



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO**

**Leyes de Control Implícitas Singularmente Perturbadas para
Sistemas Lineales**

Tesis que presenta

M. en C. Saúl Alfredo Puga Manjarrez

Para Obtener el Grado de

Doctor en Ciencias

En la Especialidad de

Control Automático

Director de la Tesis: Dr. Moisés Bonilla Estrada

México, Distrito Federal

Julio, 2013

Agradecimientos

Al **INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**. Ya que con el apoyo de una licencia con goce de sueldo me autorizo para realizar estudios de doctorado.

Al **Dr. Moisés Bonilla Estrada** por el apoyo para realizar la estancia de año sabático, por su gran ejemplo, guía y dedicación en la dirección de este trabajo de tesis.

Al **Dr. Gabriel Daniel Villa Salvador** por su apoyo durante un año, valiosos comentarios y por revisar el trabajo tesis.

Al **Dr. Michele Malabre** por sus valiosos comentarios al revisar las publicaciones y el trabajo tesis.

Al **Dr. Rogelio Lozano Leal** por su apoyo, valiosos comentarios en las publicaciones y por revisar el trabajo tesis.

A la **Dra. Sabine Mondié Cuzange** por sus valiosos comentarios en las publicaciones y por revisar el trabajo tesis.

Al **Dr. Juan Carlos Martínez García** por sus sugerencias para la aplicación de los resultados obtenidos y por revisar el trabajo tesis.

Al **Dr. Leonid Fridman** por aceptar ser parte del jurado evaluador de este trabajo tesis.

Al **Personal del Departamento de Control Automático** por su apoyo durante estos años.

Al **Personal de la Biblioteca de Ingeniería Eléctrica** por su apoyo durante estos años.

Resumen

El presente trabajo ataca el problema de estabilización de sistemas lineales variantes en el tiempo y sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo, haciendo uso de un esquema de control compuesto por: una ley de control con alta ganancia y un control de acoplamiento de modelo. El sistema en lazo cerrado son sistemas lineales variantes en el tiempo singularmente perturbados y sistemas lineales variantes en el tiempo singularmente perturbados con retardo con estabilidad uniforme asintótica. Se calculan cotas para el parámetro de perturbación tal que la estabilidad asintótica uniforme de los sistemas singularmente perturbado está garantizada.

Se muestra como construir la ley de control, tal que la dinámica del sistema es asignada por un polinomio Hurwitz con coeficientes constantes. Se contempla el caso cuando se tiene el estado medible y el caso cuando el estado no es medible para sistemas lineales variantes en el tiempo con una entrada y una salida.

Abstract

This work considers the problem of stabilizing linear time varying systems and linear time varying retarded systems, using a low order controller and a matching controller. The closed loop systems are linear time varying singularly perturbed systems and linear time varying retarded singularly perturbed systems with uniform asymptotic stability behavior; we calculate bounds for the perturbation parameter, such that the uniform asymptotic stability of the singularly perturbed systems is guaranteed.

We show how to design a control law such that the dynamics system is assigned by a Hurwitz polynomial with constant coefficients. We take into account two cases: when the measure of the state is possible and when it is not.

Notación

- $o \mid$ tal que.
- \forall para todo.
- \exists existe.
- $x \in \mathcal{X}$ el elemento x pertenece al conjunto \mathcal{X} .
- $:=$ igual por definición.
- \mathbb{Z} conjunto de los números enteros.
- \mathbb{R} conjunto de los números reales.
- \mathbb{R}^+ conjunto de los reales no negativos.
- \mathbb{R}^n \mathbb{R} -espacio vectorial n -dimensional.
- \mathcal{C} conjunto de los números complejos.
- $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ parte real e imaginaria de $z \in \mathcal{C}$.
- \mathcal{C}_+ el conjunto $\{z \in \mathcal{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.
- \mathcal{L} , \mathcal{L}^{-1} transformada de Laplace y transformada inversa de Laplace.
- $\mathcal{C}[a, b]$ el conjunto de funciones continuas en \mathbb{R}^n sobre el intervalo $[a, b]$.
- \subset , \subseteq subconjunto de, subconjunto propio de.
- x^T vector transpuesto.
- A^T matriz transpuesta.
- $\|x\|$ norma del vector x .
- $\|A\|$ norma de la matriz A .
- A^{-1} inversa de una matriz no singular.
- $\lambda(A)$ valor propio de la matriz A .
- $\operatorname{Re}(\lambda(A))$ parte real del valor propio de la matriz A .

- $\lambda_{max}(A)$ máximo valor propio real de la matriz A .
- $\lambda_{min}(A)$ mínimo valor propio real de la matriz A .
- $A > 0$ matriz A real simétrica definida positiva.
- $det(A)$ determinante de la matriz A .
- $tr(A)$ traza de la matriz A .
- $\mu(A)$ medida de la matriz A .
- $Rank(A)$ rango de la matriz A .
- a_{ij} elemento ij de la matriz A .
- $\underline{\chi}_k^i \in \mathbb{R}^k$ vector con i -ésima entrada igual a 1 y las otras entradas igual a 0 de dimensión k .
- $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ matriz identidad de dimensión k .
- $T_u\{v^T\}$ matriz Toeplitz triangular superior, cuyo primer renglón es v^T .
- $T_\ell\{v\}$ matriz Toeplitz triangular inferior, cuya primer columna es v .
- $DM\{a_1, \dots, a_n\}$ matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal principal son $\{a_1, \dots, a_n\}$.
- $BDM\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ denota una matriz diagonal a bloques, cuyos bloques son $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$.
- $\exp(A)$ matriz exponencial.
- $\mathcal{C}(A, B)$ subespacio de controlabilidad.
- $\mathcal{O}(A, C)$ subespacio de observabilidad.
- $\mathcal{O}(\varepsilon)$ magnitud de orden ε , es decir, $f(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}^n$ tiene magnitud $\mathcal{O}(\varepsilon)$, existe K y ε^* tal que: $\|f(\varepsilon, x)\| \leq K\varepsilon$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$.
- \square fin de teorema, lema, corolario, hecho, ejemplo y demostración.

También existe notación adicional que se define a lo largo del texto.

Acrónimos

- **LTV** Lineales Variantes en el tiempo; de las siglas en ingles linear time varying.
- **LTVD** Lineales Variantes en el tiempo con Retardo; de las siglas en ingles linear time varying delay.
- **LTI** Lineales Invariantes en el Tiempo; de las siglas en ingles linear time invariant.
- **LPV** Parámetros Lineales Variantes; de las siglas en ingles linear parameter varying.
- **LMI** Desigualdad Lineal Matricial; de las siglas en ingles linear matrix inequality.
- **PMD** Descripción polinomial matricial; de las siglas en ingles polynomial matrix description.
- **EMM** Modelo exacto de acoplamiento; de las siglas en ingles exact matching model.
- **SISO** Una entrada una salida; de las siglas en ingles simple input simple output.
- **MIMO** Varias entradas varias salidas; de las siglas en ingles multiple input multiple output.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	I
Abstract	III
Notación	V
Acrónimos	VII
1. Introducción	1
1.1. Estructura del Trabajo	2
I Antecedentes	5
2. Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo	7
2.1. Resultados de Silverman (1965 – 1971)	8
2.2. Resultados de Kamen (1976 – 1989)	10
2.3. Resultados de Chen, Wu e Ichikawa (1995 – 2001)	11
2.4. Resultados de Marinescu y Broulès (1999 – 2011)	11
2.4.1. Matriz de Transferencia	12
2.4.2. Acoplamiento de Sistemas	13
2.4.3. Aplicaciones Prácticas	14
2.4.4. Extensión de la Herramienta	14
2.4.5. Modos Ocultos	15
3. Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo con Retardo	17
3.1. Resultados Buckalo (1968)	18
3.2. Resultados Weiss (1970)	19
3.3. Resultados Olbrot (1972)	19
3.4. Resultados Sendaula (1974)	20
3.5. Resultados Morse (1976)	21
3.6. Resultados Malek-Zavarei (1982)	21
3.7. Resultados Verriest (1994)	22
3.8. Resultados Wu y Grigoriadis (2001)	23
3.9. Resultados Wang, Zhang y Xie (2007)	23

3.10. Resultados Liu, Tang y Han (2011)	24
3.11. Análisis de los Resultados	25
II Preliminares	27
4. Definiciones y Resultados de Sistemas LTV y LTVD	29
4.1. Definición y Representación de Estado: Caso SISO	29
4.2. Definición y Representación de Estado: Caso MIMO	31
4.3. Solución del Sistema LTV	34
4.3.1. Sistema LTV Homogéneo	34
Matriz Fundamental.	35
Matriz de Transición.	35
4.3.2. Sistema LTV no Homogéneo o Forzado	36
4.4. Sistemas Lineales Singularmente Perturbados	37
Sistema Lineal Singularmente Perturbado Homogéneo.	37
4.5. Solución del Sistema LTVD	38
4.5.1. Sistema LTVD Homogéneo	39
Matriz Fundamental.	39
4.5.2. Sistema LTVD no Homogéneo o Forzado	40
4.6. Sistemas Lineales Singularmente Perturbados con Retardo	40
Sistema Lineal Singularmente Perturbado Homogéneo con Re- tardo.	41
5. Estabilidad de Sistemas LTV y LTVD	43
5.1. Estabilidad para Sistemas LTV	43
5.1.1. Definiciones de Estabilidad para Sistemas LTV.	44
Definiciones de Estabilidad.	44
5.1.2. Método de Lyapunov para Sistemas LTV	44
5.2. Estabilidad de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo Singularmente Per- turbados	45
5.2.1. Estabilidad Asintótica	45
5.2.2. Cotas para Estabilidad Asintótica	46
5.2.3. Transformación de Desacoplamiento	47
5.2.4. Estabilidad Asintótica Uniforme	49
Recapitulación.	51
5.3. Estabilidad para Sistemas LTVD	51
5.3.1. Definiciones de Estabilidad para Sistemas LTVD.	52
Definiciones de Estabilidad.	52
5.3.2. Método de Lyapunov para Sistemas LTVD	52
Estabilidad Independiente del Retardo.	53
Estabilidad Dependiente del Retardo.	54
5.4. Estabilidad de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo Singularmente Per- turbados con Retardo	54
Metodología.	55

III	Esquemas de Control Singularmente Perturbados	57
6.	Ley de Control Singularmente Perturbada para Sistemas SISO LTV y SISO LTVD	59
6.1.	Ley de Control Singularmente Perturbada para el Sistema SISO LTV	60
6.1.1.	Ley de Control Implícita Singularmente Perturbada	61
6.1.2.	Transformación de Desacoplamiento	64
6.1.3.	Condiciones para Estabilidad Asintótica Uniforme	65
6.1.4.	Aproximación del Estado	66
6.1.5.	Ejemplo Ilustrativo	68
6.2.	Ley de Control Singularmente Perturbada para el Sistema SISO LTVD . .	72
6.2.1.	Esquema de Control Implícito Singular	73
6.2.2.	Transformación de Estado	75
6.2.3.	Condiciones para Estabilidad Asintótica Uniforme	77
6.2.4.	Estabilidad Asintótica del Sistema con Retardo	78
6.2.5.	Aproximación del Estado	79
6.2.6.	Ejemplo Ilustrativo	81
6.3.	Recapitulación	85
7.	Diseño del Observador de Estado: Caso SISO LTV	87
7.1.	Observador Singularmente Perturbado	87
7.2.	Sistema en Lazo Cerrado	92
7.3.	Ejemplo Ilustrativo	92
8.	Esquemas de Control Singularmente Perturbados para Sistemas MIMO LTV y MIMO LTVD	99
8.1.	Esquema de Control Singularmente Perturbado para el Sistema MIMO LTV	100
8.1.1.	Ley de Control Singularmente Perturbada	102
8.1.2.	Transformación Desacoplamiento	105
8.1.3.	Condiciones para Estabilidad Asintótica Uniforme	107
8.1.4.	Aproximación del Estado	108
8.1.5.	Ejemplo Ilustrativo	109
8.2.	Esquema de Control Singularmente Perturbado para el Sistema MIMO LTVD	115
8.2.1.	Ley de Control Singularmente Perturbada	117
8.2.2.	Transformación de Estado	121
8.2.3.	Condiciones para Estabilidad Asintótica Uniforme	122
8.2.4.	Estabilidad Asintótica del Sistema con Retardo	123
8.2.5.	Aproximación del Estado	124
8.2.6.	Ejemplo Ilustrativo	125
8.3.	Recapitulación	132
9.	Conclusiones y Perspectivas	133
	Perspectivas	134

IV	Demostraciones	135
A.	Álgebra No Conmutativa	137
A.1.	Definiciones	137
A.2.	Anillos de Fracciones	139
A.3.	Polinomios Sesgados	140
B.	Cotas de la Matriz de Transición $\phi(t, s)$	141
C.	Demostraciones Capítulo 5	143
C.1.	Demostración Lema 5.2.1	143
C.2.	Demostración Lema 5.2.2	144
C.3.	Demostración Lema 5.2.3	147
C.4.	Transformación de Desacoplamiento	149
C.4.1.	Solución de la Ecuación (5.10)	149
C.4.2.	Contracción del Mapeo $SR_L(t)$	150
C.4.3.	Solución de la Ecuación (5.11)	152
C.4.4.	Contracción del Mapeo $TR_H(t)$	153
C.5.	Demostración Corolario 5.2.1	155
C.6.	Demostración Teorema 5.2.1	158
C.7.	Demostración Lema 5.2.4	160
D.	Demostraciones Capítulo 6	163
D.1.	Demostración del Teorema 6.1.1	163
D.2.	Demostración del Lema 6.1.1	164
D.3.	Demostración del Teorema 6.1.2	165
D.4.	Demostración Teorema 6.2.1	166
D.5.	Demostración Lema 6.2.1	166
D.6.	Demostración Teorema 6.2.2	166
D.7.	Demostración Teorema 6.2.3	167
E.	Demostraciones Capítulo 7	169
E.1.	Puntos Clave de la Demostración del Teorema 7.1.1	169
	Calculo de Q_0 y R_0	170
E.2.	Demostración del Corolario 7.1.1	171
F.	Demostraciones Capítulo 8	173
F.1.	Demostración Hecho 8.1.1	173
F.2.	Demostración Teorema 8.1.1	174
F.3.	Demostración Lema 8.1.1	175
F.4.	Demostración Teorema 8.1.2	177
F.5.	Demostración del Hecho 8.2.1	177
F.6.	Demostración del Teorema 8.2.1	177
F.7.	Demostración del Lema 8.2.1	177
F.8.	Demostración del Teorema 8.2.2	178
F.9.	Demostración del Teorema 8.2.3	179

V Artículos en Revistas y Congresos Publicados	181
G. CDC 2010	183
H. CDC 2011	191
I. CDC 2012	199
J. IJRNC 2013	207
VI Artículos en Revisión en Revistas y Congresos	233
K. IJRNC 2013	235
L. CDC 2013	261
Bibliografía	269

Índice de figuras

6.1. Parámetros del Sistema: (a) $a_1(t)$, (b) $a_2(t)$, (c) $a_3(t)$ y (d) $b(t)$	68
6.2. Gráficas de la función $\varphi(t)$ y de la señal de referencia $r(t)$: (a) función $\varphi(t)$ y (b) referencia $r(t)$	70
6.3. Variables de Control: (a) salida $y(t)$, (b) salida $y_{id}(t)$, (c) señal de control de acoplamiento $x_3(t)$, (d) señal de control de acoplamiento $x_4(t)$, (e) ley de control $u(t)$ y (f) error de acoplamiento $ y(t) - y_{id}(t) $	71
6.4. Parámetros : (a) $a_1(t)$ y $\hat{a}_2(t)$, (b) $a_2(t)$, (c) $\hat{a}_1(t)$, (d) $b(t)$	82
6.5. Señales de salida: (a) Salida $y_{id}(t)$, (b) Señal de referencia $r(t)$, (c) Salida $y(t)$, (d) Ley de control $u(t)$	84
6.6. Señales del control de acoplamiento y señal de error: (a) control de acoplamiento $x_2(t)$, (b) control de acoplamiento $x_3(t)$, (c) error de acoplamiento $e(t)$, (d) señal de retardo $\tau(t)$	85
7.1. Señales de salida usando observador de estado: (a) salida $y(t)$, (b) error de acoplamiento $ y(t) - y_{id}(t) $ Error de estado estimado: (c)-(d) $\ \zeta - \hat{\zeta}\ $	95
7.2. Señales de control usando obsevador de estado: (a)-(b) $x_3(t)$, (c)-(d) $x_4(t)$ (e)-(f) $u(t)$	96
7.3. Comparación de la salida $y(t)$ con y sin estado medible: (a) Línea continua $y(t)$ y Línea punteada $y_{obs}(t)$	97
8.1. Parámetros del Sistema Matriz $A(t)$: (a) $a_{111}(t)$, (b) $a_{112}(t)$, (c) $a_{121}(t)$, (d) $a_{211}(t)$, (e) $a_{212}(t)$, (f) $a_{221}(t)$	110
8.2. Parámetros del Sistema Matriz $B(t)$: (a) $b_{11}(t)$, (b) $b_{12}(t)$ y (c) $b_{22}(t)$	111
8.3. Variables de control: (a) salida $y_1(t)$, (b) error de acoplamiento de modelo $ y_1(t) - y_{id1}(t) $, (c) señal de acoplamiento de modelo $x_2(t)$, (d) señal de acoplamiento de modelo $x_3(t)$, (e) ley de control $u_1(t)$, (f) señal de referencia $r_1(t)$	113
8.4. Variables de control: (a) salida $y_2(t)$, (b) error de acoplamiento de modelo $ y_2(t) - y_{id2}(t) $, (c) señal de acoplamiento de modelo $x_4(t)$, (d) señal de acoplamiento de modelo $x_5(t)$, (e) ley de control $u_2(t)$, (f) señal de referencia $r_2(t)$	114
8.5. Parámetros Matriz $A(t)$: (a) $a_{111}(t)$, (b) $a_{112}(t)$, (c) $a_{121}(t)$, (d) $a_{212}(t)$, (e) $a_{211}(t)$, (f) $a_{122}(t)$	126
8.6. Parámetros Matriz $B(t)$: (a) $b_{11}(t)$, (b) $b_{12}(t)$ y (c) $b_{22}(t)$	127
8.7. Variables de control : (a) $u_1(t)$, (b) $u_2(t)$, señales del control de acoplamiento (c) $x_1(t)$, (d) $x_2(t)$, (e) $x_4(t)$ y (e) $x_5(t)$	130

- 8.8. Señales de salida: (a) $y_1(t)$ y (b) $y_2(t)$, señales de referencia (c) $r_1(t)$ y (d) $r_2(t)$, señales de error de acoplamiento (e) $e_1(t)$ y (f) $e_2(t)$ 131

Capítulo 1

Introducción

Para entender el mundo en que vivimos y comprender las leyes inherentes a sus organismos, se ha desarrollado durante siglos la herramienta matemática para el análisis, diseño y síntesis de sistemas. Con el tiempo, estos métodos forman lo que se conoce como teoría de sistemas.

Como parte de la teoría de sistemas tenemos los sistemas lineales, los cuales tienen una gran importancia, ya que en una gran parte de los modelos matemáticos que representan a los sistemas dinámicos son modelos dados por una aproximación lineal. Esta aproximación permite hacer un análisis del sistema, el cual puede ser sobre: estabilidad, propiedades estructurales, robustez, rechazo de perturbaciones externas al sistema y otras.

Existen trabajos sobre sistemas lineales variantes en el tiempo y sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo, en los cuales se estudian propiedades de controlabilidad, observabilidad y estabilidad mediante la representación en variables de estado. En la mayoría de los trabajos se presupone el conocimiento de las matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ que describen al sistema.

En este trabajo de tesis se propone una estrategia de control para estabilizar sistemas lineales variantes en el tiempo,

$$\frac{d}{dt}\zeta(t) = A(t)\zeta(t) + B(t)u(t),$$

y sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo,

$$\frac{d}{dt}\zeta(t) = A(t)\zeta(t) + \hat{A}(t)\zeta(t - \tau(t)) + B(t)u(t),$$

cuando se tiene incertidumbre en los parámetros.

El objetivo del esquema de control es lograr el acoplamiento del sistema variante en el tiempo con un sistema lineal invariante en el tiempo dado.

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_{ac}x(t) + B_{ac}r(t).$$

garantizando estabilidad asintótica.

Para esto se utiliza una ley de control que tiene por objeto el separar el sistema en dos subsistemas con dos diferentes escalas de tiempo. Se tiene en lazo cerrado un sistema lineal variante en el tiempo singularmente perturbado y se usan las técnicas de análisis de perturbaciones singulares para su análisis.

Se toma el caso cuando el estado no es medible en un sistema de una entrada y una salida. Se desarrolla un observador de estado basado en perturbaciones singulares, de tal manera que todos los resultados se preservan, ver [58].

Los esquemas de control que se proponen están basados en perturbaciones singulares para ambos tipos de sistemas, LTV y LTVD. Esta es una alternativa para la estabilización y el acoplamiento de modelo de este tipo de sistemas.

Se toma el caso de un sistema del tipo SISO LTV, el caso de un sistema MIMO LTV, el caso de un sistema del tipo SISO LTVD y el caso de un sistema MIMO LTVD para estabilizar. En todos los casos se considera incertidumbre en los parámetros.

El esquema de control propuesto es una solución alternativa al problema de acoplamiento de modelo para sistemas lineales variantes en el tiempo y sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo ya descritos. Se desarrolla la siguiente estrategia: se utiliza una ley de control singularmente perturbada que tiene como objetivo separar el sistema en dos subsistemas con dos diferentes escalas de tiempo. Se utiliza un control de acoplamiento que tiene como objetivo asignar la dinámica en lazo cerrado con la de un sistema lineal invariante en el tiempo. Se tiene en lazo cerrado un sistema lineal variante en el tiempo singularmente perturbado y se usan las técnicas de análisis de perturbaciones singulares para su análisis, ver [57] y [59]. Se desarrolla un observador de estado basado en perturbaciones singulares, de tal manera que todos los resultados se preservan para el caso SISO LTV, ver [58].

1.1. Estructura del Trabajo

La organización de la tesis es como sigue:

- En los Capítulos 2 y 3 se hace una breve descripción de algunos trabajos realizados en décadas pasadas sobre sistemas lineales variantes en el tiempo y sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo respectivamente.
- En el Capítulo 4, se da un repaso matemático que incluye definiciones y resultados sobre sistemas lineales variantes en el tiempo, sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo, sistemas lineales variantes en el tiempo singularmente perturbados y sistemas lineales variantes en el tiempo singularmente perturbados con retardo.
- En el Capítulo 5 se mencionan los conceptos básicos de estabilidad y se mencionan los criterios de estabilidad de Lyapunov respectivos a cada tipo de sistema.

- En el Capítulo 6 se propone un esquema de control singularmente perturbado para sistemas lineales variantes en el tiempo y sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo, para el caso una entrada una salida, cuando el estado es medible y se analiza la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado.
- En el Capítulo 7 se propone un observador de estado para sistemas lineales variantes en el tiempo y se analiza la convergencia del estado observado hacia el estado real.
- En el Capítulo 8 se propone un esquema de control singularmente perturbado para sistemas lineales variantes en el tiempo y sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo, en ambos casos se consideran múltiples entradas y múltiples salidas. Cuando el estado es medible y se demuestra la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado.
- En el Capítulo 9 se dan las conclusiones del trabajo.

Las demostraciones que corresponden a los resultados que se exponen en los Capítulos 6, 7 y 8 están en los apéndices.

Parte I

Antecedentes

Capítulo 2

Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo

Como parte de la teoría de sistemas los Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo se han venido estudiando desde hace seis décadas bajo diferentes puntos de vista, en matemáticas, física, ingeniería de sistemas y otras ramas de la ciencia. Los sistemas lineales son un importante tema de investigación de la teoría de sistemas que continuarán bajo estudio por un largo tiempo. Desde el punto de vista de la teoría de control algunos sistemas de interés son: aircrafts, robots paralelos, robots, sistemas mecatrónicos, satélites, sistemas de comunicación, entre otros.

En la teoría de control en particular los sistemas lineales han jugado un papel fundamental. Esto se debe en parte a que generalmente los sistemas no lineales pueden ser aproximados por sistemas lineales y así se pueden sacar conclusiones sobre el comportamiento del sistema no lineal mediante el análisis del sistema lineal. Esto es posible ya que en control automático los sistemas bajo control normalmente operan alrededor de algún punto nominal, donde la aproximación lineal describe de forma correcta el comportamiento del proceso real.

Como se mencionó anteriormente una gran parte de los sistemas físicos, biológicos, astronómicos, eléctricos, operan en tiempo continuo y son gobernados por una ecuación diferencial. Es común controlar sistemas no lineales con métodos de control de sistemas lineales y así aplicar la herramienta de control para sistemas lineales, como es el caso de: rechazo de perturbaciones, robustez a errores de modelado, retroalimentación de estado, análisis de estabilidad, modelado matemático, observabilidad, controlabilidad y otras.

En las siguientes secciones se presentan algunos de los principales trabajos sobre sistemas lineales variantes en el tiempo de las últimas seis décadas desde el enfoque de la teoría de control. En el Apéndice [A](#) se resumen conceptos básicos de la herramienta de análisis que se utiliza en las siguientes secciones.

2.1. Resultados de Silverman (1965 – 1971)

En 1965, Silverman y Meadows [68] estudiaron la propiedad de controlabilidad de los sistemas lineales variantes en el tiempo (LTV). Demostraron que los coeficientes del sistema deben poseer un número finito de derivadas, $n - 1$, para satisfacer la propiedad de controlabilidad; este concepto de controlabilidad lo aplicaron de forma particular a un problema de redes eléctricas como ejemplo.

En 1966, Silverman [69], busca lo que es la realización de un sistema lineal variante en el tiempo en forma canónica, es decir: al igual que en sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), existen cambios de base tal que se pueden obtener representaciones en forma canónica de la ecuación diferencial vectorial de primer orden, que comúnmente son llamadas forma controlador y forma observador de un sistema con una entrada una salida (SISO), es decir construye un método para pasar de la representación:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} f_{1,1}(t) & f_{1,2}(t) & \dots & f_{1,n}(t) \\ f_{2,1}(t) & f_{2,2}(t) & \dots & f_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1}(t) & f_{n,2}(t) & \dots & f_{n,n}(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix} u(t),$$

a su forma controlador, es decir:

$$\frac{d}{dt}\zeta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n,1}(t) & -a_{n,2}(t) & -a_{n,3}(t) & \dots & -a_{n,n}(t) \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Para demostrar que las representaciones son equivalentes, siguen interviniendo los conceptos de rango de una matriz. El concepto de espacio de estado y la condición de equivalencia de dos sistemas es una gran aportación. Es claro que la equivalencia de dos matrices variantes en el tiempo es diferente el concepto al que se maneja para el caso invariante¹.

LTI	LTV
$A = T^{-1}FT$	$A(t) = T^{-1}(t)F(t)T(t) - T^{-1}(t)\dot{T}(t)$

Cuadro 2.1: Comparación de Matriz de Transformación de LTI y LTV.

En 1967, Silverman y Meadows [70] mediante el estudio de la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t), \end{aligned}$$

obtienen lo que son las condiciones de controlabilidad y observabilidad para los sistemas LTV. A diferencia de los sistemas LTI, existen varios tipos de controlabilidad y observabilidad. Los principales resultados del artículo [70] son la obtención de dos algoritmos uno para

¹ T y $T(t)$ son las matrices de transformación para cada caso.

contruir la matriz de controlabilidad y el otro para construir la matriz de observabilidad para sistemas LTV. Estos son:

1. Algoritmo de Controlabilidad

$$Q_c(t) = [P_0(t)|P_1(t)|\dots|P_{n-1}(t)],$$

donde: (2.1)

$$P_0(t) = B(t) \quad \text{y} \quad P_{k+1}(t) = -A(t)P_k(t) + \frac{d}{dt}P_k(t).$$

2. Algoritmo de Observabilidad

$$Q_o(t) = [S_0(t)|S_1(t)|\dots|S_{n-1}(t)],$$

donde: (2.2)

$$S_0(t) = C^T(t) \quad \text{y} \quad S_{k+1}(t) = A^T(t)S_k(t) + \frac{d}{dt}S_k(t),$$

donde n es la dimensión del sistema. Además se obtiene al igual que en sistemas LTI las condiciones de dualidad. Lo más importante de este artículo es que se obtienen condiciones necesarias y suficientes para lo que es la controlabilidad y la observabilidad total en un intervalo de tiempo.

Teorema 2.1.1 (Sylverman [70])

El par $\{A(t), B(t)\}$, es totalmente controlable en un intervalo (t_0, t) , si y sólo si, la matriz $Q_c(t)$ no pierde rango en este intervalo.

□

Teorema 2.1.2 (Sylverman [70])

El par $\{A(t), C(t)\}$, es totalmente observable en un intervalo (t_0, t) , si y sólo si, la matriz $Q_o(t)$ no pierde rango en este intervalo.

□

En 1971, Silverman [71] revisa las propiedades estructurales de los sistemas LTV encontradas hasta ese momento, amplía los análisis realizados, destaca el uso de los módulos como una herramienta de gran importancia, la cual es una estructura algebraica que permite caracterizar las realizaciones del tipo controlador y observador. La equivalencia entre representaciones en variables de estado son revisadas para el caso variante en el tiempo, se obtienen resultados equivalentes para el caso de sistemas LTI, como lo son los índices de controlabilidad y observabilidad.

La representación en la forma de Kalman es encontrada y se hace un análisis de esta matriz para caracterizar lo que es la parte controlable del sistema, la parte no controlable, la parte no observable y la parte observable al igual que en los sistemas LTI.

2.2. Resultados de Kamen (1976 – 1989)

En 1976, Kamen [32] utiliza como herramienta de trabajo el anillo de polinomios diferenciales, como lo puede ser $p(\frac{d}{dt}) = \frac{d}{dt} + a_0(t)$, en el Apéndice A se resumen brevemente los conceptos básicos de esta herramienta de análisis. Este es un anillo no conmutativo. Esta herramienta se aplica al estudio de sistemas LTV, para describir de forma operacional la matriz de transferencia sobre el anillo de fracciones. Se considera de forma muy puntual el caso una entrada-una salida.

Se establecen las bases para el uso de operadores diferenciales en los sistemas LTV, esto permite, de alguna manera, guardando las proporciones debidas, tener una herramienta equivalente a la transformada de Laplace que se usa en los sistemas LTI.

En 1979, Kamen y Hafez [33] extienden el análisis y se usan módulos para la representación de los sistemas LTV, la obtención de generadores y otros resultados algebraicos son dados. Este artículo ofrece una herramienta abstracta para la realización de los LTV.

En 1979, Kamen [34] estudia el caso de sistemas analíticos,² justifica la importancia de tener resultados teóricos para este tipo de sistemas. Se desarrollan procedimientos constructivos para obtener las realizaciones de este tipo y también se estudia el caso de cómo aproximar un sistemas LTV por medio de sistemas analíticos mediante el método de Weierstrass.

Se dan resultados para la realización de sistemas analíticos basados en la matriz de Hankel. Se estudian los casos para las realizaciones mínimas, se ofrecen algoritmos del tipo computacional para la comprobación.

En 1988, Kamen [35] continúa trabajando con operadores diferenciales, se hace énfasis en el estudio de los polos y los ceros del sistema, se dan métodos basados en la solución de ecuaciones diferenciales no lineales para poder factorizar el sistema de la forma³:

$$\begin{aligned} a(D, t)y(t) &= b(D, t)x(t), \\ a(D, t) &= D^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)D^i, \\ b(D, t) &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i(t)D^i, \end{aligned}$$

donde $D = \frac{d}{dt}$, los coeficientes $a_i(t)$ y $b_i(t)$ son derivables. En sus correspondientes productos de monomios. Lo cual permite hacer un análisis de estabilidad basado en las raíces del sistema, las cuales son variantes en el tiempo.

En 1989, Kamen, Khargonekar y Tannenbaum [36] atacan el caso de control por retro-

²Son aquellos en los que sus parámetros son funciones analíticas.

³Se respeta la nomenclatura utilizada por los Autores, ejemplo $D = \frac{d}{dt}$ en [33], $s = \frac{d}{dt}$ en [43], $\sigma = 1/s$ en [44].

alimentación dinámica del estado, de la forma $u(t) = K(t)x(t)$ para un sistema:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

Tal que el sistema en lazo cerrado es:

$$\frac{d}{dt}x(t) = [A(t) + B(t)K(t)]x(t),$$

se estudia la estabilidad del sistema basada en los valores propios de la matriz:

$$\Re\lambda_i [A(t) + B(t)K(t)] < \gamma, \quad \forall \gamma < 0,$$

los cuales pueden ser no finitos para obtener la matriz $K(t)$, tal que el sistema sea estable. Ésta se propone de la forma:

$$K(t) = B^T(t)P(t),$$

donde $P(t)$ satisface la siguiente ecuación de Riccati:

$$[A^T(t) + \gamma I]P(t) + P(t)[A^T(t) + \gamma I] - P(t)B^T(t)B(t)P(t) = -Q,$$

donde Q es una matriz definida positiva. Se demuestra que el sistema es asintóticamente estable bajo estas condiciones.

Kamen es el primero en introducir para el estudio de los sistemas LTV, anillos diferenciables y anillos de fracciones. Esta herramienta es aplicada a los coeficientes de las matrices $\{A(t), B(t), C(t)\}$. Extiende el uso de esta herramienta para el diseño de un controlador por retroalimentación de estado dinámica donde el conocimiento de la tripleta $\{A(t), B(t), C(t)\}$ es una hipótesis.

2.3. Resultados de Chen, Wu e Ichikawa (1995 – 2001)

En 1997, Chen [9] propone una ley de control por retroalimentación de estado la cual fue diseñada para sistemas lineales variantes en el tiempo, basada en una transformación de estado no lineal. En control óptimo para sistemas lineales variantes en el tiempo, existen trabajos como el de Wu [78] en 1995 y el de Ichikawa [27] en 2001, donde un controlador cuadrático Gaussiano (LQG) es desarrollado. Para ello, es necesario el conocimiento de las matrices, $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$, y la medición del estado; la estabilidad cuadrática es garantizada. Wu [78] ataca el problema de forma más general, él desarrolla un observador LQG, pero el conocimiento de las matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ es aún necesario.

2.4. Resultados de Marinescu y Bourlès (1999 – 2011)

En 1999, Bourlès y Marinescu [6] estudian el problema de los polos y los ceros de transmisión al infinito. Se relaciona a los polos de transmisión al infinito con el número de derivadores entre la entrada y la salida del sistema y los ceros de transmisión al infinito se relacionan con el número de integradores entre la entrada y la salida, es decir, están asociados con el grado relativo de la matriz de transferencia.

2.4.1. Matriz de Transferencia

Una aportación del artículo [6] es la definición de la matriz de transferencia para sistemas LTV y la definición de grado relativo de la matriz de transferencia. Esto se logra de la siguiente manera:

1. Se selecciona el campo diferencial donde se trabajará.
2. Se representa al sistema con módulos finitamente generados sobre dominios de ideales principales.
3. Se escribe una representación de forma polinomial (PMD).
4. Se definen los diferentes tipos de polos y ceros del sistema.

1. Selección del campo diferencial de trabajo

Sea $K \subseteq \mathbb{R}$, el campo conmutativo dotado con una derivación “ \cdot ”. $R := K[s]$ son polinomios con coeficientes en K e indeterminada s con la regla de conmutación:

$$s \cdot a = as + \dot{a}, \quad \forall a \in K.$$

Se construye el anillo de fracciones F , cuyos elementos son de la forma $\sigma = 1/s$, se trabaja sobre el anillo:

$$S := K[[\sigma]],$$

que es el de las series de la forma:

$$a = a_0 + a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \dots$$

con la siguiente operación definida:

$$\sigma \cdot a = a\sigma - \sigma \left(\frac{d}{dt} a \right) \sigma.$$

2. Representación del sistema

Los ideales principales pueden ser derechos o izquierdos y sus elementos satisfacen la propiedad de Ore. Existen bases tales que se tiene la matriz que define al módulo.

3. Representación polinomial del sistema

Con la herramienta definida, se describe al sistema como sigue:

$$\begin{aligned} D(s)\zeta &= N(s)u, \\ y &= Q(s)\zeta + W(s)u, \end{aligned}$$

la cual es definida como nuevo sistema.⁴ Para el estudio de su estructura, se emplea la forma:

$$\begin{bmatrix} D(s) & -N(s) & 0 \\ Q(s) & W(s) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ u \\ y \end{bmatrix} = \bar{0},$$

y se realiza una factorización coprima derecha, para poder estudiar la estructura del sistema.

⁴En el artículo [6] se le nombra newborn system

4. Ceros y polos del Sistema

Los polos y ceros que un sistema LTV se definen de la siguiente manera:

Definición 2.4.1 (Bourlès y Marinescu [6])

Los polos y ceros al infinito que corresponden a la dinámica de un sistema lineal son los \mathcal{S} -módulos siguientes:

- a) Ceros al infinito de desacoplamiento de entrada \mathcal{D}^+ .
- b) Ceros al infinito de desacoplamiento de salida $\mathcal{D}^+/[y^+ \ u^+]_{\mathcal{S}}$.
- c) Ceros al infinito de desacoplamiento de entrada-salida $\mathcal{T}^+ / (\mathcal{T}^+ \cap [y^+ \ u^+]_{\mathcal{S}})$.
- d) Modo oculto al infinito: $\mathcal{D}^+ / (\Phi^+ \cap [y^+ \ u^+]_{\mathcal{S}})$.
- e) Cero invariante al infinito $\mathcal{T}^+ / [y^+]_{\mathcal{S}}$.
- f) Ceros de transmisión al infinito $(\Phi^+ \cap [y^+ \ u^+]_{\mathcal{S}}) / (\Phi^+ \cap [y^+]_{\mathcal{S}})$.

donde: \mathcal{D}^+ es un S -módulo, \mathcal{T}^+ es el submódulo de torsión de \mathcal{D}^+ y Φ^+ es un submódulo libre de \mathcal{D}^+ .

□

2.4.2. Acoplamiento de Sistemas

En 2003, Marinescu y Bourlès [43] analizan el problema de acoplamiento de sistema, bajo un enfoque algebraico para sistemas LTV. Este problema se refiere a poder asignar una matriz de transferencia a un sistema LTV dado, mediante un compensador $G(s)$, tal que:

$$G(s)A(s) = B(s), \quad \text{matrices sobre el anillo } K[s],$$

donde $A(s)$ es la matriz de transferencia del sistema, $G(s)$ compensador y $B(s)$ matriz de transferencia que se desea asignar. Se trabaja sobre dominios de ideales principales ya descritos, así como sobre anillos no conmutativos tanto diferenciales como integrales.

La herramienta es aplicada como sigue:

1. Dadas las matrices $A(s) \in F^{m \times r}$ y $B(s) \in F^{l \times r}$ con rango pleno r , se construye la matriz:

$$F(s) = \begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix}.$$

2. Se calcula el grado de $F(s)$, lo cual permite saber que grado tienen los polos al infinito de las matrices $A(s)$ y $B(s)$.
3. Mediante la descomposición de $F(s)$ en su forma de **Smith-MacMillan**. Se hace uso de la definición de contenido de una matriz como en sistemas LTI.

Definición 2.4.2 (Marinescu y Bourlès [43])

Sea $G(s) \in F^{m \times n}$ se define el contenido de la matriz $G(s)$ como:

$$C_{\infty}(G(s)) = \delta(\text{polos al infinito de } G) - \delta(\text{ceros al infinito de } G).$$

Donde $\delta(\cdot)$ denota el grado del módulo en el paréntesis.

□

Con el uso de las operaciones ya definidas se demuestra la siguiente propiedad:

Propiedad 2.4.1 (Marinescu y Bourlès [43])

Sea $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ entonces:

$$C_\infty(G(s)) = C_\infty(G_1(s)) + C_\infty(G_2(s)).$$

□

Esto permite obtener el resultado principal del artículo, el cual es:

Teorema 2.4.1 (Marinescu y Bourlès [43])

Dadas las matrices $A(s) \in F^{m \times r}$ y $B(s) \in F^{l \times r}$, con $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \text{rank}(F)$, si existe un compensador $G(s)$. El problema de acoplamiento exacto de modelo (EMM) tiene solución propia, si y sólo si:

$$C_\infty(A(s)) = C_\infty(F(s)),$$

donde:

$$F(s) = \begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix}.$$

□

2.4.3. Aplicaciones Prácticas

En 2007, Marinescu y Bourlès [44] presentan casos prácticos de aplicación de la herramienta desarrollada hasta el momento. La aplican a problemas de ingeniería tales como: excitación variable para un motor de DC, problemas de acoplamiento exacto de sistemas y rechazo de perturbaciones. Se dan estrategias de implementación y muestran la utilidad de la herramienta utilizada.

2.4.4. Extensión de la Herramienta

En 2009, Marinescu y Bourlès [45] extienden el análisis al anillo, $K := C((t))$ el anillo conmutativo de las series de Laurent, con coeficientes en C . Los elementos son de la forma:

$$a = \sum_{i \geq \nu} a_i t^i, \quad a_i \in C.$$

Al extender el campo se tienen polinomios de la forma:

$$p(\partial) = \partial^n + \sum_{i=1}^n a_i \partial^{n-i},$$

con $\partial = \frac{d}{dt}$. Un polinomio de este tipo puede ser factorizado de la siguiente forma:

$$p(\partial) = (\partial - r_1)^{d_1} (\partial - r_2)^{d_2} \dots (\partial - r_k)^{d_k},$$

si $d_i = 1$ para todo valor de $i = \{1, 2, \dots, k\}$ se tienen factores de primer orden. El extender el campo permite trabajar sobre la existencia de soluciones fundamentales para sistemas

LTV, como lo que se tiene en sistemas LTI, que como se sabe para un polinomio de orden n , se tienen n soluciones linealmente independientes.

Se da un método para descomponer el polinomio $p(\partial)$ en n factores, es decir: las raíces del sistema que son los polos del mismo y esto permite hacer un estudio de la estabilidad como en el caso clásico de sistemas LTI.

Es posible hacer el análisis de los polos en todo instante de tiempo, se presenta una forma extensa sobre el uso de la herramienta que se ha estado desarrollando para los sistemas LTV.

2.4.5. Modos Ocultos

En 2009, Marinescu y Bourlès [46] se enfocan principalmente al análisis de los grados de los polos y los ceros al infinito, así como de los llamados modos ocultos los cuales ocurren cuando existen cancelaciones matemáticas entre polos y ceros. Se atacan los siguientes casos:

1. Sistema una entrada una salida $y = Gu$.
2. Suma de sistemas $y = y_1 + y_2$, donde $y_1 = G_1u_1$ y $y_2 = G_2u_2$.
3. Sistemas en cascada $y = G_2G_1u$.

El análisis de los modos ocultos de los casos anteriores se realiza mediante la factorización coprima derecha de la matriz de transferencia del sistema, que de forma general es:

$$B_{12} = \begin{bmatrix} -B_{1D}^+(\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & -B_{2D}^+(\sigma) & -B_{2N}^+(\sigma) \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Se demuestra que existen matrices unimodulares sobre el mismo campo de tal forma que se puede encontrar la forma de Smith-MacMillan de la matriz B_{12} , de la cual se obtiene la información de los modos ocultos del sistema.

Capítulo 3

Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo con Retardo

En la descripción matemática de un proceso físico, por lo general suponemos que el comportamiento del proceso considerado depende sólo del estado presente, esta consideración es válida para una gran clase de sistemas dinámicos.

Existen situaciones donde esta consideración no es válida y el uso de modelos matemáticos clásicos en el análisis y diseño de sistemas lleva a tener un bajo desempeño, la existencia de retardos pueden hacer que el sistema sea inestable. En estos casos, lo mejor es considerar que el comportamiento del sistema incluye información de estados anteriores. Estos sistemas son conocidos como *sistemas con retardo*. Los retardos deben tomarse en cuenta tanto, en el análisis como en el diseño de controladores. De no ser tomados en cuenta, la respuesta del sistema en lazo cerrado puede llegar a degradarse hasta la inestabilidad, especialmente si el sistema a controlar es inestable.

Los sistemas de control con retardos aparecen frecuentemente en aplicaciones prácticas, o bien de forma intrínseca al propio proceso, o bien de forma inducida por la propia plataforma (tiempos de cómputo, retardos de comunicación en el intercambio de datos entre dispositivos, etc). Los retardos pueden afectar a la entrada, la salida o el estado interno del proceso.

La existencia de retardos en los modelos matemáticos de sistemas pueden tener diversas causas, como, por ejemplo: al medir las variables del sistema, transmisión de señales, por cuestiones tecnológicas. Esto nos lleva a preguntarnos: ¿Cómo modelar los sistemas?, ¿Cómo analizar la estabilidad? o ¿Cómo controlar este tipo de sistemas?.

Existen principalmente tres formas de modelar **Sistemas con retardo**¹:

1. **Evolución en espacios abstractos.** En este caso, los sistemas con retardo son incluidos en una clase de sistemas lineales para la cual su evolución es descrita por operadores apropiados en espacios de dimensión infinita. Desde el punto de vista de

¹ver Capítulo uno de [13]

la teoría de sistemas, esta forma de análisis es muy general, los métodos desarrollados no son siempre fáciles de aplicar a problemas específicos.

2. **Ecuaciones diferenciales funcionales.** En este caso se tienen dos formas de como analizar al sistema con retardo, que este evoluciona en un espacio de dimensión finita, o en un espacio funcional. Desde el punto de vista de la teoría de sistemas, se pueden usar conceptos clásicos específicos a la dimensión finita de sistemas lineales, o introducir nuevos conceptos más apropiados a la interpretación de espacios funcionales. Una ventaja de tener un modelo con esta herramienta es que se puede estudiar un problema de dimensión infinita usando herramientas de dimensión finita.
3. **Ecuaciones diferenciales sobre anillos o módulos.** En este caso se tiene un interés sobre las propiedades estructurales del sistema, como estabilizabilidad y observabilidad. Esta herramienta es útil cuando la información específica sobre el tamaño del retardo no es necesaria.

En este trabajo de tesis se considerarán principalmente modelos del tipo 2 y 3 debido a la herramienta matemática para su análisis.

En las siguientes secciones se describen brevemente algunos de los trabajos sobre sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo (LTVD), con un enfoque de la teoría de control, de las últimas cinco décadas.

3.1. Resultados Buckalo (1968)

En 1968 Andrew Buckalo [8] estudia la propiedad de controlabilidad para sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo. Condiciones suficientes en términos de los coeficientes de las matrices son dadas, la noción de controlabilidad para sistemas con retardo es relacionada con la definición para sistemas sin retardo. Mediante la matriz de controlabilidad $Q_c(t)$, definida por Sylverman en [70], ver ecuación (2.1). El resultado principal del trabajo es el siguiente.

Teorema 3.1.1 (Buckalo [8])

Dado el sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \rho) + C(t)u(t),$$

con función inicial $\phi(t)$, para $t \in [-\rho, 0]$, es completamente controlable al origen del espacio funcional si existe un $t_1 > 0$ tal que:

1. *La matriz de controlabilidad $Q_c(t)$ tiene rango n para todo $t \in [t_1 - \rho, t_1]$ y*
2. *$B(t)x(t - \rho) + C(t)u(t) = 0$ admite una solución continua a pedazos $u(t)$ para $t \in [t_1, t_1 + \rho]$.*

□

3.2. Resultados Weiss (1970)

En 1970 Leonard Weiss [77] establece una condición suficiente para la propiedad de controlabilidad de sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo constante. Esto lo hace en base a la solución de la ecuación diferencial.

El resultado principal de este trabajo es, dado el sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + C(t)u(t), \quad t_0 \leq t,$$

define la matriz de controlabilidad $Q(t)$, de la siguiente manera:

$$Q(t) = [Q_1^1(t), \dots, Q_1^n(t), Q_2^2(t-h), \dots, Q_2^n(t-h), \dots, Q_n^n(t-(n-1)h)]$$

con

$$\begin{aligned} Q_1^1(t) &= C(t), \\ Q_i^{k+1}(t) &= \frac{d}{dt}Q_i^k(t) - A(t+(j-1)h)Q_i^k(t) - B(t+(j-1)h)Q_{i-1}^k(t) \\ j &= 1, \dots, k, \quad k = 1, \dots, n, \\ \text{y } Q_i^k(t) &= 0, \quad \text{para } j = 0 \quad \text{ó } j \geq k. \end{aligned} \tag{3.1}$$

concluye con el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1 (Weiss [77])

Si existe t_1 tal que el rank $Q(t_1) = n$, entonces el sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + C(t)u(t)$$

es controlable al origen desde cualquier punto finito $t_0 < t_1$.

□

Para la época este resultado significó un gran avance en el estudio de los sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo.

3.3. Resultados Olbrot (1972)

En 1972 Andrzej W. Olbrot [51] estudia el problema de controlabilidad para sistemas lineales variantes en el tiempo con retardos constantes en la entrada. Establece condiciones necesarias y suficientes para la propiedad de controlabilidad del sistema mediante la matriz de transición del sistema.

Un resultado de este trabajo es, dado el sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=0}^k B_i(t)u(t-h_i),$$

se define

$$B_i^*(t) = \begin{cases} B_i(t), & \forall t \in [t_0, t_1] \\ 0, & \forall t > t_1 \end{cases},$$

por medio de la matriz de transición $\Phi(t, s)$ obtiene las matrices

$$\begin{aligned}\psi(s) &= \sum_{i=0}^k \Phi(t_1, s + h_i) B_i^*(s + h_i), \\ W(u) &= \int_{t_0}^{t_1} \psi(s) u(s) ds.\end{aligned}$$

Concluye con el siguiente lema.

Lema 3.3.1 (Olbro [51])

El sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=0}^k B_i(t)u(t - h_i)$$

es controlable si y sólo si

$$y \in \mathbb{R}^n, \quad y^T \psi(s) = 0$$

casi en todas partes del intervalo $[t_0, t_1]$, implica que $y = 0$.

□

3.4. Resultados Sendaula (1974)

En 1974 Musoke Sendaula [64] estudia la observabilidad para sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo variante en el tiempo. Desarrolla un criterio algebraico para la propiedad de observabilidad de estos sistemas.

Analiza la observabilidad fuerte del siguiente tipo de sistema:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t - h(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \\ y(t) &= C_0(t)x(t),\end{aligned}\tag{3.2}$$

con condición inicial $\phi(\sigma)$, $\sigma \in [t_0 - h(t_0), t_0]$. Para esto define el Gramiano de observabilidad del sistema (3.2) como

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t-h(t)}^t A_1(\sigma) \Phi(\sigma, t_0) C^T(\sigma) \int_{t_0-h(t_0)}^{t_0} \Phi(\sigma) A_1(r) dr d\sigma dt,$$

donde: $\Phi(\sigma, t_0)$ es la matriz fundamental del sistema. Demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1 (Sendaula [64])

El Sistema (3.2) es fuertemente observable en el intervalo $[t_0, t_1]$ sí y sólo sí $M(t_0, t_1)$ tiene rango n para todo $t \in [t_0 - h(t_0), t_0]$. □

Este trabajo representó un gran paso en el estudio de sistemas con coeficientes variables.

3.5. Resultados Morse (1976)

En 1976 A. S. Morse [50] estudia la estructura algebraica de sistemas con retardo definidos sobre el anillo de polinomios en λ , $\mathbb{R}[\lambda]$. Introduce definiciones sobre controlabilidad y observabilidad. Estas definiciones se utilizan para caracterizar la representación del sistema.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A(\lambda)x(t) + B(\lambda)u(t), \\ y(t) &= C(\lambda)x(t),\end{aligned}\tag{3.3}$$

donde λ es el operador retardo $\lambda = e^{-sT}$ para $T > 0$. Este artículo es el primer trabajo donde con un contra ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= x_1(t) + x_3(t - T), \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= x_2(t) + x_3(t), \\ \frac{d}{dt}x_3(t) &= u(t),\end{aligned}$$

se muestra que la condición de controlabilidad no es suficiente para garantizar la existencia de una retroalimentación de estado tal que el sistema siga cumpliendo con la condición de controlabilidad, ya que si se hace el cambio de variable $z(t) = x_1(t) - x_2(t - T)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}z(t) &= \frac{d}{dt}x_1(t) - \frac{d}{dt}x_2(t - T), \\ &= x_1(t) - x_3(t - T) - (x_2(t - T) + x_3(t - T)), \\ &= z(t),\end{aligned}$$

o

$$z(t) = e^{(t-T)}z(T).$$

Lo cual significa que no existe una ley de control, $u(t)$, tal que la dinámica de la diferencia entre $x_1(t)$ y $x_2(t - T)$ pueda ser asignada a voluntad. Por lo tanto este sistema no es estabilizable.

El artículo [50] muestra un resultado inesperado y planteó nuevos retos.

3.6. Resultados Malek-Zavarei (1982)

En 1982 M. Malek-Zavarei [41] estudia el concepto de observabilidad para sistemas no estacionarios con múltiples retardos, representados por la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A_0(t)x(t) + \sum_{i=1}^m A_i(t)x(t - h_i), \\ y(t) &= C(t)x(t),\end{aligned}\tag{3.4}$$

con $x(t) = \phi(t)$, $t_0 - h_m \leq t \leq t_0$ y $0 < h_1 \leq \dots \leq h_m$.

Establece una condición necesaria para la observabilidad del sistema basada en el conocimiento de las matrices $A_i(t)$, para $i = 0, 1, \dots, m$. y $C(t)$. Esto lo hace de la siguiente manera:

1. Define la matriz de observabilidad como:

$$P(t) = [P_1^1, P_1^2, \dots, P_1^n],$$

con:

$$P_1^1 = C^T(t),$$

$$P_1^{j+1} = A_0^T(t)P_1^j + \frac{d}{dt}P_1^j, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

2. Demuestra el siguiente teorema

Teorema 3.6.1 (Malek-Zavarei [41])

Si las matrices $A_i(t)$, para $i = 0, 1, \dots, m$, son $n - 2$ veces derivables y la matriz $C(t)$ es $n - 1$ veces derivable sobre el intervalo $[t_0, t_f)$, entonces el Sistema (3.4) es observable si la matriz de observabilidad $P(t)$ tiene rango completo en el intervalo. \square

Este trabajo establecio un criterio algebraico de observabilidad para este tipo de sistemas.

3.7. Resultados Verriest (1994)

En 1994 Erik I. Verriest [75] estudia la propiedad de estabilidad robusta y estabilidad asintótica para sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo acotado desconocido. Analiza el sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - h(t)),$$

y establece condiciones suficientes en base al conocimiento de los coeficientes de las matrices $A(t)$, $B(t)$. Las condiciones son obtenidas en base a la existencia de una matriz definida positiva, $P(t)$, que satisface un cierto tipo de ecuación diferencial de Riccati. El resultado principal del trabajo es el siguiente teorema.

Teorema 3.7.1

Considérese el sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - h(t)), \quad \text{con } h(\cdot) \in \mathcal{H}.$$

Si existe una tripleta de matrices variantes en el tiempo continuas simétricas definidas positivas, $P(t)$, $Q(t, s)$ y $R(t)$ tal que:

$$\frac{d}{dt}P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + Q(t, t) + S(t) = 0,$$

con:

$$S(t) = \frac{P(t)B(t)Q^{-1}(t, t - h(t))B^T(t)P(t)}{1 - \frac{d}{dt}h(t)} + R(t).$$

Entonces el sistema es \mathcal{H} -Robusto estable. \square

3.8. Resultados Wu y Grigoriadis (2001)

En 2001 Fen Wu y Karolos M. Grigoriadis [79] analizan el problema de estabilización mediante retroalimentación de estado. Analizan el sistema:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(p(t))x(t) + A_h(p(t))x(t - h(p(t))) + B(p(t))u(t), \quad (3.5)$$

donde las matrices $A(p(t))$, $A_h(p(t))$ y $B(p(t))$ son funciones continuas conocidas de un vector variante en el tiempo $p(t)$, que pertenece al siguiente conjunto:

$$\mathcal{F} = \left\{ p \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : p(t) \in \mathcal{P}, \left| \frac{d}{dt}p_i(t) \right| \leq \nu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \right\},$$

con \mathcal{P} un conjunto compacto de \mathbb{R}^n y los números ν_i son negativos para $i = 1, 2, \dots, n$.

La retroalimentación de estado propuesta es:

$$u(t) = F(p(t))x(t). \quad (3.6)$$

Enseguida analiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado, mediante el método de Lyapunov, de la siguiente manera:

1. Propone la funcional de Lyapunov-Krasovskii.

$$V(x, p(t)) = x^T(t)P(p(t))x(t) + \int_{t-h(p(t))}^t x^T(\zeta)Qx(\zeta)d\zeta.$$

2. El criterio para estabilidad está dado en terminos de desigualdades lineales matriciales (LMI) siguiente:

$$\begin{bmatrix} P(p)A(p) + A^T(p)P(p) + Q & (*) \\ A_h^T(p)P(p) & -Q \end{bmatrix} \leq 0.$$

Extiende el resultado para el caso cuando se tienen multiples retardos. Es decir cuando se tiene un término de la forma $\sum_1^k A_{h_i}(p(t))x(t - h_i(p(t)))$, para el cual sigue el mismo procedimiento.

3.9. Resultados Wang, Zhang y Xie (2007)

En 2001 Wei Wang, Huanshui Zhang y Lihua Xie [76] proponen un filtro óptimo para sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo variante en el tiempo. Este filtro está basado en un filtro de Kalman variante en el tiempo.

El resultado de este trabajo está basado en la solución de dos ecuaciones algebraicas de Riccati, en vez de resolver dos ecuaciones diferenciales de Riccati. Esto hace que el tiempo

de cómputo de los estados estimados sea menor.

En este mismo año Javad Mohammadpour y Karolos M. Grigoriadis [49] estudian la estabilidad y desempeño del sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(p(t))x(t) + A_h(p(t))x(t-h), \quad (3.7)$$

los resultados son obtenidos usando el segundo método de Lyapunov. Establecen criterios del tipo de desigualdades matriciales lineales, el resultado principal es enunciado en el siguiente lema.

Lema 3.9.1 (Mohammadpour y Grigoriadis [49])

Sea el Sistema (3.7) y considere que existen matrices definidas positivas $P(p(t))$, Q , y números positivos β y ζ tal que:

$$\begin{bmatrix} P(p)A(p) + A^T(p)P(p) + Q + \frac{d}{dt}P(p) + 2\beta P(p) & P(p)A_h(p) \\ * & -e^{-2\beta h} \end{bmatrix} \leq 0,$$

y

$$\begin{bmatrix} P(p)A(p) + A^T(p)P(p) + Q + \frac{d}{dt}P(p) + 2\beta P(p) & P(p)A_h(p) \\ * & -e^{-2\zeta h} \end{bmatrix} \leq 0,$$

□

3.10. Resultados Liu, Tang y Han (2011)

En 2011 Hai-Lin Liu, Gong-You Tang y Shi-Yuan Han [22] estudian el problema de control óptimo del siguiente sistema con multiples retardos,

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^N A_i(t)x(t-\tau_i) + B(t)u(t), \quad (3.8)$$

seleccionan el siguiente indice finito cuadrático de desempeño,

$$J = x^T(T)Qx(T) + \int_{t_0}^T u^T(t)Ru(t)dt, \quad (3.9)$$

donde Q es una matriz semidefinida positiva y R es una matriz definida positiva. El problema de control óptimo es encontrar $u^*(t)$ la cual hace que el índice de desempeño J sea mínimo restringido al sistema (3.8). El resultado principal del artículo [22] queda expresado en el siguiente teorema.

Teorema 3.10.1 (Liu, Tang y Han [22])

La ley de control óptima $u^*(t)$ del índice de desempeño (3.9) restringia al Sistema (3.8) puede ser calculada de la siguiente forma:

$$u^*(t) = -R(t)B^T(t)\Phi(t)Q \left[I + \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^T \Phi(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\Phi^T(t)Qdt \right]^{-1}, \quad (3.10)$$

donde Φ es la matriz fundamental del sistema. □

3.11. Análisis de los Resultados

Los sistemas con retardo son parte de los sistemas dinámicos que se pueden encontrar en la naturaleza o en sistemas creados por el hombre. En teoría de control se tienen ya varios resultados sobre propiedades estructurales, estabilidad y estabilización de este tipo de sistemas. En las secciones anteriores se presentaron algunos de estos resultados ya que para sistemas lineales con retardo los resultados pueden variar dependiendo de:

- tipo de retardo,
- tipo de modelo,
- parámetros del sistema,
- tipo de controlador.

Por este motivo en las secciones anteriores se resumen ciertos resultados sobre controlabilidad, observabilidad, estabilidad y estabilización de sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo que serán tratados en esta tesis en los Capítulos 6 y 8.

Los resultados que se han presentado son en general para sistemas dinámicos representados por la ecuación de estado lineal con retardo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t - \tau(t)) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde las matrices $A_0(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ se consideran conocidas. La función $\tau(t)$ en general se considera acotada.

Es importante notar que para el Sistema (3.11) los resultados sobre:

1. controlabilidad y observabilidad, no solo dependen del conocimiento preciso de los parámetros del sistema. El tipo de retardo y las propiedades de este también juegan un papel relevante.
2. estabilidad, para esta propiedad nuevamente el conocimiento preciso de los parámetros no es suficiente, ya que, considerar un criterio independiente del retardo no es recomendable.

Nótese que a diferencia de los sistemas lineales variantes en el tiempo, las propiedades de controlabilidad, observabilidad y estabilidad no solo dependen de los parámetros del sistema. El tipo de retardo y la dinámica de este es muy importante.

En este trabajo de tesis se presenta un esquema de control, para sistemas representados por la Ecuación (3.11), que representa una alternativa de solución al problema de estabilización y acoplamiento de modelo, cuando se tiene desconocimiento de los parámetros y solo se conocen ciertas cotas superiores. Lo cual desde el punto de vista de la ingeniería de procesos es útil para lograr un buen desempeño de los sistemas existentes en la industria.

Parte II
Preliminares

Capítulo 4

Definiciones y Resultados de Sistemas LTV y LTVD

En este trabajo de tesis se proponen leyes de control para sistemas lineales variantes en el tiempo y sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo. En este capítulo: se presentan definiciones básicas de las representaciones de estado utilizadas. En las Secciones 4.1 y 4.2 se da la representación de un sistema lineal variante en el tiempo y un sistema lineal variante en el tiempo con retardo en el espacio de estado. Esta puede ser del tipo: una entrada-una salida, comúnmente llamado caso SISO (por su siglas en inglés single input-single output) o con n entradas y m salidas, comúnmente llamado caso MIMO (por su siglas en inglés multiple input-multiple output). En las Secciones 4.3 y 4.5 se muestran resultados sobre la solución de cada tipo de sistema y finalmente en las Secciones 4.4 y 4.6 se muestran resultados para el caso de sistemas con perturbaciones singulares.

4.1. Definición y Representación de Estado: Caso SISO

Para un sistema lineal con una entrada y una salida se consideran dos casos: 1) un sistema lineal variante en el tiempo definido por la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \sum_{i=1}^n a_{n-i}(t) \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}y(t) = b(t)u(t), \quad (4.1)$$

definida para $t \geq t_0$, con condiciones iniciales:

$$y(t_0), \quad \frac{d}{dt}y(t_0), \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t_0),$$

y 2) un sistema lineal variante en el tiempo con retardo definido por la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \sum_{i=1}^n a_{n-i}(t) \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}y(t) + \sum_{i=1}^n \hat{a}_{n-i}(t) \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}y(t - \tau(t)) = b(t)u(t), \quad (4.2)$$

con $\tau(t)$ una función continua, derivable y que satisface $0 \leq \tau(t) \leq \hat{\tau}$. Definida para $t \geq t_0$, con condiciones iniciales:

$$y(\sigma) = \psi(\sigma) \quad \forall \sigma \in [\hat{\tau}, 0), \\ y(t_0), \quad \frac{d}{dt}y(t_0), \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t_0).$$

Ambos casos pueden ser llevados a una forma de ecuación lineal de estado con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$, ver [63] y [3]. Para esto, se definen las variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt}, \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para cada caso se tendrán las siguientes representaciones de estado:

1. Sistema Lineal Variante en el Tiempo

Escribiendo la Ecuación (4.1) en forma vectorial se obtiene una ecuación de estado lineal variante en el tiempo,

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_n(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u(t), \quad (4.4)$$

donde $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$ es el vector de estado. La ecuación de salida es:

$$y(t) = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] x(t),$$

y las condiciones iniciales sobre la salida y sus derivadas forman el vector de estado inicial:

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} y(t_0) \\ \frac{dy(t_0)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y(t_0)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}.$$

2. Sistema Lineal Variante en el Tiempo con Retardo

Escribiendo la Ecuación (4.2) en forma vectorial se obtiene una ecuación de estado lineal variante en el tiempo,

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_n(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ -\hat{a}_0(t) & \cdots & -\hat{a}_n(t) \end{bmatrix} x(t - \tau(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u(t), \quad (4.5)$$

donde $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$ es el vector de estado. La ecuación de salida es:

$$y(t) = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] x(t),$$

y las condiciones iniciales sobre la salida y sus derivadas son:

$$x(\sigma) = \Psi(\sigma) = \left[\psi(\sigma) \quad \frac{d}{dt}\psi(\sigma) \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\psi(\sigma) \right]^T \quad \forall \sigma \in [\hat{\tau}, 0),$$

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} y(t_0) \\ \frac{dy(t_0)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y(t_0)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}.$$

4.2. Definición y Representación de Estado: Caso MIMO

Para un sistema con m salidas y m entradas, también puede expresarse en forma de una ecuación de estado lineal variante en el tiempo. De igual forma que en la sección anterior se consideraran dos casos: 1) sistema lineal variante en el tiempo definido por siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, ver [31]:

$$\left(S(p) + D_{\ell c}(t)\Psi(p) \right) y(t) = B(t)u(t), \quad (4.6)$$

y 2) un sistema lineal variante en el tiempo con retardo definido por siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left(S(p) + D_{\ell c}(t)\Psi(p) \right) y(t) + D_{\ell dc}(t)\Psi(p)y(t - \tau(t)) = B(t)u(t), \quad (4.7)$$

en ambos casos se tiene:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix},$$

donde $y(t)$ es el vector de salidas y $u(t)$ es el vector de entradas. Las matrices $S(p)$, $\Psi(p)$, $D_{\ell c}(t)$, $D_{\ell dc}(t)$ y $B(t)$ se describen a continuación:

$$S(p) = \begin{bmatrix} p^{\eta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p^{\eta_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p^{\eta_m} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
D_{\ell c}(t) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11,1} & \cdots & a_{11,\eta_1} & a_{12,1} & \cdots & a_{12,\eta_2} & \cdots & a_{1m,1} & \cdots & a_{1m,\eta_m} \\ a_{21,1} & \cdots & a_{21,\eta_1} & a_{22,1} & \cdots & a_{22,\eta_2} & \cdots & a_{2m,1} & \cdots & a_{2m,\eta_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1,1} & \cdots & a_{m1,\eta_1} & a_{m2,1} & \cdots & a_{m2,\eta_2} & \cdots & a_{mm,1} & \cdots & a_{mm,\eta_m} \end{array} \right], \\
D_{\ell dc}(t) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_{11,1} & \cdots & \alpha_{11,\eta_1} & \alpha_{12,1} & \cdots & \alpha_{12,\eta_2} & \cdots & \alpha_{1m,1} & \cdots & \alpha_{1m,\eta_m} \\ \alpha_{21,1} & \cdots & \alpha_{21,\eta_1} & \alpha_{22,1} & \cdots & \alpha_{22,\eta_2} & \cdots & \alpha_{2m,1} & \cdots & \alpha_{2m,\eta_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1,1} & \cdots & \alpha_{m1,\eta_1} & \alpha_{m2,1} & \cdots & \alpha_{m2,\eta_2} & \cdots & \alpha_{mm,1} & \cdots & \alpha_{mm,\eta_m} \end{array} \right], \\
\Psi(p) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^{\eta_1-2} & 0 & \cdots & 0 \\ p^{\eta_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p^{\eta_2-2} & \cdots & 0 \\ 0 & p^{\eta_2-1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^{\eta_m-2} \\ 0 & 0 & \cdots & p^{\eta_m-1} \end{array} \right] \quad \text{y} \quad B(t) = \left[\begin{array}{c|c|ccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m,m} \end{array} \right],
\end{aligned} \tag{4.9}$$

donde $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \cdots \geq \eta_m$, los coeficientes de la matriz $D_{\ell c}(t)$ son de la forma $a_{i_j k} = a_{i_j k}(t)$ para $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$, los coeficientes de la matriz $D_{\ell dc}(t)$ son de la forma $\alpha_{i_j k} = \alpha_{i_j k}(t)$ para $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$, los coeficientes de la matriz $B(t)$ son de la forma $b_{ij} = b_{ij}(t)$ para $i, j \in \{1, \dots, m\}$ y $p^i = \frac{d^i}{dt^i}$ para $i \in \{1, \dots, \eta_j\}$.

Se define el vector de estado, $x(t)$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \left[x_1(t) \quad \cdots \quad x_{\eta_1}(t) \quad x_{\eta_1+1}(t) \quad \cdots \quad x_{\eta_1+\eta_2}(t) \quad \cdots \quad x_{\eta_1+\cdots+\eta_{m-1}+1}(t) \quad \cdots \quad x_{\eta_1+\cdots+\eta_m}(t) \right]^T \\
&= \left[y_1(t) \quad \cdots \quad \frac{d^{\eta_1-1} y_1(t)}{dt^{\eta_1-1}} \quad y_2(t) \quad \cdots \quad \frac{d^{\eta_2-1} y_2(t)}{dt^{\eta_2-1}} \quad \cdots \quad y_m(t) \quad \cdots \quad \frac{d^{\eta_m-1} y_m(t)}{dt^{\eta_m-1}} \right]^T
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Entonces las ecuaciones de estado lineal, comúnmente llamadas multivariables, son de la siguiente forma:

1. Sistema Lineal Variante en el Tiempo MIMO

De las Ecuaciones (4.10) y (4.6) se obtiene la siguiente ecuación diferencial vectorial de primer orden:

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t)x(t) + B^*(t)u(t), \tag{4.11}$$

donde:

$$A(t) = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc|cc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline -a_{1\eta_1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{1\eta_1} & -a_{12\eta_2} & \cdots & -a_{12\eta_2} & \cdots & -a_{12\eta_2} & \cdots & -a_{1m\eta_m} & \cdots & -a_{1m\eta_m} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -a_{2\eta_1} & \cdots & -a_{2\eta_1} & \cdots & -a_{2\eta_1} & -a_{22\eta_2} & \cdots & -a_{22\eta_2} & \cdots & -a_{22\eta_2} & \cdots & -a_{2m\eta_m} & \cdots & -a_{2m\eta_m} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ \hline -a_{m\eta_1} & \cdots & -a_{m\eta_1} & \cdots & -a_{m\eta_1} & -a_{m2\eta_2} & \cdots & -a_{m2\eta_2} & \cdots & -a_{m2\eta_2} & \cdots & -a_{mm\eta_m} & \cdots & -a_{mm\eta_m} & \cdots & -a_{mm\eta_m} \end{array} \right]$$

y

$$B^*(t) = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1m} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & \cdots & b_{mm} \end{array} \right], \quad (4.12)$$

la ecuación de salida es:

$$y(t) = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc|cc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] x(t). \quad (4.13)$$

2. Sistema Lineal Variante en el Tiempo MIMO

De las Ecuaciones (4.10) y (4.7) se obtiene la siguiente ecuación diferencial vectorial

de primer orden:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + \hat{A}(t)x(t - \tau(t)) + B^*(t)u(t), \quad (4.14)$$

donde las matrices $A(t)$, $B^*(t)$ estan descritas por la Ecuación (4.12) y la matriz $\hat{A}(t)$, es de la forma:

$$\hat{A}(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{11\eta_1} & \cdots & -\alpha_{111} & -\alpha_{12\eta_2} & \cdots & -\alpha_{121} & & -\alpha_{1m\eta_m} & \cdots & -\alpha_{1m1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{21\eta_1} & \cdots & -\alpha_{211} & -\alpha_{22\eta_2} & \cdots & -\alpha_{221} & & -\alpha_{2m\eta_m} & \cdots & -\alpha_{2m1} \\ \hline & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{m1\eta_1} & \cdots & -\alpha_{m11} & -\alpha_{m2\eta_2} & \cdots & -\alpha_{m21} & & -\alpha_{m\eta_m} & \cdots & -\alpha_{m1} \end{array} \right] \quad (4.15)$$

la ecuación de salida es:

$$y(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & \vdots & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] x(t). \quad (4.16)$$

4.3. Solución del Sistema LTV

En esta sección se presentan los resultados principales para sistemas lineales variantes en el tiempo, estos son sobre: la solución del sistema y la matriz de transición.

4.3.1. Sistema LTV Homogéneo

Sea $A(t)$ una matriz continua de dimensión $n \times n$ de funciones reales definidas para todo t en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. El sistema lineal:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t), \quad \forall t \in I \quad (4.17)$$

es llamado **ecuación diferencial lineal homogénea de orden n** . Donde se supone que todos los coeficientes de $A(t)$ son continuos sobre el intervalo I y que las $(n - 1)$ primeras derivadas de estos existen y están definidas sobre el intervalo I . Esta suposición permite garantizar la existencia de una solución para el sistema (ver [10] Capítulo 1, sección 5). La

función vectorial cero sobre el intervalo I es siempre una solución del Sistema (4.17). Esta solución es llamada solución trivial del sistema.

Teorema 4.3.1 (Coddington y Levinson. [10])

El conjunto de soluciones del sistema (4.17) sobre el intervalo I forman un espacio vectorial de dimensión n . \square

Si ψ_1, \dots, ψ_n es un conjunto de soluciones linealmente independientes del Sistema (4.17), este conjunto se dice que forma una base fundamental de soluciones del Sistema (4.17).

Matriz Fundamental. Si $\Psi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es una matriz cuyas n columnas son soluciones linealmente independientes de la ecuación (4.17) sobre I , entonces $\Psi(t)$ es llamada una **matriz fundamental** para la Ecuación (4.17). Nótese que $\Psi(t)$ satisface la ecuación matricial, (ver [10]):

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = A(t)\Psi(t), \quad \forall t \in I. \quad (4.18)$$

Del Teorema 4.3.1 se observa que el conocimiento completo del conjunto de soluciones de la ecuación (4.17) se puede obtener si se conoce la matriz fundamental del Sistema (4.17).

Teorema 4.3.2 (Coddington y Levinson. [10])

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz solución $\Psi(t)$ de (4.17) sea una matriz fundamental es que $\det(\Psi(t)) \neq 0$ para todo t en el intervalo I . \square

Matriz de Transición. Sea $\Psi(t)$ una matriz fundamental de la Ecuación (4.17). Entonces la **matriz de transición** del Sistema (4.17), $\Phi(t, t_0)$, está definida de la siguiente manera:

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) \quad \forall t, t_0 \in I. \quad (4.19)$$

Nótese que la matriz de transición satisface las siguientes propiedades:

- a) $\Phi(t, t) = I,$
- b) $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t) = \Phi(t_0, t), \quad \forall t, t_1, t_2, t_0 \in I, \quad (4.20)$
- c) $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0).$

De (4.18) y (4.19) se tiene que $\Phi(t, t_0)$ es la única solución de la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad (4.21)$$

con la condición inicial $\Phi(t_0, t_0) = I$.

En general la solución de (4.21) no es fácil de realizar y sólo para algunos casos especiales es posible. Si $A(t)$ es una matriz triangular o si $A(t)$ tiene la siguiente propiedad conmutativa:

$$A(t) \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) = \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) A(t),$$

para todo t, t_0 , entonces la única solución de (4.21) es dada por:

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right). \quad (4.22)$$

La matriz $\Phi(t, t_0)$ es una transformación lineal que mapea el estado $x(t_0)$ en el estado $x(t)$.

4.3.2. Sistema LTV no Homogéneo o Forzado

Sea $A(t)$ una matriz de dimensión $n \times n$ de funciones continuas reales sobre un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, y $G(t)$ un vector real continuo sobre el intervalo I de dimensión n , el cual no es idénticamente cero sobre el intervalo. El sistema:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + G(t) \quad \forall t \in I, \quad (4.23)$$

es llamado **sistema lineal no homogéneo o sistema lineal forzado** de orden n . Si los elementos de $A(t)$ y $G(t)$ son continuos sobre el intervalo I , existe una única solución $\varphi(\tau)$ de la ecuación (4.23) para la cual

$$\psi(\tau) = \zeta,$$

donde $\tau \in I$ y $|\zeta| < \infty$, es decir, la solución de un sistema lineal no diverge en tiempo finito.

Si $\Psi(t)$ es una matriz fundamental de (4.17) conocida, existe un método para calcular la solución de la ecuación (4.23).

Teorema 4.3.3 (Coddington y Levinson. [10])

Si $\Psi(t)$ es una matriz fundamental de (4.17), entonces la función $\psi(t)$ definida por:

$$\psi(t) = \Psi(t) \int_{\tau}^t \Psi^{-1}(s)G(s)ds \quad \forall t \in I, \quad (4.24)$$

es una solución de (4.23) que satisface $\psi(\tau) = 0$ para $\tau \in I$. □

Supongase que $\psi(t) = \Psi(t)c(t)$ es una solución de (4.23). Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(t) &= \frac{d}{dt}(\Psi(t)c(t)) = A(t)\Psi(t)c(t) + \Psi(t)\frac{d}{dt}c(t) = A(t)\psi(t) + \Psi(t)\frac{d}{dt}c(t), \\ &= A(t)\psi(t) + G(t), \end{aligned}$$

más aún $\Psi(t)\frac{d}{dt}c(t) = G(t)$, o

$$\frac{d}{dt}c(t) = \Psi^{-1}(t)G(t).$$

Esta ecuación se puede resolver siempre y se obtiene:

$$c(t) = \int_{\tau}^t \Psi^{-1}(s)G(s)ds, \quad t \in I,$$

nótese que $c(\tau) = 0$. Así $\psi(t)$ es dada siempre por la ecuación (4.24).

Se puede ver que bajo las hipótesis del Teorema 4.3.3, la solución $\psi(t)$ de la Ecuación (4.23) satisface:

$$\psi(\tau) = \zeta, \quad \tau \in I, \quad |\zeta| < 0,$$

esta dada por:

$$\psi(t) = \psi_h(t) + \Psi(t) \int_{\tau}^t \Psi^{-1}(s)G(s)ds \quad \forall t \in I, \quad (4.25)$$

donde $\psi_h(t)$ es una solución de la Ecuación (4.17) sobre el intervalo I y satisface:

$$\psi_h(t) = \zeta.$$

La Ecuación (4.25) es llamada **formula de variación de constantes** de la ecuación (4.23), (ver Capítulo 3 de [10]).

4.4. Sistemas Lineales Singularmente Perturbados

El modelo singularmente perturbado de un sistema finito dimensional, fue introducido por Tikhonov en 1948, (ver [74]). En este modelo una de las derivadas de los vectores de estado está multiplicada explícitamente por un número real positivo, ε , lo suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= f(x, z, t, \varepsilon), & x(t_0) &= x_0, & \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z &= g(x, z, t, \varepsilon), & z(t_0) &= z_0, & \forall z \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde las funciones $f(x, z, t, \varepsilon)$ y $g(x, z, t, \varepsilon)$ se consideran derivables con respecto de sus argumentos x , z , ε y t .

En teoría de control, cuando el modelo (4.26) reduce su orden para $\varepsilon = 0$, este parámetro se llama perturbación singular, la dimensión del modelo (4.26) se reduce de $n + m$ a n , ya que una de las ecuaciones pasa a ser una ecuación algebraica.

$$g(x, z, t, 0) = 0.$$

Sistema Lineal Singularmente Perturbado Homogéneo. Considerese la ecuación diferencial lineal homogénea:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)z(t), & x(t_0) &= x_0, & \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z(t) &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)z(t), & z(t_0) &= z_0, & \forall z \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde los elementos de las matrices $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$, $A_{21}(t)$ y $A_{22}(t)$ son funciones suaves para todo t en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. La matriz $A_{22}(t)$ satisface que:

H1. Los valores propios son tales que $\mathbb{R}e(\lambda(A_{22}(t))) \leq \sigma$, para algún $\sigma > 0$ y para todo $t \in I$,

H2. $\|A_{22}(t)\| < c$, para algún $c \in \mathbb{R}^+$.

Supongase que se desea resolver la Ecuación (4.27) en un intervalo fijo, $0 \leq t \leq 1$, con $x(t_0)$ y $z(t_0)$ definidos sobre el intervalo. Un procedimiento no formal para calcular la solución es el siguiente:

1. Se hace $\varepsilon = 0$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial-algebraica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= A_{11}(t)X(t) + A_{12}(t)Z(t), & X(0) &= x(0), \\ 0 &= A_{21}(t)X(t) + A_{22}(t)Z(t). \end{aligned} \tag{4.28}$$

2. Como la matriz $A_{22}(t)$ es no singular, se tiene que:

$$Z(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)X(t),$$

3. Entonces $X(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}X(t) = (A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t))X(t), \quad X(0) = x(0).$$

Nótese que el sistema anterior es de orden reducido con respecto al sistema inicial. Obsérvese que la matriz $A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$ es el complemento de Schur de $A_{22}(t)$, (ver [52]). A menos que $Z(0) = A_{22}^{-1}(0)A_{21}(0)x(0)$ se cumple que es igual a $z(0)$, el vector $z(t)$ no puede ser representado por el vector $Z(t)$ cerca de $t = 0$. Para $x(t)$ y $z(t)$ acotados, se cumple que:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \mathcal{O}(1) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}z(t) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Así, es natural decir que $x(t)$ es la solución lenta y $z(t)$ es la solución rápida del sistema (4.27).

El procedimiento formal para resolver la Ecuación (4.27) es haciendo un rechazo correcto de la perturbación ε . Esto será mostrado en la Subsección 5.2.3 del Capítulo 5, lo cual consistirá en separar la solución rápida y la solución lenta mediante un cambio de variable o cambio de base (ver transformación de desacoplamiento en el Apéndice C.4).

4.5. Solución del Sistema LTVD

En esta sección se presentan los resultados principales para sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo, estos son sobre: solución y matriz de transición.

4.5.1. Sistema LTVD Homogéneo

Sean $A_0(t)$ y $A_1(t)$ matrices continuas de dimensión $n \times n$ de funciones reales definidas para todo $t \geq t_0 - \hat{\tau}$. El sistema lineal:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t - \tau(t)), \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.29)$$

es llamado ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con retardo (ver [3]). La función inicial y estado inicial de la Ecuación (4.29) es:

$$\begin{aligned} x(t) &= g(t), \quad \forall t \in [t_0 - \hat{\tau}, t_0], \\ x(t_0) &= g(t_0) = x_0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

con:

$$0 \leq \tau(t) \leq \hat{\tau} \quad \text{con} \quad \hat{\tau} \in \mathbb{R}^+.$$

Matriz Fundamental. Una matriz $\Psi(t, s)$, de dimensión $n \times n$ que satisface:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{d}{dt}\Psi(t, s) &= A_0(t)\Psi(t, s) + A_1(t)\Psi(t - \tau(t), s), \quad t \geq t_0, \\ b) \quad \Psi(s, s) &= I, \quad \text{para} \quad t, s \in [t_0 - \hat{\tau}, t_0]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

es llamada una **matriz kernel** o **matriz fundamental** de la Ecuación (4.29) - (4.30).

Teorema 4.5.1 (Malek [42])

La solución de la Ecuación (4.29) con función inicial (4.30) es:

$$x(t) = \int_{t_0 - \hat{\tau}}^{t_0} \Psi(t, \sigma)g(\sigma)d\sigma, \quad \forall t \geq t_0, \quad (4.32)$$

donde la matriz $\Psi(t, \sigma)$ satisface las condiciones (4.31). \square

Una forma alternativa de calcular la solución de la ecuación (4.29) con función inicial (4.30) es de la siguiente manera:

$$x(t) = \Psi(t, t_0)g(t_0) + \int_{t_0 - \hat{\tau}}^{t_0} \Psi(t, \sigma + \tau(\sigma))A_1(\sigma + \tau(\sigma))g(\sigma)d\sigma, \quad (4.33)$$

donde la matriz $\Psi(t, s)$ satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma}\Psi(t, \sigma) &= -\Psi(t, \sigma)A_0(\sigma) - \Psi(t, \sigma + \tau(\sigma))A_1(\sigma + \tau(\sigma)), \quad t_0 \leq \sigma \leq t - \tau(t), \\ b) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma}\Psi(t, \sigma) &= -\Psi(t, \sigma)A_0(\sigma), \quad t - \tau(t) \leq \sigma \leq t, \\ c) \quad \Psi(t, t) &= I, \\ d) \quad \Psi(t, \sigma) &= 0 \quad \text{para} \quad \sigma > t. \end{aligned} \quad (4.34)$$

La matriz $\Psi(t, s)$ en la Ecuación (4.33) es también llamada **matriz fundamental** o **matriz kernel**.

4.5.2. Sistema LTVD no Homogéneo o Forzado

Sean $A_0(t)$ y $A_1(t)$ matrices continuas de dimensión $n \times n$ de funciones reales definidas para todo $t \geq t_0 - \hat{\tau}$ y $G(t)$ un vector real continuo para todo $t \geq t_0 - \hat{\tau}$ de dimensión n . El sistema:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t - \tau(t)) + G(t), \quad t \geq t_0. \quad (4.35)$$

es llamado sistema lineal no homogéneo con retardo de orden n (ver [3]). La función inicial y estado inicial de (4.35) es:

$$\begin{aligned} x(t) &= g(t), \quad \forall t \in [t_0 - \hat{\tau}, t_0], \\ x(t_0) &= g(t_0) = x_0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

con:

$$0 \leq \tau(t) \leq \hat{\tau} \quad \text{con} \quad \hat{\tau} \in \mathbb{R}^+.$$

Teorema 4.5.2 ([42], Capítulo 3, Sección 2)

La solución de la ecuación (4.35) con función inicial y condición inicial (4.36) es

$$x(t) = \int_{t_0 - \hat{\tau}}^{t_0} \Psi(t, \sigma)g(\sigma)d\sigma + \int_{t_0}^t \Psi_u(t, \sigma)G(\sigma)d\sigma, \quad t \geq t_0, \quad (4.37)$$

donde la matriz fundamental $\Psi(t, \sigma)$ satisface (4.31) y la matriz $\Psi_u(t, \sigma)$ satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{d}{dt}\Psi_u(t, \sigma) &= A_0(t)\Psi_u(t, \sigma) + A_1(t)\Psi_u(t - \tau(\sigma), \sigma), \quad t \geq t_0, \\ b) \quad \Psi_u(t, t) &= I, \\ c) \quad \Psi_u(t, \sigma) &= 0 \quad \text{para} \quad \sigma > t. \end{aligned} \quad (4.38)$$

□

4.6. Sistemas Lineales Singularmente Perturbados con Retardo

El modelo más general de un sistema singularmente perturbado con retardo, esta dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(x(t), z(t), x(t - \tau(t)), z(t - \tau(t)), t, \varepsilon), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z(t) &= g(x(t), z(t), x(t - \tau(t)), z(t - \tau(t)), t, \varepsilon), \quad \forall z \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde ε es un número real positivo lo suficientemente pequeño. Con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad y \quad x(\sigma) = h_1(\sigma) \quad \forall \sigma \in [t_0 - \hat{\tau}, t_0], \\ z(t_0) &= z_0, \quad y \quad x(\sigma) = h_2(\sigma) \quad \forall \sigma \in [t_0 - \hat{\tau}, t_0], \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde las funciones $f(x(t), z(t), x(t - \tau(t)), z(t - \tau(t)), t, \varepsilon)$ y $f(x(t), z(t), x(t - \tau(t)), z(t - \tau(t)), t, \varepsilon)$ se consideran derivables con respecto de sus argumentos x , z , ε y t . La función $\tau(t)$ se considera continua, derivable y que satisface:

$$0 \leq \tau(t) \leq \hat{\tau}, \quad \hat{\tau} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\tau(t) < 1.$$

En este trabajo de tesis en los Capítulos 6 y 8 se trabajará con un modelo singularmente perturbado lineal con retardo variante. Enseguida se presenta el tipo de ecuación diferencial que se trabajará, así como las principales hipótesis que se tienen para la existencia de la solución.

Sistema Lineal Singularmente Perturbado Homogéneo con Retardo. Considere la ecuación diferencial lineal homogénea:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)z(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z(t) &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)z(t) + A_{24}(t)z(t - \tau(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde los elementos de las matrices $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$, $A_{21}(t)$, $A_{22}(t)$ y $A_{24}(t)$ son funciones suaves para todo t en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

En 1996 E. Fridman [14]. Establece las condiciones para la existencia de la solución de la Ecuación (4.41) basandose en el formalismo matemático desarrollado en el libro de P. V. Kokotović, H. K. Khalil y J. O'Reilly [38].

La ecuación diferencial (4.41) tiene solución si la matrice $A_{22}(t)$ satisface (ver Lema 1 de [14]):

- H1. Los valores propios son tales que $\Re e(\lambda(A_{22}(t))) \leq \sigma$, para algún $\sigma > 0$ y para todo $t \in I$,
- H2. $\|A_{22}(t)\| < c$, para algún $c \in \mathbb{R}^+$.

y la matriz $A_{24}(t)$ satisface:

- H3. La matriz $A_{24}(t)$ es no singular para todo $t \in I$,
- H4. La suma de matrices $A_{22}(t) + A_{24}(t)$ es Hurwitz para todo $t \in I$.

Con las condiciones dadas para las matrices $A_{22}(t)$ y $A_{24}(t)$ en [14], se demuestra que existe el cambio de base o transformación de desacoplamiento. La cual permite separar la Ecuación (4.41) en dos ecuaciones una para el sistema lento y otra para el sistema rápido y así seguir el procedimiento desarrollado en [38] (ver Subsección 5.2.3 del Capítulo 5 y Apéndice C).

Capítulo 5

Estabilidad de Sistemas LTV y LTVD

En este capítulo se presenta algunos resultados sobre estabilidad para sistemas lineales variantes en el tiempo y sistemas variantes en el tiempo con retardo. En las Secciones 5.1 y 5.3 se presentan definiciones básicas de estabilidad y el criterio de Lyapunov para sistemas lineales variantes en el tiempo y sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo, respectivamente. En la Sección 5.2 se muestran las condiciones para estabilidad asintótica, transformación de desacoplamiento y estabilidad asintótica uniforme de sistemas lineales variantes en el tiempo singularmente perturbados. En la Sección 5.4 se mencionan las condiciones para estabilidad del tipo de sistema lineal variante en el tiempo singularmente perturbado con retardo que se trabajará en esta tesis.

5.1. Estabilidad para Sistemas LTV

La estabilidad es una propiedad importante de los sistemas. Sea el sistema lineal homogéneo:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.1)$$

Sea $\Phi(t, t_0)$ la matriz de transición de (5.1), la cual satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I,$$

la solución de (5.1) está relacionada con la matriz de transición como sigue:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0). \quad (5.2)$$

De esta última expresión se puede notar que las trayectorias son proporcionales en tamaño al estado inicial.

A continuación se recuerdan algunas definiciones básicas sobre estabilidad de sistemas lineales (ver [10], [31] y [24]).

5.1.1. Definiciones de Estabilidad para Sistemas LTV.

Definiciones de Estabilidad. Sea $\hat{x}(t)$ una solución de la Ecuación (5.1), la cual está definida para todo $t \geq t_0$, se dice que $\hat{x}(t)$ es estable si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que cualquier solución $x(t)$ del Sistema (5.1) satisface:

$$|x(t_0) - \hat{x}(t_0)| < \delta, \implies |x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

La solución $\hat{x}(t)$ se dice que es asintóticamente estable si, es estable y satisface:

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \rightarrow 0, \quad \text{para } t \rightarrow \infty.$$

Los siguientes resultados relacionan las propiedades de estabilidad de (5.1) con la matriz de transición (ver [31], Capítulo 10 para demostraciones).

Estabilidad Uniforme Asintótica Sea $x(t)$ una solución estable del Sistema (5.1), si la matriz de transición del Sistema (5.1) satisface:

$$\sup_{t_0 \geq 0} \left(\sup_{t \geq t_0} |\Psi(t, t_0)| \right) < \infty, \quad \forall t \geq t_0,$$

entonces la solución $x(t)$ se dice que es uniformemente asintóticamente estable. El punto $x(t_0)$ se dice atractivo, si la matriz de transición, $\Psi(t, t_0)$ satisface:

$$|\Psi(t, t_0)| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Estabilidad Exponencial Se dice que el Sistema (5.1) es exponencialmente estable si para $m > 0$ y $\alpha > 0$, la matriz de transición del sistema satisface:

$$\|\Psi(t, t_0)\| = me^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

5.1.2. Método de Lyapunov para Sistemas LTV

En esta subsección se da un criterio para analizar la estabilidad de un sistema lineal variante en el tiempo (5.1).

En el siguiente teorema, tomado del libro de Amato [2], da un criterio para saber cuando el Sistema (5.1) es estable basado en la teoría de Lyapunov.

Teorema 5.1.1 (Amato. [2])

Dado el Sistema (5.1), si existe una función $V(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto V(t, x)$, con $V \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y existen constantes positivas a , b y c tal que:

1. $V(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$;
2. para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $t \in \mathbb{R}^+$, $a \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq b \|x\|$;
3. la derivada de Dini de V a lo largo de las trayectorias del sistema, definida como:

$$\frac{d}{dt} V(t, x) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h, x+hA(t)x) - V(t, x)}{h},$$

satisface para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $t \in \mathbb{R}^+$ la condición $\frac{d}{dt} V(t, x) \leq -c \|x\|^2$.

