



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Sincronización generalizada de sistemas caóticos
utilizando el elemento primitivo diferencial

T E S I S

Que presenta
Aurora Rodríguez Martínez

Para obtener el grado de
Maestra en Ciencias

En la especialidad de
Control Automático

Director de Tesis
Dr. Rafael Martínez Guerra

México, D.F.

Octubre 2013

Agradecimientos

Al CONACyT por el apoyo económico brindado a lo largo de la duración del programa de Maestría.

A mi asesor el Dr. Rafael Martínez Guerra por sus consejos y apoyo brindado durante el desarrollo de este trabajo de Tesis.

Agradezco enormemente a todos los profesores del Departamento de Control Automático.

Por otra parte, quiero agradecer a mis padres y hermanos por todo el apoyo brindado durante muchos años. En especial agradezco a mi hermano Guillermo.

También, agradezco profundamente a Félix Alfredo por el soporte que ha dado a mi vida.

Finalmente, agradezco a Dios por motivos de sobra.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	XI
Abstract	XIII
1. Introducción	13
1.1. Motivación	14
1.2. Objetivo de la tesis	15
1.3. Caos	15
1.3.1. Sistemas caóticos	16
1.4. Sincronización	17
1.4.1. Sincronización de sistemas caóticos	19
1.4.2. Sincronización generalizada	20
1.5. Organización del trabajo	21
2. Conceptos matemáticos	23
3. Sincronización generalizada entre los sistemas caóticos de Lorenz y Chua	29
4. Resultados numéricos	39
4.1. Diagrama de simulación	42
5. Circuitos de Lorenz y Chua	45
5.1. Circuito de Lorenz	45
5.2. Circuito de Chua	49
5.2.1. De datos numéricos a datos experimentales: escalamiento de corriente y tiempo	51
6. Conclusiones y trabajos futuros	59
Bibliografía	61

Índice de figuras

4.1. Sistemas de Lorenz (a) y Chua (b) en z (coordenadas transformadas).	39
4.2. Norma del error (a) y trayectorias del error (b) en coordenadas transformadas (z).	40
4.3. Trayectorias del error en espacio fase, $e_z = z_L - z_C$	40
4.4. (a) Sistemas de Lorenz y (b) sistema de Chua bajo la transformación H_{LC} . Ambos en coordenadas originales (x).	41
4.5. Norma del error (a) y trayectorias del error en x	41
4.6. Trayectorias del error en espacio de fase $H_{LC}(x_C) - x_L$	42
4.7. Diagrama en Matlab-Simulink.	43
5.1. Atractor de Lorenz generado por integración numérica.	46
5.2. Formas de onda de Lorenz x_{1L} , x_{2L} y x_{3L} generadas por integración numérica.	46
5.3. Esquema del circuito de Lorenz en Multisim.	47
5.4. Circuito de Lorenz.	48
5.5. Atractor de Lorenz generado con datos extraídos del circuito mostrado en la Figura (5.3).	48
5.6. Formas de onda de Lorenz x_{1L} , x_{2L} y x_{3L} generadas con datos extraídos del circuito mostrado en la Figura (5.3).	49
5.7. Circuito de Chua consiste en un inductor lineal L , un resistor lineal R , dos capacitores lineales C_1 y C_2 , y un resistor no lineal N_R	50
5.8. Esquema del circuito de Chua en Multisim.	51
5.9. Función ν , tres segmentos lineales a pedazos $v - i$ característico del resistor no lineal del circuito de Chua. Las regiones externas tienen pendiente m_0 y las regiones internas tienen pendiente m_1 . Hay dos puntos de rompimiento en $\pm B_p$	51
5.10. Circuito de Chua.	55
5.11. Esquema del circuito de Chua en Multisim, se utiliza un circuito girador en lugar de un inductor convencional.	55
5.12. Atractor de Chua generado por integración numérica.	56
5.13. Formas de onda de Chua x_{1C} , x_{2C} y x_{3C} generadas por integración numérica.	56
5.14. Atractor de Chua generado con datos extraídos del circuito mostrado en la Figura (5.10).	57

- 5.15. Formas de onda de Chua x_{1C} , x_{2C} y x_{3C} generadas con datos extraídos del circuito mostrado en la Figura (5.10). 57

Resumen

La sincronización generalizada (SG) en sistemas no lineales aparece cuando los estados de un sistema, a través de un mapeo funcional son iguales a los estados de otro. Este mapeo puede ser obtenido si existe un *elemento primitivo diferencial* el cual genera una *base de trascendencia diferencial* (esto es equivalente a un mapeo funcional con otro tipo de herramientas. Alternativamente, algunos autores usan el término difeomorfismo, usando derivadas iteradas de Lie). En este trabajo se analiza el problema de SG cuando se tienen sistemas no lineales estrictamente diferentes en una configuración unidireccional denominada maestro-esclavo y, se considera que para ambos sistemas solo algunos estados son medibles. El primer componente de la base de trascendencia diferencial es llamado elemento primitivo diferencial y, en general es definido por medio de una combinación lineal de los estados conocidos y de las entradas.

Además, hasta donde sabemos el problema de SG ha sido atacado con retroalimentación estática utilizando geometría diferencial, aquí se construye un controlador con retroalimentación dinámica usando otras herramientas matemáticas, este controlador es capaz de conseguir sincronización completa en el sistema de coordenadas transformadas y SG en coordenadas originales utilizando conceptos de álgebra diferencial. Las formas particulares de la SG y Sincronización Completa son ilustrados con resultados numéricos sobre sistemas caóticos bien conocidos, como son en este caso los sistemas de Lorenz y de Chua.

Abstract

Generalized Synchronization (GS) in nonlinear systems appears when the states of one system, through a functional mapping are equal to states of another. This mapping can be obtained if there exists a differential primitive element which generates a differential transcendence basis (it is equivalent to a functional mapping with other type of tools. Alternatively, some authors use the term diffeomorphisms, using iterative Lie derivatives). In this work, we investigate the GS problem when we have strictly different nonlinear systems in a unidirectional configuration denominated master-slave and, we consider that for both, the slave and master systems only some states are available from measurements. The first component of the differential transcendence basis is called differential primitive element and, in general, is defined by means of a linear combination of the known states and the inputs.

Furthermore, as far as we know the GS problem has been tackled with static feedback using differential geometry. Here, we construct a dynamical feedback controller using another mathematical tools, this controller is able to achieve Complete Synchronization in the coordinate transformation and Generalized Synchronization in the original coordinates using differential algebra. These particular forms of GS and Complete Synchronization are illustrated with numerical results of well-known chaotic benchmark systems: Lorenz system and Chua system.

Capítulo 1

Introducción

Uno de los desafíos actuales es conseguir y explicar la sincronización de sistemas caóticos estrictamente diferentes. El concepto de sincronización generalizada (SG) fue introducido en [1] y, este concepto es usado para describir el inicio de sincronización en sistemas caóticos direccionalmente acoplados. La SG es uno de los fenómenos fundamentales amplia y recientemente estudiados que tiene gran importancia teórica y aplicada.

La SG ocurre cuando las trayectorias de un sistema, a través de una función, son iguales a las trayectorias de otro. Este fenómeno tiende a suceder si existe un mapeo H_{ms} de las trayectorias $x_m(t) \in \mathbb{R}^{n_m}$ del atractor de la variedad algebraica del maestro M a las trayectorias $x_s(t)$ en el espacio del esclavo \mathbb{R}^{n_s} , es decir $H_{ms}(x_m(t)) = x_s(t)$. Para sistemas idénticos el mapeo funcional corresponde a la identidad, para sistemas distintos, el mapeo difiere de la identidad.

En SG dos problemas pueden ser mencionados: determinar si existe un mapeo funcional que relacione al esclavo con el maestro; y determinar la forma de esa función. Algunos métodos requieren que la forma de esa función sea conocida con anterioridad para establecer la presencia de SG, en contraparte existen métodos que no requieren el conocimiento explícito del mapeo.

En este trabajo se propone un método para la sincronización generalizada en sistemas no lineales estrictamente diferentes, donde es suficiente conocer la salida¹ del sistema para generar esta transformación, la cual está representada por medio de una base de trascendencia diferencial, es decir, existe un elemento \bar{y} y sea $n \geq 0$ el mínimo entero tal que $\bar{y}^{(n)}$ es analíticamente dependiente sobre $\bar{y}, \bar{y}^{(1)}, \dots, \bar{y}^{(n-1)}$ tal que

$$\bar{H}(\bar{y}^{(n)}, \bar{y}^{(n-1)}, \dots, \bar{y}, u, u^{(1)}, \dots, u^{(\gamma)}) = 0 \quad (1.1)$$

¹Se considera la sincronización cuando sólo algunos estados son medibles.

La principal idea es encontrar una señal dinámica de control de tal manera que, sea posible sincronizar el sistema de coordenadas transformadas, es decir, el sistema original es llevado a una forma triangular a través de una adecuada elección del elemento primitivo diferencial, dada normalmente como una combinación lineal de los estados conocidos y las entradas del sistema donde los coeficientes pertenecen al campo diferencial generado por el campo \mathcal{K} , la entrada u y sus cantidades diferenciales respectivamente.

1.1. Motivación

En los últimos años la sincronización de sistemas caóticos ha recibido gran atención en diversas áreas de investigación [2], [3], [4], [5], [6]. Resaltando el problema de sincronización de sistemas no lineales debido a sus aplicaciones en biología [7], medicina [8], transmisión segura de datos [9], [10], entre otros.

Varios esquemas de sincronización han sido propuestos los cuales se han enfocado en dos áreas. La primera está relacionada con el uso de observadores de estado, donde las principales aplicaciones recaen en la sincronización de osciladores no lineales, la segunda se basa en leyes de control que permiten la sincronización de osciladores no lineales, de diferente estructura y orden [11], [12].

Una de las aplicaciones más importantes sobre la sincronía de sistemas caóticos es el cifrado de información que desde la década de los 90s fue reportada en [13] y [14] como alternativa prometedora para la codificación. Entre algunas razones para afirmar que una señal caótica es apropiada para el encriptamiento se destacan las siguientes:

- La dinámica caótica es similar a la del ruido blanco y, de este modo puede emplearse para ocultar información y protegerla de algún intruso en el proceso de transmisión de datos.
- Los sistemas caóticos son deterministas y en algunos casos, sus dinámicas complejas son gobernadas por simples ecuaciones diferenciales no lineales.

El esquema de un sistema encriptador de información con base en el caos, consiste en un transmisor compuesto por dos elementos, un generador de caos (sistema maestro) o un algoritmo de encriptamiento para codificar la información en el caos. Un receptor, también formado por dos elementos, un sistema esclavo, el cual, tiene la consigna de reproducir el comportamiento generado en el transmisor (usualmente se diseña con los mismos elementos empleados en el transmisor para generar caos) y un algoritmo de desencriptamiento, cuya

función es extraer la información original escondida dentro de las señales caóticas transmitidas.

1.2. Objetivo de la tesis

El objetivo se centra en conseguir la sincronización generalizada entre dos sistemas caóticos estrictamente diferentes utilizando el elemento primitivo diferencial vía una retroalimentación dinámica.

1.3. Caos

La palabra caos se deriva del idioma griego, $\chi\acute{\alpha}\omicron\varsigma$ habitualmente se refiere a lo impredecible. Caos proviene de la raíz ghn o ghen del lenguaje protoindoeuropeo ("hueco", "muy abierto") [15]. En otras palabras, caos significa un estado de confusión absoluta o de inherente impredecibilidad en el comportamiento de un sistema natural complejo [16].

La teoría del caos es un campo matemático, el cual establece que los sistemas dinámicos no lineales que son aparentemente aleatorios son en realidad deterministas de ecuaciones mucho más simples. El fenómeno de la teoría del caos fue introducido al mundo moderno por Edward Lorenz en 1972 conceptualizado como "efecto mariposa".

El mundo de la ciencia ha sido confinado por siglos al mundo lineal. Es decir, matemáticos y físicos han pasado por alto sistemas dinámicos como aleatorios e impredecibles. Los únicos sistemas que podían ser entendidos en el pasado fueron aquellos que se creía que eran lineales, es decir, sistemas que siguen patrones y orden. La mayoría de fenómenos lineales han sido entendidos y dominados por la raza humana. Pero hubo algunas áreas que no pudieron ser explicados, como los patrones del clima, las corrientes oceánicas o acciones de las células, sistemas que además de ser no lineales, hoy en día son denominados caóticos.

¿Qué es el caos exactamente? los matemáticos dicen que es difícil definirlo, pero es fácil "reconocerlo cuando lo ves".

Ninguna definición del término caos ha sido universalmente aceptada todavía, pero casi todo el mundo estaría de acuerdo con las tres particularidades usadas en la siguiente definición [6].

El **caos** es un comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinista que exhibe dependencia sensible a condiciones iniciales.

