



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Zonas de Estabilidad- Inestabilidad para la Ecuación de Hill en Dimensión
Dos

Tesis que presenta

Ing. Miguel Luis Ramírez Barrios

Para Obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Control Automático

Director de la Tesis: Dr. Joaquín Collado Moctezuma

Ciudad de México, D.F.

Diciembre 2012

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	3
2.1. Resonancia	3
2.2. Resonancia Paramétrica	5
2.2.1. Péndulo con vibración vertical del soporte (Kapitza)	6
2.2.2. Un niño en un columpio	8
2.3. Sistemas lineales	12
2.3.1. Teoría de Floquet	13
2.4. Ecuación de Hill	16
2.4.1. Ecuación de Hill para $x \in \mathbb{R}$	18
3. Ecuación de Hill con $x \in \mathbb{R}^2$	23
3.1. Valores característicos de la matriz de monodromía	23
3.2. Sistemas Hamiltoniano lineales	24
3.2.1. Matrices Simpléticas	27
3.3. Transformación bilineal	29
4. Lenguas de Arnold para Dimensión Dos	31
4.1. Soluciones Numéricas	31
4.2. Descripción de la graficas	32
4.3. Control para la estabilización de la ecuación de Hill	35
5. Ejemplo de Aplicación	39
6. Conclusiones y Trabajo futuro	45
7. Apéndices	47
7.1. A Pruebas	47
7.1.1. Sistemas lineales	47

7.2.	B Programación en Paralelo	48
7.2.1.	Programación con la instrucción parfor	48
7.2.2.	Programa usando 4 procesadores	49
7.3.	C Programación en una GPU	52
7.3.1.	Programa con usando la GPU	54

Índice de figuras

2.1.	Sistema Masa resorte	3
2.2.	Respuesta del sistema en resonancia	4
2.3.	Respuesta en resonancia con fricción	5
2.4.	Péndulo con vibración vertical	6
2.5.	"Botafumairo"	8
2.6.	Un niño en un columpio	9
2.7.	Péndulo con el centro de masa variable	9
2.8.	Simulación de la ecuación de Mathieu.	10
2.9.	Lenguas de Arnold para la ecuación de Meissner	20
2.10.	Lenguas de Arnold para la ecuación de Mathieu	21
3.1.	Valores característicos M	24
3.2.	Valores característicos de JH	26
4.1.	Lenguas de Arnold para el sistema (4.1)	33
4.2.	Lenguas de Arnold para el sistema (4.4)	34
4.3.	Lenguas de Arnold del sistema (4.6)	35
4.4.	Lenguas de Arnold con la ley de control (4.7)	36
4.5.	Lenguas de Arnold con la ley de control 4.8	36
5.1.	Sistema de masas con resortes	39
5.2.	Lenguas de Arnold para el sistema (5.1)	40
5.3.	Lenguas de Arnold para el sistema (5.1) con la ley de control (5.3) y (5.4)	41
5.4.	Lenguas de Arnold para el sistema (5.1)	42
5.5.	Lenguas de Arnold para el sistema (5.1) con la ley de control (5.3) y (5.6)	43
5.6.	Respuesta del sistema (5.1) con (5.5)	44
5.7.	Respuesta del sistema (5.1) con (5.5) con la ley de control (5.3) y (5.6)	44

7.1. Esquema de la programación en paralelo, con un cluster o varios CPUs en red	49
7.2. Esquema de la programación con parfor	50
7.3. Imagen de la GPU , Tesla 2075	53
7.4. Esquema de la GPU	53

Capítulo 1

Introducción

En muchos sistemas de ingeniería, eléctricos, mecánicos y químicos, es de gran interés analizar el comportamiento de los sistemas que oscilan, en particular cuando son excitados por alguna señal periódica, pues entonces se puede presentar el fenómeno de la resonancia, el cual hace crecer la amplitud de la respuesta del sistema y que generalmente es dañino para el funcionamiento de estos sistemas, es decir el sistema se vuelve inestable.

Por otra parte hay sistemas que oscilan y su respuesta es inestable sin que ninguna señal externa excite el sistema, basta con que alguno de sus parámetros varíe de forma periódica para provocar inestabilidad en el sistema, a este fenómeno se le conoce como resonancia paramétrica.

En el trabajo presente se presentan dos ejemplos donde se aprovecha de forma positiva la resonancia paramétrica, uno de ellos es un niño meciéndose en un columpio el cual a través de mover su centro de masa logra columpiarse sin la acción de ninguna fuerza externa. Otro de los ejemplos es del péndulo con vibración vertical, el cual modela el espectáculo turístico del botafumeiro o incensario que se usa para poder hacer llegar el humo de incienso a toda la iglesia, estos dos ejemplos se pueden describir por la ecuación de Mathieu $\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos(t))x = 0$ $x \in \mathbb{R}$, la cual es un caso particular de la ecuación de Hill. Pero en la ingeniería existen distintas aplicaciones de analizar el fenómeno de la resonancia paramétrica, la cual de manera general se quiere evitar, algunos ejemplos de control de estos sistemas se han publicado recientemente en [21], donde se utiliza la excitación paramétrica para describir matemáticamente y controlar algunos sistemas dinámicos. Por ejemplo la estabilización de las oscilaciones debidas a las olas del mar en un barco las cuales pueden provocar que el barco se voltee en poco tiempo, debido a que el barco entra en resonancia paramétrica. En otra publicación de [21] se observa la estabilización de un péndulo sobre una superficie con movimiento (un

carro), el péndulo está acoplado a la superficie por un resorte y un amortiguador, por lo que vibra verticalmente, lo que produce resonancia paramétrica. En el último capítulo del este trabajo se presenta un ejemplo para la ecuación de Hill cuando $x \in \mathbb{R}^2$, que es un sistema de dos masas y tres resortes, de los cuales dos resortes varían su constante de elasticidad de forma periódica.

En el capítulo 2 de este trabajo se hace un repaso de la estabilidad de estos sistemas los cuales son descritos de manera general por la ecuación de Hill $\ddot{x} + p(t)x = 0$ $p(t) = p(t + T)$, la cual ha sido estudiada a profundidad en distintos textos [11]. En el capítulo 3 se hace este análisis para la ecuación de Hill cuando $x \in \mathbb{R}^2$ y se mencionan algunas propiedades de esta ecuación, entre ellas, que para algunos casos es un sistema Hamiltoniano Lineal. Finalmente en el capítulo 4 se elabora una descripción de las lenguas de Arnold para la ecuación de Mathieu para $x \in \mathbb{R}^2$, estas gráficas se elaboran, mediante Parallel Computing en una GPU, lo que ayuda a reducir el tiempo de cómputo significativamente. Dentro de las técnicas para graficar las lenguas de Arnold para la ecuación de Hill con $x \in \mathbb{R}^2$, se puede usar la técnica de discretizar la ecuación como se muestra en [9]. Otra manera de graficar las lenguas de Arnold es con los llamados "Determinantes Infinitos" tal como realiza un ejemplo Hansen en [10]. En el trabajo se usa la integración numérica de cada punto a graficar para construir la matriz de monodromía para averiguar sobre la estabilidad del sistema, y se consiguió reducir el tiempo de cómputo de 24 horas aproximadamente a 12 minutos, lo cual es un resultado satisfactorio.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Resonancia

La resonancia es un fenómeno físico que se presenta, en los sistemas que oscilan, la cual en general hace que la amplitud de las oscilaciones aumente rápidamente lo que puede hacer que el sistema sea inestable en pocos segundos. Para analizar este fenómeno veamos un sistema de masa m con un resorte con una constante de elasticidad k como se muestra en la Figura: 2.1

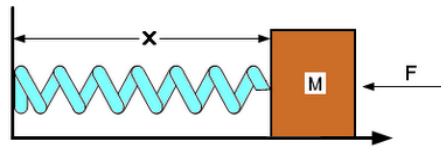


Figura 2.1: Sistema Masa resorte

La dinámica del sistema sin fricción esta dada por

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t) \quad (2.1)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Cuando $F(t) = B \cos(\omega t)$, la solución para las condiciones iniciales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ es

$$x = \frac{B}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)) \quad (2.2)$$

El sistema bajo la acción de una fuerza externa que oscila periódicamente experimenta un movimiento el cual depende de las combinación de las 2 oscilaciones la frecuencia natural ω_0 y de la frecuencia de la fuerza externa al sistema ω . En la ecuación (2.2)

podemos ver que cuando $\omega_0 = \omega$ la ecuación se indetermina, y no es valida, a este fenómeno se le conoce como resonancia. Es decir un sistema experimenta el fenómeno de resonancia cuando la frecuencia natural y la frecuencia de la fuerza externa son cercanas.

Para tener una ecuación que describa que pasa cuando el sistema entra en resonancia, resolvemos la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{B}{m} \cos(\omega_0 t) \quad (2.3)$$

Entonces la solución de (2.3) es:

$$x = \frac{B}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

Entonces observamos una característica notable de que cuando un sistema entra en resonancia es decir $\omega_0 = \omega$ la amplitud de sus oscilaciones crece de forma lineal con respecto al tiempo. Y por tanto el sistema se hace inestable.

Si damos los siguientes valores numéricos al sistema (2.1) $B = 6N$; $m = 1,5 \text{ kg}$; $k = 0,9N/m$; entonces $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,7760 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y simulamos cuando $\omega = \omega_0$ podemos ver en la Figura 2.2 como la respuesta crece linealmente conforme crece el tiempo

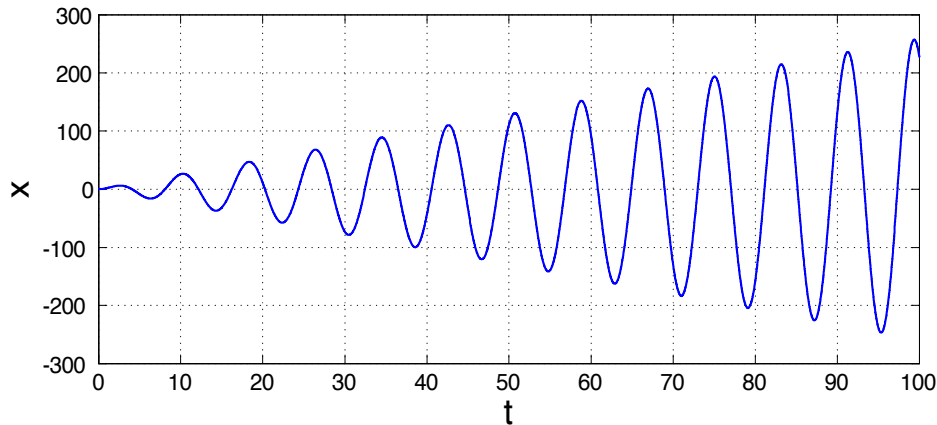


Figura 2.2: Respuesta del sistema en resonancia

Si el sistema cuenta con fricción, entonces la dinámica esta dada por

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

donde λ es el coeficiente de fricción, si realizamos la simulación pasada con el sistema en resonancia agregando el termino $\lambda \dot{x}$ a la dinámica del sistema, observamos en la Figura

2.3 que la respuesta del sistema crece pero no hasta infinito como en el caso cuando el sistema no tiene fricción, entonces podemos decir que la fricción puede hacer que la respuesta de un sistema cuando éste está en resonancia, no tienda a infinito, es decir la respuesta se encuentra acotada. Esta es una diferencia importante con la resonancia paramétrica la cual se presenta a continuación.

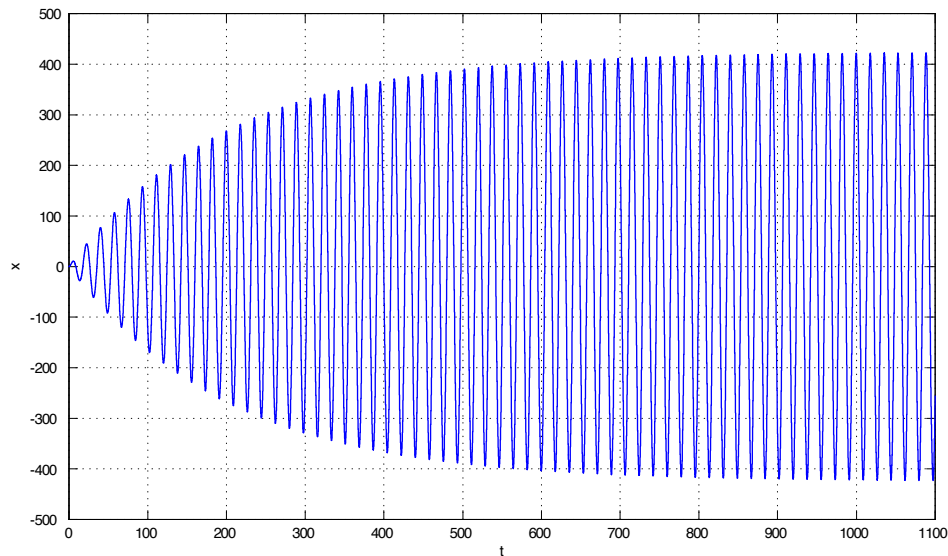


Figura 2.3: Respuesta en resonancia con fricción

2.2. Resonancia Paramétrica

La resonancia paramétrica a diferencia de la resonancia, se presenta a partir de la variación de uno de parámetros del sistema el cual varía de forma periódica, es decir no se debe a las oscilaciones de una fuerza externa si no a la dinámica del sistema mismo. La siguiente ecuación es la forma general de representar este fenómeno de resonancia paramétrica, se le conoce como la ecuación de Hill, en memoria al matemático George William Hill, el cual trataba de demostrar la estabilidad en la rotaciones de la luna al rededor de la tierra.

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n \quad p(t+T) = p(t)$$

Para describir que es la resonancia paramétrica, y sus características describiremos el siguiente sistema, el cual es un ejemplo de este fenómeno.

2.2.1. Péndulo con vibración vertical del soporte (Kapitza)

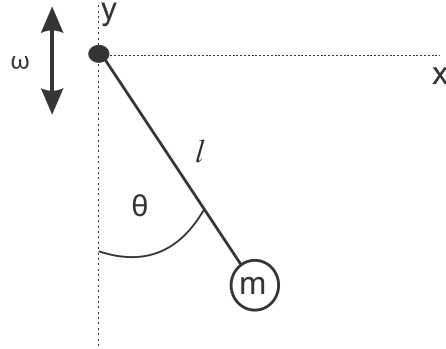


Figura 2.4: Péndulo con vibración vertical

Ahora para describir el sistema suponemos que la vibración del punto de soporte del péndulo, es de la forma $a \cos \omega t$. Entonces de la geometría del sistema se obtiene que:

$$\begin{aligned}x &= l \sin(\theta) \\y &= l \cos(\theta) + a \cos \omega t\end{aligned}$$

La energía cinética del sistema esta dada por:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Donde

$$\dot{y} = -l \sin(\theta)\dot{\theta} - a\omega \sin \omega t \quad (2.4)$$

$$\dot{x} = l \cos(\theta)\dot{\theta} \quad (2.5)$$

y la energía potencial es:

$$U = mgl(1 - \cos(\theta))$$

por lo que la función de Lagrange del sistema esta dado por:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgl(1 - \cos(\theta)) \quad (2.6)$$

y para obtener la dinámica del sistema aplicamos la formula de Euler-Lagrange [7]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_{no-pot}$$

Donde $Q_{no-pot} = 0$ para nuestro caso pues el sistema no tiene una fuerza externa ni presenta fricción ni ninguna fuerza no potencial, por lo que sustituyendo (2.4) en (2.6) y aplicando la formula:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \ddot{\theta} + mla\omega^2 \sin \theta \cos \omega t + mgl \sin \theta = 0$$

dividiendo entre ml^2 y si definimos $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ entonces obtenemos

$$\ddot{\theta} + \left(\omega_0^2 + \frac{a\omega^2}{l} \cos \omega t \right) \sin \theta = 0 \quad (2.7)$$

Ahora podemos ver que es una ecuación no lineal de segundo orden si linealizamos al rededor de $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$, [16] obtenemos

$$\ddot{\theta} + \left(\omega_0^2 + \frac{a\omega^2}{l} \cos \omega t \right) \theta = 0 \quad (2.8)$$

podemos describir (2.8) como

$$\ddot{\theta} + (\alpha + \beta \cos \omega t) \theta = 0 \quad (2.9)$$

que se conoce como la ecuación de Mathieu, esta ecuación es un caso particular de la ecuación de Hill, $\ddot{x} + p(t)x = 0$, con $p(t) = \cos(\omega t)$. En la parte final de este capítulo analizaremos la estabilidad de esta ecuación y podremos concluir las diferencias con la resonancia normal.