Entonces el Sistema (5.1) es exponencialmente estable. \square

Si V satisface la condición 2, se dice que es positiva definida y decreciente; si $\frac{d}{dt}V$ satisface la condición 3, se dice que es negativa definida.

Cuando V es continuamente diferenciable la derivada a lo largo de las soluciones será:

$$\frac{d}{dt}V(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}A(t)x(t). \quad (5.3)$$

Frecuentemente la estabilidad de un sistema lineal variante en el tiempo es analizada haciendo uso del Teorema 5.1.1. Ya que éste da condiciones suficientes que garantizan la estabilidad del Sistema (5.1).

5.2. Estabilidad de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo Singularmente Perturbados

En esta sección se presentan los resultados básicos que serán utilizados en los Capítulos 6, 7 y 8 sobre sistemas lineales variantes en el tiempo singularmente perturbados, el material desarrollado corresponde en su mayoría al Capítulo 5 de [38].

En las Subsecciones 5.2.1 y 5.2.2 se establecen condiciones, que incluyen cotas sobre ε , para estabilidad asintótica del sistema singularmente perturbado $\varepsilon\dot{z}(t) = A(t)z(t)$. En la Subsección 5.2.3 se da una transformación para desacoplamiento en dos subsistemas con escalas de tiempo separadas. Después, en la Subsección 5.2.4 se establecen las condiciones para estabilidad asintótica para un sistema como el que será estudiado en los Capítulos 6 y 8. Para fines didácticos, en el Apéndice C se presentan pruebas detalladas de los resultados de [38] mencionados en esta sección.

5.2.1. Estabilidad Asintótica

Sea el sistema lineal variante en el tiempo singularmente perturbado:

$$\varepsilon\dot{z}(t) = A(t)z(t), \quad (5.4)$$

donde:

- $t \in J$,
- $z(t) \in R^m$.

El intervalo J puede ser finito $[t_0, t_f]$ o infinito $[t_0, \infty)$, se hacen las siguientes hipótesis:

H1. $\operatorname{Re}\lambda(A(t)) \leq -c_1 < 0, \forall t \in J$,

H2. $\|A(t)\| \leq c_2, \forall t \in J$.

La hipótesis, H1, garantiza que los sistemas en tiempo congelados asociados a la Ecuación (5.4) serán asintóticamente estables. El lema siguiente da un resultado para una familia de sistemas asociados a la Ecuación (5.4).

Lema 5.2.1 (Kokotović. et al. [38])

Bajo las hipótesis H1 y H2 existen enteros positivos α_1 y K_1 tales que se cumple:

$$\|\exp(A(t)\theta)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 \theta}, \quad \forall t \in J \quad y \quad \theta > 0. \quad (5.5)$$

□

Esto es cierto para la familia de sistemas asociados a (5.4), cuando se toma un tiempo fijo o congelado y esto quiere decir que los sistemas asociados son asintóticamente estables. Este resultado se mantiene de manera uniforme para todo t en el intervalo J .

5.2.2. Cotas para Estabilidad Asintótica

En esta subsección se estudia la estabilidad asintótica del Sistema (5.4), tomando una aproximación de su matriz de transición. Sea la matriz $A(t)$ que satisface H1, H2 y además satisface:

$$H5. \quad \left\| \frac{d}{dt} A(t) \right\| \leq \beta \quad \forall t \in J.$$

En el siguiente lema se demuestra que la matriz de transición $\phi(t, s)$ de la ecuación (5.4) puede ser aproximada uniformemente por la matriz exponencial:

$$\exp[A(s)(t - s)/\varepsilon],$$

que corresponde a un sistema en el cual los parámetros de $A(t)$ están congelados en $t = s$. El lema da una cota para el decaimiento exponencial del error :

$$\Psi(t, s) = \phi(t, s) - \exp[A(s)(t - s)/\varepsilon].$$

Lema 5.2.2 (Kokotović. et al. [38])

Bajo las hipótesis H1, H2 y H5 existen constantes positivas ε^* , α_2 y K_2 tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$,

$$\|\Psi(t, s)\| \leq \varepsilon K_2 e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon}, \quad t \geq s, \quad t, s \in J. \quad (5.6)$$

□

El lema anterior confirma que el Sistema (5.4) es asintóticamente estable para un ε positivo lo suficientemente pequeño. En la prueba del Lema 5.2.2 se da una cota superior ε^* , tal que si $\varepsilon < \varepsilon^*$ la estabilidad asintótica se preserva.

Para concluir esta subsección se mostrará que una perturbación regular del lado derecho de la Ecuación (5.4) no afecta la estabilidad asintótica del sistema y tampoco afecta las cotas dadas por el Lema 5.2.2. Sea el sistema:

$$\varepsilon \dot{z}(t) = A(t)z(t) + \varepsilon^\gamma \Gamma(t, \varepsilon)z(t), \quad (5.7)$$

donde $\|\Gamma(t, \varepsilon)\| \leq c_3$ para todo $t \in J$ y $\gamma > 0$. Supongase que $\phi_1(t, s)$ es la matriz de transición del sistema (5.7) y $\phi(t, s)$ la matriz de transición del Sistema (5.4).

Lema 5.2.3 (Kokotović. et al. [38])

Bajo las hipótesis H1, H2 y H5. Existen constantes positivas ε^* , α_3 y K_3 tal que $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ se satisface:

$$\|\phi_1(t, s) - \phi(t, s)\| \leq \varepsilon^\gamma K_3 e^{-\alpha_3(t-s)/\varepsilon}, \quad (5.8)$$

donde $\phi(t, s)$ es la matriz de transición de (5.4) y satisface las cotas dadas en el Lema 5.2.2. □

5.2.3. Transformación de Desacoplamiento

En esta subsección se considera el siguiente sistema singularmente perturbado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)z(t), \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z(t) &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)z(t), \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde la matriz $A_{22}(t)$ satisface las hipótesis H1, H2 y H5 para todo t en J . Las matrices $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$ y $A_{21}(t)$ son funciones suaves de t , esto es: son continuas y derivables en el intervalo J . Se mostrará que existe un valor positivo lo suficientemente pequeño de ε tal que el Sistema (5.9) se puede separar en dos subsistemas desacoplados, uno rápido y uno lento.

Se propone la siguiente transformada de Lyapunov:

$$\eta(t) = z(t) + L(t)x(t).$$

donde $L(t)$ es una matriz con derivadas acotadas. Sustituyendo en (5.9) se tiene:¹

$$\dot{\eta}(t) = \left[\dot{L}(t) + \frac{1}{\varepsilon}A_{21}(t) + L(t)A_{11}(t) \right] x(t) + \left[L(t)A_{12} + \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(t) \right] z(t).$$

Sustituyendo en esta última ecuación $z(t) = \eta(t) - L(t)x(t)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= \left[\dot{L}(t) + \frac{1}{\varepsilon}A_{21}(t) + L(t)\{A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t)\} - \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(t)L(t) \right] x(t) \\ &+ \left[L(t)A_{12}(t) + \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(t) \right] \eta(t). \end{aligned}$$

Para lograr el desacoplamiento, se desea que el término que multiplica a $x(t)$ sea cero. Lo que lleva a establecer la siguiente ecuación diferencial para la matriz $L(t)$:

$$\varepsilon \dot{L}(t) = A_{22}(t)L(t) - A_{21}(t) - \varepsilon L(t)[A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t)]. \quad (5.10)$$

Ahora se propone el cambio de variable $\xi(t) = x(t) - \varepsilon H(t)\eta(t)$, siendo $H(t)$ una matriz con derivadas acotadas. Sustituyendo en la ecuación (5.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \left[-\varepsilon \dot{H}(t) + A_{12}(t) - \varepsilon H(t)L(t)A_{12}(t) - H(t)A_{22}(t) + \varepsilon A_{11}(t)H(t) - \varepsilon A_{12}(t)L(t)H(t) \right] \eta(t) \\ &+ \left[A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t) \right] \xi(t). \end{aligned}$$

¹Por cuestión de espacio se utilizará la notación $\dot{f} = \frac{d}{dt}f$

Para que el desacoplamiento se cumpla, la derivada $\dot{\xi}(t)$ no debe depender de $\eta(t)$. Esto se cumple si el coeficiente que multiplica a $\eta(t)$ es cero, lo que establece la siguiente ecuación diferencial para la matriz $H(t)$:

$$-\varepsilon\dot{H}(t) = H(t)A_{22}(t) - A_{12}(t) + \varepsilon H(t)L(t)A_{12}(t) - \varepsilon(A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t))H(t). \quad (5.11)$$

Si existen matrices $L(t)$ y $H(t)$ con derivadas acotadas que satisfacen las Ecuaciones (5.10) y (5.11) respectivamente. En los Apéndices C.4.1 y C.4.3 se demuestra como resolver, de forma detallada, las Ecuaciones (5.10) y (5.11) respectivamente. Entonces la transformación:

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - \varepsilon H(t)L(t) & -\varepsilon H(t) \\ L(t) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = T^{-1}(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

la cual es una transformación de Lyapunov sobre (5.9), permite separar en dos subsistemas desacoplados al Sistema (5.9). Los cuales son:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= [A_{11} - A_{12}L(t)]\xi(t), \\ \varepsilon\dot{\eta}(t) &= [A_{22} - \varepsilon L(t)A_{12}]\eta(t), \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde la variable $\xi(t)$ representa la dinámica del sistema lento y la variable $\eta(t)$ representa la dinámica del sistema rápido.

Los resultados obtenidos se han encontrado bajo las hipótesis H1, H2 y H3.

Ahora se hará un análisis para cuando la matriz $A_{22}(t)$ no satisface H1, es decir algunos de sus valores propios pueden estar en el semiplano derecho para algún valor de t en el intervalo J .

Sea $W(t)$ una matriz continua y derivable tal que:

$$W^{-1}(t)A_{22}(t)W(t) = D(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & 0 \\ 0 & D_2(t) \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (5.14)$$

donde:

$$\operatorname{Re}\lambda(D_1(t)) \leq -c_1, \quad \text{con } c_1 > 0,$$

y

$$\operatorname{Re}\lambda(D_2(t)) \geq c_2, \quad \text{con } c_2 > 0.$$

El corolario siguiente establece las condiciones para la existencia del cambio de base que desacopla al sistema (5.9) en dos subsistemas, cuando la matriz $A_{22}(t)$ satisface la Ecuación (5.14).

Corolario 5.2.1 (Kokotović. et al. [38])

Supóngase que la matriz $A_{22}(t)$ satisface la Ecuación (5.14), sobre el intervalo $[t_0, t_f]$, es decir, que la matriz $A_{22}(t)$ no satisface la hipótesis H1, entonces existe ε^* tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, existen matrices continuas y diferenciables $L(t)$ y $H(t)$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{\hat{L}}(t) &= D(t)\hat{L}(t) - W^{-1}(t)A_{21}(t) - \varepsilon W^{-1}(t)\dot{W}(t)\hat{L}(t) \\ &\quad - \varepsilon \hat{L}(t) \left(A_{11}(t) - A_{12}(t)W(t)\hat{L}(t) \right), \\ \varepsilon \dot{\hat{H}}(t) &= \hat{H}(t)D(t) - A_{12}(t)W(t) - \varepsilon \hat{H}(t)W^{-1}(t)\dot{W}(t) + \varepsilon \hat{H}(t)\hat{L}(t)A_{12}(t)W(t) \\ &\quad - \varepsilon \left(A_{11}(t) - A_{12}(t)W(t)\hat{L}(t) \right).\end{aligned}$$

donde: $L(t) = W(t)\hat{L}(t)$ y $H(t) = \hat{H}(t)W(t)$. □

El corolario anterior establece que la transformación de desacoplamiento (5.12) existe, aún cuando la matriz $A_{22}(t)$ no cumpla con la hipótesis H1. Define la transformación de desacoplamiento en términos de las matrices $\hat{L}(t)$ y $\hat{H}(t)$.

5.2.4. Estabilidad Asintótica Uniforme

En esta subsección se estudia la estabilidad asintótica uniforme del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)z(t), \\ \varepsilon \dot{z}(t) &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)z(t),\end{aligned}\tag{5.15}$$

en base al estudio de la estabilidad asintótica uniforme de los subsistemas lento y rápido.

Cuando ε es lo suficientemente pequeño, implica que la estabilidad asintótica uniforme del subsistema lento se reduce a estudiar el sistema:

$$\dot{x}_s(t) = A_0(t)x_s(t),\tag{5.16}$$

donde:

$$A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)L_0(t)\tag{5.17}$$

y la estabilidad asintótica uniforme en t del subsistema rápido en tiempo congelado se reduce a estudiar el sistema:

$$\varepsilon \dot{z}_f(t) = A_{22}(t)z_f(t),\tag{5.18}$$

donde t será tratado como un parámetro.

Si la matriz de transición $\phi_s(t, s)$ del Sistema (5.16) satisface la desigualdad

$$\|\phi_s(t, s)\| \leq K_s e^{-\sigma_s(t-s)}, \quad \text{para } t \geq s$$

y los valores propios de $A_{22}(t)$ son tales que:

$$\operatorname{Re}\lambda(A_{22}(t)) \leq -c_1 < 0,$$

se puede esperar de forma intuitiva que el Sistema (5.15) sea asintóticamente uniformemente estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, ya que de forma independiente los subsistemas lento (5.16) y rápido (5.18) son asintóticamente uniformemente estables.

El siguiente teorema analiza la estabilidad del Sistema (5.15), basandose en la estabilidad de los subsistemas lento (5.16) y rápido (5.18). Para esto la matriz de transición, $\phi(t, s)$, del Sistema (5.15) se escribe como:

$$\phi(t, s) = T^{-1}(t) \begin{bmatrix} \phi_s(t, s) & 0 \\ 0 & \phi_f(t, s) \end{bmatrix} T(t), \quad (5.19)$$

donde $\phi_s(t, s)$ es la matriz de transición del subsistema lento (5.16), $\phi_f(t, s)$ es la matriz de transición del subsistema rápido (5.18) y $T(t)$ es la matriz de cambio de base, definida por la Ecuación (5.12), que desacopla al Sistema (5.15), (ver [69]). En el Apéndice C.4.4 se mostrará de forma detallada que $T(t)$ es un mapeo de contracción.

Teorema 5.2.1 (Kokotović. et al. [38])

Bajo las hipótesis H1, H2 y H3 sobre el intervalo $[t_0, t_f]$ y suponiendo que el sistema lento es estable asintóticamente uniformemente. Entonces existe $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ el Sistema (5.15) es estable asintótica uniforme. En particular $\phi(t, s)$ la matriz de transición del Sistema (5.15) satisface:

$$\|\phi(t, s)\| \leq K e^{-\alpha(t-s)}, \quad \forall t \geq s \geq t_0.$$

donde $K > 0$ y $\alpha > 0$ son independientes de ε . □

El siguiente lema da una forma de calcular la cota superior para ε , lo cual desde un punto de vista práctico es importante para la implementación.

Lema 5.2.4 (Kokotović. et al. [38])

Supónganse las hipótesis del Teorema 5.2.1 y sea $\|\phi_s(t, s)\|_2 \leq K_s e^{-\sigma_s(t-s)}$, $\|\phi_f(t, s)\|_2 \leq K_f e^{-\sigma_f(t-s)/\varepsilon}$, $\|A_{12}(t)\|_2 \leq M_1$, $\|L_0(t)A_{12}(t)\|_2 \leq M_2$ y $\|\dot{L}_0(t) + L_0(t)A_{12}(t)\|_2 \leq M_3$ donde $\phi_s(t, s)$ y $\phi_f(t, s)$ satisfacen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= [A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t)]x_s(t), \\ &= [A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)]x_s(t) \\ \varepsilon \dot{z}_f(t) &= A_{22}(t)z_f(t), \end{aligned}$$

entonces el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)z(t), \\ \varepsilon \dot{z}(t) &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)z(t), \end{aligned}$$

es asintóticamente uniformemente estable para $\varepsilon < \varepsilon^*$ con:

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma_s \sigma_f}{\sigma_s M_2 K_f + K_s K_f M_1 M_3}.$$

□

El Teorema 5.2.1 establece las condiciones para que el Sistema (5.15) sea asintóticamente uniformemente estable. En el Lema 5.2.4 se da una forma explícita de calcular la cota superior ε^* , lo cual es algo importante para su implementación; esta cota se obtiene con el conocimiento de las normas de las matrices que definen al sistema, y las normas de las matrices que definen la transformada de Lyapunov, para el desacoplamiento del sistema.

Resumen. En esta sección se mencionaron los resultados necesarios para analizar la estabilidad del Sistema (5.15) haciendo un correcto rechazo de la perturbación ε . El Sistema (5.15) debe satisfacer las hipótesis H1, H2 y H5 que garantizan la existencia de las matrices $L(t)$ y $H(t)$, lo cual permite:

- Calcular la matriz $T(t)$ que desacopla el Sistema (5.15) en los subsistemas rápido y lento, (ver (5.12)).
- Aplicar los resultados del Lema 5.2.2 y del Lema 5.2.3 para analizar de forma correcta la estabilidad del subsistema rápido (5.18).
- El Sistema (5.16) es una ecuación diferencial homogénea variante en el tiempo. La estabilidad del Sistema (5.16) se puede analizar con los métodos tradicionales de Lyapunov.
- Analizar en base al resultado dado por el Teorema 5.2.1 el comportamiento del Sistema (5.15). Se relaciona el comportamiento de los subsistemas lento (5.16) y rápido (5.18), mediante la matriz $T(t)$, con el comportamiento del Sistema (5.15).
- Calcular de forma práctica la cota superior ε^* , usando el resultado dado por el Lema 5.2.4, tal que se garantice la estabilidad asintótica del Sistema (5.15) cuando $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$.

El procedimiento descrito será aplicado en los Capítulos 6 y 8.

5.3. Estabilidad para Sistemas LTVD

Sea el sistema dinámico representado por la siguiente ecuación diferencial con retardo homogéneo:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_0(t)x(t) + A_t x(t - \tau(t)), \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.20)$$

con función inicial y estado inicial:

$$\begin{aligned} x(\sigma) &= g(\sigma), \quad \forall \sigma \in [t_0 - \hat{\tau}, t_0], \\ x(t_0) &= g(t_0) = x_0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

con:

$$0 \leq \tau(t) \leq \hat{\tau} \quad \text{con} \quad \hat{\tau} \in \mathbb{R}^+.$$

La estabilidad del Sistema (5.20) concierne al comportamiento dinámico del mismo. Enseguida se enuncian las principales definiciones de estabilidad para sistemas del tipo (5.20).

5.3.1. Definiciones de Estabilidad para Sistemas LTVD.

Las definiciones siguientes fueron tomadas del libro de Kharitonov et al [37], Capítulo 1. Ya que es la forma en que comunmente se presentan en la literatura sobre sistemas con retardo.

Definiciones de Estabilidad. Sea $x(t)$ una solución del Sistema (5.20), $x(t)$ se dice estable si para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ y cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0$ tal que $\|x(t_0)\| < \delta$ implica $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Estabilidad Asintótica. Sea $x(t)$ una solución del Sistema (5.20), $x(t)$ se dice asintóticamente estable si $x(t)$ es estable y para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ y cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta_a = \delta_a(t_0, \epsilon) > 0$ tal que $\|x(t_0)\| < \delta_a$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ y $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Estabilidad Uniforme. Sea $x(t)$ una solución del Sistema (5.20), $x(t)$ se dice uniformemente estable si $x(t)$ es estable y $\delta(t_0, \epsilon)$ puede ser seleccionada independiente de t_0 .

Estabilidad Asintótica Uniforme. Sea $x(t)$ una solución del Sistema (5.20), $x(t)$ se dice uniformemente asintóticamente estable si $x(t)$ es uniformemente estable y existe $\delta_a > 0$ tal que para cualquier $\eta > 0$, existe $T = T(\delta_a, \eta)$, tal que $\|x(t_0)\| < \delta$ implica $\|x(t)\| < \eta$ para $t \geq t_0 + T$ y $t_0 \in \mathbb{R}$.

5.3.2. Método de Lyapunov para Sistemas LTVD

Un método efectivo para determinar la estabilidad del Sistema (5.20) es el método de Lyapunov. Para el caso de los sistemas con retardo se requiere especificar la evolución del sistema en tiempos anteriores y el tiempo presente, es decir, es natural pensar que la funcional candidata de Lyapunov para el caso de sistemas con retardo sea de la forma $V(t, x(t), x(t - \tau(t)))$. Las funcionales de este tipo se llaman *funcionales de Lyapunov-Krasovskii*.

Enseguida se enuncia el teorema para sistemas con retardo equivalente al Teorema 5.1.1.

Teorema 5.3.1 (Kharitonov et al [37])

Considere el Sistema (5.20)-(5.21), sean u, v y w funciones no decrecientes en \mathbb{R}^+ , donde $u(s)$ y $v(s)$ son positivas para $s > 0$ y $u(0) = v(0) = 0$.

- Si existe una funcional continua diferenciable $V : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $u(\|g(0)\|) \leq V(t, g) \leq v(\|g\|)$,
2. $\frac{d}{dt}V(t, g) \leq -w(\|g(0)\|)$,

entonces la solución trivial del Sistema (5.20) es uniformemente estable.

- Si $w(s) > 0$ para $s > 0$ entonces es uniformemente asintóticamente estable.
- Si se cumple que $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s)$, entonces el Sistema (5.20) será global uniformemente asintóticamente estable.

□

En varios trabajos existentes en la literatura sobre sistemas con retardo (ver [37], [14], [15], [16], [79]), el problema de análisis de estabilidad de un sistema con retardo es llevado a un problema de desigualdades lineales matriciales. Enseguida se describe de forma breve este método.

Estabilidad Independiente del Retardo. Sea el Sistema (5.20)-(5.21), donde las matrices $A_0(t)$ y $A_1(t)$ son desconocidas pero acotadas y la función $\tau(t)$ satisface las siguientes condiciones:

$$0 \leq \tau(t) \leq \hat{\tau}$$

y

$$\frac{d}{dt}\tau(t) \leq \mu \leq 1.$$

Se puede seleccionar la siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii para analizar la estabilidad del Sistema (5.20)-(5.21):

$$V(g^T) = g^T(0)Px(0) + \int_{-\hat{\tau}}^0 g^T(\theta)Sx(\theta)d\theta, \quad (5.22)$$

se observa que el primer sumando analiza al Sistema (5.20) para el tiempo $t = 0$ y el segundo sumando analiza al Sistema (5.20) para tiempos anteriores en el intervalo $[-\hat{\tau}, 0]$.

Aplicando el resultado dado por el Teorema 5.3.1, se tiene que la derivada de la funcional (5.22) a lo largo de las trayectorias del Sistema (5.20) es:

$$\frac{d}{dt}V(g^T) = [g^T(0) \quad g^T(-\hat{\tau})] \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^T P + S & PA_1 \\ A_1^T P & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(-\hat{\tau}) \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

El Teorema 5.3.1 establece que el Sistema (5.20) será estable si la derivada (5.23) es menor que cero. Lo que lleva el problema de análisis de estabilidad a un problema de desigualdades lineales matriciales, esto es analizado en el siguiente hecho.

Hecho 5.3.1 (Kharitonov et al [37])

El sistema descrito por la Ecuación (5.20) es asintóticamente estable si existen matrices $P = P^T > 0$ y $S = S^T$, tales que:

$$\begin{bmatrix} PA_0 + A_0^T P + S & PA_1 \\ A_1^T P & -S \end{bmatrix} < 0, \quad (5.24)$$

se satisface para todas las posibles matrices A_0 y A_1 . □

Nótese que el criterio de estabilidad dado por la Ecuación (5.24) es independiente del retardo. Por lo que se requiere revisar un número muy grande de desigualdades lineales matriciales que es la herramienta matemática que se utiliza para el estudio de estabilidad de los sistemas con retardo.

Estabilidad Dependiente del Retardo. En sistemas con retardo es importante que el criterio de estabilidad sea dependiente del retardo. En trabajos como el de M. WU [79], se propone la funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V(x(t - \tau)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{\hat{\tau}}^0 \int_{t-\theta}^t \frac{d}{ds}x^T(s)Z\frac{d}{ds}x(s)dsd\theta,$$

donde P , Q y Z son matrices simétricas definidas positivas. En esta funcional se puede notar que en el segundo sumando se contempla un intervalo variante en el tiempo, lo que implica que al derivar quedará el factor, $1 - \frac{d}{dt}\tau(t)$, multiplicando lo que hace que las condiciones sobre el retardo en un sistema como (5.20) intervengan en el criterio de estabilidad.

En los Capítulos 6 y 8 se analizará la estabilidad asintótica de los sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo con una funcional $V(x(t - \tau))$ con sólo los dos primeros sumandos de la funcional anterior y se utilizará un criterio basado en una LMI para concluir la estabilidad dependiente del retardo del sistema.

5.4. Estabilidad de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo Singularmente Perturbados con Retardo

En esta sección se mencionan los resultados para la estabilidad de sistemas lineales variantes en el tiempo singularmente perturbados con retardo modelado por la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)z(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z(t) &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)z(t) + A_{24}(t)z(t - \tau(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde los elementos de las matrices $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$, $A_{21}(t)$, $A_{22}(t)$ y $A_{24}(t)$ son funciones suaves para todo t en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

En el artículo de E. Fridman [14], se analiza el Sistema (5.25) y se establecen las condiciones para:

1. estabilidad asintótica del sistema

$$\varepsilon \frac{d}{dt}z(t) = A_{22}(t)z(t) + A_{24}(t)z(t - \tau(t)),$$

2. transformación de desacoplamiento,
3. estabilidad asintótica uniforme.

Estos pasos permiten aplicar la metodología expuesta en la Sección 5.2. Enseguida se describen brevemente:

Estabilidad asintótica. Se debe satisfacer que los valores propios de $A_{22}(t) + A_{24}(t)$, son tales que:

$$\operatorname{Re}\lambda(A_{22}(t) + A_{24}(t)) \in \mathcal{C}_- \quad (5.26)$$

donde \mathcal{C}_- es el semiplano complejo izquierdo abierto y que $A_{22}(t)$ sea no singular.

Transformación de desacoplamiento. Sea $0 \leq \tau(t) \leq \hat{\tau}$. Si existe la matriz $L(\sigma)$ que satisface la ecuación:

$$\varepsilon L(\sigma)(A_{11}(\sigma) + A_{12}(\sigma)L(\sigma)) = (A_{22}(\sigma) + A_{24}(\sigma))L(\sigma),$$

con:

$$L(\sigma) = \sum_{i=0}^p \varepsilon^i L_i(\sigma) + \mathcal{O}(\varepsilon^{p+1}),$$

y si existe la matriz $H(\sigma)$ que satisface la ecuación:

$$\varepsilon H(\sigma)(A_{22}(\sigma) + A_{24}(\sigma) + L(\sigma)A_{11}(\sigma)) = (A_{11}(\sigma) - A_{12}(\sigma)L(\sigma)),$$

con:

$$H(\sigma) = \sum_{i=0}^p \varepsilon^i H_i(\sigma) + \mathcal{O}(\varepsilon^{p+1}),$$

para $\sigma \in [t_0 - \hat{\tau}, t_0)$. Entonces se puede desacoplar el Sistema (5.25) mediante el siguiente cambio de variable:

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \varepsilon H \\ -L & \mathbf{I} - \varepsilon LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \varepsilon HL & -\varepsilon H \\ L & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Estabilidad asintótica uniforme. En esta parte se debe buscar una funcional candidata de Lyapunov-Krasovskii y por lo general el problema de estabilidad se lleva a un criterio de desigualdades matriciales lineales para el subsistema rápido. Para el subsistema lento bastará con que se satisfaga:

$$\operatorname{Re}\lambda(A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)) \in \mathcal{C}_-, \quad (5.28)$$

para todo $t \geq t_0$.

Metodología. De forma frecuente en la literatura se encuentra que el Sistema (5.25) después de aplicar la transformación, $T(t)$, se puede escribir de la siguiente forma:

$$E_\varepsilon \frac{d}{dt} x_{sf}(t) = A^*(\varepsilon, t)x_{sf}(t) + \varepsilon \hat{A}^*(t)x_{sf}(t - \tau(t)), \quad (5.29)$$

donde: $x_{sf}(t) = \begin{bmatrix} x_s^T(t) & z_f^T(t) \end{bmatrix}^T$,

$$E_\varepsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \varepsilon \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad A^*(t) = \begin{bmatrix} A_0(t) & 0 \\ 0 & \bar{A}_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -A_{24}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

con (c.f. (5.17)):

$$A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) \quad (5.31)$$

y

$$\bar{A}_{22}(\varepsilon, t) = A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)A_{12}(t). \quad (5.32)$$

Existen trabajos en donde se proponen algunas funcionales de Lyapunov-Krasovskii para el Sistema (5.29), algunos de ellos son: [16], [19] y [20]. Se seguirán las ideas presentadas en estos trabajos para analizar la estabilidad de los sistemas lineales singularmente perturbados que aparecerán en los Capítulos 6 y 8.

Parte III

Esquemas de Control Singularmente Perturbados

Capítulo 6

Ley de Control Singularmente Perturbada para Sistemas SISO LTV y SISO LTVD

En este capítulo, se propone una ley de control para sistemas lineales variantes en el tiempo,

$$\frac{d}{dt}\zeta(t) = A(t)\zeta(t) + B(t)u(t),$$

y se considera el caso de sistemas lineales variantes en el tiempo con retardo variante en el tiempo,

$$\frac{d}{dt}\zeta(t) = A(t)\zeta(t) + \hat{A}(t)\zeta(t - \tau(t)) + B(t)u(t),$$

basada en la técnica de perturbaciones singulares [38], donde el conocimiento de los parámetros variantes en el tiempo no es requerido, sólo algunas cotas superiores. El objetivo de la ley de control es lograr el acoplamiento de modelo del sistema lineal variante en el tiempo con un sistema lineal invariante en el tiempo en ambos casos.

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_{ac}x(t) + B_{ac}r(t).$$

El contenido que se presenta en este capítulo se reportó en [57], [60] y [61].

El capítulo está organizado como sigue: el problema para sistemas SISO LTV se plantea en la Sección 6.1 y para sistemas SISO LTVD en la Sección 6.2. Enseguida, en las Subsecciones 6.1.1 y 6.2.1 se propone la ley de control singularmente perturbada, la cual tiene como objetivo el transformar el modelo en un modelo singularmente perturbado respectivamente. Siguiendo [38], en las Subsecciones 6.1.2 y 6.2.2 el sistema en lazo cerrado es separado en dos subsistemas con diferentes escalas de tiempo, llamados subsistema lento y subsistema rápido. En las Subsecciones 6.1.3 y 6.2.3-6.2.4 se estudia la estabilidad uniforme del subsistema lento y del subsistema rápido respectivamente. En las Subsecciones 6.1.4 y 6.2.5 se estudia la aproximación del estado y finalmente, en las Subsecciones 6.1.5 y 6.2.6 se desarrolla un ejemplo académico para mostrar la técnica desarrollada para ambos casos. Las demostraciones de los resultados están en el Apéndice D.

6.1. Ley de Control Singularmente Perturbada para el Sistema SISO LTV

Se considera un sistema lineal variante en el tiempo SISO, cuya dinámica está representada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_n(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_2(t)\frac{d}{dt}y(t) + a_1(t)y(t) = b(t)u(t) \quad (6.1)$$

definida para $t \geq t_0 \geq 0$, con condiciones iniciales:

$$y(t_0), \frac{d}{dt}y(t_0), \cdots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t_0)$$

$y \in \mathbb{R}$ es la variable dependiente, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada, para $t \in J = [0, \infty)$. Los coeficientes, $a_i(t)$ y $b(t)$, son tales que:

H1 $a_i(t)$ son funciones reales acotadas desconocidas de clase¹ \mathcal{C}^∞ , para toda $i = 1, \dots, n$, se satisface: $\|a_i(t)\| \leq L_{0,a}$ y $\|\frac{da_i(t)}{dt}\| \leq L_{1,a}$.

H2 $b(t)$ es una función real continua acotada positiva desconocida de clase \mathcal{C}^∞ , que satisface: $0 < b_1 \leq b(t) \leq b_2$ y $\|\frac{db(t)}{dt}\| \leq c$.

Como se vió en la Sección 4.1, la Ecuación (6.1) puede ser escrita como una ecuación de estado lineal, con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$. Seleccionando los estados como en (4.3):

$$\zeta = [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \cdots \quad \zeta_n]^T = \left[y \quad \frac{d}{dt}y \quad \cdots \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y \right]^T, \quad (6.2)$$

se tiene que la ecuación vectorial de estado lineal es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta(t) &= A(t)\zeta(t) + B(t)u(t); \quad y(t) = C\zeta(t) \\ A(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 1 \\ -a_1(t) & \cdot & \cdot & \cdots & -a_n(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

con estado inicial $\zeta(t_0) = \left[y(t_0) \quad \frac{d}{dt}y(t_0) \quad \cdots \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t_0) \right]^T$.

Nótese que cuando se tiene el caso de que los coeficientes, $a_1(t), \dots, a_n(t)$ y $b(t)$, son conocidos para todo $t \geq 0$, una solución simple para lograr el acoplamiento de modelo (6.1) es proponer la siguiente ley de control ideal:

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} \left([(-\bar{a}_1 + a_1(t)) \quad \cdots \quad (-\bar{a}_n + a_n(t))] \zeta(t) + r(t) \right)$$

¹ Por simplicidad, sólo consideraremos funciones de clase \mathcal{C}^∞ . También pueden considerarse funciones de clase \mathcal{C}^k , donde k es un entero lo suficientemente grande tal que las condiciones de derivabilidad son satisfechas. Ver Corolario 2.4.12 de [55].

Cuando se tiene el caso de que se desconocen los coeficientes, y suponiendo que se permite la diferenciación y los lazos algebraicos, una solución matemática posible para aproximar la solución ideal es dada en [4], la ley de control sería:

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} \left(\frac{d}{dt} + \beta \right) \left(\frac{d}{dt} \zeta_n + [\bar{a}_1 \ \cdots \ \bar{a}_n] \zeta(t) - r(t) \right) + (1 - \varepsilon)u(t) \quad (6.4)$$

cuando: $\beta > 0$ y $0 < \varepsilon \ll 1$. Sustituyendo (6.4) en la Ecuación (6.3), se obtiene en el caso de que el sistema tenga todas sus señales acotadas:

$$\begin{aligned} \varepsilon u(t) &= \frac{d}{dt} \zeta_n(t) + [a_1(t) \ \cdots \ a_n(t)] \zeta(t) - b(t)u(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt} + \beta \right) \left(\frac{d}{dt} \zeta_n + [\bar{a}_1 \ \cdots \ \bar{a}_n] \zeta(t) - r(t) \right) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

la representación de estado es:

$$\frac{d}{dt} \zeta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 1 \\ -\bar{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdots & -\bar{a}_n \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(r(t) + ke^{-\beta t} \right) \quad (6.6)$$

En la subsección siguiente se propone una ley de control realizable que se aproxime a la ley de control (6.4). La forma práctica de aproximar una acción derivativa y evitar los lazos algebraicos es usar aproximaciones basadas en la convergencia hacia cero de un parámetro positivo pequeño ε [5, 47, 48].

La herramienta matemática apropiada para trabajar con aproximaciones, $\mathcal{O}(\varepsilon)$, es la teoría de perturbaciones singulares desarrollada en [38].

6.1.1. Ley de Control Implícita Singularmente Perturbada

En esta subsección se propone una ley de control singularmente perturbada, cuyo objetivo es aproximar al sistema modelo (6.6). Para la representación vectorial de estado (6.3) se propone la siguiente ley de control, compuesta por una ley de control singularmente perturbada y un control de acoplamiento.

Ley de Control Singularmente Perturbada

$$\varepsilon u(t) = [0 \ \cdots \ 0 \ -1] (\zeta(t) + h(t)) + [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Control de Acoplamiento

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_n + (1 + \ell) \\ 0 & \cdots & 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} (\zeta(t) + h(t)) \\ &+ \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde: β , τ y ε son parámetros positivos; $\ell = 1/\tau - \beta$ y $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ son coeficientes de un polinomio Hurwitz

$$p_{ac}(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_n \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_2 \lambda + \bar{a}_1. \quad (6.9)$$

y satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\bar{a}_n + \beta > 1, \quad \text{y} \quad 0, a - \bar{a}_n + 1 - \beta + 1/\tau > 0. \quad (6.10)$$

La función $r(t)$ es la señal de referencia y $h(t)$ es una perturbación tal que se satisfacen las siguientes hipótesis:

H3 $r(t) \in L^\infty \cap C^\infty$. Es una función de tipo C^∞ .

H4 $h(t)$ es una función real continua, cuya norma es de orden ε .

La hipótesis **H3** se hace porque el esquema de control es una aproximación de una retroalimentación proporcional derivativa.

La señal de perturbación $h(t)$ de la hipótesis **H4** es considerada, ya que se desea tomar en cuenta el efecto de un observador de alta ganancia, el cual es propuesto en la Sección 7.1 del Capítulo 7.

El objetivo del

■ **control de acoplamiento es:**

1. asignar la dinámica en lazo cerrado como la de un sistema lineal invariante en el tiempo cuyo polinomio característico $p(\lambda)$ es Hurwitz y
2. asignar de forma exponencial la convergencia hacia la dinámica deseada.

El objetivo de la

■ **ley de control singularmente perturbada es:**

1. cambiar la base donde está representado el sistema para obtener un *modelo singularmente perturbado*, y
2. aproximar hacia la dinámica deseada en un orden de ε .

En el *Lema 6.1.1* se muestra que los parámetros, β y τ , permitirán calcular un valor positivo de ε lo suficientemente pequeño tal que la estabilidad asintótica uniforme del *modelo singularmente perturbado* es garantizada.

Para obtener el modelo singularmente perturbado, se combinan las Ecuaciones (6.3), (6.7), (6.8) y se hace la siguiente selección de variables:

$$x_i(t) = \zeta_i(t), \quad \text{para todo, } i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \quad \text{y} \quad z(t) = \zeta_n(t),$$

lo cual lleva a obtener el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) + A_{13}h(t) + B_1r(t) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt}(t) &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) + A_{23}(t)h(t) \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde las matrices $A_{11} \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n+1 \times 1}$, $A_{13} \in \mathbb{R}^{n+1 \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n+1 \times 1}$, $A_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times n+1}$, $A_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$ y $A_{23}(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Tienen la siguiente forma:

$$A_{11} = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_3 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} & -(1+\ell) & -\ell \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (\beta-1) & -\beta \end{array} \right],$$

$$A_{12} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hline -\bar{a}_n + (1+\ell) \\ -(\beta-1) \end{array} \right], \quad B_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array} \right], \quad (6.12)$$

$$A_{13} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\bar{a}_1 & \cdots & -\bar{a}_{n-2} & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_n + (1+\ell) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -(\beta-1) \end{array} \right],$$

$$A_{21}(\varepsilon, t) = [-\varepsilon a_1(t) \quad \cdots \quad -\varepsilon a_{n-1}(t) \mid b(t) \quad 0],$$

$$A_{22}(\varepsilon, t) = [-\varepsilon a_n(t) - b(t)], \quad (6.13)$$

$$A_{23}(t) = [0 \quad \cdots \quad 0 \mid b(t)].$$

Nótese que la matriz $A_{22}(0, t)$ satisface las siguientes propiedades para todo t en el intervalo J :

$$i) \quad \|A_{22}(0, t)\|_2 \leq b_2.$$

$$ii) \quad \left\| \frac{d}{dt} A_{22}(0, t) \right\|_2 \leq c. \quad (6.14)$$

$$iii) \quad -b_2 \leq \operatorname{Re} \lambda(A_{22}(0, t)) \leq -b_1.$$

Así, el modelo singularmente perturbado, (6.11), satisface los Lemas 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3 del Capítulo 5.

En el Teorema 6.1.1 de la Subsección 6.1.3, se probará que el sistema definido por la Ecuación (6.11) es uniformemente asintóticamente estable, y en el Teorema 6.1.2 de la

Sección 6.1.4, se demostrará que la aproximación de estado tiende al modelo invariante en el tiempo de referencia.

Para estudiar la estabilidad de la ecuación diferencial homogénea o modelo no forzado del Sistema (6.11), se siguen los procedimientos desarrollados en las Subsecciones 5.2.3 y 5.2.4 del Capítulo 5, los cuales son:

- aplicar una transformación de estado, cuyo objetivo es desacoplar el sistema en un subsistema lento y un subsistema rápido,
- estudiar la *estabilidad uniforme asintótica* aplicando los resultados demostrados en los Lemas 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3.

6.1.2. Transformación de Desacoplamiento

Se estudia primero la ecuación homogénea del Sistema (6.11), la cual toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t), \\ \varepsilon \frac{dz}{dt}(t) &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Siguiendo el procedimiento de la Subsección 5.2.3, se definen las siguientes matrices continuas, diferenciales y acotadas:²

$$L(t) = L_0(t) + \varepsilon R_L(t), \quad y \quad H(t) = H_0(t) + \varepsilon R_H(t), \quad (6.16)$$

para definir la transformación de estado que permita desacoplar al Sistema (6.15) en un subsistema lento y uno rápido. Haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Theta(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_n - \varepsilon H(t)L(t) & -\varepsilon H(t) \\ L(t) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ &= M^{-1}(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde las matrices $L(t)$ y $H(t)$ son (ver Apéndices C.4.1 y C.4.3):

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad H(t) = H_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ L_0(t) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = \bar{L}_0, \quad H_0(t) = A_{12}A_{22}^{-1}(0, t) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Aplicando la matriz de transformación de estado definida en la Ecuación (6.17) al sistema definido por la Ecuación (6.15), se obtienen las siguientes ecuaciones para (c.f. Lema 5.2.4):

Subsistema Lento

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt}(t) &= \left[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) \right] x_s(t), \\ &= \left[A_{11} - A_{12}\bar{L}_0 \right] x_s(t). \end{aligned} \quad (6.19)$$

² En [38], estas matrices se definen en general, con M y N términos, respectivamente.

Subsistema Rápido

$$\varepsilon \frac{dz_f}{dt}(t) = A_{22}(\varepsilon, t)z_f(t) \quad (6.20)$$

donde t será tomado como un parámetro, es decir, para un tiempo congelado.

Definiendo:

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0. \quad (6.21)$$

Sustituyendo (6.12), (6.13) y (6.18) en (6.21), se tiene que:

$$A_0 = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \hline -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_3 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_n & -\ell \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\beta \end{array} \right],$$

nótese que el polinomio característico de la matriz A_0 es (ver (6.9)):

$$p(\lambda) = (\lambda + \beta)p_{ac}(\lambda), \quad (6.22)$$

de la Ecuación (6.9) se sabe que $p_{ac}(\lambda)$ es Hurwitz y también se sabe que el parámetro β es positivo, entonces el polinomio $p(\lambda)$ definido en la Ecuación (6.22) es Hurwitz. Por lo tanto existen $\beta > 0$ y $K > 0$, tales que:

$$\|\exp(A_0 t)\| \leq K e^{-\beta t}. \quad (6.23)$$

Se puede aplicar el resultado dado por el Lema 5.2.3 al subsistema rápido (6.20), ya que la matriz $A_{22}(\varepsilon, t)$ dada por la Ecuación (6.13) satisface las propiedades definidas en la Ecuación (6.14) las cuales son hipótesis del Lema 5.2.3. Por lo tanto la matriz de transición, $\phi_f(t, t_0)$, del subsistema rápido (6.20) es:

$$\phi_f(t, t_0) = e^{-\int_{t_0}^t \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, \tau) d\tau}, \quad (6.24)$$

sustituyendo (6.13) en la Ecuación (6.24) se obtiene la siguiente propiedad:

$$\|\phi_f(t, t_0)\| \leq e^{-(b_1 + \varepsilon L_{0,a})(t-t_0)/\varepsilon}, \quad (6.25)$$

para $t \in [t_0, \infty)$.

6.1.3. Condiciones para Estabilidad Asintótica Uniforme

En esta sección mediante el estudio de las propiedades de las matrices de transición de los subsistemas lento (6.19) y rápido (6.20), se garantizará la estabilidad asintótica uniforme del Sistema (6.15). Esto será en base a los resultados desarrollados en la Subsección 5.2.4 del Capítulo 5. En particular se hace uso del resultado dado por el Teorema 5.2.1.

Para el caso del Sistema (6.15), el Teorema 5.2.1 se puede reescribir de la siguiente forma.

Teorema 6.1.1

Dadas las propiedades (6.23), (6.25), $\bar{a}_n + \beta > 1$ y $\tau < 1/(\bar{a}_n + \beta - 1)$, existe $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ el Sistema (6.15) es asintóticamente uniformemente estable. Más aún, la matriz de transición de (6.15), $\phi(t, s)$, satisface:

$$\|\phi(t, s)\| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad \forall t \geq s \geq t_0,$$

donde $K > 0$ y $\alpha > 0$ son independientes de ε .

□

El teorema anterior relaciona el comportamiento de (6.15) con los comportamientos del subsistema lento y del subsistema rápido. Este resultado se mantiene de forma asintótica cuando el valor de ε tiende a 0.

Desde un punto de vista práctico, es importante tener una idea del valor de la cota superior ε^* . Este valor es calculado en el Lema 5.2.4 del Capítulo 5, el cual para el Sistema (6.15) queda de la siguiente manera:

Lema 6.1.1

Dadas las condiciones del Teorema 6.1.1, y $\|A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_1$, $\|L_0 A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_2$ y $\|\frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_0 + \bar{L}_0 A_0(t)\|_2 \leq \bar{M}_3$, el sistema singularmente perturbado (6.15) es asintóticamente uniformemente estable para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, donde:

$$\varepsilon^* = \frac{\beta b_1}{\beta \bar{M}_2 + K \bar{M}_1 \bar{M}_3},$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \sqrt{1 + (\bar{a}_1 - 1/\tau)^2 + 2(1 - \beta)^2}, \\ \bar{M}_2 &= |\bar{a}_1 + \beta - 1/\tau - 1|, \\ \bar{M}_3 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 + (\beta - 1/\tau)^2}. \end{aligned}$$

□

6.1.4. Aproximación del Estado

Se considera el modelo singularmente perturbado (6.11), con las condiciones iniciales: $x(t_0) = x_0$ y $z(t_0) = z_0$. Aplicando el cambio de variables, definido por (6.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt}(t) &= [A_{11} - A_{12}L(t)] \Theta(t) + [B_1 - \varepsilon H(t)L(t)B_1] r(t) \\ &\quad + [A_{13} - \varepsilon H(t)L(t)A_{13} - H(t)A_{23}(t)] h(t), \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\eta}{dt}(t) &= [A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)A_{12}] \eta(t) + \varepsilon L(t)B_1 r(t) \\ &\quad + [A_{23}(t) + \varepsilon L(t)A_{13}] h(t) \end{aligned} \quad (6.27)$$

donde las condiciones iniciales son:

$$\Theta(t_0) = [I - \varepsilon H(t_0)L(t_0)] x_0 - \varepsilon H(t_0)z_0, \quad (6.28)$$

$$\eta(t_0) = L(t_0)x_0 + z_0. \quad (6.29)$$

La solución de (6.26)-(6.29), usando la transformación inversa de (6.17), lleva a la solución exacta de (6.11). Las aproximaciones asintóticas de la solución de (6.11) se obtienen con un

error de orden³ $\mathcal{O}(\varepsilon)$ por aproximaciones de orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en los coeficientes del lado derecho de las Ecuaciones (6.26)-(6.29). Aplicando este procedimiento al subsistema lento da:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt}(t) &= A_0 x_s(t) + A_q h(t) + B_1 r(t), \\ A_q &= A_{13} - A_{12} A_{22}^{-1}(0, t) A_{23}(t). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Para el subsistema rápido, cambiamos la escala de tiempo a, $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$, con este cambio, la derivada para el subsistema rápido se reduce a:

$$\frac{d}{dt} z_f(\tau) = \frac{d}{d\tau} z_f(\tau) \frac{d}{dt} \tau = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\tau} z_f(\tau).$$

Esto lleva a un problema de perturbación regular para los coeficientes del lado derecho de la ecuación, siguiendo el procedimiento como en (6.30) la ecuación para el subsistema rápido es:

$$\frac{d}{d\tau} z_f(\tau) = A_{22}(0, t_0) z_f(\tau) + A_{23}(t_0 + \varepsilon\tau) h(t_0 + \varepsilon\tau), \quad (6.31)$$

y las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} x_s(t_0) &= x_0, \\ z_f(0) &= A_{22}^{-1}(0, t_0) A_{21}(t_0) x_0 + z_0, \end{aligned} \quad (6.32)$$

la matriz A_0 se definió en la Ecuación (6.21).

Las Ecuaciones (6.30) y (6.31) representan al subsistema lento y al subsistema rápido con un correcto rechazo de ε en (6.11).

Se obtiene de esta forma, la siguiente particularización del Teorema 6.1 en [38] para el sistema definido por la Ecuación (6.11):

Teorema 6.1.2

Dada la matriz $A_{22}(\varepsilon, t)$, junto con las propiedades (6.14) y $\|h\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Existe un valor de $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ las siguientes expresiones se mantienen uniformemente para $t \in [t_0, t_f]$:

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (6.33)$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}(t) A_{21}(t) x_s(t) + z_f \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (6.34)$$

donde x_s y z_f son soluciones de (6.30) y (6.31), con condiciones iniciales (6.32).

□

El Teorema 6.1.2 permite obtener las soluciones del sistema no homogéneo (6.11) en un intervalo de tiempo finito, con un error $\mathcal{O}(\varepsilon)$, en base a las soluciones de los subsistemas lento y rápido haciendo uso de la transformación de estado definida por la Ecuación (6.17).

³ Kokotović [38] considera en general errores de orden $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$.

6.1.5. Ejemplo Ilustrativo

En esta subsección se da un ejemplo que muestra como aplicar los resultados obtenidos en este capítulo. Se considera el siguiente sistema:

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + a_3(t)\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_2(t)\frac{d}{dt}y(t) + a_1(t)y = b(t)u \quad (6.35)$$

con las siguientes condiciones iniciales:

$$y(0) = 0, \quad \frac{d}{dt}y(0) = 0 \quad y \quad \frac{d^2}{dt^2}y(0) = 0, \quad (6.36)$$

los parámetros están definidos de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{1}{2^{j-1}} \operatorname{sen}((2j-1)t) \\ a_2(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \operatorname{sen}\left(\frac{jt}{2}\right) \\ a_3(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{j}{(2j-1)(2j+1)} \operatorname{sen}(4jt) \\ b(t) = 1 + 0.568(\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(2t)) \end{cases} \quad (6.37)$$

las funciones anteriores se pueden observar en la Figura 6.1.

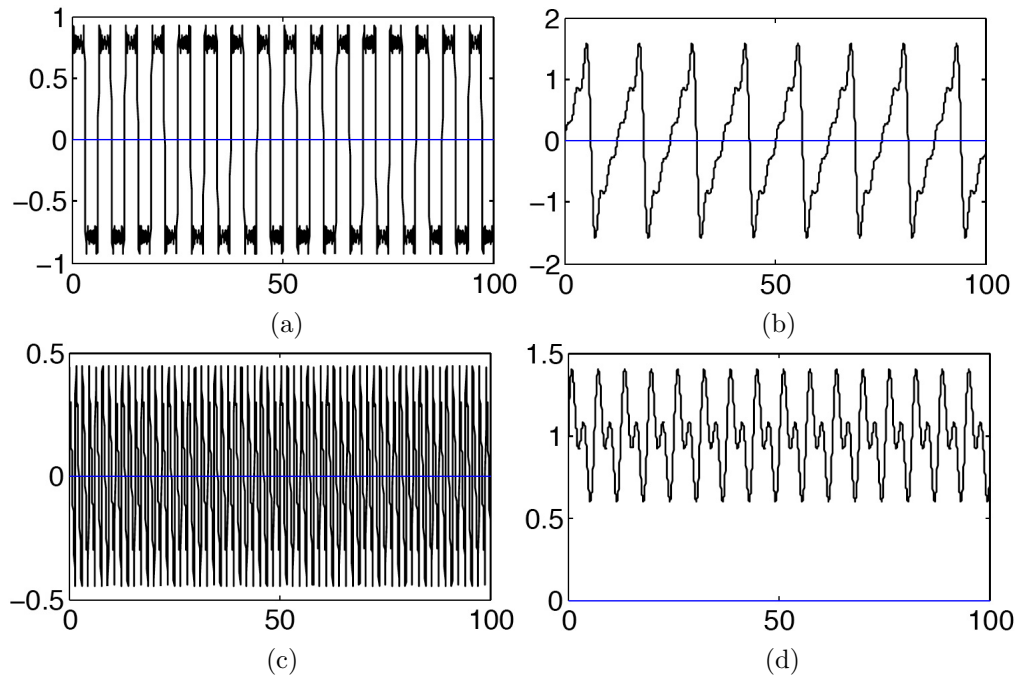


Figura 6.1: Parámetros del Sistema: (a) $a_1(t)$, (b) $a_2(t)$, (c) $a_3(t)$ y (d) $b(t)$

de las gráficas anteriores se observa que para los parámetros $a_1(t)$, $a_2(t)$ y $a_3(t)$ satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\|a_i(t)\| \leq 2 = L_{0,a}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad (6.38)$$

y el parámetro $b(t)$ satisface la siguiente desigualdad:

$$b_1 = \frac{1}{2} \leq b(t) \leq \frac{3}{2} = b_2 \quad (6.39)$$

El modelo de estado es (ver Sección 4.1 del Capítulo 4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0] \zeta(t). \end{aligned} \quad (6.40)$$

De las Ecuaciones (6.7) y (6.8) de la Subsección 6.1.1, la ley de control $u(t)$ es:

$$\varepsilon u(t) = [0 \ 0 \ -1] \zeta(t) + [0 \ 0 \ -1] h(t) + [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \quad (6.41)$$

y el control de acoplamiento:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_3 + (1 + \ell) \\ 0 & 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} (\zeta(t) + h(t)) \\ &+ \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t), \end{aligned} \quad (6.42)$$

de la Ecuación (6.9) los parámetros \bar{a}_1 , \bar{a}_2 y \bar{a}_3 son los coeficientes del siguiente polinomio Hurwitz:

$$p_{ac}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

nótese que $\bar{a}_3 = 1$, tomando en cuenta las hipótesis del Teorema 6.1.1 y la desigualdad (6.10), se pueden seleccionar los siguientes valores $\beta = 10$, $K = 0.5$ y $\tau = 0.085$, que se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\bar{a}_3 + \beta > 1 \quad \text{y} \quad \tau < \frac{1}{\bar{a}_3 + \beta - 1}$$

y del Lema 6.1.1 se sabe que:

$$\bar{M}_1 = \sqrt{1 + (\bar{a}_1 - 1/\tau)^2 + 2(1 - \beta)^2} = 16.60,$$

$$\bar{M}_2 = |\bar{a}_1 + \beta - 1/\tau - 1| = 1.76,$$

$$\bar{M}_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \bar{a}_i^2 + (\beta - 1/\tau)^2} = 3.01,$$

$$\varepsilon^* = \frac{\beta b_1}{\beta \bar{M}_2 + K \bar{M}_1 \bar{M}_3} = \frac{5}{17.6 + 24.98} = 0.11,$$

y como se debe satisfacer $\varepsilon \in (0, 0.11)$, se selecciona:

$$\varepsilon = 0.09.$$

Para satisfacer la hipótesis **H3**, $r \in L^\infty \cap C^\infty$, la señal de referencia r se construye de la siguiente forma:

$$r(t) = \frac{10}{2.75} \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma, \quad t \in [0, 350].$$

donde:⁴

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-(t')^2}}, \quad \text{con } t' = (12/75)t - 1.$$

La gráfica de la función $\varphi(t)$ y de la señal de referencia $r(t)$ se muestran en la Figura 6.2.

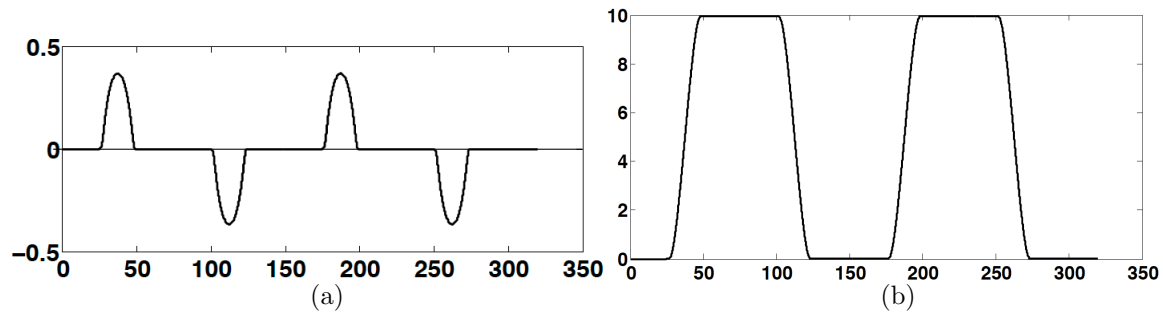


Figura 6.2: Gráficas de la función $\varphi(t)$ y de la señal de referencia $r(t)$: (a) función $\varphi(t)$ y (b) referencia $r(t)$.

En la Figura 6.3 se muestran simulaciones numéricas realizadas con el software Matlab[®] del sistema variante en el tiempo (6.40) y (6.37), controlado por (6.41) y (6.42).

El error de acoplamiento de modelo se calcula como sigue:

$$|y(t) - y_{id}(t)| = \left| y(t) - C_{ac} \int_0^t \exp(A_{ac}(t - \sigma)) B_{ac} r(\sigma) d(\sigma) \right|,$$

donde:

$$A_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{ac} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{ac} = [1 \ 0 \ 0].$$

⁴La función φ es tomada de la Definición 2.4.5 en [55].

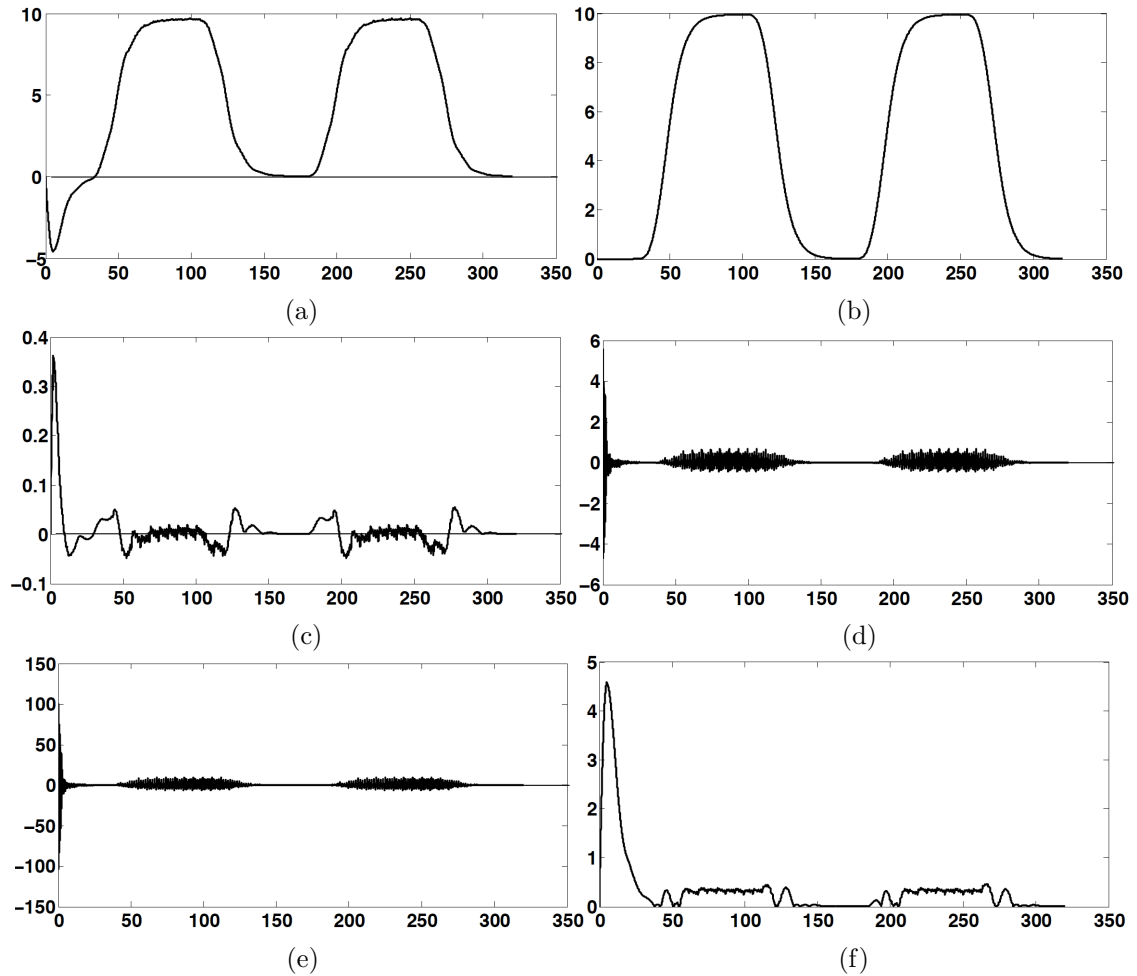


Figura 6.3: Variables de Control: (a) salida $y(t)$, (b) salida $y_{id}(t)$, (c) señal de control de acoplamiento $x_3(t)$, (d) señal de control de acoplamiento $x_4(t)$, (e) ley de control $u(t)$ y (f) error de acoplamiento $|y(t) - y_{id}(t)|$.

Se observa en la gráfica (f) de la Figura 6.3 que el error de acoplamiento es pequeño, la salida del sistema tarda aproximadamente 30 segundos en alcanzar la referencia. La dinámica de la señal $u(t)$ es de esa forma ya que los parámetros del sistema varían rápidamente, como se observa en la Figulara 6.1. Se puede ver que el problema de acoplamiento de modelo se logra resolver con el esquema de control propuesto en la Subsección 6.1.1.

6.2. Ley de Control Singularmente Perturbada para el Sistema SISO LTVD

Se considera un sistema lineal variante en el tiempo SISO con retardo, cuya dinámica está representada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + \sum_{i=1}^n a_{n-i+1}(t) \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}} y(t) + \sum_{i=1}^n \hat{a}_{n-i+1}(t) \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}} y(t - \tau(t)) = b(t)u(t) \quad (6.43)$$

definida para $t \geq t_0 \geq 0$, se considerará que $0 \leq \tau(t) \leq \hat{\tau}$. Con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y(\sigma) &= g(\sigma), \quad \text{para } \sigma \in [t_0 - \hat{\tau}, t_0], \\ y(t_0), \frac{d}{dt} y(t_0), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t_0). \end{aligned}$$

$y \in \mathbb{R}$ es la variable dependiente, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada. Los coeficientes $a_i(t)$, $\hat{a}_i(t)$, $b(t)$ y la función real $\tau(t)$ son desconocidos, tales que se cumplen las siguientes hipótesis:⁵

H1 $a_i(t) \in \mathcal{C}^\infty$, $\|a_i(t)\| \leq L_{0,a}$ y $\|\frac{d}{dt} a_i(t)\| \leq L_{1,a}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

H2 $\hat{a}_i(t) \in \mathcal{C}^\infty$, $\|\hat{a}_i(t)\| \leq \hat{L}_{0,a}$ y $\|\frac{d}{dt} \hat{a}_i(t)\| \leq \hat{L}_{1,a}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

H3 $b(t) \in \mathcal{C}^\infty$, $0 < b_1 \leq b(t) \leq b_2$ y $\|\frac{d}{dt} b(t)\| \leq c$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

H4 $\tau(t) \in \mathcal{C}^\infty$, $0 \leq \tau(t) \leq \hat{\tau}$ y $\frac{d}{dt} \tau(t) < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

H5 Los números positivos $L_{0,a}$, $L_{1,a}$, $\hat{L}_{0,a}$, $\hat{L}_{1,a}$, b_1 , b_2 y $\hat{\tau}$ son conocidos.

La ecuación diferencial con retardo (6.43) puede ser representada en el espacio de estado, ver Sección 4.1, con $u(t)$ como la entrada de control y $y(t)$ como la salida del sistema. Seleccionando los estados como en (4.3):

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y & \frac{dy}{dt} & \dots & \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T,$$

se tiene que la representación de estado de la Ecuación (6.43) con retardo es:

$$\frac{d}{dt} \zeta(t) = \left[\mathbf{T}_u(\underline{\chi}_n^2)^T + \underline{\chi}_n^n(\mathbf{a}_n(t))^T \right] \zeta(t) + \left[\underline{\chi}_n^n(\hat{\mathbf{a}}_n(t))^T \right] \zeta(t - \tau(t)) + \left[\underline{\chi}_n^n b(t) \right] u(t),$$

$$y(t) = \left[(\underline{\chi}_n^1)^T \right] \zeta(t),$$

con:

$$\mathbf{a}_n(t) = [-a_1(t) \dots - a_n(t)]^T;$$

$$\hat{\mathbf{a}}_n(t) = [-\hat{a}_1(t) \dots - \hat{a}_n(t)]^T,$$

(6.44)

⁵ Por simplicidad, se consideran funciones de clase \mathcal{C}^∞ . Se pueden considerar funciones de clase \mathcal{C}^k , donde k es un entero positivo lo suficientemente grande tal que las condiciones de derivabilidad se mantengan. Ver Corolario 2.4.12 de [55].

para $t \geq t_0$ y con las siguientes condiciones iniciales:

$$\zeta(t) = g(t), \quad t \in [t_0 - \hat{\tau}, t_0)$$

$$\zeta(t) = \zeta_0 = [y(0) \, dy(0)/dt \, \cdots \, d^{n-1}y(0)/dt^{n-1}]^T, \quad t = t_0.$$

Al igual que en la Sección 6.1 se desea resolver el problema de acoplamiento de modelo para el Sistema (6.44). Para esto se propone el mismo esquema de control dado por las Ecuaciones (6.7) y (6.8). Para el caso del sistema con retardo (6.44) será necesario mostrar que existen las matrices $L(t)$ y $H(t)$ que satisfacen un sistema de ecuaciones algebraico diferenciales, lo cual se desarrollará en la Subsección 6.2.2.

6.2.1. Esquema de Control Implícito Singular

Para la representación de estado (6.44), se propone el siguiente esquema de control, compuesto por: una ley de control singularmente perturbada y un control de acoplamiento.⁶

Ley de Control Singularmente Perturbada

$$\varepsilon u(t) = -(\underline{\chi}_n^n)^T \zeta(t) + (\underline{\chi}_2^1)^T \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

Control de Acoplamiento

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{a}_n)^T + (1 + \ell)(\underline{\chi}_n^n)^T \\ -(\beta - 1)(\underline{\chi}_n^n)^T \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} + \underline{\chi}_2^1 r(t),$$

con:

$$\bar{a}_n = [-\bar{a}_1 \, \cdots \, -\bar{a}_n]^T, \quad (6.46)$$

donde: β , ℓ y ε son números positivos y los parámetros $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ son los coeficientes de un polinomio Hurwitz (c.f (6.9)),

$$p_{ac}(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_n \lambda^{n-1} + \cdots + \bar{a}_2 \lambda + \bar{a}_1, \quad (6.47)$$

los cuales se seleccionan de forma que se satisfagan las siguientes desigualdades (c.f (6.10)):

$$\beta \geq \max\{-\operatorname{Re}(\lambda) \mid p(\lambda) = 0\} \text{ y } \ell + 1 > L_{0,a} + \bar{a}_n \quad (6.48)$$

Se considerará que la señal de referencia $r(t)$ satisface la siguiente hipótesis:

H6 $r(t) \in L^\infty \cap \mathcal{C}^\infty$. Se requiere que la función sea \mathcal{C}^∞ , ya que el esquema de control es una aproximación de una retroalimentación proporcional derivativa.

El objetivo del

⁶ Nótese que se estará utilizando una escritura abreviada del esquema de control dado por las ecuaciones (6.7) y (6.8). Ver el apartado de notación de esta tesis.

■ **control de acoplamiento es:**

1. asignar la dinámica en lazo cerrado como la de un sistema lineal invariante en el tiempo cuyo polinomio característico $p(\lambda)$ es Hurwitz y
2. asignar de forma exponencial la convergencia hacia la dinámica deseada.

El objetivo de la

■ **ley de control singularmente perturbada es:**

1. cambiar la base donde está representado el sistema para obtener un *modelo singularmente perturbado*, y
2. aproximar hacia la dinámica deseada en un orden de ε .

Se demostrará que los parámetros, β y ℓ , permiten calcular un valor pequeño de ε tal que la estabilidad asintótica uniforme del *modelo lineal singularmente perturbado con retardo* se garantiza.

Para obtener el modelo lineal singularmente perturbado con retardo, se combinan las Ecuaciones (6.44), (6.45) y (6.46) y se hace la siguiente selección de variables

$$x_i(t) = \zeta_i(t), \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \quad \text{y} \quad z(t) = \zeta_n(t),$$

lo cual lleva a obtener el siguiente modelo (c.f. (6.11)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) + B_1r(t) \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z(t) &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) \\ &\quad + \hat{A}_{21}(\varepsilon, t)x(t - \tau(t)) + \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)z(t - \tau(t)) \end{aligned} \tag{6.49}$$

donde las matrices $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, $A_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$, $A_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, $\hat{A}_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ y $\hat{a}_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left[\begin{array}{c|cc} \text{Tu}(\underline{\chi}_{(n-1)}^2)^T & \underline{0}_{(n-1)} & \underline{0}_{(n-1)} \\ (\bar{\mathbf{a}}_{n-1})^T & -(1+\ell) & -\ell \\ (\underline{0}_{(n-1)})^T & (\beta-1) & -\beta \end{array} \right], \\ A_{12} &= \left[\begin{array}{c} \underline{\chi}_{(n-1)}^{(n-1)} \\ -\bar{a}_n + (1+\ell) \\ -(\beta-1) \end{array} \right], \quad B_1 = \left[\begin{array}{c} \underline{0}_{(n-1)} \\ \underline{\chi}_2^1 \end{array} \right] \end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned} A_{21}(\varepsilon, t) &= \left[\varepsilon(\mathbf{a}_{(n-1)}(t))^T \mid b(t) \quad 0 \right], \\ A_{22}(\varepsilon, t) &= -\varepsilon a_n(t) - b(t), \\ \hat{A}_{21}(\varepsilon, t) &= \left[\varepsilon(\hat{\mathbf{a}}_{(n-1)}(t))^T \mid 0 \quad 0 \right], \\ \hat{a}_{22}(\varepsilon, t) &= -\varepsilon \hat{a}_n(t). \end{aligned} \tag{6.51}$$

El Sistema (6.49) puede ser redefinido como sigue:

$$E_\varepsilon \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{bmatrix} = A(\varepsilon, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \hat{A}(\varepsilon, t) \begin{bmatrix} x(t - \tau(t)) \\ z(t - \tau(t)) \end{bmatrix} + \bar{B}r(t) \quad (6.52)$$

con:

$$E_\varepsilon = \begin{bmatrix} I_{n+1} & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}(\varepsilon, t) & A_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix}, \quad (6.53)$$

$$\hat{A}(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} 0_{n+1,n+1} & 0_{n+1,1} \\ \hat{A}_{21}(\varepsilon, t) & \hat{a}_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para estudiar la estabilidad asintótica de la ecuación diferencial homogénea (6.52), se siguen los procedimientos desarrollados en las Subsecciones 5.2.3 y 5.2.4 del Capítulo 5, los cuales son:

- aplicar una transformación de estado, cuyo objetivo es desacoplar el sistema en un subsistema lento y un subsistema rápido,
- estudiar la *estabilidad uniforme asintótica* aplicando los resultados demostrados en los Lemas 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3. Cuando se considera el caso homogéneo del Sistema (6.52) y que no existe retardo, es decir,

$$\hat{A}(\varepsilon, t) = 0, \quad \text{y} \quad \bar{B} = 0.$$

Posteriormente siguiendo las ideas de la Sección 5.4, para sistemas lineales variantes en el tiempo singularmente perturbados con retardo, se estudiará la estabilidad asintótica de la Ecuación (6.52) cuando:

$$\hat{A}(\varepsilon, t) \neq 0, \quad \text{y} \quad \bar{B} = 0,$$

mediante el método de Lyapunov.

6.2.2. Transformación de Estado

En esta subsección se analiza la ecuación homogénea correspondiente al Sistema (6.52), la cual es:

$$E_\varepsilon \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{bmatrix} = A(\varepsilon, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \hat{A}(\varepsilon, t) \begin{bmatrix} x(t - \tau(t)) \\ z(t - \tau(t)) \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

Siguiendo los resultados de la Sección 5.4 y [14], se desacoplará el sistema (6.54) en dos subsistemas, uno llamado lento y el otro llamado rápido. Se procederá siguiendo los desarrollos de la Subsección 5.2.3 del Capítulo 5.

Se definen las siguientes matrices, las cuales son continuas, diferenciales y acotadas (c.f. (6.16)):

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \varepsilon R_L(t) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}, \\ H(t) &= H_0(t) + \varepsilon R_H(t) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

para definir la transformación de estado que permita desacoplar al Sistema (6.52) en un subsistema lento y uno rápido. Se define el siguiente cambio de variables (c.f. (6.17)):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta \\ \eta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (I_{n+1} - \varepsilon H(t)L(t)) & -\varepsilon H(t) \\ L(t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \\ &= M^{-1}(t) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (6.55) y (6.56) en (6.54), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta(t) &= \begin{bmatrix} -\varepsilon \frac{d}{dt}H(t) + A_{12} - \varepsilon H(t)L(t)A_{12} \\ -H(t)A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon A_{11}H(t) - \varepsilon A_{12}L(t)H(t) \end{bmatrix} \eta \\ &\quad - H(t)\hat{a}_{22}(\varepsilon, t)\eta(t - \tau(t)) + [A_{11} - A_{12}L(t)]\theta \\ \varepsilon \frac{d}{dt}\eta(t) &= \begin{bmatrix} \varepsilon \frac{d}{dt}L(t) + A_{21}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)\{A_{11} - A_{12}L(t)\} \\ -A_{22}(\varepsilon, t)L(t) \end{bmatrix} x \\ &\quad + \begin{bmatrix} \hat{A}_{21}(\varepsilon, t) - \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)L(t) \end{bmatrix} x(t - \tau(t)) \\ &\quad + [\varepsilon L(t)A_{12} + A_{22}(\varepsilon, t)]\eta \\ &\quad + \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)\eta(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (6.57)$$

Tomando en cuenta los resultados de los Lemas 1 y 2 de [14] y que las matrices, A_{11} y $A_{22}(\varepsilon, t)$, son Hurwitz para todo $t \in \mathbb{R}^+$, se concluye que existe un número positivo ε lo suficientemente pequeño tal que existen $L(t)$ y $H(t)$ que son solución de las siguientes ecuaciones algebraico diferenciales:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt}L(t) &= A_{22}(\varepsilon, t)L(t) - A_{21}(\varepsilon, t) - \varepsilon L(t)[A_{11} - A_{12}L(t)] \\ \hat{A}_{21}(\varepsilon, t) - \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)L(t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.58)$$

y

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt}H(t) &= A_{12} - \varepsilon H(t)L(t)A_{12} - H(t)A_{22}(\varepsilon, t) \\ &\quad + \varepsilon A_{11}H(t) - \varepsilon A_{12}L(t)H(t) \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$H(t)\hat{a}_{22}(\varepsilon, t) = 0$$

siguiendo el procedimiento desarrollado en los Apéndices C.4.1 y C.4.3, se obtienen las matrices definidas en la Ecuación (6.55), las cuales toman la siguiente forma (c.f. (6.18)):

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad H(t) = H_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ L_0(t) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = \bar{L}_0, \\ H_0(t) &= \bar{A}_{12}A_{22}^{-1}(0, t) = \bar{H}_0 \end{aligned} \quad (6.60)$$

Finalmente sustituyendo las Ecuaciones (6.58)-(6.60) en (6.57), se obtiene:

$$d\theta/dt = [\bar{A}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)]\theta$$

$$\varepsilon d\eta/dt = [\bar{a}_{22}(\varepsilon, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)]\eta + \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)\eta(t - \tau(t))$$

donde (c.f. (6.21)):

$$\bar{A}_0 = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0(t) \quad \text{y} \quad \bar{a}_{22}(\varepsilon, t) = A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon\bar{L}_0A_{12} \quad (6.61)$$

Así, el Sistema (6.54) es desacoplado en el subsistema lento (c.f. (6.19)),

$$\frac{d}{dt}x_s(t) = \bar{A}_0x_s(t), \quad (6.62)$$

y en el subsistema rápido (c.f. (6.20)),

$$\varepsilon \frac{d}{dt}z_f(t) = \bar{a}_{22}(\varepsilon, t)z_f(t) + \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)z_f(t - \tau(t)). \quad (6.63)$$

6.2.3. Condiciones para Estabilidad Asintótica Uniforme

En esta subsección se demuestra que la estabilidad asintótica uniforme de los Subsistemas (6.62) y (6.63) es garantizada por las propiedades de las matrices de transición respectivas, cuando no se toma en cuenta el retardo, es decir para el caso $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$.

Nótese que al combinar las Ecuaciones (6.61), (6.60), (6.50) y (6.51), se obtienen de forma explícita las matrices:

$$\bar{A}_0 = \left[\begin{array}{c|cc} \text{Tu}(\underline{X}_{(n-1)}^2)^T & \underline{X}_{(n-1)}^{(n-1)} & \underline{0}_{(n-1)} \\ \hline (\bar{\mathbf{a}}_{(n-1)})^T & -\bar{a}_n & -\ell \\ (\underline{0}_{(n-1)})^T & 0 & -\beta \end{array} \right] \quad (6.64)$$

y

$$\bar{a}_{22}(\varepsilon, t) = -\varepsilon a_n(t) - b(t) + \varepsilon(\bar{a}_n - (\ell + 1)) \quad (6.65)$$

El polinomio característico de \bar{A}_0 es (c.f. (6.22)):

$$p(\lambda) = (\lambda + \beta)p_{ac}(\lambda), \quad (6.66)$$

de la Ecuación (6.47) se sabe que $p_{ac}(\lambda)$ es Hurwitz y también se sabe que el parámetro β es positivo, entonces el polinomio $p(\lambda)$ definido en la Ecuación (6.66) es Hurwitz. Así de la Ecuación (6.64) y tomando en cuenta la desigualdad (6.48), implica que existe una constante $K_1 > 0$ tal que la matriz de transición, $\phi_s(t, t_0)$, del subsistema lento (6.62) satisface:

$$\|\phi_s(t, t_0)\| \leq K_1 e^{-\beta(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.67)$$

Tomando en cuenta la hipótesis **H3** y la desigualdad (6.48), se tiene que $\bar{a}_{22}(\varepsilon, t)$ satisface la siguiente desigualdad:

$$-\bar{a}_{22}(\varepsilon, t) \geq b_1 + \varepsilon(-L_{0,a} - \bar{a}_n + (\ell + 1)) > b_1 > 0 \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.68)$$

Entonces cuando $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$, el subsistema rápido dado por la Ecuación (6.63) toma la forma:

$$\varepsilon \frac{d}{dt}z_f(t) = \bar{a}_{22}(\varepsilon, t)z_f(t), \quad (6.69)$$

por tanto a matriz de transición del Subsistema (6.69), $\phi_f(t, t_0)$, es:

$$\begin{aligned} \phi_f(t, t_0) &= e^{-\alpha(t)} \\ \alpha(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (b(\rho) + \varepsilon(a_n(\rho) - \bar{a}_n + (\ell + 1))) d\rho \end{aligned}$$

De (6.68), la matriz de transición $\phi_f(t, t_0)$ satisface:

$$\|\phi_f(t, t_0)\| \leq K_2 e^{-\frac{b_1}{\varepsilon}(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.70)$$

Mediante el estudio de las propiedades de las matrices de transición de los subsistemas lento (6.67) y rápido (6.70), se garantizará la estabilidad asintótica uniforme del Sistema (6.54). Esto se hará en base a los resultados desarrollados en la Subsección 5.2.4 del Capítulo 5. En particular se hace uso del resultado dado por el Teorema 5.2.1.

Para el Sistema (6.54), cuando $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$, se puede reescribir el Teorema 5.2.1 de la siguiente forma (c.f. Teorema 6.1.1).

Teorema 6.2.1

Dadas (6.67), (6.70) y $\ell + 1 > L_{0,a} + \bar{a}_n$. Existe un número $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ el Sistema (6.54) es uniforme asintótico estable, cuando $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$. Más aún, su matriz de transición $\phi(t, s)$, satisface:

$$\|\phi(t, s)\| \leq K e^{-\beta(t-s)} \quad \forall t \geq s \geq t_0,$$

para algún número $K > 0$. □

El resultado anterior se preserva de forma asintótica cuando ε tiende a 0. Desde un punto de vista computacional, es importante tener una idea del orden de la cota superior ε^* . Esta cota la da el siguiente lema (c.f. Lema 6.1.1).

Lema 6.2.1

Bajo las mismas condiciones del Teorema 6.2.1, y $\|\bar{A}_{12}\|_2 \leq \bar{M}_1$, $\|\bar{L}_0 \bar{A}_{12}\|_2 \leq \bar{M}_2$ y $\|\bar{L}_0 \bar{A}_0\|_2 \leq \bar{M}_3$, el sistema singularmente perturbado (6.54) es uniforme asintóticamente estable para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, con:

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \frac{\beta b_1}{\beta \bar{M}_2 + K \bar{M}_1 \bar{M}_3} \\ \bar{M}_1 &= \sqrt{1 + (-\bar{a}_n + (1 + \ell))^2 + (1 - \beta)^2} \\ \bar{M}_2 &= |\bar{a}_n - \ell - 1| \\ \bar{M}_3 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 + \ell^2} \end{aligned}$$

□

6.2.4. Estabilidad Asintótica del Sistema con Retardo

Reescribiendo la Ecuación (6.62) y (6.63) de la forma:

$$E_\varepsilon \frac{dx_{sf}(t)}{dt} = A^*(\varepsilon, t)x_{sf}(t) + \varepsilon \hat{A}^*(t)x_{sf}(t - \tau(t)), \quad (6.71)$$

con $x_{sf}(t) = [x_s^T(t) \ z_f(t)]^T$ y:

$$\begin{aligned} A^*(\varepsilon, t) &= \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & \bar{a}_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix} \\ \hat{A}^*(t) &= \begin{bmatrix} 0_{n+1,n+1} & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & -\hat{a}_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.72)$$

La estabilidad asintótica del Sistema (6.71) se estudia siguiendo las ideas de [16]. De la Ecuación (6.66) se sabe que la matriz \bar{A}_0 es Hurwitz y usando la desigualdad (6.68), entonces existen:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad (6.73)$$

$$Q(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & -\bar{a}_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix}$$

donde $W_1 = W_1^T > 0$ y $Q_1 = Q_1^T > 0$, tales que:

$$A^*(\varepsilon, t)^T W + W A^*(\varepsilon, t) = -2Q(\varepsilon, t) \quad (6.74)$$

Para los Subsistemas (6.62) y (6.63), el resultado principal sobre la estabilidad del sistema homogéneo se da en el siguiente teorema.

Teorema 6.2.2

Dado que la matriz $A^(\varepsilon, t)$ satisface la ecuación de Lyapunov (6.74) y $\bar{a}_{22}(\varepsilon, t)$ satisface la desigualdad (6.68), y tomando en cuenta la hipótesis **H4**, existe un número positivo lo suficientemente pequeño ε^* , tal que el Sistema (6.71) es asintóticamente estable para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$. \square*

El Teorema 6.2.2 establece condiciones suficientes de estabilidad para el Sistema (6.49). En la demostración dada en la Sección D.6 del Apéndice D, se puede notar que el criterio es dependiente del retardo del sistema, es decir, la hipótesis **H4** sobre la dinámica del retardo permite que se cumpla el criterio de estabilidad de Lyapunov.

6.2.5. Aproximación del Estado

En esta sección, se obtiene una aproximación asintótica del estado del Sistema (6.49), mediante el conocimiento de las soluciones de los subsistemas lento y rápido, dado que se desea mostrar que el estado del sistema no homogéneo preserva la estabilidad asintótica, en el Teorema 6.2.3 se demuestra que para un número positivo lo suficientemente pequeño ε esto es cierto.

Se considera el modelo singularmente perturbado con retardo no homogéneo (6.49), es decir,

$$\hat{A}(\varepsilon, t) \neq 0, \quad y \quad \bar{B} \neq 0,$$

con condiciones iniciales: $x(t_0) = x_0$ y $z(t_0) = z_0$. Aplicando el cambio de variable definido en (6.56), (6.58) y (6.59), se obtiene:

$$\begin{aligned}
d\theta/dt = & (A_{11} - A_{12}L(t) - \varepsilon H(LA_{11} + A_{21}(\varepsilon, t) \\
& - L(t)A_{12}L(t) - A_{22}(\varepsilon, t)) \theta(t) \\
& + (A_{12} + \varepsilon(A_{11}H(t) - A_{12}L(t) - H(t)L(t)A_{12} \\
& - H(t)A_{22}(\varepsilon, t)) + \varepsilon^2(H(t)A_{22}(\varepsilon, t)L(t)H(t) \\
& + H(t)L(t)A_{12}L(t)H(t) - H(t)A_{21}(\varepsilon, t)H(t) \\
& - H(t)L(t)A_{11}H(t))) \eta(t) \\
& - \varepsilon H(t)\hat{A}_{21}(\varepsilon, t)(\theta(t - \tau(t)) + \varepsilon H(t)\eta(t - \tau(t))) \\
& - \varepsilon H(t)\hat{a}_{22}(\varepsilon, t)(-L(t)\theta(t - \tau(t)) + (1 - \varepsilon L(t)H(t))) \\
& + [I - \varepsilon H(t)L(t)]B_1r
\end{aligned} \tag{6.75}$$

y

$$\begin{aligned}
\varepsilon d\eta/dt = & (A_{21}(\varepsilon, t) - A_{22}(\varepsilon, t)L(t) + \varepsilon L(t)A_{11} \\
& - \varepsilon^2 L(t)A_{12}L(t)) \theta(t) \\
& + (A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon(L(t)A_{12} + A_{21}(\varepsilon, t)H(t) \\
& + A_{22}(\varepsilon, t)L(t)H(t)) + \varepsilon^2(L(t)A_{11}H(t) \\
& - L(t)A_{12}L(t)H(t))) \eta(t) \\
& + \hat{A}_{21}(\varepsilon, t)(\varepsilon(\theta(t - \tau(t)) + \varepsilon H(t)\eta(t - \tau(t))) \\
& + A_{22}(\varepsilon)(-L(t)\theta(t - \tau(t)) + (1 - \varepsilon L(t)H(t))) + \varepsilon L(t)B_1r
\end{aligned} \tag{6.76}$$

con las condiciones iniciales:

$$\theta(t_0) = [I_n - \varepsilon H(t)L(t)]x_0 - \varepsilon H(t)z_0, \tag{6.77}$$

$$\eta(t_0) = L(t)x_0 + z_0. \tag{6.78}$$

Enseguida se calculan las soluciones del sistema no homogéneo (6.75)-(6.78), aplicando la transformación inversa de estado (6.56), se obtiene la solución exacta de (6.49). La aproximación asintótica de la solución de (6.49) con un error⁷ $\mathcal{O}(\varepsilon)$ se obtiene cuando se considera: $L(t) = \bar{L}_0(t)$, $H(t) = \bar{H}_0(t)$ y manteniendo aproximaciones de orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$ del lado derecho de las Ecuaciones (6.75)-(6.78). Para el subsistema lento se obtiene:

$$dx_s/dt = \bar{A}_0x_s + A_{12}z_f + B_1r \tag{6.79}$$

Para el subsistema rápido, se cambia la escala de tiempo por, $\sigma = (t - t_0)/\varepsilon$, entonces la derivada para el subsistema rápido es:

$$\frac{d}{dt}z_f(\sigma) = \frac{d}{d\sigma}z_f(\sigma)\frac{d}{dt}\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\sigma}z_f(\sigma).$$

Esto reduce el problema de aproximación a un problema con perturbación regular del lado derecho de la ecuación. Siguiendo el mismo proceso como en (6.79), la ecuación para el subsistema rápido es:

$$\frac{d}{d\sigma}z_f(\sigma) = A_{22}(0, t)z_f(\sigma) \tag{6.80}$$

con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
x_s(t_0) &= x_0 \\
z_f(0) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x_0 + z_0
\end{aligned} \tag{6.81}$$

⁷ Kokotović *et al.* [38] consideran en general errores $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$.

con

$$\bar{A}_0 = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0(t)$$

Seguendo este procedimiento, se obtiene para el caso de estudio desarrollado una forma particular del Teorema 6.1 en [38]:

Teorema 6.2.3

Dadas (6.67) y (6.70). Existe un número positivo lo suficientemente pequeño $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ las siguientes expresiones se preservan de forma uniforme para $t \in [t_0, t_f]$:

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (6.82)$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x_s(t) + z_f\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (6.83)$$

donde x_s y z_f son soluciones de (6.79) y (6.80), con condiciones iniciales (6.81). □

El Teorema 6.2.3 muestra como construir las soluciones aproximadas de la ecuación diferencial (6.49) en base a las soluciones de los subsistemas lento y rápido conservando la propiedad de estabilidad asintótica cuando se satisface que $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$.

6.2.6. Ejemplo Ilustrativo

En esta subsección se desarrolla un ejemplo numérico que muestra cómo aplicar los resultados obtenidos. Se trabaja con el siguiente sistema:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \sum_{i=1}^2 a_{2-i+1}(t) \frac{d^{2-i}}{dt^{2-i}}y(t) + \sum_{i=1}^2 \hat{a}_{2-i+1}(t) \frac{d^{2-i}}{dt^{2-i}}y(t - \tau(t)) = b(t)u(t), \quad (6.84)$$

con la siguiente definición de parámetros:

$$\begin{cases} a_1(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{\text{sen}((2j-1)t)}{2^{j-1}}, & a_2(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \text{sen}\left(\frac{jt}{2}\right) \\ \hat{a}_1(t) = 2 \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \text{sen}(jt), & \hat{a}_2(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{\text{sen}((2j-1)t)}{2^{j-1}} \\ b(t) = 7 + \frac{1}{4}(\text{sen}(t) + \text{sen}(2t)), & \tau(t) = \frac{5}{4} + \frac{4}{5} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \quad (6.85)$$

Nótese que la función $\tau(t)$ satisface las siguientes desigualdades:

$$0 \leq \tau(t) \leq 2.05 = \hat{\tau}, \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\tau(t) \leq 0.8 < 1.$$

De la Ecuación (6.85) se puede notar que los parámetros $a_1(t)$ y $a_2(t)$ satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\|a_i(t)\| \leq 2 = L_{0,a}, \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (6.86)$$

los parámetros $\hat{a}_1(t)$ y $\hat{a}_2(t)$ satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\|\hat{a}_i(t)\| \leq 2 = \hat{L}_{0,a}, \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (6.87)$$

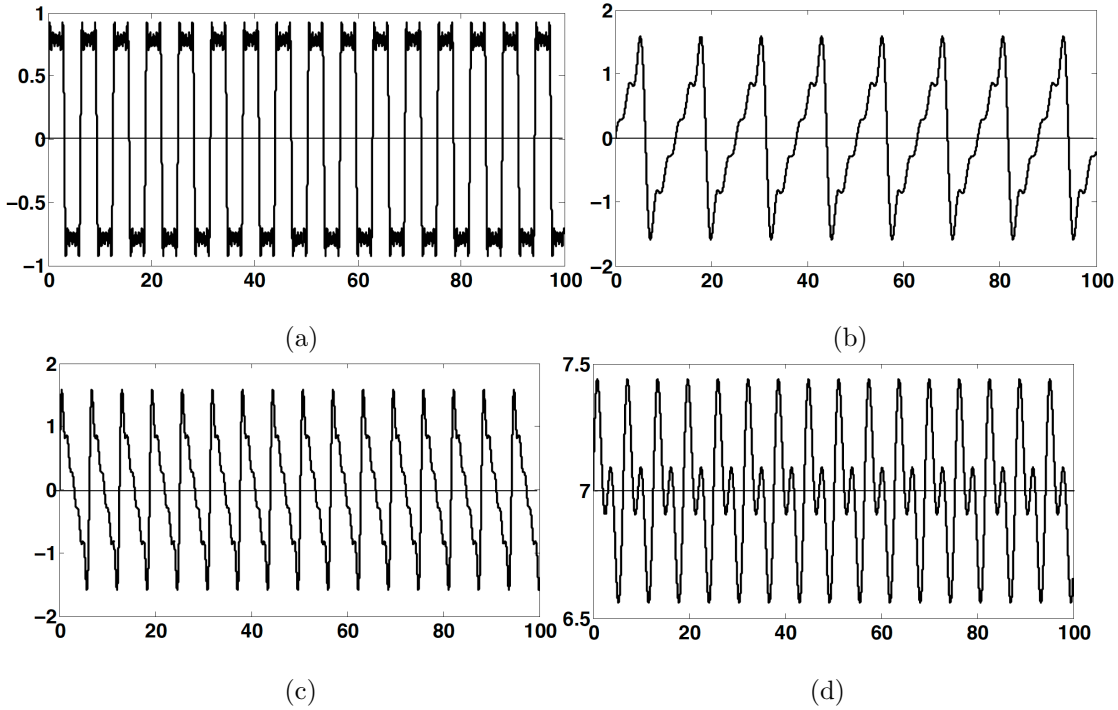


Figura 6.4: Parámetros : (a) $a_1(t)$ y $\hat{a}_2(t)$, (b) $a_2(t)$, (c) $\hat{a}_1(t)$, (d) $b(t)$.

y el parámetro $b(t)$ satisface la siguiente desigualdad:

$$b_1 = 6.5 \leq b(t) \leq 7.5 = b_2, \quad (6.88)$$

como se puede observar en las gráficas de la Figura 6.4.

