

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Control Automático

Control de Sistemas No Lineales con Retardo en la Entrada

Tesis que presenta

José Jairo Ordaz Jiménez

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Control Automático

Director de Tesis

Dra. Sabine S. Mondié Cuzange

México, D.F.

Enero 2012

Agradecimientos

A mis padres

Elia Jiménez y Adan Ordaz, por instruir con su entrega, esfuerzo y dedicación el anhelo de superación en mi vida y con esto permitirme alcanzar las metas que me he propuesto en la vida.

A mis hermanos

Irais, Nestor y Didier, por brindarme el apoyo, el consejo y el respaldo en los momentos en que los he necesitado.

A mi asesor de tesis

Dra. Sabine S. Mondié Cuzange, por brindarme la oportunidad de ser su estudiante de maestría, por el tiempo, la dedicación y la confianza que me brindo para el desarrollo de esta tesis.

A los doctores

Dr. Hugo Romero Trejo y al Dr. Sergio Salazar Cruz, por la disposición y el tiempo para el desarrollo de esta tesis; y mas aun por brindarme la confianza, la amistad y el consejo durante mi estancia en el laboratorio.

A la Unidad Mixta Internacional UMI

Por proporcionar los elementos requeridos para desarrollar la parte practica de esta tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Por el apoyo económico através de la beca de posgrado que me fue otorgado.

Resumen

El marco de esta contribución son los sistemas con retardo y su aplicación a los sistemas dinámicos no lineales. El problema a resolver es el retardo de las señales en la entrada y salida. El enfoque a utilizar es el cálculo de un predictor de estados el cual es utilizado en el controlador y esta diseñado para el sistema libre de retardo. La construcción de esta señal esta basada en la serie de Taylor con resto integral o en el teorema fundamental del cálculo. Los resultados son analizados para sistemas de tipo Feedforward. Los resultados obtenidos son implementados en la plataforma experimental, el mini helicoptero denominado cuadrirotor (Quadrotor) donde los datos son obtenidos a través de un sistema de posicionamiento global (GPS) o a través de un sistema de vision.

Abstract

The framework of this contribution is delay systems and its application to dynamic nonlinear systems. The problem to solve is the delay in input/output signals. The approach we use is the computation of a prediction of the states which is engaged in the controller and designed for the delay free system. The construction of this signal is based on Taylor series with remainder or equivalent on the fundamental theorem of calculus. The results are analyzed for feedforward systems. The obtained results are tested on an experimental setup: a quadri-rotor mean helicopter (Quadrotor) where the data are obtained by Global Positioning System (GPS) or through a vision system.

Índice de figuras

2.1	Intercambio del orden de integración	8
2.2	Función Saturación	9
3.1	Zonas de estabilidad para el espacio (τ, k_1)	17
3.2	Gráfico del cambio del argumento para zona 1	18
3.3	Gráfico del cambio del argumento para zonas 2, 3, 4, 5	18
3.4	Implementación del Predictor de estados para el estado x_1	22
3.5	Dinámica del estado x_1 y el predictor de estado en margen reducido	22
3.6	Gráfica del error de seguimiento en x_1 , $\tau = 1.3s$	24
3.7	Gráfica del control, $\tau = 1.3s$	25
3.8	Dinámica del estado x_1 , $\tau = 1.3s$	26
3.9	Gráfica del error de seguimiento en x_1 , $\tau = 1.4$	27
3.10	Gráfica de control, $\tau = 1.4s$	28
3.11	Dinámica del estado x_1 , $\tau = 1.4s$	29
4.1	Cadena de integradores de orden 4	38
4.2	Estado x_1 , $\tau_s = 0.12s$, $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24)s$	52
4.3	Estado y_1 , $\tau_s = 0.12s$, $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24)s$	53
4.4	Estado z_1 , $\tau_s = 0.12s$, $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24)s$	54
4.5	Gráfica del control u , $\tau_s = 0.12s$, $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24)s$	55
4.6	Control τ_θ , $\tau_s = 0.12s$, $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24)s$	56
4.7	Control τ_ϕ , $\tau_s = 0.12s$, $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24)s$	57
5.1	Diagrama a bloques. Plataforma experimental X_4	60

ÍNDICE DE FIGURAS

5.2	Esquema general del sistema de control	61
5.3	Cuadri-rotor sin predicción. Comportamiento natural del sistema	63
5.4	Cuadri-rotor sin predicción. Comportamiento natural del sistema	64
5.5	Predicción de estado $\tau_p = 1s$	65
5.6	Cuadri-rotor con predicción $\tau = 300ms$	66
5.7	Cuadri-rotor con predicción $\tau = 300ms$	67

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	I
Abstract	III
I Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Antecedentes.....	2
1.3 Contribuciones	2
1.4 Organización de la tesis	2
II Desarrollo del Predictor de Estados	5
2.1 Formula de Taylor con resto integral	5
2.2 Cambio de orden en los limites de integración.....	7
2.3 Regla de Leibniz	8
2.4 Función saturación	9
2.5 Diseño de predictor de estados	10
2.5.1 Predictor en base a la formula de Taylor	10
2.5.2 Predictor en base al teorema fundamental del cálculo	11

III Control de una cadena de integradores	13
3.1 Análisis en D-Particiones	13
3.1.1 Gráfico en D-Particiones	16
3.2 Predictor de estados para una cadena de integradores de orden 2	19
3.2.1 Predictor Para el estado x_1	19
3.2.2 Implementación del predictor de estados	20
3.2.3 Resultados	21
3.3 Predictor de estado Para retardos críticos	23
 IV Control de un Cuadri-rotor	 31
4.1 Cuadri-rotor	31
4.2 Modelado del Cuadri-rotor	32
4.3 Ley de control con saturaciones anidadas	36
4.3.1 Control de altura y Control de Yaw	36
4.3.2 Control de posición en el eje Y y control de Roll	37
4.3.3 Control de posición en el eje x y control de Pitch	42
4.4 Ecuaciones dinámicas	43
4.5 Predictor de estados	44
4.5.1 Estado $x_1(t)$	44
4.5.2 Estado $y_1(t)$	46
4.5.3 Estado $z_1(t)$	49
4.5.4 Resultados	51
4.6 Conclusiones	58
 V Implementación	 59
5.1 Descripción de la plataforma experimental	59
5.1.1 Esquema de control	60
5.1.2 Plataforma experimental	61
5.2 Resultados	62

VI Conclusiones	69
6.1 Conclusiones finales.....	69
6.2 Aportaciones.....	70
6.3 Trabajo a futuro	70
Bibliografía	70
A Apéndice	75
A.1 Estado $x_2(t)$	75
A.2 Estado $y_2(t)$	77
A.3 Estado $z_2(t)$	80
A.4 Estado $\gamma_1(t)$	82
A.5 Estado $\gamma_2(t)$	84
A.6 Estado $\theta_1(t)$	86
A.7 Estado $\theta_2(t)$	87
A.8 Estado $\phi_1(t)$	89
A.9 Estado $\phi_2(t)$	91

I

Introducción

1.1. Motivación

Los sistemas con retardos surgen en áreas tan diversas como la biología, la física, ingeniería y la economía por nombrar algunas. El retardo surge como resultado de 2 fenómenos, el transporte de materiales o el envío de información. El efecto del retardo en un sistema puede tener efectos benéficos o en detrimento de la dinámica del sistema. Un sistema retroalimentado puede ser estable sin un retardo y volverse inestable con ciertos retardos; o caso inverso, la introducción de un retardo puede volver estable la dinámica de un sistema inestable. En la actualidad existe el interés por conocer el efecto del retardo en los sistemas y lograr diseñar controladores para sistemas complejos. En particular el efecto del retardo sobre sistemas interconectados, en los cuales los múltiples sensores, actuadores y controladores inducen múltiples retardos. En este tipo de sistemas, el retardo puede surgir de la disponibilidad de la comunicación. En el desarrollo de este trabajo se hará hincapié en el helicóptero de cuatro rotores (denominado cuadri-rotor de ahora en adelante)

Para propósitos de este trabajo, se asume la existencia de un retardo en la entrada del sistema, el cual es conocido, constante y de amplitud tal que el sistema es estable. El propósito es desarrollar una metodología que permita reconstruir a partir de la información actual del sistema y del control la dinámica de los estados libre de retardo.

1.2. Antecedentes

El análisis para sistemas con retardos es una línea de investigación que actualmente esta en desarrollo, en [26] se detallan los efectos del retardo en múltiples áreas como las redes de computadoras, el trafico vehicular, los procesos de manufactura y los procesos biológicos; se describen ademas técnicas como el ajuste de los valores propios del sistema u otras basadas en el enfoque de Lyapunov. En [30] se muestra un conjunto de los resultados actuales para sistemas con retardo que incluye sistemas lineales, no lineales, con enfoque LMI, para controles de tipo optimo, basado en modos deslizantes; se describen ademas problemas de investigación recientes en esta área. En [27] se presenta un resultado clásico para sistemas con retardos, el denominado predictor de Smith que bajo una retroalimentacion del sistema sin retardo reduce el efecto de este. En [3] se detallan condiciones de estabilidad para sistemas no lineal de tipo Feedforward no lineales, en [2] se describen las condiciones de estabilidad para sistemas con retardo en la medición y en la entrada.

1.3. Contribuciones

- Desarrollo de una metodología para la obtención de predictores en base al teorema de Taylor y al teorema fundamental del cálculo.
- Implementación del predictor de estados en la plataforma experimental cuadri-rotor.

1.4. Organización de la tesis

En el capítulo 2 se presenta el desarrollo del predictor de estados basado en el teorema de Taylor y en el teorema fundamental del cálculo, ademas se definen ciertos conceptos que facilitaran el análisis como lo son la regla de Leibniz y el cambio en el orden de integración de una doble integral; en el capítulo 3 se aborda el diseño del predictor de estados y el análisis en D-Particiones para una cadena de integradores de orden 2, se analiza el desempeño del predictor de estados para retardos máximos que afectan el desempeño del sistema. En el capítulo 4 se presenta el modelado matemático y el análisis de estabilidad

1.4 Organización de la tesis

de una ley de control con saturaciones anidadas, además se desarrolla el predictor para los estados x_1 , y_1 y z_1 . En el capítulo 5 se presentan los resultados de implementar en la plataforma experimental cuadri-rotor el predictor de estados para x_1 y y_1 . En el apéndice se presenta el desarrollo del predictor para los estados x_2 , y_2 , z_2 , θ_1 , θ_2 , ϕ_1 , ϕ_2 , γ_1 , γ_2 .

II

Desarrollo del Predictor de Estados

En este capítulo se analiza con especial énfasis la denominada serie de Taylor con resto integral (o termino de error). Se describe la metodología para el desarrollo del predictor de estados basado tanto en la serie de Taylor como en el teorema fundamental del cálculo. Esta metodología sera posteriormente aplicada a una subfamilia de sistemas de tipo FeedForward.

2.1. Formula de Taylor con resto integral

Sea f una función definida en un intervalo $[a, b] \in R$. Si las derivadas de $n - \text{esimo}$ orden existen para todo $x \in [a, b]$, podemos decir que $f \in C^\infty$ en $[a, b]$, es decir, que f es infinitamente derivable en el intervalo $[a, b]$.

La serie de potencia

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k \quad (2.1)$$

es denominada Serie de Taylor para f alrededor del punto c , es decir, podemos reconstruir la función f a partir de una sumatoria de un numero infinito de términos alrededor del punto c .

Teorema 2.1 Sea $f \in C^\infty$ (infinitamente diferenciable) en un cierto intervalo $[a, b]$ y si

ademas $c \in [a, b]$, entonces para cada $x \in [a, b]$ y para cada n , tenemos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + E_n(x) \quad (2.2)$$

con $E_n(x)$ (denominado término error o término integral) definido de la siguiente forma

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x - l)^n f^{(n+1)}(l) dl \quad (2.3)$$

Se puede reconstruir f a partir de una sumatoria de $n + 1$ términos alrededor del punto c .

Demostración. Se verifica por inducción. Para $n = 1$, el polinomio tiene la forma

$$f(x) = f(a) + \dot{f}(a)(x - a) + E_1(x) \quad (2.4)$$

Considerando que $(x - a) = \int_a^x 1 dl$, se tiene que

$$\begin{aligned} E_1(x) &= f(x) - f(a) - \dot{f}(a)(x - a) \\ E_1(x) &= \int_a^x \dot{f}(l) dl - \dot{f}(a) \int_a^x dl \\ E_1(x) &= \int_a^x [\dot{f}(l) - \dot{f}(a)] dl \end{aligned}$$

Integrando por partes con $u = \dot{f}(l) - \dot{f}(a)$ y $v = (l - x)$. Asimismo $\frac{dv}{dl} = 1$ y $\frac{du}{dl} = \ddot{f}(l)$.

Entonces

$$E_1(x) = \int_a^x u dv = ([\dot{f}(l) - \dot{f}(a)][l - x])|_a^x - \int_a^x (l - x) \ddot{f}(l) dl$$

el resultado corresponde al polinomio de aproximación para $n = 1$.

La hipótesis de inducción para el caso n es la siguiente.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + E_n(x) \quad (2.5)$$

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - l)^n f^{(n+1)}(l) dl \quad (2.6)$$

2.2 Cambio de orden en los limites de integración

Para el caso $n + 1$ se tiene que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k + E_{n+1}(x)$$

Restando la formula de Taylor para $n + 1$ y n se tiene que

$$E_{n+1}(x) = E_n(x) - \frac{f^{n+1}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Utilizando la expresión del término integral $E_n(x)$ y el hecho de que $\int_a^x (x-l)^n dl = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-l)^n f^{n+1}(l) dl - \frac{f^{n+1}(a)}{n!} \int_a^x (x-l)^n dl \\ E_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-l)^n [f^{n+1}(l) - f^{n+1}(a)] dt \end{aligned}$$

Integrando por partes con $u = f^{n+1}(l) - f^{n+1}(a)$ y $v = -\frac{(x-l)^{n+1}}{(n+1)}$ se tiene que

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x u dv \\ E_{n+1}(x) &= -\frac{1}{n!} \int_a^x v du \\ E_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-l)^{n+1} f^{n+2}(l) dl \end{aligned} \tag{2.7}$$

Con lo que el resultado queda demostrado. ■

2.2. Cambio de orden en los limites de integración

La expresión $\int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s f(l) dl ds$ es encontrada frecuentemente en la literatura. Se cumple que

$$\int_{t-\tau}^t f(l)[t-l] dl = \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s f(l) dl ds \tag{2.8}$$

La ecuación 2.8 cumple la igualdad siguiente

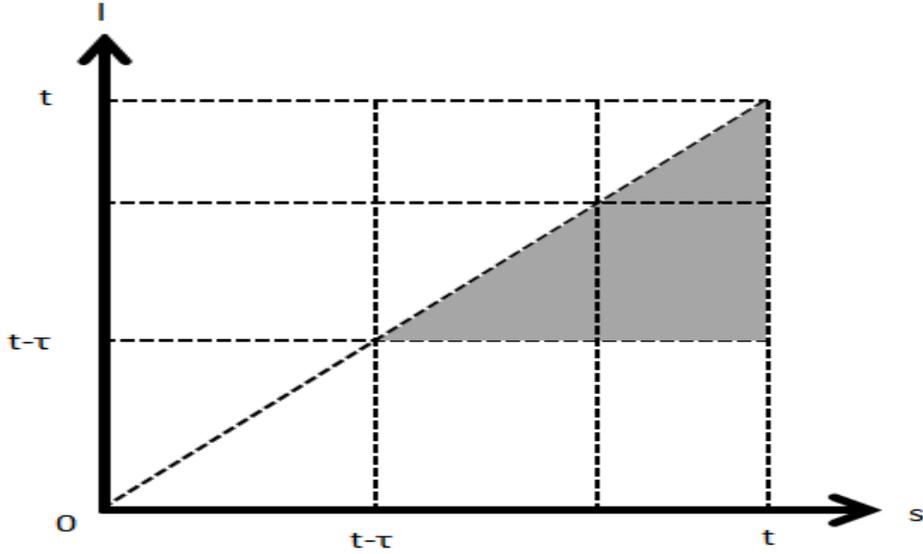


Figura 2.1: Intercambio del orden de integración

$$\begin{aligned}
 \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s f(l) dl ds &= \int_{t-\tau}^t \int_l^t f(l) ds dl \\
 &= \int_{t-\tau}^t f(l) \int_l^t 1 ds dl \\
 &= \int_{t-\tau}^t f(l)(t+l) dl
 \end{aligned}$$

donde se plantea el cambio en el orden de integración basado en el teorema de Fubini [22]. Realizando la integración, primero con respecto a l y posteriormente con respecto a s , tenemos que $t - \tau \leq l(s) \leq s$, donde $l(s) = s$ define la diagonal y $l(s) = t - \tau$ define la recta paralela al eje s para $t - \tau \leq s \leq t$.

Considerando la integración, primero con respecto a s y posteriormente con respecto a l , tenemos que $l \leq s(l) \leq t$, donde $s(l) = t$ define la recta paralela al eje l y $s(l) = l$ define la diagonal principal.

2.3. Regla de Leibniz

El resultado mostrado a continuación puede ser analizado a profundidad en [11].

Proposición 2.1 Sean $\varphi_1(t)$ y φ_2 diferenciables en $[a, b]$, la función $f(t, \tau) \in \mathbb{R}_{[a,b]}(\alpha)$ es

2.4 Función saturación

diferenciable en t y continua en τ para cualquier $t \in [a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau=\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} f(t, \tau) d\alpha(\tau) = \varphi_2' f(t, \varphi_2(t)) - \varphi_1' f(t, \varphi_1(t)) + \int_{\tau=\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau) d\alpha(\tau)$$

2.4. Función saturación

Se denomina función saturación $\sigma : R \rightarrow R$ a la función definida por

$$\sigma(s) = M \text{ si } s > M$$

$$\sigma(s) = s \text{ si } -M < s < M$$

$$\sigma(s) = -M \text{ si } s < -M$$

con la propiedad $[s\sigma(s) > 0, \forall s \neq 0]$ para $M > 0$. El comportamiento de esta función se ilustra en la figura siguiente:

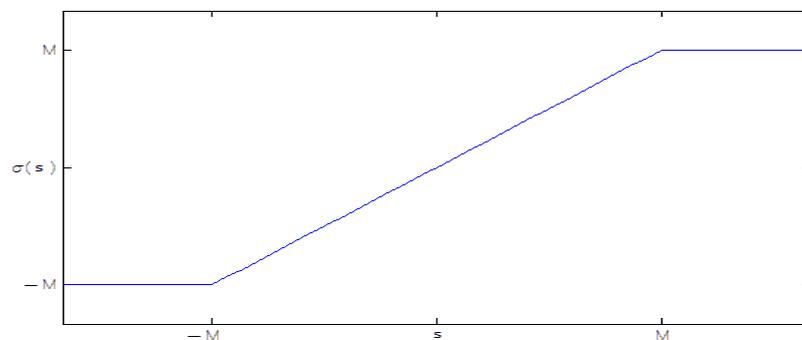


Figura 2.2: Función Saturación

2.5. Diseño de predictor de estados

2.5.1. Predictor en base a la formula de Taylor

De acuerdo a la ecuación 2.2, con el termino error definido en la ecuación 2.3, se procede al desarrollo del predictor de estados. Sea la formula de Taylor con centro en (t) alrededor del punto $(t - \tau)$ con $(n = 1)$, la formula de Taylor tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f(t - \tau) + \dot{f}(t - \tau)(t - t + \tau) + \int_{t-\tau}^t (t - l)\ddot{f}(l)dl \\
 f(t) &= f(t - \tau) + \dot{f}(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t (t - l)\ddot{f}(l)dl
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $f(t)$ puede ser calculada en base a valores en tiempos pasados de esta función y valores pasados de la derivada de esta función. Consideremos dentro de la familia de sistemas los denominados Feedforward (sistemas no lineales cuya dinámica es descrita por ecuaciones que tienen una estructura triangular) la subfamilia conformada por las cadenas de integradores (ver [5]) con la estructura siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + x_3(t) + \dots + x_n(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + x_4(t) + \dots + x_n(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\
 \dot{x}_n(t) &= u(t - \tau)
 \end{aligned}$$

donde $x_i \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$ es el retardo del sistema. Sea la cadena de integradores de orden $n = 2$, al expresar la ecuación 2.9 en términos de (x_1, x_2, u) , se tiene

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t (t - l)u(t - \tau)dl \tag{2.10}$$

donde $x_1(t)$ (señal libre de retardo) puede ser calculado a partir de los estados retardados del sistema y el control.

2.5 Diseño de predictor de estados

2.5.2. Predictor en base al teorema fundamental del cálculo

Sea $f(t)$ una función continua, con base en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $f(s)$ en los límites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\int_{t-\tau}^t \dot{f}(s) ds = f(t) - f(t - \tau)$$
$$f(t) = f(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{f}(s) ds$$

De manera equivalente, se tiene que

$$f(t) = f(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [\dot{f}(s) + \dot{f}(t - \tau) - \dot{f}(t - \tau)] ds$$

$$f(t) = f(t - \tau) + \dot{f}(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s \ddot{f}(l) dl ds$$

Reescribiendo la doble integral y considerando el cambio en el orden de integración descrito en la sección 2.2, se tiene que

$$f(t) = f(t - \tau) + \dot{f}(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t \int_l^t \ddot{f}(l) ds dl$$

$$f(t) = f(t - \tau) + \dot{f}(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t \ddot{f}(l) \int_l^t 1 ds dl$$

La integral interior no depende ahora del límite de integración, por lo que se reduce a

$$f(t) = f(t - \tau) + \dot{f}(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t \ddot{f}(l) [t - l] dl$$

Reordenando

$$f(t) = f(t - \tau) + \dot{f}(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t [t - l] \ddot{f}(l) dl \quad (2.11)$$

Sea la cadena de integradores de orden $n = 2$, al expresar la ecuación 2.11 en términos

de (x_1, x_2, u) se tiene que:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t (t - l)u(t - \tau)dl \quad (2.12)$$

Cabe observar que los resultados obtenidos mediante el enfoque de Taylor con resto integral descrito en la ecuación 2.12 y mediante el teorema fundamental del cálculo descrito en la ecuación 2.10 coinciden.

III

Control de una cadena de integradores

En este capítulo se desarrolla el análisis en D-particiones de una cadena de integradores de orden 2, que permite determinar gráficamente las zonas de estabilidad y los retardos máximos donde el sistema es estable. Se desarrolla además el procedimiento para la obtención del predictor de estados el cual es aplicado al sistema antes mencionado. Basados en estos 2 resultados se implanta el predictor de estados para una gama de retardos con el fin de evaluar su funcionalidad.