Un ejemplo en aplicación de este modelo de un péndulo con vibración vertical, es del de una grúa sobre un barco, si consideramos que las olas del mar varían de forma periódica, y que el modelo de la grúa es un péndulo, cuando el oleaje crece provoca que el barco se mueva verticalmente, entonces es imposible operar la grua [22], pues las oscilaciones del péndulo se vuelven inestables, por lo que en este caso la resonancia paramétrica es un problema.

Otro ejemplo es cuando algunos turistas visitan año con año la ciudad de Santiago de Compostela en el estado Español, donde utilizan la resonancia paramétrica para dar un espectáculo, se trata del llamado "Botafumeiro" nombre en portugués, de un incensario, con el cual echan incienso en toda la iglesia, es un péndulo de 21 metros de longitud y pesa 53kg [18] como se puede ver en la Figura 2.5. Las fotos muestran a algunos sacerdotes los cuales jalan de una cuerda, provocando elevar el péndulo verticalmente de acuerdo al diagrama de la Figura 2.4, aquí existe una diferencia pues la frecuencia con la cual hacen vibrar el soporte del péndulo no siempre es la misma, es decir cambia conforme el período de oscilación se va haciendo más grande. Este dispositivo existe desde 1600, y es muy impresionante observar que con solo 2 o 3 tirones de la cuerda por



Figura 2.5: "Botafumairo"

parte de los sacerdotes, la amplitud de la oscilación crece significativamente, después de unos pocos segundos, aquí se puede observar una diferencia de la resonancia y la resonancia paramétrica, si el sistema es inestable la amplitud de las oscilaciones crece exponencialmente y no de forma lineal como en la resonancia. Por lo que este espectáculo es un buen ejemplo para apreciar esta propiedad.

2.2.2. Un niño en un columpio

Un ejemplo de la vida cotidiana en donde se presenta la resonancia paramétrica, es un niño en un columpio, si recordamos cuando nos columpiamos de niños, sin que nadie nos empuje, sin que ninguna fuerza externa intervenga, podemos columpiarnos, tan solo moviendo nuestro cuerpo arriba del columpio, concretamente moviendo el centro de masa, si observamos la Figura 2.6 vemos a un niño meciéndose en un columpio, cuando esta en el punto 'a' se encuentra de pie, y al pasar por el punto 'b' el niño se agacha o se pone en cuclillas, y cuando llega al punto 'c' nuevamente se pone de pie. Cuando nos mesemos de un columpio empezamos en el punto 'b' en reposo y después de mecernos 2 o 3 veces alcanzamos a columpiarnos con amplitudes grandes, nuevamente observamos algo parecido al "botafumairo", que a través de la excitación de algún parámetro del sistema de forma periódica, la inestabilidad provoca que la respuesta crezca de forma exponencial.

Ahora analizaremos el modelo del niño en el columpio, proponiendo un péndulo con una longitud variable, a diferencia del péndulo con vibración vertical ahora lo que va

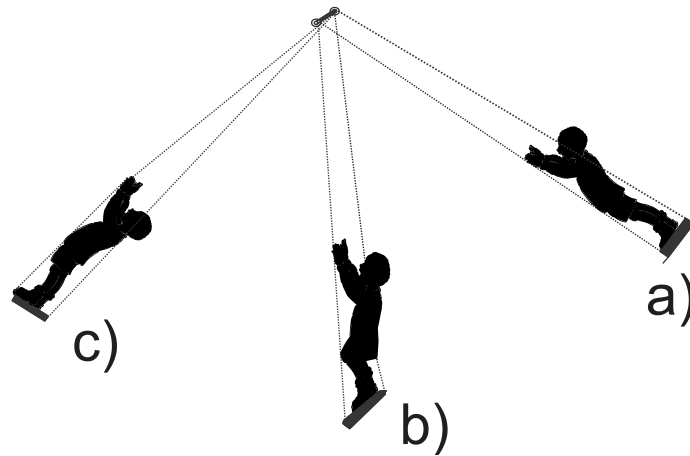


Figura 2.6: Un niño en un columpio

variar de forma periódica es la longitud del péndulo como se observa en la siguiente Figura 2.7.

En la Figura 2.7 tenemos el diagrama de un péndulo el cual, se describe por:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad \theta = \theta(t) \quad (2.10)$$

Ahora si se mueve el centro de gravedad significa que la longitud del péndulo oscila, si se supone una oscilación senoidal al rededor de una longitud l_0

$$l(t) = l_0 [1 - \varepsilon \cos(\omega t)]$$

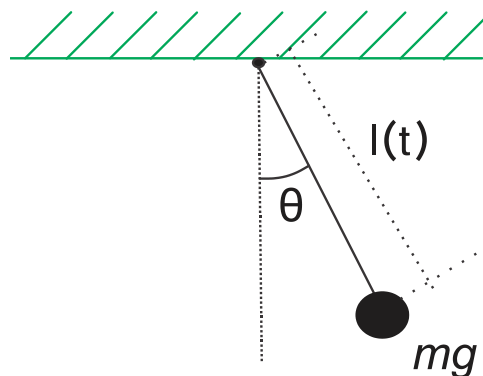


Figura 2.7: Péndulo con el centro de masa variable

Para un $\varepsilon > 0$ pequeña, ahora sustituyendo en 2.10 y realizando la expansión de Taylor para ε encontramos, como lo propone [5] entonces:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \sin(\theta) = 0$$

Donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$. Si reescalamos el tiempo $\tilde{t} = \omega t$ podemos encontrar que

$$\ddot{\theta} + [\alpha + \beta \cos(t)] \sin(\theta) = 0$$

con $\alpha = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ y $\beta = \varepsilon \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Nuevamente si se linealiza obtenemos la ecuación de Mathieu (2.9). Realizando una simulación del niño en el columpio tomando como modelo la ecuación de Mathieu, con una longitud de la cuerda $l_0 = 3m$, $g = 9,81m/s^2$, y si el niño se agacha y se pone de pie cada 6 segundos entonces $T = 6 \Rightarrow \omega = 2\pi/T$, $\alpha = 2,9819$, $\beta = 2,9819$

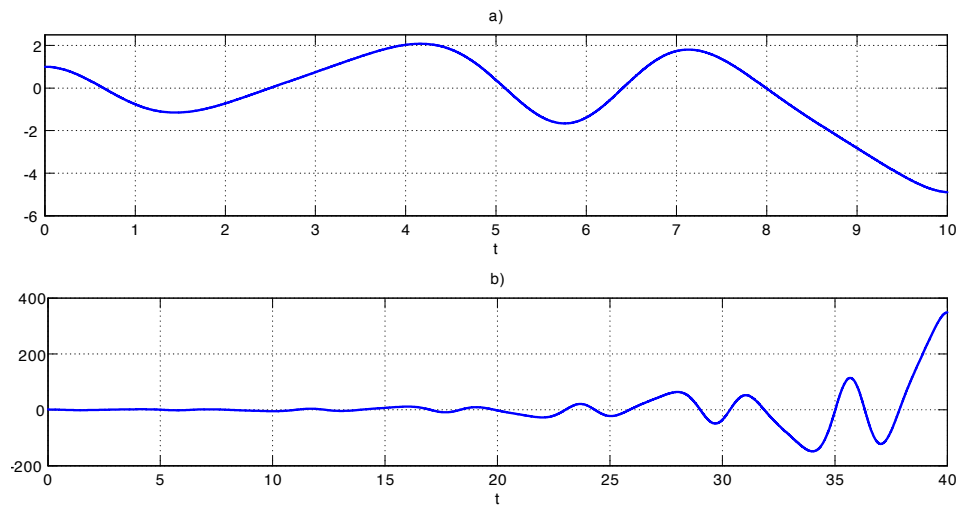


Figura 2.8: Simulación de la ecuación de Mathieu.

Como se observa en la Figura 2.8 a) después de 4 segundos la amplitud aumenta 2 veces, por lo que vemos que con una sola vez que el niño cambie su centro de masa es suficiente para que el columpio aumente la amplitud de su oscilación. Esto se debe al fenómeno de la resonancia paramétrica, más adelante veremos las condiciones de estabilidad para estos sistemas. En el caso de la figura 2.8 b) dejamos correr la simulación y podemos observar que la amplitud de la respuesta del sistema crece al infinito, ahora esto nos indica que el sistema al mover el niño su centro de masa se vuelve inestable y a diferencia de la resonancia, en la resonancia paramétrica vemos que la respuesta cuando

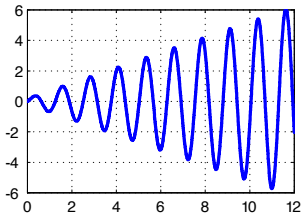
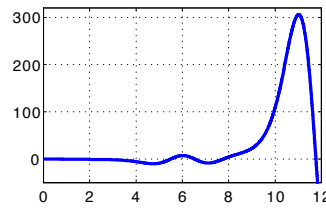
el sistema es inestable crece de forma exponencial y no de forma lineal con respecto al tiempo.

La resonancia se presenta en un sistema

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

cuando una fuerza externa al sistema oscila y esta oscilación tiene una frecuencia igual a la frecuencia natural del sistema, es provocada por la respuesta forzada del sistema y solo se presenta en un solo punto en $\omega = \omega_0$, y cuando se presentan la respuesta crecen de forma lineal con respecto al tiempo, si existe fricción en el sistema la respuesta crece pero ya no crece hasta infinito, converge a algún punto por lo que, con cierta fricción se puede cancelar la inestabilidad.

En el caso de la resonancia paramétrica, esta no depende de una fuerza externa, si no del la excitación de uno de los parámetros, la inestabilidad se presenta por intervalos no en un solo punto a diferencia de la resonancia, cuando es inestable la respuesta del sistema crece exponencialmente. Y finalmente la última diferencia es que si existe fricción no se puede presentarse el crecimiento exponencial.

RESONANCIA CLÁSICA	RESONANCIA PARAMÉTRICA
$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t$	$\ddot{x} + k\dot{x} + (\alpha + \beta \cos t) x = 0$
La inestabilidad se presenta en un único punto	Existen Intervalos de Inestabilidad y Estabilidad
$\omega = \omega_0$	$\alpha = \frac{\omega_0^2}{4}$; para $\beta > 0$
	
La respuesta en resonancia crece de forma lineal con respecto al tiempo	La respuesta inestable crece exponencialmente
Si $k > 0$ la respuesta es acotada	Si $k > 0$ la respuesta permanece la respuesta inestable

2.3. Sistemas lineales

Para poder determinar la estabilidad de los sistemas con los cuales estamos trabajando, que están descritos por la ecuación de Hill, es necesario nombrar algunas propiedades de los sistemas lineales.

Sea el sistema lineal variante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = A(t)x \quad A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$. Como se señala en [6], no es posible obtener una solución analítica para esta ecuación de manera general, por lo que es necesario usar otro enfoque para analizar el sistema (2.11)

Entonces existen n soluciones linealmente independientes $v_i(t) \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación (2.11), definimos a $N(t) = [v_1, v_2 \dots v_n]$ como una matriz fundamental, al ser los $v_i(t)$ linealmente independientes se observa que $N^{-1}(t)$ siempre existe, además se satisface que:

$$\dot{N}(t) = A(t)N(t). \quad (2.12)$$

Definición 2.1 *La matriz de transición de estados del sistema (2.11) es:*

$$\Phi(t, t_0) = N(t)N^{-1}(t_0)$$

Se puede demostrar la que $\Phi(t, t_0)$ es única, y la solución del sistema (2.11) condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ es: $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$. Algunas de las propiedades de la matriz de transición de estados [6] son:

- i) $\Phi(t, t) = I$
- ii) $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$
- iii) $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = H(t)\Phi(t, t_0)$
- iv) $\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t, \tau) = -\Phi(t, \tau)H(\tau)$
- v) $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \quad \forall t_2, t_1, t_0$

El siguiente teorema [15] es de gran utilidad para nuestro análisis

Teorema 2.1 *[Jacobi-Liouville]. Sea $N(t)$ una matriz fundamental de (2.11) entonces*

$$\det(N(t)) = \det(N(t_0))e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(\tau))d\tau}$$

donde $\text{tr}(A)$ es la traza de la matriz cuadrada A

Ahora analizaremos el sistema (2.11) pero cuando $A(t+T) = A(t)$ es decir el sistema varía con el tiempo de forma periódica, y T es el periodo fundamental del sistema.

$$\dot{x}(t) = A(t)x \quad A(t+T) = A(t) \quad (2.13)$$

Lo que primero tenemos que mencionar es que el sistema no tiene necesariamente soluciones periódicas [4] un ejemplo de esto es:

$$\dot{y}(t) = (\rho + \cos t)y \quad y(0) = 1$$

la solución es

$$y(t) = y(0)e^{\rho t + \sin t}$$

y solamente es periódica $\iff \rho = 0$

2.3.1. Teoría de Floquet

Ahora presentamos una herramienta fundamental en el análisis de estabilidad para los sistemas periódicos lineales.

Definición 2.2 Sea $\Phi(t, t_0)$ la matriz de transición de estados, de (2.13), entonces decimos que $e^{RT} = \Phi(T, 0)$ es la matriz de monodromía.

Teorema 2.2 [Factorización de Floquet] Sea el sistema 2.13, entonces la matriz de transición de estados asociada al sistema se puede factorizar como:

$$\Phi(t, t_0) = P^{-1}(t)e^{R(t-t_0)}P(t_0)$$

donde

$$P^{-1}(t) = \Phi(t, 0)e^{-Rt} \quad (2.14)$$

además

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t + T)$$

Corolario 1 Si $t_0 = 0$ entonces:

$$\Phi(t, 0) = P^{-1}(t)e^{Rt}$$

Al definir $P^{-1}(t)$ de esta manera observamos que es una función T periódica. Una de las cosas que podemos concluir de este teorema es que podemos realizar una transformación de un sistema lineal con coeficientes periódicos, a un sistema lineal invariante en el tiempo.

