



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO PÓLITECNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

CONTROL AUTOMÁTICO

Control dinámico de la marcha de un robot humanoide

Tesis que presenta

Ortíz Olvera Alexis Adrian

Para Obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

En la Especialidad de

Control Automático

Directores de la tesis: Dr. Juan Manuel Ibarra Zannatha

Dr. Alejandro Justo Malo Tamayo

México D.F. Diciembre del 2012

	Capítulo 1 Generalidades	Pag.
	Introducción	
1.1	Definiciones	1-2
	1.1.1 Cuerpo rígido	1-2
	1.1.2 Articulación	1-2
	1.1.3 Restricción holonómica	1-3
	1.1.4 Cadena cinemática	1-3
	1.1.5 Cadena cinemática holonómica	1-3
	1.1.6 Grados de libertad	1-3
	1.1.7 Actuador	1-3
	1.1.8 Máquina	1-3
	1.1.9 Robot	1-4
1.2	Estado del arte del caminado de robots	1-4
1.3	Planteamiento del problema	1-6
1.4	Propósito del trabajo de la tesis	1-6
	Capítulo 2 Modelado de un robot	
	Introducción	
2.1	Grados de libertad del sistema y del espacio de trabajo.	2-2
2.2	Modelado de la cinemática directa	2-3
2.2.1	Cinemática directa de posiciones	2-3
2.2.2	Cinemática directa de velocidades y aceleraciones	2-5
2.3	Modelado de la cinemática inversa	2-7
2.3.1	Cinemática inversa de posiciones	2-7
2.3.2	Cinemática inversa de velocidades y aceleraciones	2-7
2.4	Modelado de la dinámica	2-8
2.4.1	Ecuaciones de Lagrange	2-8
2.5	Modelado del robot bioloid	2-10
2.5.1	Cinemática directa de posiciones	2-10
2.5.1.1	Matrices de transformación homogénea entre eslabones para la pierna derecha	2-11
2.5.1.2	Matrices de transformación homogénea entre eslabones para el brazo derecho	2-13
2.5.2	Cinemática directa de velocidades y aceleraciones	2-14
2.5.3	Cinemática inversa de posiciones	2-16
2.5.4	Cinemática inversa de velocidades y aceleraciones	2-18
2.5.5	Modelo dinámico	2-19
	Capítulo 3 Criterio de estabilidad	
	Introducción	
3.1	Puntos de referencia en el suelo y la estabilidad de la marcha del humanoide	3-3
3.1.1	Polígono de soporte	3-3
3.1.2	Punto de momento cero	3-3
3.1.3	Índice de rotación del pie	3-8
3.1.4	Pivote del momento centroidal	3-9

3.1.5	Puntos de captura	3-10
3.2	Criterios de estabilidad	3-12
3.3	Comparación entre criterios de estabilidad	3-13
3.3.1	Características del criterio de estabilidad continua	3-13
3.3.2	Características del criterio con inestabilidad temporal	3-14

## Capítulo 4 Síntesis de un caminado paramétrico

### Introducción

4.1	El caminado humano y su biomecánica	4-1
4.1.1	Parámetros generalizados y parámetros espaciales del caminado	4-2
4.2	Sintetizado del caminado	4-4
4.2.1	Definición de las características del caminado	4-4
4.2.2	Generación de trayectorias	4-4
4.2.2.1	Restricciones para el análisis cinemático	4-4
4.2.2.2	Trayectorias espaciales	4-6
4.2.2.3	Relaciones temporales entre movimientos	4-7
4.2.3	Trayectorias de velocidad y aceleración	4-8
4.2.4	Generación de valores articulares	4-10

## Capítulo 5 Algoritmos de control

### Introducción

5.1	Algoritmo de control 1: Momentos del robot	5-2
5.2	Algoritmo de control 2: Actuación de articulación en la cadera	5-7
5.3	Características de los algoritmos de control	5-9

## Capítulo 6 Caracterización del robot humanoide bioloid

### Introducción

6.1	Constitución de las piernas	6-3
6.2	Constitución de los brazos	6-4
6.3	Constitución del tronco	6-5
6.4	Inercias	6-6
6.5	Características eléctricas y electrónicas	6-7

## Capítulo 7 Implementación

### Introducción

7.1	Implementación en simulación	7-1
7.1.1	Construcción del modelo para simulación	7-1
7.1.2	Implementación del algoritmo	7-4

# Abstract

In the following thesis a technique for a stable walking generation for the bio-inspired robot is developed. The stability criteria used in this work is based on the ground reference points and a full body dynamics model. In order to develop this work we start with an analysis of the current work done in this area, this analysis is presented in chapter 1. Following the cinematic and dynamic models for the robot are presented in chapter 2. While the ground reference points theory is described in chapter 3, after this description the stability criteria is stated in the same chapter. In chapter 4 the walking pattern generation method is described. Finally in chapter 5 2 control methods are presented in order to be implemented first in the simulation models and next in the real robot. Some extra information is needed in order to develop this work so in chapter 6 the physical, mechanical and electrical characteristics of the robot is presented while in chapter 7 the control algorithm implementation is described in both simulation environment and real robot.



# Resumen

En el presente trabajo de tesis se desarrolla una técnica para sintetizar un caminado estable en el robot humanoide bioloid. El criterio de estabilidad se basa en la teoría de los puntos de referencia en el suelo y un modelado de la dinámica completa del robot. Para desarrollar este trabajo se parte de un análisis histórico de los trabajos relacionados presentado en el capítulo 1. Posteriormente los modelados cinemáticos, directos e inversos, así como dinámicos del robot se desarrollan en el capítulo 2. Posteriormente se describe la teoría de puntos de referencia en el suelo y se enuncian las condiciones de estabilidad para el caminado capítulo 3. En el capítulo 4 se describe la técnica de sintetizado que se emplea para generar el caminado en función de los parámetros previamente definidos. Finalmente se desarrollan dos algoritmos de control que permiten asegurar las condiciones de equilibrio descritas anteriormente en la presencia de perturbaciones. Para el desarrollo de los modelos y simulaciones es necesario contar con los parámetros físicos, mecánicos y eléctricos del sistema por lo cual en el capítulo 6 se describe la caracterización del robot. Los programas de simulación así como los algoritmos implementados tanto en simulación como en el robot real son descritos en el capítulo 7.

# Capítulo 1

## Generalidades

### Introducción

El mecanismo de evolución natural ha mostrado claramente que el individuo capaz de adaptarse a su entorno será el más exitoso, es decir sobrevivirá y se reproducirá. Por otro lado el ser humano ha sido capaz de aprovechar experiencias y observaciones para entender, controlar y utilizar fenómenos naturales que le permiten adaptar el medio a sus necesidades, mejorando de esta manera sus condiciones de vida y aumentando su probabilidad de supervivencia.

Esto ha desarrollado el cerebro humano, posibilitado por el caminado bípedo y la consecuente liberación de las manos. Además ha sentado las condiciones propicias para el desarrollo de una gran cantidad de muy variados e ingeniosos mecanismos y máquinas que le han permitido liberarse de actividades repetitivas, tediosas y hasta peligrosas. Todo esto ha permitido y promovido que el ser humano se dedique al desarrollo de las habilidades necesarias para producir, entender y mejorar estos inventos. Estableciéndose entonces el ciclo tecnológico humano. Cuya meta final es, al parecer, la creación de un sistema capaz de realizar todas las actividades que el ser humano puede hacer.

Algo que parece muy lógico es que el sistema que sea capaz de imitarnos debe estar construido de manera muy similar a nosotros mismos; Algo que haga lo que nosotros debe ser como nosotros. Es por esto que los esfuerzos de la ciencia, en muchas de sus ramas, se enfocan en imitar las características humanas y uno de los primeros pasos para esta imitación es lograr reproducir la forma bípeda de caminar, que como ya fue mencionado fue el detonante para el desarrollo de nuestro cerebro.

Los intentos por diseñar una máquina capaz de caminar datan de finales del Siglo XVIII con ejemplos como: los Hombres de Vapor diseñados, uno por Zadoc P. Dederick en 1868 [1 y 2] y el segundo por George Moore en 1893 [2] junto al Caballo Mecánico patentado por L. A. Rygg, del mismo año [3].

En un principio estas máquinas no eran vistas de manera diferente a cualquier otro mecanismo capaz de limpiar el algodón, cortar una hoja de lámina etc. Fue hasta 1921 cuando el escritor checo Karel Capek, en su obra *Rossum's Universal Robots*, acuñó el término Robot, con lo cual se diferenciaba a este tipo de máquinas de las demás. De igual forma el autor Issac Asimov creó el término robótica en su novela *Liar*, de 1941.

Aún sin proveer una definición clara o científica de lo que era un robot y sus diferencias con las otras máquinas, estos autores sentaron las bases para que los científicos se encargaran de definir estas diferencias y generar la transición de la robótica de la ciencia ficción a la robótica real.

A diferencia de los robots de ciencia ficción, que hoy en día son capaces de pensar, razonar, caminar, correr y hasta de revelarse contra sus creadores, los robots reales han tenido una evolución mucho más lenta. Los orígenes de éstos pueden relacionarse a las máquinas de control numérico.

La Revolución Industrial fomentó la creación de un sinnúmero de máquinas capaces de remplazar a los hombres en muchas áreas de trabajo, aumentó la calidad de los productos y redujo los costos de producción, permitiendo de este modo el acceso de los productos a un sector más amplio de la población, Sin embargo, la creación de una máquina para cada una de las actividades humanas no parecía ser algo viable o productivo además de que cada vez que la actividad sufría un cambio, la máquina también tenía que ser modificada, en el mejor de los casos, o remplazada.

Esto provocó que los desarrolladores se enfocaran en diseñar máquinas más flexibles, iniciando con máquinas que se pudieran programar para un mayor rango de acciones y culminando con una máquina

capaz de hacer lo que hace un ser humano con sus manos, el manipulador robótico. Los manipuladores fueron creados para la industria por primera vez por Unimation [4] en 1956 marcando así el inicio de la época de la robótica industrial [5] o robótica del siglo XX.

Con el tiempo los avances tecnológicos y científicos han permitido plantearse, de manera realista, la posibilidad de crear un robot capaz de trabajar fuera de los entornos industriales e interactuar con los seres humanos dando inicio a la época de la robótica de servicio.

Dentro de las metas de la robótica de servicio o robótica del siglo XXI, vigente hoy en día, se encuentra el poder desarrollar un robot que sea capaz de desenvolverse en el medio que el ser humano se ha dedicado a adaptar para sí mismo y sea capaz de realizar tareas comunes para el ser humano. Diferentes soluciones para esta meta se han presentado; como ejemplo podemos mencionar: al robot papero [6] o el robot Irobi [7]. Sin embargo resulta claro, por las cuestiones ya explicadas, que el diseño por excelencia para cumplir la meta será un humanoide. El caminado de este tipo de robot sigue siendo hoy en día un reto tecnológico y científico vigente. Antes de comenzar a hablar de humanoides y su caminado es conveniente definir que es un robot, que es una máquina, mencionar sus diferencias además de definir lo que es un humanoide. Para esto construiremos la definición a partir de elementos básicos que deben definirse previamente:

## 1.1. Definiciones

### 1.1.10 Cuerpo rígido

Un **cuerpo rígido** es un conjunto de masas puntuales, con posiciones definidas en  $R^3$  y distancias entre ellas mismas constantes bajo el efecto de fuerzas o desplazamientos.[8]

### 1.1.11 Articulación

Una **articulación**, elemento que une al menos dos cuerpos rígidos, restringiendo el movimiento relativo entre estos dos. Las articulaciones mecánicas pueden modelarse de forma matemática como un conjunto de  $n$  ecuaciones  $f_n$  que dependen del tiempo  $t$ , de las posiciones  $R(t)$  y de las velocidades  $\dot{R}(t)$  de los cuerpos rígidos que une la articulación y donde se establecen los límites o restricciones en los parámetros que definen el movimiento de los cuerpos que unen.

$$f_n(t, R(t), \dot{R}(t)) \leq k t e \quad n = 1, 2, \dots, k \quad (1.1)$$

Donde  $k$  es el número de restricciones.

Como ejemplo considere un péndulo de brazo sólido y longitud  $l$  donde la posición del elemento final, respecto a un referencial cartesiano  $(x, y, z)$  ubicado sobre el radio de giro y con el eje  $z$  del referencial coincidiendo con este último, está dado por:

$$x^2(t) + y^2(t) = l^2 \quad (1.2)$$

$$z(t) = 0 \quad (1.3)$$

Este conjunto de ecuaciones describen los límites de movimiento del cuerpo en las direcciones  $x$  y  $y$  además de la restricción de movimiento en dirección  $z$ .

Mientras que las orientaciones relativas están descritas por:

$$\gamma(t) = \theta \quad (1.4)$$

$$\alpha(t) = 0, \beta(t) = 0 \quad (1.5)$$

Donde  $\gamma(t)$  es la orientación del péndulo respecto al plano  $xy$ ,  $\alpha(t)$  respecto al plano  $xz$  y  $\beta(t)=0$  respecto al plano  $yz$ .

#### 1.1.12 Restricción holonómica

Una **restricción holonómica** es una restricción en el movimiento relativo entre dos cuerpos que depende únicamente del tiempo  $t$  y de la posición actual de los cuerpos  $R(t)$ . Esto significa que la restricción no depende de las velocidades existentes entre ambos y puede ser expresada de manera general como:

$$f_k(t, R(t))=0 \quad (1.6)$$

#### 1.1.13 Cadena cinemática

Una **cadena cinemática** es un conjunto de cuerpos rígidos interconectados uno a uno por medio de articulaciones. Es posible clasificar a las cadenas cinemáticas en: **cadenas cinemáticas cerradas**, si cada extremo de un cuerpo está conectado al inicio de otro, o **cadenas cinemáticas abiertas**, si existe un cuerpo cuyo extremo final no está conectado. [9]

#### 1.1.14 Cadena cinemática holonómica

Una **cadena cinemática holonómica** o **sistema holonómico** es aquella cuyas restricciones son puramente holonómicas.

#### 1.1.15 Grados de libertad

De manera general el número mínimo de parámetros necesarios para caracterizar un sistema se conoce como **grado de libertad** mientras que de forma más particular en el caso de sistemas mecánicos, donde resulta de interés caracterizar tanto la posición como la orientación del objeto respecto un referencial, los  $n$  grados de libertad están definidos por la dimensión del espacio de trabajo  $d$  de la siguiente manera.

$$n = \frac{d(d+1)}{2} \quad (1.7)$$

Para un espacio en  $R^3$ , al que estamos más habituados, se tienen 6 grados de libertad. Pues la posición y orientación de un objeto están definidas por 3 variables de posición  $x, y, z$  y 3 variables de orientación  $\alpha, \beta, \gamma$ .

#### 1.1.16 Actuador

**Actuador**, elemento empleado dentro de una cadena cinemática con la finalidad de producir la fuerza necesaria para lograr el movimiento de uno o más eslabones.

#### 1.1.17 Máquina

Una **máquina** es una combinación de cuerpos rígidos, interconectados mediante articulaciones de forma que al aplicarle una fuerza o movimiento a uno o varios de estos cuerpos se desarrollara en ellos un trabajo acompañado de movimientos deseados. [10]

### 1.1.18 Robot

Según la Organización Internacional de Estandarización, ISO por sus siglas en inglés, **un robot, sistema robótico o manipulador**, es una máquina de manipulación automática reprogramable y funcional capaz de posicionar y orientar materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales para la ejecución de trabajos diversos en las diferentes etapas de la producción industrial, ya sea en una posición fija o en movimiento [11].

Queda claro de estas definiciones que un robot debe ser flexible y reprogramable es decir no está hecho para realizar una tarea en específico. A diferencia de las maquinas que son para una aplicación muy específica. A partir de estas definiciones es posible construir una definición más acorde con nuestro trabajo por lo tanto definiremos a un robot como: una máquina controlada, luego entonces está formada por al menos un mecanismo, consistente de eslabones conectados mediante articulaciones, formando una cadena cinemática, soportados por una base, que puede estar o no fija a una superficie, de tal forma que uno de sus eslabones corresponde al elemento terminal, encargado de interactuar directamente con el entorno del robot.

Dentro de nuestra definición se mencionó que la base del robot puede estar o no fija a una superficie, esta condición representa un criterio de clasificación de los robots. Los robots cuya base se encuentra fija a una superficie son conocidos como robots fijos y son ampliamente utilizados en la industria. En este caso el robot se encuentra en su área de trabajo, delimitada por las características físicas del robot, y los elementos necesarios para que desarrolle sus funciones se encuentran dentro de esta misma área. Mientras que los robots cuya base no se encuentra fija a ninguna superficie son conocidos como robots móviles. Como su nombre lo indica los robots móviles son capaces de desplazarse por medios muy diversos, ruedas, hélices, turbinas, piernas etc. Esta capacidad de desplazamiento les permite tener un área de trabajo prácticamente infinita.

Dentro de los robots móviles cuya base corresponde a un conjunto de piernas podemos encontrar dos clases: Robots multi-piernas y robots bípedos, esta clasificación obedece a las dificultades técnicas e ingenieriles que implican mantener en equilibrio a un robot con un par de piernas, dificultades no presentes en robots multi-piernas.

Finalmente los robots bípedos cuya estructura y diseño asemeje a los seres humanos son conocidos como humanoídes.

El diseño y modelado del sistema de locomoción de un humanoide requiere el concurso de un sinnúmero de áreas de la ciencia; Por mencionar algunos ejemplos son necesarios conocimientos de cinemática, dinámica de mecanismos, antropometría, fisiología, obviamente teoría de control y bases matemáticas. Todo esto es indispensable para la generación del movimiento deseado del robot. Es por esto que el gran problema de la locomoción de un humanoide, problema que aún sigue vigente hoy en día, se divide en diferentes sub problemas y uno de ellos es el caminado.

## 1.2 Estado del arte del caminado de robots.

La estrecha relación que guarda el diseño y planeación del caminado de los humanoídes con el estudio del caminado de los humanos, donde el primero busca ser una imitación del segundo, provoca que muchas de las bases teóricas y sus raíces sean compartidas. Por lo tanto, ningún análisis histórico del caminado de humanoídes estaría completo si no se consideran los orígenes del estudio del caminado humano y su transición al área de humanoídes.

El interés por entender el movimiento humano se encuentra registrado en trabajos tan antiguos como el escrito de Aristóteles *ΠΕΡΙ ΠΟΡΕΙΑΣ ΖΩΩΝ* (el caminado de los animales), [12] en el cual se plantean las primeras incógnitas sobre la geometría del cuerpo y su relación con los movimientos. De igual forma, Leonardo da Vinci en sus cuadernos de anotaciones remarca la importancia del conocimiento de los músculos, nervios y huesos que constituyen al cuerpo humano y los movimientos que estos producen [13]. Durante el periodo del Renacimiento muchos de los esfuerzos por entender el caminado humano fueron debidos a cuestiones artísticas sin embargo estos trabajos sentaron las bases geométricas para tratar de explicar los fenómenos del caminado. Las ideas del renacimiento junto con los desarrollos de Galileo Galilei (1564-1642) en la mecánica; Permitieron a Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679) aplicar en la biología métodos geométricos y analíticos presentados en su libro “Sobre los movimientos de los animales” [14]. Esto le valió para ser considerado el padre de la biomecánica.

Durante más de 200 años la carencia de conocimiento en muchas áreas frenó los avances en el entendimiento del caminado humano. Se requirió de una maduración de la ciencia humana promovida por descubrimientos y proposiciones de nuevas teorías así como el desarrollo de una nueva matemática, matemática moderna, cuyas bases fueron sentadas por René Descartes (1596-1650), la proposición de los fundamentos de la dinámica moderna hecha por Isacc Newton (1642-1727), las ideas básicas para la creación de las computadoras propuestas por Charles Babbage (1791–1871) etc; Para preparar el terreno de los nuevos avances en el tema. En el libro titulado “*Über die Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge*”, Mecanica del caminado del aparato humano, [15] los hermanos Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) y Eduard Friedrich Weber (1806–1871) presentaron imágenes de las subsecuentes fases del caminado calculadas a partir de ecuaciones diferenciales, ilustrando de esta manera el ciclo repetido continuamente por los humanos al momento de caminar. Los hermanos Weber enfocan su atención en el análisis de este ciclo o paso, proponen una teoría de locomoción y sugieren la posibilidad de construir una máquina capaz de caminar en dos, cuatro o más patas dependiendo de las condiciones del terreno. Los hermanos Weber también fueron los primeros en estudiar el movimiento del centro de masas durante el movimiento del cuerpo humano.

A finales del siglo XIX Christian Wilhelm Braune (1831–1892) y Otto Fischer (1861–1917) comenzaron los estudios experimentales del paso humano. al mismo tiempo Nicholas Bernstein (1896–1966) estudio la concepción espacial de los grados de libertad en el sistema motriz del ser humano al momento de caminar, correr o saltar [16].

Durante los años 30 Herbert Eftman y John T. Manter trabajaron en el análisis de las fuerzas de reacción generadas en el pie durante el caminado [17] y fue en 1938 cuando Herbert Eftman define el concepto del punto de momento cero, ZMP por sus siglas en inglés. Este concepto es fundamental para la planeación y control de caminado de humanoides hoy en día, sin embargo, en ese momento su impacto no fue considerado fuera de la biomecánica.

Fue hasta los años 60 cuando el Instituto de Robots Humanoides de la Universidad de Waseda inició con los primeros intentos para lograr un caminado bípedo a partir de los modelos cinemáticos y dinámicos de las extremidades. En 1966 este instituto presentó el prototipo WL-1 correspondiente a una pierna creada con base al análisis de la locomoción del caminado y sirvió para sentar las bases del prototipo presentado en 1968, el WL-3, que consistía en un par de piernas actuadas de manera electro-hidráulica a través de servomecanismos. Este prototipo era capaz de sentarse y levantarse.

A finales de los años 60 y comienzo de los años 70 Vukobratovic en varios de sus trabajos de [18] a [23], reconoce la importancia del ZMP, propuesto por Eftman muchos años antes, en el caminado bípedo y define el punto de momento cero en el área de caminadores bípedos, lo que marca el inicio de un nuevo paradigma en la planeación y diseño del caminado bípedo. De manera paralela el Instituto Waseda continuó con el desarrollo de sus prototipos WAP-1 WAP-2 WAP-3 WL-5 WL-9DR y fue hasta el año de 1985 con el prototipo WL-10RD que se logró finalmente una aplicación real del ZMP [26].

La aparición del ZMP y las ideas de la proyección del centro de masa del cuerpo en el suelo abrieron una nueva línea de investigación en la planeación y control del caminado humanoide. Esta línea comúnmente conocida como “puntos de referencia en el suelo” ha tenido una evolución casi continua hasta nuestros días y sigue en desarrollo. Desde la definición de Vukobratovic se han presentado diferentes pero equivalentes interpretaciones del ZMP: en 1977 por Hemami y Fransworth [27] en 1985 por Takanishi [28], 1997 Arakawa y Fukuda [29] y en 1998 por Hirai [30] por mencionar algunos. Así como diferentes aplicaciones en el control de caminado bípedo [31 y 32] y la concepción de nuevos puntos de referencia en el suelo como: El indicador de rotación del pie (FRI) propuesto por Goswami en 1999 [33] y el concepto del momento centroidal de pivote propuesto en el 2003 por Popovic y sus colegas de [34] a [37].

Todos estos avances teóricos y los prototipos desarrollados por el instituto Waseda han permitido la construcción de humanoides como la serie de prototipos ASIMO (Advanced Step in Innovative MObility) de Honda, así como el robot HRP-2 de Kawada Industries, el QRIO de Sony, el robot HOAP de Fuji y el robot músico de Toyota. Además, junto con la miniaturización de la electrónica y el desarrollo de nuevas tecnologías para la fabricación de actuadores, han permitido reducir el tamaño de los prototipos humanoides reduciendo también su costo. Permitiendo el acceso a estas líneas de investigación a una mayor cantidad de investigadores.

### 1.3 Planteamiento del problema

Durante ya 3 años consecutivos el equipo del DCA, Cinvestav, ha participado en diferentes competencias internacionales de humanoides. Uno de los principales obstáculos con los que se ha encontrado el equipo es la dificultad para controlar a los robots utilizados para competir, Robonova-I, debido a que al ser de distribución comercial están planeados para desarrollar diferentes funciones que no necesariamente corresponden a las requeridas para la investigación y la competición, además de que el diseño electromecánico no es el óptimo para competir y no existe un modelo cinemático y dinámico con el cual trabajar.

Pese a que, en trabajos previos de este grupo, se ha logrado obtener el modelo cinemático del robot y se han hecho mejoras en los algoritmos de control, se ha decidido que lo mejor es cambiar de plataforma de desarrollo por un robot comercial con mejores prestaciones como lo es el robot comercial BIOLOID en su presentación Premium desarrollado por la empresa Robotis.

Dentro de los requerimientos necesarios para contar con un humanoide capaz de competir en los torneos nacionales e internacionales se encuentra el diseño de técnicas de control que permitan al humanoide realizar un caminado parametrizado estable. Entendiendo por estabilidad al hecho de que el robot no caiga al momento de realizar los movimientos necesarios para caminar.

### 1.4 Propósito del trabajo de Tesis

Este trabajo de tesis pretende continuar dentro de la línea de investigación iniciada en trabajos previos sobre robots bípedos antropomorfos en el Departamento de Control Automático del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), exponiendo para ello las generalidades asociadas a este tópico de investigación, así como las metodologías de resolución cinemática, dinámica y estabilidad del caminado de este tipo de robots.

El objetivo de la tesis es desarrollar una metodología que permita sintetizar un caminado paramétrico en el robot bioloid. Este caminado, además de cumplir con las características cinemáticas deseadas debe

definir una dinámica en el robot talque se cumplan las condiciones de equilibrio definidas por las metodologías de puntos de referencia en el suelo necesarias para un caminado estable.

Para lograr el objetivo principal de la tesis descrito en el párrafo anterior es necesario desarrollar diferentes trabajos que permitan obtener información del robot así como validar los resultados del trabajo. Por lo tanto algunos resultados derivados de esta tesis son: La generación de los modelos de cinemática directa e inversa tanto de posiciones como velocidades y aceleraciones del robot. El modelo de la dinámica completa del robot. El cálculo de los parámetros inerciales de los eslabones que constituyen al robot. La generación de un modelo CAD del robot. La construcción de un modelo de simulación del robot en el ambiente webots donde se incluyan todos los parámetros cinemáticos y dinámicos del robot. La generación de un algoritmo que sintetice el caminado paramétrico y valide las condiciones de equilibrio.



## Capitulo 1) Referencias

- [1] Zadoc P. Dederick, Improvement in steam carriage, letters patent No. 75 874, USA, March 24, 1868  
Disponible en línea:  
<http://www.google.com/patents?id=d6kAAAAAEBAJ&printsec=abstract&zoom=4#v=onepage&q&f=false>
- [2] Cesare Rossi, Flavio Russo, Ferruccio Russo, Ancient Engineers' Inventions: Precursors of the Present Springer science + Business media B.V. 2009 PP297, United states of America
- [3] George A. Bekey, Autonomous robots: from biological inspiration to implementation and control the MIT press 2005 PP305, United states of America
- [4] Sabrie Soloman, Sensors and control systems in manufacturing, McGraw-Hill February 1994 United States of America pp419
- [5] Karl Mathia, Robotics for Electronics Manufacturing: Principles and Applications in clean room automata, Cambridge university press, Cambridge UK 2010 pp1
- [6] <http://www.nec.co.jp/products/robot/en/index.html>
- [7] <http://www.irobibiz.com/>
- [8] Anatoliĭ Vladimirovich Skorokhod, F. C. Hoppensteadt, Habib Salehi, Random perturbation methods with applications in science and engineering, Springer; 1 edition (July 9, 2002), pp 297
- [9] Dan B. Marghitu, Kinematic chains and machine components design, Academic Press; 1 edition (April 19, 2005) pp IX
- [10] Rouleaux, *Kinematics of machinery: Outline of a theory of machines*, Dover Publications, New York, 1963, 35
- [11] ISO 8373:1994
- [12] Aristotélēs, *ΠΕΡΙ ΠΙΟΠΕΙΑΣ ΖΩΩΝΩΝ*. Traducido al inglés por A.S.L. Farquharson, eBooks@Adelaide, 2004.
- [13] Reinhard Klette y Garry Tee, Understanding Human Motion: A Historic Review, Computational Imaging and Vision, 2008, Volume 36, 1, 1-22, Springer Link.
- [14] Borelli, G. A.: De Motu Animalium. Rome, 1680/1681 (On the Movement of Animals, translated from Latin to English by P. Maquet, Springer, Berlin, 1989).
- [15] Weber, E. F., and W. E. Weber: "Über die Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Eine anatomisch-physiologische Untersuchung Göttingen, Dieterich, 1836 (traducción al Inglés por P. Maquet and R. Furlong: Mechanics of the Human Walking Apparatus. Springer, Berlin, 1992).
- [16] Bernstein, N.: The Coordination and Regulation of Movement. Pergamon Press, Oxford, 1967.
- [17] Herbert Eftman y John T. Manter, The axis of the human foot, Introduction to the Reports from the Carlsberg Foundation's Oceanographic Expedition Round the World 1928,30. Pp. 130. Oxford University Press, London.
- [18] Vukobratovic M., Juricic D., "A Contribution to the Synthesis of Biped Gait", IFAC Symp. Technical and Biological Problem of Control, Yerevan, USSR, 1968.
- [19] Vukobratovic M., Juricic D., "Contribution to the Synthesis of Biped Gait", IEEE Trans. on Biomedical Engineering, Vol. 16, No 1, 1969.

- [20] Vukobratovic M., Legged Locomotion and Anthropomorphic Mechanisms, monograph Mihailo Pupin Institute, Belgrade, 1975.
- [21] Juricic D., Vukobratovic M., "Mathematical Modeling of a Bipedal Walking System", ASME publication 72-WA/BHF-13, Winter Annual Meeting, New York, Nov. 26-30, 1972.
- [22] Vukobratovic M. "How to Control Artificial Anthropomorphic Systems", IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC-3, Sept. 1973.
- [23] Vukobratovic M., Stokic D., "Dynamic Stability of Unstable Legged Locomotion Systems", Mathematical Biosciences, Vol. 24, No. 1/2, 1975.
- [24] Vukobratovic M., Borovac B., Surla D., Stokic D., Scientific Fundamentals of Robotics, Vol. 7, Biped Locomotion: Dynamics, Stability, Control and Application, Springer-Verlag 1989.
- [25] Vukobratovic M., Borovac B., Stokic D., Surdilovic D., Active Exoskeleton, Ch. 27: Humanoid Robots, pp 727-777, Mechanical Systems Design Handbook: Modeling, Measure and Control, CRC Press, 2001.
- [26] Humanoid History -Biped Walking Robot, en linea: [http://www.humanoid.waseda.ac.jp/booklet/kato\\_4.html](http://www.humanoid.waseda.ac.jp/booklet/kato_4.html) accesado el 24 de diciembre de 2010
- [27] Hemami, H., & Farnsworth, R. L. (1977). Postural and gait stability of a planar 6ve link biped by simulation. IEEE Transaction on Automatic Control, 22, 452–458
- [28] Takanishi, A., Ishida, M., Ymazaki, Y., & Kato, I. (1985). The realization of dynamic walking by the biped robot WL-10RD. Proceedings of the international conference on advanced robotics, Tokyo (pp. 459–466).
- [29] Arakawa, T., & Fukuda, T. (1997). Natural motion generation of a biped robot using the hierarchical trajectory generation method consisting of GA, EP layers. Proceedings of the IEEE conference on robotics and automatation, Vol. 1, Washington, DC (pp. 211–216).
- [30] Hirai, K., Hirose, M., & Kenada, T. T. (1998). The development of Honda humanoid robot. Proceedings of IEEE international conference on robotics and automation, May 1998, Lewen, Belgium (pp. 1321–1326).
- [31] Yamaguchi, J., Takanishi, A. and Kato, I. 1993. Development of a biped walking robot compensation for three-axis moment by trunk motion. *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Yokohama, Japan.
- [32] Hirai K. 1997. Current and Future Prospective of Honda Humanoid Robot. *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Grenoble, France, pp. 500-508.
- [33] Goswami, A. 1999. Postural stability of biped robots and the foot-rotation indicator (FRI) point. *International Journal of Robotics Research* 18(6): 523-533.
- [34] Herr, H., Hofmann, A., Popovic, M. 2003. New Horizons for Orthotic & Prosthetic Technology: Merging Body and Machine. Presented at the ZIF International Conference on Walking Machines, Bielefeld, Germany.
- [35] Hofmann, A. 2003. Control Rules for Biomimetic Human Bipedal Locomotion Based on Biomechanical Principles. Ph.D. Thesis Proposal, Submitted to the Computer Science and Electrical Engineering Department, Massachusetts Institute of Technology.
- [36] Popovic, M., Hofmann, A. and Herr, H. 2004. Angular Momentum Regulation during human walking: Biomechanics and Control. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, New Orleans, LA, U.S.A., pp. 2405-2411.
- [37] Goswami, A. and Kallem, V. 2004. Rate of change of angular momentum and balance maintenance of biped robots. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, New Orleans, LA, U.S.A., pp. 3785-3790.

# Capítulo 2

## Modelado de un robot

### Introducción

Un modelo es una representación de un sistema utilizada para visualizar, cuantificar o evaluar parámetros específicos de dicho sistema. La metodología empleada para generar el modelo depende directamente de la finalidad o aplicación de este. Por ejemplo los diseñadores de autos, que buscan cuantificar la fricción del aire en sus diseños, utilizan un modelo físico construido en madera o arcilla que imita correctamente las formas y dimensiones del automóvil original. En este caso las características geométricas del sistema original son los elementos que se desean representar en el modelo con el fin de poder evaluarlos.

Debido a que el herramental más desarrollado para la representación, interpretación y control de sistemas electromecánicos son las matemáticas, la forma más recurrida para representar las características deseadas de un robot es mediante un modelo matemático. En el caso específico del caminado, las características que nos interesa representar en el modelo son las posiciones, velocidades y aceleraciones de puntos localizados de manera arbitraria dentro del cuerpo del robot. Estas posiciones, velocidades y aceleraciones, variables del sistema, suelen estar definidas respecto a referenciales ubicados, de igual forma, de manera arbitraria dentro del espacio de trabajo del robot.

En el caso de los sistemas holonómicos, como es un robot, las variables del sistema pueden ser representadas tanto en el espacio de trabajo como en el espacio articular del propio sistema. Estos 2 espacios son equivalentes y cada uno ofrece ventajas y desventajas dependiendo el objetivo del modelado. Generalmente al trabajar en la marcha de robots se utilizan ambos espacios de manera alternada además de emplear modelos que permitan transformar las variables de un espacio a otro y viceversa. El modelo que permite conocer el vector de posición  $\mathbf{x}$ , que representa la posición de un cierto punto arbitrario en la anatomía del robot, expresado en el espacio de trabajo  $X$ ; es denominado cinemática directa (MCD). Mientras que el modelo de la cinemática inversa (MCI) permite calcular el valor del vector  $\mathbf{q}$  que define al mismo punto dentro del espacio articular  $Q$ , a partir de las coordenadas del espacio de trabajo  $\mathbf{x}$ .

El MCD se obtiene de manera simple aplicando alguna de las metodologías: clásicas de Denavit-Hartenberg, tornillos, cuaterniones, *bound graphs*, análisis geométrico etc. En el caso del MCI no existen metodologías definidas para su obtención; muchas veces es complicado obtener una expresión analítica cerrada y generalmente este modelo tiene varias o un número infinito de soluciones. Por lo cual es muy común que se utilicen métodos numéricos iterativos para lograr una aproximación de la solución. Cabe mencionar que dentro de la literatura se han identificado configuraciones particulares de los eslabones que permiten la obtención de una solución cerrada y analítica lo que nos permite acotar el problema y obtener MCI cerrados.

