoplamiento (k_{n_4}) es mayor que en el caso en que solamente está excitado el oscilador forzado (k_{n_1}). Estas observaciones pueden condensarse en la siguiente desigualdad:

$$k_{n_3} < k_{n_2} < k_{n_5} = k_c < k_{n_1} < k_{n_4}$$

recordando que cada intensidad de acoplamiento corresponde a:

Intensidad	Condición
k_c	sin excitación paramétrica
k_{n_1}	solo oscilador forzado excitado paraméricamente
k_{n_2}	solo oscilador forzante excitado paraméricamente
k_{n_3}	ambos excitados paraméricamente al doble de la frecuencia del forzante
k_{n_4}	ambos excitados paraméricamente al doble de la frecuencia del forzado
k_{n_5}	ambos excitados paraméricamente al doble de su frecuencia natural

En la segunda sección del capítulo se aborda la sincronización producto del acoplamiento bidireccional simétrico de dos osciladores de van der Pol cuasi-lineales excitados paraméricamente. Inicialmente se determina la variación en la ganancia de amplitud que sufre cada oscilador cuando se encuentran acoplados, comparándola con la que alcanzan en el caso libre. Mediante el método de promediación se obtiene la expresión de la ganancia efectiva de amplitud que experimenta cada oscilador en función de la ganancia que presentaría aisladamente. A partir de dicha expresión se propone una cota inferior para la nueva intensidad de acoplamiento necesaria para que los osciladores alcancen la sincronización. Al igual que en el caso de sincronización con acoplamiento unidireccional, se corroboró la pertinencia de la cota propuesta mediante simulaciones del sistema con y sin excitación paramétrica.

Capítulo 4

Ecuación Generalizada del Oscilador de van der Pol cuasi-lineal excitado Paramétricamente

En el presente capítulo se propone una ecuación generalizada del oscilador de van der Pol cuasi-lineal excitado paramétricamente a una frecuencia del doble de su frecuencia natural. Esta ecuación se construye a partir de los resultados obtenidos en el capítulo 2, buscando que describa el fenómeno observado y que pueda ser de utilidad en análisis de sincronización de osciladores.

4.1. Efecto de la excitación paramétrica

En el Capítulo 2 se mostró que la aplicación de la excitación paramétrica en el término de la frecuencia natural del oscilador de vdP cuasi-lineal como en (2.2) no tiene ningún efecto en la frecuencia de oscilación de la solución, pero si lo tiene en su amplitud.

Considerando los parámetros de la excitación paramétrica aplicada: amplitud, α , y frecuencia, $\Omega = 2\omega_0$, la amplitud de oscilación en estado estable del oscilador de vdP sufre una amplificación dada por (2.11) y reescrita aquí:

$$\bar{\chi}(\alpha) = \sqrt{1 + \frac{\alpha\omega_0^2}{2\varepsilon\omega}} \quad (4.1)$$

4.2. Ecuación Generalizada

Partiendo del conocimiento de la ganancia de amplitud que experimenta el vdP excitado paramétricamente al doble de su frecuencia natural se propone la siguiente ecuación generalizada:

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{x^2}{\eta^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.2)$$

4.2.1. Análisis por promediación

Aplicando el método de promediación a la ecuación generalizada de vdP (4.2), de manera análoga al análisis del Capítulo 2, el sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales correspondiente es:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_{gz} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon a_{gz}(4\eta^2 - a_{gz}^2)}{8\eta^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Cuyos puntos de equilibrio son:

$$\begin{aligned} a_{gz_{eq}} &= \{0, 2\eta, -2\eta\} \\ \psi_{eq} &= \psi_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Y que definen la solución de la ecuación generalizada de vdP como:

$$x(t) = a_{gz_{eq}} \cos(\omega_0 t + \psi_{eq}) = 2\eta \cos(\omega_0 t + \psi_0) \quad (4.5)$$

4.2.2. Vinculo entre ecuaciones

Se sabe que en el caso cuasi-lineal ($\varepsilon \ll 1$), el oscilador de vdP libre alcanza una amplitud en estado estable, $a = 2$ [16]. Por (4.4) la amplitud en estado estable de la ecuación generalizada de vdP es $a_{gz_{eq}} = 2\eta$, es decir, η veces la amplitud del vdP libre:

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow 2 \\ a_{gz} &\longrightarrow 2\eta \\ &\vdots \\ a_{gz} &= \eta a \end{aligned}$$

Recordando que el oscilador de vdP cuasi-lineal excitado paramétricamente a una frecuencia $\Omega = 2\omega_0$ presenta una amplificación dada por la expresión (4.1), esto es, $\bar{\chi}$ veces la amplitud del vdP libre, al igualar estas dos relaciones se tiene que:

$$a_{eq} = 2\bar{\chi} = 2\eta = a_{gz_{eq}}$$

por lo tanto:

$$\eta \equiv \bar{\chi} = \sqrt{1 + \frac{\alpha\omega_0^2}{2\varepsilon\omega}} \quad (4.6)$$

Esto puede apreciarse en la Figura 4.1 al obtener la solución numérica del vdP excitado paramétricamente (2.2) y la ecuación generalizada del vdP (4.2) considerando la η correspondiente.

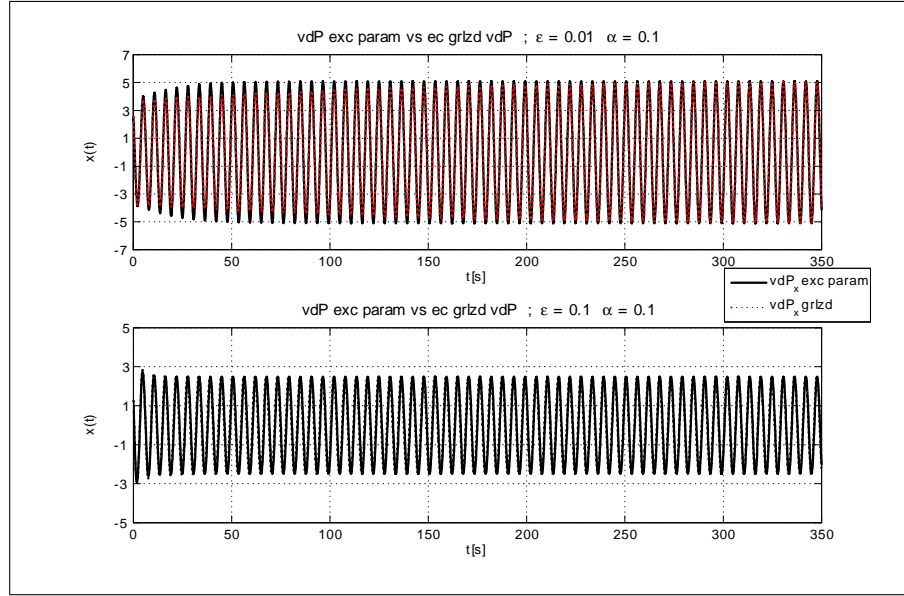


Figura 4.1: Solución numérica del vdP excitado paramétricamente con $\Omega = 2\omega_0$ y la solución numérica de la ecuación generalizada correspondiente. a) para $\varepsilon = 0.01$; b) para $\varepsilon = 0.1$

Observación 4.1 *En la solución numérica de la ecuación generalizada de vdP la duración del transitorio para alcanzar la amplitud en estado estable es mayor que la de la solución numérica del vdP excitado paramétricamente, pero una vez culminado dicho transitorio, ambas soluciones alcanzan el mismo valor: 2η .*

Observación 4.2 *La duración del transitorio depende de la magnitud de ε , cuanto menor sea la no-linealidad, mayor será el tiempo que dure el transitorio.*

Observación 4.3 *Existe un desfase entre la solución numérica de la ecuación generalizada de vdP y la del el vdP excitado paramétricamente, esto es consecuencia de: (4.3), la condición inicial ψ_0 , y la duración del transitorio.*

Conclusión 4.1 *La solución de las ecuaciones (2.2) y (4.2) es similar, por lo que ambas expresiones pueden ser empleadas indistintamente para describir el fenómeno de la excitación paramétrica aplicada al término de la frecuencia de un vdP cuasi-lineal, esto considerando una frecuencia de excitación paramétrica del doble de la frecuencia natural del vdP ($\Omega = 2\omega_0$).*

4.2.3. Modelo en coordenadas polares

Continuando con la metodología empleada en [24] se procede a la obtención de un modelo en coordenadas polares a partir de la ecuación generalizada de vdP (4.2), esto con el objeto de abordar el problema de sincronización mediante un modelo de fase.

Para ello se consideran las siguientes definiciones:

$$x = x_1 = r \cos \theta; \dot{x} = x_2 = r \sin \theta; \theta = \arctan \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \quad (4.7)$$

Derivando y sustituyendo (4.7) en (4.2) y tras simplificar, se obtiene el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon \left(\frac{r}{2} - \frac{r}{2} \cos 2\theta - \frac{r^3}{8\eta^2} + \frac{r^3}{8\eta^2} \cos 4\theta \right) \\ \dot{\theta} &= \varepsilon \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{r^2}{4\eta^2} \sin 2\theta - \frac{r^2}{8\eta^2} \sin 4\theta \right) - \omega_0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por construcción, se sabe que las soluciones del radio y de la fase son de la forma:

$$\begin{aligned} r(t) &= 2\eta + O(\varepsilon) \\ \theta(t) &= -\omega_0 t + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

La solución de la fase decrece indefinidamente a una velocidad de ω_0 , girando en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y el radio oscila alrededor del valor límite $r = 2\eta$ con una amplitud y velocidad de convergencia proporcional a ε . Esto puede apreciarse en el plano de fase de la ecuación (4.8) mostrado en la Figura 4.2 y en la Figura 4.3 para $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.01$, respectivamente, considerando los parámetros: $\alpha = 0.1$ y $\omega = 1.1$ que implican respectivamente $\eta = 1.2450$ y $\eta = 2.5495$.

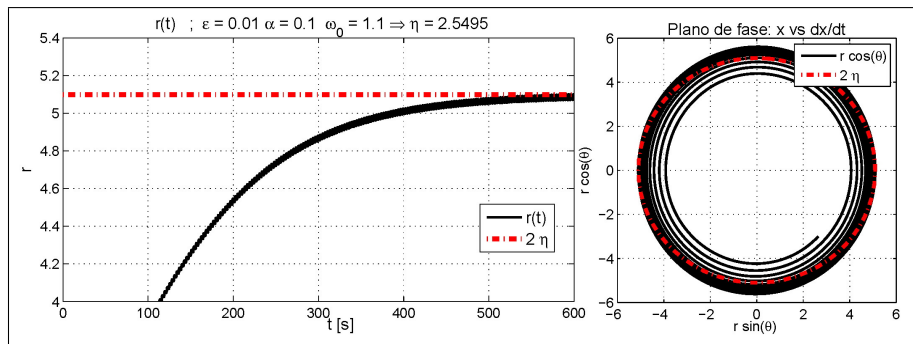


Figura 4.2: Radio $r(t)$; Plano de fase \dot{x} vs x para $\varepsilon = 0.01$

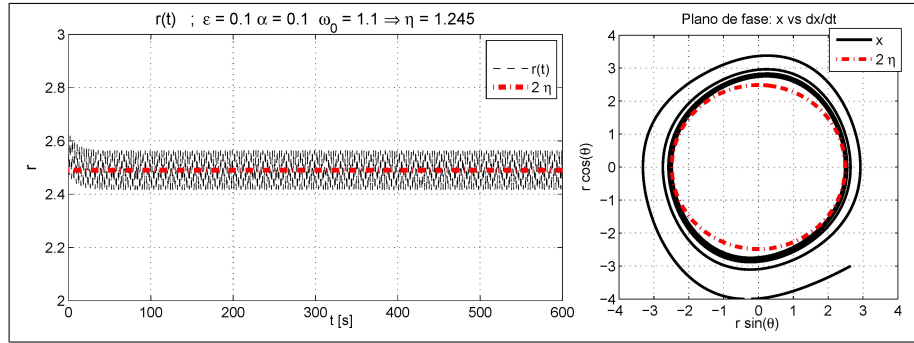


Figura 4.3: Radio $r(t)$; Plano de fase \dot{x} vs x para $\varepsilon = 0.1$

Volviendo a coordenadas rectangulares mediante la sustitución de (4.9) en (4.7) se tiene que la expresión de la solución del vdP generalizado es:

$$x(t) = (2\eta + O(\varepsilon)) \cos(-\omega_0 t + O(\varepsilon^2)) \quad (4.10)$$

En la Figura 4.4 se muestran la solución numérica de la ecuación generalizada de vdP (4.5) y la solución numérica del modelo en coordenadas polares tras su transformación a coordenadas rectangulares (4.10).

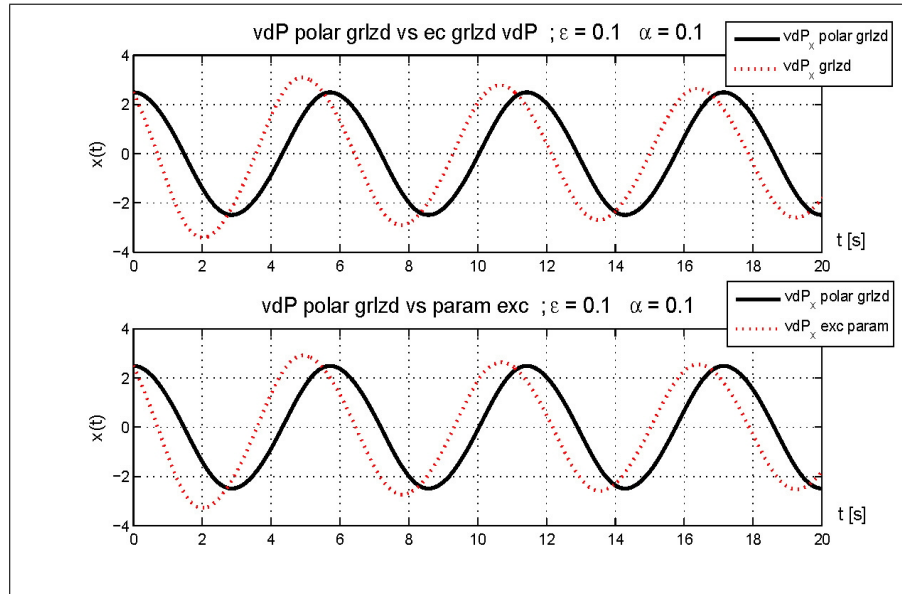


Figura 4.4: Solución numérica de la ecuación generalizada del vdP y del modelo de coordenadas polares reexpresado en coordenadas rectangulares.

Observación 4.4 *El modelo en coordenadas polares alcanza el mismo valor de amplitud en estado estable previsto por el análisis del modelo de vdP excitado paramétricamente y de la ecuación generalizada de vdP.*

Observación 4.5 *Al igual que en el caso de la ecuación generalizada, existe un defasamiento entre la solución del vdP excitado paramétricamente y el modelo en coordenadas polares debido a las condiciones iniciales y la duración del transitorio.*

Conclusión 4.2 *Las soluciones (4.5) y (4.10) son similares, por lo que el modelo (4.8) puede ser empleado para describir un vdP cuasi-lineal excitado paramétricamente al doble de su frecuencia natural.*

4.3. Ejemplos: sincronización

Empleando la ecuación generalizada del oscilador de van der Pol excitado paramétricamente en el contexto de sincronización con acoplamiento unidireccional, los casos abordados en el cuarto capítulo se expresan a continuación en términos de la ecuación generalizada propuesta (4.2) y analizados:

1. vdP forzado y con excitación paramétrica, correspondiente a la ecuación (3.1), se expresa como:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_x^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \varepsilon\left(\frac{y^2}{\eta_y^2} - 1\right)\dot{y} + \omega_y^2 y &= kx \end{aligned}$$

- Dados los parámetros del sistema: $\alpha = 0.1 = \varepsilon, \omega_x = 1, \omega_y = 1.1$; se tiene que la frecuencia de excitación paramétrica aplicada al oscilador y es $\Omega_y = 2\omega_y = 2.2$

La amplificación que sufre la amplitud de la solución está dada por la expresión (4.6), esto es:

$$\eta_y = \sqrt{1 + \frac{\alpha\omega_y^2}{2\varepsilon\omega_y}} = 1.2450 \quad (4.11)$$

- Se tiene entonces que $x \rightarrow 2$ & $y \rightarrow 2\eta_y = 2(1.2450)$ por lo tanto se requiere de un incremento en la intensidad de acoplamiento, k , para lograr que el oscilador y adquiera la frecuencia de oscilación del oscilador x .
- La cota inferior para garantizar la sincronización está dada por (3.3) que corresponde a $\bar{\chi}(\alpha)k_c = \eta k_c = 1.2450k_c$ y que al ser aplicada en el sistema genera un espectro de frecuencia idéntico al mostrado en la Figura 3.3 (tercer curva).

2. vdP forzante y con excitación paramétrica, correspondiente a la ecuación (3.4):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{x^2}{\eta_x^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega_x^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \varepsilon (y^2 - 1) \dot{y} + \omega_y^2 y &= kx\end{aligned}$$

- Dados los parámetros del sistema: $\alpha = 0.1 = \varepsilon, \omega_x = 1, \omega_y = 1.1$; se tiene que la frecuencia de excitación paramétrica aplicada al oscilador x es $\Omega_x = 2\omega_x = 2$
- La amplificación que sufre la amplitud de la solución está dada por la expresión (4.6), esto es:

$$\eta_x = \sqrt{1 + \frac{\alpha\omega_x^2}{2\varepsilon\omega_x}} = 1.2247 \quad (4.12)$$

- Se tiene entonces que $x \rightarrow 2\eta_x = 2(1.2247)$ & $y \rightarrow 2$, por lo tanto se puede reducir la intensidad de acoplamiento, k , para lograr que el oscilador y adquiriera la frecuencia de oscilación del oscilador x . La nueva intensidad de acoplamiento para garantizar la sincronización se encuentra en el intervalo (3.5) cuya cota inferior corresponde a $\frac{k_c}{\bar{\chi}(\alpha)} = \frac{k_c}{\eta} = \frac{k_c}{1.2247}$ y que al ser aplicada en el sistema genera un espectro de frecuencia idéntico al mostrado en la Figura 3.5 (tercer curva).

3. vdP forzado y forzante con excitación paramétrica, correspondiente a la ecuación (3.6):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{x^2}{\eta_x^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega_{x_0}^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \varepsilon \left(\frac{y^2}{\eta_y^2} - 1 \right) \dot{y} + \omega_{y_0}^2 y &= kx\end{aligned}$$

- Dados los parámetros del sistema: $\alpha = 0.1 = \varepsilon, \omega_x = 1, \omega_y = 1.1$; se tiene que las frecuencias de excitación paramétrica aplicadas a cada uno de los osciladores son $\Omega_x = 2\omega_x = 2$ & $\Omega_y = 2\omega_y = 2.2$.
- La ganancia que experimenta la amplitud de la solución de cada oscilador está dada por (4.11) & (4.12) respectivamente.
- Se tiene entonces que $x \rightarrow 2\eta_x = 2(1.2247)$ & $y \rightarrow 2\eta_y = 2(1.2450)$, que es prácticamente la misma amplitud en ambos osciladores por lo tanto, la nueva intensidad de acoplamiento que garantiza la sincronización, k , corresponde a la intensidad de acoplamiento crítico: $k = k_c$ y que al ser aplicada en el sistema genera un espectro de frecuencia idéntico al mostrado en la Figura 3.9 (última curva).

Observación 4.6 *Se corroboró la equivalencia entre la ecuación generalizada propuesta y la ecuación tradicional de vdP, con su correspondiente término de excitación paramétrica, en el contexto de la sincronización con acoplamiento unidireccional.*

4.4. Conclusiones

En el presente capítulo se propuso una ecuación generalizada para el oscilador de van der Pol excitado paramétricamente cuando la frecuencia de la señal de excitación corresponde al doble de la frecuencia natural del oscilador. Mediante el análisis de promediación se corroboró la equivalencia entre la ecuación generalizada propuesta y los resultados analíticos obtenidos en el Capítulo 2, es decir, se replica la ganancia máxima de amplitud de oscilación para una frecuencia de excitación del doble de la frecuencia natural; la amplitud de oscilación es proporcional a la amplitud de la excitación paramétrica; y se preserva la frecuencia natural del oscilador.

Adicionalmente se construyó un modelo en coordenadas polares que puede ser empleado en el análisis de la sincronización de osciladores de modo semejante a los análisis que tradicionalmente emplean modelos de fase.

Empleando la ecuación generalizada propuesta en el caso de sincronización con acoplamiento unidireccional, se obtuvieron los mismos resultados que en el caso de la ecuación bien conocida del vdP con la excitación paramétrica explícitamente presente en el término de la frecuencia natural.

Capítulo 5

Resultados Experimentales

En este capítulo se presentan los trabajos experimentales desarrollados para complementar los resultados teóricos del capítulo 3 y corroborarlos de manera cualitativa. Para ello se emplean dos osciladores no lineales de tipo Duffing, realizados por medio de circuitos electrónicos analógicos, que son probados inicialmente en estado libre sin excitación paramétrica, posteriormente en estado libre pero en presencia de la excitación paramétrica y finalmente acoplados entre sí, ya sea alternativa o simultáneamente excitados paraméricamente.

5.1. Osciladores no lineales excitados paraméricamente

Sean dos osciladores no lineales de tipo Duffing cuya expresión matemática es la siguiente [36].

$$\ddot{x}_i + x_i + \varepsilon \alpha x_i^3 = 0 ; i = 1, 2 \quad (5.1)$$

y que electrónicamente se realizan, cada uno, como se muestra en el circuito¹ de la Figura 5.1.

La incorporación de la excitación paramétrica de pequeña amplitud en el término de la frecuencia natural de cada oscilador se realiza introduciendo una capacitancia aditiva de amplitud $C_x \ll 1$, cuya variación periódica se genera mediante la señal $u_x(t, T_x)$ que abre y cierra el interruptor de C_x y que se define como:

$$u_x(t, T) = \begin{cases} 1 & ; 0 < t < t_1 \\ 0 & ; t_1 < t < t_2 = T_x \end{cases}$$

Para cada oscilador no lineal se obtuvo su respuesta ante la excitación paramétrica, tanto en amplitud como en frecuencia.

¹U_i amplificador operacional de propósito general $\mu A741$; interruptores análogos AD7511; Π multiplicador analógico AD633; u_x temporizador dual de precisión NE556.