Sea el sistema (2.13) definimos el cambio de coordenadas de la siguiente manera

$$z(t) = P(t)x(t)$$

de 2.14 sabemos que $P(t) = e^{Rt}\Phi(0, t)$ entonces

$$\begin{aligned}
 \dot{z}(t) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) = \left[\dot{P}(t)P^{-1}(t) + P(t)H(t)P^{-1}(t) \right] z(t) \\
 &= \left\{ \left[Re^{Rt}\Phi(0, t) + e^{Rt} \frac{d}{dt} \Phi(0, t) \right] P^{-1}(t) + P(t)H(t)P^{-1}(t) \right\} z(t) \\
 &= \left\{ [Re^{Rt}\Phi(0, t) - e^{Rt}\Phi(0, t)H(t)] P^{-1}(t) + P(t)H(t)P^{-1}(t) \right\} z(t) \\
 &= \left\{ [Re^{Rt}\Phi(0, t) - e^{Rt}\Phi(0, t)H(t)] \Phi(t, 0)e^{-Rt} + e^{Rt}\Phi(0, t)H(t)\Phi(t, 0)e^{-Rt} \right\} z(t) \\
 &= \left\{ Re^{Rt}\Phi(0, t)\Phi(t, 0)e^{-Rt} \right\} z(t) = Rz(t)
 \end{aligned}$$

$$\dot{z}(t) = Rz(t) \quad (2.15)$$

Como se observa bajo este cambio de variable el sistema lo podemos ver como un sistema invariante en el tiempo, pero para conocer la matriz R necesitamos calcular la matriz de monodromía, lo que implica que es necesario conocer las soluciones del sistema o calcularlas numéricamente.

En general para los sistemas lineales variantes en el tiempo es difícil conocer las condiciones de estabilidad, pues difieren significativamente de los sistemas lineales invariantes. Para los sistemas periódicos podemos obtener algunas propiedades, las cuales permiten determinar criterios de la estabilidad de estos sistemas.

Sea el sistema (2.13) la solución del sistema con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ es

$$x(t) = \Phi(t, 0)x_0 \quad t \geq 0$$

y siempre podemos expresar a $t = kT + \tau$ para $k \in \mathbb{N}$ y $\tau \in [0, T)$ lo podemos apreciar mejor en el siguiente diagrama



Usando las propiedades de la matriz de transición de estado, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \Phi(t, 0)x_0 \\
 &= \Phi(kT + \tau, 0)x_0 \\
 &= \Phi(kT + \tau, kT)\Phi(kT, (k-1)T)\Phi((k-1)T, (k-2)T)\dots\Phi(T, 0)x_0 \\
 &= \Phi(\tau, 0)\underbrace{\Phi(T, 0)\Phi(T, 0)\Phi(T, 0)\Phi(T, 0)\Phi(T, 0)\Phi(T, 0)\dots\Phi(T, 0)}_{k\text{-veces}}x_0 \\
 &= x(t) = \underbrace{\Phi(\tau, 0)}_{\text{Acotado}} \underbrace{M^k}_{\text{Acotado}} x_0 = \Phi(\tau, 0) [e^{RT}]^k x_0
 \end{aligned}$$

El termino $\Phi(\tau, 0)$ no puede ser inestable pues τ es un numero finito, y los sistemas lineales, si $x(t) \rightarrow \infty$ es para $t \rightarrow \infty$ (Ver apéndice A), las condiciones iniciales x_0 esta acotadas, por lo que el único termino que podria causar la inestabilidad del sistema es la matriz de monodromía $M^k = \Phi^k(T, 0)$

Entonces como k es un número entero positivo, cualquier valor característico M que sea mayor a 1 hace que el sistema sea inestable.

Teorema 2.3 [Lyapunov-Floquet] Sea M la matriz de monodromía del sistema (2.13) con $\sigma(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\sigma(R) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ entonces:

i) El sistema es Asintóticamente Estable

$$\Leftrightarrow \sigma(M) \subset \overset{\circ}{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

ii) El sistema es Estable si

$$\Leftrightarrow \sigma(M) \subset \bar{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

y si $|\lambda_i| = 1$ son raices simples del polinomio mínimo de M

iii) El sistema es Inestable

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_i \in \sigma(M) : |\lambda_i| > 1$$

o

$$\sigma(M) \subset \bar{D}_1 \& \exists |\lambda_i| = 1 \text{ que es una raíz multiple del polinomio mínimo}$$

Entonces como podemos ver del teorema la estabilidad del los sistemas periódicos depende los valores característicos de la matriz de monodromía, a los cuales se les llama los multiplicadores característicos. Pero también observamos que a su vez dependen de $\sigma(R) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i\}$, a estos valores característicos de R se les conoce como los exponentes característicos. Lo cual es congruente con la transformación (2.15).

2.4. Ecuación de Hill

Como mencionamos la ecuación de Hill, es la forma más general de expresar el fenómeno de la resonancia paramétrica, a continuación hablaremos de algunas propiedades y condiciones de estabilidad para la ecuación de Hill, entonces sea

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n \quad p(t+T) = p(t) \quad (2.16)$$

nuestro sistema el cual observamos que no cuenta con el término \dot{x} , entonces la pregunta ¿por qué solo analizaremos para este caso? el siguiente teorema nos muestra que cualquier ecuación diferencial de 2do orden se puede transformar a la forma de la ecuación de Hill.

Teorema 2.4 *Si tenemos una ecuación diferencial de la forma*

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a(t)\frac{dz}{dt} + r(t)z = 0 \quad (2.17)$$

siempre se puede transformar, a la forma de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + q(t)y = 0 \quad (2.18)$$

haciendo el siguiente cambio de variable [11]:

$$y = (e^{\frac{1}{2}A(t)})z \quad (2.19)$$

$$a(t) = \frac{dA(t)}{dt} \quad (2.20)$$

$$q(t) = -\frac{1}{2}\frac{da(t)}{dt} - \frac{1}{4}a(t)^2 + r(t) \quad (2.21)$$

Prueba 2.1 *De (2.19) observamos que:*

$$z = e^{-\frac{1}{2}A(t)}y$$

Entonces desarrollando (2.17):

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} + a(t)\frac{dz}{dt} + r(t)z &= 0 \\ &= \frac{d}{dt} \left(\underbrace{-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}A(t)}_{a(t)} e^{-\frac{1}{2}A(t)}y + e^{-\frac{1}{2}A(t)}\frac{dy}{dt} \right) + \\ &+ a(t) \left(\underbrace{-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}A(t)}_{a(t)} e^{-\frac{1}{2}A(t)}y + e^{-\frac{1}{2}A(t)}\frac{dy}{dt} \right) + r(t)e^{-\frac{1}{2}A(t)}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t) e^{-\frac{1}{2}A(t)} y + \frac{1}{4} a(t)^2 e^{-\frac{1}{2}A(t)} y - \frac{1}{2} a(t) e^{-\frac{1}{2}A(t)} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{2} a(t) e^{-\frac{1}{2}A(t)} \frac{dy}{dt} + e^{-\frac{1}{2}A(t)} \frac{d^2 y}{dt^2} - \\
&\quad - \frac{1}{2} a(t)^2 e^{-\frac{1}{2}A(t)} y + a(t) e^{-\frac{1}{2}A(t)} \frac{dy}{dt} + r(t) e^{-\frac{1}{2}A(t)}
\end{aligned}$$

agrupando terminos

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{1}{2}A(t)} \frac{d^2 y}{dt^2} + e^{-\frac{1}{2}A(t)} \left[-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t) + \frac{1}{4} a(t)^2 - \frac{1}{2} a(t)^2 + r(t) \right] y + \\
&\quad + e^{-\frac{1}{2}A(t)} \frac{dy}{dt} \left[-\frac{1}{2} a(t) - \frac{1}{2} a(t) + a(t) \right] \\
&= e^{-\frac{1}{2}A(t)} \frac{d^2 y}{dt^2} + e^{-\frac{1}{2}A(t)} \left[-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t) - \frac{1}{4} a(t)^2 + r(t) \right] y = 0
\end{aligned}$$

multiplicando por $e^{-\frac{1}{2}A(t)}$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{dt^2} + \left[\underbrace{-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t) - \frac{1}{4} a(t)^2 + r(t)}_{q(t)} \right] y &= 0 \\
\frac{d^2 y}{dt^2} + q(t)y &= 0
\end{aligned}$$

■

Entonces es por eso que vale la pena solo analizar el caso de la ecuación (2.16). Por otra parte para poder utilizar el *Teorema 1.3* es necesario colocar el sistema como en (2.13) ($\dot{y} = A(t)y$ con $A(t) = A(t+T)$), entonces sabemos que cualquier ecuación lineal de orden n la podemos expresar como n ecuaciones diferenciales de primer orden, si realizamos el siguiente cambio de variable $y_1 = x$; $\dot{y}_1 = y_2$; $\dot{y}_2 = \ddot{x}$, entonces:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ P(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.22)$$

2.4.1. Ecuación de Hill para $x \in \mathbb{R}$

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces de (2.22) tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Sea $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la matriz de monodromía de (2.23) con $M(t_0) = I_2$, $t_0 = 0$, entonces su polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_2 - M) = \lambda^2 + \text{trace}(M)\lambda + \det(M)$$

Pero por el teorema de Jacobi-Liouville sabemos que $\det(M) = 1$, pues $\det M(t) = \det(M(t_0))e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(\tau))d\tau}$, $\text{tr}(A) = 0$.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{trace}(M)\lambda + 1 \quad (2.25)$$

Por el teorema de Lyapunov-Floquet la estabilidad esta determinada por los valores característicos de M , entonces resolviendo (2.25) tenemos que la ecuación (2.23) es:

$$\begin{aligned} \text{Estable } |\lambda| &< 1 \Leftrightarrow \text{trace}(M) < 2 \\ \text{Inestable } |\lambda| &> 1 \Leftrightarrow \text{trace}(M) > 2 \end{aligned}$$

Como se puede ver es necesario conocer la matriz de monodromía para poder concluir acerca de la estabilidad de los sistemas periódicos, lo que implica necesariamente conocer o calcular numéricamente las solución del sistema.

Ecuación de Meissner

Un caso particular de la ecuación de Hill (2.16) es la ecuación de meissner (2.26), que es un caso donde si podemos calcular una solución analítica.

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta p(t))x = 0 \quad \text{con } p(t+T) = p(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq T/2 \\ -1 & T/2 < t \leq T \end{cases} \quad (2.26)$$

Para calcular la solución del sistema procedemos a escribirlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\alpha + \beta)x &= 0 & 0 < t \leq T/2 \\ \ddot{x} + (\alpha - \beta)x &= 0 & 0 < t \leq T/2 \end{aligned}$$

definimos $\omega_1 := \sqrt{\alpha + \beta}$; $\omega_2 := \sqrt{\alpha - \beta}$. Y calculamos la matriz de transición de estados $\Phi(\frac{T}{2}, 0)$ para $0 < t \leq T/2$, y posteriormente $\Phi(T, \frac{T}{2})$, y finalmente calculamos $\Phi(T, 0) = \Phi(T, \frac{T}{2})\Phi(\frac{T}{2}, 0)$. Entonces: la matriz de monodromía para $T = 2\pi$ es:

Si $\alpha > \beta$

$$\Phi(2\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos \pi\omega_1 \cos \pi\omega_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \pi\omega_1 \sin \pi\omega_2 & \frac{1}{\omega_1} \cos \pi\omega_2 \sin \pi\omega_1 + \frac{1}{\omega_2} \cos \pi\omega_1 \sin \pi\omega_2 \\ -\omega_1 \cos \pi\omega_2 \sin \pi\omega_1 - \omega_2 \cos \pi\omega_1 \sin \pi\omega_2 & \cos \pi\omega_1 \cos \pi\omega_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \pi\omega_1 \sin \pi\omega_2 \end{bmatrix}$$

$$tr(\Phi(2\pi, 0)) = \cos \pi\omega_1 \cos \pi\omega_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \pi\omega_1 \sin \pi\omega_2 + \cos \pi\omega_1 \cos \pi\omega_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \pi\omega_1 \sin \pi\omega_2$$

Si $\alpha < \beta$

$$\Phi(2\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos \pi\omega_1 \cosh \pi\omega_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \pi\omega_1 \sinh \pi\omega_2 & \frac{1}{\omega_1} \sin \pi\omega_1 \cosh \pi\omega_2 + \frac{1}{\omega_2} \cos \pi\omega_1 \sinh \pi\omega_2 \\ -\omega_1 \sin \pi\omega_1 \cosh \pi\omega_2 - \omega_2 \cos \pi\omega_1 \sinh \pi\omega_2 & \cos \pi\omega_1 \cosh \pi\omega_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \pi\omega_1 \sinh \pi\omega_2 \end{bmatrix}$$

$$tr(\Phi(2\pi, 0)) = \cos \pi\omega_1 \cosh \pi\omega_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \pi\omega_1 \sinh \pi\omega_2 + \cos \pi\omega_1 \cosh \pi\omega_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \pi\omega_1 \sinh \pi\omega_2$$

Si $\alpha = \beta$

$$\Phi(2\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos \pi\omega_1 - \pi\omega_1 \sin \pi\omega_1 & \frac{1}{\omega_1} \sin \pi\omega_1 + \pi \cos \pi\omega_1 \\ -\omega_1 \sin \pi\omega_1 & \cos \pi\omega_1 \end{bmatrix}$$

$$tr(\Phi(2\pi, 0)) = \cos \pi\omega_1 - \pi\omega_1 \sin \pi\omega_1 + \cos \pi\omega_1 = 2 \cos \pi\omega_1 - \pi\omega_1 \sin \pi\omega_1$$

Entonces como vemos en este caso particular podemos conocer la traza de M de forma analítica y saber si el sistema es estable o inestable, ahora si elaboramos un programa que calcule la *traza* de M para algunos valores de α, β y graficamos α contra β , entonces obtenemos una grafica como en la Figura 2.9, en la cual las zonas de color rosa son las zonas inestables del sistema, y las zonas sin pintar o de color blanco son las zonas de estabilidad. A estas graficas se les conoce como las "Lenguas de Arnold", debido al matemático Ruso Vladimir Arnold, por sus estudios en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

De (2.25) observamos que $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, entonces de acuerdo al teorema de Lyapunov-Floquet para la estabilidad de (2.23) los multiplicadores característicos están condicionados a que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ por lo que deben ser complejos conjugados. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ entonces el sistema es inestable pues uno de los multiplicadores se encuentra fuera del círculo unitario. Entonces la frontera entre las regiones estables o inestables sucede cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ o cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, de donde se observa que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow trace(\Phi(2\pi, 0)) = 2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow trace(\Phi(2\pi, 0)) = -2$$

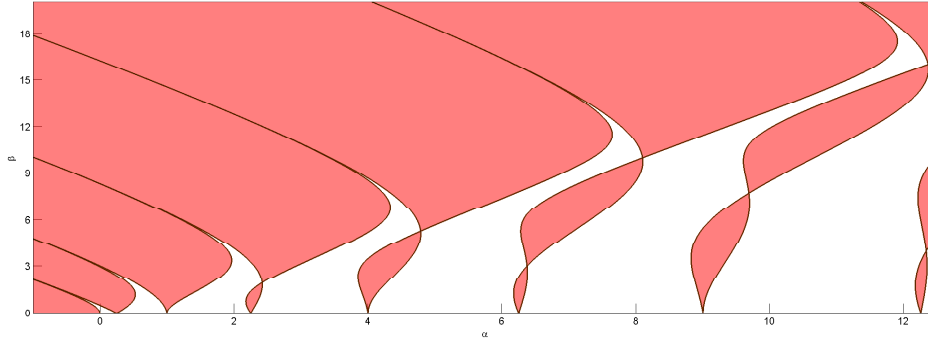


Figura 2.9: Lenguas de Arnold para la ecuación de Meissner

Si consideramos la matriz de monodromía de la ecuación de Meissner para $\alpha > \beta$, y $\beta = 0$ entonces podemos ver donde nacen las lenguas de Arnold si $\beta = 0 \rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\alpha}$

$$\begin{aligned} \text{trace}(\Phi(2\pi, 0)) &= \cos^2 \pi\omega_1 - \sin^2 \pi\omega_1 + \cos^2 \pi\omega_1 - \sin^2 \pi\omega_1 \\ &= 2(\cos^2 \pi\sqrt{\alpha} - \sin^2 \pi\sqrt{\alpha}) \end{aligned}$$

Entonces es necesario que se cumpla la condición

$$\begin{aligned} \text{trace}(\Phi(2\pi, 0)) &= 2 \\ 2(\cos^2 \pi\sqrt{\alpha} - \sin^2 \pi\sqrt{\alpha}) &= 2 \\ \cos(\pi\sqrt{\alpha} + \pi\sqrt{\alpha}) &= 1 \\ \cos(2\pi\sqrt{\alpha}) &= 1 \\ &\Leftrightarrow \\ 2\pi\sqrt{\alpha} &= n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\ 2\sqrt{\alpha} &= n \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

Entonces las lenguas de Arnold nacen en $\alpha = \frac{n^2}{4}$ para $n \in \mathbb{Z}_+$. Si graficamos las lenguas de Arnold para la ecuación de Mathieu, podemos comprobar lo que habíamos mencionado anteriormente, la inestabilidad del sistema se presenta en intervalos, primero siempre empezando con una zona estable y después con una inestable, como se observa en las Figuras 2.9 y 2.10. Además esta grafica corresponde con el ejemplo del niño en el columpio, si recordamos para los valores de $\beta = 2,9819$ $\alpha = 2,9819$ el diagrama nos marca que es una zona inestable, tal y como observamos en la simulación.