- *comportamiento aperiódico a largo plazo*, significa que hay trayectorias que no se establecen en puntos fijos, órbitas periódicas, u órbitas cuasiperiódicas conforme $t \rightarrow \infty$. Por razones prácticas, se requiere que tales trayectorias no sean tan raras. Por ejemplo, se insiste que haya un conjunto abierto de condiciones iniciales que conduzcan a trayectorias aperiódicas, o quizá que tales trayectorias deberían ocurrir con probabilidad no cero, dada una condición inicial aleatoria.
- *determinista*, significa que el sistema no tiene entradas o parámetros aleatorios o ruidosos. El comportamiento irregular resulta de la no linealidad del sistema mas que del ruido.
- *dependencia sensible a condiciones iniciales*, significa que trayectorias cercanas se separan exponencialmente rápido, es decir, el sistema tiene un exponente positivo de Lyapunov.

El artículo que Edward Lorenz publicó en 1963 *Deterministic Nonperiodic Flow*, es acreditado para sentar las bases de la teoría del caos. Lorenz fue un meteorólogo quien desarrollo un modelo matemático usado para describir la forma en la que el aire se mueve en la atmósfera. Él descubrió por azar que cuando introdujo un valor inicial de tres decimales 0.506 en lugar de introducir el valor completo 0.506127, causó una enorme diferencia en los resultados del modelo. De esta forma descubrió el principio de sensibilidad a condiciones iniciales. Esta idea fue immortalizada cuando Lorenz dio una plática en la reunión No. 139 en la Asociación Americana para el avance de la ciencia en 1972 titulada "Predecibilidad: El aleteo de las alas de una mariposa en Brasil provoca un tornado en Texas". Con este discurso la idea del efecto mariposa nació y, ha sido usado desde entonces cuando se habla del caos. El principio básico es que, incluso en un sistema completamente determinista la menor variación en los datos iniciales puede causar cambios abruptos y aparentemente aleatorios en el resultado.

1.3.1. Sistemas caóticos

En el caos se busca conocer el carácter general del comportamiento del sistema a largo plazo, mas que predicciones numéricas de un estado futuro.

Los sistemas caóticos son inestables ya que tienden a no resistir cualquier perturbación externa, en su lugar reaccionan de maneras significativas. En otras palabras, no hacen caso omiso de las influencias externas, pero están parcialmente navegados por ellas. Esos sistemas son deterministas porque están formados de pocas ecuaciones diferenciales y no hacen referencia a mecanismos implícitos.

Un sistema determinista es un sistema en el cuál no está involucrada la aleatoriedad en el desarrollo de los estados futuros del sistema. Un sistema es caótico siempre que su evolución dependa de forma sensible a las condiciones iniciales. Esta propiedad implica que dos trayectorias emergiendo de dos diferentes, pero muy cercanas condiciones iniciales, se separan

exponencialmente con el paso del tiempo.

El hecho de que algunos modelos de sistemas dinámicos presentaran una crítica dependencia a las condiciones iniciales fue conocido desde finales del siglo XIX. Sin embargo, sólo en los últimos treinta años del siglo XX, observaciones experimentales han señalado que, de hecho, los sistemas caóticos son comunes en la naturaleza. Éstos pueden ser encontrados en meteorología, en el sistema solar, en el corazón y en el cerebro. Los sistemas caóticos también se presentan en química (Belousov-Zhabotinski reaction), en óptica no lineal (láseres), en electrónica (Chua-Matsumoto circuit), en dinámica de fluidos (Rayleigh-Bénard convection), por mencionar algunos [16].

Las peculiaridades de un sistema caótico se pueden listar a continuación:

- fuerte dependencia del comportamiento a las condiciones iniciales
- sensibilidad a los cambios de los parámetros del sistema
- presencia de fuertes armónicos en las señales
- dimensión fraccional de las trayectorias en espacio de estados
- presencia de una dirección de estiramiento representada por un exponente positivo de Lyapunov

El último puede ser considerado como un "índice" que cuantifica el comportamiento caótico.

Las soluciones de los sistemas caóticos pueden ser complejas y, típicamente no es fácil extrapolarlas de las tendencias actuales. El juego de ruleta es un interesante ejemplo que podría ilustrar la distinción entre sistemas aleatorios y sistemas caóticos: si se estudia las estadísticas de los resultados de juegos repetidos, se puede ver que la secuencia de números es completamente aleatoria. Esto llevó a Einstein observar que: "La única forma de ganar una moneda en la ruleta es robarla del banco". Por otra parte, el mecanismo de la rueda se conoce muy bien y, si se pudiera de alguna forma medir las condiciones iniciales para el sistema de la rueda, podríamos ser capaces de hacer una predicción a corto plazo de los resultados.

1.4. Sincronización

El origen de la palabra sincronización es una raíz griega ($\sigma\upsilon\gamma\ \chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$, la cual significa "compartir el tiempo común"). El significado original de sincronización ha sido mantenido hasta ahora en el uso coloquial de esta palabra, como acuerdo o correlación en el tiempo de

los diferentes procesos [17].

Entre los esfuerzos para la descripción científica del fenómeno de sincronización, se encuentran varios trabajos colosales que representan un gran avance para nuestro entendimiento acerca de este fenómeno. En 1665 el matemático y físico, inventor del reloj de péndulo, C. Huygens, descubrió una rara "especie de simpatía" entre dos relojes de péndulos suspendidos uno al lado del otro. Los relojes de péndulo oscilaban con exactamente la misma frecuencia y 180° defasados; cuando los péndulos fueron perturbados, el estado de antifase fue restablecido en menos de media hora y mantenido indefinidamente. Huygens dedujo que la interacción crucial para este efecto viene de "movimientos imperceptibles" del marco común de apoyo a los dos relojes. A partir de entonces, el fenómeno se convirtió en el centro de atención de científicos.

La sincronización involucra al menos dos elementos en interacción y, el comportamiento de algunos osciladores que interactúan ha sido estudiado intensivamente en física y matemáticas.

La sincronización, como un fenómeno emergente de una población de unidades que interactúan dinámicamente, ha fascinado a la humanidad desde tiempos ancestrales. Los procesos de sincronización son extremadamente abundantes en la naturaleza y juegan un rol muy importante en varios contextos diferentes como biología, ecología, climatología, sociología, tecnología e incluso en las artes [18], [19].

Se sabe que la sincronía tiene sus raíces en la vida humana desde los procesos metabólicos en nuestras células hasta las más altas tareas cognitivas que los seres humanos desarrollamos como un grupo de individuos. Por ejemplo, el efecto de sincronía ha sido descrito en experimentos de gente comunicándose, o trabajando juntos en un objetivo común, una conversación indirecta o de grupos de niños que interactúan a un ritmo inconsciente. En todos los casos, el propósito de la longitud de onda común o ritmo es para fortalecer el vínculo grupal. La falta de esa sincronía puede referenciar la tensión inconsciente, cuando las metas no pueden ser identificadas ni trabajadas se debe a que los miembros están fuera de sincronización [20].

El padre de la cibernética, Norbert Wiener [21] planteó un problema en su libro *Cybernetics*: ¿cómo es que miles de neuronas o luciérnagas o grillos pueden repentinamente estar en sintonía con los otros, todas se disparan o brillan o chirrían al mismo tiempo, sin ningún líder o señal del medio ambiente? Wiener, ni algún otro científico de la época obtuvieron algún progreso matemático significativo en el asunto, hasta la llegada de Winfree, él estudió [22] la dinámica no lineal de una gran población de osciladores con ciclos límite débilmente acoplados con frecuencias intrínsecas que se distribuyeron alrededor de un valor medio, de acuerdo con alguna distribución de probabilidad prescrita.

El hito aquí fue considerar osciladores biológicos como *osciladores de fase* omitiendo la amplitud. Trabajando en el marco de un modelo de campo medio, Winfree descubrió que

tal población de osciladores no idénticos pueden exhibir un notable fenómeno cooperativo. Cuando la varianza de la distribución de frecuencias es grande, los osciladores corren incoherentemente, cada uno cerca de su frecuencia natural. Este comportamiento se mantiene cuando se reduce la varianza hasta que un cierto umbral es cruzado. Sin embargo, debajo del umbral los osciladores se comienzan a sincronizar espontáneamente (ver [23]). El modelo original de Winfree no fue resuelto analíticamente hasta recientemente.

Aunque se probó que la técnica de Winfree tuvo éxito en describir la emergencia del orden espontáneo en el sistema, se basó en la premisa de que cada oscilador *siente* el mismo patrón de interacciones. Sin embargo, esta conectividad entre elementos de "todos con todos" de un gran número de población es difícil de concebir en el mundo real. Cuando el número de elementos es suficientemente grande, este patrón es incompatible con restricciones físicas como por ejemplo minimización de energía (o costos) y, en general con la rara observación de un gran rango de interacciones en sistemas formados por elementos macroscópicos. La particular estructura de conectividad local fue olvidada (de hecho descartada) en estas y técnicas subsecuentes.

1.4.1. Sincronización de sistemas caóticos

Recientemente, la investigación de sincronización se ha movido a sistemas caóticos. La sincronización del caos es un comportamiento llamativo de sistemas no lineales acoplados con comportamiento caótico desacoplado. Este comportamiento aparece en muchos procesos físicos y biológicos y, podría ser responsable de la transición de sistemas con muchos grados de libertad a comportamiento de bajas dimensiones [24], [25].

Frecuentemente, la sincronización del caos es entendida como un régimen en el cual dos sistemas caóticos acoplados exhiben idénticas, pero todavía, oscilaciones caóticas [13], [26].

La sincronización del caos [13], [26], [27], [28], [29] ha llamado mucho la atención en los últimos años debido a su rol en nuestro entendimiento de las características básicas de los sistemas artificiales y naturales. Varios tipos de sincronía del caos, cuya descripción podría requerir diferentes marcos de trabajo teóricos fueron encontrados y especificados en sistemas naturales. Esos tipos de sincronía incluye sincronización idéntica [1], sincronización generalizada (SG) [30], y sincronización de fase [31].

Generalmente hablando, la investigación sobre la sincronización del caos puede ser agrupada en torno a dos problemas. El primero, el cual es llamado problema de análisis, consiste en entender y/o dar una descripción teórica del fenómeno de sincronización. En el segundo problema, llamado problema de síntesis, uno se refiere a la búsqueda (o diseño) de una señal de control de sincronización, tal que dos sistemas caóticos exhiban varios tipos de comportamientos sincrónicos.

Ambos, análisis y síntesis son áreas de investigación activas y uno de los actuales retos es conseguir y explicar la sincronización de sistemas caóticos estrictamente diferentes.

1.4.2. Sincronización generalizada

En términos generales, dos sistemas están en sincronización si existe una clara relación en tiempo entre sus soluciones. Entonces, la forma más sencilla de sincronización ocurre cuando las soluciones de ambos sistemas coinciden *perfectamente* en el tiempo [17].

Se pueden definir diferentes tipos de sincronización: sincronización de fase, de retraso, completa, práctica, parcial y generalizada, por mencionar algunos. Alternativamente, algunos autores se han esforzado por plantear una definición unificada de sincronización entre sistemas deterministas de dimensión finita [32], [33].

El caso de estudio más simple de sincronización es la conexión unidireccional entre dos sistemas, comúnmente referido como configuración maestro-esclavo [13], [34], [35]. Históricamente, el estudio de sincronización estaba concentrado en sistemas idénticos. Recientemente, el análisis del comportamiento de sincronización de sistemas diferentes ha ganado importancia. Este asunto es frecuentemente encontrado en ciencias biológicas donde fenómenos como colaboración e interdependencia pueden ser pensados en términos de sincronización entre diferentes sistemas [36]. Como tal, el estudio de sincronización de sistemas estrictamente diferentes es un tema importante donde aún residen muchos desafíos.

El concepto de sincronización generalizada es usada para describir el inicio de una relación en tiempo entre los sistemas maestro y esclavo, la cual puede ser descrita en términos de un mapeo funcional estático y continuo que, toma las soluciones del esclavo y las hace coincidir exactamente con las trayectorias del maestro [1], [30]. De este modo muchos ejemplos de sincronización y aparente desincronización pueden ser estimadas como SG, de hecho, se puede considerar que la SG incluya a la sincronización idéntica, como un caso especial en donde el mapeo funcional corresponde a la identidad [37], [38].

Formas alternativas de sincronización generalizada han sido propuestas dependiendo de las características específicas del mapeo que describe la relación entre el maestro y el esclavo. La SG diferencial fue propuesta en [39], al requerir que el mapeo funcional sea una transformación suave. Otra forma de SG es descrita en términos de transformaciones lineales [40]. Con respecto a la sincronización generalizada de sistemas estrictamente diferentes, [41], [42], [43], [44] se propone el diseño de controladores no lineales para sincronización tal que, la SG es conseguida en términos de un mapeo funcional dado, el cual debe de ser al menos de Clase C^1 .