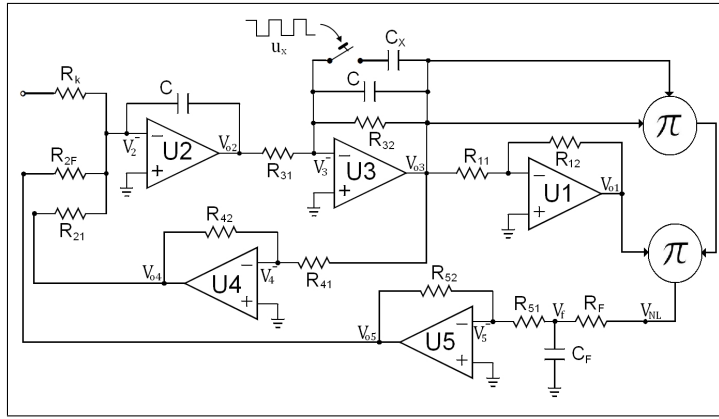


Figura 5.1: $R_{11} = 10Kk\Omega$, $R_{12} = R_F = 1Kk\Omega$, $R_{21} = 62.89Kk\Omega$, $R_{31} = 270Kk\Omega$, $R_{32} = 1Mk\Omega$, $R_{41} = R_{42} = 4.7Kk\Omega$, $R_{51} = R_{52} = 18Kk\Omega$, $R_{2F} = 15Kk\Omega$, $R_K = 0$; $C = C_F = 10nF$.

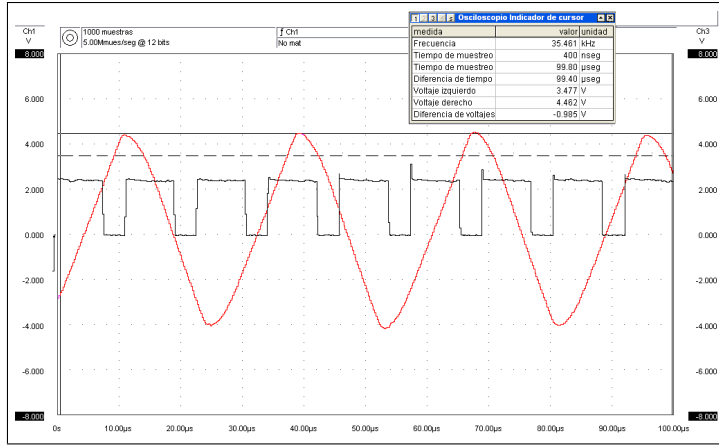


Figura 5.2: $x_1(t)$ con ganancia de amplitud $\Delta x_1 = 0.985V$ y nueva frecuencia $f_{1_x} = 35.461KHz$ por presencia de la excitación paramétrica de amplitud $C_x = 0.125nF$ y frecuencia $f_x = 86.580KHz$.

Definición 5.1 Sea f_x la frecuencia de la excitación paramétrica; y f_{i_0} la frecuencia natural del i –ésimo oscilador.

Definición 5.2 Sea x_{i_0} la amplitud máxima del i –ésimo oscilador no lineal libre, y x_{i_x} la amplitud máxima del i –ésimo oscilador no lineal excitado paramétricamente.

Definición 5.3 Sea $\Delta x_i \triangleq |x_{i_0} - x_{i_x}|$ la ganancia de amplitud del i –ésimo oscilador.

Las características del oscilador 1 libre son $f_{1_0} = 44.248KHz$ y $x_{1_0} = 3.477V$. Tras la aplicación de la excitación paramétrica de frecuencia $f_x = 86.580KHz$ y amplitud $C_x = 0.125nF$, la frecuencia y amplitud cambian a $f_{1_x} = 35.461KHz$ y $x_{1_x} = 4.462V$ por lo que $\Delta x_1 = 0.985V$; éstas se muestran en las Figura 5.2.

Como esperado, existe una ganancia de amplitud provocada por la presencia de la excitación paramétrica. Adicionalmente se observa una reducción de la frecuencia de oscilación, esto como consecuencia de la modificación de la amplitud de oscilación aunada a la naturaleza *suave*² del oscilador.

Observación 5.1 *La frecuencia de excitación paramétrica y la frecuencia natural guardan una relación $\frac{f_x}{f_{10}} = 1.9566 \neq 2$ por lo que la ganancia de amplitud no es máxima; esto corresponde con lo determinado para el oscilador de vdP excitado paramétricamente en (2.23).*

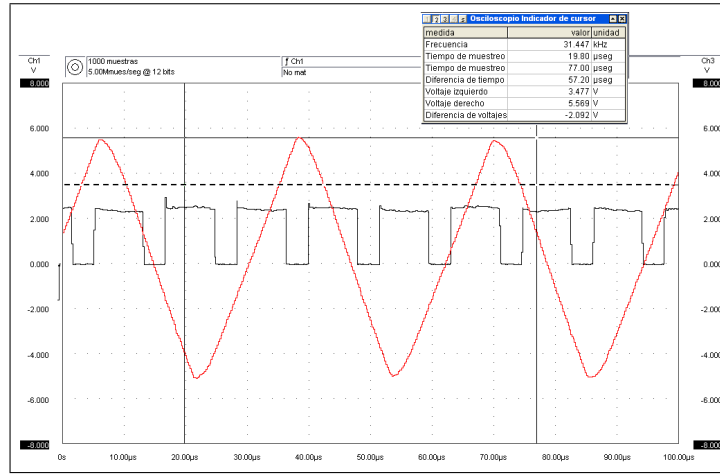


Figura 5.3: $x_2(t)$ con ganancia de amplitud $\Delta x_2 = 2.092V$ y nueva frecuencia $f_{2_x} = 31.447KHz$ por presencia de la excitación paramétrica de amplitud $C_x = 0.125nF$ y frecuencia $f_x = 86.580KHz$.

Las características del oscilador 2 libre son $f_{2_0} = 43.868KHz$ y $x_{2_0} = 3.477V$. Tras la aplicación de la excitación paramétrica de frecuencia $f_x = 86.580KHz$ y amplitud $C_x = 0.125nF$, la amplitud y frecuencia cambian a $f_{2_x} = 31.447KHz$ y $x_{2_x} = 5.569V$ por lo que $\Delta x_2 = 2.092$; éstas se muestran en las Figura 5.3.

Observación 5.2 *En este caso la frecuencia de excitación paramétrica y la frecuencia natural guardan una relación $\frac{f_x}{f_{2_0}} = 1.9736 \neq 2$ por lo que la ganancia de amplitud existe, aunque no es máxima.*

Observación 5.3 *Dado que la relación que guarda la frecuencia de excitación paramétrica con cada una de las frecuencias naturales es distinta, $\frac{f_x}{f_{2_0}} > \frac{f_x}{f_{1_0}} \approx 2$, entonces la magnitud de la ganancia también es ligeramente diferente, $\Delta x_2 > \Delta x_1$ y por consiguiente $f_{2_x} < f_{1_x}$.*

²La frecuencia de los osciladores no lineales se caracteriza por ser dependiente de la amplitud. En el caso de los osciladores dichos *suave*, i.e., $\alpha < 0$ en (5.1), la frecuencia disminuye conforme incrementa la amplitud. [16] [18]

Incrementando la amplitud de la excitación paramétrica aplicada a cada oscilador a través del aumento en la magnitud de la capacitancia aditiva, $C_x = 0.25\text{nF}$, se obtiene para el oscilador 1 una ganancia de amplitud $\Delta x_1 = 2.424\text{V}$ con una nueva frecuencia $f_{1_x} = 30.120\text{KHz}$; y para el oscilador 2 la ganancia de amplitud es $\Delta x_2 = 2.333\text{V}$ con nueva frecuencia $f_{2_x} = 30.303\text{KHz}$.

Observación 5.4 *La ganancia de amplitud del oscilador excitado paramétricamente depende de la amplitud de la excitación paramétrica, esto corresponde con lo mostrado para el oscilador de vdP excitado paramétricamente en el Teorema 2.2*

Conclusión 5.1 *La amplitud del oscilador no lineal de tipo Duffing suave excitado paramétricamente al doble de su frecuencia natural (o suficientemente cerca) se comporta cualitativamente similar a lo analíticamente demostrado para el oscilador de vdP excitado paramétricamente, esto es, existe una ganancia de amplitud que depende de la amplitud de la excitación paramétrica.*

Conclusión 5.2 *La frecuencia del oscilador no lineal de tipo Duffing suave excitado paramétricamente al doble de su frecuencia natural (o suficientemente cerca) varía con relación a su amplitud, a diferencia del vdP excitado paramétricamente que a pesar del incremento en amplitud no sufre alteración en su frecuencia de oscilación.*

5.2. Osciladores No lineales Acoplados Unidireccionalmente

5.2.1. Sin excitación paramétrica

Sean dos osciladores no lineales de tipo Duffing como en (5.1), realizado cada uno electrónicamente como se muestra en la Figura 5.1 donde la variación en los valores comerciales de los elementos utilizados para el circuito de cada oscilador trae como consecuencia una ligera diferencia entre las dos frecuencias naturales, siendo éstas: $f_{1_0} = 44.248\text{KHz}$ y $f_{2_0} = 43.860\text{KHz}$.

Trazando estos dos osciladores, sin excitación paramétrica y sin acoplamiento entre si, i.e. $u(t, T_x) = 0$ y $k = 0$, en el plano de fase (x_1, x_2) se obtiene la Figura 5.4

Los osciladores son acoplados entre si en las configuraciones que se muestran en la Figura 5.5, y cuya expresión matemática corresponde a:

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad & \ddot{x}_1 + x_1 + \varepsilon\alpha x_1^3 = 0 \\ & \ddot{x}_2 + x_2 + \varepsilon\alpha x_2^3 = kx_1 \\ \text{b) } \quad & \ddot{x}_1 + x_1 + \varepsilon\alpha x_1^3 = kx_2 \\ & \ddot{x}_2 + x_2 + \varepsilon\alpha x_2^3 = 0 \end{aligned}$$

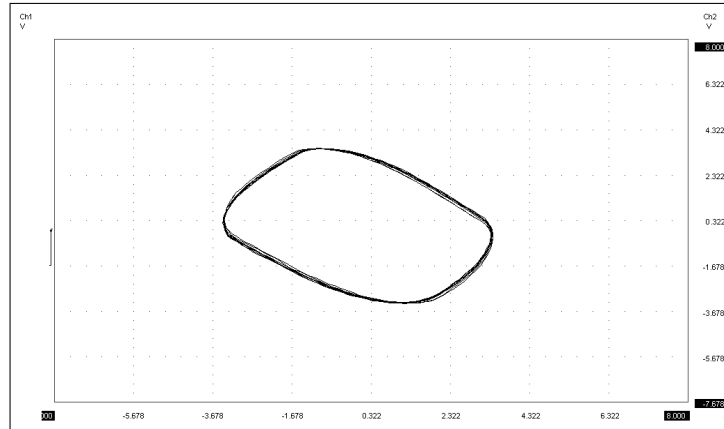


Figura 5.4: Plano de fase (x_1, x_2) en ausencia de acoplamiento y sin excitación paramétrica.

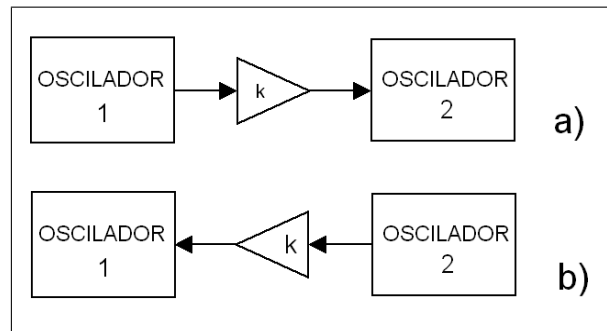


Figura 5.5: a) oscilador 1 forzando al oscilador 2. b) oscilador 1 forzado por el oscilador 2.

Buscando alcanzar la *sincronización* se varía la intensidad de acoplamiento k entre el oscilador forzante y el oscilador forzado. Electrónicamente la intensidad de acoplamiento está determinada por el inverso del valor de la resistencia R_k que conecta al oscilador 1 con el oscilador 2.

$$k = \frac{1}{R_k}$$

De acuerdo a la configuración serán las terminales que se conecten a través de R_k para conseguir el acoplamiento de ambos osciladores, como se aprecia en el circuito extendido de la Figura 5.6.

CASO a) oscilador 1 forzando al oscilador 2

En esta configuración, la resistencia R_k se conecta entre la terminal V_{03} del oscilador 1 y la terminal V_2^- del oscilador 2 y es variada hasta conseguir la sincronización con un valor de $R_k = 1M\Omega$, ($k = 1 \times 10^{-6}$). La frecuencia de sincronización es $f_1 = f_2 = 43.478\text{KHz}$; ambos osciladores alcanzan amplitudes similares, aunque existe un defasamiento de 180° que corresponde a una sincronización en anti-fase [24].

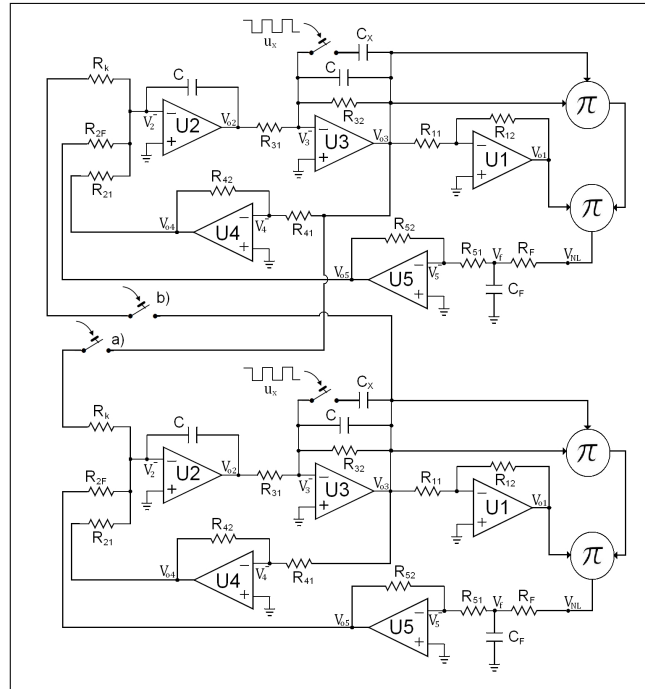


Figura 5.6: Cerrando el interruptor **a)** el oscilador 1 fuerza al oscilador 2. Cerrando el interruptor **b)** el oscilador 1 es forzado por el oscilador 2. En ausencia de excitación paramétrica $u_x = 0$.

CASO b) oscilador 1 forzado por el oscilador 2

En este caso, la configuración del acoplamiento requiere que la resistencia R_k se conecte entre la terminal V_{03} del oscilador 2 y la terminal V_2^- del oscilador 1.

La resistencia para la cual se consigue al sincronización es $R_k = 1\text{M}\Omega$, ($k = 1 \times 10^{-6}$). La frecuencia de sincronización es $f_1 = f_2 = 44.248\text{KHz}$ como se muestra en la Figura 5.7, donde además puede apreciarse la existencia de un defasamiento de 180° , presentándose, por lo tanto, una sincronización en anti-fase similar al caso anterior.

Trazado en el plano de fase (x_1, x_2) se obtiene la Figura 5.8 que corresponde a la Figura de Lissajous para una sincronización 1 : 1 con defasamiento de π -radianes entre ambos.

5.2.2. Con excitación paramétrica

Sean los mismos dos osciladores no lineales de tipo Duffing de la sección anterior, éstos son acoplados entre si en las configuraciones mostradas en las Figuras 5.9:

Similarmente a las pruebas realizadas en la sección anterior, se varía la intensidad de acoplamiento k mediante la modificación del valor de la resistencia R_k hasta conseguir la *sincronización*. Los resultados obtenidos se describen a continuación:

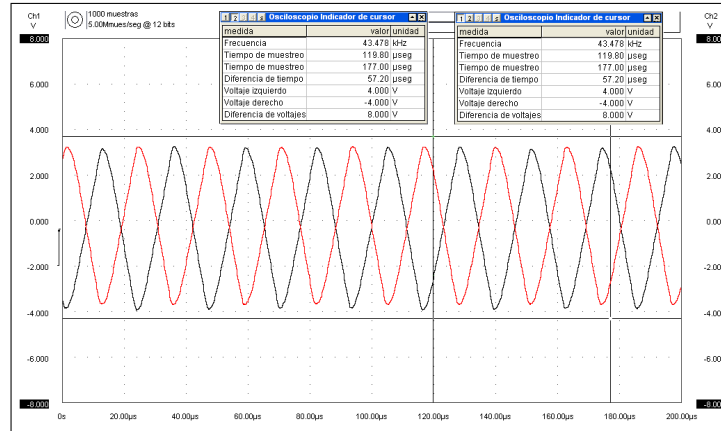


Figura 5.7: $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 1\text{M}\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 44.248\text{KHz}$.

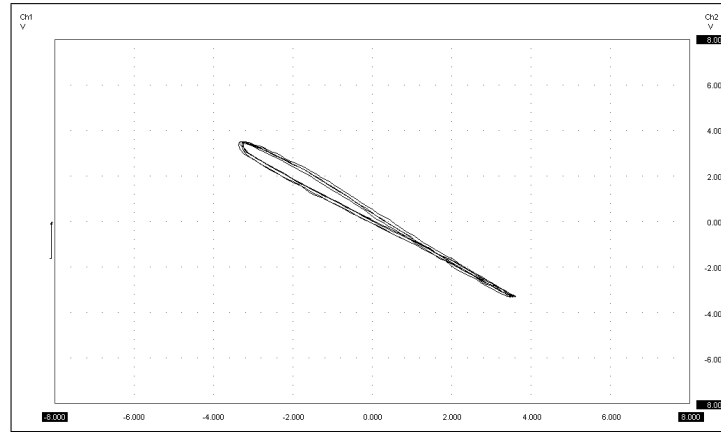


Figura 5.8: Plano de fase (x_1, x_2) para $R_k = 1\text{M}\Omega$ en ausencia de excitación paramétrica.

CASO a) oscilador 1 forzando al oscilador 2 excitado paramétricamente

La excitación paramétrica empleada en este caso es de amplitud $C_x = 0.125\text{nF}$ y frecuencia $f_x = 86.580\text{KHz}$, i.e. $f_x \approx 2f_{2_0}$.

Del análisis realizado en el tercer capítulo se sabe que la intensidad de acoplamiento para esta configuración debe ser mayor que la intensidad de acoplamiento en ausencia de excitación paramétrica, i.e. $k_n > k$ como en (3.3); se probaron $R_k \in [1\text{M}\Omega, 560\text{K}\Omega, 100\text{K}\Omega, 56\text{K}\Omega, 39\text{K}\Omega, 10\text{K}\Omega]$ cumplan con la cota superior $R_k < 1\text{M}\Omega$.

La sincronización se consigue con $R_k = 10\text{k}\Omega$, ($k_a = 100 \times 10^{-6} > k$) y la frecuencia de sincronización alcanzada es $f_1 = f_2 = 43.478\text{KHz}$, como se muestra en la Figura 5.10, con un desfase de 180° como se aprecia en la Figura 5.11.a y que corresponde a una sincronización en anti-fase.

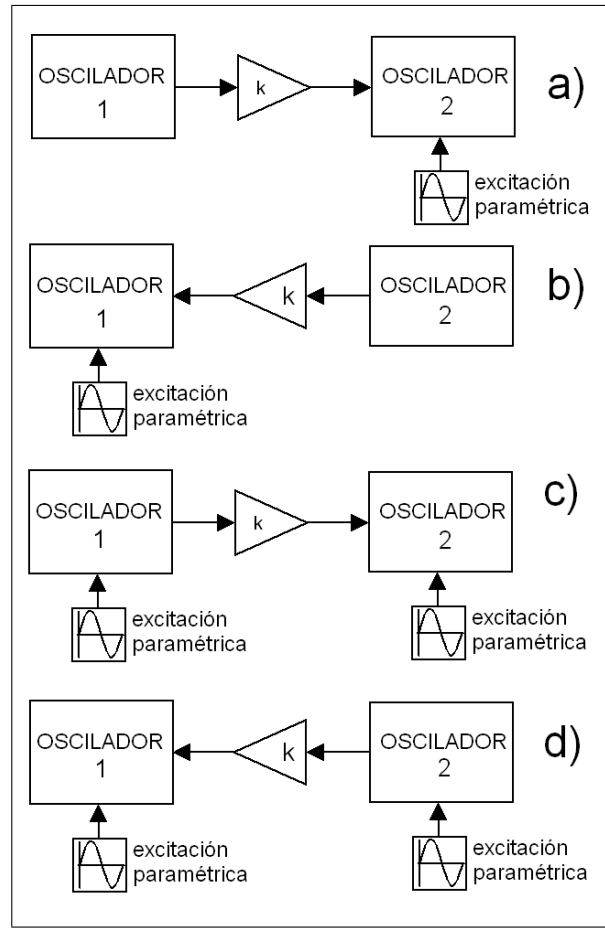


Figura 5.9: Configuraciones de acoplamiento entre osciladores no lineales excitados paraméricamente: a) oscilador 1 forzando al oscilador 2. b) oscilador 1 forzado por el oscilador 2. c) oscilador 1 forzando al oscilador 2. d) oscilador 1 forzado por el oscilador 2.

CASO b) oscilador 1 forzado por el oscilador 2 excitado paraméricamente

La excitación paramétrica empleada en este caso es de amplitud $C_x = 0.25\text{nF}$ y frecuencia $f_x = 86.580\text{KHz}$, i.e. $f_x \approx 2f_{2_0}$, que genera una nueva frecuencia $f_{2_x} = 30.303\text{KHz}$.

Nuevamente, del análisis realizado en el tercer capítulo se sabe que la intensidad de acoplamiento para esta configuración debe ser menor que la intensidad de acoplamiento en ausencia de excitación paramétrica, i.e. $k_b < k$ como en (3.5), y que corresponde a $k_b < \frac{1}{R_k} = \frac{1}{10 \times 10^3}$, de ahí que los valores probados de $R_k \in [100\text{K}\Omega, 56\text{K}\Omega, 39\text{K}\Omega, 10\text{K}\Omega]$ cumplan con la cota inferior $R_k > 10\text{K}\Omega$.

La sincronización se consigue para $R_k = 39\text{K}\Omega$, ($k_b = 25.64 \times 10^{-6} < k_a$), alcanzándose una frecuencia de sincronización de $f_1 = f_2 = 31.348\text{KHz}$ como se muestra en la Figura 5.12, con un desfase de 180° como se aprecia en la Figura 5.11.b y que muestra una sincronización en anti-fase.