Otro aspecto que se desea analizar son las fuerzas que producen e intervienen en los movimientos antes mencionados, modelo dinámico del robot. En este caso al aplicar el herramental matemático desarrollado para este tipo de problemas se obtiene un modelo bastante complejo y grande por lo cual algunos investigadores han decidido hacer simplificaciones en las características que su modelo representa. Derivando básicamente en dos tipos de metodologías para el modelado de robots humanoides: Modelos de dinámica completa y modelos de dinámica simplificada.

Algunos ejemplos de modelos de dinámica simplificada pueden encontrarse en las referencias de [1] a [3], donde se representa al cuerpo del robot como un péndulo invertido con restricciones en su dinámica debidas a los impactos entre las piernas y el suelo. O bien en la referencia [4] donde se representan al robot como un sistema de amortiguación para vibraciones.

Por supuesto, en cada uno de estos modelos se representa una de las muchas características presentes en las diferentes fases del caminado mientras que en las referencias [5 y 6] los autores proponen tratar al robot como un conjunto de sistemas complementarios que actúan, cada uno, en diferentes intervalos de tiempo con el fin de modelar cada una de las fases.

Finalmente de entre todos estos criterios, y más existentes, el más aplicado en la bibliografía corresponde al modelo del péndulo invertido debido a que se ha demostrado que basados en un apropiado criterio de energía este modelo es capaz de representar bastante bien a un caminador bípedo de [7] a [10]

Para realizar y aplicar los modelos mencionados es necesario adoptar un sistema de referencia respecto el cual se representaran las características físicas deseadas, en ocasiones convendrá tener un sistema de referencia independiente al robot, coordenadas del espacio de trabajo y en ocasiones se requerirá de un sistema de referencia particular para cada robot, coordenadas generalizadas del sistema.

La representación de las características respecto a referenciales ubicados en los propios elementos del robot genera el denominado espacio articular del robot mientras que la representación de las características respecto a un referencial externo corresponde al espacio de trabajo del robot.

La razón para representar las características en 2 espacios diferentes, aunque equivalentes, radica en el hecho de que resulta mucho más sencillo manipular información en uno u otro espacio. Es decir, resulta mucho más intuitivo para la mayoría de seres humanos el interpretar algunas características en el espacio de trabajo que en el espacio articular.

Por ejemplo nos es más claro entender que el pie avanza 0.5m en dirección  $x$  a entender que la rodilla gire  $45^\circ$  y el tobillo  $23^\circ$ . Sin embargo las posiciones y velocidades que proporcionan los actuadores del robot, y cuyo control se tiene de manera directa, son expresadas en coordenadas articulares o generalizadas dentro del espacio del mismo nombre. Además el espacio generalizado, al ser un espacio específico para cada robot, considera de manera intrínseca las restricciones del propio robot lo cual simplifica en gran medida el análisis matemático.

## 2.1. Grados de libertad del sistema y del espacio de trabajo.

Una vez definido y aclarado el porqué la utilización de 2 sistemas coordenados en el análisis cinemático y dinámico del robot. Conviene hacer un paréntesis y extender un poco la definición 6 del capítulo 1.

La posición y orientación de un elemento en una cadena cinemática cuyos movimientos se desarrollan en un espacio en  $R^3$  pueden definirse a través de 3 posiciones y 3 orientaciones, ecuación 1.3, dentro del espacio de trabajo. Y también pueden ser definidas a través de  $n$  parámetros dentro del espacio articular. Por lo tanto es posible definir a los primeros como **grados de libertad del espacio de trabajo** y a los segundos como **grados de libertad del sistema** o **grados de libertad generalizados**.

## 2.2 Modelado de la cinemática directa.

### 2.2.1 Cinemática directa de posiciones

La forma en que el robot produce movimientos es a través de sus actuadores, generalmente localizados en las articulaciones o de forma que los desplazamientos generados por el actuador se transmita a estos. Un movimiento del robot está definido por una serie de valores articulares, es decir las consignas que producen movimientos en los robots son valores de posición, velocidad y aceleración para cada uno de los actuadores  $(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, \ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_n)$ . Estas consignas producen un movimiento, de cualquier punto arbitrario seleccionado sobre el cuerpo del robot, dentro del espacio de trabajo del robot con una velocidad y aceleración definidas y cuya representación depende directamente de la geometría de este espacio y de las necesidades del análisis que se realiza. La geometría del espacio de trabajo depende de la configuración de los eslabones y las articulaciones del robot mientras que las necesidades del análisis son específicas para cada caso. Luego entonces no existe un sistema coordinado definido para la representación de las posiciones, velocidades y aceleraciones dentro del espacio de trabajo.

Como ejemplo, para el caso específico de la pierna del robot que se analiza la dimensión del espacio articular  $n$  vale 6 mientras que el espacio de trabajo corresponde a un espacio en  $R^3$  por lo tanto las posiciones, velocidades y aceleraciones tanto lineales como angulares dentro de este espacio, utilizando un sistema de coordenadas cartesianas, estarán representadas por:  $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma})$ . Donde  $x, y$  y  $z$  son las posiciones respecto a cada uno de los ejes coordinados,  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  corresponden a las orientaciones sobre los mismos ejes y  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}$  y  $\ddot{\gamma}$  corresponden a las primeras y segundas derivadas temporales de cada una de las posiciones ya indicadas.

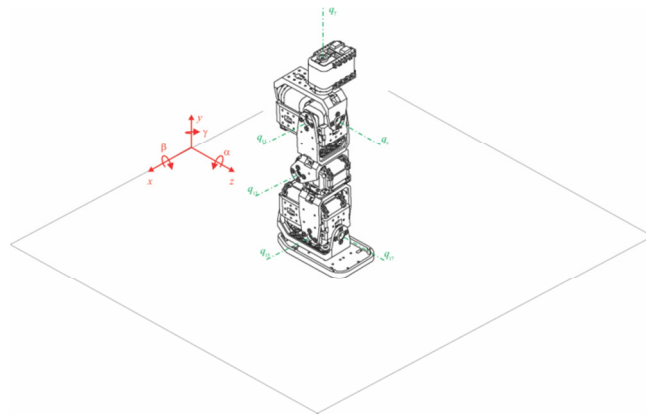


Fig. 2.1 Coordenadas articulares y espaciales para la pierna derecha del robot Bioloid.

La necesidad de una transformación que mapee los valores del espacio articular al espacio de trabajo del robot dio origen a diferentes metodologías para el análisis cinemático de los robots.

En el caso del análisis de posiciones, la metodología de Denavit y Hartenberg [11], DH de ahora en adelante, junto con sus diferentes variaciones [12], tornillos [13 y 14] y análisis geométrico [15]; Son las más utilizadas en la bibliografía. Todas estas metodologías se basan en la obtención de matrices de transformación homogénea entre articulaciones, con las cuales se describe la posición y orientación del referencial  $i$ , ubicado a nuestra conveniencia sobre el extremo final de cada eslabón, respecto el referencial 0 de igual forma ubicado en el extremo inicial de cada eslabón.

Para el caso de un robot que trabaja en el espacio  $R^3$ , como la pierna del robot ilustrada en la figura 2.1, se tienen 6 variables espaciales a considerar: la posición respecto cada uno de los ejes cartesianos,  $x$ ,  $y$  y  $z$  y las orientaciones respecto estos mismos ejes. Esto provoca que para este mismo caso, la matriz de transformación homogénea está formada por una matriz  $R_i \in R^{3 \times 3}$  que define la orientación del referencial  $i$  respecto a su origen en función de la variable articular que gobierna dicha articulación. Un vector  $o_i$  que representa la posición del extremo final del eslabón en las 3 coordenadas espaciales,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y un factor de escala empleado en visión que para nuestro caso es 1, al no existir cambio de escala.

$$T(\mathbf{q})_0^i = \begin{bmatrix} R_i & \mathbf{o}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A partir de las matrices de cada eslabón es posible obtener una matriz que represente la posición y orientación de cualquier eslabón respecto a cualquier otro. Tomando en cuenta las siguientes propiedades de las transformaciones:

- La posición del extremo final de una cadena de actuadores respecto al origen de la misma cadena está dada por la multiplicación de las transformaciones de los subsecuentes eslabones.

$$T(\mathbf{q})_0^n = T(\mathbf{q})_0^1 T(\mathbf{q})_1^2 \dots T(\mathbf{q})_{n-2}^{n-1} T(\mathbf{q})_{n-1}^n \quad (2.2)$$

- Mientras que  $T_0^n$  representa la transformación del referencial 0 al referencial  $n$  la transformación del referencial  $n$  al referencial 0 está dada por:

$$T(\mathbf{q})_n^0 = (T(\mathbf{q})_0^n)^{-1} = T(\mathbf{q})_n^{n-1} T(\mathbf{q})_{n-1}^{n-2} \dots T(\mathbf{q})_2^1 T(\mathbf{q})_1^0 = (T(\mathbf{q})_{n-1}^n)^{-1} (T(\mathbf{q})_{n-2}^{n-1})^{-1} \dots (T(\mathbf{q})_1^2)^{-1} (T(\mathbf{q})_0^1)^{-1} \quad (2.3)$$

Y es fácil comprobar que:

$$\left( T(\mathbf{q})_0^i \right)^{-1} = \begin{bmatrix} R_i^T & -R_i^T o_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

A partir de la siguiente definición:

$$T(\mathbf{q})_0^i \left( T(\mathbf{q})_0^i \right)^{-1} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

### 2.2.2. Cinemática directa de velocidades y aceleraciones

Para el caso del análisis de velocidades del robot, *cinemática de velocidades*, se construye una matriz  $J_i(\mathbf{q}) \in R^{n \times m}$  que mapea las  $m$  velocidades articulares en  $n$  velocidades espaciales que se desarrollan sobre el punto  $i$ . Queda claro que el punto de interés  $i$  tendrá tanto velocidades lineales como angulares, resultado de los movimientos en cada articulación, por lo tanto la matriz que mapea las

velocidades, Matriz Jacobiana del robot, puede dividirse en 2 matrices: la correspondiente a velocidades lineales y la correspondiente a velocidades angulares. La columna  $k$  de la matriz jacobiana,  ${}^k\mathbf{j}_i(\mathbf{q})$  con  $k = (1, 2, \dots, m)$ , representa el efecto del actuador  $k$  sobre cada una de las velocidades espaciales del elemento  $i$ . El primer elemento del vector  ${}^k\mathbf{j}_i(\mathbf{q})$  establece la relación entre la velocidad articular  $\dot{q}_k$  y la primer velocidad espacial  $\dot{x}_1$  el segundo hace lo propio con la velocidad espacial  $\dot{x}_2$  y así sucesivamente. Dependiendo del tipo de articulación el efecto sobre las velocidades espaciales es diferente, teniendo los siguientes casos:

Articulaciones de movimiento lineal, en este tipo de articulación no existe velocidad angular y la velocidad lineal del punto de interés corresponde a la variación de la posición respecto del tiempo por lo tanto la componente de la matriz Jacobiana para una articulación lineal  $k$  sobre un punto  $i$  está definida como:

$${}^k\mathbf{j}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Donde, considerando que el eje de acción del actuador siempre se denomina como  $z$  y siguiendo la metodología de DH para la asignación de ejes de referencia; Se tiene que  $\mathbf{z}_k^0$  es la tercer columna de la matriz de transformación  $T_k^0$ . Y corresponde a la proyección del eje  $z$  del referencial correspondiente al actuador  $k$  sobre el referencial base. En pocas palabras el movimiento de la articulación  $k$  respecto al referencial base. Observe que al tratarse de una articulación de movimiento lineal carece de interés la ubicación del punto  $i$ , pues la velocidad lineal es constante a lo largo de toda la cadena además la segunda parte del vector  ${}^k\mathbf{j}_i(\mathbf{q})$ , correspondiente a las velocidades angulares es  $\mathbf{0}$ .

En el caso de una articulación de rotación se tiene que el movimiento angular producirá tanto una velocidad lineal como una angular, la velocidad lineal estará dada por la magnitud de la velocidad angular multiplicada por el radio de giro del punto considerado. Por lo tanto la matriz Jacobiana para una articulación de rotación queda:

$${}^k\mathbf{j}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k^0 \times (\mathbf{o}_k^0 - \mathbf{o}_i^0) \\ \mathbf{z}_k^0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Donde  $\mathbf{z}_k^0 \times (\mathbf{o}_k^0 - \mathbf{o}_i^0)$  corresponde a la componente de velocidades lineales producidas por la velocidad articular  $\dot{q}_k$  y  $\mathbf{z}_k^0$  es la componente de velocidades angulares producida por la misma velocidad articular.

$\mathbf{o}_i^0$  corresponde la cuarta columna de la matriz  $T_i^0$ , que es el vector de posición del referencial correspondiente al punto  $i$  respecto al referencial base. Mientras que  $\mathbf{o}_k^0$  la cuarta columna de la matriz  $T_k^0$  y corresponde al vector de posición de la articulación  $k$  respecto al referencial base. Por lo tanto la diferencia  $(\mathbf{o}_k^0 - \mathbf{o}_i^0)$  corresponde al radio de giro del punto  $i$  respecto al movimiento generado por la articulación  $k$ .  $\mathbf{z}_k^0$  al igual que en el caso de una articulación lineal corresponde a la tercer columna de la matriz  $T_k^0$  y corresponde a la proyección del movimiento articular del actuador  $k$  sobre el referencial base.

Volviendo al ejemplo de la pierna del robot bioloid con 6 grados generalizados de libertad y 6 grados de libertad en su espacio de trabajo. La representación  $J_i$  indica la transformación que mapea las velocidades articulares en las velocidades del espacio trabajo correspondiente al referencial del punto  $i$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \\ \dot{\alpha}_i \\ \dot{\beta}_i \\ \dot{\gamma}_i \end{bmatrix} = J_i \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Queda claro que en una cadena cinemática cuya base está fija el efecto de la articulación de un eslabón anterior influye únicamente sobre las siguientes articulaciones. Por lo tanto en la matriz jacobiana correspondiente al centro de masas del primer eslabón,  $J_{CM1} \in R^{6 \times 6}$ , la primera columna  ${}^1\mathbf{j}_{CM1}(\mathbf{q})$  es un vector de 6 elementos cuyo primer elemento es la función que mapea de la velocidad articular  $\dot{q}_1$  a la velocidad espacial  $\dot{x}_1$ , el segundo elemento es la transformación que va de  $\dot{q}_1$  a  $\dot{y}_1$  etc. Las columnas de 2 a 6 de  $J_{CM1} \in R^{6 \times 6}$  son columnas de 0 debido a la influencia nula de las articulaciones siguientes sobre elementos anteriores dentro de la cadena cinemática.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\gamma}_1 \end{bmatrix} = J_1(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

De manera más general se tiene:

$$J_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}_iU_{w1}^{q1} & \cdots & {}_iU_{w1}^{qk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_iU_{wm}^{q1} & \cdots & {}_iU_{wm}^{qk} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Donde  ${}_iU_{wm}^{qk}$  es la transformación que va de la variable articular  $q_k$  a la variable espacio de trabajo  $w_m$  del punto  $i$ . Con  $k$  como el número de grados de libertad generalizados en el robot,  $m$  los grados de libertad del espacio de trabajo y  ${}_iU_{wm}^{qk} = 0$  para las articulaciones  $q_k$  posteriores al punto  $i$  dentro de la cadena cinemática.

Par el caso de las aceleraciones basta con derivar temporalmente la expresión (2.8):



$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_n \\ \ddot{y}_n \\ \ddot{z}_n \\ \ddot{\alpha}_n \\ \ddot{\beta}_n \\ \ddot{\gamma}_n \end{bmatrix} = J_n \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} J_n \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

## 2.3 Modelado de la cinemática inversa.

### 2.3.1 Cinemática inversa de posiciones

El problema de la cinemática inversa puede ser expresado como sigue: dada una orientación y posición del efector final, representada como una matriz de transformación homogénea  $H$ , encontrar el vector de coordenadas articulares ( $\mathbf{q}$ ) correspondiente. Es decir:

Encontrar la o las soluciones a la ecuación

$$T_n^0(q_1, q_2, \dots, q_n) = H \quad (2.12)$$

Para una matriz  $H$  definida, la ecuación matricial (2.12) puede descomponerse en 16 ecuaciones de  $n$  variables ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ), de las cuales las 4 últimas ecuaciones que representan la última fila de la ecuación matricial corresponden a ecuaciones triviales por lo que no se consideran, quedándonos sólo con 12 de ellas.

Los términos involucrados en estas 12 ecuaciones son funciones trigonométricas de las variables que se desea calcular, por lo tanto la solución del sistema resulta complicada y muchas veces es imposible obtener una expresión cerrada de la solución. Así, durante el diseño del robot se opta por escoger configuraciones articulares con una solución conocida y cerrada que pueda obtenerse a partir del análisis geométrico o de la aplicación de diferentes técnicas de simplificación.

### 2.3.2 Cinemática inversa de velocidades y aceleraciones

La expresión indicada en la ecuación (2.8), para el caso de la cinemática de velocidades directa, puede reescribirse como sigue:

$$\dot{\mathbf{q}} = J_i(\mathbf{q})^{-1} \dot{\xi} \quad (2.13)$$

Donde el vector  $\dot{\xi}$  corresponde a la derivada temporal del vector de posiciones en el espacio de trabajo,  $J_i(\mathbf{q})^{-1}$  corresponde a la inversa de  $J_i(\mathbf{q})$  que por la teoría de algebra lineal se puede afirmar que  $J_i(\mathbf{q})^{-1}$  existe cuando  $J_i(\mathbf{q})$  es cuadrada " $n \times n$ " y no singular. Para el caso en que  $J_i(\mathbf{q})$  no es cuadrada puede utilizarse la pseudo inversa cuidando los casos donde el algoritmo de cálculo de esta arroja valores erróneos [16]. Finalmente  $J_i(\mathbf{q})$  presenta singularidades en la frontera del espacio de trabajo del robot que se analiza pues es en estos puntos donde se alcanza la redundancia articular y la matriz pierde rango. Es decir una de sus filas o columnas se vuelve linealmente dependiente [17].

Por lo tanto para el ejemplo de la pierna del robot bioloid donde se cuenta con 6 grados de libertad articulares y 6 grados de libertad en el espacio de trabajo  $J_i(\mathbf{q})$  es cuadrada y  $J_i(\mathbf{q})^{-1}$  existe excepto para los valores singulares donde se pierde un grado de libertad debido a la redundancia local provocada por la alineación de ejes articulares. Casos que serán evitados en la práctica y por lo tanto se puede aseverar que  $J_i(\mathbf{q})^{-1}$  siempre existe.

Mientras que para el caso de las aceleraciones es posible obtener las aceleraciones articulares a partir de la diferenciación temporal de (2.13) manera similar.

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = J_i(\mathbf{q})^{-1} \left( \ddot{\xi} - \frac{d}{dt} J_i(\mathbf{q}) \dot{\xi} \right) \quad (2.14)$$

## 2.4 Modelado de la dinámica.

### 2.4.1 Ecuaciones de Lagrange

Para el modelado dinámico de cualquier cuerpo basta con la segunda y tercera Ley de Newton, suponga una partícula sometida a una fuerza y a la influencia de la gravedad, así como el hecho de que su movimiento este restringido en el eje y.

$$m\ddot{y} = F - mg \quad (2.15)$$

Sin embargo en el caso de movimientos compuestos, movimientos lineales y de rotación ocurriendo al mismo tiempo, el término  $m\ddot{y}$  no corresponde únicamente a una inercia y aceleración lineal por el contrario engloba tanto inercias como aceleraciones lineales y angulares así como productos cruzados de velocidades, términos de Coriolis, por lo cual la aplicación de la ecuación (2.15) no resulta ser tan evidente para sistemas con movimientos complejos. Mientras que las ecuaciones de Euler Lagrange al englobar todos estos términos resulta mucho más intuitiva y clara al momento de su aplicación. Siendo esta última únicamente una variación de la primera como se mostrará a continuación mediante de la obtención las ecuaciones de Euler Lagrange a partir de la ecuación (2.15)

El término de la izquierda de la ecuación (2.15) puede escribirse como:

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dt} m\dot{y} \quad (2.16)$$

Que con la finalidad de obtener las ecuaciones necesarias también puede escribirse como

$$m\dot{y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \frac{1}{2} m\dot{y}^2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{y}} \quad (2.17)$$

En donde  $K$  es la energía cinética del cuerpo.

De igual forma se puede escribir.

$$mg = \frac{\partial}{\partial y} mgy = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.18)$$

Con  $P$  como la energía potencial del cuerpo.

Definiendo el Lagrangiano,  $L$ , como la diferencia entre las energías cinética y potencial del cuerpo.

$$L=K - P=\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \quad (2.19)$$

Es fácil observar que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{y}} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.20)$$

Con lo cual se llega a la ecuación de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = F \quad (2.21)$$

Donde  $F$  son las fuerzas externas que actúan en el sistema, si el análisis se hace utilizando un sistema coordinado cartesiano entonces  $F$  corresponde a las fuerzas externas en dirección  $x$  y  $z$ . Por otro lado si el análisis se hace utilizando coordenadas generalizadas  $F$  corresponde al vector de fuerzas generadas en las articulaciones es decir las fuerzas generadas por los actuadores, fuerzas generalizadas. Resulta claro que es más intuitivo trabajar en coordenadas generalizadas para el análisis dinámico del robot por lo cual la ecuación (2.21) se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (2.22)$$

Donde  $L$  corresponde a la ecuación de Lagrange del sistema, la diferencia entre las energías cinética y potencial;

$q_i$  y  $\dot{q}_i$  son los valores articulares de posición y velocidad correspondientes al  $i$ -ésimo eslabón.

$\tau_i$  son las fuerzas externas que actúan sobre el  $i$ -ésimo eslabón, al tratarse puramente de actuadores rotacionales e ignorar la interacción con el medio.  $\tau_i$  corresponde al par generado por el motor del  $i$ -ésimo eslabón.

La energía cinética del sistema está dada por:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \sum_{i=1}^n [m_i J_{vi}(\mathbf{q})^T J_{vi}(\mathbf{q}) + (\mathbf{q})^T R_i(\mathbf{q}) I_i R_i(\mathbf{q})^T J_{wi}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}} \quad (2.23)$$

Donde  $J_{vi}$  es la matriz Jacobiana de las velocidades lineales para la articulación  $i$  y  $J_{wi}$  es la matriz Jacobiana de velocidades angulares para la articulación  $i$ ,  $I_i$  es el tensor de inercia del  $i$ -ésimo elemento y  $R_i$  es el vector de posición del centro de masas,  $CM$ , del mismo elemento.

Mientras que la energía potencial está definida por la posición de cada elemento.

$$V = \sum_{i=1}^n m_i g y_i(\mathbf{q}) \quad (2.24)$$

Donde  $y_i$  es el tercer elemento del vector de posición del  $i$ -ésimo elemento  $R_i(q)$ , obviamente dado en función de los valores articulares.

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \sum_{i=1}^n [m_i J_{vi}(\mathbf{q})^T J_{vi}(\mathbf{q}) + (\mathbf{q})^T R_i(\mathbf{q}) I_i R_i(\mathbf{q})^T J_{wi}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}} - \sum_{i=1}^n m_i g y_i(\mathbf{q}) \quad (2.25)$$

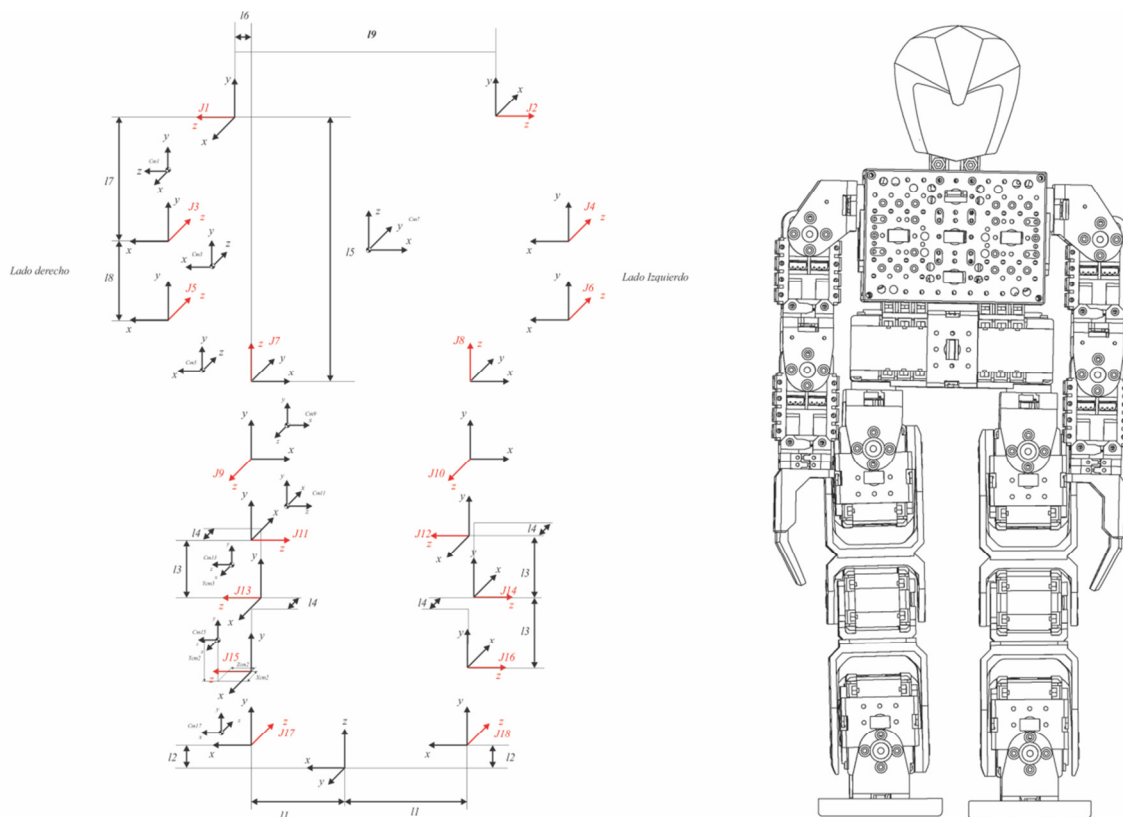
## 2.5 Modelo del robot BIOLOID

### 2.5.1 Cinemática directa de posiciones

Para el control del robot (Capítulo 5) resulta conveniente contar con una descripción de todos los parámetros del robot, posiciones velocidades y aceleraciones, respecto la pierna de apoyo del robot. Por lo tanto para la Cinemática directa se tendrán 3 ramificaciones

- 1) De la pierna de apoyo a la muñeca izquierda.
- 2) De la pierna de apoyo a la muñeca derecha.
- 3) De la pierna de apoyo a la pierna libre.

Como el modelo cinemático directo se utilizará posteriormente en la obtención del modelo dinámico, serán ubicados referenciales tanto en cada articulación como en cada centro de masas de cada eslabón. A continuación se muestra un esquema con las posiciones de los referenciales. Con la finalidad de no saturar al dibujo de información y aprovechando la simetría del robot únicamente se agregaron las cotas necesarias al lado derecho del robot.



#### 2.5.1.1 Matrices de transformación homogénea entre eslabones de la pierna derecha

Transformación del referencial mundo al primer grado de libertad de la pierna derecha

$${}^wT^{17} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del primer grado de libertad “J17” al centro de masas del eslabón 17 “CM17”.

$${}_{17}T^{CM15} = \begin{bmatrix} c_{17} & -s_{17} & 0 & -y_{CM15}s_{17} + x_{CM15}c_{17} \\ s_{17} & c_{17} & 0 & y_{CM15}c_{17} + x_{CM15}s_{17} \\ 0 & 0 & 1 & z_{CM15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del referencial de la primera articulación de la pierna derecha “J17” al segundo grado de libertad “J15”

$${}_{17}T^{15} = \begin{bmatrix} 0 & -s_{17} & c_{17} & 0 \\ 0 & c_{17} & s_{17} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del referencial del segundo grado de libertad “J15” al segundo centro de masa “CM13”.

$${}_{15}T^{CM13} = \begin{bmatrix} c_{15} & -s_{15} & 0 & x_{CM13}c_{15} - y_{CM13}s_{15} \\ s_{15} & c_{15} & 0 & y_{CM13}c_{15} + x_{CM13}s_{15} \\ 0 & 0 & 1 & z_{CM13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del referencial del segundo grado de libertad “J15” al referencial del tercer grado de libertad “J13”

$${}_{15}T^{13} = \begin{bmatrix} c_{15} & -s_{15} & 0 & -l_3s_{15} - l_4c_{15} \\ s_{15} & c_{15} & 0 & l_3c_{15} - l_4s_{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del referencial del tercer grado de libertad “J13” al segundo centro de masa “CM11”.

$${}_{13}T^{CM11} = \begin{bmatrix} c_{13} & -s_{13} & 0 & x_{CM11}c_{13} - y_{CM11}s_{13} \\ s_{13} & c_{13} & 0 & y_{CM11}c_{13} + x_{CM11}s_{13} \\ 0 & 0 & 1 & z_{CM11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del referencial del tercer grado de libertad “J13” al referencial del cuarto grado de libertad “J11”

$${}_{13}T^{11} = \begin{bmatrix} -c_{13} & -s_{13} & 0 & -l_3s_{13} + l_4c_{13} \\ -s_{13} & c_{13} & 0 & l_3c_{13} + l_4s_{13} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del cuarto grado de libertad “J11” al centro de masas  $CM9$

$${}_{11}T^{CM9} = \begin{bmatrix} c_{11} & -s_{11} & 0 & x_{CM9}c_{11} - y_{CM9}s_{11} \\ s_{11} & c_{11} & 0 & y_{CM9}c_{11} + x_{CM9}s_{11} \\ 0 & 0 & 1 & z_{CM9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del cuarto grado de libertad “J11” al quinto grado de libertad “J9”

$${}_{11}T^9 = \begin{bmatrix} 0 & -s_{11} & -c_{11} & 0 \\ 0 & c_{11} & -s_{11} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del quinto grado de libertad “J9” al centro de masas 7 “ $CM7$ ”

$${}_{9}T^{CM7} = \begin{bmatrix} c_9 & -s_9 & 0 & x_{CM7}c_9 - y_{CM7}s_9 \\ s_9 & c_9 & 0 & y_{CM7}c_9 + x_{CM7}s_9 \\ 0 & 0 & 1 & z_{CM5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del quinto grado de libertad “J9” al 6to grado de libertad “J7”.

$${}_{9}T^7 = \begin{bmatrix} c_9 & 0 & -s_9 & 0 \\ s_9 & 0 & c_9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del sexto grado de libertad “J7” al centro de masas 6 “torso y cabeza del robot”

$${}_{7}T^{CM6} = \begin{bmatrix} c_7 & -s_7 & 0 & x_{CM6}c_7 - y_{CM6}s_7 \\ s_7 & c_7 & 0 & y_{CM6}c_7 + x_{CM6}s_7 \\ 0 & 0 & 1 & z_{CM6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.5.1.2 Matrices de transformación homogénea entre eslabones para el brazo derecho

Transformación del sexto grado de libertad “J7” al primer grado de libertad del brazo derecho “J1”

$${}_{7}T^1 = \begin{bmatrix} s_7 & 0 & -c_7 & -l_6c_7 \\ -c_7 & 0 & -s_7 & -l_6s_7 \\ 0 & 1 & 0 & l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del primer grado de libertad del brazo derecho “J1” al centro de masas 1 “ $CM1$ ”

$${}_{1}T^{CM1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & y_{CM1}s_1 + x_{CM1}c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & -y_{CM1}c_1 + x_{CM1}s_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_{CM1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del primer grado de libertad del brazo derecho “J1” al segundo “J3”

$${}^1T^3 = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -c_1 & l_7s_1 \\ 0 & c_1 & -s_1 & -l_7c_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del segundo grado de libertad del brazo derecho "J3" al centro de masas 3

$${}^3T^{CM3} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & y_{CM3}s_3 + x_{CM3}c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & -y_{CM3}c_3 + x_{CM3}s_3 \\ 0 & 0 & 1 & z_{CM3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del segundo grado de libertad del brazo derecho "J3" al tercero J5

$${}^3T^5 = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & -c_3 & l_8s_3 \\ 0 & c_3 & -s_3 & -l_8c_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación del tercer grado de libertad del brazo derecho "J5" al centro de masas 5

$${}^5T^{CM5} = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & y_{CM3}s_5 + x_{CM3}c_5 \\ s_5 & c_5 & 0 & -y_{CM3}c_5 + x_{CM3}s_5 \\ 0 & 0 & 1 & z_{CM3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al ser simétrico el robot en su parte derecha y su parte izquierda las transformaciones que corresponden al lado izquierdo del robot son las mismas a las ya presentadas salvo signos que reflejan el sentido de las dimensiones geométricas por lo tanto no serán presentadas. De igual forma, se han omitido las matrices de transformación homogénea que van de la base a cualquier elemento. Pues los resultados explícitos de estos productos aumentan de tamaño al aumentar el número de grados de libertad. De cualquier forma estas matrices están definidas por la ecuación (2.2) que representa el producto de las matrices que forman la cadena de la articulación base a la articulación deseada.

## 2.5.2 Cinemática directa de velocidades y aceleraciones

Aplicando el modelo de la ecuación (2.7) para cada referencial y centro de masas se determina la matriz Jacobiana de cada elemento de interés. Esto es básicamente un proceso repetitivo y debido a que representar cada uno de los resultados de manera explícita significaría el empleo de una gran cantidad de espacio únicamente se obtendrá los valores para el primer centro de masas de manera explícita como ejemplo ilustrativo.

### Análisis del primer centro de masas.

El centro de masas 17 solo sufre la influencia de la articulación 17 por lo cual la matriz jacobiana  $J_{CM17}$  corresponderá a una matriz de  $6 \times 6$  cuyo primer columna estará formada por el término  $j_{CM17}^{17}$  que se describirá a continuación y por 5 columnas más de ceros  $J_{CM17} = \begin{bmatrix} j_{CM17}^{17} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Siendo el vector  $j_{CM17}^{17}$  definido por:

$$j_{CM17}^{17} = \begin{bmatrix} {}_wz^{17} \times ({}_wO^{CM17} - {}_wO^{17}) \\ {}_wz^{17} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

De donde, como ya se explicó,  ${}_wz^{17}$  corresponde a la tercer columna de la componente de rotación de la matriz de transformación homogénea  ${}_wT^{17}$ ,  ${}_wO^{CM17}$  corresponde al vector de posición de la matriz  ${}_wT^{CM17}$ , definida por la ecuación 2.7 como:  ${}_wT^{CM17} = {}_wT^{17} {}_{17}T^{CM17}$  y  ${}_wO^{17}$  corresponde al vector de posición de la matriz  ${}_wT^{17}$ .