3.1. Análisis en D-Particiones

El método D-Particiones [9] consiste en el mapeo de cada uno de los puntos del eje imaginario en el plano complejo a un plano definido mediante un polinomio característico. En el área de Control Automático esta metodología se aplica de manera similar a las técnicas del lugar de las raíces y los diagramas de Nyquist [24] los cuales establecen un criterio de estabilidad mediante el cual se establece el dominio de estabilidad de los sistemas.

El apartado siguiente contiene el análisis de un sistema denominado cadena de integradores de orden 2 con el método denominado D-Particiones (D – Decomposition). La ley de control utilizada para este sistema es mostrada en la ecuación 3.2 y consiste de un control PD retardado cuyas ganancias k_1 y k_2 fueron seleccionadas para observar claramente

el efecto del predictor que sera diseñado mas adelante.

La cadena de integradores de orden 2 esta representado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t - \tau)\end{aligned}\tag{3.1}$$

con

$$u(t - \tau) = k_1 x_1(t - \tau) + k_2 x_2(t - \tau)\tag{3.2}$$

Sustituyendo la ecuación 3.2 en la ecuación 3.1, el sistema queda expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= k_1 x_1(t - \tau) + k_2 x_2(t - \tau)\end{aligned}\tag{3.3}$$

y puede ser reescrito como

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau)$$

donde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

El cuasipolinomio característico esta dado por la ecuación

$$f(s) = \det \left(sI - \sum_{k=0}^1 A_k e^{-\tau_k s} \right)$$

(ver [7]) donde I representa la matriz identidad.

El cuasipolinomio característico del sistema descrito en la ecuación 3.3

$$f(s) = s^2 - k_2 e^{-\tau s} s - k_1 e^{-\tau s}\tag{3.4}$$

Para el análisis del cuasipolinomio descrito en la ecuación 3.4 se considera que los pará-

3.1 Análisis en D-Particiones

metros (τ, k_1) son variables y que el parámetro k_2 es conocido. En los cruces por cero de las raíces del cuasipolinomio, se considera el caso $s = 0$, sustituyendo en la ecuación 3.4 tenemos que

$$\begin{aligned}0 &= (0)^2 - k_2 e^{-\tau(0)}(0) - k_1 e^{-2\tau(0)} \\ k_1 &= 0\end{aligned}$$

En los cruces de las raíces por el eje imaginario del plano complejo, se considera el caso $s = j\omega$, sustituyendo en la ecuación 3.4

$$\begin{aligned}0 &= (j\omega)^2 - k_2 e^{-\tau(j\omega)} j\omega - k_1 e^{-\tau(j\omega)} \\ 0 &= -\omega^2 - j\omega k_2 \cos(\omega\tau) - \omega k_2 \sin(\omega\tau) - k_1 \cos(\omega\tau) + j k_1 \sin(\omega\tau)\end{aligned}$$

donde

$$\text{Parte Real} : \quad -\omega^2 - k_2 \omega \sin(\omega\tau) - k_1 \cos(\omega\tau) \quad (3.5)$$

$$\text{Parte Imaginaria} : \quad -k_2 \cos(\omega\tau) + k_1 \sin(\omega\tau) \quad (3.6)$$

Ahora, las ecuaciones 3.5 y 3.6 indican el comportamiento de las raíces en el plano complejo. Con base en estos se busca un par de polinomios para los parámetros (τ, k_1) . Basado en las ecuaciones 3.5 y 3.6, realizando la suma del cuadrado de cada ecuación y despejando con respecto a k_1 , se tiene que:

$$\omega^4 = k_2^2 \omega^2 + k_1^2 \quad (3.7)$$

donde

$$\omega^2 = \frac{k_1^2}{(\omega^2 - k_2^2)} \quad (3.8)$$

Despejando la ecuación 3.7 con respecto a k_1 .

$$k_1^2 = \omega^4 - k_2^2 \omega^2 \quad (3.9)$$

Sustituyendo la ecuación 3.8 en la ecuación 3.9) y reordenando

$$k_1^2 + \frac{k_2^2 k_1^2}{(\omega^2 - k_2^2)} = \omega^4$$

Despejando para k_1 , obtenemos que

$$k_1 = \omega \sqrt{\omega^2 - k_2^2} \quad (3.10)$$

De la ecuación 3.6 sabemos que

$$\omega k_2 \cos(\tau\omega) = k_1 \sin(\tau\omega)$$

Despejando y simplificando

$$\tan(\tau\omega) = \frac{\omega k_2}{k_1}$$

Despejando para τ

$$\omega\tau = \tan^{-1}\left(\frac{\omega k_2}{k_1}\right) \quad (3.11)$$

Sustituyendo la ecuación 3.10 y con la propiedad de periodicidad de la función tan cada π ,

$$\tau = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{k_2}{\sqrt{\omega^2 - k_2^2}}\right) + k\pi}{\omega} \quad (3.12)$$

3.1.1. Gráfico en D-Particiones

La implementación de las ecuaciones 3.10 y 3.12 con $(\omega \rightarrow \infty)$ resulta en el gráfico mostrado en la Figura 3.1. Se observa que el espacio de los parámetros (τ, k_1) es fragmentado en múltiples zonas, nos enfocaremos en las zonas numeradas, el resto de las zonas son omitidas por resultados conocidos para la estabilidad de sistemas lineales con retardos (*ver* [7]). La estabilidad en cada zona es evaluada mediante el teorema del cambio del argumento. Para que una zona en la Figura 3.1 tenga la propiedad de ser estable, se requiere que el cambio del argumento $\Delta \arg$ de cada elemento dentro de una misma zona

3.1 Análisis en D-Particiones

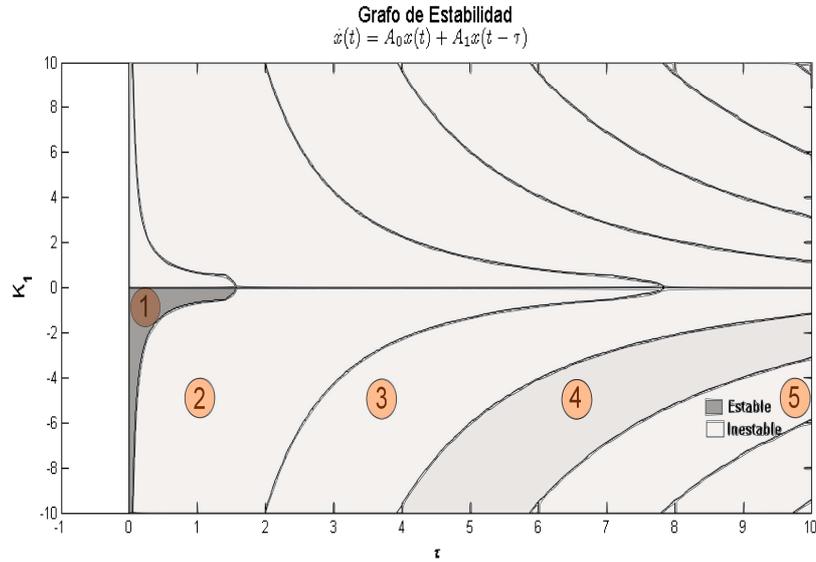


Figura 3.1: Grafo de estabilidad del espacio de parámetros (τ, k_1) para una cadena de integradores de orden 2.

tenga la siguiente propiedad

$$\frac{n\pi}{2} - \frac{g\pi}{2} \leq \Delta \arg \leq \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \quad (3.13)$$

donde n indica el grado del sistema en la variable s . Para la cadena de integradores de orden 2 que se analiza, la condición sobre el cambio del argumento $\Delta \arg$ es la siguiente

$$\frac{\pi}{2} \leq \Delta \arg \leq \frac{3\pi}{2} \quad (3.14)$$

En las figuras siguientes se muestra el diagrama de Mikhailov que indica el cambio del argumento de las zonas (1 – 5) mostradas en la Figura 3.1, es importante mencionar que se analizan varios puntos de una misma zona pero solo se muestra un gráfico representativo por cada una. En la figura 3.2 se muestra el gráfico donde se observa el cambio del argumento $\Delta \arg$ para puntos dentro de la zona 1. El argumento para todos los puntos dentro de la zona 1 varía entre $\frac{\pi}{2} \leq \Delta \arg \leq \frac{3\pi}{2}$, por lo que esta zona es estable. Los resultados para las zonas restantes se muestran en la Figura 3.3. El argumento varía para la zona 2 en $-\frac{3\pi}{2} \leq \Delta \arg \leq -\frac{\pi}{2}$, para la zona 3 en $-\frac{7\pi}{2} \leq \Delta \arg \leq -\frac{5\pi}{2}$, para la zona

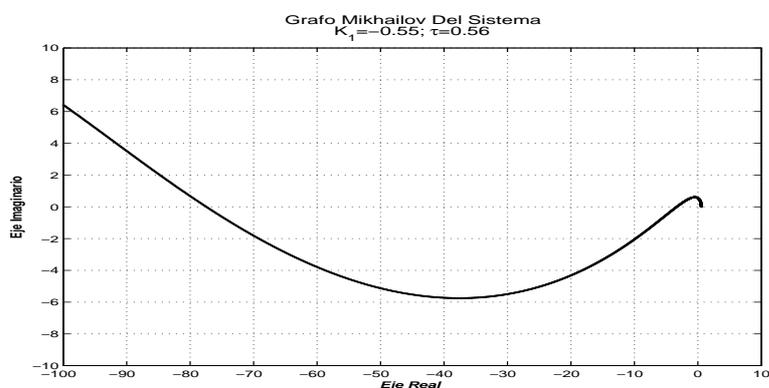


Figura 3.2: Gráfico del cambio del argumento para la zona (1). El cambio del argumento es $\frac{\pi}{2} \leq \Delta \arg \leq \frac{3\pi}{2}$

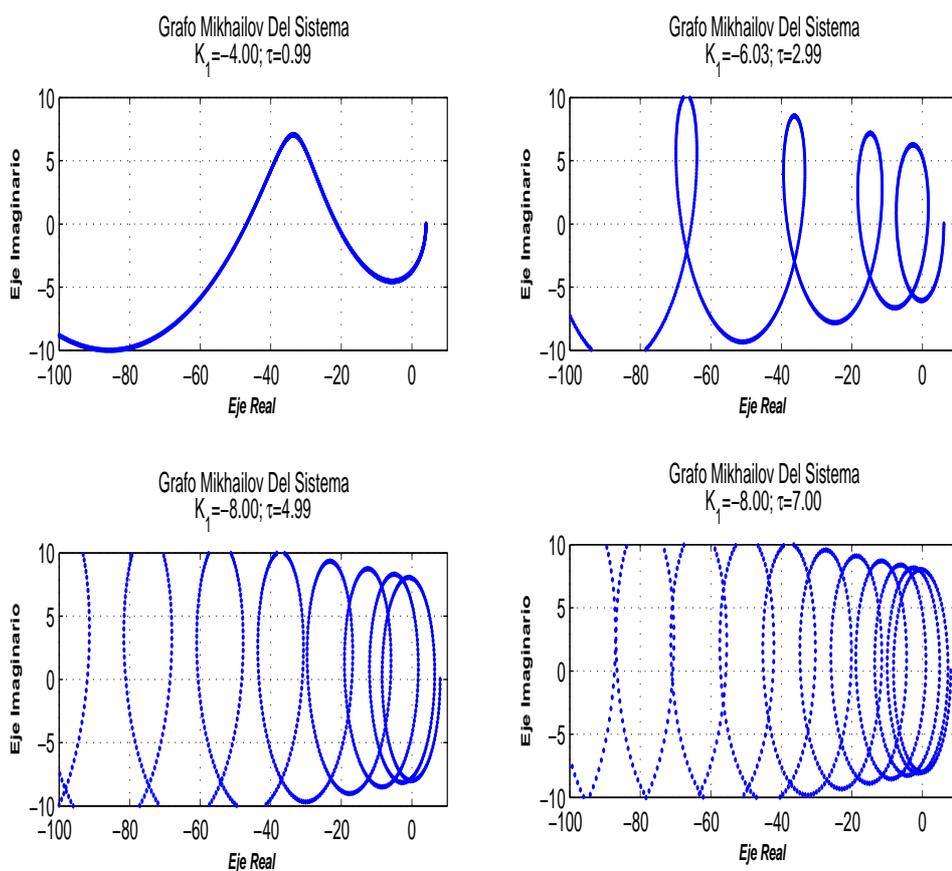


Figura 3.3: Gráfico del cambio del argumento para las zonas 2, 3, 4, 5; de una cadena de integradores de orden 2.

3.2 Predictor de estados para una cadena de integradores de orden 2

4 en $-\frac{11\pi}{2} \leq \Delta \arg \leq -\frac{9}{2}\pi$ y para la zona 5 en $-\frac{15\pi}{2} \leq \Delta \arg \leq -\frac{13\pi}{2}$. Observe que en ningún caso el cambio del argumento satisface la condición 3.14 por lo que todas estas zonas son inestables. Para el espacio (τ, k_1) el análisis indica que solo los puntos dentro de la zona 1 son estables, es decir que solo combinaciones con retardos muy pequeños logran estabilizar el sistema. El resto de zonas analizadas incluyendo las zonas que fueron despreciada tienen un comportamiento inestable. El resultado de escalar el parámetro k_2 a valores mas grandes tiene como resultado el estrechar las zonas en las que se particiona el espacio para los parámetros (τ, k_1) , lo que reduce en gran medida las zonas de estabilidad; es por esto que se selecciono un valor fijo de k_2 , pues el valor seleccionado permite obtener buenos resultados gráficos.

3.2. Predictor de estados para una cadena de integradores de orden 2

El apartado siguiente contiene el desarrollo del denominado predictor de estados para el sistema descrito en la ecuación 3.1. Se diseña el predictor para los estados x_1 y x_2 con retardo del sistema τ_s y con tiempo del predictor τ_p segundos. Se analizara la dinámica con del predictor para un seguimiento de trayectoria de una señal definida posteriormente.

3.2.1. Predictor Para el estado x_1

Basado en la ecuación 3.3 y en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $x_1(t)$ en los limites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t \dot{x}_1(s) ds &= x_1(t) - x_1(t - \tau) \\ x_1(t) &= x_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{x}_1(s) ds \end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$,

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t x_2(s) ds$$

Agregando un cero al término integral en la igualdad derecha, y simplificando

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [x_2(s) + x_2(t - \tau) - x_2(t - \tau)] ds$$

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s \dot{x}_2(l) dl ds$$

Reescribiendo la doble integral basados en el resultado mostrado en la sección 2.2

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t \int_l^t \dot{x}_2(l) ds dl$$

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t \int_l^t \dot{x}_2(l) ds dl$$

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t \dot{x}_2(l) \int_l^t 1 ds dl$$

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t \dot{x}_2(l) (t - l) dl$$

Sustituyendo $\dot{x}_2(t) = u(t - \tau)$, se tiene que

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t u(l - \tau) (t - l) dl \quad (3.15)$$

donde $x_1(t)$ queda expresado como la suma de los estados $x_1(t - \tau)$, $x_2(t - \tau)$ y una integral donde el integrando depende del control en un tiempo pasado $u(t - \tau)$. Esto implica que conociendo los estados y el control en tiempos pasados, se puede calcular una señal libre de retardo. El término en la ecuación 3.15 puede ser obtenido con la formula de Taylor con termino integral como se explico en el capítulo dos en la ecuación 2.9.

3.2.2. Implementación del predictor de estados

El predictor de estados se implemento en Simulink, elemento del paquete de desarrollo de Matlab. Basado en la ecuación 3.15, se desarrolla el predictor de estados utilizando la algorítmica de bloques, para esto es necesario simplificar la integral con el término de

3.2 Predictor de estados para una cadena de integradores de orden 2

integración retardado. Se define el término p como

$$p = \int_{t-\tau}^t u(l-\tau)(t-l) dl$$

Derivando la ecuación 3.15 y utilizando la regla de Leibniz vista en el capítulo dos

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} u(l-\tau)(t-l) dl + u(t-\tau)(t-t) \frac{dt}{dt} - u(t-\tau-\tau)(t-t+\tau) \frac{d(t-\tau)}{dt} \\ \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t u(l-\tau) dl - u(t-2\tau)\tau \end{aligned} \quad (3.16)$$

Definimos el término q como

$$q = \int_{t-\tau}^t u(l-\tau) dl$$

Derivando y utilizando la regla de Leibniz

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} u(l-\tau) dl + u(t-\tau) \frac{\partial t}{\partial t} - u(t-\tau-\tau) \frac{\partial(t-\tau)}{\partial t} \\ \dot{q} &= u(t-\tau) - u(t-2\tau) \end{aligned} \quad (3.17)$$

La implementación en bloques del predictor de estados obtenido en la ecuación 3.15 se lleva a cabo considerando las ecuaciones 3.16 y 3.17, el resultado se observa en la Figura 3.4.

3.2.3. Resultados

Se implemento el sistema descrito en la ecuación 3.1 con la ley de control definida en la ecuación 3.2 con un retardo del sistema de $\tau_s = 0.2s$. El sistema seguirá una señal de referencia de tipo onda cuadrada con amplitud de ± 2 y una frecuencia de 100mH. Los resultados son mostrados en la Figura 3.5 donde se observa el seguimiento que realiza el predictor de estado (*rojo*) y el sistema (*azul*), de la señal de referencia de onda cuadrada en lazo cerrado. En la Figura 3.5 se observa el adelanto en el tiempo que el predictor (señal roja) realiza con respecto a la señal del estado (señal azul) para una predicción $\tau_p = 0.2s$;

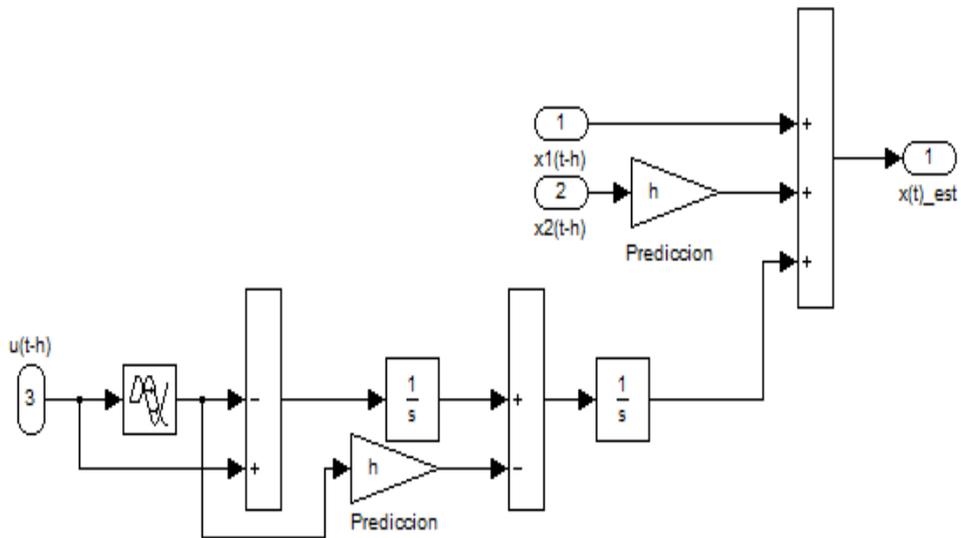


Figura 3.4: Implementación del Predictor de estados para el estado x_1 .

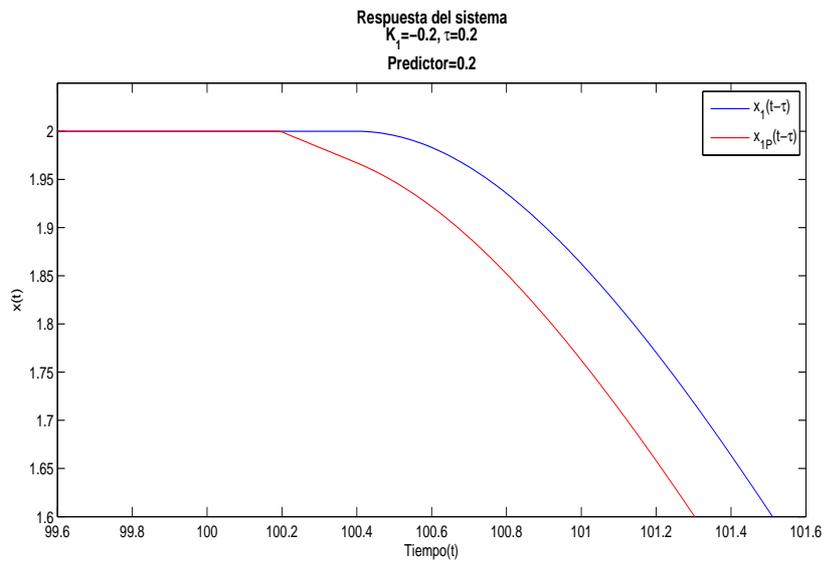


Figura 3.5: Dinámica de $x_1(t - \tau)$ (azul) y del predictor de estados $x_{1P}(t - h)$ (rojo).

3.3. Predictor de estado Para retardos críticos

Se analiza el comportamiento del predictor de estados para retardos críticos en donde el comportamiento del sistema pasa de ser estable a inestable; en la Figura 3.1 estos retardos corresponden a los valores cercanos a la curva que delimita la zona uno.

Se seleccionaron puntos (k_1, τ) dentro de la zona estable (zona uno) en cercanía con los cruces a las zonas inestables (zona 2). En el gráfico en D-Particiones, las líneas que delimitan cada área indican un cruce de raíces del sistema por el eje imaginario (lo cual significa un paso de estabilidad a inestabilidad o viceversa). Se realizó entonces un seguimiento de trayectoria con una señal de referencia de tipo onda cuadrada con ± 2 de amplitud y una frecuencia de 100mH. Los resultados que se muestran a continuación muestran el efecto del predictor en las señales de control, los estados del sistema y el error de seguimiento.

En la figura 3.6 se observa el efecto del predictor en la señal de seguimiento de trayectoria, en este caso se analiza un retardo del sistema $\tau_s = 1.31$ con predicción $\tau_p = [0, 0.5, 1, 1.3]$. En las Figuras 3.7 y 3.8 se muestra el resultado para el control u y la dinámica del estado x_1 respectivamente. Al retroalimentar el predictor de estados, la dinámica de los estados y el control es mas suave, es decir, se presentan menos oscilaciones que en el caso de un sistema real podría llevar a la inestabilidad.

Para $\tau_s = 1.4$, se presentan las gráficas resultantes en las Figuras 3.9, 3.10 y 3.11 para el estado x_1 , u y el error de seguimiento respectivamente. Al retroalimentar el predictor de estados, la dinámica de los estados y el control es mas suave, es decir, se presentan menos oscilaciones. Cuando el retardo es de tal magnitud que lleva al sistema a una dinámica inestable, la retroalimentación del predictor permite que la dinámica vuelva a una zona de estabilidad.