El modelo de estado es (ver Sección 4.1 del Capítulo 4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\hat{a}_1(t) & -\hat{a}_2(t) \end{bmatrix} \zeta(t - \tau(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] \zeta(t) \end{aligned} \quad (6.89)$$

De las Ecuaciones (6.45) y (6.46) de la Subsección 6.2.1, la ley de control $u(t)$ es:

$$\varepsilon u(t) = [0 \ -1] \zeta + [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

y el control de acoplamiento es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 + (1 + \ell) \\ 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (6.91)$$

de la Ecuación (6.47) los parámetros \bar{a}_1 y \bar{a}_2 son los coeficientes del polinomio Hurwitz:

$$p_{ac}(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 25$$

nótese que $\bar{a}_2 = 8$. Tomando en cuenta la desigualdad (6.48) y las hipótesis de los Teoremas 6.2.1 y 6.2.2, se obtienen los siguientes valores:

$$\beta = 25, \quad \ell = 20 \quad y \quad K = 1,$$

y del Lema 6.2.1 se sabe que:

$$\bar{M}_1 = \sqrt{1 + (-\bar{a}_2 + (1 + \ell))^2 + (1 - \beta)^2} = 27.31,$$

$$\bar{M}_2 = |\bar{a}_2 - \ell - 1| = 13,$$

$$\bar{M}_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \bar{a}_i^2 + \ell^2} = 33,$$

$$\varepsilon^* = \frac{\beta b_1}{\beta \bar{M}_2 + K \bar{M}_1 \bar{M}_3} = \frac{162.5}{325 + 901.20} = 0.132,$$

y como se debe satisfacer $\varepsilon \in (0, 0.13)$, se selecciona:

$$\varepsilon = 0.06.$$

Para que se cumpla con la hipótesis **H6**, $r(t) \in L^\infty \cap C^\infty$, la señal de referencia r se construye como sigue:

$$r(t) = \frac{10}{2.75} \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma, \quad t \in [0, 100]$$

donde la función,⁸ $\varphi(t)$, se define: $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-(t')^2}}$, donde $t' = (12/75)t - 1$, (ver grafica (a) de la figura 6.2).

El error de acoplamiento de modelo se define de la siguiente manera:

$$|y(t) - y_{id}(t)| = \left| y(t) - C_{ac} \int_0^t \exp(A_{ac}(t - \sigma)) B_{ac} r(\sigma) d\sigma \right|,$$

donde:

$$A_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -8 \end{bmatrix}, \quad B_{ac} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{ac} = [1 \quad 0].$$

Las Figuras 6.5 y 6.6 muestran simulaciones numéricas en Matlab[®] para el sistema con retardo (6.89) y (6.85), controlado por (6.90) y (6.91), con una señal de referencia escalón de magnitud 10. Las simulaciones numéricas se desarrollaron con DDE23 de Matlab[®] (ver [65]).

⁸La función φ se toma de la Definición 2.4.5 en [55].

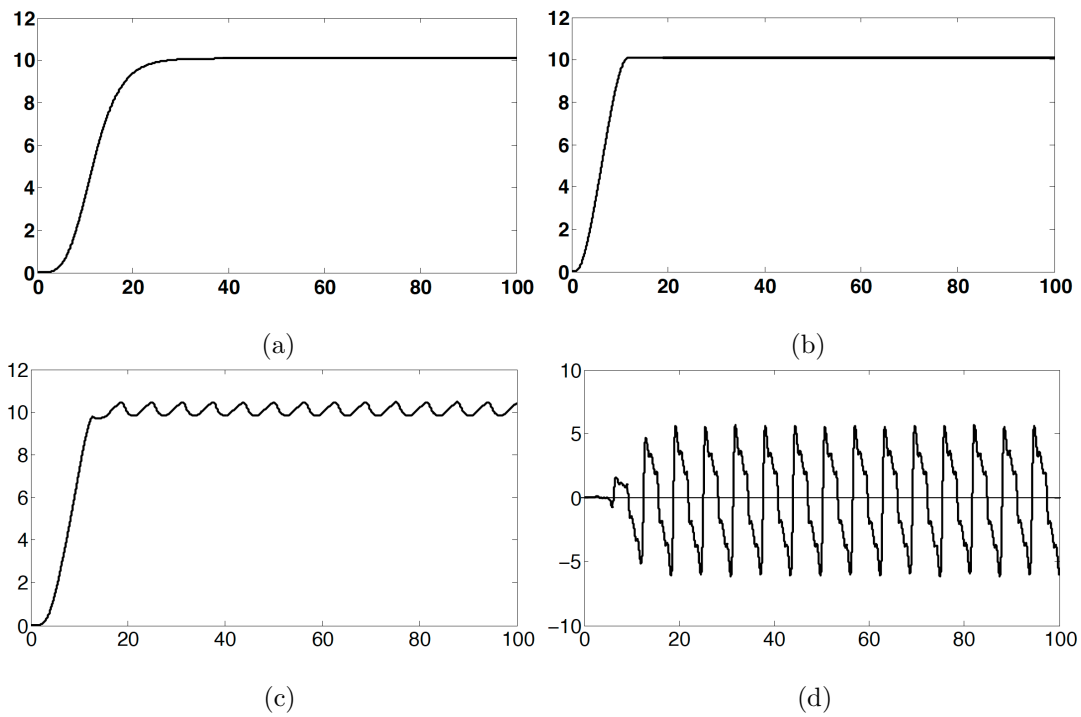


Figura 6.5: Señales de salida: (a) Salida $y_{id}(t)$, (b) Señal de referencia $r(t)$, (c) Salida $y(t)$, (d) Ley de control $u(t)$.

En la Figura 6.5 (a), se observa que la respuesta del sistema alcanza la referencia, es decir, se logra el acoplamiento de modelo. En la Figura 6.5 (d) se observa una dinámica acotada de la ley de control $u(t)$.

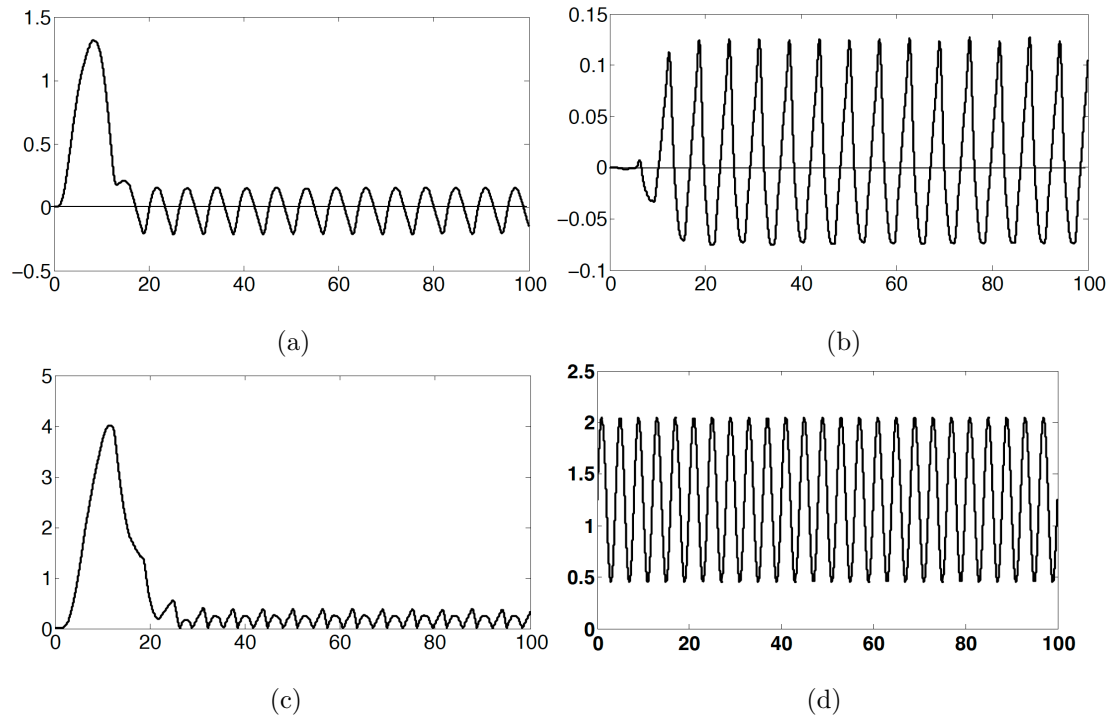


Figura 6.6: Señales del control de acoplamiento y señal de error: (a) control de acoplamiento $x_2(t)$, (b) control de acoplamiento $x_3(t)$, (c) error de acoplamiento $e(t)$, (d) señal de retardo $\tau(t)$.

En la Figura 6.6 (c), se observa que el error es pequeño, es decir, la respuesta del sistema tiende a la ideal en un tiempo aproximadamente de 20 segundos. En la Figura 6.6 (a) y (b) se observa la dinámica acotada de los estados del vector de control de estado.

6.3. Recapitulación

En las Secciones 6.1 y 6.2 se resolvió el problema de acoplamiento de modelo para los sistemas definidos por las ecuaciones (6.3) y (6.44) respectivamente, usando un mismo esquema de control en ambos casos. El problema de acoplamiento de modelo se resuelve bajo hipótesis similares cuando se desconocen los parámetros del sistema y solo se conocen algunas cotas.

Para el Sistema (6.3) se mostró en el Teorema 6.1.1 que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente uniformemente estable. El Lema 6.1.1 da de forma explícita como calcular el intervalo para el parámetro ε de tal forma que los resultados se mantengan. El esquema de control propuesto por las Ecuaciones (6.7) y (6.8) permite que las soluciones del Sistema (6.11) se puedan obtener en base a las soluciones de los subsistemas lento y rápido (ver Teorema 6.1.2).

Para el caso del Sistema (6.44) se mostró en el Teorema 6.2.1 que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente uniformemente estable. El Lema 6.2.1 da de forma explícita como calcular el intervalo para el parámetro ε de tal forma que los resultados se mantengan. El

esquema de control propuesto por las Ecuaciones (6.45) y (6.46) permite que las soluciones del Sistema (6.49) se puedan obtener en base a las soluciones de los subsistemas lento y rápido (ver Teorema 6.2.3).

El esquema de control permite en ambos casos representar a los sistemas en una nueva base que facilita los cálculos para el análisis de estabilidad, ya que se obtiene la transformación de estado que realiza el desacoplamiento de los sistemas de una forma simple, aun cuando para el caso del Sistema (6.44) se tenga que satisfacer un sistema de ecuaciones algebraico diferenciales y no así para el Sistema (6.3). El análisis de estabilidad de los subsistemas lento y rápido se concluye gracias a la asignación de la dinámica dada por el esquema de control.

El desempeño del esquema de control propuesto para los sistemas representados por las Ecuaciones (6.3) y (6.44) fue probado numéricamente en las Subsecciones 6.1.5 y 6.2.6. En las Figuras 6.3 y 6.5 se observa que el problema de acoplamiento se resuelve satisfactoriamente.

Capítulo 7

Diseño del Observador de Estado: Caso SISO LTV

El diseño de observadores basados en modelos singularmente perturbados, no es nuevo, se pueden ver las referencias [56], [28], [29]. Con respecto a sistemas lineales variantes en el tiempo existen dos trabajos importantes, [30] y [53].

En [53] se realiza el diseño del observador separando un observador de orden completo del tipo Luenberger en dos subsistemas uno lento y otro rápido. Para el análisis de estabilidad en lazo cerrado del sistema, el conocimiento de los parámetros del sistema es requerido.

En [30], el observador que se diseña es sólo para el subsistema lento. Para el análisis de estabilidad en lazo cerrado del sistema, el conocimiento de los parámetros del sistema es requerido.

En este capítulo se propone un observador con alta ganancia. El diseño se basa en la técnica de perturbaciones singulares. El trabajo que se presenta en este capítulo se reportó en [58].

El capítulo está organizado como sigue: en la Sección 7.1 se propone el observador con alta ganancia, mediante una aproximación propia. En la Sección 7.2 se estudia la estabilidad en lazo cerrado del sistema junto con el observador propuesto. Finalmente, en la Sección 7.3 se realiza un ejemplo académico que ilustra el uso de la técnica desarrollada.

7.1. Observador Singularmente Perturbado

Si el estado no es medible. Entonces hay que observarlo. Pero dado que las señales, $a_i(t)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, son desconocidas (ver Hipótesis **H1**) no se puede utilizar un observador clásico tipo Luenberger. En esta sección se propone un observador de alta ganancia el cual no necesita del conocimiento de los parámetros del sistema $a_i(t)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ y $b(t)$. Para esto, se propone aproximar un observador no propio por uno propio, como en [47].

En efecto, con el siguiente observador ideal

$$\begin{aligned} N\dot{w}(t) &= w(t) - \Gamma y(t), \\ \bar{y}(t) &= (\underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T w(t), \end{aligned} \quad (7.1)$$

con:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (\underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \quad (7.2)$$

donde y , \bar{y} y w son la entrada, la salida y las variables descriptivas, respectivamente y $\bar{n} = n - 1$. Se obtiene:

$$0 = w_1(t) - y(t), \quad \frac{d}{dt}w_1(t) = w_2(t), \quad \dots, \quad \frac{d}{dt}w_{n-1}(t) = w_n(t),$$

entonces la salida del observador ideal es:

$$\bar{y}(t) = w_n(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t).$$

Desde un punto de vista práctico la implementación del observador ideal de la Ecuación (7.1) es no realizable debido a los derivadores que pueden amplificar las señales de ruido y son sencibles a perturbaciones externas. Es por ello que se deben buscar aproximaciones que filtren la señal de salida del Sistema (6.3) y así obtener:

$$\bar{y}(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

lo cual permitirá obtener las derivadas hasta un orden $n - 1$, y así reconstruir el estado que es de la forma (ver (6.2)):

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(t) &= [\zeta_1(t) + h_1(t) \quad \zeta_2(t) + h_2(t) \quad \cdots \quad \zeta_n(t) + h_n(t)]^T \\ &= \left[y(t) + h_1(t) \quad \frac{d}{dt}y(t) + h_2(t) \quad \cdots \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + h_n(t) \right]^T \\ &= \zeta(t) + h(t), \end{aligned}$$

donde:

- $h(t)$ es la señal de perturbación, con norma de orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$, considerada en la hipótesis **H4** de la Subsección 6.1.1 del Capítulo 6.
- $\zeta(t)$ es el vector de estado del sistema.

El vector $\hat{\zeta}(t) = \zeta(t) + h(t)$ es el que se usara en el esquema de control propuesto en la Subsección 6.1.1 y se demostrará que los resultados se mantienen para un valor positivo de ε .

En [47], los autores proponen la siguiente aproximación propia singularmente perturbada del observador ideal (7.1):

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \\ \varepsilon \frac{d\bar{z}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_f & -\varepsilon^{\bar{n}+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon^{\bar{n}} q_{(1,2)} \\ -Q_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} y \quad (7.3)$$

$$y_f = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \bar{z} - \frac{1}{\varepsilon} q_{(1,2)} y$$

donde $x_f \in \mathbb{R}^1$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, y $y_f \in \mathbb{R}^1$. β_f y ε son dos números reales positivos. $U_{\bar{n}}$ y $M_{\bar{n}}$ son las matrices del filtro de Butterworth [11] que se describen a continuación:

$$U_{\bar{n}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

$$M_{\bar{n}} = \begin{cases} BDM\{M_1, \dots, M_{\bar{n}/2}\} & , \text{ para } \bar{n} \text{ par,} \\ BDM\{M_1, \dots, M_{(\bar{n}-1)/2}, 1\} & , \text{ para } \bar{n} \text{ impar,} \end{cases}$$

$$M_j = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_j & 0 \\ 0 & \text{sen } \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \text{cos}^2 \theta_j & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta_1 = \pi/(2\bar{n}), \quad (7.5)$$

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \pi/\bar{n}, \quad j \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\},$$

La matriz $Q_0 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times (\bar{n}+1)}$ es de la forma:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \cdots & \underline{q}_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

y se obtiene resolviendo recursivamente el siguiente sistema algebraico de ecuaciones:¹

$$\begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \cdots & \underline{q}_{\bar{n}} & \underline{q}_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\varepsilon} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \begin{bmatrix} \underline{q}_2 & \cdots & \underline{q}_{\bar{n}} & \underline{q}_{\bar{n}+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

¹Esta igualdad se obtiene en la demostración del Teorema 7.1.1.

el número $q_{(1,2)}$ corresponde a la entrada $(1, 2)$ de la matriz Q_0 .

Se propone aproximar en términos del filtro de Butterworth ya que:

1. Sus valores propios son todos distintos, y geoméricamente se localizan sobre el semicírculo de radio $1/\varepsilon$, sobre el semiplano izquierdo complejo, ya que:

$$\det(\lambda I_{\bar{n}} + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\bar{n}/2} ((\lambda + \operatorname{sen} \theta_i)^2 + \cos^2 \theta_i), & \text{para } \bar{n} \text{ par,} \\ (\lambda + 1) \prod_{i=1}^{(\bar{n}-1)/2} ((\lambda + \operatorname{sen} \theta_i)^2 + \cos^2 \theta_i), & \text{para } \bar{n} \text{ impar,} \end{cases} \quad (7.8)$$

así:

$$\operatorname{Spectrum}(N) \cap \operatorname{Spectrum}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} = \emptyset,$$

entonces existe una única solución para las ecuaciones (7.7), ver [18].

2. Es un filtro pasa bajos el cual minimiza la influencia de las señales de ruido. Debido a que sus polos estan distribuidos sobre el semicírculo de radio $1/\varepsilon$, sobre el semiplano izquierdo complejo, entonces se tendrá una respuesta en frecuencia maximalmente plana, lo cual permitirá extender los resultados del capítulo anterior.

En [47] se demuestra el siguiente teorema (*c.f.* Teorema 5.1 en [38]):

Teorema 7.1.1

Considérese el siguiente filtro de Butterworth:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_f & -\varepsilon^{\bar{n}+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} y \quad (7.9)$$

$$y_f = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \bar{z}$$

con las siguientes condiciones iniciales: $x_f(0) \in \mathbb{R}^1$ y $z_f(0) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$.

Entonces existe $\varepsilon^* \in (0, 1)$, tal que para cualquier $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$:

1. La conexión en cascada formada por el observador ideal (7.1) y el filtro de Butterworth (7.9) es externamente equivalente al sistema propio (7.3).
2. La salida, y_f , del sistema propio (7.3), satisface:

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + e^{-(\beta+\varepsilon^n)}x_f(0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \quad \forall t \geq t^* \\ &= \zeta_n(t) + e^{-(\beta+\varepsilon^n)}x_f(0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (7.10)$$

donde: $t^* = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\operatorname{sen} \theta_1 - \sqrt{2\varepsilon^n}} \ln(1/\sqrt{\varepsilon})\right)$.

3. Además los valores propios del Sistema (7.9) se aproximan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\beta_f + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \lambda_i &= \frac{1}{\varepsilon} [\lambda_i (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) + \mathcal{O}(\varepsilon)], \quad \text{para } i = 2, \dots, \bar{n}.\end{aligned}\tag{7.11}$$

□

Para exponer de manera más clara el primer resultado del Teorema 7.1.1, obsérvese como quedaría para un sistema de orden $n = 3$, es decir, $\bar{n} = 2$ (ver ecuaciones (7.1), (7.9) y (7.3)):

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{w} &= w - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y \\ \bar{y} &= [0 \ 0 \ 1] w\end{aligned}\quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{x}_f &= -\beta_f x_f - [\varepsilon^3 \ 0] z_f \\ \varepsilon \dot{z}_f &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_f - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} z_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{y} \\ y_f &= [1 \ 0] z_f\end{aligned}$$

$$\underbrace{F_{IO}(s) = s^2}_{\text{Observador ideal (7.1)}} \quad \underbrace{F_{BF}(s) = \frac{(s+\beta_f)}{(s+\beta_f) \left[\left(\varepsilon s + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^3}{s+\beta_f} \right) \right]}; \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{BF}(s) = 1}_{\text{Filtro de Butterworth (7.9)}}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= -\beta_f x_f - [\varepsilon^3 \ 0] \bar{z} - \varepsilon y \\ \varepsilon \dot{\bar{z}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_f - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \bar{z} - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon^2} \\ 0 \end{bmatrix} y \\ y_f &= [1 \ 0] \bar{z} + \frac{1}{\varepsilon^2} y\end{aligned}$$

$$\underbrace{F_{SPO}(s) = \frac{(s+\beta_f)s^2}{(s+\beta_f) \left[\left(\varepsilon s + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^3}{s+\beta_f} \right) \right]}; \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{SPO}(s) = s^2}_{\text{Observador Singularmente Perturbado (7.3)}}$$

Se observa que la salida de la conexión en cascada del observador ideal (7.1) con el filtro de Butterworth (7.9) es un segundo orden, es decir, se tiene un comportamiento externo igual al del observador singularmente perturbado (7.3) propuesto cuando ε es un valor positivo pequeño.

En el Apéndice E.1 se muestran los puntos clave para la demostración del Teorema 7.1.1, la demostración es constructiva, es decir, es un procedimiento a seguir para el cálculo del observador.

Corolario 7.1.1

Existen matrices, D_1 y D_2 ,

$$\begin{aligned} D_1 &= -\hat{Q}_0^{-1}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}), \\ D_2 &= -\hat{Q}_0^{-1}q_1, \end{aligned} \quad (7.12)$$

donde:

$$\hat{Q}_0 = [\underline{q}_2 \quad \underline{q}_3 \quad \cdots \quad \underline{q}_{\bar{n}+1}] \quad (7.13)$$

y las \underline{q}_i son vectores columna de la matriz Q_0 para $i \in \{1, \dots, \bar{n} + 1\}$, tal que:

$$\begin{aligned} \zeta_f(t) &= D_1 \bar{z}(t) + D_2 y(t) \\ \zeta_f(t) &= \zeta(t) + h(t) \quad , \quad \forall t \geq t'' \\ h(t) &= \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Además:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (D_1 \bar{z}(t) + D_2 y(t)) = \zeta(t). \quad (7.15)$$

□

7.2. Sistema en Lazo Cerrado

Aplicando el esquema de control compuesto por:

1. la ley de control singularmente perturbada (6.7),
2. el control de acoplamiento (6.8) y
3. el observador singularmente perturbado (7.3) y (7.14),

se obtiene el sistema en lazo cerrado descrito por (6.11).

Ahora en términos del Corolario 7.1.1, Lema 6.1.1 y Teorema 7.1.1 se concluye la estabilidad del sistema en lazo cerrado (6.11).

7.3. Ejemplo Ilustrativo

Para comparar el funcionamiento del esquema de control con y sin observador de estado, se considera el sistema de la Subsección 6.1.5

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_3(t) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_2(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_1(t) y(t) = b(t) u(t), \quad (7.16)$$

donde los parámetros son:

$$\left\{ \begin{aligned} a_1(t) &= \sum_{j=1}^5 \frac{1}{2^{j-1}} \operatorname{sen}((2j-1)t), \\ a_2(t) &= \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \operatorname{sen}\left(\frac{jt}{2}\right), \\ a_3(t) &= \sum_{j=1}^5 \frac{j}{(2j-1)(2j+1)} \operatorname{sen}(4jt), \\ b(t) &= 1 + 0.568 (\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(2t)). \end{aligned} \right. \quad (7.17)$$

los parámetros del sistema se pueden ver sus gráficas en la Figura 6.1 del capítulo anterior.

La representación en variables de estado de la Ecuación (7.16) es (c.f. (6.40)):

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0] \zeta(t). \end{aligned} \quad (7.18)$$

La ley de control, ver (6.7), es:

$$\varepsilon u(t) = [0 \ 0 \ -1] \zeta_f(t) + [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

El control de acoplamiento, ver (6.8), es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_3 + (1 + \ell) \\ 0 & 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} \zeta_f(t) \\ &+ \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Los parámetros \bar{a}_1 , \bar{a}_2 y \bar{a}_3 son los coeficientes del siguiente polinomio Hurwitz:

$$p_{ac}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

Del ejemplo de Subsección 6.1.5 se tiene que:

$$\beta = 10, \quad \tau = 0.085 \quad \text{y} \quad K = 0.5.$$

y

$$\varepsilon \in (0, 0.11), \quad \varepsilon = 0.09.$$

Para obtener los parámetros del observador singularmente perturbado (7.3) se realizan los siguientes cálculos.

Como $n = 3$, entonces, $\bar{n} = n - 1 = 2$, las matrices del filtro de Butterworth son (ver (7.4) y (7.5)):

$$\theta_1 = \pi/4, \quad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y la matriz Q_0 del observador (7.3) se obtiene resolviendo la Ecuación (7.7), la cual toma la forma:

$$\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

resolviendo recursivamente, se obtiene:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon^2} & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} & -1 \end{bmatrix}, \quad q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad q_{(1,2)} = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

De la Ecuación (7.13), se obtienen \hat{Q}_0 y \hat{Q}_0^{-1} , las cuales son:

$$\hat{Q}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad \hat{Q}_0^{-1} = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{bmatrix}.$$

De la ecuación del observador singularmente perturbado (7.3), se tiene que el polinomio característico del sistema lento, $x_f(t)$, es (ver (7.11)):

$$p_{x_f}(\lambda) = \lambda - \beta_f + \varepsilon^3,$$

para que la diámica del sistema lento del observador singularmente perturbado (7.3) y la diámica del sistema lento de (6.40)-(6.42) sean similares cuando ε es pequeño, se selecciona:

$$\beta_f = \beta = 10.$$

Así el observador singularmente perturbado (7.3) para este ejemplo queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_f(t) &= -10x_f(t) - (0.09)^3 [1 \ 0] \bar{z}(t) - (0.09)y(t), \\ \frac{d}{dt}\bar{z}(t) &= \frac{1}{0.09} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_f(t) - \frac{1}{0.09} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \bar{z}(t), \\ &\quad - \frac{1}{0.09} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{(0.09)^2} \\ 0 \end{bmatrix} y(t), \\ y_f(t) &= [1 \ 0] \bar{z}(t) + \frac{1}{(0.09)^2} y(t). \end{aligned} \tag{7.21}$$

De (7.12)–(7.14) del Corolario 7.1.1, se puede calcular $\zeta_f(t)$:

$$\zeta_f(t) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & -\varepsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{z}(t) + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \end{bmatrix} y(t). \tag{7.22}$$

Las simulaciones numéricas fueron implementadas en el software MATLAB[®]. La referencia $r(t)$ es la misma que en el ejemplo de la Subsección 6.1.5, ver Figura 6.2.

En las Figuras 7.1–7.2 se muestra el comportamiento del Sistema (7.18) controlado por (7.19) y (7.20), con el observador de estado (7.21) y (7.22).

El modelo de acoplamiento ideal es:

$$\frac{d^3}{dt^3}y_{id} + \frac{d^2}{dt^2}y_{id} + 2\frac{d}{dt}y_{ideal} + y_{id} = r(t).$$

Se define el error de acoplamiento como: El error de acoplamiento de modelo se calcula como sigue:

$$|y(t) - y_{id}(t)| = \left| y(t) - C_{ac} \int_0^t \exp(A_{ac}(t - \sigma)) B_{ac} r(\sigma) d(\sigma) \right|,$$

donde:

$$A_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{ac} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{ac} = [1 \ 0 \ 0].$$

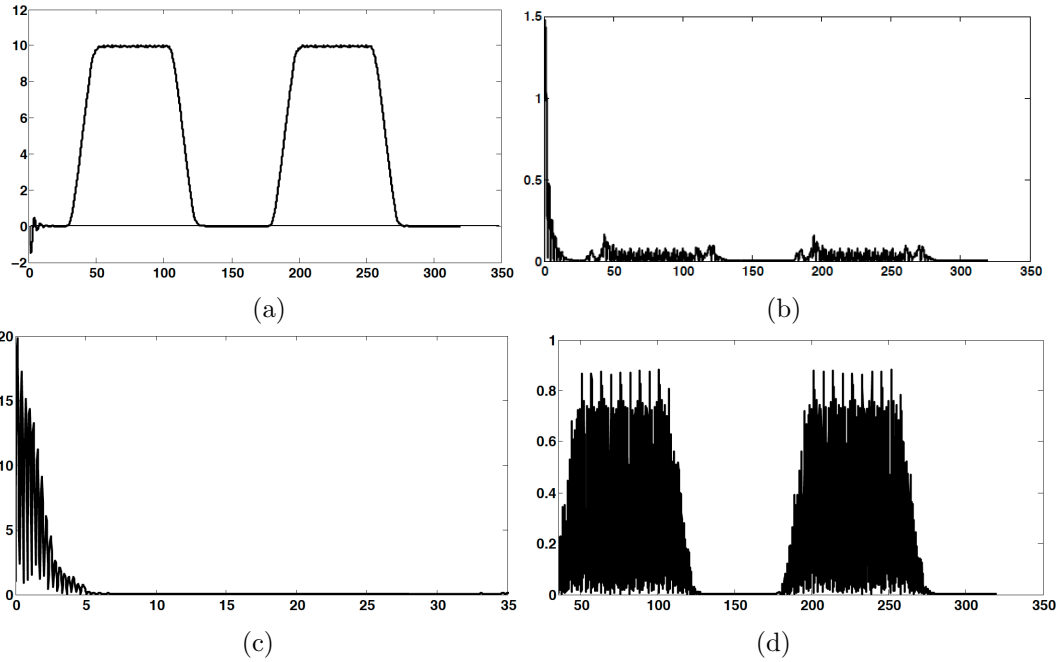


Figura 7.1: Señales de salida usando observador de estado: (a) salida $y(t)$, (b) error de acoplamiento $|y(t) - y_{id}(t)|$ Error de estado estimado: (c)-(d) $\|\zeta - \hat{\zeta}\|$.

En la Figura 7.1 se observa en la gráfica (a) que el acoplamiento se cumple con un error pequeño como se observa en la gráfica (b) de la misma figura y se tiene un estado estima que cumple con el objetivo de lograr el acoplamiento.

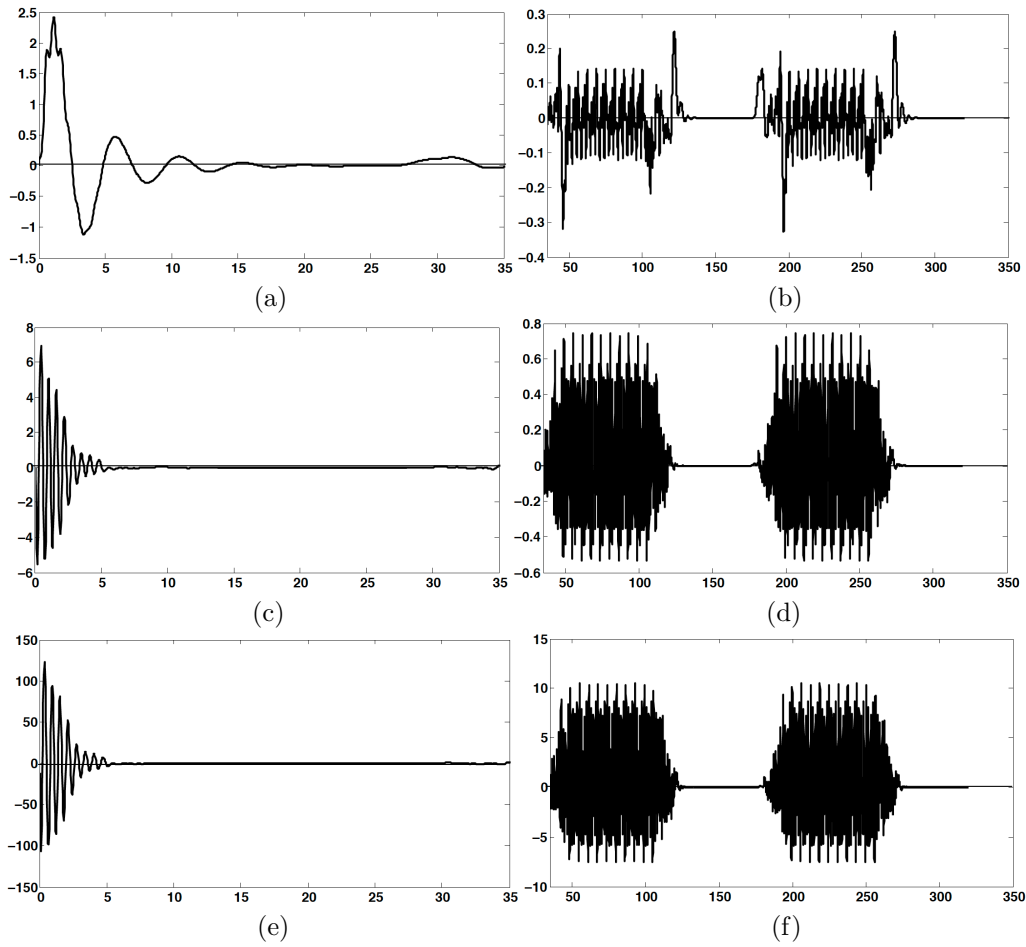


Figura 7.2: Señales de control usando observador de estado: (a)-(b) $x_3(t)$, (c)-(d) $x_4(t)$ (e)-(f) $u(t)$.

En la Figura 7.2 se observa que las dinámicas de las señales de control son acotadas y que aún con el desconocimiento de los parámetros del sistema se logra el acoplamiento.

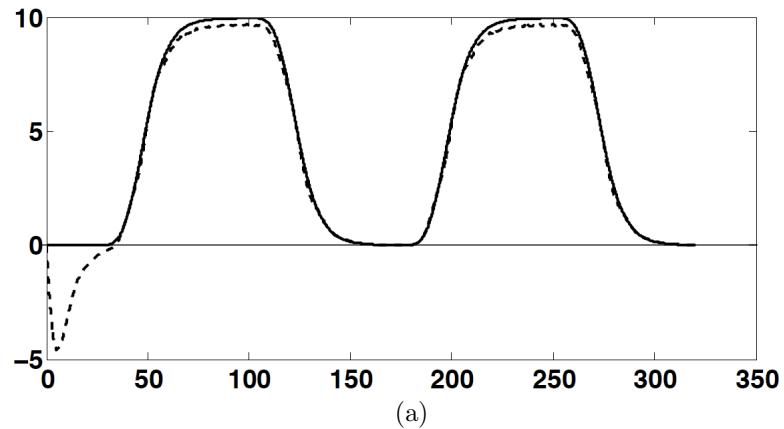


Figura 7.3: Comparación de la salida $y(t)$ con y sin estado medible: (a) Línea continua $y(t)$ y Línea punteada $y_{obs}(t)$.

En la Figura 7.3 se observa la salida del sistema cuando se tiene el estado medible y cuando no se tiene el estado medible. De la figura se observa que se tiene una diferencia apreciable durante el transitorio, tiempo durante el cual se estiman las condiciones iniciales. La diferencia en estado permanente de la respuesta del sistema es mínima. Se concluye que el observador singularmente perturbado cumple con el objetivo.

Capítulo 8

Esquemas de Control Singularmente Perturbados para Sistemas MIMO LTV y MIMO LTVD

En este capítulo se propone una ley de control para sistemas lineales variantes en el tiempo de tipo LTV MIMO, [59], y para sistemas variantes en el tiempo con retardo del tipo LTVD MIMO, [62]. La ley de control está basada en la técnica de perturbaciones singulares [38], donde el conocimiento de los parámetros variantes en el tiempo no es requerido, solo algunas cotas. La ley de control tiene como objetivo lograr el acoplamiento del sistema con un sistema lineal invariante en el tiempo deseado, representado por la ecuación de estado

$$\frac{d}{dt}x_{id}(t) = A_{ac}x_{id}(t) + B_{ac}r(t).$$

El esquema de control garantiza el comportamiento y la estabilidad asintótica del sistema.

El capítulo está organizado como sigue: el problema para sistemas MIMO LTV se plantea en la Sección 8.1 y para sistemas MIMO LTVD en la Sección 8.2. Enseguida en las Subsecciones 8.1.1 y 8.2.1 se propone la ley de control singularmente perturbada, la cual tiene como objetivo el transformar el modelo en un modelo singularmente perturbado respectivamente. Siguiendo los desarrollos de las Subsecciones 5.2 y 5.4, en las Subsecciones 8.1.3 y 8.2.3-8.2.4 se estudia la estabilidad asintótica. En las Subsecciones 8.1.4 y 8.2.5 se estudia la aproximación del estado y finalmente en la Subsecciones 8.1.5 y 8.2.6 se desarrolla un ejemplo académico para cada caso respectivamente. Las demostraciones de los resultados están en el Apéndice F.

8.1. Esquema de Control Singularmente Perturbado para el Sistema MIMO LTV

Sea el sistema representado por la ecuación diferencial siguiente (c.f. (4.6)):

$$\left(S(p) + D_{\ell c}(t)\Psi(p) \right) y(t) = B^*(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (8.1)$$

donde: $y = [y_1, \dots, y_m]^T \in \mathbb{R}^m$ y $u = [u_1, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ son la salida y la entrada del sistema, respectivamente, $D_{\ell c}(t)$ y $B^*(t)$ son matrices reales variantes en el tiempo de orden $m \times \eta$ y $m \times m$, respectivamente, y $S(p)$ y $\Psi(p)$ son operadores matriciales de orden $m \times m$ y $\eta \times m$, respectivamente.

Enseguida se expresan las matrices (4.8) y (4.9) que corresponden al Sistema (8.1), para: $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$, en notación compacta:

$$S(p) = DM\{p^{\eta_1}, \dots, p^{\eta_m}\}, \text{ donde: } \eta_j \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^m \eta_j = \eta.$$

y $\eta_1 \geq \dots \geq \eta_m \geq 1$.

$$D_{\ell c}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{111}(t) & \cdots & \mathbf{a}_{1mm}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m11}(t) & \cdots & \mathbf{a}_{mmm}(t) \end{bmatrix},$$

con:

$$\mathbf{a}_{kij}^T(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{kij}^T(t) \\ \mathbf{a}_{kij}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\eta_j}, \quad \bar{\mathbf{a}}_{kij}^T(t) = \begin{bmatrix} a_{ki1}(t) \\ \vdots \\ a_{ki(\eta_j-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad (8.2)$$

$$\Psi(p) = BDM\{\psi_1(p), \dots, \psi_m(p)\},$$

con:

$$\psi_j(p) = [1 \quad p \quad \dots \quad p^{\eta_j-1}]^T \in \mathbb{R}^{\eta_j}[p]$$

$$B^*(t) = [B_1^*(t) \quad \cdots \quad B_m^*(t)]^T,$$

con:

$$B_j^{*T}(t) = [b_{j1}(t) \quad \cdots \quad b_{jm}(t)]^T \in \mathbb{R}^m.$$

$\forall t \in \mathbb{R}^+.$

Las condiciones iniciales son:

$$y_1(0), \frac{d}{dt}y_1(0), \dots, \frac{d^{\eta_1}}{dt^{\eta_1}}y_1(0), \dots, y_m(0), \frac{d}{dt}y_m(0), \dots, \frac{d^{\eta_m}}{dt^{\eta_m}}y_m(0).$$

Los coeficientes, $a_{kij}(t)$ y $b_{ij}(t)$, son tales que:

- H1** $a_{k_{ij}}(t)$ son funciones desconocidas reales continuas acotadas de clase¹ $\mathcal{C}^\infty \cap \mathcal{L}^\infty$, que satisfacen: $\|a_{k_{ij}}(t)\| \leq L'_{0,a}$ y $\|\frac{d}{dt}a_{k_{ij}}(t)\| \leq L'_{1,a}$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.
- H2** $B^*(t)$ es una matriz real continua triangular desconocida para todo t , tal que: $\lambda_i\{B^*(t)\} \in \mathbb{R}^+$ y $0 < \bar{b}_1 \leq \lambda_i\{B^*(t)\} \leq \bar{b}_2$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.
- H3** $\|b_{ij}(t)\| \leq c_0$ y $\|\frac{d}{dt}b_{ij}(t)\| \leq c'$.
- H4** Los números $L'_{0,a}, L'_{1,a}, \bar{b}_1, \bar{b}_2, c_0$ y c' , son positivos conocidos.

Antes de obtener la representación de estado de la ecuación diferencial (8.1). Obsérvese que la hipótesis **H2** es menos restrictiva que suponer una matriz Hermitiana definida positiva. En efecto, considérese la siguiente matriz Hermitiana:

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

los valores propios de esta matriz, H , son:

$$\lambda_1 = \frac{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2},$$

por lo que si se tuviera un polo de multiplicidad dos, entonces se debería verificar que:

$$(a-c)^2 + 4b^2 = 0,$$

lo cual implica que:

$$a = c \quad \text{y} \quad b = 0.$$

Entonces, una matriz de Jordan de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

con $a > 0$, satisface la hipótesis **H2** y no es una matriz Hermitiana.

Además:

- Si A es una matriz Hermitiana definida positiva, entonces existe U matriz unitaria tal que:

$$A = UDU^H,$$

donde D es una matriz diagonal con todos sus elementos reales y positivos, ver Corolario 3.6 en Capítulo 1 de [73].

¹ Por simplicidad, se trabajó con funciones de clase \mathcal{C}^∞ . Pero es posible trabajar con funciones de clase \mathcal{C}^k , con k un entero grande positivo tal que las condiciones de derivabilidad permanezcan. Ver Corolario 2.4.12 of [55].

- Existe una matriz unitaria, U , tal que: $T = U^H A U$, es una matriz triangular superior. La matriz, U , puede ser seleccionada tal que los valores propios de la matriz, A , aparezcan en la diagonal de la matriz, T , en cualquier orden, ver Teorema 3.3 en Capítulo 1 de [73].

La ecuación diferencial (8.1) se puede representar como una ecuación de estado lineal, ver Sección 4.2 del Capítulo 4. Con $u(t)$ como entrada de control y $y(t)$ como la salida del sistema. Con la siguiente selección de estados (c.f. (4.10)):

$$\begin{aligned} \zeta &= [\zeta_1 \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1} \quad \zeta_{\eta_1+1} \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1+\eta_2} \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1+\dots+\eta_{m-1}+1} \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1+\dots+\eta_m}]^T \\ &= \left[y_1 \quad \dots \quad \frac{d^{\eta_1-1}}{dt^{\eta_1-1}} y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad \frac{d^{\eta_2-1}}{dt^{\eta_2-1}} y_2 \quad \dots \quad y_m \quad \dots \quad \frac{d^{\eta_m-1}}{dt^{\eta_m-1}} y_m \right]^T, \end{aligned} \quad (8.3)$$

se obtiene la siguiente ecuación de estado lineal variante en el tiempo (c.f. (4.11)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \zeta(t) &= A(t) \zeta(t) + B(t) u(t), \\ y(t) &= C \zeta(t), \end{aligned} \quad (8.4)$$

enseguida se describen las matrices (4.12) que corresponden al Sistema (8.4), en notación compacta:

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\eta_1}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \mathbf{a}_{122}(t) & \dots & -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \mathbf{a}_{1m}(t) \\ -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \mathbf{a}_{211}(t) & A_{\eta_2}(t) & \dots & -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \mathbf{a}_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \mathbf{a}_{m11}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \mathbf{a}_{m21}(t) & \dots & \tilde{A}_{\eta_m}(t) \end{bmatrix}, \\ B(t) &= \begin{bmatrix} \underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} B_1^*(t) \\ \underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} B_2^*(t) \\ \vdots \\ \underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} B_m^*(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

con:

$$\tilde{A}_{\eta_\ell}(t) = T_u \{ (\underline{\chi}_{\eta_\ell}^2)^T \} - \underline{\chi}_{\eta_\ell}^{\eta_\ell} \mathbf{a}_{\ell\ell}(t), \quad \ell \in \{1, \dots, m\},$$

y

$$C = BDM \{ (\underline{\chi}_{\eta_1}^1)^T, (\underline{\chi}_{\eta_2}^1)^T, \dots, (\underline{\chi}_{\eta_m}^1)^T \},$$

con el vector de estado inicial definido como:

$$\zeta(0) = \left[y_1(0) \quad \frac{d}{dt} y_1(0) \quad \dots \quad \frac{d^{\eta_1-1}}{dt^{\eta_1-1}} y_1(0) \quad \dots \quad y_m(0) \quad \frac{d}{dt} y_m(0) \quad \dots \quad \frac{d^{\eta_m-1}}{dt^{\eta_m-1}} y_m(0) \right]^T.$$

8.1.1. Ley de Control Singularmente Perturbada

Para la representación de estado (8.4) se propone la ley de control siguiente, la cual es una generalización de la ley de control singularmente perturbada propuesta en la Subsección 6.1.1 del Capítulo 6, ver [59].

Control singularmente perturbado

$$\begin{aligned} \varepsilon u &= -\Psi(\zeta + h) + \Omega \underline{x} \\ \Psi &= BDM \{ (\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1})^T, (\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2})^T, \dots, (\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m})^T \} \in \mathbb{R}^{m \times \eta}, \\ \Omega &= BDM \{ (\underline{\chi}_2^1)^T, \dots, (\underline{\chi}_2^1)^T \} \in \mathbb{R}^{m \times 2m}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

donde ε es un número positivo pequeño, y h es una perturbación.

Control de acoplamiento de modelo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\underline{x} &= \Delta(\zeta + h) + \Lambda\underline{x} + \Gamma\bar{r} \\
\Delta &= BDM\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\} \in \mathbb{R}^{2m \times \eta}, \\
\Delta_j &= \begin{bmatrix} -\alpha_{j11} & -\alpha_{j12} & \dots & -\alpha_{j1\eta_j} + \ell_j + 1 \\ 0 & 0 & \dots & -(\beta_j - 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times \eta_j} \\
\Lambda &= BDM\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m\} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}, \\
\Lambda_j &= \begin{bmatrix} -(\ell_j + 1) & -\ell_j \\ (\beta_j - 1) & -\beta_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \\
\Gamma &= BDM\{\chi_1^1, \dots, \chi_2^1\} \in \mathbb{R}^{2m \times m},
\end{aligned} \tag{8.7}$$

donde: $j \in \{1, \dots, m\}$, β_j y ℓ_j son números reales positivos, y $\alpha_{j11}, \dots, \alpha_{j1\eta_j}$ son los coeficientes de un polinomio Hurwitz

$$p_{\eta_j}(\lambda) = \lambda^{\eta_j} + \alpha_{j1\eta_j} \lambda^{\eta_j-1} + \dots + \alpha_{j12} \lambda + \alpha_{j11}, \quad \text{para } j \in \{1, \dots, m\}. \tag{8.8}$$

El vector de estado de control se define de la siguiente forma:

$$\underline{x} = [x_{\eta_1} \quad x_{\eta_1+1} \quad x_{\eta_1+\eta_2} \quad x_{\eta_1+\eta_2+1} \quad \dots \quad x_{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_m+m} \quad x_{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_m+m+1}].$$

Al igual que en la Subsección 6.1.1, la función vectorial $r(t)$ es el vector de referencia y el vector h es una perturbación tales que satisfacen las siguientes hipótesis:

H5 $\bar{r} = [r_1 \quad \dots \quad r_m]^T$ con: $r_j = r_j(t) \in L^\infty \cap C^\infty$. Las componentes de $r(t)$ son funciones C^∞ .

H6 $h(t)$ es una función vectorial real continua acotada, cuya norma es de orden ε .

La hipótesis **H5** se hace por que el esquema de control aproxima una retroalimentación proporcional derivativa.

La señal $h(t)$ de la hipótesis **H6** es considerada, ya que se desea tomar en cuenta el efecto de un observador de alta ganancia.

El objetivo del:

■ **control de acoplamiento de modelo:**

1. asignar la dinámica en lazo cerrado con la de un sistema lineal invariante con polinomios característicos Hurwitz $p_{\eta_j}(\lambda)$ para cada salida y_j , con $j = \{1, \dots, m\}$ y
2. asignar el radio de convergencia con la dinámica deseada.

■ **control singularmente perturbado:**

1. cambiar la base vectorial donde está representado el sistema para obtener *un modelo singularmente perturbado*, y

2. acercarse a la dinámica deseada con un error de orden ε .

En la Subsección 8.1.3 se proporcionan cotas para los parámetros, β_j y ℓ_j , que permitirán calcular un número positivo lo suficientemente pequeño ε tal que la estabilidad asintótica uniforme del *modelo singularmente perturbado* se garantiza.

Para obtener el modelo singularmente perturbado, se aplica el esquema de control (8.6) y (8.7) al Sistema (8.4) y se aplica el cambio de variables

$$\begin{cases} x_j = \zeta_j, & j \in \{1, \dots, \ell_1 - 1\}, \ell_1 = \eta_1; & z_1 = \zeta_{\ell_1}; \\ x_{j+1} = \zeta_j, & j \in \{\ell_1 + 1, \dots, \ell_2 - 1\}, \\ \ell_2 = \sum_{k=1}^2 \eta_k; & z_2 = \zeta_{\ell_2} \\ x_{j+1} = \zeta_j, & j \in \{\ell_2 + 1, \dots, \ell_3 - 1\}, \\ \ell_3 = \sum_{k=1}^3 \eta_k; & z_3 = \zeta_{\ell_3} \\ \vdots \\ x_{j+1} = \zeta_j, & j \in \{\ell_{m-1} + 1, \dots, \ell_m - 1\}, \\ \ell_m = \eta; & z_m = \zeta_{\ell_m} \end{cases} \quad (8.9)$$

lo cual lleva a obtener el siguiente modelo(c.f. (6.11)):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_{11}x + A_{12}z + A_{13}h + B_1\bar{r} \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} &= A_{21}(\varepsilon, t)x + A_{22}(\varepsilon, t)z + A_{23}(t)h \end{aligned} \quad (8.10)$$

las dimensiones de las matrices están definidas como, $A_{11} \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times (\eta+m)}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times m}$, $A_{13} \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times \eta}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times m}$, $A_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times (\eta+m)}$, $A_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{23}(t) \in \mathbb{R}^{m \times \eta}$, para $j \in \{1, \dots, m\}$, (c.f. (6.12)):

$$\begin{aligned} A_{11} &= \text{BDM}\{A_{\eta_1}, \dots, A_{\eta_m}\}, \\ A_{\eta_j} &= \left[\begin{array}{c|cc} T_u \left\{ (\chi_{\eta_j-1}^2)^T \right\} & 0 & 0 \\ \hline -\bar{\alpha}_{\eta_j} & -(\ell_j + 1) & -\ell_j \\ 0 & \beta_j - 1 & -\beta_j \end{array} \right], \\ \bar{\alpha}_{\eta_j} &= \left[\alpha_{j_{j1}} \quad \cdots \quad \alpha_{j_{j(\eta_j-1)}} \right]; \\ A_{12} &= \text{BDM}\{\hat{a}_{\eta_1}, \dots, \hat{a}_{\eta_m}\}, \\ \hat{a}_{\eta_j}^T &= \left[(\chi_{\eta_j-1}^{\eta_j-1})^T \alpha_{j_{j\eta_j}} + \ell_j + 1 \quad 1 - \beta_j \right], \quad \hat{a}_{\eta_j} \in \mathbb{R}^{(\eta_j+1)}; \\ A_{13} &= \text{BDM}\{\bar{A}_{\eta_1}, \dots, \bar{A}_{\eta_m}\}, \\ \bar{A}_{\eta_j} &= \left[\begin{array}{c} \chi_{\eta_j+1}^{\eta_j} (-\alpha_{\eta_j} + (\ell_j + 1)(\chi_{\eta_j}^{\eta_j})^T) \\ + \left[(1 - \beta_j) \chi_{\eta_j+1}^{\eta_j+1} (\chi_{\eta_j}^{\eta_j})^T \right] \end{array} \right] \\ \alpha_{\eta_j} &= \left[\bar{\alpha}_{\eta_j} \quad \alpha_{j_{j\eta_j}} \right]; \quad B_1 = \text{BDM} \left\{ (\chi_{\eta_1+1}^{\eta_1}), \dots, (\chi_{\eta_m+1}^{\eta_m}) \right\} \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned}
A_{21}(\varepsilon, t) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\varepsilon \bar{a}_{111}(t) & b_{11}(t) & 0 & \dots & -\varepsilon \bar{a}_{1mm}(t) & b_{1m}(t) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varepsilon \bar{a}_{m11}(t) & b_{m1}(t) & 0 & \dots & -\varepsilon \bar{a}_{mmm}(t) & b_{mm}(t) & 0 \end{array} \right]; \\
A_{22}(\varepsilon, t) &= -(\varepsilon X(t) + B^*(t)), \\
\text{con: } X(t) &= \begin{bmatrix} a_{1\eta_1}(t) & \cdots & a_{1\eta_m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\eta_1}(t) & \cdots & a_{m\eta_m}(t) \end{bmatrix}; \\
A_{23}(t) &= - \begin{bmatrix} (\chi_{\eta_1}^{\eta_1})^T b_{11}(t) & \cdots & (\chi_{\eta_m}^{\eta_m})^T b_{1m}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\chi_{\eta_1}^{\eta_1})^T b_{m1}(t) & \cdots & (\chi_{\eta_m}^{\eta_m})^T b_{mm}(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Para estudiar la estabilidad del sistema homogéneo de la ecuación diferencial (8.10). Se siguen los procedimientos desarrollados en las Subsecciones 5.2.3 y 5.2.4 del Capítulo 5, los cuales son:

- aplicar una transformación de estado la cual separará al sistema en dos subsistemas, uno lento y uno rápido.
- estudiar la *estabilidad asintótica uniforme* aplicando los resultados de los Lemas 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3.

En el *Teorema 8.1.1* de la Subsección 8.1.3, se demuestra que el Sistema (8.10) es uniformemente asintóticamente estable, y en el *Teorema 8.1.2* de la Subsección 8.1.4, se muestra que la aproximación de estado tiende al modelo invariante en el tiempo.

8.1.2. Transformación Desacoplamiento

Se estudia primero la ecuación diferencial homogénea del Sistema (8.10), la cual es:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) \\
\varepsilon \frac{dz}{dt}(t) &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t)
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Siguiendo el procedimiento de la Subsección 5.2.3, se transforma el Sistema (8.13) en los subsistemas lento y rápido.

Para obtener la transformación de estado, se requiere definir las siguientes matrices continuas diferenciables y acotadas:²

$$L(t) = L_0(t) + \varepsilon R_L(t) \quad \text{y} \quad H(t) = H_0(t) + \varepsilon R_H(t), \tag{8.14}$$

para definir la matriz de transformación que permita desacoplar al Sistema (8.13) en un subsistema lento y uno rápido.

Definiendo el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Theta(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{\eta+m} - \varepsilon H(t)L(t) & -\varepsilon H(t) \\ L(t) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\
&= M^{-1}(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8.15}$$

² En [38], las matrices son definidas en general con M y N términos, respectivamente.

las matrices $L(t)$ y $H(t)$ son ((ver Apéndices C.4.1 y C.4.3)):

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), & H(t) &= H_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ L_0(t) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = \bar{L}_0, & H_0(t) &= A_{12}A_{22}^{-1}(0, t) \end{aligned} \quad (8.16)$$

Aplicando la matriz de transformación de estado definida en la Ecuación (8.15) al sistema definido por la Ecuación (8.13), se obtienen las siguientes ecuaciones para (c.f. (6.19) y (6.20)):

Subsistema Lento

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt}(t) &= [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)] x_s(t) \\ &= [A_{11} - A_{12}\bar{L}_0] x_s(t) \end{aligned} \quad (8.17)$$

Subsistema Rápido

$$\varepsilon \frac{dz_f}{dt}(t) = A_{22}(\varepsilon, t)z_f(t) \quad (8.18)$$

donde t es manejado como un parámetro, es decir, para un tiempo congelado.

Al igual que en la Subsección 6.1.2 se tiene la siguiente matriz que define la dinámica del subsistema lento (8.17):

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0 \quad (8.19)$$

Note que (ver (8.11) y (8.12)):

$$A_0 = \text{BDM}\{A_{0\eta_1}, \dots, A_{0\eta_m}\}, \quad \text{donde: } A_{0\eta_j} = \begin{bmatrix} T_u\{(\chi_{\eta_j}^2)^T\} + \chi_{\eta_j}^{\eta_j} \alpha_{\eta_j} & -\ell_j \chi_{\eta_j}^{\eta_j} \\ 0_{\eta_j}^T & -\beta_j \end{bmatrix},$$

Entonces el polinomio característico de A_0 es:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I_{\eta+m} - A_0) = \prod_{j=1}^m \det(\lambda I_{\eta_j} - A_{0\eta_j}) \\ p(\lambda) &= \prod_{j=1}^m (\lambda + \beta_j) p_{\eta_j}(\lambda). \end{aligned} \quad (8.20)$$

si los β_j , $j \in 1, \dots, m$, son seleccionados tal que:

$$\beta_j \geq \text{máx}\{-\Re e(\bar{\lambda}) | p_{\eta_j}(\bar{\lambda}) = 0\}, \quad (8.21)$$

entonces para:

$$\beta = \text{mín}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \quad (8.22)$$

existe $K > 0$, tal que:

$$\|\exp(A_0 t)\|_2 \leq K e^{-\beta t}. \quad (8.23)$$

La matriz $A_{22}(0, \varepsilon)$ satisface el siguiente hecho.

Hecho 8.1.1

La matriz $A_{22}(\varepsilon, t)$, satisface para todo $t \in \mathbb{R}^+$:

i)

$$\|A_{22}(0, t)\|_2 \leq \bar{c}, \quad \left\| \frac{d}{dt} A_{22}(0, t) \right\|_2 \leq c \quad (8.24)$$

ii) Dado un número real positivo, $\bar{\varepsilon}$, y $b_i = \bar{b}_i + \bar{\varepsilon}$, para $i = 1, 2$:

$$-b_2 - \varepsilon L_{0,a} \leq \Re \lambda_i(A_{22}(\varepsilon, t)) \leq -b_1 + \varepsilon L_{0,a} \quad (8.25)$$

con: $\bar{c} = \sqrt{m}mc_0$, $c = \sqrt{m}mc'$ y $L_{0,a} = \sqrt{m}mL'_{0,a}$. □

La propiedad i) del Hecho 8.1.1 muestra que la matriz $A_{22}(0, t)$ satisface las hipótesis de los Lemas 5.2.1 y 5.2.2, es decir, $A_{22}(0, t)$ es acotada y su primer derivada también lo es. La propiedad ii) muestra que la matriz $A_{22}(0, t)$ es exponencialmente estable cuando el parámetro positivo ε tiende a cero, esto permite que $A_{22}(0, t)$ cumpla con las condiciones del Lema 5.2.3.

Del Hecho 8.1.1 y de la ecuación (8.23) se concluye que las matrices A_0 y $A_{22}(0, t)$ satisfacen las condiciones obtenidas en la Subsección 6.1.3 del Capítulo 6, es decir, los resultados obtenidos se aplican de forma directa al caso MIMO y solo se harán observaciones cuando sea necesario.

8.1.3. Condiciones para Estabilidad Asintótica Uniforme

En esta subsección se muestra que la estabilidad asintótica uniforme del Sistema (8.13) está garantizada por las propiedades de las matrices de transición (8.17) y (8.18).

La generalización del Teorema 6.1.1 es:

Teorema 8.1.1

Sea $A_{22}(\varepsilon, t)$ que satisface el Hecho 8.1.1, $\alpha_{j_1\eta_j} - \ell_j > 1$, $j \in \{1, \dots, m\}$ y $0 < -\alpha_{j_1\eta_j} + \ell_j + 1 < L_{0,a}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, existe entonces un $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ el Sistema (8.13) es uniformemente asintóticamente estable. Mas aún, la matriz de transición de (8.13), $\phi(t, s)$, satisface:

$$\|\phi(t, s)\|_2 \leq \bar{K} e^{-\kappa(t-s)} \quad \forall t \geq s \geq t_0,$$

donde $\bar{K} > 0$ y $\kappa > 0$ son independientes de ε . La variable κ se define como:

$$\kappa = \min\{\beta, b_1 - L_{0a} - \alpha\}, \quad \text{con } \alpha = \min\{\alpha_{j,\eta_j} - \ell_j - 1\}$$

□

El teorema anterior relaciona el comportamiento del Sistema (8.13) con los comportamientos de los subsistemas lento y rápido. Este resultado se preserva de manera asintótica para cuando ε tiende a 0.

Desde un punto de vista computacional, es importante tener una idea de la cota superior ε^* . Esta cota es dada por la generalización del Lema 6.1.1.

Lema 8.1.1

Bajo las mismas condiciones que en el Teorema 8.1.1, y $\|A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_1$, $\|L_0 A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_2$ y $\|L_0 A_0\|_2 \leq \bar{M}_3$, el sistema singularmente perturbado (8.13) es uniformemente asintóticamente estable para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, con:

$$\varepsilon^* = \frac{\beta b_1}{K_1 K_2 \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta (L_{0,a} + \alpha + K_2 \bar{M}_2)}$$

$$\bar{M}_1 = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq m} \left(1 + (\alpha_{j_j n_j} - \ell_j - 1)^2 + (1 - \beta_j)^2 \right)},$$

$$\bar{M}_2 = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq m} (\alpha_{j_j n_j} - \ell_j - 1)^2},$$

$$\bar{M}_3 = \sqrt{m \left(\max_{1 \leq j \leq m} \left(\sum_{i=1}^{n_j} (\alpha_{j_j i})^2 + (\ell_j)^2 \right) \right)}$$

□

8.1.4. Aproximación del Estado

Considérese el modelo singularmente perturbado (8.10), con las condiciones de estado inicial: $x(t_0) = x_0$ y $z(t_0) = z_0$. La aproximación del estado se hace al igual que en la Subsección 6.1.4 del Capítulo 6, esto es:

1. se aplica el cambio de variable de la Ecuación (8.15) al Sistema (8.10) (c.f. (6.26)-(6.29)).
2. se aplica la aproximación de $L_0(t)$ y $H_0(t)$, para obtener los subsistemas lento y rápido (c.f. (6.30) y (6.31)).
3. se obtienen las condiciones iniciales y al subsistema rapido se le aplica el cambio de escala (c.f. (6.32)).
4. se aplica la transformada inversa de (8.15).

Mediante este procedimiento se llega a la generalización del Teorema 6.1.2 del Capítulo 6. El cual se expresa como sigue.

Teorema 8.1.2

Dada la matriz $A_{22}(\varepsilon, t)$ y $\|h\|_2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Existe entonces $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ la expresión siguiente permanece uniforme mientras $t \in [t_0, t_f]$:

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{8.26}$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x_s(t) + z_f \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{8.27}$$

donde x_s y z_f son las soluciones de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt}(t) &= A_0 x_s(t) + A_q h(t) + B_1 r(t) \\ A_q &= A_{13} - A_{12} A_{22}^{-1}(0, t) A_{23}(t) \end{aligned} \tag{8.28}$$

y

$$\frac{d}{d\tau} z_f(\tau) = A_{22}(0, t_0) z_f(\tau) + A_{23}(t_0 + \varepsilon\tau) h(t_0 + \varepsilon\tau), \quad (8.29)$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_s(t_0) &= x_0 \\ z_f(0) &= A_{22}^{-1}(0, t_0) A_{21}(t_0) x_0 + z_0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

□

8.1.5. Ejemplo Ilustrativo

En el siguiente ejemplo académico, se muestra como aplicar la técnica desarrollada. Sea el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} y_1 + a_{112}(t) \frac{d}{dt} y_1 + a_{111}(t) y_1 + a_{121}(t) y_2 &= b_{11}(t) u_1 + b_{12}(t) u_2 \\ \frac{d}{dt} y_2 + a_{221}(t) y_2 + a_{212}(t) \frac{d}{dt} y_1 + a_{211}(t) y_1 &= b_{22}(t) u_2 \end{aligned} \quad (8.31)$$

con la siguiente definición de parámetros:

$$\left\{ \begin{aligned} a_{111}(t) &= \sum_{j=1}^5 \frac{\text{sen}((2j-1)t)}{2^{j-1}}, & a_{112}(t) &= \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \text{sen}\left(\frac{jt}{2}\right) \\ a_{121}(t) &= \sum_{j=1}^5 \frac{j \text{sen}(4jt)}{(2j-1)(2j+1)}, & a_{221}(t) &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^5 \frac{\cos(2jt)}{1-4j} \\ a_{212}(t) &= 2 \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \text{sen}(jt), & a_{211}(t) &= \frac{\pi^2}{16} - \sum_{j=1}^5 \frac{\cos(jt)}{j} \\ b_{11}(t) &= 1 + \frac{1}{4} (\text{sen}(t) + \text{sen}(2t)), & b_{12}(t) &= \frac{1}{2} + \cos(t) \\ b_{21}(t) &= 0, & b_{22}(t) &= 1 + \frac{\text{sen}(2t)}{2} \end{aligned} \right. \quad (8.32)$$

Las funciones anteriores se pueden observar en las Figuras 8.1 y 8.2.

De la Ecuación (8.32) y de la Figura 8.1 se observa que para los parámetros $a_{kji}(t)$ satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\|a_{kji}(t)\| \leq 4 = L'_{0,a}, \quad \forall i, j, k \in \{1, 2\} \quad (8.33)$$

y de la Figura 8.2 se observa que las componentes $b_{ij}(t)$ satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\|b_{ij}(t)\| \leq 2 = c_0, \quad \forall i, j \in \{1, 2\}. \quad (8.34)$$

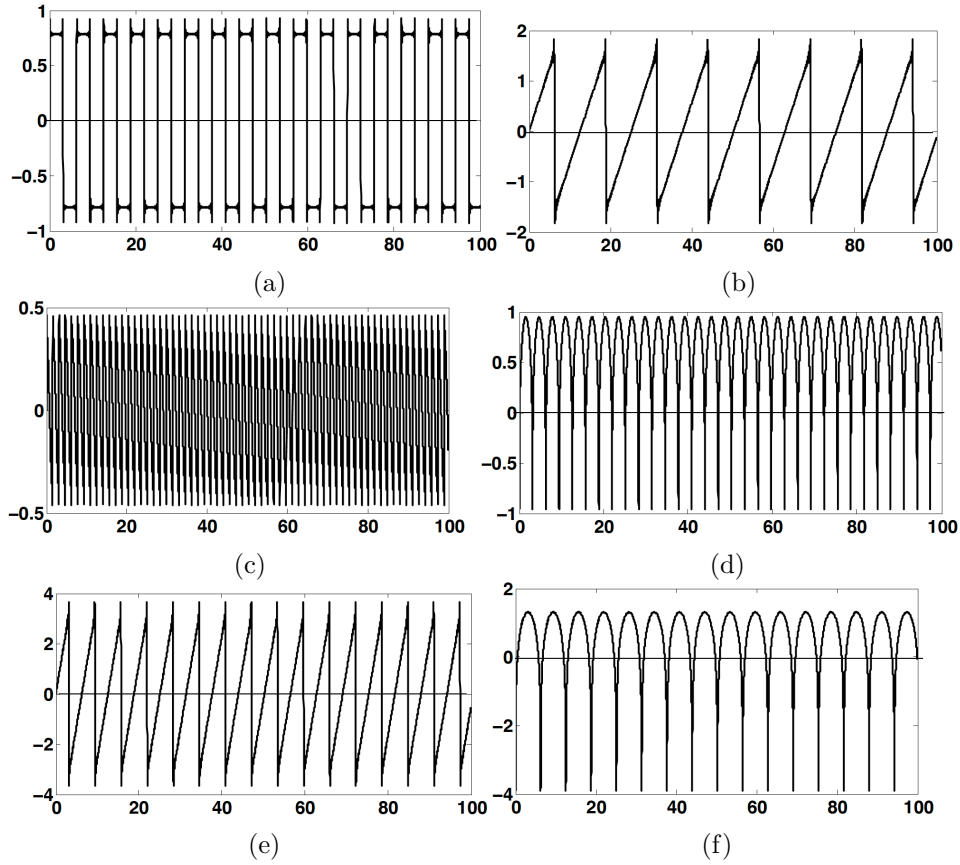


Figura 8.1: Parámetros del Sistema Matriz $A(t)$: (a) $a_{111}(t)$, (b) $a_{112}(t)$, (c) $a_{121}(t)$, (d) $a_{211}(t)$, (e) $a_{212}(t)$, (f) $a_{221}(t)$.

El modelo de estado de la Ecuación (8.31) es (ver Sección 4.2 del Capítulo 4):

$$\frac{d}{dt}\zeta(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -a_{111}(t) & -a_{112}(t) & -a_{121}(t) \\ -a_{211}(t) & -a_{212}(t) & -a_{221}(t) \end{array} \right] \zeta(t) + \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 \\ b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ 0 & b_{22}(t) \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}; \quad (8.35)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \zeta(t)$$

De las Ecuaciones (8.6) y (8.7), el control, $u(t)$, singularmente perturbado es:

$$\varepsilon \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = - \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \zeta(t) + \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

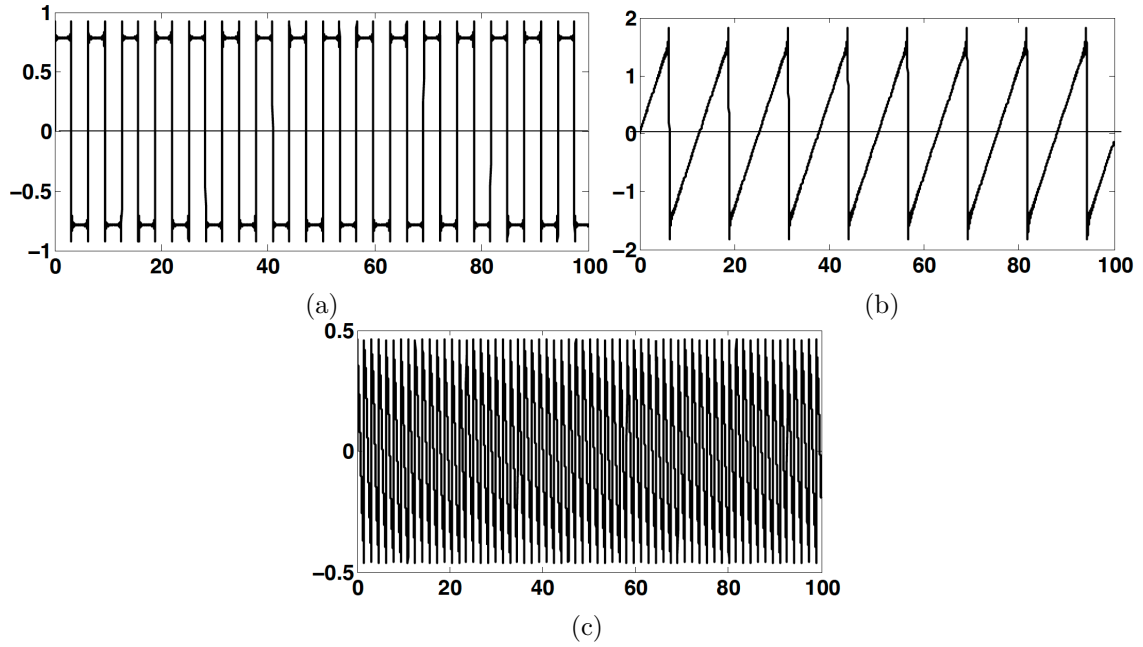


Figura 8.2: Parámetros del Sistema Matriz $B(t)$: (a) $b_{11}(t)$, (b) $b_{12}(t)$ y (c) $b_{22}(t)$.

y el control de acoplamiento es:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{cc|cc} -\alpha_{111} & -\alpha_{112} + l_1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\beta_1 - 1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\alpha_{211} + l_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\beta_2 - 1) \end{array} \right] \zeta(t) \\
 &+ \left[\begin{array}{cc|cc} -(l_1 + 1) & -l_1 & 0 & 0 \\ (\beta_1 - 1) & -\beta_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(l_2 + 1) & -l_2 \\ 0 & 0 & (\beta_2 - 1) & -\beta_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} \quad (8.37)
 \end{aligned}$$

para satisfacer la Ecuación (8.8) se seleccionan los coeficientes:

$$\underline{\alpha}_{111} = 1/9, \quad \underline{\alpha}_{112} = 2/3$$

y

$$\underline{\alpha}_{211} = 1/2,$$

que son los coeficientes de los polinomios:

$$p_{\eta_1}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{9} \quad \text{y} \quad p_{\eta_2}(\lambda) = \lambda + \frac{1}{2}$$

De la desigualdad (8.21), Teorema 8.1.1 y el Lema 8.1.1 se calculan los parámetros β_i , l_i y ε para $i = \{1, 2\}$.

$$\beta_1 = \beta_2 = 10, \quad l_1 = l_2 = 0, \quad \varepsilon^* = 0.16, \quad \text{se selecciona: } \varepsilon = 0.08.$$

Para que se satisfaga la hipótesis H5, $r_1(t), r_2(t) \in L^\infty \cap C^\infty$, el vector de referencia r se construye de la siguiente forma:

$$r_1(t) = \frac{10}{2.75} \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma, \quad r_2(t) = \frac{1}{2} r_1(t) \quad \text{con } t \in [0, 100]$$

donde:³ $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-(t')^2}}$, con $t' = (12/75)t - 1$ (ver figura 6.2 (a)).

Se define el error de acoplamiento como:

$$|y(t) - y_{id}(t)| = \left| y(t) - C_{ac} \int_0^t \exp(A_{ac}(t - \sigma)) B_{ac} r(\sigma) d(\sigma) \right|.$$

con:

$$A_{ac} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1/9 & -2/3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1/2 \end{array} \right], \quad B_{ac} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \text{ y } C_{ac} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

En las Figuras 8.3 y 8.4, se muestran simulaciones numéricas implementadas en MATLAB[®] para el sistema variante en el tiempo (8.35), controlado por (8.36), con una referencia escalón.

En la Figura 8.3 se muestra que la salida del sistema $y_1(t)$ alcanza el acoplamiento, con un error pequeño y se observa que las señales de control tienen dinámicas acotadas.

En la Figura 8.4 se observa que la salida $y_2(t)$ cumple con el acoplamiento y que las dinámicas de las señales de control son acotadas. En ambos casos el acoplamiento se alcanza en un tiempo de 20 segundos aproximadamente, no importando la dinámica de los parámetros del sistema, solo es necesario conocer cotas para que el esquema de control alcance el objetivo.

³ La función φ se toma de la Definición 2.4.5 en [55].

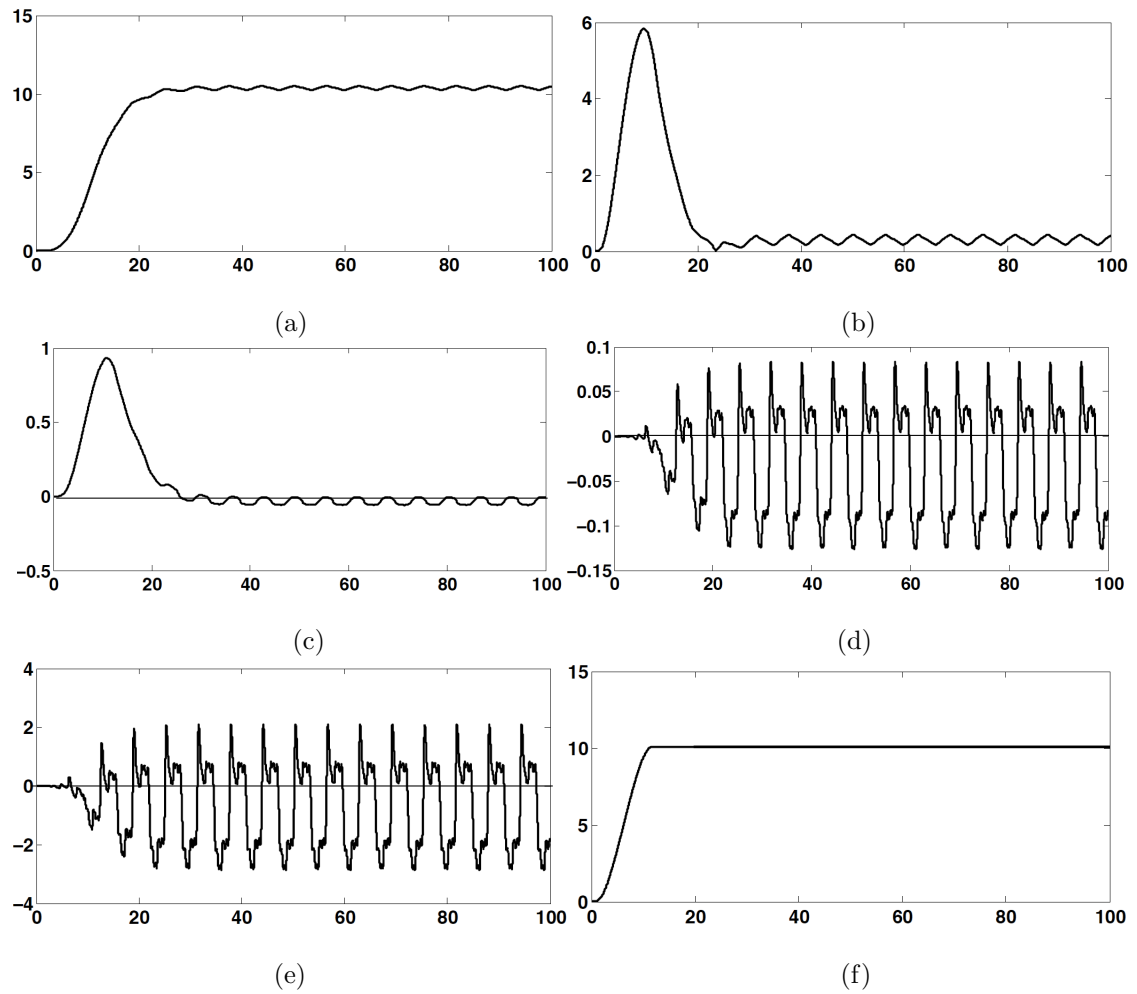


Figura 8.3: Variables de control: (a) salida $y_1(t)$, (b) error de acoplamiento de modelo $|y_1(t) - y_{id1}(t)|$, (c) señal de acoplamiento de modelo $x_2(t)$, (d) señal de acoplamiento de modelo $x_3(t)$, (e) ley de control $u_1(t)$, (f) señal de referencia $r_1(t)$.

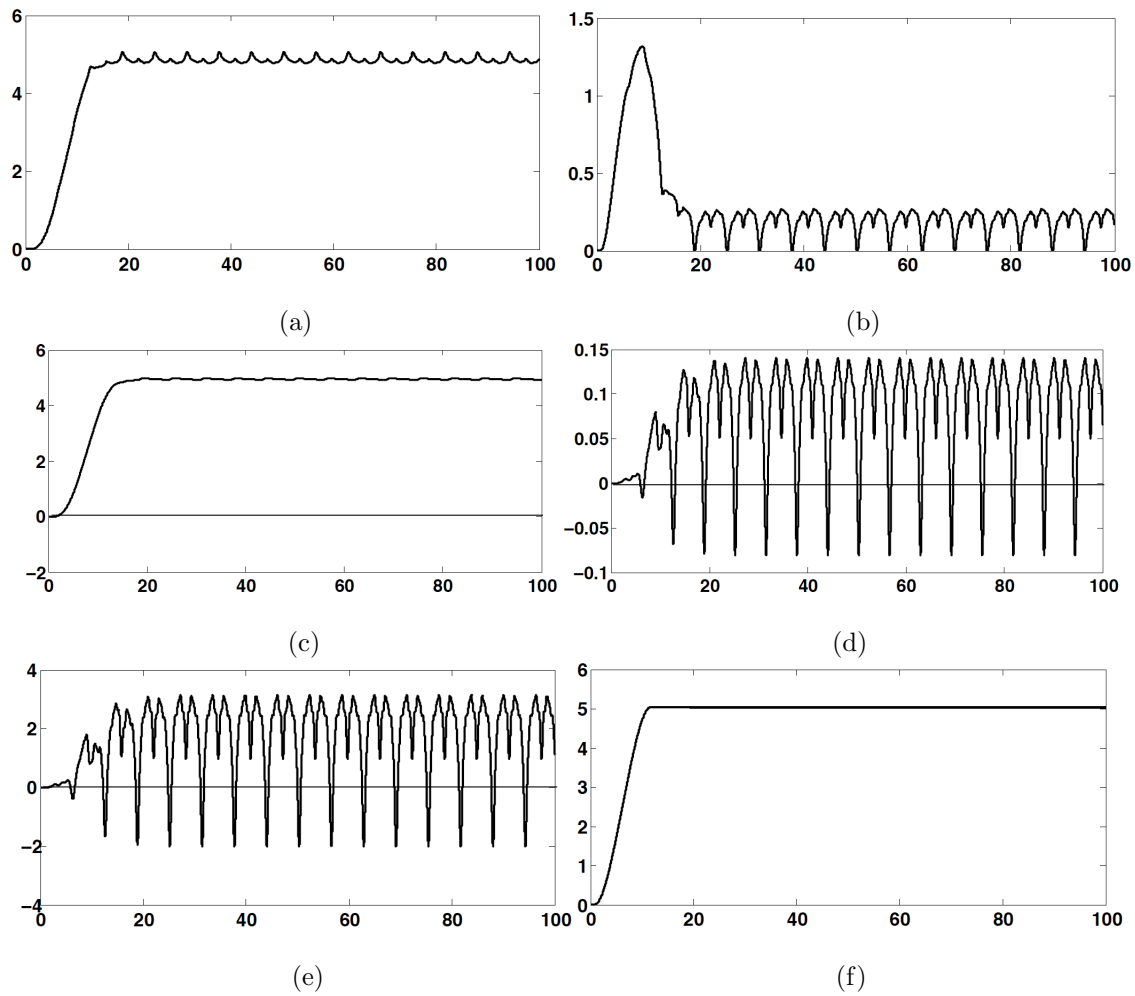


Figura 8.4: Variables de control: (a) salida $y_2(t)$, (b) error de acoplamiento de modelo $|y_2(t) - y_{id2}(t)|$, (c) señal de acoplamiento de modelo $x_4(t)$, (d) señal de acoplamiento de modelo $x_5(t)$, (e) ley de control $u_2(t)$, (f) señal de referencia $r_2(t)$.

8.2. Esquema de Control Singularmente Perturbado para el Sistema MIMO LTVD

Sea el sistema representado por la ecuación diferencial siguiente (c.f. (4.7)):

$$\left(S(p) + D_{\ell c}(t)\Psi(p) \right) y(t) + D_{\ell dc}(t)\Psi(p)y(t - \tau(t)) = B^*(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (8.38)$$

donde: $y = [y_1, \dots, y_m]^T \in \mathbb{R}^m$ y $u = [u_1, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ son la salida y la entrada del sistema, respectivamente, $D_{\ell c}(t)$ y $B^*(t)$ son matrices reales variantes en el tiempo de orden $m \times \eta$ y $m \times m$, respectivamente, y $S(p)$ y $\Psi(p)$ son operadores matriciales de orden $m \times m$ y $\eta \times m$, respectivamente.

Enseguida se expresan las matrices (4.8) y (4.9) que corresponden al Sistema (8.38), para: $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$, en notación compacta:

$$S(p) = DM\{p^{\eta_1}, \dots, p^{\eta_m}\}, \quad \text{con: } \eta_j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^m \eta_j = \eta.$$

$$\text{y } \eta_1 \geq \dots \geq \eta_m \geq 1.$$

$$\Psi(p) = BDM\{\psi_1(p), \dots, \psi_m(p)\}, \quad \text{donde:}$$

$$\psi_j(p) = [1 \quad p \quad \dots \quad p^{\eta_j-1}]^T \in \mathbb{R}^{\eta_j}[p].$$

$$D_{\ell c}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{111}(t) & \dots & \mathbf{a}_{1mm}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m11}(t) & \dots & \mathbf{a}_{mmm}(t) \end{bmatrix},$$

donde:

$$\mathbf{a}_{kij}^T(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{kij}^T(t) \\ \mathbf{a}_{kij}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\eta_j}, \quad \bar{\mathbf{a}}_{kij}^T(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{ki1}(t) \\ \vdots \\ \alpha_{ki(\eta_j-1)}(t) \end{bmatrix}. \quad (8.39)$$

$$D_{\ell dc}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{111}(t) & \dots & \alpha_{1mm}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m11}(t) & \dots & \alpha_{mmm}(t) \end{bmatrix},$$

donde:

$$\alpha_{kij}^T(t) = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{kij}^T(t) \\ \alpha_{kij}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\eta_j}, \quad \bar{\alpha}_{kij}^T(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{ki1}(t) \\ \vdots \\ \alpha_{ki(\eta_j-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

$$B^*(t) = [B_1^*(t) \quad \dots \quad B_m^*(t)]^T,$$

donde:

$$B_j^{*T}(t) = [b_{j1}(t) \quad \dots \quad b_{jm}(t)]^T \in \mathbb{R}^m. \\ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Los coeficientes, $\alpha_{kij}(t)$, $\bar{\alpha}_{kij}(t)$ y $b_{ij}(t)$, son tales que:

H1 $a_{k_{ij}}(t)$ y $\alpha_{k_{ij}}(t)$ son funciones reales acotadas desconocidas de clase⁴ $\mathcal{C}^\infty \cap \mathcal{L}^\infty$, que satisfacen: $\|a_{k_{ij}}(t)\|_\infty \leq L'_{0,a}$, $\|\frac{d}{dt}a_{k_{ij}}(t)\|_\infty \leq L'_{1,a}$, $\|\alpha_{k_{ij}}(t)\|_\infty \leq L'_{0,\alpha}$, $\|\frac{d}{dt}\alpha_{k_{ij}}(t)\|_\infty \leq L'_{1,\alpha}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

H2 Los valores propios de $B^*(t)$ satisfacen: $\lambda_i\{B^*(t)\} \in \mathbb{R}^+$ y $0 < \bar{b}_1 \leq \lambda_i\{B^*(t)\} \leq \bar{b}_2$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

H3 $\|b_{ij}(t)\|_\infty \leq c_0$ y $\|\frac{d}{dt}b_{ij}(t)\|_\infty \leq c'$.

H4 Los números, $L'_{0,a}$, $L'_{1,a}$, $L'_{0,\alpha}$, $L'_{1,\alpha}$, \bar{b}_1 , \bar{b}_2 , c_0 y c' , son positivos y conocidos.

La función $\tau(t)$ es desconocida real continua diferenciable y satisface:

H5 $0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2$ y $0 \leq \frac{d}{dt}\tau(t) \leq \hat{\tau} < 1$.

H6 Los números τ_1 , τ_2 y $\hat{\tau}$ son positivos conocidos.

La ecuación diferencial con retardo (8.38) puede ser expresada como una ecuación de estado con retardo, ver Sección 4.2 del Capítulo 4. Con $u(t)$ como entrada de control y $y(t)$ como la salida del sistema. Con la siguiente selección de estados (c.f. 4.10):

$$\begin{aligned} \zeta &= [\zeta_1 \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1} \quad \zeta_{\eta_1+1} \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1+\eta_2} \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1+\dots+\eta_{m-1}+1} \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1+\dots+\eta_m}]^T \\ &= \left[y_1 \quad \dots \quad \frac{d^{\eta_1-1}}{dt^{\eta_1-1}}y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad \frac{d^{\eta_2-1}}{dt^{\eta_2-1}}y_2 \quad \dots \quad y_m \quad \dots \quad \frac{d^{\eta_m-1}}{dt^{\eta_m-1}}y_m \right]^T, \end{aligned} \quad (8.40)$$

se obtiene la siguiente ecuación de estado con retardo variante en el tiempo (c.f. (4.14)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta(t) &= A(t)\zeta(t) + \hat{A}(t)\zeta(t - \tau(t)) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C\zeta(t), \end{aligned} \quad (8.41)$$

enseguida se describen las matrices (4.12) y (4.15) que corresponden al Sistema (8.41), en

⁴ Por simplicidad, se trabajó con funciones de clase \mathcal{C}^∞ . Pero es posible trabajar con funciones de clase \mathcal{C}^k , con k un entero grande positivo tal que las condiciones de derivabilidad permanezcan. Ver Corolario 2.4.12 de [55].

notación compacta:

$$\begin{aligned}
A(t) &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\eta_1}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \mathbf{a}_{122}(t) & \cdots & -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \mathbf{a}_{1mm}(t) \\ -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \mathbf{a}_{211}(t) & A_{\eta_2}(t) & \cdots & -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \mathbf{a}_{2mm}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \mathbf{a}_{m11}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \mathbf{a}_{m22}(t) & \cdots & \tilde{A}_{\eta_m}(t) \end{bmatrix}, \\
\hat{A}(t) &= \begin{bmatrix} -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \alpha_{111}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \alpha_{122}(t) & \cdots & -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \alpha_{1mm}(t) \\ -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \alpha_{211}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \alpha_{222}(t) & \cdots & -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \alpha_{2mm}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \alpha_{m11}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \alpha_{m22}(t) & \cdots & -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \alpha_{mmm}(t) \end{bmatrix}, \\
B(t) &= \begin{bmatrix} \underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} B_1^*(t) \\ \underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} B_2^*(t) \\ \vdots \\ \underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} B_m^*(t) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{8.42}$$

$$\tilde{A}_{\eta_\ell}(t) = T_u \{ (\underline{\chi}_{\eta_\ell}^2)^T \} - \underline{\chi}_{\eta_\ell}^{\eta_\ell} \mathbf{a}_{\ell\ell\ell}(t), \quad \ell \in \{1, \dots, m\},$$

$$C = BDM \{ (\underline{\chi}_{\eta_1}^1)^T, (\underline{\chi}_{\eta_2}^1)^T, \dots, (\underline{\chi}_{\eta_m}^1)^T \},$$

con el vector de estado inicial definido como:

$$\zeta(t) = g(t), \quad t \in [-\tau_2, 0)$$

$$\zeta(0) = \left[y_1(0) \frac{d}{dt} y_1(0) \cdots \frac{d^{\eta_1-1}}{dt^{\eta_1-1}} y_1(0) \cdots y_m(0) \frac{d}{dt} y_m(0) \cdots \frac{d^{\eta_m-1}}{dt^{\eta_m-1}} y_m(0) \right]^T, \quad t = 0.$$

8.2.1. Ley de Control Singularmente Perturbada

Para la representación de estado (8.41), se propone la ley de control siguiente, la cual es una generalización de la ley de control singularmente perturbada propuesta en la Subsección 6.2.1 del Capítulo 6, ver [62].

Control singularmente perturbado

$$\begin{aligned}
\varepsilon u(t) &= -\Theta \zeta(t) + \Omega \underline{x}(t) \\
\Theta &= BDM \{ (\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1})^T, (\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2})^T, \dots, (\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m})^T \} \in \mathbb{R}^{m \times \eta}, \\
\Omega &= BDM \{ (\underline{\chi}_2^1)^T, \dots, (\underline{\chi}_2^1)^T \} \in \mathbb{R}^{m \times 2m}
\end{aligned} \tag{8.43}$$

con ε un número positivo pequeño.

Control de acoplamiento de modelo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\underline{x}(t) &= \Delta\zeta(t) + \Lambda\underline{x}(t) + \Gamma\bar{r}(t) \\
\Delta &= BDM\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\} \in \mathbb{R}^{2m \times \eta}, \\
\Delta_j &= \begin{bmatrix} -\sigma_{j11} & -\sigma_{j12} & \dots & -\sigma_{j1\eta_j} + \ell_j + 1 \\ 0 & 0 & \dots & -(\beta_j - 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times \eta_j} \\
\Lambda &= BDM\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m\} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}, \\
\Lambda_j &= \begin{bmatrix} -(\ell_j + 1) & -\ell_j \\ (\beta_j - 1) & -\beta_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \\
\Gamma &= BDM\{\underline{\chi}_2^1, \dots, \underline{\chi}_2^1\} \in \mathbb{R}^{2m \times m}
\end{aligned} \tag{8.44}$$

donde:

β_j y ℓ_j son parámetros positivos para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Los cuales se seleccionan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\sigma_{j1\eta_j} - \ell_j &> 1 \\
0 < -\sigma_{j1\eta_j} + \ell_j + 1 &< L_{0,a} \quad j \in \{1, \dots, m\} \\
\beta_j &\geq \max\{-\Re e(\bar{\lambda}) \mid p_{\eta_j}(\bar{\lambda}) = 0\}.
\end{aligned} \tag{8.45}$$

$\sigma_{j11}, \dots, \sigma_{j1\eta_j}$ son los coeficientes de polinomios Hurwitz

$$p_{\eta_j}(\lambda) = \lambda^{\eta_j} + \sigma_{j1\eta_j}\lambda^{\eta_j-1} + \dots + \sigma_{j12}\lambda + \sigma_{j11}, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}, \tag{8.46}$$

El vector de control de estados es:

$$\underline{x} = [x_{\eta_1} \quad x_{\eta_1+1} \quad x_{\eta_1+\eta_2} \quad x_{\eta_1+\eta_2+1} \quad \dots \quad x_{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_m+m} \quad x_{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_m+m+1}]^T,$$

La función vectorial $\bar{r}(t)$ es el vector de referencia y tiene la siguiente forma:

$$\bar{r} = [r_1 \quad \dots \quad r_m]^T.$$

Las componentes r_j son señales que satisfacen la siguiente hipótesis:

H7 $r_j = r_j(t) \in L^\infty \cap C^\infty$.

Se toman funciones en C^∞ , ya que el esquema de control aproxima una retroalimentación proporcional derivativa.

El objetivo del:

■ **control de acoplamiento de modelo** es:

1. asignar la dinámica en lazo cerrado con la de un sistema lineal invariante con polinomios característicos Hurwitz $p_{\eta_j}(\lambda)$ para cada y_j , con $j = \{1, \dots, m\}$ y
2. asignar la convergencia exponencial hacia la dinámica deseada.