Las matrices  ${}_wT^{17}$  y  ${}_{17}T^{CM17}$  son:

$${}_wT^{17} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_{17}T^{CM17} = \begin{bmatrix} c_{17} & -s_{17} & 0 & -y_{CM17}s_{17} + x_{CM17}c_{17} \\ s_{17} & c_{17} & 0 & y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17} \\ 0 & 0 & 1 & z_{CM17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto  ${}_wT^{CM17}$  será:

$${}_wT^{CM17} = {}_wT^{17} {}_{17}T^{CM17} = \begin{bmatrix} c_{17} & -s_{17} & 0 & l_1 - y_{CM17}s_{17} + x_{CM17}c_{17} \\ 0 & 0 & -1 & -z_{CM17} \\ s_{17} & c_{17} & 0 & l_2 + y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación (2.26) escrita de manera explícita es:

$$j_{CM17}^{17} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 - y_{CM17}s_{17} + x_{CM17}c_{17} & l_1 \\ -z_{CM17} & -0 \\ l_2 + y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17} & l_2 \end{bmatrix} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{CM17}c_{17} - x_{CM17}s_{17} \\ 0 \\ -y_{CM17}s_{17} + x_{CM17}c_{17} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{CM17} = \begin{bmatrix} -y_{CM17}c_{17} - x_{CM17}s_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_{CM17}s_{17} + x_{CM17}c_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación (2.8) se determinan las velocidades del espacio de trabajo:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{CM17} \\ \dot{y}_{CM17} \\ \dot{z}_{CM17} \\ \dot{\alpha}_{CM17} \\ \dot{\beta}_{CM17} \\ \dot{\gamma}_{CM17} \end{bmatrix} = J_{CM17} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{CM17}c_{17} - x_{CM17}s_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_{CM17}s_{17} + x_{CM17}c_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

Para el caso de las aceleraciones se emplea la ecuación (2.11)

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_n \\ \ddot{y}_n \\ \ddot{z}_n \\ \ddot{\alpha}_n \\ \ddot{\beta}_n \\ \ddot{\gamma}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{CM17}c_{17} - x_{CM17}s_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_{CM17}s_{17} + x_{CM17}c_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{CM17}s_{17} - x_{CM17}c_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_{CM17}c_{17} - x_{CM17}s_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

### 2.5.3 Cinemática inversa de posiciones.

Para definir la posición y orientación de un elemento dentro del espacio de trabajo humano,  $R^3$ , se necesita la posición respecto a cada uno de los ejes cartesianos ( $x$ ,  $y$  y  $z$ ) y la orientación respecto a estos mismos ejes ( $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ ). Por lo tanto el problema de la cinemática inversa para este caso consiste en definir el vector de posiciones articulares  $\mathbf{q}$  ( $6 \times 1$ ) a partir del vector de posiciones espaciales  $\xi$  ( $6 \times 1$ ).

La disposición física de los grados de libertad en la pierna y la cadera del humanoide simulan una articulación esférica lo cual permite aplicar la técnica de desacoplamiento cinemático que consiste en utilizar 3 grados de libertad para lograr las posiciones deseadas respecto a los 3 ejes cartesianos y los tres grados de libertad restantes para lograr las 3 orientaciones deseadas. Esto simplifica mucho el trabajo para obtener la cinemática inversa de posiciones y permite aplicar simple trigonometría en su solución.

Considerando como ejemplo la pierna derecha del robot la orientación  $\alpha$ , orientación respecto al eje  $z$ , corresponderá a la variable articular 17.  $\beta$  que corresponde a la orientación respecto al eje  $x$  estará definido por la variable articular 15 y finalmente la variable articular 17 corresponderá a la orientación  $\gamma$  que es la orientación sobre el eje  $y$ .

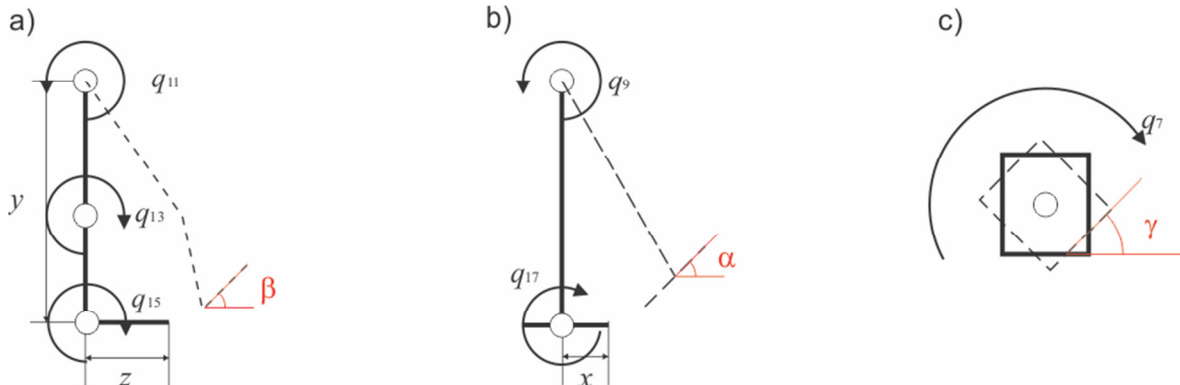


Fig. 2.2. a) Vista lateral de la pierna b) Vista frontal de la pierna c) Vista superior de la pierna

En la figura 2.2 a) se ilustra la vista del plano  $zy$  de la pierna del robot, con línea continua la posición inicial y en línea punteada una posición arbitraria donde la orientación del pie respecto al eje  $x$ , eje perpendicular al plano ilustrado, está definida por el valor de  $q_{15}$ . En la figura 2.2 b) se hace lo propio para el plano  $xy$  y en la figura 2.2 c) se ilustra el plano  $xz$ .

Las relaciones serán las siguientes:

$$\gamma = q_7 \quad \alpha = q_9 - q_{17}$$

$$\beta = q_{11} - q_{13} - q_{15}$$

Las variables articulares  $q_9, q_{11}$  y  $q_{13}$  definirán las posiciones y tendrán un efecto sobre las orientaciones del pie, mientras que las variables  $q_7, q_{15}$  y  $q_{17}$  no tienen influencia alguna sobre la posición. Por lo tanto el procedimiento es lograr la posición deseada usando las articulaciones 9, 11 y 13 Y posteriormente corregir la orientación mediante 7, 15 y 17.

El utilizar solo 3 articulaciones para definir la posición del pie permite realizar un análisis trigonométrico de las posiciones.

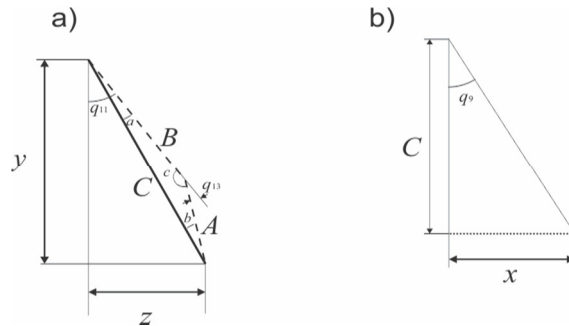


Fig. 2.3. Triángulos formados por las articulaciones de la pierna en una pose definida.

En la figura 2.3 a) se ilustra la proyección sobre el plano  $yz$  de la pierna analizada. Con línea punteada, segmentos  $A$  y  $B$ , se representan los eslabones que forman a la pierna. El segmento  $B$  correspondería al fémur de un ser humano mientras que el segmento  $A$  a la tibia y el peroné. El segmento de línea continua  $C$  corresponde a la proyección del vector de posición del pie sobre el plano  $yz$ . Mientras que en la figura 2.3 b) se ilustra la proyección de la pierna sobre el plano  $yx$ .

A partir de los triángulos formados en las figuras 2.3 a) y b) es posible definir las siguientes relaciones geométricas entre la posición del pie y los valores articulates ( $q_9, q_{11}$  y  $q_{13}$ ) que corresponden a la solución de la cinemática inversa de posiciones.

$$q_9 = \arctan\left(\frac{x}{C}\right) \quad (2.27)$$

$$C = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos(c)}$$

$$\frac{-y^2 - z^2 + A^2 + B^2}{2AB} = \cos(c)$$

$$q_{13} = \pi - c$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$q_{13} = \arccos\left(\frac{y^2 + z^2 - A^2 - B^2}{2AB}\right) \quad (2.28)$$

$$q_{11} = \arctan\left(\frac{z}{y}\right) + a \quad (2.29)$$

$$a = \arctan(A\cos(q_{13}), B + A\sin(q_{13}))$$

#### 2.5.4 Cinemática inversa de velocidades y aceleraciones

La ecuación (2.13) define el valor de las velocidades articulares  $\dot{q}$  en función de las velocidades del espacio de trabajo. La relación entre estas 2 variables corresponde a la inversa de la matriz jacobiana del sistema  $J^{-1}$ .

Continuando con el ejemplo del centro de masas correspondiente al eslabón de la articulación 17 se observa que  $J$  corresponde a una matriz singular y para muchos otros casos ni siquiera es una matriz cuadrada por lo tanto  $J^{-1}$  corresponde a la pseudo inversa de  $J$ :

$$J_{CM17}^{-1} = \begin{bmatrix} J_{CM17}^{11} & 0 & J_{CM17}^{31} & 0 & J_{CM17}^{51} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{CM17}^{11} = \frac{-Co[y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17}]}{1 + Co[y_{CM17}c_{17} - x_{CM17}s_{17}](y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17}) + Co[-y_{CM17}s_{17} + x_{CM17}c_{17}](x_{CM17}c_{17} - y_{CM17}s_{17})}$$

$$J_{CM17}^{31} = \frac{Co[x_{CM17}c_{17} - y_{CM17}s_{17}]}{1 + Co[y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17}](y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17}) + Co[x_{CM17}c_{17} - y_{CM17}s_{17}](x_{CM17}c_{17} - y_{CM17}s_{17})}$$

$$J_{CM17}^{51} = \frac{1}{-1 - Co[y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17}](y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17}) + Co[x_{CM17}c_{17} - y_{CM17}s_{17}](y_{CM17}s_{17} - x_{CM17}c_{17})}$$

De donde  $Co[y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17}]$  corresponde al complejo conjugado de  $y_{CM17}c_{17} + x_{CM17}s_{17}$

Finalmente aplicando la ecuación (2.13) tenemos la expresión que define las velocidades articulares en función de las velocidades espaciales.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = J_{CM17}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_{CM17} \\ \dot{y}_{CM17} \\ \dot{z}_{CM17} \\ \dot{\alpha}_{CM17} \\ \dot{\beta}_{CM17} \\ \dot{\gamma}_{CM17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{CM17}^{11} & 0 & J_{CM17}^{11} & 0 & J_{CM17}^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{CM17} \\ \dot{y}_{CM17} \\ \dot{z}_{CM17} \\ \dot{\alpha}_{CM17} \\ \dot{\beta}_{CM17} \\ \dot{\gamma}_{CM17} \end{bmatrix}$$

Para el caso de las aceleraciones angulares se aplica la ecuación (2.14)

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{CM17}^{11} & 0 & J_{CM17}^{31} & 0 & J_{CM17}^{51} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \ddot{x}_{CM17} \\ \ddot{y}_{CM17} \\ \ddot{z}_{CM17} \\ \ddot{\alpha}_{CM17} \\ \ddot{\beta}_{CM17} \\ \ddot{\gamma}_{CM17} \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} J_{CM17}^{11} & 0 & J_{CM17}^{31} & 0 & J_{CM17}^{51} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{CM17} \\ \dot{y}_{CM17} \\ \dot{z}_{CM17} \\ \dot{\alpha}_{CM17} \\ \dot{\beta}_{CM17} \\ \dot{\gamma}_{CM17} \end{bmatrix} \right)$$

### 2.5.5 Modelo dinámico.

La ecuación (2.25) define la diferencia entre las energías cinética y potencial de un manipulador de  $n$  grados de libertad a partir del formalismo de Lagrange las fuerzas externas, los pares generados por cada actuador, estarán definidos por:

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{dq_n} L - \frac{d}{dq_n} L = \tau_n \quad (2.30)$$

Donde  $\tau_n$  corresponde a la fuerza generada por el actuador  $n$  y  $L$  es el Lagrangiano del sistema definido por la ecuación (2.25).

Para cuestiones de control y estabilidad, conceptos que se abordaran en los siguientes capítulos, resulta de interés conocer el par generado en la articulación del tobillo  $q_{17}$  la ecuación que resulta de substituir  $n=17$  en la ecuación (2.30) y realizar las derivadas indicadas ocupa una gran cantidad de espacio por lo cual no será incluida en la versión impresa de esta tesis. La ecuación resultante así como los programas utilizados para calcular la dinámica completa del robot se encuentran en línea en la carpeta compartida "control dinámico de la marcha de un robot humanoide" <https://www.dropbox.com/s/8zrbs55uu4wqcd/STEP.rar>

## Capítulo 2) Referencias

- [1] Cavagna, G. A., Heglund, N. C., & Taylor, C. R. (1977). Mechanical work in terrestrial locomotion: Two basic mechanisms for minimizing energy expenditure. *American Journal of Physiology*, 233, R243-R261.
- [2] Hurmuzlu, Y., & Moskowitz, G. D. (1986). The role of impact in the stability of bipedal locomotion. *Dynamics and Stability of Systems*, 1(3), 217-234.
- [3] Full, R. J., & Koditschek, D. E. (1999). Templates and anchors: Neuromechanical hypotheses of legged locomotion on land. *The Journal of Experimental Biology*, 202, 3325-3332.
- [4] Shaw, J., & Shaw, S. (1989). The onset of chaos in a two-degree-of-freedom impacting system. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 56, 168-174.
- [5] Lötstedt, P. (1984). Numerical simulation of time-dependent contact and friction problems in rigid body mechanics. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computation*, 5(2), 370-393.
- [6] Brogliato, B. (2003). Some perspectives on the analysis and control of complementary systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6), 918-935.
- [7] Kar, D. C., Kurien, I. K., & Jayarajan, K. (2003). Gaits and energetics in terrestrial legged locomotion. *Mechanism and Machine Theory*, 38, 355-366.
- [8] Full, R. J., & Koditschek, D. E. (1999). Templates and anchors: Neuromechanical hypotheses of legged locomotion on land. *The Journal of Experimental Biology*, 202, 3325-3332.
- [9] Blickman, R., & Full, R. J. (1987). Locomotion energetics of the ghost crab. II. Mechanics of the center of mass during walking and running. *Journal of Experimental Biology*, 130, 155-174.
- [10] Cavagna, G. A., Heglund, N. C., & Taylor, C. R. (1977). Mechanical work in terrestrial locomotion: Two basic mechanisms for minimizing energy expenditure. *American Journal of Physiology*, 233, R243-R261.
- [11] J. Denavit and R.S. Hartenberg, 1955, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices." *Trans ASME J. Appl. Mech*, 23:215-221.
- [12] [John J. Craig, Introduction to robotics: mechanics and control, Pearson/Prentice Hall, 2005, Chap 3 PP68.](#)
- [13] Gallardo J. (2005). Kinematics of a Hybrid Manipulator by Means of Screw Theory. *Journal of Multibody System Dynamics*, Vol. 14, pp. 345-366.
- [14] Rico J.M., Gallardo J. and Duffy J. (1999). Screw Theory and Higher Order Kinematic Analysis of Open Serial and Closed Chains. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, pp. 559-586.
- [15] Kay, J. , Introduction to Homogeneous Transformations & Robot Kinematics, Rowan University Computer Science Department
- [16] Samuel R. Buss. Introduction to Inverse Kinematics with Jacobian Transpose, Pseudoinverse, and Damped Least Squares Methods. En línea actualizado 2009. <http://math.ucsd.edu/~sbuss/ResearchWeb/ikmethods/iksurvey.pdf>
- [17] R.L. Williams II, 1999, *Singularities of a Manipulator with Offset Wrist*, *Journal of Mechanical Design*, Transactions of the ASME, Vol. 121, No. 2, pp. 315-319.

# Capítulo 3

## Criterio de estabilidad

El término estabilidad, coloquialmente hablando, corresponde a una característica cualitativa y muchas veces subjetiva del comportamiento del objeto que se describe. Básicamente el término estable se utiliza para calificar a un parámetro o característica de un sistema cuando su valor numérico se mantiene dentro de un rango de conveniencia. El parámetro a evaluar, la forma de cuantificarlo y la definición del rango de conveniencia son definidos en base a las necesidades del análisis o del mismo analista. Aún cuando el parámetro se mantenga dentro del rango de conveniencia, este puede presentar diferentes comportamientos dotando al término estabilidad de algún otro adjetivo. Por ejemplo, en el área de control cuando un polo del sistema se ubica sobre el eje imaginario se dice que el sistema es **marginalmente estable**, es decir el sistema se encuentra en el límite entre la estabilidad y la inestabilidad, la variable se mantendrá dentro de un rango pero su trayectoria y no convergirá a un valor. Otro ejemplo es cuando la variable analizada parte de un estado inicial finito y ésta describe una trayectoria acotada que tiende al origen cuando el tiempo tiende a infinito se dice que el sistema es **asintóticamente estable**. Términos como **estabilidad en el sentido de Lyapunov, estabilidad externa, estabilidad interna, estabilidad BIBO**, etc. Son encontrados y definidos dentro de la literatura de control con la finalidad de describir características específicas del sistema analizado.

En el caso de sistemas holonómicos actuados, como lo es un robot humanoide no pasivo, cuando se establece un seguimiento de trayectorias en los diferentes actuadores del sistema, es común evaluar la estabilidad del error de seguimiento en cada uno de ellos, es decir la diferencia entre el estado del actuador y la trayectoria previamente definida. Si bien la estabilidad del error de seguimiento de las trayectorias articulares puede implicar una estabilidad en la marcha del humanoide. Esto es cierto únicamente cuando las trayectorias articulares son definidas en base a un criterio de estabilidad de la marcha. Por lo tanto para el caso de esta tesis la estabilidad del error de seguimiento de trayectoria en los actuadores se da por sentada y nos enfocaremos únicamente a la estabilidad del caminado que se definirá simple y llanamente como la ejecución de todos los movimientos, por parte del robot, necesarios para que este camine de manera bípeda sin caer. Definiendo una caída como el cambio de la región normal de contacto robot-suelo. Esto es, si el robot está apoyado sobre el suelo en algún punto que no forme parte de la superficie de las plantas de los pies entonces el robot ha caído.

La caída del robot o su tendencia a caer puede relacionarse a diferentes parámetros de la dinámica del robot por ejemplo la posición de la vertical del robot respecto al suelo, la aceleración angular resultante sobre el centro de masas, el par angular total que actúa sobre el robot, la posición de la reacción que

ejerce el suelo sobre el robot, la posición de un referencial ubicado en un punto del cuerpo del robot, etc.

De las metodologías con mejores resultados logrados en el caminado humanoide se encuentran aquellas que relacionan la estabilidad del humanoide con puntos definidos sobre el suelo. Estas se agrupan dentro del conjunto denominado metodologías de puntos de referencia en el suelo y se basan, como su nombre lo sugiere, en la definición de posiciones sobre el único elemento del medio que funge como apoyo para el robot, el suelo. La definición de estos puntos se encuentra directamente ligada a las características de la dinámica del caminante por lo cual la restricción de la posición de estos puntos dentro de una frontera permite asegurar la estabilidad del caminado o bien la ubicación de estos puntos fuera de la frontera permite cuantificar su inestabilidad.

Hoy en día han sido definidos una buena cantidad de puntos de referencia y criterios de estabilidad basados en la posición de estos puntos, aun así la mayoría de estos parten de la misma base que es el denominado punto de momento cero o *ZMP*, por sus siglas en inglés. La identificación de este punto fue inicialmente el resultado del análisis de la biomecánica del caminado humano dentro del área de la biomecánica [1]. Fue hasta 1968 que su aplicación en el área de la robótica fue propuesta por [2] y desde entonces su definición ha sido modificada o re interpretada de diferentes formas en función a las diferentes necesidades de los investigadores que se encontraron en circunstancias no consideradas en la definición original del *ZMP*. Pese a esto la idea básica de identificar el punto donde la concentración de las reacciones generadas por el suelo debe de actuar con la finalidad de equilibrar tanto el peso del robot como los momentos generados por sus movimientos, permanece constante.

Los puntos o criterios que han seguido al *ZMP* consisten básicamente en generalizaciones o extensiones, de este, que permiten un mejor análisis de la estabilidad del caminante. Conceptos como el índice de rotación del pie o *FRI* [3], el pivote del momento centroidal *CMP* [4], los puntos de captura [5], etc. Son refinamientos del *ZMP*, los cuales permiten extender la validez de los criterios de estabilidad o bien cuantificar la estabilidad o inestabilidad del robot.

A continuación se explicarán los conceptos utilizados por los criterios de puntos de referencia en el suelo y se enunciarán las definiciones e interpretaciones físicas de estos puntos.

### 3.1 Puntos de referencia en el suelo y la estabilidad de la marcha del humanoide

#### 3.1.1. Polígono de soporte

Las principales metodologías de puntos de referencia en el suelo utilizan el concepto de polígono de soporte para definir una condición de equilibrio. De manera estricta el polígono de soporte o polígono de referencia está definido como el polígono convexo que encierra la superficie del suelo sobre la cual se puede considerar que actúa la concentración de la carga distribuida que genera el suelo sobre las plantas de los pies del robot.

Este polígono coincide con el polígono convexo que encierra las superficies de contacto entre el robot y el suelo. En el caso de la fase simple, cuando el robot está apoyado en una sola pierna, el polígono de soporte corresponde a la huella del pie del robot mientras que en la fase doble, cuando el robot está apoyado en sus 2 piernas, corresponde al polígono convexo que encierra ambas huellas. Como se ilustra en la figura 3.1.



Fig 3.1 Polígono de soporte para la fase doble humana, izquierda, polígono de soporte para la fase simple humana, a la derecha.

#### 3.1.2. Punto de momento cero (*ZMP*)

En el primer trabajo de robótica donde aparece el concepto del punto de momento cero [2], se hace referencia a la figura 16.9 que corresponde a la figura 3.2 de este capítulo mientras que el punto de momento cero es definido como sigue:

*In Fig. 16.9 an example of force distribution across the foot is given. As the load has the same sign all over the surface, it can be reduced to the resultant force  $R$ , the point of attack of which will be in the boundaries of the foot. Let the point on the surface of the foot, where the resultant  $R$  passed, be denoted as the zero-moment point, or *ZMP* in short.*



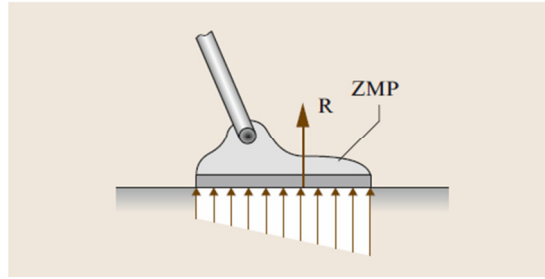


Fig 3.2 Copia de la figura 16.9 empleada en la definición original del punto de momento cero.

Básicamente se define al *ZMP* como el punto sobre el cual actúa concentrada la carga distribuida generada por el suelo sobre la planta del pie. El nombre de *ZMP* es tomado del hecho de que la fuerza concentrada en ese punto genera un equilibrio en los momentos que actúan sobre el robot. Sin embargo en este primer trabajo nunca se habla sobre el caso en el que el punto coincide con la orilla del polígono de soporte. Caso en el que, como se verá más adelante, ya no es posible asegurar una sumatoria de momentos igual a cero.

Con la finalidad de profundizar en el concepto del *ZMP* y en el caso en que la reacción del suelo actúa en la orilla del polígono de soporte enunciaremos un primer criterio de estabilidad como sigue:

Un robot con una pose de caminado bípedo definida por el vector  $\mathbf{q}$ , formado por las posiciones articulares, que se encuentra desarrollando un movimiento con velocidades y aceleraciones articulares  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$  respectivamente. Es estable, es decir su dinámica  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  es estable, si los momentos que actúan sobre el robot están equilibrados.

Cabe mencionar que en este ejemplo la única fuerza producida por el medio sobre el robot que se considera es la reacción que genera el suelo sobre él. Luego entonces es esta fuerza la única encargada de equilibrar al robot y en el caso de estar apoyado sobre un suelo idealmente rígido la fuerza de reacción deberá tener una magnitud igual al producto de la masa del robot por la componente perpendicular al suelo de la aceleración total que actúa sobre él. Además es claro que el suelo provoca una restricción unilateral, es decir únicamente empuja al pie pero no lo jala. Por lo tanto, para poder aplicar los criterios de estabilidad basados en los puntos de referencia en el suelo, se necesita que el sentido de la componente perpendicular al suelo de la aceleración que actúa sobre el robot sea hacia el suelo. Ya que de lo contrario el robot tenderá a desplazarse en dirección opuesta, provocando la pérdida del contacto suelo-pie e invalidando los criterios basados en los puntos de referencia en el suelo.

La ubicación del punto sobre el cual actúa la reacción del suelo se determina a partir del análisis del equilibrio de los pares generados sobre el robot. La reacción del suelo además de equilibrar las fuerzas verticales generadas sobre el robot, debido a sus movimientos, debe equilibrar los pares que estas fuerzas generan respecto a cualquier punto arbitrario. Al estar la magnitud de la fuerza de reacción definida por el producto de la masa por la aceleración vertical del robot. La única variable que puede modificar la magnitud del par generado es la distancia entre el punto respecto al que se calculan los momentos y el punto donde se considera concentrada la reacción. Esta distancia define, pues, la posición de un punto sobre el suelo en el cual, idealmente, la reacción debería actuar para estabilizar al

robot. Cuando este punto se encuentra contenido dentro del polígono de soporte del robot la carga distribuida generada sobre toda la superficie de contacto pie-suelo puede considerarse concentrada en ese punto.

Aun cuando el punto no coincida con la superficie de contacto suelo-pie, el efecto neto de las reacciones que actúan sobre los pies puede considerarse aplicado en ese punto, siempre y cuando este dentro del polígono de soporte como se ilustra en la figura 3.3a donde el robot es sometido a un par  $M_2$ . Sin embargo ninguna combinación de reacciones sobre la superficie de contacto suelo-pie es capaz de producir el efecto de una reacción fuera del polígono de soporte como se ilustra en la Figura 3.3b donde el robot sufre el efecto de un par  $M_1 > M_2$ . Por lo tanto, si la ubicación de la reacción necesaria para equilibrar al robot excede los límites del polígono de soporte la reacción actuará en la orilla de la planta del pie, que es el máximo punto donde puede actuar, generando un par que equilibrará únicamente una parte del par total que actúa sobre el robot, provocando que no exista un  $ZMP$ , que el robot gire y caiga.

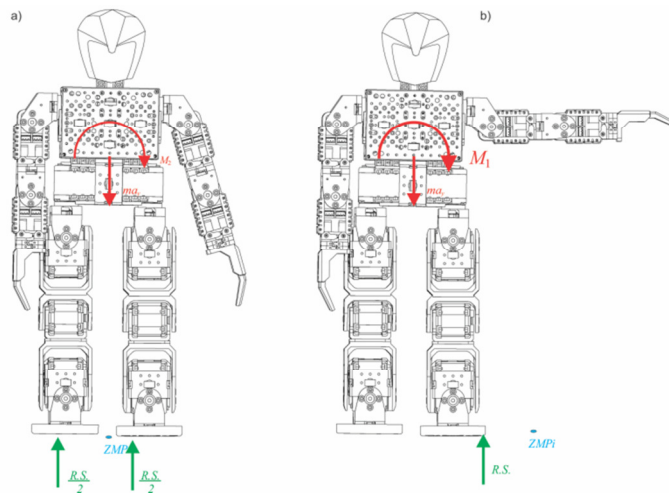


Fig 3.3 a) Ubicación del  $ZMP$  dentro del polígono de soporte pero fuera de la superficie de contacto. b) Ubicación del  $ZMP_i$  fuera de la superficie de contacto y del polígono de soporte

En base a esta consideración algunos autores toman como criterio de estabilidad la ubicación del  $ZMP$  dentro del polígono de soporte. Si bien este criterio es válido se deja un hueco de incertidumbre para los casos en que la reacción actúa en la orilla del polígono de soporte pues esta situación puede ser causada por un par no equilibrado o por un par perfectamente equilibrado que requiere de una reacción ubicada precisamente en la orilla del polígono de soporte.

Por lo tanto una definición del  $ZMP$  y un criterio de estabilidad más apropiados son: *El  $ZMP$  corresponde a un punto ubicado sobre el polígono de soporte en el cual el efecto de la reacción del suelo produce el equilibrio de los momentos que actúan sobre el robot, además se puede establecer que la dinámica del robot es estable si para esta dinámica existe un  $ZMP$ .*

Para poder aplicar éste, y los criterios subsecuentes, es necesario identificar la posición de la reacción del suelo. Esto se logra partir del análisis del equilibrio de los momentos generados por la dinámica del robot y la reacción del suelo. Como ejemplo en la figura 3.4 se ilustra un robot en la fase de apoyo

simple con una fuerza total  $F$  concentrada en su centro de masas  $CM$  y cuya magnitud es igual al producto de la masa  $m$  del robot por la aceleración  $a$  que actúa sobre el mismo.

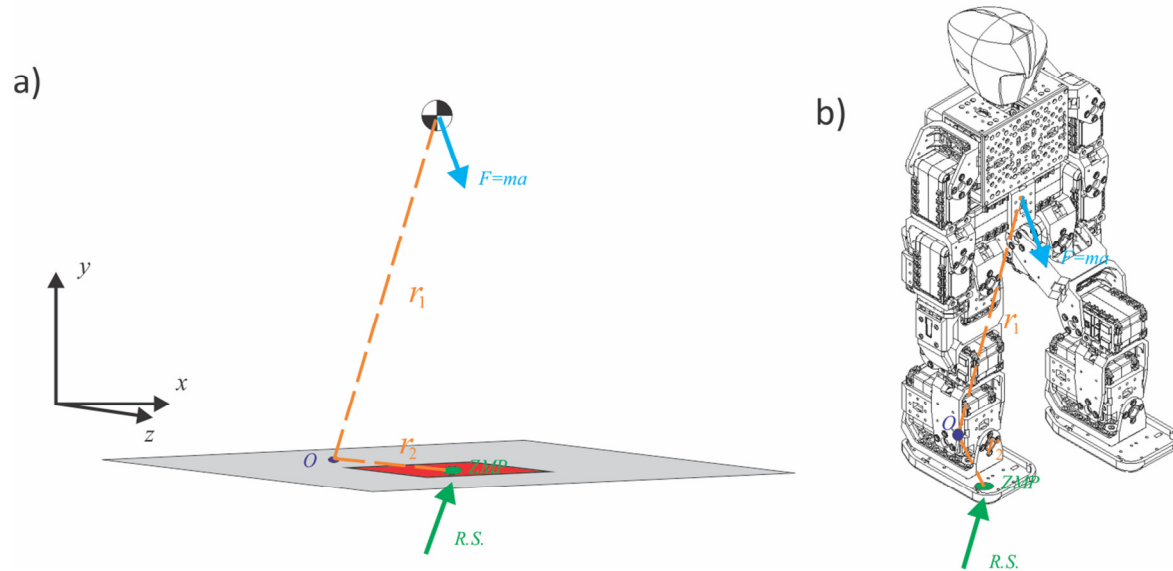


Fig. 3.4.a) DCL del humanoide en fase de apoyo simple b) ubicación del ZMP para un humanoide en fase de apoyo simple

A partir del diagrama de cuerpo libre del robot ilustrado en la figura 3.4.a y la condición de equilibrio para los momentos que actúan en el robot, respecto a cualquier punto arbitrario  $o$   $\sum M_o = 0$  es posible establecer la siguiente igualdad de momentos:

$$F \times r_1 = ma \times r_1 = R.S. \times r_2 \quad (3.1)$$

donde  $r_1$  es el vector de posición que va desde el punto  $o$  hasta el  $CM$ ,  $R.S.$  que corresponde a la reacción del suelo formada por una componente vertical siempre perpendicular a la superficie de contacto y cuya magnitud esta definida por el producto de la masa del robot y la aceleración en dirección  $y$ , y una componente horizontal siempre coplanar a la superficie de contacto debida a la fuerza de fricción generada entre el suelo y la planta del pie.  $r_2$  es el vector de posición que va del punto  $o$  al punto de momento cero " $ZMP$ ".

El problema de equilibrio en los momentos ilustrado en DCL de la figura 3.4.a) y representado por la ecuación (3.1) puede ser descompuesto en problemas más simples considerando las componentes cartesianas de los vectores que intervienen como se ilustra en las figuras 3.5a) y b)

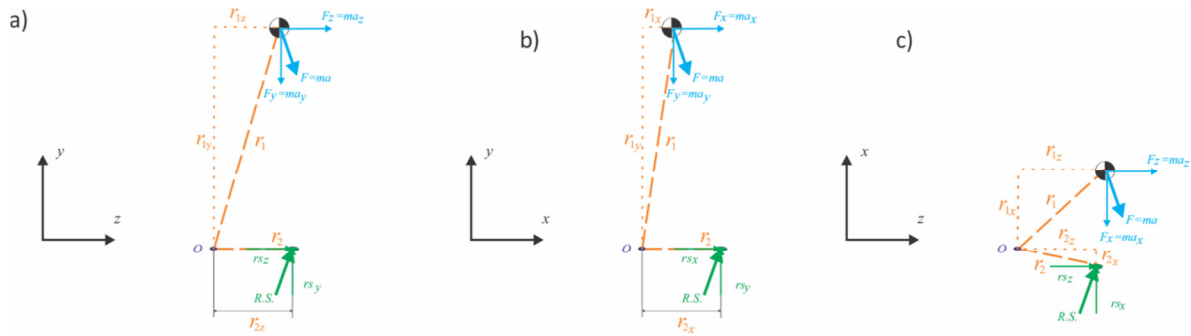


Fig. 3.5.a) Proyección del DCL de la figura 3.4a) sobre el plano  $yz$  b) Proyección sobre el plano  $yx$  c) Proyección sobre el plano  $xz$

Resultando en las siguientes ecuaciones de equilibrio para el plano  $zy$ :

$$m[a_y r_{1z} + a_z r_{1y}] = [r_{sy} r_{2z}] \quad (3.2)$$

para el plano  $zx$ :

$$m[a_x r_{1z} + a_z r_{1x}] = [r_{sx} r_{2z} + r_{sz} r_{2x}] \quad (3.3)$$

y para el plano  $xy$ :

$$m[a_x r_{1y} + a_y r_{1x}] = [r_{sy} r_{2x}] \quad (3.4)$$

La ecuación (3.3) describe los momentos generados alrededor del eje  $y$  los cuales no provocan la caída del robot por lo cual su efecto sobre la ubicación de la reacción generada por el suelo es nulo. Es a partir de las ecuaciones (3.2) y (3.4) de donde se determina las componentes del vector de posición de la reacción generada por el suelo:

$$r_{2z} = \frac{m[a_y r_{1z} + a_z r_{1y}]}{r_{sy}} \quad (3.5)$$

$$r_{2x} = \frac{m[a_y r_{1x} + a_x r_{1y}]}{r_{sy}} \quad (3.6)$$

Para el caso en que:

$$\min(PR_z) \leq r_{2z} \leq \max(PR_z) \quad (3.7)$$

y

$$\min(PR_x) \leq r_{2x} \leq \max(PR_x) \quad (3.8)$$

Se tiene que la dinámica del robot es estable y además el punto de reacción  $P_r$  corresponde al punto de momento cero

$$P_r = ZMP = (r_{2x}, r_{2z}) \quad (3.9)$$

Por otro lado, si:

$$r_{2x} < \min(PR_x) \quad \text{y/o} \quad r_{2z} < \min(PR_z) \quad (3.10)$$

Entonces

$$r_{2x} = \min(PR_x) \quad \text{y/o} \quad r_{2z} = \min(PR_z) \quad (3.11)$$

O si

$$r_{2x} > \text{MAX}(PR_x) \quad \text{y/o} \quad r_{2z} > \text{MAX}(PR_z) \quad (3.12)$$

Entonces

$$r_{2x} = \text{MAX}(PR_x) \quad \text{y/o} \quad r_{2z} = \text{MAX}(PR_z), \quad (3.13)$$

el *ZMP* no existirá, la dinámica no será estable y:

$$P_r = (r_{2x}, r_{2z}) \quad (3.14)$$

### 3.1.3. Índice de rotación del pie (*FRI*)

Como ya se explicó, un par no equilibrado en una dinámica del robot provoca la inexistencia del *ZMP* y la inestabilidad de dicha dinámica. Sin embargo la magnitud del par no equilibrado puede producir una caída más o menos severa lo que puede traducirse en la capacidad de volver o no a una dinámica en equilibrio por parte del robot. Por lo tanto una cuantificación del par no equilibrado establece una cuantificación de la tendencia del robot a caer. Basándose en este razonamiento se estableció el índice de rotación del pie o *FRI*, por sus siglas en inglés. Su cuantificación se logra a partir de la interpretación de la distancia existente entre el punto de reacción  $P_r$  y un punto de momento cero "imaginario"  $ZMP_i$  que puede existir fuera del polígono de soporte.