Observaciones

Basados en estas simulaciones, utilizando condiciones iniciales aleatorias y tiempos de predicción τ_p variables, se llega a la conclusión de que el predictor de estados, en lo general permite mejorar el comportamiento de los transitorios de las señales debido al retardo, este efecto es fácilmente referenciado para retardos del sistema τ_s que están cerca de las zonas

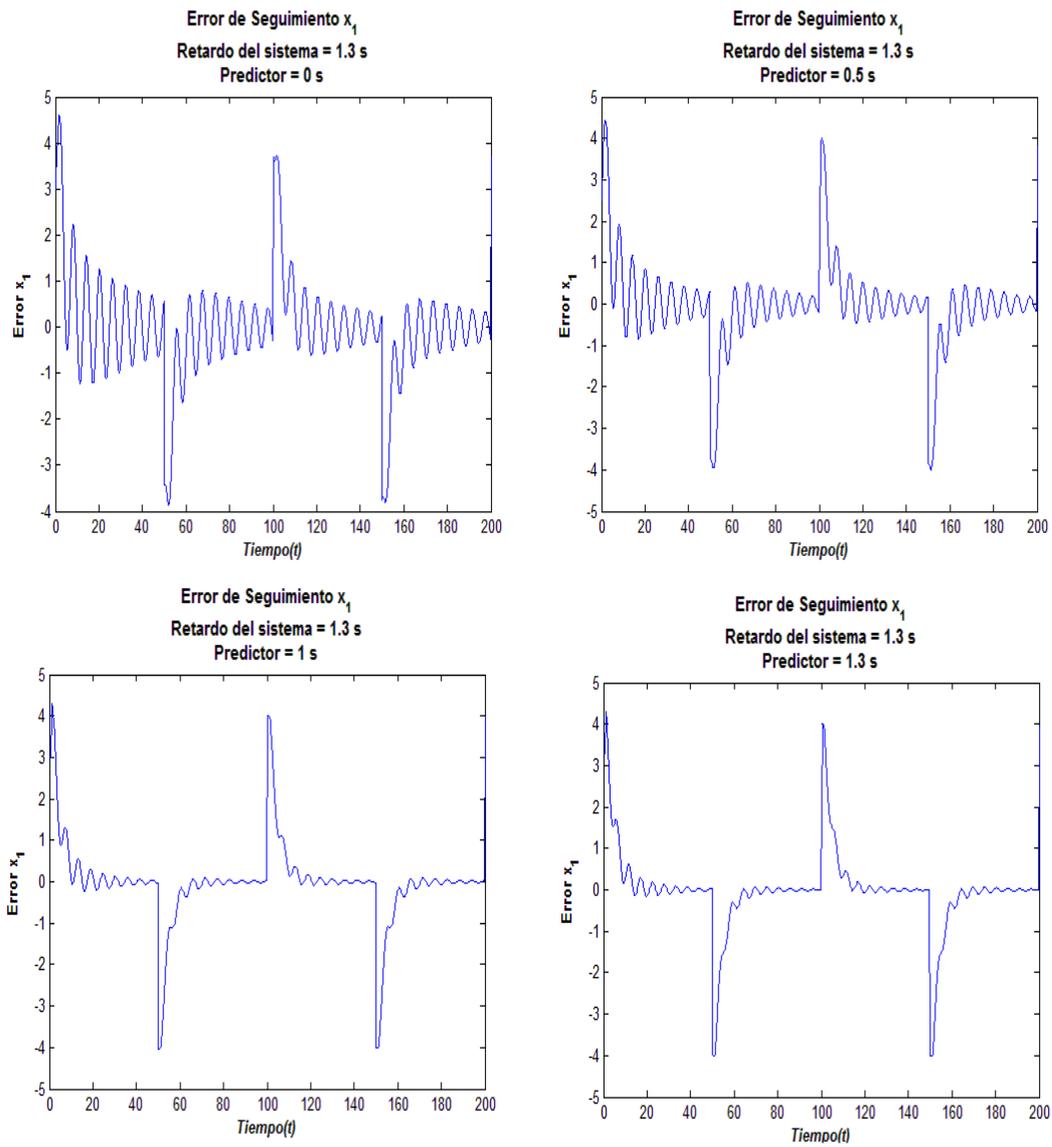


Figura 3.6: Error de Seguimiento en x_1 para una cadena de integradores de orden 2. Retardo del sistema $\tau_s = 1.3s$.

3.3 Predictor de estado Para retardos críticos

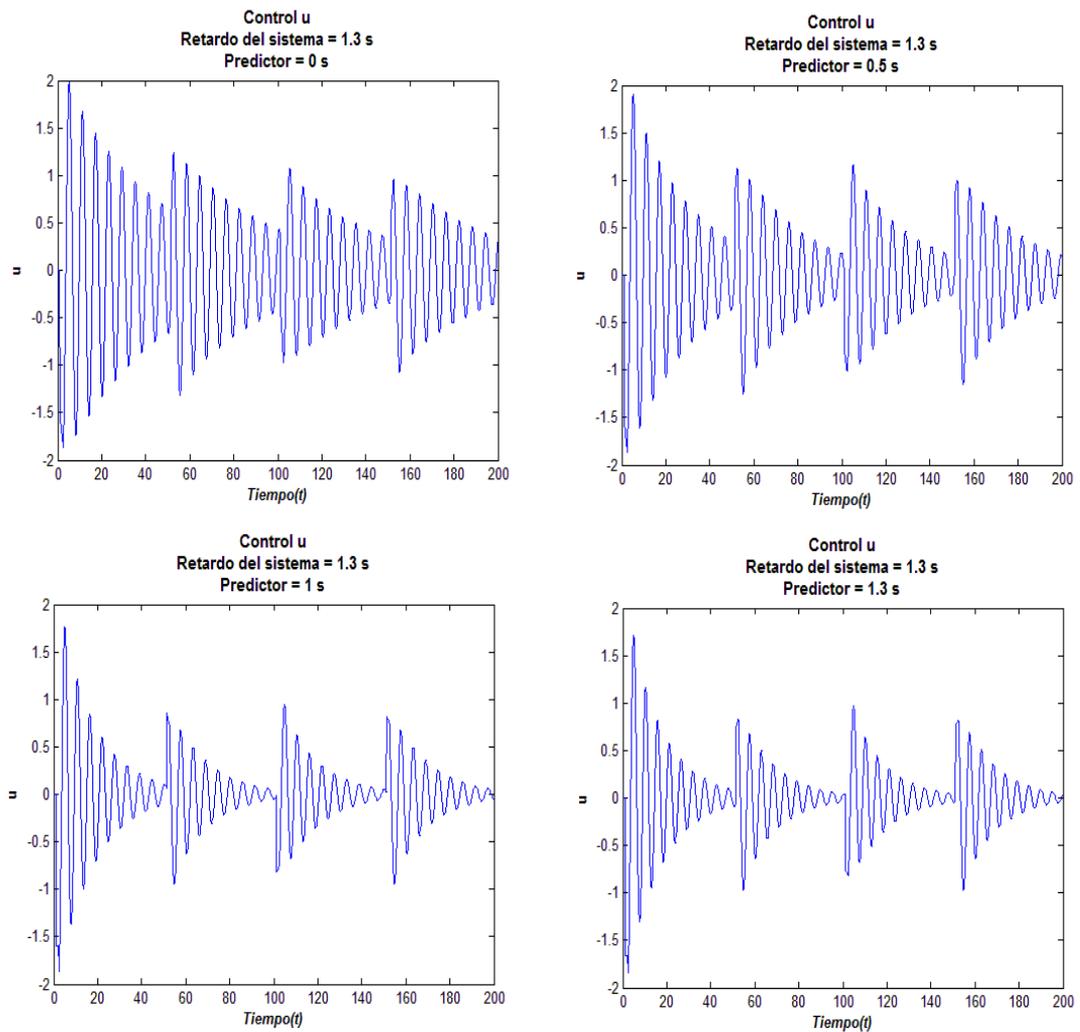


Figura 3.7: Gráfica del control para una cadena de integradores de orden 2. Retardo del sistema $\tau_s = 1.3s$.

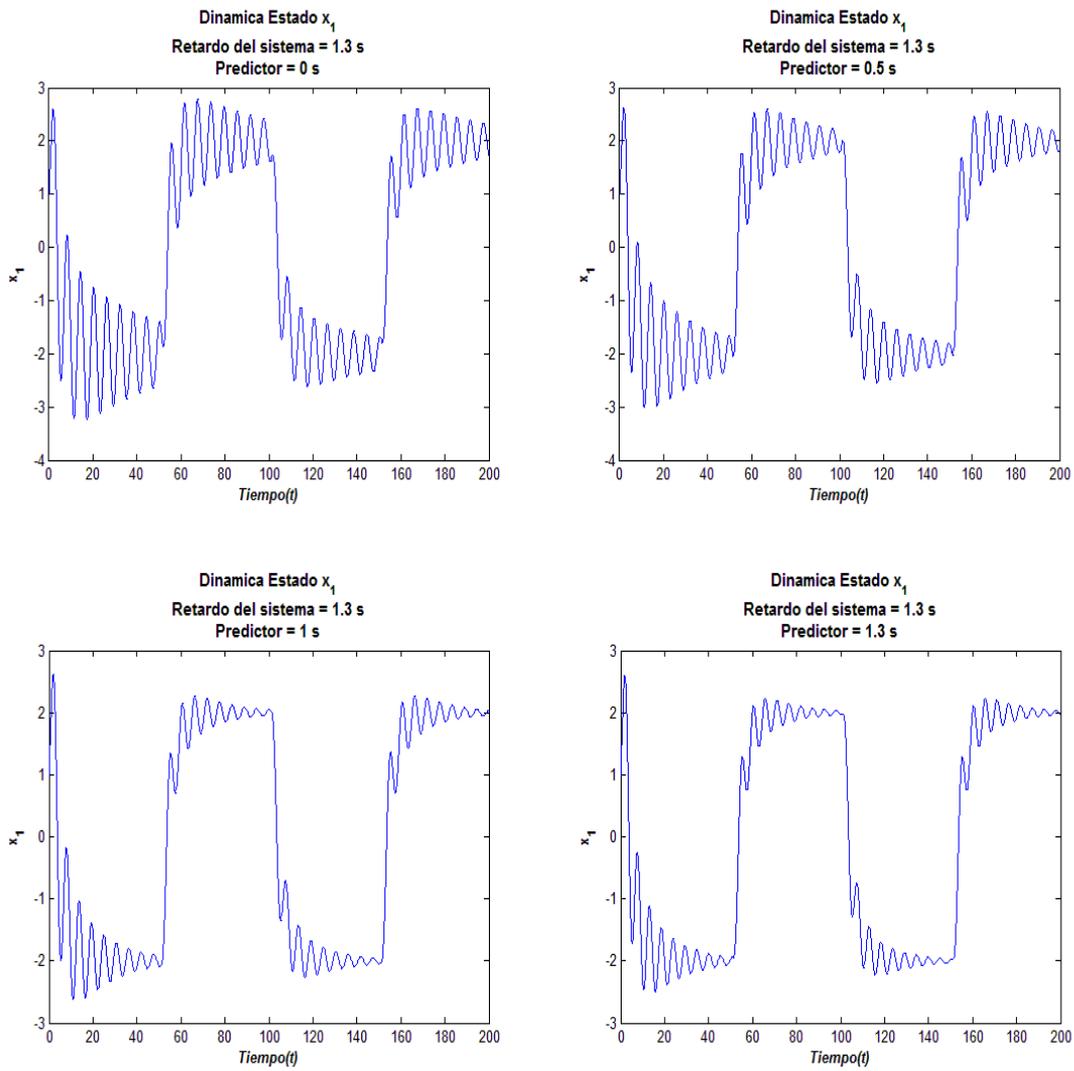


Figura 3.8: Dinámica del estado x_1 para una cadena de integradores de orden 2. Retardo del sistema $\tau_s = 1.3s$.

3.3 Predictor de estado Para retardos críticos

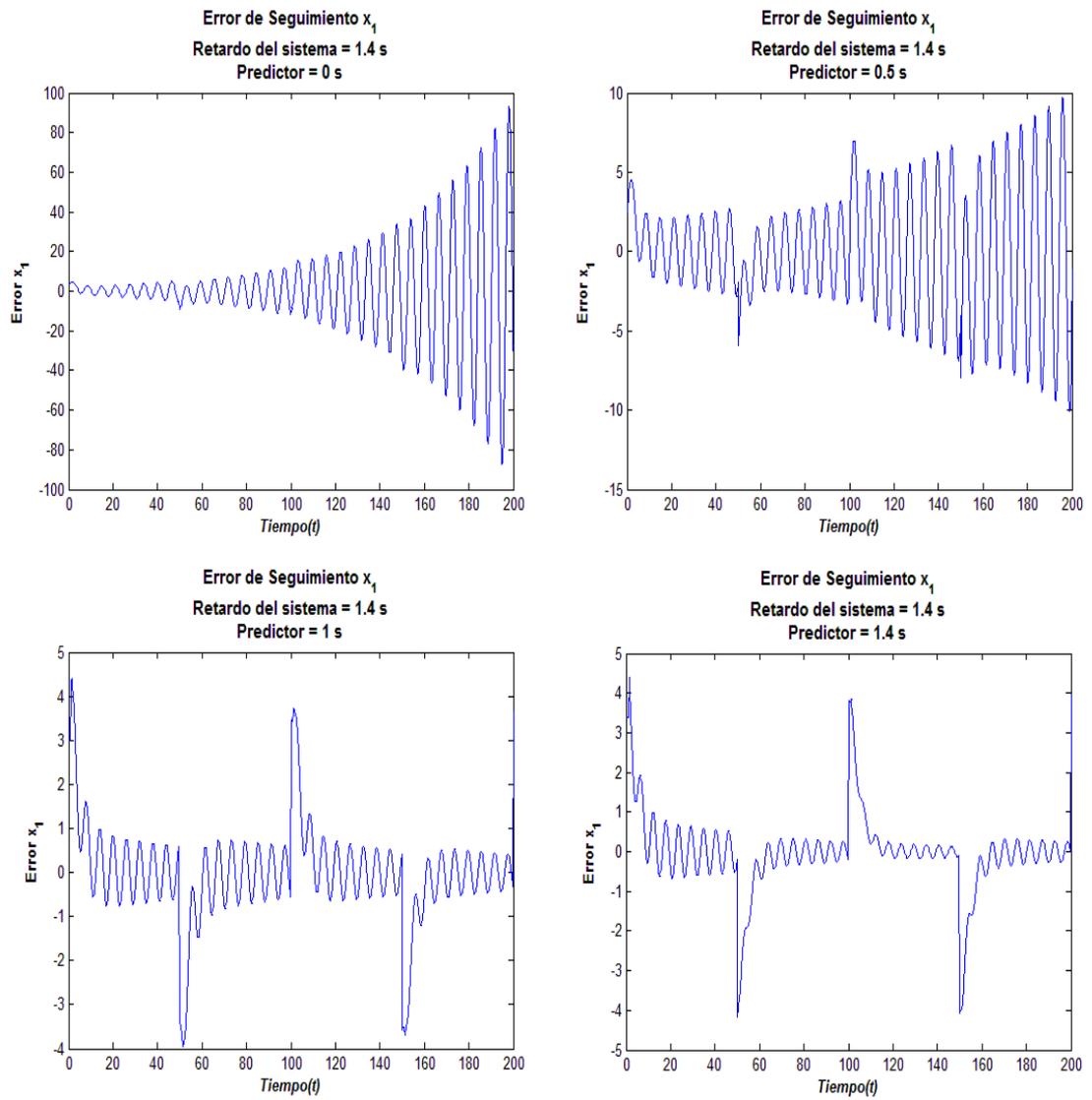


Figura 3.9: Error de Seguimiento en x_1 para una cadena de integradores de orden 2. Retardo del sistema $\tau_s = 1.4$ s.

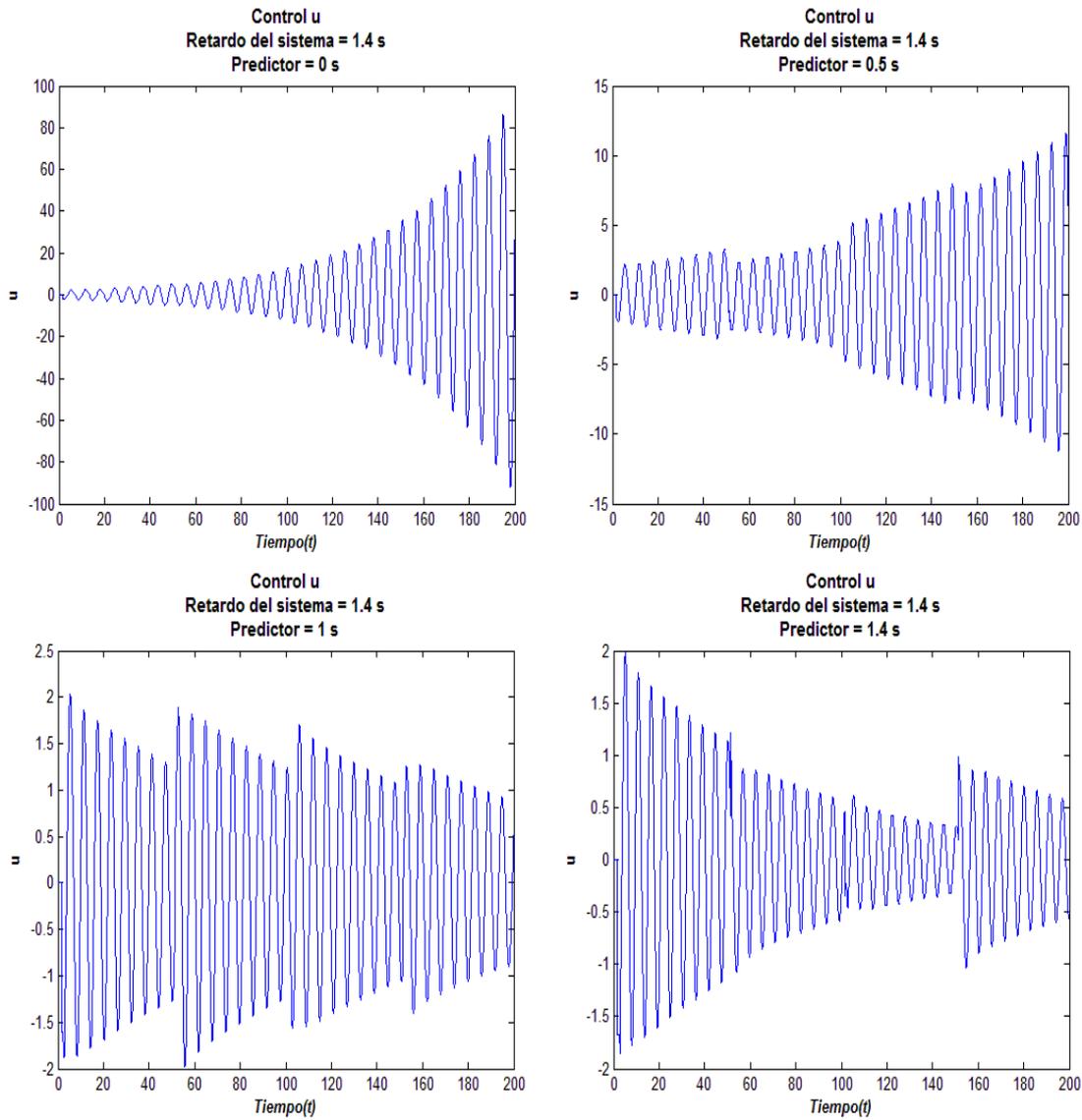


Figura 3.10: Gráfica del control para una cadena de integradores de orden 2. Retardo del sistema $\tau_s = 1.4s$.

3.3 Predictor de estado Para retardos críticos

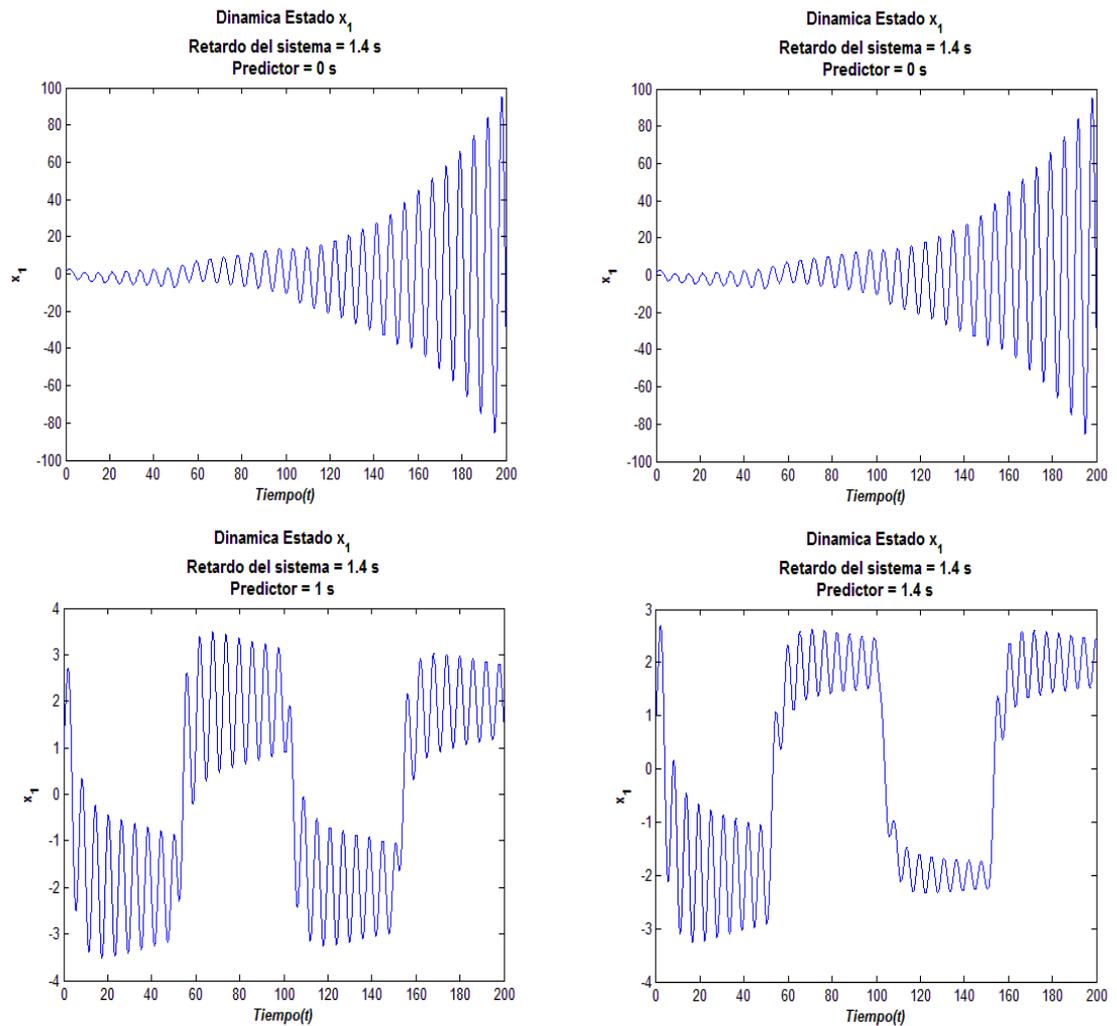


Figura 3.11: Dinámica del estado x_1 para una cadena de integradores de orden 2. Retardo del sistema $\tau_s = 1.4$ s.

de inestabilidad en la Figura 3.1. En el caso de retardos que afectan el desempeño estable del sistema, la aplicación del predictor de estados no refleja un beneficio en la dinámica del sistema.