En la SG dos problemas pueden ser identificados: Determinar si existe un mapeo funcio-

nal que relacione el sistema maestro con el esclavo y, determinar la forma de esa función. Existen diferentes métodos para verificar la presencia de SG entre el maestro y el esclavo. Si la forma exacta del mapeo es conocida, un método directo puede ser aplicado, si el error de sincronización es asintóticamente estable, la SG es obtenida [30].

Alternativamente, la SG puede ser establecida analizando los exponentes transversos de Lyapunov de una ecuación variacional [45], [46]. Sin embargo, esos métodos requieren que la forma de la función sea conocida con anterioridad.

Una técnica poderosa para establecer la presencia de SG que no requiere previo conocimiento de la función es la técnica del sistema auxiliar [47], no obstante tiene el inconveniente de que, si bien SG es identificada, no hay manera de determinar el mapeo correspondiente. En algunos trabajos recientes, ambos problemas de la SG han sido integrados en un solo diseño [48], [49]. En particular, en el caso en que ambos sistemas puedan ser escritos en una forma triangular completa por medio de las transformaciones basadas en las derivadas de Lie, esto es, cuando su grado relativo y dimensión son iguales. La SG se consigue diseñando un controlador que hace que la dinámica del error en las variables transformadas sea asintóticamente estable [34]. Entonces, el mapeo funcional entre las variables del maestro y el esclavo es encontrado por la *composición* de sus transformaciones basadas en las derivadas de Lie. Por otra parte, cuando el grado relativo es menor que su dimensión, esta técnica tiene limitaciones, debido a que los estados no observables pueden evitar el inicio de la sincronización.

El enfoque utilizado en este trabajo, obtiene el mapeo entre las variables de ambos sistemas (maestro y esclavo) a través de la composición de las transformaciones adquiridas por medio del elemento primitivo diferencial (la salida o estado observable del sistema maestro) y las derivadas de éste.

1.5. Organización del trabajo

El trabajo de tesis se encuentra distribuido en seis capítulos que se describen a continuación.

En el **Capítulo 1** se presentan de manera general la idea de sincronización, así como la de sincronización generalizada y, los problemas que ésta conlleva cuando se trata de conseguir. Se introducen conceptos como base de trascendencia diferencial y elemento primitivo diferencial, de este último se estará haciendo énfasis a lo largo del trabajo.

Por otra parte, se menciona la importancia de la sincronización en sistemas caóticos y se detalla una aplicación con respecto al cifrado de información. Finalmente, se aborda el marco teórico, dividido en dos secciones, en la primera se explica lo que es el caos, sus parti-

cularidades y una breve reseña de la primera vez que fue introducido este concepto, además de definir los sistemas caóticos y algunos ejemplos de éstos. La segunda parte trata de la sincronización, sus orígenes y aplicaciones en el mundo real; posteriormente se plantea el tema de la sincronización en sistemas caóticos. El capítulo concluye con una presentación referente a sincronización generalizada, en donde se destacan técnicas ya utilizadas basadas en las derivadas de Lie para conseguirla.

El **Capítulo 2** explica todo el instrumental matemático que será de utilidad para la obtención de la sincronización generalizada. Entre las definiciones presentes se encuentran la Sincronización Generalizada y los sistema Picard-Vessiot.

En el **Capítulo 3** se describe detalladamente el proceso de análisis para el diseño del controlador capaz de conseguir la SG entre los sistemas caóticos de Lorenz (maestro) y de Chua (esclavo). Adicionalmente, se realiza el análisis de estabilidad utilizando el método de Ruth-Hurwitz y el criterio de Lyapunov para probar que la dinámica del error es asintóticamente estable.

En el **Capítulo 4** se muestran los resultados numéricos de la sincronización generalizada entre los sistemas de Lorenz y Chua, obtenidos de por medio de Matlab-Simulink. Las imágenes presentadas en este capítulo muestran la efectividad del método propuesto, alcanzando la sincronización generalizada (en coordenadas originales) y la sincronización completa (en coordenadas transformadas).

El **Capítulo 5** se compone de una parte teórica y otra práctica relacionadas a los sistemas de Lorenz y de Chua. La parte teórica describe la naturaleza de cada uno de los sistemas, su procedencia y naturaleza. Se refieren conceptos como escalamientos del tiempo (para acelerar o retardar la dinámica del sistema) y corriente (para poder trabajar con señales adecuadas, no muy grandes ni muy pequeñas). La parte práctica proporciona los diagramas y las tablas de valores comerciales de los componentes electrónicos para la implementación del circuito. Se citan algunas sugerencias y recomendaciones acerca de dicha implementación. Los diagramas a bloques y electrónicos de los circuitos se muestran en este punto, así como las gráficas de los estados obtenidas por simulación y, las gráficas de datos obtenidos directamente del circuito.

Por último, en el **Capítulo 6** nos concentramos en las conclusiones obtenidas a través de los resultados numéricos y experimentales, además de hacer una apreciación para trabajos futuros.

Capítulo 2

Conceptos matemáticos

Se consideran las siguientes definiciones básicas.

Definición 1 Una extensión de un campo diferencial L/\mathcal{K} es dada por dos campos diferenciales \mathcal{K} , L tal que:

- (i) \mathcal{K} es subcampo de L ,
- (ii) la derivación (reglas usuales) de \mathcal{K} es la restricción a \mathcal{K} de la derivación de L .

Definición 2 Un elemento $a \in L$ se dice que es diferencialmente algebraico sobre \mathcal{K} si y solo si satisface una ecuación diferencial $P(a, \dot{a}, \dots, a^{(\alpha)}) = 0$, donde P es un polinomio sobre \mathcal{K} en a y sus derivadas en el tiempo.

Definición 3 Un elemento $a \in L$ se dice que es diferencialmente trascendental sobre \mathcal{K} si y solo si no es diferencialmente algebraico sobre \mathcal{K} .

El teorema de elemento primitivo diferencial [51] establece que existe un solo elemento $\delta \in L$, el cual es un elemento primitivo diferencial, tal que $L = \mathcal{K}(\delta)$, es decir L es diferencialmente generado por \mathcal{K} y δ .

Definición 4 Una dinámica es definida como una extensión algebraica diferencial finitamente generada $L/\mathcal{K}\langle u \rangle$ del campo diferencial $\mathcal{K}\langle u \rangle$, donde $\mathcal{K}\langle u \rangle$ denota el campo diferencial generado por \mathcal{K} y los elementos de un conjunto finito u de cantidades diferenciales.

Definición 5 Un sistema es Picard-Vessiot (PV) si y solo si el espacio vectorial $\mathcal{K}\langle u \rangle$ generado por las derivadas del conjunto $\{u^{(\mu)}, \mu \geq 0\}$ tiene dimensión finita.

El sistema (1.1) puede ser resuelto localmente como

$$\bar{y}^{(n)} = -\mathcal{L}(\bar{y}^{(n-1)}, \dots, \bar{y}, u, u^{(1)}, \dots, u^{(\gamma-1)}) + u^{(\gamma)}$$

y recordando $\xi_i = \bar{y}^{(i-1)}$, $1 \leq i \leq n$. Entonces una forma local es obtenida la cual puede ser vista como GOCF (Forma Canónica de Observabilidad Generalizada),

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
 \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{n-1} &= \xi_n \\
 \dot{\xi}_n &= -\mathcal{L}(\xi_1, \dots, \xi_n, u, u^{(1)}, \dots, u^{(\gamma-1)}) + u^{(\gamma)} \\
 \bar{y} &= \xi_1
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se considera ahora la siguiente clase de sistema no lineal:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= F(x, u) \\
 y &= Cx
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $F(\cdot)$ es una función vectorial no lineal, u es la entrada, $y \in \mathbb{R}^n$ es la salida y C es una matriz real de tamaño apropiado.

El siguiente lema es un resultado importante.

Lema 1 *Un sistema no lineal (2.2) es transformable a una GOCF si y solo si éste es PV.*

Prueba.

Sea el conjunto $\{\varepsilon, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(n-1)}\}$ una base de trascendencia diferencial finita con $\varepsilon^{(i-1)} = y^{(i-1)}$, $1 \leq i \leq n$, donde $n \geq 0$ es el mínimo entero tal que y^n es dependiente de $y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}, u, \dots$

Redefiniendo $\xi_i = \varepsilon^{i-1}$, $1 \leq i \leq n$, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_j &= \xi_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\
 \dot{\xi}_n &= -\mathcal{L}(\xi_1, \dots, \xi_n, u, u^{(1)}, \dots, u^{(\gamma-1)}) + u^{(\gamma)}
 \end{aligned}$$

En este trabajo se discute la sincronización generalizada de sistemas que son estrictamente diferentes y completamente triangularizables. Para esta clase de sistemas, el problema de SG es resuelto en el sentido de [1], [30] usando una dinámica de retroalimentación que estabiliza la dinámica del error de sincronización.

El problema de SG se establece como sigue:

Se consideran dos sistemas lineales en configuración maestro-esclavo, en donde el sistema maestro está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= F_m(x_m, u_m) \\ y_m &= h_m(x_m)\end{aligned}\tag{2.3}$$

y el esclavo por

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= F_s(x_s, u_s(x_s, y_m)) \\ y_s &= h_s(x_s)\end{aligned}\tag{2.4}$$

donde $x_s = (x_{1_s}, \dots, x_{n_s}) \in \mathbb{R}^{n_s}$, $x_m = (x_{1_m}, \dots, x_{n_m}) \in \mathbb{R}^{n_m}$, $h_s : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_m : \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_m = (u_{1_m}, \dots, u_{m_m}) \in \mathbb{R}^{m_m}$, $u_s : \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_m, y_s \in \mathbb{R}$, F_s, F_m, h_s, h_m se asumen como polinomios en sus argumentos.

Este es el caso mas general porque los sistemas (2.3) y (2.4) no son necesariamente sistemas no lineales afines en la entrada [50]. En efecto, la dinámica del sistema esclavo no necesita ser expresada como una parte lineal y una no lineal como en [41], donde la función vectorial no lineal está restringida a satisfacer una condición de Lipschitz.

La definición formal de SG se proporciona a continuación

Definición 6 Sincronización Generalizada (SG). Se dice que los sistemas maestro y esclavo están en SG si existe un elemento primitivo diferencial tal que genere una transformación $H_{ms} : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$ con $H_{ms} = \Phi_m^{-1} \circ \Phi_s$, además existe una variedad algebraica $M = \{(x_s, x_m) \mid x_m = H_{ms}(x_s)\}$ y un compacto $B \subset \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_m}$ con $M \subset B$ tal que sus trayectorias con condiciones iniciales en B , permanecen en M cuando t es suficientemente grande ($t \rightarrow \infty$).

La definición 6 nos lleva al siguiente criterio:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_{ms}(x_s) - x_m\| = 0 \quad (2.5)$$

Observación

Note que la sincronización completa o idéntica es un caso particular de SG, es decir la transformación H_{ms} es la identidad.

El elemento primitivo diferencial es elegido como:

$$y = \sum_i \alpha_i x_i + \sum_j \beta_j u_j, \quad \alpha_i, \beta_j \in K\langle u \rangle$$

donde $K\langle u \rangle$ es un campo diferencial generado por K , u y sus cantidades diferenciales.

Proposición 1 *Supóngase que los sistemas (2.3) y (2.4) pueden ser transformados a una GOCF. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_s - z_m\| = 0$$

lo cual implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_{ms}(x_s) - x_m\| = 0$$

donde z_m y z_s son las trayectorias de los sistemas maestro y esclavo respectivamente en la transformación de coordenadas.

En otras palabras, la sincronización completa es conseguida en el sistema de coordenadas transformado y consecuentemente la SG es obtenida en coordenadas originales.

Prueba.

Sin pérdida de generalidad el elemento primitivo diferencial para el sistema maestro puede ser propuesto como

$$y_m = \sum_i \alpha_{m_i} x_{m_i} = z_{m_1}, \quad \alpha_{m_i} \in \mathbb{R}$$

y para el esclavo

$$y_s = \sum_i \alpha_{s_i} x_{s_i} + \sum_j \beta_{s_j} u_{s_j} = z_{s_1}, \quad \alpha_{s_i}, \beta_{s_j} \in \mathbb{R} \langle u_s \rangle$$

lo cual conduce a:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{m_j} &= z_{m_{j+1}}, \\ \dot{z}_{m_n} &= -\mathcal{L}_m(z_{m_1}, \dots, z_{m_n}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{z}_{s_j} &= z_{s_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \dot{z}_{s_n} &= -\mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_s, \dot{u}_s, \dots, u_s^{(\gamma-1)}) + u_s^{(\gamma)} \end{aligned}$$

Se definen las señales de control como $u_1 = u_s, u_2 = \dot{u}_s, \dots, u_\gamma = u_s^{(\gamma-1)}$, entonces se propone el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= u_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq \gamma-1 \\ \dot{u}_\gamma &= -\mathcal{L}_m(z_{m_1}, \dots, z_{m_n}) + \mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + k(z_m - z_s) \end{aligned}$$

en donde $z_m = (z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n})'$, $z_s = (z_{s_1}, z_{s_2}, \dots, z_{s_n})'$ y $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Entonces la dinámica de lazo cerrado del error de sincronización $e_z = z_m - z_s$ es dada por el siguiente sistema aumentado

$$\begin{aligned} \dot{e}_{z_j} &= e_{z_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \dot{e}_{z_n} &= -\mathcal{L}_m(z_{m_1}, \dots, z_{m_n}) + \mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) - \dot{u}_\gamma \\ \dot{u}_i &= u_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \gamma-1 \\ \dot{u}_\gamma &= -\mathcal{L}_m(z_{m_1}, \dots, z_{m_n}) + \mathcal{L}_s(z_{s_1}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + k e_z \end{aligned}$$

Finalmente se tiene que

$$\dot{e}_z = Ae_z$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & & -k_{n-1} & -k_n \end{bmatrix}$$

en donde las ganancias (k_1, k_2, \dots, k_n) son elegidas tal que el espectro de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ solo tiene partes reales negativas.