Para la definición del *FRI* partimos de una dinámica inestable  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ . Lo que implica que el momento resultante no es cero e idealmente es posible definir un punto sobre el cual la reacción del suelo debería actuar con la finalidad de equilibrar al momento resultante. Este punto estará fuera del polígono de soporte, lo llamaremos punto de momento cero imaginario  $ZMP_i$  y su posición estará definida por:

$$ZMP_{iz} = r_{2z} = \frac{m[a_y r_{1z} + a_z r_{1y}]}{r_{3y}} \quad ZMP_{ix} = r_{2x} = \frac{m[a_y r_{1x} + a_x r_{1y}]}{r_{3y}} \quad (3.15)$$

Que corresponde a la ubicación del *ZMP* original sin las restricciones del polígono de soporte. Independientemente de la definición de este punto imaginario la reacción del suelo no puede abandonar al polígono de soporte por lo cual su posición continua definida por las ecuaciones desde (3.5) hasta (3.14).

La distancia que existe entre el punto de reacción y el punto de momento cero "imaginario", figura 3.6, es una cuantificación de la tendencia a girar del robot. Pues el producto de esta distancia, la masa del robot y la aceleración vertical que actúa sobre el corresponde al momento no equilibrado que actúa sobre robot. De esta manera definimos al índice de rotación del pie *FRI* como: la distancia entre el punto de reacción del suelo  $P_r$  y el punto donde idealmente debería de actuar la reacción del suelo para equilibrar al robot  $ZMP_i$ .

$$FRI = ZMP_i - P_r \quad (3.16)$$

Además la ecuación (3.16) puede escribirse en sus componentes cartesianas con lo cual se logra una cuantificación de la tendencia de giro del robot sobre el eje perpendicular al plano formado por los ejes  $y$  y el correspondiente a la componente del *FRI*. Es decir el  $FRI_x$  cuantifica la tendencia de giro alrededor del eje  $z$ .

Finalmente, cuando el punto de reacción se ubica dentro del polígono de soporte este se convierte en el *ZMP* y coincide con el  $ZMP_i$  lo que implica que el índice de rotación del pie es 0. Con lo cual podemos definir un criterio de estabilidad en función del *FRI* como:

La dinámica de un robot es estable si el *FRI* correspondiente a esta dinámica es 0.

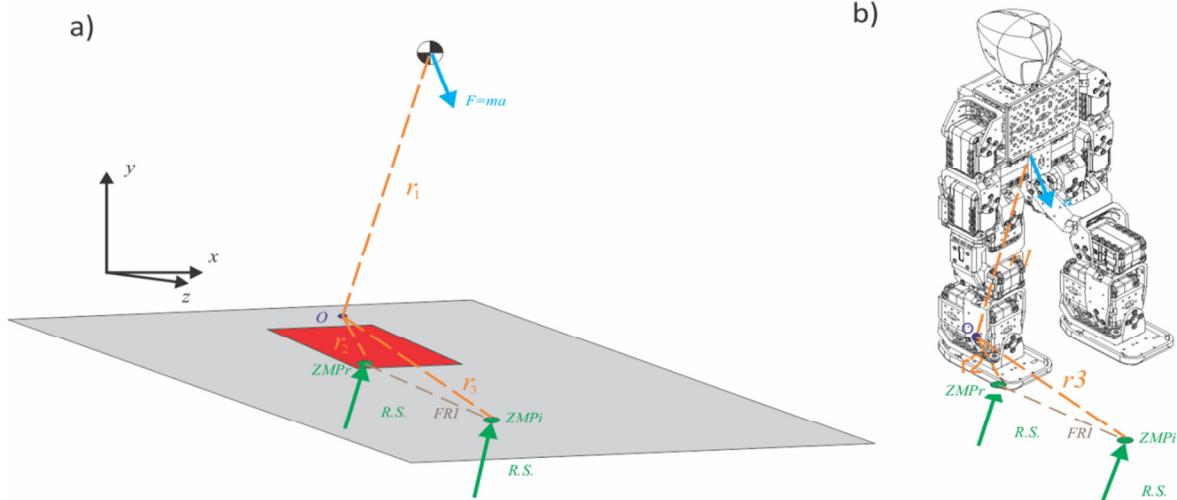


Fig. 3.6.a) DCL del humanoide en fase de apoyo simple incluyéndola posición del *ZMP* imaginario b) *ZMP* real, imaginario y *FRI* para un humanoide en fase simple

### 3.1.4. Pivote del momento centroidal *CMP*

Hasta el momento en la definición de los puntos de referencia en el suelo se ha considerado al punto respecto del cual se calculan los momentos, punto *o*, ubicado siempre sobre el suelo, esto es con la finalidad de simplificar las ecuaciones de equilibrio pues de esta manera las componentes en *z* y en *x* de la reacción del suelo, que corresponden a la fuerza de fricción generada en la superficie de contacto, no producen momentos respecto este punto.

Realizando un análisis de los momentos que actúan sobre el robot respecto a un punto dentro del espacio de trabajo, ya no limitado al plano formado por el suelo, lo único que se logra es complicar las ecuaciones pues ahora el efecto de la fuerza de fricción aparecerá en ellas. Sin embargo, si el punto respecto al que se calculan los momentos coincide con la línea de acción de una o más fuerzas, las ecuaciones vuelven a simplificarse, pues desaparece el efecto de estas fuerzas, y además permite definir otro punto de referencia y un nuevo criterio de estabilidad.

Para la definición del pivote del momento centroidal *CMP* por sus siglas en inglés, partimos de nueva cuenta de un robot cuya dinámica está definida por los vectores  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  figura 3.7. La dinámica del robot define, entre otras cosas, una fuerza que consideraremos concentrada sobre el *CM* del robot la cual está definida por el producto de la aceleración total sobre el robot, igual a la suma vectorial de la aceleración gravitacional y la aceleración generada por los movimientos articulares, por la masa del mismo. Como ya se ha explicado, la única fuerza externa que equilibra tanto la fuerza como el momento producido por los movimientos articulares del robot es la fuerza generada por el suelo. Por lo cual, si esta vez se elige al centro de masas como el punto *o* respecto al cual se calculan los momentos generados sobre el robot, la fuerza concentrada en ese punto no producirá momento alguno y la dirección de la fuerza de reacción del suelo deberá apuntar al centro de masas para que esta no provoque momento alguno y se logre el equilibrio deseado.

En la referencia [6] para la definición de este punto se propone realizar una proyección del *CM* sobre el suelo. Esta proyección debe de ser paralela a la reacción del suelo y el punto que se define sobre el suelo recibe el nombre de pivote del momento centroidal o *CMP* por sus siglas en inglés.

La condición de equilibrio establecida con anterioridad, la línea de la reacción del suelo pasa por el *CM*; se puede traducir en el siguiente criterio de estabilidad basado en la posición del *CMP*:

*La dinámica de un robot es estable si el CMP para esta dinámica coincide con el punto de reacción del suelo.* Este nuevo punto y criterio de estabilidad liberan de la necesidad directa de identificar el polígono de soporte además de que la distancia entre el *CMP* y el punto de reacción del suelo  $P_r$  representan una cuantificación de la tendencia a caer por parte del robot en una dinámica inestable.

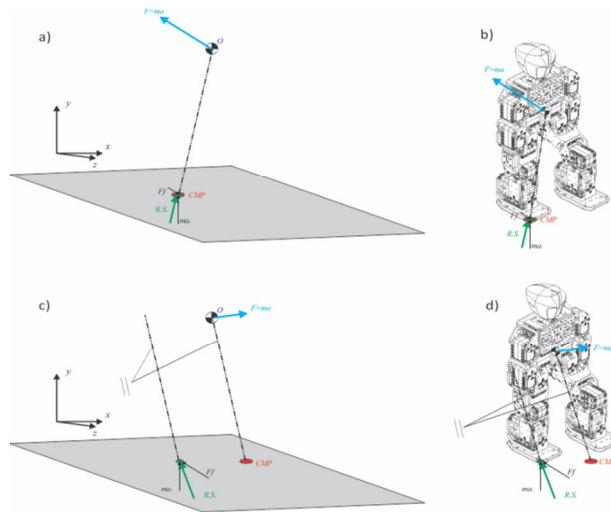


Fig. 3.7. a) DCL para una dinámica equilibrada, ( $\sum M_{CM} = 0$ ), sobre un robot en fase de apoyo simple  
 b) posición del *CMP* para el mismo caso de la figura 3.7.a)  
 c) DCL para una dinámica noequilibrada, ( $\sum M_{CM} \neq 0$ ), sobre un robot en fase de apoyo simple  
 b) posición del *CMP* para el mismo caso de la figura 3.7.b)

### 3.1.5. Puntos de captura

Un punto de captura corresponde a una posición sobre el suelo en la cual el robot debe colocar el pie libre, que se convertirá en el pie de apoyo una vez colocado en el punto de captura, con la finalidad de que la cadera llegue a un punto dentro de su trayectoria con una energía cinética igual a cero y sea viable para el robot mantener la energía cinética de la cadera igual a cero a través de valores válidos de pares en las articulaciones de su pierna de apoyo.

En la definición original encontrada en la referencia [5] de los puntos de captura se ha simplificado el movimiento de la cadera sobre el pie de apoyo como el movimiento desarrollado por un péndulo invertido cuyo DCL ilustrado en la figura 3.8.

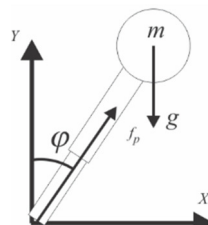


Fig. 3.8. DCL de un Péndulo invertido

Esta simplificación reduce a la pierna de apoyo del robot como un solo elemento rígido de longitud constante  $l$ , con una masa puntual  $m$  en su extremo, sin la influencia de par alguno y cuyo modelo dinámico es el siguiente:

$$m\ddot{x} = f_p \sin(\varphi) \quad (3.17)$$

$$m\ddot{z} = -mg + f_p \cos(\varphi) \quad (3.18)$$

Donde  $\varphi$  corresponde al ángulo formado por el péndulo respecto la vertical,  $g$  es la aceleración gravitacional,  $x$  y  $y$  son las coordenadas de la masa puntual respecto a los referenciales ilustrados en la figura 3.7 y  $f_p$  es la fuerza de reacción generada por la barra rígida que va del origen del referencial a la masa puntual.

Para linealizar las ecuaciones (3.17 y 3.18) los autores [5] toman las siguientes consideraciones: la velocidad vertical de la cadera es cero,  $\dot{y} = 0$ , lo que provoca que la cadera tenga una altura fija  $y_c$ , además se tiene que  $\cos(\varphi) = \frac{y}{l}$  y  $\sin(\varphi) = \frac{x}{l}$ . Con lo cual es posible resolver la ecuación (3.18) para  $f_p$ :

$$f_p = \frac{mg}{y_c} l \quad (3.19)$$

y substituyendo (3.19) en (3.17) se obtiene:

$$\ddot{x} = \frac{g}{y_c} x \quad (3.20)$$

Para el análisis de la estabilidad del sistema descrito por la ecuación (3.20) se define la cantidad conservativa llamada energía orbital del péndulo invertido [7] como:

$$E_{OPI} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{g}{2y_c} x^2 \quad (3.21)$$

El único punto de equilibrio del sistema corresponde al punto en el cual la cadera alcanza su altura máxima, es decir el punto donde  $l$  es perpendicular al suelo. La energía orbital del péndulo (3.21) describe el comportamiento de la cadera al momento de desplazarse dentro de su trayectoria en dirección al punto de equilibrio del sistema.

Si  $E_{OPI} > 0$  la cadera seguirá en su trayectoria alcanzará el punto de equilibrio y continuará con su trayectoria.

Si  $E_{OPI} < 0$  la cadera invertirá el sentido de su movimiento y retrocederá sobre la trayectoria.

Si  $E_{OPI} = 0$  la cadera alcanzará el punto de equilibrio y se mantendrá en él. Es decir la energía cinética de la cadera valdrá 0 al momento de alcanzar el punto de equilibrio, los valores en los que (3.21) es 0 son:

$$\dot{x} = \pm x \sqrt{\frac{g}{y_c}} \quad (3.22)$$

Cuyo único valor estable corresponde al valor positivo de la raíz y al ser el punto de equilibrio, el punto donde el pie y la cadera son colineales, la posición de la cadera  $x$  que estabiliza al sistema corresponde al punto donde debe colocarse el pie, es decir, es el punto de captura:

$$x_{cap} = \dot{x} \sqrt{\frac{y_c}{g}} \quad (3.23)$$

El efecto de los pares generados dentro de las articulaciones de la pierna provocan una modificación en la energía cinética del *CM* además de la modificación de la geometría considerada en la obtención del modelo de las ecuaciones (3.17, 3.18). La primera articulación de la pierna tiene la peculiaridad de modificar únicamente la energía cinética del *CM* sin modificar la geometría del modelo mientras que para la última articulación es posible hacer la misma consideración si el *CM* está suficientemente cerca de esta articulación. Esta modificación en la energía cinética provoca un desplazamiento del punto de captura dotando así al robot de toda una región de captura sobre la cual el robot podrá colocar su pie y



desarrollar el movimiento del *CM* necesario manteniendo una energía cinética igual a cero cuando alcance alguno de los infinitos puntos de equilibrio que se producen al incluir un par en el modelo. En [5] se encuentra un análisis de la región de captura generada para un robot con actuación en la cadera; cabe mencionar que en esta referencia se considera que la acción de la articulación de la cadera es instantánea, es decir actúa en un intervalo corto de tiempo. Por otro lado, queda como un campo totalmente abierto a la investigación el análisis del efecto de las articulaciones intermedias o de todas las articulaciones de la pierna durante toda la trayectoria del *CM*. Esto se debe en gran medida a la complejidad, no linealidad y al alto nivel de acoplamiento del modelo resultante, lo que se traduce en una gran dificultad para establecer alguna cantidad conservativa y/o criterio que permita determinar si le será o no posible al robot mantener la energía cinética igual a cero y el punto donde esto se logrará.

### 3.2. Criterios de estabilidad

Las metodologías de puntos de referencia en el suelo descritas anteriormente permiten asegurar la estabilidad de un caminado a través de mantener el punto de referencia utilizado dentro de una frontera, dando como resultado una gran cantidad de soluciones para el diseño de trayectorias de un caminado. Otra característica a considerar de los criterios previamente mencionados es el hecho de que estas condiciones de equilibrio son suficientes pero no necesarias, es decir, el caminante puede perder el equilibrio durante un instante a lo largo de su trayectoria pero si las características físicas del caminante son las apropiadas es posible modificar la dinámica del cuerpo o el polígono de soporte de tal forma de que la condición de equilibrio se recupere antes de caer. Un ejemplo muy claro es el de una persona recibiendo un empujón, el primer acto reflejo de la persona es balancear la cadera y girar los brazos buscando modificar la dinámica que se ha generado en su cuerpo. Posteriormente si esto no fue suficiente la persona desplazará el pie en dirección al empujón con lo cual modifica el polígono de referencia y devuelve el estado de equilibrio. Luego entonces, surgen nuevas disyuntivas al momento de diseñar un caminado: ¿Qué orbitas espaciales, de velocidades y aceleraciones son las más apropiadas para un caminado?, ¿Es apropiado generar inestabilidad durante el caminado?, En caso de ser apropiado ¿Hasta cuánta inestabilidad es capaz de sufrir el sistema y volver al equilibrio?, ¿Qué criterio de estabilidad toma en cuenta estas condiciones?, Etc.

Con la finalidad de tratar de responder a estas y otras preguntas los investigadores han recurrido al análisis del caminado humano y, aunque no se han encontrado aún respuestas precisas, se han logrado identificar características importantes del caminado humano que se buscan replicar en el caminado robótico. Una de estas características más significativas y que corresponde a uno de los puntos principales de la investigación en el caminado robótico corresponde justamente a la existencia de inestabilidad durante la generación del paso. Mientras el caminado diseñado manteniendo la estabilidad a lo largo de toda la trayectoria es muy característico e identificado para los robots, es muy claro que este tipo de caminado no es el desarrollado por un ser humano "sano". En este último el tronco sigue el movimiento de las piernas, es decir el caminante primeramente ubica la pierna libre en su nueva posición y posteriormente desplaza todo el cuerpo a la nueva posición. El tipo de caminado diseñado se presenta en seres humanos que han perdido la movilidad o la fuerza necesaria en alguna de sus articulaciones. Mientras que el caminado de un ser humano "saludable" presenta una secuencia de movimientos más fluida donde el tronco no sigue al movimiento de las piernas; más aún, en los corredores profesionales es claro como las piernas tratan de alcanzar al tronco, lo que sugiere que

durante lapsos del paso la reacción del suelo no sólo se mueve dentro del polígono de soporte si no que inclusive ésta toca la orilla del polígono. Es decir el sistema entra en un estado de inequlibrio dinámico y es el movimiento de la pierna libre y su nueva ubicación lo que devuelve el equilibrio del sistema. Esto sugiere que el ser humano utiliza la influencia de la gravedad para producir una caída controlada al momento de generar el paso; de esta manera ahorra energía, pues las piernas únicamente deben detener esta caída en lugar de provocarla y detenerla.

La generación de un caminado que presente inestabilidad durante el paso representa un reto tecnológico y científico significativo por diferentes características originadas por la propia inestabilidad, estas características y las diferencias entre un caminado que mantiene la estabilidad durante toda la trayectoria se explican a continuación.

### 3.3. Comparación entre criterios de estabilidad

#### 3.3.1 Características del criterio de estabilidad continua.

Dentro de la definición del *ZMP* se especificó que para poder asegurar que la dinámica del robot es "estable" el *ZMP* debe mantenerse dentro del polígono de soporte. Algunos autores han propuesto que la posición "más estable" del *ZMP* corresponde al centro geométrico del polígono de referencia, pues de este modo el *ZMP* necesitará sufrir el mismo desplazamiento para pasar a un estado de inestabilidad en cualquiera de las direcciones [8].

Generar un caminado que mantenga siempre el *ZMP* dentro del polígono de soporte, ya sea en el centro geométrico o cerca de él, produce un movimiento corporal muy característico de los robots, ya descrito anteriormente. En dicho movimiento el tiempo  $T_e$  que toma completar un paso corresponde a la suma de los tiempos que toman los movimientos que colocan al *ZMP* dentro de la huella de la pierna de apoyo, polígono de soporte en fase simple,  $t_{zmp}$  y que posiciona la pierna libre en el nuevo punto de apoyo  $t_p$  como se ilustra en la figura 3.9. Además, la aceleración de los movimientos del robot estará limitada por la aceleración máxima que asegura la permanencia del *ZMP* dentro del polígono de referencia, lo que resulta en una limitación en la velocidad del caminado.

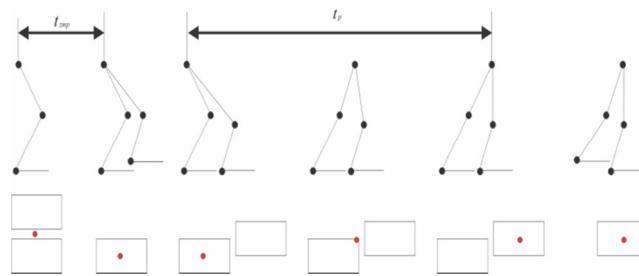


Fig. 3.9. Secuencia de movimientos articulares para completar un paso, ubicación del *ZMP* y forma del polígono de referencia

#### 3.3.2. Características del criterio con inestabilidad temporal

Si se considera la posibilidad de generar inestabilidad durante la trayectoria del caminado entonces se pueden diseñar movimientos que coloquen la reacción del suelo sobre la periferia del polígono de soporte o bien que hagan que el *ZMP* imaginario, definido para determinar el *FRI*, abandone el polígono de soporte. Ésto permite que tanto el movimiento de la pierna libre como el movimiento que coloca al *ZMP* dentro de la huella de la pierna de apoyo puedan iniciar al mismo tiempo, con lo cual el tiempo para completar un paso será únicamente el mayor de los dos figura 3.10.

Además de esto, la restricción en la aceleración máxima de la cadera se relaja permitiendo desarrollar movimientos con mayores velocidades.

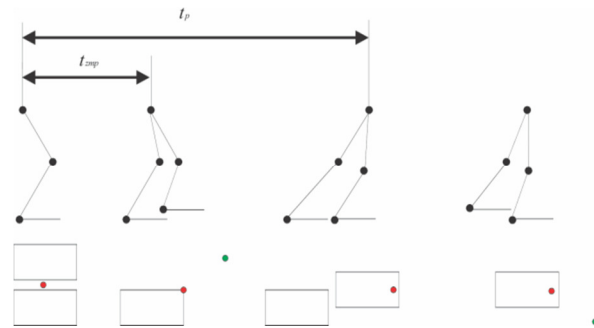


Fig. 3.10. Secuencia de movimientos articulares para completar un paso, ubicación del *ZMP* (real en rojo e imaginario en verde) y forma del polígono de referencia.

Sin embargo, el provocar que la reacción del suelo abandone el polígono de soporte produce un giro del robot sobre la orilla del pie, lo que dota al sistema de un nuevo grado de libertad no actuado y cuya dinámica depende de la dinámica de todo el robot que a su vez depende de la dinámica de este nuevo grado de libertad. Esta interrelación dificulta en gran medida el análisis matemático y por ende el desarrollo de un algoritmo de control para este tipo de caminado.

Otro punto muy importante a considerar es el hecho de que el ser humano desarrolla este tipo de caminado con una pierna que cuenta con 7 grados de libertad, uno de ellos ubicado directamente en la planta del pie que corresponde a los ortejos. Este séptimo grado de libertad le permite modificar su polígono de soporte durante la generación de un paso dándole una mayor capacidad de volver a un estado de equilibrio que el que presenta un robot con una planta del pie rígida.

Tomando en cuenta estas consideraciones, en esta tesis se ha optado por diseñar el caminado mediante el **criterio de estabilidad continua** y sentar las bases para un trabajo a futuro para utilizar el criterio de inestabilidad temporal.

Dicho esto, de ahora en adelante se considerará que la reacción generada por el suelo nunca tocara la orilla del polígono de soporte debido a un par no equilibrado en el robot por lo cual se utilizará el término de *ZMP* para referirse a esta fuerza.

### Capítulo 3) Referencias

- [1] Herbert Eftman and; John T. THE AXIS OF THE HUMAN FOOT Science 23 November 1934: Vol. 80 no. 2082 p. 484.
- [2] M. Vukobratovic and D. Juricic, Contribution to the synthesis of biped gait, in Proc. IFAC Symp. Technical and Biological Problem on Control, Erevan, USSR, 1968
- [3] M. Vukobratovic & B. Borovac, Zero moment point: Thirty five years of its life, International Journal of Humanoid Robotics, 1(1), 2004, 157--173.
- [4] Andreas Hofmann, Robust Execution of Bipedal Walking Tasks from Biomechanical Principles, Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, USA, January 2006.
- [5] J. Pratt, J. Carff, S. Drakunov, and A. Goswami, Capture point: A step toward humanoid push recovery, in 6th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, December 2006, pp. 200–207.
- [6] M. B. Popovic, A. Goswami, and H. Herr, Ground reference points in legged locomotion: Definitions, biological trajectories and control implications, International Journal of Robotics Research, Vol. 24, No. 12, 2005.
- [7] S. Kajita and K. Tani. Study of dynamic biped locomotion on rugged terrain-derivation and application of the linear inverted pendulum mode. volume 2, pages 1405 – 1411. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 1991.
- [8] Gabriela Reyes V. J. Alfonso Pámanes G. J. Victor Nunez N. (2011). Análisis de la marcha del robot humanoide bioloid en una ruta circular con parametros optimos. En actas del XIII Congreso Mexicano de Robótica (COMROB), Matehuala, San Luis Potosí.

# Capítulo 4

## Síntesis de un caminado paramétrico

### Introducción

La síntesis de un caminado consiste en la generación de trayectorias articulares que definen la secuencia de velocidades, posiciones y aceleraciones que habrán de producirse en cada una de las articulaciones del robot de tal modo que los movimientos producidos en las extremidades inferiores del robot provoquen un desplazamiento de todo el cuerpo a lo largo de una trayectoria con velocidad y aceleración definidas, de una forma lo más parecida posible a la marcha humana.

La gran cantidad de posibles combinaciones entre los movimientos de las piernas que pueden satisfacer las condiciones especificadas en la definición anterior hace necesario incluir un mayor número de restricciones a los movimientos del cuerpo del robot al momento de sintetizar el caminado. Para identificar la secuencia de los movimientos así como definir sus restricciones los investigadores se han basado en las observaciones de la marcha en los seres humanos.

#### 4.1. El caminado humano y su biomecánica.

En la marcha humana lo más común es iniciar a partir de la fase de apoyo doble, es decir la fase en la que todas las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo son equilibradas por ambas piernas. Para lograr el desplazamiento de todo el cuerpo es necesario cambiar el punto sobre el cual están apoyadas las piernas. Este cambio no puede ser simultáneo en ambas piernas, pues para mantener el equilibrio es necesario que las fuerzas ejercidas en el cuerpo del caminante sean equilibradas por los únicos elementos que interactúan con el medio de trabajo, las piernas. Por lo tanto, para lograr el cambio en el punto de apoyo, el caminante cambia a la fase de apoyo simple, en la cual todas las fuerzas son equilibradas por una sola pierna, dejando así una pierna libre para alcanzar el nuevo punto de apoyo. Una vez que la pierna ha alcanzado este punto el caminante vuelve a la fase de apoyo doble y el ciclo de un paso se completa. La marcha del caminante se logra repitiendo este ciclo de manera alternada, la pierna que en el paso anterior fue la pierna libre ahora será la pierna de apoyo y viceversa.

Cuando se desea replicar estos movimientos en un robot se deben respetar las restricciones mecánicas de los actuadores y la cinemática del robot. Además, dado que la arquitectura mecánica del robot se ha inspirado en la anatomía humana, es deseable que la marcha del robot se inspire en la biomecánica de la marcha humana. De esta manera los movimientos del robot serán más estéticos, pues se parecerán a los nuestros. Dentro de la literatura biomédica [1] se ha concluido que existen 6 características determinantes, desde el punto de vista del cuerpo, que definen la biomecánica del caminado humano:

1) Rotación pélvica, 2) Inclinación pélvica, 3) Flexión de la rodilla, 4) Flexión de la cadera, 5) Interacción rodilla tobillo y 6) Desplazamiento pélvico lateral. En su trabajo Saunders [1] identificó también que la pérdida de uno de estos movimientos puede compensarse por la acción de los otros 5, pero la pérdida de 2 movimientos provocará un caminado “anormal”.

#### 4.1.1. Parámetros generalizados y parámetros espaciales del caminado

En el trabajo de Saunders [1] no se especifica si estos parámetros corresponden a ambas piernas o únicamente a la pierna de apoyo, sin embargo la forma en la que el autor nombró los parámetros hace suponer que se refería a la pierna de apoyo, pues al producir movimiento en la articulación de la cadera, la pierna de apoyo provoca una inclinación pélvica, mientras que la articulación de la cadera en la pierna libre provocara un desplazamiento lateral de ésta misma y no una inclinación pélvica. Sin embargo para nuestro trabajo es necesario diferenciar entre ambas piernas pues la articulación de la cadera de la pierna libre provocará un desplazamiento de todo el tronco mientras que en la pierna libre provocara un desplazamiento del referencial en esta pierna. Luego entonces, se necesita un parámetro de flexión de cadera para la pierna de apoyo y otro para la pierna libre.

Considerando esto último se proponen los parámetros a vigilar dentro del caminado y las articulaciones del robot que producirán este movimiento (considerando la pierna izquierda como pierna de apoyo y la pierna derecha como pierna libre), los cuales son:

- 1) Rotación pélvica ( $J7$ ) ( $J8$  cte)
- 2) Inclinación pélvica ( $J9$   $J17$ ) ( $J10$  cte)
- 3) Flexión de la rodilla izquierda ( $J13$ )
- 4) Flexión de la rodilla derecha ( $J14$ )
- 5) Flexión de la cadera izquierda ( $J11$ )
- 6) Flexión de la cadera derecha ( $J12$ )
- 7) Interacción rodilla tobillo izquierdo ( $J13$   $J15$ )
- 8) Interacción rodilla tobillo derecho ( $J14$   $J16$ )
- 9) Abducción-aducción de cadera ( $J17$ ) ( $J18$  cte)

Los parámetros propuestos por Saunders consideran las características de posición de las articulaciones respecto a ellas mismas, es decir son parámetros generalizados del cuerpo que se analiza. Sin embargo, cuando se realiza un análisis de los movimientos de todo el cuerpo respecto a un referencial externo es mucho más conveniente e intuitivo contar con parámetros referidos al espacio de trabajo. Por lo tanto las amplitudes de los movimientos así como el tiempo que toma su realización permiten, también, definir parámetros que caracterizan el caminado respecto a un referencial en el espacio de trabajo. La definición de estos parámetros puede cambiar dependiendo de las necesidades del autor y del tipo de

movimiento que se desee en el robot. En esta tesis, con la finalidad de contar con parámetros más intuitivos y que permitan identificar mejor las características del paso se emplean los siguientes parámetros espaciales:

- Altura de paso
- Longitud de paso
- Altura del  $CM$
- Velocidad del  $CM$
- Amplitud de la oscilación en la cadera

De igual forma, como existe una relación entre las coordenadas generalizadas y las coordenadas espaciales en el robot, existe también una relación entre los parámetros generalizados y los parámetros espaciales del caminado. Por ejemplo, la posición en el eje  $y$  del pie, altura de paso, del robot define una flexión de la cadera, una flexión de rodilla y una interacción rodilla-tobillo tal como se ilustra en la figura 4.1.

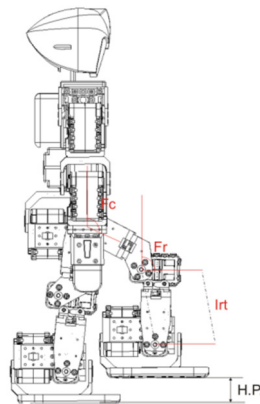


Fig. 4.1. Relación entre el parámetro especial altura de paso  $H.P.$  y los parámetros generalizados flexión de la cadera  $F_c$ , flexión de la rodilla  $F_r$  e interacción rodilla tobillo  $I_{tr}$ .

Una vez explicado esto se utilizarán de manera indistinta ambos conjuntos de parámetros dependiendo de los requerimientos del problema a tratar.

## 4.2 Síntesis del caminado

Dentro de la literatura la síntesis de un caminado ha sido resuelta de diferentes formas y si bien no existe una metodología única para lograr el resultado deseado, básicamente todos los métodos cumplen con los mismos pasos:

- Identificar las características que definirán el caminado,
- Generar las trayectorias cinemáticas (posiciones y velocidades) del pie y del tronco,
- Generar trayectorias de aceleración a partir del criterio de estabilidad a utilizar, y
- Aplicar los modelos inversos de la cinemática para generar las trayectorias articulares correspondientes a las trayectorias en el espacio de trabajo definidos en el punto anterior.

La forma de desarrollar cada uno de estos puntos difiere de un autor a otro y es la generación de nuevas metodologías que imiten lo mejor posible las características humanas la meta de los investigadores. La metodología para la síntesis del caminado propuesta en esta tesis sigue también esta metodología en cuatro pasos y se describe a continuación:

#### 4.2.1. Definición de las características del caminado

Por la facilidad que representa para la mayoría de las personas interpretar el significado físico de los movimientos de un robot respecto a un referencial en el espacio de trabajo los parámetros de caminado corresponderán a: Altura de paso ( $H_p$ ), Longitud de paso ( $L_p$ ), Altura del  $CM$  ( $H_{CM}$ ), Velocidad del  $CM$  ( $V_{CM}$ ) y Amplitud de la oscilación en la cadera ( $A_{oc}$ ).

#### 4.2.2. Generación de trayectorias

##### 4.2.2.1 Restricciones para el análisis cinemático

La forma en que el caminante logra el desplazamiento de todo su cuerpo es a través del cambio continuo del punto de apoyo con el suelo, en dirección al desplazamiento deseado. Como el apoyo sobre el suelo no puede perderse, pues esto implicaría la invalidez del criterio de estabilidad propuesto en el capítulo 3, el robot mantiene siempre una pierna en contacto con el suelo mientras que la pierna que queda libre es desplazada en busca del nuevo punto de apoyo. Las cinemáticas de la cadera del robot y de la pierna libre, durante esta fase conocida como fase de apoyo simple, dependen directamente de la condición de la pierna de apoyo. Al ser la restricción que produce el suelo sobre la pierna de apoyo una restricción unilateral, solo empuja, existe la posibilidad de que la pierna de apoyo se deslice o rote sobre el suelo provocando que la cinemática de todo el cuerpo se vea modificada. Un modelo cinemático que considere y aproveche esta condición resultaría bastante complejo además de que el caminado resultante sería poco natural, pues el caminado humano no se realiza bajo el efecto de deslizamientos sobre el suelo. Por lo tanto es válido considerar que la extremidad inferior de la pierna de apoyo, el pie, está unida de manera rígida al suelo lo que permite analizar al sistema como un manipulador con una base fija y donde el efector final, la cadera, deberá seguir una trayectoria geométrica simple que permita producir el desplazamiento deseado. De igual forma es posible considerar la pierna libre como un manipulador con la base fija, la cadera del robot, y cuyo efector final, el pie, debe recorrer la trayectoria deseada. Obviamente estas consideraciones suponen restricciones en la dinámica del robot las cuales son las siguientes:



*Restricciones para considerar el pie de apoyo fijo al suelo.*

Para poder tomar la consideración de que las extremidades son manipuladores con base fija se requiere que la dinámica del robot cumpla las siguientes restricciones:

- La dinámica del robot debe ser tal que las fuerzas paralelas al suelo deben estar equilibradas de tal forma que el robot no sufra deslizamiento sobre la superficie de contacto con el suelo. Esto se traduce en que la fuerza de fricción estática generada por el contacto de la planta del pie y el suelo debe ser igual a la fuerza horizontal generada en el robot debida a la acción de sus actuadores. Figura 4.2.

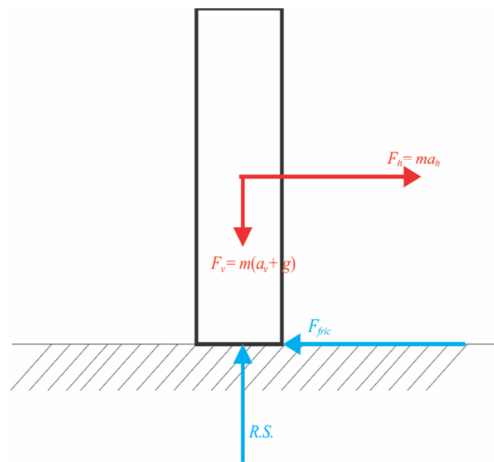


Fig. 4.2. DCL para el robot

$$f_{fric} = ma_h \quad (4.1)$$

Donde  $f_{fric}$  es la fuerza de fricción generada por el contacto de las superficies del suelo y la planta del pie.  $a_h$  es la aceleración horizontal total que actúa sobre el robot,  $m$  es la masa del robot.

- La reacción del suelo  $R.S.$  debe ser mayor a 0 esto es:  $-mg + ma_v < 0$  en donde  $g$  es la aceleración gravitacional y  $a_v$  la aceleración vertical. O bien la aceleración resultante en dirección perpendicular al suelo  $a_v$  debe ser siempre negativa, considerando el sentido negativo como la dirección hacia el suelo:

Del análisis del equilibrio en las fuerzas verticales en la figura 4.2 se tiene:

$$R.S. = mg - ma_v \quad (4.2)$$

Por lo tanto si

$$R.S. > 0 \Leftrightarrow -g > a_v \quad (4.3)$$

*Restricciones para considerar la pierna libre con la cadera como su base fija.*

En el caso de la pierna libre la articulación fija será la cadera del robot donde, de igual forma, se deseará que las fuerzas que actúan en esta articulación estén equilibradas respecto al tronco del robot.