IV

Control de un Cuadri-rotor

En este capítulo se describe el modelado matemático bajo la metodología Euler-Lagrange del cuadri-rotor. Se presenta una ley de control en saturaciones anidadas que permite demostrar estabilidad del sistema en lazo cerrado. Se diseña el predictor de estados para el cuadri-rotor descrito mediante sus ecuaciones dinámicas, basado en el teorema fundamental del cálculo. Se analiza el desempeño del predictor para una gama de retardos que comprometan la dinámica del sistema. Al final del capítulo se presentan los resultados para un seguimiento de trayectoria en posición con el predictor de estados en lazo cerrado.

4.1. Cuadri-rotor

En esta sección se desarrolla el modelado matemático del cuadri-rotor basado en la metodología Euler-Lagrange, que permitirá establecer la dinámica del sistema para posicionamiento (x, y, z) y orientación (γ, θ, ϕ) . Para simplificación del modelo se considera un vuelo de tipo estacionario (Hover). Para un análisis más detallado refiérase a [8].

4.2. Modelado del Cuadri-rotor

Definimos las coordenadas generalizadas del cuadri-rotor como

$$q = (x, y, z, \gamma, \theta, \phi) \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

donde la tripleta (x, y, z) representa la posición del centro de masa con respecto al marco referencial \dot{I} . La tripleta (γ, θ, ϕ) representa la orientación del cuadri-rotor, en términos de los ángulos de Euler. El modelo se particiona en coordenadas de traslación y rotación de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \xi &= (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \\ \eta &= (\gamma, \theta, \phi)^T \in s^3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

La energía cinética traslacional esta dada por

$$T_\xi = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} \quad (4.3)$$

donde m representa la masa del cuadri-rotor La energía cinética rotacional esta dada por

$$T_\eta = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} \quad (4.4)$$

donde J representa la matriz de inercia expresada en términos de las coordenadas generalizadas η . La energía potencial esta dada por

$$U = mgz \quad (4.5)$$

donde g representa la constante de gravedad. El lagrangiano esta definido como

$$L(q, \dot{q}) = T - U \quad (4.6)$$

4.2 Modelado del Cuadri-rotor

donde U y T representan la energía potencial y cinética respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= T_\xi + T_\eta - U \\ L(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^T\dot{\xi} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^T J \dot{\eta} - mgz \end{aligned} \quad (4.7)$$

El modelo del sistema es obtenido a partir del formalismo Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = F$$

donde $F = (f_\xi, \tau)$, τ representa los momentos generalizados, f_ξ representa la fuerza traslacional aplicada al cuadri-rotor. Definimos

$$f_\xi = R\hat{f}$$

con

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$$

donde

$$u = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

con f_i el empuje dado por cada motor y

$$f_i = k_i \omega_i^2, i = \overline{1, 4}.$$

donde $k_i > 0$ una constante, ω_i es la velocidad angular del motor i . La matriz de rotación R esta dada por.

$$R = \begin{pmatrix} C_\theta C_\gamma & S_\gamma S_\theta & -S_\theta \\ C_\gamma S_\theta S_\phi - S_\gamma C_\phi & S_\gamma S_\theta S_\phi + C_\gamma C_\phi & C_\theta S_\phi \\ C_\gamma S_\theta C_\phi + S_\gamma S_\phi & S_\gamma S_\theta C_\phi - C_\gamma S_\phi & C_\theta C_\phi \end{pmatrix}$$

Los momentos generalizados η

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_\gamma \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{pmatrix}$$

donde

$$\tau_\gamma = \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i} \quad (4.8)$$

$$\tau_\theta = (f_2 - f_4) l \quad (4.9)$$

$$\tau_\phi = (f_3 - f_1) l \quad (4.10)$$

con l la distancia de cada motor al centro de gravedad, y τ_{M_i} es el acoplamiento producido por cada motor. Bajo el formalismo Euler-Lagrange se obtienen los siguientes términos que representa la dinámica del sistema:

$$m\ddot{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = f_\xi \quad (4.11)$$

$$J\ddot{\eta} + \dot{J}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J \dot{\eta}) = \tau \quad (4.12)$$

Se define el término de Coriolis como

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \left(\dot{J} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J) \right) \dot{\eta}$$

Reescribiendo la ecuación 4.12 como

$$J\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} = \tau$$

4.2 Modelado del Cuadri-rotor

El sistema tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= u \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \\ J\ddot{\eta} &= -C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \tau \end{aligned} \quad (4.13)$$

Se propone el siguiente cambio de variables para la simplificación del modelo

$$\tau = C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + J\tilde{\tau}$$

donde

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_\gamma \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \end{pmatrix}$$

serán las entradas del sistema. Entonces

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau}$$

La dinámica del sistema queda expresada por las siguientes ecuaciones:

$$m\ddot{x} = -u\sin\theta \quad (4.14)$$

$$m\ddot{y} = u\cos\theta\sin\phi \quad (4.15)$$

$$m\ddot{z} = u\cos\theta\cos\phi - mg \quad (4.16)$$

$$\ddot{\gamma} = \tau_\gamma \quad (4.17)$$

$$\ddot{\theta} = \tau_\theta \quad (4.18)$$

$$\ddot{\phi} = \tau_\phi \quad (4.19)$$

4.3. Ley de control con saturaciones anidadas

El algoritmo de control esta basado en una estrategia de control anidado y esta dividida en 4 entradas:

1. Control de altura donde se posiciona el helicóptero en una posición vertical.
2. Control Roll.
3. Control Pitch.
4. Control de Yaw.

La estabilidad de este sistema con la ley de control propuesta en [8] se muestra a continuación; la prueba se basa en demostrar que para un tiempo T suficientemente grande, todos los estados están acotados.

4.3.1. Control de altura y Control de Yaw

El control de posición en el eje z se define de la manera siguiente

$$u = \frac{r_1 + mg}{\cos \theta \cos \phi}$$

$$r_1 = -k_2 \dot{z} - k_1 (z - z_d) \tag{4.20}$$

donde $(z, \dot{z}, \theta, \phi)$ representan los estados del sistema, $(k_1 > 0, k_2 > 0)$ las ganancias para la sintonización, (z_d) la posición deseada y (m, g) son la masa y la gravedad respectivamente. El control para el ángulo Yaw esta dado por

$$\tau_\gamma = -k_2 \dot{\gamma} - k_1 (\gamma - \gamma_d) \tag{4.21}$$

donde $(\gamma, \dot{\gamma})$ representan los estados del sistema, $(k_1 > 0, k_2 > 0)$ las ganancias para la sintonización del sistema y (γ_d) el ángulo deseado.

La selección de los términos descritos en 4.20 y 4.21 asigna una dinámica estable conocida, con lo cual se asegura la estabilidad de los estados (ver [14]). Sustituyendo los

4.3 Ley de control con saturaciones anidadas

términos 4.20 y 4.21 en las ecuaciones 4.14, 4.19, el sistema queda expresado de la siguiente manera

$$m\ddot{x} = -(r_1 + mg) \frac{\tan \theta}{\cos \phi} \quad (4.22)$$

$$m\ddot{y} = (r_1 + mg) \tan \phi \quad (4.23)$$

$$m\ddot{z} = -k_2\dot{z} - k_1(z - z_d) \quad (4.24)$$

$$\ddot{\gamma} = -k_2\dot{\gamma} - k_1(\gamma - \gamma_d) \quad (4.25)$$

Las ecuaciones 4.24 y 4.25 indican que los estados (γ, z) son estables, y aun mas, que (γ, γ_d) y (z, z_d) .

4.3.2. Control de posición en el eje Y y control de Roll

Basado en las ecuaciones 4.20 y 4.24, se concluye que $r_1 \rightarrow 0$. Por lo cual para algún tiempo T suficientemente grande

$$\ddot{x} = -g \frac{\tan \theta}{\cos \phi} \quad (4.26)$$

$$\ddot{y} = g \tan \phi \quad (4.27)$$

Por cuestiones de simplificación del análisis y considerando que el helicóptero se mantiene a cierta altura (*hover*), se considera que $|\phi|$ es pequeño. El sistema es reescrito como:

$$\ddot{y} = g\phi \quad (4.28)$$

$$\ddot{\phi} = \tau_\phi \quad (4.29)$$

El subsistema conformado por las ecuaciones 4.28 y 4.29 forma una cadena de integradores de cuarto orden donde la entrada de control τ_ϕ y el estado y tienen el menor y mayor orden respectivamente. Se propone la ley de control

$$\tau_\phi = -\sigma_{\phi_1} \left(\dot{\phi} + \sigma_{\phi_2} (\xi_{\phi_1}) \right) \quad (4.30)$$

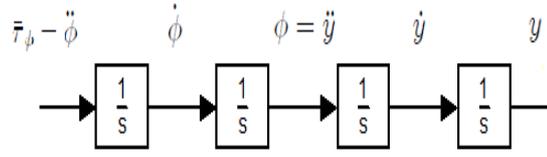


Figura 4.1: El subsistema conformado por las ecuaciones 4.28, 4.29 forman una cadena de integradores de cuarto orden.

donde σ_{ϕ_i} es una función saturación con cota M_{ϕ_i} . Se propone la función definida positiva

$$V = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \quad (4.31)$$

Derivando el termino 4.31 con respecto al tiempo, tenemos que

$$\dot{V} = \dot{\phi} \ddot{\phi}$$

Sustituyendo el termino 4.30 en la ecuación 4.31

$$\dot{V} = -\dot{\phi} \sigma_{\phi_1} \left(\dot{\phi} + \sigma_{\phi_2} (\xi_{\phi_1}) \right) \quad (4.32)$$

Se observa que para $|\dot{\phi}| > M_{\phi_2}$, $\dot{V} < 0$, por lo tanto, sea el caso $|\dot{\phi}| < M_{\phi_2}$ o $|\dot{\phi}| > M_{\phi_2}$, para algún tiempo $t \geq T_1$, $\dot{\phi}$ estará acotado por M_{ϕ_2} , es decir, existe T_1 , $|\dot{\phi}| \leq M_{\phi_2}$ para $t \geq T_1$. Se define

$$v_1 = \dot{\phi} + \phi \quad (4.33)$$

Derivando el termino 4.33 con respecto al tiempo

$$\dot{v}_1 = \dot{\phi} + \ddot{\phi} \quad (4.34)$$

Sustituyendo el termino 4.30) en la ecuación 4.34

$$\dot{v}_1 = \dot{\phi} - \sigma_{\phi_1} \left(\dot{\phi} + \sigma_{\phi_2} (\xi_{\phi_1}) \right)$$

4.3 Ley de control con saturaciones anidadas

Se selecciona

$$M_{\phi_1} \geq 2M_{\phi_2} \quad (4.35)$$

Existe T_1 , $|\dot{\phi}| \leq M_{\phi_2}$ para $t \geq T_1$, por lo cual $(\dot{\phi} + \sigma_{\phi_2}(\xi_{\phi_1})) \leq 2M_{\phi_2}$, es decir, σ_{ϕ_1} estará siempre operando en la zona lineal

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \dot{\phi} - \dot{\phi} - \sigma_{\phi_2}(\xi_{\phi_1}) \\ \dot{v}_1 &= -\sigma_{\phi_2}(\xi_{\phi_1}) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Se propone la función

$$\xi_{\phi_1} = v_1 + \sigma_{\phi_3}(\xi_{\phi_2}) \quad (4.37)$$

Sustituyendo el termino 4.37 en la ecuación 4.36, se tiene

$$\dot{v}_1 = -\sigma_{\phi_2}(v_1 + \sigma_{\phi_3}(\xi_{\phi_2})) \quad (4.38)$$

Se define la función

$$V_2 = \frac{1}{2}v_1^2 \quad (4.39)$$

Derivando el termino 4.39 con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= v_1 \dot{v}_1 \\ \dot{V}_2 &= -v_1 \sigma_{\phi_2}(v_1 + \sigma_{\phi_3}(\xi_{\phi_2})) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Para $|v_1| > M_{\phi_3}$, $\dot{V}_2 < 0$, por lo tanto, sea el caso $|v_1| < M_{\phi_3}$ o $|v_1| > M_{\phi_3}$, para algún tiempo $t \geq T_2$, v_1 estará acotado por M_{ϕ_3} , es decir, existe T_2 , $|v_1| \leq M_{\phi_3}$. para $t \geq T_2$. Se selecciona

$$M_{\phi_2} > 2M_{\phi_3} \quad (4.41)$$

Considerando la condición 4.41 y que además existe $T_2, |v_1| \leq M_{\phi_3}$. para $t \geq T_2$, σ_{ϕ_2} estará operando en la zona lineal, por lo tanto la ecuación 4.38 se simplifica

$$\dot{v}_1 = -v_1 - \sigma_{\phi_3}(\xi_{\phi_2}) \quad (4.42)$$

Se define la función

$$v_2 = v_1 + \phi + \frac{\dot{y}}{g} \quad (4.43)$$

Derivando el termino 4.43 con respecto al tiempo

$$\dot{v}_2 = \dot{v}_1 + \dot{\phi} + \frac{\ddot{y}}{g} \quad (4.44)$$

Utilizado los termino 4.42, 4.28 y 4.33 obtenemos

$$\dot{v}_2 = -\sigma_{\phi_3}(\xi_{\phi_2}) \quad (4.45)$$

Se propone la función

$$\xi_{\phi_2} = v_2 + \sigma_{\phi_4}(\xi_{\phi_3}) \quad (4.46)$$

Sustituyendo el termino 4.46 en la ecuación 4.45, tenemos que

$$\dot{v}_2 = -\sigma_{\phi_3}(v_2 + \sigma_{\phi_4}(\xi_{\phi_3})) \quad (4.47)$$

Se define

$$V_3 = \frac{1}{2}v_2^2 \quad (4.48)$$

Derivando el termino 4.48 con respecto al tiempo

$$\dot{V}_3 = v_2\dot{v}_2 \quad (4.49)$$

Sustituyendo el termino 4.47 en la ecuación 4.49

$$\dot{V}_3 = -v_2\sigma_{\phi_3}(v_2 + \sigma_{\phi_4}(\xi_{\phi_3}))$$

Para $|v_2| > M_{\phi_4}$, $\dot{V}_3 < 0$, por lo tanto, sea el caso $|v_2| < M_{\phi_4}$ o $|v_2| > M_{\phi_4}$, para algún tiempo $t \geq T_3$, v_2 estará acotado por M_{ϕ_4} , es decir, existe T_3 , $|v_2| \leq M_{\phi_4}$. para $t \geq T_3$. Se selecciona

$$M_{\phi_3} > 2M_{\phi_4} \quad (4.50)$$

4.3 Ley de control con saturaciones anidadas

Considerando la condición 4.50 y sabiendo que existe T_3 , $|v_2| \leq M_{\phi_4}$. para $t \geq T_3$, σ_{ϕ_3} estará operando en la zona lineal, por lo tanto (4.47) se simplifica

$$\dot{v}_2 = -v_2 - \sigma_{\phi_4}(\xi_{\phi_3}) \quad (4.51)$$

Se define la función

$$v_3 = v_2 + 2\frac{\dot{y}}{g} + \phi + \frac{y}{g} \quad (4.52)$$

Derivando el termino 4.52 con respecto al tiempo

$$\dot{v}_3 = \dot{v}_2 + 2\frac{\ddot{y}}{g} + \dot{\phi} + \frac{\dot{y}}{g} \quad (4.53)$$

Con las ecuaciones 4.51, 4.28 obtenemos

$$\dot{v}_3 = -\sigma_{\phi_4}(\xi_{\phi_3}) \quad (4.54)$$

Se propone la función

$$\xi_{\phi_3} = v_3 \quad (4.55)$$

Sustituyendo el termino 4.55 en la ecuación 4.54, tenemos que

$$\dot{v}_3 = -\sigma_{\phi_4}(v_3) \quad (4.56)$$

Se define

$$V_4 = \frac{1}{2}v_3^2 \quad (4.57)$$

Derivando el termino 4.57 con respecto al tiempo

$$\dot{V}_4 = v_3\dot{v}_3 \quad (4.58)$$

Sustituyendo el termino 4.56 en la ecuación 4.58

$$\dot{V}_4 = -v_3\sigma_{\phi_4}(v_3)$$

De donde $\dot{V}_4 < 0$, lo que implica que $v_3 \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Con esto y con base en las ecuaciones 4.55, 4.51, 4.46, 4.42 y 4.37, implica que $(\xi_{\phi_3} \rightarrow 0)$, $(v_2 \rightarrow 0)$, $(\xi_{\phi_2} \rightarrow 0)$, $(v_1 \rightarrow 0)$, $(\xi_{\phi_1} \rightarrow 0)$. Por lo tanto de la ecuación 4.32 se concluye que $\phi \rightarrow 0$. De la ecuación 4.33 se concluye que $\dot{\phi} \rightarrow 0$. De la ecuación 4.43 se concluye que $\dot{y} \rightarrow 0$. De la ecuación 4.52 se concluye que $y \rightarrow 0$. Por lo que el sistema es estable asintóticamente. El control para el ángulo Roll y la localización sobre el eje y , esta dado finalmente por la entrada de control

$$\tau_\phi = -\sigma_1 \left(\dot{\phi} + \sigma_2 \left(\phi + \dot{\phi} + \sigma_3 \left(2\phi + \dot{\phi} + \frac{\dot{y}}{g} + \sigma_4 \left(\dot{\phi} + 3\phi + \frac{3\dot{y}}{g} + \frac{y}{g} \right) \right) \right) \right) \quad (4.59)$$

donde $(y, \dot{y}, \phi, \dot{\phi})$ representan los estados del sistema y (σ_n) representa la n - esima función de saturación.

4.3.3. Control de posición en el eje x y control de Pitch

Para cuestiones de simplificación del análisis y considerando que el helicóptero se mantendrá posicionado a cierta altura (*hover*), se considera que $|\phi|$ es pequeño. Basado en un análisis similar al mostrado con anterioridad, el control para el ángulo Pitch y la localización sobre el eje x , esta dado por

$$\tau_\theta = -\sigma_1 \left(\dot{\theta} + \sigma_2 \left(\theta + \dot{\theta} + \sigma_3 \left(\begin{array}{c} 2\theta + \dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{g} + \\ \sigma_4 \left(\dot{\theta} + 3\theta - \frac{3\dot{x}}{g} - \frac{x}{g} \right) \end{array} \right) \right) \right) \quad (4.60)$$

donde $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ representan los estados del sistema y (σ_n) representan funciones saturación.

4.4. Ecuaciones dinámicas

Las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento del cuadri-rotor en posición y orientación son descritas a continuación

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{m}u(t - \tau)\sin\theta(t) \quad (4.61)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m}u(t - \tau)\cos\theta(t)\sin\phi(t) \quad (4.62)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}u(t - \tau)\cos\theta(t)\cos\phi(t) - mg \quad (4.63)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \tau_\gamma(t) \quad (4.64)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \tau_\theta(t) \quad (4.65)$$

$$\ddot{\phi}(t) = \tau_\phi(t) \quad (4.66)$$

Reescribiendo el sistema, se tiene que

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (4.67)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{m}u(t - \tau)\sin\theta_1(t) \quad (4.68)$$

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t) \quad (4.69)$$

$$\dot{y}_2(t) = \frac{1}{m}u(t - \tau)\cos\theta_1(t)\sin\phi_1(t) \quad (4.70)$$

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t) \quad (4.71)$$

$$\dot{z}_2(t) = \frac{1}{m}u(t - \tau)\cos\theta_1(t)\cos\phi_1(t) - mg \quad (4.72)$$

$$\dot{\gamma}_1(t) = \gamma_2(t) \quad (4.73)$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = \tau_\gamma(t) \quad (4.74)$$

$$\dot{\theta}_1(t) = \theta_2(t) \quad (4.75)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \tau_\theta(t) \quad (4.76)$$

$$\dot{\phi}_1(t) = \phi_2(t) \quad (4.77)$$

$$\dot{\phi}_2(t) = \tau_\phi(t) \quad (4.78)$$

Los estados (x, y, z) representan la posición y los estados (ψ, θ, ϕ) representan la orien-

tación en términos de los ángulos de Euler. Se considera la existencia de un retardo de τ_s sobre la posición, lo cual provoca el atraso de la señal de control u . El predictor de estados puede ser desarrollado tal como se describe en capítulos pasados, en base a:

- la predicción de los estados basádo en el teorema fundamental del cálculo descrito en la ecuación 2.11
- la predicción de los estados basádo en la formula de Taylor con resto integral descrito en la ecuación 2.9.

4.5. Predictor de estados

4.5.1. Estado $x_1(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $x_1(t)$ en los limites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\int_{t-\tau}^t \dot{x}_1(s)ds = x_1(t) - x_1(t - \tau)$$

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{x}_1(s)ds$$

Sustituyendo $\dot{x}_1(s) = x_2(s)$

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t x_2(s)ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = x_2(t-\tau) - x_2(t-\tau)$) por lo que la expresión no se modifica, se observa que el término $x_2(t - \tau)$ no dependen de la variable de integración y que $\int_{t-\tau}^s \dot{x}_2(l)dl = x_2(s) - x_2(t - \tau)$, entonces:

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [x_2(s) + x_2(t - \tau) - x_2(t - \tau)]ds$$

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s \dot{x}_2(l)llds$$

(4.79)

4.5 Predictor de estados

Realizando el cambio en los limites de integración descrito en la sección 2.2

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \dot{x}_2(l)dl \int_l^t 1ds \\x_1(t) &= x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau)\tau + \int_t^{t+\tau} \dot{x}_2(l)(t - l)dl\end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{x}_2(l) = -\frac{1}{m}u(l - \tau)\sin\theta_1(l)$ y reordenando.