■

Como un resultado inmediato del Lema 1 y la Proposición 1 se tiene

Corolario 1 *Todo sistema esta en SG si y solamente si es PV.*

Capítulo 3

Sincronización generalizada entre los sistemas caóticos de Lorenz y Chua

Considere dos sistemas caóticos: Lorenz y Chua, ambos del mismo orden $n_L = n_C = 3$, en una configuración maestro-esclavo.

Los subíndices L y C corresponden a los sistemas de Lorenz y Chua respectivamente.

El sistema maestro se determina por las ecuaciones de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1L} &= a_L(x_{2L} - x_{1L}) \\ \dot{x}_{2L} &= b_L x_{1L} - x_{2L} - x_{1L}x_{3L} \\ \dot{x}_{3L} &= -c_L x_{3L} + x_{1L}x_{2L}\end{aligned}\tag{3.1}$$

y sea

$$y_L = x_{1L}$$

la salida del sistema (3.1), el elemento primitivo diferencial.

Se propone el sistema de Chua como el sistema esclavo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1C} &= a_C(x_{2C} - x_{1C} - \nu_x) \\ \dot{x}_{2C} &= x_{1C} - x_{2C} + x_{3C} \\ \dot{x}_{3C} &= -b_C x_{2C}\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde $\nu_x = m_0 x_{1C} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x_{1C} + 1| - |x_{1C} - 1|) \in \mathbb{R}$.

En este caso asumimos como elemento primitivo diferencial la salida del sistema (3.2) junto con la entrada u_1 .

$$y_C = x_{3C} + u_1$$

Los parámetros a_L, b_L, c_L , y a_C, b_C, m_0 y m_1 son elegidos para asegurar que los sistemas (3.1) y (3.2) generen caos; de esta forma

$$a_L = 10, b_L = 28, c_L = 8/3, a_C = 15, b_C = 25.58, m_0 = -5/7 \text{ y } m_1 = -8/7 \quad (3.3)$$

La señal de entrada en el sistema maestro u_L es elegida como cero sin pérdida de generalidad, esto es, sin afectar los resultados de sincronización, mientras que la señal de entrada aplicada al sistema esclavo $u_C (= u_1)$, se diseña para que la SG entre (3.1) y (3.2) sea posible.

Los elementos de la transformación en ambos sistemas son, el elemento primitivo diferencial y sus derivadas hasta el orden $n - 1$.

Entonces,

el primer elemento de la transformación (*elemento primitivo diferencial*) está dado por x_{1L}

el segundo elemento es $\dot{x}_{1L} = a_L(x_{2L} - x_{1L})$ y,

$\ddot{x}_{1L} = a_L(\dot{x}_{2L} - \dot{x}_{1L}) = a_L(b_L x_{1L} - x_{2L} - x_{1L} x_{3L} - a_L(x_{2L} - x_{1L}))$ es el último componente de la transformación.

De las ecuaciones anteriores se obtiene la siguiente transformación de coordenadas

$$\Phi_L(x_L) = \begin{bmatrix} z_{1L} \\ z_{2L} \\ z_{3L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_L \\ \dot{y}_L \\ \ddot{y}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1L} \\ a_L(x_{2L} - x_{1L}) \\ a_L(b_L x_{1L} - x_{2L} - x_{1L} x_{3L} - a_L(x_{2L} - x_{1L})) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

cuya inversa correspondiente se determina a continuación

De (3.4) se tiene que

$$x_{1L} = z_{1L} \quad (3.5)$$

y

$$z_{2L} = a_L(x_{2L} - x_{1L}) \quad (3.6)$$

sustituyendo (3.5) en (3.6) y despejando x_{2L}

$$x_{2L} = \frac{z_{2L}}{a_L} + z_{1L} \quad (3.7)$$

Finalmente, para obtener x_{3L} se sustituye (3.5) y (3.7) en la tercer componente de (3.4) tal que,

$$\begin{aligned} z_{3L} &= a_L(b_L x_{1L} - x_{2L} - x_{1L} x_{3L} - a_L(x_{2L} - x_{1L})) \\ &= a_L(b_L z_{1L} - \frac{z_{2L}}{a_L} - z_{1L} - z_{1L} x_{3L} - z_{2L} - a_L z_{1L} + a_L z_{1L}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

así,

$$x_{3L} = -\frac{z_{3L}}{a_L z_{1L}} - \frac{z_{2L}}{a_L z_{1L}} - \frac{z_{2L}}{z_{1L}} + b_L - 1 \quad (3.9)$$

Por lo tanto, la inversa de la transformación de coordenadas está dada por la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} x_{1L} \\ x_{2L} \\ x_{3L} \end{bmatrix} = \Phi_L^{-1}(z_L) = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{1L}(z_L) \\ \tilde{\phi}_{2L}(z_L) \\ \tilde{\phi}_{3L}(z_L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1L} \\ \frac{z_{2L}}{a_L} + z_{1L} \\ -\frac{z_{3L}}{a_L z_{1L}} - \frac{z_{2L}}{z_{1L}} - \frac{z_{2L}}{a_L z_{1L}} + b_L - 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

En las coordenadas transformadas (3.4), la dinámica del sistema de Lorenz (3.1) se reescribe como

$$\dot{z}_L = \begin{bmatrix} \dot{z}_{1L} \\ \dot{z}_{2L} \\ \dot{z}_{3L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2L} \\ z_{3L} \\ \alpha_L(x_L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_L(x_{2L} - x_{1L}) \\ a_L(b_L x_{1L} - x_{2L} - x_{1L}x_{3L} - a_L(x_{2L} - x_{1L})) \\ (a_L^2 + a_L b_L - a_L x_{3L})\dot{x}_{1L} - (a_L^2 + a_L)\dot{x}_{2L} - a_L x_{1L}\dot{x}_{3L} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Se procede de forma análoga con el sistema esclavo, de tal manera que,

el primer elemento de la transformación es $x_{3C} + u$

el segundo componente es $\dot{x}_{3C} + \dot{u} = -b_C x_{2C} + \dot{u}$

y el último elemento está dado por $\ddot{x}_{3C} + \ddot{u} = -b_C \dot{x}_{2C} + \ddot{u} = -b_C(x_{1C} - x_{2C} + x_{3C}) + \ddot{u}$

donde

$$u = u_1 \quad \dot{u} = u_2 \quad \ddot{u} = u_3$$

son señales de control que necesitan ser diseñadas para lograr sincronización *completa* entre las trayectorias de los sistemas (3.4) y (3.12).

Entonces, la transformación de coordenadas del sistema de Chua está representada por:

$$\Phi_C(x_C) = \begin{bmatrix} z_{1C} \\ z_{2C} \\ z_{3C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_C \\ \dot{y}_C \\ \ddot{y}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{3C} + u_1 \\ -b_C x_{2C} + u_2 \\ -b_C(x_{1C} - x_{2C} + x_{3C}) + u_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La transformación inversa se calcula de manera análoga al sistema maestro.

Se puede ver del arreglo anterior que $z_{1C} = x_{3C} + u_1$, despejando el término x_{3C} se tiene

$$x_{3C} = z_{1C} - u_1 \quad (3.13)$$

Para obtener el segundo elemento, simplemente se despeja de la expresión $z_{2C} = -b_C x_{2C} + u_2$ dada en (3.12), tal que

$$x_{2C} = \frac{-z_{2C} + u_2}{b_C} \quad (3.14)$$

Por último, el primer elemento de la transformación se encuentra sustituyendo (3.13) y (3.14) en la ecuación $z_{3C} = -b_C(x_{1C} - x_{2C} + x_{3C}) + u_3$, despejando x_{1C} se obtiene

$$x_{1C} = -\frac{1}{b_C}(z_{3C} - u_3) - \frac{1}{b_C}(z_{2C} - u_2) - (z_{1C} - u_1) \quad (3.15)$$

Entonces, la inversa de la transformación de coordenadas se determina de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x_{1C} \\ x_{2C} \\ x_{3C} \end{bmatrix} = \Phi_C^{-1}(z_C) = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{1C}(z_C) \\ \tilde{\phi}_{2C}(z_C) \\ \tilde{\phi}_{3C}(z_C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b_C}(z_{3C} - u_3) - \frac{1}{b_C}(z_{2C} - u_2) - (z_{1C} - u_1) \\ -\frac{1}{b_C}(z_{2C} - u_2) \\ z_{1C} - u_1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

El sistema de Chua (3.2) en coordenadas transformadas (3.12), se reescribe a continuación

$$\begin{aligned} \dot{z}_C &= \begin{bmatrix} \dot{z}_{1C} \\ \dot{z}_{2C} \\ \dot{z}_{3C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_C x_{2C} + u_2 \\ -b_C(x_{1C} - x_{2C} + x_{3C}) + u_3 \\ -b_C(\dot{x}_{1C} - \dot{x}_{2C} + \dot{x}_{3C}) + \dot{u}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_{2C} \\ z_{3C} \\ \alpha_C(x_C) + \bar{u} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde

$$\alpha_C(x_C) = -b_C(\dot{x}_{1C} + \dot{x}_{2C} + \dot{x}_{3C}) \quad \text{y} \quad \dot{u}_3 = \bar{u}$$

Por lo tanto, el sistema de Chua aumentado y controlado en coordenadas transformadas se representa como:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{1C} \\ \dot{z}_{2C} \\ \dot{z}_{3C} \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2C} \\ z_{3C} \\ \alpha_C(x_C) + \bar{u} \\ u_2 \\ u_3 \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

El objetivo de control es encontrar \bar{u} tal que las trayectorias del sistema esclavo en (3.18) siga a las trayectorias del sistema maestro en (3.11). En otras palabras, necesitamos encontrar \bar{u} del sistema (3.18), tal que $(z_{1C}, z_{2C}, z_{3C}) \rightarrow (z_{1L}, z_{2L}, z_{3L})$ conforme $t \rightarrow \infty$.

El error de sincronización en coordenadas transformadas e_z , se define como

$$e_z = \begin{bmatrix} e_{z1} \\ e_{z2} \\ e_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1L} - z_{1C} \\ z_{2L} - z_{2C} \\ z_{3L} - z_{3C} \end{bmatrix}$$

y la dinámica del error en z está determinada por:

$$\dot{e}_z = \begin{bmatrix} \dot{e}_{z1} \\ \dot{e}_{z2} \\ \dot{e}_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{z2} \\ e_{z3} \\ \alpha_L(x_L) - \alpha_C(x_C) - \bar{u}(x_C, y_L) \end{bmatrix}$$

La transformación H_{LC} se calcula a partir de (3.10) y (3.12), es decir

$$\begin{aligned} H_{LC} &= \Phi_L^{-1} \circ \Phi_C(x_C) = \Phi_L^{-1} \begin{pmatrix} z_{1C} \\ z_{2C} \\ z_{3C} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{3C} + u_1 \\ \frac{1}{a_L}(\dot{x}_{3C} + u_2) + (x_{3C} + u_1) \\ -\frac{1}{(x_{3C} + u_1)} \left[\frac{-b_C \dot{x}_{2C} + u_3}{a_L} + \left(1 + \frac{1}{a_L}\right) \dot{x}_{3C} + \left(1 + \frac{1}{a_L}\right) u_2 \right] + b_L - 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

luego, la transformación inversa de H_{LC} se obtiene de (3.4) y (3.16)

$$\begin{aligned}
 H_{LC}^{-1} &= \phi_C^{-1} \circ \phi_L = \Phi_C^{-1} \begin{pmatrix} z_{1L} \\ z_{2L} \\ z_{3L} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{b_C} [a_L \dot{x}_{2L} - (a_L - 1) \dot{x}_{1L}] - x_{1L} + \frac{1}{b_C} (u_2 + u_3) + u_1 \\ -\frac{1}{b_C} (\dot{x}_{1L} - u_2) \\ x_{1L} - u_1 \end{bmatrix} \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Análisis de estabilidad

Si la señal de control \bar{u} está definida como

$$\bar{u}(x_C, y_L) = \dot{u}_3 = \alpha_L(x_L) - \alpha_C(x_C) - k e_z$$

donde $k = [k_1, k_2, k_3]$ es el vector de ganancia. Entonces, la dinámica del error de sincronización esta dada por,

$$\dot{e}_z = A e_z$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

para valores apropiados de k_1, k_2 y k_3 se concluye que $\|e_z\| \rightarrow 0$ cuanto t es suficientemente grande ($t \rightarrow \infty$).