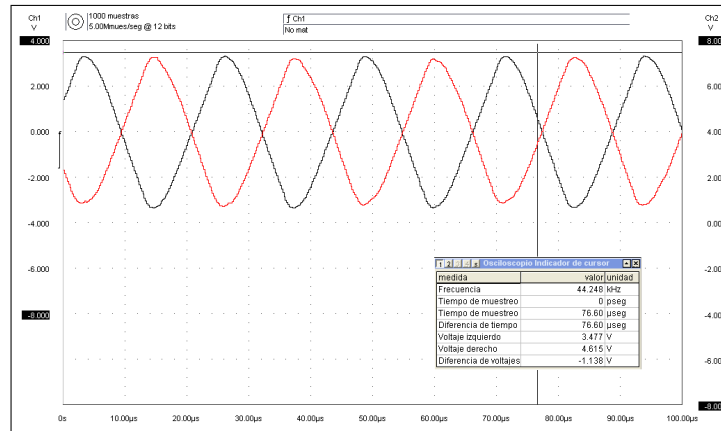


Figura 5.10: $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 10k\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 43.478\text{KHz}$.

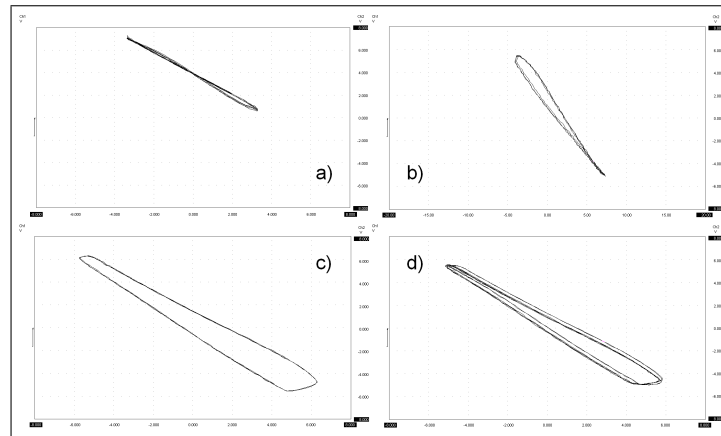


Figura 5.11: Plano de fase (x_1, x_2) para los cuatro casos con excitación paramétrica.

CASO c) oscilador 1 excitado paraméricamente forzando al oscilador 2 excitado paraméricamente

La excitación paramétrica en este caso es de amplitud $C_x = 0.25\text{nF}$ y $f_x = 86.580\text{KHz}$, i.e. $f_x \approx 2f_{i_0}$, por lo que también existe un cambio en la frecuencia, $f_{1_x} = 30.120\text{KHz}$.

Similarmente a los casos anteriores, del análisis realizado del tercer capítulo se sabe que la intensidad de acoplamiento para esta configuración debe ser igual que la intensidad de acoplamiento en ausencia de excitación paramétrica, i.e. $k_c = k > k_b$ como en (3.9) corroborándose que con $R_k = 1\text{M}\Omega$ ($k_c = 1 \times 10^{-6} = k$) se logra la sincronización.

La frecuencia de sincronización alcanzada es $f_1 = f_2 = 30.796\text{KHz}$ como se muestra en la Figura 5.13, con un defasamiento de 180° como se aprecia en la Figura 5.11.c y que muestra una sincronización en anti-fase.

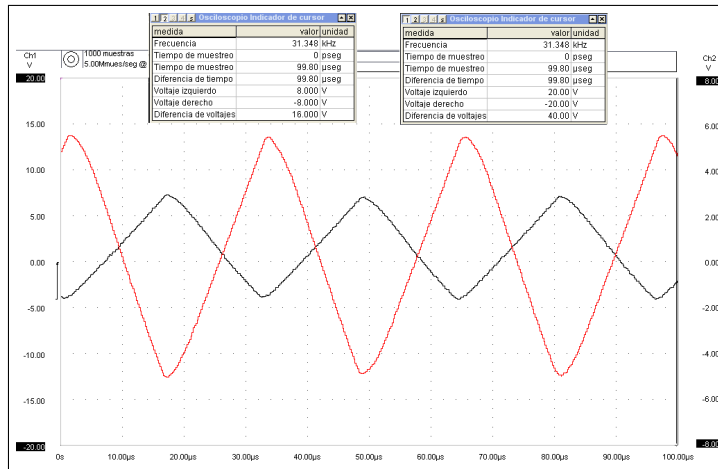


Figura 5.12: $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 39K\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 31.348KHz$.

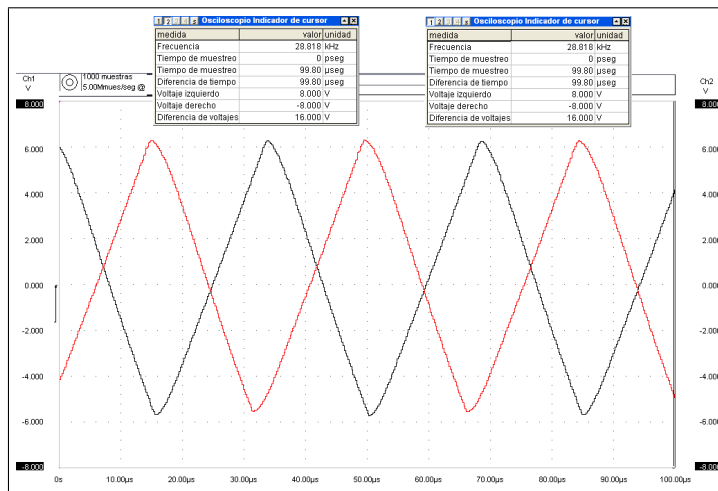


Figura 5.13: $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 1M\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 30.796KHz$.

CASO d) oscilador 1 excitado paramétricamente forzado por el oscilador 2 excitado paramétricamente

La excitación paramétrica empleada en este caso es de amplitud $C_x = 0.25nF$ y frecuencia $f_x = 86.580KHz$, i.e. $f_x \approx 2f_{i_0}$.

Del mismo modo que los casos anterior, el análisis realizado en el tercer capítulo permite saber que la intensidad de acoplamiento para esta configuración debe ser la misma que en ausencia de excitación paramétrica, i.e. $k_n = k$ como en (3.9).

La sincronización se logra con $R_k = 1M\Omega$ ($k_d = 1 \times 10^{-6} = k$) alcanzándose una frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 31.250KHz$ como se muestra en la Figura 5.14, nuevamente con un defasamiento de 180° como se aprecia en la Figura 5.11.d correspondiente a una sincronización en anti-fase.

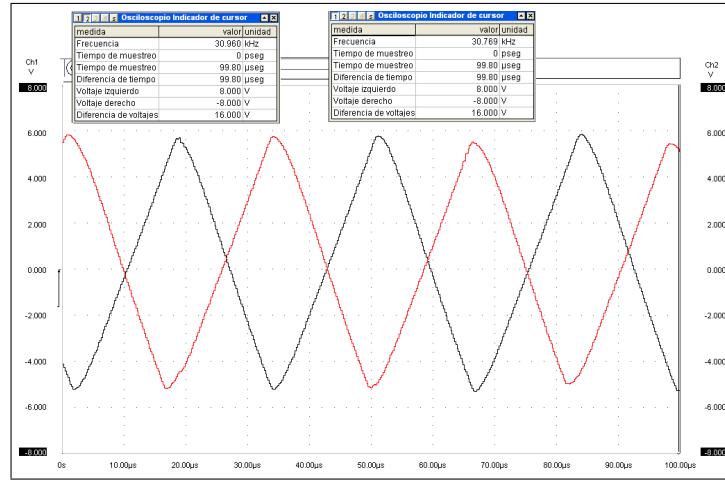


Figura 5.14: $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 1M\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 31.250KHz$.

Conclusión 5.3 La presencia de la excitación paramétrica favorece al oscilador sometido a ella pues provoca un incremento de su amplitud.

En el caso del oscilador forzado excitado paramétricamente por uno no excitado, la intensidad de acoplamiento incrementa buscando compensar la ganancia de amplitud del oscilador forzado.

En el caso del oscilador forzante excitado paramétricamente forzando a uno no excitado, la intensidad de acoplamiento decrementa pues la ganancia de amplitud así lo permite.

En el caso de ambos osciladores excitados paramétricamente la ganancia de amplitud es prácticamente igual para ambos por lo que la intensidad de acoplamiento no requiere modificación.

5.3. Osciladores No lineales Acoplados Bidireccionalmente

5.3.1. Con excitación paramétrica

Sean los mismos dos osciladores no lineales de tipo Duffing como en (5.1) de la sección anterior, realizado cada uno electrónicamente con el circuito de la Figura 5.1, con frecuencias naturales: $f_{10} = 44.248KHz$ y $f_{20} = 43.860KHz$.

Ambos osciladores son excitados paramétricamente y acoplados entre sí bidireccional y simétricamente como se muestra en la Figura 5.15 y cuya realización electrónica corresponde al circuito de la Figura 5.16.

Esto se expresa matemáticamente como:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + \varepsilon\alpha x_1^3 &= k(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 + x_2 + \varepsilon\alpha x_2^3 &= k(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

La excitación paramétrica aplicada a ambos osciladores es de amplitud $C_x = 0.25nF$ y frecuencia $f_x = 86.580KHz$, i.e. $f_x \approx 2f_{i0}$. Con una intensidad de acoplamiento $k = 1 \times 10^{-6}$ ($R_k = 1M\Omega$) se

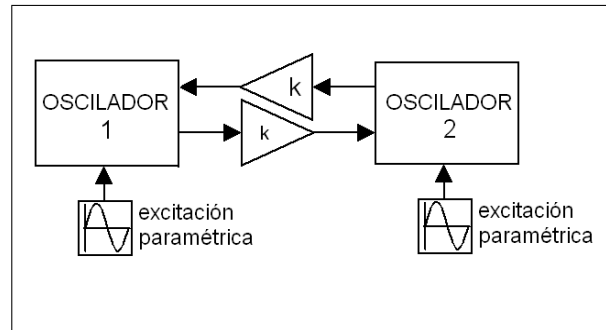


Figura 5.15: Osciladores no lineales excitados paraméricamente y acoplados bidireccionalmente

tiene sincronización en anti-fase como se muestra en la Figura 5.17 a una frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 26.490\text{KHz}$.

Conclusión 5.4 *Los dos osciladores no lineales excitados paraméricamente acoplados bidireccional y simétricamente entre si alcanzan la sincronización en anti-fase.*

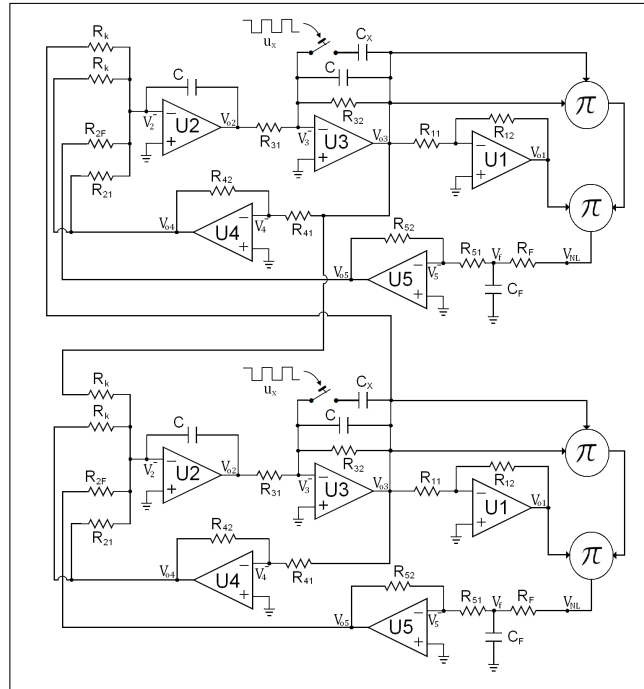


Figura 5.16: Circuito de dos osciladores de tipo Duffing excitados paraméricamente y acoplados bidireccionalmente como en (5.2).

5.4. Conclusiones

En el presente capítulo se presentaron los resultados de los trabajos experimentales realizados como complemento a los análisis teóricos de los capítulos 2 y 3, confirmandose cualitativamente el efecto de la excitación paramétrica en un oscilador no lineal y su aplicación en la sincronización de dos osciladores de naturaleza similar.

Se comprobó que la aplicación de una excitación paramétrica en el parámetro que define la frecuencia natural del oscilador excitado provoca una ganancia de amplitud. Dicha ganancia es mayor cuanto más cerca se encuentre el valor de la frecuencia de excitación del doble de la frecuencia natural del oscilador forzado.

Al acoplar dos osciladores no lineales en busca de su sincronización se comprobó que la presencia de la excitación paramétrica facilita al oscilador sometido a la misma a conseguir su propósito, ya sea forzar al otro oscilador u oponerse a ser forzado, lo cual se refleja en una modificación del valor de la intensidad de acoplamiento entre ambos osciladores. Esto se observó en diferentes experimentos con uno u ambos osciladores excitados paraméricamente forzado o forzando por/a el otro oscilador, corroborándose cualitativamente los ajustes de la intensidad de acoplamiento previstos en los análisis teóricos.

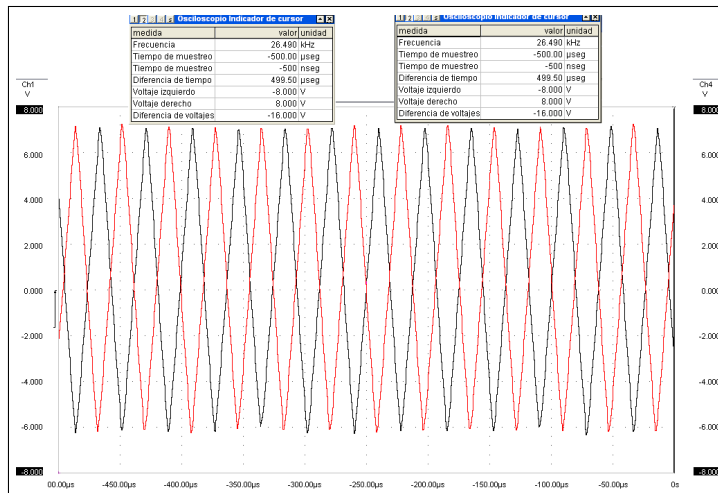


Figura 5.17: $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $R_k = 1M\Omega$; frecuencia de sincronización $f_1 = f_2 = 26.490KHz$.

Capítulo 6

Conclusiones Generales y Trabajo Futuro

En la presente investigación se abordó el problema de sincronización de un par de osciladores de van der Pol cuasi-lineales a los que se les incorporó un término de excitación paramétrica de pequeña amplitud actuando sobre el parámetro que define la frecuencia natural del oscilador, esto con la intención de determinar si la presencia de la señal externa facilita o no la obtención de la sincronización.

Primero se obtuvo que la excitación paramétrica no tiene efecto en la frecuencia pero incorpora un factor de amplificación en la amplitud de oscilación del van der Pol. Una vez determinado esto se abordó el caso de dos osciladores acoplados unidireccionalmente, analizándose cinco situaciones: cuando únicamente el oscilador forzado está excitado paraméricamente, cuando únicamente lo está el forzante, y cuando ambos son excitados paraméricamente; buscando determinar el nuevo valor de la intensidad de acoplamiento que garantiza la sincronización de los osciladores.

Mediante simulaciones y el análisis del contenido espectral de las mismas se mostró que el oscilador forzante requiere de una intensidad de acoplamiento superior al valor crítico si el oscilador forzado es excitado paraméricamente y se definió la cota inferior para la nueva intensidad de acoplamiento que garantiza la sincronización. Similarmente, se mostró que la intensidad de acoplamiento puede reducirse cuando el oscilador forzante es excitado paraméricamente y se determinaron las cotas inferior y superior para la nueva intensidad de acoplamiento. Finalmente, cuando ambos osciladores son excitados paraméricamente surgen tres casos definidos por la frecuencia de la excitación: al doble de la frecuencia natural del oscilador forzante, al doble de la frecuencia natural del oscilador forzado o para cada uno al doble de su frecuencia natural. En el último caso, la intensidad de acoplamiento no precisa de ningún ajuste; excitando al doble de la frecuencia del forzante se requiere una nueva intensidad de acoplamiento mucho menor que cuando solo el oscilador forzante es excitado; y cuando se excita al doble de la frecuencia del forzado hace falta un incremento de la intensidad de acoplamiento mayor al requerido cuando solo se excita al oscilador forzado.

En el contexto de sincronización con acoplamiento bidireccional se mostró que la presencia del segundo oscilador perturba ligeramente la ganancia de amplitud que presenta cada oscilador excitado paraméricamente. Mediante un análisis por promediación se vislumbró la tendencia del incremento de amplitud permitiendo proponer una expresión para la ganancia de amplitud que experimentan ambos osciladores en estado estable. A partir de dicha expresión se propuso la nueva intensidad de acoplamiento que permite alcanzar la sincronización.

Experimentalmente se reprodujeron las condiciones de las simulaciones considerando un par de osciladores de tipo Duffing, corroborándose cualitativamente los fenómenos descritos para el vdP.

Como extensión del análisis del oscilador de van der Pol libre excitado paraméricamente se propuso una ecuación generalizada del mismo que refleja la ganancia de amplitud consecuencia de la excitación aplicada a una frecuencia del doble de la frecuencia natural del van der Pol. Adicionalmente se realizó la transformación a coordenadas polares con la intención de poder emplearse en el análisis de sincronización de osciladores semejante al realizado con los modelos de fase. Empleando la ecuación generalizada en el caso de sincronización con acoplamiento unidireccional, se corroboró su validez replicándose los casos descritos en el tercer capítulo, obteniéndose resultados idénticos para todos los casos.

El tema de sincronización de osciladores es muy rico y vasto, para dar continuidad directa a los análisis realizados y los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo, sería interesante explorar algunos de los siguientes puntos:

- Par de vdP's excitados paraméricamente y acoplados bidireccional y asimétricamente.
- vdP excitado paraméricamente acoplado bidireccional y simétricamente a uno no excitado.
- vdP excitado paraméricamente acoplado bidireccional y asimétricamente a uno no excitado.

Adicionalmente, se pueden abordar temas vinculados muy cercanamente al fenómeno de sincronización de osciladores de van der Pol tratado en esta investigación, algunos son:

- Sincronización de una población de vdP's cuasi-lineales excitados paraméricamente y acoplados aleatoriamente.
- Sincronización de una población de vdP's cuasi-lineales excitados paraméricamente de modo aleatorio y acoplados aleatoriamente.
- Sincronización de una población de vdP's cuasi-lineales excitados paraméricamente de modo aleatorio y acoplados determinísticamente en grupos pequeños pero de manera aleatoria entre grupos.

Y en un contexto fuertemente no lineal, es decir, para el oscilador de van der Pol de relajación (cuando $\varepsilon \gg 1$) pueden investigarse todos los temas propuestos para el caso cuasi-lineal.

Bibliografía

- [1] E.V. Appleton. The automatic synchronization of triode oscillator. *Math and Phys. Sci.*, (21):231–248, 1922.
- [2] A. Balanov and et.al. *Synchronization: from simple to complex*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [3] I.I. Blekhman. *Synchronization in Science and Technology*. ASME Press, NewYork, 1988.
- [4] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Ed. Limusa Wiley, México, 4th edition, 2004.
- [5] J. Buck. Synchronous rhythmic flashing of fireflies ii. *The Quarterly Review of Biology*, 63(3):265–289, september 1988.
- [6] E Butikov. Parametric resonance. *Computing in Science and Engineering*, 1(3):76–83, may 1999.
- [7] R.M. Costa and et.al. Rapid alterations in corticostriatal ensemble coordination during acute dopamine-dependent motor dysfunction. *Neuron*, 52:359–369, october 2006.
- [8] V. Damgov. *Nonlinear and parametric phenomena: theory and applications in radiophysical and mechanical systems*. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. Vol. 49, 2004.
- [9] F. Dressler and O.B. Akan. A survey on bio-inspired networking. *Computer Networks*, 54:881–900, 2010.
- [10] J.F. Duffy and Ch.A. Czeisler. Effect of light on human circadian physiology. *Sleep Med Clin*, 4(2):165–177, june 2009.
- [11] B. Ermentrout. An adaptative model for synchrony in the firefly pteroptyx malaccae. *Journal of Mathematical Biology*, 29:571–585, 1991.
- [12] E.R. Johnston Jr F. Beer and J.T. DeWolf. *Mechanics of Material*. McGraw Hill, USA, 4th edition, 2006.
- [13] A. V. Gaponov-Grekhov and M.I. Rabinovich. L.i. mandel’shtam and the modern theory of nonlinear oscillations and waves. *Soviet Physics Uspekhi*, 22(8):590–614, August 1979.

- [14] S.R.F.S.M. Gois and M.A. Savi. An analysis of heart rythm dynamics using a three-coupled oscillator model. *Chaos, Solitons and Fractals*, (41):2553–2565, 2009.
- [15] J. Haag. *Oscillatory Motions. Vol I and II*. Wadsworth Publishing Company Inc., Belmonto, California, 1962.
- [16] P Hagedorn. *Non-Linear Oscillations*. Oxford Science Publications, Great Britain, 2 edition, 1988.
- [17] P. Hanggi and P. Riseborough. Dynamics of nonlinear dissipative oscillators. *Am. J. Phys.*, 4(51):347–352, April 1983.
- [18] P.J. Holmes and D.A. Rand. The bifurcations of duffing’s equation: An application of catastrophe theory. *Journal of Sound and Vibration*, 44(2):237–253, 1976.
- [19] E. M. Izhikevich. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, (to be published in 2006).
- [20] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Ed. Upper Saddle River:Prentice-Hall, USA, 3rd edition, 2002.
- [21] R.E. Kronauer and et.al. Mathematical model of the human circadian system with two interacting oscillators. *Am. J. Physiol*, 242(1):R3–R17, january 1982.
- [22] N Kryloff and N Bogoliuboff. *Introduction to Non-linear Mechanics*. Princeton University Press, Princepton, 1947.
- [23] M. McGuinness and Y.Hong. Arnold tongues in human cardiorespiratory systems. *Chaos*, 14(1), march 2004.
- [24] O. Mimila-Prost. Sincronizacion de osciladores. Tesis de maestria, CINVESTAV-IPN, Mexico, Septiembre 2006.
- [25] O. Mimila-Prost and J. Collado. Phase model for the relaxed van der pol oscillator and its application to synchronization analysis. In *Proceedings of the UKACC International Conference on Control 2008*, september 2008.
- [26] O. Mimila-Prost and J. Collado. Effect of parametric excitation on the quasi-linear van der pol oscillator. In *Proceedings of the UKACC International Conference on Control 2010*, september 2010.
- [27] O. Mimila-Prost and J. Collado. Quasi-linear, parametrically excited van der pol oscillator: free and forced. In *Proceedings of the 7th International Conference on electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, september 2010.
- [28] N. Minorsky. On parametric excitation. *Journal of the Franklin Institute*, 240:25–46, 1945.