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \left[-\frac{1}{m}u(l - \tau)\sin\theta_1(l)\right](t - l)dl \\x_1(t) &= x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau)\tau - \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau)\sin\theta_1(l)](t - l)dl\end{aligned}\quad (4.80)$$

De acuerdo a la formula de Taylor en la ecuación 2.9, el predictor tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1(t - \tau) + \dot{x}_1(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t (t - l)\ddot{x}_1(l)dl \\x_1(t) &= x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \left[-\frac{1}{m}u(l - \tau)\sin\theta_1(l)\right](t - l)dl \\x_1(t) &= x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau)\tau - \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau)\sin\theta_1(l)](t - l)dl\end{aligned}$$

Se define el término p para propósitos de simplificación en la ecuación 4.80 de la siguiente forma:

$$p = \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau)\sin\theta_1(l)](t - l)dl$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t}[u(l - \tau)\sin\theta_1(l)](t - l)dl + u(t - \tau)\sin\theta_1(t)(t - t)\frac{dt}{dt} \\&\quad - u(t - \tau - \tau)\sin\theta_1(t - \tau)(t - t + \tau) \\ \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t u(l - \tau)\sin\theta_1(l)dl - u(t - 2\tau)\sin\theta_1(t - \tau)\tau\end{aligned}\quad (4.81)$$

Se define q para propósitos de simplificación en la ecuación 4.81 de la siguiente forma:

$$q = \int_{t-\tau}^t u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{q} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl + u(t - \tau) \sin \theta_1(t) \frac{dt}{dt} \\ - u(t - \tau - \tau) \sin \theta_1(t - \tau) \frac{d(t - \tau)}{dt} \end{aligned}$$

Es decir

$$\dot{q} = u(t - \tau) \sin \theta_1(t) - u(t - 2\tau) \sin \theta_1(t - \tau)$$

Por lo que el estado $x_1(t)$ esta en dependencia de los estados x_1 y x_2 en $t = t - \tau$ y θ_1 en el tiempo $t = t$ y $t = t - \tau$.

4.5.2. Estado $y_1(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $y_1(t)$ en los limites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t \dot{y}_1(s) ds &= y_1(t) - y_1(t - \tau) \\ y_1(t) &= y_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{y}_1(s) ds \end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{y}_1(s) = y_2(s)$

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t y_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = y_2(t - \tau) - y_2(t - \tau)$) por lo que la expresión no se modifica, se observa que el término $y_2(t - \tau)$ no dependen de la variable de integración y que $\int_{t-\tau}^s \dot{y}_2(l) dl = y_2(s) - y_2(t - \tau)$, entonces:

4.5 Predictor de estados

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [y_2(s) + y_2(t - \tau) - y_2(t - \tau)] ds$$

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + y_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s \dot{y}_2(l) dl ds$$

Realizando el cambio en los limites de integración descrito en la sección 2.2

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + y_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \dot{y}_2(l) dl \int_l^t 1 ds$$

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + y_2(t - \tau)\tau + \int_t^{t+\tau} \dot{y}_2(l)(t - l) dl$$

Sustituyendo $\dot{y}_2(t) = \frac{1}{m}u(t - \tau) \cos \theta_1(t) \sin \phi_1(t)$ y reordenando.

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + y_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \left[\frac{1}{m}u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) \right] (t - l) dl$$

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + y_2(t - \tau)\tau + \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l)] (t - l) dl$$

De acuerdo a la formula de Taylor en la ecuación 2.9, el predictor tiene la siguiente forma

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + \dot{y}_1(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t (t - l) \ddot{y}_1(l) dl$$

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + y_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \left[\frac{1}{m}u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) \right] (t - l) dl$$

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + y_2(t - \tau)\tau + \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l)] (t - l) dl$$

Se define el termino p para propósitos de simplificación en la ecuación 4.82 de la siguiente forma

$$p = \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l)] (t - l) dl$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l)] (t-l) dl \\ &\quad + u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \sin \phi_1(t) [t-t] \frac{dt}{dt} \\ &\quad - u(t-\tau-\tau) \cos \theta_1(t-\tau) \sin \phi_1(t-\tau) [t-t+\tau] \frac{d(t-\tau)}{dt} \\ \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl - u(t-2\tau) \cos \theta_1(t-\tau) \sin \phi_1(t-\tau) \tau \end{aligned}$$

Se define q para propósitos de simplificación en 4.5.2 de la siguiente forma

$$q = \int_{t-\tau}^t u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl + u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \sin \phi_1(t) \frac{dt}{dt} \\ &\quad - u(t-\tau-\tau) \cos \theta_1(t-\tau) \sin \phi_1(t-\tau) \frac{d(t-\tau)}{dt} \end{aligned}$$

Es decir

$$\dot{q} = u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \sin \phi_1(t) - u(t-2\tau) \cos \theta_1(t-\tau) \sin \phi_1(t-\tau)$$

Por lo que el estado $y_1(t)$ esta en dependencia de los estados $y_1, y_2, \theta_1, \phi_1$ y del control u en un tiempo $t = t - \tau$.

4.5 Predictor de estados

4.5.3. Estado $z_1(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $z_1(t)$ en los límites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{t-\tau}^t \dot{z}_1(s) ds &= z_1(t) - z_1(t - \tau) \\ z_1(t) &= z_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{z}_1(s) ds\end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{z}_1(s) = z_2(s)$

$$z_1(t) = z_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t z_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = z_2(t - \tau) - z_2(t - \tau)$) por lo que la expresión no se modifica, se observa que el término $z_2(t - \tau)$ no dependen de la variable de integración y que $\int_{t-\tau}^s z_2(l) dl = z_2(s) - z_2(t - \tau)$, entonces:

$$\begin{aligned}z_1(t) &= z_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [z_2(s) + z_2(t - \tau) - z_2(t - \tau)] ds \\ z_1(t) &= z_1(t - \tau) + z_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s \dot{z}_2(l) dl ds\end{aligned}$$

Realizando el cambio en los límites de integración descrito en la sección 2.3

$$\begin{aligned}z_1(t) &= z_1(t - \tau) + z_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \dot{z}_2(l) dl \int_l^t 1 ds \\ z_1(t) &= z_1(t - \tau) + z_2(t - \tau)\tau + \int_t^{t+\tau} \dot{z}_2(l)(t - l) dl\end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{z}_2(t) = \frac{1}{m}u(t - \tau) \cos \theta_1(t) \cos \phi_1(t) - mg$ y reordenando.

$$z_1(t) = z_1(t - \tau) + z_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \left[\frac{1}{m}u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - mg \right] (t - l) dl$$

$$z_1(t) = z_1(t - \tau) + z_2(t - \tau)\tau + \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2g] (t - l) dl \quad (4.82)$$

Basado en la formula de Taylor, el predictor tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(t - \tau) + \dot{z}_1(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t (t - l) \ddot{z}_1(l) dl \\ z_1(t) &= z_1(t - \tau) + z_2(t - \tau) \tau + \int_{t-\tau}^t \left[\frac{1}{m} u(l - \tau) \cos \theta_1(s) \cos \phi_1(l) - m^2g \right] (t - l) dl \\ z_1(t) &= z_1(t - \tau) + z_2(t - \tau) \tau + \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2g] (t - l) dl \end{aligned}$$

Se define el termino p para propósitos de simplificación en la ecuación 4.82 de la siguiente forma

$$p = \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2g] (t - l) dl$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2g] (t - l) dl \\ &\quad + [u(t - \tau) \cos \theta_1(t) \cos \phi_1(t) - m^2g] [t - t] \frac{dt}{dt} \\ &\quad - [u(t - \tau - \tau) \cos \theta_1(t - \tau) \cos \phi_1(t - \tau) - m^2g] [t - t + \tau] \frac{d(t - \tau)}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2g] dl \\ &\quad - [u(t - 2\tau) \cos \theta_1(t - \tau) \cos \phi_1(t - \tau) - m^2g] \tau \quad (4.83) \end{aligned}$$

Se define q para propósitos de simplificación en 4.83 de la siguiente forma

$$q = \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2g] dl$$

4.5 Predictor de estados

Se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{q} = & \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl \\ & + [u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \cos \phi_1(t) - m^2 g] \frac{dt}{dt} \\ & - [u(t-\tau-\tau) \cos \theta_1(t-\tau) \cos \phi_1(t-\tau) - m^2 g] \frac{d(t-\tau)}{dt}\end{aligned}$$

Es decir

$$\dot{q} = u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \cos \phi_1(t) - u(t-2\tau) \cos \theta_1(t-\tau) \cos \phi_1(t-\tau)$$

Por lo que el estado $z_1(t)$ esta en dependencia de los estados z_1, z_2, θ_1 y ϕ_1 en $t = t - \tau$ y de los estados θ_1 y ϕ_1 en tiempo $t = t$. Para referencia del predictor para los estados restantes, consulte el apéndice A.

4.5.4. Resultados

El sistema descrito en las ecuaciones (4.67-4.78) y la ley de control definida en las ecuaciones 4.20, 4.59, 4.60, se implemento la dinámica del cuadri-rotor en la herramienta de desarrollo Simulink, parte del paquete de desarrollo de Matlab.

Se analiza la efectividad del predictor de estados para retardos distintos del sistema, con lo que se pretende analizar el efecto sobre sistemas de una mayor complejidad en relación con la cadena de integradores de orden 2. Los estados x_1, y_1 y z_1 utilizados para el cálculo de la ley de control seran los obtenidos del predictor de estados. Para propósitos de análisis se considera un seguimiento de trayectoria en (x, y, z) , las referencias consisten de ondas de tipo senoidal de $\pm 2, \pm 1$ y ± 2 en amplitud, con una frecuencia de 100 mHz para (x, y, z) respectivamente.

En las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 se advierte el comportamiento del sistema en posición (x, y, z) para un seguimiento de trayectoria ante un retardo del sistema $\tau_s = 0.12$ con un tiempo de predicción en $\tau_p = [0, 0.5, 0.12, 0.24]$; en las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7 se gráfica el efecto sobre el control $(u, \tau_\phi, \tau_\theta)$.

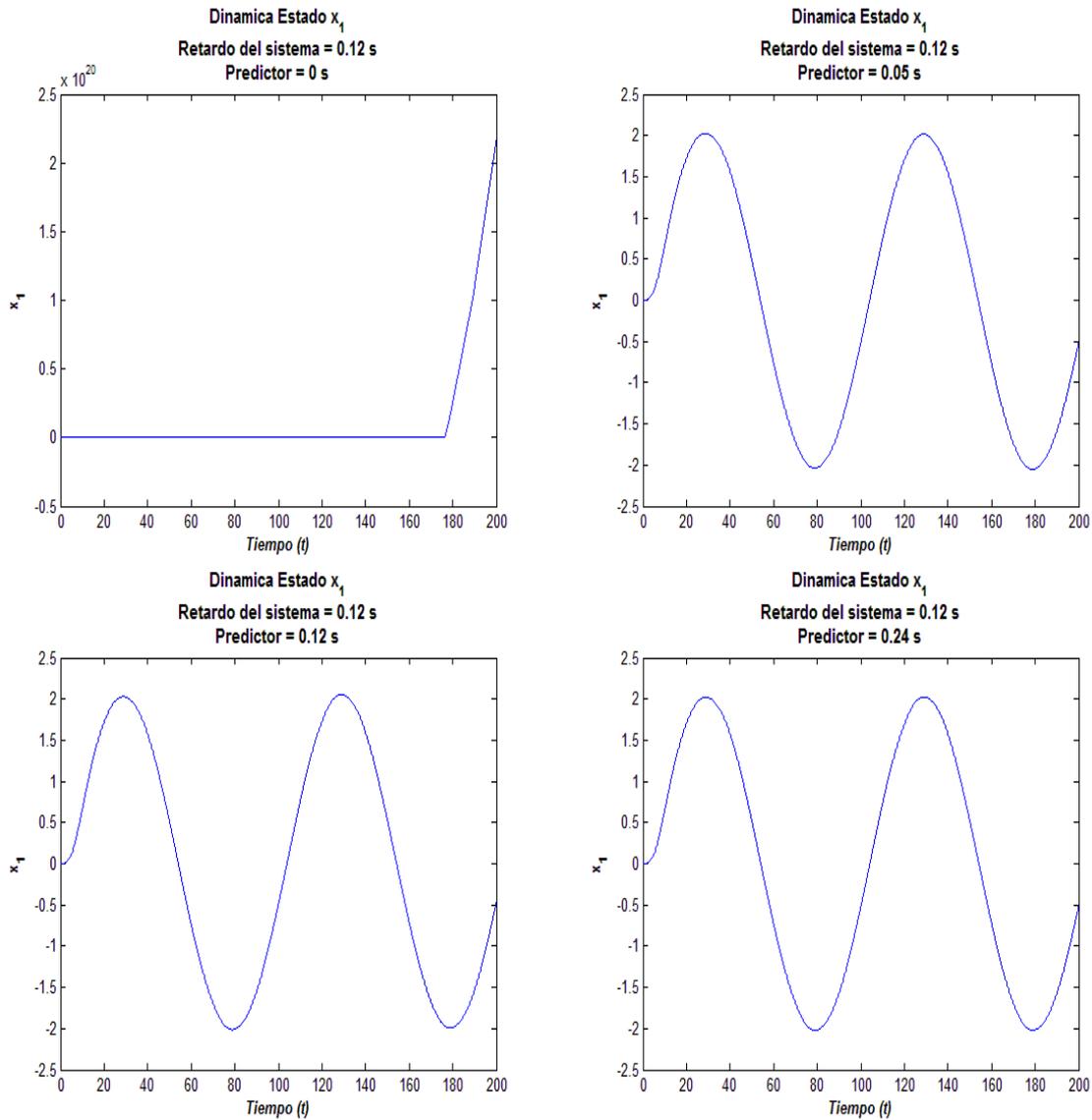


Figura 4.2: Dinámica del estado x_1 . Retardo del sistema $\tau_s = 0.12s$. Predicción $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24) s$

4.5 Predictor de estados

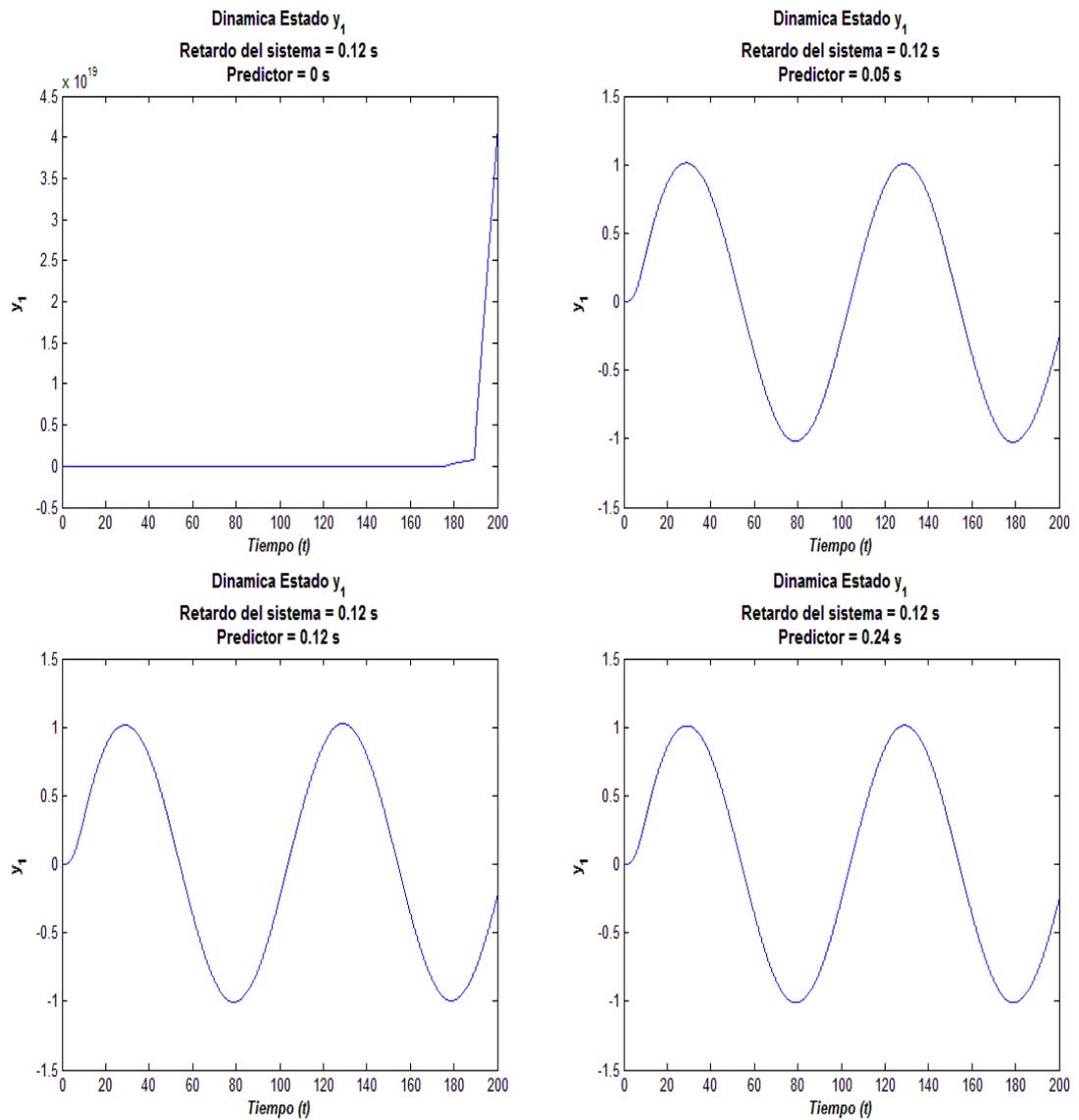


Figura 4.3: Dinámica del estado y_1 . Retardo del sistema $\tau_s = 0.12$ s. Predicción $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24)$ s.

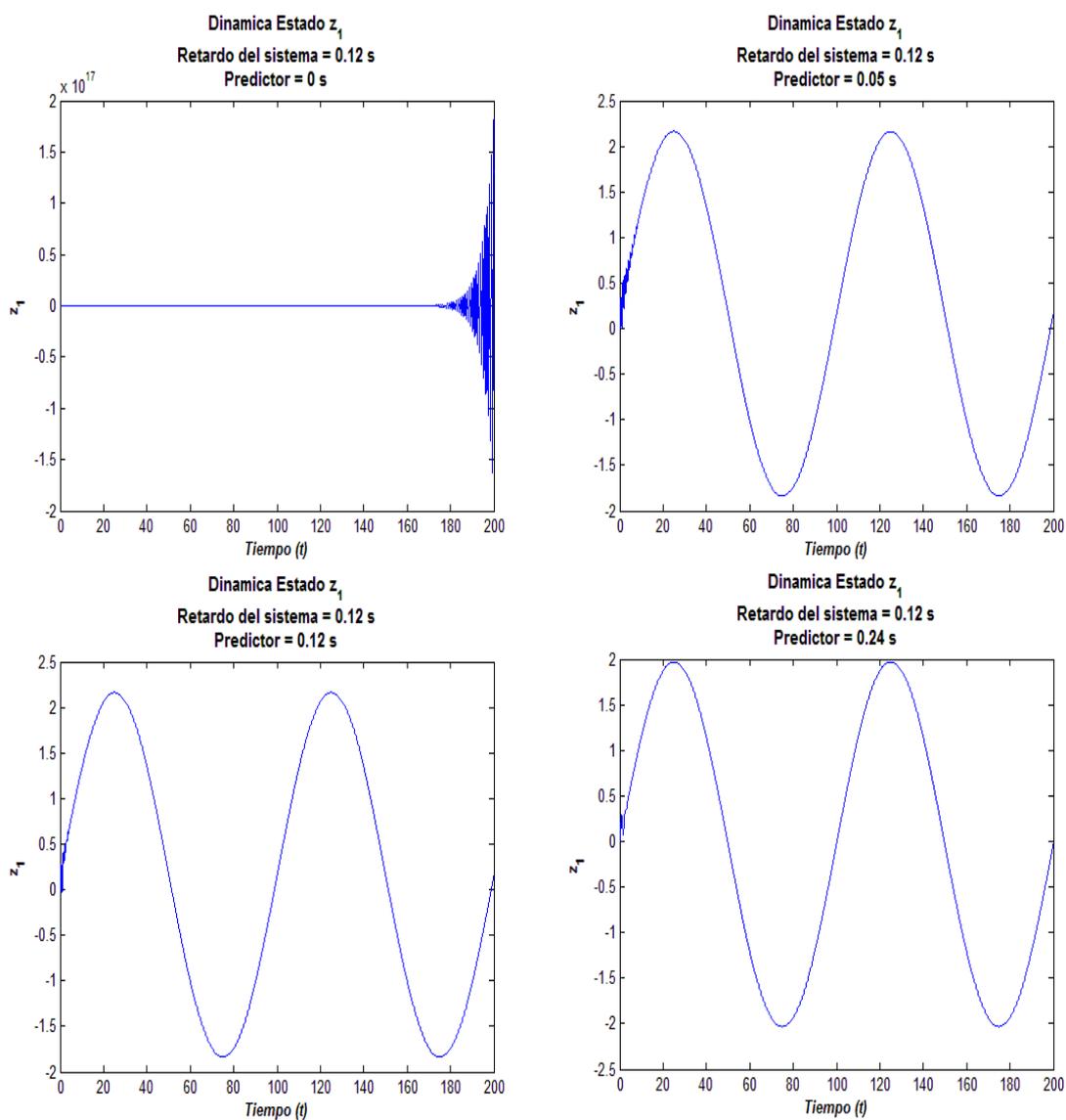


Figura 4.4: Dinámica del estado z_1 . Retardo del sistema $\tau_s = 0.12s$. Predicción $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24) s$

4.5 Predictor de estados

El efecto del predictor de estados para el cuadri-rotor con retardo del sistema $\tau_s = 0.12$ es disminuir las oscilaciones que se presentan como resultado del retardo; se observa además que al retroalimentar el predictor al sistema se logra llevar al sistema de un comportamiento inestable a uno estable. El comportamiento de los controles $(u, \tau_\theta, \tau_\phi)$ se muestra en las siguientes figuras