Las fuerzas que actúan en la cadera dependen de la aceleración de ella misma, por lo tanto, pedir que las fuerzas estén equilibradas respecto al tronco del robot implica que la aceleración de la cadera respecto al tronco sea 0 lo que implica la inexistencia de movimiento relativo entre estos elementos, esto es resultado directo de la conexión mecánica entre los eslabones del tronco y de la cadera. Por lo cual las restricciones que genera esta suposición se encuentran ya consideradas en la cinemática del robot.

#### 4.2.2.2 Trayectorias espaciales

Los parámetros espaciales permiten definir la posición de un referencial ubicado en el extremo final de la pierna, para el caso de la pierna libre, y en el *CM*; Para el caso de la pierna de apoyo. Los valores iniciales y finales de estos parámetros establecen una posición inicial y una posición final para los referenciales previamente mencionados. La forma de lograr los desplazamientos entre estas posiciones puede ser a través de una infinidad de trayectorias y la manera de elegir la mejor trayectoria ha sido una línea de investigación para muchos colegas dando como resultado metodologías basadas en diferentes criterios de optimalidad, consumo de energía, tiempo, similitud con el caminado humano. etc. Por simplicidad y aceptable similitud con el caminado humano en esta tesis se ha optado por definir trayectorias elípticas.

Para el caso de la cadera o *CM* los parámetros: longitud de paso ( $L_p$ ) y altura del centro de masa ( $H_{CM}$ ) definen el semi eje menor y el eje mayor, respectivamente, de la media elipse que describirá el *CM* así como los valores articulares  $q_{11}$   $q_{13}$   $q_{15}$ . Como se muestra en la figura 4.3.

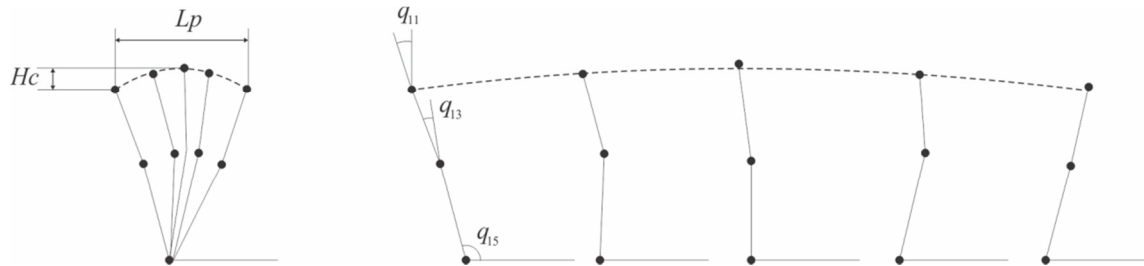


Figura 4.3. a) secuencia de movimientos de la pierna de apoyo concentrados en el punto sin movimiento del tobillo, b) secuencia de movimientos de la pierna de apoyo separados. Vista de perfil avanzando a la derecha.

Mientras que la altura del paso ( $H_p$ ) y la longitud del paso ( $L_p$ ) hacen lo propio para la media elipse que describirá el pie y los parámetros de las articulaciones  $q_{12}$   $q_{14}$   $q_{16}$ . Como se muestra en la figura 4.4.

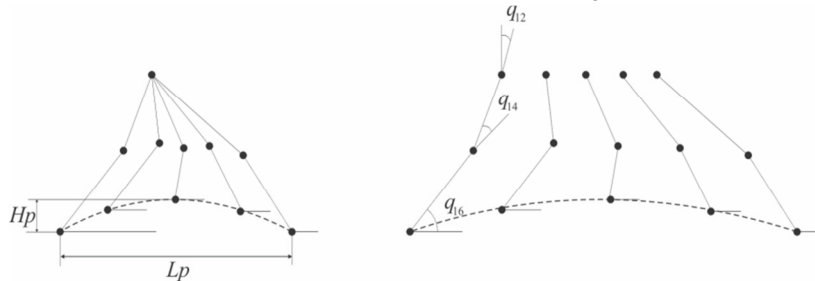


Figura 4.4. a) secuencia de movimientos de la pierna libre concentrados en el punto sin movimiento de la cadera, b) secuencia de movimientos de la pierna libre separados. Vista de perfil avanzando a la derecha.

Finalmente, la amplitud de oscilación de la cadera ( $A_{oc}$ ) y la longitud de paso ( $L_p$ ) definirán los ejes de la elipse que describirá el movimiento lateral de la cadera del robot así como los valores articulares de  $q_9, q_{10}, q_{17}, q_{18}$ . Como se ilustra en la figura 4.5.

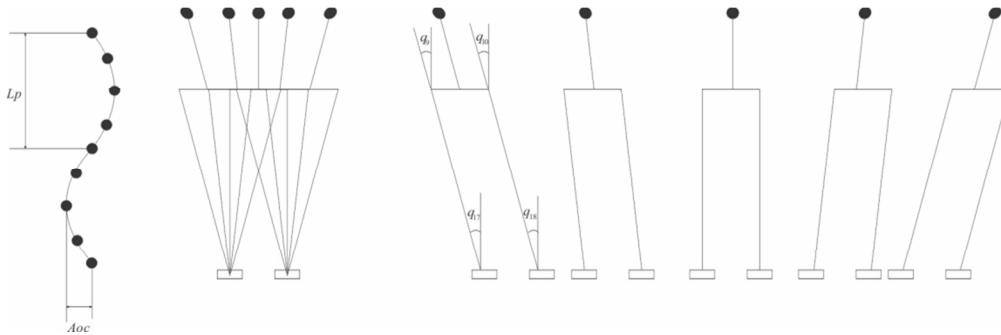


Figura 4.5. a) Vista superior de los movimientos de la cadera a lo largo del ciclo de paso, b) vista frontal de los movimientos de la cadera concentrados en los puntos sin movimiento de los tobillos, c) secuencia de movimientos de la cadera separados. Vista de frente

De esta manera se tienen definidos los 10 valores articulares necesarios para caracterizar el movimiento.  $q_7$  y  $q_8$ , que corresponden a la rotación pélvica, se mantienen constantes por lo cual no se definen trayectorias para este movimiento.

#### 4.2.2.3 Relaciones temporales de los movimientos

Una vez definidas las trayectorias espaciales de la cadera y las piernas es necesario sincronizar los movimientos de cada elemento. Dentro de la experimentación biomédica se ha encontrado que las relaciones temporales de los movimientos varían dependiendo de la velocidad del desplazamiento corporal, la edad, las dimensiones e incluso características patológicas del sujeto de prueba [2,3]. Como ejemplos de casos extremos tenemos las técnicas de los corredores profesionales, mientras que algunos buscan una zancada larga y permanecer el mayor tiempo posible en el aire otros buscan una zancada corta y la mayor cantidad posible de impulsos en el suelo. Estas diferencias obedecen a las características físicas propias de cada individuo como son la potencia en las piernas, el peso de todo el cuerpo, la longitud de las piernas, etc.

Además de esto se ha identificado que, para caminados a alta velocidad, el ser humano tiende a entrar y salir del equilibrio, es decir por momentos el cuerpo tiende a caer y se aprovecha esta caída controlada para producir el desplazamiento del cuerpo [4].

La identificación de las relaciones temporales más apropiadas o eficientes para un robot escapa del marco de esta tesis por lo cual, para los fines prácticos, se ha decidido optar porque el tiempo que toma desarrollar los movimientos de la pierna libre y la pierna de apoyo sea el mismo, mientras que el

movimiento lateral de la cadera se desarrollará en el doble de tiempo, pues la cadera completa un ciclo cuando el caminante ha dado un paso con cada pierna. Figura 4.4.

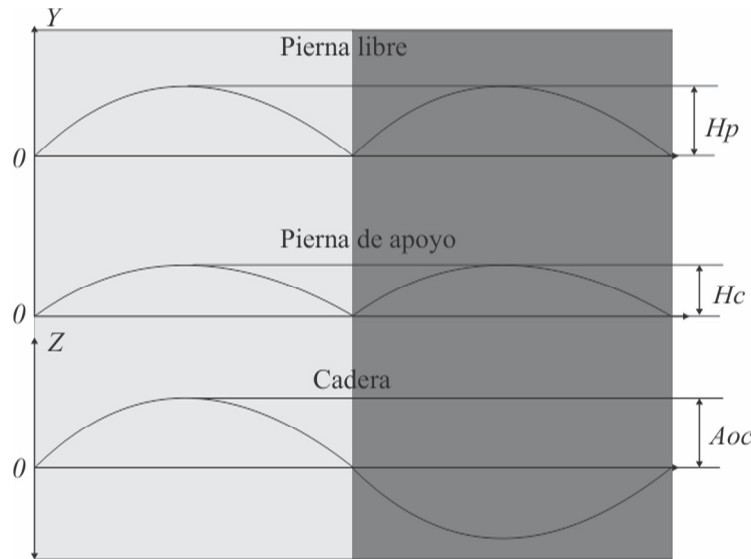


Fig. 4.5. Relación temporal entre los movimientos de la cadera, pierna libre y pierna de apoyo.

#### 4.2.3 Trayectorias de velocidad y aceleración

EL parámetro velocidad de paso  $V_p$  define la magnitud de la velocidad del pie en dirección  $x$  del referencial, al tomar el mismo tiempo completar el movimiento del pie que el de la cadera y recorrer estos la misma distancia, se tiene que la velocidad de paso corresponde a la velocidad "sagital" de la cadera.

Al estar confinados los movimientos de la cadera y del pie a una trayectoria elíptica es posible definir las posiciones en el eje  $y$  para el movimiento de la pierna libre y el movimiento sagital de la cadera y en el eje  $z$  para el movimiento lateral de la cadera en función de la posición del eje  $x$

Por eficiencia energética y mayor estabilidad de los movimientos se desea que el movimiento a lo largo del eje  $x$  sea un movimiento con la menor cantidad de aceleraciones por lo tanto se considera que únicamente actúan aceleraciones al momento de iniciar o de cambiar el sentido de los movimientos. Bajo esta consideración las ecuaciones que describen las posiciones de los referenciales serán:

$$R_x = x_0 + (V_x)t \quad (4.4)$$

Con  $R_x$  como la posición del referencial final del pie o la cadera respecto el eje  $x$ ,  $x_0$  es la posición inicial de este referencial,  $V_x$  corresponde a la magnitud de la velocidad del referencial en dirección  $x$  que, como ya se explicó, corresponde al parámetro velocidad de paso  $V_p$ .

Despejando de la ecuación de la elipse se determina la posición en  $y$ .

$$R_y = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{L}{R_x}\right)^2\right)} l^2 \quad (4.5)$$

En donde  $R_y$  es la posición del referencial del pie o la cadera respecto el eje  $y$  que, para el movimiento lateral de la cadera, corresponde a  $R_z$ ;  $L$  corresponde al semieje mayor de la elipse que describe el movimiento que, para los 3 movimientos, corresponde al parámetro longitud de paso  $Lp$ ;  $l$  corresponde al semieje menor de la elipse que describe el movimiento;  $Hp$  para el pie libre,  $Hc$  para el movimiento sagital de la cadera y  $Aoc$  para el movimiento lateral de la cadera.

A partir de la diferenciación temporal de estas ecuaciones se puede determinar la expresión que describe las velocidades:

$$V_x = \frac{d}{dt} [x_0 + (V_x)t] \quad (4.6)$$

La velocidad en dirección  $x$  es un parámetro ya definido por la velocidad del paso  $Vp$ , mientras que la velocidad en dirección  $y$  está definida por:

$$V_y = \frac{d}{dt} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{L}{R_x}\right)^2\right)} l^2 = \frac{L^2 l^2 V_x}{R_x^3 \sqrt{\left(1 - \left(\frac{L}{R_x}\right)^2\right)} l^2} \quad (4.7)$$

Como ya se explicó, se busca que las aceleraciones sean nulas la mayor parte del tiempo, sin embargo es inevitable la existencia de aceleraciones al momento de iniciar los movimientos y de cambiar el sentido de éstos. Las aceleraciones en dirección  $x$  estarán definidas o restringidas por las características físicas del motor y el criterio de estabilidad empleado mientras que las aceleraciones en  $y$  o  $z$  según sea el caso están definidas por:

$$A_y = - \frac{l^4 L^4 V_x^2}{\left(l^2 \left(1 - \frac{L^2}{R_x^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}} R_x^6} - \frac{3l^2 L^2 V_x^2}{\sqrt{l^2 \left(1 - \frac{L^2}{R_x^2}\right)} R_x^4} + \frac{l^2 L^2 A_x}{\sqrt{l^2 \left(1 - \frac{L^2}{R_x^2}\right)} R_x^3} \quad (4.8)$$

La forma característica de la variación de la posición velocidad y aceleración en cada una de las direcciones se ilustra en la figura 4.5.

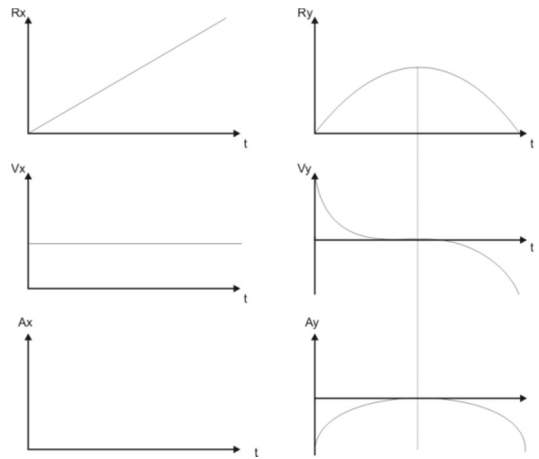


Figura 4.6. Trayectorias temporales de posición velocidad y aceleración de un efector final cualquiera en las direcciones  $x$  y  $y$ .

#### 4.2.4 Generación de valores articulares

En el capítulo 2 se describió la forma de obtener el modelo de cinemática inversa de posiciones y como reducir las posibles soluciones a solo un valor. Por lo tanto, aplicando las fórmulas (2.27), (2.28) y (2.29) se obtienen los valores articulares correspondientes para cada posición que forma las trayectorias definidas en el punto anterior. Para el caso de las velocidades y aceleraciones se aplican la inversa de las matrices Jacobianas de velocidades y aceleraciones correspondientes a las ecuaciones 2.13, 2.14.

Una vez calculados los valores de aceleración articulares estos se comparan con los límites físicos del motor y los límites del criterio de estabilidad; en caso de que estén dentro de los rangos el caminado sintetizado será estable, en caso contrario se tendrá, que modificar algunos de los parámetros de caminado.

#### Capitulo 4) Referencias

- [1] [Saunders, J.B., Inman, V.T., & Eberhart, H.D. \(1953\). The major determinants in normal and pathological gait. Journal of Bone and Joint Surgery, 35A, 543-558.](#)
- [2] Daniel T. H. Lai, Rezaul K. Begg, and Marimuthu Palaniswami, Computational Intelligence in Gait Research: A Perspective on Current Applications and Future Challenges, IEEE transactions on information technology in biomedicine, vol. 13, no. 5, september 2009
- [3] Sara Cuccurullo, Physical Medicine and Rehabilitation Board Review. New York: Demos Medical Publishing; 2004. Cap 6 pp 457
- [4] Kuo, A. D., Donelan, J. M., and Ruina, A. (2005) Energetic consequences of walking like an inverted pendulum: Step-to-step transitions. Exercise and Sport Sciences Reviews, 33: 88-97.

# Capítulo 5

## Algoritmos de control

### Introducción

La finalidad de un algoritmo de control es forzar a un sistema a comportarse de una manera deseada. Para lograr esto generalmente se utilizan los modelos del sistema que establecen la relación entre las características cuyo comportamiento se desean forzar y las características que podemos modificar o cuantificar. Como ya se ha explicado, estos modelos son aproximaciones del sistema real porque siempre existirán diferencias entre ambos. Estas diferencias provocarán que una acción en el modelo desencadene un comportamiento diferente al desencadenado por la misma acción sobre el sistema real. Todas estas diferencias y características no consideradas en el modelo se denominan perturbaciones y se busca que las técnicas de control implementadas puedan absorber o contrarrestar la mayor cantidad de perturbaciones posibles.

Cuando se utilizan los criterios de puntos de referencia en el suelo para asegurar la estabilidad del caminado en un robot la variable a forzar es la posición del punto de referencia seleccionado, *ZMP*, *FRI*, *MC*, etc. Lo más común es definir una posición deseada para el punto de referencia durante toda la secuencia del paso, creando una trayectoria deseada para este punto. De esta manera es posible definir el problema de control como un problema de seguimiento de trayectoria donde el estado, la posición del punto de referencia, depende directamente de la dinámica del robot, así como de los valores de posición, velocidad y aceleraciones articulares. Esta dinámica se encuentra predefinida por los parámetros de caminado, como ya se explicó en el capítulo anterior, los valores articulares de posición son definidos por la trayectoria espacial de cada una de las articulaciones y por los parámetros geométricos del caminado, altura de paso, longitud de paso, etc. Mientras que las velocidades articulares son definidas por los parámetros de velocidad del caminado. Dejando como únicas variables de control las aceleraciones articulares.

Aún con buena parte de la dinámica predefinida por los parámetros de caminado, el modelo dinámico del robot resulta ser el modelo de un sistema complejo y altamente acoplado, por lo cual algunos investigadores han optado por desarrollar algoritmos de control para una sola variable articular o bien, en el mejor de los casos, para algunas articulaciones de la pierna pero siempre dejando a un lado el efecto producido por los movimientos de las demás partes del cuerpo como son el tronco y los brazos. Estos métodos son clasificados bajo el título de algoritmos de dinámica individual. Mientras que los pocos que consideran la interacción de otras partes del cuerpo son denominados algoritmos de dinámica cooperativa. Como ejemplos de dinámica individual tenemos los trabajos de las referencias de [1] a [5] donde se aplican diferentes técnicas de control para definir la acción sobre las articulaciones que forman parte únicamente de la pierna. Para el caso de la dinámica cooperativa en [6] se obtiene un



modelo de la dinámica del robot con el cual, a través de un método iterativo, se determina la acción de control sobre el tronco del robot.

Para el caso de esta tesis se ha optado por 2 algoritmos de control; los cuales se presentan a continuación:

## 5.1 Algoritmo de control 1: Momentos lineal y angular en el tronco del robot

El primer algoritmo de control puede ser considerado de dinámica cooperativa o de dinámica individual, dependiendo de la forma en que sea utilizado. Este algoritmo está basado en la modificación de los momentos angular y lineal que actúan sobre el robot a partir del control de las aceleraciones articulares. Esta variación en los momentos puede lograrse mediante el efecto de las articulaciones en la pierna de apoyo únicamente, (dinámica individual). O bien, puede lograrse a través de la acción en conjunto de las articulaciones en la pierna y la cadera, (dinámica cooperativa). El algoritmo busca lograr que el momento angular se elimine y el momento lineal se reduzca eventualmente dentro de valores definidos que aseguren la estabilidad del robot.

El momento lineal  $P$  o momento translacional de un cuerpo se define como el producto de la masa  $m$  por la velocidad  $v$  de este cuerpo  $P=mv$ . De forma análoga el momento angular de un cuerpo se define como el producto vectorial entre el radio de giro  $r$  y la velocidad  $v$  escalada por la masa  $m$ :

$$L=r \times mv \quad (5.1)$$

Lo que es igual al producto entre la velocidad angular del cuerpo  $\omega$  por su momento de inercia  $I$ .

$$L = I\omega. \quad (5.2)$$

La variación de estos parámetros respecto del tiempo establece la fuerza lineal  $F$  y el par  $\tau$  que actúan en el robot.

$$\frac{dP}{dt} = m \frac{dv}{dt} = F \quad \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = \tau \quad (5.3)$$

A partir del análisis del equilibrio en los pares que actúan sobre el robot, sin considerar la acción de la perturbación  $U$  ilustrada en la figura 5.1, se plantean las siguientes ecuaciones que describen la posición del  $ZMP$ :

$$r_2 \times R.S. = \dot{L}_{CM} + r_1 \times ma \quad (5.4)$$

Donde  $r_2$  es el vector de posición que va desde el punto arbitrario  $o$  respecto el cual se calcularan los pares del robot al  $ZMP$ ,  $R.S.$  es la fuerza de reacción ejercida por el suelo,  $\dot{L}_{CM}$  es el par total que actúa en el centro de masas del robot,  $r_1$  es el vector de posición que va desde el punto arbitrario al centro de masas del robot,  $a$  es la aceleración total que actúa en el centro de masas, que de manera explícita corresponde a la sumatoria de la aceleración generada por los movimientos articulares  $a_{CM}$  y la aceleración gravitacional  $g$ .

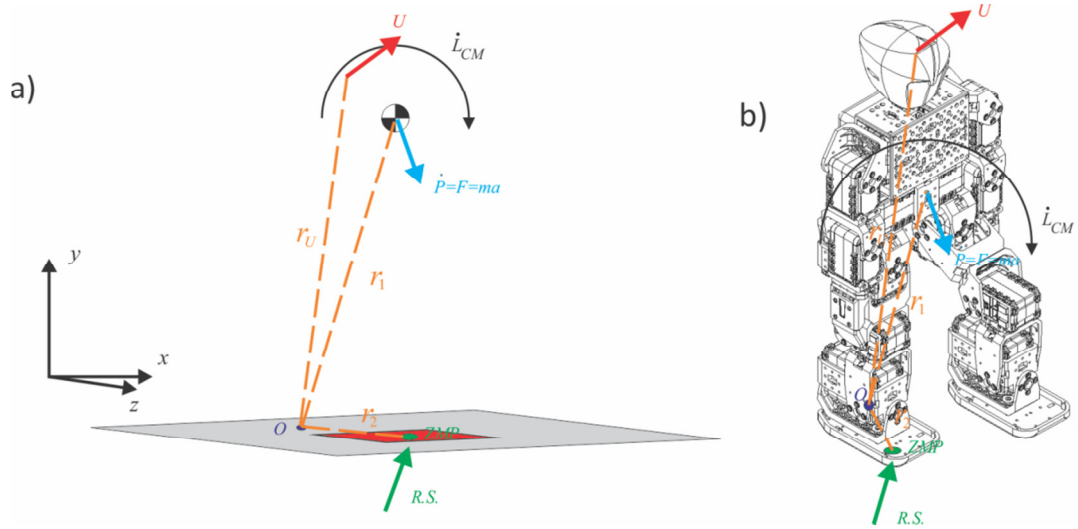


Fig. 5.1. a) DCL del robot en una pose en fase de apoyo simple, b) ubicación de las fuerzas y pares que actúan en el robot.

Como únicamente los pares generados alrededor de los ejes  $x$  y  $z$  pueden provocar la caída del robot se incluye el vector unitario  $N_s = (010)$ , que es normal al suelo, para eliminar los momentos que actúan alrededor del eje  $y$  de la ecuación vectorial (5.4). Con lo cual obtenemos la ecuación que describe la posición del ZMP en función de los momentos que actúan en el robot:

$$r_2 = \frac{N_s \times (\dot{L}_{CM} + r_1 \times m(a_{CM} - g))}{N_s \cdot R.S.} \quad (5.5)$$

El efecto de una perturbación  $U$  aplicada sobre el robot sobre la posición del ZMP puede incluirse en el modelo como sigue:

$$r_2 = \frac{N_s \times (\dot{L}_{CM} + r_1 \times m(a_{CM} - g) + r_U \times U)}{N_s \cdot R.S.} \quad (5.6)$$

Donde  $r_U$  es el vector de posición del punto donde actúa la perturbación con respecto al punto de referencia y  $U$  es el vector de fuerza de la perturbación.

El problema del movimiento en  $R^3$  del robot puede descomponerse en 2 problemas de movimiento en  $R^3$ , lo cual simplifica mucho el análisis.

A partir del análisis del equilibrio en los momentos generados sobre el robot alrededor del eje  $z$  ilustrados en la figura 5.2 es posible escribir la ecuación de posición del ZMP en el eje  $x$ :

$$r_{2x} = \left( r_{1x}(\dot{P}_y + mg) + r_{Ux}U_y + (\dot{L}_{CM} + r_{1y}\dot{P}_x + r_{Uy}U_x) \right) \frac{1}{U_y + \dot{P}_y + mg} \quad (5.7)$$

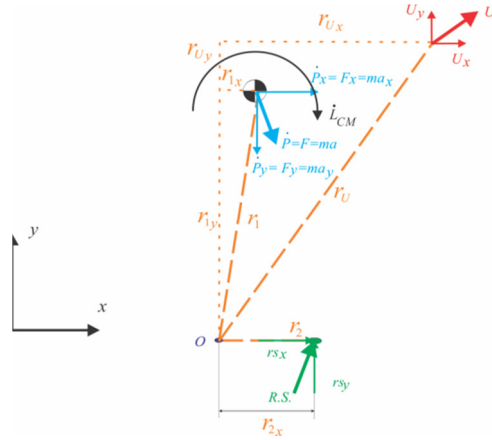


Fig. 5.2. Plano xy del DCL del robot en una pose en fase de apoyo simple ilustrado en la figura 5.1

La ecuación (5.7) representa la relación entre la variable a controlar  $r_{2x}$  que corresponde a la posición del sobre el eje  $x$  y las variables de control  $\dot{L}_{CM}$  y  $\dot{P}$  las cuales dependen directamente de la dinámica del robot que se encuentra definida por los vectores de posiciones, velocidades y aceleraciones angulares  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ . La relación entre los momentos del robot y las variables articulares puede ser descrita de forma general a partir de la definición de los momentos lineal y angular como sigue:

$$P_{CM} = (\sum_{i=1}^n m_i j_{vi}) \dot{q} \quad (5.8)$$

$$L = (\sum_{i=1}^n I_i j_{\omega i}) \dot{q} \quad (5.9)$$

Donde  $m_i$  es la masa,  $j_{vi}$  es la matriz jacobiana de velocidades lineales ( $3 \times n$ ),  $I_i$  es el momento de inercia y  $j_{\omega i}$  es la matriz jacobiana de velocidades angulares todos del  $i$  esimo elemento que conforma la cadena cinemática desde el pie hasta el CM de todo el robot. De manera matricial las ecuaciones (5.8) y (5.9) pueden expresarse como:

$$P_{CM} = A(q) \dot{q} \quad (5.10)$$

$$L = D(q) \dot{q} \quad (5.11)$$

Donde  $A(q)$  y  $D(q)$  son matrices inerciales por lo tanto su derivada respecto el tiempo existe siempre [7] y la derivada respecto al tiempo de las ecuaciones 5.10 y 5.11 es:

$$\dot{P}_{CM} = A(q) \ddot{q} + \dot{A}(q, \dot{q}) \dot{q} \quad (5.12)$$

$$\dot{L} = D(q) \ddot{q} + \dot{D}(q, \dot{q}) \dot{q} \quad (5.13)$$

Para el caso del movimiento de robot en un solo plano,  $A_x(q)$  se reduce a un vector de  $n$  elementos y  $D_x(q)$  es una matriz de  $2 \times n$ , con  $n$  siendo el número de elementos que conforma la cadena cinemática. La finalidad de la ley de control es determinar las aceleraciones articulares necesarias para obtener un  $\dot{P}_{CM}$  y  $\dot{L}$  que satisfagan las condiciones de equilibrio.

Para obtener la solución del sistema formado por las ecuaciones (5.12) y (5.13) se requiere determinar la inversa generalizada de las matrices  $A_x(q)$  y  $D_x(q)$ , pues estas matrices no son cuadradas. Buscando que la solución sea única se emplea la pseudo inversa de Moore-Penrose [8] para resolver el sistema.

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} A_x(q) \\ D_x(q) \end{bmatrix}^+ \begin{pmatrix} \dot{P}_{CM}^* - \dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} \\ \dot{L}_x^* + \dot{D}_x(q, \dot{q})\dot{q} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

La solución propuesta en la ecuación (5.14) parte de valores previamente establecidos para la fuerza  $\dot{P}_{CM}^*$ , y el par  $\dot{L}_x^*$  que actúan en el robot. Para definir estos valores describiremos el comportamiento que se desea el robot siga en la presencia de una perturbación:

Cuando el robot sufra la acción de una perturbación el movimiento de la cadera debe ser tal que la posición real del ZMP,  $r_{2r}$ , se mantenga lo más cerca posible a la posición definida originalmente,  $r_{2o}$ , y lo más alejado posible de la orilla del polígono de soporte. Esto se logra haciendo que el par generado por la perturbación no sea transmitido a la base del robot, pues de lo contrario será la reacción del suelo quien deba equilibrarlo a través de un desplazamiento del punto donde actúa esta reacción.

En la figura 5.3 se ilustra el esquema de un eslabón unido a un actuador que a su vez se encuentra empotrado al suelo. Este eslabón sufre la influencia de una fuerza  $U$  la cual generara un par  $\tau_U$  respecto al punto  $O$ . Si el actuador genera un par en la misma dirección que el par generado por la fuerza  $U$  figura 5.3 a) el par resultante que deberá equilibrar el suelo  $\tau_G$  será igual a la diferencia entre ambos pares:  $\tau_G = \tau_U - \tau_M$  por el contrario si el par generado por el actuador se opone al par generado por la fuerza  $U$  figura 5.3 b) el par resultante que deberá equilibrar el suelo es la suma de ambos pares  $\tau_G = \tau_U + \tau_M$

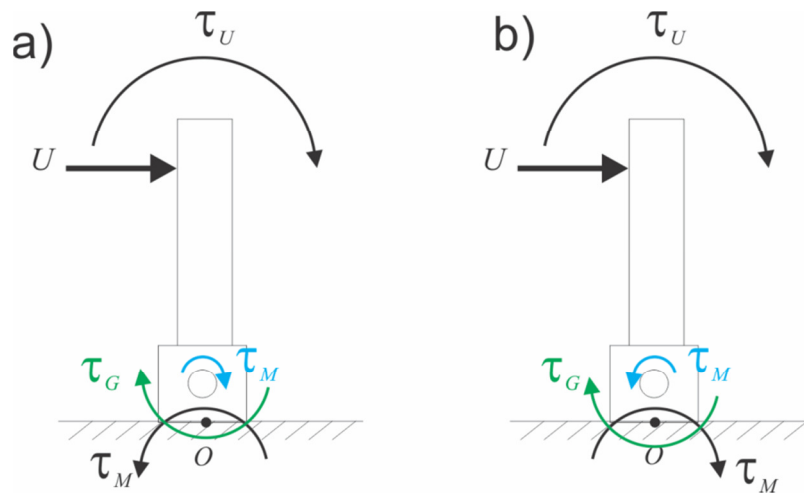


Fig. 5.3. DCL de un eslabón con el actuador empotrado al suelo bajo la influencia de una perturbación  $U$

Por lo tanto se propone que el par  $\dot{L}_x^*$  generado en el robot sea proporcional en magnitud y de igual dirección que la diferencia entre la posición del ZMP real y el ZMP deseado.

$$\dot{L}_x^* = k_1(r_{2r} - r_{2o}) \quad (5.15)$$

Por otro lado la perturbación  $U$  dotara al robot de un momento lineal lo que se verá reflejado en un aumento en la velocidad de desplazamiento del robot, mayor aceleración, luego entonces se desea que la ley de control también frene este momento lineal por lo tanto

$$\dot{P}_{CM}^* = -k_2 P_{CM} \quad (5.16)$$

Utilizando la ley de control propuesta en la ecuación (5.15), como cualquier ley proporcional, se produce un error en estado estacionario diferente de cero como se ilustra en la figura 5.4 a) donde en amarillo se grafica el valor medido del par y en rosa el valor ideal. En la simulación se incluyó una perturbación  $U$  que actúa sobre el robot para el tiempo  $t = 1$  de simulación. Si bien esta ley de control mantiene a la reacción del suelo dentro del polígono de soporte y evita que el robot caiga bajo la influencia de una perturbación. Las oscilaciones en el par se traducen en una actuación continua oscilante de los actuadores lo que se traduce en un mayor consumo energético. Mientras que utilizando una ley proporcional integral derivativa.

$$\dot{L}_x^* = k_p e + k_i \int e dt + k_d \dot{e} \quad (5.17)$$

Donde el error de seguimiento es la diferencia entre el valor real  $r_{2r}$  y el valor definido originalmente  $r_{2o}$ . Se logra que la acción proporcional derivativa regule el amortiguamiento y la frecuencia natural mientras que la acción integral elimina el error en estado estacionario dando como resultado un seguimiento más suave que equivale a un consumo energético menor como se ilustra en la figura 5.4 b) donde se utilizan los mismos colores para graficar el par ideal y el par real.

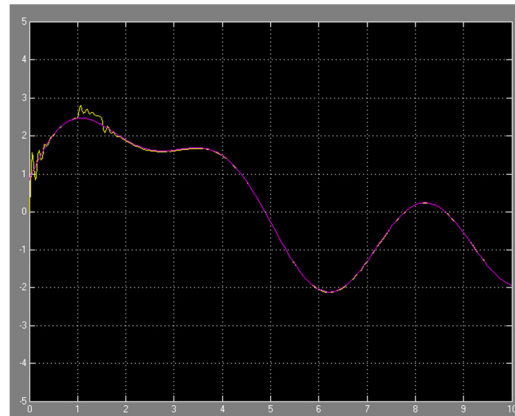
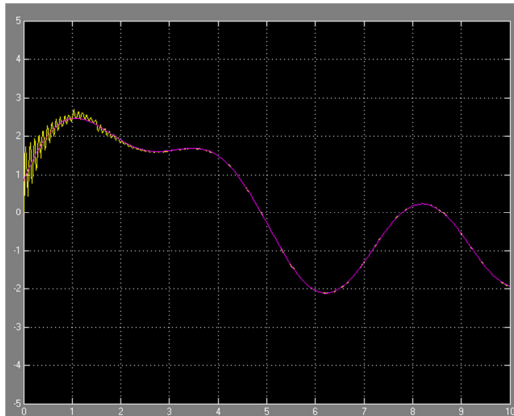


Fig. 5.4. a) Superposición de los valores del par ideal y real del tobillo para una ley de control proporcional  
b) Superposición de los valores del par ideal y real del tobillo para una ley de control PID

## 5.2 Algoritmo de control 2: actuación de articulación en la cadera

El segundo algoritmo consiste en la modificación de la dinámica del robot producida por la pierna de apoyo a partir del control del movimiento del tronco mediante la actuación de la articulación en la

cadera (dinámica cooperativa). Este algoritmo se diseña buscando un desempeño aceptable y la posibilidad de ser implementado en sistemas de bajo poder de cómputo. Para lograrlo se realizan simplificaciones que permiten linealizar el modelo de dinámica completa del robot alrededor de un punto lo que permite obtener expresiones cerradas que describen la dinámica con y sin actuación en la cadera. Estas expresiones permiten realizar cálculos fuera de línea reduciendo la carga de trabajo para el procesador del sistema donde es implementado.

En una cadena cinemática abierta los pares generados en una articulación son absorbidos por la articulación inmediata anterior y finalmente los pares generados a lo largo de toda la cadena son absorbidos por la base de la cadena.

En el caso de la pierna de apoyo de un robot son las articulaciones del tobillo quienes absorben todos los pares generados en esta. Por lo tanto, para lograr el equilibrio de los momentos, la reacción del suelo debe equilibrar el par generado sobre la articulación del tobillo; luego entonces la posición del *ZMP* está directamente relacionada con el par generado en esta articulación.

Durante el proceso de síntesis del caminado se define una órbita deseada para el punto de momento cero  $r_{2o}$ , misma que puede ser traducida a una serie de pares que actuarán en el tobillo durante toda la secuencia de movimientos necesarios para completar un paso mediante la siguiente expresión:

$$F_s \times r_{2o} = \tau_{ko} \quad (5.18)$$

Donde  $F_s$  corresponde a la reacción del suelo y  $\tau_{ko}$  es el valor deseado para el par de la articulación  $k$ . Donde  $k$  vale 15 o 17 si es la pierna izquierda la pierna de apoyo y se analiza el par generado sobre el eje  $x$  o sobre el eje  $z$  respectivamente. Mientras que  $k$  vale 16 o 18 para los mismos casos de la pierna derecha.