- [29] N. Minorsky. *Introduction to Non-linear Mechanics*. J.W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1947.
- [30] N. Minorsky. Theoretical aspects of non linear oscillations. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 7(4):368–381, december 1960.
- [31] R. Mirollo and S. Strogatz. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 50(6):1645–1662, december 1990.
- [32] J.A. Murdock. *Perturbations. Theory and Methods*. John Wiley and Sons, USA, 1991.
- [33] A. H. Nayfeh. *Perturbation Methods*. John Wiley and Sons, USA, 1973.
- [34] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons, USA, 1979.
- [35] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [36] R.H. Rand. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*. Cornell University, available at <http://audiophile.tam.cornell.edu/randdocs/nlvibe52.pdf>, Ithaca, NY, 53rd edition, 2012.
- [37] M. Rosenblum and A. Pikovsky. Synchronization: from pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators. *Contemporary Physics*, 44(5), September-October 2003.
- [38] J.A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. SpringerVerlag, USA, 1985.
- [39] C. Shafer and et.al. Synchronization in the human cardiorespiratory system. *Physical Review E*, 60(1):857–870, july 1999.
- [40] S. Strogatz. *SYNC: The emerging science of spontaneous order*. Hyperion, New York, 2003.
- [41] B. van der Pol. On relaxation oscillations. *I. Phil. Mag.*, (2):978–992, 1926.
- [42] B. van der Pol. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance (reception with reactive triode). *Philosophical Magazines*, 3:64–80, 1927.
- [43] B. van der Pol and E.V. Appleton. On the form of free triode vibrations. *Philosophical Magazines Series 6*, 42:231–248, 1921.
- [44] B. van der Pol and E.V. Appleton. On a type of oscillation-hysteresis in a simple triode generator. *Philosophical Magazines Series 6*, 43(253):177–193, 1922.
- [45] B. van der Pol and J. van der Mark. The heartbeat considered as a relaxation oscillator, and an electrical model of the heart. *Philosophical Magazine Series 7*, 6(38):763–775, 1928.
- [46] F Veerman and F Verhulst. Quasiperiodic phenomena in the van der pol-mathieu equation. *Journal of Sound and Vibration*, 326:314–320, 2009.

- [47] F. Verhulst. *Methods and Applications of Singular Perturbations*. Springer, USA, 2005.
- [48] V A Yakubovich and V M Starzhinskii. *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients Vol I and II*. John Wiley and Sons, 1975.
- [49] J.J. Zebrowski and et. al. Nonlinear oscillator model reproducing various phenomena in the dynamics of the conduction system of the heart. *CHAOS*, 17:015121–1 to 015121–11, march 2007.
- [50] J. Zhang and et.al. A dynamical method to extract communities induced by low or middle-degree nodes. In *2001 IEEE International Conference on Systems Biology (ISB)*, pages 340–344, september 2011.

Apéndice A

Publicaciones

A.1. Artículos en Congreso

1. J. Collado O. Mimila. Phase model for the relaxed van der pol oscillator and its application to synchronization analysis. In *Proceedings of the UKACC International Conference on Control 2008*, september 2008. [25]
2. O. Mimila, J. Collado . Effect of parametric excitation on the quasi-linear van der pol oscillator. In *Proceedings of the UKACC International Conference on Control 2010*, september 2010. [26]
3. O. Mimila, J. Collado. Quasi-linear, parametrically excited van der pol oscillator: Free and forced. In *Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE), 2010 7th International Conference on*, september 2010. [27]

A.2. Artículos en Revista

1. O. Mimila, J. Collado. *Analysis of the quasi- Linear, parametrically excited van der Pol oscillator*. Submitted to Applied Mathematics and Computation. October 2, 2012
2. O. Mimila, J. Collado. *Generalized equation of the parametrically excited van der Pol oscillator*. To be submitted November, 2012

Phase Model for the relaxed van der Pol oscillator and its application to synchronization analysis [★]

Mimila-Prost O. [✉] Collado J. [✉]

[✉] Automatic Control Department, CINVESTAV-IPN, A.P. 14-740 Mexico, D.F.
(e-mail: [omimila; jcollado]@ctrl.cinvestav.mx)

nonlinear systems, oscillators, synchronization

Abstract: A one dimensional phase model for the classic two dimensional van der Pol oscillator is developed. This model is restricted to the relaxed case, and its construction is based on the slow and fast transitions the phase goes through during its cycle. An application of the phase model is included in which synchronization of two coupled van der Pol oscillators is analyzed and even used to calculate the coupling strength needed for their synchronization.

1. INTRODUCTION

Synchronization has caught the attention of scientists for a long time, evidence of this is the first observation and description of this phenomenon contributed by Dutch researcher Christiaan Huygens in 1665. After him many other scientists such as Appleton, van der Pol and Peskin made experiments in living and non living systems as well as theoretical studies regarding the synchronization phenomenon (Blekhman [1988], Pikovsky et al. [2001], Strogatz and Stewart [1993]).

In (Winfree [1990]) the phase models of oscillators were introduced to study the synchronization phenomena. Phase models consist in describing the dynamics of the phase of the oscillator with an ordinary differential equation and assuming that the magnitude of oscillation keeps constant. Disadvantages of usual phase models resides in the fact that there is no relationship between the original two dimensional oscillator, van der Pol or pendulum-like, and the associated phase model. This paper fulfills this gap constructing a piecewise linear phase model associated to a relaxed type van der Pol oscillator.

Regarding synchronization, the advantages of 1-dimensional models is that if we can show that the phase difference is bounded by a small number, the synchronization is proved. There resides the relevance of the developed model to predict synchronization of two coupled van der Pol oscillators.

The organization of this paper is: Section II gives some preliminaries on phase models and synchronization, in Section III we describe the van der Pol oscillator and a convenient change of variable is done, in Section IV the phase model for the van der Pol oscillator is constructed, in this section we also compare the constructed phase model with the complete two dimensional model. In Section V we use the phase model proposed to observe the synchronization of two coupled van der Pol oscillators, analysis is done on the phase model to obtain the strength coupling for attaining synchronization in the complete model. Finally in Section V the conclusions are stated.

2. PRELIMINARIES

2.1 Phase Models

The state of a system consists of everything you need to know about it in order to know what it will do next in response to a stimulus. The state is determined by a collection of state variables, which can be many for each system, but for specific interest some of them are more important than the rest (Winfree [1990]).

In the case of oscillators, one can exploit a separation of timescales: on a fast one the oscillator relaxes to its limit cycle and on a slow one the phase evolves (Strogatz [2000]), therefore when choosing the important state variable as Winfree suggests, the oscillator can be characterized solely by its phase.

Considering a general two-dimensional autonomous system of ordinary differential equations:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \quad (1)$$

with a stable periodic solution $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(t + T_0)$, the plot of this solution in the phase plane as an isolated closed attractive trajectory known as limit cycle. A point in the phase plane moving along the cycle represents the self-sustained oscillations.

Introducing the phase ϕ as a coordinate along the limit cycle, the system can be described by:

$$\dot{\phi} = f_1(t) \quad (2)$$

where the natural frequency of the self-sustained oscillations is in average $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, but can also show some time dependency (Pikovsky et al. [2001]).

Then a phase model of system (1) is the equation (2), where the standing out state variable is the phase.

2.2 Synchronization

There is not yet a unified definition of synchronization, we consider the following one which combines those in (Izhike-

[★] Mimila-Prost is sponsored through a scholarship by CONACYT.

vich [2006],Pikovsky et al. [2001],Rosenblum and Pikovsky [2003]).

Definition 1. Synchronization is the adjustment in the frequency of two or more coupled oscillators due to the existence of an interaction between them; this adjustment pronounces in a collective behavior that is not intrinsic to any individual oscillator. Synchronization is essentially a nonlinear effect that happens solely in the self-sustained systems (Mimila [2006]).

The coupling existing between oscillators can be either unidirectional or bidirectional, in the latter case it can be symmetric if the coupling strength is the same for both oscillators, or asymmetric if the coupling strength is different for each oscillator. The unidirectional coupling corresponds to a forced oscillator which does not influence the forcing oscillator and therefore a system of this kind does not fulfill the conditions for synchronization (Izhikevich [2006]).

Once a pair of oscillators are coupled and attain a common behavior they are said to be frequency locked if they share the oscillating frequency, and they are phase locked if there remains a constant phase difference between them (Izhikevich [2006]).

Synchronization can be of different types: in phase if they do not have any phase difference; in anti-phase if they have a phase difference of half a period, and out of phase if they have a phase difference other than half a period (Izhikevich [2006]).

Determining the synchronization of two coupled oscillators can not always be easy in the time domain, in this case the stroboscopic observation can be helpful. This method consists in observing the phase plane of the oscillators not continuously but for times $t_k = kT, k = 1, 2, 3, \dots$ and T the oscillation period of one of the observed oscillators. We say there is synchronization when the oscillators are successively plotted in the same point, indicating that they both have reached the sampling period, therefore they share the frequency (Pikovsky et al. [2001],Strogatz [2003]).

Stroboscopic observation is equivalent to the Poincaré map for the case in which the oscillators are isochronous, i.e., their frequency is independent of the amplitude.

3. VAN DER POL OSCILLATOR

The well known equation of the Van der Pol oscillator is (van der Pol [1926]):

$$\ddot{x} + \varepsilon\omega \dot{x}^2 + 1 - x^2 = 0 \quad (3)$$

The main interest for this paper is the relaxation case, i.e. $\varepsilon \ll 1$, and for such case the trajectory of the solution of this equation in the phase plane (x, \dot{x}) becomes quite large even for a small frequency value ω . The decision to change to Lienard's coordinates is made given that in this coordinates the trajectory in the phase plane doesn't increase largely as ε increases.

The change to Lienard's coordinates is $y = \dot{x} + \varepsilon\omega \frac{x^3}{3}$ (Khalil [2002]). Once the change of variable is done, the following van der Pol model is obtained:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - \varepsilon\omega \frac{x^3}{3} \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 x \\ x(0) &= x_0; y(0) = y_0 \\ y(0) &= \dot{x}_0 + \varepsilon\omega \frac{x_0^3}{3} \end{aligned} \quad (4)$$

Remark 1. For $\varepsilon \ll 1$ the phase of the model (3) is essentially 0 or π with very fast transition between these two values. For the model (4) the change has several well identified fast regions and some other slow regions. See figures 1,2 and 3.

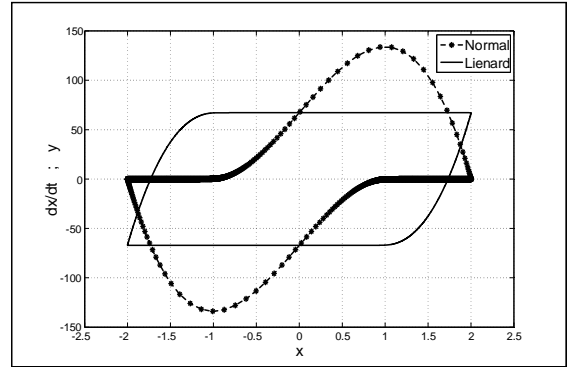


Fig. 1. Phase Plane of the relaxation van der Pol Oscillator in normal (dotted line) and Lienard's (solid line) coordinates.

In order to keep track of the dynamics of the phase, a change to polar coordinates is made considering the following definitions:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{y^2 + \omega^2 x^2}, & x &= \frac{r}{\omega} \cos \theta \\ \theta &= \arctan \frac{y}{\omega x}, & y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad ; \text{ i.e.}$$

After making this change of variables the Lienard's coordinates model (4) is expressed into the following polar coordinates model:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\omega + \frac{1}{2}\varepsilon\omega \sin 2\theta + \frac{\varepsilon r^2}{24\omega} (\sin 4\theta + 2 \sin 2\theta) \\ \frac{dr}{dt} &= \varepsilon\omega r \cos^2 \theta - \frac{\varepsilon r^3}{3\omega} \cos^4 \theta \\ r(0) &= r_0 = \sqrt{y_0^2 + \omega^2 x_0^2} \\ \theta(0) &= \theta_0 = \arctan \frac{y_0}{\omega x_0} \end{aligned} \quad (5)$$

Remark 2. If $\varepsilon = 0$, we get $\theta = \omega t$ and $r = 0$, the well known harmonic oscillator.

4. PHASE MODEL CONSTRUCTION

Model (5) was simulated for several values of ε in the interval $(0, 150]$, the obtained data is plotted in Fig. 2 where they are shown for a normalized period $T = 1$.

4.1 Motivation

From the plots in Fig. 2 it can be seen that for small values of ε the dynamics of the phase is almost linear, and as ε increases the

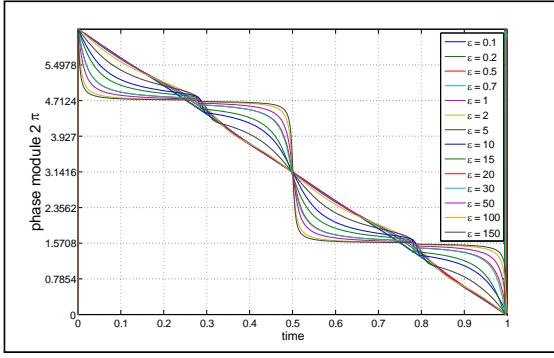


Fig. 2. Phase for several ε 's; normalized period.

linearity is lost and nine different regions can be distinguished, these regions can be approximated by linear ones. Because of this, the motivation arises to construct a piecewise linear dynamics model of the phase.

In Fig. 3 we show the phase dynamics of the van der Pol oscillator for $\varepsilon = 20$ and the nine different linear regions that can be associated to it.

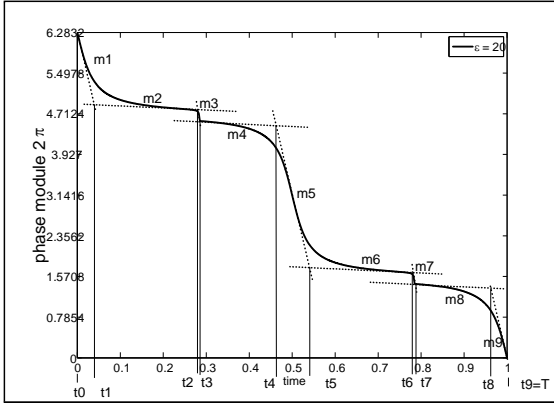


Fig. 3. Phase for $\varepsilon = 20$ and the associated linear regions.

Regardless the value of ε the following is observed:

$$m_1 = m_5 = m_9 \quad (6)$$

$$m_3 = m_7 > m_1$$

$$m_2 = m_6 \quad (7)$$

$$m_4 = m_8 \quad (8)$$

Equations (6)-(8) are also evident from the phase plane graph in Fig. 1 where the trajectory of the van der Pol oscillator shows a clear symmetry.

This means that the dynamics of the phase is the succession of five slopes (m_1 | m_5) during half period and again (m_1 | m_5), given (6)-(8), during the second half of the period. This apparently defines ten regions, but the last slope (m_5) of the first part coincides with the first slope of the second part, and therefore only nine regions are defined.

This fact means that in order to construct the dynamics of the phase it is enough to determine the four main slopes:

m_3, m_4, m_5 and m_6 . To do so the following time instants are considered:

$$t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5 ; t_6 = t_2 + \frac{T}{2} \quad (9)$$

being each t_i the point where the extrapolated subsequent main slopes cross. These t_i 's are the normalized instants in which the transition from slope m_{i-1} to slope m_i takes place, as shown in the following definitions; (see Fig. 3):

$$m_3 , \frac{\theta(t_2) | \theta(t_3)}{t_2 | t_3} ; m_4 , \frac{\theta(t_3) | \theta(t_4)}{t_3 | t_4} \quad (10)$$

$$m_5 , \frac{\theta(t_4) | \theta(t_5)}{t_4 | t_5} ; m_6 , \frac{\theta(t_5) | \theta(t_6)}{t_5 | t_6}$$

Given (6), (7) and (8) the dynamics of the phase can be constructed as a piecewise linear T-periodic function as:

$$\theta_{ph} = \begin{cases} m_1 ; & 0 = t_0 < t \cdot t_1 \\ m_2 ; & t_1 < t \cdot t_2 \\ m_3 ; & t_2 < t \cdot t_3 \\ m_4 ; & t_3 < t \cdot t_4 \\ m_5 ; & t_4 < t \cdot t_5 \\ m_6 ; & t_5 < t \cdot t_6 \\ m_7 ; & t_6 < t \cdot t_7 \\ m_8 ; & t_7 < t \cdot t_8 \\ m_9 ; & t_8 < t \cdot t_9 = T \end{cases} \quad (11)$$

for which the additional time instants are defined as:

$$t_1 , t_5 | \frac{T}{2} ; t_7 , t_3 + \frac{T}{2} \quad (12)$$

$$t_8 , t_4 + \frac{T}{2} ; t_9 , t_5 + \frac{T}{2}$$

Remark 3. For all $\varepsilon m_i < 0$; therefore the solution of (11) is strictly decreasing.

4.2 Effect of ε and ω on the phase model

As we can notice in (9) and (12) the normalized time instants in the phase model (11) required for slope transitions depend on the value of the oscillating period T , which depends of ε and ω , therefore a function $T(\varepsilon, \omega)$ must be constructed.

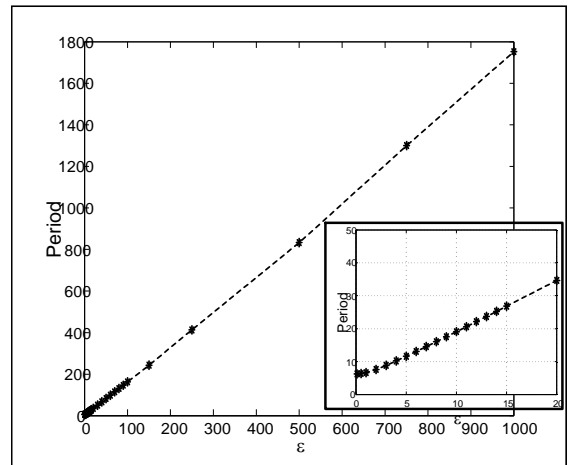


Fig. 4. Period of oscillation $T(\varepsilon)$ for $\omega = 1$.

Through simulations the period T was determined for different values of $\varepsilon \in [0, 150]$ having a fixed natural frequency $\omega = 1$, these values of $T(\varepsilon)$ are plotted in Fig. 4 where we can notice the linear behavior of the period for almost all the values of ε except those close to zero (as shown in the zoom).

Regarding the effect of ω on the period of oscillation, the well know relation $T(\varepsilon, \omega) = C \frac{2\pi}{\omega}$ prevails; $C = T(\varepsilon)$ is the function describing the behavior in Fig. 4.

We approximate that behavior through a piecewise linear function interpolating the periods obtained from simulations for $\varepsilon = \{0.1, 0.5, 1, 2, 3, \dots, 10, \dots, 20, 30, \dots, 100, \dots\}$ g, where each element in ε is denoted as ε_k , for $k = 1, \dots, 32$.

The approximation is a linear function with slope

$$m_k = \frac{T(\varepsilon_{k+1}) - T(\varepsilon_k)}{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k} \text{ in each } k^{\text{th}}\text{-interval of } \varepsilon \in (0.1, 150).$$

The general function is given by:

$$T(\varepsilon, \omega) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega}; \varepsilon \in (0, 0.1) \\ m_k(\varepsilon - \varepsilon_k) + T(\varepsilon_k); \varepsilon \in (\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}) \\ 1.62 \frac{\varepsilon}{\omega}; \varepsilon \in (150, \infty) \end{cases} \quad (13)$$

where $T(\varepsilon_k)$ is known from simulations.

Remark 4. This function is a very close approximation of the value obtained through simulations, differing at most in 0.05% for $5 < \varepsilon < 35$.

The expression (13) of $T(\varepsilon, \omega)$ for the relaxation case ($\varepsilon \gg 150$) was already obtained in (van der Pol [1934]) just with a slight difference: $T(\varepsilon, \omega) = 1.61 \frac{\varepsilon}{\omega}$.

There is also an approximation of the period of oscillation made in (Dorodnicyn [1953]) for the relaxation case with natural frequency $\omega = 1$, this formulae is more accurate than (13) for $\varepsilon > 17.5$ because it includes more terms.

4.3 Comparison: Phase Model vs Complete Model

The phase model proposed for a relaxed van der Pol oscillator is $\theta_{ph} = m_i(T(\varepsilon, \omega))$ where $T(\varepsilon, \omega)$ is given by (13). We have constructed phase models for values of $\varepsilon = \{5, 10, 15, 20, 30, 50, 10, 150\}$ g. We illustrate here for a natural frequency of $\omega = 1$ and $\varepsilon = 5$:

$$\theta_{ph} = \begin{cases} m_1 = 11.3755016 & ; & t_0 < t < t_1 \\ m_2 = 2.66787117 & ; & t_1 < t < t_2 \\ m_3 = 18.741479 & ; & t_2 < t < t_3 \\ m_4 = 3.53977443 & ; & t_3 < t < t_4 \\ m_5 = 11.3755016 & ; & t_4 < t < t_5 \\ m_6 = 2.66787117 & ; & t_5 < t < t_6 \\ m_7 = 18.741479 & ; & t_6 < t < t_7 \\ m_8 = 3.53977443 & ; & t_7 < t < t_8 \\ m_9 = 11.3755016 & ; & t_8 < t < t_9 = T \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 & ; & t_1 = 0.87937 \\ t_2 &= 3.2866 & ; & t_3 = 3.6357 \\ t_4 &= 5.062 & ; & t_5 = 6.6855 \\ t_6 &= 9.0927 & ; & t_7 = 9.4418 \\ t_8 &= 10.868 & ; & t_9 = T = 11.6122 \end{aligned}$$

The phase dynamics obtained with the proposed model is plotted in Fig. 5.a as well as the one for the equivalent complete model.