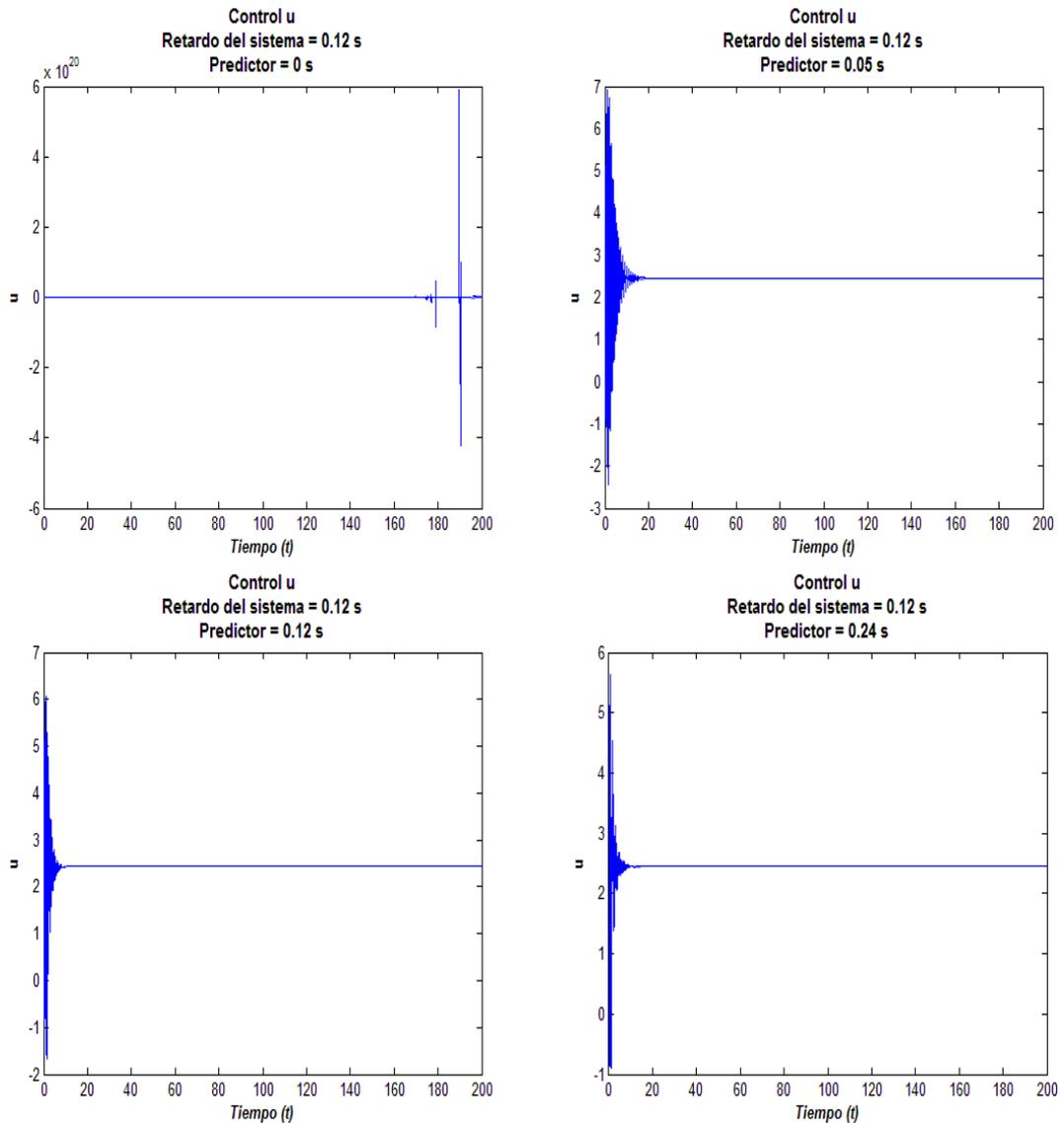


Figura 4.5: Gráfica del control u . Retardo del sistema $\tau_s = 0.12s$. Predicción $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24) s$

Se observa que al retroalimentar el predictor al sistema el control utilizado es mas suave; en un sistema físico esto originaría un menor consumo de energía y un menor desgaste en

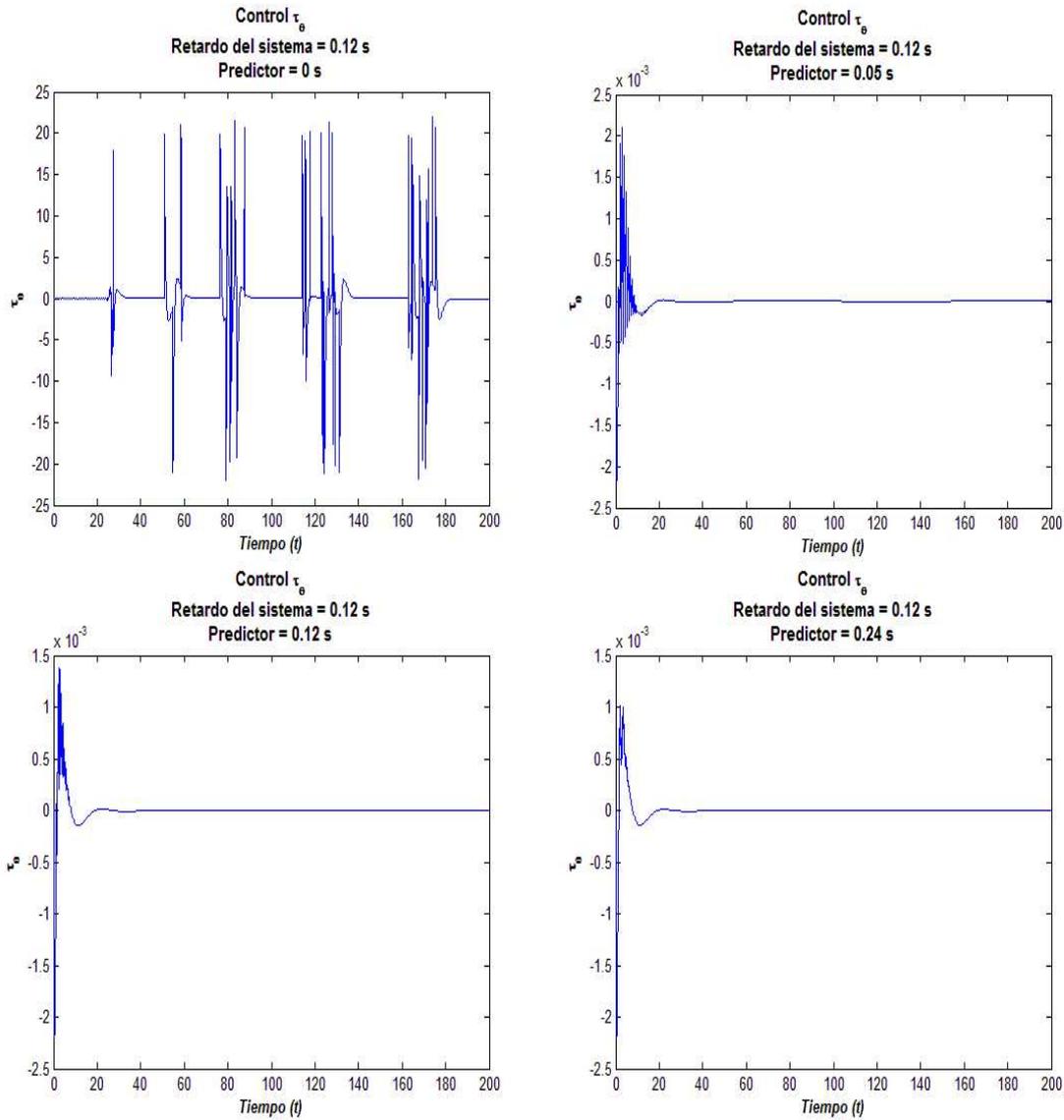


Figura 4.6: Control τ_θ . Retardo del sistema $\tau_s = 0.12s$. Predicción $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24) s$

4.5 Predictor de estados

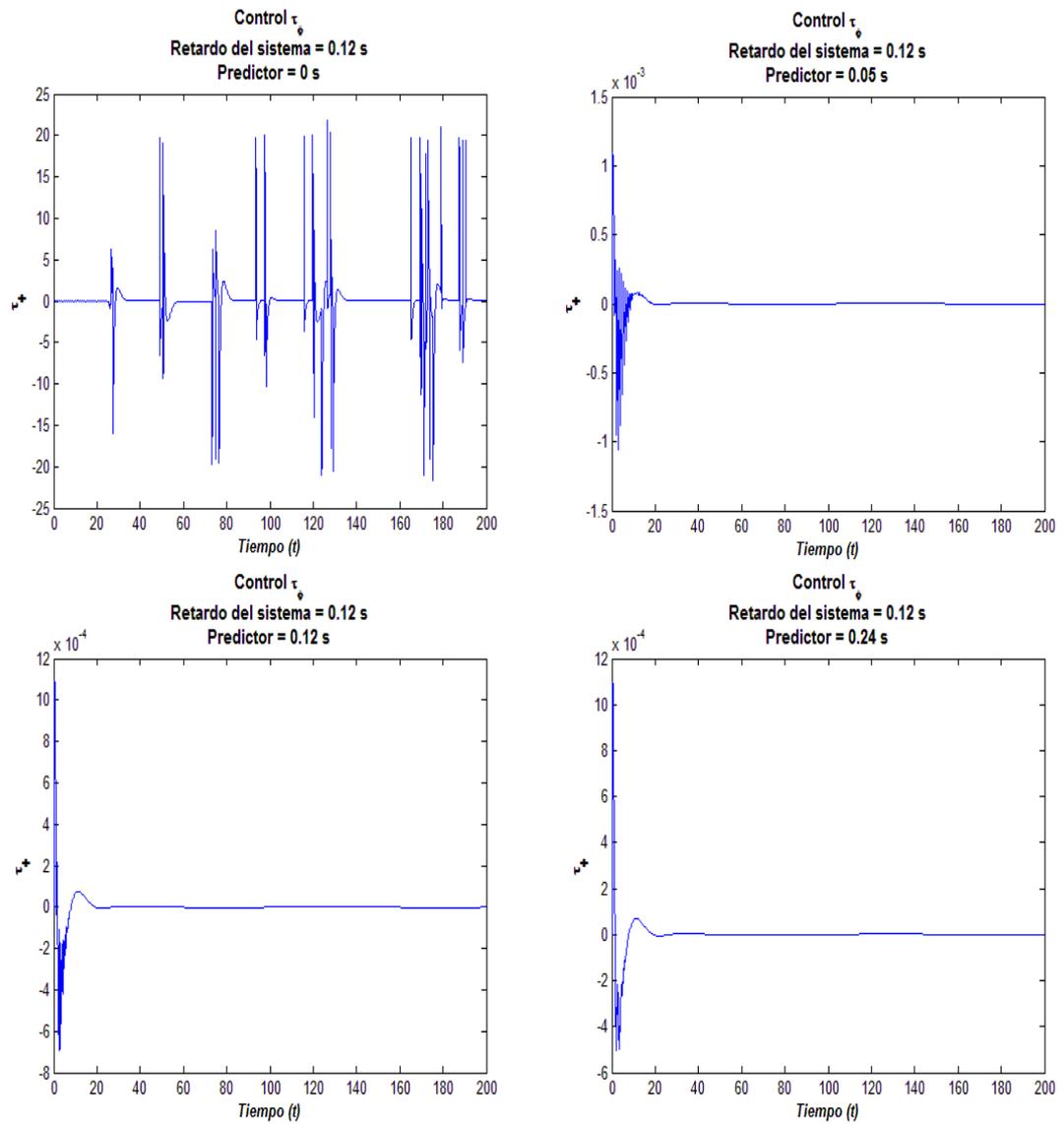


Figura 4.7: Control τ_ϕ . Retardo del sistema $\tau_s = 0.12s$. Predicción $\tau_p = (0, 0.5, 0.12, 0.24) s$

las partes mecánicas.

4.6. Conclusiones

Al termino de este capitulo se concluyo que la retroalimentacion del predictor al sistema origina que el comportamiento de los estados sea mas suave, es decir, se presenten oscilaciones de menor amplitud; en el control la retroalimentacion permite tener un control mas suave y de menor amplitud; esto en base a los resultados obtenidos en simulación.

V

Implementación

En este capítulo se implementa el control con el predictor de estados en la plataforma experimental cuadri-rotor diseñado en capítulos anteriores. Se describe la interconexión y el funcionamiento de los sistemas que dotan de funcionalidad al cuadri-rotor.

5.1. Descripción de la plataforma experimental

El funcionamiento del cuadri-rotor está dividido en los bloques de: adquisición de ángulos, adquisición de posición y velocidad, control y actuación; en ellos se lleva a cabo desde la adquisición de los datos sobre la posición y los ángulos, hasta el filtrado, la amplificación, el procesamiento de la información (cálculo de las leyes de control) y el control de los motores. En la Figura 5.1 se muestra la interconexión de estos bloques.

Bloque de Adquisición de ángulos

El bloque de adquisición de ángulos recopila la información de aceleración y velocidad angular a partir de una *IMU* (*Inertial Measurement Unit*). A partir de esta se obtiene los datos de ángulos de inclinación y giro en Pitch, Roll y Yaw (θ, ϕ, γ) así como las velocidades angulares. Este bloque realiza además las funciones de acondicionamiento de la señal analógica: filtrado y amplificación.

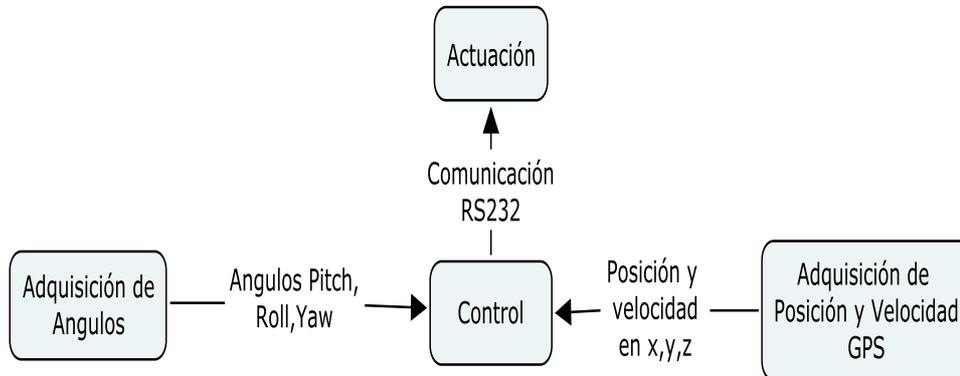


Figura 5.1: Diagrama a bloques. Plataforma experimental X_4

Bloque de Control

En este bloque se procesa la información recibida del bloque de adquisición de ángulos y el bloque de adquisición de posición y velocidad en un microprocesador. Se realiza además el cálculo de la ley de control. El microprocesador realiza la gestión de la comunicación serial entre dispositivos y la comunicación tipo I2C con los drivers en el bloque actuación.

Bloque de Actuación

El bloque de actuación puede ser visto como la etapa de potencia, en este se realiza la adecuación de la señal de control para la activación de los motores, esta adecuación es realizada por los drivers los cuales se encargan de brindar la potencia necesaria a los motores para su continuo funcionamiento.

5.1.1. Esquema de control

En la Figura 5.2 se describe la estructura del esquema de control. Se presenta un esquema general en el cual se plantea la existencia de un retardo en la medición de los parámetros de posición y velocidad en x, y, z .

El sistema cuenta con un retardo de τ segundos al medir las variables físicas del dispositivo, este retardo es inherente al sistema utilizado para la medición (básicamente un sistema de visión, GPS, etc.).

5.1 Descripción de la plataforma experimental

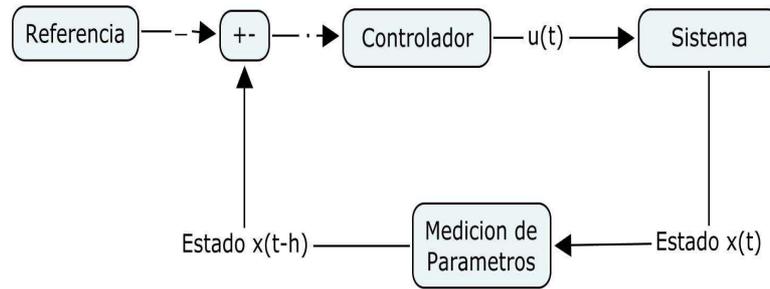


Figura 5.2: Esquema general del sistema de control

5.1.2. Plataforma experimental

La plataforma experimental utiliza un control de tipo PD similar al descrito en las ecuaciones 4.20, 4.59 y 4.60; se diferencia en que no utiliza las funciones de tipo saturación (σ_i) de manera anidada, esto permite obtener una velocidad de estabilización mayor. El análisis de estabilidad para este tipo de ley de control utiliza la misma premisa que la ley utilizada en el capítulo cuatro, la cual busca mostrar que para cierto tiempo $t \geq T_i$, la dinámica de cada estado estará acotada por el valor máximo de (σ_i) . Para un análisis más detallado refiérase a [8]

Se implementó el predictor para los estados x_1, y_1 descritos a continuación

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau)\tau - \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau) \sin \theta_1(l)](t - l) dl \quad (5.1)$$

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + y_2(t - \tau)\tau + \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l)](t - l) dl \quad (5.2)$$

En la plataforma experimental los datos de posición y velocidad angular son obtenidos por una centra inercial instalada en el cuerpo del cuadri-rotor, con conexión directa al microprocesador encargado del cálculo de la ley de control. En general estos tipos de sensores son bastante rápidos, no se considera retardo alguno para los estados de orientación (θ, ϕ, γ) . Los datos de velocidad y posición en (x, y, z) son obtenidos con 2 diferentes tecnologías:

- Un sistema de visión, en el cual se fija una referencia (números o formas) y a partir del cual mediante algoritmos de procesamiento de imagen se obtienen estimados de

la posición y la velocidad del cuerpo.

- Un sistema de posicionamiento global GPS, el cual a partir de la información recibida de cierto número de satélites, es capaz de estimar la posición y velocidad del cuerpo.

Sea el sistema que se utiliza para la medición de posición y velocidad en (x, y, z) de los mencionados, se presenta un retardo que es necesario considerar en el control del sistema; en el caso del sistema de visión la cantidad de información que es necesaria procesar para obtener la información es de tal magnitud que introduce un retardo al sistema: en el caso del sistema de posicionamiento global, la velocidad de actualización de cada dato introduce un retardo. Por las características de la plataforma, solo se tiene un retardo crítico, este es el perteneciente a la medición de la posición dada por el sistema GPS. Para el caso de las posiciones y velocidades angulares no se tienen retardos que afecten en gran manera el desempeño, esto es debido a que los sensores se encuentran instalados en el helicóptero y tienen una velocidad de actualización de los datos muy alta.

5.2. Resultados

Se presentan los resultados obtenidos al aplicar el predictor de estados a la dinámica del cuadri-rotor. La información obtenida al introducir al predictor con los datos del sistema es retroalimentada al cálculo de la ley de control descrita. Los resultados presentados corresponden a datos de posición y velocidad del sistema de posicionamiento global. Se estima en base al conocimiento de las características del sistema de posicionamiento, las velocidades de transferencia de información y el procesamiento de la información que el retardo del sistema es aproximadamente de $300ms$.

En las Figuras 5.3, 5.4 se presenta el efecto del retardo sobre los estados (x_1, x_2) y el control (τ_θ, τ_ϕ) del sistema sin la retroalimentación del predictor de estados. Se puede observar que para el estado y_1 existen oscilaciones que perturban la dinámica en vuelo estacionario; estas oscilaciones se presentan por el retardo que se tiene al actualizar los datos de posición y velocidad en base al sistema de posicionamiento.

En la Figura 5.5 se presentan las gráficas del comportamiento de la plataforma en lazo abierto, es decir, no se retroalimenta la señal del predictor (color rojo) al control.

5.2 Resultados

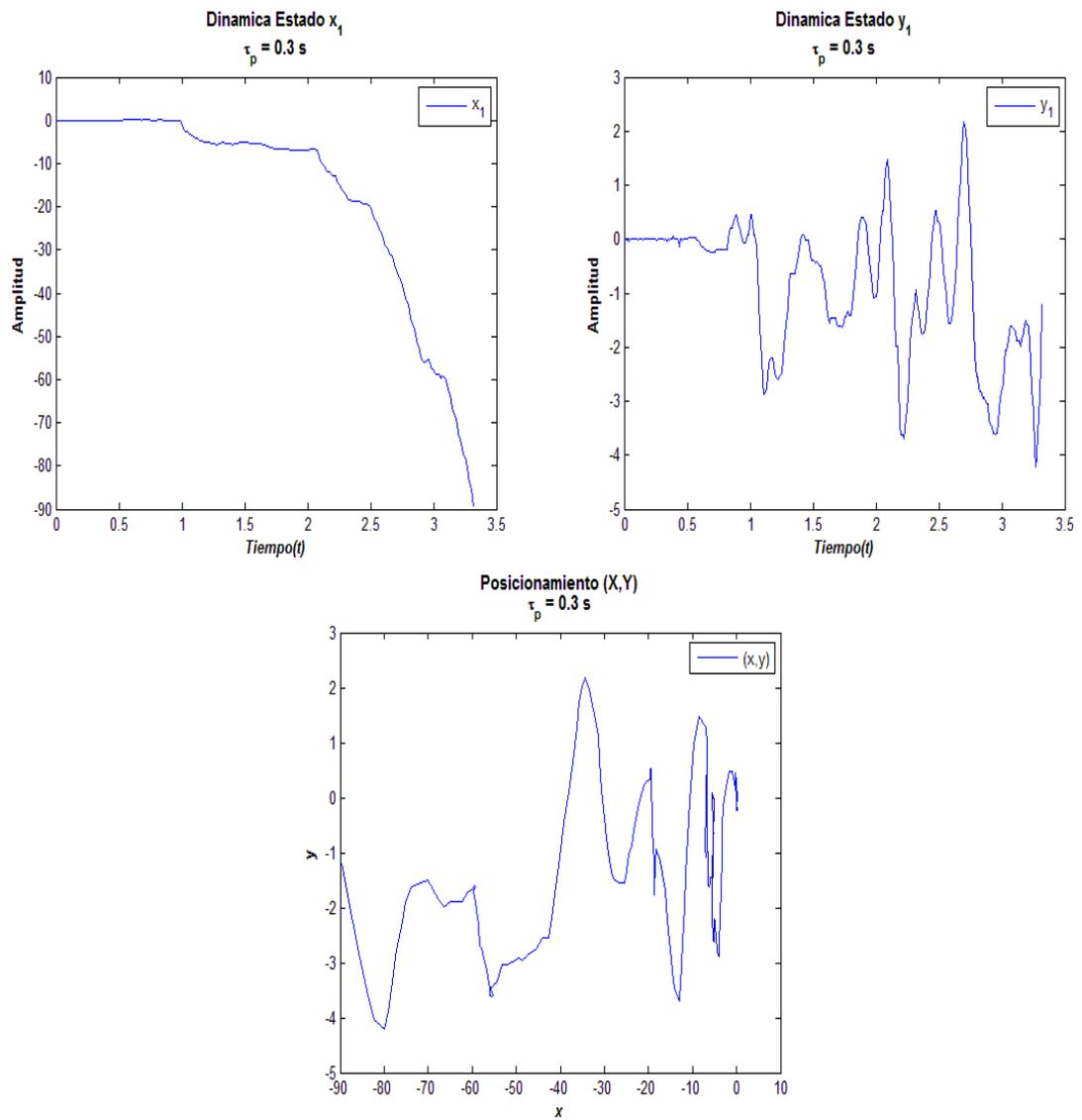


Figura 5.3: Cuadri-rotor sin predicci3n. Comportamiento natural del sistema

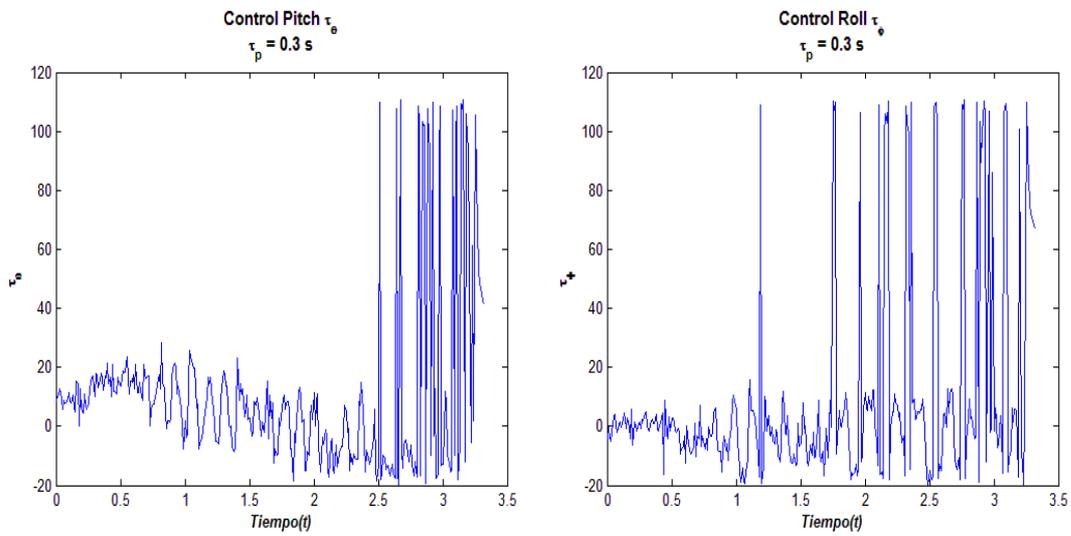


Figura 5.4: Cuadri-rotor sin predicción. Comportamiento natural del sistema

Se selecciono un tiempo considerablemente grande $\tau_p = 1s$ para observar el adelanto que realiza el predictor con respecto a la dinámica del sistema.