Los valores de  $\tau_{ko}$  constituirán la órbita de referencia que se desea el sistema siga. A partir de la lectura del par del motor en el tobillo  $\tau_{kr}$  se plantea el error de seguimiento como:

$$\Delta\tau_1 = \tau_{ko} - \tau_{kr} \quad (5.19)$$

Este valor de error o variación de los parámetros será utilizado dentro de la ley de control para determinar la acción pertinente que devuelva al estado real del robot su igualdad con la trayectoria planeada.

Para el desarrollo de la ley de control es necesario obtener una expresión que relacione el par generado en la articulación base  $\tau_{kr}$  con el movimiento producido en la articulación seleccionada de la cadena,  $\tau_{11}$  para la pierna izquierda y  $\tau_{12}$  para la derecha, pues será la acción de esta última articulación la que devuelva la estabilidad al sistema.

De manera general toda la serie de pares generados en la cadena cinemática está definida por la siguiente ecuación vectorial:

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.20)$$

Que corresponde a la notación Euler-Lagrange de la ecuación (2.25). Donde el primer valor del vector resultante corresponde al par generado en la base de la cadena

$$D_1(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+C_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}+g_1(\mathbf{q})=\tau_k \quad (5.21)$$

Con  $D_1(\mathbf{q})$  y  $C_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$  como la primer fila de las matrices  $D(\mathbf{q})$  y  $C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$  respectivamente,  $g_1(\mathbf{q})$  corresponde al primer elemento del vector  $g(\mathbf{q})$  y  $\tau_k$  es el primer elemento del vector  $\tau$ .

El modelo de la ecuación (5.21) es un modelo no lineal y altamente acoplado, además de que en ella interviene el efecto de todas las articulaciones de la cadena. Esto provoca que resolverla para una variable resulte virtualmente imposible. Sin embargo es posible aislar de esta ecuación el efecto de una sola articulación a partir de las siguientes consideraciones:

Los movimientos del robot parten de una serie de trayectorias articulares previamente definidas  $(\mathbf{q}_o, \dot{\mathbf{q}}_o, \ddot{\mathbf{q}}_o)$  las cuales definen, a partir de la substitución de esta dinámica en la ecuación (5.21), una serie de valores teóricos deseados para el par en la base de la cadena  $\tau_{ko}$ .

$$\tau_{ko}=D_1(\mathbf{q}_o)\ddot{\mathbf{q}}_o+C_1(\mathbf{q}_o,\dot{\mathbf{q}}_o)\dot{\mathbf{q}}_o+g_1(\mathbf{q}_o) \quad (5.22)$$

Cualquier otra dinámica diferente,  $(\mathbf{q}_f, \dot{\mathbf{q}}_f, \ddot{\mathbf{q}}_f)$ , a la establecida en las trayectorias articulares originales producirá un par diferente en la articulación base, sea  $\tau_{kf}$  este nuevo par definido por:

$$\tau_{kf} = D_1(\mathbf{q}_f)\ddot{\mathbf{q}}_f+C_1(\mathbf{q}_f,\dot{\mathbf{q}}_f)\dot{\mathbf{q}}_f+g_1(\mathbf{q}_f) \quad (5.23)$$

Ahora considere que esta dinámica  $(\mathbf{q}_f, \dot{\mathbf{q}}_f, \ddot{\mathbf{q}}_f)$  corresponde a la dinámica definida originalmente en las trayectorias estado definido durante la síntesis del caminado salvo una modificación en la articulación arbitraria  $s$ , es decir:

$$(\mathbf{q}_f, \dot{\mathbf{q}}_f, \ddot{\mathbf{q}}_f) = (\mathbf{q}_o+\Delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_o+\Delta\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_o+\Delta\ddot{\mathbf{q}}) \quad (5.24)$$

Donde  $(\Delta\mathbf{q}, \Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\ddot{\mathbf{q}})$  corresponde a la desviación de la dinámica original  $(\mathbf{q}_o, \dot{\mathbf{q}}_o, \ddot{\mathbf{q}}_o)$  y corresponden a 3 vectores de  $n$  elementos todos con valor 0 excepto por el elemento que corresponde a la articulación actuada,  $s$ , cuyo valor está definido por las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado:

$$\Delta q_s = \frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_s\Delta t^2, \quad \Delta\dot{q}_s = \Delta\ddot{q}_s\Delta t, \quad \Delta\ddot{q}_s = \Delta\ddot{q}_s \quad (5.25)$$

Substituyendo (5.24) en (5.23) obtenemos la siguiente expresión:

$$\tau_{kf}=D_1(\mathbf{q}_o+\Delta\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}_o+\Delta\ddot{\mathbf{q}}]+C_1(\mathbf{q}_o+\Delta\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}_o+\Delta\dot{\mathbf{q}})[\dot{\mathbf{q}}_o+\Delta\dot{\mathbf{q}}]+g_1(\mathbf{q}_o+\Delta\mathbf{q}) \quad (5.26)$$

Donde todos los términos que solo dependen de la dinámica definida  $(\mathbf{q}_o, \dot{\mathbf{q}}_o, \ddot{\mathbf{q}}_o)$  pueden ser calculados sin problemas dejando indeterminados únicamente los términos que dependen de la dinámica de la articulación actuada  $s$ . Como la dinámica de la articulación  $s$  está definida por las igualdades (5.25) la ecuación (5.26) dependerá únicamente de la variable  $\Delta\ddot{q}_s$ , aun así muchos de los términos donde

aparece esta variable son no lineales de la forma  $\sin(c \pm \frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2)$  o  $\cos(c \pm \frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2)$  con  $c$  como los valores originales del estado  $o$  conocido. Por lo tanto para separar los términos de la dinámica original y los de la desviación se emplean las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sin(c \pm \frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2) = \sin(c)\cos(\frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2) \pm \cos(c)\sin(\frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2) \quad (5.27)$$

$$\cos(c \pm \frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2) = \cos(c)\cos(\frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2) \mp \sin(c)\sin(\frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2) \quad (5.28)$$

Finalmente se aplica una linealización de las funciones trigonométricas donde aparece el término  $\frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2$  al rededor del punto  $\Delta\ddot{q}_k$  a partir de la siguiente consideración:

Cuando una articulación se encuentra en un estado y se desea generar un cambio en este estado la mayor fuerza, en este caso par, se aplica inicialmente para vencer la inercia del sistema. Es este par inicial el que se desea utilizar para estabilizar al robot pues una vez que se ha vencido la inercia el par generado por la articulación se reduce considerablemente. Este comportamiento se presenta también en el ser humano bajo la presencia de una perturbación, un empujón. El ser humano tratara de volver al equilibrio con movimientos rápidos, con mucha aceleración, y de duración muy corta por lo tanto considerar a  $\Delta t$  como un valor muy pequeño permite hacer las siguientes linealización alrededor del punto descrito:

$$\sin(\frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2) = \frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2 \quad (5.29)$$

$$\cos(\frac{1}{2}\Delta\ddot{q}_k\Delta t^2) = 1 \quad (5.30)$$

Aplicando estas simplificaciones al modelo de la ecuación (5.26) es posible determinar el valor de la variable  $\Delta\ddot{q}_k$  para un par  $\tau_{1f}$  que devuelva al *ZMP* dentro del polígono de soporte. Aplicando la ecuación (5.25) se determina la dinámica de la articulación  $k$  que producirá este par.

### 5.3 Características de los algoritmos de control

El primer algoritmo parte de la solución del sistema representado por las ecuaciones (5.12 y 5.13) mediante el cálculo de las pseudoinversas de las matrices  $A_x(\mathbf{q})$   $D_x(\mathbf{q})$ , para todos los valores articulares  $\mathbf{q}$  que generan el paso del robot en la presencia de una perturbación. La forma de calcular estas pseudoinversas es a través de algoritmos iterativos que constituyen un alto consumo de recursos de cómputo. Dentro de las especificaciones del robot bioloid (Capítulo 6) se puede apreciar que éste no cuenta con un procesador y recursos de programación necesarios para aplicar este tipo de cálculos y obtener un resultado en un tiempo aceptable. Por lo tanto este algoritmo se implementó únicamente en simulación en una computadora de escritorio donde se tiene mayor poder de cómputo y recursos de programación para su implementación.

En el caso del segundo algoritmo, dentro de la síntesis del caminado se definieron trayectorias articulares para toda la cadena cinemática que forma la pierna de apoyo, si bien el modelo representado por la ecuación (5.26) permite aplicarse en cualquier articulación de la cadena, buscando similitud con el comportamiento humano la acción de control se realizará en la articulación  $J_{11}$  de la cadera.



Además de esto, el contar con trayectorias definidas de manera fuera de línea permite realizar cálculos parciales de la ecuación (5.26), lo que reduce aún más la carga computacional que implica la implementación de este algoritmo.

## Capítulo 5) Referencias

- [1] L.Jalics, H.Hemami and Y.F.Zeng, Pattern Generation Using Coupled Oscillators for Robotic and biorobotic Adaptive Periodic Movement, Proc. of the 1997 ICRA, pp.179-184,1997.
- [2] J. Pratt and G. Pratt, Intuitive Control of a Planar Bipedal Walking Robot, Pm. of the 1998 ICRA, pp. 2014-2021,1998.
- [3] M. Garcia, A. Chatterjee and A. Ruina, Speed, Efficiency and Stability of Small-Slope 2-D Passive Dynamic Bipedal Walking, Proc. of the 1998 ICRA, pp. 2351-2356,1998.
- [4] Y. Fujimoto, S. Obata and A. Kawamura, Robust Biped Walking with Active Interaction Control between Foot and Ground, Proc. of the 1998 ICRA, pp. 2030-2035,1998.
- [5] K. Hirai, M. Hirose, Y. Haikawa and T. Takenaka, The Development of Honda Humanoid Robot, Proc. of the 1998 ICRA, pp.1321-1326,1998.
- [6] Jin7ichiY amaguchi, Eiji Soga, Sadatoshi Inoue, Atsuo Takanishi Development of a Bipedal Humanoid Robot Control Method of Whole Body Cooperative Dynamic Biped Walking Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics & Automation Detroit, Michigan May 1999
- [7] S. Kajita, F. Kanehiro, K. Kaneko, K. Fujiwara, K. Harada, K. Yokoi, and H. Hirukawa, Resolved Moment Control: Humanoid Motion Planning Based on the Linear and Angular Momentum, in International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2003, Las Vegas, NV, USA, pp. 1644- 1650.
- [8] Arthur A. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse, 1972 elsevier, academic press inc. New York. Chapter III pp15-30

# Capítulo 6

## Caracterización del robot humanoide bioloid

### Introducción

El robot humanoide Bioloid consiste en un conjunto de piezas preformadas de plástico y servomotores unidos entre sí para formar los diferentes eslabones que constituyen al robot. Las piezas básicas así como sus dimensiones, tensores de inercia, posición del centro de masa y masa total se ilustran en el anexo 1. La constitución elemento por elemento del robot así como un desglose por eslabones se ilustran en la figura 6.1.

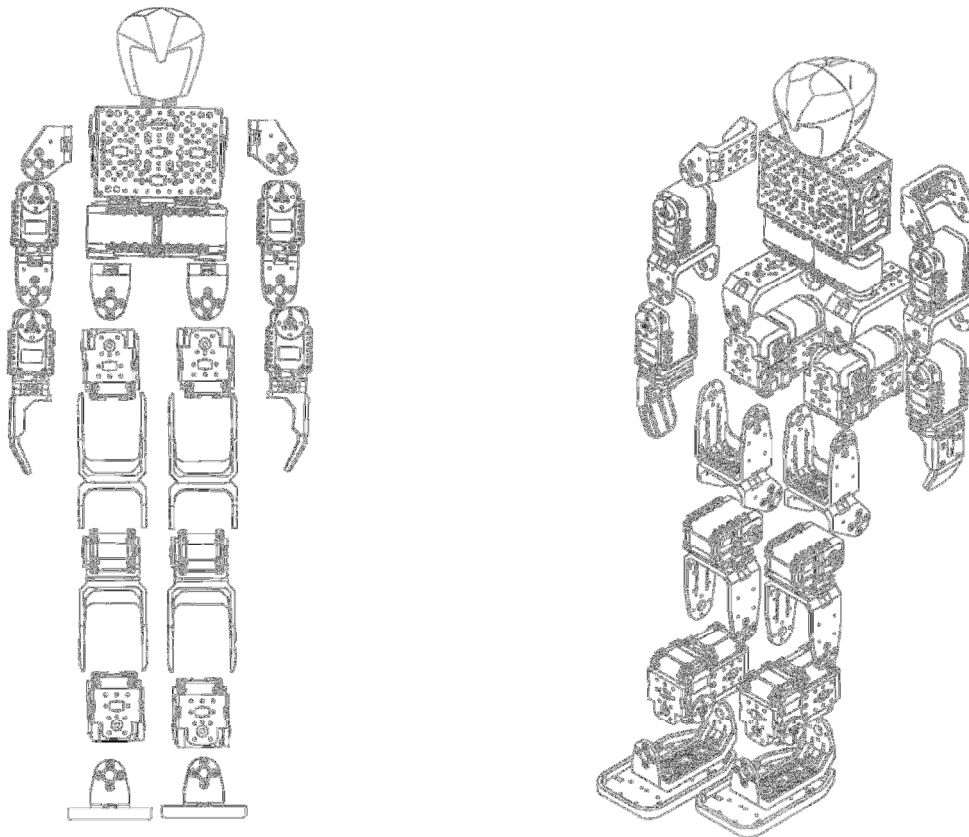


Fig. 6.1 Desglose general del robot completo por eslabones

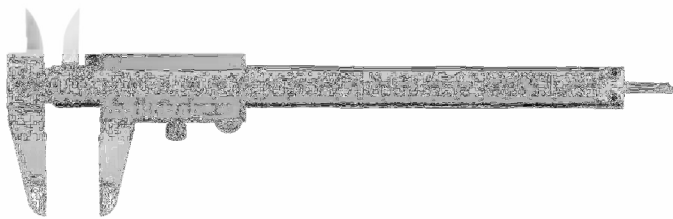
El primer paso para la caracterización del robot fue la identificación de todas las piezas básicas que conforman al robot la medición de sus parámetros físicos, dimensiones y masa, y el cálculo de los parámetros inerciales Tensor de inercia y ubicación del centro de masas. Toda esta información se encuentra descrita en los dibujos del anexo 1.

Para la medición de las dimensiones geométricas se empleó un vernier marca mitutoyo serie 522, con una resolución de 0.05mm.

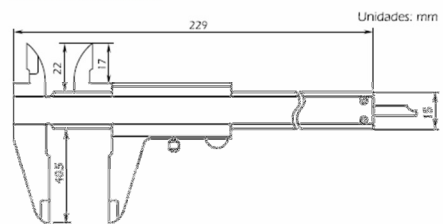
## Calibrador Vernier Modelo Diamante

SERIE 522

Libre de Error de Paralaje



Dimensiones



### ESPECIFICACIONES

Intervalo		Código	Lectura del vernier		Error
Escala inferior	Escala superior	No.	Escala inferior	Escala superior	Instrumental
0 - 150mm	0 - 6pulg	522-601	0.05mm	1/128pulg	±0.05mm

Fig. 6.2 Especificaciones técnicas del vernier

Mientras que para la medición de la masa se empleó una báscula electrónica marca CAMRY modelo EK5055 con resolución de 1g y capacidad máxima de 5Kg.

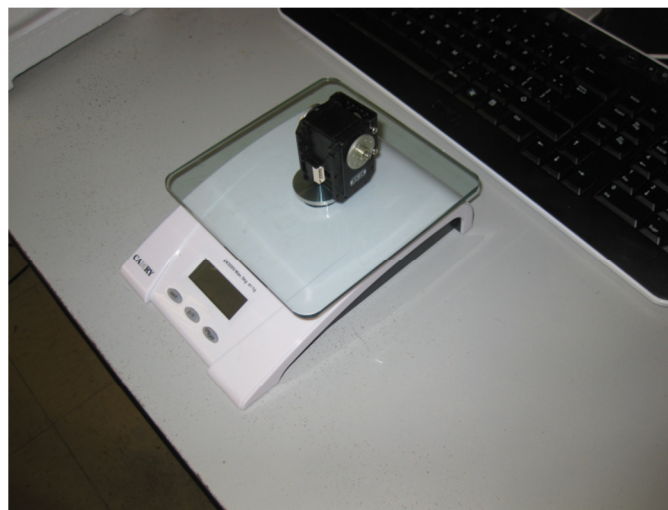
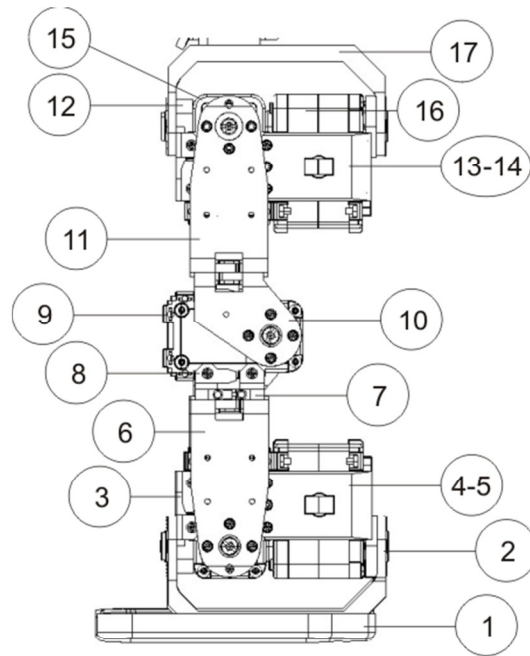


Fig. 6.3 Medición de la masa de los elementos que constituyen al robot.

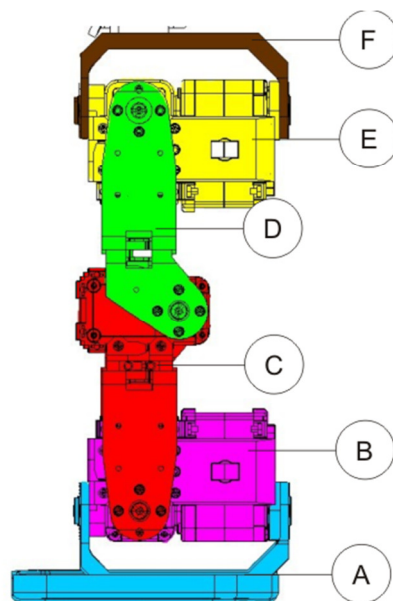
Posteriormente se dividió la constitución del robot en 2 pares de extremidades y un tronco y se identificaron los eslabones que constituyen a cada extremidad así como la identificación de las piezas que conforma a cada eslabón.

### 6.1. Constitución de las piernas

Numero	Elemento Descripción	Pierna Masa (gr)
1	P10	21
2	P3	11
3	P4	4
4	P13	3
5	P13	3
6	P8	14
7	P12	1
8	P1	3
9	AX	56
10	P5	8
11	P8	14
12	P4	4
13	P13	3
14	P13	3
15	AX	56
16	AX	56
17	P3	11
18	AX	56
19	AX	56

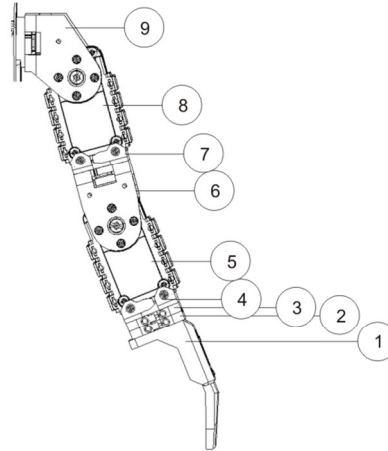


Eslabón	Elementos	Masa (gr)
A	1, 2	32
B	18, 19, 3, 4, 5	122
C	6, 7, 8, 9	74
D	10, 11	22
E	12, 13, 14, 15, 16	122
F	17	11

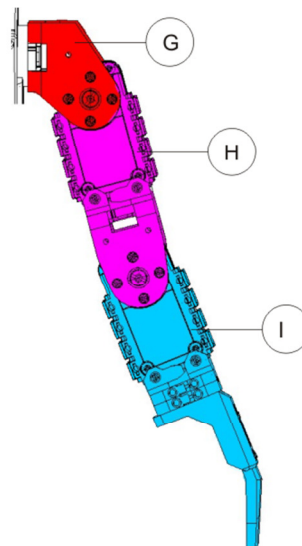


## 6.2. Constitución de los brazos

Numero	Elemento Descripción	Brazo Masa (gr)
1	P6 y P9	14
2	P12	1
3	P12	1
4	P1	3
5	AX	56
6	P7	8
7	P1	3
8	AX	56
9	P5	8

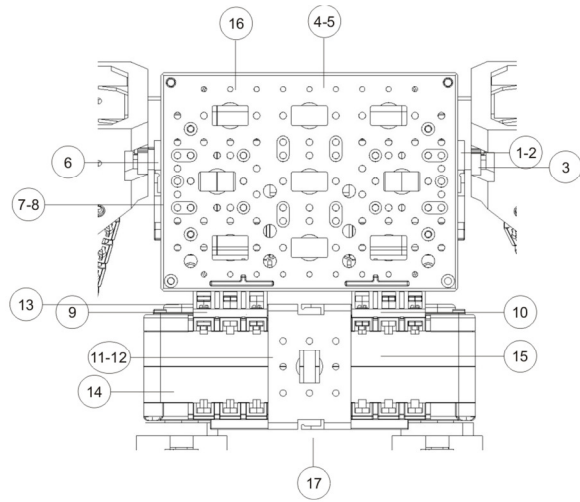


Eslabón	Elementos	Masa (gr)
I	1, 2, 3, 4, 5	75
H	6, 7, 8	67
G	9	8



### 6.3. Constitución del tronco

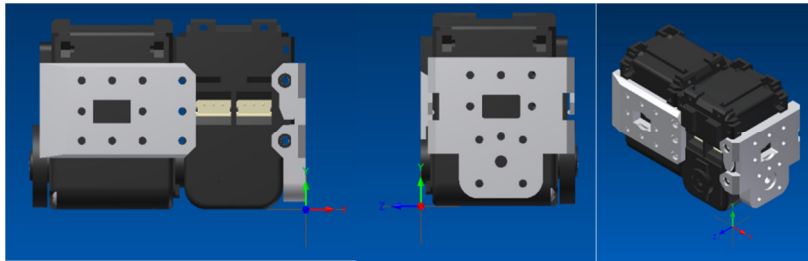
Numero	Elemento Descripción	Torso Masa (gr)
1	P13	3
2	P13	3
3	AX	56
4	P14	28
5	P15	28
6	AX	56
7	P13	3
8	P13	3
9	P16	2
10	P16	2
11	P1	3
12	P1	3
13	P11	6
14	AX	56
15	AX	56
16	CM510	53
17	Pila	98



## 6.4. Inercias

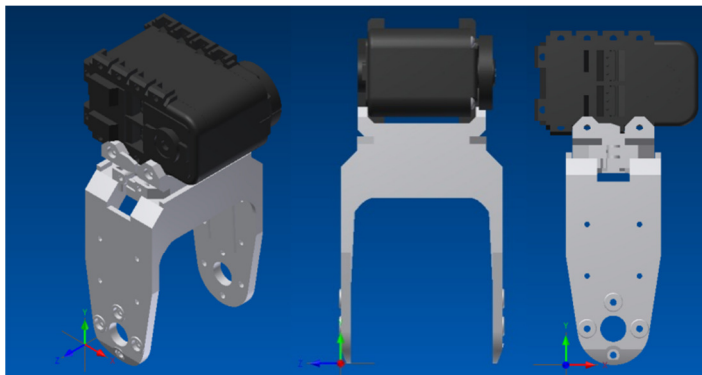
A partir de la información contenida en el anexo 1 es posible determinar el tensor de inercia de cada eslabón, así como la posición de su centro de masas, a continuación se ilustran los parámetros de dos de los eslabones que forman la pierna.

Eslabones



Tensor de inercia (Kg/mm <sup>2</sup> )		
32.679	0.25	1.083
0.25	57.115	-0.32
1.083	-0.32	67.26
Centro de masas (mm)		
X	-35.119	
Y	24.109	
Z	-19.493	

Masa 120g



Tensor de inercia (Kg/mm <sup>2</sup> )		
40.678	-0.8	0.249
-0.8	23.513	0.482
0.249	0.482	40.566
Centro de masas (mm)		
X	76.547	
Y	16.033	
Z	-24.692	

Masa 74g



## 6.5. Características eléctricas y electrónicas

Los actuadores del robot consisten en motores AX-12 de la marca robotis cuyas especificaciones técnicas se encuentran en el manual de usuario [1]. Este tipo de motores cuentan con un sistema de instrumentación integrada que permite efectuar lecturas de una gran variedad de parámetros como son la posición, la velocidad, la aceleración, el par generado, temperatura y voltaje consumido entre otras cosas. Además permite efectuar control del motor a partir del par generado o bien realizar el control a partir de la posición velocidad y aceleración angular deseada. Todas estas características permiten implementar los algoritmos de control descritos en la tesis.

El controlador del robot consiste en un controlador comercial CM510 de robotis el cual internamente cuenta con un micro controlador ATMEGA 2561 con una memoria de programa flash de 256K bytes y una frecuencia de 16Mhz.

## Capítulo 6) Referencias

- [1] <http://robosavvy.com/docs/Bioloid/AX-12%28english%29.pdf>

# Capítulo 7

## Implementación.

El caminado propuesto en esta tesis se ha implementado en simulación utilizando el software Webots® y de manera experimental utilizando el robot Bioloid en su presentación premium.

### 7.1. Implementación en simulación.

#### 7.1.1 Construcción del modelo para simulación

El software Webots es un ambiente de simulación que utiliza VRML para el desarrollo visual y geométrico del modelo así como ODE, Open Dynamics Engine, para la solución de la dinámica.

Para la simulación de un robot es necesario construir un “mundo virtual” o *world* término con el que se define el ambiente de trabajo del robot. En dicho mundo virtual se definen parámetros como aceleración de la gravedad, resistencia física del ambiente, fricción entre articulaciones, la dureza de los materiales etc. Es dentro de este mundo donde se construyen los elementos que constituyen al robot y/o que interactúan con él. Para la construcción de los elementos se cuentan con los comandos básicos de VRML, figuras geométricas básicas y la opción de importar elementos en formato VMRL elaborados en cualquier otro software.

Con la finalidad de desarrollar un modelo visualmente similar al robot real se construyó su modelo geométrico, CAD, utilizando el software Inventor de Autodesk.

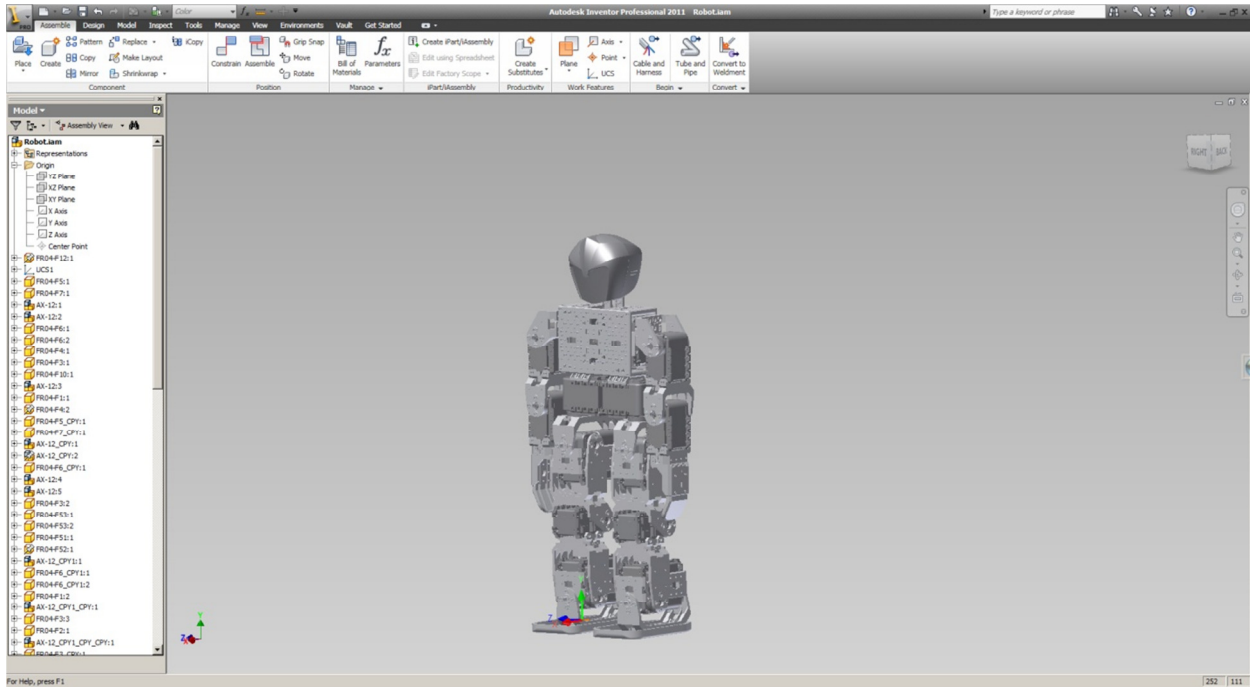


Fig. 7.1 Modelo geométrico construido en Inventor

Posteriormente, la información generada por el programa CAD se convirtió al formato VRML2.

La conversión a este formato puede hacer pieza a pieza o a través de los ensambles formados en Inventor. La forma más conveniente de hacerlo, considerando la manera de construir el robot en Webots es realizar la conversión eslabón por eslabón.

A partir de la información en formato VRML2 se importan los elementos dentro del espacio de trabajo de Webots y se definen las características físicas de cada eslabón, como masa, tensor de Inercia y posición del centro de masas.

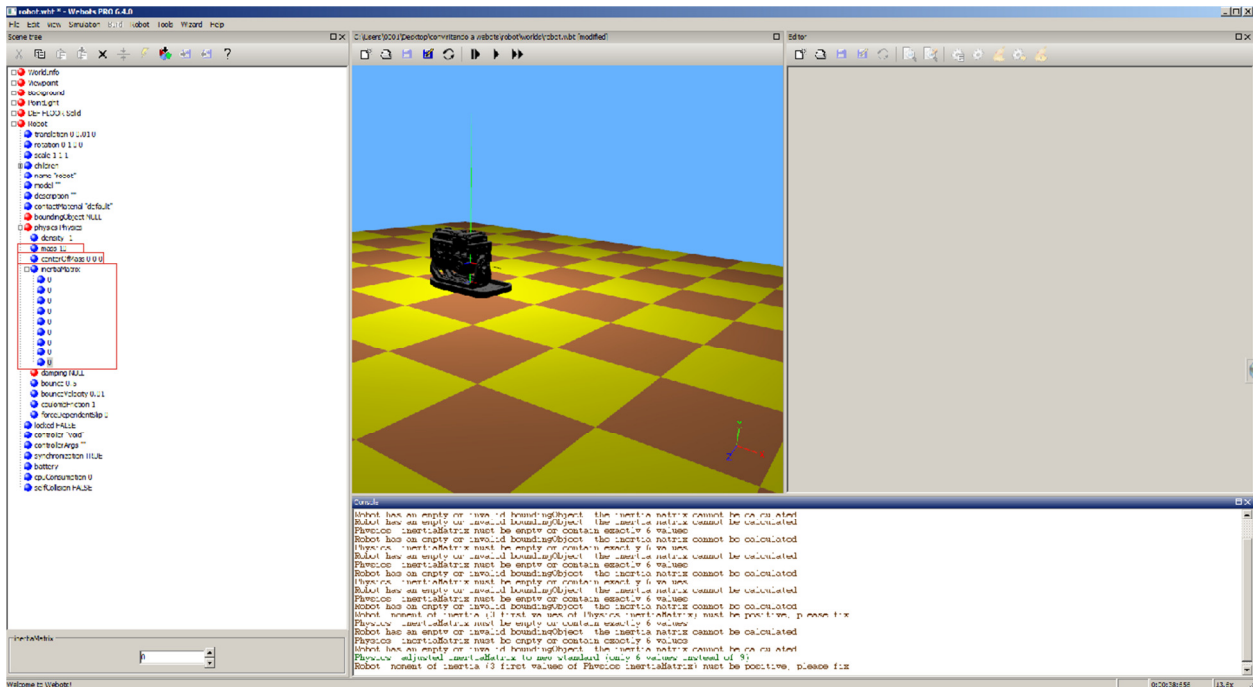


Fig. 7.2 Primer eslabón de la pierna de apoyo importado en Webots en la parte izquierda se encuentran los parámetros del modelo, masa posición del centro de masas y tensor de inercia.

Con los elementos importados de manera individual se procede a arma el robot elemento por elemento definiendo los ejes articulares, su posición dentro de cada uno de los eslabones, así como las restricciones mecánicas entre elementos.

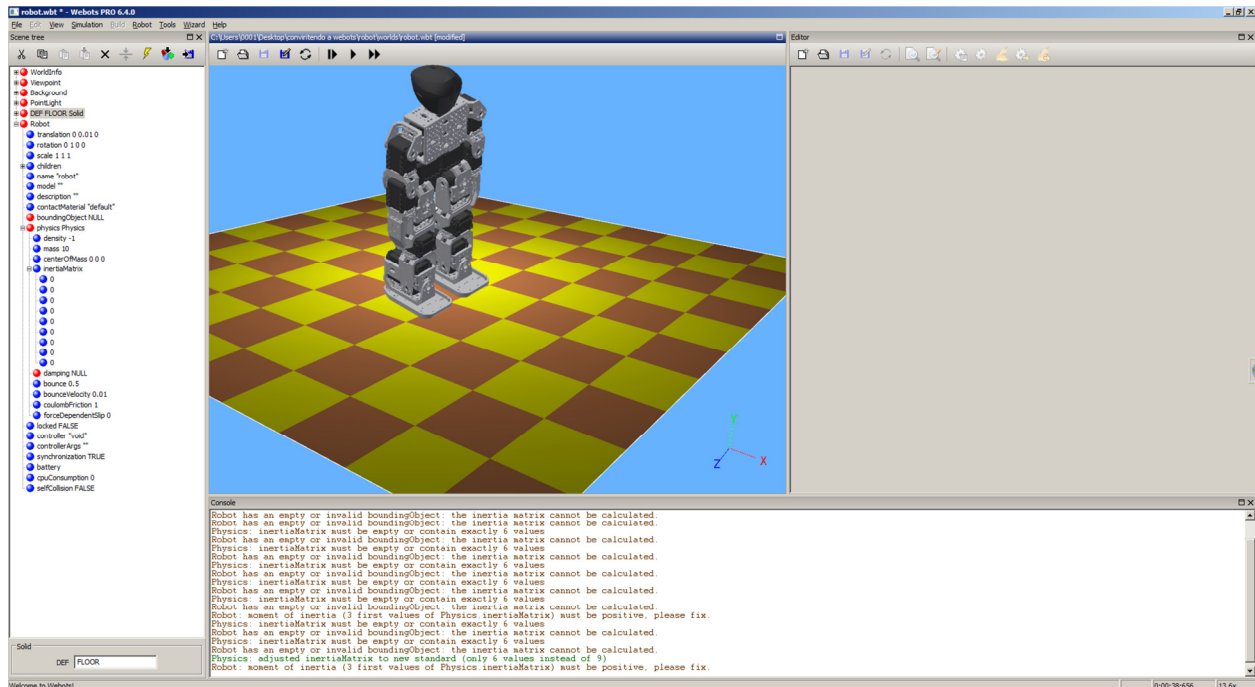


Fig. 7.3 Robot completo armado dentro del "Wolrd" de Webots®

Como ya se explicó, el primer algoritmo de control requiere de poder de computo para calcular la pseudo inversa a partir de métodos numéricos por lo cual fue únicamente implementado en simulación mientras que el segundo algoritmo si fue implementado en el robot.