We can see that the phase model solution is very close to the complete model solution, in order to compare them we define

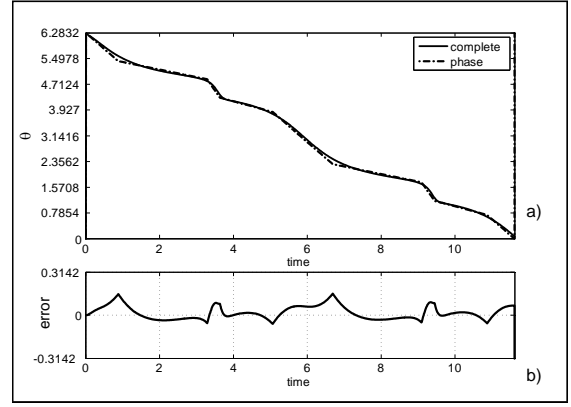


Fig. 5. a) Complete model (solid line) and Phase model(dotted line) for $\varepsilon = 5$ and $\omega = 1$. b) approximation error $e = \theta_c - \theta_{ph}$.

the error $e = \theta_c - \theta_{ph}$, and plot it in Fig. 5.b for one period of oscillation.

Clearly the error increases when the phase has a transition from a small slope to a big one, this is a consequence of the phase model piecewise linear construction given that, when the complete model solution makes these transitions softly the phase model makes steep changes some instants later.

Also we have noticed that the error grows up as the oscillating cycles go on, this has been directly associated to an inaccurate expression for $T(\varepsilon, \omega)$ which translates in a time delay (phase shift) between the phase model solution and the complete model solution.

Remark 5. All of the observations done for the illustrated phase model with $\varepsilon = 5$ are also present for the other constructed models with $\varepsilon = \{10, 15, 20, 30, 50, 100, 150\}$ g, therefore in order to reduce the error of the proposed phase model a more accurate expression for the oscillating period $T(\varepsilon, \omega)$ must be used.

5. APPLICATION OF PHASE MODEL: SYNCHRONIZATION OF TWO RELAXED VAN DER POL OSCILLATORS

Considering two similar relaxed van der Pol oscillators which only differ slightly in their natural frequency, both are expressed in terms of the phase model (11) and coupled by means of $k(\theta_q - \theta_p)$ in the differential equation of p^{th} oscillator:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= m_{1,i}(\varepsilon, \omega_1) + k_1(\theta_2 - \theta_1); t_{1,i-1} < t < t_{1,i} \\ \dot{\theta}_2 &= m_{2,i}(\varepsilon, \omega_2) + k_2(\theta_1 - \theta_2); t_{2,i-1} < t < t_{2,i} \end{aligned} \quad (14)$$

$$nT_j(\varepsilon, \omega_j) < t_{j,i-1} < [n+1]T_j(\varepsilon, \omega_j)$$

$$i = 1, \dots, 9; n = 0, 1, \dots; j = 1, 2$$

Since $\omega_1 \approx \omega_2$ the dynamics of both phases are close to each other, and introducing enough coupling strength should make them oscillate to the same frequency with a constant phase difference.

We considering a symmetric bilateral coupling strength between both oscillators, i.e. $k_1 = k_2 \neq 0$. Stroboscopic plots of the phase of both oscillators are shown in Fig. 6, these were

obtained with a sampling period T_{av} , $\frac{T_1+T_2}{2}$. All of these plots show some soft *movement*, this is due to T_{av} which isn't exactly the synchronization period.

From plot **a**) it is clear that both oscillators are close to each other when a soft coupling strength exists; from **b**) it can be seen that increasing coupling strength reduces $\Phi\theta$; finally from **c**) it can be seen that further increase in the coupling strength reduces even more the phase difference $\Phi\theta$.

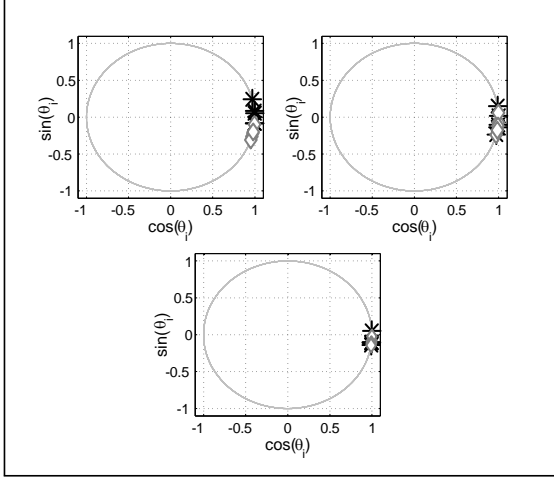


Fig. 6. Phase Model symmetrical bilateral coupling: Phase Plane for $\Phi\omega = \omega_1 \text{ ; } \omega_2 = 0.1$; a) $k = 0.1$, b) $k = 0.5$, c) $k = 10$

In order to compare the synchronization attained with the phase model and synchronization reached with the complete model, the system of two symmetrically coupled oscillators expressed with the complete model (5) is coupled similarly as in (14). This system is stroboscopically plotted in Fig. 7.

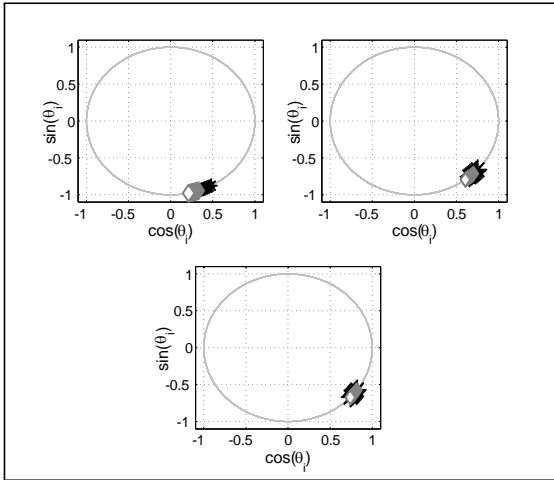


Fig. 7. Complete Model symmetrical bilateral coupling: Phase Plane for $\Phi\omega = 0.1$; a) $k = 0.1$; b) $k = 0.5$; c) $k = 10$

Comparing the plots in Fig. 6 with those in Fig. 7 it can be seen that for the same coupling strength the complete model reaches a smaller $\Phi\theta$, from this it may be implied that for a given $\Phi\theta$ the coupling strength needed in the complete model is smaller than that for the phase model. That is:

$$k_{ph} > k_c \quad (15)$$

being this a direct consequence of the loss of information when passing from the complete two dimensional model to the one dimensional phase model.

5.1 Analysis of Synchronization with the phase model

In order to show why synchronization takes place in the previous section the following analysis is done.

Being the general form of the dynamics of the phase:

$$\dot{\theta}_1 = m_{1,i}(t) \quad ; \quad \dot{\theta}_2 = m_{2,i}(t)$$

$m_{j,i}(t)$ are T_j -periodic.

Then both oscillators are coupled by means of $k(\theta_q \text{ ; } \theta_p)$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= m_{1,i}(t) + k(\theta_2 \text{ ; } \theta_1) = \dot{\theta}_1 + k\theta_1 + m_{1,i}(t) + k\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= m_{2,i}(t) + k(\theta_1 \text{ ; } \theta_2) = \dot{\theta}_2 + k\theta_2 + m_{2,i}(t) + k\theta_1 \end{aligned} \quad (16)$$

Expressing (16) in state variables:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{1,i}(t) \\ m_{2,i}(t) \end{pmatrix}$$

Then:

$$\begin{pmatrix} -\lambda + k & k \\ k & -\lambda + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2k\lambda = \lambda(\lambda + 2k)$$

This means the coupled system has eigenvalues $\lambda_1 = 0$, and $\lambda_2 = -2k$, $8k > 0$.

Expressing (16) in terms of the phase difference and the phase addition, θ_i , $\theta_1 \text{ ; } \theta_2$ and θ_+ , $\theta_1 + \theta_2$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \dot{\theta}_1 \text{ ; } \dot{\theta}_2 = -2k(\theta_1 \text{ ; } \theta_2) + m_{1,i}(t) \text{ ; } m_{2,i}(t) \\ \dot{\theta}_+ &= \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = m_{1,i}(t) + m_{2,i}(t) \end{aligned}$$

This is:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= -2k\theta_i + m_{1,i}(t) \text{ ; } m_{2,i}(t) \\ \dot{\theta}_+ &= m_{1,i}(t) + m_{2,i}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

Seeking for the solution of (17) we have:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_i(t) &= \frac{m_{1,i} \text{ ; } m_{2,i}}{2k} = \theta_i^a \\ \theta_i^a &= \frac{1}{2k} \max_{0 \leq t \leq \bar{T}} M \end{aligned} \quad (18)$$

where $\bar{T} = \max\{T_1, T_2\}$ and

$$M = \begin{pmatrix} \max_{t \in [0, \bar{T}]} \{m_{1,1}(t) \text{ ; } m_{2,1}(t)\} \\ \max_{t \in [0, \bar{T}]} \{m_{1,1}(t) \text{ ; } m_{2,2}(t)\} \\ \dots \\ \max_{t \in [0, \bar{T}]} \{m_{1,1}(t) \text{ ; } m_{2,i}(t)\} \\ \dots \\ \max_{t \in [0, \bar{T}]} \{m_{1,2}(t) \text{ ; } m_{2,i}(t)\} \\ \dots \\ \max_{t \in [0, \bar{T}]} \{m_{1,9}(t) \text{ ; } m_{2,9}(t)\} \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, 9$$

Therefore the lowest coupling strength is determined by:

$$k_{\min} = \frac{\bar{m}}{2\theta_i^a} \quad (19)$$

where $\bar{m} = \max_{0 \leq t \leq T} M$ and corresponds to the greatest difference between the slopes of the oscillators.

For instance, for the example illustrated in Fig. 6 where $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.1$, if we choose $\theta_i^a = 0.034$, the corresponding lowest coupling strength to guarantee such phase difference is $k_{\min} = 22.7293$. Recalling from (15), $k_c < k_{ph} = k_{\min}$, then k_{\min} guarantees that the complete model attains a phase difference lower than θ_i^a . This is confirmed by the simulation where the needed strength coupling for $\theta_i^a = 0.034$ is $k_c = 2.725$, and given the k_{\min} , the phase difference attained is $\theta_i = 0.003558 < \theta_i^a$.

Remark 6. The obtained lower bound for the coupling strength, k_{\min} , is a quite conservative bound.

On the other hand, from (19) we can solve for θ_i^a for a given coupling strength, this will be the upper bound of θ_i . Making this calculation for each coupling strength used in the examples illustrated in Fig. 6 and Fig. 7 where $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.1$ and $k = f0.1, 0.5, 10g$ we have:

$$\theta_i \cdot \begin{cases} 7.7280 & ; & k = 0.1 \\ 1.5456 & ; & k = 0.5 \\ 0.0773 & ; & k = 10 \end{cases} \quad (20)$$

$$\bar{m} = 1.5456$$

From the simulations done, we notice that the phase difference for the phase model is below the calculated in (20); and as expected, in the case of the complete model the phase difference was much smaller than the above predicted. The results are the following:

$$\theta_{i,ph,sim} = \begin{cases} 0.9694 & ; & k = 0.1 \\ 0.6204 & ; & k = 0.5 \\ 0.0772 & ; & k = 10 \end{cases}$$

$$\theta_{i,c,sim} = \begin{cases} 0.6226 & ; & k = 0.1 \\ 0.2383 & ; & k = 0.5 \\ 0.0083 & ; & k = 10 \end{cases}$$

6. CONCLUSIONS

We developed a one dimensional phase model for the relaxed case of the two dimensional van der Pol oscillator. The phase model construction is based on the slow and fast transitions the phase goes through during its cycle and which we fit to a piecewise linear function. The proposed model is fully dependent on the period of oscillation and therefore incorporates the effects the nonlinearity parameter ε and natural frequency $\omega \neq 1$ might have on it.

The exemplified application of the phase model is the synchronization analysis of two symmetrically coupled van der Pol oscillators, we use the proposed phase model to calculate the minimum coupling strength needed for their synchronization, this by means of a maximum phase difference allowed for considering the behavior as synchronization. This coupling strength lower bound guarantees that the complete two dimensional model will reach an even smaller phase difference.

REFERENCES

I.I. Blekhnman. *Synchronization in Science and Technology*. ASME Press, NewYork, 1988.

- A. A. Dorodnicyn. Asymptotic solution of van der pol's equation. *American Mathematical Society*, 1953.
- E. M. Izhikevich. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, 2006.
- H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Ed. Upper Saddle River:Prentice-Hall, USA, 3rd edition, 2002.
- O. T. Mimila. Sincronización de osciladores. Master thesis, CINVESTAV-IPN, Mexico, 2006.
- A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- M. Rosenblum and A. Pikovsky. Synchronization: from pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators. *Contemporary Physics*, 44(5), September-October 2003.
- S. H. Strogatz. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 143:1–20, 2000.
- S. H. Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hypherion, New York, 2003.
- S. H. Strogatz and I. Stewart. Coupled oscillators and biological synchronization. *Scientific American*, December 1993.
- B van der Pol. On relaxation oscillators. *Phil. Mag.*, 2:978–992, 1926.
- B. van der Pol. The nonlinear theory of electric oscillations. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 22(9):1051–1086, September 1934.
- A. T. Winfree. *The Geometry of biological time*. Springer-Verlag, NewYork, 1990.

Effect of parametric excitation on the quasi-linear van der Pol Oscillator [★]

Mimila-Prost O. ^{*} Collado J. ^{*}

^{*} Automatic Control Department, CINVESTAV-IPN, A.P. 14-740 Mexico, D.F. (e-mail: [omimila; jcollado]@ctrl.cinvestav.mx)

nonlinear systems, oscillators, parametric excitation

Abstract: The quasi-linear van der Pol oscillator subject to parametric excitation applied on its natural frequency is studied. The effect of this parametric excitation is analyzed to determine the effect on the amplitude and frequency of the solution. Considering an external signal, the results of these analyses are used to determine upper and lower bounds of the forcing strength required to suppress the natural frequency of the parametrically excited oscillator, as well as in the case when the parametrically excited oscillator forces a second oscillator.

1. INTRODUCTION

In this paper the effect of parametric excitation is studied when applied on a quasi-linear van der Pol Oscillator. Mathematical tools used for this analysis consist on: regular perturbation theory, to determine the effect of the parametric excitation on the resulting frequency of oscillation; phase plane analysis and averaging method, both to determine the effect of the parametric excitation on the amplitude of the solution. Similar work has been presented in [Veerman and Verhulst (2009)] where the analysis accentuates on the existence of quasiperiodic solutions arising when the parametric frequency crosses a threshold. In this paper we focus on the properties of the van der Pol oscillator: amplitude and frequency, and how they are modified by the parametric excitation. The main application of synchronization in engineering is the quenching of vibrations, the first person to observe this phenomena was Lord Rayleigh.

The organization of this paper is as follows: Section II gives some mathematical preliminaries; in Section III the analysis of the van der Pol oscillator parametrically excited is done; in Section IV two particular cases of the parametrically excited van der Pol are studied: the forced case and the forcing case. Finally in Section V the conclusions and further work are stated.

2. PRELIMINARIES

2.1 Regular Perturbation Theory

The perturbation theory looks for an approximate solution of a problem that cannot be solved directly, being this approximation the solution of an unperturbed problem that can be solved exactly and that differs from the original problem only in small terms. Afterwards, a series of successive corrections on the initial approximation are searched, usually in the form of power series of the perturbation parameter [Murdock (1991)].

[★] Mimila-Prost is sponsored through a scholarship by CONACYT.

Considering the second order differential equation

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \varepsilon f(t, y, \dot{y}, \varepsilon) \quad (1)$$

Perturbation methods depend on the capacity to solve the reduced problem $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ and the linear non homogeneous problems $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t)$. If additionally initial conditions $y(0) = \alpha$ and $\dot{y}(0) = \beta$ are imposed, the solution of the second order equation is unique.

Theorem 1. (Murdock (1991)). Let f be defined for all t in a compact interval $0 \leq t \leq T$, $\forall y, \dot{y}; \forall \varepsilon$ close to zero. Let f such that it has continuous partial derivatives of the order $\leq r$. Let the compact intervals A and B specified for α and β . Then $\exists \varepsilon_0 > 0$ such that the solution:

$$y = \varphi(t; \alpha, \beta; \varepsilon)$$

of (1) exists $\forall t \in [0, T]$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\alpha \in A$ and $\beta \in B$. More over, this solution is unique and is as smooth as f ; i.e. has continuous partial derivatives of the order $\leq r$ with respect to all its arguments t, α, β and ε .

It follows from this theorem and from Taylor's Theorem that for any $k \leq r-1$, φ has an asymptotic approximation:

$$\varphi(t, ; \alpha, \beta; \varepsilon) = \sum_{n=0}^k \varphi_n(t; \alpha, \beta) \varepsilon^n + O(\varepsilon^{k+1}) \quad (2)$$

uniformly for $0 \leq t \leq T$ and for α, β in compact subsets (i.e. given $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, $\exists c > 0$ such that the error in (2) is $\leq c\varepsilon^{k+1}$ for $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, $0 \leq t \leq T$, $\alpha \in A, \beta \in B$).

Theorem 2. (Murdock (1991)). If a function $\mathbf{y}(\mathbf{x}; \mathbf{p}; \varepsilon)$ has an ordinary asymptotic expansion using weights $\delta_0, \dots, \delta_k$, then that expansion is unique; i.e., if $y \sim \sum \mathbf{y}_n \delta_n$ and $y \sim \sum \tilde{\mathbf{y}}_n \delta_n$, then $\mathbf{y}_n = \tilde{\mathbf{y}}_n$ for $n = 0, \dots, k$. This is true even if the expansion valid only point to point in \mathbf{x} and \mathbf{p} .

Consider the quasi-linear second order system

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \varepsilon f(t, y, \dot{y}, \varepsilon) \quad (3)$$

where f is t -periodic or independent of t and with periodic solution.

Pursuing the regular perturbation theory described above for this particular form of problems leads to solutions that are uniformly valid for finite time intervals given the fact that secular terms appear. Being the exact solution of problems like (3) bounded, moreover, periodic, the presence of secular terms only separates the approximate solution from the exact one.

The Lindstedt Method [Nayfeh (1973)] is based on the idea that the non-linearity alters the frequency of oscillation from the frequency of the linear system. To take into account this change, a new variable is introduced $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$ where the terms $\omega_i, \forall i \geq 1$ are chosen to prevent the appearance of secular terms.

This asymptotic approximation of the frequency and the solution of the perturbed problem are substituted in (3); corresponding ε coefficients are equated to get a sequence of homogeneous and non-homogeneous linear problems and their solutions become the terms of the approximate solution multiplied by the corresponding power of the perturbation term (ε) this way each sequential solution is a correction of the previous one.

Example 1. van der Pol oscillator

The equation of the van der Pol oscillator as in [van der Pol (1934)] is:

$$\ddot{x}_a + \varepsilon(x_a^2 - 1)\dot{x}_a + \omega_{a_0}^2 x_a = 0 \quad (4)$$

Making the following time scale change $\tau \triangleq \omega_a t$ and defining $x' \triangleq \frac{dx}{d\tau}$, $x'' \triangleq \frac{d^2x}{d\tau^2}$ (4) becomes:

$$x''_a \omega_a^2 + \varepsilon(x_a^2 - 1)\omega_a x'_a + \omega_{a_0}^2 x_a = 0 \quad (5)$$

Let $x_a = x_{a_0} + \varepsilon x_{a_1} + \varepsilon^2 x_{a_2} + \dots$ and the frequency $\omega_a = \omega_{a_0} + \varepsilon\omega_{a_1} + \varepsilon^2\omega_{a_2} + \dots$, then substituting in (5) and grouping coefficients of corresponding powers of ε gives the following linear ordinary differential equations:

- ε^0 coefficients:

$$x''_{a_0} + x_{a_0} = 0 \quad (6)$$

- ε^1 coefficients:

$$x''_{a_1} + x_{a_1} = -2\frac{\omega_{a_1}}{\omega_{a_0}}x''_{a_0} + \frac{x'_{a_0}}{\omega_{a_0}}(1 - x_{a_0}^2) \quad (7)$$

- ε^2 coefficients:

$$\begin{aligned} x''_{a_2} + x_{a_2} = & -2\frac{\omega_{a_2}}{\omega_{a_0}}x''_{a_0} - \frac{\omega_{a_1}^2}{\omega_{a_0}^2}x''_{a_0} \\ & -2\frac{\omega_{a_1}}{\omega_{a_0}}x'_{a_1} + \frac{x'_{a_1}}{\omega_{a_0}}(1 - x_{a_0}^2) \\ & + \frac{\omega_{a_1}}{\omega_{a_0}^2}x'_{a_0} - \frac{\omega_{a_1}}{\omega_{a_0}^2}x_{a_0}^2 x'_{a_0} - \frac{2}{\omega_{a_0}}x_{a_1}x'_{a_0}x_{a_0} \end{aligned} \quad (8)$$

Solving (6) for $x_{a_0}(0) = A_0$ and $x'_{a_0}(0) = 0$, which means $x'_{a_0}(0) = x'_{a_1}(0) = \dots = 0$, and $x_{a_1}(0) = x_{a_2}(0) = \dots = 0$, the solution is $x_{a_0} = A_0 \cos \tau$. Substituting it in (7) gives:

$$x''_{a_1} + x_{a_1} = \frac{2A_0\omega_{a_1}}{\omega_{a_0}} \cos \tau + \left[\frac{-A_0}{\omega_{a_0}} + \frac{A_0^3}{4\omega_{a_0}} \right] \sin \tau + \frac{A_0^3}{4\omega_{a_0}} \sin 3\tau \quad (9)$$

To preserve the oscillatory nature of the system it is necessary that $\omega_{a_1} = 0$ and $A_0 = 2$ to eliminate secular terms. This yields solution $x_{a_1} = \frac{3}{4\omega_{b_0}} \sin \tau - \frac{1}{4\omega_{b_0}} \sin 3\tau$, which substituted in (8) gives:

$$\begin{aligned} x''_{a_2} + x_{a_2} = & \cos \tau \left[\frac{4\omega_{a_2}}{\omega_{a_0}} + \frac{1}{4\omega_{a_0}^2} \right] + \cos 3\tau \left[\frac{-3}{2\omega_{a_0}^2} \right] \\ & + \cos 5\tau \left[\frac{5}{4\omega_{a_0}^2} \right] \end{aligned}$$

Once again, to guarantee the oscillatory nature of the solution, the restriction $\omega_{a_2} = -\frac{1}{16\omega_{a_0}}$ arises, defining the frequency, up to order ε^2 , of the van der Pol as $\omega_a = \omega_{a_0} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16\omega_{a_0}^2} \right)$, as in [Dorodnicyn (1947)], [van der Pol (1934)].