Utilizando el método de Ruth Hurwitz (R-H).

Dado el polinomio característico de (3.21).

$$s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1$$

Se aplica el criterio de estabilidad de *Ruth Hurwitz* y se obtienen las siguientes restricciones

$$k_1 > 0, \quad k_2 > \frac{k_1}{k_3} \quad y \quad k_3 > 0 \quad (3.22)$$

lo anterior garantiza la estabilidad asintótica de la dinámica del error.

En el presente trabajo $k_1 = 1300$, $k_2 = 900$ y $k_3 = 500$, son los valores escogidos de acuerdo al criterio (3.22).

Utilizando el criterio de Lyapunov

Sea $V = e^T P e$ una función candidata de Lyapunov, con P simétrica positiva definida, que satisfice:

$$A^T P + P A = -Q \quad (3.23)$$

donde Q (también simétrica positiva definida) se propone de la siguiente manera

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

sustituyendo (3.21) y (3.24) en (3.23), se tiene que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_1 \\ 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 1 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual implica que

$$P = \begin{bmatrix} \frac{k_1^3 + k_1 k_3^2 + k_1^2 k_3 + k_2^2 k_3 - k_1 k_2}{2(k_1 k_2 k_3 - k_1^2)} & \frac{k_1^2 k_2 + k_2 k_3^2 + k_1^2}{2(k_1 k_2 k_3 - k_1^2)} & \frac{1}{2k_1} \\ \frac{k_1^2 k_2 + k_2 k_3^2 + k_1^2}{2(k_1 k_2 k_3 - k_1^2)} & \frac{2(k_3^2 + k_2)(k_1^2 + k_3^2 + k_1 k_3)(k_1 k_3) + k_3(2k_1 k_2 k_3 - 2k_1^2)(k_1 k_2 - k_3)}{2(k_1 k_2 k_3 - k_1^2)(k_1 k_3^2)} & \frac{k_1^2 + k_3^2 + k_1 k_3}{2(k_1 k_2 k_3 - k_1^2)} \\ \frac{1}{2k_1} & \frac{k_1^2 + k_3^2 + k_1 k_3}{2(k_1 k_2 k_3 - k_1^2)} & \frac{k_1 k_2 + k_1 + k_3}{2(k_1 k_2 k_3 - k_1^2)} \end{bmatrix}$$

en donde los menores principales deben ser positivos.

Consecuentemente, se busca que $\dot{V} < 0$, esto es:

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} = e^T A^T P e + e^T P A e = e^T (A^T P + P A) e = -e^T Q e < 0$$

$\therefore \dot{e} = A e$ es asintóticamente estable, para valores apropiados de k_1 , k_2 y k_3 .

Capítulo 4

Resultados numéricos

La Figura (4.1) muestra que se cumple la Sincronización Completa de los sistemas maestro y esclavo en z . Los valores de los parámetros están dados por (3.3) y el vector de ganancias es $k = [1300, 900, 500]$.

Nótese que el sistema esclavo en coordenadas transformadas sigue con exactitud al maestro.

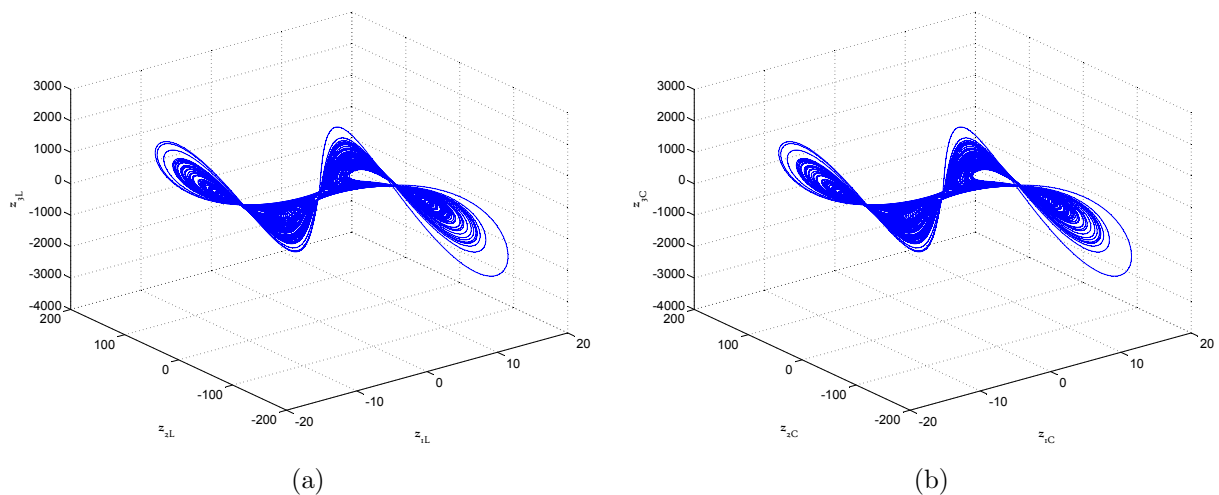


Figura 4.1: Sistemas de Lorenz (a) y Chua (b) en z (coordenadas transformadas).

En la Figura (4.2) se presenta la norma del error en z (Proposición 1) y las trayectorias del error $e_z = z_L - z_C$.

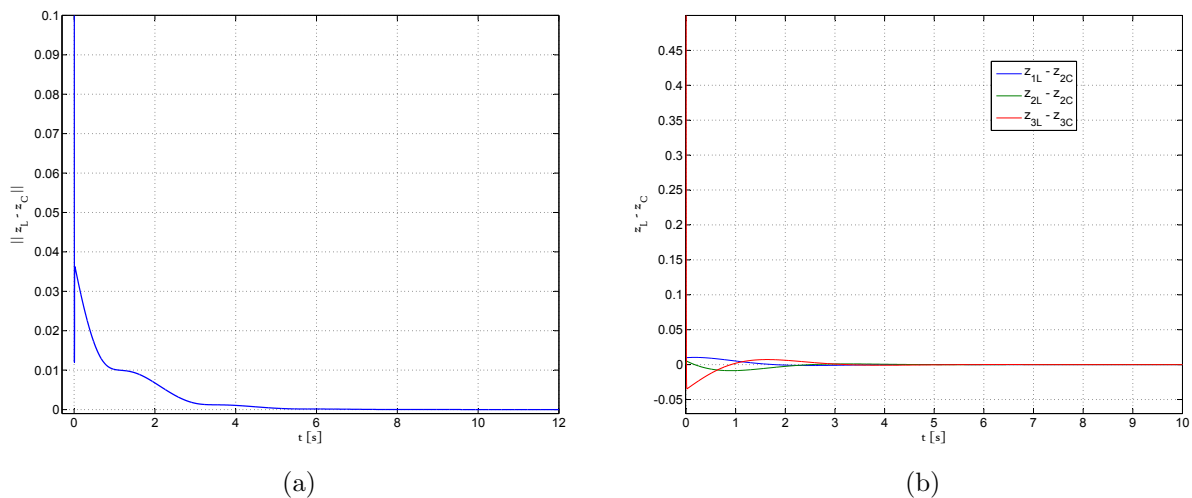


Figura 4.2: Norma del error (a) y trayectorias del error (b) en coordenadas transformadas (z).

En la Figura (4.3) se exponen las trayectorias del error $z_L - z_C$ en el espacio de fase, se puede observar que la curva empieza en alguna posición diferente del punto $P(0, 0, 0)$ y, conforme el tiempo se hace suficientemente grande la trayectoria se acerca al origen.

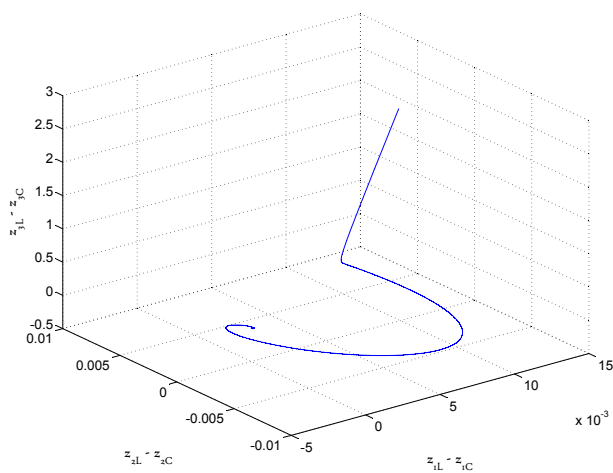


Figura 4.3: Trayectorias del error en espacio fase, $e_z = z_L - z_C$.

La figura (4.4) representa la Sincronización Generalizada en el sentido de (2.5). Se aprecia

que, las trayectorias del sistema esclavo bajo la transformación H_{LC} siguen a las trayectorias del sistema maestro.

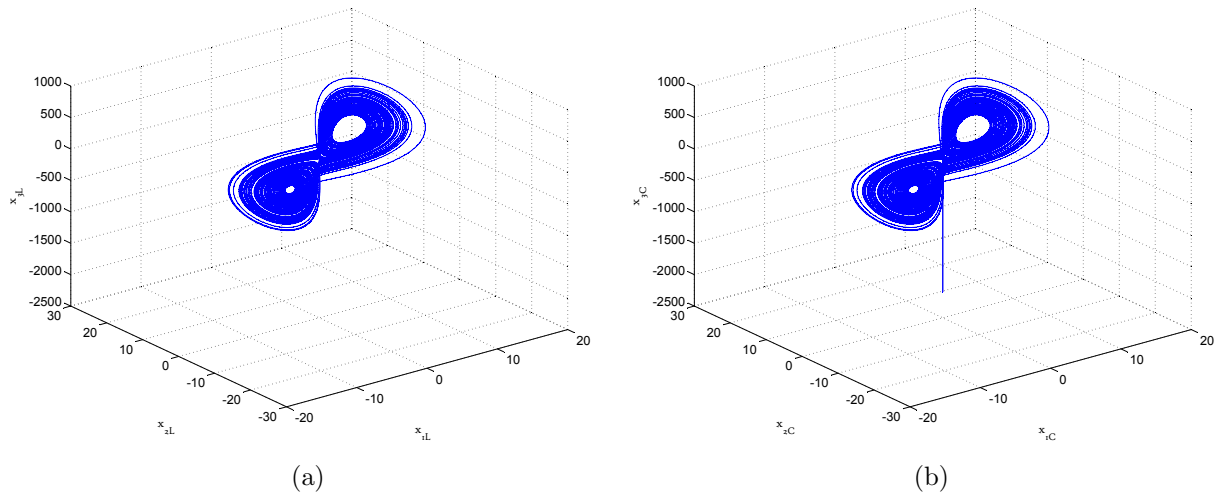


Figura 4.4: (a) Sistemas de Lorenz y (b) sistema de Chua bajo la transformación H_{LC} . Ambos en coordenadas originales (x).

La Figura (4.5a) muestra que $\|H_{LC}(x_C) - x_L\| \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, esto se puede representar como el error en coordenadas originales. La Figura (4.5b) ilustra las trayectorias $H_{LC}(x_C) - x_L$.

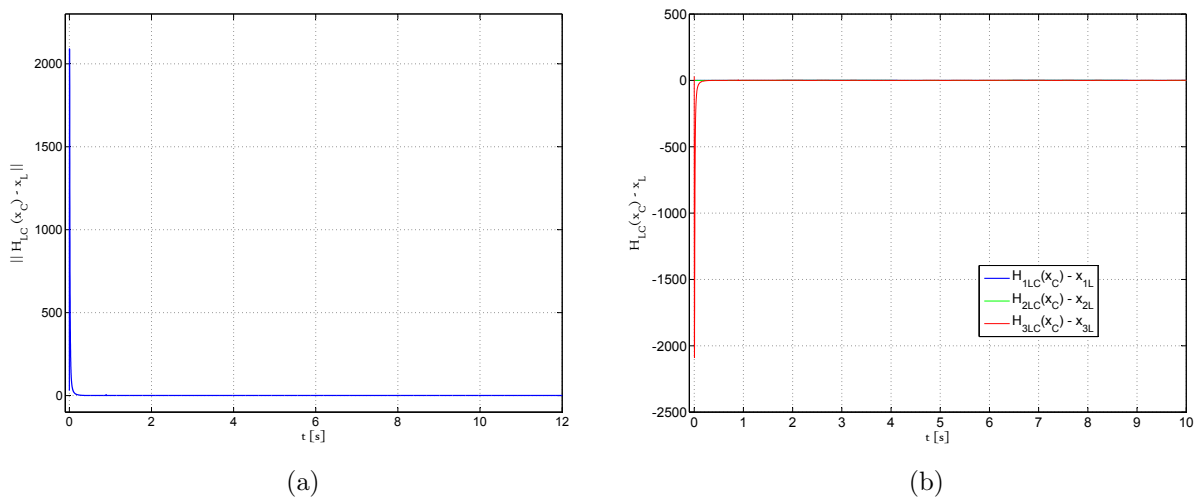


Figura 4.5: Norma del error (a) y trayectorias del error en x .