■ **control singularmente perturbado** es:

1. cambiar la base vectorial donde está representado el sistema para obtener un *modelo singularmente perturbado*, y
2. acercarse a la dinámica deseada en un orden ε .

En la Subsección 8.2.3 se proporcionan cotas para los parámetros, β_j y ℓ_j , que permitirán calcular un número ε positivo lo suficientemente pequeño tal que la estabilidad asintótica uniforme del *sistema singularmente perturbado* se garantice.

Para obtener el modelo singularmente perturbado en lazo cerrado, se aplica el esquema de control dado por las Ecuaciones (8.43) y (8.44) al Sistema (8.41) y seleccionando la nueva base

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j = \zeta_j, \quad j \in \{1, \dots, \ell_1 - 1\}, \ell_1 = \eta_1; \quad z_1 = \zeta_{\ell_1}; \\ x_{j+1} = \zeta_j, \quad j \in \{\ell_1 + 1, \dots, \ell_2 - 1\}, \\ \ell_2 = \sum_{k=1}^2 \eta_k; \quad z_2 = \zeta_{\ell_2} \\ x_{j+1} = \zeta_j, \quad j \in \{\ell_2 + 1, \dots, \ell_3 - 1\}, \\ \ell_3 = \sum_{k=1}^3 \eta_k; \quad z_3 = \zeta_{\ell_3} \\ \vdots \\ x_{j+1} = \zeta_j, \quad j \in \{\ell_{m-1} + 1, \dots, \ell_m - 1\}, \\ \ell_m = \eta; \quad z_m = \zeta_{\ell_m} \end{array} \right. \quad (8.47)$$

con la definición de estados dada por la Ecuación (8.47) se obtiene el siguiente modelo en lazo cerrado (c.f. (6.49)):

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) + B_1\bar{r}(t) \\ \varepsilon \frac{dz(t)}{dt} &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) \\ &+ A_{23}(\varepsilon, t)x(t - \tau(t)) + A_{24}(\varepsilon, t)z(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (8.48)$$

donde las matrices del sistema tienen las siguientes dimensiones, $A_{11} \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times (\eta+m)}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times m}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times m}$, $A_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times (\eta+m)}$, $A_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{23}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times (\eta+m)}$, $A_{24}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, para $j \in \{1, \dots, m\}$, (c.f. (6.50)):

$$\begin{aligned} A_{11} &= \text{BDM}\{A_{\eta_1}, \dots, A_{\eta_m}\}, \quad A_{\eta_j} = \left[\begin{array}{c|cc} Tu \left\{ (\underline{X}_{\eta_j-1}^2)^T \right\} & 0 & 0 \\ \hline -\bar{\alpha}_{\eta_j} & -(\ell_j + 1) & -\ell_j \\ 0 & \beta_j - 1 & -\beta_j \end{array} \right] \\ \bar{\alpha}_{\eta_j} &= \left[\sigma_{j_{j1}} \quad \cdots \quad \sigma_{j_{j(\eta_j-1)}} \right], \quad \sigma_{\eta_j} = \left[\bar{\alpha}_{\eta_j} \quad \sigma_{j_{j\eta_j}} \right]; \\ A_{12} &= \text{BDM}\{\hat{a}_{\eta_1}, \dots, \hat{a}_{\eta_m}\}, \\ \hat{a}_{\eta_j}^T &= \left[(\underline{X}_{\eta_j-1}^{\eta_j-1})^T \sigma_{j_{j\eta_j}} + \ell_j + 1 \quad 1 - \beta_j \right], \quad \hat{a}_{\eta_j} \in \mathbb{R}^{(\eta_j+1)}; \\ B_1 &= \text{BDM} \left\{ (\underline{X}_{\eta_1+1}^{\eta_1}), \dots, (\underline{X}_{\eta_m+1}^{\eta_m}) \right\} \end{aligned} \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned}
A_{21}(\varepsilon, t) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\varepsilon \bar{\mathbf{a}}_{111}(t) & b_{11}(t) & 0 & \dots & -\varepsilon \bar{\mathbf{a}}_{1mm}(t) & b_{1m}(t) & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ -\varepsilon \bar{\mathbf{a}}_{m11}(t) & b_{m1}(t) & 0 & \dots & -\varepsilon \bar{\mathbf{a}}_{mmm}(t) & b_{mm}(t) & 0 \end{array} \right]; \\
A_{22}(\varepsilon, t) &= -(\varepsilon X(t) + B^*(t)), \\
\text{con: } X(t) &= \left[\begin{array}{ccc} a_{11\eta_1}(t) & \cdots & a_{1m\eta_m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1\eta_1}(t) & \cdots & a_{mm\eta_m}(t) \end{array} \right]; \\
A_{23}(\varepsilon, t) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\varepsilon \bar{\alpha}_{111}(t) & b_{11}(t) & 0 & \dots & -\varepsilon \bar{\alpha}_{1mm}(t) & b_{1m}(t) & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ -\varepsilon \bar{\alpha}_{m11}(t) & b_{m1}(t) & 0 & \dots & -\varepsilon \bar{\alpha}_{mmm}(t) & b_{mm}(t) & 0 \end{array} \right]; \\
A_{24}(\varepsilon, t) &= \left[\begin{array}{ccc} \alpha_{11\eta_1}(t) & \cdots & \alpha_{1m\eta_m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1\eta_1}(t) & \cdots & \alpha_{mm\eta_m}(t) \end{array} \right];
\end{aligned} \tag{8.50}$$

De los trabajos de investigación de E. Fridman [14] y P. Kokotović *et. al.* [38], es importante mostrar que los valores propios de la matriz $A_{22}(\varepsilon, t)$ están en el semiplano complejo izquierdo abierto. En el siguiente hecho, esto es mostrado.

Hecho 8.2.1

La matriz $A_{22}(\varepsilon, t)$, satisface para todo $t \in \mathbb{R}^+$:

i)

$$\|A_{22}(0, t)\|_2 \leq \bar{c}, \quad \left\| \frac{d}{dt} A_{22}(0, t) \right\|_2 \leq c \tag{8.51}$$

ii) Dado un número real positivo, $\bar{\delta}$ y $b_i = \bar{b}_i + \bar{\delta}$, $i = 1, 2$, la siguiente identidad se preserva:

$$-b_2 - \varepsilon L_{0,a} \leq \Re \lambda_i(A_{22}(\varepsilon, t)) \leq -b_1 + \varepsilon L_{0,a} \tag{8.52}$$

con: $\bar{c} = \sqrt{m}m c_0$, $c = \sqrt{m}m c'$ y $L_{0,a} = \sqrt{m}m L'_{0,a}$. \square

Así, nuevamente bajo el cambio de base propuesto se obtiene una representación de las matrices $A_{22}(0, t)$ y A_{11} que satisfacen las hipótesis de los Lemas 5.2.1 y 5.2.2, y junto con el Hecho 8.2.1 satisfacen las condiciones obtenidas en la Subsección 6.2.3 del Capítulo 6, es decir, los resultados obtenidos se pueden aplicar de forma directa al caso MIMO y solo se harán observaciones cuando sea necesario ya que en esta representación existe la matriz $A_{2,4}(\varepsilon, t)$.

En la Subsección 8.2.2 se define la transformación de estado, cuyo objetivo es desacoplar el sistema en dos subsistemas uno lento y uno rápido.

8.2.2. Transformación de Estado

La ecuación de estado (8.48), para el caso homogéneo se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) \\ \varepsilon \frac{dz(t)}{dt} &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) \\ &+ A_{23}(\varepsilon, t)x(t - \tau(t)) + A_{24}(\varepsilon, t)z(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (8.53)$$

Siguiendo el procedimiento desarrollado en la Sección 5.4 y [14], se desacoplará el Sistema (8.53) en dos subsistemas uno lento y uno rápido.

Para lograr esto, se definen las siguientes matrices continuas diferenciables y acotadas (ver Subsección 5.2.3),

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \varepsilon R_L(t) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}, \\ H(t) &= H_0(t) + \varepsilon R_H(t) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times m}, \end{aligned} \quad (8.54)$$

para definir la transformación de estado que permita desacoplar al Sistema (8.53) en un subsistema lento y uno rápido.

Se define el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (I_{n+1} - \varepsilon H(t)L(t)) & -\varepsilon H(t) \\ L(t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ &= M^{-1}(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.55)$$

siguiendo el procedimiento desarrollado en los Apéndices C.4.1 y C.4.3, se obtienen las matrices definidas en la Ecuación (8.54), las cuales toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad H(t) = H_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ L_0(t) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = \bar{L}_0, \\ H_0(t) &= A_{12}A_{22}^{-1}(0, t) = \bar{H}_0 \end{aligned} \quad (8.56)$$

Finalmente, tomando en cuenta (8.55) en (8.56), se obtiene:

$$\begin{aligned} d\theta(t)/dt &= [\bar{A}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)] \theta(t) \\ \varepsilon d\eta(t)/dt &= [\bar{A}_{22}(\varepsilon, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] \eta(t) + A_{24}(\varepsilon, t)\eta(t - \tau(t)) \end{aligned}$$

donde:

$$\bar{A}_0 = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0(t) \quad \text{y} \quad \bar{A}_{22}(\varepsilon, t) = A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon\bar{L}_0A_{12} \quad (8.57)$$

Así, el Sistema (8.53) es aproximadamente desacoplado en un subsistema lento,

$$dx_s(t)/dt = \bar{A}_0x_s(t), \quad (8.58)$$

y en un subsistema rápido,

$$\varepsilon dz_f(t)/dt = \bar{A}_{22}(\varepsilon, t)z_f(t) + A_{24}(\varepsilon, t)z_f(t - \tau(t)). \quad (8.59)$$

Noté que: (recuérdese (8.57), (8.56), (8.49) y (8.50)):

$$\bar{A}_0 = \text{BDM}\{A_{0\eta_1}, \dots, A_{0\eta_m}\}, \quad \text{con:} \quad A_{0\eta_j} = \begin{bmatrix} T_u\{(\underline{\chi}_{\eta_j}^2)^T\} - \underline{\chi}_{\eta_j}^{\eta_j} \alpha_{\eta_j} & -\ell_j \underline{\chi}_{\eta_j}^{\eta_j} \\ \mathbf{0}_{\eta_j}^T & -\beta_j \end{bmatrix}, \quad (8.60)$$

entonces el polinomio característico de A_0 es:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I_{\eta+m} - \bar{A}_0) = \prod_{j=1}^m \det(\lambda I_{\eta_j} - A_{0\eta_j}) \\ p(\lambda) &= \prod_{j=1}^m (\lambda + \beta_j) p_{\eta_j}(\lambda). \end{aligned} \quad (8.61)$$

si los parámetros β_j , $j \in 1, \dots, m$, son seleccionados de forma que:

$$\beta_j \geq \text{máx}\{-\Re e(\bar{\lambda}) | p_{\eta_j}(\bar{\lambda}) = 0\},$$

entonces para $\beta = \text{mín}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ existe $K_1 > 0$, tal que:

$$\|\exp(A_0 t)\|_2 \leq K_1 e^{-\beta t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (8.62)$$

Observece que las matrices $\bar{A}_{22}(\varepsilon, t)$ y $A_{22}(\varepsilon, t)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ satisface el Hecho 8.2.1, entonces existe $K_2 > 0$, tal que:

$$\|\exp(\bar{A}_{22} \bar{t})\|_2 \leq K_2 e^{-b_1 \bar{t}} \quad \forall \bar{t} \in \mathbb{R}^+. \quad (8.63)$$

Se estudiará la estabilidad asintótica de la ecuación diferencial funcional homogénea de (8.48) con la herramienta de perturbaciones singulares, desarrollada en las Subsecciones 5.2.3 y 5.2.4 del Capítulo 5 para sistemas lineales variantes en el tiempo, y la herramienta extendida en [14] de la Sección 5.4 para el caso de sistemas con retardo.

En la Subsección 8.2.3 se estudia la estabilidad asintótica de la ecuación diferencial funcional homogénea de (8.48) cuando se considera que no existe retardo, para el caso $A_{23}(\varepsilon, t) = 0$, $A_{24}(\varepsilon, t) = 0$ y $B_1 = 0$. Como en [38], se dan cotas para ε tal que se garantiza la estabilidad asintótica. Finalmente en la Subsección 8.2.4, siguiendo ideas de [16] y [39], se estudia la *estabilidad asintótica* para la ecuación no homogénea del sistema lineal variante en el tiempo con retardo.

8.2.3. Condiciones para Estabilidad Asintótica Uniforme

Se mostrará que la estabilidad asintótica uniforme de los Subsistemas (8.58) y (8.59) es garantizada por las propiedades de sus matrices de transición cuando no existe retardo, para el caso $A_{23}(\varepsilon, t) = 0$ y $A_{24}(\varepsilon, t) = 0$.

El teorema siguiente conecta el comportamiento del Sistema (8.53) con el comportamiento de los subsistemas lento y rápido, para el caso $A_{23}(\varepsilon, t) = 0$ y $A_{24}(\varepsilon, t) = 0$. Los resultados se siguen de los ya obtenidos debido a las Ecuaciones (8.62) y (8.63).

La generalización del Teorema 6.2.1 es:

Teorema 8.2.1

Bajo las mismas condiciones del Hecho 8.2.1, y dadas las condiciones (8.45), existe un $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ el Sistema (8.53) es uniformemente asintóticamente estable. Mas aún, la matriz de transición del Sistema (8.53), $\phi(t, s)$, satisface:

$$\|\phi(t, s)\|_2 \leq \bar{K} e^{-\kappa(t-s)} \quad \forall t \geq s \geq t_0,$$

donde $\bar{K} > 0$ y $\kappa > 0$ son independientes de ε . La variable κ esta definida como:

$$\kappa = \min\{\beta, b_1 - L_{0a} - \sigma\}, \text{ con } \sigma = \min\{\sigma_{j,\eta_j} - \ell_j - 1\}$$

□

Este resultado se mantiene cuando ε tiende hacia 0. Desde un punto de vista computacional, es importante tener una idea del valor de la cota superior ε^* . Esta cota es dada por la generalización del Lema 6.2.1.

Lema 8.2.1

Bajo las mismas condiciones del Teorema 8.2.1, y $\|A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_1$, $\|L_0 A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_2$ y $\|L_0 A_0\|_2 \leq \bar{M}_3$, el sistema singularmente perturbado (8.53) es uniformemente asintóticamente estable para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, donde:

$$\varepsilon^* = \frac{\beta b_1}{K_1 K_2 \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta (L_{0,a} + \sigma + K_2 \bar{M}_2)}$$

$$\bar{M}_1 = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq m} \left(1 + (\sigma_{j\eta_j} - \ell_j - 1)^2 + (1 - \beta_j)^2 \right)},$$

$$\bar{M}_2 = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq m} (\sigma_{j\eta_j} - \ell_j - 1)^2},$$

$$\bar{M}_3 = \sqrt{m \left(\max_{1 \leq j \leq m} \left(\sum_{i=1}^{\eta_j} (\sigma_{j\eta_i})^2 + (\ell_j)^2 \right) \right)}$$

□

8.2.4. Estabilidad Asintótica del Sistema con Retardo

Se reescribe el sistema compuesto por (8.58) y (8.59) de la siguiente forma (c.f (6.71)):

$$E_\varepsilon \frac{dx_{sf}(t)}{dt} = A^*(\varepsilon, t)x_{sf}(t) + \varepsilon \hat{A}^*(t)x_{sf}(t - \tau(t)) \quad (8.64)$$

con $x_{sf}(t) = [x_s^T(t) \ z_f(t)]^T$ y:

$$E_\varepsilon = \begin{bmatrix} I_{n+1} & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & \varepsilon I \end{bmatrix}; \quad A^*(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & \bar{A}_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix};$$

$$\hat{A}^*(t) = \begin{bmatrix} 0_{n+1, n+1} & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & -A_{24}(\varepsilon, t) \end{bmatrix} \quad (8.65)$$

La estabilidad asintótica del Sistema (8.64) se estudia siguiendo las ideas en [16]. Existe

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & I \end{bmatrix}$$

y

(8.66)

$$Q(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & -\frac{1}{2}(\bar{A}_{22}(\varepsilon, t) + \bar{A}_{22}^T(\varepsilon, t)) \end{bmatrix}$$

con $W_1 = W_1^T > 0$ y $Q_1 = Q_1^T > 0$, tal que:

$$A^*(\varepsilon, t)^T W + W A^*(\varepsilon, t) = -2Q(\varepsilon, t) \quad (8.67)$$

Para los Subsistemas (8.58) y (8.59), el resultado principal sobre la estabilidad del sistema homogéneo se da en la siguiente generalización del Teorema 6.2.2.

Teorema 8.2.2

Dado que la matriz $A^*(\varepsilon, t)$ satisface la ecuación de Lyapunov (8.67), $A_{22}(\varepsilon, t)$ y $\bar{A}_{22}(\varepsilon, t)$ satisfacen el Hecho 8.2.1, y tomando en cuenta la hipótesis **H5**, existe un número positivo lo suficientemente pequeño ε^* , tal que el Sistema (8.64) es asintóticamente estable para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$. \square

El Teorema 8.2.2 da condiciones suficientes para la estabilidad del Sistema (8.48). Este es un criterio dependiente del retardo.

8.2.5. Aproximación del Estado

En esta subsección, se obtienen aproximaciones asintóticas de los estados del Sistema (8.48), para mostrar que el sistema no homogéneo preserva la estabilidad asintótica mostrada en el Teorema 8.2.2 para un número positivo ε pequeño.

Se considera el sistema singularmente perturbado con retardo (8.48), con las condiciones iniciales: $x(t_0) = x_0$ y $z(t_0) = z_0$. La aproximación de estado se hace al igual que en la Subsección 6.2.5 del Capítulo 6. Se aplican los siguientes pasos:

1. se aplica el cambio de variable de la Ecuación (8.55) al Sistema (8.48) (c.f. (6.75)-(6.78)).
2. se aplica la aproximación de $L_0(t)$ y $H_0(t)$, para obtener los subsistemas lento y rápido (c.f. (6.79) y (6.80)).
3. se obtienen las condiciones iniciales, y al subsistema rápido se le aplica el cambio de escala.
4. se aplica la transformada inversa de (8.55).

De esta forma se generaliza el Teorema 6.2.3 de la siguiente manera.

Teorema 8.2.3

Dadas las condiciones (8.62) y (8.63). Existe un número $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ las siguientes expresiones se mantienen uniformes en el intervalo $t \in [t_0, t_f]$:

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (8.68)$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x_s(t) + z_f\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (8.69)$$

donde x_s y z_f son soluciones de las ecuaciones:

$$dx_s(t)/dt = \bar{A}_0 x_s(t) + A_{12} z_f(t) + B_1 r(t) \quad (8.70)$$

y

$$\frac{d}{d\sigma} z_f(\sigma) = A_{22}(0, t) z_f(\sigma) \quad (8.71)$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_s(t_0) &= x_0 \\ z_f(0) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x_0 + z_0 \end{aligned} \quad (8.72)$$

□

8.2.6. Ejemplo Ilustrativo

Los resultados obtenidos en las subsecciones anteriores son aplicados en el siguiente ejemplo. Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2} y_1(t) + \sum_{i=1}^2 a_{1,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_1(t) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \alpha_{1,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_1(t - \tau(t)) + \sum_{i=1}^2 a_{1,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_2(t) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \alpha_{1,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_2(t - \tau(t)) = b_{11}(t)u_1(t) + b_{12}(t)u_2(t) \\ &\frac{d^2}{dt^2} y_2(t) + \sum_{i=1}^2 a_{2,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_2(t) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \alpha_{2,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_2(t - \tau(t)) + \sum_{i=1}^2 a_{2,1-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_1(t) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \alpha_{2,1-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_1(t - \tau(t)) = b_{22}(t)u_2(t) \end{aligned} \quad (8.73)$$

Noté que en este caso: $\eta_1 = 2$ y $\eta_2 = 2$. Se reescribe el Sistema (8.73), en la forma dada por (8.39):

$$\begin{aligned} &\left(\left[\begin{array}{cc} \partial^2 & 0 \\ 0 & \partial^2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{112} & a_{121} & a_{122} \\ a_{211} & a_{212} & a_{221} & a_{222} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \partial & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \partial \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} y_1(t) \\ y_2(t) \end{array} \right] \\ &+ \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{112} & \alpha_{121} & \alpha_{122} \\ \alpha_{211} & \alpha_{212} & \alpha_{221} & \alpha_{222} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \partial & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \partial \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y_1(t - \tau(t)) \\ y_2(t - \tau(t)) \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ 0 & b_{22}(t) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (8.74)$$

con $\partial = \frac{d}{dt}$, los parámetros variantes en el tiempo considerados son:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{111}(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{\text{sen}((2j-1)t)}{2j-1}, \quad a_{112}(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \text{sen}\left(\frac{jt}{2}\right) \\ a_{121}(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{j \text{sen}(4jt)}{(2j-1)(2j+1)}, \quad a_{122}(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^5 \frac{\cos(2jt)}{1-4j} \\ a_{211}(t) = 2 \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \text{sen}(jt), \quad a_{212}(t) = 2 \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \cos(jt) \\ a_{221}(t) = \frac{4}{5} \cos(t), \quad a_{222}(t) = \frac{4}{5} \text{sen}\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2} \cos(t) \\ \alpha_{111} = a_{221}, \quad \alpha_{112} = a_{222}, \quad \alpha_{121} = 3, \quad \alpha_{222} = a_{211} \\ \alpha_{211} = 1 + \frac{1}{4} \cos(t), \quad \alpha_{212} = a_{122}, \quad \alpha_{221} = 2 \\ b_{11}(t) = 7 + \frac{3}{4} (\text{sen}(t) + \text{sen}(2t)), \quad b_{12}(t) = \frac{1}{2} + \cos(t) \\ b_{21}(t) = 0, \quad b_{22}(t) = 5 + \frac{\text{sen}(2t)}{2} \end{array} \right. \quad (8.75)$$

algunas de las funciones⁵ definidas en la Ecuación (8.75) se muestran en la Figura 8.5.

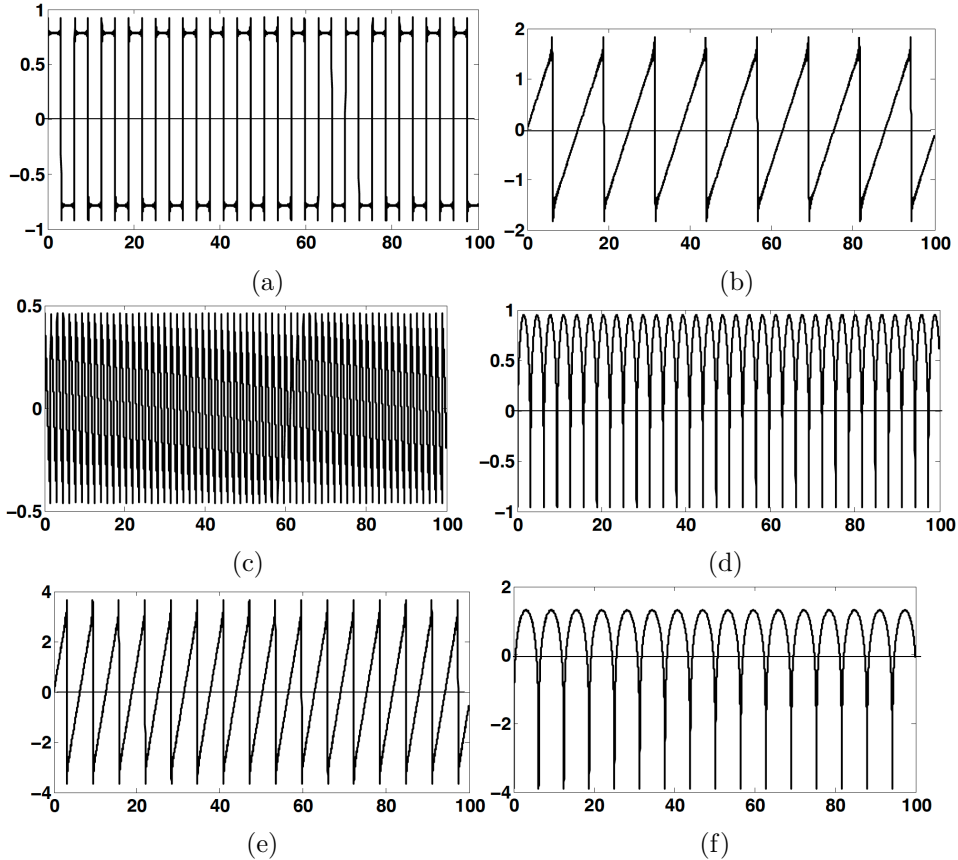


Figura 8.5: Parámetros Matriz $A(t)$: (a) $a_{111}(t)$, (b) $a_{112}(t)$, (c) $a_{121}(t)$, (d) $a_{212}(t)$, (e) $a_{211}(t)$, (f) $a_{122}(t)$.

⁵Se grafican los parámetros que son definidos como una serie de Fourier.

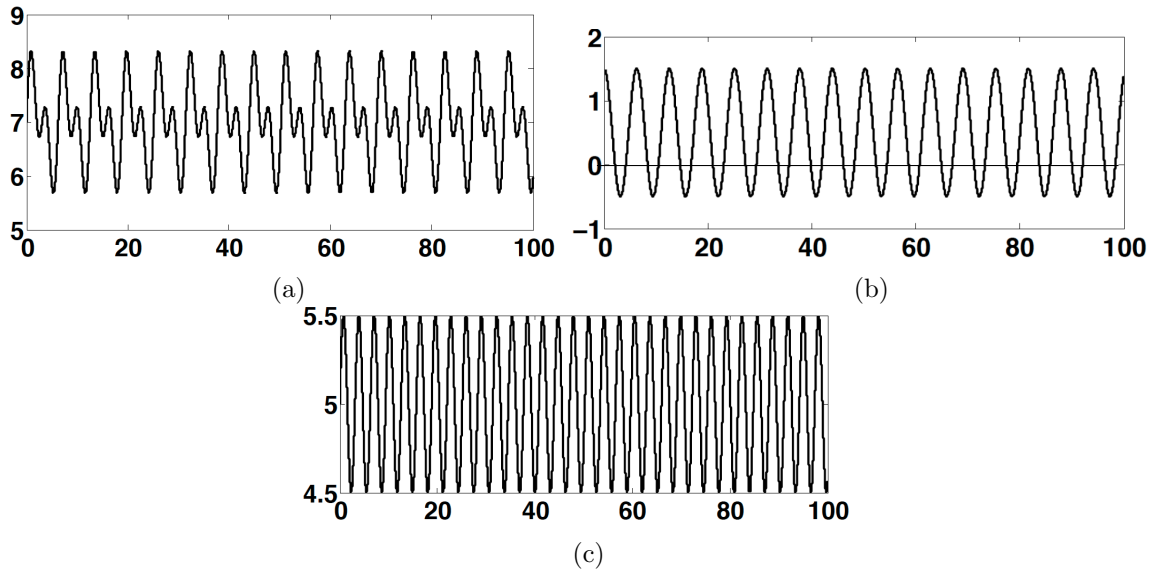


Figura 8.6: Parámetros Matriz $B(t)$: (a) $b_{11}(t)$, (b) $b_{12}(t)$ y (c) $b_{22}(t)$.

De las figuras anteriores y de la Ecuación (8.75) se calculan las siguientes cotas:

$$\|a_{kji}(t)\| \leq 4 = L'_{0,a}, \quad \forall i, j, k \in \{1, 2\}, \quad (8.76)$$

$$\|\alpha_{kji}(t)\| \leq 4 = L'_{0,\alpha}, \quad \forall i, j, k \in \{1, 2\}, \quad (8.77)$$

y las componentes $b_{ij}(t)$ satisface la siguiente desigualdad:

$$\|b_{ij}(t)\| \leq 8.5 = c_0, \quad \forall i, j \in \{1, 2\}. \quad (8.78)$$

Se define el vector de estado como $\zeta(t) = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3 \ \zeta_4] = [y_1 \ \frac{d}{dt}y_1 \ y_2 \ \frac{d}{dt}y_2]$, se obtiene la siguiente representación lineal de estado con retardo (ver Sección 4.2 del Capítulo 4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{111} & -a_{112} & -a_{121} & -a_{122} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{211} & -a_{212} & -a_{221} & -a_{222} \end{array} \right] \zeta(t) + \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{111} & -\alpha_{112} & -\alpha_{121} & -\alpha_{122} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{211} & -\alpha_{212} & -\alpha_{221} & -\alpha_{222} \end{array} \right] \zeta(t - \tau(t)) \\ &+ \left[\begin{array}{cc} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ 0 & b_{22}(t) \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \zeta(t) \end{aligned} \quad (8.79)$$

De las Ecuaciones (8.43) y (8.44), el esquema de control es:

$$\varepsilon \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = - \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \zeta(t) + \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -\sigma_{111} & -\sigma_{112} + l_1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\beta_1 - 1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\sigma_{221} & -\sigma_{222} + l_2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\beta_2 - 1) \end{array} \right] \zeta(t) \quad (8.80)$$

$$+ \left[\begin{array}{cc|cc} -(l_1 + 1) & -l_1 & 0 & 0 \\ (\beta_1 - 1) & -\beta_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(l_2 + 1) & -l_2 \\ 0 & 0 & (\beta_2 - 1) & -\beta_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix}.$$

Tomando en cuenta la Ecuación (8.45), se seleccionan los parámetros:

$$\sigma_{111} = 25, \quad \sigma_{112} = 8, \quad \sigma_{221} = 25 \quad \text{y} \quad \sigma_{222} = 8.$$

Entonces la dinámica de la salida $y_1(t)$ está dada por el siguiente polinomio característico Hurwitz:

$$p_{\eta_1}(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 25$$

y la dinámica de la salida $y_2(t)$ está dada por el siguiente polinomio característico Hurwitz:

$$p_{\eta_2}(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 25.$$

Del Teorema 8.2.1 y el Lema 8.2.1 se obtienen los parámetros β_i , l_i y ε para $i = \{1, 2\}$:

$$\beta_1 = 25, \quad \beta_2 = 25$$

$$l_1 = 20, \quad l_2 = 20$$

$$\varepsilon^* = 0.12, \quad \varepsilon = 0.04$$

Para que la hipótesis **H7** se cumpla, $r_1, r_2 \in L^\infty \cap \mathcal{C}^\infty$, las señales de referencia se construyen de la siguiente forma:

$$r_1(t) = \frac{10}{2.75} \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma$$

y

$$r_2(t) = \frac{1}{2} r_1(t), \quad t \in [0, 100],$$

donde:⁶

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-(t')^2}}, \quad \text{con } t' = (12/75)t - 1.$$

En las Figuras 8.7 y 8.8, se muestran los resultados numéricos obtenidos con el software MATLAB[®] para el Sistema (8.79), controlado por (8.80).

Se define el error de acoplamiento de modelo como:

$$|y(t) - y_{id}(t)| = \left| y(t) - C_{ac} \int_0^t \exp(A_{ac}(t - \sigma)) B_{acr}(\sigma) d(\sigma) \right|.$$

con:

$$A_m = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -25 & -8 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -25 & -8 \end{array} \right], \quad B_m = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

y

$$C_m = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Las simulaciones numéricas fueron implementadas con DDE23 de MATLAB[®] (ver [65]).

⁶ La función φ se toma de la Definición 2.4.5 en [55].

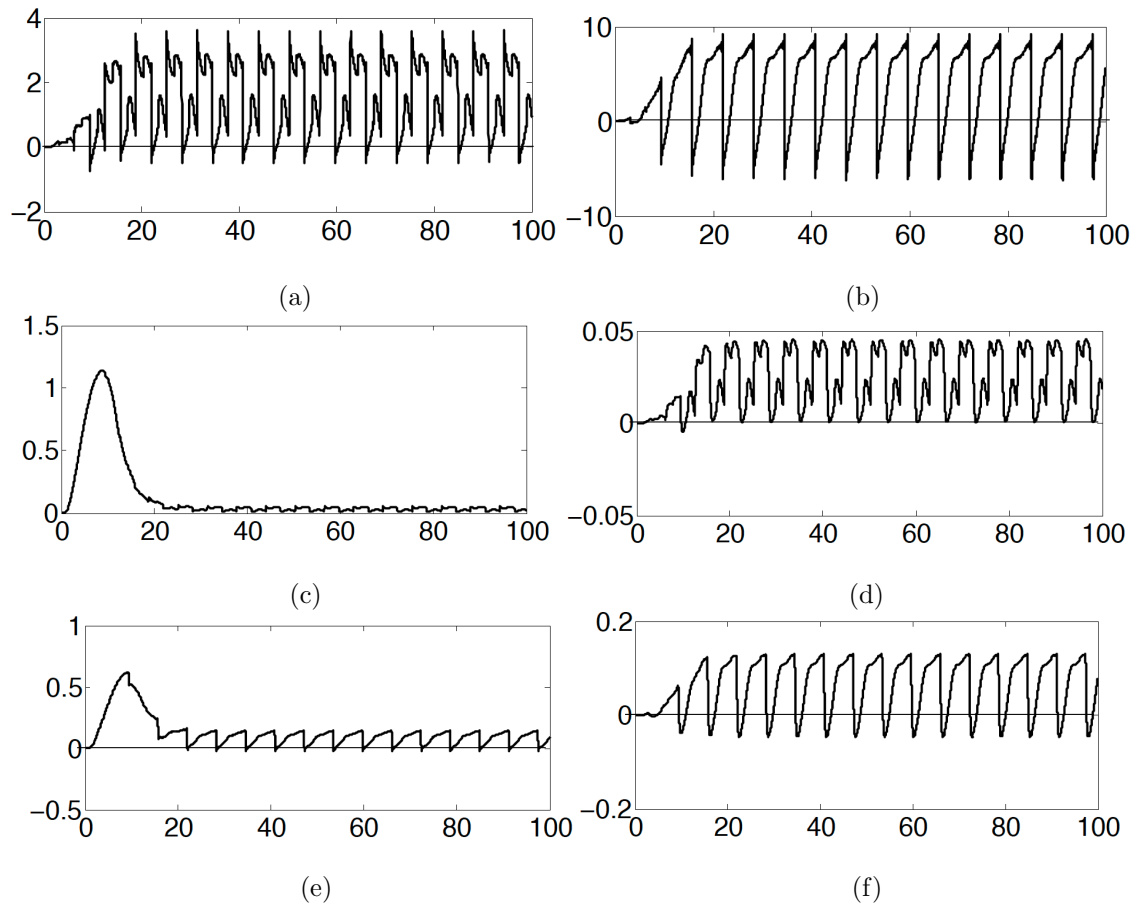


Figura 8.7: Variables de control : (a) $u_1(t)$, (b) $u_2(t)$, señales del control de acoplamiento (c) $x_1(t)$, (d) $x_2(t)$, (e) $x_4(t)$ y (e) $x_5(t)$.

En la Figura 8.7 se observa que las dinámicas de las señales de control son acotadas.

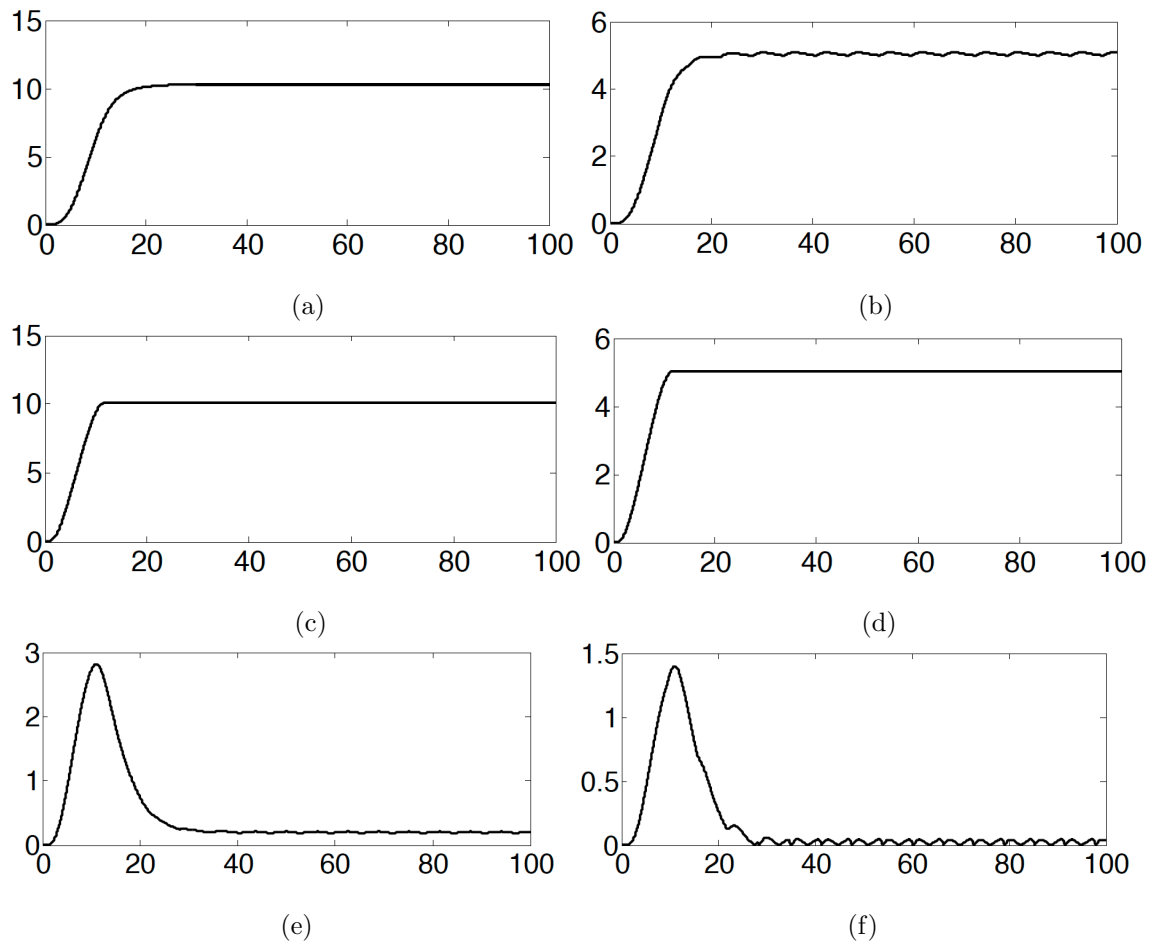


Figura 8.8: Señales de salida: (a) $y_1(t)$ y (b) $y_2(t)$, señales de referencia (c) $r_1(t)$ y (d) $r_2(t)$, señales de error de acoplamiento (e) $e_1(t)$ y (f) $e_2(t)$.

En la Figura 8.8 se observa que el problema de acoplamiento se alcanza en un tiempo de 20 segundos aproximada mente en ambos casos, los error es de acoplamiento son pequeños. El esquema de control cumple con el objetivo de diseño con sólo el conocimiento de las cotas de los parámetros del sistema.

8.3. Recapitulación

En este capítulo se lograron extender los resultados obtenidos en el Capítulo 6 debido a:

- La hipótesis **H2** en ambos casos, sistema MIMO LTV y sistema MIMO LTVD, es muy importante ya que permite demostrar los Hechos 8.1.1 y 8.2.1 para cada caso.
- El esquema de control permite representar en una nueva base vectorial al sistema, en ambos casos se obtiene un sistema singularmente perturbado.
- En ambos casos la matriz $A_{22}(\varepsilon, t)$ satisface el Hecho 8.1.1 y el Hecho 8.2.1 respectivamente. Para el caso del sistema con retardo la matriz $\bar{A}_{22}(\varepsilon, t)$ también satisface el Hecho 8.2.1.
- Es importante notar que la hipótesis **H5** permite dar un resultado de estabilidad dependiente del retardo para el caso del sistema con retardo.

El Teorema 8.1.1 de la Subsección 8.1.3 da condiciones suficientes para que el Sistema (8.4) controlado por (8.6) y (8.7) sea asintóticamente uniformemente estable. El Teorema 8.2.1 de la Subsección 8.2.3 da condiciones suficientes para que el Sistema (8.41) controlado por (8.43) y (8.44) sea asintóticamente uniformemente estable.

En los Lemas 8.1.1 y 8.2.1 se da una forma explícita de como calcular la cota superior del parámetro ε respectivamente.

En el Teorema 8.2.2 da condiciones suficientes dependientes del retardo para que el Sistema (8.41) sea estable.

Los Teoremas 8.1.2 y 8.2.3 demuestran que el esquema de control propuesto permite en ambos casos obtener la aproximación asintótica de los estados de los Sistemas (8.10) y (8.48) en base a las soluciones de los subsistemas lento y rápido con un error en ambos casos de $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

En las Subsecciones 8.1.5 y 8.2.6 el desempeño del esquema de control fue probado numéricamente, se alcanza el objetivo de acoplamiento, el error de acoplamiento es pequeño y se tienen dinámicas acotadas de las señales de control.

Capítulo 9

Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo de tesis se propone un esquema de control singularmente perturbado para sistemas SISO LTV, SISO LTVD, MIMO LTV y MIMO LTVD. El cual es una alternativa para dar solución al problema de acoplamiento de modelo y estabilización de los sistemas cuando se tiene incertidumbre en los parámetros del sistema.

Para el caso SISO el esquema de control propuesto es (ver (6.7), (6.8), (6.45) y (6.46)):

$$\begin{aligned} \varepsilon u(t) &= [0 \quad \cdots \quad 0 \quad -1] (\zeta(t) + h(t)) + [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_n + (1 + \ell) \\ 0 & \cdots & 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} (\zeta(t) + h(t)) \\ &+ \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \end{aligned}$$

Para el caso MIMO el esquema de control propuesto es (ver (8.6), (8.7), (8.43) y (8.44)):

$$\begin{aligned} \varepsilon u &= -\Psi(\zeta + h) + \Omega \underline{x} \\ \frac{d}{dt} \underline{x} &= \Delta(\zeta + h) + \Lambda \underline{x} + \Gamma \bar{r} \end{aligned}$$

El esquema de control compuesto por la *ley de control singularmente perturbadas* y el *control de acoplamiento* tienen como objetivos:

El objetivo del:

■ **control de acoplamiento de modelo** es:

1. asignar la dinámica en lazo cerrado con la de un sistema lineal invariante con polinomios característicos Hurwitz $p_{\eta j}(\lambda)$ para cada y_j , con $j = \{1, \dots, m\}$ y
2. asignar la convergencia exponencial hacia la dinámica deseada.

■ **control singularmente perturbado** es:

1. cambiar la base vectorial donde está representado el sistema para obtener un *modelo singularmente perturbado*, y

2. acercarse a la dinámica deseada en un orden ε .

Los parámetros β y ℓ , permiten calcular un valor numérico de ε lo suficientemente pequeño (ver Lemas 6.1.1, 6.2.1, 8.1.1 y 8.2.1), tal que la estabilidad asintótica uniforme del sistema *singularmente perturbado* es garantizada (ver Teoremas 6.1.1, 6.2.1, 8.1.1 y 8.2.1).

La forma de calcular los parámetros del esquema de control en todos los casos se hace de forma explícita lo cual desde el punto de vista de la ingeniería de procesos representa una forma más práctica para su implementación.

El problema de acoplamiento de modelo para los sistemas lineales variantes en el tiempo y lineales variantes en el tiempo con retardo se resuelve bajo hipótesis similares cuando se desconocen los parámetros del sistema y solo se conocen algunas cotas.

El esquema de control permite en ambos casos representar a los sistemas en una nueva base que facilita los cálculos para el análisis de estabilidad, ya que permite encontrar de forma simple la transformación de estado que realiza el desacoplamiento de los sistemas, aun cuando para el caso del sistema con retardo se tenga que satisfacer un sistema de ecuaciones algebraico diferenciales y no así para el sistema sin retardo. El análisis de estabilidad de los subsistemas lento y rápido se concluye gracias a la asignación de la dinámica dada por el esquema de control en todos los casos.

En todos los casos se alcanza el acoplamiento, con un error de acoplamiento pequeño y con las dinámicas de las señales de control acotadas (ver Teoremas 6.1.2, 6.2.3, 8.1.2 y 8.2.3).

Dado que los coeficientes $a_i(t)$ y $b(t)$ son desconocidos, para el caso SISO, se propuso un observador singularmente perturbado, de alta ganancia, el cual es una aproximación propia de un observador ideal no propio. Este observador de alta ganancia satisface la hipótesis **H4** de la Subsección 6.1.1 del Capítulo 6. El observador singularmente perturbado da un estado estimado $\hat{\zeta}(t) = \zeta(t) + h(t)$, donde el error de estimación, $h(t)$, es de orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (ver Corolario 7.1.1).

Perspectivas Extender el diseño del observador para los casos MIMO LTV y MIMO LTVD. Investigar una posible extensión para el diseño de un controlador óptimo robusto.

Continuar con el estudio de los sistemas lineales variantes en el tiempo desde un enfoque algebraico analítico, haciendo uso del álgebra no conmutativa.

Parte IV

Demostraciones

Apéndice A

Álgebra No Conmutativa

En este apéndice se dan algunas de las definiciones de estructuras algebraicas que son mencionadas en los Capítulos 2, 3 y 4. El contenido de este apéndice está basado en el libro [7].

A.1. Definiciones

Definición A.1.1 ([7])

Un anillo A es un conjunto, con dos operaciones, $(+)$ llamada adición y (\cdot) llamada multiplicación. Que satisfacen los siguientes axiomas:

1. $(A, +)$ es un grupo abeliano.
2. (A, \cdot) es asociativo ($a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$) y distributivo respecto de la adición ($a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$) para a, b, c elementos de A .
3. Existe $1 \in A$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, A es un anillo con identidad.

En este trabajo se considera que existen $a, b \in A$, $a \cdot b \neq b \cdot a$.

Definición A.1.2 ([7])

Un elemento $a \in A$, se llama invertible o unidad, si existe $b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$

Definición A.1.3 ([7])

Dado un elemento $a \in A$, b se llama inverso izquierdo de a si $b \cdot a = 1$ y c se llama inverso derecho de a , si $a \cdot c = 1$ para $b, c \in A$.

Si a tiene inverso derecho y a tiene inverso izquierdo. Entonces a es invertible.

Definición A.1.4 ([7])

Sea $u \in A$, u se llama divisor de cero por la izquierda (derecha), si $u \neq 0$ y existe $v \in A$, con $v \neq 0$ tal que $u \cdot v = 0$ ($v \cdot u = 0$).

Si u es un divisor de cero por la izquierda o por la derecha, se llama divisor de cero.

Definición A.1.5 ([7])

Un anillo $A \neq 0$, que no tiene divisores de cero, se llama anillo entero (no necesariamente conmutativo).

Definición A.1.6 ([7])

Sea A un anillo (no necesariamente conmutativo). Un A -módulo es un grupo abeliano M (escrito aditivamente) sobre el que A actúa linealmente: de manera más precisa, es un par (M, μ) , donde M es un grupo abeliano y μ es una aplicación $A \times M$ en M tal que, representando por ax a $\mu(a, x)$ ($a \in A, x \in M$), se satisfacen los siguientes axiomas:

1. $a(x + y) = ax + ay$
2. $(a + b)x = ax + bx$
3. $(ab)x = a(bx)$
4. $1x = x \quad \forall a, b \in A; \quad \forall x, y \in M.$

Definición A.1.7 ([7])

Sea K un anillo conmutativo, una K -álgebra A , es un anillo A el cual a su vez es un K -módulo, esto es:

1. $x(a + b) = xa + xb \quad \forall a, b \in A$ y $x \in K$,
2. $1a = a$,
3. $(x + y)a = xa + ya \quad \forall a \in A$ y $x, y \in K$,
4. $x(ya) = (xy)a$,
5. $x(ab) = a(xb) = (ab)x$,
6. $ax = xa$.

Sean R, A, B anillos, $\alpha : R \rightarrow A, \beta : R \rightarrow B$ homomorfismos de anillos. Sea M un (A, B) -bimódulo, es decir, M es un A -módulo izquierdo y M es un B -módulo derecho, tal que:

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \quad \forall b \in B, \forall m \in M \\ (am)b = a(mb) \end{aligned}$$

Definición A.1.8 ([7])

Una (α, β) derivación de R en M es un mapeo $\delta : R \rightarrow M$, tal que:

$$\begin{aligned} x^\delta &= \delta(x) \\ (r + t)^\delta &= r^\delta + t^\delta = \delta(r) + \delta(t) \\ (xy)^\delta &= x^\alpha y^\beta + x^\delta y^\beta = \delta(xy) = \alpha(x)\delta(y) + \delta(x)\beta(y) \end{aligned}$$

Definición A.1.9 ([7])

Un campo K equipado con una derivación δ se llama **campo diferencial**.

A.2. Anillos de Fracciones

Primero consideremos R un anillo conmutativo. Un conjunto $S \subseteq R$ se llama multiplicativo si:

$$\begin{aligned} 1 \in S \\ \forall x, y \in S \quad xy \in S \quad (\text{usualmente se requiere } 0 \notin S). \end{aligned}$$

Se quiere definir

$$S^{-1}R = \frac{R}{S} = R_s = \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S \right\}$$

Se define en $R \times S$ una relación de equivalencia: $(r, s) \sim (r', s')$ si existe $t \in S$ tal que $(rs' - r's)t = 0$, esto es una relación de equivalencia y las clases de equivalencia:

$$\frac{r}{s} = [(r, s)] = \overline{(r, s)}$$

se define una suma y una multiplicación:

$$\begin{aligned} \frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} &= \frac{rs' + sr'}{ss'} \\ \frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} &= \frac{rr'}{ss'} \end{aligned}$$

así las clases forman un anillo denotado usualmente por $S^{-1}R$ o R_s .

Teorema A.2.1 ([7])

Sea R un anillo y S un conjunto multiplicativo tal que:

1. Para cada $a \in R$ y $s \in S$, $aS \cap sR \neq \emptyset$
2. Para cada $a \in R$ y $s \in S$ tal que $sa = 0$, entonces $at = 0$ para algún $t \in S$

Entonces los elementos de R_s pueden ser construidos como fracciones:

$$a/s \quad a/s = \lambda(a)\lambda^{-1}(s)$$

donde $a/s = a'/s' \iff au = a'u'$ y $su = s'u'$ para algunas $u, u' \in S$.

$$(a/s = au/su = a'u'/s'u' = a'/s')$$

Además $\text{Ker}\lambda = \{a \in R \mid at = 0 \text{ para algún } t \in S\}$.

□

Definición A.2.1 ([7])

Si S satisface las condiciones (1) y (2), S se llama conjunto de denominadores derechos.

A.3. Polinomios Sesgados

Cuando R es un anillo conmutativo, el anillo de polinomios $R[x]$ es simplemente el conjunto de expresiones:

$$\sum_0^n a_i x^i, \quad a_i \in R, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y x una indeterminada, en donde $ax = xa$, $x^n x^m = x^{n+m}$ y $a_n x^n \neq 0$ si $a_n \neq 0$.

Cuando R no es conmutativo, se quiere que $R[x]$ signifique el anillo libremente generado sobre R , es decir, expresiones del tipo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n a_j x^j b_j, \quad a_j, b_j \in R \\ 1x = x1 \\ ax \neq xa \quad \text{para } a \in R \setminus \{0\} \text{ en general.} \end{aligned}$$

Sea R un anillo y consideremos el anillo P cuyos elementos pueden ser escritos de manera única en la forma

$$f = a_0 + xa_1 + \dots + x^n a_n, \quad a_i \in R.$$

Definición A.3.1 ([7])

El grado de f se define como el máximo sobre i tal que $a_i \neq 0$

$$d(f) = \text{máx}\{i \mid a_i \neq 0\}.$$

se tiene que $d(\cdot)$ cumple las siguientes condiciones:

1. $d(f) \geq 0$ para $f \neq 0$, $d(0) = -\infty$,
2. $d(f - g) \leq \text{máx}\{d(f), d(g)\}$,
3. $d(fg) = d(f) + d(g)$.

Teorema A.3.1 ([7])

Sea P un anillo cuyos elementos se pueden expresar de manera única con coeficientes en el anillo $R \neq (0)$ de la forma $a_0 + xa_1 + \dots + x^n a_n$, $a_i \in R$, con una función grado $d(\cdot)$ y que satisface para $a \in R$

$$ax = xa^\alpha + a^\delta$$

Entonces R es un anillo entero, α es un monomorfismo de R , δ es una α -derivación

$$(ab)^\delta = a^\delta b^\alpha + ab^\delta$$

y $P = R[x; \alpha, \delta]$ es un anillo de polinomios sesgados en x sobre R relativo a α y δ .

□

Apéndice B

Cotas de la Matriz de Transición

$\phi(t, s)$

Sea $\phi(t, s)$, k_1 , α_2 , γ y ε^* como en el Lema 5.2.2. En este apéndice se muestra detalladamente que para todo $\varepsilon < \varepsilon^*$, se tiene que la norma de la norma de la matriz de transición del Sistema (5.4) está acotada de la siguiente manera:

$$\|\phi(t, s)\| \leq k_1 \left(1 + \frac{2\gamma}{(1-\gamma)e^2} \right) e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon}.$$

Del Lema 5.2.2 de [38] por definición:

$$\begin{aligned} \psi(t, s) &= \phi(t, s) - e^{A(s)(t-s)/\varepsilon}, \\ \phi(t, s) &= \psi(t, s) + e^{A(s)(t-s)/\varepsilon}, \\ \|\phi(t, s)\| &= \|\psi(t, s) + e^{A(s)(t-s)/\varepsilon}\|, \\ \|\phi(t, s)\| &\leq \|\psi(t, s)\| + \|e^{A(s)(t-s)/\varepsilon}\|. \end{aligned}$$

Del Lema 5.2.1 se sabe que:

$$\|e^{A(t)\theta}\| \leq k_1 e^{-\alpha_1(t-s)/\varepsilon}.$$

Del lema 5.2.2 se sabe que:

$$\|\psi(t, s)\| \leq \varepsilon \rho e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon},$$

$$\varepsilon \leq \varepsilon^* = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \Gamma}{\beta k_1}$$

y

$$\rho = \frac{2k_1^2 \beta}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^2 (1 - \Gamma)}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \|\phi(t, s)\| &\leq \|\psi(t, s)\| + \|e^{A(s)(t-s)/\varepsilon}\|, \\ \|\phi(t, s)\| &\leq \varepsilon \rho e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon} + k_1 e^{-\alpha_1(t-s)/\varepsilon}, \\ \|\phi(t, s)\| &\leq \varepsilon^* \rho e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon} + k_1 e^{-\alpha_1(t-s)/\varepsilon}, \\ \|\phi(t, s)\| &\leq \frac{2k_1 \Gamma}{(1-\Gamma)e^2} e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon} + k_1 e^{-\alpha_1(t-s)/\varepsilon}, \end{aligned}$$

como $0 < \alpha_2 < \alpha_1$ se tiene que $e^{\alpha_2} < e^{\alpha_1}$ y $e^{-\alpha_2} > e^{-\alpha_1}$ finalmente:

$$\begin{aligned}\|\phi(t, s)\| &\leq \frac{2k_1\Gamma}{(1-\Gamma)e^2}e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon} + k_1e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon}, \\ \|\phi(t, s)\| &\leq k_1\left(1 + \frac{2\Gamma}{(1-\Gamma)e^2}\right)e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon}.\end{aligned}$$

Apéndice C

Demostraciones Capítulo 5

C.1. Demostración Lema 5.2.1

Nótese que:

$$\exp((A+B)\theta) = \exp(A\theta) + \int_0^\theta \exp(A(\theta-\sigma)) B \exp((A+B)\sigma) d\sigma.$$

De la hipótesis **H1** se tiene:

$$\|\exp((A+B)\theta)\| \leq K(A)e^{-\alpha\theta} + \int_0^\theta K(A)e^{-\alpha(\theta-\sigma)} \|B\| \|\exp((A+B)\sigma)\| d\sigma$$

despejando el término $e^{-\alpha\theta}$ se obtiene:

$$e^{-\alpha\theta} \|\exp((A+B)\theta)\| \leq K(A) + K(A)\|B\| \int_0^\theta e^{\alpha\sigma} \|\exp((A+B)\sigma)\| d\sigma$$

Esta última expresión satisface las hipótesis del lema de Gronwall [12], así entonces se llega a la siguiente expresión:

$$e^{-\alpha\theta} \|\exp((A+B)\theta)\| \leq K(A) + K(A)\|B\| \int_0^\theta K(A) e^{\int_\tau^\theta K(A)\|B\| d\sigma} d\tau$$

$$e^{-\alpha\theta} \|e^{(A+B)\theta}\| \leq K(A) + K(A) \int_0^\theta K(A)\|B\| e^{K(A)\|B\|(\theta-\tau)} d\tau$$

$$e^{-\alpha\theta} \|\exp((A+B)\theta)\| \leq K(A) + K(A) \left\{ e^{K(A)\|B\|(\theta-\tau)} \right\} \Big|_0^\theta$$

$$e^{-\alpha\theta} \|\exp((A+B)\theta)\| \leq K(A) + K(A) \left\{ I - e^{K(A)\|B\|\theta} \right\}$$

$$\|\exp((A+B)\theta)\| \leq K(A) e^{(K(A)\|B\| - \alpha)\theta}$$

De las hipótesis **H1** y **H2** se sabe que existe $K_1 = \max\{K(A)\}$ y existe $\|B\| : 0 < \alpha_1 < \alpha - K(A)\|B\| < \alpha$, finalmente se llega a:

$$\|\exp((A+B)\theta)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 \theta}.$$

Esta expresión se puede escribir de la siguiente forma:

$$\|\exp(C\theta)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 \theta} \quad \forall \theta \geq 0. \quad (\text{C.1})$$

Con $C \in N(A)$, siendo $N(A)$ una vecindad de la matriz A por la hipótesis **H2**. \square

C.2. Demostración Lema 5.2.2

De la definición de $\Psi(t, s)$, se observa que satisface:

- $\Psi(s, s) = 0$, ya que $\phi(s, s) = I$ por ser una matriz de transición y

$$\exp[A(s)(s-s)/\varepsilon] = I.$$

Por otro lado si se deriva parcialmente con respecto de t la ecuación:

$$\Psi(t, s) = \phi(t, s) - \exp[A(s)(t-s)/\varepsilon]$$

se obtiene la dinámica del error:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, s) &= \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, s) - \frac{\partial}{\partial t} \exp[A(s)(t-s)/\varepsilon] \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, s) &= \frac{1}{\varepsilon} A(t) \phi(t, s) - \frac{1}{\varepsilon} A(s) \exp[A(s)(t-s)/\varepsilon] \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, s) &= \frac{1}{\varepsilon} A(t) \phi(t, s) - \frac{1}{\varepsilon} A(s) \exp[A(s)(t-s)/\varepsilon] \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} A(t) \exp[A(s)(t-s)/\varepsilon] - \frac{1}{\varepsilon} A(t) \exp[A(s)(t-s)/\varepsilon] \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, s) &= \frac{1}{\varepsilon} A(t) \Psi(t, s) + \frac{1}{\varepsilon} (A(t) - A(s)) \exp[A(s)(t-s)/\varepsilon]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Obsérvese que una solución del Sistema (C.2) se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \Psi(t, s) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \Psi(t, \tau) (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau-s)/\varepsilon] d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \exp[A(\tau)(t-\tau)/\varepsilon] (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(t-s)/\varepsilon] d\tau. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

La expresión anterior satisface la Ecuación (C.2) para demostrar esto, sólo hace falta aplicar la fórmula de variación de parámetros, para ello se supondrá que:

$$\Psi(t, s) = \phi(t, s) M(t)$$

donde $M(s) = 0$, ya que $\Psi(s, s) = 0$ y como $\phi(s, s) = I$ se tiene esta condición inicial para $M(t)$. Derivando esta última expresión con respecto de t a ambos lados e igualando el resultado con la Ecuación (C.2) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi(t, s)) M(t) + \phi(t, s) \frac{\partial}{\partial t} (M(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} A(t) \phi(t, s) M(t) + \phi(t, s) \frac{\partial}{\partial t} (M(t)) &= \frac{1}{\varepsilon} A(t) \Psi(t, s) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} (A(t) - A(s)) \exp[A(s)(t-s)/\varepsilon] \end{aligned}$$

de donde se concluye:

$$\begin{aligned}\phi(t, s) \frac{\partial}{\partial t} (M(t)) &= \frac{1}{\varepsilon} (A(t) - A(s)) \exp[A(s)(t - s)/\varepsilon] \\ \frac{\partial}{\partial t} (M(t)) &= \phi(s, t) \frac{1}{\varepsilon} (A(t) - A(s)) \exp[A(s)(t - s)/\varepsilon]\end{aligned}$$

Integrando a ambos lados sobre el intervalo, $J = [s, t]$, se sigue que:

$$M(t)|_s^t = M(t) - M(s) = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \phi(s, \tau) (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau$$

multiplicando por la matriz $\phi(t, s)$ a ambos lados se obtiene:

$$\begin{aligned}\phi(t, s)M(t) - \phi(t, s)M(s) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \phi(t, s)\phi(s, \tau) (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau, \\ \Psi(t, s) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \phi(t, \tau) (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau.\end{aligned}$$

Se suma y se resta del lado derecho de esta última expresión el término:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \exp[A(\tau)(t - \tau)/\varepsilon] (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau$$

y asociando de forma adecuada se tiene:

$$\begin{aligned}\Psi(t, s) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t (\phi(t, \tau) - \exp[A(\tau)(t - \tau)/\varepsilon]) (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \exp[A(\tau)(t - \tau)/\varepsilon] (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau\end{aligned}$$

y esta es la expresión que se propone en la Ecuación (C.3), ya que $\Psi(t, \tau) = \phi(t, \tau) - \exp[A(\tau)(t - \tau)/\varepsilon]$ por definición.

Ahora se continua con la demostración, multiplicando a ambos lados de la Ecuación (C.3) por el término $e^{\alpha_2(t-s)/\varepsilon}$, con $0 < \alpha_2 < \alpha_1$, se sigue que:

$$\begin{aligned}e^{\alpha_2(t-s)/\varepsilon} \Psi(t, s) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t e^{\alpha_2(\tau-s)/\varepsilon} e^{\alpha_2(t-\tau)/\varepsilon} \Psi(t, \tau) (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t e^{\alpha_2(t-s)/\varepsilon} \exp[A(\tau)(t - \tau)/\varepsilon] (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau.\end{aligned}$$

Definiendo $\eta(t, s) = e^{\alpha_2(t-s)/\varepsilon} \Psi(t, s)$. La expresión anterior se reescribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\eta(t, s) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t e^{\alpha_2(\tau-s)/\varepsilon} \eta(t, \tau) (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t e^{\alpha_2(t-s)/\varepsilon} \exp[A(\tau)(t - \tau)/\varepsilon] (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau.\end{aligned}\tag{C.4}$$

Definiendo:

$$F(\eta) = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t e^{\alpha_2(\tau-s)/\varepsilon} \eta(t, \tau) (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau - s)/\varepsilon] d\tau,$$

y

$$B = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t e^{\alpha_2(t-s)/\varepsilon} \exp[A(\tau)(t-\tau)/\varepsilon] (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau-s)/\varepsilon] d\tau.$$

Entonces la Ecuación (C.4) toma la forma:

$$\eta = F(\eta) + B = T(\eta).$$

Trabajando sobre el sumando:

$$B = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t e^{\alpha_2(t-s)/\varepsilon} \exp[A(\tau)(t-\tau)/\varepsilon] (A(\tau) - A(s)) \exp[A(s)(\tau-s)/\varepsilon] d\tau.$$

Se calcula la norma del sumando B :

$$\begin{aligned} \|B\| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t e^{\alpha_2(t-s)/\varepsilon} K_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)/\varepsilon} \beta(\tau-s) K_1 e^{-\alpha_1(\tau-s)/\varepsilon} d\tau \\ \|B\| &\leq \frac{K_1^2 \beta}{\varepsilon} e^{-(\alpha_1-\alpha_2)(t-s)/\varepsilon} \int_s^t (\tau-s) d\tau = \frac{\varepsilon K_1^2 \beta}{2} \left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)^2 e^{-(\alpha_1-\alpha_2)(t-s)/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Recuérdese que:

$$\|\exp(A(t)\theta)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 \theta}$$

y

$$\|A(\dot{t})\| \leq \beta,$$

Nótese que el término $\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)^2 e^{-(\alpha_1-\alpha_2)(t-s)/\varepsilon}$. Si $x = \left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)$ y $a = -(\alpha_1 - \alpha_2)$, la expresión toma la forma $x^2 e^{ax}$. Para ésta se calcula su máximo. Se deriva e igualando a cero se tiene $2xe^{ax} + ax^2 e^{ax} = 0$. Los puntos candidatos son $x = -\frac{2}{a}$. Este punto es donde la función tiene su máximo y por tanto $x^2 e^{ax} \leq \frac{4}{a^2 e^2}$.

Finalmente usando este resultado:

$$\begin{aligned} \|B\| &\leq \frac{\varepsilon K_1^2 \beta}{2} \frac{4}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^2}, \\ \|B\| &\leq \frac{2K_1^2 \beta}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Para que $\|\eta\| \leq \varepsilon \rho$, se analiza el término $F(\eta)$

$$\begin{aligned} \|F(\eta)\| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \varepsilon \rho e^{\alpha_2(\tau-s)/\varepsilon} \beta(\tau-s) K_1 e^{\alpha_1(\tau-s)/\varepsilon} d\tau \\ &\leq K_1 \beta \rho \int_s^t e^{-(\alpha_1-\alpha_2)(\tau-s)/\varepsilon} (\tau-s) d\tau \end{aligned}$$

Si $w = \frac{\tau-s}{\varepsilon}$ y $0 \leq w \leq \infty$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|F(\eta)\| &\leq K_1 \beta \rho \varepsilon^2 \int_0^\infty e^{-(\alpha_1-\alpha_2)w} w dw \\ &\leq K_1 \beta \rho \varepsilon^2 \left\{ -\frac{we^{-(\alpha_1-\alpha_2)w}}{\alpha_1-\alpha_2} \Big|_0^\infty - \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2} e^{-(\alpha_1-\alpha_2)w} \Big|_0^\infty \right\} \\ &\leq \frac{\rho \beta K_1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto puesto que ya se conocen las cotas para $\|B\|$ y $\|F(\eta)\|$, se puede acotar $\|T(\eta)\|$ de la siguiente forma:

$$\|T(\eta)\| \leq \frac{\rho\beta K_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^2 (1 - \Gamma)} + \frac{2K_1^2 \beta}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^2} \varepsilon.$$

Seleccionando:

$$\rho = \frac{2K_1^2 \beta}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^2 (1 - \Gamma)}$$

y

$$\varepsilon^* = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \Gamma}{\beta K_1},$$

es decir, se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\frac{K_1^2 \beta}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} = \frac{1 - \Gamma}{2} \rho \quad y \quad \frac{K_1 \beta}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} = \frac{\Gamma}{\varepsilon^*}.$$

Por tanto como $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ esto implica:

$$\|T(\eta)\| \leq \rho \Gamma \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^*} + (1 - \Gamma) \rho \varepsilon = \rho \left[\Gamma \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} + (1 - \Gamma) \right] \varepsilon \leq \rho [\Gamma + (1 - \Gamma)] \varepsilon$$

Finalmente:

$$\|T(\eta)\| \leq \rho \varepsilon.$$

Obsérvese que con este resultado se muestra que:

$$\begin{aligned} \|T(\eta_2) - T(\eta_1)\| &= \|F(\eta_2) - F(\eta_1)\| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t e^{\alpha_2(\tau-s)/\varepsilon} \beta(\tau-s) K_1 e^{-\alpha_1(\tau-s)/\varepsilon} d\tau \|\eta_2 - \eta_1\| \\ &\leq \varepsilon \beta K_1 \int_0^\infty e^{-(\alpha_1 - \alpha_2)w} w dw \|\eta_2 - \eta_1\| = \frac{\varepsilon \beta K_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \|\eta_2 - \eta_1\| \end{aligned}$$

puesto que $\varepsilon < \varepsilon^*$ se tiene $\frac{\varepsilon \beta K_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \|\eta_2 - \eta_1\| \leq \Gamma \|\eta_2 - \eta_1\|$. Es decir $T(\eta)$ es un mapeo de contracción. Y de aquí finalmente:

$$\|\psi(t, s)\| \leq \varepsilon \rho e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon}$$

□

C.3. Demostración Lema 5.2.3

Usando el método de variación de parámetros se puede escribir $\phi_1(t, s) = \phi(t, s)M(t)$ donde $M(s) = I$ ya que $\phi_1(t, s)$ y $\phi(t, s)$ son matrices de transición. De esta definición se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_1(t, s) &= \left(\frac{d}{dt} \phi(t, s) \right) M(t) + \phi(t, s) \left(\frac{d}{dt} M(t) \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} A(t) \phi_1(t, s) + \varepsilon^{\gamma-1} \Gamma(t, \varepsilon) z(t) \end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$\phi(t, s) \left(\frac{d}{dt} M(t) \right) = \varepsilon^{\gamma-1} \Gamma(t, \varepsilon) \phi_1(t, s),$$

$$\frac{d}{dt} M(t) = \phi(s, t) \varepsilon^{\gamma-1} \Gamma(t, \varepsilon) \phi_1(t, s).$$

Integrando a ambos lados de obtiene:

$$\int_s^t \frac{d}{dt} M(t) dt = \int_s^t \phi(s, \tau) \varepsilon^{\gamma-1} \Gamma(\tau, \varepsilon) \phi_1(\tau, s) d\tau,$$

$$M(t) - M(s) = \int_s^t \phi(s, \tau) \varepsilon^{\gamma-1} \Gamma(\tau, \varepsilon) \phi_1(\tau, s) d\tau.$$

Multiplicando a ambos lados por $\phi(t, s)$ se tiene que:

$$\phi(t, s) M(t) = \phi(t, s) M(s) + \int_s^t \phi(t, s) \phi(s, \tau) \varepsilon^{\gamma-1} \Gamma(\tau, \varepsilon) \phi_1(\tau, s) d\tau$$

recordando que $\phi(t, s) \phi(s, \tau) = \phi(t, \tau)$, $M(s) = I$ y $\phi_1(t, s) = \phi(t, s) M(t)$

$$\phi_1(t, s) = \phi(t, s) + \int_s^t \phi(t, \tau) \varepsilon^{\gamma-1} \Gamma(\tau, \varepsilon) \phi_1(\tau, s) d\tau,$$

$$\begin{aligned} \phi_1(t, s) - \phi(t, s) &= \int_s^t \phi(t, \tau) \varepsilon^{\gamma-1} \Gamma(\tau, \varepsilon) \phi(\tau, s) d\tau \\ &+ \int_s^t \phi(t, \tau) \varepsilon^{\gamma-1} \Gamma(\tau, \varepsilon) (\phi_1(\tau, s) - \phi(\tau, s)) d\tau. \end{aligned}$$

Sacando normas a ambos lados:

$$\begin{aligned} \|\phi_1(t, s) - \phi(t, s)\| &\leq \int_s^t \|\phi(t, \tau)\| \varepsilon^{\gamma-1} \|\Gamma(\tau, \varepsilon)\| \|\phi(\tau, s)\| d\tau \\ &+ \int_s^t \|\phi(t, \tau)\| \varepsilon^{\gamma-1} \|\Gamma(\tau, \varepsilon)\| \|(\phi_1(\tau, s) - \phi(\tau, s))\| d\tau \\ &\leq K^2 c_3 \varepsilon^{\gamma-1} \int_s^t e^{-\alpha(t-\tau)/\varepsilon} e^{-\alpha(\tau-s)/\varepsilon} d\tau \\ &+ K c_3 \varepsilon^{\gamma-1} \int_s^t e^{-\alpha(t-\tau)/\varepsilon} \|(\phi_1(\tau, s) - \phi(\tau, s))\| d\tau \\ &\leq K^2 c_3 \varepsilon^{\gamma-1} e^{-\alpha(t-s)/\varepsilon} (t-s) \\ &+ K c_3 \varepsilon^{\gamma-1} \int_s^t e^{-\alpha(t-\tau)/\varepsilon} \|(\phi_1(\tau, s) - \phi(\tau, s))\| d\tau. \end{aligned}$$

Multiplicando a ambos lados por $e^{\alpha_3(t-s)/\varepsilon}$, con $0 < \alpha_3 < \alpha$ y definiendo:

- $\eta(t, s) = e^{\alpha_3(t-s)/\varepsilon} \|(\phi_1(t, s) - \phi(t, s))\|,$
- $c_4 = \frac{c_3 K^2}{\varepsilon} (t-s),$
- $c_5 = c_3 K.$

se puede escribir la ecuación para $\|\eta(t, s)\|$

$$\begin{aligned} \eta(t, s) &\leq \varepsilon^\gamma c_4 e^{(\alpha_3 - \alpha)(t-s)/\varepsilon} \\ &+ \varepsilon^{\gamma-1} c_5 \int_s^t e^{-\alpha(t-\tau)/\varepsilon} e^{-\alpha_3(t-\tau)/\varepsilon} \left\{ e^{-\alpha_3(\tau-s)/\varepsilon} \|(\phi_1(\tau, s) - \phi(\tau, s))\| \right\} d\tau \\ \eta(t, s) &\leq \varepsilon^\gamma c_4 + \varepsilon^{\gamma-1} c_5 \int_s^t e^{-(\alpha - \alpha_3)(t-\tau)/\varepsilon} \eta(\tau, s) d\tau \end{aligned}$$

Esta última expresión satisface las condiciones del lema de Gronwall, que se resume enseguida [12]:

$$u(t) \leq C + \int_0^t k(\tau)u(\tau)d\tau$$

Entonces:

$$u(t) \leq Ce^{\int_0^t k(\tau)d\tau}$$

para el caso tratado:

- $\eta(t, s) = u(t)$,
- $\varepsilon^\gamma c_4 = C$,
- $\varepsilon^{\gamma-1} c_5 e^{-(\alpha-\alpha_3)(t-\tau)/\varepsilon} = k(\tau)$,
- $\eta(\tau, s) = u(\tau)$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} \eta(t, s) &\leq \varepsilon^\gamma c_4 e^{\int_s^t \varepsilon^{\gamma-1} c_5 e^{-(\alpha-\alpha_3)(t-\tau)/\varepsilon} d\tau} \\ \eta(t, s) &= \varepsilon^\gamma c_4 e^{\frac{\varepsilon^{\gamma-1} c_5}{\alpha-\alpha_3} (1-e^{-(\alpha-\alpha_3)(t-s)/\varepsilon})} \\ \eta(t, s) &\leq \varepsilon^\gamma c_4 e^{\frac{\varepsilon^{\gamma-1} c_5}{\alpha-\alpha_3}} \\ \eta(t, s) &\leq \varepsilon^\gamma K_3 \end{aligned}$$

con $K_3 \geq c_4 e^{\frac{\varepsilon^{\gamma-1} c_5}{\alpha-\alpha_3}}$ para que se cumpla la última desigualdad. \square

C.4. Transformación de Desacoplamiento

En este Apéndice se muestra de forma detallada cómo se resuelven las Ecuaciones (5.10) y (5.11).

C.4.1. Solución de la Ecuación (5.10)

Se plantea una solución para la Ecuación (5.10) de la forma:

$$L(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j L_j(t) + \varepsilon^N R_L(t). \quad (\text{C.5})$$

Sustituyendo la Ecuación (C.5) en la Ecuación (5.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{N+1} \dot{R}_L(t) &= -\sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^{j+1} \dot{L}_j(t) + \sum_{j=0}^{N+j+1} (R_L(t)A_{12}L_j(t) + L_j(t)A_{12}R_L(t)) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^{j+1} L_j(t)A_{12}\varepsilon^j L_j(t) - \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^{j+1} L_j(t)A_{11} + \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j A_{22}(t)L_j(t) \\ &\quad + \varepsilon^{2N+1} R_L(t)A_{12}R_L(t) - \varepsilon^{N+1} R_L(t)A_{11}(t) + \varepsilon^N A_{22}(t)R_L(t) - A_{21}(t) \end{aligned}$$

igualando los términos que están multiplicados por la misma potencia de ε^j , se tiene para ε^0 la ecuación:

$$0 = A_{22}(t)L_0(t) - A_{21}(t) \Rightarrow L_0(t) = A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t).$$

Para ε^1 se tienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{L}_0(t) &= L_0(t)A_{12}(t)L_0(t) - L_0(t)A_{11}(t) + A_{22}(t)L_1(t) \\ L_1(t) &= A_{22}^{-1}(t) \left[\dot{L}_0(t) - L_0(t)A_{12}(t)L_0(t) + L_0(t)A_{11}(t) \right]\end{aligned}$$

Para ε^2 se tienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{L}_1(t) &= L_0(t)A_{12}(t)L_1(t) + L_1(t)A_{12}(t)L_0(t) - L_1(t)A_{11}(t) + A_{22}(t)L_2(t) \\ L_2(t) &= A_{22}^{-1}(t) \left[\dot{L}_1(t) - L_0(t)A_{12}(t)L_1(t) - L_1(t)A_{12}(t)L_0(t) + L_1(t)A_{11}(t) \right]\end{aligned}$$

Siguiendo así se llega que para ε^N :

$$\begin{aligned}\varepsilon^N \left(\dot{L}_{N-1}(t) + \varepsilon \dot{R}_L(t) \right) &= \varepsilon^N \{ \varepsilon (R_L(t)A_{12}(t)L_0(t) + L_0(t)A_{12}(t)R_L(t)) \} + \varepsilon^N A_{22}(t)R_L(t) \\ &\quad + \varepsilon^N L_{N-1}(t)A_{12}(t) \left(\sum_0^{N-1} \varepsilon^j L_j(t) \right) + \varepsilon^N (\varepsilon^{N-1} R_L(t)A_{12}(t)R_L(t)) , \\ &\quad - \varepsilon^N (\varepsilon R_L(t)A_{11}(t)) - \varepsilon^N L_{N-1}(t)A_{11}(t)\end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{R}_L(t) &= A_{22}(t)R_L(t) - \dot{L}_{N-1}(t) + \varepsilon (R_L(t)A_{12}(t)L_0(t) + L_0(t)A_{12}(t)R_L(t)) \\ &\quad + L_{N-1}(t)A_{12}(t) \sum_0^{N-1} \varepsilon^j L_j(t) + \varepsilon^{N+1} R_L(t)A_{12}(t)R_L(t) - \varepsilon R_L(t)A_{11}(t) \\ &\quad - L_{N-1}(t)A_{11}(t).\end{aligned}$$

Para el caso $N = 1$ la última ecuación queda como sigue:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{R}_L(t) &= A_{22}(t)R_L(t) - \dot{L}_0(t) + \varepsilon (R_L(t)A_{12}(t)L_0(t) + L_0(t)A_{12}(t)R_L(t)) \\ &\quad + L_0(t)A_{12}(t)L_0(t) + \varepsilon^2 R_L(t)A_{12}(t)R_L(t) - \varepsilon R_L(t)A_{11}(t) - L_0(t)A_{11}(t) \\ \varepsilon \dot{R}_L(t) &= A_{22}(t)R_L(t) - \dot{L}_0(t) + \{ L_0(t)A_{12}(t)L_0(t) - L_0(t)A_{11}(t) \} \\ &\quad + \varepsilon \{ R_L(t)A_{12}(t)L_0(t) + L_0(t)A_{12}(t)R_L(t) - R_L(t)A_{11}(t) + \varepsilon R_L(t)A_{12}(t)R_L(t) \}\end{aligned}$$

Se puede escribir esta última ecuación de la siguiente forma:

$$\varepsilon \dot{R}_L(t) = A_{22}(t)R_L(t) - \dot{L}_0(t) + f_1(t) + \varepsilon f_2(t)$$

donde:

$$\begin{aligned}f_1(t) &= -L_0(t) \{ A_{11}(t) - A_{12}(t)L_0(t) \}, \\ f_2(t) &= -R_L(t)A_{11}(t)R_L(t)A_{12}(t)L_0(t) + L_0(t)A_{12}(t) + \varepsilon R_L(t)A_{12}(t)R_L(t).\end{aligned}$$

C.4.2. Contracción del Mapeo $SR_L(t)$

Considérese la ecuación integral $R_L(t) = SR_L(t)$. Usando la variación de parámetros y considerando a $\phi(t, t_0)$ la matriz de transición de la ecuación $\varepsilon \dot{z}(t) = A_{22}(t)z(t)$, es decir, $\varepsilon \dot{\phi}(t) = A_{22}(t)\phi(t)$ y tomando a $SR_L(t) = \phi(t, t_0)y(t)$ con $y(t_0) = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}S\dot{R}_L(t) &= \dot{\phi}(t, t_0)(t)y(t) + \phi(t, t_0)\dot{y}(t) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(t)\phi(t, t_0)y(t) + \phi(t, t_0)\dot{y}(t) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(t)SR_L(t) + \frac{1}{\varepsilon} (-\dot{L}_0(t) + f_1(t) + \varepsilon f_2(t))\end{aligned}$$

Igualando término a término:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \phi(t_0, t) (-\dot{L}_0(t) + f_1(t) + \varepsilon f_2(t)), \\ y(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \phi(t_0, \tau) (-\dot{L}_0(\tau) + f_1(\tau) + \varepsilon f_2(\tau)) d\tau, \\ \phi(t, t_0)y(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) (-\dot{L}_0(\tau) + f_1(\tau) + \varepsilon f_2(\tau)) d\tau, \\ SR_L(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) (-\dot{L}_0(\tau) + f_1(\tau) + \varepsilon f_2(\tau)) d\tau.\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{L} = \{R_L(t) \mid \|R_L(t)\| < \rho\}$, donde $\|R_L(t)\| = \sup \|R_L(t)\|$ y utilizando la identidad matricial:

$$R_{L_1}(t)A_{12}R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t)A_{12}(t)R_{L_2}(t) = (R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t))A_{12}(t)R_{L_1}(t) + R_{L_2}(t)A_{12}(t)(R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t)),$$

y se sabe que $A_{11}(t), A_{22}(t)$ y $\dot{L}_0(t)$ son acotadas sobre J . Obsérvese:

$$\begin{aligned} f_2(R_{L_1}(t)) - f_2(R_{L_2}(t)) &= -R_{L_1}(t)A_{11}(t) + R_{L_1}(t)A_{12}(t)L_0(t) + L_0(t)A_{12}(t)R_{L_1}(t) \\ &\quad - R_{L_2}(t)A_{11}(t) - R_{L_2}(t)A_{12}(t)L_0(t) - L_0(t)A_{12}(t)R_{L_2}(t) \\ &= -(R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t))A_{11}(t) + (R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t))A_{12}(t)L_0(t) \\ &\quad + L_0(t)A_{12}(t)(R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t)) \\ &\quad + \varepsilon(R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t))A_{12}(t)R_{L_1}(t) + \varepsilon R_{L_2}(t)A_{12}(t)(R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t)) \\ &= (R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t))(A_{12}(t)L_0(t) - A_{11}(t) + \varepsilon A_{12}(t)R_{L_1}(t)) \\ &\quad + (L_0(t)A_{12}(t) + \varepsilon R_{L_2}(t)A_{12}(t))(R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t)). \end{aligned}$$

Y nótese que satisface:

$$\begin{aligned} f_2(R_{L_1}(t)) - f_2(R_{L_2}(t)) &\leq \|R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t)\| \|A_{12}(t)L_0(t) - A_{11}(t) + \varepsilon A_{12}(t)R_{L_1}(t)\| \\ &\quad + \|L_0(t)A_{12}(t) + \varepsilon R_{L_2}(t)A_{12}(t)\| \|R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t)\| \\ &\leq \|R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t)\| \{ \|A_{12}(t)L_0(t) - A_{11}(t) + \varepsilon A_{12}(t)R_{L_1}(t)\| \\ &\quad + \|L_0(t)A_{12}(t) + \varepsilon R_{L_2}(t)A_{12}(t)\| \} \\ &\leq K_1 \|R_{L_1}(t) - R_{L_2}(t)\|. \end{aligned}$$

Usando el Lema 5.2.2 existe $\varepsilon_2^* > 0$ tal que $\varepsilon < \varepsilon_2^*$

$$SR_{L_1}(t) - SR_{L_2}(t) = \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) (f_2(R_{L_1}(\tau)) - f_2(R_{L_2}(\tau))) d\tau$$

Del Problema 5.2 (ver Apéndice B) se sabe que se satisface $\|\phi(t, \tau)\| \leq \bar{k}_1 \left(1 + \frac{2\Gamma}{(1-\Gamma)e^2}\right) e^{-\alpha_2(t-\tau)/\varepsilon}$, para $0 < \Gamma < 1$ y $0 < \alpha_2 < \alpha_1$ y del Lema 2.2 $\|\exp A(t)\theta\| \leq K_1 e^{-\alpha_1\theta}$ para $\theta > 0$ y $t \in J$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|SR_{L_1}(t) - SR_{L_2}(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|\phi(t, \tau)\| \|f_2(R_{L_1}(\tau)) - f_2(R_{L_2}(\tau))\| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \bar{k}_1 \left(1 + \frac{2\Gamma}{(1-\Gamma)e^2}\right) e^{-\alpha_2(t-\tau)/\varepsilon} K_1 \|R_{L_1} - R_{L_2}\| d\tau \\ &\leq KK_1 \int_{t_0}^t e^{-\alpha_2(t-\tau)/\varepsilon} \|R_{L_1} - R_{L_2}\| d\tau \\ &\leq \varepsilon \frac{KK_1}{\Gamma} \|R_{L_1} - R_{L_2}\|, \end{aligned}$$

esto implica:

$$\|SR_{L_1}(t) - SR_{L_2}(t)\| \leq \frac{1}{2} \|R_{L_1} - R_{L_2}\| \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_3^* = \frac{\Gamma}{2} KK_1.$$

Como $A_{11}(t), A_{12}(t), \dot{L}_0(t), L_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$

$$\|f_1(\tau) - \dot{L}_0(\tau)\| < K_2$$

y

$$\|f_2(R_L, \tau)\| \leq K_3\rho + \varepsilon K_4\rho^2.$$

Como:

$$\begin{aligned} SR_L(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) (-\dot{L}_0(\tau) + f_1(\tau) + \varepsilon f_2(\tau)) d\tau \\ \|SR_L(t)\| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \|\phi(t, \tau)\| \|(-\dot{L}_0(\tau) + f_1(\tau) + \varepsilon f_2(\tau))\| d\tau \end{aligned}$$

usando el Lema 5.2.2

$$\begin{aligned} \|SR_L(t)\| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K e^{-\alpha_2(t-\tau)/\varepsilon} (K_2 + \varepsilon K_3 \rho + \varepsilon^2 K_4 \rho^2) \|d\tau \\ &\leq \frac{K}{\Gamma} (K_2 + \varepsilon K_3 \rho + \varepsilon^2 K_4 \rho^2) \\ \|SR_L(t)\| &\leq \rho \left(\frac{\varepsilon K_3 K}{\Gamma} + \frac{\varepsilon^2 K_4 K}{\Gamma} + \frac{K_2 K}{\rho \Gamma} \right) \end{aligned}$$

sí

$$\begin{aligned} \varepsilon &< \frac{\Gamma}{2KK_3} \Rightarrow \frac{\varepsilon K_3 K}{\Gamma} < \frac{1}{3} \\ \varepsilon &< \frac{K_3}{2KK_4\rho} \Rightarrow \frac{\varepsilon K_4 \rho}{K_3} < \frac{1}{2} \\ \varepsilon^2 \frac{K_4 K \rho}{\Gamma} &< \frac{1}{3} \frac{K_4 \rho}{K_3} < \frac{1}{6} \end{aligned}$$

se tiene finalmente:

$$\|SR_L(t)\| \leq \rho$$

para todo $\varepsilon_5^* = \min_{1 \leq i \leq 5} \{\varepsilon_i^*\}$.