Therefore the approximate solution of the quasi-linear van der Pol oscillator is as in [Hagedorn (1988)]:

$$x_a(t) = 2 \cos \omega_a t + \varepsilon \left(\frac{3}{4\omega_{a_0}} \sin \omega_a t - \frac{1}{4\omega_{a_0}} \sin 3\omega_a t \right)$$

2.2 Averaging Method

The averaging method obtains an approximate solution of a systems $\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ where ε is a small parameter and $f(x, t, \varepsilon)$ is T -periodic in t . The method approximates the solution of this system with the solution of an *average system* obtained from averaging $f(x, t, \varepsilon)$ with $\varepsilon = 0$ [Khalil (2002)].

Considering the second order system:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (10)$$

describing a weakly nonlinear-oscillator, it is clear that for $\varepsilon = 0$ the solution is:

$$x(t) = a \cos \phi \quad ; \quad \phi = \omega_0 t + \psi \quad (11)$$

where a, ψ are constants depending on the initial conditions.

Assuming $\varepsilon \neq 0$, but sufficiently small, then the solution of (10) can be considered still of the form (11), but with a and ψ being slowly changing functions of time [Nayfeh (1973)].

Given that (10) and (11) define two equations for three variables $\{x, a, \psi\}$, a third equation is imposed :

$$\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin \phi \quad (12)$$

Therefore:

$$\dot{x}(t) = \dot{a} \cos \phi - a(\omega_0 + \dot{\psi}) \sin \phi \quad (13)$$

Equating (12) and (13) gives:

$$\dot{a} \cos \phi - a\dot{\psi} \sin \phi = 0 \quad (14)$$

The derivative of (12) with respect to time :

$$\ddot{x}(t) = -\dot{a}\omega_0 \sin \phi - a(\omega_0^2 + \omega_0\dot{\psi}) \cos \phi$$

Substituted with (12) in (10), and simplifying gives:

$$\dot{a}\omega_0 \sin \phi + a\omega_0\dot{\psi} \cos \phi + \omega_0^2 a \cos \phi = -\varepsilon f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) \quad (15)$$

Solving (14) and (15) for \dot{a} and $\dot{\psi}$, gives:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) \\ -\frac{\varepsilon}{a\omega_0} \cos \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Until now (11) and (16) are equivalent to (10) since no approximation has been done yet.

The right hand side of equations (11) and (16) is periodic with respect to ϕ ; $\dot{a} = O(\varepsilon)$ as $\dot{\psi} = O(\varepsilon)$ so a and ψ are variables that change slowly during the period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ [Nayfeh (1973)].

Integrating (16) over the period $\frac{2\pi}{\omega_0}$ and considering a and ψ constant during this period gives:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) d\phi \\ -\frac{\varepsilon}{a2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) d\phi \end{bmatrix} \quad (17)$$

Therefore the *averaged* solution of (10) is expressed as $x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t))$ with $a(t)$ and $\psi(t)$ solutions of (17), being valid for an $\frac{1}{\varepsilon}$ interval of time [Sanders and Verhulst (1985)].

Example 2. van der Pol oscillator

Expressing (4) to match the form (10) gives :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon(1 - x^2)x = f(x, \dot{x})$$

The approximate solution for $\varepsilon \ll 1$ is as in (11). To know the behavior of $a(t)$ and $\psi(t)$, the following auxiliary set of differential equations must be solved:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) \\ \dot{\psi} &= 0 \end{aligned}$$

Equation $\dot{\psi} = 0$ means that the phase of the approximate solution remains constant at ψ_0 ; and equation \dot{a} has three equilibrium points $a_1 = 0$ (unstable) and $a_2 = \pm 2$ (stable) being $a(t)$ the amplitude of oscillation $a(t) \rightarrow 2$ [Mimila-Prost (2006)].

3. PARAMETRICALLY EXCITED VAN DER POL

Overall reference for this section is the monumental work on parametric resonance Yakubovich and Starzhinskii (1975).

Considering the quasi-linear van der Pol Oscillator with a parametric excitation applied to its natural frequency as follows:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_b + \varepsilon(x_b^2 - 1)\dot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b(1 + \alpha \cos \Omega t) &= 0 \\ \ddot{x}_b + \varepsilon(x_b^2 - 1)\dot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b &= -\alpha \omega_{b_0}^2 x_b \cos \Omega t \end{aligned} \quad (18)$$

The analysis pursued will determine the effect of this external signal on the frequency of the oscillator as well as on its amplitude.

3.1 Effect on frequency

Proceeding with a perturbation analysis considering time scale change $\tau \triangleq \omega_b t$ gives:

$$x_b'' \omega_b^2 + \varepsilon(x_b^2 - 1)\omega_b x_b' + \omega_{b_0}^2 x_b = -\alpha x_b \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \quad (19)$$

where $-\alpha = A = O(\varepsilon)$.

Let $x_b = x_{b_0} + \varepsilon x_{b_1} + \varepsilon^2 x_{b_2} + \dots$ and the frequency $\omega_b = \omega_{b_0} + \varepsilon \omega_{b_1} + \varepsilon^2 \omega_{b_2} + \dots$, then substituting in (19) and grouping coefficients of ε gives the following linear differential equations:

- ε^0 coefficients:
$$x_{b_0}'' + x_{b_0} = 0 \quad (20)$$

- ε^1 coefficients:
$$x_{b_1}'' + x_{b_1} = -2\frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}} x_{b_0}'' + \frac{x_{b_0}'}{\omega_{b_0}} (1 - x_{b_0}^2) + \frac{Ax_{b_0}}{\omega_{b_0}^2} \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \quad (21)$$

- ε^2 coefficients:
$$\begin{aligned} x_{b_2}'' + x_{b_2} &= -2\frac{\omega_{b_2}}{\omega_{b_0}} x_{b_0}'' - \frac{\omega_{b_1}^2}{\omega_{b_0}^2} x_{b_0}'' - 2\frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}} x_{b_1}'' \\ &+ \frac{x_{b_1}'}{\omega_{b_0}} (1 - x_{b_0}^2) + \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}^2} x_{b_0}' - \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}^2} x_{b_0}^2 x_{b_0}' \\ &+ \frac{x_{b_1}}{\omega_{b_0}} \left(-2x_{b_0} x_{b_0}' + \frac{A}{\omega_{b_0}} \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Solving (20) for $x_b(0) = A_0$ and $x_b'(0) = 0$, meaning that $x_{b_0}'(0) = x_{b_1}'(0) = \dots = 0$, $x_{b_1}(0) = x_{b_2}(0) = \dots = 0$ the solution is $x_{b_0} = A_0 \cos \tau$, which substituted in (21) gives:

$$\begin{aligned} x_{b_1}'' + x_{b_1} &= 2A_0 \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}} \cos \tau + \left[\frac{-A_0}{\omega_{b_0}} + \frac{A_0^3}{4\omega_{b_0}} \right] \sin \tau \\ &+ \frac{A_0^3}{4\omega_{b_0}} \sin 3\tau + \frac{AA_0}{\omega_{b_0}} \cos \tau \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \end{aligned} \quad (23)$$

To avoid resonance it is required $\omega_{b_1} = 0$ and $A_0 = 2$. Substituting in (23) and solving:

$$\begin{aligned} x_{b_1} &= \frac{3}{4\omega_{b_0}} \sin \tau - \frac{1}{4\omega_{b_0}} \sin 3\tau + \frac{A}{\omega_{b_0}^2} \frac{2\omega_b^2}{\Omega^2 - 4\omega_b^2} \cos \tau \\ &- \frac{A}{\omega_{b_0}^2} \left(\frac{\omega_b^2}{\Omega^2 + 2\Omega\omega_b} \cos \gamma_1 \tau + \frac{\omega_b^2}{\Omega^2 - 2\Omega\omega_b} \cos \gamma_2 \tau \right) \end{aligned}$$

where $\gamma_1 = \frac{\Omega}{\omega_b} + 1$; $\gamma_2 = \frac{\Omega}{\omega_b} - 1$.

Substituting x_{b_1} in (22) as well as $\omega_{b_1} = 0$ and $A_0 = 2$ yields:

$$\begin{aligned} x_{b_2}'' + x_{b_2} &= \cos \tau \left[\frac{4\omega_{b_2}}{\omega_{b_0}} + \frac{1}{4\omega_{b_0}^2} - \frac{A^2 \omega_b^2}{\omega_{b_0}^4 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right] \\ &+ \sin \tau \left[\frac{4A\omega_b^2}{\omega_{b_0}^3 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right] + \cos 3\tau \left[\frac{-3}{2\omega_{b_0}^2} \right] \\ &+ \sin 3\tau \left[\frac{10A\omega_b^2}{\omega_{b_0}^3 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right] \\ &+ \cos 5\tau \left[\frac{5}{4\omega_{b_0}^2} \right] + h.f.t.* \end{aligned}$$

*h.f.t. higher frequency terms

To avoid resonance two simultaneous restrictions arise:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\omega_{b_2}}{\omega_{b_0}} + \frac{1}{4\omega_{b_0}^2} - \frac{A^2 \omega_b^2}{\omega_{b_0}^4 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right) &= 0 \\ \frac{4A\omega_b^2}{\omega_{b_0}^3 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} &= 0. \end{aligned}$$

which define a polynomial of ω_{b_2} with three possible solutions:

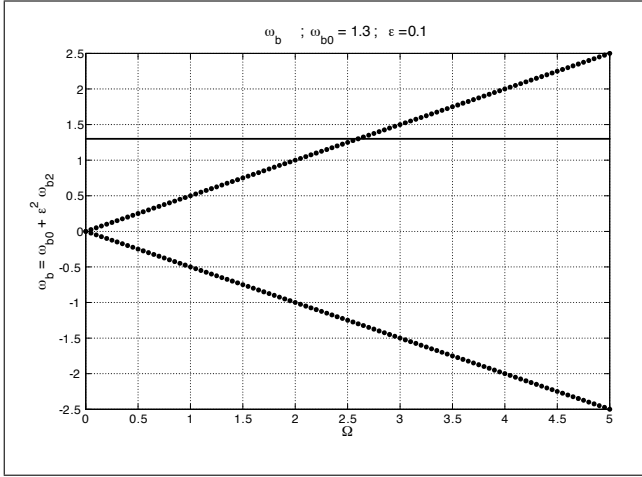


Fig. 1. Three values of ω_b (solid) for the three possible solutions of (24) for $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectively

$$\begin{aligned}
 0 = & \omega_{b_2}^3 (-64\varepsilon^4 \omega_{b_0}) \\
 & + \omega_{b_2}^2 (-128\varepsilon^2 \omega_{b_0}^2 - 4\varepsilon^4 - 4\alpha^2 \varepsilon^4 \omega_{b_0}^2 + 16\alpha \varepsilon^4 \omega_{b_0}) \\
 & + \omega_{b_2} (16\Omega^2 \omega_{b_0} - 64\omega_{b_0}^3 - 8\varepsilon^2 \omega_{b_0} - 8\alpha^2 \varepsilon^2 \omega_{b_0}^3 + 32\alpha \varepsilon^2 \omega_{b_0}^2) \\
 & + (\Omega^2 - 4\omega_{b_0}^2 - 4\alpha^2 \omega_{b_0}^4 + 16\alpha \omega_{b_0}^3)
 \end{aligned} \quad (24)$$

In Fig. 1 $\omega_b = \omega_{b_0} + \varepsilon^2 \omega_{b_2}$ for these possible solutions is shown for particular values of $\Omega, \omega_{b_0}, \alpha$ and ε .

Expressing the solution of the parametrically excited van der Pol Oscillator as $x_b(t) = x_{b_0} + \varepsilon x_{b_1}$, gives:

$$\begin{aligned}
 x_b(t) = & 2 \cos \omega_b t + \varepsilon \frac{3}{4\omega_{b_0}} \sin \omega_b t - \varepsilon \frac{1}{4\omega_{b_0}} \sin 3\omega_b t \\
 & - \alpha \varepsilon \frac{2\omega_b^2}{\Omega^2 - 4\omega_b^2} \cos \omega_b t \\
 & + \alpha \varepsilon \frac{\omega_b^2}{\Omega^2 + 2\omega_b \Omega} \cos(\Omega + \omega_b) t \\
 & + \alpha \varepsilon \frac{\omega_b^2}{\Omega^2 - 2\omega_b \Omega} \cos(\Omega - \omega_b) t
 \end{aligned}$$

After a denominator analysis of this expression, restrictions arise for ω_b , being $\omega_b \neq \pm \frac{\Omega}{2}$, which are displayed in Fig. 2 as well as the three possible frequencies ω_b .

therefore the frequency left is $\omega_b \approx \omega_{b_0}$.

3.2 Effect on amplitude

From (18) define $x_1 \triangleq x_b, x_2 \triangleq \dot{x}_b$, then:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -\varepsilon (x_1^2 - 1) x_2 - \omega_{b_0}^2 x_1 (1 + \alpha \cos \Omega t)
 \end{aligned}$$

For $\alpha \ll 1$ the equilibrium point is $(x_1, x_2) = (0, 0)$ and the nullclines of the system are:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= 0 \\
 x_2 &= \frac{\omega_{b_0}^2 x_1 (1 + \alpha \cos \Omega t)}{\varepsilon (1 - x_1^2)}
 \end{aligned}$$

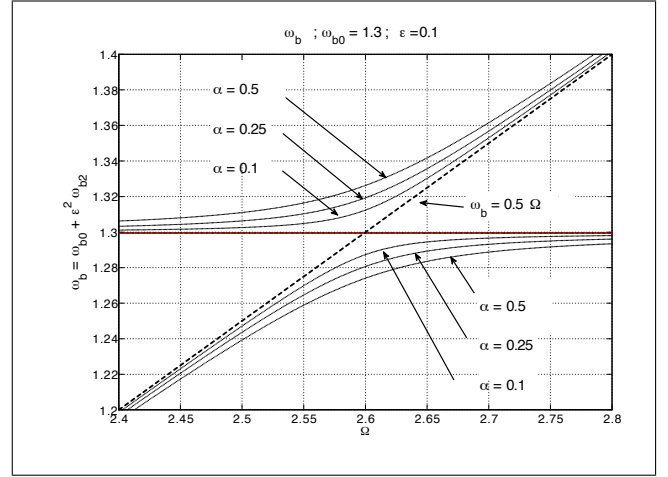


Fig. 2. Zoom in around $\Omega = 2\omega_{b_0}$ of Fig. 1.

The second nullcline changes in a period $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, this change is bounded and does not modify the equilibrium point, but does modify the limit cycle at every second. Due to the modulation the limit cycle goes through for $t \in [0, T), T = \frac{2\pi}{\Omega}$, a resulting limit cycle appears as shown in Fig. 4.

It is clear that the amplitude of the van der Pol oscillator becomes function of the amplitude of the parametric excitation, α . To confirm this fact an averaging analysis is done.

Proceeding with the averaging analysis, equation (18) is rewritten as:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b &= -\varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b - \alpha \omega_{b_0}^2 x_b \cos \Omega t \\
 \ddot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b &= f(x_b, \dot{x}_b)
 \end{aligned}$$

and the solution is assumed as:

$$\begin{aligned}
 x_b &= a(t) \cos(\omega_b t + \psi(t)) = a \cos \phi \\
 x_b &= -a(t) \omega_b \cos(\omega_b t + \psi(t)) = -a \omega_b \sin \phi
 \end{aligned} \quad (25)$$

Where $a(t)$ and $\psi(t)$ are as in (16) with ε within $f(\cdot, \cdot)$, and $\omega_b = \omega_{b_0}$ (from previous section).

Therefore the dynamics of $a(t)$ and $\psi(t)$ of the parametrically excited van der Pol is given by:

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) + \frac{\alpha \omega_{b_0}^2 a}{8\pi \omega_b} \int_0^{2\pi} [\sin(\Omega t + 2\phi) + \sin(2\phi - \Omega t)] d\phi \\
 \dot{\psi} &= \frac{\alpha \omega_{b_0}^2}{8\pi \omega_b} \int_0^{2\pi} [\cos(\Omega t + 2\phi) + 2 \cos \Omega t + \cos(\Omega t - 2\phi)] d\phi
 \end{aligned}$$

Remark 1. From simulations and frequency analysis it is known that the behaviour is different for $\Omega = 2\omega_b$ and for $\Omega \neq 2\omega_b$. Being of our interest the first case.

Let $\Omega = 2\omega_b$ then:

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) + \frac{\alpha \omega_{b_0}^2 a}{4\omega_b} \sin(2\psi) \\
 \dot{\psi} &= \frac{\alpha \omega_{b_0}^2}{4\omega_b} \cos(2\psi)
 \end{aligned}$$

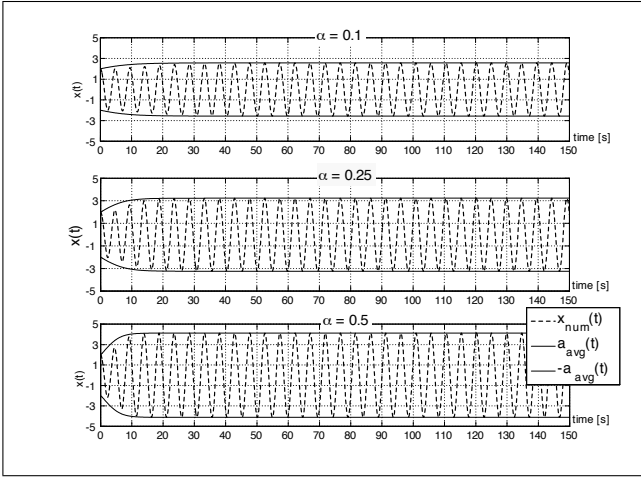


Fig. 3. Numerical solution $x(t)$ bounded by the approximation amplitude $\pm a(t)$ for $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectively.

Clearly, the phase ψ is independent from the amplitude a . The equilibrium points of ψ are $\psi_{eq} = \{\pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}\}$ where $\psi_{eq1} = \frac{\pi}{4}, \psi_{eq4} = -\frac{3\pi}{4}$ are stable and $\psi_{eq3} = \frac{3\pi}{4}, \psi_{eq2} = -\frac{\pi}{4}$ unstable. And the region of attraction of each stable equilibrium point is:

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \psi_{eq1} \quad \forall \psi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ \psi &\longrightarrow \psi_{eq4} \quad \forall \psi \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) \bmod \pi \end{aligned} \quad (26)$$

Analyzing the amplitude equation, its equilibrium points are $a_{\bar{a}} = \{0, \pm 2\sqrt{1 + \frac{2\zeta}{\varepsilon}}\}$ for $\psi \longrightarrow \psi_{eq4}, \psi_{eq1}$ where $\zeta = \frac{\alpha\omega_{b0}^2}{4\omega_b}$; the equilibrium points of a corresponding to ψ_{eq2}, ψ_{eq3} are uninteresting given that they are saddle points.

It can be seen from (26) that for $\psi \in (-\pi, \pi)$ the whole domain belongs to the region of attraction of ψ_{eq1} and ψ_{eq4} . Therefore the amplitude of the parametrically excited van der Pol oscillator will be

$$\bar{a} = \pm 2\bar{\chi}(\alpha) \quad (27)$$

where $\bar{\chi}(\alpha) = \sqrt{1 + \frac{2\zeta}{\varepsilon}}$.

Being $a(t)$ the amplitude of oscillation of the assumed solution, it becomes an upper ($\bar{a} > 0$) and lower ($\bar{a} < 0$) bound of $x(t)$. This can be seen in Fig.3 where, for the same values as in the example of the phase space analysis, $a(t)$ matches the amplitude attained by $x(t)$ for each α used.

In the phase plane the difference between the assumed solution (25) and the numerical one is almost none as seen in Fig. 4.

Remark 2. The amplitude bounds (27) and their corresponding phases match the stable equilibrium points obtained in [Veerman and Verhulst (2009)] when $d = 0$

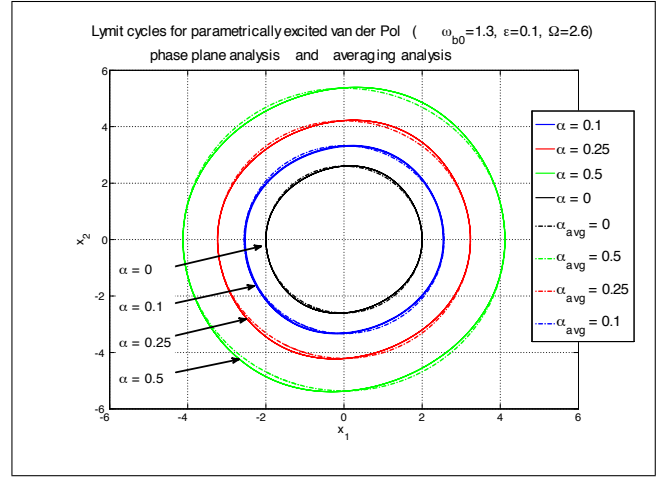


Fig. 4. Limit cycle of the numerical solution (solid) and of the approximate solution (dashed) for $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectively.

after making the required change of coordinates. Therefore confirming that $|\bar{a}|$ is the amplitude of the solution of (18) for all initial conditions.

4. PARAMETRICALLY EXCITED FORCED AND FORCING VAN DER POL

4.1 Forced Case

Consider two van der Pol oscillators which differ only on their natural frequencies. The first oscillator is free and the second one is the parametrically excited van der Pol being simultaneously forced by the first oscillator:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + \varepsilon(x_a^2 - 1)\dot{x}_a + \omega_{a0}^2 x_a &= 0 \\ \ddot{x}_b + \varepsilon(x_b^2 - 1)\dot{x}_b + \omega_{b0}^2 x_b &= -\alpha\omega_{b0}^2 x_b \cos \Omega t + kx_a \end{aligned}$$

It is known that the major effect on $x_b(t)$ arises for $\Omega = 2\omega_{b0}$ and consists on an increase of the amplitude of oscillation that can be expressed as in (27). Given that $\bar{\chi}(\alpha) > 1$ for $\alpha \neq 0$, then:

$$|x_b(t)|_{\alpha \neq 0} > |x_b(t)|_{\alpha=0}, \forall t \quad (28)$$

Remark 3. Roughly speaking, the van der Pol oscillator establishes its amplitude such that the non linear dissipative term $\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x}$ is such that it injects and dissipates the same amount of energy each cycle. When parametric excitation is present with $\Omega = 2\omega_0$, an extra amount of energy is injected, which makes that the amplitude increases to maintain the net energy per cycle equal zero.