Los algoritmos se implementaron aprovechando las ventajas que brinda Webots para el manejo de código en diferentes lenguajes de manera simultánea. La parte de síntesis del caminado se realizó en lenguaje C, pues el robot bioloid se programa en este lenguaje y la parte de caminado es el mismo en ambos algoritmos. Mientras que la parte de control se implementó en Matlab aprovechando las ventajas que ofrece en el manejo de matrices.

### 7.1.2 Implementación del algoritmo.

La secuencia del primer algoritmo es la siguiente:

- Definición de los valores para los parámetros de caminado

Se introducen los valores de velocidad de paso, altura de paso longitud de paso y se genera la trayectoria del ZMP mediante el criterio de estabilidad ya definido.

- Obtención de los valores articulares a partir del proceso de síntesis

Se generan las trayectorias elipsoidales de las diferentes extremidades y mediante la cinemática inversa se determinan los valores articulares correspondientes.

- Lectura de las velocidades articulares

Dentro de la simulación es posible tener lectura de los valores articulares de posición, velocidad y aceleración.

- Cálculo de los momentos del robot

A partir de las lecturas del estado del robot y de las ecuaciones (5.6) y (5.7) se determinan los momentos del robot

- Lectura del par en el tobillo del robot

El servo motor AX de robotis permite realizar una lectura del valor de par generado por éste. La cuantificación se realiza a través de una lectura de la corriente en el motor, el par está dado por el producto de esta corriente y una constante de inercias, la programación interna del servomotor realiza esta conversión por lo cual es posible contar con un valor numérico que cuantifica el par de manera directa.

- Identificación de la posición del ZMP

Con el conocimiento de la masa de los elementos del robot así como de su aceleración se determina la reacción generada por el suelo y, a partir del valor del par generado en el tobillo, es posible identificar la posición donde la reacción del suelo debe de actuar, posición del ZMP.

- Comparación entre ZMP

Durante la síntesis del caminado se definió una posición deseada del ZMP mientras que al obtener una lectura del par en el tobillo se identifica la posición real del ZMP, la diferencia entre estos valores definirá la acción de control.

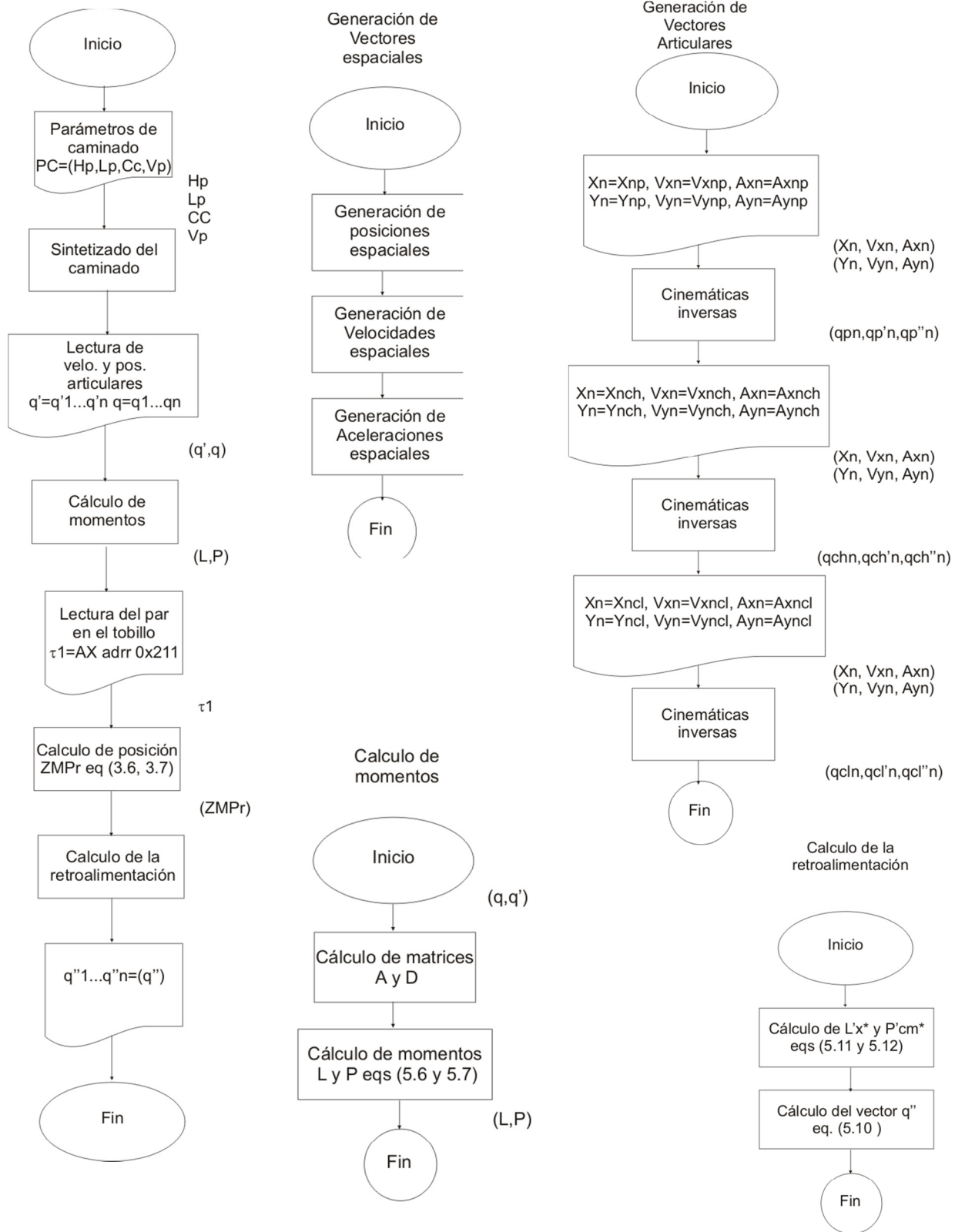
- Generación de la retroalimentación necesaria para corregir la posición del ZMP

Mediante las ecuaciones (5.11) y (5.12) se determinan los valores articulares necesarios para corregir la posición del ZMP.

- Solicitar nuevos valores articulares al robot.

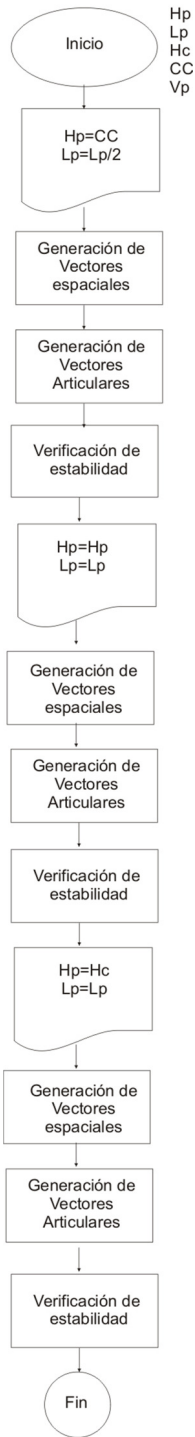
Se envían las consignas al robot de los nuevos valores articulares deseados.

Diagrama de flujo.



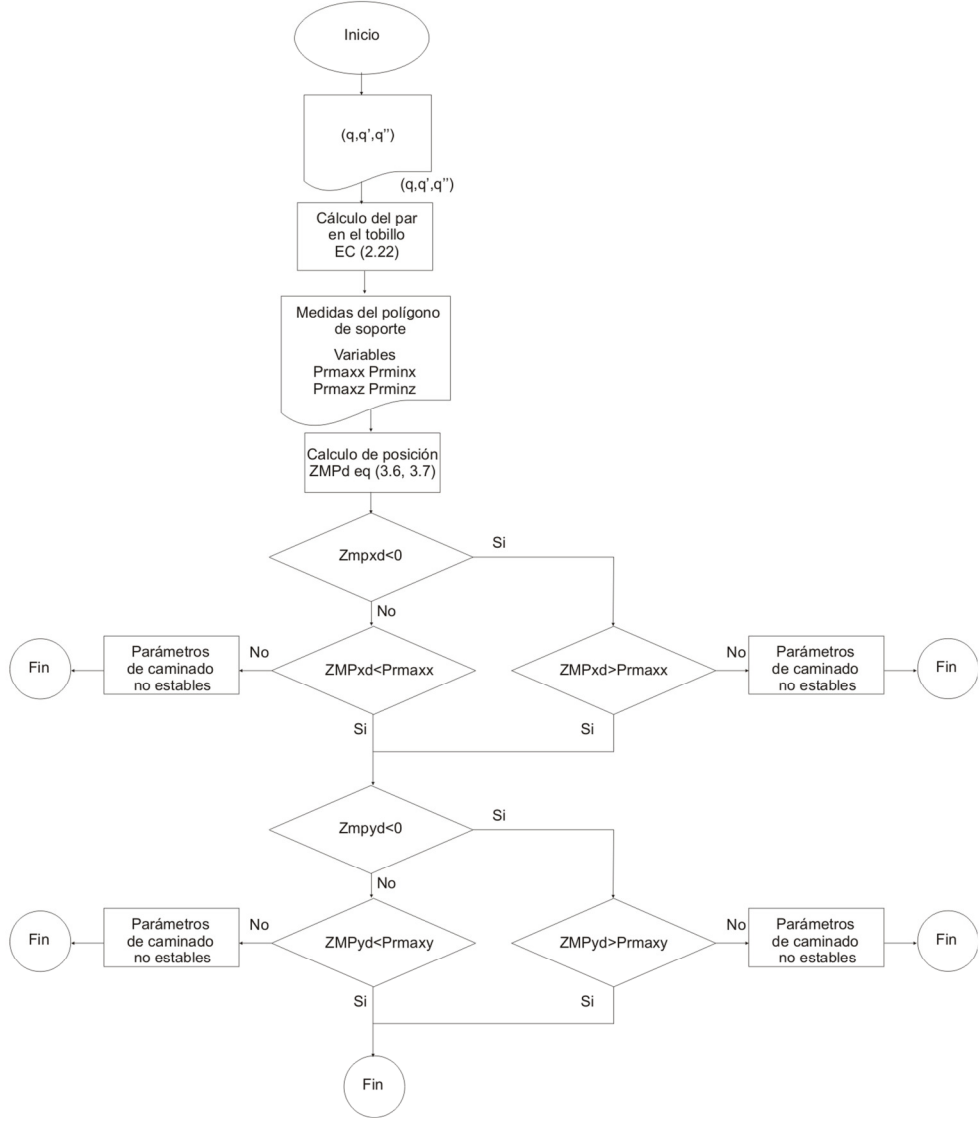


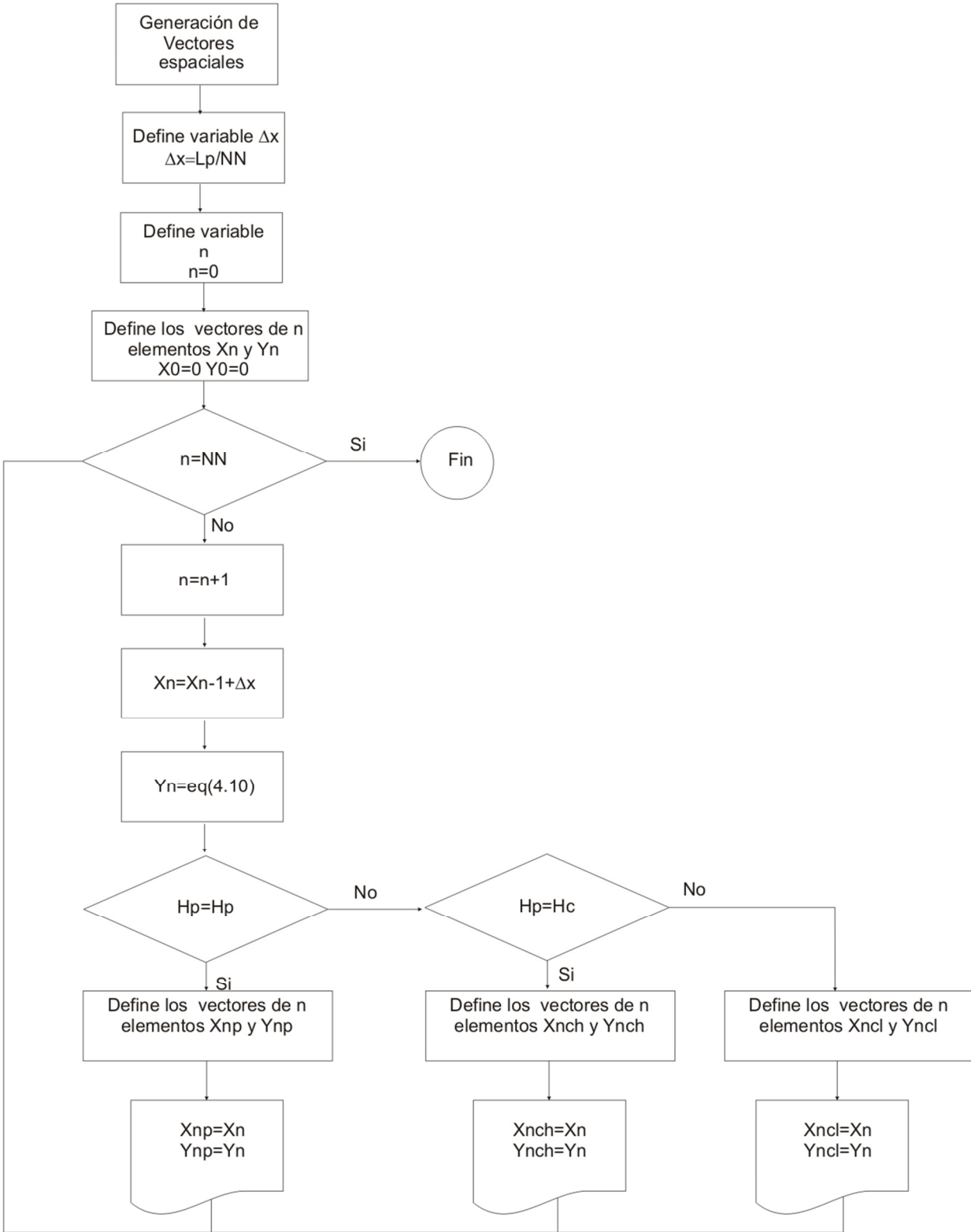
Sintetizado del caminado

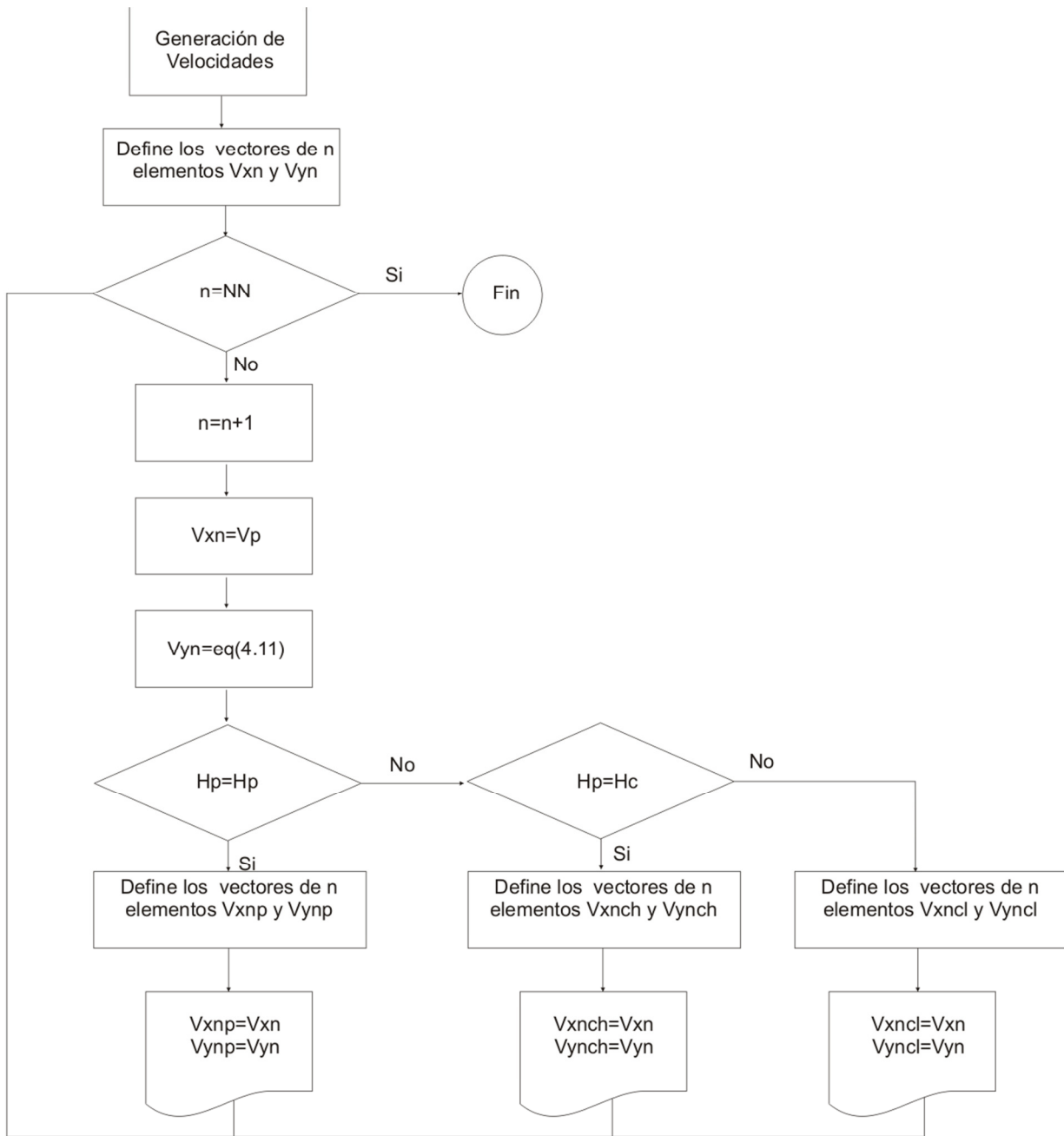


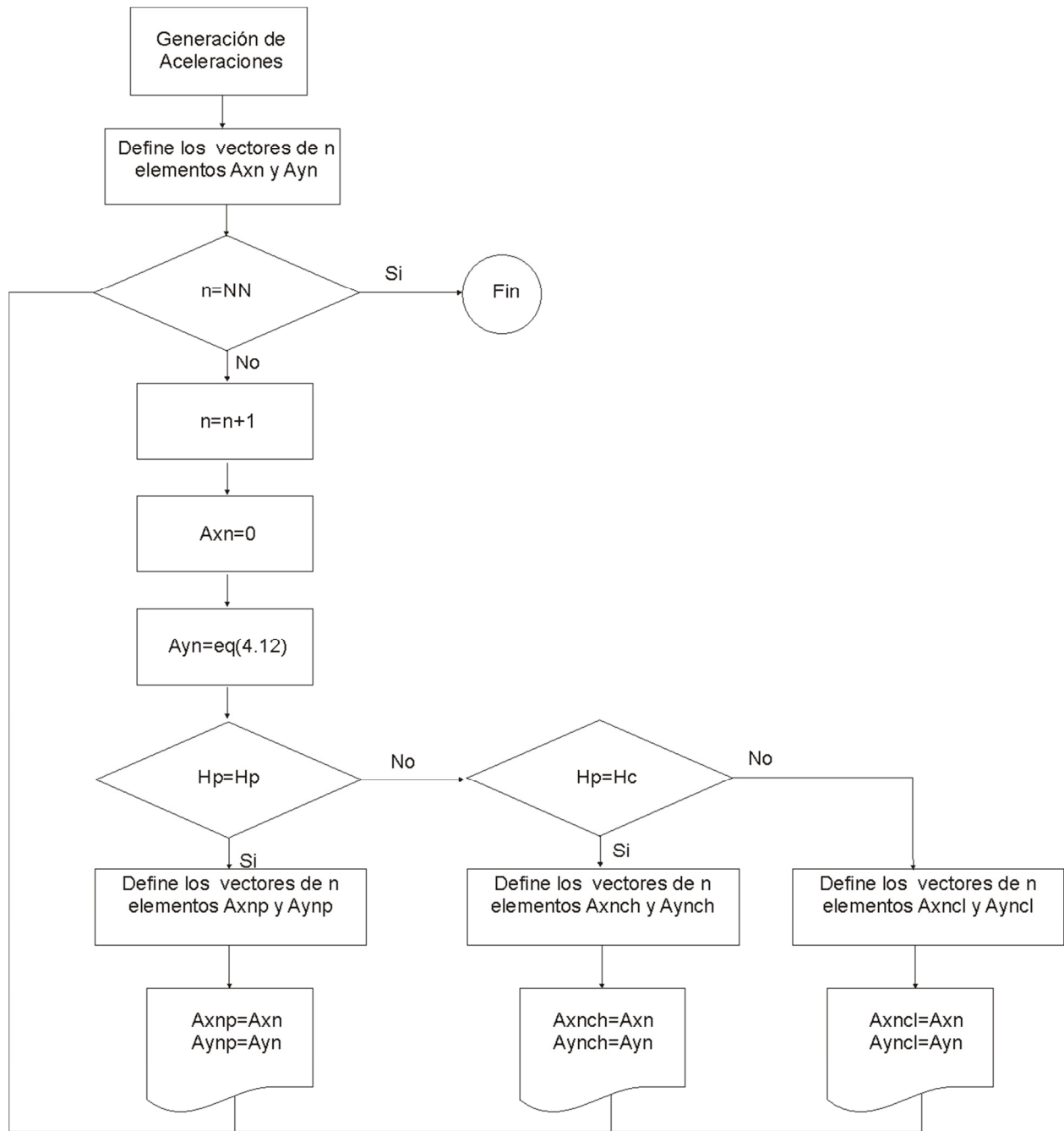
Hp  
Lp  
Hc  
CC  
Vp

Verificación de estabilidad









La secuencia del algoritmo implementado en el humanoide Bioloid es la siguiente.

- Definición de los valores para los parámetros de caminado

Se introducen los valores de velocidad de paso, altura de paso longitud de paso y se genera la trayectoria del ZMP mediante el criterio de estabilidad ya definido.

- Obtención de los valores articulares a partir del proceso de síntesis

Se generan las trayectorias elipsoidales de las diferentes extremidades y mediante la cinemática inversa se determinan los valores articulares correspondientes.

- Lectura del par en el tobillo de la pierna de apoyo

El servo motor AX permite realizar una lectura del valor de par generado por este, la cuantificación se realiza a través de una lectura de la corriente en el motor, el par está dado por el producto de esta corriente y una constante de inercias, la programación interna del servomotor realiza esta conversión por lo cual es posible contar con un valor numérico que cuantifica el par de manera directa.

- Identificación de la posición del ZMP

Con el conocimiento de la masa de los elementos del robot así como su aceleración se determina la reacción generado por el suelo y a partir del valor del par generado en el tobillo es posible identificar la posición donde la reacción del suelo debe de actuar, posición del ZMP.

- Comparación de la posición del ZMP real y el deseado

Durante la síntesis del caminado se definió una trayectoria deseada para el ZMP y mediante la lectura del par en el tobillo se conoce la ubicación real del ZMP la diferencia entre estos valores se utilizara para generar la retroalimentación necesaria para corregir la posición.

- Generación de la retroalimentación necesaria para corregir la posición del ZMP

Mediante la ecuacion (5.19) se determina los valores articulares necesarios para corregir la posición del ZMP.

- Solicitar nuevos valores articulares al robot.

Se envían las consignas al robot de las nuevos valores articulares deseados.

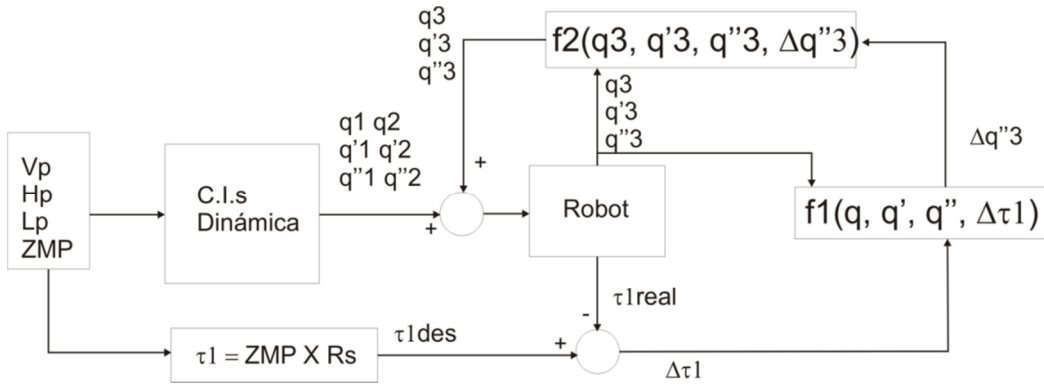
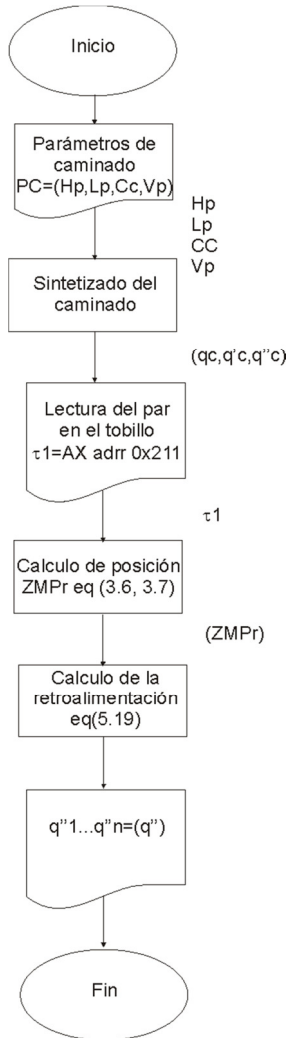


Fig. 7.4 Diagrama a bloques del algoritmo implementado en el robot bioloid.

### Diagrama de flujo



Ec.	Capítulo 1	Pag.
1.1	Restricción de una articulación	1-2
1.2	Restricciones de posición en los ejes $x$ y $y$ para un péndulo en un espacio $R^3$	1-2
1.3	Restricción de posición en el eje $z$ para un péndulo en un espacio $R^3$	1-2
1.4	Restricción de orientación respecto el plano $xy$ para un péndulo en un espacio $R^3$	1-2
1.5	Restricciones de orientación respecto los planos $xz$ y $zy$ para un péndulo en un espacio $R^3$	1-2
1.6	Expresión general de una restricción holonómica	1-3
1.7	Dimensión del espacio de trabajo	1-3
	Capítulo 2	
2.1	Representación general de una matriz de transformación homogénea	2-4
2.2	Transformación del referencial base al referencial $n$ expresada como producto de transformaciones de los referenciales intermedios	2-4
2.3	Transformación del referencial $n$ al referencial base expresada como producto de transformaciones de los referenciales intermedios	2-4
2.4	Inversa de una matriz de transformación homogénea	2-4
2.5	Matriz identidad de las matrices de transformación homogénea	2-4
2.6	Componente de velocidades para una articulación lineal	2-5
2.7	Componente de velocidades para una articulación angular	2-5
2.8	Transformación de las velocidades de un espacio articular de 6 grados de libertad a las velocidades de un espacio de trabajo de 6 grados de libertad	2-6
2.9	Velocidades del espacio de trabajo para el primer eslabón de una cadena cinemática con 6 grados generalizados de libertad	2-6
2.10	Expresión general de la matriz jacobiana de velocidades para una cadena cinemática de $n$ grados generalizados de libertad y $m$ grados de libertad en el espacio de trabajo.	2-6
2.11	Definición de la transformación que mapea de las aceleraciones generalizadas a las aceleraciones en el espacio de trabajo	2-7
2.12	Planteamiento del problema de la cinemática inversa de posiciones	2-7
2.13	Planteamiento del problema de la cinemática inversa de velocidades	2-7
2.14	Planteamiento del problema de la cinemática inversa de aceleraciones	2-8
2.15	Segunda ley de Newton	2-8
2.16	Termino de la segunda ley de Newton que depende de las velocidades espaciales	2-8
2.17	Termino de la segunda ley de Newton que depende de las velocidades espaciales expresado en función de la energía cinética	2-9
2.18	Termino de la segunda ley de Newton que depende de la gravedad expresado en función de la energía potencial	2-9
2.19	Definición del Lagrangeano	2-9
2.20	Relaciones entre el Lagrangeano y las energías cinética y potencial	2-9
2.21	Ecuación de Euler-Lagrange	2-9
2.22	Ecuación de Euler-Lagrange para un sistema formado puramente por actuadores angulares	2-9
2.23	Energía cinética para un sistema formado por $n$ articulaciones angulares	2-9
2.24	Energía potencial para un sistema formado por $n$ articulaciones angulares	2-10
2.25	Lagrangeano de un sistema formado por $n$ articulaciones angulares	2-10

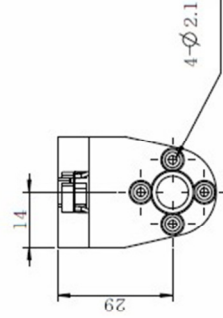
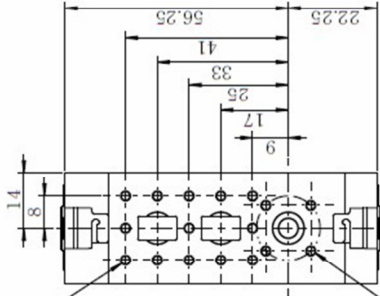
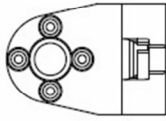
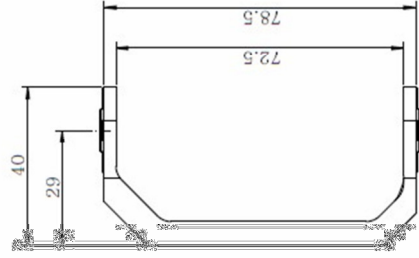
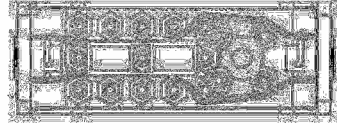
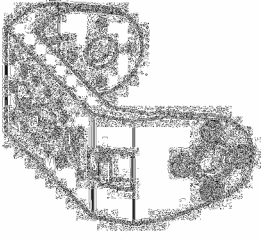
2.26	Componente del jacobiano del centro de masas 17 debida a la articulación 17	2-14
2.27	Ecuación de la cinemática inversa para la articulación $J_9$	2-17
2.28	Ecuación de la cinemática inversa para la articulación $J_{13}$	2-17
2.29	Ecuación de la cinemática inversa para la articulación $J_{11}$	2-17
2.30	Ecuación de Euler-Lagrange en forma general	2.19
	Capítulo 3	
3.1	Ecuación que describe el equilibrio de momentos respecto a un punto arbitrario $o$	3-6
3.2	Equilibrio de momentos en el plano $yz$	3-6
3.3	Equilibrio de momentos en el plano $zx$	3-6
3.4	Equilibrio de momentos en el plano $xy$	3-6
3.5	Componente en $z$ del vector de posición para la reacción del suelo	3-6
3.6	Componente en $x$ del vector de posición para la reacción del suelo	3-7
3.7	Condición de equilibrio de la componente $x$ para la ubicación de la reacción	3-7
3.8	Condición de equilibrio de la componente $y$ para la ubicación de la reacción	3-7
3.9	Definición del ZMP para las condiciones (3.8) y (3.7) satisfechas	3-7
3.10	Condiciones mínimas de inequilibrio para la ubicación de la reacción	3-7
3.11	Definición de la ubicación de la reacción para alguna de las condiciones anteriores satisfechas	3-7
3.12	Condiciones maximas de inequilibrio para la ubicación de la reacción	3-8
3.13	Definición de la ubicación de la reacción para alguna de las condiciones anteriores satisfechas	3-8
3.14	Definición del vector de ubicación para la reacción del suelo debida a un estado inestable en el robot	3-8
3.15	Definiciones de las componentes del ZMP imaginario	3-8
3.16	Definición del índice de rotación del pie	3-8
3.17	Segunda ley de newton en dirección $x$ para un péndulo invertido	3-11
3.18	Segunda ley de newton en dirección $y$ para un péndulo invertido	3-11
3.19	Solución de la ecuación 3.18 para la fuerza que actúa sobre el péndulo invertido	3-11
3.20	Modelo linealizado del péndulo invertido	3-11
3.21	Energía orbital de un péndulo invertido	3-11
3.22	Raíces de la ecuación 3.21	3-11
3.23	Punto de captura para un péndulo invertido	3-12
	Capítulo 4	
4.1	Equilibrio de fuerzas horizontales sobre un robot	4-5
4.2	Equilibrio de fuerzas verticales sobre un robot	4-5
4.3	Restricción en la aceleración vertical total sobre el robot	4-5
4.4	Ecuación de la posición del efector final con dirección en $x$ respecto del tiempo	4-8
4.5	Ecuación de la posición del efector final con dirección en $y$ respecto de $x$	4-9
4.6	Ecuación de la velocidad del efector final con dirección en $x$	4-9
4.7	Ecuación de la velocidad del efector final con dirección en $y$	4-9
4.8	Ecuación de la aceleración del efector final con dirección en $y$	4-9
	Capítulo 5	
5.1	Definición del momento angular en función de la velocidad lineal	5-2



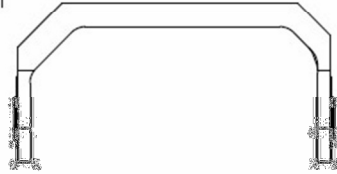
5.2	Definición del momento angular en función de la velocidad angular	5-2
5.3	Definiciones de las fuerzas lineal y angular en función de los momentos	5-2
5.4	Equilibrio de momentos generados en el robot	5-2
5.5	Posición del ZMP en función de los momentos	5-3
5.6	Posición del ZMP considerando la perturbación	5-3
5.7	Componente en $x$ de la posición del ZMP	5-3
5.8	Momento lineal para una cadena cinemática de $n$ eslabones	5-4
5.9	Momento angular para una cadena cinemática de $n$ eslabones	5-4
5.10	Momento lineal para una cadena cinemática en notación matricial	5-4
5.11	Momento angular para una cadena cinemática en notación matricial	5-4
5.12	Derivada respecto al tiempo del momento lineal	5-4
5.13	Derivada respecto al tiempo del momento angular	5-4
5.14	Solución del sistema formado por 5.12 y 5.13	5-5
5.15	Ley proporcional que define la variación del momento lineal	5-6
5.16	Ley proporcional que define la variación del momento angular	5-6
5.17	Ley PID que define la variación del momento lineal	5-6
5.18	Relación entre el ZMP y el par generado en la articulación base	5-7
5.19	Error de seguimiento entre el par deseado y el par generado	5-7
5.20	Notación de Euler-Lagrange para los pares generados en las articulaciones	5-8
5.21	Primer vector de la ecuación 5.20	5-8
5.22	Par instantáneo definido para un tiempo $t_o$	5-8
5.23	Nuevo par deseado definido por el nuevo estado $\mathbf{q}_f, \dot{\mathbf{q}}_f, \ddot{\mathbf{q}}_f$	5-8
5.24	Nueva dinámica definida como una variación de la dinámica original $\mathbf{q}_o, \dot{\mathbf{q}}_o, \ddot{\mathbf{q}}_o$	5-8
5.25	Variación de la dinámica expresada como un movimiento uniformemente variado	5-8
5.26	Nuevo par expresado en función del estado original y su variación	5-9
5.27	Identidad trigonométrica del seno con suma de ángulos	5-9
5.28	Identidad trigonométrica del coseno con suma de ángulos	5-9
5.29	Simplificación del seno para ángulos pequeños	5-9
5.30	Simplificación del coseno para ángulos pequeños	5-9