C.4.3. Solución de la Ecuación (5.11)

Se plantea una solución de la Ecuación (5.11) de la forma:

$$H(t) = \sum_{j=0}^{M-1} \varepsilon^j H_j(t) + \varepsilon^M R_H(t), \quad (\text{C.6})$$

para $M \leq N$. Sustituyendo la Ecuación (C.6) en la Ecuación (5.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} -\varepsilon \left(\sum_{j=0}^{M-1} \varepsilon^j \dot{H}_j(t) + \varepsilon^M \dot{R}_H(t) \right) &= \sum_{j=0}^{M-1} \varepsilon^j H_j(t) A_{22}(t) + \sum_{j=0}^{M-1} \varepsilon^{j+1} H_j(t) L(t) A_{12}(t) \\ &- \sum_{j=0}^{M-1} \varepsilon^{j+1} A_{11}(t) H_j(t) + \sum_{j=0}^{M-1} \varepsilon^{j+1} A_{12}(t) L(t) H_j(t) \\ &+ \varepsilon^M R_H(t) A_{22}(t) + \varepsilon^{M+1} R_H(t) L(t) A_{12}(t) - \varepsilon^{M+1} A_{11}(t) R_H(t) \\ &+ \varepsilon^{M+1} A_{12}(t) L(t) R_H(t) - A_{12}(t). \end{aligned}$$

Igualando los términos que están multiplicados por la misma potencia de ε^j , se tiene para ε^0 la ecuación:

Para ε^0

$$H_0(t) A_{22}(t) - A_{12}(t) = 0 \Rightarrow H_0(t) = A_{12}(t) A_{22}^{-1}(t).$$

Para ε^1 y $N = 1$

$$-\dot{H}_0(t) = H_1(t) A_{22}(t) + H_0(t) L_0(t) A_{12}(t) - A_{11}(t) H_0(t) + A_{12}(t) L_0(t) H_0(t).$$

Para ε^M

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \dot{R}_H(t) &= R_H(t)A_{22}(t) + \dot{H}_{M-1}(t) + H_{M-1}(t) \left(\sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j L_j(t) + \varepsilon^N R_L(t) \right) A_{12}(t) \\
&+ \varepsilon R_H(t) \left(\sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j L_j(t) + \varepsilon^N R_L(t) \right) A_{12}(t) - A_{11}(t)H_{M-1}(t) - \varepsilon A_{11}(t)R_H(t) \\
&+ A_{12}(t) \left(\sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j L_j(t) + \varepsilon^N R_L(t) \right) H_{M-1}(t) + \varepsilon A_{12}(t) \left(\sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j L_j(t) + \varepsilon^N R_L(t) \right) R_L(t).
\end{aligned}$$

Si $N = M = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \dot{R}_H(t) &= R_H(t)A_{22}(t) + \dot{H}_0(t) + (H_0(t)L_0(t)A_{12}(t) - A_{11}(t)H_0(t) + A_{12}(t)L_0(t)H_0(t)) \\
&+ \varepsilon \{H_0(t)R_L(t)A_{12}(t) + R_H(t)L_0(t)A_{12}(t) + \varepsilon R_H(t)R_L(t)A_{12}(t) - A_{11}(t)R_H(t) \\
&+ A_{12}(t)R_L(t)H_0(t) + A_{12}(t)L_0(t)R_H(t) + \varepsilon A_{12}(t)R_L(t)R_H(t)\}, \\
-\varepsilon \dot{R}_H(t) &= R_H(t)A_{22}(t) + \dot{H}_0(t) + g_1 + \varepsilon g_2,
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
g_1 &= H_0(t)L_0(t)A_{12}(t) - (A_{11}(t) - A_{12}(t)L_0(t))H_0(t), \\
g_2 &= H_0(t)R_L(t)A_{12}(t) + R_H(t)L_0(t)A_{12}(t) + \varepsilon R_H(t)R_L(t)A_{12}(t) - A_{11}(t)R_H(t) \\
&+ A_{12}(t)R_L(t)H_0(t) + A_{12}(t)L_0(t)R_H(t) + \varepsilon A_{12}(t)R_L(t)R_H(t).
\end{aligned}$$

Considérese:

$$-\varepsilon \dot{R}_H(t) = R_H(t)A_{22}(t) + \dot{H}_0(t) + g_1 + \varepsilon g_2$$

Esta ecuación se puede escribir como sigue:

$$\dot{R}_H^T(t) = -\frac{1}{\varepsilon} A_{22}^T(t) R_H^T(t) - \frac{1}{\varepsilon} (\dot{H}_0(t) + g_1 + \varepsilon g_2)^T.$$

C.4.4. Contracción del Mapeo $TR_H(t)$

Sea: $R_H(t) = TR_H(t)$ es decir :

$$TR_H^T(t) = -\frac{1}{\varepsilon} A_{22}^T(t) TR_H^T(t) - \frac{1}{\varepsilon} (\dot{H}_0(t) + g_1 + \varepsilon g_2)^T.$$

Se sabe que $\phi(t, t_0)$ es la matriz de trasiición de la ecuación:

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(t) z(t).$$

Donde:

$$z(t) = \phi(t, t_0) z(t_0) \quad \text{y} \quad \dot{\phi}(t, t_0) = \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(t) \phi(t, t_0).$$

Obsérvese:

$$\begin{aligned}
I &= \phi(t, t_0) \dot{\phi}(t_0, t) \\
\Rightarrow 0 &= \phi(t, t_0) \dot{\phi}(t_0, t) + \dot{\phi}(t, t_0) \phi(t_0, t) \\
\Rightarrow \dot{\phi}(t_0, t) &= \phi(t_0, t) \dot{\phi}(t, t_0) \phi(t_0, t),
\end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{\phi}(t_0, t) = -\frac{1}{\varepsilon} \phi(t_0, t) A_{22}(t),$$

donde las propiedades de $\phi(t_0, t)$ son:

$$\begin{aligned} z(t) &= \phi(t, t_f)z(t_f) \\ \dot{\phi}^T(t_0, t) &= -\frac{1}{\varepsilon}A_{22}^T(t)\phi^T(t_0, t). \end{aligned}$$

De ésta última expresión se toma la matriz de transición $\phi(t_0, t)$ para definir:

$$TR_H^T(t) = \phi^T(t_0, t)M(t)$$

con $M(t_f) = 0$ y $\phi(t, t) = I$, utilizando el método de variación de parámetros:

$$\begin{aligned} TR_H^T(t) &= \dot{\phi}^T(t_0, t)M(t) + \phi^T(t_0, t)\dot{M}(t) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}A_{22}^T(t)\phi^T(t_0, t)M(t) + \phi^T(t_0, t)\dot{M}(t) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}A_{22}^T(t)TR_H^T(t) + \phi^T(t_0, t)\dot{M}(t) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}A_{22}^T(t)TR_H^T(t) - \frac{1}{\varepsilon}\left(\dot{H}_0 + g_1 + \varepsilon g_2\right)^T, \end{aligned}$$

esto lleva a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \phi^T(t_0, t)\dot{M}(t) &= -\frac{1}{\varepsilon}\left(\dot{H}_0 + g_1 + \varepsilon g_2\right)^T, \\ \dot{M}(t) &= -\frac{1}{\varepsilon}\phi^T(t, t_0)\left(\dot{H}_0 + g_1 + \varepsilon g_2\right)^T. \end{aligned}$$

Integrando a ambos lados desde t_f a t se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_f}^t \dot{M}(t)dt &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_f}^t \phi^T(\tau, t_0)\left(\dot{H}_0 + g_1 + \varepsilon g_2\right)^T d\tau, \\ M(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t_f} \phi^T(\tau, t_0)\left(\dot{H}_0 + g_1 + \varepsilon g_2\right)^T d\tau. \end{aligned}$$

Multiplicando la última expresión por $\phi^T(t_0, t)$ y recordando la definición de $TR_H^T(t)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi^T(t_0, t)M(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t_f} \phi^T(t_0, t)\phi^T(\tau, t_0)\left(\dot{H}_0 + g_1 + \varepsilon g_2\right)^T d\tau, \\ TR_H^T(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t_f} [\phi(\tau, t_0)\phi(t_0, t)]^T\left(\dot{H}_0 + g_1 + \varepsilon g_2\right)^T d\tau, \\ TR_H^T(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t_f} \phi^T(\tau, t)\left(\dot{H}_0 + g_1 + \varepsilon g_2\right)^T d\tau, \\ TR_H(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t_f} \left(\dot{H}_0 + g_1 + \varepsilon g_2\right)\phi(\tau, t)d\tau. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{H} = \{R_H(t) \mid \|R_H(t)\| \leq \rho_1\}$, donde $\|R_H(t)\| = \sup \|R_H(t)\|$, calculando:

$$\|\dot{H}_0 + g_1 + \varepsilon g_2\| \leq K_6 + \varepsilon K_5 \|R_H(t)\| \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_6^*.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \|TR_H(t)\| &\leq \int_t^{t_f} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t_f} (K_6 + \varepsilon K_5 \|R_H(t)\|) K e^{-\sigma(\tau-t)/\varepsilon} d\tau \\ \|TR_H(t)\| &\leq \frac{K}{\varepsilon} (K_6 + \varepsilon K_5 \|R_H(t)\|) (1 - e^{-\sigma(t_f-t)/\varepsilon}) \\ \|TR_H(t)\| &\leq \frac{K}{\sigma} (K_6 + \varepsilon K_5 \rho_1) \\ \|TR_H(t)\| &\leq \rho_1 \left(\frac{KK_6}{\rho_1 \sigma} + \frac{\varepsilon KK_5}{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Si $\rho_1 = \frac{2KK_6}{\sigma}$ y $\varepsilon < \varepsilon_8^* = \frac{\sigma}{2KK_5}$ se obtiene:

$$\|TR_H(t)\| \leq \rho_1$$

Por otro lado:

$$TR_{H_1}(t) - TR_{H_2}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t_f} \varepsilon (g_2(R_{H_1}, \tau) - g_2(R_{H_2}, \tau)) d\tau$$

ya que \dot{H} y g_1 son independientes de R_H . Obsérvese que el término $g_2(R_{H_1}, \tau) - g_2(R_{H_2}, \tau)$, para simplificar el análisis omite la dependencia del tiempo.

$$\begin{aligned} g_2(R_{H_1}) &= R_{H_1}L_0A_{12} + H_0R_LA_{12} - A_{11}R_{H_1} + A_{12}R_LR_{H_1} \\ &\quad + \varepsilon R_{H_1}R_LA_{12} + \varepsilon A_{12}R_LR_{H_1}, \\ g_2(R_{H_2}) &= R_{H_2}L_0A_{12} + H_0R_LA_{12} - A_{11}R_{H_2} + A_{12}R_LR_{H_2} \\ &\quad + \varepsilon R_{H_2}R_LA_{12} + \varepsilon A_{12}R_LR_{H_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(R_{H_1}) - g_2(R_{H_2}) &= (R_{H_1} - R_{H_2}) [L_0A_{11} + \varepsilon R_LA_{12}] \\ &\quad + [A_{12}L_0 - A_{11} + \varepsilon A_{12}R_L] (R_{H_1} - R_{H_2}), \\ \|g_2(R_{H_1}) - g_2(R_{H_2})\| &\leq \|R_{H_1} - R_{H_2}\| [\|L_0A_{11} + \varepsilon R_LA_{12}\| + \|A_{12}L_0 - A_{11} + \varepsilon A_{12}R_L\|], \\ \|g_2(R_{H_1}) - g_2(R_{H_2})\| &\leq K_7 \|R_{H_1} - R_{H_2}\|. \end{aligned}$$

Se usa esta última desigualdad y aplicando el resultado del Lema 5.2.1

$$\begin{aligned} \|TR_{H_1}(t) - TR_{H_2}(t)\| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t_f} \varepsilon K_7 \|R_{H_1} - R_{H_2}\| K e^{-\sigma(\tau-t)/\varepsilon} d\tau, \\ \|TR_{H_1}(t) - TR_{H_2}(t)\| &\leq \frac{\varepsilon K K_7}{\sigma} \|R_{H_1} - R_{H_2}\|, \\ \|TR_{H_1}(t) - TR_{H_2}(t)\| &\leq \frac{1}{2} \|R_{H_1} - R_{H_2}\|. \end{aligned}$$

La última expresión se satisface para $\varepsilon < \varepsilon_9^* = \frac{\sigma}{2KK_7}$, así para $\varepsilon < \varepsilon_* = \min_{5 \leq i \leq 9} \varepsilon_i^*$ el mapeo $TR_H(t)$ es un mapeo de contracción y la ecuación integral $R_H(t) = TR_H(t)$ tiene una única solución para $\|R_H(t)\| \leq \rho_1$.

Los resultados obtenidos en las Subsecciones C.4.2 y C.4.4 muestran que la transformación definida en la Ecuación (5.12) desacopla el Sistema (5.15) de forma correcta, es decir, las dinámicas de los subsistemas ya desacoplados son: para el subsistema lento (5.16) y para el subsistema rápido (5.18)

C.5. Demostración Corolario 5.2.1

Sustituyendo:

$$L(t) = W(t)\hat{L}(t)$$

y

$$H(t) = \hat{H}(t)W^{-1}(t)$$

en las Ecuaciones (5.10) y (5.11) respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{d}{dt} L(t) &= A_{22}(t)L(t) - A_{21}(t) - \varepsilon L(t) [A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t)] \\
\varepsilon \frac{d}{dt} \left(W(t)\hat{L}(t) \right) &= A_{22}(t)W(t)\hat{L}(t) - A_{21}(t) - \varepsilon W(t)\hat{L}(t) \left[A_{11}(t) - A_{12}(t)W(t)\hat{L}(t) \right], \\
\varepsilon \dot{\hat{L}}(t) &= D(t)\hat{L}(t) - W^{-1}(t)A_{21}(t) - \varepsilon W^{-1}(t)\dot{W}(t)\hat{L}(t) \\
&\quad - \varepsilon \hat{L}(t) \left[A_{11}(t) - A_{12}(t)W(t)\hat{L}(t) \right].
\end{aligned} \tag{C.7}$$

y

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \frac{d}{dt} H(t) &= H(t)A_{22}(t) - A_{12}(t) + \varepsilon H(t)L(t)A_{12}(t) \\
&\quad - \varepsilon [A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t)] H(t) \\
-\varepsilon \frac{d}{dt} \left(\hat{H}(t)W^{-1}(t) \right) &= \hat{H}(t)W^{-1}(t)A_{22}(t) - A_{12}(t) + \varepsilon \hat{H}(t)W^{-1}(t)W(t)\hat{L}(t)A_{12}(t) \\
&\quad - \varepsilon [A_{11}(t) - A_{12}(t)W(t)\hat{L}(t)] \hat{H}(t)W^{-1}(t) \\
-\varepsilon \dot{\hat{H}}(t)W^{-1}(t) &= \varepsilon \hat{H}(t)\dot{W}^{-1}(t)\hat{H}(t)W^{-1}(t)A_{22}(t) - A_{12}(t) \\
&\quad + \varepsilon \hat{H}(t)W^{-1}(t)W(t)\hat{L}(t)A_{12}(t) \\
&\quad - \varepsilon [A_{11}(t) - A_{12}(t)W(t)\hat{L}(t)] \hat{H}(t)W^{-1}(t) \\
-\varepsilon \dot{\hat{H}}(t) &= \left(\varepsilon \hat{H}(t)\dot{W}^{-1}(t) + \hat{H}(t)W^{-1}(t)A_{22}(t) - A_{12}(t) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \hat{H}(t)W^{-1}(t)W(t)\hat{L}(t)A_{12}(t) \right) W(t) \\
&\quad - \left(\varepsilon [A_{11}(t) - A_{12}(t)W(t)\hat{L}(t)] \hat{H}(t)W^{-1}(t) \right) W(t) \\
-\varepsilon \dot{\hat{H}}(t) &= \varepsilon \hat{H}(t)\dot{W}^{-1}(t)W(t) + \hat{H}(t)D(t) - A_{12}(t)W(t) \\
&\quad + \varepsilon \hat{H}(t)W^{-1}(t)W(t)\hat{L}(t)A_{12}(t)W(t) \\
&\quad - \varepsilon [A_{11}(t) - A_{12}(t)W(t)\hat{L}(t)] \hat{H}(t) \\
-\varepsilon \dot{\hat{H}}(t) &= \hat{H}(t)D(t) - A_{12}(t)W(t) - \varepsilon \hat{H}(t)W^{-1}(t)\dot{W}(t) \\
&\quad + \varepsilon \hat{H}(t)W^{-1}(t)W(t)\hat{L}(t)A_{12}(t)W(t) \\
&\quad - \varepsilon [A_{11}(t) - A_{12}(t)W(t)\hat{L}(t)] \hat{H}(t).
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Seguindo los pasos de la Subsección C.4.1, se propone una solución para la Ecuación (C.7):

$$\hat{L}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j \hat{L}_j(t) + \varepsilon^N W^{-1}(t)R_L(t), \tag{C.9}$$

sustituyendo la Ecuación (C.9) en la Ecuación (C.7), para simplificar se tomará $N = 1$, como en el caso anterior y se omitirá la dependencia del tiempo. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left[\dot{\hat{L}}_0 + \varepsilon \dot{W}^{-1}R_L + \varepsilon W^{-1}\dot{R}_L \right] &= D\hat{L}_0 + \varepsilon DW^{-1}R_L - W^{-1}A_{21} - \varepsilon W^{-1}\dot{W}\hat{L}_0 - \varepsilon^2 W^{-1}\dot{W}W^{-1}R_L \\
&\quad - \varepsilon \left(\hat{L}_0 + \varepsilon W^{-1}R_L \right) \left(A_{11} - A_{12}W \left(\hat{L}_0 + \varepsilon W^{-1}R_L \right) \right) \\
&= D\hat{L}_0 + \varepsilon DW^{-1}R_L - W^{-1}A_{21} - \varepsilon W^{-1}\dot{W}\hat{L}_0 - \varepsilon^2 W^{-1}\dot{W}W^{-1}R_L \\
&\quad - \varepsilon \left(\hat{L}_0 + \varepsilon W^{-1}R_L \right) \left(A_{11} - A_{12}W\hat{L}_0 - \varepsilon A_{12}R_L \right).
\end{aligned}$$

Como en el caso anterior se desea encontrar una ecuación para $\dot{\hat{R}}_L(t)$ entonces sólo se

toman los términos que tengan una potencia de ε como en el caso anterior

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left[\dot{\hat{L}}_0 + \varepsilon \dot{W}^{-1} R_L + \varepsilon W^{-1} \dot{R}_L \right] &= \varepsilon D W^{-1} R_L - W^{-1} A_{21} - \varepsilon W^{-1} \dot{W} \hat{L}_0 - \varepsilon^2 W^{-1} \dot{W} W^{-1} R_L \\
&- \varepsilon \left(\hat{L}_0 A_{11} - \hat{L}_0 A_{12} W \hat{L}_0 - \varepsilon \hat{L}_0 A_{12} R_L + \varepsilon W^{-1} R_L A_{11} - \varepsilon W^{-1} R_L A_{12} W \hat{L}_0 \right. \\
&- \left. \varepsilon^2 W^{-1} R_L A_{12} R_L \right) \\
\varepsilon W^{-1} \dot{R}_L &= D W^{-1} R_L - \dot{\hat{L}}_0 + \left(-W^{-1} \dot{W} \hat{L}_0 - \hat{L}_0 A_{11} + \hat{L}_0 A_{12} W \hat{L}_0 \right) \\
&+ \varepsilon \left[\hat{L}_0 A_{12} R_L - W^{-1} R_L A_{11} + W^{-1} R_L A_{12} W \hat{L}_0 + \varepsilon W^{-1} R_L A_{12} R_L \right] \\
\varepsilon \dot{R}_L &= W D W^{-1} R_L - W \dot{\hat{L}}_0 - \dot{W} \hat{L}_0 + \left(-W \hat{L}_0 A_{11} + W \hat{L}_0 A_{12} W \hat{L}_0 \right) \\
&+ \varepsilon \left[W \hat{L}_0 A_{12} R_L - R_L A_{11} + R_L A_{12} W \hat{L}_0 + \varepsilon R_L A_{12} R_L \right] \\
\varepsilon \dot{R}_L &= A_{22} R_L - \dot{L}_0 - W \hat{L}_0 \left(A_{11} - A_{12} W \hat{L}_0 \right) \\
&+ \varepsilon \left[W \hat{L}_0 A_{12} R_L - R_L A_{11} + R_L A_{12} W \hat{L}_0 + \varepsilon R_L A_{12} R_L \right] \\
\varepsilon \dot{R}_L &= A_{22} R_L - \dot{L}_0 - L_0 \left(A_{11} - A_{12} L_0 \right) \\
&+ \varepsilon \left[-R_L A_{11} + L_0 A_{12} R_L + R_L A_{12} L_0 + \varepsilon R_L A_{12} R_L \right],
\end{aligned}$$

si define:

$$\begin{aligned}
f_1 &= -L_0 \left(A_{11} - A_{12} L_0 \right), \\
f_2 &= -R_L A_{11} + L_0 A_{12} R_L + R_L A_{12} L_0 + \varepsilon R_L A_{12} R_L,
\end{aligned}$$

se observa que:

$$\varepsilon \dot{R}_L = A_{22} R_L - \dot{L}_0 + f_1 + \varepsilon f_2$$

y esta ecuación es idéntica a la encontrada en la Subsección 5.2.3 así que se procederá de forma similar. Para este caso se sabe que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \dot{z}(t) &= A_{22}(t) z(t) \\
&= W(t) D(t) W^{-1}(t) z(t) \\
\varepsilon W^{-1}(t) \dot{\phi}(t, t_0) &= D(t) W^{-1}(t) \phi(t, t_0) \\
\varepsilon W^{-1}(t) \dot{\phi}(t, t_0) W(t) &= D(t) \left(W^{-1}(t) \phi(t, t_0) W(t) \right).
\end{aligned}$$

Es decir $\phi(t, t_0)$ satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1(t, t_0) & 0 \\ 0 & \dot{\phi}_2(t, t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_1(t) & 0 \\ 0 & D_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(t, t_0) & 0 \\ 0 & \phi_2(t, t_0) \end{bmatrix}, \\
\varepsilon \dot{\phi}_1(t, t_0) &= D_1(t) \phi_1(t, t_0), \\
\varepsilon \dot{\phi}_2(t, t_0) &= D_2(t) \phi_2(t, t_0).
\end{aligned}$$

Se hace el cambio de variable $R_L(t) = S R_L(t)$ y se plantea la ecuación integral:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \dot{S} R_L(t) &= A_{22}(t) S R_L(t) - \dot{L}_0(t) + f_1 + \varepsilon f_2, \\
\varepsilon W^{-1}(t) \dot{S} R_L(t) W(t) &= D(t) \left(W^{-1}(t) S R_L(t) W(t) \right) + W^{-1} \left(-\dot{L}_0(t) + f_1 + \varepsilon f_2 \right) W(t), \\
\varepsilon \dot{S} \hat{R}_L(t) &= D(t) S \hat{R}_L(t) + W^{-1} \left(-\dot{L}_0(t) + f_1 + \varepsilon f_2 \right) W(t).
\end{aligned}$$

Se propone la solución de la última ecuación como:

$$S \hat{R}_L(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t, t_0) & 0 \\ 0 & \phi_2(t, t_0) \end{bmatrix} M(t).$$

Aplicando el método de variación de parámetros se tiene que:

$$\begin{aligned}
S\hat{R}_L(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1(t, t_0) & 0 \\ 0 & \dot{\phi}_2(t, t_0) \end{bmatrix} M(t) + \begin{bmatrix} \phi_1(t, t_0) & 0 \\ 0 & \phi_2(t, t_0) \end{bmatrix} \dot{M}(t) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} D_1(t) & 0 \\ 0 & D_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(t, t_0) & 0 \\ 0 & \phi_2(t, t_0) \end{bmatrix} M(t) + \begin{bmatrix} \phi_1(t, t_0) & 0 \\ 0 & \phi_2(t, t_0) \end{bmatrix} \dot{M}(t) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} D_1(t) & 0 \\ 0 & D_2(t) \end{bmatrix} S\hat{R}_L(t) + \begin{bmatrix} \phi_1(t, t_0) & 0 \\ 0 & \phi_2(t, t_0) \end{bmatrix} \dot{M}(t) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} D(t) S\hat{R}_L(t) + \frac{1}{\varepsilon} W^{-1} \left(-\dot{L}_0(t) + f_1 + \varepsilon f_2 \right) W(t).
\end{aligned}$$

Se llega a la siguiente conclusión:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t, t_0) & 0 \\ 0 & \phi_2(t, t_0) \end{bmatrix} \dot{M}(t) = \frac{1}{\varepsilon} W^{-1} \left(-\dot{L}_0(t) + f_1 + \varepsilon f_2 \right) W(t).$$

Se despeja $\dot{M}(t)$:

$$\dot{M}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \phi_1(t_0, t) & 0 \\ 0 & \phi_2(t_0, t) \end{bmatrix} W^{-1} \left(-\dot{L}_0(t) + f_1 + \varepsilon f_2 \right) W(t)$$

integrando con respecto del tiempo sobre el intervalo (t_0, t_f) se obtiene:

$$M(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \phi_1(t_0, \tau) & 0 \\ 0 & \phi_2(t_0, \tau) \end{bmatrix} W^{-1}(\tau) \left(-\dot{L}_0(\tau) + f_1 + \varepsilon f_2 \right) W(\tau) d\tau.$$

Multiplicando a ambos lados por:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t, t_0) & 0 \\ 0 & \phi_2(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

Se obtiene:

$$S\hat{R}_L(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \phi_1(t, \tau) & 0 \\ 0 & \phi_2(t, \tau) \end{bmatrix} W^{-1}(\tau) \left(-\dot{L}_0(\tau) + f_1 + \varepsilon f_2 \right) W(\tau) d\tau.$$

La demostración es igual paso a paso para $\hat{R}_H(t)$. Siguiendo las ideas utilizadas en las Subsecciones C.4.2 y C.4.4 se puede mostrar que los mapeos $\hat{R}_L(t)$ y $\hat{R}_H(t)$ son mapeos de contracción. \square

C.6. Demostración Teorema 5.2.1

De la Ecuación (5.12) se sabe que :

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = T^{-1}(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix},$$

la Ecuación (5.13) se puede escribir en forma material de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(t) + L(t)A_{12}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}.$$

Entonces las matrices de transición del subsistema lento (5.16) y del subsistema rápido (5.18) satisfacen la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \dot{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(t) + L(t)A_{12}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_s(t, s) & 0 \\ 0 & \phi_f(t, s) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

De la Ecuación (5.19) se tiene que:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(t) + L(t)A_{12}(t) \end{bmatrix} \\ &= T(t) \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ \frac{1}{\varepsilon}A_{21}(t) & \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(t) \end{bmatrix} T^{-1}(t) + \dot{T}(t)T^{-1}(t). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Sustituyendo la Ecuación (C.11) en la Ecuación (C.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \dot{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} \\ &= T(t) \left(\begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ \frac{1}{\varepsilon}A_{21}(t) & \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(t) \end{bmatrix} + T^{-1}(t)\dot{T}(t) \right) T^{-1}(t) \begin{bmatrix} \phi_s(t, s) & 0 \\ 0 & \phi_f(t, s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Multiplicando la Ecuación (C.12) por $T(t)$ por la derecha y por $T^{-1}(t)$ por la izquierda se llega a:

$$\begin{aligned} & T^{-1}(t) \begin{bmatrix} \dot{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \dot{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} T(t) \\ &= \left(\begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ \frac{1}{\varepsilon}A_{21}(t) & \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(t) \end{bmatrix} + T^{-1}(t)\dot{T}(t) \right) \left(T^{-1}(t) \begin{bmatrix} \phi_s(t, s) & 0 \\ 0 & \phi_f(t, s) \end{bmatrix} T(t) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

De aquí la matriz de transición del sistema acoplado satisface la ecuación:

$$\phi(t, s) = T^{-1}(t) \begin{bmatrix} \phi_s(t, s) & 0 \\ 0 & \phi_f(t, s) \end{bmatrix} T(t) \quad \forall t \geq s.$$

Es decir se tiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \|\phi(t, s)\| &= \|T^{-1}(t)\| \left\| \begin{bmatrix} \phi_s(t, s) & 0 \\ 0 & \phi_f(t, s) \end{bmatrix} \right\| \|T(t)\| \\ &\leq K_3 \max\{\|\phi_s(t, s)\|, \|\phi_f(t, s)\|\}. \end{aligned}$$

Como $\phi_s(t, s)$ satisface la ecuación $\dot{\xi}(t) = [A_{11}(t) - A_{12}(t)L(t)]\xi(t)$, se tiene que $\|\phi_s(t, s)\| \leq K_1 e^{-\sigma_1(t-s)}$ y usando los Lemas 5.2.2 y 5.2.3 se tiene que $\|\phi_f(t, s)\| \leq K_2 e^{-\sigma_2(t-s)/\varepsilon}$ ya que $\phi_f(t, s)$ satisface la ecuación $\varepsilon\dot{\eta}(t) = [A_{22}(t) + \varepsilon L(t)A_{12}(t)]\eta(t)$, así para ε suficientemente pequeño se tiene:

$$\|\phi(t, s)\| \leq K_3 \max[K_1, K_2] e^{-\min\{\sigma_1, \sigma_2\}(t-s)}.$$

□

C.7. Demostración Lema 5.2.4

Considérese la funcional candidata de Lyapunov $\nu(t) = \alpha_1 V(t, x(t)) + \alpha_2 W(t, x(t), z(t))$ con $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$, con:

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &= \int_t^\infty \|\phi_s(\tau, t)x(t)\| d\tau \\ W(t, x(t), z(t)) &= \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)(z(t) - L_0(t)x(t))\| d\tau \end{aligned}$$

donde $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Esta funcional es positiva definida. Aplicando el método de Lyapunov:

$$\frac{\partial \nu(t)}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t}.$$

Se desarrolla cada una de las derivadas parciales del lado derecho de la última ecuación por separado y después se calcula el resultado para $\dot{\nu}(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \|\phi_s(\tau, t)x(t)\| d\tau - \|x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T [\phi_s(\tau, t)x(t)]} d\tau - \|x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{1}{2\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|} 2[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T \frac{\partial}{\partial t} [\phi_s(\tau, t)x(t)] d\tau - \|x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{1}{2\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|} 2[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_s(\tau, t)x(t) + \phi_s(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) d\tau \\ &\quad - \|x(t)\|. \end{aligned}$$

Nótese que el término $\frac{\partial}{\partial t} \phi_s(\tau, t)$ es igual a:

$$\begin{aligned} \phi_s(t, \tau)\phi_s(\tau, t) &= I \\ \frac{\partial}{\partial t} [\phi_s(t, \tau)\phi_s(\tau, t)] &= 0 \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \phi_s(t, \tau)\phi_s(\tau, t) + \phi_s(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} \phi_s(\tau, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi_s(\tau, t) &= -\phi_s(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi_s(t, \tau)\phi_s(\tau, t) \\ &= -\phi_s(\tau, t) A_0(t)\phi_s(t, \tau)\phi_s(\tau, t) \\ &= -\phi_s(\tau, t) A_0(t) \end{aligned}$$

y

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)z(t).$$

Retomando la derivada de $V(t, x(t))$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{1}{\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|} [\phi_s(\tau, t)x(t)]^T \phi_s(\tau, t) [(A_{11}(t) - A_0(t))x(t) + A_{12}(t)z(t)] d\tau \\ &\quad - \|x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{1}{\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|} [\phi_s(\tau, t)x(t)]^T \phi_s(\tau, t) [A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) + A_{12}(t)z(t)] d\tau \\ &\quad - \|x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{1}{\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|} [\phi_s(\tau, t)x(t)]^T \phi_s(\tau, t) A_{12}(t) [L_0(t)x(t) + z(t)] d\tau - \|x(t)\| \\ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} &\leq \int_t^\infty \frac{1}{\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|} \|\phi_s(\tau, t)x(t)\| \|\phi_s(\tau, t)\| \|A_{12}(t)\| \| [L_0(t)x(t) + z(t)] \| d\tau \\ &\quad - \|x(t)\| \\ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} &\leq \int_t^\infty K_s M_1 e^{-\sigma_s(\tau-s)} d\tau \|L_0(t)x(t) + z(t)\| \\ &\quad - \|x(t)\| \\ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} &\leq \frac{M_1 K_s}{\sigma_s} \|L_0(t)x(t) + z(t)\| - \|x(t)\|. \end{aligned}$$

Obsérvese que $\frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t}$ es igual a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\| d\tau \\
&\quad - \|z(t) + L_0(t)x(t)\| \\
&= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T [\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]} d\tau \\
&\quad - \|z(t) + L_0(t)x(t)\| \\
&= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\|} \frac{\partial}{\partial t} [\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))] d\tau \\
&\quad - \|z(t) + L_0(t)x(t)\| \\
&= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\|} \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t)) + \phi_f(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} (z(t) + L_0(t)x(t)) \right] d\tau \\
&\quad - \|z(t) + L_0(t)x(t)\|.
\end{aligned}$$

Analizando los términos por separado:

$$\begin{aligned}
\phi_f(t, \tau) \phi_f(\tau, t) &= I, \\
\frac{\partial}{\partial t} [\phi_f(t, \tau) \phi_f(\tau, t)] &= 0, \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} \phi_f(t, \tau) \phi_f(\tau, t) + \phi_f(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} \phi_f(\tau, t), \\
\frac{\partial}{\partial t} \phi_f(\tau, t) &= -\phi_f(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi_f(t, \tau) \phi_f(\tau, t), \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} \phi_f(\tau, t) A_{22}(t) \phi_f(t, \tau) \phi_f(\tau, t), \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} \phi_f(\tau, t) A_{22}(t),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)z(t), \\
\varepsilon \dot{z}(t) &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)z(t).
\end{aligned}$$

Se sabe que $L_0(t) = A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$ y sustituyendo se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\|} [\phi_f(\tau, t) (-\frac{1}{\varepsilon} A_{22}(t)z(t) - \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(t)L_0(t)x(t))] d\tau \\
&\quad + \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\|} [\phi_f(\tau, t) (\frac{\partial}{\partial t} z(t) + \frac{\partial}{\partial t} L_0(t)x(t) + L_0(t) \frac{\partial}{\partial t} x(t))] d\tau \\
&\quad - \|z(t) + L_0(t)x(t)\| \\
\frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\|} [\phi_f(\tau, t) (-\frac{1}{\varepsilon} A_{22}(t)z(t) - \frac{1}{\varepsilon} A_{21}(t)x(t))] d\tau \\
&\quad + \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\|} \phi_f(\tau, t) \left[\frac{1}{\varepsilon} A_{21}(t)x(t) + \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(t)z(t) + \dot{L}_0(t)x(t) \right. \\
&\quad \left. + L_0(t)A_{11}(t)x(t) + L_0(t)A_{12}(t)z(t) \right] d\tau - \|z(t) + L_0(t)x(t)\| \\
&= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\|} \phi_f(\tau, t) \left[(\dot{L}_0(t) + L_0(t)A_{11}(t)) x(t) + L_0(t)A_{12}(t)z(t) \right] d\tau \\
&\quad - \|z(t) + L_0(t)x(t)\| \\
&= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\|} \phi_f(\tau, t) \left[(\dot{L}_0(t) + L_0(t)A_{11}(t) - L_0(t)A_{12}(t)L_0(t)) x(t) \right. \\
&\quad \left. + L_0(t)A_{12}(t)L_0(t)x(t) + L_0(t)A_{12}(t)z(t) \right] d\tau - \|z(t) + L_0(t)x(t)\| \\
&= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\|} \phi_f(\tau, t) \left[(\dot{L}_0(t) + L_0(t) (A_{11}(t) - A_{12}(t)L_0(t))) x(t) \right. \\
&\quad \left. + L_0(t)A_{12}(t) (L_0(t)x(t) + z(t)) \right] d\tau - \|z(t) + L_0(t)x(t)\| \\
&= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t) (z(t) + L_0(t)x(t))\|} \phi_f(\tau, t) \left[(\dot{L}_0(t) + L_0(t)A_0(t)) x(t) \right. \\
&\quad \left. + L_0(t)A_{12}(t) (L_0(t)x(t) + z(t)) \right] d\tau - \|z(t) + L_0(t)x(t)\|.
\end{aligned}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} &\leq \int_t^\infty \left\| \frac{\phi_f(\tau, t)(z(t) + L_0(t)x(t))}{\phi_f(\tau, t)(z(t) + L_0(t)x(t))} \right\| \|\phi_f(\tau, t)\| \|\dot{L}_0(t) + L_0(t)A_0(t)\| \|x(t)\| \\
&+ \|L_0(t)A_{12}(t)\| \|L_0(t)x(t) + z(t)\| d\tau - \|z(t) + L_0(t)x(t)\| \\
&\leq \int_t^\infty K_f e^{-\sigma_f(\tau-t)/\varepsilon} d\tau [M_3 \|x(t)\| + M_2 \|z(t) + L_0(t)x(t)\|] \\
&\quad - \|z(t) + L_0(t)x(t)\| \\
&\leq \varepsilon \frac{K_f M_3}{\sigma_f} \|x(t)\| - \left(1 - \varepsilon \frac{K_f M_2}{\sigma_f}\right) \|z(t) + L_0(t)x(t)\|.
\end{aligned}$$

Finalmente se pueden concluir las condiciones para la funcional definida $\nu(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nu(t)}{\partial t} &= \alpha_1 \dot{V}(t, x(t)) + \alpha_2 \dot{W}(t, x(t), z(t)) \\
&\leq -\left(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{K_f M_3}{\sigma_f}\right) \|x(t)\| - \left(\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{K_f M_2}{\sigma_f}\right) - \alpha_1 \frac{M_1 K_s}{\sigma_s}\right) \|z(t) + L_0(t)x(t)\|.
\end{aligned}$$

Esta derivada será definida negativa si los términos en los paréntesis son positivos, es decir:

$$\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{K_f M_3}{\sigma_f} > 0,$$

y

$$\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{K_f M_2}{\sigma_f}\right) - \alpha_1 \frac{M_1 K_s}{\sigma_s} > 0.$$

lo que lleva a que se satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\varepsilon \frac{K_f M_3}{\sigma_f} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\sigma_f - \varepsilon K_f M_2}{M_1 K_s \sigma_s} \sigma_s,$$

la cual se cumple para ε^* con el siguiente valor:

$$\varepsilon < \frac{\frac{\sigma_s}{M_1 K_s}}{\frac{K_f M_3}{\sigma_f} + \frac{K_f M_2 \sigma_s}{M_1 K_s \sigma_s}} = \varepsilon^*.$$

Es decir:

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma_s \sigma_f}{K_s K_f M_1 M_3 + \sigma_s K_f M_2}.$$

□

Apéndice D

Demostraciones Capítulo 6

D.1. Demostración del Teorema 6.1.1

De (6.19) y (6.20), la matriz de transición del sistema desacoplado satisface:

$$\hat{\phi}(t, s) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

$$\dot{\hat{\phi}}(t, s) = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}L(t) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(\varepsilon, t) + L(t)A_{12} \end{bmatrix} \hat{\phi}(t, s). \quad (\text{D.2})$$

Usando los resultados de [68], la matriz de transición $\phi(t, s)$ de (6.15), la matriz de transición de (D.1) y $M(t)$ definida en (6.17), satisfacen la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \phi(t, s) &= M^{-1}(t)\hat{\phi}(t, s)M(s), \\ \phi(t, s) &= M^{-1}(t) \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} M(s) \quad \forall t \geq s, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

dado que la matriz de transición $\hat{\phi}_s(t, s)$ satisface $\dot{\hat{\phi}}_s(t, s) = [A_{11} - A_{12}L(t)]\hat{\phi}_s(t, s)$ y la matriz de transición $\hat{\phi}_f(t, s)$ satisface $\dot{\hat{\phi}}_f(t, s) = [A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)A_{12}(t)]\hat{\phi}_f(t, s)$. De las propiedades (6.23), se obtiene: $\|\hat{\phi}_s(t, s)\| \leq K_1 e^{-\beta(t-s)}$.

Usando los Lemas 2.2 y 2.3 del Capítulo 5 en [38], se obtiene que:

$$\|\hat{\phi}_f(t, s)\| \leq e^{-(b_1 + \varepsilon(L_{0,a} - \bar{a}_n + 1 - \beta + 1/\tau))(t-s)/\varepsilon}.$$

Así, para un valor lo suficientemente pequeño de ε , Se obtiene de (D.3):

$$\begin{aligned} \|\phi(t, s)\| &= \|M^{-1}(t)\| \left\| \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} \right\| \|M(s)\| \\ &\leq K_3 \max \left[\|\hat{\phi}_s(t, s)\|, \|\hat{\phi}_f(t, s)\| \right] \end{aligned}$$

lo cual implica que:

$$\|\phi(t, s)\| \leq K_3 \max[K_1, K_2] e^{-\min\{\beta, b_1 + L_{0,a} - \bar{a}_n + 1 + \ell\}(t-s)}.$$

□

D.2. Demostración del Lema 6.1.1

Considérese la siguiente funcional candidata de Lyapunov, $\nu(t) = \alpha_1 V(t, x(t)) + \alpha_2 W(t, x(t), z(t))$, donde $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$,

$$V(t, x(t)) = \int_t^\infty \|\phi_s(\tau, t)x(t)\|_2 d\tau,$$

y

$$W(t, x(t), z(t)) = \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)(z(t) - \bar{L}_0 x(t))\|_2 d\tau.$$

Se calcula $\partial\nu(t)/\partial t$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\nu(t)}{\partial t} &= \alpha_1 \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t}, \\ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T [\phi_s(\tau, t)x(t)]} d\tau - \|x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{1}{2\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|} 2[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_s(\tau, t)x(t) \right. \\ &\quad \left. + \phi_s(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) d\tau - \|x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T}{\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|} \phi_s(\tau, t) A_{12} [\bar{L}_0 x(t) + z(t)] d\tau \\ &\quad - \|x(t)\| \\ &\leq \int_t^\infty \|\phi_s(\tau, t)\| \|A_{12}\| \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\| d\tau \\ &\quad - \|x(t)\| \\ &\leq \int_t^\infty K \bar{M}_1 e^{-\beta(\tau-s)} d\tau \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\| \\ &\quad - \|x(t)\| \\ &\leq \frac{\bar{M}_1 K}{\beta} \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\| - \|x(t)\|, \\ \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\| d\tau \\ &\quad - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|} \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi_f(\tau, t)(z(t) \right. \\ &\quad \left. + \bar{L}_0 x(t)) + \phi_f(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} (z(t) + \bar{L}_0 x(t)) \right] d\tau \\ &\quad - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|} [\phi_f(\tau, t) \\ &\quad (-\frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t)z(t) - \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t)\bar{L}_0 x(t))] d\tau \\ &\quad + \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|} [\phi_f(\tau, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} z(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_0 x(t) + \bar{L}_0 \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right)] d\tau - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|} \left\{ \phi_f(\tau, t) \left[\frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{L}_0 A_0(t) \right] x(t) + \bar{L}_0 A_{12}(t) [z(t) + \bar{L}_0 x(t)] \right\} d\tau \\ &\quad - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \\ &\leq \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)\| \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_0 + \bar{L}_0 A_0(t) \right\| \|x(t)\| \right. \\ &\quad \left. + \|\bar{L}_0 A_{12}(t)\| \|L_0 x(t) + z(t)\| \right\} d\tau \\ &\quad - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \\ &\leq \varepsilon \frac{\bar{M}_3}{b_1} \|x(t)\| \\ &\quad - \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{M}_2}{b_1} \right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nu(t)}{\partial t} &= \alpha_1 \dot{V}(t, x(t)) + \alpha_2 \dot{W}(t, x(t), z(t)) \\
&\leq -\left(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{\bar{M}_3}{b_1}\right) \|x(t)\| \\
&\quad - \left(\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{M}_2}{b_1}\right) - \alpha_1 \frac{\bar{M}_1 K}{\sigma_s}\right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|.
\end{aligned}$$

Se obtiene que $\dot{\nu}(t)$ será negativa definida si α_1 y α_2 son tal que:

$$\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{\bar{M}_3}{b_1} > 0$$

y

$$\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{M}_2}{b_1}\right) - \alpha_1 \frac{\bar{M}_1 K}{\beta} > 0.$$

Esto es posible si:

$$\varepsilon \frac{\bar{M}_3}{b_1} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{b_1 - \varepsilon \bar{M}_2}{\bar{M}_1 K b_1} \beta.$$

Entonces, si ε satisfice:

$$\varepsilon < \frac{\frac{\beta}{\bar{M}_1 K}}{\frac{\bar{M}_3}{b_1} + \frac{\bar{M}_2 \beta}{\bar{M}_1 K \beta}},$$

claramente para: $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$, donde:

$$\varepsilon_1^* = \frac{\beta b_1}{K \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta \bar{M}_2}.$$

□

D.3. Demostración del Teorema 6.1.2

La matriz de transición de la parte homogénea de (6.27) satisface la desigualdad $\|\phi(t, s)\| \leq K e^{-b_1(t-s)/\varepsilon}$. Usando esto, la contribución del término de entrada $\varepsilon L(t)B_1(t)r(t)$ es $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Nuevamente usando Lemas 2.2 y 2.3 en [38], se observa que la parte homogénea de (6.27) puede ser aproximada por $A_{22}(0, t_0)\eta(t)$. Lo cual lleva a:

$$\eta(t) = z_f \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Comparando (6.26), (6.28) con (6.29) y usando los resultados de perturbaciones regulares (ver [24]) obtenemos:

$$\Theta(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Usando la inversa de la transformación de desacoplamiento de (6.17), obtenemos:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \Theta(t) + \varepsilon H(t)\eta(t) \\
&= x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
z(t) &= -L(t)\Theta(t) + (I - \varepsilon L(t)H(t))\eta(t) \\
&= -A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x_s(t) + z_f \left(\frac{t-t_0}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

D.4. Demostración Teorema 6.2.1

Para el caso $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$, se puede seguir la prueba del Teorema 1 del trabajo [57] y [60]. \square

D.5. Demostración Lema 6.2.1

Como en el caso anterior, se puede seguir la demostración del Lema 1 de [57] y [60]. \square

D.6. Demostración Teorema 6.2.2

Siguiendo las ideas de [16], se propone la siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V(x_{sf}^T(t)) = x_{sf}^T(t)E_\varepsilon W x_{sf}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x_{sf}^T(\rho)S x_{sf}(\rho)d\rho \quad (D.4)$$

donde $S = S^T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & b_1 \end{bmatrix} > 0$. Nótese que (ver (6.53), (6.73) y (6.68)):

$$(E_\varepsilon W)^T = E_\varepsilon W \quad \text{y} \quad 2Q(\varepsilon, t) - S > 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \quad (D.5)$$

La derivada con respecto del tiempo de (D.4) a lo largo de las trayectorias de (6.71) es:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} &= x_{sf}^T(t) (2W A^*(\varepsilon, t) + S) x_{sf}(t) \\ &\quad + 2\varepsilon x_{sf}^T(t) W \hat{A}^*(t) x_{sf}(t - \tau(t)) \\ &\quad - \gamma(t) x_{sf}^T(t - \tau(t)) S x_{sf}(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (D.6)$$

donde $\gamma(t) = (1 - \frac{d\tau(t)}{dt})$. Tomando en cuenta (6.74), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} &= x_{sf}^T(t) (S - 2Q(\varepsilon, t)) x_{sf}(t) \\ &\quad + 2\varepsilon x_{sf}^T(t) W \hat{A}^*(t) x_{sf}(t - \tau(t)) \\ &\quad - \gamma(t) x_{sf}^T(t - \tau(t)) S x_{sf}(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (D.7)$$

La ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} = -\bar{x}_{sf}^T(t) \Phi(\varepsilon, t) \bar{x}_{sf}(t) \quad (D.8)$$

donde $\bar{x}_{sf}(t) = \begin{bmatrix} x_{sf}^T(t) & x_{sf}^T(t - \tau(t)) \end{bmatrix}^T$ y:

$$\Phi(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} 2Q(\varepsilon, t) - S & 0_{n+2, n+2} \\ 0_{n+2, n+2} & \gamma(t)S \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} 0_{n+2, n+2} & W \hat{A}^*(t) \\ W \hat{A}^*(t) & 0_{n+2, n+2} \end{bmatrix}$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\Phi(0, t) = \begin{bmatrix} 2Q(0, t) - S & 0_{n+2, n+2} \\ 0_{n+2, n+2} & \gamma(t)S \end{bmatrix}$$

Entonces **H4** implica que: $\gamma(t) = (1 - \frac{d\tau(t)}{dt}) > 0$, ahora de (D.5) y usando complementos de Schur, se concluye que $\Phi(0, t) > 0$. Existe entonces un número positivo lo suficientemente pequeño ε^* , tal que $\frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} < 0$ para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$. □

D.7. Demostración Teorema 6.2.3

En el Teorema 6.2.1 se demostró que: $\|\phi(t, s)\| \leq Ke^{-\beta(t-s)/\varepsilon}$. Entonces, las contribuciones del término de entrada $\varepsilon L(t)B_1 r(t)$ es de orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Así para el resto de la demostración se puede seguir la demostración del Teorema 6.1 en [38]. □

Apéndice E

Demostraciones Capítulo 7

E.1. Puntos Clave de la Demostración del Teorema 7.1.1

Analizando el filtro ideal no propio, (7.1), junto con el filtro de Butterworth, (7.9), se obtiene el siguiente sistema singularmente perturbado:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_{\bar{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{x}_f \\ \varepsilon \dot{z}_f \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_f & -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \\ \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}}(\underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T & \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} & -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x_f \\ z_f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y \\
 & y_f(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T & x_f & z_f^T \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

Se mostrará que los Sistemas (E.1) y (7.3) son externamente equivalentes. En [47], los autores siguieron el siguiente procedimiento:

1. Se definen las siguientes matrices invertibles:

$$Q = \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Q_0 & 0 & I_{\bar{n}} \end{bmatrix} ; \quad R = \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ R_0 & 0 & I_{\bar{n}} \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

donde Q_0 satisfice (7.7) y

$$R_0 = -\frac{1}{\varepsilon} Q_0 N. \tag{E.3}$$

2. Nótese que:

$$\text{Spectrum}(N) \cap \text{Spectrum}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} = \emptyset.$$

Se sigue que (7.7) tiene una única solución (ver por ejemplo Capítulo 8 en [18]).

3. Aplicando las matrices Q y R al Sistema (E.1):

$$\begin{aligned}
 Q \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_{\bar{n}} \end{bmatrix} R &= \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_{\bar{n}} \end{bmatrix} \\
 Q \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ Q_0 \Gamma \end{bmatrix}, \\
 Q \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_f & -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \\ \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}}(\underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T & \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} & -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{bmatrix} R &= \\
 = \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T R_0 & -\beta_f & -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \\ 0 & \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} & -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{bmatrix} & \\
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \end{bmatrix} R &= \begin{bmatrix} (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T R_0 & 0 & (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

4. Finalmente se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\bar{z}(t) = z_f(t) - R_0 w(t) \quad (\text{E.4})$$

Sumando su tercer fila con la premultiplicación de su primer fila por Q_0 , se obtiene la *equivalencia externa* de la conexión en cascada de los Sistemas (7.1) y (7.9) con el sistema propio (7.3).

□

Calculo de Q_0 y R_0 . Un procedimiento para calcular las matrices Q_0 y R_0 es el siguiente (ver también [48]):

1. Denotamos por \underline{r}_i y \underline{q}_i los vectores columna de las matrices R_0 y Q_0 , respectivamente. Así de (E.3), se escribe la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \underline{r}_1 & \cdots & \underline{r}_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} &= \\
 = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \cdots & \underline{q}_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\chi}_{\bar{n}}^2 & \cdots & \underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1} & 0 \end{bmatrix} & \quad (\text{E.5}) \\
 = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \underline{q}_2 & \cdots & \underline{q}_{\bar{n}+1} & 0 \end{bmatrix} &
 \end{aligned}$$

2. Entonces de (7.7) y (E.5), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Q_0 + \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}}(\underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T &= (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})R_0 \\
 \begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \cdots & \underline{q}_{\bar{n}} & \underline{q}_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{bmatrix} &= \\
 = -\frac{1}{\varepsilon}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \begin{bmatrix} \underline{q}_2 & \cdots & \underline{q}_{\bar{n}} & \underline{q}_{\bar{n}+1} & 0 \end{bmatrix} & \quad (\text{E.6})
 \end{aligned}$$

3. Para resolver (E.6), se procede recursivamente de la última columna hacia la primera.

4. Obsérvese que:

$$(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T R_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \underline{q}_{(1,2)} (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \quad (\text{E.7})$$

donde $q_{(i,j)}$ es la entrada (i, j) de la matriz Q_0 .

□

E.2. Demostración del Corolario 7.1.1

La demostración se realiza en dos partes. Se considerará primero el caso $\varepsilon = 0$, y después se analizará el caso $\varepsilon > 0$.

1. Se considera $\varepsilon = 0$, de (7.9) y (7.1), se obtiene¹:

$$(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{f_0}(t) = \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{pmatrix} \bar{y}(t) = \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{pmatrix} (\chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T w(t) \quad (\text{E.8})$$

sustituyendo (7.7) y (E.3) en (E.8), se obtiene la ecuación:

$$(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{f_0}(t) = [(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) R_0 - Q_0] w(t). \quad (\text{E.9})$$

Usando (E.4) y (E.9), la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z}_0(t) = -Q_0 w(t). \quad (\text{E.10})$$

Ya que (7.1) es el observador ideal, la igualdad siguiente se mantiene:

$$\begin{aligned} -\hat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z}_0(t) &= \begin{bmatrix} \hat{Q}_0^{-1} \underline{q}_1 & | & I_{\bar{n}} \end{bmatrix} \zeta(t) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{Q}_0^{-1} \underline{q}_1 | 0_{\bar{n}} \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0_{(\bar{n} \times 1)} | I_{\bar{n}} \end{bmatrix} \zeta(t). \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Finalmente se obtiene que:

$$-\hat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z}_0(t) - \hat{Q}_0^{-1} \underline{q}_1 y(t) = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{\bar{n}-1} y}{dt^{\bar{n}-1}} \end{bmatrix}. \quad (\text{E.12})$$

2. Ahora se considera el caso, $\varepsilon > 0$, el cual esta basado en el caso $\varepsilon = 0$.

De (7.9) y (7.1) se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) x_f &= -\varepsilon^{\bar{n}+1} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}}^1 \end{pmatrix}^T z_f \\ \left[\varepsilon \frac{d}{dt} \mathbf{I} + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \right] z_f &= \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{pmatrix} x_f + \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1} \end{pmatrix}^T w(t). \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Se aplica el operador $\left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right)$ a la segunda fila de la ecuación anterior, se obtiene (recordando que (7.1) es un observador ideal):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_f &= \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1} \end{pmatrix}^T \zeta \\ &\quad - \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \mathbf{I} + \varepsilon^{\bar{n}} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}}^1 \end{pmatrix}^T \end{bmatrix} z_f. \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Tomando en cuenta que (7.7), (E.3) y (E.4), se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) [(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z} + Q_0 \zeta] &= -\varepsilon \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \mathbf{I} \\ + \varepsilon^{\bar{n}} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{n}}^1 \end{pmatrix}^T \end{bmatrix} z_f. \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

¹ Se escribe, z_{f_0} y \bar{z}_0 , en lugar de, z_f y \bar{z} , para distinguir que se trata del caso $\varepsilon = 0$.

La ecuación anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \hat{Q}_0 \left[\hat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z} + \hat{Q}_0^{-1} Q_0 \zeta \right] \\ &= -\varepsilon \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \mathbf{I} + \varepsilon^{\bar{n}} \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \right) \left(\chi_{\bar{n}}^1 \right)^T \right] z_f. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Escribiendo esta última ecuación como (E.11) y (E.12):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \hat{Q}_0 h(t) = \varepsilon \bar{h}(t) \\ & \hat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z} + \hat{Q}_0^{-1} \underline{q}_1 y(t) \\ & \quad + \left[\frac{dy}{dt} \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \right]^T = -h(t) \\ & \bar{h}(t) = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \mathbf{I} + \varepsilon^{\bar{n}} \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \right) \left(\chi_{\bar{n}}^1 \right)^T \right] z_f. \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Se puede ver que el Sistema (7.9) satisface la condición de invertibilidad del Teorema 3.1 del Capítulo 2 en [38]. Se definen las matrices:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\beta - \varepsilon^{\bar{n}+1} \left(\chi_{\bar{n}}^1 \right)^T (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \right), \\ A_{22} &= (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}). \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

De (7.8), se obtiene: $\det(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) = 1$; en [47], la matriz inversa de $(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})$ es calculada explícitamente. Por lo tanto, se puede ver en (7.8) que los \bar{n} propios son distintos. Entonces del Teorema 3.1 los valores propios de (7.9) se pueden aproximar como sigue:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1(A_0) + \mathcal{O}(\varepsilon) = -\beta_f + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \lambda_i &= \frac{1}{\varepsilon} [\lambda_i(A_{22}) + \mathcal{O}(\varepsilon)] \quad \text{para } i = 2, \dots, \bar{n}. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Ya que las matrices A_0 y A_{22} son Hurwitz, entonces el Corolario 3.1 del Capítulo 2 en [38] implica que existe un $\varepsilon^* > 0$, tal que (7.9) es asintóticamente estable para todo valor de $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$.

Ahora, como la entrada \bar{y} del filtro (7.9) es obtenida por el observador ideal (7.1) y como se asegura que las condiciones de diferenciabilidad y acotamiento de las señales relacionadas (ver hipótesis H1–H4), se sigue que $\bar{h}(t)$ es también una función vectorial acotada.

Finalmente, de la Ecuación (E.17) se tiene:

$$h(t) = \hat{Q}_0^{-1} e^{-\beta_f t} h(0) + \varepsilon \hat{Q}_0^{-1} \int_0^t e^{-\beta_f(t-\tau)} \bar{h}(\tau) d\tau,$$

que es la Ecuación (7.14).

Entonces la función vectorial $h(t)$ tiende de forma exponencial a 0 cuando ε se aproxima a 0. Por lo tanto, de (E.17) se obtiene:

$$-\hat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z} - \hat{Q}_0^{-1} \underline{q}_1 y(t) = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.20})$$

que es la Ecuación (7.15). Esto concluye la demostración. \square

Apéndice F

Demostraciones Capítulo 8

F.1. Demostración Hecho 8.1.1

De la Ecuación (8.12):

$$A_{22}(\varepsilon, t) = -\varepsilon X(t) - B^*(t),$$

si $\varepsilon = 0$, se obtiene que:

$$A_{22}(0, t) = -B^*(t).$$

Tomando en cuenta la hipótesis **H3**, se tiene que:

$$\| A_{22}(0, t) \|_2 = \| B^*(t) \|_2 \leq \sqrt{m} m c_0 = \bar{c}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

De (8.12), se tiene que:

$$\left\| \frac{d}{dt} A_{22}(0, t) \right\|_2 = \left\| \frac{d}{dt} B^*(t) \right\|_2.$$

Tomando en cuenta la hipótesis **H3**, se obtiene:¹

$$\left\| \frac{d}{dt} A_{22}(0, t) \right\|_2 \leq \sqrt{m} m c' = c.$$

Para la segunda parte de la demostración, sea $\bar{\varepsilon}$ un número positivo dado y para una matriz $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dada se define la siguiente norma consistente [72]:

$$\| Z \| = \| D^{-1} Z D \|_\infty, \tag{F.1}$$

con: $D = \text{diag}\{1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^{m-1}\}$ y

$$\eta \leq \frac{\bar{\varepsilon}}{(m-1)c_0}.$$

Aplicando la norma definida por (F.1) a la matriz $B^*(t)$, se tiene (ver Teorema 3.8 del Capítulo 6 de [72]) tomando en cuenta las hipótesis **H2** y **H3**:

$$\| B^*(t) \| = \| D^{-1} B^*(t) D \|_\infty \leq \rho(B^*(t)) + \bar{\varepsilon} = \bar{b}_2 + \bar{\varepsilon} \tag{F.2}$$

¹ El factor \sqrt{m} está dado por la relación entre las normas $\| \cdot \|_2$ y $\| \cdot \|_1$ (ver [72]).

Así, finalmente ya podemos calcular las cotas de la parte real de los valores propios de $A_{22}(\varepsilon, t) = -\varepsilon X(t) - B^*(t)$.

Para esto, se calcula la medida de la matriz $A_{22}(\varepsilon, t)$, $\mu(A_{22}(\varepsilon, t))$, usando la norma definida por (F.1), y se usan los resultados del Teorema 5 de la Sección II.8 de [12]:

$$\begin{aligned}\Re \lambda_i(-A_{22}(\varepsilon, t)) &\leq \mu(\varepsilon X(t) + B^*(t)) \leq \mu(\varepsilon X(t)) + \mu(B^*(t)) \\ \mu(\varepsilon X(t)) + \mu(B^*(t)) &\leq \varepsilon \|X(t)\| + \|B^*(t)\| \leq \varepsilon \|X(t)\| + (\bar{b}_2 + \bar{\varepsilon}) \\ \Re \lambda_i(-A_{22}(\varepsilon, t)) &\geq -\mu(-\varepsilon X(t) - B^*(t)) \geq -\mu(-\varepsilon X(t)) - \mu(-B^*(t)) \\ -\mu(-\varepsilon X(t)) - \mu(-B^*(t)) &\geq -\varepsilon \|X(t)\| - \mu(-B^*(t))\end{aligned}$$

Se tiene finalmente que:

$$-\mu(-B^*(t)) - \varepsilon \|X(t)\| \leq \Re \lambda_i(-A_{22}(\varepsilon, t)) \leq \varepsilon \|X(t)\| + (\bar{b}_2 + \bar{\varepsilon}) \quad (\text{F.3})$$

Nótese que para $\theta \in (0, 1/\bar{b}_2) \subset \mathbb{R}$, se tiene (ver **H2**):

$$0 < 1 - \theta \bar{b}_2 \leq \lambda_i\{\mathbf{I} - \theta B^*(t)\} \leq 1 - \theta \bar{b}_1, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

usando la Definición 1 de la Sección II.8 de [12]):

$$\begin{aligned}\mu(-B^*(t)) &= \lim_{\theta \searrow 0} (\|\mathbf{I} - \theta B^*(t)\| - 1) / \theta \\ &= \lim_{\theta \searrow 0} (\|\mathbf{I} - \theta D^{-1} B^*(t) D\|_\infty - 1) / \theta \\ &\leq \lim_{\theta \searrow 0} (\max\{\lambda_i\{\mathbf{I} - \theta B^*(t)\}\} \\ &\quad + \theta(m-1) \max\{|b_{ij}(t)|\eta\} - 1) / \theta \\ &= \lim_{\theta \searrow 0} (1 - \theta(\bar{b}_1 + \bar{\varepsilon}) - 1) / \theta = -(\bar{b}_1 + \bar{\varepsilon})\end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Así de las ecuaciones (F.3) y (F.4), se obtiene:

$$\begin{aligned}-b_2 - \varepsilon L_{0,a} &\leq -b_2 - \varepsilon \|X(t)\| \leq \Re \lambda_i(A_{22}(\varepsilon, t)) \\ &\leq -b_1 + \varepsilon \|X(t)\| \leq -b_1 + \varepsilon L_{0,a}\end{aligned}$$

con: $L_{0,a} = \sqrt{m} m' L'_{0,a}$, $b_1 = \bar{b}_1 + \bar{\varepsilon}$ y $b_2 = \bar{b}_2 + \bar{\varepsilon}$. □

F.2. Demostración Teorema 8.1.1

De las Ecuaciones (8.17) y (8.18), la matriz de transición del *sistema desacoplado* satisface:

$$\hat{\phi}(t, s) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\phi}(t, s) = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}L(t) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t) + L(t)A_{12} \end{bmatrix} \hat{\phi}(t, s) \quad (\text{F.6})$$

De [68], la matriz de transición $\phi(t, s)$ de (8.13), la matriz de transición (F.5) y $M(t)$ definida en (8.15) satisfacen la relación:

$$\phi(t, s) = M^{-1}(t) \hat{\phi}(t, s) M(s)$$

$$\phi(t, s) = M^{-1}(t) \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} M(s) \quad \forall t \geq s \quad (\text{F.7})$$

De las Ecuaciones (F.6) y (F.7), las matrices de transición, $\hat{\phi}_s(t, s)$ y $\hat{\phi}_f(t, s)$, satisfacen las ecuaciones,

$$d\hat{\phi}_s(t, s)/dt = [A_{11} - A_{12}L(t)]\hat{\phi}_s(t, s)$$

y

$$\varepsilon d\hat{\phi}_f(t, s)/dt = [A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)A_{12}(t)]\hat{\phi}_f(t, s)$$

respectivamente. De la propiedad (8.23), existe $K_1 > 0$:

$$\|\hat{\phi}_s(t, s)\|_2 \leq K_1 e^{-\beta(t-s)}.$$

Usando los resultados de los Lemas 2.2 y 2.3 del Capítulo 5 de [38] y (8.25), existe $K_2 > 0$ tal que:²

$$\|\hat{\phi}_f(t, s)\|_2 \leq K_2 e^{-(b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha)(t-s)/\varepsilon}.$$

Así, para un número lo suficientemente pequeño ε , de la Ecuación (F.7) obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\phi(t, s)\|_2 &= \|M^{-1}(t)\|_2 \left\| \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} \right\|_2 \|M(s)\|_2 \\ &\leq K_3 \max \left\{ \|\hat{\phi}_s(t, s)\|_2, \|\hat{\phi}_f(t, s)\|_2 \right\} \end{aligned}$$

lo cual implica: $\|\phi(t, s)\|_2 \leq \bar{K} e^{-\kappa(t-s)}$, con $\bar{K} = K_3 \max\{K_1, K_2\}$. □

F.3. Demostración Lema 8.1.1

Se propone la siguiente funcional candidata de Lyapunov:

$$\nu(t) = \alpha_1 V(t, x(t)) + \alpha_2 W(t, x(t), z(t)),$$

con $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$,

$$V(t, x(t)) = \int_t^\infty \|\phi_s(\tau, t)x(t)\|_2 d\tau,$$

y

$$W(t, x(t), z(t)) = \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)(z(t) - \bar{L}_0 x(t))\|_2 d\tau.$$

Se calcula la derivada $\frac{d}{dt}\nu(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\nu(t) &= \alpha_1 \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} \\ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T [\phi_s(\tau, t)x(t)]} d\tau - \|x(t)\|_2 \\ &= \int_t^\infty \frac{[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T}{\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_s(\tau, t)x(t) + \phi_s(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) d\tau \\ &\quad - \|x(t)\|_2 \\ &= \int_t^\infty \frac{[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T}{\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|_2} \phi_s(\tau, t) A_{12} [\bar{L}_0 x(t) + z(t)] d\tau - \|x(t)\|_2 \\ &\leq \int_t^\infty \|\phi_s(\tau, t)\|_2 \|A_{12}\|_2 \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\|_2 d\tau - \|x(t)\|_2 \\ &\leq \int_t^\infty K_1 \bar{M}_1 e^{-\beta(\tau-s)} d\tau \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\|_2 - \|x(t)\|_2 \\ &\leq \frac{M_1 K_1}{\beta} \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\|_2 - \|x(t)\|_2 \end{aligned}$$

² Nótese que: $b_1 > \varepsilon L_{0,a}$ y $\alpha < 0$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$. Se selecciona $K_2 > 1$, por que se requiere garantizar que: $\alpha + K_2 \bar{M}_2 > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(t,x(t),z(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \|\phi_f(\tau, t) (z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|_2 d\tau \\
&\quad - \|z(t) + \bar{L}_0(t)x(t)\|_2 \\
&= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi_f(\tau, t) (z(t) \right. \\
&\quad \left. + \bar{L}_0(x(t)) + \phi_f(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} (z(t) + \bar{L}_0 x(t))) \right] d\tau \\
&\quad - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2 \\
&= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|_2} [\phi_f(\tau, t) \\
&\quad (-\frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t) z(t) - \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t) \bar{L}_0 x(t))] d\tau \\
&\quad + \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|_2} [\phi_f(\tau, t) (\frac{\partial}{\partial t} z(t) \\
&\quad + \bar{L}_0 \frac{\partial}{\partial t} x(t))] d\tau - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2 \\
&= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|_2} \phi_f(\tau, t) [\bar{L}_0 A_{11} x(t) \\
&\quad + \bar{L}_0 A_{12} z(t)] d\tau - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2 \\
&\leq \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)\|_2 \left[\|\bar{L}_0 A_0(t)\|_2 \|x(t)\|_2 \right. \\
&\quad \left. + \|\bar{L}_0 A_{12}\|_2 \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\|_2 \right] d\tau \\
&\quad - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2 \\
&\leq \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} \|x(t)\|_2 \\
&\quad - \left(1 - \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} \right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2 \\
\frac{d}{dt} \nu(t) &= \alpha_1 \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial W(t,x(t),z(t))}{\partial t} \\
&\leq - \left(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} \right) \|x(t)\|_2 \\
&\quad - \left(\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} \right) - \alpha_1 \frac{K_1 \bar{M}_1}{\beta} \right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2
\end{aligned}$$

Se tiene que, $d\nu(t)/dt$ será definida negativa sí α_1 y α_2 se seleccionan tal que:

$$\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} > 0$$

y

$$\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} \right) - \alpha_1 \frac{K_1 \bar{M}_1}{\beta} > 0.$$

Esto es posible si:

$$\varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\beta}{K_1 \bar{M}_1} \left(1 - \frac{\varepsilon K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} \right)$$

Entonces es suficiente que ε satisfaga:

$$\varepsilon < \varepsilon^*,$$

con:

$$\varepsilon^* = \frac{\beta b_1}{K_1 K_2 \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta (L_{0,a} + \alpha + K_2 \bar{M}_2)}.$$

□

F.4. Demostración Teorema 8.1.2

La demostración de este teorema sigue paso a paso la demostración del Teorema 6.1.2 de la Sección D.3. \square

F.5. Demostración del Hecho 8.2.1

La demostración de este Hecho sigue la demostración de la Sección F.1. \square

F.6. Demostración del Teorema 8.2.1

La demostración de este teorema sigue la demostración de la Sección F.2. \square

F.7. Demostración del Lema 8.2.1

Para la demostración de este lema se sigue la demostración del Lema 5.2.4 en el Apéndice C. Se selecciona la candidata de Lyapunov:

$$\nu(t) = \alpha_1 V(t, x(t)) + \alpha_2 W(t, x(t), z(t))$$

donde $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$,

$$V(t, x(t)) = \int_t^\infty \|\phi_s(\tau, t)x(t)\|_2 d\tau,$$

y

$$W(t, x(t), z(t)) = \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)(z(t) - \bar{L}_0 x(t))\|_2 d\tau$$

para este caso, la derivada de $\nu(t)$ es³:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\nu(t) &= \alpha_1 \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} \\ &\leq -\left(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma}\right) \|x(t)\|_2 \\ &\quad - \left(\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma}\right) - \alpha_1 \frac{K_1 \bar{M}_1}{\beta}\right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2 \end{aligned}$$

Entonces, $d\nu(t)/dt$ será negativa definida si α_1 y α_2 pueden seleccionarse tal que:

$$\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma} > 0$$

y

$$\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma}\right) - \alpha_1 \frac{K_1 \bar{M}_1}{\beta} > 0.$$

Esto es posible si:

$$\varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\beta}{K_1 \bar{M}_1} \left(1 - \frac{\varepsilon K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma}\right)$$

³ver Lema 1 en [60] para detalles de cálculo

Entonces, es suficiente que ε satisfice:

$$\varepsilon < \varepsilon^*,$$

donde:

$$\varepsilon^* = \frac{\beta b_1}{K_1 K_2 \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta(L_{0,a} + \sigma + K_2 \bar{M}_2)}.$$

□

F.8. Demostración del Teorema 8.2.2

Siguiendo las ideas en [16], se propone la siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V(x_{sf}^T(t)) = x_{sf}^T(t) E_\varepsilon W x_{sf}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x_{sf}^T(\rho) S x_{sf}(\rho) d\rho \quad (\text{F.8})$$

donde $S = S^T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{n+1,m} \\ 0_{m,n+1} & b_1 I \end{bmatrix} > 0$. Nótese que (ver Ecuaciones (8.64), (8.66) y (8.52)):

$$(E_\varepsilon W)^T = E_\varepsilon W \quad \text{and} \quad 2Q(\varepsilon, t) - S > 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \quad (\text{F.9})$$

La derivada de (F.8) a lo largo de las trayectorias del Sistema (8.64) es:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} &= x_{sf}^T(t) (2WA^*(\varepsilon, t) + S) x_{sf}(t) + 2\varepsilon x_{sf}^T(t) W \hat{A}^*(t) x_{sf}(t - \tau(t)) \\ &\quad - \gamma(t) x_{sf}^T(t - \tau(t)) S x_{sf}(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

donde $\gamma(t) = (1 - \frac{d\tau(t)}{dt})$. Tomando en cuenta (8.67), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} &= x_{sf}^T(t) (S - 2Q(\varepsilon, t)) x_{sf}(t) + 2\varepsilon x_{sf}^T(t) W \hat{A}^*(t) x_{sf}(t - \tau(t)) \\ &\quad - \gamma(t) x_{sf}^T(t - \tau(t)) S x_{sf}(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} = -\bar{x}_{sf}^T(t) \Phi(\varepsilon, t) \bar{x}_{sf}(t), \quad (\text{F.12})$$

donde: $\bar{x}_{sf}(t) = \begin{bmatrix} x_{sf}^T(t) & x_{sf}^T(t - \tau(t)) \end{bmatrix}^T$ y:

$$\Phi(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} 2Q(\varepsilon, t) - S & 0_{n+2, n+2} \\ 0_{n+2, n+2} & \gamma(t) S \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} 0_{n+2, n+2} & W \hat{A}^*(t) \\ W \hat{A}^*(t) & 0_{n+2, n+2} \end{bmatrix}.$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\Phi(0, t) = \begin{bmatrix} 2Q(0, t) - S & 0_{n+2, n+2} \\ 0_{n+2, n+2} & \gamma(t) S \end{bmatrix}.$$

Entonces **H5** implica que:

$$\gamma(t) = (1 - \frac{d\tau(t)}{dt}) > 0,$$

ahora de (F.9) y usando los complementos de Schur, se concluye que:

$$\Phi(0, t) > 0.$$

Entonces existe un número positivo ε^* lo suficientemente pequeño, tal que:

$$\frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} < 0, \quad \text{para } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*.$$

Entonces el Sistema (8.64) es asintóticamente estable de acuerdo a la teoría de estabilidad de Lyapunov (ver [25]).

□

F.9. Demostración del Teorema 8.2.3

En el Teorema 8.2.1 se demostró que:

$$\|\phi(t, s)\| \leq Ke^{-\beta(t-s)/\varepsilon}.$$

Entonces, la contribución del término debido a la entrada $\varepsilon L(t)B_1 r(t)$ es de orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Así, el resto de la demostración se sigue de las secciones D.7 y F.4.

□

Parte V

**Artículos en Revistas y Congresos
Publicados**

Apéndice G

CDC 2010

El siguiente artículo fué presentado en el Conference on Decision and Control 2010, el día 17 de diciembre de 2010 en la ciudad de Atlanta, GA, USA.

Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO System

S. Puga, M. Bonilla and M. Malabre

Abstract— This paper considers the problem of stabilizing a single input-single output linear time varying system using a low order controller and equalizer filter. The closed loop system is a linear singularly perturbed system with uniform asymptotic stability behavior; we calculate bounds $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ as in [9], such that the uniform asymptotic stability of the singularly perturbed system is guaranteed. Following the results of [9] we show how to design a control law such that the system dynamics is assigned by a Hurwitz polynomial with constant coefficients.

NOTATION

- $\underline{\chi}_k^i \in \mathbb{R}^k$ stands for the vector which the i -th entry is equal to 1 and the other ones are equal to 0. $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ stands for the identity matrix of size k . $T_u\{v^T\}$ stands for the upper triangular Toeplitz matrix, which first row is v^T . $T_\ell\{v\}$ stands for the lower triangular Toeplitz matrix, which first column is v . $0_{\mu, \nu} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}$ stands for the zero matrix. And $0_\nu \in \mathbb{R}^\nu$ stands for the zero vector.
- $BDM\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ denotes a block diagonal matrix whose diagonal blocks are $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$.
- Given a vector function $f(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $\|f(\cdot)\| = \|f(\cdot)\|_2$ and for a function matrix $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|A(\cdot)\| = \|A(\cdot)\|_2$, see [3].
- A vector function $f(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^n$ is said to be $\mathcal{O}(\varepsilon)$ over an interval $[t_1, t_2]$ if there exist positive constants K and ε^* such that $\|f(\varepsilon, t)\| \leq K\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^*], \quad \forall t \in [t_1, t_2]$, see [5].

I. INTRODUCTION

Linear Time Varying Systems have been studied for the last 40 years. One of the principal goals is to design a state feedback control law in order to get a desired performance, as well as to guarantee stability.

In 1971, Silverman [14] developed for time variable linear systems the realization theory and he studied the controllability property. He showed that the coefficients of the system's matrices have to possess a finite number of derivatives in order to satisfy the controllability property; the controllability concept was applied in particular to time variable electrical networks as an example.

M. Bonilla, CINVESTAV-IPN, CONTROL AUTOMÁTICO, UMI 3175 CINVESTAV-CNRS. A.P. 14-740. MÉXICO 07000. mbonilla@cinvestav.mx

S. Puga is with UPIITA-IPN. Académia de Sistemas. Av. IPN 2580. México 07340, MEXICO. spuga@ipn.mx

M. Malabre is with IRCCyN, CNRS UMR 6597, B.P. 92101, 44321 Nantes, Cedex 03, FRANCE. Michel.Malabre@irccyn.ec-nantes.fr

In 1988, Kamen [7] developed a notion of poles and zeros in terms of factorizations of polynomial operators with time varying coefficients, where the poles can be computed by solving a nonlinear differential equation with time varying coefficients. Later, in 1989, he proposed a state feedback control for slowly varying linear continuous time system with bounded coefficients; the procedure was based on the frozen time approach and that control law guarantees uniform asymptotic stability of the system [8].

In 1997, a state feedback control was designed for uniformly controllable linear time varying systems, based on a nonlinear state transformation [2], which converts the stabilization problem into a destabilization problem of the transformed state, and the control law can be applied to the systems with time varying parameters that are piecewise continuous.

In 1999, a new approach was developed [1] which is based on a graded module extension over the noncommutative ring of differential operators. This approach is a relevant generalization of the transfer function to the time varying case, where the authors use the polynomial matrix description, also they characterize the structure of the system at infinity. In [10] the exact model matching was formulated and solved using the same mathematical tool. The authors have defined the transfer matrices with time varying coefficients and have used the Smith-MacMillan form at infinity for their study. In [11] and [12] the author has given an implementable solution to some model matching problems for continuous time linear varying systems; the parametrisation of the whole class of proper solutions was given. The approach was algebraic and based on the Smith-MacMillan form at infinity of a transfer matrix, which has been recently introduced for the case of time varying systems.

A common point of the above mentioned works is the knowledge of the time varying parameters of the system. In most cases, the $n - 1$ derivatives of the time varying parameters are required, and in a few of them, the measurement of the state vector is required. In the \mathcal{H}_2 & \mathcal{H}_∞ approaches there exist works where the problem has been tackled. For example, in [16] the authors propose an observer which is the optimal solution for the robust fault detection problem of linear time varying systems in a time domain. This observer is obtained by solving a standard differential Riccati equation; two different problems are considered when the initial state is known and when it is unknown. The knowledge of the matrices:

$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ and $D(t)$ is necessary, together with the assumption that the pair $(A(t), C(t))$ is detectable.

In the optimal control approach, for linear parameter varying systems, there are works, as [15] and [6], where a Linear Quadratic Gaussian (LQG) control law is developed. For this, are necessary the knowledge of the matrices, $A(t)$, $B(t)$ and $C(t)$, and the measurement of the state; the quadratic stability is guaranteed. Wu [15] tackles the problem in a more complete way, he developed an LQG Observer and a quadratic state estimator, but the knowledge of the matrices $A(t)$, $B(t)$ and $C(t)$ is still necessary.

In this paper, we propose a control law for SISO time varying systems,

$$d\zeta/dt = A(t)\zeta + B(t)u,$$

based on the singular perturbations approach [9], where the knowledge of the time varying parameters is not required, but only some bounds. The aim of this control law is to approximately match a given time-invariant linear state space representation,

$$dx_s/dt = A_0x_s + B_1r.$$

The control scheme, guaranties the behavior and asymptotic stability. The paper is organized as follows. The problem is first stated in section II. Next, in Section III we propose a singularly perturbed linear control law, which aim is to lead the closed loop into the Kokotović's singularly perturbed system model. Following [9], in Section IV-A the closed loop system is separated in two time scale systems, namely a slow system and a fast one. In Section IV-B we study the uniform stability of the fast and slow systems. In section V we get the desired state space approximation. Finally, in Section VI we give an academic example for illustrating the developed technique. All the proofs are sent to the Appendix.

II. SYSTEM DEFINITION AND REPRESENTATION FORM

Let us consider a linear time varying system, which dynamics is represented by the following differential equation

$$d^n y/dt^n + \sum_{i=1}^n a_i(t) d^{i-1} y/dt^{i-1} = b(t)u \quad (1)$$

defined for $t \geq t_0 \geq 0$, with initial conditions

$$y(t_0), dy(t_0)/dt, \dots, d^{n-1}y(t_0)/dt^{n-1}$$

$y \in \mathbb{R}$ is the dependent variable, $u \in \mathbb{R}$ is the input, at time $t \in J = [0, \infty)$. The coefficients, $a_i(t)$ and $b(t)$, are such that:

- H1 $a_i(t)$ are unknown bounded continuous real functions of class¹ \mathcal{C}^∞ , for all $i = 1, \dots, n$,

¹For simplicity, in this paper we only consider functions of class \mathcal{C}^∞ . But it could be considered functions of class \mathcal{C}^k , where k is a sufficiently positive large integer such that the derivability conditions were fulfilled. See also Corollary 2.4.12 of [13].

satisfying: $\|a_i(t)\| \leq L_{0,a}$ and $\|\frac{da_i(t)}{dt}\| \leq L_{1,a}$.

- H2 $b(t)$ is an unknown bounded positive continuous real function of class \mathcal{C}^∞ , satisfying: $0 < b_1 \leq b(t) \leq b_2$ and $\|\frac{db(t)}{dt}\| \leq c$.

A simple device can be used to recast this differential equation into the form of a linear state equation with input $u(t)$ and output $y(t)$. Though it seems an arbitrary choice, it is convenient to define state variables as follows:

$$\zeta = [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \dots \quad \zeta_n]^T = \left[y \quad \frac{dy}{dt} \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \right]^T, \quad (2)$$

we then get time varying linear state equation:

$$\begin{aligned} d\zeta/dt &= A(t)\zeta + B(t)u \quad ; \quad y(t) = C\zeta \\ A(t) &= \left(T_u \{(\chi_n^2)^T\} - \chi_n^n (\underline{a}_n(t))^T \right), \quad B(t) = b(t)\chi_n^n, \\ C &= (\chi_n^1)^T, \quad \underline{a}_k(t) = [a_1(t) \quad \dots \quad a_k(t)]^T \end{aligned} \quad (3)$$

where: $k \in \{1, \dots, n\}$ and the initial state condition is $\zeta(t_0) = [y(t_0) \quad dy(t_0)/dt \quad \dots \quad d^{n-1}y(t_0)/dt^{n-1}]^T$.

III. SINGULAR IMPLICIT CONTROL SCHEME

For the state space representation (3) we propose the following control law, composed by a singularly perturbed control law and an equalizer filter,

Singularly perturbed control law

$$\varepsilon u = -(\chi_n^n)^T(\zeta + h) + (\chi_2^1)^T \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Equalizer filter

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(\bar{a}_n)^T + (1 + \ell)(\chi_n^n)^T \\ -(\beta - 1)(\chi_n^n)^T \end{bmatrix} (\zeta + h) \\ &+ \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \chi_2^1 r \end{aligned} \quad (5)$$

where: β , τ and ε are positive parameters; $\ell = 1/\tau - \beta$ and $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ are the coefficients of the Hurwitz polynomial $p(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_n \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_2 \lambda + \bar{a}_1$. r is a signal reference and h is a perturbation, such that:

- H3 $r \in L^\infty \cap \mathcal{C}^\infty$. We ask for \mathcal{C}^∞ , because the control scheme is indeed an approximation of a proportional and derivative feedback.
- H4 h is a bounded continuous real function, which norm is of order ε .

The aim of the *equalizer filter* is: (i) to assign the closed loop dynamics at a time invariant linear system with the Hurwitz characteristic polynomial $p(\lambda)$, and (ii) to assign a rate of exponential convergence to the desired dynamics. The aim of the *singularly perturbed control law* is: (i) to change the base representation system for obtaining a *singularly perturbed model*, and (ii) to close the desired dynamics by an ε order. Indeed, we show in *Lemma 1* that the parameters, β and τ , enable us to compute a sufficiently small ε such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed model* is guaranteed. The perturbation signal h is considered, in

order to take into account the effects of the high gain observer.

In order to obtain the closed loop singularly perturbed model, let us combine (3), (4) and (5) and let us choose $x_i(t) = \zeta_i(t)$, for $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, and $z(t) = \zeta_n(t)$, namely:

$$\begin{aligned} dx/dt &= A_{11}x + A_{12}z + A_{13}h + B_1r \\ \varepsilon dz/dt &= A_{21}(\varepsilon, t)x + A_{22}(\varepsilon, t)z + A_{23}(t)h \end{aligned} \quad (6)$$

where the matrices $A_{11} \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n+1 \times 1}$, $A_{13} \in \mathbb{R}^{n+1 \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n+1 \times 1}$, $A_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times n+1}$, $A_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$ and $A_{23}(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, are defined as follows:

$$A_{11} = \left[\begin{array}{c|cc} \text{Tr}\{(\chi_{(n-1)}^2)^T\} & \mathbf{0}_{(n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1)} \\ \hline -(\bar{\mathbf{a}}_{(n-1)})^T & -(1+\ell) & \ell \\ (\mathbf{0}_{(n-1)})^T & (\beta-1) & -\beta \end{array} \right],$$

$$A_{12} = \left[\begin{array}{c} \chi_{(n-1)}^{(n-1)} \\ \hline -\bar{a}_n + (1+\ell) \\ \hline -(\beta-1) \end{array} \right], \quad B_1 = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0}_{(n-1)} \\ \hline \chi_2 \end{array} \right]$$

$$A_{13} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(n-1), (n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1)} \\ \hline -(\bar{\mathbf{a}}_{(n-1)})^T & -\bar{a}_n + (1+\ell) \\ (\mathbf{0}_{(n-1)})^T & -(\beta-1) \end{array} \right],$$

$$A_{21}(\varepsilon, t) = \left[\begin{array}{cc} -\varepsilon(\bar{\mathbf{a}}_{(n-1)}(t))^T & b(t) \quad 0 \end{array} \right],$$

$$A_{22}(\varepsilon, t) = \left[\begin{array}{c} -\varepsilon a_n(t) - b(t) \end{array} \right],$$

$$A_{23}(t) = \left[\begin{array}{c} (\mathbf{0}_{(n-1)})^T \quad b(t) \end{array} \right]$$

Note that the matrix $A_{22}(0, t)$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|A_{22}(0, t)\|_2 \leq b_2 \\ \|\frac{d}{dt}A_{22}(0, t)\|_2 \leq c \\ -b_2 \leq \Re e \lambda(A_{22}(0, t)) \leq -b_1 \end{array} \right., \quad \forall t \in J \quad (7)$$

Thus, the singularly perturbed model, (6), satisfies Lemmas 2.1, 2.2 and 2.3 of Chapter 5 in [9].

In *Theorem 1* of Section IV-B, we prove that (6) is uniformly asymptotically stable, and in *Theorem 2* of Section V, we show that the state approximation tends to the time invariant reference model.

IV. ASYMPTOTIC STABILITY

In this Section, we study the stability of the homogeneous differential equation (6). For this, we first apply a state transformation, which aim is to decouple the fast and slow systems, and we then study the *uniform asymptotic stability*.

A. Decoupling Transformation

Let us first study the homogeneous equation of (6):

$$\begin{aligned} dx/dt &= A_{11}x + A_{12}z \\ \varepsilon dz/dt &= A_{21}(\varepsilon, t)x + A_{22}(\varepsilon, t)z \end{aligned} \quad (8)$$

Following [9], let us transform (8) into a slow and a fast systems. For obtaining the decoupling transformation, we need to define the following bounded continuously differentiable matrices:

$$L(t) = L_0(t) + \varepsilon R_L(t) \quad \text{and} \quad H(t) = H_0(t) + \varepsilon R_H(t) \quad (9)$$

Doing the following change of variables:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Theta \\ \eta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (I_n - \varepsilon H(t)L(t)) & -\varepsilon H(t) \\ L(t) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \\ &= M^{-1}(t) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

we have:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \left[\frac{dL}{dt}(t) + \frac{1}{\varepsilon}A_{21}(\varepsilon, t) + L(t)\{A_{11} - A_{12}L(t)\} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(\varepsilon, t)L(t) \right] x \\ &\quad + \left[L(t)A_{12} + \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(\varepsilon, t) \right] \eta \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \left[-\varepsilon \frac{dH}{dt}(t) + A_{12} - \varepsilon H(t)L(t)A_{12} \right. \\ &\quad \left. - H(t)A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon A_{11}H(t) - \varepsilon A_{12}L(t)H(t) \right] \eta \\ &\quad + [A_{11} - A_{12}L(t)] \Theta \end{aligned}$$

Given the properties (7), from Theorem 3.1 of Chapter 5 in [9], there exists a sufficiently small ε such that:

$$\varepsilon \frac{dL}{dt}(t) = A_{22}(\varepsilon, t)L(t) - A_{21}(\varepsilon, t) - \varepsilon L(t)[A_{11} - A_{12}L(t)] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon \frac{dH}{dt}(t) &= H(t)A_{22}(\varepsilon, t) - A_{12} + \varepsilon H(t)L(t)A_{12} \\ &\quad - \varepsilon (A_{11} - A_{12}L(t))H(t) \end{aligned} \quad (12)$$

we then get:

$$d\Theta/dt = [A_{11} - A_{12}L(t)] \Theta \quad (13)$$

$$\varepsilon d\eta/dt = [A_{22}(\varepsilon, t) - \varepsilon L(t)A_{12}] \eta \quad (14)$$

From (9), (11) and (12), we get:

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad H(t) = H_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ L_0(t) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = \bar{L}_0, \quad H_0(t) = A_{12}A_{22}^{-1}(0, t) \end{aligned}$$

In this way, we have the slow system:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)] x_s \\ &= [A_{11} - A_{12}\bar{L}_0] x_s \end{aligned} \quad (15)$$

and the time frozen fast system

$$\varepsilon dz_f/dt = A_{22}(\varepsilon, t)z_f \quad (16)$$

where t is treated as a parameter and defining:

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0 \quad (17)$$

Let us note that:

$$A_0 = \left[\begin{array}{c|cc} \text{Tr}\{(\chi_{(n-1)}^2)^T\} & \chi_{(n-1)}^{(n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1)} \\ \hline -(\bar{\mathbf{a}}_{(n-1)})^T & -\bar{a}_n & (1/\tau - \beta) \\ (\mathbf{0}_{(n-1)})^T & 0 & -\beta \end{array} \right]$$

There then exist $\beta > 0$ and $K > 0$, such that:

$$\|\exp(A_0\theta)\| \leq K e^{-\beta\theta} \quad (18)$$

Let $\phi_f(t, t_0)$ be the transition matrix of the fast system (16). Then:

$$\phi_f(t, t_0) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(\varepsilon, \tau)d\tau\right) \leq e^{-\frac{(b_1 + \varepsilon L_{0,a})(t-t_0)}{\varepsilon}} \quad (19)$$

when $t \in [t_0, \infty)$

B. Conditions for Uniform Asymptotic Stability

In this Section we show that uniform asymptotic stability of (8) is guaranteed by the properties of the transition matrices of (15) and (16). For this, let us particularize Theorem 4.1 of Chapter 5 in [9] to our case study:

Theorem 1: Given the properties (18), $\bar{a}_n + \beta > 1$ and $\tau < 1/(\bar{a}_n + \beta - 1)$, then there exists an $\varepsilon^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ the system (8) is uniformly asymptotically stable. Moreover, the transition matrix of (8), $\phi(t, s)$, satisfies $\|\phi(t, s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$ for all $t \geq s \geq t_0$, where $K > 0$ and $\alpha > 0$ are independent of ε .

This Theorem relates the behavior of (8) to the behaviors of the slow and fast systems. This result holds asymptotically as ε tends to 0. From a computational point of view, it is important to have an idea of the order of the upper bound ε^* . This is done in Lemma 4.1 of Chapter 5 in [9], which for our case study takes the following form:

Lemma 1: Given the conditions of Theorem 1, and $\|A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_1$, $\|\bar{L}_0 A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_2$ and $\|\bar{L}_0 A_0\|_2 \leq \bar{M}_3$, the singularly perturbed system (8) is uniformly asymptotically stable for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$, where:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^* &= \frac{\beta \bar{b}_1}{\beta \bar{M}_2 + K \bar{M}_1 \bar{M}_3} \\ \bar{M}_1 &= \sqrt{1 + (\bar{a}_1 - 1/\tau)^2 + 2(1 - \beta)^2} \\ \bar{M}_2 &= |\bar{a}_1 + \beta - 1/\tau - 1| \\ \bar{M}_3 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 + (\beta - 1/\tau)^2} \end{aligned}$$

V. STATE APPROXIMATION

Let us now consider the singularly perturbed model (6), with the initial state conditions: $x(t_0) = x_0$ and $z(t_0) = z_0$. Applying the change of variable, defined by (10), (11) and (12), we get:

$$\begin{aligned} d\Theta/dt &= [A_{11} - A_{12}L(t)]\Theta + [B_1 - \varepsilon H(t)L(t)B_1]r \\ &\quad + [A_{13} - \varepsilon H(t)L(t)A_{13} - H(t)A_{23}(t)]h, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon d\eta/dt &= [A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)A_{12}] \eta + \varepsilon L(t)B_1 r \\ &\quad + [A_{23}(t) + \varepsilon L(t)A_{13}] h \end{aligned} \quad (21)$$

where the initial conditions are:

$$\Theta(t_0) = [I_n - \varepsilon H(t_0)L(t_0)]x_0 - \varepsilon H(t_0)z_0, \quad (22)$$

$$\eta(t_0) = L(t_0)x_0 + z_0. \quad (23)$$

The solution of (20)-(23), when transformed back using the inverse of (10), yields the exact solution of (6). Asymptotic approximations to the solution of (6) with $\mathcal{O}(\varepsilon)$ error can be obtained by retaining $\mathcal{O}(\varepsilon)$ approximations of the right hand side coefficients of (20)-(23). This process for the slow system yields:

²Kokotović [9] considers in general $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$ errors.

$$\begin{aligned} dx_s/dt &= A_0 x_s + A_q h + B_1 r \\ A_q &= A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{23}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

For the fast system, we change the time scale as, $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$, with this change, the derivative for the fast system is $\frac{d}{dt}z_f(\tau) = \frac{d}{d\tau}z_f(\tau)\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\tau}z_f(\tau)$, this reduces the approximation problem to a problem with regular perturbation of right hand side coefficients, following the process as in (24) the equation for the fast system is:

$$\frac{d}{d\tau}z_f(\tau) = A_{22}(0, t_0)z_f(\tau) + A_{23}(t_0 + \varepsilon\tau)h(t_0 + \varepsilon\tau). \quad (25)$$

and the initial conditions are:

$$\begin{aligned} x_s(t_0) &= x_0 \\ z_f(0) &= A_{22}^{-1}(0, t_0)A_{21}(t_0)x_0 + z_0 \end{aligned} \quad (26)$$

where

$$A_0 = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0$$

the equations (24) and (25) have the slow and fast systems derived by formally neglecting ε in (6).

We obtain in this way, the following particularization of Theorem 6.1 in [9] for our case study:

Theorem 2: Given the matrix $A_{22}(\varepsilon, t)$, the properties (7) and $\|q\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Then there exist a $\varepsilon^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ the following expressions hold uniformly on $t \in [t_0, t_f]$:

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (27)$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x_s(t) + z_f\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (28)$$

where x_s and z_f are solutions of (24) and (25), with the initial conditions (26).

In order to show how to synthesize the results of this paper, we consider the following illustrative example.

VI. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

Let us consider the following system:

$$d^3y/dt^3 + a_3(t)d^2y/dt^2 + a_2(t)dy/dt + a_1(t)y = b(t)u \quad (29)$$

with parameters:

$$\begin{cases} a_1(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{1}{2j-1} \sin((2j-1)t) \\ a_2(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sin\left(\frac{j}{2}t\right) \\ a_3(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{j}{(2j-1)(2j+1)} \sin(4jt) \\ b(t) = 1 + 0.568(\sin(t) + \sin(2t)) \end{cases} \quad (30)$$

The state representation is:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta \end{aligned} \quad (31)$$

From (4) and (5), the control $u(t)$ is as follows:

$$\varepsilon u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

and the equalizer filter is:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_3 + (1 + \ell) \\ 0 & 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} (\zeta + h) + \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (33)$$

where the parameters \bar{a}_1 , \bar{a}_2 and \bar{a}_3 are the coefficients of the Hurwitz polynomial:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 0.92\lambda^2 + 0.25\lambda + 0.02$$

From Theorem 1 and Lemma 1 we can compute the parameters K , β , τ and ε :

$$K = 0.5, \beta = 10, \tau = 0.1, \varepsilon \in (0, 0.18), \varepsilon = 0.09$$

In order to satisfy H3, $r \in L^\infty \cap C^\infty$, the reference r has been chosen as follows:

$$r(t) = \frac{10}{2.75} \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma, \quad t \in [0, 100]$$

where:³ $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-(t')^2}}$, with $t' = (12/75)t - 1$.

In Figure 1 we show MATLAB[®] numerical simulations for the time varying system (31) and (30), controlled by (32) and (33), with an unit step reference. The matching model error is computed as follows:

$$|y(t) - y^*(t)| = \left| y(t) - \bar{C} \int_0^t \exp(\bar{A}_0(t - \sigma)) \bar{B} r(\sigma) d\sigma \right|.$$

where:

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.02 & -0.25 & -0.92 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.02 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

VII. CONCLUSION

In this paper, we have proposed a singular implicit control scheme for linear time varying SISO systems. The control scheme is composed by the *singularly perturbed control law* (4) and the *equalizer filter* (5).

The aim of the *equalizer filter* is: to assign the closed loop dynamics, and to assign a rate of exponential convergence. The aim of the *singularly perturbed control law* is: to bring the system into a *singularly perturbed model*, and to close the desired dynamics by an ε order.

Parameters, β and τ , enable us to compute a sufficiently small ε such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed model* is guaranteed.

We have considered the perturbation signal h in order to take into account the effects of some high gain observer. Now, we are working on developing a singularly perturbed observer which aim is to obtain the observed state $\hat{\zeta} = \zeta + h$, where $h = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

³The function φ is taken from Definition 2.4.5 in [13].