Finalmente, se ilustran (Figura 4.6) las trayectorias de $H_{LC}(x_C) - x_L$ en el espacio de fase, notese que hay convergencia al origen.

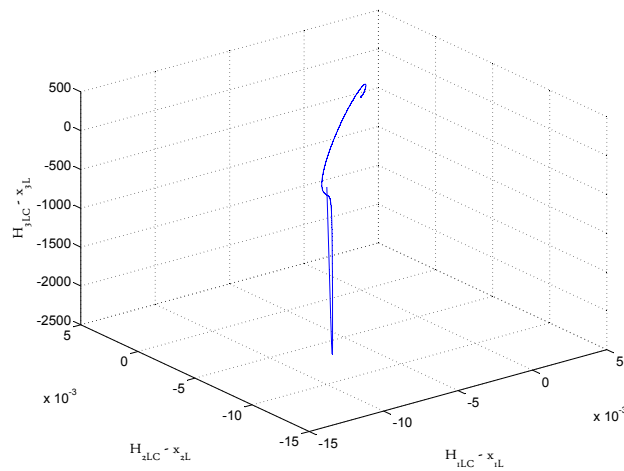


Figura 4.6: Trayectorias del error en espacio de fase $H_{LC}(x_C) - x_L$.

4.1. Diagrama de simulación

A continuación se presenta el diagrama implementado sobre Matlab-Simulink para obtener los resultados numéricos.

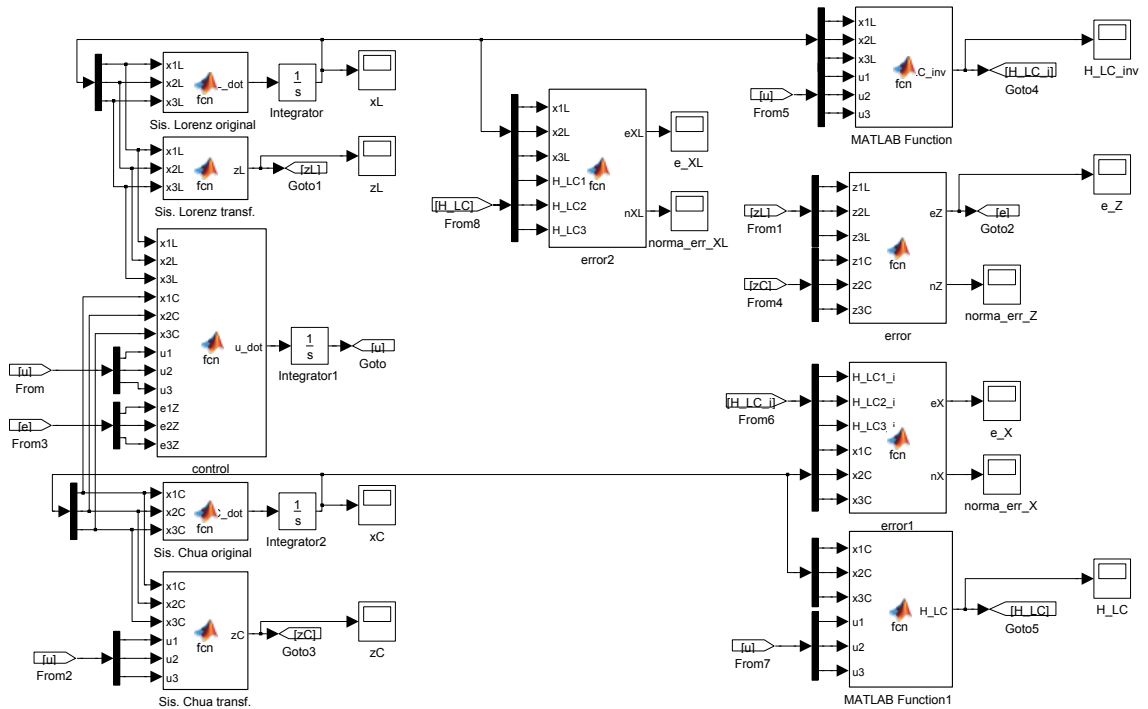


Figura 4.7: Diagrama en Matlab-Simulink.

Las condiciones iniciales para el sistema de Lorenz fueron $[10e - 3; 1e - 2; 10e - 2]$, para el sistema de Chua $[1e - 10; 1e - 10; 1e - 5]$ y para la dinámica del controlador se utilizaron $[10e - 10; 10e - 10; 10e - 5]$. Dormand-Prince de 5^{to} orden fue el método de integración elegido y, se estableció un paso de integración fijo de $1e - 3$.

El tiempo de simulación fue de 100s para graficar las trayectorias de ambos sistemas, mientras que, 14s fueron suficientes para apreciar las dinámicas y normas del error en coordenadas transformadas y coordenadas originales.

Capítulo 5

Circuitos de Lorenz y Chua

5.1. Circuito de Lorenz

El sistema de Lorenz es uno de los osciladores comunmente usados para explorar el caos. Este importante sistema fue originalmente desarrollado como un modelo matemático simplificado de las inestabilidades atmosféricas y no se deriva de algún circuito electrónico de estructura básica. Como tal, realizar un oscilador electrónico de Lorenz requiere de una explícita implementación analógica de las ecuaciones del oscilador.

El sistema de Lorenz está definido por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1L} &= a_L(x_{2L} - x_{1L}) \\ \dot{x}_{2L} &= b_L x_{1L} - x_{2L} - x_{1L}x_{3L} \\ \dot{x}_{3L} &= -c_L x_{3L} + x_{1L}x_{2L}\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde x_{1L} , x_{2L} y x_{3L} son los estados del sistema y a_L , b_L y c_L son parámetros. Valores típicos de los parámetros que conducen al caos son $a_L = 10$, $b_L = 28$, y $c_L = 8/3$. Para esos valores el atractor generado por integración numérica de (5.1) se muestra en la siguiente Figura

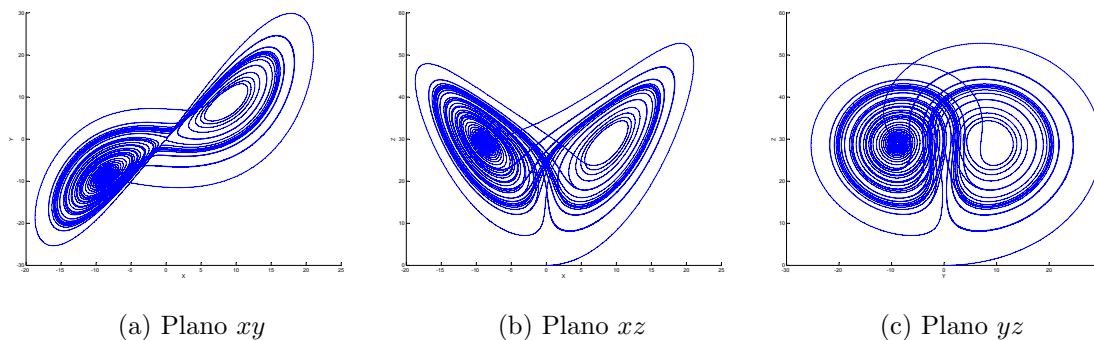


Figura 5.1: Atractor de Lorenz generado por integración numérica.

Las formas típicas de los tres estados del sistema (5.1) se muestran en la Figura (5.2).

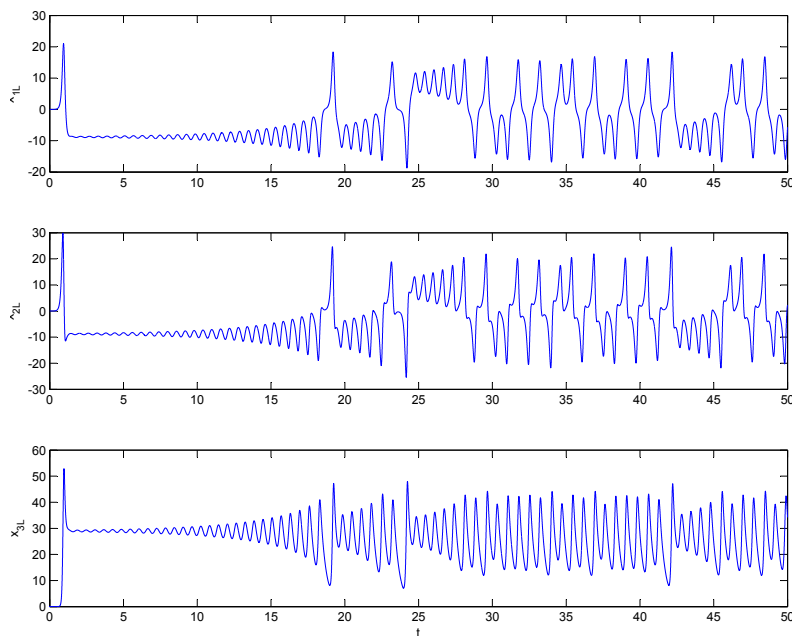


Figura 5.2: Formas de onda de Lorenz x_{1L} , x_{2L} y x_{3L} generadas por integración numérica.

La implementación de las ecuaciones del sistema (5.1) en un circuito electrónico analógico es relativamente sencillo.

La Figura(5.3) muestra el diagrama del circuito y, en la Tabla (5.1) se observan los componentes del mismo. El circuito se alimentó con $\pm 12V$.

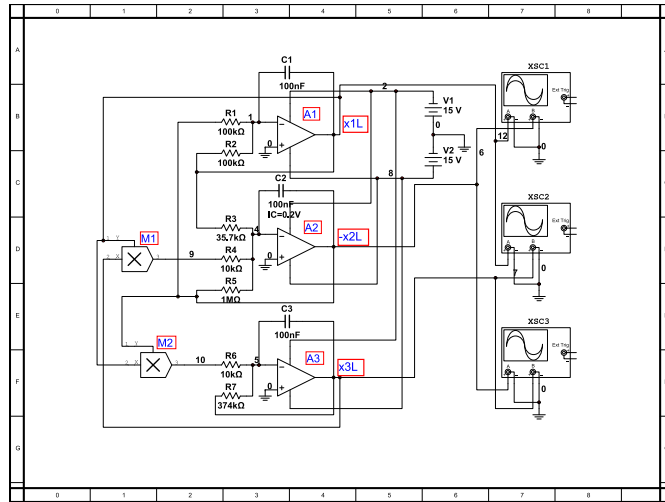


Figura 5.3: Esquema del circuito de Lorenz en Multisim.

El circuito integrado *TL084* tiene cuatro amplificadores internos de los cuales sólo se utilizaron tres. Los op-amps están configurados como integradores y sumadores. Los valores de los resistores están escalados a $1M\Omega$, por ejemplo, R_3 pondera la variable x_{1L} con un factor de 28 ($1M\Omega/35.7K\Omega$); esto se combina con $-x_{2L}$ y $-x_{1L}x_{3L}$ cada uno con peso unitario. Las ecuaciones en el diagrama están normalizadas a $0.1V$, por lo tanto, el factor de escala de cada multiplicador es de 100. El valor de C_1 , C_2 y C_3 en los tres integradores establecen la escala de tiempo en el circuito, entre más pequeño sea el capacitor, la dinámica del sistema será más rápida [53].

Componente	descripción	valor	No. de parte
R_1, R_2	resistor	$100K\Omega$	— — —
R_3	resistor	$35.7K\Omega$	— — —
R_4, R_6	resistor	$10K\Omega$	— — —
R_5	resistor	$1M\Omega$	— — —
R_7	potenciometro ($500K\Omega$)	$374K\Omega$	— — —
C_1, C_2, C_3	capacitor	$100nF$	— — —
M_1, M_2	multiplicadores analógicos	— — —	<i>AD534</i>
A_1, A_2, A_3	amplificador operacional (op-amp)	— — —	<i>TL084</i> (1)

Tabla 5.1: Tabla de elementos del circuito electrónico analógico de Lorenz.

Los datos se obtuvieron directamente del circuito¹ mostrado en la Figura (5.4), a través del osciloscopio **LeCroy waveRunner** de la serie **104MXi** y se importaron al *workspace* de Matlab para su representación, las gráficas del atractor en el plano fase se presentan en la Figura (5.5) y la forma de onda de cada estado se exponen en la Figura (5.6).