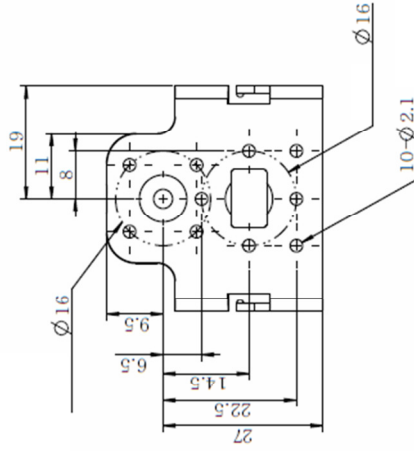
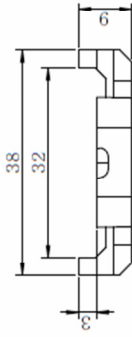
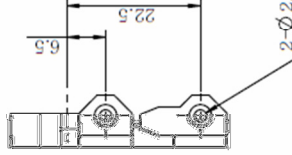
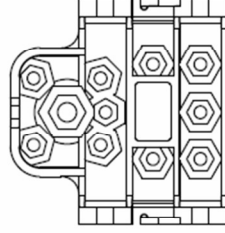
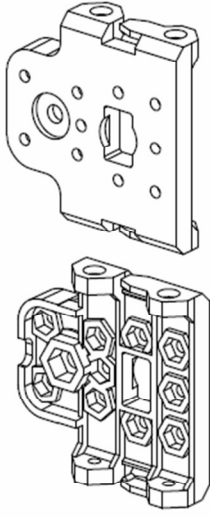
13-Ø 2.1



Material	Al 7075	0	0
Weight	0.104	0.104	0.104
Volume	0	0	0
Surface Area	0	0	0

Olvera Alexis A.  
CINVESTAV  
Institución de Investigación  
g/cm<sup>3</sup>

119



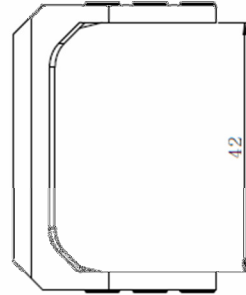
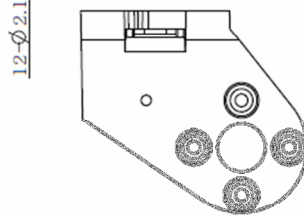
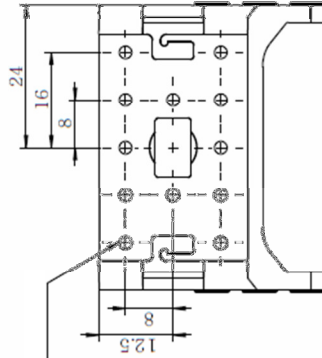
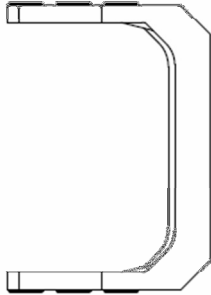
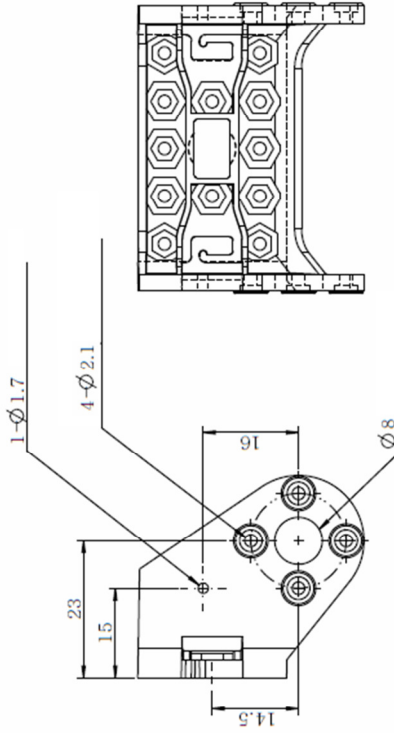
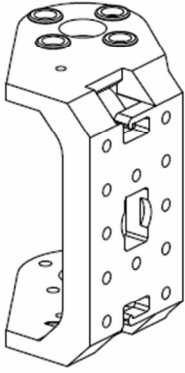
Tensor de Inercia		Kg.mm <sup>2</sup>	
0.568	-0.042	0	0
-0.042	1.057	0	0
0	0	0	0.567

Unidades		peso	
mm	4 g	S.E.	A4

Material		Escala	
Plástico de ingeniería	CINVESTAV	g/cm <sup>3</sup>	

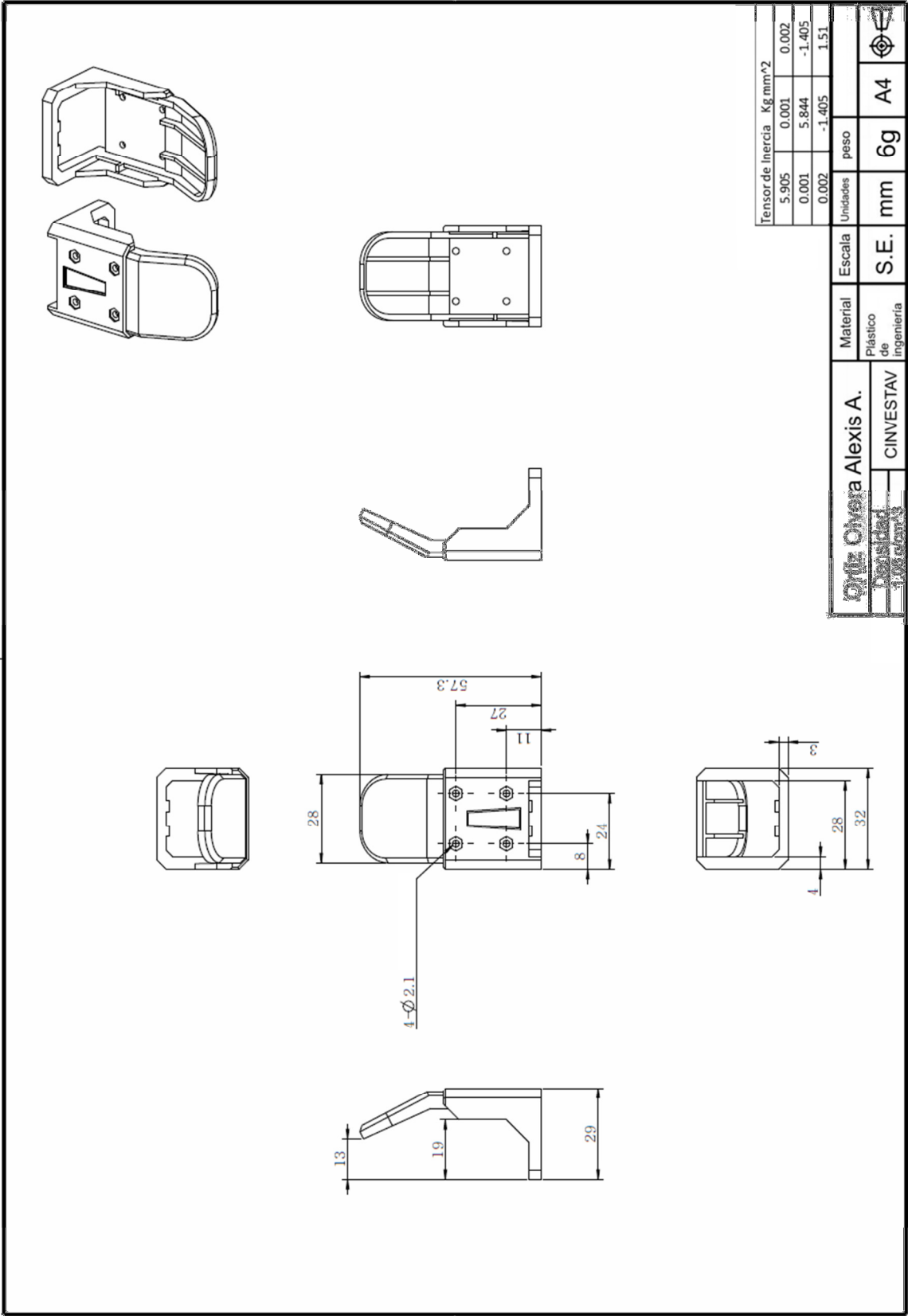
Olivera Alexis A.





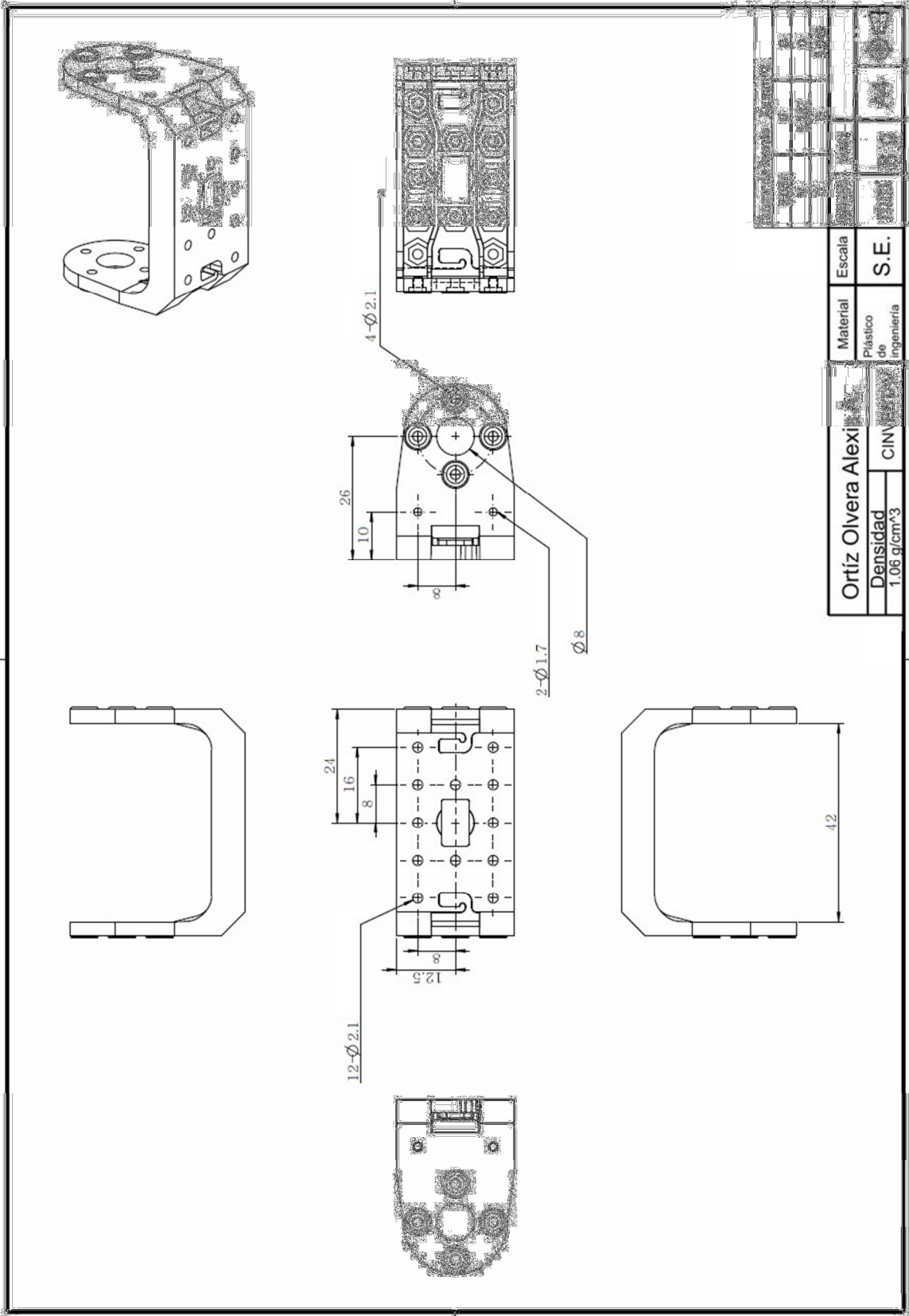
Tensor de inercia		Kg mm <sup>2</sup>	
3.788	0	0	0
0	4.959	-1.432	-1.432
0	-1.432	4.733	4.733

Ortiz Olvera Alexis A.		Material	Escala	Unidades	peso
Densidad	1.06 g/cm <sup>3</sup>	Plástico de Ingeniería	S.E.	mm	8g
		CINVESTAV			A4



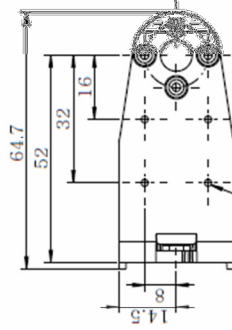
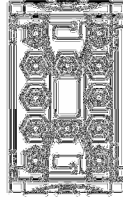
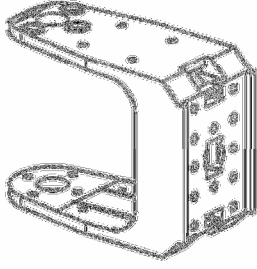
Tensor de Inercia		Kg mm <sup>2</sup>	
5.905	0.001	0.002	0.002
0.001	5.844	-1.405	-1.405
0.002	-1.405	1.51	1.51

<b>Ortiz Olvera Alexis A.</b> Ingeniería 100 años	Material	Escala	Unidades	peso	
	Plástico de ingeniería	S.E.	mm	6g	

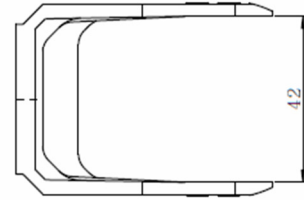
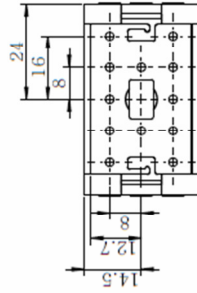
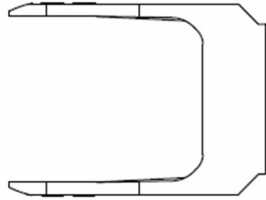


<b>Ortiz Olvera Alex</b>		<b>Material</b>	<b>Escala</b>
<b>Densidad</b>	CIN	Plastico de ingenieria	S.E.
1.06 g/cm <sup>3</sup>			





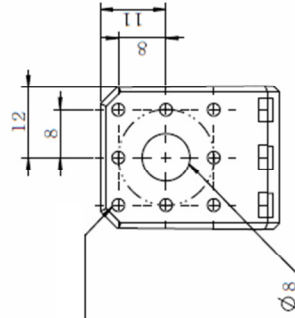
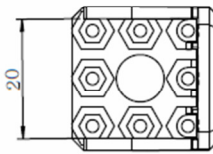
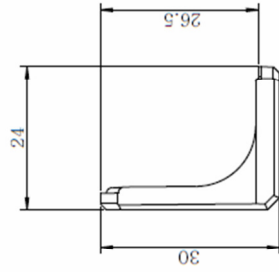
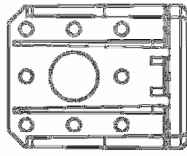
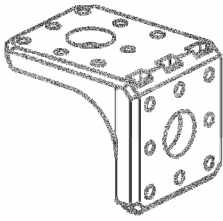
8-Ø 1.7



Tensar de Barcha	Kx/cm <sup>2</sup>
20.503	0
0	21.777
0	-0.241
0	6.372

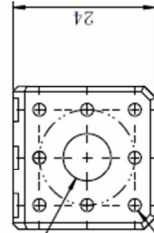
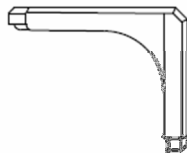
Ortiz Olvera Alexi	
Densidad	CIN
1.06 g/cm <sup>3</sup>	

149



8- $\phi$ 2.1

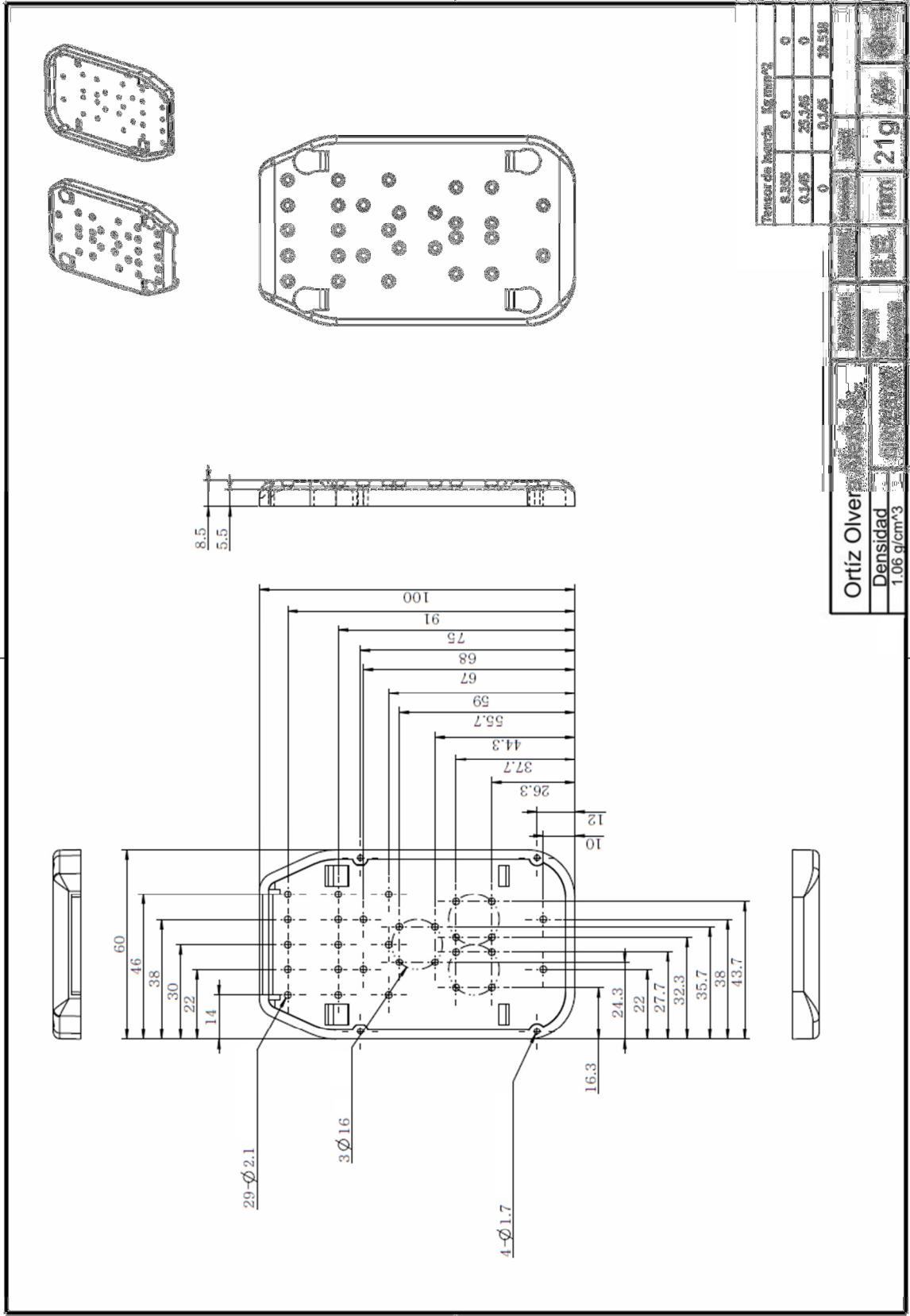
$\phi$ 8

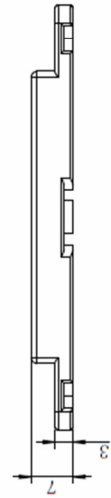
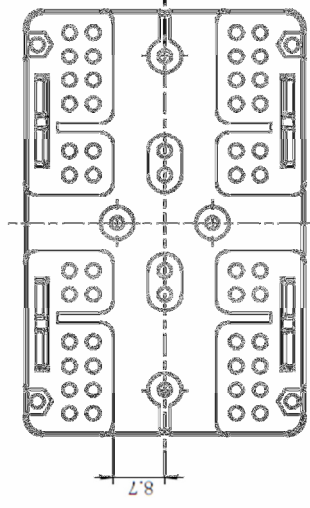
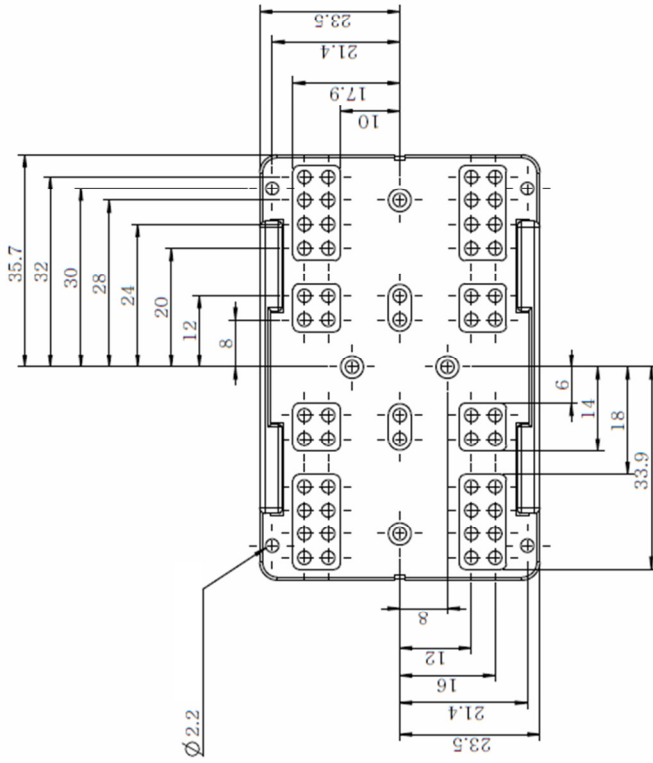
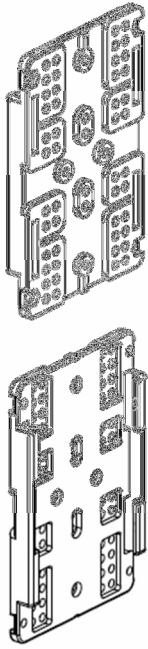


5- $\phi$ 2.1

Tolerancia	1/2 mm <sup>2</sup>
0.75	0
0	0.001
-0.001	0
0.501	0

Ortiz Olvera Alexi	CIN	S.E	3g
Densidad	1.06 g/cm <sup>3</sup>		



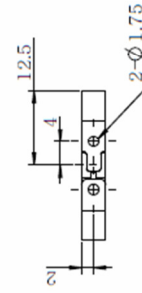
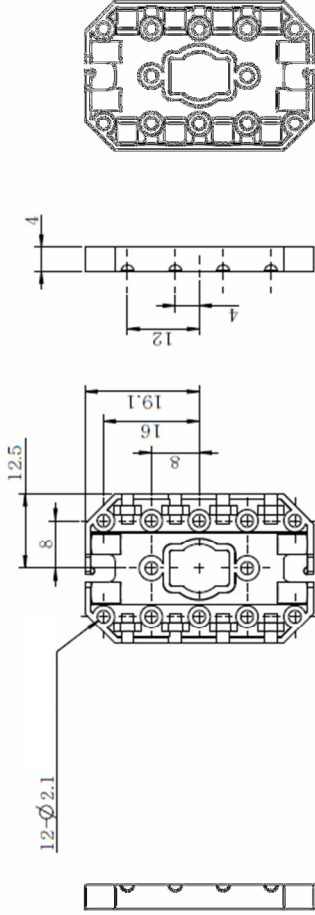
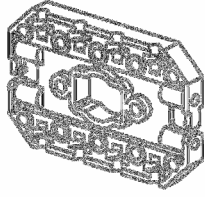


Número de boards		Kg mm <sup>2</sup>	
1.737	0	0	0
0	2.024	0	0
0	0	0	4.575

Ortiz Oliver

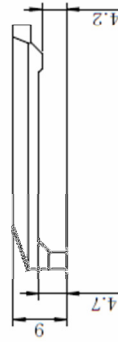
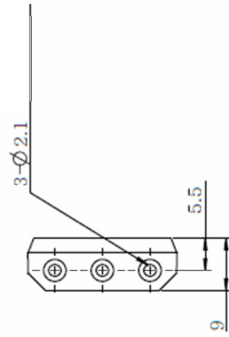
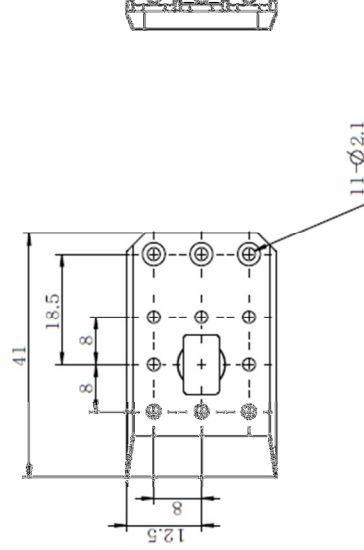
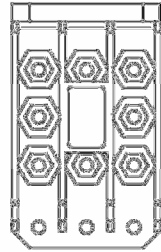
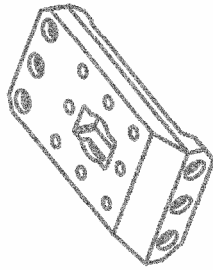
Densidad 1.06 g/cm<sup>3</sup>

7g



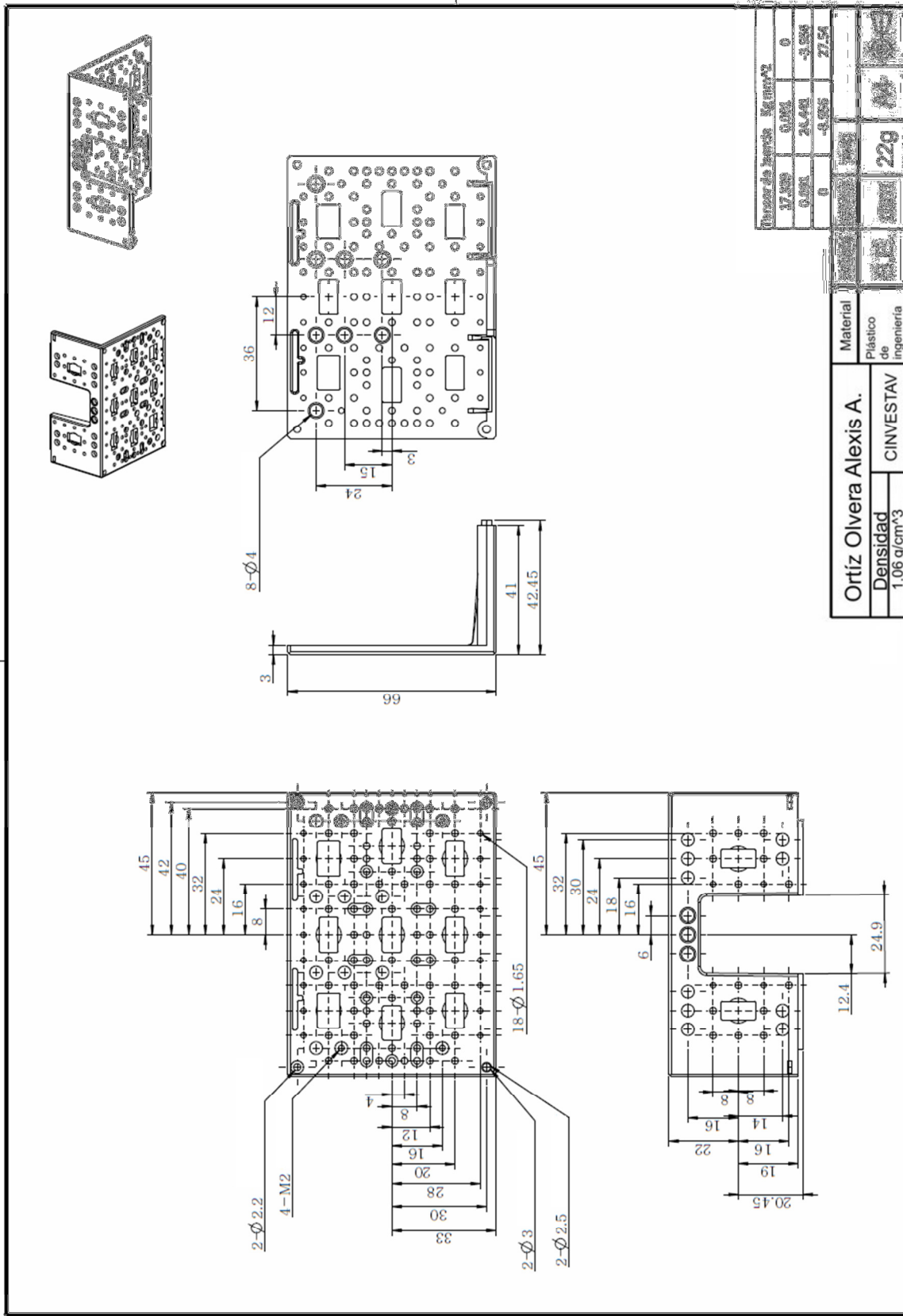
Tolerâncias de fabricação - Em mm	
0.112	0
0	0.032
0	0
0	0.224

Ortiz Oliveira & Cia. Ltda.		S.E.		29	
Der.		S.E.		29	
1.06		S.E.		29	



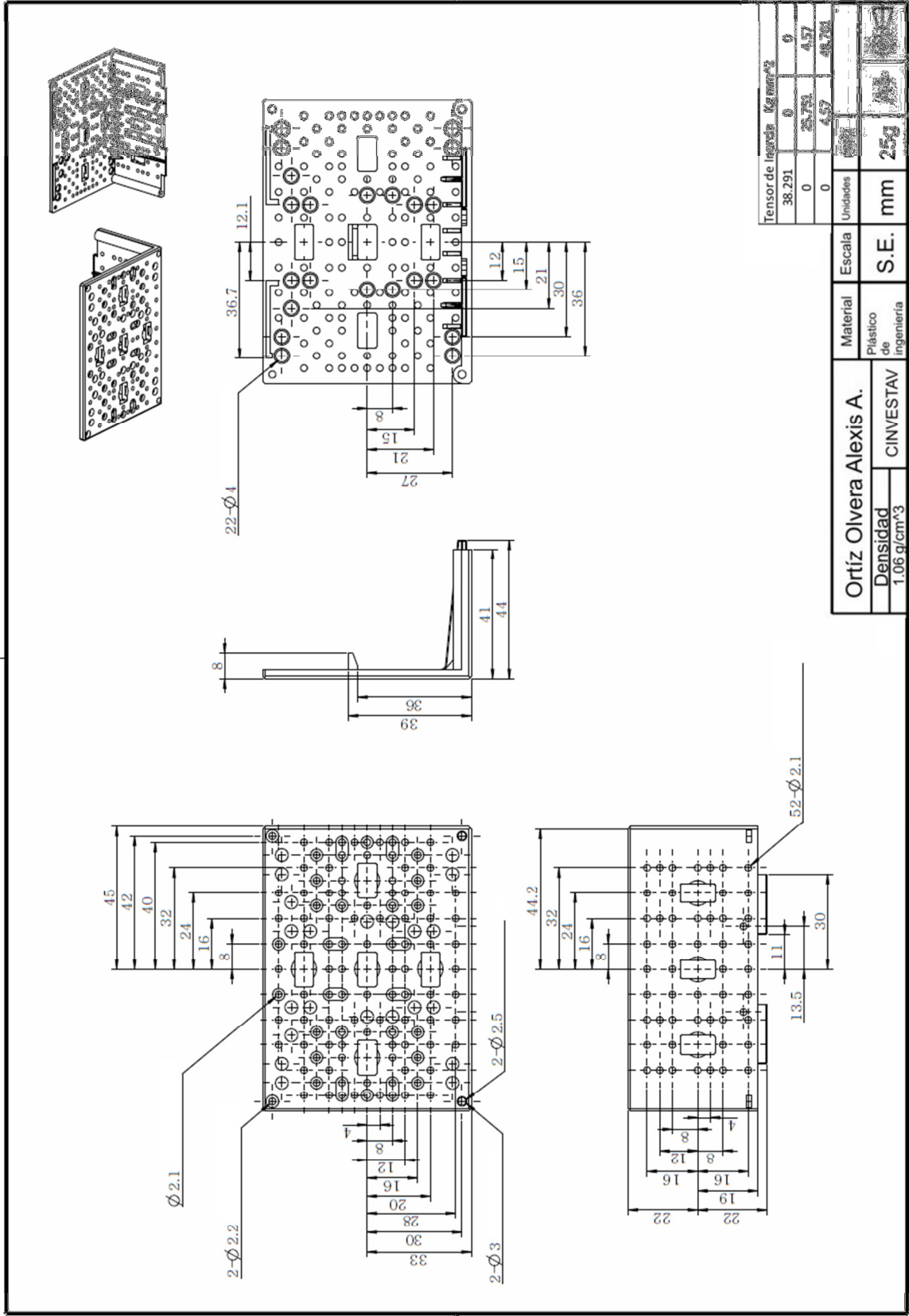
Reserva de marcha	Kg/mm <sup>2</sup>
0.200	0.050
0.050	1.500
0	0
0	1.500

Ortiz	S.F.	3g
Der		
1.06		



Material	Material	Material	Material
0.001	0.001	0.001	0.001
24.44	24.44	24.44	24.44
-8.956	-8.956	-8.956	-8.956
27.54	27.54	27.54	27.54

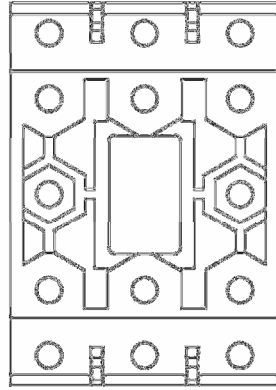
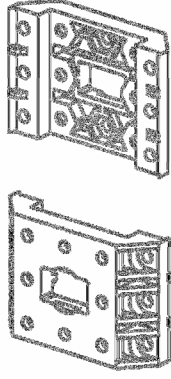
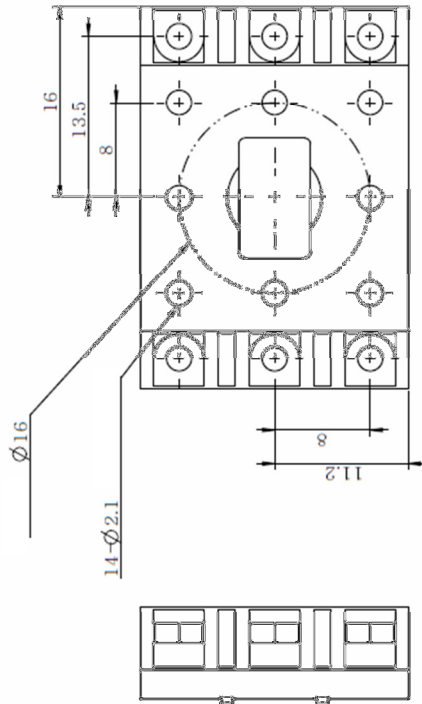
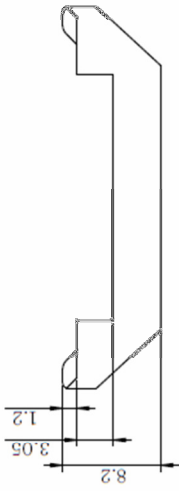
Material	Plástico de ingeniería
Densidad	1.06 g/cm <sup>3</sup>
Ortiz Olvera Alexis A.	CINVESTAV
22g	



Tensor de ligadura		Kg/mm <sup>2</sup>	
38.291	0	0	0
0	25.751	4.57	48.701
0	4.57	0	0

Ortiz Olvera Alexis A.		Material	Escala	Unidades
Densidad	1.06 g/cm <sup>3</sup>	Plástico de ingeniería	S.E.	mm
		CINVESTAV		25g





Censar de boards - Kg mm <sup>2</sup>	
0.261	0
0	0.275
0	0
0	0.117

z Olvera Alexi		2g	
nsidad		mm	
g/cm <sup>3</sup>		CIN	