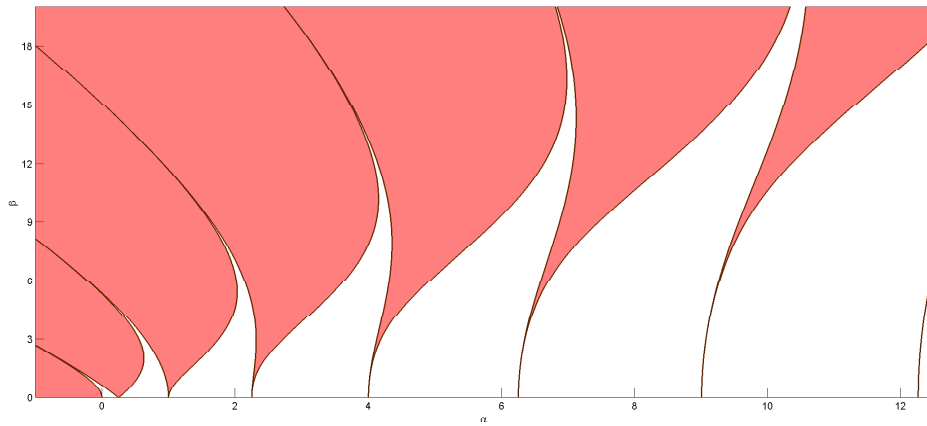


Figura 2.10: Lenguas de Arnold para la ecuación de Mathieu

Hasta ahora podemos notar con mucho más detalle la diferencia entre la resonancia y la resonancia paramétrica. Para que exista el fenómeno de resonancia es necesario que una fuerza externa a la dinámica del sistema intervenga, la resonancia se presenta en un solo punto $\omega_0 = \omega$, en cambio en la resonancia paramétrica la inestabilidad no se presenta en un solo punto, si no en intervalos. Por otra parte si existe fricción en el sistema, en la resonancia se puede evitar que nuestra respuesta tienda a infinito con la resonancia paramétrica no.

Capítulo 3

Ecuación de Hill con $x \in \mathbb{R}^2$

Las graficas de las lenguas de Arnold que hemos mostrado en el capitulo anterior corresponden para el caso cuando $x \in \mathbb{R}$, ahora para el objetivo del trabajo es poder graficar las lenguas de Arnold cuando $x \in \mathbb{R}^2$, por lo que es importante analizar las condiciones de estabilidad para este caso, entonces sea:

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \quad p(t) = p(t + T) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^2$$

Colocando el sistema en espacio de estados

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay & y \in \mathbb{R}^{4 \times 1} & \quad A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} & \quad P(t) = P(t + T) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} & \quad (3.1) \\ A &= \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & -I_2 \\ -P(t) & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.1. Valores característicos de la matriz de monodromía

Nuevamente sea M la matriz de monodromía asociada a (3.1). Si $M(t_0) = I_4 \Rightarrow \det(M(t)) = 1$, por el teorema de Jacobi-Liouville. En consecuencia sabemos que:

$$\sigma(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \} \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 1 \quad (3.2)$$

De acuerdo con el Teorema de Lyapunov-Floquet, la estabilidad del sistema va estar dada por los valores característicos de la matriz de monodromía, si $|\lambda_i| \leq 1$ el sistema es estable. Si $\lambda_i \in \mathbb{C} \rightarrow \lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \lambda_4 = \bar{\lambda}_3$ entonces el sistema solo puede ser estable cuando los valores característicos se encuentran sobre el círculo unitario, pues:

$$|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4| = |1| \quad (3.3)$$

$$|\lambda_1| |\lambda_2| |\lambda_3| |\lambda_4| = 1 \quad (3.4)$$

Si algún $|\lambda_i| < 1$, entonces necesariamente de acuerdo a la ecuación (3.3) $|\lambda_j| > 1$. Por lo tanto si $\lambda_i \in \mathbb{R}$ es inestable pues, en el caso que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, son raíces repetidas, por lo que el sistema es inestable. Entonces se puede notar que los valores característicos de la matriz de monodromía se comportan de forma simétrica con respecto al círculo unitario, esto debido a que la matriz de monodromía es simpléctica y estas matrices tienen la característica que siempre son invertibles además que si $\lambda \in \sigma(M) \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(M)$, este hecho lo demostraremos en la próxima sección.

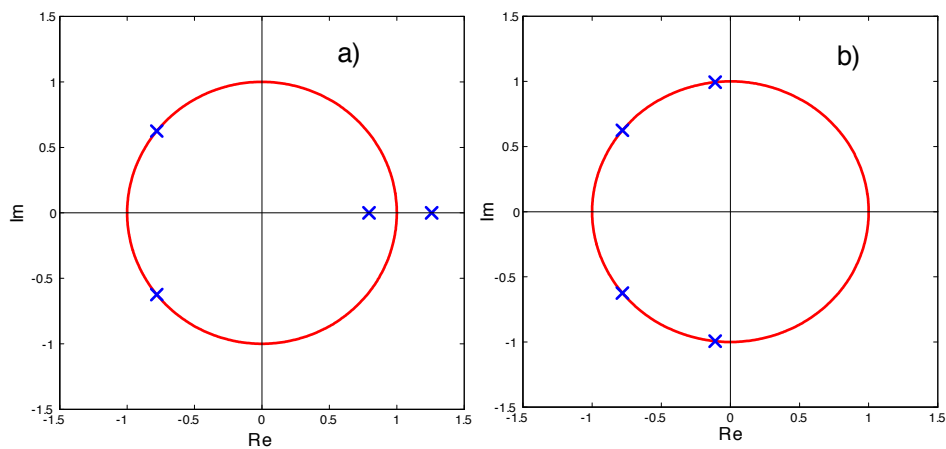


Figura 3.1: Valores característicos M

Como la Figura 3.1 a) muestra que un valor característico está dentro del círculo unitario ($|\lambda_1| < 1$), y otro está afuera de él ($|\lambda_1| > 1$) por lo que el sistema es inestable. En la 3.1 b) vemos el caso estable, donde todos los valores característicos tienen su módulo igual a uno. Entonces para nuestra condición de estabilidad basta con que un valor característico sea en módulo mayor o menor a 1, para decir que el sistema es inestable.

3.2. Sistemas Hamiltoniano lineales

Los sistemas Hamiltonianos modelan muchos problemas físicos, de astronomía, sobre la dinámica de fluidos, entre otros. Una propiedad de los sistemas hamiltonianos en su dinámica la energía permanece constante. Entonces sea $\mathcal{H}(q, p)$ una función escalar de energía, donde $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$; $p = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]^T$, la dinámica del sistema

esta dada por

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\end{aligned}$$

Si el sistema es Hamiltoniano se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= 0 \\ \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right)^T \dot{q} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\right)^T \dot{p} \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\right)^T + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right)^T = 0\end{aligned}$$

Si la función \mathcal{H} representa la energía del sistema entonces ésta permanece constante con respecto al tiempo. Si linealizamos cerca de algún punto (q_0, p_0) el cual es una solución del sistema con la que se cumple que $\dot{q}_0 = \dot{p}_0 = 0$. Entonces si $\tilde{q} = q - q_0$ y $\tilde{p} = p - p_0$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{q}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\right)^T \tilde{q} + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\right)^T \tilde{p} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial p} \tilde{q} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial p} \tilde{p} \\ \frac{d\tilde{p}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right)^T \tilde{q} + \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right)^T \tilde{p} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial q} \tilde{q} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} \tilde{p}\end{aligned}$$

Si $x = \begin{bmatrix} q & p \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n}$, podemos escribir como

$$\dot{x} = Gx$$

donde

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial p} \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial q} & -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial q} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial p} \end{bmatrix} = JH$$

Se observa que $G \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ entonces un sistema Hamiltoniano tiene dimensiones $2n \times 2n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Un sistema Hamiltoniano lineal se expresa como

$$\dot{x} = JHx \quad H = H^T \quad (3.5)$$

Donde se puede notar que $J^T = J^{-1} = -J$, $J^2 = -I_{2n}$, a $G = JH$ se le denomina matriz Hamiltoniana. En general podemos definir a una matriz Hamiltoniana como:

Definición 3.1 $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es una matriz Hamiltoniana si y solo si JP es una matriz simétrica

$$\Leftrightarrow JP - P^T J^T = JP + P^T J = 0 \quad (3.6)$$

Para poder averiguar sobre la estabilidad de los sistemas Hamiltonianos Lineales, tenemos que ver como se comportan los valores característicos de las matriz G . Y el siguiente teorema nos ayudará a ello:

Teorema 3.1 Si G es una matriz Hamiltoniana, con un un polinomio característico $P_G(\lambda)$ entonces $\lambda \in \sigma(A)$, $\Rightarrow -\lambda \in \sigma(A)$,

Prueba 3.1 queremos probar que $P_G(\lambda) = P_G(-\lambda)$, entonces

$$\begin{aligned} P_G(\lambda) &= \det(G - \lambda I) = \det(JH - \underbrace{\lambda I}_{-J^2}) = \det(JH + J\lambda J) \\ &= \det(J) \det(H + \lambda J) = \det(HJ^{-1} + \lambda J) \det(J) = \det(\lambda I - HJ) \\ &= \det(\lambda I - (HJ)^T) = \det(\lambda I - J^T H^T) = \det(\lambda I + JH) = P_G(-\lambda) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El teorema es muy importante pues indica que si $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$ y entonces lo valores característicos se presentan en pares y son simétricos con respecto a el eje imaginario como lo muestra la Figura 3.2 a). Si $\lambda \in \mathbb{C}$ como JH es real entonces se cumple que $\lambda_1 = -\lambda_2$, $\lambda_3 = \bar{\lambda}_1$, $\lambda_4 = -\bar{\lambda}_1$ por lo que los valores característicos de JH se presentan de forma cuádruple y son simétricos con el eje real y con el eje imaginario como lo muestra la Figura 3.2 b)

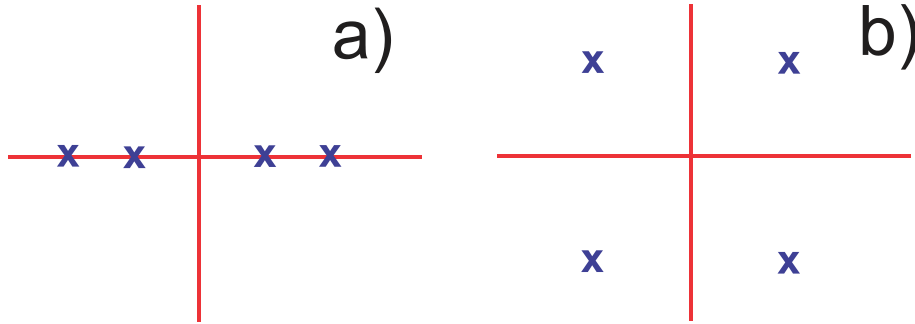


Figura 3.2: Valores característicos de JH

Entonces podemos notar que la única manera de que un sistema lineal Hamiltoniano (3.5) sea estable es que $\lambda \in j\mathbb{R}$, es decir que los valores característicos se encuentren sobre el eje imaginario, si $\lambda \in \mathbb{R}$ para que fuera estable necesariamente $\lambda = 0$, pero no sería una solución del polinomio mínimo de JH o de otra manera no es un bloque de Jordan simple, por lo que en ese punto el sistema es inestable, por lo que podemos concluir que:

$$\text{El sistema (3.5) es estable} \Leftrightarrow \sigma(JH) \subset j\mathbb{R}$$

3.2.1. Matrices Simpléticas

Ahora vamos a demostrar que si un sistema lineal es Hamiltoniano entonces su matriz de transición de estados es simplética, la cual como veremos tiene la propiedad que sus valores característicos son simétricos con respecto al círculo unitario, es decir se comportan igual que para la matriz de monodromía del sistema 3.1.

Definición 3.2 *Definición se dice que $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es una matriz es simplética si $A^T J A = J$, con*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

de las propiedades de J podemos ver que $J^T = J^{-1} = -J, J^2 = -I_{2n}$

De la definición podemos notar que:

$$\begin{aligned} \det(A^T J A) &= \det(J) = 1 \\ \det(A^T J A) &= \det(A^T) \det(J) \det(A) = \det(A^T) \det(A) = \det(A)^2 = 1 \\ \det(A) &= \pm 1 \end{aligned}$$

pero se puede demostrar que siempre $\det(A) = 1$ [24], entonces usaremos siempre este resultado. Ahora enunciaremos un teorema que nos muestra la propiedad de siemetría con respecto al círculo unitario.

Teorema 3.2 *Si $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es una matriz simplética, entonces $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(A)$.*

Prueba 3.2 *De la definición sabemos que $A = J^{-1} (A^T)^{-1} J = J^T (A^T)^{-1} J$; $A^T = (J^T (A^T)^{-1} J)^T = J^T A^{-1} J$*

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A^T) \\ &= \det(\lambda I - J^T A^{-1} J) = \det(\underbrace{\lambda J^T J}_I - J^T A^{-1} J) = \det(J^T \lambda J - J^T A^{-1} J) \\ &= \det(J^T) \det(\lambda I - A^{-1}) \det(J) = \det(\lambda I - A^{-1}) = \det((\lambda A - I) A^{-1}) \\ &= \det(\lambda A - I) \det(A^{-1}) = \det(\lambda A - I) = \det(-1(-I(\lambda A - I))) \\ &= (-1)^{2n} \det(I - \lambda A) = \det\left(\lambda \left(\frac{I}{\lambda} - A\right)\right) = \\ &= \lambda^{2n} \det\left(\frac{I}{\lambda} - A\right) = \lambda^{2n} P_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

De la prueba podemos observar una característica importante, si $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ con $m = 2n$ es simpléctica entonces:

$$P_A(\lambda) = \lambda^m P_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (3.7)$$

si su polinomio característico es $P_A(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ entonces

$$\begin{aligned} P_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \lambda^{-m} P_A(\lambda) \\ P_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \lambda^{-m} [a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0] \\ a_m \lambda^{-m} + a_{m-1} \lambda^{-m+1} + \dots + a_1 \lambda^{-1} + a_0 &= a_m + a_{m-1} \lambda^{-1} + \dots + a_1 \lambda^{1-m} + a_0 \lambda^{-m} \end{aligned}$$

En consecuencia $a_m = a_0, a_{m-1} = a_1, a_{m-2} = a_2, \dots$ por lo que entonces el polinomio característico de una matriz simpléctica es

$$P_A(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$$

Quiere decir que el polinomio característico siempre es mónico y el término independiente $a_m = a_0 = \det(A) = 1$ y los demás términos del polinomio característico son simétricos con respecto al término a_n .