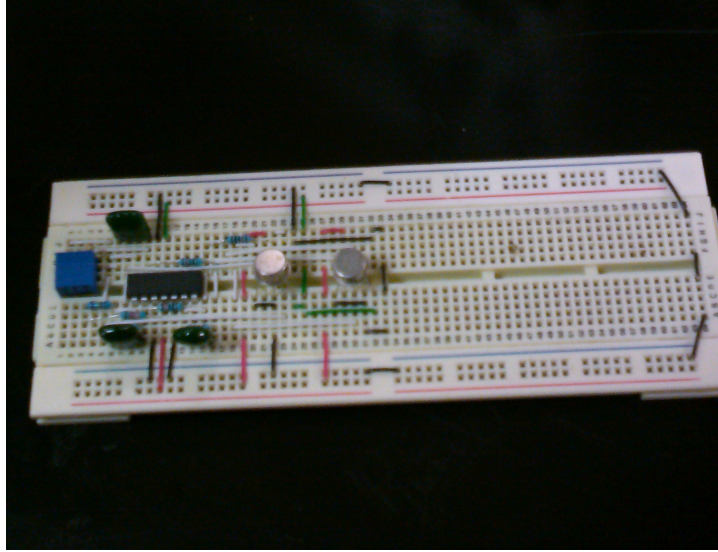
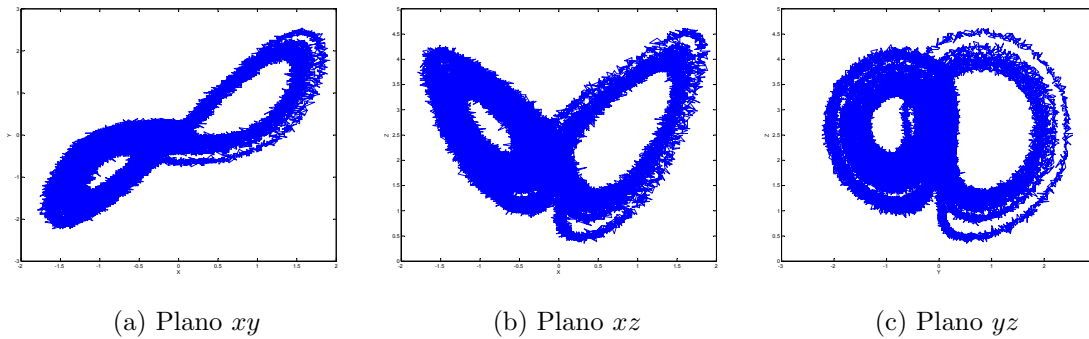


Figura 5.4: Circuito de Lorenz.



(a) Plano xy

(b) Plano xz

(c) Plano yz

Figura 5.5: Atractor de Lorenz generado con datos extraídos del circuito mostrado en la Figura (5.3).

¹Se obtuvieron quinientas mil dos muestras pero sólo se consideraron cincuenta mil en las gráficas.

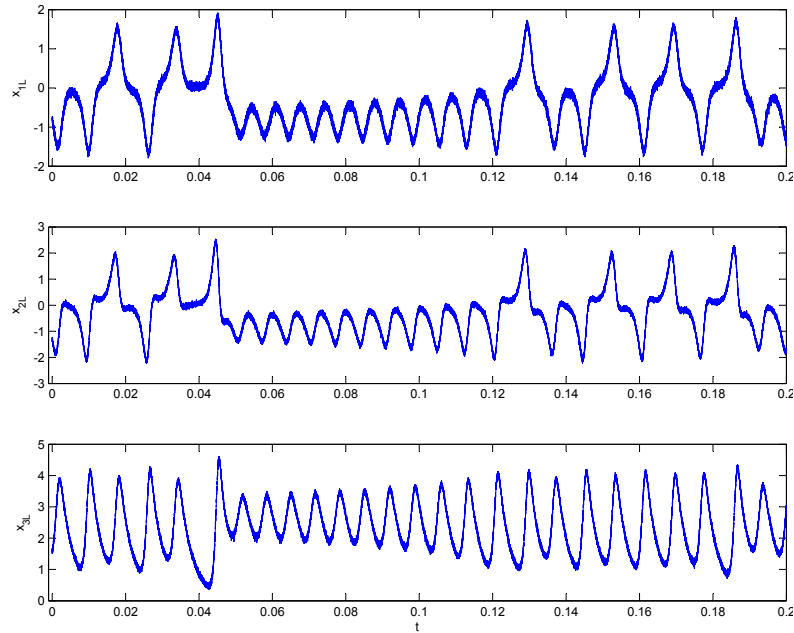


Figura 5.6: Formas de onda de Lorenz x_{1L} , x_{2L} y x_{3L} generadas con datos extraídos del circuito mostrado en la Figura (5.3).

5.2. Circuito de Chua

El circuito de Chua (Figura 5.7) es una simple red electrónica la cual exhibe una variedad de fenómenos de bifurcaciones y atractores y caos. Este circuito consiste de dos capacitores, un inductor, un resistor lineal (variable) y un resistor no lineal.

El sistema de Chua está caracterizado por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1C} &= a_C(x_{2C} - x_{1C} - \nu_x) \\
 \dot{x}_{2C} &= x_{1C} - x_{2C} + x_{3C} \\
 \dot{x}_{3C} &= -b_C x_{2C}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

con

$$\nu = m_0 x_{1C} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x_{1C} + B_p| - |x_{1C} - B_p|)$$

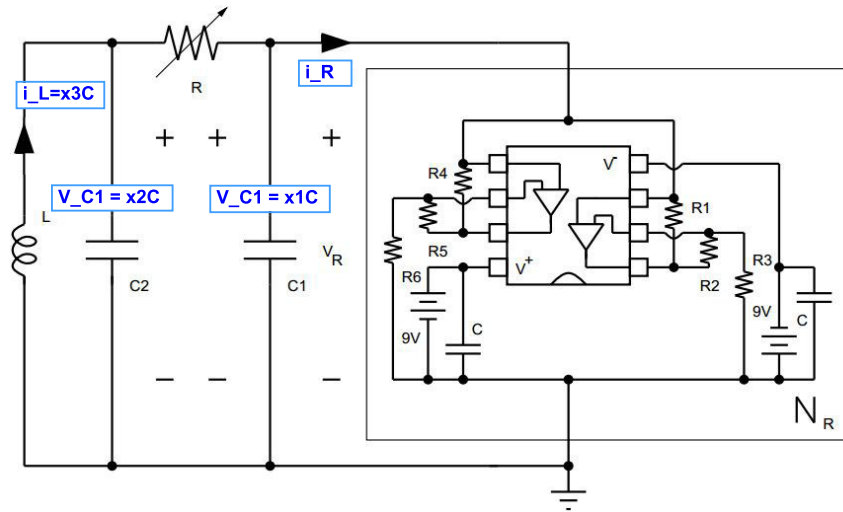


Figura 5.7: Circuito de Chua consiste en un inductor lineal L , un resistor lineal R , dos capacitores lineales C_1 y C_2 , y un resistor no lineal N_R .

Esta relación es mostrada en la Figura (5.9); las pendientes en las regiones interior y exterior son m_0 y m_1 respectivamente; $\pm B_p$ denotan los puntos de rompimiento. Se afirma que el resistor no lineal N_R está *controlado por voltaje* porque la corriente en el elemento es una función del *voltaje* a través de sus terminales.

En el primer reporte de estudio de este circuito, Matsumoto [54], mostró a través de simulación por computadora que el sistema posee un extraño atractor llamado *Double Scroll*. La confirmación experimental de la presencia de este atractor se hizo poco después por Zhong y Ayrom [55]. Desde entonces el sistema ha sido estudiado ampliamente; una variedad de fenómenos de bifurcación y atractores caóticos en el circuito han sido descubiertos experimentalmente y confirmados matemáticamente (ver referencias 3-15 de [56]).

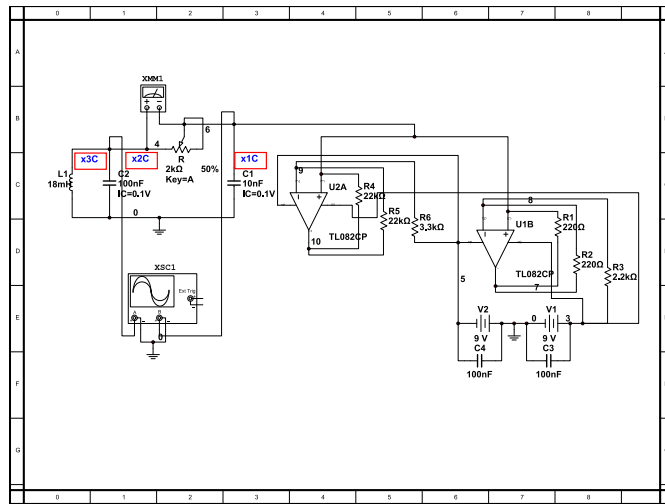


Figura 5.8: Esquema del circuito de Chua en Multisim.

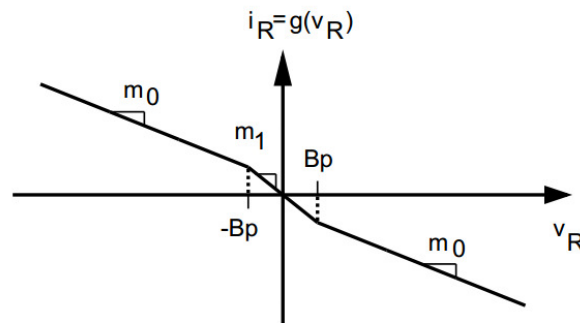


Figura 5.9: Función ν , tres segmentos lineales a pedazos $v - i$ característico del resistor no lineal del circuito de Chua. Las regiones externas tienen pendiente m_0 y las regiones internas tienen pendiente m_1 . Hay dos puntos de rompimiento en $\pm B_p$.

5.2.1. De datos numéricos a datos experimentales: escalamiento de corriente y tiempo

Matsumoto y otros [57] han mostrada en simulación por computadora de la ecuación (5.2) que un atractor "Double Scroll" aparece en el circuito de Chua para los siguientes valores de los parámetros:

$$C_1 = 1/9; C_2 = 1; L = 1/7; G = 0.7; B_p = 1; m_0 = -0.5; m_1 = -0.8.$$

En esas y en simulaciones anteriores, no se proporcionaron (ni se necesitaron) unidades para las variables de estado x_{1C} , x_{2C} y x_{3C} ya que Matsumoto estuvo simulando simplemente un conjunto de ecuaciones diferenciales. Si se escriben las ecuaciones en el *Sistema Internacional de Unidades*, entonces los voltajes son medidos en Volts (V), las corrientes en Amperes (A), las capacitancias en Farads (F), Las inductancias en Henrys (H) y las resistencias en Ohms (Ω); el reciproco de la resistencia, llamada conductancia, es medida en Siemens (S).

Ya que las corrientes de miliAmperes son mas fáciles de realizar en circuitos electrónicos que los Amperes, el primer paso es reescalar todas las corrientes por un factor de 1000; el efecto es reducir todas las capacitancias por un factor de 1000 e incrementar las resistencias e inductancias por el mismo factor. Entonces, con el voltaje en el C_1 , el voltaje en C_2 en unidades de Volts y la corriente en el inductor i_L en miliAmperes, el conjunto de los parámetros de Matsumoto se convierten en:

$$C_1 = 1/9 \times 10^{-3} F; C_2 = 1 \times 10^{-3} F; L = 1/7 \times 10^3 H; G = 0.7 \times 10^{-3} S.$$

Las pendientes del resistor lineal a pedazos son ahora -0.8 mS (mA/V) y -0.5 mS; los puntos de rompimiento se conservan sin cambio en $B_p = 1V$.

Es más fácil usar capacitancias de nF e inductancias de mH que Farads y Henrys, respectivamente. El efecto de reescalar el tiempo en la ecuación (5.2) por un factor de k es reescalar cada inductancia y capacitancia por el mismo factor k ; las resistencias no son afectadas por un escalamiento en el tiempo. En particular, retardar el tiempo por 2×10^{-4} decremanta C_1 , C_2 y L por el mismo factor. Los parámetros revisados son ahora:

$$C_1 = 1/18 \times 10^{-7} F = 5.56 nF; C_2 = 1/2 \times 10^{-4} F = 50 nF; L = 1/14 \times 10^{-1} H = 7.14 mH; G = 0.7 \times 10^{-3} S =$$

Los puntos de rompimiento y las pendientes del resistor lineal a pedazos de N_R permanecen sin cambio cuando el tiempo es escalado.

Esos son los valores de los componentes que Matsumoto y los demás utilizaron para confirmar sus simulaciones por computadora experimentalmente [57]. Estos son nuestro punto

de referencia pero con una ligera diferencia. Los componentes electrónicos están disponibles en valores estándar; 7.14mH, 5.56nF, 50nF y 1428Ω no son valores estándar. Por lo tanto se escogieron los valores comerciales más cercanos a éstos, de tal forma que: $L = 18mH$, $C_1 = 10nF$, $C_2 = 100nF$ y $R = 1800\Omega$.