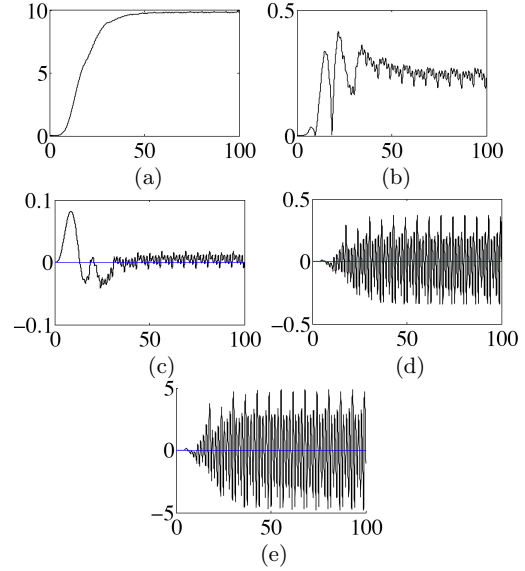


Fig. 1. Control variables: (a) output y , (b) matching model error $|y - y^*|$, (c) equalizer filter signal x_3 , (d) equalizer filter signal x_4 , and (e) control law u .

APPENDIX I PROOFS

1) *Proof of Theorem 1:* From (15) and (16), the transition matrix of the **decoupled system** satisfies:

$$\hat{\phi}(t, s) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0_{n, m} \\ 0_{m, n} & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\frac{d\hat{\phi}(t, s)}{dt} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}L(t) & 0_{n, m} \\ 0_{m, n} & \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t) + L(t)A_{12} \end{bmatrix} \hat{\phi}(t, s) \quad (35)$$

From [14], the transition matrix $\phi(t, s)$ of (8), the transition matrix (34) and $M(t)$ defined in (10) satisfy the relation:

$$\phi(t, s) = M^{-1}(t) \hat{\phi}(t, s) M(s)$$

$$\phi(t, s) = M^{-1}(t) \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0_{n, m} \\ 0_{m, n} & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} M(s) \quad \forall t \geq s \quad (36)$$

Because the transition matrix $\hat{\phi}_s(t, s)$ satisfies $\frac{d}{dt} \hat{\phi}_s(t, s) = [A_{11} - A_{12}L(t)] \hat{\phi}_s(t, s)$ and the transition matrix $\hat{\phi}_f(t, s)$ satisfies $\varepsilon \frac{d}{dt} \hat{\phi}_f(t, s) = [A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)A_{12}(t)] \hat{\phi}_f(t, s)$, from the properties (18), we get: $\|\hat{\phi}_s(t, s)\| \leq K_1 e^{-\beta(t-s)}$. Using Lemmas 2.2 and 2.3 of Chapter 5 in [9], we have: $\|\hat{\phi}_f(t, s)\| \leq e^{-(b_1 + \varepsilon(L_{0,a} - \bar{a}_n + 1 - \beta + 1/\tau))(t-s)/\varepsilon}$. Thus, for sufficiently small ε , we get from (36):

$$\|\phi(t, s)\| = \|M^{-1}(t)\| \left\| \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0_{n, m} \\ 0_{m, n} & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} \right\| \|M(s)\| \leq K_3 \max \left[\|\hat{\phi}_s(t, s)\|, \|\hat{\phi}_f(t, s)\| \right]$$

which implies:

$$\|\phi(t, s)\| \leq K_3 \max[K_1, K_2] e^{-\min\{\beta, b_1 + L_{0a} - \bar{a}_n + 1 + \ell\}(t-s)}.$$

□

2) *Proof of Lemma 1:* Let us consider the definite positive function, $\nu(t) = \alpha_1 V(t, x(t)) + \alpha_2 W(t, x(t), z(t))$, as a Lyapunov function candidate, where $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $V(t, x(t)) = \int_t^\infty \|\phi_s(\tau, t)x(t)\|_2 d\tau$, and $W(t, x(t), z(t)) = \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)(z(t) - \bar{L}_0 x(t))\|_2 d\tau$.

Let us compute $\partial\nu(t)/\partial t$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\nu(t)}{\partial t} &= \alpha_1 \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} \\ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T [\phi_s(\tau, t)x(t)]} d\tau - \|x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{1}{2\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|} 2[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_s(\tau, t)x(t) \right) \\ &\quad + \phi_s(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} x(t) d\tau - \|x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{[\phi_s(\tau, t)x(t)]^T}{\|\phi_s(\tau, t)x(t)\|} \phi_s(\tau, t) A_{12} [\bar{L}_0 x(t) + z(t)] d\tau \\ &\quad - \|x(t)\| \\ &\leq \int_t^\infty \|\phi_s(\tau, t)\| \|A_{12}\| \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\| d\tau \\ &\quad - \|x(t)\| \\ &\leq \int_t^\infty K \bar{M}_1 e^{-\beta(\tau-t)} d\tau \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\| \\ &\quad - \|x(t)\| \\ &\leq \frac{\bar{M}_1 K}{\beta} \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\| - \|x(t)\| \\ \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\| d\tau \\ &\quad - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|} \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi_f(\tau, t)(z(t) \right. \\ &\quad \left. + \bar{L}_0 x(t)) + \phi_f(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} (z(t) + \bar{L}_0 x(t)) \right] d\tau \\ &\quad - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|} [\phi_f(\tau, t) \\ &\quad \left(-\frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t) z(t) - \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t) \bar{L}_0 x(t) \right)] d\tau \\ &\quad + \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|} [\phi_f(\tau, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} z(t) \right. \\ &\quad \left. + \bar{L}_0 \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right)] d\tau - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \\ &= \int_t^\infty \frac{[\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))]^T}{\|\phi_f(\tau, t)(z(t) + \bar{L}_0 x(t))\|} \{ \phi_f(\tau, t) [\bar{L}_0 A_0(t)] x(t) \\ &\quad + \bar{L}_0 A_{12}(t) [z(t) + \bar{L}_0 x(t)] \} d\tau - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \\ &\leq \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)\| \left\{ \|\bar{L}_0 A_0\| \|x(t)\| \right. \\ &\quad \left. + \|\bar{L}_0 A_{12}(t)\| \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\| \right\} d\tau - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \\ &\leq \varepsilon \frac{\bar{M}_3}{b_1} \|x(t)\| - \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{M}_2}{b_1} \right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\nu(t)}{\partial t} &= \alpha_1 \frac{d}{dt} V(t, x(t)) + \alpha_2 \frac{d}{dt} W(t, x(t), z(t)) \\ &\leq - \left(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{\bar{M}_3}{b_1} \right) \|x(t)\| \\ &\quad - \left(\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{M}_2}{b_1} \right) - \alpha_1 \frac{\bar{M}_1 K}{\sigma_s} \right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \end{aligned}$$

Then, $\frac{d}{dt}\nu(t)$ will be negative definite if α_1 and α_2 can be chosen such that: $\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \bar{M}_3/b_1 > 0$ and $\alpha_2 (1 - \varepsilon \bar{M}_2/b_1) - \alpha_1 \bar{M}_1 K/\beta > 0$. This is possible if:

$$\varepsilon \bar{M}_3/b_1 < \alpha_1/\alpha_2 < \beta(b_1 - \varepsilon \bar{M}_2)/(\bar{M}_1 K b_1)$$

Then, it is sufficient that ε satisfies:

$$\varepsilon < (\beta/(\bar{M}_1 K))/(\bar{M}_3/b_1 + \bar{M}_2\beta/(\bar{M}_1 K b_1)),$$

namely: $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$, where: $\varepsilon_1^* = \beta b_1/(K \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta \bar{M}_2)$.

□

3) *Proof of Theorem 2:* The transition matrix of the homogeneous part of (21) satisfies the inequality $\|\phi(t, s)\| \leq K e^{-b_1(t-s)/\varepsilon}$. Using this, the contribution of the input term $\varepsilon L(t)B_1(t)r(t)$ is $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Using again Lemmas 2.2 and 2.3 in [9], we see that the homogeneous part of (21) can be approximated by $A_{22}(0, t_0)\eta(t)$, which yields $\eta(t) = z_f((t-t_0)/\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Comparison of (20),(22) with (23) and use of regular perturbations results (see [4]) yield $\Theta(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Using the inverse of the decoupling transformation (10), we get $x(t) = \Theta(t) + \varepsilon H(t)\eta(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ and $z(t) = -L(t)\Theta(t) + (I - \varepsilon L(t)H(t))\eta(t) = -A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x_s(t) + z_f\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, which complete the proof. □

REFERENCES

- [1] H. Broulès and B. Marinescu. *Poles and Zeros at Infinity of Linear Time Varying Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control. vol. 44, No. 10, pp. 1981-1985, October, 1999.
- [2] M. S. Chen and Y. R. Huang. *Linear Time Varying System Control Based on the Inversion Transformation*, Automatica. vol. 33, No. 4, pp. 683-688, 1997.
- [3] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press. 1975.
- [4] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience. 1969.
- [5] G. H. Hardy. *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 10th edition. 1975.
- [6] A. Ichikawa and H. Katayama. *Lecture Notes in Control and Information Science*, Springer, No. 265. 2001.
- [7] E. W. Kamen. *The Poles and Zeros of a Linear Time Varying System*, Linear Algebra and its Applications. No. 98, pp. 263-289, 1988.
- [8] E. W. Kamen, P. P. Khargonekar and A. Tannenbaum. *Control of Slowly-Varying Linear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control. vol. 34, No. 12, pp. 1283-1285, December 1989.
- [9] P. V. Kokotović, H. K. Khalil and J. O'Reilly. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Academic Press. 1986.
- [10] B. Marinescu and H. Broulès. *The exact Model Matching Problem for Linear Time Varying Systems: An algebraic Approach*, IEEE Transaction on Automatic Control. vol. 48, No. 1, pp. 166-169, January, 2003.
- [11] B. Marinescu. *Model Matching Topics for Linear Time Varying Systems: Computation Rules in an Algebraic Approach*, Proceedings of the American Control Conference. New York City, USA, pp. 4357-4362, July 11-13, 2007.
- [12] B. Marinescu. *Model Matching and Decoupling for Continuous and Discrete Time Linear Time Varying Systems*, International Journal of Control. vol. 82, No. 6, pp. 1018-1028, June, 2009.
- [13] J. W. Polderman and J. C. Willems. *Introduction to Mathematical System Theory*, Text in Applied Mathematics, Springer, 1997.
- [14] L. M. Silverman. *Realization of Linear Dynamical Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control. vol. AC 16, No. 6, pp. 554-567, December, 1971.
- [15] F. Wu. *Control of Parameter Varying Linear Systems*, Dissertation of Doctor of Philosophy Degree, University of California at Berkeley, 1995.
- [16] L. Xiaobo and Z. Kemin. *A Time Domain Approach to Robust Fault Detection of Linear Time Varying Systems*, Automatica. vol. 45, pp. 94-102. 2009.

Apéndice H

CDC 2011

El siguiente artículo fué presentado en el Conference on Decision and Control 2011, el día 12 de diciembre de 2011 en la ciudad de Orlando, FL, USA.

Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO System. Part II: State Observation

S. Puga, M. Bonilla and M. Malabre.

Abstract—This paper considers the problem of stabilizing a single-input single-output linear time varying system using a low order controller and an equalizer filter. The closed loop is a linear singularly perturbed system with uniform asymptotic stability behavior. Following the results of Kokotović’s book, we show how to design a control scheme, control law plus state observer, such that the system dynamics is assigned by a Hurwitz polynomial with constant coefficients. We calculate bounds, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, for guaranteeing the uniform asymptotic stability of the singularly perturbed closed loop system.

NOTATION

- $\underline{\chi}_k^i \in \mathbb{R}^k$ stands for the vector which the i -th entry is equal to 1 and the other ones are equal to 0. $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ stands for the identity matrix of size k . $T_u\{v^T\}$ stands for the upper triangular Toeplitz matrix, which first row is v^T . $T_l\{v\}$ stands for the lower triangular Toeplitz matrix, which first column is v . $0_{\mu, \nu} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}$ stands for the zero matrix, or simply 0_μ when $\mu = \nu$. And $0_\nu \in \mathbb{R}^\nu$ stands for the zero vector. $BDM\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ denotes a block diagonal matrix whose diagonal blocks are $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$.
- Given a vector function $f(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $\|f(\cdot)\| = \|f(\cdot)\|_2$ and for a function matrix $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|A(\cdot)\| = \|A(\cdot)\|_2$, see [2]. A vector function $f(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^n$ is said to be $\mathcal{O}(\varepsilon)$ over an interval $[t_1, t_2]$ if there exist positive constants K and ε^* such that $\|f(\varepsilon, t)\| \leq K\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$, $\forall t \in [t_1, t_2]$, see [4].

I. INTRODUCTION

This paper is a continuation of [14], where we have proposed a control law for SISO time varying systems, $d\zeta/dt = A(t)\zeta + B(t)u$, based on the singular perturbations approach [8], where the knowledge of the time varying parameters is not required, but only some bounds. The aim of such a control law is to approximately match the closed loop system to a given time-invariant linear state space system represented by $dx_s/dt = A_0x_s + B_1r$. We

S. Puga, UPIITA-IPN ACADEMIA DE SISTEMAS. AV. IPN 2580 CP 07340 MÉXICO D.F, spuga@ipn.mx.

M. Bonilla, CINVESTAV-IPN, CONTROL AUTOMÁTICO, UMI 3175 CINVESTAV-CNRS. A.P. 14-740. MÉXICO 07000, mbonilla@cinvestav.mx.

M. Malabre, IRCCyN, CNRS UMS 6597, B.P. 92101, 44321 Nantes, Cedex 03, FRANCE. Michel.Malabre@irccyn.ec-nantes.fr

are now incorporating the observation problem to the control law proposed in [14], following also the singularly perturbed framework.

The synthesis of observers based on the singularly perturbed systems approach is not new, see for example [13], [5], [6]. With respect to the case of linear time varying systems two important papers are [7] and [11].

In [11] the synthesis of the state observer is realized by separating a classical full order Luenberger observer into the slow and fast subsystems, one observer is for the slow subsystem and the other observer is for the fast subsystem. For the stability analysis of the closed loop system, the knowledge of the parameters system is required.

In [7], the observer is only synthesized for the slow subsystem. For the stability analysis of the closed loop system, the knowledge of the parameters system is again required.

In this paper, we propose a high gain observer, for SISO time varying systems, based on the singular perturbations approach, where the knowledge of the parameters is not required. We only need the knowledge of some bounds on the parameters system. Based on these bounds, we give an upper bound, $\varepsilon^* > 0$, for the singularly perturber parameter, ε , such that for a positive ε smaller than ε^* , the closed loop stability is guaranteed.

The paper is organized as follows. The problem is first stated in section II. Next, in Section III we recall the singularly perturbed linear control law, proposed in [14], which aim is to lead the closed loop into the Kokotović’s singularly perturbed system model. In Section IV we propose a high gain observer, by a proper approximation. In Section V we study the stability of the system and the observer together. Finally, in Section VI we give an academic example. All the proofs are sent to the Appendix.

II. SYSTEM DEFINITION AND REPRESENTATION FORM

Let us consider a Linear Time Varying System (LTVS), which dynamics is represented by:

$$\frac{d^n}{dt^n}y + a_n(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \dots + a_2(t)\frac{d}{dt}y + a_1(t)y = b(t)u \quad (1)$$

defined for $t \geq t_0 \geq 0$, with initial conditions: $y(t_0)$, $dy(t_0)/dt, \dots, d^{n-1}y(t_0)/dt^{n-1}$, where $y \in \mathbb{R}$ is the

dependent variable, $u \in \mathbb{R}$ is the input, at time $t \in J = [0, \infty)$. The coefficients, $a_i(t)$ and $b(t)$, are unknown and such that:¹

- H1 $a_i(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$, $\|a_i(t)\| \leq L_{0,a}$ and $\|\frac{d}{dt}a_i(t)\| \leq L_{1,a}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall t \in J$.
H2 $b(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$, $0 < b_1 \leq b(t) \leq b_2$ and $\|\frac{d}{dt}b(t)\| \leq c$, $\forall t \in J$.

A simple device can be used to recast this differential equation into the form of a linear state equation with input u and output y . Defining the state variables as $\zeta^T = [y \quad dy/dt \quad \dots \quad d^{n-1}y/dt^{n-1}]$, we then get time varying linear state equation:

$$\begin{aligned} d\zeta/dt &= A(t)\zeta + B(t)u \\ A(t) &= \left(T_u \{(\chi_n^2)^T\} - \chi_n^n (\underline{a}_n(t))^T \right) \\ B(t) &= b(t) \chi_n^n \\ y(t) &= C\zeta, \quad C = (\chi_n^1)^T, \end{aligned} \quad (2)$$

where: $\underline{a}_k(t) = [a_1(t) \quad \dots \quad a_k(t)]^T$, $k \in \{1, \dots, n\}$; the initial state condition is: $\zeta(t_0) = [y(t_0) \quad dy(t_0)/dt \quad \dots \quad d^{n-1}y(t_0)/dt^{n-1}]^T$.

III. SINGULARLY IMPLICIT CONTROL LAW

For the state space representation (2) we have proposed in [14] the following control law, composed by a singularly perturbed control law and an equalizer filter,

Singularly perturbed control law

$$\varepsilon u = -(\chi_n^n)^T(\zeta + h) + (\chi_2^1)^T \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Equalizer filter

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\underline{a}_n)^T + (1+\ell)(\chi_n^n)^T \\ -(\beta-1)(\chi_n^n)^T \end{bmatrix} (\zeta + h) + \begin{bmatrix} -(1+\ell) & -\ell \\ (\beta-1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \chi_2^1 r \quad (4)$$

where: $\ell = 1/\tau - \beta$ and $\underline{a}_k = [\bar{a}_1 \quad \dots \quad \bar{a}_k]^T$, with: $k \in \{1, \dots, n\}$; β , τ and ε are positive parameters; and $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ are the coefficients of the Hurwitz polynomial $p(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_n \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_2 \lambda + \bar{a}_1$. r is a signal reference and h is a perturbation, such that:

- H3 $r \in L^\infty \cap \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$.
H4 h is bounded continuous real function, which norm is of order ε .

The aim of the *equalizer filter* is:

- 1) To assign the closed loop dynamics at a time invariant linear system with the Hurwitz characteristic polynomial $p(\lambda)$.
- 2) To assign a rate of exponential convergence to the desired dynamics.

The aim of the *singularly perturbed control law* is:

¹For simplicity, in this paper we only consider functions of class $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$. But it could be considered functions of class \mathcal{C}^k , where k is a sufficiently positive large integer such that the derivability conditions were fulfilled. See also Corollary 2.4.12 of [12].

- 1) To change the base representation system for obtaining a *singularly perturbed model*.
- 2) To close the desired dynamics by an ε order.

The perturbation signal h is considered, in order to take into account the effects of the high gain observer, which is considered in Section IV. The closed loop system is represented by the following singularly perturbed description:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ \varepsilon dz/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}(\varepsilon, t) & A_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23}(t) \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (5)$$

where $x = [\zeta_1 \quad \dots \quad \zeta_{n-1} \quad x_n \quad x_{n+1}]^T$, $z = \zeta_n$ and:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} T_u \{(\chi_{(n-1)}^2)^T\} & \underline{0}_{(n-1)} & \underline{0}_{(n-1)} \\ -(\underline{a}_{(n-1)})^T & -(1+\ell) & \ell \\ (\underline{0}_{(n-1)})^T & (\beta-1) & -\beta \end{bmatrix} \\ A_{12} &= \begin{bmatrix} \chi_{(n-1)}^{(n-1)} \\ -\bar{a}_n + (1+\ell) \\ -(\beta-1) \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \underline{0}_{(n-1)} \\ \chi_2^1 \end{bmatrix}, \\ A_{21}(\varepsilon, t) &= \begin{bmatrix} -\varepsilon(\underline{a}_{(n-1)}(t))^T & b(t) & 0 \\ A_{22}(\varepsilon, t) = [-\varepsilon a_n(t) - b(t)], \end{bmatrix} \\ A_{13} &= \begin{bmatrix} \underline{0}_{(n-1)} & \underline{0}_{(n-1)} \\ -(\underline{a}_{(n-1)})^T & -\bar{a}_n + (1+\ell) \\ (\underline{0}_{(n-1)})^T & -(\beta-1) \end{bmatrix} \\ A_{23}(t) &= \begin{bmatrix} \underline{0}_{(n-1)} & \underline{0}_{(n-1)} \\ (\underline{0}_{(n-1)})^T & b(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note that the matrix $A_{22}(0, t)$ satisfies for all $t \in J$:

$$\begin{aligned} \|A_{22}(0, t)\|_2 &\leq b_2 \\ \|\frac{d}{dt}A_{22}(0, t)\|_2 &\leq c \quad \text{and} \\ -b_2 &\leq \Re \lambda(A_{22}(0, t)) \leq -b_1 \end{aligned} \quad (6)$$

In [14], we have obtained the following particularization of Theorem 4.1, Lemma 4.1 and Theorem 6.1 in [8] for our case study:

Theorem 1: Given the matrix $A_{22}(\varepsilon, t)$, the properties (6) and $\|h\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$. If:

$$\begin{aligned} \bar{a}_n + \beta &> 1 \\ \tau &< 1/(\bar{a}_n + \beta - 1) \quad \text{and} \\ \varepsilon_1^* &= \frac{\beta b_1}{\beta M_2 + K M_1 M_3}, \end{aligned} \quad (7)$$

where:

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \sqrt{1 + (\bar{a}_1 - \frac{1}{\tau})^2 + 2(1-\beta)^2}, \\ \bar{M}_2 &= \left| \bar{a}_1 + \beta - \frac{1}{\tau} - 1 \right| \\ \bar{M}_3 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 + (\beta - \frac{1}{\tau})^2} \end{aligned}$$

are satisfied, then the singularly perturbed description (5) is uniformly asymptotically stable for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$. Moreover, for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$ the following expressions hold uniformly on $t \in [t_0, t_f]$:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \text{and} \\ z(t) &= -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x_s(t) + z_f((t-t_0)/\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (8)$$

where x_s is solution of the slow system, $dx(t)/dt = A_{11}x + A_{12}z$ and $\varepsilon dz/dt = A_{21}(\varepsilon, t)x + A_{22}(\varepsilon, t)z$,

and z_f is solution of the fast system, $dz_f(\tau)/d\tau = A_{22}(0, t_0)z_f(\tau) + A_{23}(t_0 + \varepsilon\tau)h(t_0 + \varepsilon\tau)$, with the initial conditions: $x_s(t_0) = x_0$ and $z_f(0) = A_{22}^{-1}(0, t_0)A_{21}(t_0)x_0 + z_0$.

IV. SINGULARLY PERTURBED OBSERVER

In this section we are going to assume that the state is no longer available, so we have to observe it. Since the signals, $a_i(t)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, are unknown (see Hypothesis H1), we have to use a high gain observer. We use in fact, the proper approximation of a non proper system proposed by [9]. Indeed, let us consider the ideal observer (*c.f.* (2)):

$$Ndw/dt = w(t) - \Gamma y \quad ; \quad \bar{y} = (\underline{\chi}_{(\bar{n}+1)}^{(\bar{n}+1)})^T w \quad (9)$$

where for our case: $N = T_\ell\{\underline{\chi}_{(\bar{n}+1)}^2\}$ and $\Gamma = \underline{\chi}_{(\bar{n}+1)}^1$. y , \bar{y} and w are the input, the output and the descriptor variables, respectively, and $\bar{n} = n - 1$.

In [9], the authors proposed the following singularly perturbed proper approximation:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \\ \varepsilon \frac{d\bar{z}}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\beta_f & -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \\ \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} & -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ \bar{z} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \varepsilon^{\bar{n}}q_{(1,2)} \\ -Q_0\underline{\chi}_{(\bar{n}+1)}^1 \end{bmatrix} y \end{aligned} \quad (10)$$

$$y_f = (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \bar{z} - \frac{1}{\varepsilon}q_{(1,2)}y$$

where $x_f \in \mathbb{R}^1$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, and $y_f \in \mathbb{R}^1$. β_f and ε are two positive real numbers. $U_{\bar{n}}$ and $M_{\bar{n}}$ are the Butterworth filter's matrices [1], namely:

$$\begin{aligned} U_{\bar{n}} &= T_u\{(\underline{\chi}_{\bar{n}}^2)^T\}, \\ M_{\bar{n}} &= \begin{cases} BDM\{M_1, \dots, M_{\bar{n}/2}\} & , \text{ for } \bar{n} \text{ even} \\ BDM\{M_1, \dots, M_{(\bar{n}-1)/2}, 1\} & , \text{ for } \bar{n} \text{ odd} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} M_j &= (\sin \theta_j)I_2 + T_\ell\{(\cos^2 \theta_j)\underline{\chi}_2^2\}, \quad \theta_1 = \pi/(2\bar{n}), \\ \theta_{j+1} &= \theta_j + \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \pi/\bar{n}, \quad j \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_{\bar{n}} + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})) &= \\ \begin{cases} \prod_{i=1}^{\bar{n}/2} ((\lambda + \sin \theta_i)^2 + \cos^2 \theta_i), & \text{for } \bar{n} \text{ even} \\ (\lambda + 1) \prod_{i=1}^{(\bar{n}-1)/2} ((\lambda + \sin \theta_i)^2 + \cos^2 \theta_i), & \text{for } \bar{n} \text{ odd} \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

The matrix $Q_0 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times (\bar{n}+1)}$ is obtained by solving the following algebraic system equations:²

$$Q_0 \left(\frac{1}{\varepsilon}N \right) + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1}Q_0 = -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1}\underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}}(\underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T \quad (14)$$

$$R_0 = -\frac{1}{\varepsilon}Q_0N \quad (15)$$

²Let us recall that the eigenvalues of the Butterworth filter are all different, and placed over the semi-circle of radius $1/\varepsilon$, on the left-half complex plane; thus $\text{Spectrum}(N) \cap \text{Spectrum}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} = \emptyset$, hence there exists a unique solution for these equations [3].

And the number $q_{(1,2)}$ corresponds to entry (1,2) of matrix Q_0 .

In [9] is proved the following Theorem (*c.f.* Theorem 5.1 in [8]):

Theorem 2 ([9]): Let us consider the following Butterworth Filter:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \\ \varepsilon \frac{dz_f}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\beta_f & -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \\ \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} & -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ z_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{bmatrix} \bar{y} \\ y_f &= (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T z_f \end{aligned} \quad (16)$$

with the initial conditions: $x_f(0) \in \mathbb{R}^1$ and $z_f(0) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$. Then there exists $\varepsilon^* \in (0, 1)$, such that for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$:

- 1) The cascade formed by (9) and (16) is externally equivalent to (10)³.
- 2) The output, y_f , of system (10), satisfies:

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + e^{-(\beta+\varepsilon^n)t}x_f(0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \\ &= \zeta_n(t) + e^{-(\beta+\varepsilon^n)t}x_f(0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \quad \forall t \geq t^* \end{aligned} \quad (17)$$

where $t^* = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\sin \theta_1 - \sqrt{2\varepsilon^n}} \ln(1/\sqrt{\varepsilon})\right)$.

In the Appendix -A we show the key points of the proof of this Theorem, which enable us to build the matrices Q_0 and R_0 .

Corollary 1: There exist matrices, D_1 and D_2 ,

$$D_1 = -\widehat{Q}_0^{-1}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \quad \text{and} \quad D_2 = -\widehat{Q}_0^{-1}\underline{q}_1, \quad (18)$$

where: $\widehat{Q}_0 = [\underline{q}_2 \quad \underline{q}_3 \quad \dots \quad \underline{q}_{\bar{n}+1}]$, and the \underline{q}_i are the column vectors of matrix Q_0 for $i \in \{1, \dots, \bar{n} + 1\}$, such that:

$$\begin{aligned} \zeta_f(t) &= \zeta(t) + h(t) = D_1\bar{z}(t) + D_2y(t) \\ h(t) &= \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \forall t \geq t^*. \end{aligned} \quad (19)$$

Furthermore: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta_f(t) = \zeta(t)$.

V. CLOSED LOOP SYSTEM

Applying the control scheme composed by: the singularly perturbed control law (3), the equalizer filter (4), and the singularly perturbed observer, (10) and (19), we get the closed loop system described by (5).

Now, in view of Corollary 1, Theorems 1 and 2 we conclude the stability of the closed loop system (5).

In order to show how to synthesize the results of this paper, we consider the following illustrative example.

VI. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

Let us consider a LTVS represented by (1) with $n = 3$ and with parameters:

$$\begin{cases} a_1(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{1}{2^{j-1}} \sin((2j-1)t) \\ a_2(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sin\left(\frac{jt}{2}\right) \\ a_3(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{j}{(2j-1)(2j+1)} \sin(4jt) \\ b(t) = 1 + 0.568(\sin(t) + \sin(2t)) \end{cases} \quad (20)$$

³That is to say, the representation, (9), (11), (12) and (16), and the representation, (10), (11), (12), (14) and (15), have the same input-output trajectories (see for example [12]).

Note that $b_1 = 0.5$. The state representation is given by (2) with:

$$\mathbf{a}_3(t) = [a_1(t) \ a_2(t) \ a_3(t)]^T \quad (21)$$

The parameters \bar{a}_1 , \bar{a}_2 and \bar{a}_3 , of the equalizer filter (4), are the coefficients of the following Hurwitz polynomial $p(\lambda) = \lambda^3 + 0.92\lambda^2 + 0.25\lambda + 0.02$, namely:

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = (0.02, 0.25, 0.92) \quad (22)$$

Since $\bar{a}_3 = 0.92$, then the selection, $\beta = 10$ and $\tau = 0.1$, satisfies inequalities (7). From (7), we get: $\varepsilon_1^* = 0.18$, then $\varepsilon \in (0, 0.18)$; let us take $\varepsilon = 0.09$, namely:

$$(\varepsilon, \beta, \tau) = (0.09, 10, 0.1) \quad (23)$$

Since $\bar{n} = n - 1 = 2$, then $\theta_1 = \pi/4$ (see (12)). And the other matrix Q_0 of the observer (10) is (see (29)):

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\varepsilon^2 & -1/\varepsilon & 0 \\ 0 & 1/(\sqrt{2}\varepsilon) & -1 \end{bmatrix}. \text{ Then: } \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\varepsilon^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$q_{(1,2)} = -1/\varepsilon, \quad \widehat{Q}_0 = \begin{bmatrix} -1/\varepsilon & 0 \\ 1/(\sqrt{2}\varepsilon) & -1 \end{bmatrix} \text{ and } \widehat{Q}_0^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}. \text{ Based on the proof of Corollary 1, we get: }^4 \beta_f = 10. \text{ Thus the singularly perturbed observer (10) takes the following form:}$$

$$\begin{aligned} dx_f/dt &= -10x_f - (0.09)^3 [1 \ 0] \bar{z} - (0.09)y \\ d\bar{z}/dt &= \frac{1}{0.09} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_f - \frac{1}{0.09} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \bar{z} \\ &\quad - \frac{1}{0.09} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/(0.09)^2 \\ 0 \end{bmatrix} y \\ y_f &= [1 \ 0] \bar{z} + (1/(0.09)^2)y \end{aligned} \quad (24)$$

From (18) and (19) in Corollary 1, we can compute ζ_f ,

$$\zeta_f = \begin{bmatrix} \varepsilon/\sqrt{2} & -\varepsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{z} + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\varepsilon \\ 1/\varepsilon^2 \end{bmatrix} y \quad (25)$$

The ideal model to match is:

$$d^3 y^*/dt^3 + 0.92d^2 y^*/dt^2 + 0.25dy^*/dt + 0.02y^* = r.$$

In order to satisfy H3, $r \in C^\infty(J, \mathbb{R})$, the reference r has been chosen as follows:

$$r(t) = \frac{10}{2.75} \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma, \quad t \in [0, 100]$$

where:⁵ $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-(t')^2}}$, with $t' = (12/75)t - 1$.

A MATLAB[®] numerical simulation was performed with the solver settings: “Start time” = 0.0, “Stop time” = 100, “Type” = “Fixed-Step”, “Solver” = “ode45 Runge-Kutta”, “Fixed-step size” = 0.04, “Periodic sample time constraint” = “Unconstrained”, “Tasking mode for periodic sample times” = “auto”. In Fig. 1, we show the behavior of system, (2), (20) and (21), controlled by (3), (4), (22) and (23), with the state observer (24) and (25). Comparison can be done with the simulations given in [14].

⁴From (40), we have: $A_0 = -\beta - \varepsilon^3$, then from (41) we get: $\beta_f = \beta$.

⁵The function φ is taken from Definition 2.4.5 in [12].

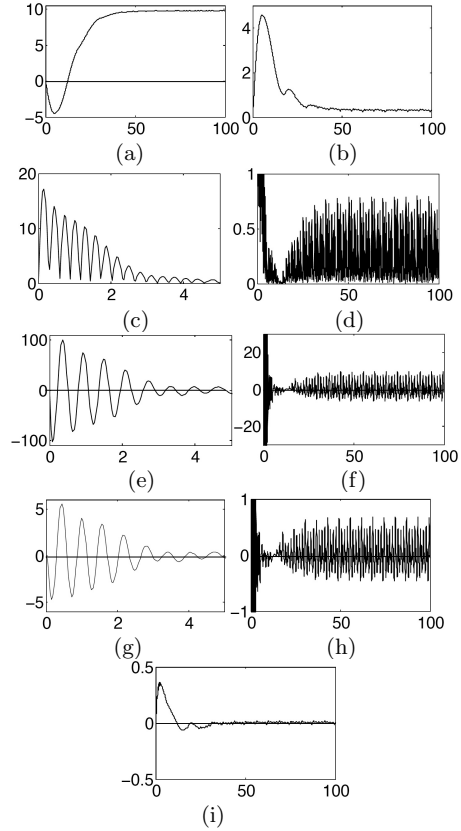


Fig. 1. Control variables: (a) output y , (b) matching model error $|y - y^*|$, (c)–(d) observation error $\|\zeta - \zeta_f\|$, (e)–(f) control law u , (g)–(h) equalizer filter signal x_4 , and (i) equalizer filter signal x_3 .

VII. CONCLUSION

In this paper, we have proposed a singular implicit control scheme for LTVS SISO systems. The control scheme is composed by the *singularly perturbed control law* (3) and the *equalizer filter* (4).

The aim of the *equalizer filter* is to assign the closed loop dynamics, and to assign a rate of exponential convergence. The aim of the *singularly perturbed control law* is to bring the system into a *singularly perturbed model*, and to get a desired dynamics by an ε order.

The parameters, β and τ , enable us to compute a sufficiently small ε such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed model* is guaranteed.

We have considered the perturbation signal h in order to take into account the effects of high gain observer. We have proposed a singularly perturbed observer which aim is to obtain the observed state $\zeta_f = \zeta + h$, where the vector function h is $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Appendix

A. Key points of the proof of Theorem 2

Putting the ideal non proper filter, (9), together with the Butterworth filter, (16), we get the global singularly

perturbed system:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_{\bar{n}} \end{bmatrix}}_{\mathbb{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dw}{dt} \\ \frac{dx_f}{dt} \\ \frac{dz_f}{dt} \end{bmatrix}}_{\mathbb{F}} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_f & -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\chi_{\bar{n}}^1)^T \\ \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}(\chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T & \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} & -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} w \\ x_f \\ z_f \end{bmatrix} \\
&\quad + \underbrace{\begin{bmatrix} -\chi_{\bar{n}+1}^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} y \\
y_f(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & (\chi_{\bar{n}}^1)^T \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} w^T & x_f & z_f^T \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{26}$$

In order to prove the external equivalence between (26) and (10), in [9], the authors have followed the procedure shown hereafter:

- 1) Let us first define two invertible matrices: $Q = \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Q_0 & 0 & I_{\bar{n}} \end{bmatrix}$ and $R = \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ R_0 & 0 & I_{\bar{n}} \end{bmatrix}$, where Q_0 satisfy (14) and (15).
- 2) Let us next note that: $\text{Spectrum}(N) \cap \text{Spectrum}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} = \emptyset$, then (14) has a unique solution (see for example Chapter 8 in [3]).
- 3) Let us now apply matrices Q and R to the matrices of (26): $Q\mathbb{E}R = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_{\bar{n}} \end{bmatrix}$,
 $Q\mathbb{A}R = \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\chi_{\bar{n}}^1)^T R_0 & -\beta_f & -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\chi_{\bar{n}}^1)^T \\ 0 & \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} & -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{bmatrix}$,
 $Q\mathbb{B} = -\begin{bmatrix} \chi_{\bar{n}+1}^1 \\ 0 \\ Q_0 \chi_{\bar{n}+1}^1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{C}R = \begin{bmatrix} R_0^T \chi_{\bar{n}}^1 \\ 0 \\ \chi_{\bar{n}}^1 \end{bmatrix}^T$.
- 4) Let us finally do the change of variable:

$$\bar{z}(t) = z_f(t) - R_0 w(t) \tag{27}$$

Adding its third row with the pre-multiplication of its first row by Q_0 , we get the *externally equivalent* proper system (10).

One way for obtaining the matrices Q_0 and R_0 is the following (see also [10]):

- 1) Let us denote by r_i and q_i the column vectors of matrices R_0 and Q_0 , respectively. Thus from (15), we get:
$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} = \\
& -\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{\bar{n}+1}^2 & \cdots & \chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1} & 0_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} \\
& = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} q_2 & \cdots & q_{\bar{n}+1} & 0_{\bar{n}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{28}$$
- 2) Then, from (14), (15) and (28), we get:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_{\bar{n}} & q_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{bmatrix} = \\
& -\frac{1}{\varepsilon} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \begin{bmatrix} q_2 & \cdots & q_{\bar{n}} & q_{\bar{n}+1} & 0_{\bar{n}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{29}$$

- 3) For solving (29), the columns have to be equated from the last to the first.
- 4) Observe that: $(\chi_{\bar{n}}^1)^T R_0 = -\frac{1}{\varepsilon} q_{(1,2)} (\chi_{\bar{n}}^1)^T$, where $q_{(i,j)}$ is the entry (i, j) of matrix Q_0 .

B. Proof of Corollary 1

We first consider the case $\varepsilon = 0$, and then we analyze the case $\varepsilon > 0$.

- 1) Let us consider for a while that $\varepsilon = 0$, then from (16) and (9), we get:⁶

$$(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{f_0}(t) = (\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}) \bar{y}(t) = (\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}) (\chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T w(t) \tag{30}$$

Substituting (14) and (15) into (30), we obtain the equation:

$$(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{f_0}(t) = [(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) R_0 - Q_0] w(t) \tag{31}$$

Using (27) and (31), the last equation can be written as:

$$(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z}_0(t) = -Q_0 w(t) \tag{32}$$

Because (9) is an ideal observed, the following identity holds:

$$\begin{aligned}
& -\widehat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z}_0(t) = \left[\widehat{Q}_0^{-1} q_1 \mid I_{\bar{n}} \right] \zeta(t) \\
& = \left[\widehat{Q}_0^{-1} q_1 \mid 0_{\bar{n}} \right] \zeta(t) + \left[0_{\bar{n}} \mid I_{\bar{n}} \right] \zeta(t)
\end{aligned} \tag{33}$$

Finally we get:

$$\begin{aligned}
& -\widehat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z}_0(t) - \widehat{Q}_0^{-1} q_1 y(t) = \\
& \left[dy/dt \quad \cdots \quad d^{n-1}y/dt^{n-1} \right]^T
\end{aligned} \tag{34}$$

- 2) Let us now consider the case, $\varepsilon > 0$, which is based on the particular case $\varepsilon = 0$. From (16) and (9) we get:

$$\begin{aligned}
& (d/dt + \beta_f) x_f = -\varepsilon^{\bar{n}+1} (\chi_{\bar{n}}^1)^T z_f \\
& (\varepsilon I_{\bar{n}} d/dt + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})) z_f = \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} x_f + \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} (\chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T w
\end{aligned} \tag{35}$$

If we apply the operator $(d/dt + \beta_f)$ to the second row of the last equation, we then have (recall that (9) is an ideal observer):

$$\begin{aligned}
& (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) z_f = \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} (\chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \zeta \\
& - \varepsilon \left(I_{\bar{n}} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \frac{d}{dt} + \varepsilon^{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} (\chi_{\bar{n}}^1)^T \right) z_f
\end{aligned} \tag{36}$$

taking into account (14), (15) and (27), we have:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \left((M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z} + Q_0 \zeta \right) = \\
& - \varepsilon \left(I_{\bar{n}} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f \right) \frac{d}{dt} + \varepsilon^{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} (\chi_{\bar{n}}^1)^T \right) z_f
\end{aligned} \tag{37}$$

⁶We write, z_{f_0} and \bar{z}_0 , instead of, z_f and \bar{z} , for emphasizing that we are considering the case $\varepsilon = 0$.

This last equation is equivalent to:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} + \beta_f\right) \widehat{Q}_0 \left[\widehat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z} + \widehat{Q}_0^{-1} Q_0 \zeta \right] \\ &= -\varepsilon \left(\mathbf{I}_{\bar{n}} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f\right) \frac{d}{dt} + \varepsilon^{\bar{n}} \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} \left(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1\right)^T \right) z_f \end{aligned} \quad (38)$$

Let us rewrite this last equation in the same form as (33) and (34):

$$\begin{aligned} & \widehat{Q}_0 \left(\frac{d}{dt} + \beta_f\right) h = \varepsilon \bar{h} \\ & \widehat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z} + \widehat{Q}_0^{-1} \underline{q}_1 y \\ & + \left[\frac{dy}{dt} \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \right]^T = -h \quad (39) \\ & \bar{h} = \left(\mathbf{I}_{\bar{n}} \left(\frac{d}{dt} + \beta_f\right) \frac{d}{dt} + \varepsilon^{\bar{n}} \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} \left(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1\right)^T \right) z_f \end{aligned}$$

We can check that system (16) satisfies the invertibility condition of Theorem 3.1 in Chapter 2 in [8]. Indeed, let us first define the matrices:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\beta - \varepsilon^{\bar{n}+1} \left(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1\right)^T (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} \\ & \text{and} \\ A_{22} &= (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{aligned} \quad (40)$$

From (13), we get: $\det(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) = 1$; in [9], the matrix inverse of $(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})$ is computed. Furthermore, we can see from (13) that the \bar{n} eigenvalues are distinct. Then Theorem 3.1 states that the eigenvalues of (16) are approximated as follows:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1(A_0) + \mathcal{O}(\varepsilon) = -\beta_f + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ & \text{and} \\ \lambda_i &= \frac{1}{\varepsilon} (\lambda_1(A_{22}) + \mathcal{O}(\varepsilon)), \quad i \in \{1, \dots, \bar{n}\} \end{aligned} \quad (41)$$

Since matrices A_0 and A_{22} are Hurwitz, then Corollary 3.1 in Chapter 2 in [8] implies that there exists an $\varepsilon^* > 0$, such that (16) is asymptotically stable for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$.

Now, since the input \bar{y} of the filter (16) is obtained by means of the ideal observer (9), and since we have assumed conditions insuring differentiability and boundedness of the related signals (see assumptions H1–H4), it follows that $\bar{h}(t)$ is also a bounded vector function.

Finally, from equation (39) we have:

$$h(t) = \widehat{Q}_0^{-1} e^{-\beta_f t} h(0) + \varepsilon \widehat{Q}_0^{-1} \int_0^t e^{-\beta_f(t-\tau)} \bar{h}(\tau) d\tau$$

then the vector function $h(t)$ tends exponentially to 0 when ε tends to 0. Therefore, from (39) we get:

$$\begin{aligned} & -\widehat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \bar{z} - \widehat{Q}_0^{-1} \underline{q}_1 y(t) = \\ & \left[\frac{dy}{dt} \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \right]^T. \end{aligned} \quad (42)$$

This concludes the proof. \square

REFERENCES

- [1] R. W. Daniels. Approximation Methods for Electronic Filter Design, *McGraw-Hill Book Company, Inc.* 1974.
- [2] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. Feedback Systems: Input-Output Properties, *Academic Press*. 1975.
- [3] F. R. Gantmacher. The Theory of Matrices, *Chelsea Publishing Company New York, N. Y. Vols. I and II*, 1977.
- [4] G. H. Hardy. A Course of Pure Mathematics, *Cambridge University Press, 10th edition.* 1975.
- [5] S. H. Javid. Uniform Asymptotic Stability of Linear Time - Varying Singularly Perturbed Systems, *Journal of The Franklin Institute, Vol. 305, No. 1*, January 1978.
- [6] S. H. Javid. Observing the Slow States of a Singularly Perturbed System, *IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, No. 2*, June 1980.
- [7] S. H. Javid. Stabilization of Time-Varying Singularly Perturbed Systems by Observer-Based Slow-State Feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-27, No. 3*, June 1982.
- [8] P. V. Kokotović, H. K. Khalil and J. O'Reilly. Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design, *Academic Press.* 1986.
- [9] H. Mendez, M. Bonilla and M. Malabre. Singularly Perturbed Derivative Coupling-Filter: The SISO case, *3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control. Foz do Iguassu, Brazil, October 17-19th*, 2007.
- [10] H. Mendez, M. Bonilla, M. Malabre and J. Pacheco. Singularly Perturbed Derivative Coupling-Filter, *17th World Congress, IFAC, Seoul Korea*, July 6-11, 2008.
- [11] J. O'Reilly. Full-order observers for class of singularly perturbed linear time-varying systems, *International Journal of Control, Vol. 30, No. 5*, 1979.
- [12] J. W. Polderman and J. C. Willems. Introduction to Mathematical System Theory, *Text in Applied Mathematics, Springer*, 1997.
- [13] B. Porter. Singular Perturbation Methods in the Design of Observers and Stabilising Feedback Controllers for Multivariable Linear Systems, *Electronics letters, Vol. 10, No. 23*, November 1974.
- [14] S. Puga, M. Bonilla and M. Malabre. Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO System, *49th IEEE-CDC, Atlanta, GA, December 15-17*, 2010.

Apéndice I

CDC 2012

El siguiente artículo fué presentado en el Conference on Decision and Control 2012, el día 15 de diciembre de 2012 en la ciudad de Maui, Hawaii, USA.

Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying MIMO Systems

S. Puga, M. Bonilla and M. Malabre.

Abstract— This paper considers the problem of stabilizing a multi-input multi-output linear time varying system using a singularly perturbed controller and a model matching controller. The closed loop is a linear singularly perturbed system with uniform asymptotic stability behavior. We calculate bounds $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ as in the book of Kokotović, Khalil and O'Reilly, such that the uniform asymptotic stability of the singularly perturbed system is guaranteed.

NOTATION

$\chi_k^i \in \mathbb{R}^k$ stands for the vector which the i -th entry is equal to 1 and the other ones are equal to 0. $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ stands for the identity matrix of size k . $T_u\{v^T\}$ stands for the upper triangular Toeplitz matrix, which first row is v^T . And $T_\ell\{v\}$ stands for the lower triangular Toeplitz matrix, which first column is v . $\lambda_i\{X\}$ stands for the eigenvalues of matrix X . $BDM\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ denotes a block diagonal matrix whose diagonal blocks are $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$. $DM\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ denotes a diagonal matrix whose diagonal elements are $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Given a vector function $f(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $\|f(\cdot)\| = \|f(\cdot)\|_2$, for a function matrix $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|A(\cdot)\| = \|A(\cdot)\|_2$. Given a matrix A , $\rho(A) = \max\{|\lambda_i(A)|\}$ stands for its spectral radius, and $\mu(A) = \lim_{\theta \searrow 0} (\|I + \theta A\| - 1)/\theta$ stands for its measure [3]. C^∞ and \mathcal{L}^∞ stand for the sets of infinitely differentiable and locally integrable functions from \mathbb{R}^+ to \mathbb{R} , respectively. p stands for the derivative operator d/dt . A vector function $f(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^n$ is said to be $\mathcal{O}(\varepsilon)$ over an interval $[t_1, t_2]$ if there exist positive constants K and ε^* such that $\|f(\varepsilon, t)\| \leq K\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$, and $\forall t \in [t_1, t_2]$, see [4].

I. INTRODUCTION

Linear Time Varying Systems have been studied for the last 40 years. One of the principal goals is to design a state feedback control law in order to get a desired performance, as well as to guarantee stability.

Between the principal contributions on the structural properties of this kind of systems, we have the works of: Silverman [17], Kamen [7], [8], Chen [2], Bourles [1], and Marinescu [10], [11], [12]. A common point of the above mentioned works is the knowledge of the time varying parameters of the system. In most cases, the $n-1$ derivatives of the time varying parameters are required,

S. Puga, UPIITA-IPN ACADEMIA DE SISTEMAS. AV. IPN 2580 CP 07340 MÉXICO D.F, and P. HD Student at DCA-CINVESTAV-IPN. "spuga@ipn.mx".

M. Bonilla, CINVESTAV-IPN, CONTROL AUTOMÁTICO, UMI 3175 CINVESTAV-CNRS. A.P. 14-740. MÉXICO 07000, "mbonilla@cinvestav.mx".

M. Malabre, LUNAM Université, CNRS, IRCCyN UMR CNRS 6597, 1 Rue de la Noe, F- 44321 Nantes, FRANCE. "Michel.Malabre@irccyn.ec-nantes.fr".

and in a few of them, the measurement of the state vector is required. The knowledge of the matrices of the state space model, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ and $D(t)$, is necessary, together with the assumption that the pair $(A(t), C(t))$ is detectable.

In the optimal control approach, we have the works of Wu [18] and Ichikawa [5]. In these papers, the knowledge of the matrices $A(t)$, $B(t)$ and $C(t)$ is still necessary.

In [14] is proposed a singular implicit control scheme for linear time varying SISO systems, where the knowledge of the time varying parameters is not required, but only some bounds. The control scheme is composed by a singularly perturbed control law and an equalizer filter (model matching controller). The control law approximately matches a given linear time-invariant linear state space representation, guaranteeing internal stability.

In this paper, we extend the results obtained in [14] for linear time varying systems, we propose a control law for MIMO time varying systems, represented by [6]:

$$\left(S(p) + D_{\ell c}(t)\Psi(p) \right) y(t) = B^*(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

where: $y = [y_1, \dots, y_m]^T \in \mathbb{R}^m$ and $u = [u_1, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ are the output and the input, respectively, $D_{\ell c}(t)$ and $B^*(t)$ are real, time varying, matrices, of orders $m \times \eta$ and $m \times m$, respectively, and $S(p)$ and $\Psi(p)$ are operator matrices, of orders $m \times m$ and $\eta \times m$, respectively. The control law is based on the singular perturbations approach [9], where the knowledge of the time varying parameters is not required, but only some bounds. The aim of this control law is to approximately match a given linear time-invariant system, represented by a state space representation, $\frac{d}{dt}x_s(t) = Ax_s(t) + Br(t)$. The control scheme guarantees the behavior and the asymptotic stability. In section II, we state the problem. In Section III, we propose a singularly perturbed linear control law, Following [9], in Section IV-A the closed loop system is separated in two time scale systems. In Section IV-B, we study the uniform stability of the fast and slow subsystems. In section V we get the desired state space approximation. All the proofs are in the Appendix.

II. SYSTEM DEFINITION AND REPRESENTATION FORM

Let us precise the form of the involved matrices in the representation (1) ($i, j, k \in \{1, \dots, m\}$): $S(p) = DM\{p^m, \dots, p^m\}$, where: $\eta_j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^m \eta_j = \eta$, and

$$\eta_1 \geq \dots \geq \eta_m \geq 1; D_{\ell c}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{111}(t) & \dots & \mathbf{a}_{1mm}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m11}(t) & \dots & \mathbf{a}_{mmm}(t) \end{bmatrix},$$

$$\text{where: } \bar{\mathbf{a}}_{kij}^T(t) = \begin{bmatrix} a_{kij}(t) \\ \vdots \\ a_{k_i(\eta_j-1)}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{a}_{kij}^T(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{kij}^T(t) \\ a_{kij}(t) \end{bmatrix} \\ \in \mathbb{R}^{\eta_j}; \Psi(p) = BDM\{\psi_1(p), \dots, \psi_m(p)\}, \text{ where:} \\ \psi_j(p) = [1 \ p \ \dots \ p^{\eta_j-1}]^T \in \mathbb{R}^{\eta_j}[p]; B^*(t) \\ = [B_1^*(t) \ \dots \ B_m^*(t)]^T, \text{ where: } B_j^*(t) = \\ [b_{j1}(t) \ \dots \ b_{jm}(t)]^T \in \mathbb{R}^m; \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

The initial conditions are: $y_1(0), \frac{d}{dt}y_1(0), \dots, \frac{d^n}{dt^n}y_1(0), \dots, y_m(0), \frac{d}{dt}y_m(0), \dots, \frac{d^n}{dt^n}y_m(0)$. The coefficients, $a_{kij}(t)$ and $b_{ij}(t)$, are such that:

[H1] $a_{kij}(t)$ are unknown bounded continuous real functions of class¹ $\mathcal{C}^\infty \cap \mathcal{L}^\infty$, satisfying: $\|a_{kij}(t)\| \leq L'_{0,a}$ and $\|\frac{d}{dt}a_{kij}(t)\| \leq L'_{1,a}$, for all $t \in \mathbb{R}^+$.

[H2] $B^*(t)$ is an unknown upper triangular matrix² for all t , such that: $\lambda_i\{B^*(t)\} \in \mathbb{R}^+$ and $0 < \bar{b}_1 \leq \lambda_i\{B^*(t)\} \leq \bar{b}_2$, for all $t \in \mathbb{R}^+$.

[H3] $\|b_{ij}(t)\| \leq c_0$ and $\|\frac{d}{dt}b_{ij}(t)\| \leq c'$.

[H4] The numbers, $L_{0,a}, L'_{1,a}, \bar{b}_1, \bar{b}_2, c_0$ and c' , are positive known bounds.

A simple device can be used to recast this differential equation into the form of a linear state equation with input $u(t)$ and output $y(t)$. Though it seems an arbitrary choice, it is convenient to define state variables as follows: $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots \ \zeta_{\eta_1} \ \zeta_{\eta_1+1} \ \zeta_{\eta_1+2} \ \dots \ \zeta_{\eta_1+\eta_2} \ \dots \ \zeta_{\eta_1+\dots+\eta_{m-1}+1} \ \zeta_{\eta_1+\dots+\eta_{m-1}+2} \ \zeta_{\eta_1+\dots+\eta_m}]^T = [y_1 \ \frac{d}{dt}y_1 \ \dots \ \frac{d^{\eta_1-1}}{dt^{\eta_1-1}}y_1 \ y_2 \ \frac{d}{dt}y_2 \ \dots \ \frac{d^{\eta_2-1}}{dt^{\eta_2-1}}y_2 \ \dots \ y_m \ \frac{d}{dt}y_m \ \dots \ \frac{d^{\eta_m-1}}{dt^{\eta_m-1}}y_m]^T$, we then get the following time varying state equation:

$$\frac{d}{dt}\zeta = A(t)\zeta + B(t)u; \quad y = C\zeta \quad (2)$$

where:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\eta_1}(t) & -\chi_{\eta_1}^{\eta_1} \mathbf{a}_{122}(t) & \dots & -\chi_{\eta_1}^{\eta_1} \mathbf{a}_{1mm}(t) \\ -\chi_{\eta_2}^{\eta_2} \mathbf{a}_{211}(t) & \tilde{A}_{\eta_2}(t) & \dots & -\chi_{\eta_2}^{\eta_2} \mathbf{a}_{2mm}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\chi_{\eta_m}^{\eta_m} \mathbf{a}_{m11}(t) & -\chi_{\eta_m}^{\eta_m} \mathbf{a}_{m21}(t) & \dots & \tilde{A}_{\eta_m}(t) \end{bmatrix}, \\ B(t) = \begin{bmatrix} \chi_{\eta_1}^{\eta_1} B_1^*(t) \\ \chi_{\eta_2}^{\eta_2} B_2^*(t) \\ \vdots \\ \chi_{\eta_m}^{\eta_m} B_m^*(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{\eta_\ell}(t) = T_u\{(\chi_{\eta_\ell}^2)^T\} - \chi_{\eta_\ell}^{\eta_\ell} \mathbf{a}_{\ell\ell}(t) \\ \ell \in \{1, \dots, m\}, \quad C = BDM\{(\chi_{\eta_1}^1)^T, (\chi_{\eta_2}^1)^T, \dots, (\chi_{\eta_m}^1)^T\}, \quad (3)$$

with the initial state condition: $\zeta(0) = [y_1(0) \ \frac{d}{dt}y_1(0) \ \dots \ \frac{d^{\eta_1-1}}{dt^{\eta_1-1}}y_1(0) \ \dots \ y_m(0) \ \frac{d}{dt}y_m(0) \ \dots \ \frac{d^{\eta_m-1}}{dt^{\eta_m-1}}y_m(0)]^T$.

¹For simplicity, in this paper we only consider functions of class \mathcal{C}^∞ . But it could be considered functions of class \mathcal{C}^k , where k is a sufficiently positive large integer such that the derivability conditions are fulfilled. See also Corollary 2.4.12 of [13].

²A less restrictive assumption could be to assume that there exists a constant unitary matrix, U , such that $U^H B^*(t)U$ is upper triangular matrix, for all $t \geq 0$; and a more restrictive and usual assumption is to simply assume that $B^*(t)$ is an Hermitian positive definite matrix, for all $t \geq 0$.

III. SINGULARLY IMPLICIT CONTROL LAW

For the state space representation (2) we propose the following control law, composed by a singularly perturbed controller and a model matching controller.

Let us define the following controller vector state: $\underline{x} = [x_{\eta_1} \ x_{\eta_1+1} \ x_{\eta_1+\eta_2} \ x_{\eta_1+\eta_2+1} \ \dots \ x_{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_m+m} \ x_{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_m+m+1}]^T$ and the vector reference: $\bar{r} = [r_1 \ \dots \ r_m]^T$, where the components r_j are signal references satisfying:³

[H5] $r_j = r_j(t) \in L^\infty \cap \mathcal{C}^\infty$.

Singularly perturbed controller

$$\varepsilon u = -\Psi(\zeta + h) + \Omega \underline{x} \\ \Psi = BDM\{(\chi_{\eta_1}^{\eta_1})^T, (\chi_{\eta_2}^{\eta_2})^T, \dots, (\chi_{\eta_m}^{\eta_m})^T\} \in \mathbb{R}^{m \times \eta} \\ \Omega = BDM\{(\chi_2^1)^T, \dots, (\chi_2^1)^T\} \in \mathbb{R}^{m \times 2m} \quad (4)$$

where ε is a small positive parameter, and h is a perturbation vector, such that:

[H6] h is bounded continuous real function, which norm is of order ε .

Model matching controller

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \Delta(\zeta + h) + \Lambda \underline{x} + \Gamma \bar{r}; \\ \Delta = BDM\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\} \in \mathbb{R}^{2m \times \eta} \\ \Delta_j = \begin{bmatrix} -\alpha_{j11} & -\alpha_{j12} & \dots & -\alpha_{j1\eta_j} + \ell_j + 1 \\ 0 & 0 & \dots & -(\beta_j - 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times \eta_j} \\ \Lambda = BDM\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m\} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m} \\ \Lambda_j = \begin{bmatrix} -(\ell_j + 1) & -\ell_j \\ (\beta_j - 1) & -\beta_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \Gamma = BDM\{\chi_2^1, \dots, \chi_2^1\} \in \mathbb{R}^{2m \times m} \quad (5)$$

where: for all $j \in \{1, \dots, m\}$, β_j and ℓ_j are positive parameters, and $\alpha_{j11}, \dots, \alpha_{j1\eta_j}$ are the coefficients of the Hurwitz polynomials $p_{\eta_j}(\lambda) = \lambda^{\eta_j} + \alpha_{j1\eta_j} \lambda^{\eta_j-1} + \dots + \alpha_{j12} \lambda + \alpha_{j11}$.

The aim of the *model matching controller* is: (i) to assign the closed loop dynamics at a time invariant linear system with the Hurwitz characteristic polynomial $p(\lambda)$ for each y_j , and (ii) to assign a rate of exponential convergence to the desired dynamics. The aim of the *singularly perturbed controller* is: (i) to change the base representation system for obtaining a *singularly perturbed model*, and (ii) to close the desired dynamics by an ε order. Indeed, we show in Lemma 1 that the parameters, β_j and ℓ_j , enable us to compute a sufficiently small ε such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed model* is guaranteed. The perturbation signal h is considered, in order to take into account the effects of a high gain observer (see for example [15]).

In order to obtain the closed loop singularly perturbed model, let us combine (2), (4) and (5) and choosing: $x_j = \zeta_j$, $j \in \{1, \dots, \ell_1 - 1\}$; $\ell_1 = \eta_1$; $z_1 = \zeta_{\ell_1}$; $x_{j+1} = \zeta_j$, $j \in \{\ell_1 + 1, \dots, \ell_2 - 1\}$; $\ell_2 = \sum_{k=1}^2 \eta_k$; $z_2 = \zeta_{\ell_2}$; $x_{j+1} = \zeta_j$, $j \in \{\ell_2 + 1, \dots, \ell_3 - 1\}$; $\ell_3 = \sum_{k=1}^3 \eta_k$; $z_3 = \zeta_{\ell_3}$; \dots ; $x_{j+1} = \zeta_j$, $j \in \{\ell_{m-1} + 1, \dots, \ell_m - 1\}$; $\ell_m = \eta$; $z_m = \zeta_{\ell_m}$. Namely:

$$\frac{dx}{dt} = A_{11}x + A_{12}z + A_{13}h + B_1 \bar{r} \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} = A_{21}(\varepsilon, t)x + A_{22}(\varepsilon, t)z + A_{23}(t)h \quad (6)$$

³We ask for \mathcal{C}^∞ , because as we will see later, the control scheme is indeed an approximation of a proportional and derivative feedback.

where the matrices, $A_{11} \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times (\eta+m)}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times m}$, $A_{13} \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times \eta}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times m}$, $A_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times (\eta+m)}$, $A_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{23}(t) \in \mathbb{R}^{m \times \eta}$, are defined as follows ($j \in \{1, \dots, m\}$):

$$\begin{aligned} A_{11} &= \text{BDM}\{A_{\eta_1}, \dots, A_{\eta_m}\}, \\ A_{\eta_j} &= \left[\begin{array}{c|cc} T_u \left\{ (\underline{\chi}_{\eta_j-1}^2)^T \right\} & 0 & 0 \\ \hline -\underline{\alpha}_{\eta_j} & -(\ell_j+1) & -\ell_j \\ 0 & \beta_j-1 & -\beta_j \end{array} \right], \\ \underline{\alpha}_{\eta_j} &= \left[\alpha_{j_1} \quad \dots \quad \alpha_{j(\eta_j-1)} \right]; \alpha_{\eta_j} = \left[\alpha_{\eta_j} \quad \alpha_{j\eta_j} \right]; \\ A_{12} &= \text{BDM}\{\hat{a}_{\eta_1}, \dots, \hat{a}_{\eta_m}\}, \\ \hat{a}_{\eta_j}^T &= \left[(\underline{\chi}_{\eta_j-1}^{\eta_j})^T \alpha_{j\eta_j} + \ell_j + 1 \quad 1 - \beta_j \right], \quad \hat{a}_{\eta_j} \in \mathbb{R}^{(\eta_j+1)}; \\ A_{13} &= \text{BDM}\{\bar{A}_{\eta_1}, \dots, \bar{A}_{\eta_m}\}, \\ \bar{A}_{\eta_j} &= \left[\begin{array}{c} \underline{\chi}_{\eta_j+1}^{\eta_j} (-\alpha_{\eta_j} + (\ell_j+1)(\underline{\chi}_{\eta_j}^{\eta_j})^T) \\ (1-\beta_j)\underline{\chi}_{\eta_j+1}^{\eta_j+1}(\underline{\chi}_{\eta_j}^{\eta_j})^T \end{array} \right] \\ B_1 &= \text{BDM}\left\{ (\underline{\chi}_{\eta_1+1}^{\eta_1}), \dots, (\underline{\chi}_{\eta_m+1}^{\eta_m}) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A_{21}(\varepsilon, t) &= \left[\begin{array}{c|cc} -\varepsilon \bar{a}_{111}(t) b_{11}(t) 0 & \dots & -\varepsilon \bar{a}_{1mm}(t) b_{1m}(t) 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -\varepsilon \bar{a}_{m11}(t) b_{m1}(t) 0 & \dots & -\varepsilon \bar{a}_{mnm}(t) b_{nm}(t) 0 \end{array} \right]; \\ A_{22}(\varepsilon, t) &= -(\varepsilon X(t) + B^*(t)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{where: } X(t) &= \left[\begin{array}{ccc} a_{1\eta_1}(t) & \dots & a_{1m\eta_m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1\eta_1}(t) & \dots & a_{mm\eta_m}(t) \end{array} \right]; \\ A_{23}(t) &= - \left[\begin{array}{ccc} (\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1})^T b_{11}(t) & \dots & (\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m})^T b_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ (\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1})^T b_{m1}(t) & \dots & (\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m})^T b_{mm}(t) \end{array} \right]; \end{aligned}$$

In the Appendix, we prove the following fact:

Fact 1: The matrix $A_{22}(\varepsilon, t)$, satisfies for all $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\text{i) } \quad \|A_{22}(0, t)\|_2 \leq \bar{c}, \quad \left\| \frac{d}{dt} A_{22}(0, t) \right\|_2 \leq c \quad (9)$$

ii) Given a positive real number, $\bar{\varepsilon}$, and $b_i = \bar{b}_i + \bar{\varepsilon}$, for $i = 1, 2$:

$$-b_2 - \varepsilon L_{0,a} \leq \Re e \lambda_i(A_{22}(\varepsilon, t)) \leq -b_1 + \varepsilon L_{0,a} \quad (10)$$

where: $\bar{c} = \sqrt{m}m c_0$, $c = \sqrt{m}m c'$ and $L_{0,a} = \sqrt{m}m L'_{0,a}$. Thus, the singularly perturbed model, (6), satisfies Lemmas 2.1, 2.2 and 2.3 of Chapter 5 in [9].

In *Theorem 1* of Section IV-B, we prove that (6) is uniformly asymptotically stable, and in *Theorem 2* of Section V, we show that the state approximation tends to the time invariant reference model.

IV. ASYMPTOTIC STABILITY

In this Section, we study the stability of the homogeneous differential equation (6). For this, we first apply a state transformation, which aim is to separate the fast and slow subsystems, and we then study the *uniform asymptotic stability*.

A. Slow and Fast Subsystems Separation

Let us first study the homogeneous equation of (6):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt}(t) &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) \end{aligned} \quad (11)$$

Following [9], let us transform (11) into a slow and a fast subsystems. For obtaining the state transformation, we need

to define the following bounded continuously differentiable matrices:⁴

$$L(t) = L_0(t) + \varepsilon R_L(t) \quad \text{and} \quad H(t) = H_0(t) + \varepsilon R_H(t) \quad (12)$$

Doing the following change of variables:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Theta(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{\eta+m} - \varepsilon H(t)L(t) & -\varepsilon H(t) \\ L(t) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ &= M^{-1}(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

we have:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \left[\frac{dL}{dt}(t) + \frac{1}{\varepsilon} A_{21}(\varepsilon, t) + L(t)(A_{11} - A_{12}L(t)) \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t)L(t) \right] x + \left[L(t)A_{12} + \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t) \right] \eta \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \left[-\varepsilon \frac{dH}{dt}(t) + A_{12} - \varepsilon H(t)L(t)A_{12} - H(t)A_{22}(\varepsilon, t) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon A_{11}H(t) - \varepsilon A_{12}L(t)H(t) \right] \eta(t) + [A_{11} - A_{12}L(t)] \Theta(t) \end{aligned}$$

Taking into account Fact 1, we get from Theorem 5.3.1-[9], that there exists a sufficiently small ε such that:

$$\varepsilon \frac{dL}{dt}(t) = A_{22}(\varepsilon, t)L(t) - A_{21}(\varepsilon, t) - \varepsilon L(t)[A_{11} - A_{12}L(t)] \quad (14)$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon \frac{dH}{dt}(t) &= H(t)A_{22}(\varepsilon, t) - A_{12} + \varepsilon H(t)L(t)A_{12} \\ &\quad - \varepsilon (A_{11} - A_{12}L(t))H(t) \end{aligned} \quad (15)$$

we then get:

$$\frac{d\Theta}{dt}(t) = [A_{11} - A_{12}L(t)] \Theta(t) \quad (16)$$

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt}(t) = [A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)A_{12}] \eta(t) \quad (17)$$

From (12), (14) and (15), we get:

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad H(t) = H_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ L_0(t) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = \bar{L}_0, \quad H_0(t) = A_{12}A_{22}^{-1}(0, t) \end{aligned}$$

In this way, we have the slow subsystem:

$$\frac{dx_s}{dt}(t) = [A_{11} - A_{12}\bar{L}_0] x_s(t) \quad (18)$$

and the time frozen fast subsystem

$$\varepsilon \frac{dz_f}{dt}(t) = A_{22}(\varepsilon, t)z_f(t) \quad (19)$$

where t is treated as a parameter. Defining:

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0 \quad (20)$$

Let us note that (recall (7) and (8)): $A_0 = \text{BDM}\{A_{0\eta_1}, \dots, A_{0\eta_m}\}$, where $A_{0\eta_j} = \left[\begin{array}{c} T_u \left\{ (\underline{\chi}_{\eta_j}^2)^T \right\} + \underline{\chi}_{\eta_j}^{\eta_j} \alpha_{\eta_j} \quad -\ell_j \underline{\chi}_{\eta_j}^{\eta_j} \\ 0_{\eta_j}^T \quad -\beta_j \end{array} \right]$, and that:

$\det(\lambda I_{\eta+m} - A_0) = \prod_{j=1}^m (\lambda + \beta_j) p_{\eta_j}(\lambda)$. If the β_j , $j \in 1, \dots, m$, are chosen such that: $\beta_j \geq \max \{ -\Re e(\bar{\lambda}) \mid p_{\eta_j}(\bar{\lambda}) = 0 \}$, then for $\beta = \min\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ there exists $K > 0$, such that:

$$\| \exp(A_0 \theta) \|_2 \leq K e^{-\beta \theta}. \quad (21)$$

⁴In [9], these matrices are defined, in general, with M and N terms, respectively.

B. Conditions for Uniform Asymptotic Stability

In this Section we show that uniform asymptotic stability of (11) is guaranteed by the properties of the transition matrices of (18) and (19). For this, let us particularize Theorem 4.1 of Chapter 5 in [9] to our case study:

Theorem 1: Given that $A_{22}(\varepsilon, t)$ satisfies Fact 1, $\alpha_{j_1 n_j} - \ell_j > 1$, $j \in \{1, \dots, m\}$ and $0 < -\alpha_{j_1 n_j} + \ell_j + 1 < L_{0,a}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, then there exists an $\varepsilon_1^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$ the system (11) is uniformly asymptotically stable. Moreover, the transition matrix of (11), $\phi(t, s)$, satisfies $\|\phi(t, s)\|_2 \leq \bar{K} e^{-\kappa(t-s)}$ for all $t \geq s \geq t_0$, where $\bar{K} > 0$ and $\kappa > 0$ are independent of ε , where the variable κ is defined as: $\kappa = \min\{\beta, b_1 - L_{0a} - \alpha\}$, with $\alpha = \min\{\alpha_{j, n_j} - \ell_j - 1\}$. This Theorem relates the behavior of (11) to the behaviors of the slow and fast subsystems. This result holds asymptotically as ε tends to 0. From a computational point of view, it is important to have an idea of the order of the upper bound ε^* . This is done in Lemma 4.1 of Chapter 5 in [9], which for our case, takes the following form:

Lemma 1: Given the conditions of Theorem 1, and $\|A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_1$, $\|L_0 A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_2$ and $\|L_0 A_0\|_2 \leq \bar{M}_3$, the singularly perturbed system (11) is uniformly asymptotically stable for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, where:

$$\varepsilon^* = \frac{\beta b_1}{K_1 K_2 \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta (L_{0,a} + \alpha + K_2 \bar{M}_2)}$$

$$\bar{M}_1 = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq m} \left(1 + (\alpha_{j j_{n_j}} - \ell_j - 1)^2 + (1 - \beta_j)^2 \right)},$$

$$\bar{M}_2 = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq m} (\alpha_{j j_{n_j}} - \ell_j - 1)^2},$$

$$\bar{M}_3 = \sqrt{m \left(\max_{1 \leq j \leq m} \left(\sum_{i=1}^{n_j} (\alpha_{j j_i})^2 + (\ell_j)^2 \right) \right)}$$

V. STATE APPROXIMATION

Let us now consider the singularly perturbed model (6), with the initial state conditions: $x(t_0) = x_0$ and $z(t_0) = z_0$. Applying the change of variable, defined by (13), (14) and (15), we get:

$$\frac{d\Theta}{dt}(t) = [A_{11} - A_{12}L(t)]\Theta(t) + [B_1 - \varepsilon H(t)L(t)B_1]r(t) + [A_{13} - \varepsilon H(t)L(t)A_{13} - H(t)A_{23}(t)]h(t), \quad (22)$$

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt}(t) = [A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)A_{12}]\eta(t) + \varepsilon L(t)B_1 r(t) + [A_{23}(t) + \varepsilon L(t)A_{13}]h(t) \quad (23)$$

where the initial conditions are:

$$\Theta(t_0) = [I - \varepsilon H(t_0)L(t_0)]x_0 - \varepsilon H(t_0)z_0, \quad (24)$$

$$\eta(t_0) = L(t_0)x_0 + z_0. \quad (25)$$

The solution of (22)-(25), when transformed back using the inverse of (13), yields the exact solution of (6). Asymptotic approximations to the solution of (6) with $\mathcal{O}(\varepsilon)$ error can be obtained by retaining $\mathcal{O}(\varepsilon)$ approximations of the right hand side coefficients of (22)-(25). This process for the slow subsystem yields:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt}(t) &= A_0 x_s(t) + A_q h(t) + B_1 r(t) \\ A_q &= A_{13} - A_{12} A_{22}^{-1}(0, t) A_{23}(t) \end{aligned} \quad (26)$$

For the fast subsystem, we change the time scale as, $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$. With this change, the derivative for the fast subsystem is $\frac{d}{dt} z_f(\tau) = \frac{d}{d\tau} z_f(\tau) \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\tau} z_f(\tau)$, this reduces the approximation problem to a problem with regular perturbation

⁵Kokotović [9] considers in general $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$ errors.

of right hand side coefficients, following the process as in (26) the equation for the fast subsystem is:

$$\frac{d}{d\tau} z_f(\tau) = A_{22}(0, t_0) z_f(\tau) + A_{23}(t_0 + \varepsilon \tau) h(t_0 + \varepsilon \tau) \quad (27)$$

and the initial conditions are:

$$x_s(t_0) = x_0; \quad z_f(0) = A_{22}^{-1}(0, t_0) A_{21}(t_0) x_0 + z_0 \quad (28)$$

where $A_0 = A_{11} - A_{12} \bar{L}_0$, the equations (26) and (27) have the slow and fast subsystems derived by formally neglecting ε in (6).

We obtain in this way, the following particularization of Theorem 6.1 in [9] for our case study:

Theorem 2: Given the matrix $A_{22}(\varepsilon, t)$ and $\|h\|_2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$. There then exists $\varepsilon^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ the following expressions hold uniformly on $t \in [t_0, t_f]$:

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (29)$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}(t) A_{21}(t) x_s(t) + z_f \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (30)$$

where x_s and z_f are solutions of (26) and (27), with the initial conditions (28).

VI. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

Let us consider the following system:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} y_1 + a_{112}(t) \frac{d}{dt} y_1 + a_{111}(t) y_1 + a_{121}(t) y_2 = & b_{11}(t) u_1 + b_{12}(t) u_2 \\ \frac{d}{dt} y_2 + a_{221}(t) y_2 + a_{212}(t) \frac{d}{dt} y_1 + a_{211}(t) y_1 = & b_{22}(t) u_2 \end{aligned} \quad (31)$$

with parameters:

$$\begin{cases} a_{111}(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{\sin((2j-1)t)}{2j-1}, & a_{112}(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sin\left(\frac{jt}{2}\right) \\ a_{121}(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{j \sin(4jt)}{(2j-1)(2j+1)}, & a_{221}(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^5 \frac{\cos(2jt)}{1-4j} \\ a_{212}(t) = 2 \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sin(jt), & a_{211}(t) = \frac{\pi^2}{16} - \sum_{j=1}^5 \frac{\cos(jt)}{j} \\ b_{11}(t) = 1 + \frac{1}{4} (\sin(t) + \sin(2t)), & b_{12}(t) = \frac{1}{2} + \cos(t) \\ b_{21}(t) = 0, & b_{22}(t) = 1 + \frac{\sin(2t)}{2} \end{cases}$$

The state representation is (c.f. (2) and (3)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \zeta &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_{111}(t) & -a_{112}(t) & -a_{121}(t) \\ -a_{211}(t) & -a_{212}(t) & -a_{221}(t) \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ 0 & b_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \zeta \end{aligned} \quad (32)$$

From (4) and (5), the control scheme, $u(t)$, is:

$$\begin{aligned} \varepsilon \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\alpha_{111} & -\alpha_{112} + l_1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\beta_1 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{211} + l_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\beta_2 - 1) \end{bmatrix} \zeta \\ &+ \begin{bmatrix} -(l_1 + 1) & -l_1 & 0 & 0 \\ (\beta_1 - 1) & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(l_2 + 1) & -l_2 \\ 0 & 0 & (\beta_2 - 1) & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

where: $\alpha_{111} = 1/9$, $\alpha_{112} = 2/3$ and $\alpha_{211} = 1/2$, namely: $p_1(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{9}$ and $p_2(\lambda) = \lambda + \frac{1}{2}$. From Theorem 1

and Lemma 1 we can compute the parameters β_i , ℓ_i and ε for $i = \{1, 2\}$. We obtain: $\beta_1 = \beta_2 = 10$, $\ell_1 = \ell_2 = 0$, $\varepsilon^* = 0.16$, and $\varepsilon = 0.08$.

In order to satisfy H5, $r_1, r_2 \in L^\infty \cap C^\infty$, the reference r has been chosen as follows: $r_1(t) = \frac{10}{2.75} \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma$, $r_2(t) = \frac{1}{2} r_1(t)$, $t \in [0, 100]$ where:⁶ $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-(t')^2}}$, with $t' = (12/75)t - 1$.

In Figure 1 we show MATLAB[®] numerical simulations for the time varying system (32), controlled by (33), with a unit step reference. The matching model error is computed as follows: $|y(t) - y^*(t)| = \left| y(t) - \bar{C} \int_0^t \exp(\bar{A}_0(t-\sigma)) \bar{B}r(\sigma) d\sigma \right|$. where:

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/9 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

The numerical simulations was performed with the solver settings: “Start time” = 0.0, “Stop time” = 100, “Type” = “Fixed-Step”, “Solver” = “ode45 Runge-Kutta” and “Fixed-step size” = 0.04.

VII. CONCLUSION

In this paper, we have proposed a singular implicit control scheme for linear time varying MIMO systems. The control scheme is composed by the *singularly perturbed control law* (4) and the *model matching controller* (5).

The aim of the *model matching controller* is to assign the closed loop dynamics, and to assign a rate of exponential convergence. The aim of the *singularly perturbed control law* is to bring the system into a *singularly perturbed model*, and to get a desired dynamics by an ε order. The parameters, β and ℓ , enable us to compute a sufficiently small ε such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed model* is guaranteed. We have considered the perturbation signal h in order to take into account the effects of high gain observer.

A future work is to extend the singularly perturbed observer for SISO systems, proposed in [15], to the MIMO case.

APPENDIX

1) *Proof of Fact 1:* From (8): $A_{22}(\varepsilon, t) = -\varepsilon X(t) - B^*(t)$, if $\varepsilon = 0$, we have: $A_{22}(0, t) = -B^*(t)$. Taking into account **H3**, we get:⁷ $\|A_{22}(0, t)\|_2 = \|B^*(t)\|_2 \leq \sqrt{m} m c_0 = \bar{c}$, for all $t \in \mathbb{R}^+$. From (8), we have: $\|\frac{d}{dt} A_{22}(0, t)\|_2 = \|\frac{d}{dt} B^*(t)\|_2$. Taking into account **H3**, we get:⁷ $\|\frac{d}{dt} A_{22}(0, t)\|_2 \leq \sqrt{m} m c'$.

For this part, given a positive real number $\bar{\varepsilon}$, for a given matrix $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$, let us introduce the following consistent norm [16]: $\|Z\| = \|D^{-1} Z D\|_\infty$, where: $D = DM\{1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^{m-1}\}$, with: $\eta \leq \frac{\bar{\varepsilon}}{(m-1)c_0}$. Then, for matrix $B^*(t)$, we have (see Theorem 3.8 of Chapter 6 of [16], and recall **H2** and **H3**):

$$\|B^*(t)\| = \|D^{-1} B^*(t) D\|_\infty \leq \rho(B^*(t)) + \bar{\varepsilon} = \bar{b}_2 + \bar{\varepsilon} \quad (\text{A})$$

Finally, let us compute the bounds for the real part of the eigenvalues of $A_{22}(\varepsilon, t) = -\varepsilon X(t) - B^*(t)$. For this, let us compute the matrix measure of $A_{22}(\varepsilon, t)$, $\mu(A_{22}(\varepsilon, t))$, using the consistent norm above defined (see Theorem 5 of Section

⁶The function φ is taken from Definition 2.4.5 in [13].

⁷ The factor \sqrt{m} comes from the relation between norms $\|\cdot\|_2$ and $\|\cdot\|_1$ (see for example [16]).

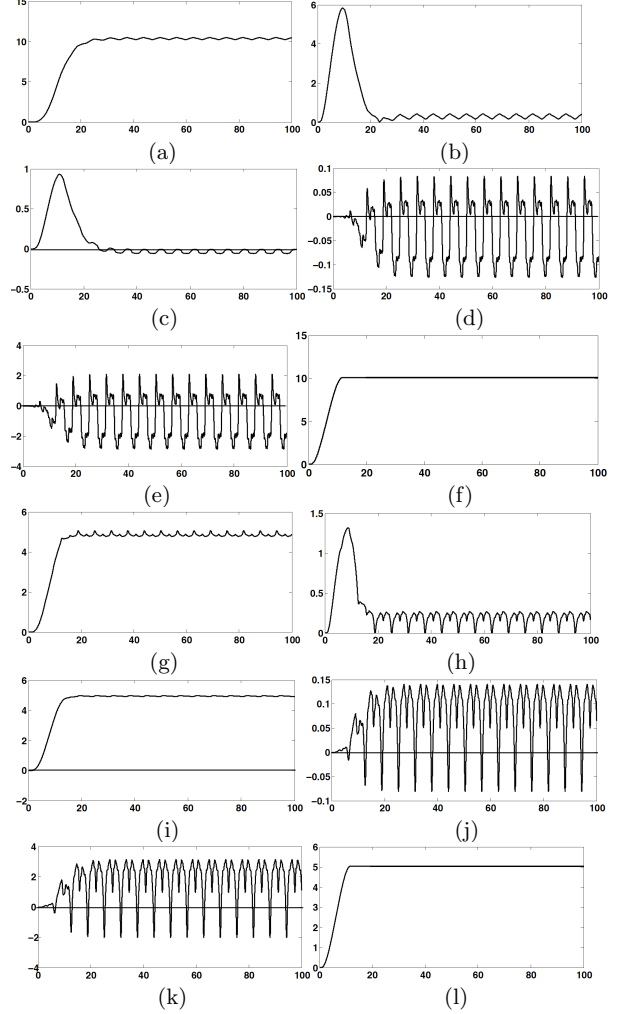


Fig. 1. Control variables: (a) output y_1 , (b) matching model error $|y_1 - y_1^*|$, (c) matching model signal x_2 , (d) matching model signal x_3 , (e) control law u_1 , (f) signal reference r_1 , (g) output y_2 , (h) matching model error $|y_2 - y_2^*|$, (i) matching model signal x_4 , (j) matching model signal x_5 , (k) control law u_2 and (l) signal reference r_2 .

II.8 of [3]):

$$\begin{aligned} \text{Th. 5-[3](h, e)} &\Rightarrow \Re e \lambda_i(-A_{22}(\varepsilon, t)) \leq \mu(\varepsilon X(t) + B^*(t)) \\ &\leq \mu(\varepsilon X(t)) + \mu(B^*(t)) \\ \text{Th. 5-[3](c, b)} &\Rightarrow \mu(\varepsilon X(t)) + \mu(B^*(t)) \leq \varepsilon \|X(t)\| + \|B^*(t)\| \\ &\leq \varepsilon \|X(t)\| + (\bar{b}_2 + \bar{\varepsilon}) \\ \text{Th. 5-[3](h, e)} &\Rightarrow \Re e \lambda_i(-A_{22}(\varepsilon, t)) \geq -\mu(-\varepsilon X(t) - B^*(t)) \\ &\geq -\mu(-\varepsilon X(t)) - \mu(-B^*(t)) \\ \text{Th. 5-[3](c, b)} &\Rightarrow -\mu(-\varepsilon X(t)) - \mu(-B^*(t)) \geq -\varepsilon \|X(t)\| \\ &\quad - \mu(-B^*(t)) \end{aligned}$$

Therefore:

$$-\mu(-B^*(t)) - \varepsilon \|X(t)\| \leq \Re e \lambda_i(-A_{22}(\varepsilon, t)) \leq \varepsilon \|X(t)\| + (\bar{b}_2 + \bar{\varepsilon}) \quad (\text{B})$$

Let us note that, since for any $\theta \in (0, 1/\bar{b}_2) \subset \mathbb{R}$, we have (see **H2**): $0 < 1 - \theta \bar{b}_2 \leq \lambda_i\{I - \theta B^*(t)\} \leq 1 - \theta \bar{b}_1$, for all $t \in \mathbb{R}$,

we then get (see Definition 1 of Section II.8 of [3]):

$$\begin{aligned}
\mu(-B^*(t)) &= \lim_{\theta \searrow 0} (\|I - \theta B^*(t)\| - 1) / \theta \\
&= \lim_{\theta \searrow 0} (\|I - \theta D^{-1} B^*(t) D\|_{\infty} - 1) / \theta \\
&\leq \lim_{\theta \searrow 0} (\max\{|\lambda_i\{I - \theta B^*(t)\}\}| \\
&\quad + \theta(m-1) \max\{|b_{ij}(t)|\eta\} - 1) / \theta \\
&= \lim_{\theta \searrow 0} (1 - \theta(\bar{b}_1 + \bar{\varepsilon}) - 1) / \theta = -(\bar{b}_1 + \bar{\varepsilon})
\end{aligned} \tag{C}$$

Then from (B) and (C), finally we have:

$$\begin{aligned}
-b_2 - \varepsilon L_{0,a} &\leq -b_2 - \varepsilon \|X(t)\| \leq \Re \lambda_i(A_{22}(\varepsilon, t)) \\
&\leq -b_1 + \varepsilon \|X(t)\| \leq -b_1 + \varepsilon L_{0,a}
\end{aligned}$$

where: $L_{0,a} = \sqrt{m} \bar{m} L'_{0,a}$, $b_1 = \bar{b}_1 + \bar{\varepsilon}$ and $b_2 = \bar{b}_2 + \bar{\varepsilon}$. \square

2) *Proof of Theorem 1:* Following the same procedure of the proof of Theorem 1-[14], we get that⁸ there exists $K_1 > 0$: $\|\hat{\phi}_s(t, s)\|_2 \leq K_1 e^{-\beta(t-s)}$. Using Lemmas 2.2 and 2.3 of Chapter 5 in [9] and (10), there exists $K_2 > 0$:⁹ $\|\hat{\phi}_f(t, s)\|_2 \leq K_2 e^{-(b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha)(t-s)/\varepsilon}$. Thus, for sufficiently small ε , we get from (36)-[14]:

$$\begin{aligned}
\|\phi(t, s)\|_2 &= \|M^{-1}(t)\|_2 \left\| \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} \right\|_2 \|M(s)\|_2 \\
&\leq K_3 \max\{\|\hat{\phi}_s(t, s)\|_2, \|\hat{\phi}_f(t, s)\|_2\}
\end{aligned}$$

which implies: $\|\phi(t, s)\|_2 \leq \bar{K} e^{-\kappa(t-s)}$, where $\bar{K} = K_3 \max\{K_1, K_2\}$. \square

3) *Proof of Lemma 1:* Following the same procedure of the proof of Lemma 1-[14], let us consider the positive definite function, $\nu(t) = \alpha_1 V(t, x(t)) + \alpha_2 W(t, x(t), z(t))$, as a Lyapunov function candidate, where $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $V(t, x(t)) = \int_t^{\infty} \|\phi_s(\tau, t)x(t)\|_2 d\tau$, and $W(t, x(t), z(t)) = \int_t^{\infty} \|\phi_f(\tau, t)(z(t) - \bar{L}_0 x(t))\|_2 d\tau$. Then: $\frac{d}{dt} \nu(t) = \alpha_1 \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t}$ where:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} &\leq \frac{\bar{M}_1 K_1}{\beta} \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\|_2 - \|x(t)\|_2 \\
\frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} &\leq \int_t^{\infty} \|\phi_f(\tau, t)\|_2 [\|\bar{L}_0 A_0(t)\|_2 \|x(t)\|_2 \\
&\quad + \|\bar{L}_0 A_{12}\|_2 \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\|_2] d\tau - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2 \\
&\leq \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} \|x(t)\|_2 \\
&\quad - \left(1 - \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha}\right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \nu(t) &= \alpha_1 \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} \\
&\leq -\left(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha}\right) \|x(t)\|_2 \\
&\quad - \left(\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha}\right) - \alpha_1 \frac{K_1 \bar{M}_1}{\beta}\right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2
\end{aligned}$$

Then, $d\nu(t)/dt$ will be negative definite if α_1 and α_2 can be chosen such that: $\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} > 0$ and $\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha}\right) - \alpha_1 \frac{K_1 \bar{M}_1}{\beta} > 0$. This is possible if:

$$\varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\beta}{K_1 \bar{M}_1} \left(1 - \frac{\varepsilon K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \alpha}\right)$$

Then, it is sufficient that ε satisfies: $\varepsilon < \varepsilon^*$, where:

$$\varepsilon^* = \frac{\beta b_1}{K_1 K_2 \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta(L_{0,a} + \alpha + K_2 \bar{M}_2)}. \quad \square$$

⁸Just replace equations (8), (10) and (18), of [14], by equations (14), (16) and (25), respectively

⁹Let us note that: $b_1 > \varepsilon L_{0,a}$ and $\alpha < 0$, for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$. We chose $K_2 > 1$, because we need to guarantee hereafter that: $\alpha + K_2 \bar{M}_2 > 0$.

A. PROOF OF THEOREM 2

This proof is the same as the proof of Theorem 2-[14], only recall that now, the transition matrix of the homogeneous part of (23) satisfies the inequality $\|\phi_f(t, s)\|_2 \leq K_2 e^{-(b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \alpha)(t-s)/\varepsilon}$, and just replace equations (20), (22), (23) and (10) of [14], by equations (23), (22), (24), (25) and (13), respectively. \square

REFERENCES

- [1] H. Broulès and B. Marinescu. *Poles and Zeros at Infinity of Linear Time Varying Systems*, IEEE Transaction on Automatic Control. vol. 44, No. 10, pp. 1981-1985, October, 1999.
- [2] M. S. Chen and Y. R. Huang. *Linear Time Varying System Control Based on the Inversion Transformation*, Automatica. vol. 33, No. 4, pp. 683-688, 1997.
- [3] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press. 1975.
- [4] G. H. Hardy. *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 10th edition. 1975.
- [5] A. Ichikawa and H. Katayama. *Lecture Notes in Control and Information Science*, Springer, No. 265. 2001.
- [6] T. Kailath. *Linear Systems*, Prentice-Hall, Inc. 1980.
- [7] E. W. Kamen. *The Poles and Zeros of a Linear Time Varying System*, Linear Algebra and its Applications. No. 98, pp. 263-289, 1988.
- [8] E. W. Kamen, P. P. Khargonekar and A. Tannenbaum. *Control of Slowly-Varying Linear Systems*, IEEE Transaction on Automatic Control. vol. 34, No. 12, pp. 1283-1285, December 1989.
- [9] P. V. Kokotović, H. K. Khalil and J. O'Reilly. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Academic Press. 1986.
- [10] B. Marinescu and H. Broulès. *The exact Model Matching Problem for Linear Time Varying Systems: An algebraic Approach*, IEEE Transaction on Automatic Control. vol. 48, No. 1, pp. 166-169, January, 2003.
- [11] B. Marinescu. *Model Matching Topics for Linear Time Varying Systems: Computation Rules in an Algebraic Approach*, Proceedings of the American Control Conference. New York City, USA, pp. 4357-4362, July 11-13, 2007.
- [12] B. Marinescu. *Model Matching and Decoupling for Continuous and Discrete Time Linear Time Varying Systems*, International Journal of Control. vol. 82, No. 6, pp. 1018-1028, June, 2009.
- [13] J. W. Polderman and J. C. Willems. *Introduction to Mathematical Systems Theory*, Text in Applied Mathematics, Springer, 1997.
- [14] S. Puga, M. Bonilla and M. Malabre. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO System*, 49th IEEE CDC, pp 6870-6875, 2010.
- [15] S. Puga, M. Bonilla and M. Malabre. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO System. Part II: State Observation*, 50th IEEE CDC-ECC, pp 1258-1263, 2011.
- [16] G. W. Stewart. *Introduction to Matrix Computations*, Academic Press, Inc. 1973.
- [17] L. M. Silverman. *Realization of Linear Dynamical Systems*, IEEE Transaction on Automatic Control. vol. AC 16, No. 6, pp. 554-567, December, 1971.
- [18] F. Wu. *Control of Parameter Varying Linear Systems*, Dissertation of Doctor of Philosophy Degree, University of California at Berkeley, 1995.

Apéndice J

IJRNC 2013

El siguiente artículo ha sido aceptado para su publicación en la revista International Journal of Robust and Nonlinear Control.