From (28) it is expected that the strength required to suppress the natural frequency of the parametrically excited van der Pol oscillator will be $k_{\alpha \neq 0} > k_{\alpha=0}$. Moreover, knowing the critical strength $k_{c,\alpha=0}$ that achieves the suppression of the natural frequency in the absence of parametric excitation, the strength required, $k_{n,\alpha \neq 0}$, when the excitation exists is bounded by:

$$\bar{\chi}(\alpha) k_{c,\alpha=0} > k_{n,\alpha \neq 0} > k_{c,\alpha=0} \quad (29)$$

To confirm this, a set of simulations were done for $\alpha = \varepsilon = 0.1, \Omega = 2.6$, natural frequencies $\omega_{b0} = 1.3$ and

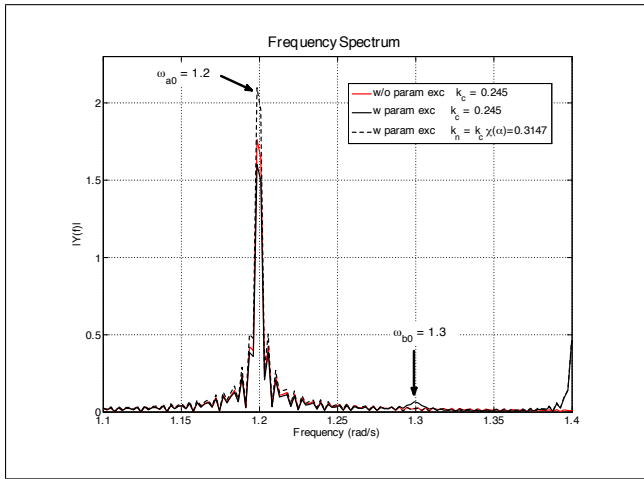


Fig. 5. Power Spectrum of a parametrically excited van der Pol forced by a second oscillator

$\omega_{a0} = 1.2$, and $k = [\bar{\chi}(\alpha)k_{c,\alpha=0}; k_{n,\alpha \neq 0}; k_{c,\alpha=0}]$. Results are summarized in Fig. 5 where the power spectrum of the forced van der Pol oscillator is shown for each k .

It is noticeable that for $k = k_{c,\alpha=0}$ the forcing oscillator has not completely suppressed the natural frequency ω_{b0} when parametric excitation is applied though it has been suppressed in the absence of parametric excitation. For $k = \bar{\chi}(\alpha)k_{c,\alpha=0}$ the natural frequency ω_{b0} is suppressed even if parametric excitation is applied. The bounds (29) are confirmed by this simulation.

4.2 Forcing case

Once again consider two van der Pol oscillators which differ only on their natural frequencies. The first oscillator is forced by the second oscillator which is the parametrically excited van der Pol:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + \varepsilon(x_a^2 - 1)\dot{x}_a + \omega_{a0}^2 x_a &= kx_b \\ \ddot{x}_b + \varepsilon(x_b^2 - 1)\dot{x}_b + \omega_{b0}^2 x_b &= -\alpha\omega_{b0}^2 x_b \cos \Omega t \end{aligned}$$

Let $\Omega = 2\omega_{b0}$ then the solution of the forcing van der Pol is expressed as in (27); (28) is valid, therefore it is expected that the strength required to suppress the natural frequency of the second oscillator will be $k_{\alpha \neq 0} < k_{\alpha=0}$. Moreover $k_{n,\alpha \neq 0}$ will be bounded by:

$$k_{c,\alpha=0} > k_{n,\alpha \neq 0} > \frac{k_{c,\alpha=0}}{\bar{\chi}(\alpha)} \quad (30)$$

To confirm this, a new set of simulations were done with the same parameters as in the previous section. Results are summarized in Fig. 6, where the power spectrum of the forced oscillator is shown.

It is noticeable that for $k = k_{c,\alpha=0}$ the forcing oscillator parametrically excited has suppressed the natural frequency ω_{a0} though it has not been completely suppressed in the absence of parametric excitation; a similar result is obtained for $k = \frac{k_{c,\alpha=0}}{\bar{\chi}(\alpha)}$ for which the natural frequency ω_{a0} is almost suppressed even if parametric excitation is applied. The bounds (30) are confirmed by this simulation.

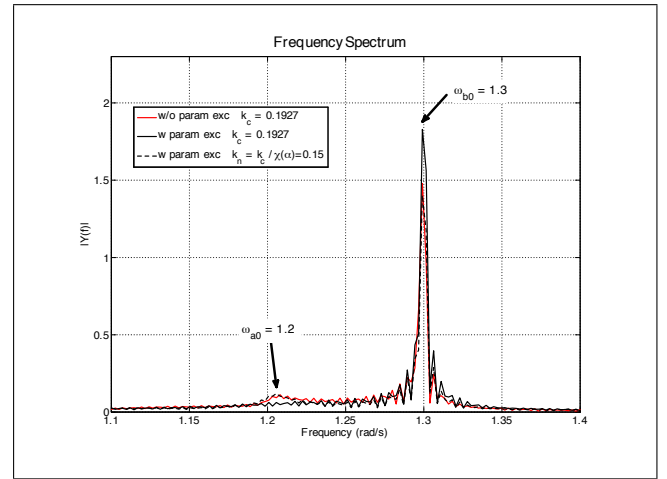


Fig. 6. Power Spectrum of a van der Pol forced by a parametrically excited van der Pol.

5. CONCLUSIONS

The effect of parametric excitation applied on the natural frequency of the quasi-linear free van der Pol oscillator is an increase of the amplitude of oscillation of the solution as a function of the amplitude of the parametric excitation. This was used to determine upper and lower bounds for the coupling strength required by an external signal to force a parametrically excited van der Pol; similarly, bounds were determined for the case of a parametrically excited van der Pol oscillator forcing a second oscillator. Further work includes the analysis of bidirectional coupling of a parametrically excited van der Pol oscillator with a non parametrically excited van der Pol oscillator, this in the context of synchronization with the intent of determining the coupling strength required to achieve it.

REFERENCES

- Dorodnicyn, A.A. (1947). Asymptotic solution of van der pol's equation. *Prik. Mat. i Meh. (Transl Amer Math Soc 88 1953)*, (11), 313–328.
- Hagedorn, P. (1988). *Non-Linear Oscillations*. Oxford Science Publications, Great Britain, 2 edition.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Ed. Upper Saddle River:Prentice-Hall, USA, 3rd edition.
- Mimila-Prost, O. (2006). *Oscillator Synchronization*. Master thesis, CINVESTAV-IPN, Mexico-in Spanish.
- Murdock, J. (1991). *Perturbations. Theory and Methods*. John Wiley and Sons, USA.
- Nayfeh, A.H. (1973). *Perturbation Methods*. John Wiley and Sons, USA.
- Sanders, J. and Verhulst, F. (1985). *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Springer-Verlag, USA.
- van der Pol, B. (1934). The nonlinear theory of electric oscillations. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 22(9), 1051–1086.
- Veerman, F. and Verhulst, F. (2009). Quasiperiodic phenomena in the van der pol-mathieu equation. *Journal of Sound and Vibration*, 326, 314–320.
- Yakubovich, V.A. and Starzhinskii, V.M. (1975). *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients Vol I and II*. John Wiley and Sons.

Quasi-Linear, parametrically excited van der Pol oscillator: free and forced

Olivia Mimila-Prost¹ and Joaquín Collado¹

¹Automatic Control Department, CINVESTAV-IPN,

A.P. 14-740, 07000 Mexico, D.F. email:(omimila;jcollado)@ctrl.cinvestav.mx

Abstract—The quasi-linear van der Pol oscillator subject to parametric excitation applied on its natural frequency is studied. The effect of this parametric excitation is analyzed, regular perturbation theory is used to determine the effect on the resulting frequency of oscillation; phase plane analysis and averaging method are both used to determine the effect on the amplitude of the solution. Having an external signal, the results help foreseeing the forcing strength required to suppress the natural frequency of the parametrically excited oscillator; or the one required by the parametrically excited oscillator to suppress the natural frequency of a second oscillator. This is a first approach to determine whether parametric excitation could be helpful for synchronization of oscillators.

I. INTRODUCTION

In this paper the effect of parametric excitation is studied when applied on a quasi-linear van der Pol Oscillator. Mathematical tools used for this analysis consist on: regular perturbation theory, to determine the effect of the parametric excitation on the resulting frequency of oscillation; phase plane analysis and averaging method, both to determine the effect of the parametric excitation on the amplitude of the solution. Similar work has been presented in [1] where they determine the conditions for the existence of quasiperiodic solutions. In this article we focus on the context of synchronization for which this analysis helps determine whether the parametric excitation can be helpful to achieve it.

The organization of this paper is as follows: Section II gives some mathematical preliminaries; in Section III the analysis of the van der Pol oscillator parametrically excited is done; in Section IV two particular cases of the parametrically excited van der Pol are studied: the forced case and the forcing case. Finally in Section V the conclusions and further work are stated.

II. PRELIMINARIES

A. Regular Perturbation Theory

The perturbation theory looks for an approximate solution of a problem that cannot be solved directly, being this approximation the solution of an unperturbed problem that can be solved exactly and that differs from the original problem only in small terms. Afterwards, a series of successive corrections on the initial approximation are searched, usually in the form of power series of the perturbation parameter [2].

Consider the second order differential equation

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \varepsilon f(t, y, \dot{y}, \varepsilon) \quad (1)$$

Perturbation methods depend on the capacity to solve the reduced problem $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ and the linear non

homogeneous problems $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t)$. If additionally initial conditions $y(0) = \alpha$ and $\dot{y}(0) = \beta$ are imposed, the solution of the second order equation is unique.

Theorem 1: [2] Let f be defined for all t in a compact interval $0 \leq t \leq T$, $\forall y, \dot{y}; \forall \varepsilon$ close to zero. Let f such that it has continuous partial derivatives of the order $\leq r$. Let the compact intervals A and B specified for α and β . Then $\exists \varepsilon_0 > 0$ such that the solution:

$$y = \varphi(t; \alpha, \beta; \varepsilon)$$

of (1) exists $\forall t \in [0, T]$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\alpha \in A$ and $\beta \in B$. More over, this solution is unique and is as smooth as f ; i.e. has continuous partial derivatives of the order $\leq r$ with respect to all its arguments t, α, β and ε .

It follows from this theorem and from Taylor Theorem that for any $k \leq r - 1$, φ has an asymptotic approximation:

$$\varphi(t, ; \alpha, \beta; \varepsilon) = \sum_{n=0}^k \varphi_n(t; \alpha, \beta) \varepsilon^n + O(\varepsilon^{k+1}) \quad (2)$$

uniformly for $0 \leq t \leq T$ and for α, β in compact subsets (i.e. given $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, $\exists c > 0$ such that the error in (2) is $\leq c\varepsilon^{k+1}$ for $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, $0 \leq t \leq T$, $\alpha \in A, \beta \in B$).

Theorem 2: [2] If a function $\mathbf{y}(\mathbf{x}; \mathbf{p}; \varepsilon)$ has an ordinary a-symptotic expansion using weights $\delta_0, \dots, \delta_k$, then that expansion is unique; i.e., if $y \sim \sum \mathbf{y}_n \delta_n$ and $y \sim \sum \tilde{\mathbf{y}}_n \delta_n$, then $\mathbf{y}_n = \tilde{\mathbf{y}}_n$ for $n = 0, \dots, k$. This is true even if the expansion is valid only point to point in \mathbf{x} and \mathbf{p} .

Consider the quasi-linear second order system

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \varepsilon f(t, y, \dot{y}, \varepsilon) \quad (3)$$

where f is t -periodic or independent of t and assume that (3) has a periodic solution.

Pursuing the regular perturbation theory described above for this particular form of problems leads to solutions that are uniformly valid for finite time intervals with the property that secular terms appear. Being the exact solution of problem (3) bounded, moreover, periodic, the presence of secular terms only separates the approximate solution from the exact one.

The Lindstedt Method [3] is based on the idea that the non-linearity alters the frequency of oscillation from the frequency of the linear system. To take into account this change, a new variable is introduced $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$ where

the terms $\omega_i, \forall i \geq 1$ are chosen to prevent the appearance of secular terms.

This asymptotic approximation of the frequency and the one of the solution of the perturbed problem are substituted in (3); ε coefficients are equated to get a sequence of homogeneous and non-homogeneous linear problems and their solutions become the terms of the approximate solution multiplied by the corresponding power of the perturbation term (ε) this way each high order solution is a correction of the previous one.

Example 1: van der Pol oscillator

The equation of the van der Pol oscillator as in [4] is:

$$\ddot{x}_a + \varepsilon (x_a^2 - 1) \dot{x}_a + \omega_{a0}^2 x_a = 0 \quad (4)$$

Making the following time scale change $\tau \triangleq \omega_a t$ and defining $x' \triangleq \frac{dx}{d\tau}, x'' \triangleq \frac{d^2x}{d\tau^2}$ (4) becomes:

$$x_a'' \omega_a^2 + \varepsilon (x_a^2 - 1) \omega_a x_a' + \omega_{a0}^2 x_a = 0 \quad (5)$$

Let $x_a = x_{a0} + \varepsilon x_{a1} + \varepsilon^2 x_{a2} + \dots$ and the frequency $\omega_a = \omega_{a0} + \varepsilon \omega_{a1} + \varepsilon^2 \omega_{a2} + \dots$, then substituting in (5) and grouping coefficients of corresponding powers of ε gives the following linear ordinary differential equations:

- ε^0 coefficients:

$$x_{a0}'' + x_{a0} = 0 \quad (6)$$

- ε^1 coefficients:

$$x_{a1}'' + x_{a1} = -2 \frac{\omega_{a1}}{\omega_{a0}} x_{a0}'' + \frac{x_{a0}'}{\omega_{a0}} (1 - x_{a0}^2) \quad (7)$$

- ε^2 coefficients:

$$\begin{aligned} x_{a2}'' + x_{a2} = & -2 \frac{\omega_{a2}}{\omega_{a0}} x_{a0}'' - \frac{\omega_{a1}^2}{\omega_{a0}^2} x_{a0}'' \\ & - 2 \frac{\omega_{a1}}{\omega_{a0}} x_{a1}'' + \frac{x_{a1}'}{\omega_{a0}} (1 - x_{a0}^2) \\ & + \frac{\omega_{a1}}{\omega_{a0}^2} x_{a0}' - \frac{\omega_{a1}}{\omega_{a0}^2} x_{a0}^2 x_{a0}' - \frac{2}{\omega_{a0}} x_{a1} x_{a0}' x_{a0} \end{aligned} \quad (8)$$

Solving (6) for $x_a(0) = A_0$ and $x_a'(0) = 0$, which means $x_{a0}'(0) = x_{a1}'(0) = \dots = 0$; $x_{a1}(0) = x_{a2}(0) = \dots = 0$, the solution is $x_{a0} = A_0 \cos \tau$. Substituting it in (7) gives:

$$x_{a1}'' + x_{a1} = \frac{2A_0 \omega_{a1}}{\omega_{a0}} \cos \tau + \left[\frac{-A_0}{\omega_{a0}} + \frac{A_0^3}{4\omega_{a0}} \right] \sin \tau + \frac{A_0^3}{4\omega_{a0}} \sin 3\tau \quad (9)$$

To preserve the oscillatory nature of the system it is necessary that $\omega_{a1} = 0$ and $A_0 = 2$ to eliminate secular terms. This yields the solution $x_{a1} = \frac{3}{4\omega_{b0}} \sin \tau - \frac{1}{4\omega_{b0}} \sin 3\tau$, which substituted in (8) gives:

$$\begin{aligned} x_{a2}'' + x_{a2} = & \cos \tau \left[\frac{4\omega_{a2}}{\omega_{a0}} + \frac{1}{4\omega_{a0}^2} \right] + \cos 3\tau \left[\frac{-3}{2\omega_{a0}^2} \right] \\ & + \cos 5\tau \left[\frac{5}{4\omega_{a0}^2} \right] \end{aligned}$$

Once again, to guarantee the oscillatory nature of the solution, the restriction $\omega_{a2} = -\frac{1}{16\omega_{a0}}$ arises, defining the frequency of the van der Pol as $\omega_a = \omega_{a0} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16\omega_{a0}^2} \right)$, as in [5], [4].

Therefore the approximate solution of the quasi-linear van der Pol oscillator is as in [6],[7]:

$$x_a(t) = 2 \cos \omega_a t + \varepsilon \left(\frac{3}{4\omega_{a0}} \sin \omega_a t - \frac{1}{4\omega_{a0}} \sin 3\omega_a t \right)$$

B. Averaging Method

The averaging method obtains an approximate solution of a system $\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ where ε is a small parameter and $f(x, t, \varepsilon)$ is T -periodic in t . The method approximates the solution of this system with the solution of an averaged system obtained from averaging $f(x, t, \varepsilon)$ with $\varepsilon = 0$ [8].

Considering the second order system:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (10)$$

describing a weakly nonlinear-oscillator, it is clear that for $\varepsilon = 0$ the solution is:

$$x(t) = a \cos \phi \quad ; \quad \phi = \omega_0 t + \psi \quad (11)$$

where a, ψ are constants depending on the initial conditions.

Assuming $\varepsilon \neq 0$, but sufficiently small, then the solution of (10) can be considered still of the form (11), but with a and ψ being slowly changing functions of time [3].

Given that (10) and (11) define two equations for three variables $\{x, a, \psi\}$, a third equation is imposed :

$$\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin \phi \quad (12)$$

Therefore:

$$\dot{x}(t) = \dot{a} \cos \phi - a(\omega_0 + \dot{\psi}) \sin \phi \quad (13)$$

Equating (12) and (13) gives:

$$\dot{a} \cos \phi - a\dot{\psi} \sin \phi = 0 \quad (14)$$

The derivative of (12) with respect to time :

$$\ddot{x}(t) = -\dot{a}\omega_0 \sin \phi - a(\omega_0^2 + \omega_0 \dot{\psi}) \cos \phi$$

Substituted with (12) in (10), and simplifying gives:

$$\dot{a}\omega_0 \sin \phi + a\omega_0 \dot{\psi} \cos \phi + \omega_0^2 a \cos \phi = -\varepsilon f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) \quad (15)$$

Solving (14) and (15) for \dot{a} and $\dot{\psi}$, gives:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) \\ -\frac{\varepsilon}{a\omega_0} \cos \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Until now (11) and (16) are equivalent to (10) since no approximation has been done yet.

Both right hand sides (rhs) of equations (11) and (16) are periodic with respect to ϕ ; $\dot{a} = O(\varepsilon)$ as $\dot{\psi} = O(\varepsilon)$ so a and ψ are variables that change slowly during the period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ [3].

Integrating rhs of (16) over the period $\frac{2\pi}{\omega_0}$ and considering a and ψ constant during this period gives:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) d\phi \\ -\frac{\varepsilon}{a2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos \phi f(a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi) d\phi \end{bmatrix} \quad (17)$$

Therefore the averaged solution of (10) is expressed as $x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t))$ with $a(t)$ and $\psi(t)$ solutions of (17), being valid for a time up to $\frac{1}{\varepsilon}$ [9].

Example 2: van der Pol oscillator

Expressing (4) to match the form (10) gives :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

The approximate solution for $\varepsilon \ll 1$ is as in (11). To know the behavior of $a(t)$ and $\psi(t)$, the following auxiliary set of differential equations must be solved:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \phi (1 - a^2 \cos^2 \phi) (-a\omega_0 \sin \phi) d\phi \\ -\frac{\varepsilon}{a2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos \phi (1 - a^2 \cos^2 \phi) (-a\omega_0 \sin \phi) d\phi \end{bmatrix}$$

Simplifying the auxiliary system gives:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) \\ \dot{\psi} &= 0 \end{aligned}$$

Equation $\dot{\psi} = 0$ means that the phase of the approximate solution remains constant at ψ_0 ; and equation \dot{a} has three equilibrium points $a_1 = 0$ (unstable) and $a_2 = \pm 2$ (stable) being $a(t)$ the amplitude of oscillation $a(t) \rightarrow 2$ [10],[8].

III. PARAMETRICALLY EXCITED VAN DER POL

Overall reference for this section is the monumental work on parametric resonance [11].

Considering the quasi-linear van der Pol Oscillator with a parametric excitation applied to its natural frequency as follows:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b (1 + \alpha \cos \Omega t) &= 0 \\ \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b_0}^2 x_b &= -\alpha \omega_{b_0}^2 x_b \cos \Omega t \end{aligned} \quad (18)$$

The analysis pursued will determine the effect of this external signal on the frequency of the oscillator as well as on its amplitude.

A. Effect on frequency

Proceeding with a perturbation analysis considering time scale change $\tau \triangleq \omega_b t$ gives:

$$x_b'' \omega_b^2 + \varepsilon (x_b^2 - 1) \omega_b x_b' + \omega_{b_0}^2 x_b = -\alpha x_b \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \quad (19)$$

where $-\alpha = A = O(\varepsilon)$.