Ahora para usar estas propiedades de las matrices simplécticas vamos a probar que la matriz de monodromía de un sistema Hamiltoniano es simpléctica, y si después podemos probar bajo cuales características la ecuación de Hill (3.1) es un sistema Hamiltoniano lineal entonces podemos asumir que todas estas propiedades se cumplen para la ecuación de Hill.

Teorema 3.3 *Sea un sistema hamiltoniano (3.5)*

$$\dot{x} = JHx \quad x \in \mathbb{R}^{2n} \quad H = H^T$$

entonces su matriz de transición de estados es simpléctica

Prueba 3.3 *Sea $M = \Phi(T, 0)$ la matriz de transición de estados asociada al sistema Hamiltoniano, si M es simpléctica debemos probar que $M^T J M = J$. Como M es una por definición matriz fundamental normalizada entonces de 2.12 sabemos que:*

$$\dot{M} = JHM \quad (3.8)$$

Por otro lado

$$\frac{d}{dt} M^T J M = \dot{M}^T J M + M^T J \dot{M}$$

sustituyendo 3.8

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M^T J M &= (M^T H^T J^T) J M + M J (J H M) = M^T H^T \underbrace{J J^T}_{I_{2n}} M + M^T \underbrace{J J}_{-I_{2n}} H M \\ &= M^T H M - M^T H M = 0 \end{aligned}$$

Entonces cuando el sistema es hamiltoniano la matriz de transición de estados normalizada o la matriz de monodromía M es constante con respecto al tiempo, entonces si $t = 0$, sabemos que $M(t = 0) = I_{2n}$:

$$M^T J M |_{t=0} = I_{2n} J I_{2n} = J \quad \blacksquare$$

Continuando si podemos probar para que casos la ecuación de Hill es un sistema Hamiltoniano entonces asumimos todas las propiedades anteriores mencionadas. Entonces sea nuestro sistema

$$\dot{y} = A y \quad (3.9)$$

con $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ entonces si $A = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ -\tilde{A} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tenemos que averiguar si es una matriz Hamiltoniana para poder asegurar que el nuestro sistema (3.9) es un sistema lineal Hamiltoniano. De la definición (2,2) sabemos que una matriz es Hamiltoniana si al premultiplicarla por J obtenemos una matriz simétrica entonces si (3.9) es un sistema Hamiltoniano sí

$$\begin{aligned} J A &= A^T J^T \\ \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -\tilde{A} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\tilde{A} & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A} \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \\ J A &= A^T J^T \Leftrightarrow \tilde{A}^T = \tilde{A} \end{aligned}$$

Entonces podemos concluir que mientras el termino \tilde{A} sea simétrico (3.9) es un sistema Hamiltoniano lineal. Ahora si tenemos la siguiente ecuación

$$\ddot{x} + \underbrace{[A + B \cos \omega t]}_{\tilde{A}} x = 0 \text{ con } A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

observamos que el sistema es Hamiltoniano si $A + B = A^T + B^T \Leftrightarrow A^T = A, B = B^T$.

3.3. Transformación bilineal

Un sistema discreto $y_{t+1} = A y_t$ para que sea estable los valores característicos A deben estar dentro del círculo unitario, o sobre el círculo unitario con la condición que

los valores característicos son raíces simples del polinomio mínimo, observamos que las condiciones de estabilidad son las mismas para la matriz de monodromía, entonces si el polinomio característico del sistema discreto es:

$$P_A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Pero para nuestro sabemos que la matriz de monodromia es simpléctica entonces los términos de su polinomio característico cumplen con la propiedad (3.7), entonces si $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $a_4 = a_0 = 1$, $a_3 = a_1$

$$P_M(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1 \quad (3.10)$$

Este polinomio no puede tener sus valores dentro del círculo unitario, como se indica en [2], una condición necesaria para que los valores característicos estén dentro del círculo unitario es que:

$$\frac{a_4}{a_0} < 1$$

y la cual no se cumple pues este término siempre es $\frac{a_4}{a_0} = 1$, entonces como ya habíamos mencionado anteriormente la matriz de monodromía solo puede tener sus valores sobre el círculo unitario, como lo indica la ecuación (3.3). Ahora vamos a transformar este sistema "discreto" a un problema en el tiempo continuo, si realizamos la siguiente transformación:

$$s = \frac{z+1}{z-1} \quad z = \frac{s+1}{s-1}$$

Y realizando operaciones algebraicas obtenemos el siguiente polinomio

$$(s-1)^4 P_M(s) = (2a_1 + a_3 + 2)s^4 + (12 - 2a_3)s^2 + 2 + a_3 - 2a_1 \quad (3.11)$$

se nota que (3.11) no cuenta con los términos s^3, s , lo cual nos indica que tiene raíces conjugadas o repetidas, lo cual se puede ver más claro con este cambio de variable

$$x = s^2 \Rightarrow x^2 = s^4 \quad (3.12)$$

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{x} \quad (3.13)$$

ahora tenemos que resolver una ecuación de segundo orden para encontrar las raíces de (3.11), para ver en donde es estable nuestro sistema. Si $\{s_1, s_2, s_3, s_4\} \subseteq \text{Re}\{s_i\} \leq 0$ el sistema es estable. Si $s_i \in \mathbb{R}$ el sistema es inestable pues la parte real es simétrica con respecto al eje imaginario como se observa en la ecuación (3.12), lo que es congruente con lo que habíamos explicado anteriormente para un sistema Hamiltoniano el cual tiene sus raíces en pares y solo es estable cuando sus raíces están sobre el eje imaginario, entonces la única posibilidad de que sea estable es que las raíces $s_i \in \mathbb{C}$ con parte real cero

Capítulo 4

Lenguas de Arnold para Dimensión Dos

En distintos textos se usan diferentes técnicas para graficar las lenguas de Arnold, uno de ellos es el expuesto por Hansen en [10] donde se iguala la respuesta de la ecuación de Hill a la serie de Fourier compleja, y desarrollando las series se puede llegar al llamado Determinante de Hill, el cual es un ejemplo de un determinante infinito. El problema de este método es que para cada función periódica $p(t) = p(t + T)$ hay que realizar todo el desarrollo desde un inicio. Y al igual que los otros métodos tarda un tiempo considerable en graficar las lenguas de Arnold.

Otra opción para graficar las lenguas de Arnold, es discretizar la ecuación de Hill [9], y con el sistema discreto se analiza la estabilidad y se grafica las zonas de estabilidad e inestabilidad del sistema, este método es eficiente pues se puede lograr una buena resolución de las lenguas de Arnold cuando se grafica α contra β . En nuestro caso es necesario graficar ω contra β , ahora mientras ω se hacen pequeñas las lenguas de Arnold se van adelgazando, por lo que una buena resolución depende de valores pequeños de ω , en consecuencia el tiempo de computo es muy largo. Bajo esta consideración es como uno de los objetivos es poder reducir el tiempo de cómputo para graficar las lenguas de Arnold mediante el uso de una GPU.

4.1. Soluciones Numéricas

Otra manera de elaborar las graficas de las lenguas de Arnold es calculando la matriz de monodromía por medio de algún integrador numérico, para cada α y β y posteriormente calcular su valores característicos, al igual que resolver el método por determinantes infinitos, el cómputo es muy tardado. Uno de las tareas que hemos re-

alizado es poder reducir significativamente el tiempo de cómputo. Si nosotros usamos un computo normal con ciclos "for" sobre Matlab un programa con buena resolución dura alrededor de 23 a 25 horas, sin embargo usando la programación en paralelo con la instrucción "parfor" reducimos el tiempo 4 veces (ver apéndice B), con lo cual el programa tarda alrededor de 6 o 7 horas, todo dependiendo de la resolución que deseemos, es decir el incremento que hacemos en ω y en β .

Entonces un gran problema que tenemos es si queremos realizar algunas pruebas para ver algunas propiedades tenemos que esperar algunas horas para ver la graficas, con la ayuda de una GPU (Graphics Processing Unit) pudimos resolver una parte del problema, implementado un programa que use la GPU el tiempo de cómputo de redujo significativamente, de 6 o 7 horas que obteníamos de la programación en paralelo, ahora podemos hacerlo en 12 o 13 minutos (Ver apéndice B), un problema hasta ahora es que no se puede usar ciertas funciones de matlab, además que no se puede indexar, es decir construir matrices ni vectores dentro de la GPU al menos con la técnica de paralelismo usada, por lo que es necesario implementar las funciones propias como el ODE45 que es el integrador que resuelve la ecuación diferencial para calcular la matriz de monodromía. Por otra parte el manejo de memoria interna de la GPU solo se puede manipular por medio de un lenguaje de programación llamado CUDA [14]. Entonces el programa que usamos para graficar la lenguas de Arnold logramos reducir significativamente el tiempo de procesamiento, pero si queremos graficar una gran cantidad de puntos mayores a 6.6 millones de puntos la memoria de la GPU se desborda, entonces salvo esta consideración es una gran utilidad reducir el tiempo de 6 hora a 11 o 12 minutos.

4.2. Descripción de la graficas

Si ahora variamos ω y β para el siguiente sistema:

$$\ddot{x} + [A + \beta B \cos \omega t] x = 0 \text{ con } A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Donde la matriz A permanece de forma constante se observa que es la ecuación de Mathieu pero con $x \in \mathbb{R}^2$

$$\ddot{x} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cos(\omega t) \right) x = 0 \quad (4.1)$$

En este caso se observa que $A = A^T$, $B = B^T$ y que ambas son diagonales por lo que en este caso el sistema (4.1) se puede ver como 2 sistemas por separado,

$$\ddot{x}_1 + (1 + 3\beta \cos(\omega t)) x_1 = 0 \quad (4.2)$$

y

$$\ddot{x}_2 + (2 + 3\beta \cos(\omega t)) x_1 = 0 \quad (4.3)$$

por lo que se puede graficar por separado, se sabe que las lenguas de Arnold para la ecuación de Mathieu nacen en $\alpha = \left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$ para $k \in \mathbb{N}_+$ sustituyendo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ tenemos que $\omega = \frac{2\sqrt{\alpha}}{k}$ en el subsistema (4.2) $\alpha = 1$ por lo que las lenguas de Arnold nacen en $\omega_1 = 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ si definimos a $\omega_1^2 = \alpha$, entonces las lenguas de Arnold nacen para los sistemas que se presenten como (4.2) en $\frac{2\omega}{k}$ las cuales se aprecian de color azul en la Figura 4.1 y para el subsistema (4.3) las lenguas de Arnold nacen en $\omega_2 = 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \dots$ las cuales se observan de color rojo en la Figura (4.1).

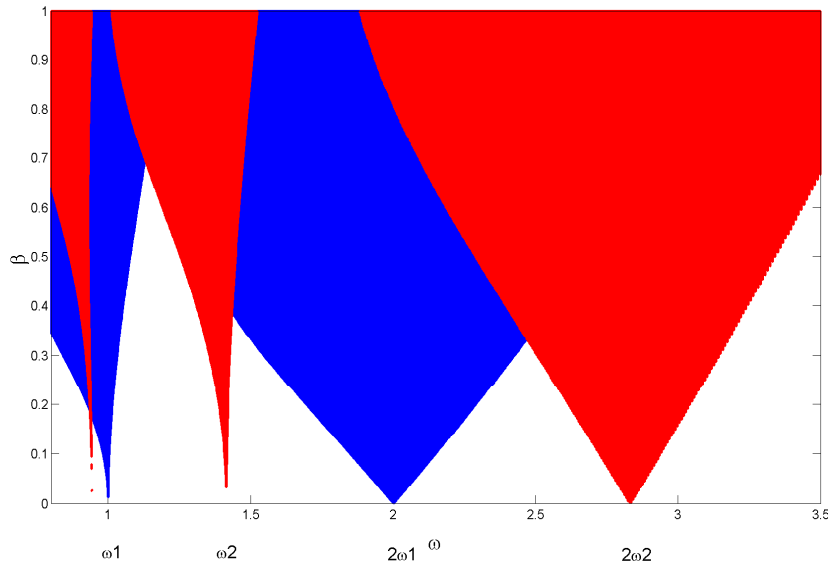


Figura 4.1: Lenguas de Arnold para el sistema (4.1)

Se puede observar que la diagonal de la matriz B no define donde nacen la lenguas de Arnold, lo único que hace es reescalar las lenguas, debidas a cada subsistema, por ejemplo para los subsistemas (4.2) y (4.3) aparece un factor multiplicando a β en este caso 3, lo único que hace es reescalar β .

Ahora si tenemos el sistema

$$\ddot{x} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cos(\omega t) \right) x = 0 \quad (4.4)$$

donde B no es diagonal, entonces existe interacción entre los subsistemas, es decir están acoplados, ahora la lenguas de Arnold nuevamente solo dependen de los valores de la

matriz A , si los valores característicos de A son $\sigma(A) = \{\omega_1^2, \omega_2^2\}$ las lenguas de Arnold nacen en $\frac{2\omega_j}{k}$ $j = 1, 2$; las cuales corresponden a cada uno de los subsistemas, pero ahora aparecen las otras lenguas que dependen de la interacción o el acoplamiento de los subsistemas y estas aparecen tal y como lo señala Yakubovich en [24]:

$$\frac{|\omega_1 \pm \omega_2|}{k} \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$$

Entonces si realizamos la gráfica del sistema (4.4) podemos observar en la Figura 4.2 que las lenguas aparecen en $\frac{|\omega_1 \pm \omega_2|}{k} = 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1, \omega_2, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \omega_1 \dots$

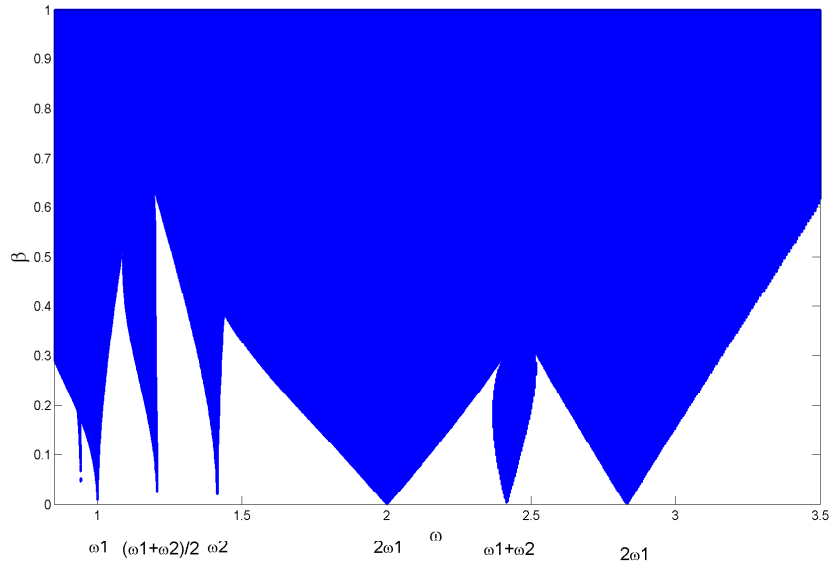


Figura 4.2: Lenguas de Arnold para el sistema (4.4)

Ahora en estas dos gráficas mostramos solo las primeras lenguas, pero en realidad entre $\omega \rightarrow 0$ se presentan mucho más, y al igual que en el caso de las lenguas para la ecuación de Mathieu de una dimensión se hacen cada vez más delgadas conforme $\omega \rightarrow 0$.