En las Figuras 5.6y5.7 se presenta la dinámica de los estados (x_1, y_1) asi como del control $(\tau_\theta, \tau_{phi})$ con la retroalimentacion del predictor para un tiempo $\tau_p = 300ms$ que corresponde al estimado del retardo del sistema. Se observa que las dinámicas pasa posición son suaves; las dinámicas del control tienen un comportamiento cambiante, esto debido a las altas ganancias necesarias para mantener los ángulos (θ, ϕ, γ) en valores pequeños.

5.2 Resultados

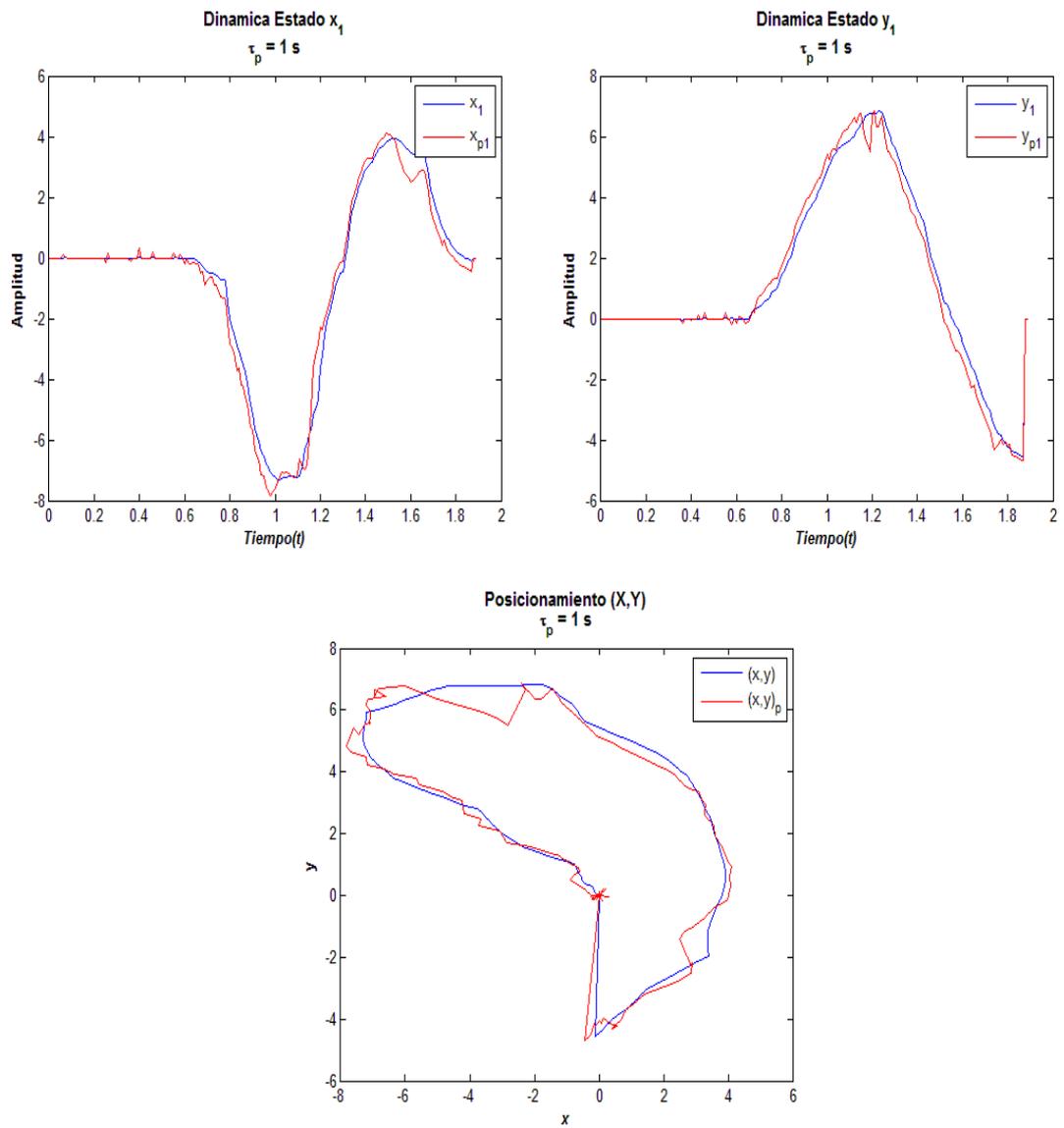


Figura 5.5: Predicción de estado $\tau_p = 1$ s para posición en x e y

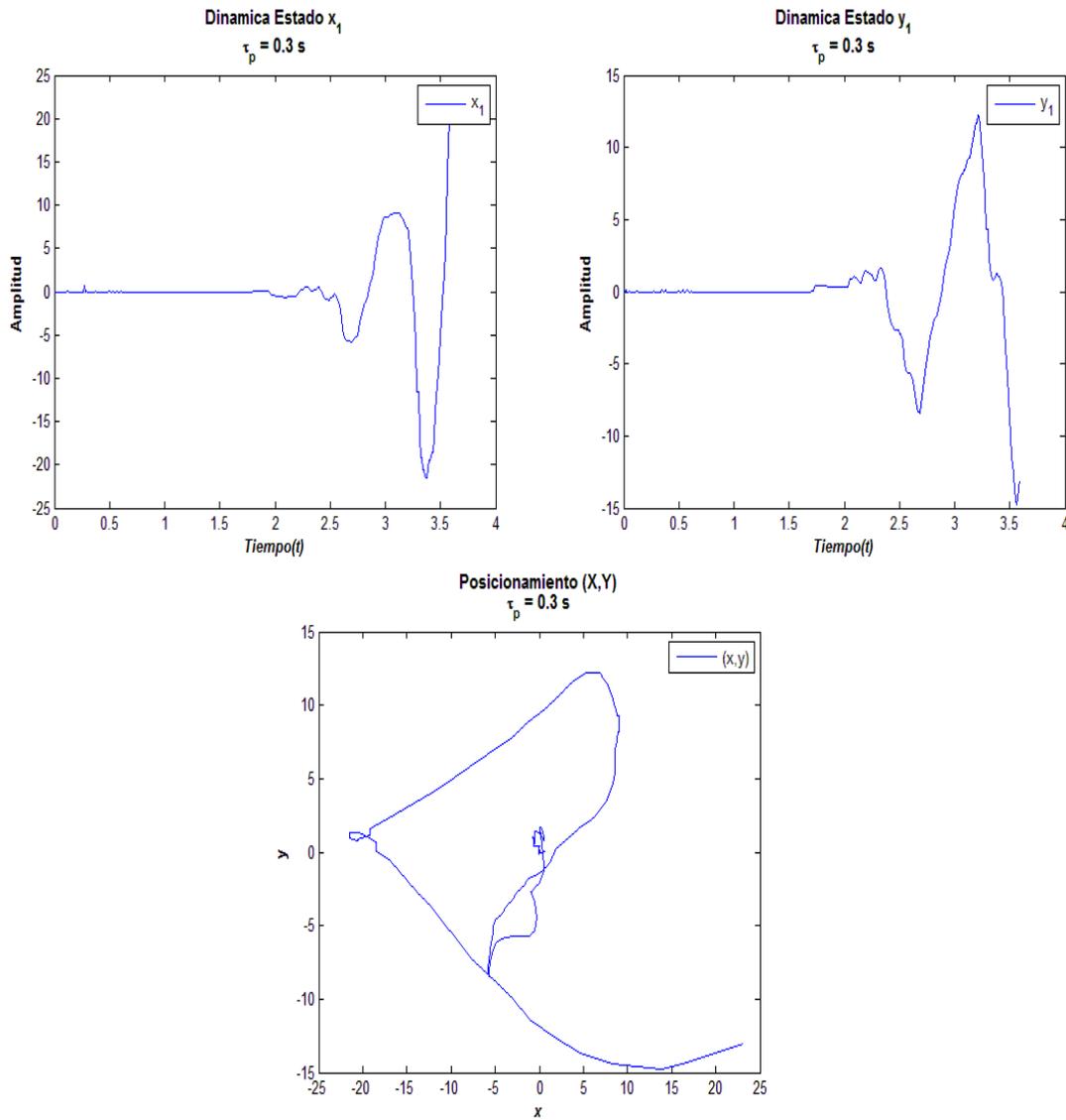


Figura 5.6: Cuadri-rotor con predicción $\tau = 300ms$ para los estados x_1 e y_1

5.2 Resultados

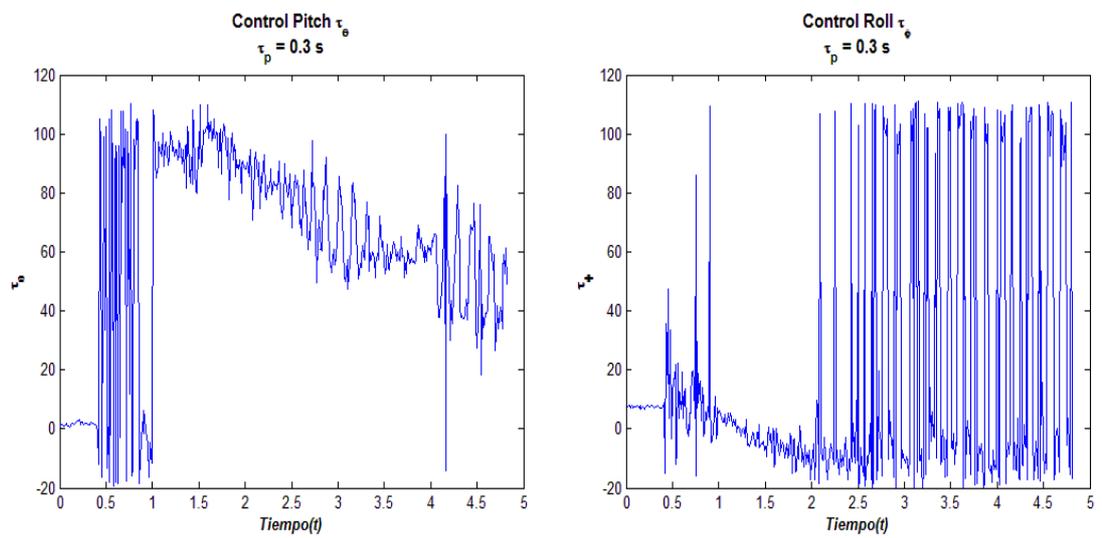


Figura 5.7: Cuadri-rotor con predicción $\tau = 300ms$

VI

Conclusiones

6.1. Conclusiones finales

En el presente trabajo, el problema de estimar una señal libre de retardo en base a la información de los estados actuales del sistema fue resuelto. La metodología para el desarrollo del predictor de estados fue abordada desde 2 perspectivas: la primera en base al teorema fundamental del cálculo, la cual a partir de una integral y un cambio en los límites de integración, define una ecuación que incluye la información de los estados en el tiempo actual; la segunda en base a una aproximación mediante la serie de Taylor con resto integral, la cual incluye la información de la función y su primera y segunda derivada. Cabe mencionar el resultado es el mismo no importando el enfoque utilizado. El predictor de estados mostró buenos resultados tanto en simulación como en la aplicación a la plataforma experimental, en los 2 casos, la retroalimentación de los estados precedidos para el cálculo de la ley de control mostró como resultado el mejoramiento de la dinámica, tanto de los estados como del control.

6.2. Aportaciones

- La principal aportación de este trabajo fue el desarrollo de una metodología para el cálculo de predictores de estado. Se sentaron las bases para el desarrollo del predictor de estados de orden 2 y se deja abierta la posibilidad del cálculo para un orden mayor.
- La implementación del predictor de estado en la plataforma experimental cuadrirotor para la estimación de los estados libres de retardo.

6.3. Trabajo a futuro

- Desarrollar las pruebas de estabilidad que de manera teórica aseguren la estabilidad del predictor de estados.
- Investigar las posibles familias de funciones para las cuales es posible el cálculo del predictor de estados basado en la metodología presentada.

Bibliografía

- [1] R. Francisco, F. Mazenc, S. Mondié, Global Asymptotic Stabilization of a PVTOL Aircraft Model with Delay in the Input in *Applications of Time Delay Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Berlin/Heidelberg, 2007.
- [2] M. Krstic, I. Karafyllis, Nonlinear stabilization under sampled and delayed measurements, and with inputs subject to delay and zero-order hold, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 99, 1, 2011.
- [3] M. Krstic, Input delay compensation for forward complete and strict-feedforward nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55, 2, 287-303, Febrero, 2010.
- [4] S. Mondié, R. Lozano, F. Mazenc, Semiglobal stabilization of continuous systems with bounded delayed inputs, 15th IFAC world Conference, 15, 1, 2002.
- [5] F. Mazenc, S. Mondié, S. I. Niculescu, Global asymptotic stabilization for chains of integrators with a delay in the input, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48, 1, 57-63, 2003.
- [6] F. Mazenc, S. Mondié, R. Francisco, Global asymptotic stabilization of feedforward systems with delay in the input, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 49, 5, 844-850, Diciembre 2003.
- [7] K. Gu, V. Kharitonov, J. Chen, *Stability of time-delay systems*, Birkhäuser, 2003.

- [8] P. Castillo, R. Lozano, A. E. Dzul, The Quad-rotor Rotorcraft in *Modeling and Control of Mini-Flying Machines*, 1^aed., Series Advances in Industrial Control, Springer-Verlag New York Inc. 2005
- [9] R. Lanzkron, T. Higgins, D-Decomposition analysis of automatic control systems, IRE Transactions on Automatic Control, 4, 3, 150-171, 1959.
- [10] R. F. Antonio, *Contribución al estudio de sistemas no lineales con retardo*, Tesis de Doctorado, CINVESTAV-IPN, México, D.F., 2004.
- [11] A. S. Poznyak, *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers*, 1^aed., Elsevier, 2008.
- [12] T. M. Apóstol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [13] T. M. Apóstol, *One-Variable Calculus with an Introduction to linear algebra*, Reverte, 2001.
- [14] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3^aed., Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [15] N. Sharma, S. Bhasin, Q. Wang, W. E. Dixon, Predictor based control for an uncertain Euler-Lagrange systems with input delay, IEEE American Control Conference, 1422-1427, 2010.
- [16] R. Lozano, P. Castillo, P. Garcia, A. Dzul, Robust prediction-based control for unstable delay systems: Application to the yaw control of a mini-helicopter, Automatica, 40, 4, 603-612, 2004.
- [17] R. Lozano, A. Sanchez, S. Salazar, Discrete-time stabilization of integrators in cascade: Real-time stabilization of a mini-rotorcraft, IEEE Conference on Decision and Control, 6265-6270, 2006.
- [18] S. Salazar, A. Palomino, R. Lozano, Trajectory tracking for a four mini-aircraft, European Control Conference on Decision and Control, 2505-2510, 2005.

BIBLIOGRAFÍA

- [19] H. Romero, S. Salazar, J. Escareño, R. Lozano, Estabilización de un mini helicóptero de cuatro rotores basado en flujo óptico y sensores inerciales, *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial*, 7, 2, 49-56, 2010.
- [20] S. Salazar, J. Escareño, R. Lozano, Embedded control system for a four-rotor UAV, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 189-204, 2007.
- [21] H. Romero, R. Benosman , R. Lozano, Stabilization and location of a four rotors helicopter applying vision, *American control conference*, 2006.
- [22] J. Stewart, *Calculo Multivariable*, Thomson Learning, 2002.
- [23] C.T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, 1999.
- [24] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, Pearson Education, 2003.
- [25] M. Spivak, *Calculo Infinitesimal*, Reverte, 2^a Edición, México 1996.
- [26] R. Sipahi, S. I. Niculescu, C.T. Abdallah, W. Michiels, K. Gu, Stability and stabilization of systems with time delay, *IEEE Control systems*, 31, 1, 30-65, 2011.
- [27] J. M. Smith, Closer control of loops with dead time, *Chem. Eng. Prog.*, 53, 5, 217-219, 1957.
- [28] Z. Arstein, Linear systems with delayed controls: A reduction, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 27, 4, 869-879, Agosto 1982.
- [29] A. R. Teel, Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls, *Systems & Controls Letters*, 18, 165-171, 2002.
- [30] J.P. Richard, Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, 10, 1667-1694, 2003.
- [31] J.C. Vilchis, B. Brogliato, R. Lozano, Nonlinear modelling and control of helicopters, *Automatica*, 1583-1596, 2003.
- [32] P. Sturm, Algorithms for Plane-Based Pose Estimation, *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1, 706-711, 2000.

A

Apéndice

A.1. Estado $x_2(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $x_1(t)$ en los límites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\int_{t-\tau}^t \dot{x}_1(s) ds = x_1(t) - x_1(t - \tau)$$
$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{x}_1(s) ds$$

Sustituyendo $\dot{x}_1(s) = x_2(s)$

$$x_1(t) = x_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t x_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = x_2(t) - x_2(t)$) por lo que la expresión no se modifica, se observa que el término $x_2(t)$ no dependen de la variable de integración,

entonces:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [x_2(s) + x_2(t) - x_2(t)] ds \\ x_1(t) &= x_1(t - \tau) + x_2(t)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{x}_2(l) dl ds \end{aligned}$$

Despejando $x_2(t)$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{\tau} \left(x_1(t) - x_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{x}_2(l) dl ds \right) \\ x_2(t) &= \frac{1}{\tau} \left(x_1(t) - x_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \left[-\frac{1}{m} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) \right] dl ds \right) \\ x_2(t) &= \frac{1}{\tau} \left(x_1(t) - x_1(t - \tau) + \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t \int_t^s [u(l - \tau) \sin \theta_1(l)] dl ds \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Se define el término p de la siguiente forma

$$p = \int_{t-\tau}^t \int_t^s [u(l - \tau) \sin \theta_1(l)] dl ds$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s [u(l - \tau) \sin \theta_1(l)] dl ds + \int_t^t u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl \frac{d(t + \tau)}{dt} \\ &\quad - \int_t^{t-\tau} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl \frac{dt}{dt} \end{aligned}$$

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s [u(l - \tau) \sin \theta_1(l)] dl ds - \int_t^{t-\tau} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t \int_t^s \frac{\partial}{\partial t} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl ds + \int_{t-\tau}^t u(s - \tau) \sin \theta_1(s) \frac{ds}{dt} ds \\ &\quad - \int_{t-\tau}^t u(t - \tau) \sin \theta_1(t) \frac{dt}{dt} ds - \int_t^{t-\tau} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl \end{aligned}$$

$$\dot{p} = - \int_{t-\tau}^t u(t - \tau) \sin \theta_1(t) ds - \int_t^{t-\tau} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl$$

A.2 Estado $y_2(t)$

$$\dot{p} = -u(t - \tau) \sin \theta_1(t) (t - t + \tau) - \int_t^{t-\tau} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl$$

$$\dot{p} = -u(t - \tau) \sin \theta_1(t) \tau - \int_t^{t-\tau} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl$$

Se define el término q de la siguiente forma

$$q = \int_t^{t-\tau} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl$$

$$\begin{aligned} \dot{q} = \int_t^{t-\tau} \frac{\partial}{\partial t} u(l - \tau) \sin \theta_1(l) dl + u(t - \tau - \tau) \sin \theta_1(t - \tau) \frac{d(t - \tau)}{dt} \\ - u(t - \tau) \sin \theta_1(t) \frac{dt}{dt} \end{aligned}$$

Es decir

$$\dot{q} = u(t - 2\tau) \sin \theta_1(t - \tau) - u(t - \tau) \sin \theta_1(t)$$

Por lo que el estado $x_2(t)$ esta en dependencia de los estados x_1 y θ_1 en $t = t - \tau$ y $t = t$ respectivamente.