Let $x_b = x_{b_0} + \varepsilon x_{b_1} + \varepsilon^2 x_{b_2} + \dots$ and the frequency $\omega_b = \omega_{b_0} + \varepsilon \omega_{b_1} + \varepsilon^2 \omega_{b_2} + \dots$, then substituting in (19) and grouping coefficients of ε gives the following linear differential equations:

• ε^0 coefficients:

$$x_{b_0}'' + x_{b_0} = 0 \quad (20)$$

• ε^1 coefficients:

$$x_{b_1}'' + x_{b_1} = -2 \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}} x_{b_0}' + \frac{x_{b_0}'}{\omega_{b_0}} (1 - x_{b_0}^2) + \frac{A x_{b_0}}{\omega_{b_0}^2} \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \quad (21)$$

• ε^2 coefficients:

$$\begin{aligned} x_{b_2}'' + x_{b_2} &= -2 \frac{\omega_{b_2}}{\omega_{b_0}} x_{b_0}'' - \frac{\omega_{b_1}^2}{\omega_{b_0}^2} x_{b_0}'' - 2 \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}} x_{b_0}' \\ &+ \frac{x_{b_1}'}{\omega_{b_0}} (1 - x_{b_0}^2) + \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}^2} x_{b_0}' - \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}^2} x_{b_0}^2 x_{b_0}' \\ &+ \frac{x_{b_1}}{\omega_{b_0}} \left(-2x_{b_0} x_{b_0}' + \frac{A}{\omega_{b_0}} \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Solving (20) for $x_{b_0}(0) = A_0$ and $x_{b_0}'(0) = 0$, meaning that $x_{b_0}'(0) = x_{b_1}'(0) = \dots = 0$; $x_{b_1}(0) = x_{b_2}(0) = \dots = 0$ the solution is $x_{b_0} = A_0 \cos \tau$, which substituted in (21) gives:

$$\begin{aligned} x_{b_1}'' + x_{b_1} &= 2A_0 \frac{\omega_{b_1}}{\omega_{b_0}} \cos \tau + \left[\frac{-A_0}{\omega_{b_0}} + \frac{A_0^3}{4\omega_{b_0}} \right] \sin \tau \\ &+ \frac{A_0^3}{4\omega_{b_0}} \sin 3\tau + \frac{A A_0}{\omega_{b_0}} \cos \tau \cos \frac{\Omega}{\omega_b} \tau \end{aligned} \quad (23)$$

To avoid resonance it is required $\omega_{b_1} = 0$ and $A_0 = 2$. Substituting in (23) and solving:

$$\begin{aligned} x_{b_1} &= \frac{3}{4\omega_{b_0}} \sin \tau - \frac{1}{4\omega_{b_0}} \sin 3\tau + \frac{A}{\omega_{b_0}^2} \frac{2\omega_b^2}{\Omega^2 - 4\omega_b^2} \cos \tau \\ &- \frac{A}{\omega_{b_0}^2} \left(\frac{\omega_b^2}{\Omega^2 + 2\Omega\omega_b} \cos \gamma_1 \tau + \frac{\omega_b^2}{\Omega^2 - 2\Omega\omega_b} \cos \gamma_2 \tau \right) \end{aligned}$$

where $\gamma_1 = \frac{\Omega}{\omega_b} + 1$; $\gamma_2 = \frac{\Omega}{\omega_b} - 1$.

Substituting x_{b_1} in (22) as well as $\omega_{b_1} = 0$ and $A_0 = 2$ yields:

$$\begin{aligned} x_{b_2}'' + x_{b_2} &= \cos \tau \left[\frac{4\omega_{b_2}}{\omega_{b_0}} + \frac{1}{4\omega_{b_0}^2} - \frac{A^2 \omega_b^2}{\omega_{b_0}^4 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right] \\ &+ \sin \tau \left[\frac{4A\omega_b^2}{\omega_{b_0}^3 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right] + \cos 3\tau \left[\frac{-3}{2\omega_{b_0}^2} \right] \\ &+ \sin 3\tau \left[\frac{10A\omega_b^2}{\omega_{b_0}^3 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right] \\ &+ \cos 5\tau \left[\frac{5}{4\omega_{b_0}^2} \right] + h.f.t.* \end{aligned}$$

*h.f.t. higher frequency terms

To avoid resonance two simultaneous restrictions arise:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\omega_{b_2}}{\omega_{b_0}} + \frac{1}{4\omega_{b_0}^2} - \frac{A^2 \omega_b^2}{\omega_{b_0}^4 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} \right) &= 0 \\ \frac{4A\omega_b^2}{\omega_{b_0}^3 (\Omega^2 - 4\omega_b^2)} &= 0. \end{aligned}$$

Substituting $\omega_b = \omega_{b_0} + \varepsilon^2 \omega_{b_2}$ defines a polynomial of ω_{b_2} with three possible solutions:

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{b_2}^3 (-64\varepsilon^4 \omega_{b_0}) \\ &+ \omega_{b_2}^2 (-128\varepsilon^2 \omega_{b_0}^2 - 4\varepsilon^4 - 4\alpha^2 \varepsilon^4 \omega_{b_0}^2 + 16\alpha \varepsilon^4 \omega_{b_0}) \\ &+ \omega_{b_2} (16\Omega^2 \omega_{b_0} - 64\omega_{b_0}^3 - 8\varepsilon^2 \omega_{b_0} - 8\alpha^2 \varepsilon^2 \omega_{b_0}^3 + 32\alpha \varepsilon^2 \omega_{b_0}^2) \\ &+ (\Omega^2 - 4\omega_{b_0}^2 - 4\alpha^2 \omega_{b_0}^4 + 16\alpha \omega_{b_0}^3) \end{aligned} \quad (24)$$

In Fig. 1 these possible solutions are shown for particular values of Ω , ω_{b_0} , α and ε .

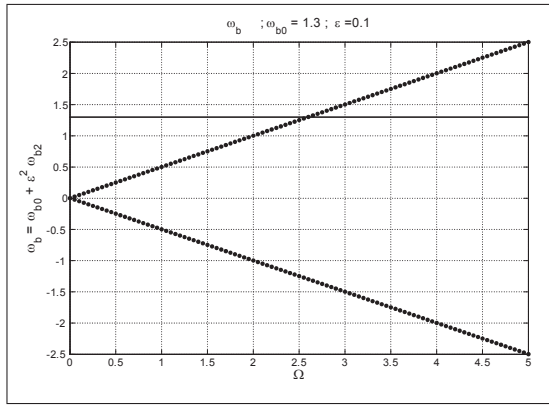


Fig. 1. Three values of ω_b (solid) for the three possible solutions of (24) for $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectively

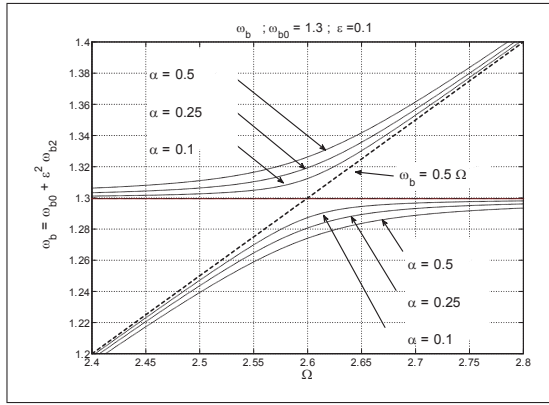


Fig. 2. Zoom in around $\Omega = 2\omega_{b0}$ of Fig. 1.

Expressing the solution of the parametrically excited van der Pol Oscillator as $x_b(t) = x_{b0} + \varepsilon x_{b1}$, gives:

$$\begin{aligned} x_b(t) = & 2 \cos \omega_b t + \varepsilon \frac{3}{4\omega_{b0}} \sin \omega_b t - \varepsilon \frac{1}{4\omega_{b0}} \sin 3\omega_b t \\ & - \alpha \varepsilon \frac{2\omega_b^2}{\Omega^2 - 4\omega_b^2} \cos \omega_b t \\ & + \alpha \varepsilon \frac{\omega_b^2}{\Omega^2 + 2\omega_b \Omega} \cos(\Omega + \omega_b) t \\ & + \alpha \varepsilon \frac{\omega_b^2}{\Omega^2 - 2\omega_b \Omega} \cos(\Omega - \omega_b) t \end{aligned}$$

After a denominator analysis of this expression, restrictions arise for ω_b , being $\omega_b \neq \pm \frac{\Omega}{2}$, which are displayed in Fig. 2 as well as the three possible frequencies ω_b , therefore the frequency left is $\omega_b \approx \omega_{b0}$.

B. Effect on amplitude

From (18) define $x_1 \triangleq x_b$, $x_2 \triangleq \dot{x}_b$, then:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon(x_1^2 - 1)x_2 - \omega_{b0}^2 x_1(1 + \alpha \cos \Omega t) \end{aligned}$$

For $\alpha \ll 1$ the equilibrium point is $(x_1, x_2) = (0, 0)$ and the nullclines of the system are:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_2 &= \frac{\omega_{b0}^2 x_1(1 + \alpha \cos \Omega t)}{\varepsilon(1 - x_1^2)} \end{aligned}$$

The second nullcline changes for every second in a period $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, this change is bounded and does not modify the equilibrium point, but does modify the limit cycle at every second. Due to the modulation the limit cycle goes through for $t \in [0, T)$, $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, a resulting limit cycle appears as shown in Fig. fs3.

It is clear that the amplitude of the van der Pol oscillator becomes function of the amplitude of the parametric excitation, α . To confirm this fact an averaging analysis is done.

Proceeding with the averaging analysis, equation (18) is rewritten as:

$$\begin{aligned} \dot{x}_b + \omega_{b0}^2 x_b &= -\varepsilon(x_b^2 - 1)\dot{x}_b - \alpha \omega_{b0}^2 x_b \cos \Omega t \\ \dot{x}_b + \omega_{b0}^2 x_b &= f(x_b, \dot{x}_b) \end{aligned}$$

and the solution is assumed as:

$$\begin{aligned} x_b &= a(t) \cos(\omega_b t + \psi(t)) = a \cos \phi \\ x_b &= -a(t) \omega_b \cos(\omega_b t + \psi(t)) = -a \omega_b \sin \phi \end{aligned} \quad (25)$$

Where $a(t)$ and $\psi(t)$ are such that:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{-1}{2\pi \omega_b} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a \omega_b \sin \phi) \sin \phi d\phi \\ \dot{\psi} &= \frac{-1}{2\pi a \omega_b} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a \omega_b \sin \phi) \cos \phi d\phi \end{aligned}$$

Recall from the previous section that $\omega_b = \omega_{b0}$.

Therefore the dynamics of $a(t)$ and $\psi(t)$ of the parametrically excited van der Pol is given by:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) + \frac{\alpha \omega_{b0}^2 a}{8\pi \omega_b} \int_0^{2\pi} [\sin(q^+) + \sin(q^-)] d\phi \\ \dot{\psi} &= \frac{\alpha \omega_{b0}^2}{8\pi \omega_b} \int_0^{2\pi} [\cos(q^+) + 2 \cos \Omega t + \cos(-q^-)] d\phi \end{aligned}$$

where $q^\pm = 2\phi \pm \Omega t$.

Remark 1: From simulations and frequency analysis it is known that the behaviour is different for $\Omega = 2\omega_b$ and for $\Omega \neq 2\omega_b$. Being of our interest the first case.

Let $\Omega = 2\omega_b$ then:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right) + \frac{\alpha \omega_{b0}^2 a}{4\omega_b} \sin(2\psi) \\ \dot{\psi} &= \frac{\alpha \omega_{b0}^2}{4\omega_b} \cos(2\psi) \end{aligned}$$

Clearly, the phase ψ is independent from the amplitude

a. The equilibrium points of ψ are $\psi_{eq} = \left\{ \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4} \right\}$ where $\psi_{eq1} = \frac{\pi}{4}, \psi_{eq4} = -\frac{3\pi}{4}$ are stable and the second pair $\psi_{eq3} = \frac{3\pi}{4}, \psi_{eq2} = -\frac{\pi}{4}$ are unstable. The region of attraction of each stable equilibrium point is:

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \psi_{eq1} \quad \forall \psi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \\ \psi &\longrightarrow \psi_{eq4} \quad \forall \psi \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right) \text{ mod } \pi \end{aligned} \quad (26)$$

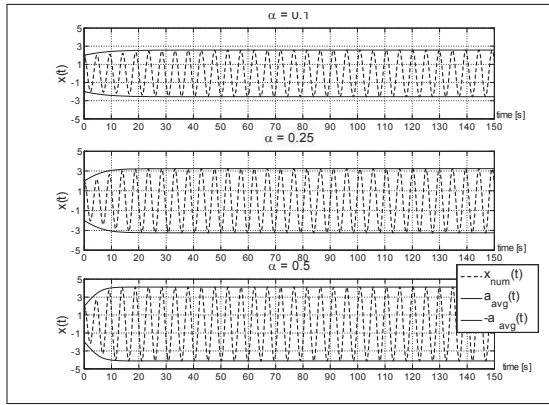


Fig. 3. Numerical solution $x(t)$ bounded by the approximation amplitude $\pm a(t)$ for $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectively.

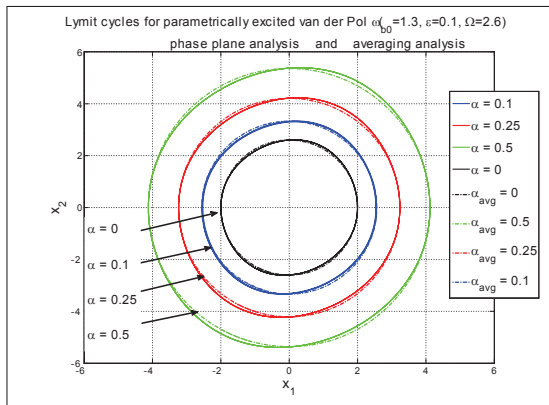


Fig. 4. Limit cycle of the numerical solution (solid) and of the approximate solution (dashed) for $\alpha = \{0.1, 0.25, 0.5\}$ respectively.

Analyzing the amplitude equation, its equilibrium points are $a_{\bar{e}q} = \left\{0, \pm 2\sqrt{1 + \frac{2\zeta}{\varepsilon}}\right\}$ for the phase $\psi \rightarrow \psi_{eq4}, \psi_{eq1}$ where $\zeta = \frac{\alpha\omega_{b0}^2}{4\omega_b}$; the equilibrium points of a corresponding to ψ_{eq2}, ψ_{eq3} are uninteresting given that they are saddle points.

It can be seen from (26) that for $\psi \in (-\pi, \pi)$ the whole domain belongs to the region of attraction of ψ_{eq1} and ψ_{eq4} . Therefore the amplitude of the parametrically excited van der Pol oscillator is:

$$\bar{a} = \pm 2\bar{\chi}(\alpha) \quad (27)$$

where $\bar{\chi}(\alpha) = \sqrt{1 + \frac{2\zeta}{\varepsilon}}$.

Being $a(t)$ the amplitude of oscillation of the assumed solution, it becomes an upper ($\bar{a} > 0$) and lower ($\bar{a} < 0$) bound of $x(t)$. This can be seen in Fig. 3 where, for the same values as in the example of the phase space analysis, $a(t)$ matches the amplitude attained by $x(t)$ for each α used.

In the phase plane the difference between the assumed solution (25) and the numerical one is almost none as seen in Fig. 4.

Remark 2: The amplitude bounds (27) and their corresponding phases match the stable equilibrium points obtained in [1] when $d = 0$ after making the required change of coordinates. Therefore confirming that $|\bar{a}|$ is the amplitude of the solution of (18) for all initial conditions.

IV. PARAMETRICALLY EXCITED FORCED AND FORCING VAN DER POL

A. Forced Case

Consider two van der Pol oscillators which differ only on their natural frequencies. The first oscillator is free and is forcing the parametrically excited one:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + \varepsilon(x_a^2 - 1)\dot{x}_a + \omega_{a0}^2 x_a &= 0 \\ \ddot{x}_b + \varepsilon(x_b^2 - 1)\dot{x}_b + \omega_{b0}^2 x_b &= -\alpha\omega_{b0}^2 x_b \cos \Omega t + kx_a \end{aligned}$$

It is known that the major effect on $x_b(t)$ arises for parametric excitation frequency $\Omega = 2\omega_{b0}$ and consists on increase of the amplitude of oscillation that can be expressed as in (27). Given that $\bar{\chi}(\alpha) > 1$ for $\alpha \neq 0$, then:

$$|x_b(t)|_{\alpha \neq 0} > |x_b(t)|_{\alpha = 0} \quad \forall t \quad (28)$$

Remark 3: Roughly speaking, the van der Pol oscillator establishes its amplitude such that the non linear dissipative term $\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x}$ is such that it injects and dissipates the same amount of energy each cycle. When parametric excitation is present with $\Omega = 2\omega_{b0}$, an extra amount of energy is injected, which makes that the amplitude increases to maintain the net energy per cycle equal zero.

From (28) it is expected that the strength required to suppress the natural frequency of the parametrically excited van der Pol oscillator will be $k_{\alpha \neq 0} > k_{\alpha = 0}$. Moreover, knowing the critical strength $k_{c, \alpha = 0}$ that achieves the suppression of the natural frequency in the absence of parametric excitation, the strength required, $k_{n, \alpha \neq 0}$, when the excitation exists is bounded by:

$$\bar{\chi}(\alpha) k_{c, \alpha = 0} > k_{n, \alpha \neq 0} > k_{c, \alpha = 0} \quad (29)$$

To confirm this, a set of simulations were done making $\alpha = \varepsilon = 0.1, \Omega = 2.6$, natural frequencies $\omega_{b0} = 1.3$ and $\omega_{a0} = 1.2$, and $k = [\bar{\chi}(\alpha) k_{c, \alpha = 0}; k_{n, \alpha \neq 0}; k_{c, \alpha = 0}]$. Results are summarized in Fig. 5 where the power spectrum of the forced van der Pol oscillator is shown for each k .

It is noticeable that for $k = k_{c, \alpha = 0}$ the forcing oscillator has suppressed the natural frequency of the forced oscillator without parametric excitation though it has not been able to do so in the case with parametric excitation. For $k = \bar{\chi}(\alpha) k_{c, \alpha = 0}$ the natural frequency ω_{b0} of the forced oscillator is suppressed for both cases. The bounds (29) are confirmed by this simulation.

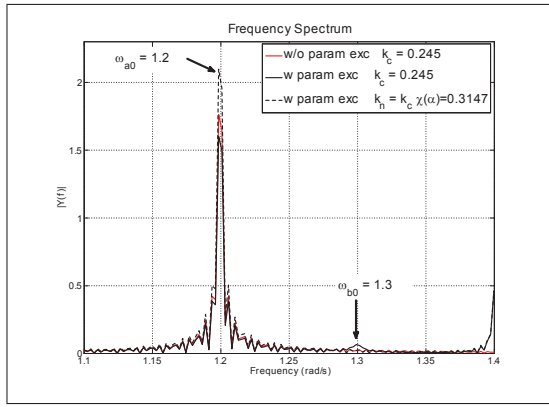


Fig. 5. Power Spectrum of parametrically excited van der Pol forced by a second oscillator

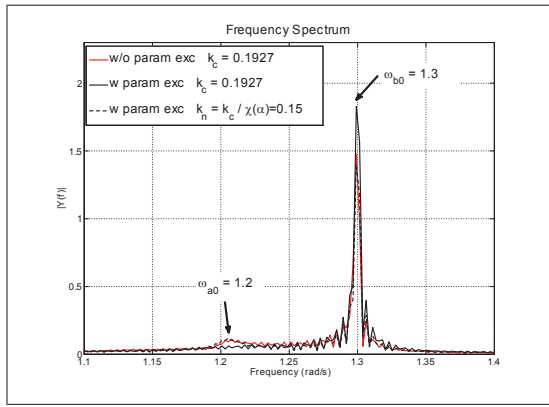


Fig. 6. Power Spectrum of a van der Pol forced by a parametrically excited van der Pol.

B. Forcing case

Once again consider two van der Pol oscillators which differ only on their natural frequencies. The first oscillator is forced by the second oscillator which is the parametrically excited van der Pol:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + \varepsilon (x_a^2 - 1) \dot{x}_a + \omega_{a0}^2 x_a &= k x_b \\ \ddot{x}_b + \varepsilon (x_b^2 - 1) \dot{x}_b + \omega_{b0}^2 x_b &= -\alpha \omega_{b0}^2 x_b \cos \Omega t \end{aligned}$$

Let $\Omega = 2\omega_{b0}$, then the solution of the forcing van der Pol is expressed as in (27); (28) is true, therefore it is expected that the strength required to suppress the natural frequency of the second oscillator will be $k_{\alpha \neq 0} < k_{\alpha=0}$. Moreover $k_{n, \alpha \neq 0}$ will be bounded by:

$$k_{c, \alpha=0} > k_{n, \alpha \neq 0} > \frac{k_{c, \alpha=0}}{\bar{\chi}(\alpha)} \quad (30)$$

To confirm this, a new set of simulations were done with the same parameters as in the previous section. Results are summarized in Fig. 6, where the power spectrum of the forced oscillator is shown.

It is noticeable that for $k = k_{c, \alpha=0}$ the forcing oscillator parametrically excited has suppressed the natural frequency ω_{a0} though it has not been completely suppressed in the absence of parametric excitation; a similar result is obtained

for $k = \frac{k_{c, \alpha=0}}{\bar{\chi}(\alpha)}$ for which the natural frequency ω_{a0} is almost suppressed even if parametric excitation is applied. The bounds (30) are confirmed by this simulation.

V. CONCLUSION

The effect of parametric excitation applied on the natural frequency of the quasi-linear free van der Pol oscillator is an increase of the amplitude of oscillation of the solution as a function of the amplitude of the parametric excitation. This was used to determine upper and lower bounds for the coupling strength required by an external signal to force a parametrically excited van der Pol; similarly, bounds were determined for the case of a parametrically excited van der Pol oscillator forcing a second oscillator. We consider that the gain of amplitude in the parametrically excited oscillator will be an asset in the context of synchronization of two oscillators allowing a reduction of the coupling strength required to achieve a common frequency of oscillation. Further work includes the analysis of bidirectional coupling of two parametrically excited van der Pol oscillators, this in the context of synchronization with the intent of determining the coupling strength required to achieve it.

VI. ACKNOWLEDGEMENT

O. Mimila-Prost is sponsored through a scholarship by CONACYT.

REFERENCES

- [1] F. Veerman and F. Verhulst, "Quasiperiodic phenomena in the van der pol-mathieu equation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 326, pp. 314–320, 2009.
- [2] J. Murdock, *Perturbations. Theory and Methods*. USA: John Wiley and Sons, 1991.
- [3] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*. USA: John Wiley and Sons, 1973.
- [4] B. van der Pol, "The nonlinear theory of electric oscillations," *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, vol. 22, no. 9, pp. 1051–1086, September 1934.
- [5] A. A. Dorodnitsyn, "Asymptotic solution of van der pol's equation," *Prikl. Mat. i Meh. (Transl Amer Math Soc 88 1953)*, no. 11, pp. 313–328, 1947.
- [6] P. Hagedorn, *Non-Linear Oscillations*, 2nd ed. Great Britain: Oxford Science Publications, 1988.
- [7] J. Kevorkian and J. D. Cole, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [8] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. USA: Ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.
- [9] J. Sanders and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. USA: Springer-Verlag, 1985.
- [10] N. Kryloff and N. Bogoliuboff, *Introduction to Non-linear Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1947.
- [11] V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii, *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients Vol I and II*. John Wiley and Sons, 1975.