Se puede concluir elaborando distintas gráficas y observando que las siguientes matrices son equivalentes $B = B^T = -B$ es decir dan como resultado lenguas de Arnold similares. Por otra parte también se cumple que las gráficas de las lenguas de Arnold son exactamente iguales para los siguientes casos:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix}$$

Como se observa en los tres casos los elementos de la diagonal principal permanecen del mismo signo, ya sea positivo o negativo, pero para los dos elementos es el mismo signo. Además de que el elemento de acoplamiento entre los subsistemas b_3 aparece también del mismo signo en los cuatro casos.

4.3. Control para la estabilización de la ecuación de Hill

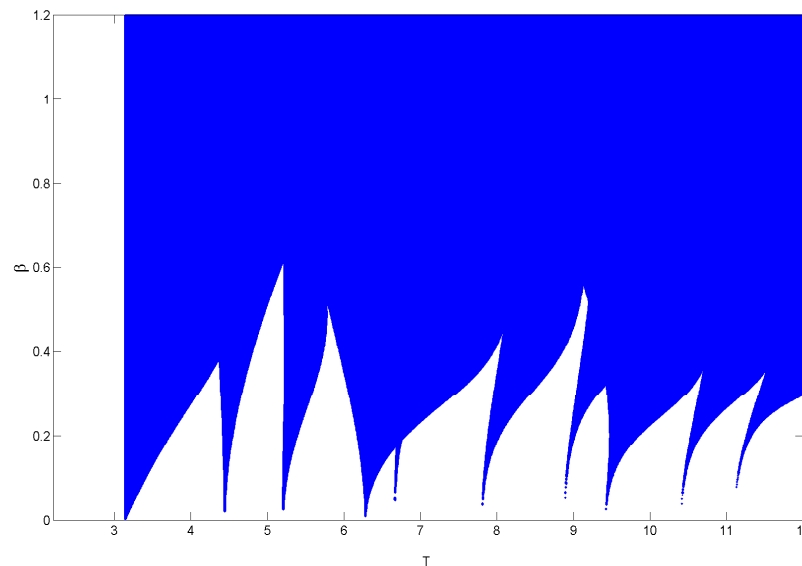


Figura 4.3: Lenguas de Arnold del sistema (4.6)

Ahora queremos variar el ancho de la lenguas de Arnold, para poder hacer que se hagan más delgadas y las zonas estables sean mayores a las zonas estables, o si se sabe con certidumbre los valores de $\omega = \omega_0$ $\beta = \beta_0$, es decir un punto de operación. Por lo que se propone que una ley de control de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + [A + \beta Bp(t)]x &= u(t) \\ \text{con } u(t) &= -\beta Cq(t)x, \text{ con } q(t+T) = q(t) \quad C \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

de tal manera que

$$\ddot{x} + [A + \beta [Bp(t) + Cq(t)]]x = 0$$

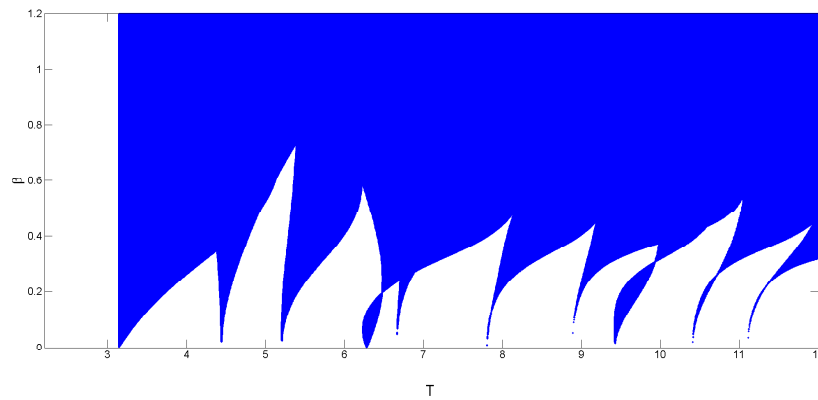


Figura 4.4: Lenguas de Arnold con la ley de control (4.7)

Ahora vamos a graficar T contra β de la ecuación $[A + \beta [Bp(t) + Cq(t)]] x = 0$ donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ es el período. Por otro lado $r(t) = q(t) + p(t)$ es periódica y $\int_0^T r(t) = 0$ donde T es el período fundamental.

Si graficamos la ecuación de Hill con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

observamos las lenguas de Arnold en la Figura 4.3

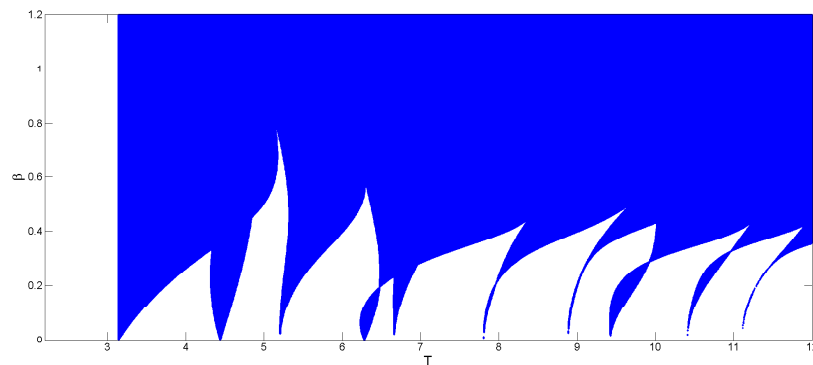


Figura 4.5: Lenguas de Arnold con la ley de control 4.8

Ahora si introducimos la ley de control (4.5), proponiendo

$$C = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad q(t) = \cos(m\omega t) \text{ con } m = 2 \quad (4.7)$$

Se observa en la Figura 4.4 que las zonas de estabilidad crecen, las lenguas de Arnold se adelgazan. Si proponemos un control

$$C = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{bmatrix} q(t) = \cos(m\omega t) \text{ con } m = 2 \quad (4.8)$$

Podemos observar en la Figura 4.5 ahora si se aplica un control con acción en los 2 estados del sistema las primeras lenguas de Arnold se hacen un poco más anchas, pero por otra parte cuando T crece las lenguas se adelgazan. Ahora si se realizan distintas pruebas se puede observar que para escoger la mejor m para el control $q(t) = \cos(m\omega t)$ en general es $m = 2$ o $m = 3$ dependiendo de la zona a la que queramos estabilizar, es decir depende del punto de operación en el que deseamos trabajar.

Capítulo 5

Ejemplo de Aplicación

En la Figura 5.1 se observa un sistema de dos masas con tres resortes, donde los resortes varían su constante de elasticidad de forma periódica $k_i(t) = k_i(t + T)$, este sistema mecánico presenta el fenómeno de la resonancia paramétrica.

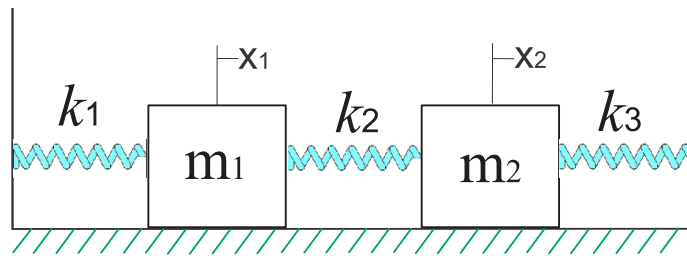


Figura 5.1: Sistema de masas con resortes

El lagrangeano del sistema es [1]:

$$L = \frac{1}{2} \{ (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) - (k_1 x_1^2 + k_3 x_2^2) - k_2 (x_1 - x_2)^2 \}$$

Entonces la dinámica del sistema esta dada por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Colocando el sistema en la forma de la ecuación de Hill:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{(k_1+k_2)}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{(k_3+k_2)}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ahora si $k_1(t) = k_1(t + T)$, $k_2(t) = cte$, $k_3(t) = k_3(t + T)$ es decir el resorte que acopla a las dos masas permanece constante y los otros dos resortes varían con el tiempo

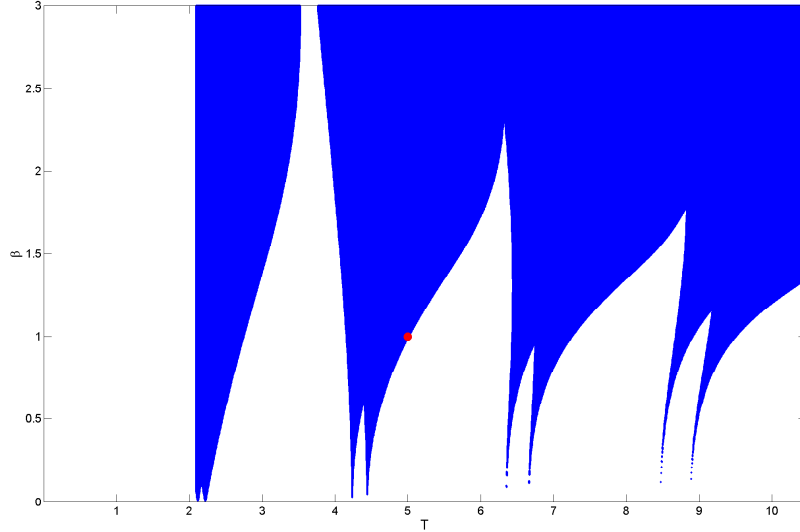


Figura 5.2: Lenguas de Arnold para el sistema (5.1)

de forma periódica:

$$k_1(t) = k_{1a} + k_{1b} \cos(\omega t) \text{ con } k_{1a} > 0, \quad |k_{1a}| > |k_{1b}|$$

$$k_2(t) = k_2 = \text{cte}$$

$$k_3(t) = k_{3a} + k_{3b} \cos(\omega t) \text{ con } k_{3a} > 0, \quad |k_{3a}| > |k_{3b}|$$

entonces el sistema lo colocamos en la forma de la ecuación de Mathieu

$$\ddot{x} + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_{1a}+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_{3a}+k_2}{m_2} \end{bmatrix}}_A + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} k_{1b} & 0 \\ 0 & k_{3b} \end{bmatrix}}_B \cos(\omega t) \right) x = 0 \quad (5.1)$$

Donde se observa que si $m_1 = m_2 \rightarrow A = A^T$ y $B = B^T$

Si proponemos los siguientes valores:

$$m_1 = m_2 = 1$$

$$k_1(t) = 2 + 1,5 \cos(\omega t)$$

$$k_2 = 0,1$$

$$k_3(t) = 2 + 1,5 \cos(\omega t)$$

entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 2,1 & -0,1 \\ -0,1 & 2,1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Graficando las lenguas de Arnold del sistema (5.1) con las matrices (5.2) observamos en la Figura 5.2 que para un punto de operación $(T_0, \beta_0) = (5, 1)$ (el punto rojo en la Figura 5.2) esta en la zona inestable, calculando los valores característicos de la matriz de monodromía son:

$$\begin{aligned}\bar{z}_2 &= z_1 = 0,72683 + 0,68678j \rightarrow |\bar{z}_2| = |z_1| = 1 \\ z_4 &= 0,87641, z_3 = 1,141 \rightarrow |\bar{z}_4| > 1\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que el punto de operación es inestable

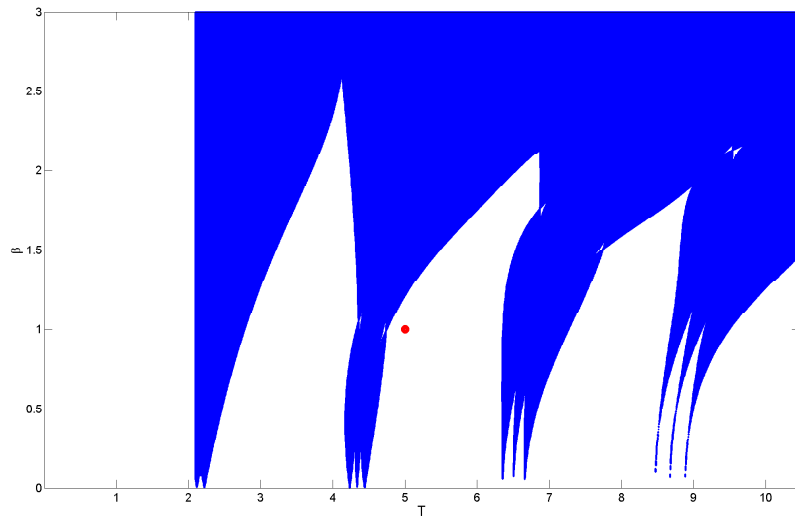


Figura 5.3: Lenguas de Arnold para el sistema (5.1) con la ley de control (5.3) y (5.4)

Para estabilizar el punto de operación proponemos una ley de control como en la sección pasada.

$$\ddot{x} + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_{1a}+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_{3a}+k_2}{m_2} \end{bmatrix}}_A + \beta_0 \left(\underbrace{\begin{bmatrix} k_{1b} & 0 \\ 0 & k_{3b} \end{bmatrix}}_B \cos(\omega t) + r \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_C q(t) \right) \right) x = 0 \quad (5.3)$$

con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad q(t) = r \cos(2\omega t) \quad (5.4)$$

Graficando las lenguas de Arnold para el sistema (5.1) con la ley de control (5.3) y (5.4) podemos ver que el punto de operación esta en la zona estable para $r = 0,3$ como

lo muestra la Figura 5.3. Los valores característicos del matriz de monodromía son:

$$\begin{aligned}\bar{z}_2 &= z_1 = 0,67112 + 0,74131j \rightarrow |\bar{z}_2| = |z_1| = 1 \\ \bar{z}_3 &= z_4 = 0,9285 - 0,3713j \rightarrow |\bar{z}_3| = |z_4| = 1\end{aligned}$$

Entonces el sistema es estable.

Realizando algunas simulaciones se puede notar que cuando $r = 0,1$ el punto de operación es estable pero se encuentra muy cerca de la frontera de estabilidad, ahora cuando $r = 0,98$ el punto de operación se encuentra lo más alejado de la frontera de estabilidad por la derecha. Por lo que podemos decir que los valores admisibles para estabilizar el sistema para $q(t) = r \cos(2\omega t)$ son $r \in [0,1, 1,2]$.