A.2. Estado $y_2(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $y_2(t)$ en los limites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t \dot{y}_1(s) ds &= y_1(t) - y_1(t - \tau) \\ y_1(t) &= y_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{y}_1(s) ds \end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{y}_1(s) = y_2(s)$

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t y_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = y_2(t) - y_2(t)$) por lo que la expresión no

se modifica, se observa que el término $y_2(t)$ no dependen de la variable de integración , entonces:

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [y_2(s) + y_2(t) - y_2(t)] ds$$

$$y_1(t) = y_1(t - \tau) + y_2(t)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{y}_2(l) dl ds$$

Despejando $y_2(t)$, se tiene que:

$$y_2(t) = \frac{1}{\tau} \left(y_1(t) - y_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{y}_2(l) dl ds \right)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{\tau} \left(y_1(t) - y_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \left[\frac{1}{m} u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) \right] dl ds \right)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{\tau} \left(y_1(t) - y_1(t - \tau) - \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t \int_t^s [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l)] dl ds \right)$$

Reescribiendo el término integral

$$p = \int_{t-\tau}^t \int_t^s [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l)] dl ds$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l)] dl ds$$

$$+ \int_t^t u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl \frac{dt}{dt}$$

$$- \int_t^{t-\tau} u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl \frac{d(t - \tau)}{dt}$$

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l)] dl ds$$

$$- \int_t^{t-\tau} u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl \frac{d(t - \tau)}{dt}$$

A.2 Estado $y_2(t)$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & \int_{t-\tau}^t \int_t^s \frac{\partial}{\partial t} [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l)] dl ds \\ & + \int_{t-\tau}^t u(s-\tau) \cos \theta_1(s) \sin \theta_1(s) \frac{ds}{dt} \\ & - \int_{t-\tau}^t u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \sin \phi_1(t) \frac{dt}{dt} ds \\ & - \int_t^{t-\tau} u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl \frac{d(t-\tau)}{dt} \end{aligned}$$

$$\dot{p} = - \int_{t-\tau}^t u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \sin \phi_1(t) ds - \int_t^{t-\tau} u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & -u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \sin \phi_1(t) (t-t+\tau) \\ & - \int_t^{t-\tau} u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl \end{aligned}$$

$$\dot{p} = -u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \sin \phi_1(t) \tau - \int_t^{t-\tau} u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl$$

Simplificando

$$q = \int_t^{t-\tau} u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl$$

$$\begin{aligned} \dot{q} = & \int_t^{t-\tau} \frac{\partial}{\partial t} u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \sin \phi_1(l) dl \\ & + u(t-\tau-\tau) \cos \theta_1(t-\tau) \sin \phi_1(t-\tau) \frac{d(t-\tau)}{dt} \\ & - u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \sin \phi_1(t) \frac{dt}{dt} \end{aligned}$$

$$\dot{q} = u(t-2\tau) \cos \theta_1(t-\tau) \sin \phi_1(t-\tau) - u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \sin \phi_1(t)$$

Por lo que el estado $y_2(t)$ esta en dependencia de los estados y_1 , θ_1 y ϕ_1 en $t = t - \tau$ y del estado y_1 , θ_1 y ϕ_1 en tiempo $t = t$, por lo cual es necesario predecir el estado y_1 , θ_1 y ϕ_1 .

A.3. Estado $z_2(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $z_1(t)$ en los límites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\int_{t-\tau}^t \dot{z}_1(s) ds = z_1(t) - z_1(t - \tau)$$

$$z_1(t) = z_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{z}_1(s) ds$$

Sustituyendo $\dot{z}_1(s) = z_2(s)$

$$z_1(t) = z_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t z_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = z_2(t) - z_2(t)$) por lo que la expresión no se modifica, se observa que el término $z_2(t)$ no dependen de la variable de integración, entonces:

$$z_1(t) = z_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [z_2(s) + z_2(t) - z_2(t)] ds$$

$$z_1(t) = z_1(t - \tau) + z_2(t)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{z}_2(l) dl ds$$

Despejando $z_2(t)$, se tiene que:

$$z_2(t) = \frac{1}{\tau} \left(z_1(t) - z_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{z}_2(l) dl ds \right)$$

$$z_2(t) = \frac{1}{\tau} \left(z_1(t) - z_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \left[\frac{1}{m} u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g \right] dl ds \right)$$

$$z_2(t) = \frac{1}{\tau} \left(z_1(t) - z_1(t - \tau) - \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^t \int_t^s [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl ds \right)$$

Reescribiendo el término integral

$$p = \int_{t-\tau}^t \int_t^s [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl ds$$

A.3 Estado $z_2(t)$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{p} = & \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl ds \\ & + \int_t^t [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl \frac{dt}{dt} \\ & - \int_t^{t-\tau} [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl \frac{d(t-\tau)}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl ds \\ & - \int_t^{t-\tau} [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl \frac{d(t-\tau)}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & \int_{t-\tau}^t \int_t^s \frac{\partial}{\partial t} [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl ds \\ & + \int_{t-\tau}^t [u(s-\tau) \cos \theta_1(s) \cos \theta_1(s) - m^2 g] \frac{ds}{dt} ds \\ & - \int_{t-\tau}^t [u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \cos \phi_1(t) - m^2 g] \frac{dt}{dt} ds \\ & - \int_t^{t-\tau} u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) dl \frac{d(t-\tau)}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & - \int_{t-\tau}^t [u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \cos \phi_1(t) - m^2 g] ds \\ & - \int_t^{t-\tau} [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & - [u(t-\tau) \cos \theta_1(t) \cos \phi_1(t) - m^2 g] (t - t + \tau) \\ & - \int_t^{t-\tau} [u(l-\tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & - [u(t - \tau) \cos \theta_1(t) \cos \phi_1(t) - m^2 g] \tau \\ & - \int_t^{t-\tau} [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl \end{aligned}$$

Simplificando

$$q = \int_t^{t-\tau} [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl$$

$$\begin{aligned} \dot{q} = & \int_t^{t-\tau} \frac{\partial}{\partial t} [u(l - \tau) \cos \theta_1(l) \cos \phi_1(l) - m^2 g] dl \\ & + [u(t - \tau - \tau) \cos \theta_1(t - \tau) \cos \phi_1(t - \tau) - m^2 g] \frac{d(t - \tau)}{dt} \\ & - [u(t - \tau) \cos \theta_1(t) \cos \phi_1(t) - m^2 g] \frac{dt}{dt} \end{aligned}$$

$$\dot{q} = u(t - 2\tau) \cos \theta_1(t - \tau) \cos \phi_1(t - \tau) - u(t - \tau) \cos \theta_1(t) \cos \phi_1(t)$$

Por lo que el estado $z_2(t)$ esta en dependencia de los estados z_1, θ_1, ϕ_1 en $t = t - \tau$ y del estado z_1, θ_1, ϕ_1 en tiempo $t = t$, por lo cual es necesario predecir el estado θ_1 .

A.4. Estado $\gamma_1(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $\dot{\gamma}_1(t)$ en los limites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\int_{t-\tau}^t \dot{\gamma}_1(s) ds = \gamma_1(t) - \gamma_1(t - \tau) \tag{A.2}$$

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{\gamma}_1(s) ds \tag{A.3}$$

Sustituyendo $\dot{\gamma}_1(s) = \gamma_2(s)$

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \gamma_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = \gamma_2(t - \tau) - \gamma_2(t - \tau)$) por lo que la

A.4 Estado $\gamma_1(t)$

expresión no se modifica, se observa que el término $\gamma_2(t - \tau)$ no dependen de la variable de integración y que $\int_{t-\tau}^s \gamma_2(l)dl = \gamma_2(s) - \gamma_2(t - \tau)$, entonces:

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [\gamma_2(s) + \gamma_2(t - \tau) - \gamma_2(t - \tau)]ds$$

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \gamma_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s \dot{\gamma}_2(l)dlds$$

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \gamma_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \dot{\gamma}_2(l)dl \int_l^t 1ds$$

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \gamma_2(t - \tau)\tau + \int_t^{t+\tau} \dot{\gamma}_2(l)(t - l)dl$$

Sustituyendo $\dot{\gamma}_2(t) = \tau_\gamma(t - \tau)$ y reordenando.

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \gamma_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \tau_y(l - \tau)(t - l)dl \quad (\text{A.4})$$

Basado en la formula de Taylor, el predictor tiene la siguiente forma:

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \dot{\gamma}_1(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t (t - z)\ddot{\gamma}_1(z)dz$$

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \gamma_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \tau_\gamma(z - \tau)(t - z)dz$$

Reescribiendo el término integral

$$p = \int_{t-\tau}^t \tau_y(l - \tau)(t - l)dl$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{p} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \tau_\gamma(l - \tau)(t - l)dl + \tau_\gamma(t - \tau)[t - t] \frac{dt}{dt} \\ - \tau_y(t - \tau - \tau)[t - t + \tau] \frac{d(t - \tau)}{dt} \end{aligned}$$

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \tau_\gamma(l - \tau)dl - \tau_y(t - 2\tau)\tau$$

Simplificando

$$q = \int_{t-\tau}^t \tau_\gamma (l - \tau) dl$$

$$\dot{q} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \tau_\gamma (l - \tau) dl + \tau_\gamma (t - \tau) \frac{dt}{dt} - \tau_\gamma (t - \tau - \tau) \frac{d(t - \tau)}{dt}$$

$$\dot{q} = \tau_\gamma (t - \tau) - \tau_\gamma (t - 2\tau)$$

A.5. Estado $\gamma_2(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $\gamma_1(t)$ en los limites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\int_{t-\tau}^t \dot{\gamma}_1(s) ds = \gamma_1(t) - \gamma_1(t - \tau) \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{\gamma}_1(s) ds \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo $\dot{\gamma}_1(s) = \gamma_2(s)$

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \gamma_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = \gamma_2(t) - \gamma_2(t)$) por lo que la expresión no se modifica, se observa que el término $\gamma_2(t)$ no dependen de la variable de integración, entonces:

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [\gamma_2(s) + \gamma_2(t) - \gamma_2(t)] ds$$

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t - \tau) + \gamma_2(t)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{\gamma}_2(l) dl ds$$

Despejando $\gamma_2(t)$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{\tau} \left(\gamma_1(t) - \gamma_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{\gamma}_2(l) dl ds \right)$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{\tau} \left(\gamma_1(t) - \gamma_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \tau_\gamma (l - \tau) dl ds \right) \quad (\text{A.7})$$

A.5 Estado $\gamma_2(t)$

Reescribiendo el término integral

$$p = \int_{t-\tau}^t \int_t^s \tau_\gamma(l-\tau) dl ds$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s \tau_\gamma(l-\tau) dl ds + \int_t^t \tau_\gamma(l-\tau) dl \frac{dt}{dt} - \int_t^{t-\tau} \tau_\gamma(l-\tau) dl \frac{d(t-\tau)}{dt}$$

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s \tau_\gamma(l-\tau) dl ds - \int_t^{t-\tau} \tau_\gamma(l-\tau) dl \frac{d(t-\tau)}{dt}$$

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \left[\int_t^s \frac{\partial}{\partial t} \tau_\gamma(l-\tau) dl + \tau_\gamma(s-\tau) \frac{ds}{dt} - \tau_\gamma(t-\tau) \frac{dt}{dt} \right] ds - \int_t^{t-\tau} \tau_\gamma(l-\tau) dl \frac{d(t-\tau)}{dt}$$

$$\dot{p} = - \int_{t-\tau}^t \tau_\gamma(t-\tau) ds - \int_t^{t-\tau} \tau_\gamma(l-\tau) dl$$

$$\dot{p} = -\tau_\gamma(t-\tau)(t-t+\tau) - \int_t^{t-\tau} \tau_\gamma(l-\tau) dl$$

$$\dot{p} = -\tau_\gamma(t-\tau)\tau - \int_t^{t-\tau} \tau_\gamma(l-\tau) dl$$

Simplificando

$$q = \int_t^{t-\tau} \tau_\gamma(l-\tau) dl$$

$$\dot{q} = \int_t^{t-\tau} \frac{\partial}{\partial t} \tau_\gamma(l-\tau) dl + \tau_\gamma(t-\tau-\tau) \frac{d(t-\tau)}{dt} - \tau_\gamma(t-\tau) \frac{dt}{dt}$$

$$\dot{q} = \tau_\gamma(t-2\tau) - \tau_\gamma(t-\tau)$$

A.6. Estado $\theta_1(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $\theta_1(t)$ en los límites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{t-\tau}^t \dot{\theta}_1(s) ds &= \theta_1(t) - \theta_1(t - \tau) \\ \theta_1(t) &= \theta_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{\theta}_1(s) ds\end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{\theta}_1(s) = \theta_2(s)$

$$\theta_1(t) = \theta_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \theta_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = \theta_2(t - \tau) - \theta_2(t - \tau)$) por lo que la expresión no se modifica, se observa que el término $\theta_2(t - \tau)$ no dependen de la variable de integración y que $\int_{t-\tau}^s \dot{\theta}_2(l) dl = \theta_2(s) - \theta_2(t - \tau)$, entonces:

$$\theta_1(t) = \theta_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [\theta_2(s) + \theta_2(t - \tau) - \theta_2(t - \tau)] ds$$

$$\theta_1(t) = \theta_1(t - \tau) + \theta_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s \dot{\theta}_2(l) dl ds$$

$$\theta_1(t) = \theta_1(t - \tau) + \theta_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \dot{\theta}_2(l) dl \int_l^t 1 ds$$

$$\theta_1(t) = \theta_1(t - \tau) + \theta_2(t - \tau)\tau + \int_t^{t+\tau} \dot{\theta}_2(l)(t - l) dl$$

Sustituyendo $\dot{\theta}_2(t) = \tau_\theta(t - \tau)$ y reordenando.

$$\theta_1(t) = \theta_1(t - \tau) + \theta_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \tau_\theta(l - \tau)(t - l) dl \quad (\text{A.8})$$

A.7 Estado $\theta_2(t)$

Basado en la formula de Taylor, el predictor tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \theta_1(t-\tau) + \dot{\theta}_1(t-\tau)\tau + \int_{t-\tau}^t (t-z)\ddot{\theta}_1(z)dz \\ \theta_1(t) &= \theta_1(t-\tau) + \theta_2(t-\tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \tau_\theta(z-\tau)(t-z)dz\end{aligned}$$

Reescribiendo el término integral

$$p = \int_{t-\tau}^t \tau_\theta(l-\tau)(t-l)dl$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \int_{t-h}^t \frac{\partial}{\partial t} \tau_\theta(l-\tau)(t-l)dl + \tau_\theta(t-\tau)[t-t] \frac{dt}{dt} \\ &\quad - \tau_\theta(t-\tau-\tau)[t-t+\tau] \frac{d(t-\tau)}{dt} \\ \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t \tau_\theta(l-\tau)dl - \tau_\theta(t-2\tau)\tau\end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}q &= \int_{t-\tau}^t \tau_\theta(l-\tau)dl \\ \dot{q} &= \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \tau_\theta(l-\tau)dl + \tau_\theta(t-\tau) \frac{dt}{dt} - \tau_\theta(t-\tau-\tau) \frac{d(t-\tau)}{dt} \\ \dot{q} &= \tau_\theta(t-\tau) - \tau_\theta(t-2\tau)\end{aligned}$$

A.7. Estado $\theta_2(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $\theta_1(t)$ en los limites $(t, t-\tau)$ se tiene que:

$$\int_{t-\tau}^t \dot{\theta}_1(s)ds = \theta_1(t) - \theta_1(t-\tau) \quad (\text{A.9})$$

$$\theta_1(t) = \theta_1(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{\theta}_1(s)ds \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo $\dot{\theta}_1(s) = \theta_2(s)$ se tiene que:

$$\theta_1(t) = \theta_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \theta_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = \theta_2(t) - \theta_2(t)$) por lo que la expresión no se modifica, se observa que el término $\theta_2(t)$ no dependen de la variable de integración, entonces:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [\theta_2(s) + \theta_2(t) - \theta_2(t)] ds \\ \theta_1(t) &= \theta_1(t - \tau) + \theta_2(t)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{\theta}_2(l) dl ds \end{aligned}$$

Despejando $\theta_2(t)$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \frac{1}{\tau} \left(\theta_1(t) - \theta_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{\theta}_2(l) dl ds \right) \\ \theta_2(t) &= \frac{1}{\tau} \left(\theta_1(t) - \theta_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \tau_\theta(l - \tau) dl ds \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Reescribiendo el término integral

$$p = \int_{t-\tau}^t \int_t^s \tau_\theta(l - \tau) dl ds$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s \tau_\theta(l - \tau) dl ds + \int_t^t \tau_\theta(l - \tau) dl \frac{dt}{dt} \\ &\quad - \int_t^{t-\tau} \tau_\theta(l - \tau) dl \frac{d(t - \tau)}{dt} \\ \dot{p} &= \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s \tau_\theta(l - \tau) dl ds - \int_t^{t-\tau} \tau_\theta(l - \tau) dl \frac{d(t - \tau)}{dt} \end{aligned}$$

A.8 Estado $\phi_1(t)$

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \left[\int_t^s \frac{\partial}{\partial t} \tau_\theta(l-\tau) dl + \tau_\theta(s-\tau) \frac{ds}{dt} - \tau_\theta(t-\tau) \frac{dt}{dt} \right] ds - \int_t^{t-\tau} \tau_\theta(l-\tau) dl \frac{d(t-\tau)}{dt}$$

$$\dot{p} = - \int_{t-\tau}^t \tau_\theta(t-\tau) ds - \int_t^{t-\tau} \tau_\theta(l-\tau) dl$$

$$\dot{p} = -\tau_\theta(t-\tau)(t-t+\tau) - \int_t^{t-\tau} \tau_\theta(l-\tau) dl$$

$$\dot{p} = -\tau_\theta(t-\tau)\tau - \int_t^{t-\tau} \tau_\theta(l-\tau) dl$$

Simplificando

$$q = \int_t^{t-\tau} \tau_\theta(l-\tau) dl$$

$$\dot{q} = \int_t^{t-\tau} \frac{\partial}{\partial t} \tau_\theta(l-\tau) dl + \tau_\theta(t-\tau-\tau) \frac{d(t-\tau)}{dt} - \tau_\theta(t-\tau) \frac{dt}{dt}$$

$$\dot{q} = \tau_\theta(t-2\tau) - \tau_\theta(t-\tau)$$

A.8. Estado $\phi_1(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $\phi_1(t)$ en los límites $(t, t-\tau)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t \dot{\phi}_1(s) ds &= \phi_1(t) - \phi_1(t-\tau) \\ \phi_1(t) &= \phi_1(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{\phi}_1(s) ds \end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{\phi}_1(s) = \phi_2(s)$

$$\phi_1(t) = \phi_1(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{\phi}_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = \phi_2(t-\tau) - \phi_2(t-\tau)$) por lo que la expresión no se modifica, se observa que el término $\phi_2(t-\tau)$ no dependen de la variable

de integración y que $\int_{t-\tau}^s \phi_2(l)dl = \phi_2(s) - \phi_2(t - \tau)$, entonces:

$$\phi_1(t) = \phi_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [\phi_2(s) + \phi_2(t - \tau) - \phi_2(t - \tau)]ds$$

$$\phi_1(t) = \phi_1(t - \tau) + \phi_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s \dot{\phi}_2(l)dlds$$

$$\phi_1(t) = \phi_1(t - \tau) + \phi_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \dot{\phi}_2(l)dl \int_l^t 1ds$$

$$\phi_1(t) = \phi_1(t - \tau) + \phi_2(t - \tau)\tau + \int_t^{t+\tau} \dot{\phi}_2(l)(t - l)dl$$

Sustituyendo $\dot{\phi}_2(t) = \tau_\phi(t - \tau)$ y reordenando.

$$\phi_1(t) = \phi_1(t - \tau) + \phi_2(t - \tau)\tau + \int_{t-\tau}^t \tau_\phi(l - \tau)(t - l)dl \quad (\text{A.12})$$

Reescribiendo el término integral

$$p = \int_{t-\tau}^t \tau_\phi(l - \tau)(t - l)dl$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{p} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \tau_\phi(l - \tau)(t - l)dl + \tau_\phi(t - \tau)[t - t] \frac{dt}{dt} \\ - \tau_\phi(t - \tau - \tau)[t - t + \tau] \frac{d(t - \tau)}{dt} \end{aligned}$$

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \tau_\phi(l - \tau) dl - \tau_\phi(t - 2\tau) \tau$$

Simplificando

$$q = \int_{t-\tau}^t \tau_\phi(l - \tau) dl$$

$$\dot{q} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \tau_\phi(l - \tau) dl + \tau_\phi(t - \tau) \frac{dt}{dt} - \tau_\phi(t - \tau - \tau) \frac{d(t - \tau)}{dt}$$

$$\dot{q} = \tau_\phi(t - \tau) - \tau_\phi(t - 2\tau)$$

A.9. Estado $\phi_2(t)$

Basado en el teorema fundamental del cálculo, al integrar $\dot{\phi}_1(t)$ en los límites $(t, t - \tau)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{t-\tau}^t \dot{\phi}_1(s) ds &= \phi_1(t) - \phi_1(t - \tau) \\ \phi_1(t) &= \phi_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{\phi}_1(s) ds\end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{\phi}_1(s) = \phi_2(s)$

$$\phi_1(t) = \phi_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \phi_2(s) ds$$

Agregando un cero dentro de la integral ($0 = \phi_2(t) - \phi_2(t)$) por lo que la expresión no se modifica, se observa que el término $\phi_2(t)$ no dependen de la variable de integración, entonces:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \phi_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t [\phi_2(s) + \phi_2(t) - \phi_2(t)] ds \\ \phi_1(t) &= \phi_1(t - \tau) + \phi_2(t)\tau + \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{\phi}_2(l) dl ds\end{aligned}$$

Despejando $\phi_2(t)$

$$\begin{aligned}\phi_2(t) &= \frac{1}{\tau} \left(\phi_1(t) - \phi_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \dot{\phi}_2(l) dl ds \right) \\ \phi_2(t) &= \frac{1}{\tau} \left(\phi_1(t) - \phi_1(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \int_t^s \tau_\phi(l - \tau) dl ds \right)\end{aligned}\tag{A.13}$$

Reescribiendo el término integral

$$p = \int_{t-\tau}^t \int_t^s \tau_\phi(l - \tau) dl ds$$

Derivando el término p y basado en la regla de Leibniz, se tiene que

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s \tau_\phi(l-\tau) dl ds + \int_t^t \tau_\phi(l-\tau) dl \frac{dt}{dt} - \int_t^{t-\tau} \tau_\phi(l-\tau) dl \frac{d(t-\tau)}{dt}$$

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_t^s \tau_\phi(l-\tau) dl ds - \int_t^{t-\tau} \tau_\phi(l-\tau) dl \frac{d(t-\tau)}{dt}$$

$$\dot{p} = \int_{t-\tau}^t \left[\int_t^s \frac{\partial}{\partial t} \tau_\phi(l-\tau) dl + \tau_\phi(s-\tau) \frac{ds}{dt} - \tau_\phi(t-\tau) \frac{dt}{dt} \right] ds - \int_t^{t-\tau} \tau_\phi(l-\tau) dl \frac{d(t-\tau)}{dt}$$

$$\dot{p} = - \int_{t-\tau}^t \tau_\phi(t-\tau) ds - \int_t^{t-\tau} \tau_\phi(l-\tau) dl$$

$$\dot{p} = -\tau_\phi(t-\tau)(t-t+\tau) - \int_t^{t-\tau} \tau_\phi(l-\tau) dl$$

$$\dot{p} = -\tau_\phi(t-\tau)\tau - \int_t^{t-\tau} \tau_\phi(l-\tau) dl$$

Simplificando

$$q = \int_t^{t-\tau} \tau_\phi(l-\tau) dl$$

$$\dot{q} = \int_t^{t-\tau} \frac{\partial}{\partial t} \tau_\phi(l-\tau) dl + \tau_\phi(t-\tau-\tau) \frac{d(t-\tau)}{dt} - \tau_\phi(t-\tau) \frac{dt}{dt}$$

$$\dot{q} = \tau_\phi(t-2\tau) - \tau_\phi(t-\tau)$$