INTERNATIONAL JOURNAL OF ROBUST AND NONLINEAR CONTROL

Int. J. Robust. Nonlinear Control 2012; **00**:1–25

Published online in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com). DOI: 10.1002/rnc

Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO Systems

S. Puga¹, M. Bonilla^{2*}, M. Malabre³ and R. Lozano^{2,4}¹ UPIITA-IPN Academia de Sistemas, AV. IPN 2580 CP 07340 MÉXICO D.F.² CINVESTAV-IPN, Control Automático, UMI 3175 CINVESTAV-CNRS. A.P. 14-740. MÉXICO 07000.³ LUNAM Université, CNRS, IRCCyN UMR CNRS 6597, 1 Rue de la Noë, F-44321 Nantes, FRANCE.⁴ Heudiasyc UMR UTC-CNRS 7253 Compiègne, FRANCE.

SUMMARY

This paper considers the problem of stabilizing a single-input single-output linear time varying system using a low order controller and a reference model. The closed loop is a linear singularly perturbed system with uniform asymptotic stability behavior. We calculate bounds $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ as in Kokotović's book, such that the uniform asymptotic stability of the singularly perturbed system is guaranteed. We show how to design a control law such that the system dynamics is assigned by a Hurwitz polynomial with constant coefficients. Copyright © 2012 John Wiley & Sons, Ltd.

Received ...

KEY WORDS: Linear time varying system, singularly perturbed system, uniform asymptotic stability, implicit perturbed control law, high gain observer.

1. INTRODUCTION

Linear Time Varying Systems have been studied for the last 40 years. One of the main goals is to design a state feedback control law in order to obtain a desired performance, as well as to guarantee stability.

In 1971, Silverman [35] developed the realization theory for time varying linear systems and studied the controllability property. He showed that the coefficients of the system's matrices have to possess a finite number of derivatives in order to satisfy the controllability property; the controllability concept was applied in particular to time varying electrical networks as an example.

In 1988, Kamen [17] developed a notion of poles and zeros in terms of factorizations of polynomial operators with time varying coefficients, where the poles can be computed

*Correspondence to: CINVESTAV-IPN, Control Automático, UMI 3175 CINVESTAV-CNRS. A.P. 14-740. MÉXICO 07000. E-mail: mbonilla@cinvestav.mx

2 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE AND R. LOZANO.

1
2
3 by solving a nonlinear differential equation with time varying coefficients. Later, in 1989,
4 Kamen *et al.* proposed a state feedback control for slowly time varying linear continuous time
5 systems with bounded coefficients; the procedure was based on the frozen time approach
6 and that control law guarantees uniform asymptotic stability of the system [18].
7

8 In 1997, a state feedback control was designed for uniformly controllable linear time
9 varying systems, based on a nonlinear state transformation [6], which converts the
10 stabilization problem into a destabilization problem of the transformed state, and the
11 control law can be applied to the systems with time varying parameters that are piecewise
12 continuous.
13

14 In 1999, a new approach was developed [5] which is based on a graded module
15 extension over the noncommutative ring of differential operators. This approach is a relevant
16 generalization of the transfer function to the time varying case, where the authors use the
17 polynomial matrix description; also they characterize the structure of the system at infinity.
18 In [21] the exact model matching was formulated and solved using the same mathematical
19 tool. In [22] and [23] Marinescu has given an implementable solution to some model matching
20 problems for continuous time varying linear systems; the parametrization of the whole
21 class of proper solutions was given. The approach was algebraic and based on the Smith-
22 MacMillan form at infinity of a transfer matrix, which has been recently introduced for the
23 case of time varying systems.
24
25

26 A common point of the above mentioned works is the knowledge of the time varying
27 parameters of the system. In most cases, the $n - 1$ derivatives of the time varying parameters
28 are required, and in a few of them, the measurement of the state vector is required. In the \mathcal{H}_2
29 & \mathcal{H}_∞ approaches there exist works where the problem has been tackled. For example, in [39]
30 the authors propose an observer which is the optimal solution for the robust fault detection
31 problem of linear time varying systems in the time domain. This observer is obtained by
32 solving a standard differential Riccati equation; two different problems are considered when
33 the initial state is known and when it is unknown. The knowledge of the state, input and
34 output matrices: $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ and $D(t)$ is necessary, together with the assumption that
35 the pair $(A(t), C(t))$ is detectable.
36
37

38 In the optimal control approach, for linear systems with time varying parameters, there are
39 results, as [13] and [38], where a Linear Quadratic Gaussian (LQG) control law is developed.
40 Such approach requires knowledge of matrices, $A(t)$, $B(t)$ and $C(t)$, and the measurement
41 of the state; the quadratic stability is guaranteed. Wu [38] tackles the problem in a more
42 complete way; he developed an LQG observer and a quadratic state estimator, but the
43 knowledge of the matrices $A(t)$, $B(t)$ and $C(t)$ is still necessary.
44
45

46 Synthesis of observers based on the singularly perturbed systems approach is not new,
47 see for example [29], [14], [15]. With respect to the case of linear time varying systems, two
48 important papers are [16] and [27]. In [27] the synthesis of the state observer is realized
49 by separating a classical full order Luenberger observer into the slow and fast subsystems.
50 One observer is for the slow subsystem and the other observer is for the fast subsystem. For
51 the stability analysis of the closed loop system, the knowledge of the system parameters is
52 required. In [16], the observer is only synthesized for the slow subsystem. For the stability
53 analysis of the closed loop system, the knowledge of the system parameters is again required.
54
55
56
57
58

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60

In this paper, we propose a control law for a given SISO linear time varying system, whose dynamics is represented by the following differential equation

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_n(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_2(t)\frac{d}{dt}y(t) + a_1(t)y(t) = b(t)u(t) \quad (1)$$

where the time varying parameters are unknown and we only know their bounds. This kind of models are present in systems whose parameters are related to functions like sine and cosine, as for example in aircrafts [7], parallel robots [26], robotics [34, 20] mechatronics [33, 1], satellites [32], etc...; and also in systems whose parameters belong to known bounded regions as for example in thermal processes [4]; see also the academic examples found in [36].

The control law is based on the singular perturbations approach [19], and as in [30] only requires the bounds of the time varying parameters. The aim of this control law is to approximately match a given SISO linear time invariant system, whose dynamics is represented by the differential equation:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \bar{a}_n\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + \bar{a}_2\frac{d}{dt}y(t) + \bar{a}_1y(t) = r(t) \quad (2)$$

A high gain observer is also proposed, which is also based on the singular perturbations approach. The control scheme, control law plus observer, guaranties the behavior and the asymptotic stability as initiated in [31]. The paper is organized as follows. The problem is first stated in Section 2. Next, in Section 3 we propose a singularly perturbed control law such that the closed loop system can be written as a linear time varying singularly perturbed system. Following [19], in Section 4.1 the closed loop system is separated in two time scale systems, namely a slow system and a fast one. In Section 4.2 we study the uniform stability of the fast and slow systems. In Section 5 we get the desired state space approximation. In Section 6 we propose a high gain observer. In Section 6.1 we study the stability of the system and the observer together. Finally, in Section 7 we give an academic example for illustrating the developed technique. All the proofs are given in the Appendix.

NOTATION

- $\underline{\chi}_k^i \in \mathbb{R}^k$ stands for the vector whose the i -th entry is equal to 1 and the other ones are equal to 0. $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ stands for the identity matrix of size k . $T_u\{v^T\}$ stands for the upper triangular Toeplitz matrix, whose first row is v^T . And $T_\ell\{v\}$ stands for the lower triangular Toeplitz matrix, whose first column is v .
- $BDM\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ denotes a block diagonal matrix whose diagonal blocks are $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$.
- Given a vector function $f(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $\|f(\cdot)\| = \|f(\cdot)\|_2$ and for a function matrix $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|A(\cdot)\| = \|A(\cdot)\|_2$, see [9].

4

S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE AND R. LOZANO.

- A vector function $f(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^n$ is said to be $\mathcal{O}(\varepsilon)$ over an interval $[t_1, t_2]$ if there exist positive constants K and ε^* such that $\|f(\varepsilon, t)\| \leq K\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^*], \quad \forall t \in [t_1, t_2]$, see [12].

2. SYSTEM DEFINITION AND REPRESENTATION FORM

Let us consider a linear single input, single output, time varying system represented by the differential equation (1), defined for $t \geq t_0 \geq 0$, with initial conditions

$$y(t_0), \frac{d}{dt}y(t_0), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t_0)$$

$y \in \mathbb{R}$ is the dependent variable, $u \in \mathbb{R}$ is the input, at time $t \in J = [0, \infty)$. The coefficients, $a_i(t)$ and $b(t)$, are such that:

H1 $a_i(t)$ are unknown bounded continuous real functions of class[†] C^∞ , for all $i = 1, \dots, n$, satisfying: $\|a_i(t)\| \leq L_{0,a}$ and $\|\frac{da_i(t)}{dt}\| \leq L_{1,a}$.

H2 $b(t)$ is an unknown bounded positive continuous real function of class C^∞ , satisfying: $0 < b_1 \leq b(t) \leq b_2$ and $\|\frac{db(t)}{dt}\| \leq c$.

A simple technique can be used to recast this differential equation into the form of a linear state equation with input $u(t)$ and output $y(t)$. Let us define the following state variables:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y & \frac{d}{dt}y & \dots & \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y \end{bmatrix}^T, \tag{3}$$

we then obtain time-varying linear state equation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta(t) &= A(t)\zeta(t) + B(t)u(t); \quad y(t) = C\zeta(t) \\ A(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 1 \\ -a_1(t) & \cdot & \cdot & \dots & -a_n(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \end{aligned} \tag{4}$$

where the initial state condition is $\zeta(t_0) = \left[y(t_0) \quad \frac{d}{dt}y(t_0) \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t_0) \right]^T$.

Let us note that when the coefficients, $a_1(t), \dots, a_n(t)$ and $b(t)$, are known for all $t \geq 0$, a trivial solution to match the reference model (2) is simply:

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} \left(\begin{bmatrix} (-\bar{a}_1 + a_1(t)) & \dots & (-\bar{a}_n + a_n(t)) \end{bmatrix} \zeta(t) + r(t) \right)$$

[†] For simplicity, in this paper we only consider functions of class C^∞ . But it could be considered functions of class C^k , where k is a sufficiently positive large integer such that the derivability conditions are fulfilled. See also Corollary 2.4.12 of [28].

When the coefficients are unknown, assuming that time differentiation and algebraic loops are allowed, a possible mathematical ideal solution could be [2]:

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} \left(\frac{d}{dt} + \beta \right) \left(\frac{d}{dt} \zeta_n + \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n \end{bmatrix} \zeta(t) - r(t) \right) + (1 - \varepsilon)u(t) \quad (5)$$

where: $\beta > 0$ and $0 < \varepsilon \ll 1$. Indeed, substituting (5) into (4), we get:

$$\begin{aligned} \varepsilon u(t) &= \frac{d}{dt} \zeta_n(t) + \begin{bmatrix} a_1(t) & \cdots & a_n(t) \end{bmatrix} \zeta(t) - b(t)u(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt} + \beta \right) \left(\frac{d}{dt} \zeta_n + \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n \end{bmatrix} \zeta(t) - r(t) \right) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} 0 \end{aligned} \quad (6)$$

namely:

$$\frac{d}{dt} \zeta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 1 \\ -\bar{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdots & -\bar{a}_n \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (r(t) + ke^{-\beta t}) \quad (7)$$

In this paper, we propose a realizable approximation of the ideal solution (5). A practical way to approach a derivative action and to avoid an algebraic loop is to use approximations based on the convergence to zero of a positive small parameter ε [3, 24, 25]. A formal mathematical method to treat such $\mathcal{O}(\varepsilon)$ approximations is precisely the singularly perturbed approach [19].

In the next Section we propose a singularly perturbed control law, whose aim is to approximately approach the reference model (7).

3. SINGULARLY PERTURBED CONTROL LAW

In order to approximate the ideal solution (5), for the state space representation (4), we propose the following singularly perturbed control law, composed by a singularly perturbed controller and a reference model,

Singularly perturbed controller

$$\varepsilon u(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{\zeta}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Reference model

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_n + (1 + \ell) \\ 0 & \cdots & 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} \hat{\zeta}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \end{aligned} \quad (9)$$

6 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE AND R. LOZANO.

1 where r is a reference signal, and $\hat{\zeta}$ is the observed state variable (detailed in Section 6),
 2 β , τ and ε are positive parameters, and $\ell = 1/\tau - \beta$. The parameters, $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$, are the
 3 coefficients of the desired Hurwitz polynomial, $p(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_n \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_2 \lambda + \bar{a}_1$, which
 4 are chosen such that:
 5
 6
 7

$$8 \quad \beta \geq \max \{ -\Re e(\lambda) \mid p(\lambda) = 0 \}, \quad \bar{a}_n + \beta > 1, \quad -L_{0,a} - \bar{a}_n + 1 - \beta + 1/\tau > 0 \quad (10)$$

9 The aim of the *reference model* is: (i) to assign the closed loop dynamics, such that its
 10 behavior is a time invariant linear system with the Hurwitz characteristic polynomial $p(\lambda)$,
 11 and (ii) to assign a rate of exponential convergence to the desired dynamics. The aim
 12 of the *singularly perturbed controller* is: (i) to change the base representation system for
 13 obtaining a *singularly perturbed model*, and (ii) to match the desired dynamics by an ε
 14 order. Indeed, we show in Lemma 1 that the parameters, β and τ , enable us to compute
 15 a sufficiently small ε such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed*
 16 *model* is guaranteed. The parameter selection (10) is done in order to have a β exponential
 17 stability of the slow dynamics and to guarantee the exponential stability of the fast dynamics
 18 (see (21), (22) and (23)).
 19
 20
 21
 22
 23

24 Note that, when $\varepsilon = 0$ in (8) and (9), we get (6).

25 In order to obtain the closed loop singularly perturbed model, let us combine (4), (8) and
 26 (9) and let us set $x_i(t) = \zeta_i(t)$, for $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, and $z(t) = \zeta_n(t)$, namely:

$$27 \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) + A_{13}h(t) + B_1r(t) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt}(t) &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) + A_{23}(t)h(t) \end{aligned} \quad (11)$$

28 where h is the estimation error, $h = \hat{\zeta} - \zeta$, and the matrices $A_{11} \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n+1 \times 1}$,
 29 $A_{13} \in \mathbb{R}^{n+1 \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n+1 \times 1}$, $A_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times n+1}$, $A_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$ and $A_{23}(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ are defined
 30 as follows:
 31
 32
 33
 34
 35
 36
 37

$$38 \quad A_{11} = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_3 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} & -(1+\ell) & -\ell \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (\beta-1) & -\beta \end{array} \right]$$

$$39 \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -\bar{a}_n + (1+\ell) \\ -(\beta-1) \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\bar{a}_1 & \cdots & -\bar{a}_{n-2} & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_n + (1 + \ell) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -(\beta - 1) \end{array} \right]$$

$$A_{21}(\varepsilon, t) = \left[-\varepsilon a_1(t) \quad \cdots \quad -\varepsilon a_{n-1}(t) \mid b(t) \quad 0 \right]$$

$$A_{22}(\varepsilon, t) = [-\varepsilon a_n(t) - b(t)], \quad A_{23}(t) = \left[0 \quad \cdots \quad 0 \mid b(t) \right]$$

Note that the matrix $A_{22}(0, t)$ satisfies:

$$\begin{cases} \|A_{22}(0, t)\|_2 \leq b_2 \\ \|\dot{A}_{22}(0, t)\|_2 \leq c \\ -b_2 \leq \operatorname{Re} \lambda(A_{22}(0, t)) \leq -b_1 \end{cases}, \quad \forall t \in J \quad (12)$$

Thus, the singularly perturbed model, (11), satisfies Lemmas 2.1, 2.2 and 2.3 of Chapter 5 in [19].

In *Theorem 1* of Section 4.2, we prove that (11) is uniformly asymptotically stable, and in *Theorem 2* of Section 5, we show that the state approximation tends to the time invariant reference model.

4. ASYMPTOTIC STABILITY OF THE HOMOGENEOUS PART

In this Section, we study the stability of the homogeneous part of the differential equation (11), when the state is measured, namely we assume that: $r = 0$ and $\hat{\zeta} = \zeta$. For this, we first apply a state transformation to decouple the fast and slow systems, and we then study the *uniform asymptotic stability*.

4.1. Decoupling Transformation

Let us first study the homogeneous part of equation (11):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt}(t) &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Following [19], let us transform (13) into a slow and a fast systems. For obtaining the so-called decoupling transformation, we need to define the following bounded continuously differentiable matrices:

$$L(t) = L_0(t) + \varepsilon R_L(t) \quad \text{and} \quad H(t) = H_0(t) + \varepsilon R_H(t) \quad (14)$$

8 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE AND R. LOZANO.

Introducing the following change of variables:

$$\begin{bmatrix} \Theta(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - \varepsilon H(t)L(t) & -\varepsilon H(t) \\ L(t) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = M^{-1}(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

we have:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt}(t) &= \left[\frac{dL}{dt}(t) + \frac{1}{\varepsilon} A_{21}(\varepsilon, t) + L(t)(A_{11} - A_{12}L(t))\frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t)L(t) \right] x(t) \\ &\quad + \left[L(t)A_{12} + \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(\varepsilon, t) \right] \eta(t) \\ \frac{d\Theta}{dt}(t) &= \left[-\varepsilon \frac{dH}{dt}(t) + A_{12} - \varepsilon H(t)L(t)A_{12} - H(t)A_{22}(\varepsilon, t) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon A_{11}H(t) - \varepsilon A_{12}L(t)H(t) \right] \eta(t) + [A_{11} - A_{12}L(t)] \Theta(t) \end{aligned}$$

Given the properties (12), from Theorem 3.1 of Chapter 5 in [19], there exists a sufficiently small ε such that:

$$\varepsilon \frac{dL}{dt}(t) = A_{22}(\varepsilon, t)L(t) - A_{21}(\varepsilon, t) - \varepsilon L(t)[A_{11} - A_{12}L(t)] \quad (16)$$

$$-\varepsilon \frac{dH}{dt}(t) = H(t)A_{22}(\varepsilon, t) - A_{12} + \varepsilon H(t)L(t)A_{12} - \varepsilon (A_{11} - A_{12}L(t))H(t) \quad (17)$$

we then get:

$$\frac{d\Theta}{dt}(t) = [A_{11} - A_{12}L(t)] \Theta(t) \quad (18)$$

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt}(t) = [A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)A_{12}] \eta(t) \quad (19)$$

From (14), (16) and (17), we get:

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad H(t) = H_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ L_0(t) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = \bar{L}_0, \quad H_0(t) = A_{12}A_{22}^{-1}(0, t) \end{aligned}$$

Let us define:

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0 \quad (20)$$

Thus, the slow system is:

$$\frac{dx_s}{dt}(t) = A_0 x_s(t) \quad (21)$$

and the time-frozen fast system is:

$$\varepsilon \frac{dz_f}{dt}(t) = [A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon \bar{L}_0 A_{12}] z_f(t) \quad (22)$$

Substituting the matrices values, A_{11} , A_{12} , $A_{22}(0, t)$ and $A_{21}(0, t)$ into (20), we obtain:

$$A_0 = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \hline -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_3 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_n & -\ell \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\beta \end{array} \right]$$

Let $\phi_s(t, t_0)$ and $\phi_f(t, t_0)$ be the transition matrices of the slow and the fast systems, (21) and (22), respectively. Then in view of (10), H1 and H2 there exist $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ and $\alpha > 0$ such that:

$$\begin{aligned} \|\phi_s(t, t_0)\| &\leq K_1 e^{-\alpha(t-t_0)} \\ \|\phi_f(t, t_0)\| &\leq K_2 e^{-(b_1 + \varepsilon(-L_{0,\alpha} - \bar{a}_{n+1} - \beta + 1/\tau))(t-t_0)/\varepsilon}, \quad t \in [t_0, \infty) \end{aligned} \quad (23)$$

4.2. Conditions for Uniform Asymptotic Stability

In this Section we show that uniform asymptotic stability of (13) is guaranteed by the properties of the transition matrices of (21) and (22). For this, let us particularize Theorem 4.1 of Chapter 5 in [19] to our case study:

Theorem 1

Given the assumptions (10), there exists an $\varepsilon^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ the system (13) is uniformly asymptotically stable. Moreover, the transition matrix of (13), $\phi(t, s)$, satisfies $\|\phi(t, s)\| \leq K e^{-\alpha(t-s)}$ for all $t \geq s \geq t_0$, where $K > 0$ and α are independent of ε .

□

This Theorem relates the behavior of (13) to the behavior of the slow and fast systems. This result holds asymptotically as ε tends to 0. From a computational point of view, it is important to have an idea of the order of the upper bound ε^* . This is done in Lemma 4.1 of Chapter 5 in [19], which for our case study takes the following form:

Lemma 1

Given the conditions of Theorem 1, and $\|A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_1$, $\|L_0 A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_2$ and $\|\frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_0 + \bar{L}_0 A_0(t)\|_2 \leq \bar{M}_3$, the singularly perturbed system (13) is uniformly asymptotically stable for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$, where:

$$\varepsilon_1^* = \frac{\beta b_1}{\beta \bar{M}_2 + K \bar{M}_1 \bar{M}_3}$$

$$\bar{M}_1 = \sqrt{1 + \left(\bar{a}_1 - \frac{1}{\tau}\right)^2 + 2(1 - \beta)^2}, \quad \bar{M}_2 = \left|\bar{a}_1 + \beta - \frac{1}{\tau} - 1\right|, \quad \bar{M}_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 + \left(\beta - \frac{1}{\tau}\right)^2}$$

□

10

S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE AND R. LOZANO.

5. STABILITY OF THE COMPLETE SYSTEM

Let us now consider the whole singularly perturbed model (11), when the state is no longer measured, namely $r \neq 0$ and $\hat{\zeta} \neq \zeta$, and with the initial state conditions: $x(t_0) = x_0$ and $z(t_0) = z_0$. We are assuming that:

H3 $r \in L^\infty \cap C^\infty$.

H4 The estimation error, $h(t) = \hat{\zeta}(t) - \zeta(t)$, is a bounded continuous real function, whose norm is of order ε .

Hypothesis **H3** is done because the control scheme, (8) and (9), is indeed the proper approximation of the non-proper controller (5). And in Hypothesis **H4**, we are taking into account the behavior of the singularly perturbed observer proposed in section 6 (see (46) in Corollary 1).

Applying the change of variable, defined by (15), (16) and (17), we get:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt}(t) &= [A_{11} - A_{12}L(t)]\Theta(t) + [B_1 - \varepsilon H(t)L(t)B_1]r(t) \\ &\quad + [A_{13} - \varepsilon H(t)L(t)A_{13} - H(t)A_{23}(t)]h(t), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt}(t) = [A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)A_{12}]\eta(t) + \varepsilon L(t)B_1r(t) + [A_{23}(t) + \varepsilon L(t)A_{13}]h(t) \quad (25)$$

where the initial conditions are:

$$\Theta(t_0) = [I - \varepsilon H(t_0)L(t_0)]x_0 - \varepsilon H(t_0)z_0, \quad (26)$$

$$\eta(t_0) = L(t_0)x_0 + z_0. \quad (27)$$

The solution of (24)-(27), when transformed back using the inverse of (15), yields the exact solution of (11). Asymptotic approximations to the solution of (11) with $\mathcal{O}(\varepsilon)$ error can be obtained by retaining $\mathcal{O}(\varepsilon)$ approximations of the right hand side coefficients of (24)-(27). This process for the slow system yields:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt}(t) &= A_0x_s(t) + A_qh(t) + B_1r(t) \\ A_q &= A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{23}(t) \end{aligned} \quad (28)$$

For the fast system, we change the time scale as, $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$; with this change, the derivative for the fast system is $\frac{d}{dt}z_f(\tau) = \frac{d}{d\tau}z_f(\tau)\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\tau}z_f(\tau)$. This reduces the approximation problem to a problem with regular perturbation of right hand side coefficients. Following the process as in (28) the equation for the fast system is:

$$\frac{d}{d\tau}z_f(\tau) = A_{22}(0, t_0)z_f(\tau) + A_{23}(t_0 + \varepsilon\tau)h(t_0 + \varepsilon\tau). \quad (29)$$

[‡] Kokotović [19] considers in general $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$ errors.

and the initial conditions are:

$$\begin{aligned} x_s(t_0) &= x_0 \\ z_f(0) &= A_{22}^{-1}(0, t_0)A_{21}(t_0)x_0 + z_0 \end{aligned} \quad (30)$$

where

$$A_0 = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0$$

the equations (28) and (29) have the slow and fast systems derived by formally neglecting ε in (11).

We obtain in this way, the following special case of Theorem 6.1 in [19] for our case study:

Theorem 2

Given the matrix $A_{22}(\varepsilon, t)$, the properties (12) and $\|h\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Then there exist $\varepsilon^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ the following expressions hold uniformly on $t \in [t_0, t_f]$:

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (31)$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x_s(t) + z_f\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (32)$$

where x_s and z_f are solutions of (28) and (29), with the initial conditions (30). □

6. SINGULARLY PERTURBED OBSERVER

In this section we propose a high gain observer, such that the estimation error satisfies the assumption **H4**. This proposition is in fact a proper approximation of the non-proper system proposed by [24]. Indeed, let us consider the ideal observer (c.f. (4)):

$$\begin{aligned} N \frac{d\tilde{\zeta}}{dt}(t) &= \tilde{\zeta}(t) - \Gamma y(t) \\ \tilde{\zeta}_n(t) &= (\chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T \tilde{\zeta}(t) \end{aligned} \quad (33)$$

$$N = \mathbb{T}_\ell\{\chi_{\bar{n}+1}^2\} ; \quad \Gamma = \chi_{\bar{n}+1}^1 \quad (34)$$

where (c.f. (3)): $\tilde{\zeta}(t) = -(N \frac{d}{dt} - \mathbb{I})^{-1} \chi_{\bar{n}+1}^1 y(t) \equiv \zeta(t)$, with: $\bar{n} = n - 1$.

In [24], the authors proposed the following singularly perturbed proper approximation:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{Ob}}{dt}(t) &= -\beta_o x_{Ob}(t) - \varepsilon^{\bar{n}+1} (\chi_{\bar{n}}^1)^T z_{Ob}(t) + \varepsilon^{\bar{n}} q_{(1,2)} y(t) \\ \varepsilon \frac{dz_{Ob}}{dt}(t) &= \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} x_{Ob}(t) - (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{Ob}(t) - Q_0 \Gamma y(t) \\ y_{Ob}(t) &= (\chi_{\bar{n}}^1)^T z_{Ob}(t) - \frac{1}{\varepsilon} q_{(1,2)} y(t) \end{aligned} \quad (35)$$

where $x_{Ob} \in \mathbb{R}^1$, $z_{Ob} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, and $y_{Ob} \in \mathbb{R}^1$. β_o and ε are two positive real numbers. $U_{\bar{n}}$ and $M_{\bar{n}}$ are the following Butterworth filter's matrices [8]:

12 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE AND R. LOZANO.

$$U_{\bar{n}} = T_u\{(\chi_{\bar{n}}^2)^T\},$$

$$M_{\bar{n}} = \begin{cases} BDM\{M_1, \dots, M_{\bar{n}/2}\} & , \text{ for } \bar{n} \text{ even} \\ BDM\{M_1, \dots, M_{(\bar{n}-1)/2}, 1\} & , \text{ for } \bar{n} \text{ odd} \end{cases}, \quad (36)$$

$$M_j = (\sin \theta_j)I_2 + T_\ell\{(\cos^2 \theta_j)\chi_2^2\}, \quad \theta_1 = \pi/(2\bar{n}),$$

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \pi/\bar{n}, \quad j \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}. \quad (37)$$

$$(\chi_{\bar{n}}^1)^T (\lambda I + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}))^{-1} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} = 1/\Delta_{\mathfrak{B}}(\lambda) \quad (38)$$

$$\Delta_{\mathfrak{B}}(\lambda) = \det(\lambda I + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})) =$$

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{\bar{n}/2} ((\lambda + \sin \theta_i)^2 + \cos^2 \theta_i) & , \text{ for } \bar{n} \text{ even} \\ (\lambda + 1) \prod_{i=1}^{(\bar{n}-1)/2} ((\lambda + \sin \theta_i)^2 + \cos^2 \theta_i) & , \text{ for } \bar{n} \text{ odd} \end{cases} \quad (39)$$

Matrix $Q_0 \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times (\bar{n}+1)}$ is obtained by solving the following algebraic system equations:[§]

$$Q_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon N \end{pmatrix} + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} Q_0 = -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} \chi_{\bar{n}}^{\bar{n}} (\chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T \quad (40)$$

$$R_0 = -\frac{1}{\varepsilon} Q_0 N \quad (41)$$

The number $q_{(1,2)}$ corresponds to the (1, 2) entry of matrix Q_0 .

The proof of the following Theorem is in [24] (c.f. Theorem 5.1 in [19]):

Theorem 3 ([24])

Let us consider the following Butterworth filter:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{\mathfrak{B}}}{dt}(t) &= -\beta_o x_{\mathfrak{B}}(t) - \varepsilon^{\bar{n}+1} (\chi_{\bar{n}}^1)^T z_{\mathfrak{B}}(t) \\ \varepsilon \frac{dz_{\mathfrak{B}}}{dt}(t) &= (\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}) x_{\mathfrak{B}}(t) - (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{\mathfrak{B}}(t) + (\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}) \tilde{\zeta}_n(t) \\ y_{\mathfrak{B}}(t) &= (\chi_{\bar{n}}^1)^T z_{\mathfrak{B}}(t) \end{aligned} \quad (42)$$

where $x_{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^1$, $z_{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, and $y_{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^1$. Then there exists $\varepsilon^* \in (0, 1)$, such that for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$:

1. The cascade formed by (33) and (42) is externally equivalent[¶] to (35).
2. The output, y_{Ob} , of system (35), satisfies:

$$\begin{aligned} y_{Ob}(t) &= \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + e^{-(\beta_o + \varepsilon^n)t} x_{\mathfrak{B}}(0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \quad \forall t \geq t^* \\ &= \zeta_n(t) + e^{-(\beta_o + \varepsilon^n)t} x_{\mathfrak{B}}(0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (43)$$

where $t^* = \mathcal{O}(\frac{\varepsilon}{\sin \theta_1 - \sqrt{2\varepsilon^n}} \ln(1/\sqrt{\varepsilon}))$. □

In the Appendix A.4 we show the key points of the proof of this Theorem, which enables us to built matrices Q_0 and R_0 .

[§] Let us recall that the eigenvalues of the Butterworth filter are all different, and placed over the semi-circle of radius $1/\varepsilon$, on the left-half complex plane; thus $\text{Spectrum}(N) \cap \text{Spectrum}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} = \emptyset$, hence there exists a unique solution for these equations [10].

[¶] Two representations are called externally equivalent if the corresponding sets of all possible trajectories for the external variables, expressed in an *input/output partition* (u, y) , are the same [37].

Corollary 1

There exist matrices, D_1 and D_2 ,

$$\begin{aligned} D_1 &= -\hat{Q}_0^{-1}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}), \\ D_2 &= -\hat{Q}_0^{-1}q_1, \end{aligned} \quad (44)$$

where:

$$\hat{Q}_0 = [\underline{q}_2 \quad \underline{q}_3 \quad \cdots \quad \underline{q}_{\bar{n}+1}] \quad (45)$$

and the \underline{q}_i are the column vectors of matrix Q_0 for $i \in \{1, \dots, \bar{n} + 1\}$, such that:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(t) &= D_1 z_{Ob}(t) + D_2 y(t) = \zeta(t) + h(t), \quad \forall t \geq t^*. \\ h(t) &= \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (46)$$

Furthermore:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (D_1 z_{Ob}(t) + D_2 y(t)) = \zeta(t). \quad (47)$$

□

6.1. Closed Loop System

Applying the singularly perturbed control law, composed by the singularly perturbed controller (8) and the reference model (9), and the singularly perturbed observer, (35) and (46), we get the closed loop system described by (11).

In view of Corollary 1, Lemma 1 and Theorem 3 we conclude about the stability of the closed loop system (11).

7. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

Let us consider the following system:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_3(t) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_2(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_1(t) y(t) = b(t) u(t) \quad (48)$$

with parameters:

$$\begin{cases} a_1(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{1}{2^{j-1}} \sin((2j-1)t), & a_2(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sin\left(\frac{jt}{2}\right) \\ a_3(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{j}{(2j-1)(2j+1)} \sin(4jt), & b(t) = 1 + 0.568 (\sin(t) + \sin(2t)) \end{cases} \quad (49)$$

Note that $n = 3$, $L_{0,a} = 2$ and $b_1 = 0.5$. The state space representation is:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta(t) \end{aligned} \quad (50)$$

14 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE AND R. LOZANO.

The singularly perturbed controller (8) is:

$$\varepsilon u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{\zeta}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (51)$$

The reference model (9) is:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_3 + (1 + \ell) \\ 0 & 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} \hat{\zeta}(t) + \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (52)$$

where the parameters \bar{a}_1 , \bar{a}_2 and \bar{a}_3 are the coefficients of the following Hurwitz polynomial:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

Since $\bar{a}_3 = 1$, then the choice, $\beta = 10$ and $\tau = 0.085$, satisfies the inequalities of Theorem 1. From Lemma 1, we get: $\varepsilon_1^* = 0.18$, then $\varepsilon \in (0, 0.18)$; let us take $\varepsilon = 0.09$.

In order to obtain the singularly perturbed observer (35), we need to do the following computations:

Since $\bar{n} = n - 1 = 2$, then the associated matrices of the Butterworth filter are (see (36) and (37)):

$$\theta_1 = \pi/4, \quad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

The other matrix Q_0 of the observer (35) is (see (A6)):

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon^2} & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} & -1 \end{bmatrix}, \quad q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad q_{(1,2)} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

Then:

$$\hat{Q}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{Q}_0^{-1} = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{bmatrix}$$

Based on the proof of Corollary 1, we get: $\beta_o = 10$. Thus the singularly perturbed observer (35) takes the following form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{Ob}(t) &= -10x_{Ob}(t) - (0.09)^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} z_{Ob}(t) - (0.09)y(t) \\ \frac{d}{dt} z_{Ob}(t) &= \frac{1}{0.09} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_{Ob}(t) - \frac{1}{0.09} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} z_{Ob}(t) - \frac{1}{0.09} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{(0.09)^2} \\ 0 \end{bmatrix} y(t) \\ y_{Ob}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} z_{Ob}(t) + \frac{1}{(0.09)^2} y(t) \end{aligned} \quad (53)$$

From (44)–(46) in Corollary 1, we can compute $\hat{\zeta}(t)$,

$$\hat{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & -\varepsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z_{Ob}(t) + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \end{bmatrix} y(t) \quad (54)$$

^{||} From (A18), we have: $A_0 = -\beta_o - \varepsilon^3$, then from (A19) we get: $\beta_o = \beta$.

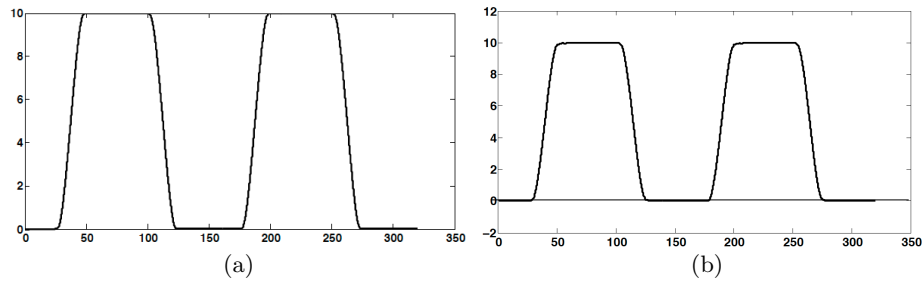


Figure 1. Model to match. (a) Reference signal r (55), (b) output y_{ideal} (56).

A MATLAB[®] numerical simulation was performed with the solver settings:

“Start time” = 0.0, “Stop time” = 320, “Type” = “Fixed-Step”, “Solver” = “ode45 Runge-Kutta”, “Fixed-step size” = 0.04, “Periodic sample time constraint” = “Unconstrained”, “Tasking mode for periodic sample times” = “auto”,

In order to satisfy **H3**, $r \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, the reference r is chosen as in the Definition 2.4.5 of [28]:

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-(t')^2}}, & t \in I_A = (1/6, 2/6), \quad t' = 12t - 3 \\ -e^{-\frac{1}{1-(t'')^2}}, & t \in I_B = (4/6, 5/6), \quad t'' = -12t + 9 \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (I_A \cup I_B) \end{cases} \quad (55)$$

$$r(t) = \int_0^t \left(\sum_{i=0}^3 (-1)^i \phi\left(\frac{1}{150}\sigma - i\right) \right) d\sigma, \quad t \in [0, 320]$$

The ideal model to match is:

$$\frac{d^3}{dt^3} y_{ideal} + \frac{d^2}{dt^2} y_{ideal} + 2 \frac{d}{dt} y_{ideal} + 1 y_{ideal} = r \quad (56)$$

Fig. 1 shows the reference r (55) and the output y_{ideal} of the model to match (56).

Figs. 2 and 3 present the closed loop behavior of the system (49) and (50) controlled by (51) and (52) with measurement of the system state ζ .

Figs. 4 and 5, show the closed loop behavior of the system (49) and (50) controlled by (51) and (52) using the singularly perturbed observer (53) and (54).

From Fig. 3, we realize that in the case of choosing a sufficiently differentiable reference signal r , and having the measurement of the true system state ζ , the control action u is well-behaved.

From Figs. 4(c) and 5(e), we can see that in the case of using the high gain observer, (53) and (54), the control action u is relatively large at the beginning before the observer matches the system state.

Let us to point out that, we had to use this high gain observer because the system coefficients are assumed to be unknown.

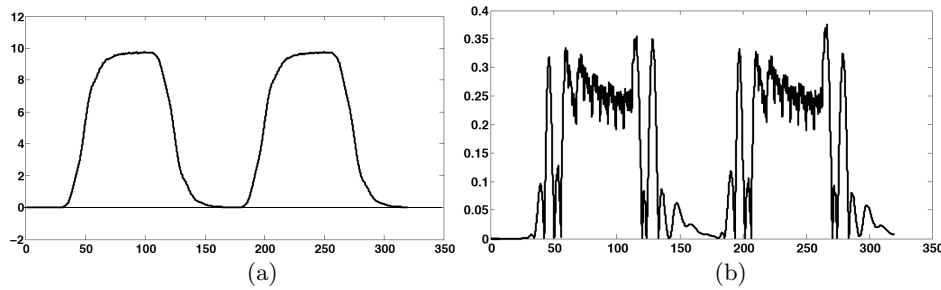


Figure 2. System (49) and (50) controlled by (51) and (52) with measurement of the system state ζ . (a) Output $y(t)$, (b) matching model error $|y - y_{ideal}|$.

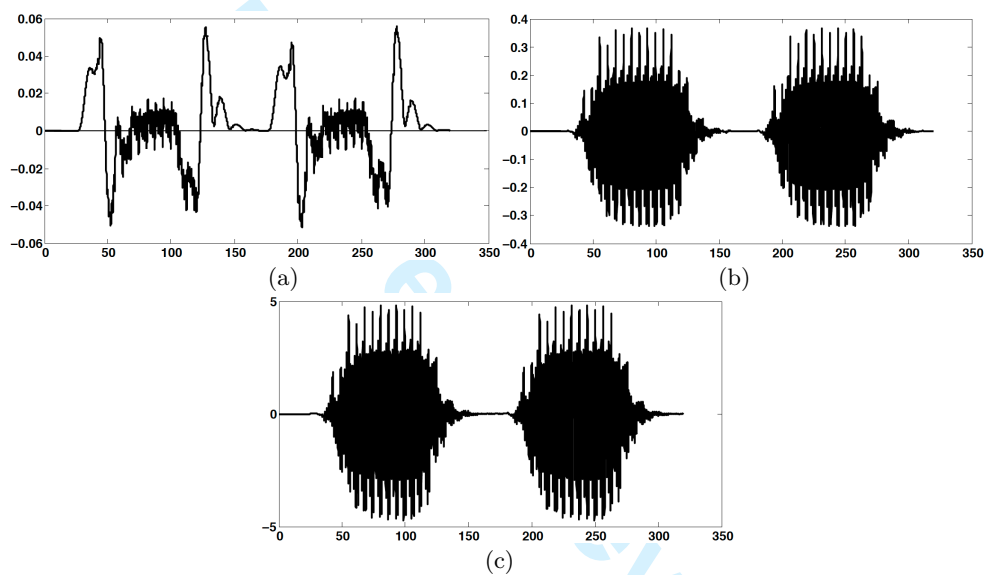


Figure 3. Control law (51) and (52) with measurement of the system state ζ . (a) State x_3 of the reference model (52), (b) state x_4 of the reference model (52), (c) singularly perturbed control law u (51).

8. CONCLUSION

In this paper, we have proposed a singularly implicit control scheme for linear time varying SISO systems. The control law scheme is composed by the *singularly perturbed control law* (8) and the *reference model* (9).

The aim of the *reference model* is to assign the closed loop dynamics, and to assign a rate of exponential convergence. The aim of the *singularly perturbed control law* is to transform the system into a *singularly perturbed model*, and to achieve a desired dynamics by an ε order (*c.f.* Theorem 2).

The parameters, β and ℓ , enable us to compute a sufficiently small ε^* such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed model* is guaranteed for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ (*c.f.* Lemma 1 and Theorem 1).

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60

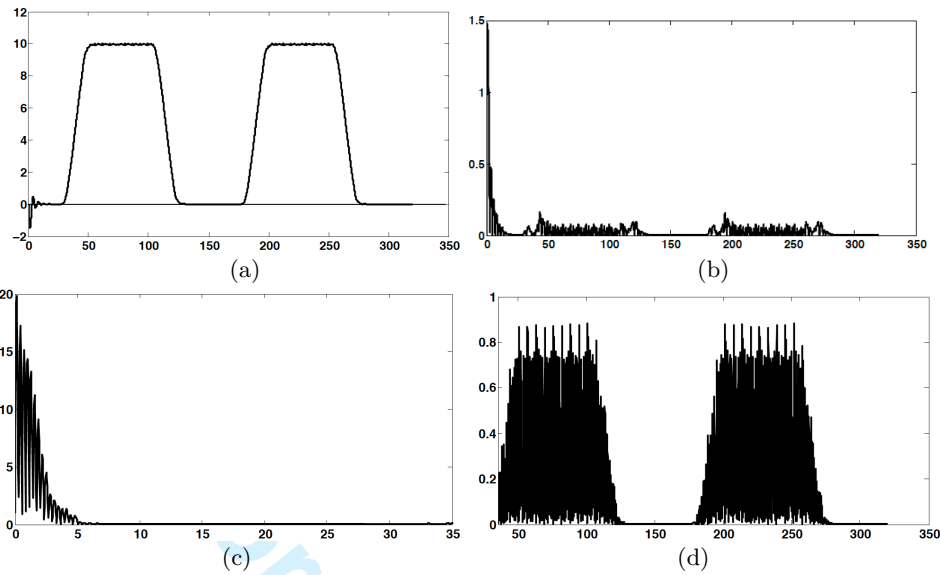


Figure 4. System (49) and (50), controlled by (51) and (52), using the singularly perturbed observer (53) and (54). (a) Output $y(t)$, (b) matching model error $|y - y_{ideal}|$, (c)-(d) state estimated error $\|\zeta - \hat{\zeta}\|$.

We have considered assumption **H3** because the control scheme, (8) and (9), is indeed the proper approximation of the non-proper controller (5).

Since the coefficients $a_i(t)$ and $b(t)$ are unknown, we have proposed a singularly perturbed observer (high gain observer), which is a proper approximation of the ideal non-proper observer (33) and (34). This high gain observer guarantees the satisfaction of the required control assumption **H4** for Theorem 2. The singularly perturbed observer provides an estimated state $\hat{\zeta} = \zeta + h$, whose estimated error, h , is $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (c.f. Corollary 1).

When applying the singularly perturbed control law, composed by the singularly perturbed controller (8) and the reference model (9), and the singularly perturbed observer, (35) and (46), we get the closed loop system described by a singularly perturbed model satisfying hypothesis **H1–H4**. Thus, from Corollary 1, Lemma 1 and Theorem 3, we proved the stability of the closed loop system (11).

The control scheme was successfully proved in a numerical simulation problem.

Acknowledgment We are thankful to the reviewers for their valuable help.

A. PROOFS

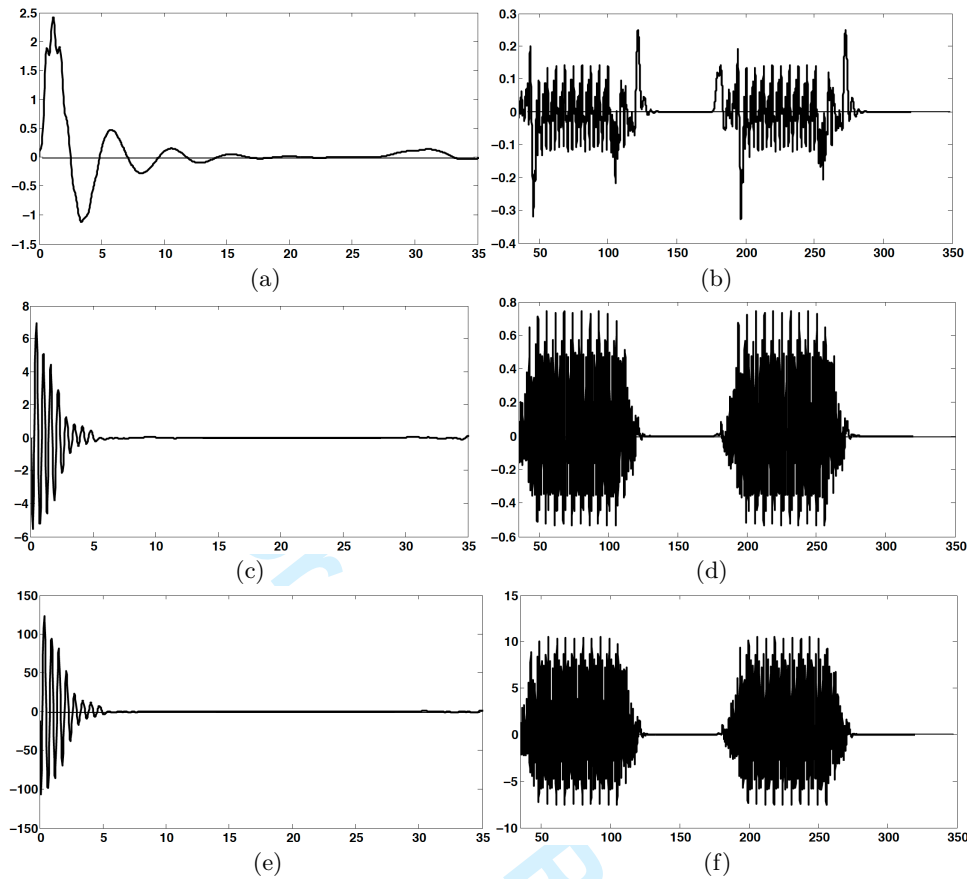


Figure 5. Control signals using the singularly perturbed observer (53) and (54). (a)-(b) State x_3 of the reference model (52), (c)-(d) state x_4 of the reference model (52), (e)-(f) singularly perturbed control law u (51).

A.1. Proof of Theorem 1

From [35], the transition matrix $\phi(t, s)$ of (13) and $M(t)$ defined in (15) satisfy the relation:

$$\phi(t, s) = M^{-1}(t) \begin{bmatrix} \phi_s(t, s) & 0 \\ 0 & \phi_f(t, s) \end{bmatrix} M(s) \quad \forall t \geq s, \quad (A1)$$

where the transition matrices $\phi_s(t, s)$ and $\phi_f(t, s)$ satisfy (recall (23)): $\|\phi_s(t, s)\| \leq K_1 e^{-\alpha(t-s)}$ and $\|\phi_f(t, s)\| \leq K_2 e^{-(b_1 + \varepsilon(-L_{0,a} - \bar{a}_n + 1 - \beta + 1/\tau))(t-s)/\varepsilon}$. Thus, for sufficiently small ε , we get from (A1):

$$\|\phi(t, s)\| \leq K_3 \max[K_1, K_2] e^{-\alpha(t-s)}.$$

where K_3 is an upper bound for $\|M^{-1}(t)\| \|M(s)\| \quad \forall t \geq s$. Selecting $K = K_3 \max[K_1, K_2]$, we conclude the proof. \square

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60

A.2. Proof of Lemma 1

Following the proof of Lemma 4.1 of Chapter 5 in [19], we consider the Lyapunov function candidate: $\nu(t) = \alpha_1 V(t, x(t)) + \alpha_2 W(t, x(t), z(t))$, where $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $V(t, x(t)) = \int_t^\infty \|\phi_s(\tau, t)x(t)\|_2 d\tau$ and $W(t, x(t), z(t)) = \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)(z(t) - \bar{L}_0 x(t))\|_2 d\tau$. For our particular case, we get:

$$\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} \leq \int_t^\infty K \bar{M}_1 e^{-\beta(\tau-s)} d\tau \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\| - \|x(t)\| \leq \frac{\bar{M}_1 K}{\beta} \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\| - \|x(t)\|$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} &\leq \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)\| \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_0 + \bar{L}_0 A_0(t) \right\| \|x(t)\| + \|\bar{L}_0 A_{12}(t)\| \|\bar{L}_0 x(t) + z(t)\| \right\} d\tau \\ &\quad - \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \leq \varepsilon \frac{\bar{M}_3}{b_1} \|x(t)\| - \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{M}_2}{b_1}\right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\| \end{aligned}$$

which imply:

$$\frac{\partial \nu(t)}{\partial t} \leq - \left(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{\bar{M}_3}{b_1} \right) \|x(t)\| - \left(\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{M}_2}{b_1}\right) - \alpha_1 \frac{\bar{M}_1 K}{\sigma_s} \right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|$$

Then, $\dot{\nu}(t)$ will be negative definite if α_1 and α_2 can be chosen such that:

$$\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{\bar{M}_3}{b_1} > 0 \quad \text{and} \quad \alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{M}_2}{b_1}\right) - \alpha_1 \frac{\bar{M}_1 K}{\beta} > 0$$

which is possible if:

$$\varepsilon \frac{\bar{M}_3}{b_1} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{b_1 - \varepsilon \bar{M}_2}{\bar{M}_1 K b_1} \beta$$

Then, it is sufficient that ε satisfies:

$$\varepsilon < \frac{\beta b_1}{K \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta \bar{M}_2} = \varepsilon_1^*$$

□

A.3. Proof of Theorem 2

In Theorem 1 we have proved that: $\|\phi(t, s)\| \leq K e^{-b_1(t-s)/\varepsilon}$. Then, the contribution of the input term $\varepsilon L(t) B_1 r(t)$ is of order $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Thus, the rest of the proof is a blueprint of the proof of Theorem 6.1 in [19]. □

A.4. Key points of the proof of Theorem 3

Let us first justify the external equivalence between the cascade formed by (33) and (42) with (35).

20 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE AND R. LOZANO.

Combining (33), with the Butterworth filter, (42), we get the global singularly perturbed system:

$$\begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_{\bar{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \tilde{\zeta} \\ \frac{d}{dt} x_{\mathfrak{B}} \\ \frac{d}{dt} z_{\mathfrak{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_o & -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \\ \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}}(\underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T & \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} & -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta} \\ x_{\mathfrak{B}} \\ z_{\mathfrak{B}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y$$

$$y_{\mathfrak{B}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta} \\ x_{\mathfrak{B}} \\ z_{\mathfrak{B}} \end{bmatrix}$$

(A2)

In order to prove the external equivalence between (A2) and (35), in [24], the authors have followed the procedure shown hereafter:

1. Let us first define two invertible matrices:

$$Q = \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Q_0 & 0 & I_{\bar{n}} \end{bmatrix} ; \quad R = \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ R_0 & 0 & I_{\bar{n}} \end{bmatrix}$$

(A3)

where Q_0 satisfy (40) and (41)

2. Let us next note that: $\text{Spectrum}(N) \cap \text{Spectrum}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} = \emptyset$, then (40) has a unique solution (see for example Chapter 8 in [10]).
3. Let us now apply matrices Q and R to the matrices of (A2):

$$Q \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_{\bar{n}} \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_{\bar{n}} \end{bmatrix}, \quad Q \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ Q_0 \Gamma \end{bmatrix}$$

$$Q \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_o & -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \\ \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}}(\underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T & \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} & -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} I_{\bar{n}+1} & 0 & 0 \\ -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T R_0 & -\beta_o & -\varepsilon^{\bar{n}+1}(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \\ 0 & \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} & -(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T R_0 & 0 & (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \end{bmatrix}$$

4. Let us finally introduce the change of variable:

$$z_{Ob}(t) = z_{\mathfrak{B}}(t) - R_0 \tilde{\zeta}(t)$$

(A4)

Adding its third row with the premultiplication of its first row by Q_0 , we get the *externally equivalent* proper system (35).

Let us next justify (43). For this, we need to compute matrices Q_0 and R_0 (see also [25]):

1. Let us denote by r_i and q_i the column vectors of matrices R_0 and Q_0 , respectively. Thus from (41), we get:

$$\begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\chi}_{\bar{n}}^2 & \cdots & \underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} q_2 & \cdots & q_{\bar{n}+1} & 0 \end{bmatrix}$$

(A5)

2. Then, from (40) and (A5), we get

$$Q_0 + \underline{\chi}_{\bar{n}} (\underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T = (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) R_0$$

$$\begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \cdots & \underline{q}_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\varepsilon} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \begin{bmatrix} \underline{q}_2 & \cdots & \underline{q}_{\bar{n}} & \underline{q}_{\bar{n}+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

3. For solving (A6), the columns have to be equated from the last to the first.

4. Observe that

$$(\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T R_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \underline{q}_{(1,2)} (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T \quad (\text{A7})$$

where $q_{(i,j)}$ is the entry (i, j) of matrix Q_0 .

Now, substituting (A4) and (A7) into the output of (35), we get (recall that $\tilde{\zeta} \equiv \zeta$):

$$y_{Ob} = (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T (z_{\mathfrak{B}} - R_0 \tilde{\zeta}) - \frac{1}{\varepsilon} \underline{q}_{(1,2)} y = (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T z_{\mathfrak{B}} + (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T R_0 (\zeta - \tilde{\zeta}) = (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T z_{\mathfrak{B}}$$

Solving (42), when $\varepsilon \rightarrow 0$, we get (recall also (38) and (39)):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\underline{\chi}_{\bar{n}}^1)^T z_{\mathfrak{B}}(t) = \frac{e^{-\beta_0 t} x_{\mathfrak{B}}(0) + \tilde{\zeta}_n(t)}{\Delta_{\mathfrak{B}}(0)} = e^{-\beta_0 t} x_{\mathfrak{B}}(0) + \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}$$

Then, following the Kokotović procedure (see Theorem 5.1 of Section 2.5 [19]), we get (43).

A.5. Proof of Corollary 1

The proof is done in two parts. We first consider the case $\varepsilon = 0$, and then we analyze the case $\varepsilon > 0$.

1. Let us first consider for a while that $\varepsilon = 0$, then from (42) and (33), we get:**

$$(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{\mathfrak{B}_0}(t) = (\underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}}) \tilde{\zeta}_n = (\underline{\chi}_{\bar{n}}^{\bar{n}}) (\underline{\chi}_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1})^T \tilde{\zeta}(t) \quad (\text{A8})$$

Substituting (40) and (41) into (A8), we obtain the equation:

$$(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{\mathfrak{B}_0}(t) = [(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) R_0 - Q_0] \tilde{\zeta}(t) \quad (\text{A9})$$

Combining (A4) and (A9), we get:

$$(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{Ob_0}(t) = -Q_0 \tilde{\zeta}(t) \quad (\text{A10})$$

Because (33) is an ideal observed, $\tilde{\zeta} \equiv \zeta$, the following identity holds:

$$\begin{aligned} -\hat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{Ob_0}(t) &= \begin{bmatrix} \hat{Q}_0^{-1} \underline{q}_1 & | & I_{\bar{n}} \end{bmatrix} \zeta(t) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{Q}_0^{-1} \underline{q}_1 | 0_{\bar{n}} \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0_{(\bar{n} \times 1)} | I_{\bar{n}} \end{bmatrix} \zeta(t) \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

** We write, $z_{\mathfrak{B}_0}$ and z_{Ob_0} , instead of, $z_{\mathfrak{B}}$ and z_{Ob} , for emphasizing that we are considering the case $\varepsilon = 0$.

Finally we get:

$$-\hat{Q}_0^{-1}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})z_{Ob_0}(t) - \hat{Q}_0^{-1}q_1 y(t) = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} \quad (A12)$$

2. Let us now consider the case $\varepsilon > 0$, which is based on the particular case $\varepsilon = 0$.

From (42) and (33) we get:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right) x_{\mathfrak{B}} &= -\varepsilon^{\bar{n}+1} \left(\chi_{\bar{n}}^1\right)^T z_{\mathfrak{B}} \\ \left[\varepsilon \frac{d}{dt} I + (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})\right] z_{\mathfrak{B}} &= \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}\right) x_{\mathfrak{B}} + \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}\right) \left(\chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1}\right)^T \tilde{\zeta}(t) \end{aligned} \quad (A13)$$

If we apply the operator $\left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right)$ to the second row of the last equation, we then have (recall that (33) is an ideal observer):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right) (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{\mathfrak{B}} &= \left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right) \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}\right) \left(\chi_{\bar{n}+1}^{\bar{n}+1}\right)^T \zeta \\ -\varepsilon \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right) I + \varepsilon^{\bar{n}} \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}\right) \left(\chi_{\bar{n}}^1\right)^T\right] z_{\mathfrak{B}} & \end{aligned} \quad (A14)$$

Taking into account (40), (41) and (A4), we have:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right) [(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})z_{Ob} + Q_0\zeta] = -\varepsilon \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right) I + \varepsilon^{\bar{n}} \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}\right) \left(\chi_{\bar{n}}^1\right)^T\right] z_{\mathfrak{B}} \quad (A15)$$

This last equation is equivalent to:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right) \hat{Q}_0 [\hat{Q}_0^{-1}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})z_{Ob} + \hat{Q}_0^{-1}Q_0\zeta] = -\varepsilon \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right) I + \varepsilon^{\bar{n}} \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}\right) \left(\chi_{\bar{n}}^1\right)^T\right] z_{\mathfrak{B}} \quad (A16)$$

Let us rewrite this last equation in the same form as (A11) and (A12):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right) \hat{Q}_0 h(t) &= \varepsilon \bar{h}(t) \\ \hat{Q}_0^{-1}(M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})z_{Ob} + \hat{Q}_0^{-1}q_1 y(t) + \begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} & \dots & \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T &= -h(t) \\ \bar{h}(t) &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} + \beta_o\right) I + \varepsilon^{\bar{n}} \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}\right) \left(\chi_{\bar{n}}^1\right)^T\right] z_{\mathfrak{B}} \end{aligned} \quad (A17)$$

We can check that system (42) satisfies the invertibility condition of Theorem 3.1 in Chapter 2 in [19]. Indeed, let us first define the matrices (recall (38)):

$$\begin{aligned} A_0 &= -\beta_o - \varepsilon^{\bar{n}+1} \left(\chi_{\bar{n}}^1\right)^T (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}})^{-1} \left(\chi_{\bar{n}}^{\bar{n}}\right) = -\beta_o - \varepsilon^{\bar{n}+1} / \Delta_{\mathfrak{B}}(0) = -(\beta_o + \varepsilon^{\bar{n}+1}) \\ A_{22} &= (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) \end{aligned} \quad (A18)$$

We can see from (39) that the \bar{n} eigenvalues of A_{22} are distinct. Then Theorem 3.1 states that the eigenvalues of (42) are approximated as follows:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_1(A_0) + \mathcal{O}(\varepsilon) = -\beta_o + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \lambda_i &= \frac{1}{\varepsilon} [\lambda_i(A_{22}) + \mathcal{O}(\varepsilon)] \quad \text{for } i = 2, \dots, \bar{n} + 1\end{aligned}\quad (\text{A19})$$

Since matrices A_0 and A_{22} are Hurwitz, then Corollary 3.1 of Chapter 2 in [19] implies that there exists an $\varepsilon^* > 0$, such that (42) is asymptotically stable for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$. Now, since the input $\tilde{\zeta}_n$ of (42) is obtained by means of the ideal observer (33), and since we have assumed conditions insuring differentiability and boundedness of the related signals (see assumptions H1–H4), it follows that $\bar{h}(t)$ is also a bounded vector function.

Finally, from equation (A17) we have:

$$h(t) = \hat{Q}_0^{-1} e^{-\beta_o t} h(0) + \varepsilon \hat{Q}_0^{-1} \int_0^t e^{-\beta_o(t-\tau)} \bar{h}(\tau) d\tau$$

then the vector function $h(t)$ tends exponentially to 0 when ε tends to 0. Therefore, from (A17) we get:

$$-\hat{Q}_0^{-1} (M_{\bar{n}} - U_{\bar{n}}) z_{ob} - \hat{Q}_0^{-1} \underline{q}_1 y(t) = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A20})$$

This concludes the proof.

ACKNOWLEDGEMENT

The authors thank the reviewers for their valuable suggestions and comments for improving the paper.

REFERENCES

1. Abdallah. M, Ayadi. M, Rotella. F and Benrejeb M. 2012. *Linear Time-Varying Flatness-Based Control of Anti-Lock Brake System (ABS)*. 9th International Multi-Conference on System, Signals and Devices, pp. 978–984.
2. Bonilla M., Malabre M. and Cheang W. J.A. 1995. *Disturbance Rejection by Proportional and Derivative Output Feedback*. KYBERNETIKA. Vol. 31, No. 6, pp. 669–681
3. Bonilla M., Malabre M. and Fonseca M. 1997. *On the Approximation of Non-Proper Control Laws*. International Journal on Control. Vol. 68, No.4, pp. 775–796
4. Bonilla M., Rejon V. and Castro R. 2000. *Implicit Linear Control Law of a Close-Space Vapor Transport Process*. Control Engineering Practice, Vol. 8, pp. 569–579.
5. Bourlès H. and Marinescu B. 1999. *Poles and Zeros at Infinity of Linear Time Varying Systems*. IEEE Transaction on Automatic Control. Vol. 44, No. 10, pp. 1981–1985.
6. Chen M. and Huang Y. 1997. *Linear Time Varying System Control Based on the Inversion Transformation*. Automatica. vol. 33, No. 4, pp. 683–688.
7. Castillo P., Lozano R. and Dzul E., 2005. *Modeling and Control of Mini-Flying Machines*. Springer.

8. Daniells R. 1974. *Approximation Methods for Electronic Filter Design*. McGraw-Hill Book Company, Inc.
9. Desoer C. and Vidyasagar M. 1975 *Feedback Systems: Input-Output Properties*. Academic Press.
10. Gantmacher F. 1977. *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company New York, N. Y., vol. One and Two.
11. Hale J. 1969. *Ordinary Differential Equations*. Wiley-Interscience.
12. Hardy G. 1975. *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge University Press.
13. Ichikawa A. and Katayama H. 2001. *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer. No. 265.
14. Javid S. 1978. *Uniform Asymptotic Stability of Linear Time - Varying Singularly Perturbed Systems*. Journal of The Franklin Institute. vol. 305, No. 1.
15. Javid S. 1980. *Observing the Slow States of a Singularly Perturbed System*. IEEE Transactions on Automatic Control. vol. AC-25. No. 2.
16. Javid S. 1982. *Stabilization of Time-Varying Singularly Perturbed Systems by Observer-Based Slow-State Feedback*. IEEE Transactions on Automatic Control. vol. AC-27. No. 3.
17. Kamen E. 1988. *The Poles and Zeros of a Linear Time Varying System*. Linear Algebra and its Applications. No. 98. pp. 263-289.
18. Kamen E., Khargonekar P. and Tannenbaum A. 1989. *Control of Slowly-Varying Linear Systems*. IEEE Transaction on Automatic Control. vol. 34. No. 12. pp. 1283-1285.
19. Kokotović P, Khalil H, and O'Reilly J. 1986. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Academic Press.
20. Lung-Wen T. 1999. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons.
21. Marinescu B. and Bourlès H. 2003. *The exact Model Matching Problem for Linear Time Varying Systems: An algebraic Approach*. IEEE Transaction on Automatic Control. vol. 48. No. 1. pp. 166-169.
22. Marinescu B. 2007. *Model Matching Topics for Linear Time Varying Systems: Computation Rules in an Algebraic Approach*. Proceedings of the American Control Conference. New York City, USA. pp. 4357-4362. July 11-13.
23. Marinescu B. 2009. *Model Matching and Decoupling for Continuous and Discrete Time Linear Time Varying Systems*. International Journal of Control. vol. 82. No. 6. pp. 1018-1028.
24. Mendez H, Bonilla M. and Malabre M. 2007. *Singularly Perturbed Derivative Coupling-Filter: The SISO case*. 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control. Foz do Iguassu, Brazil. October 17-19.
25. Mendez H, Bonilla M, Malabre M, Pacheco J. 2008. *Singularly Perturbed Derivative Coupling-Filter*. 17th World Congress. IFAC. Seoul Korea. July 6-11.
26. Merlet J. 2006. *Parallel Robots*. Springer.
27. O'Reilly J. 1979. *Full-order observers for class of singularly perturbed linear time-varying systems*. International Journal of Control. vol. 30. No. 5.
28. Polderman J. and Willems J. 1997 *Introduction to Mathematical System Theory*. Text in Applied Mathematics. Springer.
29. Porter B. 1974. *Singular Perturbation Methods in the Design of Observers and Stabilizing Feedback Controllers for Multivariable Linear Systems*. Electronics letters. vol. 10. No. 23.
30. Puga S, Bonilla M. and Malabre M. 2010. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO Systems*. 49th IEEE-CDC. Atlanta GA. December 15-17.
31. Puga S, Bonilla M. and Malabre M. 2011. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO Systems, Part II State Observation*. 50th IEEE-CDC-ECC. Orlando FL. December 12-15.
32. Robekk T. 2005. *Attitude Control of Satellites in Clusters*, Master Thesis Dissertation, Norwegian University of Science and Technology.
33. Shirase K. and Aoyagi S. 2008. *Service Robotics and Mechatronics*, Springer.
34. Spong M.W., Hutchinson S. and Vidyasagar M. 2005. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons.
35. Silverman L. 1971. *Realization of Linear Dynamical Systems*. IEEE Transaction on Automatic Control. vol. AC 16. No. 6. pp. 554-567.
36. Tsakalis K.S. and Ioannou A. 1993. *Linear Time-Varying Systems: Control and Adaptation*. Prentice-Hall.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60

37. Willems, J.C. (1983). Input–output and state space representations of finite–dimensional linear time–invariant systems. *Linear Algebra and its Applications*, **50**, 81–608.
38. Wu F. 1995. *Control of Parameter Varying Linear Systems*. Dissertation of Doctor of Philosophy Degree. University of California at Berkeley.
39. Xiaobo L. and Kemin Z. 2009. *A Time Domain Approach to Robust Fault Detection of Linear Time Varying Systems*. *Automatica*. vol. 45. pp. 94-102.

For Peer Review

Parte VI

Artículos en Revisión en Revistas y Congresos

Apéndice K

IJRNC 2013

El siguiente artículo ha sido sometido para su posible publicación en la revista International Journal of Robust and Nonlinear Control.

INTERNATIONAL JOURNAL OF ROBUST AND NONLINEAR CONTROL

Int. J. Robust. Nonlinear Control 2012; **00**:1–24

Published online in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com). DOI: 10.1002/rnc

Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying Delay MIMO Systems with Unknown Parameters

S. Puga¹, M. Bonilla^{2*}, M. Malabre³, S. Mondié⁵ and R. Lozano^{2,4}

¹ UPIITA-IPN Academia de Sistemas, AV. IPN 2580 CP 07340 MÉXICO D.F.

² CINVESTAV-IPN, Control Automático, UMI 3175 CINVESTAV-CNRS. A.P. 14-740. MÉXICO 07000.

³ LUNAM Université, CNRS, IRCCyN UMR CNRS 6597, 1 Rue de la Noë, F-44321 Nantes, FRANCE.

⁴ Heudiasyc UMR UTC-CNRS 7253 Compiègne, FRANCE.

⁵ IRCCyN, CINVESTAV-IPN, CONTROL AUTOMÁTICO, UMI 3175 CINVESTAV-CNRS. A.P. 14-740. MÉXICO 07000

SUMMARY

This paper proposes a control scheme for the problem of stabilizing multiple-input multiple-output linear time varying retarded systems composed by a singularly perturbed controller and a reference model. The results presented here are a generalization of our previous results on linear time varying SISO and MIMO systems without delays and linear time varying retarded SISO systems. The closed loop system is a linear singularly perturbed retarded system with uniform asymptotic stability behavior, the uniform asymptotic stability of the singularly perturbed retarded system is guaranteed. We show how to design a control law such that the system dynamics for each output is given by a Hurwitz polynomial with constant coefficients. Copyright © 2012 John Wiley & Sons, Ltd.

Received ...

KEY WORDS: Time varying delay systems, Time-varying delay, Lyapunov method, High gain.

1. INTRODUCTION

The study of delay systems is very important in engineering (see [8]), because delays appear frequently in various engineering systems, such as chemical plants, long transmission lines, hydraulic systems and computer based control systems. In addition, actuators, sensors and field networks that are involved in feedback loops often introduce delays.

*Correspondence to: CINVESTAV-IPN, Control Automático, UMI 3175 CINVESTAV-CNRS. A.P. 14-740. MÉXICO 07000. E-mail: mbonilla@cinvestav.mx

2 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE, S. MONDIÉ AND R. LOZANO.

1
2
3 Singularly perturbed systems or two time scale systems (see [11]), are commonly
4 encountered in engineering, because of the presence of small parasitic parameters
5 multiplying the time derivatives of some of the systems states. They appear in: power
6 systems where the singular perturbation parameters can represent machine reactance or
7 transients in voltage regulators, in industrial control systems they may represent the
8 time constants of drivers and actuators. In [15] a singular implicit control scheme for
9 linear time varying SISO systems is proposed, where the knowledge of the time varying
10 parameters is not required, only some upper bounds. The control scheme is composed of a
11 singularly perturbed control law and a matching controller (model matching controller). The
12 control law approximately matches a given linear time-invariant state space representation,
13 guaranteeing internal stability. In [14] the results are extended to the MIMO case, where
14 the structure of the matrix $B(t)$ plays an important role in the control strategy.

15
16
17 In the case of singularly perturbed delay systems there are works as: [6], where small
18 delays are assumed in the state and control variables, the overview covers: asymptotic
19 decomposition of the system, stabilizability, detectability, stabilization, controllability,
20 observability and linear-quadratic optimal control problem. In [20], conditions for the
21 stability of multivariable singularly perturbed systems in terms of properties of the slow
22 and the fast subsystems in the frequency domain are given. In [4], the effect of a small delay
23 in the feedback loop of a singularly perturbed system is studied, sufficient and necessary
24 conditions for preserving stability are given in terms of LMI conditions for stability of
25 singularly perturbed differential systems. In [5] the state feedback sampled data H_∞ -control
26 problem is solved by applying the input delay approach to sampled data control and by
27 developing the input-output approach to singularly perturbed time delay systems. In [7],
28 the H_∞ state feedback control problem for singularly perturbed linear systems with a small
29 state delay is studied and conditions for the existence of a solution of the original H_∞
30 problem, independent of the singular perturbation parameter are given.

31
32 In this paper, we propose a control law for MIMO time varying retarded systems [1],
33 described by the following functional differential equation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta(t) &= A(t)\zeta(t) + \hat{A}(t)\zeta(t - \tau(t)) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C\zeta(t). \end{aligned} \quad (1)$$

34
35 The purpose is to approximately match a given time-invariant linear state space system,
36 whose dynamics is represented by the ordinary differential equation:

$$\frac{d}{dt}x_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t), \quad y(t) = C_m x_m(t). \quad (2)$$

where:

$$A_m = \begin{bmatrix} A_{m_1} & 0_{\eta_1, \eta_2} & \cdots & 0_{\eta_1, \eta_m} \\ 0_{\eta_2, \eta_1} & A_{m_2} & \cdots & 0_{\eta_2, \eta_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\eta_m, \eta_1} & 0_{\eta_m, \eta_2} & \cdots & A_{m_m} \end{bmatrix}; \quad A_{m_j} = T_u\{(\underline{\chi}_{\eta_j}^2)^T\} - \underline{\chi}_{\eta_j}^\eta \bar{\sigma}_{\eta_j}$$

$$\bar{\sigma}_{\eta_j} = \begin{bmatrix} \sigma_{j_1} & \cdots & \sigma_{j_j} \end{bmatrix}; \quad j \in \{1, \dots, m\}$$

$$B_m = BDM\{\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1}, \underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2}, \dots, \underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m}\}; \quad C_m = BDM\{(\underline{\chi}_{\eta_1}^1)^T, (\underline{\chi}_{\eta_2}^1)^T, \dots, (\underline{\chi}_{\eta_m}^1)^T\}$$

The control scheme guarantees the desired behavior and the asymptotic stability using the singular perturbations approach, see [11] and [3], where the knowledge of the parameters is not required, only some upper bounds.

The paper is organized as follows. The problem is first stated in Section 2. Then, in Section 3 we propose a singularly perturbed linear control law, which goal is to lead the closed loop system into the singularly perturbed system model introduced in [11]. Following [11], in Section 4.1 the closed loop system is separated in two time scale subsystems, namely a slow and a fast subsystems. In Section 4.2 we study the uniform stability of the fast and slow subsystems without considering the delay. In Section 4.3 we study the asymptotic stability considering the delay effects. In Section 5 we get the desired state asymptotic approximation. Finally, in Section 6 we give an academic example for illustrating the developed technique. All the proofs are given in the Appendix.

NOTATION

- $\underline{\chi}_k^i \in \mathbb{R}^k$ is the vector which the i -th entry is equal to 1 and the other entries are equal to 0. $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ represents the identity matrix of size k . $T_u\{v^T\}$ is the upper triangular Toeplitz matrix, whose first row is v^T . And $T_\ell\{v\}$ is the lower triangular Toeplitz matrix, whose first column is v . $\lambda_i\{X\}$ stands for the eigenvalues of matrix X .
- $BDM\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ denotes a block diagonal matrix whose diagonal blocks are $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$.
- Given a vector function $f(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $\|f(\cdot)\| = \|f(\cdot)\|_2$ and for a function matrix $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|A(\cdot)\| = \|A(\cdot)\|_2$. Given a matrix A , $\rho(A)$ represents the spectral radius of the matrix, $\max_i\{|\lambda_i(A)|\}$, and $\mu(A)$ is the measure: $\lim_{\theta \searrow 0} (\|I + \theta A\| - 1)/\theta$ [2]. \mathcal{C}^∞ and \mathcal{L}^∞ stand for the sets of infinitely differentiable and locally integrable functions from \mathbb{R}^+ to \mathbb{R} , respectively.
- ∂ is the derivative operator $\frac{d}{dt}$. A vector function $f(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^n$ is said to be $\mathcal{O}(\varepsilon)$ over an interval $[t_1, t_2]$ if there exist positive constants K and ε^* such that $\|f(\varepsilon, t)\| \leq K\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^*], \quad \forall t \in [t_1, t_2]$, see [9].

4 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE, S. MONDIÉ AND R. LOZANO.

2. SYSTEM DEFINITION AND REPRESENTATION FORM

Let us precise the particular structure of the dynamical systems we are considering in this paper:

$$\begin{aligned} (S(\partial)+D_{\ell c}(t)\Psi(\partial))y(t)+D_{\ell dc}(t)\Psi(\partial)y(t-\tau(t))=B^*(t)u(t) \\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{3}$$

where: $y = [y_1, \dots, y_m]^T \in \mathbb{R}^m$ and $u = [u_1, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ are the output and the input, respectively, $S(\partial)$ and $\Psi(\partial)$ are left operator matrices, of orders $m \times m$ and $\eta \times m$, respectively, the form of them is:

$$\begin{aligned} S(\partial) &= DM\{\partial^{\eta_1}, \dots, \partial^{\eta_m}\}, \text{ where: } \eta_j \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^m \eta_j = \eta. \\ \text{and } \eta_1 &\geq \dots \geq \eta_m \geq 1. \\ \Psi(\partial) &= BDM\{\psi_1(\partial), \dots, \psi_m(\partial)\}, \text{ where:} \\ \psi_j(\partial) &= \begin{bmatrix} 1 & \partial & \dots & \partial^{\eta_j-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\eta_j}[\partial]. \end{aligned} \tag{4}$$

$D_{\ell c}(t)$, $D_{\ell dc}(t)$ and $B^*(t)$ are real time varying matrices, of orders $m \times \eta$ and $m \times m$, respectively, defined as:

$$\begin{aligned} D_{\ell c}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{111}(t) & \dots & \mathbf{a}_{1m1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m11}(t) & \dots & \mathbf{a}_{m1m}(t) \end{bmatrix}, \text{ where:} \\ \mathbf{a}_{kij}^T(t) &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{kij}^T(t) \\ a_{kij}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\eta_j}, \bar{\mathbf{a}}_{kij}^T(t) = \begin{bmatrix} a_{k_{i1}}(t) \\ \vdots \\ a_{k_{i(\eta_j-1)}}(t) \end{bmatrix} \\ D_{\ell dc}(t) &= \begin{bmatrix} \alpha_{111}(t) & \dots & \alpha_{1m1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m11}(t) & \dots & \alpha_{m1m}(t) \end{bmatrix}, \text{ where:} \\ \alpha_{kij}^T(t) &= \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{kij}^T(t) \\ \alpha_{kij}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\eta_j}, \bar{\alpha}_{kij}^T(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{k_{i1}}(t) \\ \vdots \\ \alpha_{k_{i(\eta_j-1)}}(t) \end{bmatrix} \\ B^*(t) &= \begin{bmatrix} B_1^*(t) & \dots & B_m^*(t) \end{bmatrix}^T, \text{ where:} \\ B_j^{*T}(t) &= \begin{bmatrix} b_{j1}(t) & \dots & b_{jm}(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m. \\ \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{5}$$

The coefficients, $a_{kij}(t)$, $\alpha_{kij}(t)$ and $b_{ij}(t)$, are such that:

H1 $a_{k_{ij}}(t)$ and $\alpha_{k_{ij}}(t)$ are unknown bounded continuous real functions of class[†] $\mathcal{C}^\infty \cap \mathcal{L}^\infty$, satisfying: $\|a_{k_{ij}}(t)\|_\infty \leq L'_{0,a}$, $\|\frac{d}{dt}a_{k_{ij}}(t)\|_\infty \leq L'_{1,a}$, $\|\alpha_{k_{ij}}(t)\|_\infty \leq L'_{0,\alpha}$, $\|\frac{d}{dt}\alpha_{k_{ij}}(t)\|_\infty \leq L'_{1,\alpha}$ for all $t \in \mathbb{R}^+$.

H2 The eigenvalues of $B^*(t)$ satisfy: $\lambda_i\{B^*(t)\} \in \mathbb{R}^+$ and $0 < \bar{b}_1 \leq \lambda_i\{B^*(t)\} \leq \bar{b}_2$, for all $t \in \mathbb{R}^+$.

H3 $\|b_{ij}(t)\|_\infty \leq c_0$ and $\|\frac{d}{dt}b_{ij}(t)\|_\infty \leq c'$.

H4 The numbers, $L'_{0,a}, L'_{1,a}, L'_{0,\alpha}, L'_{1,\alpha}, \bar{b}_1, \bar{b}_2, c_0$ and c' , are positive known bounds.

The continuous differentiable function $\tau(t)$ satisfies:

H5 $0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2$ and $0 \leq \frac{d}{dt}\tau(t) \leq \hat{\tau} < 1$.

H6 The numbers τ_1, τ_2 and $\hat{\tau}$ are positive known bounds.

2.1. Vector State Representation

This delay functional differential equation can be expressed in the form of a linear state retarded equation with input $u(t)$ and output $y(t)$. Defining the state variables as (see [1]):

$$\begin{aligned} \zeta = & [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1} \quad \zeta_{\eta_1+1} \quad \zeta_{\eta_1+2} \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1+\eta_2} \\ & \dots \quad \zeta_{\eta_1+\dots+\eta_{m-1}+1} \quad \zeta_{\eta_1+\dots+\eta_{m-1}+2} \quad \dots \quad \zeta_{\eta_1+\dots+\eta_m}]^T \\ = & \left[\begin{array}{cccc} y_1 & \frac{d}{dt}y_1 & \dots & \frac{d^{\eta_1-1}}{dt^{\eta_1-1}}y_1 \\ y_2 & \frac{d}{dt}y_2 & \dots & \frac{d^{\eta_2-1}}{dt^{\eta_2-1}}y_2 \\ \dots & y_m & \frac{d}{dt}y_m & \dots & \frac{d^{\eta_m-1}}{dt^{\eta_m-1}}y_m \end{array} \right]^T, \end{aligned} \tag{6}$$

the following linear time varying retarded state equation is obtained:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta(t) &= A(t)\zeta(t) + \hat{A}(t)\zeta(t - \tau(t)) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C\zeta(t) \end{aligned} \tag{7}$$

[†] For simplicity, in this paper we only consider functions of class \mathcal{C}^∞ . But it could be considered functions of class \mathcal{C}^k , where k is a sufficiently positive large integer such that the derivability conditions are fulfilled. See also Corollary 2.4.12 of [13].

6 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE, S. MONDIÉ AND R. LOZANO.

where:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\eta_1}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \mathbf{a}_{122}(t) & \dots & -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \mathbf{a}_{1m m}(t) \\ -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \mathbf{a}_{211}(t) & \tilde{A}_{\eta_2}(t) & \dots & -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \mathbf{a}_{2m m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \mathbf{a}_{m11}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \mathbf{a}_{m22}(t) & \dots & \tilde{A}_{\eta_m}(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}(t) = \begin{bmatrix} -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \alpha_{111}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \alpha_{122}(t) & \dots & -\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} \alpha_{1m m}(t) \\ -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \alpha_{211}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \alpha_{222}(t) & \dots & -\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} \alpha_{2m m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \alpha_{m11}(t) & -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \alpha_{m22}(t) & \dots & -\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} \alpha_{m m m}(t) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} \underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1} B_1^*(t) \\ \underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2} B_2^*(t) \\ \vdots \\ \underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m} B_m^*(t) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{\eta_\ell}(t) = T_u \{(\underline{\chi}_{\eta_\ell}^2)^T\} - \underline{\chi}_{\eta_\ell}^{\eta_\ell} \mathbf{a}_{\ell \ell \ell}(t), \quad \ell \in \{1, \dots, m\},$$

$$C = BDM \{(\underline{\chi}_{\eta_1}^1)^T, (\underline{\chi}_{\eta_2}^1)^T, \dots, (\underline{\chi}_{\eta_m}^1)^T\},$$

with the initial state condition:

$$\zeta(t) = g(t), \quad t \in [-\tau_2, 0)$$

$$\zeta(0) = \left[y_1(0) \frac{d}{dt} y_1(0) \dots \frac{d^{\eta_1-1}}{dt^{\eta_1-1}} y_1(0) \dots y_m(0) \frac{d}{dt} y_m(0) \dots \frac{d^{\eta_m-1}}{dt^{\eta_m-1}} y_m(0) \right]^T, \quad t = 0.$$

3. SINGULARLY PERTURBED CONTROL LAW

For the state space representation (7), we propose the following control scheme, composed by a singularly perturbed controller and a reference model.

H7 $r_j = r_j(t) \in L^\infty \cap C^\infty$.

Singularly perturbed controller

$$\begin{aligned} \varepsilon u(t) &= -\Theta \zeta(t) + \Omega \mathbf{x}(t) \\ \Theta &= BDM \{(\underline{\chi}_{\eta_1}^{\eta_1})^T, (\underline{\chi}_{\eta_2}^{\eta_2})^T, \dots, (\underline{\chi}_{\eta_m}^{\eta_m})^T\} \in \mathbb{R}^{m \times \eta}, \\ \Omega &= BDM \{(\underline{\chi}_2^1)^T, \dots, (\underline{\chi}_2^1)^T\} \in \mathbb{R}^{m \times 2m} \end{aligned} \tag{9}$$

where ε is a small positive parameter.

Model matching controller

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\underline{x}(t) &= \Delta\zeta(t) + \Lambda\underline{x}(t) + \Gamma\bar{r}(t) \\
\Delta &= BDM\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\} \in \mathbb{R}^{2m \times \eta}, \\
\Delta_j &= \begin{bmatrix} -\sigma_{j11} & -\sigma_{j12} & \dots & -\sigma_{j1\eta_j} + \ell_j + 1 \\ 0 & 0 & \dots & -(\beta_j - 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times \eta_j} \\
\Lambda &= BDM\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m\} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}, \\
\Lambda_j &= \begin{bmatrix} -(\ell_j + 1) & -\ell_j \\ (\beta_j - 1) & -\beta_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \\
\Gamma &= BDM\{\chi_1^1, \dots, \chi_2^1\} \in \mathbb{R}^{2m \times m}
\end{aligned} \tag{10}$$

where:

$\underline{x} = [x_{\eta_1} \ x_{\eta_1+1} \ x_{\eta_1+\eta_2} \ x_{\eta_1+\eta_2+1} \ \dots \ x_{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_m+m} \ x_{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_m+m+1}]^T$ is the controller vector state.

$\bar{r} = [r_1 \ \dots \ r_m]^T$ is the vector reference. The components r_j are signal references satisfying **H7**:[‡]

β_j and ℓ_j are positive parameters for $j \in \{1, \dots, m\}$.

$\sigma_{j11}, \dots, \sigma_{j1\eta_j}$ are the coefficients of the Hurwitz polynomials $p_{\eta_j}(\lambda) = \lambda^{\eta_j} + \sigma_{j1\eta_j}\lambda^{\eta_j-1} + \dots + \sigma_{j12}\lambda + \sigma_{j11}$, which are chosen such that:

$$\begin{aligned}
\sigma_{j1\eta_j} - \ell_j &> 1 \\
0 < -\sigma_{j1\eta_j} + \ell_j + 1 &< L_{0,a} \quad j \in \{1, \dots, m\} \\
\beta_j &\geq \max\{-\Re(\bar{\lambda}) \mid p_{\eta_j}(\bar{\lambda}) = 0\}
\end{aligned} \tag{11}$$

The aim of the *model matching controller* is: (i) to assign the closed loop dynamics to a time invariant linear system with Hurwitz characteristic polynomial $p(\lambda)$ for each y_j , and (ii) to assign a rate of exponential convergence to the desired dynamics. The goal of the *singularly perturbed controller* is: (i) to change the base representation system for obtaining a *singularly perturbed model*, and (ii) to close the desired dynamics by an ε order. Indeed, we will show in *Lemma 1* that the parameters, β_j and ℓ_j , enable us to compute a sufficiently small ε such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed model* is guaranteed.

[‡] We ask for C^∞ , because as we will see later, the control scheme is indeed an approximation of a proportional and derivative feedback.

8 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE, S. MONDIÉ AND R. LOZANO.

In order to obtain the closed loop singularly perturbed retarded model, let us combine (7), (9) and (10) and let us choose

$$\begin{cases} x_j = \zeta_j, & j \in \{1, \dots, \ell_1 - 1\}, \ell_1 = \eta_1; & z_1 = \zeta_{\ell_1}; \\ x_{j+1} = \zeta_j, & j \in \{\ell_1 + 1, \dots, \ell_2 - 1\}, \\ \ell_2 = \sum_{k=1}^2 \eta_k; & z_2 = \zeta_{\ell_2} \\ x_{j+1} = \zeta_j, & j \in \{\ell_2 + 1, \dots, \ell_3 - 1\}, \\ \ell_3 = \sum_{k=1}^3 \eta_k; & z_3 = \zeta_{\ell_3} \\ \vdots \\ x_{j+1} = \zeta_j, & j \in \{\ell_{m-1} + 1, \dots, \ell_m - 1\}, \\ \ell_m = \eta; & z_m = \zeta_{\ell_m} \end{cases} \quad (12)$$

namely:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) + B_1\bar{r}(t) \\ \varepsilon \frac{dz(t)}{dt} &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) \\ &+ A_{23}(\varepsilon, t)x(t - \tau(t)) + A_{24}(\varepsilon, t)z(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

where the matrices, $A_{11} \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times (\eta+m)}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times m}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(\eta+m) \times m}$, $A_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times (\eta+m)}$, $A_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{23}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times (\eta+m)}$, $A_{24}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, are defined as follows ($j \in \{1, \dots, m\}$):

$$\begin{aligned} A_{11} &= \text{BDM}\{A_{\eta_1}, \dots, A_{\eta_m}\}, \quad A_{\eta_j} = \left[\begin{array}{c|cc} T_u \{(\underline{X}_{\eta_j-1}^2)^T\} & 0 & 0 \\ \hline -\bar{\sigma}_{\eta_j} & -(\ell_j + 1) & -\ell_j \\ 0 & \beta_j - 1 & -\beta_j \end{array} \right] \\ \bar{\sigma}_{\eta_j} &= \begin{bmatrix} \sigma_{j_1} & \dots & \sigma_{j_{(\eta_j-1)}} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{\eta_j} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{\eta_j} & \sigma_{j_{\eta_j}} \end{bmatrix}; \\ A_{12} &= \text{BDM}\{\hat{a}_{\eta_1}, \dots, \hat{a}_{\eta_m}\}, \\ \hat{a}_{\eta_j}^T &= \begin{bmatrix} (\underline{X}_{\eta_j-1}^{\eta_j-1})^T & \sigma_{j_{\eta_j}} + \ell_j + 1 & 1 - \beta_j \end{bmatrix}, \quad \hat{a}_{\eta_j} \in \mathbb{R}^{(\eta_j+1)}; \\ B_1 &= \text{BDM}\{(\underline{X}_{\eta_1+1}^{\eta_1}), \dots, (\underline{X}_{\eta_m+1}^{\eta_m})\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
A_{21}(\varepsilon, t) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\varepsilon \bar{a}_{111}(t) b_{11}(t) 0 & \dots & -\varepsilon \bar{a}_{1mm}(t) b_{1m}(t) 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -\varepsilon \bar{a}_{m11}(t) b_{m1}(t) 0 & \dots & -\varepsilon \bar{a}_{mmm}(t) b_{mm}(t) 0 & & & \end{array} \right]; \\
A_{22}(\varepsilon, t) &= -(\varepsilon X(t) + B^*(t)), \\
\text{where: } X(t) &= \left[\begin{array}{ccc} a_{11\eta_1}(t) & \dots & a_{1m\eta_m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1\eta_1}(t) & \dots & a_{mm\eta_m}(t) \end{array} \right]; \\
A_{23}(\varepsilon, t) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\varepsilon \bar{\alpha}_{111}(t) b_{11}(t) 0 & \dots & -\varepsilon \bar{\alpha}_{1mm}(t) b_{1m}(t) 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -\varepsilon \bar{\alpha}_{m11}(t) b_{m1}(t) 0 & \dots & -\varepsilon \bar{\alpha}_{mmm}(t) b_{mm}(t) 0 & & & \end{array} \right]; \\
A_{24}(\varepsilon, t) &= \left[\begin{array}{ccc} \alpha_{11\eta_1}(t) & \dots & \alpha_{1m\eta_m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1\eta_1}(t) & \dots & \alpha_{mm\eta_m}(t) \end{array} \right];
\end{aligned} \tag{15}$$

From [3] and [11], we know that it is important to prove that the eigenvalues of the matrix $A_{22}(\varepsilon, t)$ are in the open left complex half plane. In the next Fact (proved in Appendix A.1), we prove that this is the case.

Fact 1

The matrix $A_{22}(\varepsilon, t)$, satisfies for all $t \in \mathbb{R}^+$:

i)

$$\|A_{22}(0, t)\|_2 \leq \bar{c}, \quad \left\| \frac{d}{dt} A_{22}(0, t) \right\|_2 \leq c \tag{16}$$

ii) Given a positive real number, $\bar{\delta}$ and $b_i = \bar{b}_i + \bar{\delta}$, $i = 1, 2$, the following inequalities hold:

$$-b_2 - \varepsilon L_{0,a} \leq \Re \lambda_i(A_{22}(\varepsilon, t)) \leq -b_1 + \varepsilon L_{0,a} \tag{17}$$

where: $\bar{c} = \sqrt{m}mc_0$, $c = \sqrt{m}mc'$ and $L_{0,a} = \sqrt{m}mL'_{0,a}$.

Thus, the singularly perturbed model, (13), satisfies Lemmas 2.1, 2.2 and 2.3 of Chapter 5 in [11].

4. ASYMPTOTIC STABILITY

In this Section, we study the asymptotic stability of the homogeneous functional differential equation (13). We follow the singular perturbation approach, introduced in [11] for time varying linear systems, and extended in [3] to the delayed case. In section 4.1 we apply the state transformation, which aim is to separate the fast subsystem and the slow subsystem. In *Theorem 1* of section 4.2 we study the asymptotic stability of the homogeneous functional differential equation (13) when there is no delay, namely for the case $A_{23}(\varepsilon, t) = 0$, $A_{24}(\varepsilon, t) = 0$ and $B_1 = 0$. As in [11], we give bounds on ε for guaranteeing asymptotic

10 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE, S. MONDIÉ AND R. LOZANO.

1 stability. Finally in section 4.3, following [4] and [12], we study the *asymptotic stability*
 2 for the non-homogeneous linear time varying delay system.