Si tenemos que:

$$\begin{aligned}m_1 &= 0,5 \\ m_2 &= 1 \\ k_1(t) &= 2 + 1,5 \cos(\omega t) \\ k_2 &= 0,1 \\ k_3(t) &= 2 + 1,5 \cos(\omega t)\end{aligned}$$

entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 3,1 & -0,1 \\ -0,05 & 1,05 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Observamos que $A \neq A^T$ entonces las lenguas de Arnold se pueden ver en la Figura 5.4

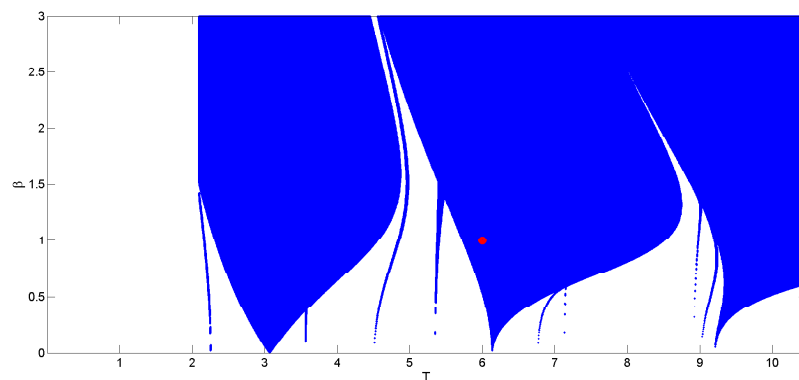


Figura 5.4: Lenguas de Arnold para el sistema (5.1)

Si un punto de operación del sistema es $(T_0, \beta_0) = (6, 1)$, entonces los valores característicos de la matriz de monodromía son:

$$\begin{aligned}\bar{z}_2 &= z_1 = -0,48371 + 0,87492j \rightarrow |\bar{z}_2| = |z_1| = 1 \\ z_4 &= 0,39471, \quad z_3 = 2,5337 \rightarrow |\bar{z}_3| > 0\end{aligned}$$

Por lo que el punto es inestable. Si aplicamos una ley de control (5.3) con:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } q(t) = r \cos(2\omega t) \quad (5.6)$$

Entonces podemos ver que el punto de operación se vuelve estable para $r = 0,9$, como lo muestra la Figura 5.5, y los valores característicos de la matriz de monodromía son:

$$\begin{aligned}\bar{z}_2 &= z_1 = -0,56229 - 0,82684j \rightarrow |\bar{z}_2| = |z_1| = 1 \\ \bar{z}_3 &= z_4 = 0,19575 + 0,98082j \rightarrow |\bar{z}_4| = |z_3| = 1\end{aligned}$$

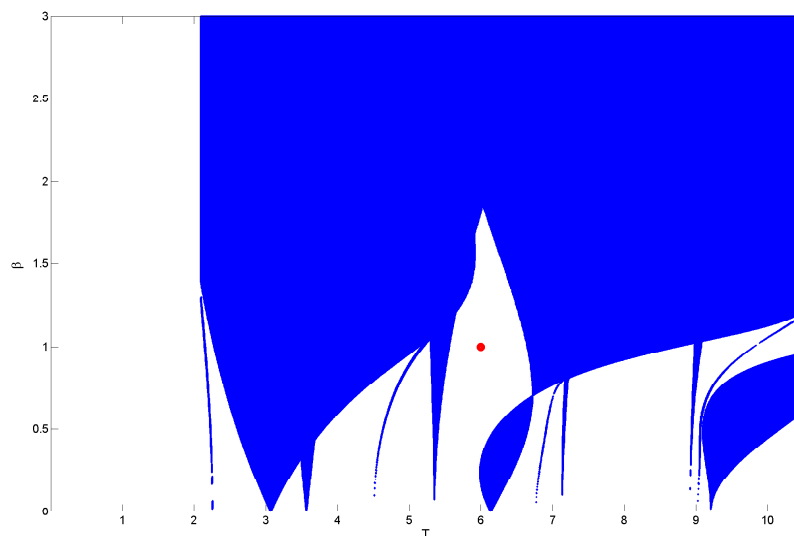


Figura 5.5: Lenguas de Arnold para el sistema (5.1) con la ley de control (5.3) y (5.6)

Nuevamente si se realizan algunas simulaciones se puede observar que cuando $r = 0,3$ el punto de operación es estable pero se encuentra muy cerca de la frontera de estabilidad, ahora cuando $r = 0,9$ el punto de operación se encuentra lo más alejado de la frontera de estabilidad. Por lo que podemos decir que los valores admisibles para estabilizar el sistema para $q(t) = r \cos(2\omega t)$ son $r \in [0,3, 0,9]$.

En este ejemplo podemos observar mejor la característica de introducir una excitación paramétrica para estabilizar el sistema. En la Figura 5.4 correspondiente al sistema (5.1) con (5.5) podemos observar que las lenguas de Arnold que nacen en $T = 2, 2, 3, 6, 4, 5, 5, 2$ son lenguas muy delgadas, en cambio las lenguas que nacen en $T = 3, 6$ son anchas. Aplicando la ley de control (5.3) con (5.6) entonces se nota en la Figura 5.5 que las lenguas que nacen en $T = 3, 6, 5, 2$ se hacen más anchas, es decir zonas que eran estables se vuelven inestables, y por otra parte las lenguas que nacen en $T = 3, 6$, se adelgazan, zonas que eran inestables ahora son estables. Si realizamos una simulación del sistema (5.1) con (5.5) podemos ver la respuesta en la Figura 5.6. Ahora simulamos

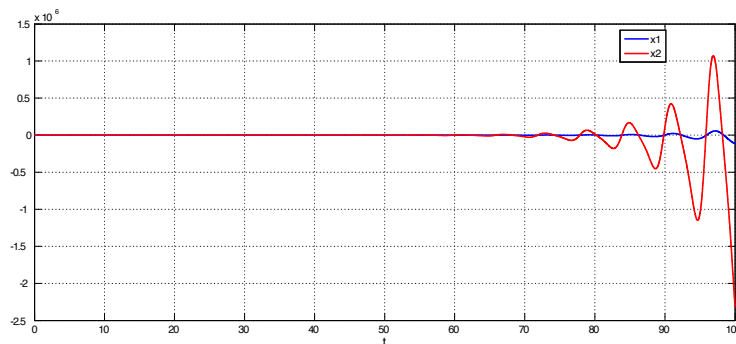


Figura 5.6: Respuesta del sistema (5.1) con (5.5)

para (5.1) con (5.5) con la ley de control (5.3) y (5.6), observamos en la Figura que la respuesta es acotada

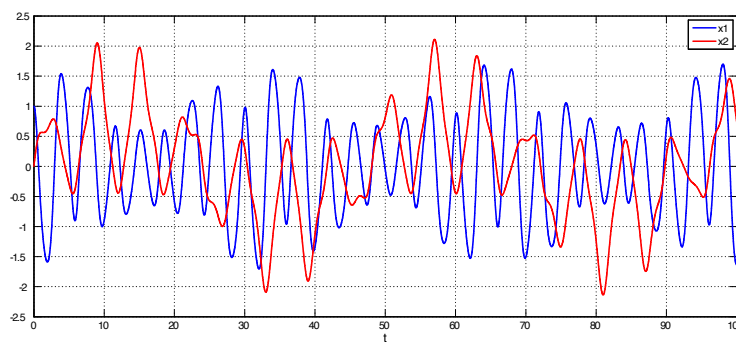


Figura 5.7: Respuesta del sistema (5.1) con (5.5) con la ley de control (5.3) y (5.6)

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo futuro

En el trabajo presente se pudo describir el fenómeno de la resonancia paramétrica, en la ecuación de Hill en dimensión dos. Se describieron algunas propiedades de las lenguas de Arnold para la ecuación de Hill, en particular para la ecuación de Mathieu, se propuso una ley de control para estabilizar la ecuación de Hill en un punto, para el caso cuando la matriz A es diagonal y cuando no lo es. Además esta ley de control se puede aplicar a un sistema subactuado pues la ley de control que se propone funciona si solo interactuamos con uno de los estados.

Se presenta en los apéndices una manera de reducir el tiempo de cómputo con ayuda de la GPU, para poder graficar las lenguas de Arnold en pocos minutos a diferencia de los programas existentes hasta ahora para la ecuación de Hill con $x \in \mathbb{R}^2$, lo cual es de gran ayuda para este análisis. En el trabajo futuro elaborará un programa en CUDA [8] que es un lenguaje con una filosofía diferente a los convencionales, sobre todo en el enfoque de cómo trabajar la memoria de la GPU, el objetivo es que ayude a obtener las lenguas de Arnold más rápido y con una mejor resolución, para poder facilitar el trabajo de análisis del comportamiento las graficas. Por otra parte es importante poder hacer un análisis con más rigor matemático para comprobar las leyes de control, además de analizar con más detalle el hecho que el sistema sea Hamiltoniano a la hora del proceso de graficar las lenguas de Arnold.

Capítulo 7

Apéndices

7.1. A Pruebas

7.1.1. Sistemas lineales

Como se menciona en el capítulo 2, los sistemas lineales solo pueden ser inestables si $t \rightarrow \infty$, en la prueba del siguiente teorema se muestra esta situación.

Teorema 7.1 *Sea $\dot{x} = A(t)x$ entonces $x(t)$ es acotado para todo t acotado*

Prueba 7.1

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= x^T x \\ \frac{d}{dt} \|x\|^2 &= \frac{d}{dt} (x^T x) = \dot{x}^T x + x^T \dot{x} = [A(t)x]^T x + x^T A(t)x = 2x^T \left[\frac{A(t)^T + A(t)}{2} \right] x\end{aligned}$$

sea

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \lambda_{\min} \left[\frac{A(t)^T + A(t)}{2} \right] \\ \mu_2 &= \lambda_{\max} \left[\frac{A(t)^T + A(t)}{2} \right]\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Rayleigh

$$\begin{aligned}
 2\mu_1 \|x\|^2 &\leq 2x^T \left[\frac{A(t)^T + A(t)}{2} \right] x \leq \mu_2 \|x\|^2 \\
 2\mu_1 \|x\|^2 &\leq \frac{d}{dt} \|x\|^2 \leq \mu_2 \|x\|^2 \\
 \int_0^t 2\mu_1 dt &\leq \int_0^t d \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} \leq \int_0^t 2\mu_2 dt \\
 \int_0^t 2\mu_1 dt &\leq \ln(x(t)) - \ln(x(0)) \leq \int_0^t 2\mu_2 dt \\
 \int_0^t 2\mu_1 dt &\leq \ln \left(\frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|} \right)^2 \leq \int_0^t 2\mu_2 dt \\
 \|x(0)\| e^{\int_0^t \mu_1 dt} &\leq \|x(t)\| \leq \|x(0)\| e^{\int_0^t \mu_2 dt}
 \end{aligned}$$

por lo tanto $x(t)$ esta acotado para cualquier $t \geq 0$ finito, la única manera que $x(t) \rightarrow \infty$ es que $t \rightarrow \infty$

7.2. B Programación en Paralelo

El objetivo de poder realizar cálculos en la computadora en paralelo es reducir el tiempo de cómputo. Como se explico en el capítulo 4 el resolver ecuaciones diferenciales ordinarias numéricamente es un proceso tardado, por ejemplo si queremos graficar las lenguas de Arnold para alguna ecuación de Hill, incrementando β en 0,001 de $\beta = 0$ a $\beta = 1$, y $\omega = 0,1$ a $\omega = 2$ incrementándola en 0,005, tenemos que calcular la matriz de monodromía para un poco más de 1millon de puntos, lo que implica que debemos resolver mas de 4millones ecuaciones diferenciales, si realizamos los cálculos con programación básica el programa tardaría 16 horas aproximadamente, y aún así no tendríamos tan buena resolución, las graficas mostradas en el trabajo, regularmente tienen 6 millones de puntos. Entonces es importante poder buscar algunas técnicas de programación para reducir el tiempo de cómputo.

7.2.1. Programación con la instrucción parfor

La primera observación que tenemos que hacer es que nuestro problema de computo es paralelizable, es decir tenemos un conjunto de operaciones que se pueden hacer por separado. Concretamente podemos calcular cada matriz de monodromía por separado, una matriz de monodromía no depende de la otra por lo que podemos decir que nuestro problema es paralelizable. En el programa normal usamos ciclos "for"indexados y

calculamos para cada punto (ω_0, β_0) su matriz de monodromía y analizamos su estabilidad, ahora gracias a que matlab incorporo un Toolbox llamado "Parallel Computing", nos permite conectar varias computadoras en red para que cada computadora realice algunos de los calculos, es decir dividir el numero de cálculos entre el numero de CPUs a trabajar. Para nuestro caso no usamos varias computadoras en red, gracias a que ahora las maquinas cuentan con 4 CPUs podemos generar una red interna con la instrucción "matlabpool ()"la cual crea una red interna con los procesadores con las que cuente la computadora hasta 8 procesadores. En nuestro caso contamos con 4 por lo que el tiempo de cómputo se reduce 4 veces. En la Figura 7.1 de observa del lado izquierdo la PC puede trabajar hasta con 8 nucleos internos, del lado derecho de la Figura cual es la Arquitectura si se conecta un cluster o muchas computadoras en red para dividir los calculos. La manera en la que opera el toolbox es mediante la instrucción "parfor" que

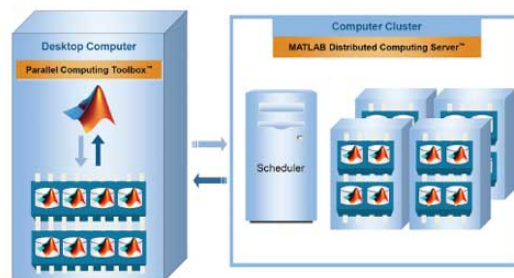


Figura 7.1: Esquema de la programación en paralelo, con un cluster o varios CPUs en red

es un como un ciclo for normal solo que lo que se encuentra dentro del parfor es lo que se divide entre los 4 procesadores. Un esquema de esta idea se muestra en la Figura 7.2.

A continuación se muestra el programa donde se implementa la programación es importante mencionar que dentro del parfor no se puede indexar vectores, pues la ejecución no la realiza en orden es decir por lo que se corre el riesgo de perder datos o no saber el orden en que aparecen por lo para solucionar este problema es necesario usar variables auxiliares y guardar los datos en matrices. Por lo que el proceso de ploteo es tardado de alrededor de 3 o 10 min dependiendo del número de puntos a graficar.

7.2.2. Programa usando 4 procesadores

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%El programa calcula las lenguas de Arnold
```

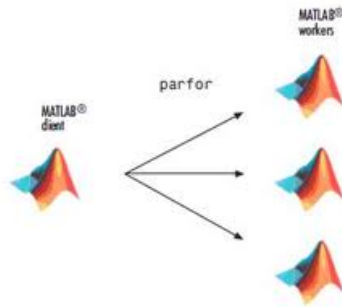


Figura 7.2: Esquema de la programación con parfor

```

%para la ecuacion de Hill
%cuando x es un vector de 2x1, usando
%computacion en paralelo, con la instruccion "parfor"
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [z p]=main
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%Definicion de los datos del programa
w_max=1;%omega maxima
w_min=0.1;%omega minima
paso_w=0.001;
beta_max=1;
paso_beta=0.01;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%parametros de integracion
options=odeset('RelTol',1e-2,'MaxStep',1e-2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
w_ini=w_min/paso_w;
w_final=(w_max-w_min)/paso_w;
beta_final=beta_max/paso_beta;
y=zeros(beta_final+1,w_final);%variables del programamas
p=zeros(beta_final+1,w_final);

parfor beta1=0:beta_final%inicio del programa en paralelo
    beta=beta1*paso_beta;
    disp(['beta=',num2str(beta)]);
    ytemp1=zeros(1,w_final);%Variables auxiliares
    ptemp1=zeros(1,w_final);

```



```

for w1=w_ini:w_final
    w=w1*paso_w;
    T=2*pi/w;%per\U{ed}odo_de_integracion
    tspan = [0,T];
    Xo1 = [1 0 0 0]';%condiciones_iniciales
    [t,X1] =ode45(@hill,tspan,Xo1,options,w,beta);
    n1=size(X1);
    N1=X1(n1(1),:);
    Xo2 = [0 1 0 0]';%condiciones_iniciales
    [t,X2] =ode45(@hill,tspan,Xo2,options,w,beta);
    n2=size(X2);
    N2=X2(n2(1),:);
    Xo3 = [0 0 1 0]';%condiciones_iniciales
    [t,X3] =ode45(@hill,tspan,Xo3,options,w,beta);
    n3=size(X3);
    N3=X3(n3(1),:);
    Xo4 = [0 0 0 1]';%condiciones_iniciales
    [t,X4] =ode45(@hill,tspan,Xo4,options,w,beta);
    n4=size(X4);
    N4=X4(n4(1),:);
    N=[N1' N2' N3' N4'];
    a=isnan(N);%Conidicion_si_la_matriz_de_monodromia_tiene_algun
    m=0;      %dato_NaN_lo_cual_indica_que_es_muy_grande_entonces
    for i=1:4 %el_sistema_es_inestable
        for b=1:4
            if a(i,b)~=0
                m=1;
            end
        end
    end
    if m ~= 0
        ytemp1(w1)=beta;
        ptemp1(w1)=2*pi/w;
    else
        s=eig(N);
        r1=abs(s(1));
        r2=abs(s(2));
    end
end

```

```

        r3=abs(s(3));
        r4=abs(s(4));
        r=[r1 r2 r3 r4];
        if max(r)>1.0001%Condicion_de_estabilidad
            ytemp1(w1)=beta;
            ptemp1(w1)=2*pi/w;
        end
    end
end
y(beta1+1,:)=ytemp1';
p(beta1+1,:)=ptemp1';
end
%Ploteo_de_las_lenguas_de_Arnold
figure (1)
for j=1:beta_final
    plot(p(j,:),y(j,:),'b.')
```

axis([0.1 2*pi/w_max beta_min beta_max])
xlabel('T')

```

end
return
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Definicion de la ecuacion de Hill
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [dx_dt]= hill(t,x,w,beta)
A=[1 0;0 sqrt(2)];
B=[1 0;0 1];
D1=A+beta*B*(cos(w*t));
D=[-D1 zeros(2)];
C=[zeros(2) eye(2)];
R=[C;D];
dx_dt=R*x;
return
```

7.3. C Programación en una GPU

Las GPUs (Graphics Processing Unit) fueron creadas para acelerar los procesos gráficos, últimamente se han mejorado y se usan para el cómputo científico. En la Figura

7.3 podemos ver a la GPU que se uso para graficar las lenguas de Arnold, es la Tesla 2075 la cual cuenta con 448 procesadores internos. Matlab está empezando a implementar en su toolbox de "Parallel Computing," algunas funciones que nos permitan usar la GPU para realizar cálculos con ella. La filosofía de como se programa sobre una GPU es



Figura 7.3: Imagen de la GPU , Tesla 2075

completamente diferente a al uso del "parfor" de matlab, como sea mencionado las GPUs fueron diseñadas para procesos gráficos y es hasta ahora que se usan para realizar computo científico por lo que algunas de sus aplicaciones en Matlab son limitadas. En la Figura 7.4 se observa la arquitectura del CPU y de la GPU.

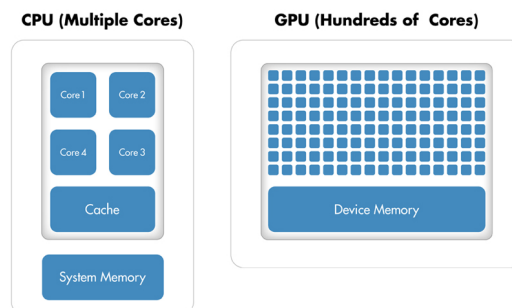


Figura 7.4: Esquema de la GPU

Como se observa a diferencia de la arquitectura de un cluster, cada procesador esta ligado a una unidad de memoria única para toda la GPU, mientras que en el esquema del Cluster cada elemento cuenta con su unidad de memoria. Entonces uno de los puntos claves para poder utilizar al máximo la GPU es operar correctamente el uso de memoria.

La interfaz entre Matlab y la GPU ya está implementada. La forma más sencilla de utilizar la GPU es creando un vector datos, se envían estos datos a la GPU y realizar de forma paralela en cada uno de los 448 procesadores de la GPU la misma operación para

cada dato. y para después regresar este mismo vector ya modificado con el resultado de las operaciones realizadas. El problema de esta técnica es que el número de funciones o operaciones desarrolladas hasta ahora por Matlab para trabajar sobre la GPU son muy básicas. Entonces con esta técnica se puede mandar datos al GPU resolver de forma paralela algunas operaciones y regresar los datos a la PC y nuevamente mandar los datos a la GPU realizar otras operaciones y así sucesivamente hasta terminar el proceso, el problema es que para mandar datos a la GPU tiempo de computo, y regresarlos también toma tiempo, por lo que ésta técnica no nos sirve en lo absoluto.

Entonces lo que vamos a realizar es una función la cual se pueda operar en paralelo, esta función es realizar un método de resolución de ecuaciones diferenciales, en nuestro caso utilizamos un el método de Runge-Kutta que es el mismo que usa matlab en el ode45. Lo que hacemos básicamente en la programación es crear un vector de datos en este caso todas las omegas, mandamos los datos a la GPU y en la GPU resolvemos las ecuaciones diferenciales, regresamos las respuestas y en la PC construimos la matriz de monodromía y analizamos su estabilidad. .

Como se puede pensar es porque no hacer todo dentro de la GPU, el problema es que las el tipo de funciones no permite realizar indexaciones, es decir no podemos construir dentro de la GPU la matriz de monodromía. Pero aún así el resultado es muy satisfactorio pues pudimos reducir el tiempo de cómputo a unos cuantos minutos, a pesar que no podemos realizar todo el computo en la GPU.

Es por ello que el trabajo futuro se propone realizar un programa el cual esté basado en un lenguaje diferente, concretamente CUDA, para poder controlar la memoria de la GPU, y poder aprovechar al máximo la GPU.

7.3.1. Programa con usando la GPU

A continuación se muestra el programa principal para poder graficar las lenguas de Arnold con la GPU, posteriormente se muestra, el programa de la función ".ºde_hill" que se manda a llamar a lo largo del programa.

Programa principal

```
clear all
beta_min=0;%
beta_max=.35;
inc_beta=0.001;
w_max=2;
w_min=0.2;
```

```

w_max1=log10(w_max);
w_min1=log10(w_min);
w_size=5500;
w1= parallel.gpu.GPUArray.logspace( w_min1, w_max1, w_size);
tic          %Craci\U{f3}n de los datos
n=1;        %en la GPU
for beta1=beta_min:inc_beta:beta_max
x1=1;
x2=0;
x3=0;
x4=0;
[y1 y2 y3 y4] = arrayfun(@ode_hill,w1,beta1,x1,x2,x3,x4);
z1(n,:)=gather(y1);      % Resolucion de la ecuaci\U{f3}n
z2(n,:)=gather(y2);      %diferencial sobre la GPU
z3(n,:)=gather(y3);
z4(n,:)=gather(y4);      %regresamos los datos de la GPU
x1=0;
x2=1;
x3=0;
x4=0;
[y5 y6 y7 y8] = arrayfun(@ode_hill,w1,beta1,x1,x2,x3,x4);
z5(n,:)=gather(y5);
z6(n,:)=gather(y6);
z7(n,:)=gather(y7);
z8(n,:)=gather(y8);
x1=0;
x2=0;
x3=1;
x4=0;
[y9 y10 y11 y12] = arrayfun(@ode_hill,w1,beta1,x1,x2,x3,x4);
z9(n,:)=gather(y9);
z10(n,:)=gather(y10);
z11(n,:)=gather(y11);
z12(n,:)=gather(y12);
x1=0;
x2=0;
x3=0;

```

```

x4=1;
[y13 y14 y15 y16] = arrayfun(@ode_hill,w1,beta1,x1,x2,x3,x4);
z13(n,:)=gather(y13);
z14(n,:)=gather(y14);
z15(n,:)=gather(y15);
z16(n,:)=gather(y16);
n=n+1;
end
tiempo_GPU_ode=toc/60;
tic
w_aux=gather(w1);%Regresa los datos de la GPU a matlab
p=1;
for i=1:n-1
    beta=(i-1)*inc_beta;
    for k=1:w_size
        M=[z1(i,k) z5(i,k) z9(i,k) z13(i,k); %%%
           z2(i,k) z6(i,k) z10(i,k) z14(i,k); %%%
           z3(i,k) z7(i,k) z11(i,k) z15(i,k); %%%Matriz de monodromia
           z4(i,k) z8(i,k) z12(i,k) z16(i,k)]; %%%
        s=eig(M);
        r1=abs(s(1));
        r2=abs(s(2));
        r3=abs(s(3));
        r4=abs(s(4));
        r=[r1 r2 r3 r4];
        if max(r)>1.000001 %%Condici\U{f3}n de Estabilidad
            b(p)=beta;
            d(p)=w_aux(k);
            h(p)=1/w_aux(k);
            p=p+1;
        end
    end
end
end
time_calculos=toc/60; %Tiempo en los calculos fuera de la gpu
tic
%figure (1)
%plot(d,b,'b.')
```

```

%axis([w_min-.1 w_max beta_min beta_max])
%xlabel \omega
%ylabel \beta
%figure(2)
plot(h,b,'b.')
axis([.01 1/w_min beta_min beta_max])
xlabel('T')
ylabel \beta
time_ploteo=toc/60; %tiempo del ploteo
tiempo_total=tiempo_GPU_ode+time_calculos+time_ploteo
disp('minutos')

```

Función : Ode_hill

```

function [y1 y2 y3 y4 ]=ode_hill(w1,beta,x1,x2,x3,x4)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% x' '=-[A+beta*(B*cos(wt)+C*cos(mwt))]*x
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
w=w1;
h=0.005;%paso de integraci\U{f3}n
m=3;%%%%%%%%
a11=1;a12=0; %%% Matriz A
a21=0;a22=1.44; %%%
b11=1;b12=0; %%% Matriz B
b21=0;b22=1; %%%
c11=3;c12=-1; %%% Matriz C
c21=-1;c22=3; %%%
t_inicial=0;
t_final=2*pi/w;
for t=t_inicial:h:t_final
    f= sign(cos(w*t)); %%% CAMBIO DE LAS FUNCIONES PERIODICAS
    f2=sign(cos(m*w*t));%%
    %%%%%%%%%
    K1_1=h*x3;
    K1_2=h*x4;
    K1_3=h*(-x1*(a11+beta*(b11*f+c11*f2))-x2*(a12+beta*(b12*f+c12*f2)));

```

```

K1_4=h*(-x1*(a21+beta*(b21*f+c21*f2))-x2*(a22+beta*(b22*f+c22*f2)));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
f1=sign(sin(w*(t+0.5*h))); %%% CAMBIO DE LAS FUNCIONES PERIODICAS
f2=sign(cos(m*w*(t+0.5*h))); %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
K2_1=h*(x3+0.5*K1_3);
K2_2=h*(x4+0.5*K1_4);
K2_3=h*(-(x1+0.5*K1_1)*(a11+beta*(b11*f+c11*f2))
-(x2+0.5*K1_2)*(a12+beta*(b12*f+c12*f2)));
K2_4=h*(-(x1+0.5*K1_1)*(a21+beta*(b21*f+c21*f2))
-(x2+0.5*K1_2)*(a22+beta*(b22*f+c22*f2)));
K3_1=h*(x3+0.5*K2_3);
K3_2=h*(x4+0.5*K2_4);
K3_3=h*(-(x1+0.5*K2_1)*(a11+beta*(b11*f+c11*f2))
-(x2+0.5*K2_2)*(a12+beta*(b12*f+c12*f2)));
K3_4=h*(-(x1+0.5*K2_1)*(a21+beta*(b21*f+c21*f2))
-(x2+0.5*K2_2)*(a22+beta*(b22*f+c22*f2)));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
f=sign(sin(w*(t+h))); %%% CAMBIO DE LAS FUNCIONES PERIODICAS
f2=sign(cos(m*w*(t+h))); %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
K4_1=h*(x3+K3_3);
K4_2=h*(x4+K3_4);
K4_3=h*(-(x1+K3_1)*(a11+beta*(b11*f+c11*f2))-(x2+K3_2)*(a12+beta*(b12*f+c12*f2)));
K4_4=h*(-(x1+K3_1)*(a21+beta*(b21*f+c21*f2))-(x2+K3_2)*(a22+beta*(b22*f+c22*f2)));
x1=x1+(1/6)*(K1_1+2*K2_1+2*K3_1+K4_1);
x2=x2+(1/6)*(K1_2+2*K2_2+2*K3_2+K4_2);
x3=x3+(1/6)*(K1_3+2*K2_3+2*K3_3+K4_3);
x4=x4+(1/6)*(K1_4+2*K2_4+2*K3_4+K4_4);
end
y1=x1;
y2=x2;
y3=x3;
y4=x4;
return

```


Bibliografía

- [1] Axisa F. *Modelling of Mechanical Systems, Discrete systems*. Vol 1 Cogan Page Science 2004
- [2] Bishop A. *Introduction to Discrete Linear Controls, Theory and Application*. Academic Press 1975
- [3] Brockett W. *Finite Dimensional Linear Systems*. John Wiley and Sons 1969
- [4] Cesari L. *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*. Springer-Verlag 1963
- [5] Champneys A. *Dynamics of Parametric Excitation*. Mathematics of Complexity and Dynamical Systems 2012, pp 183-204
- [6] Chen C.T. *Linear Systems: Theory and Design*. Oxford University Press 1999
- [7] Fabien C. *Analytical System Dynamics, modeling and simulation*. Springer 2009
- [8] Farber R. *Cuda applications design and development*. Elsevier 2011
- [9] Jardón H. *Control de sistemas Modelados con la ecuación de Hill basado en discretización*. J.Collado, Tesis cinvestav 2010
- [10] Hansen, L. *Stability diagrams for Coupled Mathieu-Equations*. Archive of Applied Mechanics Vol 55, Num 6 (1985) pp 463-473
- [11] Magnus W. and S. Winkler. *Hill's Equation* Dover Publications 1970
- [12] Hochstadt H. *A special Hill's equation with discontinuous coefficients*. The American Mathematical Monthly Vol. 70, Num 1 (1963), pp. 18-26B
- [13] Ince, E. L. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications reprint 1956, 1st Ed 1926
- [14] Sanders J. and E. Kandrot. *Cuda by example* Addison Wesley 2011

- [15] Jordan D.W. and P. Smith *Nonlinear Differential Equations: An introduction to Dynamical Systems*. 3rd Ed. Oxford University Press 1999
- [16] Khalil H. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall 3rd ed
- [17] Landau L.D and E.M Lifshitz. *Mechanics*. Course of Theoretical Physics Vol.1 Butterworth-Heinemann Third Edition 1976
- [18] Sanmartin R. *O Botafumairo: Parametric Pumping in de Middle Ages*, American Association of Physics Teachers, octubre 1984 pp 937-945
- [19] Seyranian A.P and A.A. Mailybaev. *Multiparameter Stability, Theory with Applications*. World Scientific 2003
- [20] Seyranian A. *Parametric Resonance in Mechanics: Classical Problems and New Results*. Journal of System Design and Dynamics, Vol. 2, Issue 3, pp. 664-683 (2008).
- [21] Thor I. and H. Nijmeijer. *Parametric Resonance in Dynamical Systems*. Springer 2011
- [22] Vazquez. A. *Control de una grua montada en un barco*. J. Collado, Tesis cinvestav 2010
- [23] Yakubovich V. A. *A stability theorem for a linear Hamiltonian system with periodic coefficients*. Journal of Mathematical Sciences Vol.3, Num 4 (1975) 574-584
- [24] Yakubovich V.A. and V.M. Starzhinskii, *Linear Differential Equations With Periodic Coefficients* John Wiley and Sons 1975