3
4
5
6
7
8
9 *4.1. State Transformation*

10 The state equation (13), in the homogeneous case reduces to:

11
12
13
$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) \\ \varepsilon \frac{dz(t)}{dt} &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) \\ &+ A_{23}(\varepsilon, t)x(t - \tau(t)) + A_{24}(\varepsilon, t)z(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (18)$$

14
15
16
17
18 Following [11] and [3], let us transform (18) into slow and fast subsystems. To this end, let
 19 us define the bounded continuously differentiable matrices,

20
21
22
$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \varepsilon R_L(t) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}, \\ H(t) &= H_0(t) + \varepsilon R_H(t) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times m}, \end{aligned} \quad (19)$$

23 and the change of variables,

24
25
26
27
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (I_{n+1} - \varepsilon H(t)L(t)) & -\varepsilon H(t) \\ L(t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ &= M^{-1}(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

28
29
30
31
32 Then, from (18), (19) and (20) we obtain:

33
34
35
$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} &= \left[-\varepsilon \frac{d}{dt} H(t) + A_{12} - \varepsilon H(t)L(t)A_{12} \right. \\ &\quad \left. - H(t)A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon A_{11}H(t) - \varepsilon A_{12}L(t)H(t) \right] \eta(t) \\ &\quad - H(t)A_{24}(\varepsilon, t)\eta(t - \tau(t)) + [A_{11} - A_{12}L(t)]\theta(t) \\ \varepsilon \frac{d\eta(t)}{dt} &= \left[\varepsilon \frac{d}{dt} L(t) + A_{21}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)\{A_{11} - A_{12}L(t)\} \right. \\ &\quad \left. - A_{22}(\varepsilon, t)L(t) \right] x(t) \\ &\quad + [A_{23}(\varepsilon, t) - A_{24}(\varepsilon, t)L(t)]x(t - \tau(t)) \\ &\quad + [\varepsilon L(t)A_{12} + A_{22}(\varepsilon, t)]\eta(t) \\ &\quad + A_{24}(\varepsilon, t)\eta(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (21)$$

36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46 On the other hand, since the matrices, A_{11} and $A_{22}(\varepsilon, t)$, are Hurwitz for all $t \in \mathbb{R}^+$, we get
 47 from Lemmas 1 and 2 of [3] that there exists a sufficiently small ε such that:

48
49
50
$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt} L(t) &= A_{22}(\varepsilon, t)L(t) - A_{21}(\varepsilon, t) - \varepsilon L(t)[A_{11} - A_{12}L(t)] \\ A_{23}(\varepsilon, t) - A_{24}(\varepsilon, t)L(t) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

51
52
53 and

54
55
$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt} H(t) &= A_{12} - \varepsilon H(t)L(t)A_{12} - H(t)A_{22}(\varepsilon, t) \\ &\quad + \varepsilon A_{11}H(t) - \varepsilon A_{12}L(t)H(t) \\ H(t)A_{24}(\varepsilon, t) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

which imply, together with (19):

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad H(t) = H_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ L_0(t) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = \bar{L}_0, \\ H_0(t) &= A_{12}A_{22}^{-1}(0, t) = \bar{H}_0 \end{aligned} \quad (24)$$

Finally, taking into account (22)-(24) in (21), we obtain:

$$\begin{aligned} d\theta(t)/dt &= [\bar{A}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)] \theta(t) \\ \varepsilon d\eta(t)/dt &= [\bar{A}_{22}(\varepsilon, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] \eta(t) + A_{24}(\varepsilon, t)\eta(t - \tau(t)) \end{aligned}$$

where:

$$\bar{A}_0 = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0(t) \quad \text{and} \quad \bar{A}_{22}(\varepsilon, t) = A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon\bar{L}_0A_{12} \quad (25)$$

Thus, (18) is approximately decomposed into the slow subsystem,

$$dx_s(t)/dt = \bar{A}_0x_s(t), \quad (26)$$

and into the fast subsystem,

$$\varepsilon dz_f(t)/dt = \bar{A}_{22}(\varepsilon, t)z_f(t) + A_{24}(\varepsilon, t)z_f(t - \tau(t)). \quad (27)$$

4.2. Conditions for Uniform Asymptotic Stability

We show that uniform asymptotic stability of (26) and (27) is guaranteed by the properties of the transition matrices when there is no delay, namely for the case $A_{23}(\varepsilon, t) = 0$ and $A_{24}(\varepsilon, t) = 0$.

Let us first notice that (recall (25), (24), (14) and (15))

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= \text{BDM}\{A_{0\eta_1}, \dots, A_{0\eta_m}\}; \\ \text{where } A_{0\eta_j} &= \begin{bmatrix} T_u\{(\underline{\chi}_{\eta_j}^2)^T\} - \underline{\chi}_{\eta_j}^{\eta_j} \sigma_{\eta_j} & -\ell_j \underline{\chi}_{\eta_j}^{\eta_j} \\ 0_{\eta_j}^T & -\beta_j \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (28)$$

and that:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_{\eta+m} - A_0) &= \prod_{j=1}^m \det(\lambda I_{\eta_j} - A_{0\eta_j}) \\ &= \prod_{j=1}^m (\lambda + \beta_j) p_{\eta_j}(\lambda). \end{aligned} \quad (29)$$

If the β_j , $j \in 1, \dots, m$, are chosen such that: $\beta_j \geq \max\{-\Re(\bar{\lambda}) | p_{\eta_j}(\bar{\lambda}) = 0\}$, then for $\beta = \min\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ there exists $K_1 > 0$, such that:

$$\|\exp(A_0 t)\|_2 \leq K_1 e^{-\beta t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (30)$$

12 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE, S. MONDIÉ AND R. LOZANO.

We notice that the matrices $\bar{A}_{22}(\varepsilon, t)$ and $A_{22}(\varepsilon, t)$ when $\varepsilon \rightarrow 0$ satisfy Fact 1, there then exists $K_2 > 0$, such that:

$$\|\exp(\bar{A}_{22}\bar{t})\|_2 \leq K_2 e^{-b_1\bar{t}} \quad \forall \bar{t} \in \mathbb{R}^+. \quad (31)$$

The following Theorem connects the behavior of (18) with the behaviors of the slow and fast subsystems, for the case $A_{23}(\varepsilon, t) = 0$ and $A_{24}(\varepsilon, t) = 0$.

Theorem 1

Under the assumptions of Fact 1, and given conditions (11), there then exists an $\varepsilon^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ the system (18) is uniformly asymptotically stable. Moreover, the transition matrix of (18), $\phi(t, s)$, satisfies $\|\phi(t, s)\|_2 \leq \bar{K} e^{-\kappa(t-s)}$ for all $t \geq s \geq t_0$, where $\bar{K} > 0$ and $\kappa > 0$ are independent of ε , where the variable κ is defined as:

$$\kappa = \min\{\beta, b_1 - L_{0a} - \sigma\}, \text{ with } \sigma = \min\{\sigma_{j,\eta_j} - \ell_j - 1\}$$

This result holds asymptotically as ε tends to 0. From a computational point of view, it is important to have an idea of the order of the upper bound ε^* . This is done in the next Lemma:

Lemma 1

Given the conditions of Theorem 1, and $\|A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_1$, $\|L_0 A_{12}\|_2 \leq \bar{M}_2$ and $\|L_0 A_0\|_2 \leq \bar{M}_3$, the singularly perturbed system (18) is uniformly asymptotically stable for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, where:

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \frac{\beta b_1}{K_1 K_2 \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta (L_{0,a} + \sigma + K_2 \bar{M}_2)} \\ \bar{M}_1 &= \sqrt{\max_{1 \leq j \leq m} \left(1 + (\sigma_{j,\eta_j} - \ell_j - 1)^2 + (1 - \beta_j)^2 \right)}, \\ \bar{M}_2 &= \sqrt{\max_{1 \leq j \leq m} (\sigma_{j,\eta_j} - \ell_j - 1)^2}, \\ \bar{M}_3 &= \sqrt{m \left(\max_{1 \leq j \leq m} \left(\sum_{i=1}^{\eta_j} (\sigma_{j,i})^2 + (\ell_j)^2 \right) \right)} \end{aligned}$$

4.3. Asymptotic Stability for the Delayed System

Let us rewrite (26) and (27) as follows:

$$E_\varepsilon \frac{dx_{sf}(t)}{dt} = A^*(\varepsilon, t)x_{sf}(t) + \varepsilon \hat{A}^*(t)x_{sf}(t - \tau(t)) \quad (32)$$

where $x_{sf}(t) = [x_s^T(t) \ z_f(t)]^T$ and:

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &= \begin{bmatrix} I_{n+1} & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & \varepsilon I \end{bmatrix}; \quad A^*(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & \bar{A}_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix}; \\ \hat{A}^*(t) &= \begin{bmatrix} 0_{n+1, n+1} & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & -A_{24}(\varepsilon, t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

The asymptotic stability of (32) can be studied following the ideas of [4]. Indeed, there exist

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad (34)$$

$$Q(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & -\frac{1}{2} (\bar{A}_{22}(\varepsilon, t) + \bar{A}_{22}^T(\varepsilon, t)) \end{bmatrix}$$

with $W_1 = W_1^T > 0$ and $Q_1 = Q_1^T > 0$, such that:

$$A^*(\varepsilon, t)^T W + W A^*(\varepsilon, t) = -2Q(\varepsilon, t) \quad (35)$$

For subsystems (26) and (27), we state the main stability result for the homogeneous closed loop system.

Theorem 2

There exists a sufficiently small positive constant ε^* , such that (32) is asymptotically stable for all $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$.

Theorem 2 gives a sufficient condition of stability for system (13). This is a delay dependent criterion.

5. STATE APPROXIMATION

In this Section, we obtain asymptotic approximations for the states of system (13), in order to show that the non-homogeneous system preserves the asymptotic stability proved in Theorem 2 for sufficiently small ε .

To this end, let us first consider the singularly perturbed retarded linear model (13), with the initial state conditions: $x(t_0) = x_0$ and $z(t_0) = z_0$. Applying the change of variable defined by (20), (22) and (23), we get:

$$\begin{aligned} d\theta(t)/dt &= (A_{11} - A_{12}L(t) - \varepsilon H(LA_{11} + A_{21}(\varepsilon, t) \\ &\quad - L(t)A_{12}L(t) - A_{22}(\varepsilon, t))) \theta(t) \\ &\quad + (A_{12} + \varepsilon(A_{11}H(t) - A_{12}L(t) - H(t)L(t)A_{12} \\ &\quad - H(t)A_{22}(\varepsilon, t)) + \varepsilon^2(H(t)A_{22}(\varepsilon, t)L(t)H(t) \\ &\quad + H(t)L(t)A_{12}L(t)H(t) - H(t)A_{21}(\varepsilon, t)H(t) \\ &\quad - H(t)L(t)A_{11}H(t))) \eta(t) \\ &\quad - \varepsilon H(t)A_{23}(\varepsilon, t)(\theta(t - \tau(t)) + \varepsilon H(t)\eta(t - \tau(t))) \\ &\quad - \varepsilon H(t)A_{24}(\varepsilon, t)(-L(t)\theta(t - \tau(t)) + (1 - \varepsilon L(t)H(t))) \\ &\quad + [I - \varepsilon H(t)L(t)]B_1 r(t) \end{aligned} \quad (36)$$

14 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE, S. MONDIÉ AND R. LOZANO.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon d\eta(t)/dt &= (A_{21}(\varepsilon, t) - A_{22}(\varepsilon, t)L(t) + \varepsilon L(t)A_{11} \\
 &\quad - \varepsilon^2 L(t)A_{12}L) \theta(t) \\
 &\quad + (A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon(L(t)A_{12} + A_{21}(\varepsilon, t)H(t) \\
 &\quad + A_{22}(\varepsilon, t)L(t)H(t)) + \varepsilon^2(L(t)A_{11}H(t) \\
 &\quad - L(t)A_{12}L(t)H(t)) \eta(t) \\
 &\quad + A_{23}(\varepsilon, t)(\varepsilon(\theta(t - \tau(t)) + \varepsilon H(t)\eta(t - \tau(t))) \\
 &\quad + A_{22}(\varepsilon)(-L(t)\theta(t - \tau(t)) + (1 - \varepsilon L(t)H(t))) + \varepsilon L(t)B_1 r(t)
 \end{aligned} \tag{37}$$

where the initial conditions are:

$$\theta(t_0) = [I_n - \varepsilon H(t)L(t)] x_0 - \varepsilon H(t)z_0, \tag{38}$$

$$\eta(t_0) = L(t)x_0 + z_0. \tag{39}$$

The non-homogeneous solutions of system (36)-(39), when transformed back using the inverse of (20), lead to the exact solution of (13). Then, asymptotic approximations of the solution of (13) with $\mathcal{O}(\varepsilon)$ error can be obtained when $L(t) = \bar{L}_0(t)$, $H(t) = \bar{H}_0(t)$ and retaining $\mathcal{O}(\varepsilon)$ approximations of the right hand side coefficients of (36)-(39). For the slow subsystem this process yields:

$$dx_s(t)/dt = \bar{A}_0 x_s(t) + A_{12}z_f(t) + B_1 r(t) \tag{40}$$

For the fast subsystem, we change the time scale as, $\sigma = (t - t_0)/\varepsilon$, then the derivative for the fast subsystem is $\frac{d}{dt}z_f(\sigma) = \frac{d}{d\sigma}z_f(\sigma)\frac{d}{dt}\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\sigma}z_f(\sigma)$. This reduces the approximation problem to a problem with regular perturbation on the right hand side coefficients. Following the process used in (40), the equation for the fast subsystem is:

$$\frac{d}{d\sigma}z_f(\sigma) = A_{22}(0, t)z_f(\sigma) \tag{41}$$

and the initial conditions are:

$$\begin{aligned}
 x_s(t_0) &= x_0 \\
 z_f(0) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x_0 + z_0
 \end{aligned} \tag{42}$$

where

$$\bar{A}_0 = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0(t)$$

In this way, we have obtained the following particularization of Theorem 6.1 in [11] for the case under study:

Theorem 3

Given (30) and (31). There then exists an $\varepsilon^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ the following

[§] Kokotović *et al.* [11] consider in general $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$ errors.

expressions hold uniformly for $t \in [t_0, t_f]$:

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{43}$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x_s(t) + z_f \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{44}$$

where x_s and z_f are solutions of (40) and (41), with the initial conditions (42).

6. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

The results of this contribution are illustrated with the following numerical example. Let us consider the system:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} y_1(t) + \sum_{i=1}^2 a_{11,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_1(t) \\ & + \sum_{i=1}^2 \alpha_{11,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_1(t - \tau(t)) + \sum_{i=1}^2 a_{12,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_2(t) \\ & + \sum_{i=1}^2 \alpha_{12,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_2(t - \tau(t)) = b_{11}(t)u_1(t) + b_{12}(t)u_2(t) \\ & \frac{d^2}{dt^2} y_2(t) + \sum_{i=1}^2 a_{22,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_2(t) \\ & + \sum_{i=1}^2 \alpha_{22,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_2(t - \tau(t)) + \sum_{i=1}^2 a_{21,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_1(t) \\ & + \sum_{i=1}^2 \alpha_{21,2-i+1}(t) \frac{d^{(2-i)}}{dt^{(2-i)}} y_1(t - \tau(t)) = b_{22}(t)u_2(t) \end{aligned} \tag{45}$$

notice that in this case: $\eta_1 = 2$ and $\eta_2 = 2$. Let us first rewrite system (45), in the form (4):

$$\begin{aligned} & \left(\left[\begin{array}{cc} \partial^2 & 0 \\ 0 & \partial^2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{112} & a_{121} & a_{122} \\ a_{211} & a_{212} & a_{221} & a_{222} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \partial & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \partial \end{array} \right] \right) \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \\ & + \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{112} & \alpha_{121} & \alpha_{122} \\ \alpha_{211} & \alpha_{212} & \alpha_{221} & \alpha_{222} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \partial & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \partial \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_1(t - \tau(t)) \\ y_2(t - \tau(t)) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ 0 & b_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{46}$$

16 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE, S. MONDIÉ AND R. LOZANO.

where the time varying parameters are:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{111}(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{\sin((2j-1)t)}{2j-1}, \quad a_{112}(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sin\left(\frac{jt}{2}\right) \\ a_{121}(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{j \sin(4jt)}{(2j-1)(2j+1)}, \quad a_{122}(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^5 \frac{\cos(2jt)}{1-4j} \\ a_{211}(t) = 2 \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sin(jt) \\ a_{212}(t) = 2 \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \cos(jt) \\ a_{221}(t) = \frac{4}{5} \cos(t), \quad a_{222}(t) = \frac{4}{5} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2} \cos(t) \\ \alpha_{111} = a_{221}, \quad \alpha_{112} = a_{222}, \quad \alpha_{121} = 3, \quad \alpha_{222} = a_{211} \\ \alpha_{211} = 1 + \frac{1}{4} \cos(t), \quad \alpha_{212} = a_{122}, \quad \alpha_{221} = 2 \\ b_{11}(t) = 7 + \frac{3}{4} (\sin(t) + \sin(2t)), \quad b_{12}(t) = \frac{1}{2} + \cos(t) \\ b_{21}(t) = 0, \quad b_{22}(t) = 5 + \frac{\sin(2t)}{2} \end{array} \right. \quad (47)$$

Defining the state vector as $\zeta(t) = [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \zeta_3 \quad \zeta_4] = [y_1 \quad \frac{d}{dt}y_1 \quad y_2 \quad \frac{d}{dt}y_2]$, we can obtain the following linear time varying retarded state representation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{111} & -a_{112} & -a_{121} & -a_{122} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{211} & -a_{212} & -a_{221} & -a_{222} \end{array} \right] \zeta(t) + \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{111} & -\alpha_{112} & -\alpha_{121} & -\alpha_{122} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{211} & -\alpha_{212} & -\alpha_{221} & -\alpha_{222} \end{array} \right] \zeta(t - \tau(t)) \\ &+ \left[\begin{array}{cc} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ 0 & b_{22}(t) \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \zeta(t) \end{aligned} \quad (48)$$

From (9) and (10), the control scheme is:

$$\begin{aligned} \varepsilon \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} &= - \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \zeta(t) + \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{cc|cc} -\sigma_{111} & -\sigma_{112} + l_1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\beta_1 - 1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\sigma_{221} & -\sigma_{222} + l_2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\beta_2 - 1) \end{array} \right] \zeta(t) \\ &+ \left[\begin{array}{cc|cc} -(l_1 + 1) & -l_1 & 0 & 0 \\ (\beta_1 - 1) & -\beta_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(l_2 + 1) & -l_2 \\ 0 & 0 & (\beta_2 - 1) & -\beta_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

We chose the control law parameters: $\sigma_{111} = 25$, $\sigma_{112} = 8$, $\sigma_{221} = 25$ and $\sigma_{222} = 8$, then the system dynamics for each output is given by the follows Hurwitz characteristic polynomials:

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 25; \quad p_2(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 25$$

From Theorem 1 and Lemma 1 we obtain the parameters β_i , ℓ_i and ε for $i = \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 25, & \beta_2 &= 25 \\ \ell_1 &= 20, & \ell_2 &= 20 \\ \varepsilon^* &= 0.12, & \varepsilon &= 0.04 \end{aligned}$$

In order to satisfy H7, $r_1, r_2 \in L^\infty \cap C^\infty$, the reference r is chosen as follows:

$$r_1(t) = \frac{10}{2.75} \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma, \quad r_2(t) = \frac{1}{2} r_1(t), \quad t \in [0, 100]$$

where: $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-(t')^2}}$, with $t' = (12/75)t - 1$. In Figures 1 and 2, we show MATLAB[®] numerical simulations for the time varying system (48), controlled by (49). The matching model error is computed as follows:

$$|y(t) - y_m(t)| = \left| y(t) - C_m \int_0^t \exp(A_m(t - \sigma)) B_m r(\sigma) d(\sigma) \right|.$$

where:

$$A_m = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -25 & -8 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -25 & -8 \end{array} \right], \quad B_m = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \quad C_m = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

The numerical simulations were performed with the solver setting DDE23 (see [16]):

7. CONCLUSION

In this paper, we extended the results obtained in [15] and [14] to the case of linear time varying MIMO retarded system. An important key for achieving the goal of the control scheme is the eigenvalues property of the matrix $B^*(t)$ (see Lemma 1, Theorem 1 and Theorem 2). Indeed, we are now dealing with bounds on its positive eigenvalues (see [11]), instead of the bounds on the function $b(t)$ as was the case of the SISO systems [15]. This fact has enabled us to use the same approach developed in [14]. In this contribution we have also followed the ideas of [3] to study stability when the retarded component in the state is considered.

[†] The function φ is taken from Definition 2.4.5 in [13].

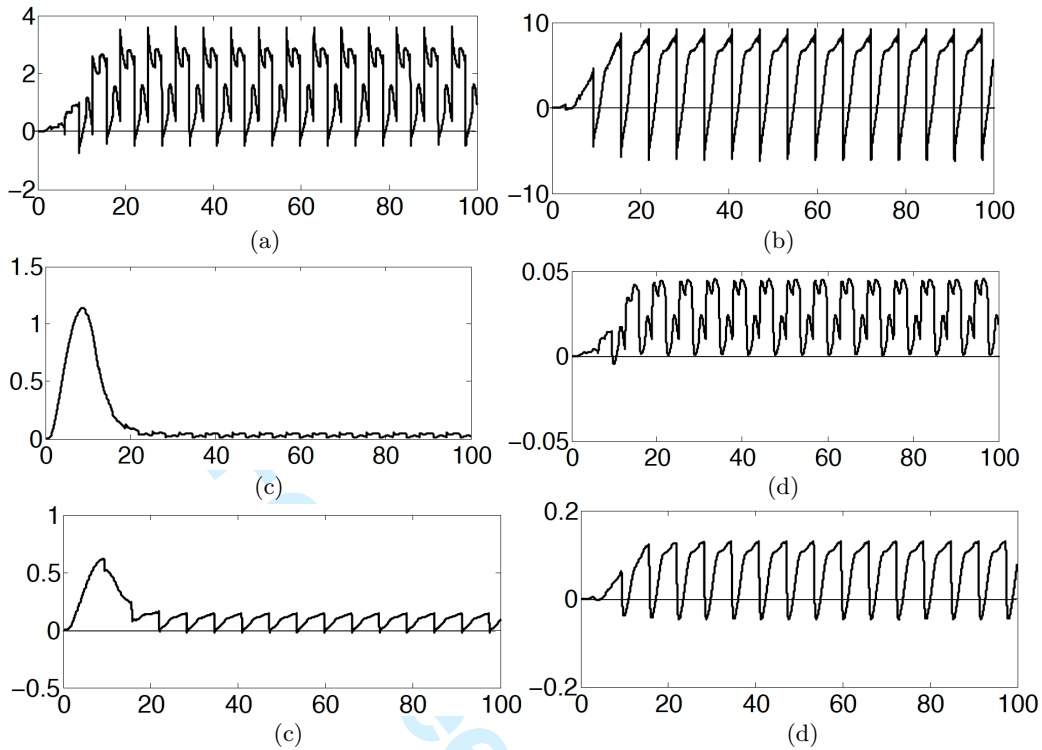


Figure 1. Control laws : (a) $u_1(t)$, (b) $u_2(t)$, model matching controller signals (c) $x_1(t)$, (d) $x_2(t)$, (e) $x_3(t)$ and (e) $x_5(t)$.

The control scheme is composed by the *singularly perturbed control law* (9) and the *model matching controller* (10). The aim of the *model matching controller* is to assign the closed loop dynamics, and to assign a rate of exponential convergence. The aim of the *singularly perturbed control law* is to bring the system into a *singularly perturbed model*, and to get a desired dynamics by an order ε .

Parameters β and ℓ_j enable us to compute a bound ε^* for a sufficiently small ε such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed delay model* is guaranteed. The stability criterion is delay dependent. The knowledge of the time varying parameters is not required, only some bounds, as in [14], for the control matching problem.

Following the ideas in [4], [7] and [18], we have analyzed the stability of a singularly perturbed delayed system, with unknown parameters and a matching problem solution is achieved by following a formal procedure for neglecting the small parameter ε in the closed loop system.

A. PROOFS

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60

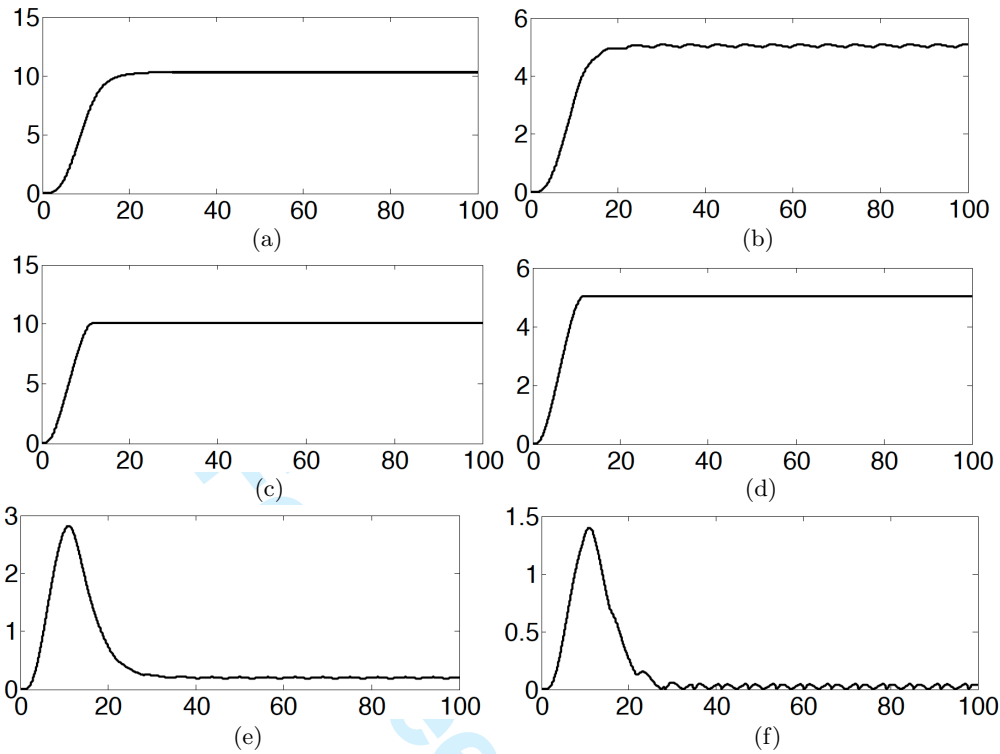


Figure 2. Output signals : (a) $y_1(t)$ and (b) $y_2(t)$, reference signals (c) $r_1(t)$ and (d) $r_2(t)$, matching model error signals (e) $e_1(t)$ and (f) $e_2(t)$.

A.1. Proof of Fact 1

From (15):

1.

$$A_{22}(\varepsilon, t) = -\varepsilon X(t) - B^*(t)$$

if $\varepsilon = 0$, we have:

$$A_{22}(0, t) = -B^*(t)$$

taking into account **H3**, we get:

$$\| A_{22}(0, t) \|_2 = \| B^*(t) \|_2 \leq \sqrt{m} m c_0 = \bar{c}$$

for all $t \in \mathbb{R}^+$.

2. From (15), we have:

$$\left\| \frac{d}{dt} A_{22}(0, t) \right\|_2 = \left\| \frac{d}{dt} B^*(t) \right\|_2$$

3. Taking into account **H3**, we get:^{||}

$$\| \frac{d}{dt} A_{22}(0, t) \|_2 \leq \sqrt{m} m c' = c$$

Let us find bounds for $B^*(t)$. For this, given a positive real number $\bar{\delta}$, let us introduce the following consistent norm [19]: $\| Z \| = \| D^{-1} U^H Z U D \|_\infty$, where: U is an unitary transformation matrix such that $U^H B^*(t) U$ is upper triangular, $D = \text{diag}\{1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^{m-1}\}$, with:

$$\eta \leq \frac{\bar{\delta}}{(m-1)c_0} \quad \text{and} \quad \eta < 1 \tag{A1}$$

Then (see Theorem 3.8 of Chapter 6 of [19], and recall **H2** and **H3**):

$$\| B^*(t) \| = \| D^{-1} U^H B^*(t) U D \|_\infty \leq \rho(B^*(t)) + \bar{\delta} = \bar{b}_2 + \bar{\delta} \tag{A2}$$

Let us now compute the bounds for the real part of the eigenvalues of $A_{22}(\varepsilon, t) = -\varepsilon X(t) - B^*(t)$. For this, let us compute the matrix measure of $A_{22}(\varepsilon, t)$, $\mu(A_{22}(\varepsilon, t))$, using the consistent norm above defined and using the Theorem 5 of Section II.8 of [2]:

- Conditions (h) and (e) of the Theorem imply that:

$$\begin{aligned} \Re \lambda_i(-A_{22}(\varepsilon, t)) &\leq \mu(\varepsilon X(t) + B^*(t)) \\ &\leq \mu(\varepsilon X(t)) + \mu(B^*(t)) \end{aligned}$$

- Conditions (c) and (b) of the Theorem imply that:

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon X(t)) + \mu(B^*(t)) &\leq \varepsilon \|X(t)\| + \|B^*(t)\| \\ &\leq \varepsilon \|X(t)\| + (\bar{b}_2 + \bar{\delta}) \end{aligned}$$

- Conditions (h) and (e) of the Theorem imply that:

$$\begin{aligned} \Re \lambda_i(-A_{22}(\varepsilon, t)) &\geq -\mu(-\varepsilon X(t) - B^*(t)) \\ &\geq -\mu(-\varepsilon X(t)) - \mu(-B^*(t)) \end{aligned}$$

- Conditions (c) and (b) of the Theorem imply that:

$$\begin{aligned} -\mu(-\varepsilon X(t)) - \mu(-B^*(t)) &\geq -\varepsilon \|X(t)\| \\ &\quad -\mu(-B^*(t)) \end{aligned}$$

Therefore:

$$\begin{aligned} -\mu(-B^*(t)) - \varepsilon \|X(t)\| &\leq \Re \lambda_i(-A_{22}(\varepsilon, t)) \\ &\leq \varepsilon \|X(t)\| + (\bar{b}_2 + \bar{\delta}) \end{aligned} \tag{A3}$$

^{||} The factor \sqrt{m} comes from the relation between norms $\| \cdot \|_2$ and $\| \cdot \|_1$ (see for example [19]).

^{**} U^H means the transpose conjugate matrix of U

Let us finally prove (15). For this let us notice that, since for any $\theta \in (0, 1/\bar{b}_2) \subset \mathbb{R}$, we have (see **H2**):

$$0 < 1 - \theta\bar{b}_2 \leq \lambda_i\{I - \theta B^*(t)\} \leq 1 - \theta\bar{b}_1 \quad (\text{A4})$$

for all $t \in \mathbb{R}$.

We then get from Definition 1 of Section II.8 of [2], (A4), (A1) and **H3** (see also proof of Theorem 3.8 of Chapter 6 of [19]):

$$\begin{aligned} \mu(-B^*(t)) &= \lim_{\theta \searrow 0} (\|I - \theta B^*(t)\| - 1) / \theta \\ &= \lim_{\theta \searrow 0} (\|D^{-1}U^H(I - \theta B^*(t))UD\|_{\infty} - 1) / \theta \\ &\leq \lim_{\theta \searrow 0} (\max\{|\lambda_i\{I - \theta B^*(t)\}|\} \\ &\quad + \theta(m-1) \max\{|b_{ij}(t)|\eta\} - 1) / \theta \\ &= \lim_{\theta \searrow 0} (1 - \theta(\bar{b}_1 + \bar{\delta}) - 1) / \theta = -(\bar{b}_1 + \bar{\delta}) \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

Therefore from (A3) and (A5), we obtain:

$$\begin{aligned} -b_2 - \varepsilon L_{0,a} &\leq -b_2 - \varepsilon \|X(t)\| \leq \Re \lambda_i(A_{22}(\varepsilon, t)) \\ &\leq -b_1 + \varepsilon \|X(t)\| \leq -b_1 + \varepsilon L_{0,a} \end{aligned}$$

where: $L_{0,a} = \sqrt{m}mL'_{0,a}$, $b_1 = \bar{b}_1 + \bar{\delta}$ and $b_2 = \bar{b}_2 + \bar{\delta}$.

□

A.2. Proof of Theorem 1

From (26) and (27), the transition matrix of the *decoupled system* satisfies:

$$\hat{\phi}(t, s) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\phi}(t, s) = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \bar{A}_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix} \hat{\phi}(t, s) \quad (\text{A7})$$

From [17], the transition matrix $\phi(t, s)$ of (18), the transition matrix (A6) and $M(t)$ defined in (20) satisfy the relation:

$$\begin{aligned} \phi(t, s) &= M^{-1}(t) \hat{\phi}(t, s) M(s) \\ \phi(t, s) &= M^{-1}(t) \begin{bmatrix} \hat{\phi}_s(t, s) & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_f(t, s) \end{bmatrix} M(s) \quad \forall t \geq s \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Given (30) and (31), the rest of the proof is the same of the proof of Theorem 1 in [15].

□

22 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE, S. MONDIÉ AND R. LOZANO.

1
2
3 *A.3. Proof of Lemma 1*

4 The proof of this Lemma is a blueprint of the Lemma 1 in [15]. Indeed, we chose the same
5 Lyapunov function candidate:
6

7
8
$$\nu(t) = \alpha_1 V(t, x(t)) + \alpha_2 W(t, x(t), z(t))$$

9 where $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0,$

10
11
$$V(t, x(t)) = \int_t^\infty \|\phi_s(\tau, t)x(t)\|_2 d\tau,$$

12 and

13
14
15
$$W(t, x(t), z(t)) = \int_t^\infty \|\phi_f(\tau, t)(z(t) - \bar{L}_0 x(t))\|_2 d\tau$$

16 then, for our particular case, the time derivative of $\nu(t)$ is^{††}:

17
18
19
20
21
22
23
24
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\nu(t) &= \alpha_1 \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial W(t, x(t), z(t))}{\partial t} \\ &\leq -\left(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma}\right) \|x(t)\|_2 \\ &\quad - \left(\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma}\right) - \alpha_1 \frac{K_1 \bar{M}_1}{\beta}\right) \|z(t) + \bar{L}_0 x(t)\|_2 \end{aligned}$$

25 Then, $d\nu(t)/dt$ will be negative definite if α_1 and α_2 can be chosen such that:

26
27
$$\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma} > 0$$

28 and

29
30
31
$$\alpha_2 \left(1 - \varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma}\right) - \alpha_1 \frac{K_1 \bar{M}_1}{\beta} > 0.$$

32 This is possible if:

33
34
35
$$\varepsilon \frac{K_2 \bar{M}_3}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\beta}{K_1 \bar{M}_1} \left(1 - \frac{\varepsilon K_2 \bar{M}_2}{b_1 - \varepsilon L_{0,a} - \varepsilon \sigma}\right)$$

36 Then, it is sufficient that ε satisfies:

37
38
$$\varepsilon < \varepsilon^*,$$

39 where:

40
41
42
$$\varepsilon^* = \frac{\beta b_1}{K_1 K_2 \bar{M}_1 \bar{M}_3 + \beta(L_{0,a} + \sigma + K_2 \bar{M}_2)}.$$

43
44
45 □

46
47
48 *A.4. Proof of Theorem 2*

49 Based on [4], let us propose the following Lyapunov-Krasovskii functional:

50
51
52
53
54
55
$$V(x_{sf}^T(t)) = x_{sf}^T(t) E_\varepsilon W x_{sf}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x_{sf}^T(\rho) S x_{sf}(\rho) d\rho \tag{A9}$$

56
57 ^{††}See the Lemma 1 in [15] for computation details

where $S = S^T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{n+1, m} \\ 0_{m, n+1} & b_1 I \end{bmatrix} > 0$. Let us notice that (recall (32), (34) and (17)):

$$(E_\varepsilon W)^T = E_\varepsilon W \quad \text{and} \quad 2Q(\varepsilon, t) - S > 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \quad (\text{A10})$$

The time derivative of (A9) along the trajectories of (32) is:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} &= x_{sf}^T(t) (2WA^*(\varepsilon, t) + S) x_{sf}(t) + 2\varepsilon x_{sf}^T(t) W \hat{A}^*(t) x_{sf}(t - \tau(t)) \\ &\quad - \gamma(t) x_{sf}^T(t - \tau(t)) S x_{sf}(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

where $\gamma(t) = (1 - \frac{d\tau(t)}{dt})$. Taking into account (35), we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} &= x_{sf}^T(t) (S - 2Q(\varepsilon, t)) x_{sf}(t) + 2\varepsilon x_{sf}^T(t) W \hat{A}^*(t) x_{sf}(t - \tau(t)) \\ &\quad - \gamma(t) x_{sf}^T(t - \tau(t)) S x_{sf}(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

The above equation can be written as:

$$\frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} = -\bar{x}_{sf}^T(t) \Phi(\varepsilon, t) \bar{x}_{sf}(t) \quad (\text{A13})$$

where $\bar{x}_{sf}(t) = [x_{sf}^T(t) \quad x_{sf}^T(t - \tau(t))]^T$ and:

$$\Phi(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} 2Q(\varepsilon, t) - S & 0_{n+2, n+2} \\ 0_{n+2, n+2} & \gamma(t) S \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} 0_{n+2, n+2} & W \hat{A}^*(t) \\ W \hat{A}^*(t) & 0_{n+2, n+2} \end{bmatrix}$$

When $\varepsilon \rightarrow 0$, we get:

$$\Phi(0, t) = \begin{bmatrix} 2Q(0, t) - S & 0_{n+2, n+2} \\ 0_{n+2, n+2} & \gamma(t) S \end{bmatrix}$$

Then **H5** implies that: $\gamma(t) = (1 - \frac{d\tau(t)}{dt}) > 0$, now from (A10) and using Schur complements, we conclude that $\Phi(0, t) > 0$. Then there exists a sufficiently small positive constant ε^* , such that $\frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} < 0$ for all $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$. Then system (32) is asymptotically stable according to Lyapunov stability theory (see [10]).

□

A.5. Proof of Theorem 3

In Theorem 1 we have proved that: $\|\phi(t, s)\| \leq K e^{-\beta(t-s)/\varepsilon}$. Then, the contribution of the input term $\varepsilon L(t) B_1 r(t)$ is of order $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Thus, the rest of the proof is a blueprint of the proof of Theorem 6.1 in [11].

□

REFERENCES

1. R. Bellman and K. L. Cooke. (1963). *Differential-Difference Equations*. Academic Press.
2. C. A. Desoer and M. Vidyasagar. (1975). *Feedback Systems: Input-Output Properties*. Academic Press.

24 S. PUGA, M. BONILLA, M. MALABRE, S. MONDIÉ AND R. LOZANO.

3. E. Fridman. (1996). Decoupling Transformation os Singularly Perturbed Systems with Small Delay and Its Application. *Z. Angew. Math. Mech*, Vol. 76(2). (201-204).
4. E. Fridman. (2002). Effects of Small Delay on Stability of Singularly Perturbed Systems. *Automatica* Vol. 38. (897-902).
5. E. Fridman. (2006). Robust Sampled Data \mathcal{H}_∞ Control of Linear Stability of Singularly Perturbed Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. 51. (470-475).
6. V. Y. Glizer. (2005). Singularly Perturbed Linear Controlled Systems with Small Delay: An Overview of some Recent Results. *47th IMACS World Congress, France*. (July 11–15).
7. V. Y. Glizer and E. Fridman. (2000). \mathcal{H}_∞ Control of Linear Singularly Perturbed Systems with Small State Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 250. (49-85).
8. H. Górecki, S. Fiksa, P. Grabowski and A. Korytowsky. (1989). *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*. John Wiley & Sons.
9. G. H. Hardy. (1975). *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge University Press.
10. J. Hale. and L. Verduyn.(1993). *Introduction to Functional differential Equations*. Applied Mathematical Science. Springer-Verlag.
11. P. V. Kokotović, H. K. Khalil and J. O'Reilly. (1999). *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. SIAM, (1999).
12. X. Liu, X. Shen and Y. Zhang. (2003). Exponential Stability of Singularly Perturbed Systems with Time Delay. *Journal of Applicable Analysis*. Vol. 82. (117-130).
13. J. W. Polderman and J. C. Willems. (1997). *Introduction to Mathematical System Theory*. Text in Applied Mathematics, Springer.
14. S. Puga, M. Bonilla and M. Malabre. (2012). Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying MIMO Systems. *51th IEEE CDC*. (5743-5748).
15. S. Puga, M. Bonilla, M. Malabre and R. Lozano. (2013). Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. DOI: 10.1002/rnc.
16. L.F. Shampine, S. Thompson and J. Kierzenka. (2002). Solving Delay Differential Equations with dde23. <http://www.radford.edu/~thompson/webddes/tutorial.pdf>.
17. L. M. Silverman. (1971). Realization of Linear Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. AC. 16. (554-567).
18. Z. H. Shao. (2004). Stability Bounds of Singularly Perturbed Delay Systems. *IEE Proc.-Control Theory Appl*. Vol. 151. (585-588).
19. G.W. Stewart. (1973). *Introduction to Matrix Computations*. Academic Press.
20. D. William Luse. (1987). Multivariable Singularly Stability Perturbed Feedback Systems with Time Delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. AC. 32. (990-994).

Apéndice L

CDC 2013

El siguiente artículo sometido para su posible presentación en el Conference on Decision and Control 2013.

Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying Delay SISO Systems with Unknown Parameters

S. Puga, M. Bonilla, S. Mondié and M. Malabre.

Abstract— This paper proposes a control scheme for the problem of stabilizing single-input single-output linear time varying retarded systems composed by a singularly perturbed controller and a reference model. The results presented here are a generalization of our previous results on linear time varying SISO and MIMO systems. The closed loop system is a linear singularly perturbed retarded system with uniform asymptotic stability behavior, the uniform asymptotic stability of the singularly perturbed retarded system is guaranteed. We show how to design a control law such that the system dynamics for each output is given by a Hurwitz polynomial with constant coefficients.

NOTATION

- $\underline{\chi}_k^i \in \mathbb{R}^k$ stands for the vector which the i -th entry is equal to 1 and the other ones are equal to 0. $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ stands for the identity matrix of size k . $T_u\{v^T\}$ stands for the upper triangular Toeplitz matrix, which first row is v^T . $T_\ell\{v\}$ stands for the lower triangular Toeplitz matrix, which first column is v . $0_{\mu, \nu} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}$ stands for the zero matrix. And $0_\nu \in \mathbb{R}^\nu$ stands for the zero vector.
- $BDM\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ denotes a block diagonal matrix whose diagonal blocks are $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$.
- Given a vector function $f(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $\|f(\cdot)\| = \|f(\cdot)\|_2$ and for a function matrix $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|A(\cdot)\| = \|A(\cdot)\|_2$, see [2].
- A vector function $f(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^n$ is said to be $\mathcal{O}(\varepsilon)$ over an interval $[t_1, t_2]$ if there exist positive constants K and ε^* such that $\|f(\varepsilon, t)\| \leq K\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$, $\forall t \in [t_1, t_2]$, see [10].

I. INTRODUCTION

The study of time delay systems has big relevance in engineering [9], because delays appear commonly in various engineering systems, such as chemical plants, long transmission lines, hydraulic systems and computer

S. Puga is with UPIITA-IPN, Académia de Sistemas and P. HD Student at DCA-CINVESTAV-IPN, Av. IPN. 2580. México D.F., C.P. 07340, MEXICO. spuga@ipn.mx

M. Bonilla is with CINVESTAV-IPN, CONTROL AUTOMÁTICO, UMI 3175 CINVESTAV-CNRS. A.P. 14-740. MÉXICO 07000. mbonilla@cinvestav.mx

S. Mondié is with IRCCyN, CINVESTAV-IPN, CONTROL AUTOMÁTICO, UMI 3175 CINVESTAV-CNRS. A.P. 14-740. MÉXICO 07000. smondie@ctrl.cinvestav.mx

M. Malabre, LUNAM Université, CNRS, IRCCyN UMR CNRS 6597, 1 Rue de la Noe, F- 44321 Nantes, FRANCE. Michel.Malabre@irccyn.ec-nantes.fr

based control systems. In addition, actuators, sensors and field networks that are involved in feedback loops often introduce delays.

Singularly perturbed systems or two time scale systems [11], are commonly encountered in engineering, because of the presence of small parasitic parameters multiplying the time derivatives of some of the systems states; these appear in systems like: power systems where the singular perturbation parameters can represent machine reactance or transients in voltage regulators, in industrial control systems they may represent the time constants of drivers actuators. In [15] a singular implicit control scheme for linear time varying SISO systems has been proposed, where the knowledge of the time varying parameters is not required, but only some bounds. The control scheme is composed by a singularly perturbed control law and a matching controller (model matching controller). The control law approximately matches a given linear time-invariant state space representation, guaranteeing internal stability.

In the case of singularly perturbed delay systems there are works as: [7], where the author gives results in the topic of singularly perturbed linear controlled systems with small delays in the state and control variables, the overview covers: asymptotic decomposition of the system, stabilizability, detectability, stabilization, controllability observability and linear-quadratic optimal control problem. In [18], conditions for stability of multivariable singularly perturbed systems in terms of properties of the slow and the fast systems in the frequency domain are given. In [5], the effect of a small delay in the feedback loop of a singularly perturbed systems is considered and sufficient and necessary conditions for preserving stability are given in terms of an LMI criterion for stability of singularly perturbed differential systems. In [6] is solved the state feedback sampled data H_∞ -control problem by applying the input delay approach to sampled data control and by developing the input output approach to singularly perturbed time delay systems. In [8], the authors study the H_∞ state feedback control problem for singularly perturbed linear systems with a small state delay and give conditions for the existence of a solution of the original H_∞ problem, independent of the singular perturbation parameter.

In this paper, we propose a control law for SISO time varying retarded systems [1], described by the following

functional differential equation:

$$\begin{aligned} & d^n y(t)/dt^n + \sum_{i=1}^n a_{n-i+1}(t) d^{(n-i)} y(t)/dt^{(n-i)} + \\ & \sum_{i=1}^n \hat{a}_{n-i+1}(t) d^{(n-i)} y(t - \tau(t))/dt^{(n-i)} = b(t)u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

based on the singular perturbations approach [11], where the knowledge of the parameters is not required, but only some bounds. The aim of this control law is to approximately match a given SISO linear time invariant system, whose dynamics is represented by the ordinary differential equation:

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + \bar{a}_n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + \bar{a}_2 \frac{d}{dt} y(t) + \bar{a}_1 y(t) = r(t) \quad (2)$$

The control scheme guarantees the behavior and the asymptotic stability. The paper is organized as follows. The problem is first stated in Section II. Next, in Section III we propose a singularly perturbed linear control law, which aim is to lead the closed loop system into the singularly perturbed system model introduced in [11]. Following [11] and [3], in Section IV-A the closed loop system is separated in two time scale subsystems, namely a slow system and a fast one. In Section IV-B we study the uniform stability of the fast and slow subsystems without considering the delay. In Section IV-C we study the asymptotic stability considering the delay effects. In Section V we get the desired state asymptotic approximation. Finally, in Section VI we give an academic example for illustrating the developed technique. All the proofs are given in the Appendix.

II. SYSTEM DEFINITION AND REPRESENTATION FORM

Let us consider a linear time varying delay system, with dynamics represented by (1), where $y \in \mathbb{R}$ is the output variable and $u \in \mathbb{R}$ is the control input. The coefficients, $a_i(t)$, $\hat{a}_i(t)$, $b(t)$ and the delay $\tau(t)$ are unknown and such that:¹

- H1 $a_i(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty$, $\|a_i(t)\| \leq L_{0,a}$ and $\|\frac{d}{dt} a_i(t)\| \leq L_{1,a}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.
- H2 $\hat{a}_i(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty$, $\|\hat{a}_i(t)\| \leq \hat{L}_{0,a}$ and $\|\frac{d}{dt} \hat{a}_i(t)\| \leq \hat{L}_{1,a}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.
- H3 $b(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty$, $0 < b_1 \leq b(t) \leq b_2$ and $\|\frac{d}{dt} b(t)\| \leq c$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.
- H4 $\tau(t) \in \mathcal{C}^\infty$, $0 \leq \tau(t) \leq \tau_1$ and $\frac{d}{dt} \tau(t) < 1$ for all $t \in \mathbb{R}^+$.
- H5 The positive numbers $L_{0,a}$, $L_{1,a}$, $\hat{L}_{0,a}$, $\hat{L}_{1,a}$, b_1 , b_2 and τ_1 are known.

This delay differential equation can be recast into the form of a linear state equation with input $u(t)$ and output $y(t)$. It is convenient to define the state

¹ For simplicity, in this paper we only consider functions of class \mathcal{C}^∞ . But it could be considered functions of class \mathcal{C}^k , where k is a sufficiently positive large integer such that the derivability conditions were fulfilled. See also Corollary 2.4.12 of [14].

variables as follows (see [1]): $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots \ \zeta_n]^T = \begin{bmatrix} y & \frac{dy}{dt} & \dots & \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T$.

We then get the retarded linear state model:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \zeta(t) &= \begin{bmatrix} T_u \{(\chi_n^2)^T\} + \chi_n^n (\mathbf{a}_n(t))^T \\ \chi_n^n (\hat{\mathbf{a}}_n(t))^T \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} \chi_n^n b(t) \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} (\chi_n^1)^T \end{bmatrix} \zeta(t), \\ \mathbf{a}_n(t) &= [-a_1(t) \ \dots \ -a_n(t)]^T; \\ \hat{\mathbf{a}}_n(t) &= [-\hat{a}_1(t) \ \dots \ -\hat{a}_n(t)]^T, \end{aligned} \quad (3)$$

for $t \geq 0$ and the initial state condition is:

$$\zeta(t) = g(t), \quad t \in [-\tau_1, 0)$$

$$\zeta(t) = \zeta_0 = [y(0) \ dy(0)/dt \ \dots \ d^{n-1}y(0)/dt^{n-1}]^T, \quad t = 0.$$

III. SINGULAR IMPLICIT CONTROL SCHEME

For the state space representation (3), we propose the following control law, composed by a singularly perturbed control law and a matching controller,

Singularly perturbed control law

$$\varepsilon u = -(\chi_n^n)^T \zeta(t) + (\chi_2^1)^T \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Matching controller

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{a}}_n)^T + (1 + \ell)(\chi_n^n)^T \\ -(\beta - 1)(\chi_n^n)^T \end{bmatrix} \zeta(t) \\ &+ \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \chi_2^1 r \\ \bar{\mathbf{a}}_n &= [-\bar{a}_1 \ \dots \ -\bar{a}_n]^T \end{aligned} \quad (5)$$

where: β , ℓ and ε are positive parameters and the parameters $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ are the coefficients of the desired Hurwitz polynomial $p(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_n \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_2 \lambda + \bar{a}_1$, which are chosen such that:

$$-\beta \geq \max\{\Re e(\lambda) \mid p(\lambda) = 0\} \text{ and } \ell + 1 > L_{0,a} + \bar{a}_n \quad (6)$$

We assume that the reference signal r satisfies:

- H6 $r \in L^\infty \cap \mathcal{C}^\infty$. We ask for \mathcal{C}^∞ , because the control scheme is indeed an approximation of a proportional and derivative feedback.

The aim of the *matching controller* is: (i) to assign the closed loop dynamics to a time invariant linear system with Hurwitz characteristic polynomial $p(\lambda)$, and (ii) to assign a rate of exponential convergence to the desired dynamics. The aim of the *singularly perturbed control law* is to: (i) change the basis representation system for obtaining a *singularly perturbed retarded linear model*, and (ii) approximate the desired dynamics by an ε order. Indeed, we show that the parameters, β and ℓ , enable us to compute a sufficiently small ε such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed retarded model* is guaranteed.

In order to obtain the closed loop singularly perturbed retarded model, let us combine (3), (4) and (5) and let

us choose $x_i(t) = \zeta_i(t)$, for $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, and $z(t) = \zeta_n(t)$, namely:

$$\begin{aligned} dx/dt(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) + B_1r(t) \\ \varepsilon dz/dt(t) &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) \\ &\quad + \hat{A}_{21}(\varepsilon, t)x(t - \tau(t)) + \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)z(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (7)$$

where the matrices $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, $A_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$, $A_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, $\hat{A}_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ and $\hat{a}_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ are defined as follows:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left[\begin{array}{c|cc} \text{Tr}\{\chi_{(n-1)}^2\} & \underline{0}_{(n-1)} & \underline{0}_{(n-1)} \\ \hline (\bar{\mathbf{a}}_{n-1})^T & -(1+\ell) & -\ell \\ (\underline{0}_{(n-1)})^T & (\beta-1) & -\beta \end{array} \right], \\ A_{12} &= \left[\begin{array}{c} \chi_{(n-1)}^{(n-1)} \\ -\bar{\mathbf{a}}_n + (1+\ell) \\ -(\beta-1) \end{array} \right], \quad B_1 = \left[\begin{array}{c} \underline{0}_{(n-1)} \\ \chi_2^1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A_{21}(\varepsilon, t) &= \left[\varepsilon(\mathbf{a}_{(n-1)}(t))^T \mid b(t) \quad 0 \right], \\ A_{22}(\varepsilon, t) &= -\varepsilon a_n(t) - b(t), \\ \hat{A}_{21}(\varepsilon, t) &= \left[\varepsilon(\hat{\mathbf{a}}_{(n-1)}(t))^T \mid 0 \quad 0 \right], \\ \hat{a}_{22}(\varepsilon, t) &= -\varepsilon \hat{a}_n(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Let us rewrite (7) as:

$$E_\varepsilon \left[\begin{array}{c} dx(t) \\ dz(t) \end{array} \right] = A(\varepsilon, t) \left[\begin{array}{c} x(t) \\ z(t) \end{array} \right] + \hat{A}(\varepsilon, t) \left[\begin{array}{c} x(t - \tau(t)) \\ z(t - \tau(t)) \end{array} \right] + \bar{B}r \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I}_{n+1} & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & \varepsilon \end{array} \right] \\ A(\varepsilon, t) &= \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}(\varepsilon, t) & A_{22}(\varepsilon, t) \end{array} \right] \\ \hat{A}(\varepsilon, t) &= \left[\begin{array}{cc} 0_{n+1,n+1} & 0_{n+1,1} \\ \hat{A}_{21}(\varepsilon, t) & \hat{a}_{22}(\varepsilon, t) \end{array} \right] \\ \bar{B} &= \left[\begin{array}{c} B_1 \\ 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

IV. ASYMPTOTIC STABILITY

In this Section, we study the asymptotic stability of the homogeneous functional differential equation (10). We follow the singular perturbation approach, introduced in [11] for time varying linear systems, and extended in [3] to the delayed case. In section IV-A we apply the state transformation, whose aim is to separate the fast and slow subsystems. In section IV-B we study the asymptotic stability of the homogeneous functional differential equation (10) when there is no delay, namely for the case $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$ and $\bar{B} = 0$; as in [11], we give bounds on ε for guaranteeing asymptotic stability. Finally in section IV-C, following [5] and [12], we study the *asymptotic stability* for the linear time varying delay system.

A. State Transformation

Let us consider the homogeneous equation of (10):

$$E_\varepsilon \left[\begin{array}{c} dx(t) \\ dz(t) \end{array} \right] = A(\varepsilon, t) \left[\begin{array}{c} x(t) \\ z(t) \end{array} \right] + \hat{A}(\varepsilon, t) \left[\begin{array}{c} x(t - \tau(t)) \\ z(t - \tau(t)) \end{array} \right] \quad (12)$$

Following [11] and [3], let us transform (12) into slow and fast subsystems. To this end, let us define the bounded continuously differentiable matrices,

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \varepsilon R_L(t) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}, \\ H(t) &= H_0(t) + \varepsilon R_H(t) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}, \end{aligned} \quad (13)$$

and the change of variables,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \theta \\ \eta \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} (\mathbf{I}_{n+1} - \varepsilon H(t)L(t)) & -\varepsilon H(t) \\ & L(t) \\ & & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ z \end{array} \right] \\ &= M^{-1}(t) \left[\begin{array}{c} x \\ z \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

We then get from (12), (13) and (14):

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \left[-\varepsilon \frac{d}{dt} H(t) + A_{12} - \varepsilon H(t)L(t)A_{12} \right. \\ &\quad \left. - H(t)A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon A_{11}H(t) - \varepsilon A_{12}L(t)H(t) \right] \eta \\ &\quad - H(t)\hat{a}_{22}(\varepsilon, t)\eta(t - \tau(t)) + [A_{11} - A_{12}L(t)]\theta \\ \varepsilon \frac{d\eta}{dt} &= \left[\varepsilon \frac{d}{dt} L(t) + A_{21}(\varepsilon, t) + \varepsilon L(t)\{A_{11} - A_{12}L(t)\} \right. \\ &\quad \left. - A_{22}(\varepsilon, t)L(t) \right] x \\ &\quad + \left[\hat{A}_{21}(\varepsilon, t) - \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)L(t) \right] x(t - \tau(t)) \\ &\quad + [\varepsilon L(t)A_{12} + A_{22}(\varepsilon, t)] \eta \\ &\quad + \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)\eta(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (15)$$

On the other hand, since the matrices, A_{11} and $A_{22}(\varepsilon, t)$, are Hurwitz for all $t \in \mathbb{R}^+$, we get from Lemmas 1 and 2 of [3] that there exists a sufficiently small ε such that:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt} L(t) &= A_{22}(\varepsilon, t)L(t) - A_{21}(\varepsilon, t) - \varepsilon L(t)[A_{11} - A_{12}L(t)] \\ \hat{A}_{21}(\varepsilon, t) - \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)L(t) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

and

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt} H(t) &= A_{12} - \varepsilon H(t)L(t)A_{12} - H(t)A_{22}(\varepsilon, t) \\ &\quad + \varepsilon A_{11}H(t) - \varepsilon A_{12}L(t)H(t) \\ H(t)\hat{a}_{22}(\varepsilon, t) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

which implies, together with (13):

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad H(t) = H_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ L_0(t) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = \bar{L}_0, \\ H_0(t) &= \bar{A}_{12}A_{22}^{-1}(0, t) = \bar{H}_0 \end{aligned} \quad (18)$$

Finally, taking into account (16)-(18) in (15), we obtain:

$$d\theta/dt = [\bar{A}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)] \theta$$

$$\varepsilon d\eta/dt = [\bar{a}_{22}(\varepsilon, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] \eta + \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)\eta(t - \tau(t))$$

where:

$$\bar{A}_0 = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0(t) \quad \text{and} \quad \bar{a}_{22}(\varepsilon, t) = A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon \bar{L}_0 A_{12} \quad (19)$$

Thus, (12) is approximately decomposed into the slow subsystem,

$$dx_s/dt = \bar{A}_0 x_s, \quad (20)$$

and into the fast subsystem,

$$\varepsilon dz_f/dt = \bar{a}_{22}(\varepsilon, t)z_f + \hat{a}_{22}(\varepsilon, t)z_f(t - \tau(t)). \quad (21)$$

B. Uniform Asymptotic Stability Conditions

We show that uniform asymptotic stability of (20) and (21) is guaranteed by the properties of the transition matrices when there is no delay, namely for the case $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$.

Let us first note that (recall (19), (18), (8) and (9))

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} \text{Tu}\{(\underline{X}_{(n-1)}^2)^T\} & \underline{X}_{(n-1)}^{(n-1)} & \underline{0}_{(n-1)} \\ (\bar{\mathbf{a}}_{(n-1)})^T & -\bar{a}_n & -\ell \\ (\underline{0}_{(n-1)})^T & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{22}(\varepsilon, t) = -\varepsilon a_n(t) - b(t) + \varepsilon(\bar{a}_n - (\ell + 1)) \quad (22)$$

Then \bar{A}_0 is a Hurwitz matrix and (recall **H1**, **H3** and (6)):

$$-\bar{a}_{22}(\varepsilon, t) \geq b_1 + \varepsilon(-L_{0,a} - \bar{a}_n + (\ell + 1)) > b_1 \quad \forall t \geq t_0 \quad (23)$$

Thus (22) and (6) imply that there exists $K_1 > 0$ such that the transition matrix, $\phi_s(t, t_0)$, of the slow subsystem (20) satisfies:

$$\|\phi_s(t, t_0)\| \leq K_1 e^{-\beta(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \quad (24)$$

With respect to the fast subsystem (21), we have for $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$:

$$\varepsilon dz_f/dt = \bar{a}_{22}(\varepsilon, t) z_f \quad (25)$$

Let $\phi_f(t, t_0)$ be the transition matrix of (25) (recall (22)):

$$\phi_f(t, t_0) = e^{-\alpha(t)}$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (b(\rho) + \varepsilon(a_n(\rho) - \bar{a}_n + (\ell + 1))) d\rho$$

From (23), the transition matrix $\phi_f(t, t_0)$ satisfies:

$$\|\phi_f(t, t_0)\| \leq K_2 e^{-\frac{b_1}{\varepsilon}(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (26)$$

The next Theorem relates the behavior of (12) with the behaviors of the slow and fast subsystems, for the case $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$.

Theorem 1: Given (24), (26) and $\ell + 1 > L_{0,a} + \bar{a}_n$. Then there exists an $\varepsilon^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ the system (12) is uniformly asymptotically stable, for the case $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$. Moreover, its transition matrix $\phi(t, s)$, satisfies $\|\phi(t, s)\| \leq K e^{-\beta(t-s)}$ for all $t \geq s \geq t_0$, for some $K > 0$.

This result holds asymptotically as ε tends to 0. From a computational point of view, it is important to have an idea of the order of the upper bound ε^* . This is done in the next Lemma:

Lemma 1: Given the conditions of Theorem 1, and $\|\bar{A}_{12}\|_2 \leq \bar{M}_1$, $\|\bar{L}_0 \bar{A}_{12}\|_2 \leq \bar{M}_2$ and $\|\bar{L}_0 \bar{A}_0\|_2 \leq \bar{M}_3$, the singularly perturbed system (12) is uniformly asymptotically stable for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$, where:

$$\varepsilon_1^* = \frac{\beta b_1}{\beta \bar{M}_2 + K \bar{M}_1 \bar{M}_3}$$

$$\bar{M}_1 = \sqrt{1 + (-\bar{a}_n + (\ell + 1))^2 + (1 - \beta)^2}$$

$$\bar{M}_2 = |\bar{a}_n - \ell - 1|$$

$$\bar{M}_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 + \ell^2}$$

C. Asymptotic Stability for the Delayed System

Let us rewrite (20) and (21) as follows:

$$E_\varepsilon \frac{dx_{sf}(t)}{dt} = A^*(\varepsilon, t) x_{sf}(t) + \varepsilon \hat{A}^*(t) x_{sf}(t - \tau(t)) \quad (27)$$

where $x_{sf}(t) = [x_s^T(t) \quad z_f^T(t)]^T$ and:

$$A^*(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & \bar{a}_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}^*(t) = \begin{bmatrix} 0_{n+1,n+1} & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & -\hat{a}_n(t) \end{bmatrix} \quad (28)$$

The asymptotic stability of (27) is studied following the ideas of [5]. Indeed, there exist

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$Q(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & -\bar{a}_{22}(\varepsilon, t) \end{bmatrix} \quad (29)$$

where $W_1 = W_1^T > 0$ and $Q_1 = Q_1^T > 0$, such that:

$$A^*(\varepsilon, t)^T W + W A^*(\varepsilon, t) = -2Q(\varepsilon, t) \quad (30)$$

For subsystems (20) and (21), we state the main stability result for the homogeneous closed loop system.

Theorem 2: In view that matrix $A^*(\varepsilon, t)$ satisfies the Lyapunov equation (30) and $\bar{a}_{22}(\varepsilon, t)$ satisfies the inequality (23), and under the hypothesis **H4**, there exists a sufficiently small positive constant ε^* , such that (27) is asymptotically stable for all $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$.

Theorem 2 gives a sufficient condition of stability for system (7). This is a delay dependent criterion.

V. STATE APPROXIMATION

In this Section, we obtain asymptotic approximations for the states of (7), in order to show that the non-homogeneous system preserves the asymptotic stability proved in Theorem 2 for sufficiently small ε .

To this end, let us first consider the singularly perturbed retarded linear model (7), with the initial state conditions: $x(t_0) = x_0$ and $z(t_0) = z_0$. Applying the change of variable defined by (14), (16) and (17), we get:

$$d\theta/dt = (A_{11} - A_{12}L(t) - \varepsilon H(LA_{11} + A_{21}(\varepsilon, t) - L(t)A_{12}L(t) - A_{22}(\varepsilon, t)))\theta(t)$$

$$+ (A_{12} + \varepsilon(A_{11}H(t) - A_{12}L(t) - H(t)L(t)A_{12} - H(t)A_{22}(\varepsilon, t)) + \varepsilon^2(H(t)A_{22}(\varepsilon, t)L(t)H(t) + H(t)L(t)A_{12}L(t)H(t) - H(t)A_{21}(\varepsilon, t)H(t) - H(t)L(t)A_{11}H(t)))\eta(t)$$

$$- \varepsilon H(t)\hat{A}_{21}(\varepsilon, t)(\theta(t - \tau(t)) + \varepsilon H(t)\eta(t - \tau(t)))$$

$$- \varepsilon H(t)\hat{a}_{22}(\varepsilon, t)(-L(t)\theta(t - \tau(t)) + (1 - \varepsilon L(t)H(t)))$$

$$+ [I - \varepsilon H(t)L(t)]B_1 r \quad (31)$$

VI. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

$$\begin{aligned} \varepsilon d\eta/dt &= (A_{21}(\varepsilon, t) - A_{22}(\varepsilon, t)L(t) + \varepsilon L(t)A_{11} \\ &\quad - \varepsilon^2 L(t)A_{12}L) \theta(t) \\ &\quad + (A_{22}(\varepsilon, t) + \varepsilon(L(t)A_{12} + A_{21}(\varepsilon, t)H(t) \\ &\quad + A_{22}(\varepsilon, t)L(t)H(t)) + \varepsilon^2(L(t)A_{11}H(t) \\ &\quad - L(t)A_{12}L(t)H(t))) \eta(t) \\ &\quad + \dot{A}_{21}(\varepsilon, t)(\varepsilon(\theta(t - \tau(t)) + \varepsilon H(t)\eta(t - \tau(t))) \\ &\quad + A_{22}(\varepsilon)(-L(t)\theta(t - \tau(t)) + (1 - \varepsilon L(t)H(t))) + \varepsilon L(t)B_1 r \end{aligned} \quad (32)$$

where the initial conditions are:

$$\theta(t_0) = [I_n - \varepsilon H(t)L(t)] x_0 - \varepsilon H(t)z_0, \quad (33)$$

$$\eta(t_0) = L(t)x_0 + z_0. \quad (34)$$

We find next the non-homogeneous solutions of system (31)-(34), when transformed back using the inverse of (14), yielding the exact solution of (7). Asymptotic approximations to the solution of (7) with² $\mathcal{O}(\varepsilon)$ error can be obtained when $L(t) = \bar{L}_0(t)$, $H(t) = \bar{H}_0(t)$ and retaining $\mathcal{O}(\varepsilon)$ approximations of the right hand side coefficients of (31)-(34). For the slow subsystem this process yields:

$$dx_s/dt = \bar{A}_0 x_s + A_{12}z_f + B_1 r \quad (35)$$

For the fast subsystem, we change the time scale as, $\sigma = (t - t_0)/\varepsilon$, then the derivative for the fast subsystem is $\frac{d}{dt}z_f(\sigma) = \frac{d}{d\sigma}z_f(\sigma)\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\sigma}z_f(\sigma)$. This reduces the approximation problem to a problem with regular perturbation on the right hand side coefficients. Following the process as in (35), the equation for the fast subsystem is:

$$\frac{d}{d\sigma}z_f(\sigma) = A_{22}(0, t)z_f(\sigma) \quad (36)$$

and the initial conditions are:

$$\begin{aligned} x_s(t_0) &= x_0 \\ z_f(0) &= A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x_0 + z_0 \end{aligned} \quad (37)$$

where

$$\bar{A}_0 = A_{11} - A_{12}\bar{L}_0(t)$$

In this way, we have obtained the following particularization of Theorem 6.1 in [11] for our case study:

Theorem 3: Given (24) and (26). There then exists an $\varepsilon^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ the following expressions hold uniformly for $t \in [t_0, t_f]$:

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (38)$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t)x_s(t) + z_f\left(\frac{t - t_0}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (39)$$

where x_s and z_f are solutions of (35) and (36), with the initial conditions (37).

The results of this contribution are illustrated with the following numerical example.

² Kokotović *et al.* [11] consider in general $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$ errors.

Let us consider the system:

$$\begin{aligned} d^2y(t)/dt^2 + \sum_{i=1}^2 a_{2-i+1}(t)d^{(2-i)}y(t)/dt^{(2-i)} + \\ \sum_{i=1}^2 \hat{a}_{2-i+1}(t)d^{(2-i)}y(t - \tau(t))/dt^{(2-i)} = b(t)u(t) \end{aligned} \quad (40)$$

with parameters:

$$\begin{cases} a_1(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{\sin((2j-1)t)}{2j-1}, & a_2(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sin\left(\frac{jt}{2}\right) \\ \hat{a}_1(t) = 2 \sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sin(jt), & \hat{a}_2(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{\sin((2j-1)t)}{2j-1} \\ b(t) = 7 + \frac{1}{4}(\sin(t) + \sin(2t)), & \tau(t) = \frac{5}{4} + \frac{4}{5} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \quad (41)$$

The state representation is:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) \end{bmatrix} \zeta(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\hat{a}_1(t) & -\hat{a}_2(t) \end{bmatrix} \zeta(t - \tau(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \zeta \end{aligned} \quad (42)$$

The control $u(t)$, obtained from (4) and (5), is:

$$\varepsilon u = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

and the matching controller is:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 + (1 + \ell) \\ 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} \zeta \\ &\quad + \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \end{aligned} \quad (44)$$

where the parameters \bar{a}_1 and \bar{a}_2 are the coefficients of the Hurwitz polynomial:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 25$$

The parameters β , ℓ and ε^* are computed from Theorem 1, Lemma 1 and Theorem 2:

$$\beta = 25, \ell = 20, \varepsilon^* = 0.18, \varepsilon = 0.06$$

In order to satisfy **H6**, $r \in L^\infty \cap \mathcal{C}^\infty$, the signal reference r is chosen as:

$$r(t) = \frac{10}{2.75} \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma, \quad t \in [0, 100]$$

where:³ $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-(t')^2}}$, with $t' = (12/75)t - 1$.

In Figures 1, 2 and 3 we show MATLAB[®] numerical simulations for the linear retarded system (42) and (41), controlled by (43) and (44), with a unit step reference. The matching model error is computed as follows:

$$|y(t) - y_m(t)| = \left| y(t) - C_m \int_0^t \exp(A_m(t - \sigma)) B_m r(\sigma) d(\sigma) \right|,$$

where:

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

³ The function φ is taken from Definition 2.4.5 in [14].

The numerical simulations were performed with the solver setting EDD23:

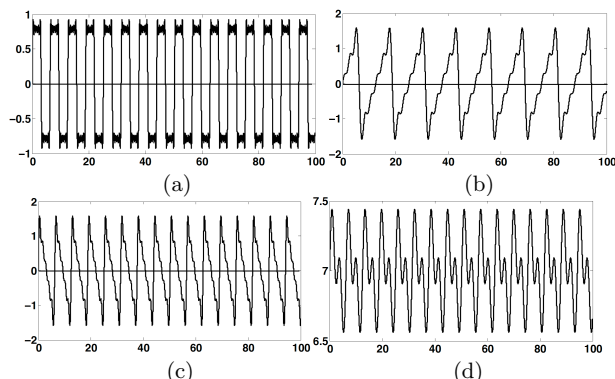


Fig. 1. Signals parameters : (a) $a_1(t)$ and $\hat{a}_2(t)$, (b) $a_2(t)$, (c) $\hat{a}_1(t)$, (d) $b(t)$.

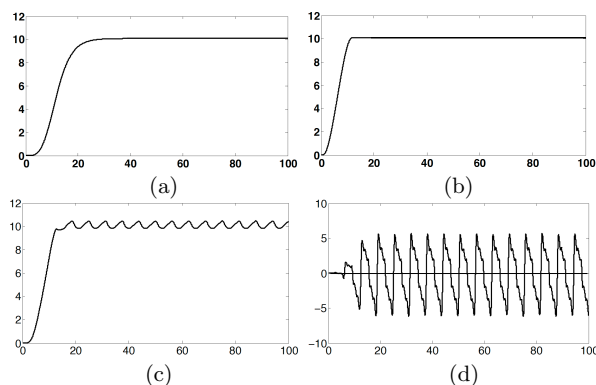


Fig. 2. Outputs and Inputs: (a) Output $y_m(t)$, (b) Signal reference $r(t)$, (c) Output $y(t)$, (d) Control law $u(t)$.

VII. CONCLUSION

In this paper, we extended the results obtained in [15] and [16] to the case of linear time varying SISO retarded system. An important key for achieving the goal of the control scheme is the bounds of the parameter $b(t)$ (see Lemma 1, Theorem 1 and Theorem 2). This fact has enabled us to use the same approach developed in [16]. In this contribution we have also followed the ideas of [3] to study stability when the retarded component in the state is considered.

The control scheme is composed by the *singularly perturbed control law* (4) and the *matching controller* (5). The aim of the *matching controller* is to assign the closed loop dynamics, and to assign a rate of exponential convergence. The aim of the *singularly perturbed control law* is to bring the system into a *singularly perturbed model*, and to close the desired dynamics by an ε order.

Parameters β and ℓ enable us to compute a bound ε^* for a sufficiently small ε such that the uniform asymptotic stability of the *singularly perturbed delay model* is guaranteed. The stability criterion is delay independent.

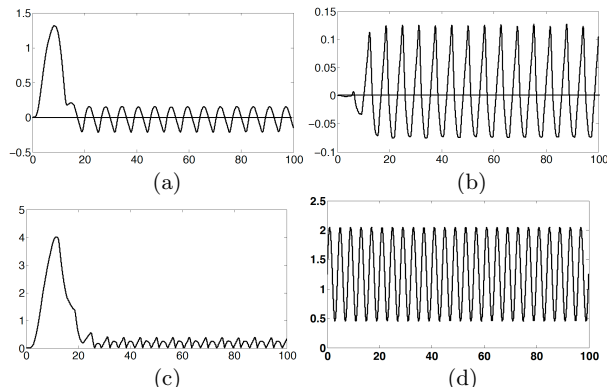


Fig. 3. Matching controller signals and error signal: (a) matching controller $x_2(t)$, (b) matching controller $x_3(t)$, (c) matching model error $e(t)$, (d) signal delay $\tau(t)$.

The knowledge of the time varying parameters is not required, only some bounds, as in [15] and [16] for the control matching problem. The stability of a singularly perturbed delayed system, with unknown parameters had analyzed as in [5], [8], [17], a matching problem solution is achieved by following a formal procedure for neglecting the perturbation parameter ε in the closed loop system.

Notice that we are not requiring neither the knowledge of the system's parameters, nor the assumptions of Hurwitz stability on the resulting slow and fast systems, as done in [5], [8], [17], [12], [13]. In our procedure, the control scheme is the one which guarantees such Hurwitz requirements. Also, as in [17], we give a computational procedure for the bound ε^* .

APPENDIX

A. PROOF OF THEOREM 1

For the case $\hat{A}(\varepsilon, t) = 0$, let us notice that we can follow the poof of Theorem 1 presented in [15] and [16]. \square

B. PROOF OF LEMMA 1

As in the case above, we can follow the proof of Lemma 1 presented in [15] and [16]. \square

C. PROOF OF THEOREM 2

Based on [5], let us propose the following Lyapunov-Krasovskii functional:

$$V(x_{sf}^T(t)) = x_{sf}^T(t)E_\varepsilon W x_{sf}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x_{sf}^T(\rho)S x_{sf}(\rho)d\rho \quad (C1)$$

where $S = S^T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{n+1,1} \\ 0_{1,n+1} & b_1 \end{bmatrix} > 0$. Let us notice that (recall (11), (29) and (23)):

$$(E_\varepsilon W)^T = E_\varepsilon W \quad \text{and} \quad 2Q(\varepsilon, t) - S > 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \quad (C2)$$

The time derivative of (C1) along the trajectories of (27) is:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} &= x_{sf}^T(t) (2WA^*(\varepsilon, t) + S) x_{sf}(t) \\ &+ 2\varepsilon x_{sf}^T(t) W \hat{A}^*(t) x_{sf}(t - \tau(t)) \\ &- \gamma(t) x_{sf}^T(t - \tau(t)) S x_{sf}(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (C3)$$

where $\gamma(t) = (1 - \frac{d\tau(t)}{dt})$. Taking into account (30), we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} &= x_{sf}^T(t) (S - 2Q(\varepsilon, t)) x_{sf}(t) \\ &+ 2\varepsilon x_{sf}^T(t) W \hat{A}^*(t) x_{sf}(t - \tau(t)) \\ &- \gamma(t) x_{sf}^T(t - \tau(t)) S x_{sf}(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (C4)$$

The above equation can be written as:

$$\frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} = -\bar{x}_{sf}^T(t) \Phi(\varepsilon, t) \bar{x}_{sf}(t) \quad (C5)$$

where $\bar{x}_{sf}(t) = \begin{bmatrix} x_{sf}^T(t) & x_{sf}^T(t - \tau(t)) \end{bmatrix}^T$ and:

$$\Phi(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} 2Q(\varepsilon, t) - S & 0_{n+2, n+2} \\ 0_{n+2, n+2} & \gamma(t)S \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} 0_{n+2, n+2} & W \hat{A}^*(t) \\ W \hat{A}^*(t) & 0_{n+2, n+2} \end{bmatrix}$$

When $\varepsilon \rightarrow 0$, we get:

$$\Phi(0, t) = \begin{bmatrix} 2Q(0, t) - S & 0_{n+2, n+2} \\ 0_{n+2, n+2} & \gamma(t)S \end{bmatrix}$$

Then **H4** implies that: $\gamma(t) = (1 - \frac{d\tau(t)}{dt}) > 0$, now from (C2) and using Schur complements, we conclude that $\Phi(0, t) > 0$. Then there exists a sufficiently small positive constant ε^* , such that $\frac{dV(x_{sf}^T(t))}{dt} < 0$ for all $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$. \square

D. PROOF OF THEOREM 3

In Theorem 1 we have proved that: $\|\phi(t, s)\| \leq K e^{-\beta(t-s)/\varepsilon}$. Then, the contribution of the input term $\varepsilon L(t) B_1 r(t)$ is of order $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Thus, the rest of the proof is a blueprint of the proof of Theorem 6.1 in [11]. \square

REFERENCES

- [1] Bellman, R. and Cooke, K. L. *Differential-Difference Equations*, Academic Press . 1963.
- [2] Desoer, C. A. and Vidyasagar, M. *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press . 1975.
- [3] Fridman, E. *Decoupling Transformation os Singularly Perturbed Systems with Small Delay and Its Application*, Z. Angew. Math. Mech, Vol. 76(2). pp. 201-204, 1996.
- [4] Fridman, E. *Stability of linear descriptor systems with delay: A Lyapunov-based approach*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 273. pp. 23-44, 2002.
- [5] Fridman, E. *Effects of Small Delay on Stability of Singularly Perturbed Systems*, Automatica, Vol. 38. pp. 897-902, 2002.
- [6] Fridman, E. *Robust Sampled Data \mathcal{H}_∞ Control of Linear Stability of Singularly Perturbed Systems*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 51, No. 3, March, pp. 470-475, 2006.
- [7] Glizer, V. Y. *Singularly Perturbed Linear Controlled Systems with Small Delay: An Overview of some Recent Results*, 47th IMACS World Congress, France, July 11-15, 2005.
- [8] Glizer, V. Y. and Fridman, E. *\mathcal{H}_∞ Control of Linear Singularly Perturbed Systems with Small State Delay*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 250, pp. 49-85, 2000.
- [9] Górecki, H., Fuksa, S., Grabowski, P. and Korytowsky, A. *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, John Wiley & Sons. 1989.

- [10] Hardy, G. H. *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 10th edition. 1975.
- [11] Kokotović, P. V., Khalil, H. K. and O'Reilly, J. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, SIAM. Philadelphia PA, 1999.
- [12] Liu, X., Shen, X. and Zhang, Y. *Exponential Stability of Singularly Perturbed Systems with Time Delay*, Applicable Analysis, Vol. 82, No. 2, pp. 117-130, 2003.
- [13] Pan, S. T., Hsiao, F. H. and Teng, C. C. *Stability Bound of Multiple Time Delay Singularly Perturbed Systems*, Electronics Letters, Vol. 32, No. 14, July, pp. 1327-1328, 1996.
- [14] Polderman, J. W. and Willems, J. C. *Introduction to Mathematical System Theory*, Text in Applied Mathematics, Springer, 1997.
- [15] Puga, S., Bonilla, M. and Malabre, M. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO System*, 49th IEEE CDC, pp 6870-6875, 2010.
- [16] S. Puga, M. Bonilla, M. Malabre and R. Lozano. (2013). Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. DOI: 10.1002/rnc.
- [17] Shao, Z. H. *Stability Bounds of Singularly Perturbed Delay Systems*, IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 151, No. 5, September, pp. 585-588, 2004.
- [18] William Luse, D. *Multivariable Singularly Stability Perturbed Feedback Systems with Time Delay*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC 32, No. 11, November, pp. 990-994, 1987.

Bibliografía

- [1] Akira Ichikawa and Hitoshi Katayama. *Linear Time Varying Systems and Sampled-data Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. No. 265. 2001.
- [2] F. Amato. *Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time Varying Parameters*, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. No. 325. 2006.
- [3] Bellman, R. and Cooke, K. L. *Differential–Difference Equations*, Academic Press. 1963.
- [4] M. Bonilla, M. Malabre and W. Chang. *Disturbance Rejection by Proportional and Derivative Output Feedback*. KYBERNETIKA. Vol. 31, No. 6, pp. 689-681, 1995.
- [5] M. Bonilla, M. Malabre and W. M. Fonseca. *On the Approximation of Non-Proper Control Laws*. international Journal of Control. Vol. 68, No. 4, pp. 777-796, 1997.
- [6] H. Bourlès and B. Marinescu. *Poles and Zeros at Infinity of Linear Time Varying Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 44, No. 10, pp. 1981-1985, 1999.
- [7] H. Bourlès and B. Marinescu. *LTV Algebraic Analytic Approach*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Vol. 410, 2011.
- [8] A. F. Buckalo. *Explicit Conditions for Controlability of Linear Systems with Time Lag*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 13, No. 2, pp. 193-195, 1968.
- [9] M. S. Chen and Y. R. Huang. *Linear Time Varying System Control Based on the Inversion Transformation*, Automatica. Vol. 33, No. 4, pp. 683-688, 1997.
- [10] E. A Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955.
- [11] R. W. Daniells. *Approximation Methods for Electronic Filter Design*, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1974.
- [12] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, 1975.
- [13] L. Dugar and E. I. Verriest. *Stability and Control of Time-delay Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. No. 228. 1998.

- [14] Fridman, E. *Decoupling Transformation os Singularly Perturbed Systems with Small Delay and Its Application*, Z. Angew. Math. Mech, Vol. 76(2). pp. 201-204, 1996.
- [15] Fridman, E. *Stability of linear descriptor systems with delay: A Lyapunov-based approach*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 273. pp. 23-44, 2002.
- [16] Fridman, E. *Effects of Small Delay on Stability of Singularly Perturbed Systems*, Automatica, Vol. 38. pp. 897-902, 2002.
- [17] Fridman, E. *Robust Sampled Data \mathcal{H}_∞ Control of Linear Stability of Singularly Perturbed Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 51, No. 3, pp. 470-475, 2006.
- [18] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company New York, N. Y., Vol I, II, 1977.
- [19] Glizer, V. Y. *Singularly Perturbed Linear Controlled Systems with Small Delay: An Overview of some Recent Results*, 47th IMACS World Congress, France, 2005.
- [20] Glizer, V. Y. and Fridman, E. *\mathcal{H}_∞ Control of Linear Singularly Perturbed Systems with Small State Delay*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 250, pp. 49-85, 2000.
- [21] Górecki, H., Fuksa, S., Grabowski, P. and Korytowsky, A. *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, John Wiley & Sons. 1989.
- [22] Hai-Lin Liu, Gong-You Tang and Shi-Yuan Han. *Optimal Control for Linear Time-Varying Systems with Multiple Time-Delays*. international Conference on Modeling, Identification and Control. Shanghai, China, pp. 387-393. 2011.
- [23] A. Halanay. *Differential Equations*, Mathematics in Sciences and Engineering, Vol. 23. Academic Press. 1966.
- [24] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, 1969.
- [25] J. K. Hale. *Introduction to Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol 99, 1993.
- [26] G. H. Hardy. *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 1975.
- [27] A. Ichikawa and H. Katayama. *Linear Time Varying Systems and Sampled-data Systems* Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, No. 265, 2001.
- [28] S. H. Javid. *Uniform Asymptotic Stability of Linear Time - Varying Singularly Perturbed Systems*, Journal of The Franklin Institute, Vol. 305, No. 1, pp. 27-37, 1978.
- [29] S. H. Javid. *Observing the Slow States of a Singularly Perturbed System*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, No. 2, pp. 277-280, 1980.

- [30] S. H. Javid. *Stabilization of Time-Varying Singularly Perturbed Systems by Observer-Based Slow-State Feedback*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-27, No. 3, pp. 702-704, 1982.
- [31] T. Kailath. *Linear Systems*, Prentice Hall, 1980.
- [32] E. W. Kamen. *Representation and Realization of Operational Differential Equations with Time Varying Coefficients*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 301, No. 6, pp. 559-571, 1976.
- [33] E. W. Kamen and K. M. Hafez. *Algebraic Theory of Linear Time Varying Systems*, SIAM Journal Control and Optimization, Vol. 17, No. 4, pp. 500-510, 1979.
- [34] E. W. Kamen. *New Results in Realization Theory for Linear Time Varying Analytic Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No. 6, pp. 866-877, 1979.
- [35] E. W. Kamen. *The Pole and Zeros of a Linear Time Varying Systems*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 98, pp. 263-289, 1988.
- [36] E. W. Kamen, P. P. Khargonekar and A. Tannenbaum. *Control of Slowly Varying Linear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, No. 12, pp. 1283-1285, 1989.
- [37] Keqin Gu, Vladimir L. Kharitonov and Jie Chen *Stability of Time-Delay Systems*. Springer, 2003.
- [38] P. V. Kokotović, H. K. Khalil and J. O'Reilly. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Academic Press, 1986.
- [39] Liu, X., Shen, X. and Zhang, Y. *Exponential Stability of Singularly Perturbed Systems with Time Delay*, Applicable Analysis, Vol. 82, No. 2, pp. 117-130, 2003.
- [40] William Luse, D. *Multivariable Singularly Stability Perturbed Feedback Systems with Time Delay*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC 32, No. 11, pp. 990-994, 1987.
- [41] M. Malek. *Observability of Linear Systems with Multiple Delays*, 21st IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 21. pp. 1273-1275, 1982.
- [42] M. Malek and M. Jamshidi. *time Delay Systems Analysis, Optimization and Applications*. North-Holland, 1987.
- [43] B. Marinescu and H. Bourlès. *The Exact Model Matching Problem for Linear Time Varying Systems: An algebraic Approach*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 48, No. 1, pp. 166-169, 2003.
- [44] B. Marinescu. *Model Matching Topics for Linear Time Varying Systems: Computation Rules in an Algebraic Approach*. Proceedings of the American Control Conference. New York City, USA, pp. 4357-4362, 2007.

- [45] B. Marinescu. *An Intrinsic Algebraic Setting for Poles and Zeros for Linear Time Varying Systems*. Systems & Control Letters. Vol. 58, pp. 248-253, 2009.
- [46] B. Marinescu. *Model Matching and Decoupling for Continuous and Discrete Time Linear Time Varying Systems*. International Journal of Control. Vol. 82, No. 6, pp. 1018-1028, 2009.
- [47] H. Mendez, M. Bonilla and M. Malabre. *Singularly Perturbed Derivative Coupling-Filter: The SISO case*, 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control. Foz do Iguassu, Brazil, 2007.
- [48] H. Mendez, M. Bonilla, M. Malabre and J. Pacheco. *Singularly Perturbed Derivative Coupling-Filter: The SISO case*, 17th World Congress, IFAC, Seoul Korea, 2008.
- [49] J. Mohammadpour and K. M. Grigoriadis. *Stability and Performance Analysis of Time Delayed Linear Parameter Varying Systems with Brief Instability*, 46th IEEE-CDC, New Orleans, LA, USA. pp. 2779-2784. 2007.
- [50] A. S. Morse. *Ring Models for Delay-Differential System*. Automatica. Vol. 12, pp. 529-531. 1976.
- [51] A. W. Olbrot. *On Controllability of Linear Systems with Time Delays in Control*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 17, No. 5, pp. 664-666, 1972.
- [52] R. E. O'Malley. *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 89. Springer. 1991.
- [53] J. O'Reilly. *Full-order Observers for Class of Singularly Perturbed Linear Time-Varying Systems*, International Journal of Control, Vol. 30, No. 5. pp. 745-756. 1979.
- [54] Pan, S. T., Hsiao, F. H. and Teng, C. C. *Stability Bound of Multiple Time Delay Singularly Perturbed Systems*, Electronics Letters, Vol. 32, No. 14, pp. 1327-1328, 1996.
- [55] J. W. Polderman and J. C. Willems. *Introduction to Mathematical System Theory*, Text in Applied Mathematics, Springer, 1997.
- [56] B. Porter. *Singular Perturbation Methods in the Design of Observers and Stabilizing Feedback Controllers for Multivariable Linear Systems*, Electronics Letters, Vol. 10, No. 23. pp. 494-495, 1974.
- [57] S. Puga, M. Bonilla and M. Malabre. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO Systems*, 49th IEEE-CDC, Atlanta, GA. pp. 6870-6875, 2010.
- [58] S. Puga, M. Bonilla and M. Malabre. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO Systems, Part II State Observation*, 50th IEEE-CDC-ECC, Orlando, FL. pp. 1258-1263, 2011.
- [59] S. Puga, M. Bonilla and M. Malabre. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying MIMO Systems*. 51th IEEE-CDC. Maui, Hawaii, pp. 5743-5748. 2012.

- [60] S. Puga, M. Bonilla, M. Malabre and R. Lozano. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO Systems*. International Journal of Robust and Nonlinear Control. DOI: 10.1002/rnc. 2013.
- [61] S. Puga, M. Bonilla, M. Malabre and M. Mondié. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying Delay SISO Systems with Unknown Parameters*. CDC 13. Florencia, Italia. 2013.
- [62] S. Puga, M. Bonilla, M. Malabre, S. Mondié and R. Lozano. *Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying Delay MIMO Systems with Unknown Parameters*. (Under Review) International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2013.
- [63] W. J. Rugh. *Linear System Theory*, Prentice Hall, 1993.
- [64] M. Sendaula. *Observability of Linear Systems with Time Variable Delays*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 19, No. 5, pp. 604-606, 1974.
- [65] L.F. Shampine, S. Thompson and J. Kierzenka. *Solving Delay Differential Equations with dde23*. <http://www.radford.edu/~thompson/webddes/tutorial.pdf>. 2002.
- [66] Shao, Z. H. *Stability Bounds of Singularly Perturbed Delay Systems*, IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 151, No. 5, pp. 585-588, 2004.
- [67] G. W. Stewart. *introduction to Matrix Computations*, Academic Press. 1973.
- [68] L. M. Silverman and H. E. Meadows. *Controlability and Time Variable Unilateral Networks*, IEEE Transactions on Circuit Theory. Vol. CT 12, No. 6, pp. 308-314, 1965.
- [69] L. M. Silverman. *Transformations of Time Variable Systems to Canonical Form*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 11, No. 2, pp. 300-303, 1966.
- [70] L. M. Silverman and H. E. Meadows. *Controlability and Observability in Time Variable Linear Systems*, Journal SIAM Control, Vol. 5, No. 1, pp. 65-73, 1967.
- [71] L. M. Silverman. *Realization of Linear Dynamical Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. AC 16, No. 6, pp. 554-567, 1971.
- [72] G.W. Stewart. *Introduction to Matrix Computations*. Academic Press. 1973.
- [73] G.W. Stewart. *Matrix Perturbation Matrix*. Academic Press. 1990.
- [74] A. N. Tikunov, A. B. Vasil'eva and A. G. Sveshnikov. *Differential Equations*, Springer, 1948.
- [75] E. I. Verriest. *Robust Stability of Time Varying Systems with Unknown Bounded Delay*. 33th IEEE-CDC, Lake Buena Vista, FL. pp. 417-422, 1994.
- [76] W. Wang, H. Zhang and L. Xie. *Optimal Filtering for Continuous-Time Linear Systems with Time-Varying Delay*. IEEE Information, Communications & Signal Processing. pp. 1-6, 2007.

- [77] L. Weiss *An Algebraic Criterion for Controlability of Linear Systems with Time Delay*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 15, No. 4, pp. 443-444, 1970.
- [78] F. Wu. *Control of Parameter Varying Linear Systems*. Dissertation of Doctor of Philosophy Degree, University of California at Berkeley, 1995.
- [79] Fen. Wu, Karolos M. and Grigoriadis. *LPV Systems with parameter-varying time delays: analysis and control*, Automatica, Vol. 37, pp. 221-229, 2001.
- [80] Min. Wu, Yong He, Jin Hua She and Guo-Ping Liu. *Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems*, Automatica, Vol. 40, pp. 1435-1439, 2004.
- [81] L. Xiaobo and Z. Kemin. *A Time Domain Approach to Robust Fault Detection of Linear Time Varying Systems*. Automatica. Vol. 45, pp. 94-102, 2009.
- [82] Yang Liu and Shouwei Zhao. *Controllability for a Class of Linear Time-Varying Impulsive Systems With Time Delay in Control Input*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 56, No. 2, pp. 395-399, 2011.