La tabla (5.2) muestra los componentes utilizados en la implementación del circuito Chua. En el circuito final no se utilizó un inductor sino se implementó un *girador*². Es bien sabido que un girador puede sustituir a un inductor real por su capacidad de comportarse como un inductor *ideal*. Evidentemente el circuito girador no es apto para ciertas aplicaciones pero en el caso de estudio no existe algún inconveniente para su uso. El diagrama de Chua con el girador integrado se puede apreciar en la Figura (5.11).

Los trabajos en [53], [56] y [58] no sugieren que los elementos utilizados en los circuitos de Lorenz y Chua respectivamente, necesiten cierto grado de precisión, sin embargo, en la práctica se descubrió que la impresión electrónica distorsiona parcial o totalmente las señales, evitando la generación del caos. Por lo tanto, los elementos que se usaron en la implementación de los circuitos fueron lo mas precisos en cuanto a su disposición comercial. Se dispuso de resistores con una tolerancia de $\pm 1\%$, se escogieren capacitores de poliester por su distorsión reducida y bajo factor de pérdidas, también se utilizaron potenciómetros rotatorios multivuelta (20 vueltas) para un ajuste fino de la resistencia (ver Figuras (5.4) y (5.10)).

Los valores establecidos en R y R_{10} se obtuvieron como sigue:

R : R es un potenciómetro que se ajusta para obtener distintas bifurcaciones en el circuito de Chua. Cuando R se establece a un valor de $1.79K\Omega$, se tiene el atractor *Double Scroll* (ver Figura(5.12)).

R_{10} : El valor de R_{10} se establece para obtener el valor de la inductancia deseada ($18mH$).

La fórmula está dada por

$$L = \frac{R_7 R_9 R_{10} C}{R_8}$$

²Un girador es un circuito electrónico de dos terminales, pasivo, lineal y sin pérdidas. Se compone de una red RC (resistiva-capacitiva) y una retroalimentación tomada de un amplificador operacional o un transistor. Su uso se concentra en realizar inductores o capacitores sintéticos que se construyen en paquetes ligeros, económicos y pequeños, fundamentales en espacios reducidos [52].

Componente	descripción	valor	No. de parte
R_1, R_2	resistor	220Ω	— — —
R_3	resistor	$2.2K\Omega$	— — —
R_4, R_5	resistor	$22K\Omega$	— — —
R_6	resistor	$3.3K\Omega$	— — —
R	potenciometro	$2K\Omega$	— — —
C_1	capacitor	$10nF$	— — —
C_2, C_3, C_4	capacitor	$100nF$	— — —
L	inductor (girador)	$18mH$	— — —
A_1, A_2	amplificador operacional (op-amp)	— — —	TL082 (1)
Circuito girador			
R_7	resistor	100Ω	— — —
R_8, R_9	resistor	$1K\Omega$	— — —
R	potenciometro	$2K\Omega$	— — —
C	capacitor	$100nF$	— — —
A_3, A_4	amplificador operacional (op-amp)	— — —	TL082 (1)

Tabla 5.2: Tabla de elementos del circuito electrónico analógico de Chua.

Lo anterior implica que R_{10} debe ser igual a $1.8K\Omega$.

El valor de R_{10} se puede variar (ligeramente) con el propósito de evitar o eliminar el efecto de "recorte" [58] en la variable x_{3C} del atractor *Double Scroll*, en caso de que se presente.

Además, es posible demostrar saturación sobre un circuito que trabaja perfectamente bien. R_{10} hace posible sintonizar los parámetros para mostrar un completo *Double Scroll* o para ir más allá y demostrar la saturación [58].

El circuito físico se aprecia en la Figura (5.10). De la misma manera que en el circuito de Lorenz, se extrajeron los datos del circuito de Chua para graficar las formas de onda y atractores en diversos planos.

En las Figuras (5.12) y (5.14) se presentan las gráficas obtenidas en simulación y en tiempo real.

El tercer estado del circuito de Chua es la corriente en el inductor x_{3C} , ésta no se puede medir directamente con las sondas del osciloscopio, por esta razón, se obtiene del punto P mostrado en el diagrama de la Figura (5.11), para ser más precisos x_{3C} se adquiere a partir

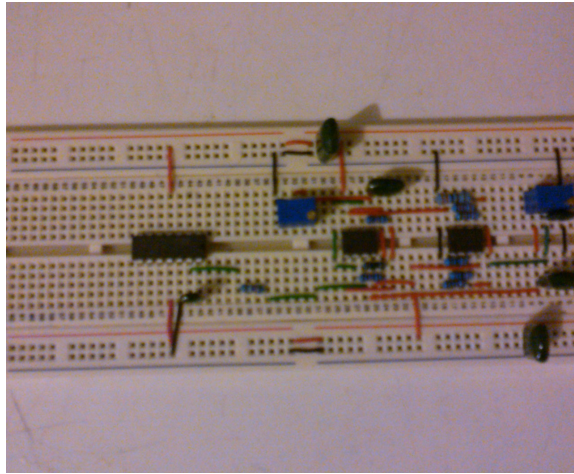


Figura 5.10: Circuito de Chua.

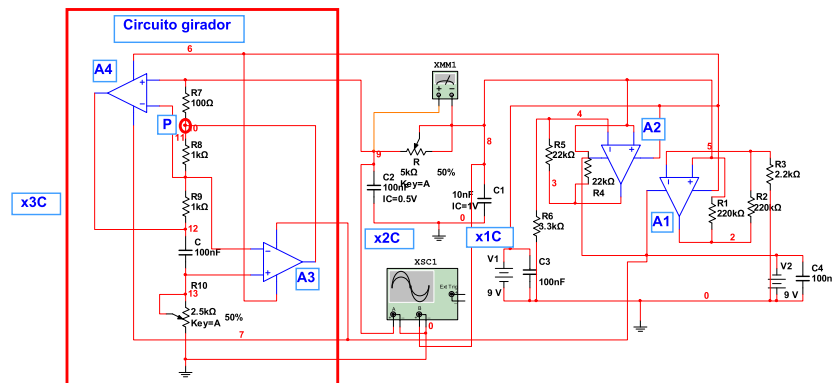


Figura 5.11: Esquema del circuito de Chua en Multisim, se utiliza un circuito girador en lugar de un inductor convencional.

de la siguiente expresión

$$x_{3C} = \frac{V_P - x_{2C}}{R_7}$$

donde V_P es el voltaje del punto P medido con respecto a tierra.

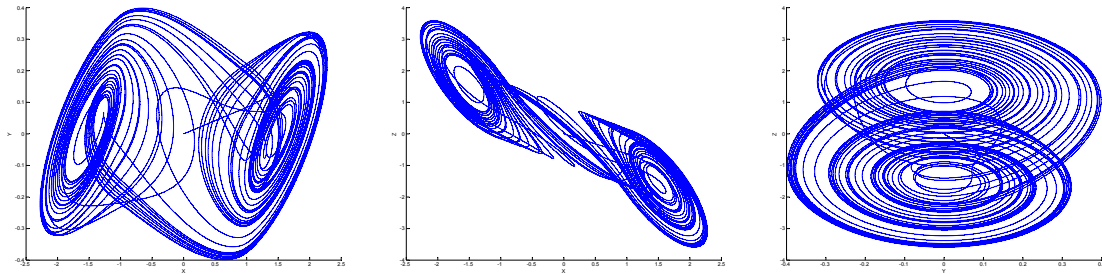
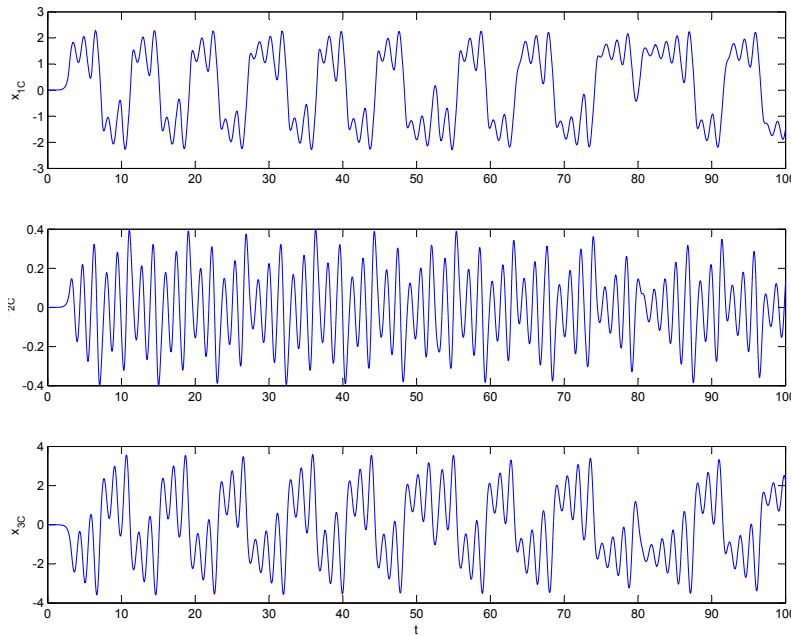
(a) Plano xy (b) Plano xz (c) Plano yz

Figura 5.12: Atractor de Chua generado por integración numérica.

Figura 5.13: Formas de onda de Chua x_{1C} , x_{2C} y x_{3C} generadas por integración numérica.

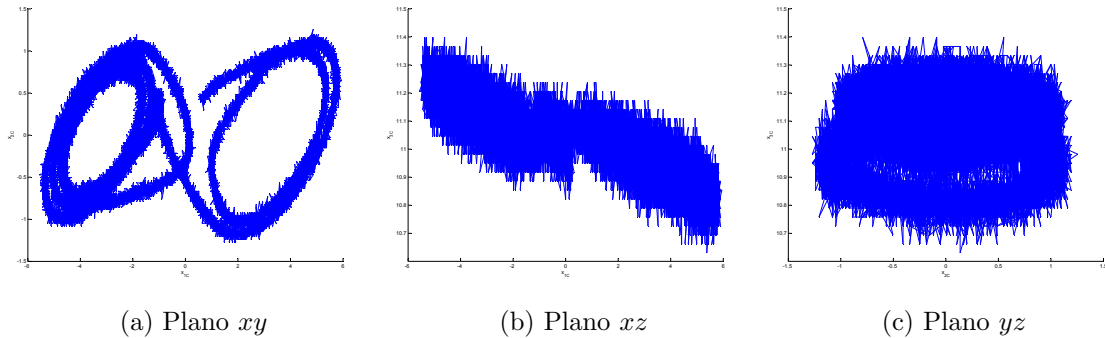


Figura 5.14: Atractor de Chua generado con datos extraídos del circuito mostrado en la Figura (5.10).

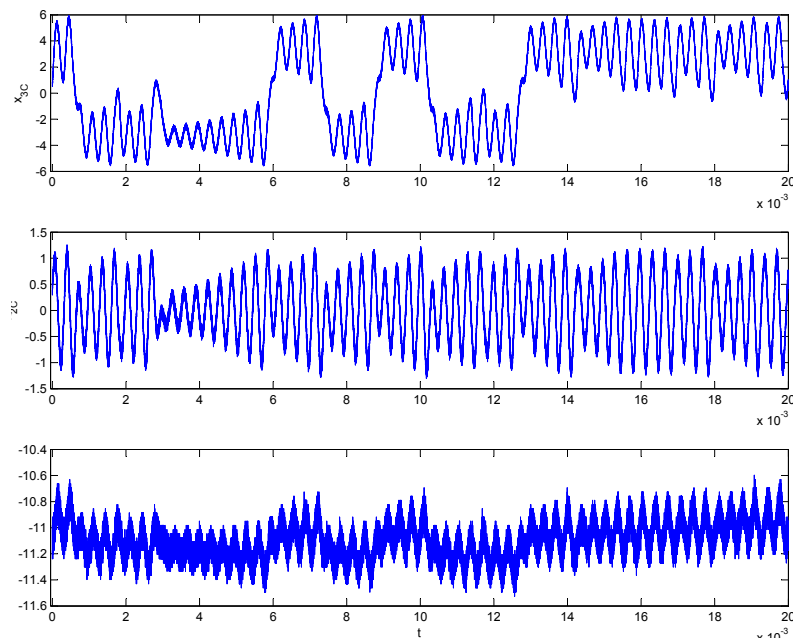


Figura 5.15: Formas de onda de Chua x_{1C} , x_{2C} y x_{3C} generadas con datos extraídos del circuito mostrado en la Figura (5.10).

Note que los atractores de Chua, obtenidos de datos experimentales presentan una distorsión evidente, esto se debe a la alta sensibilidad al ruido y a perturbaciones externas, por mencionar un ejemplo, se realizan varios intentos para obtener caos (sintonizando el potenciómetro R), sin embargo, es suficiente una pequeña fuerza aplicada sobre el circuito, como un pequeño golpe sobre la mesa o un suave movimiento, para que el caos se pierda. Por otra parte, difícilmente se obtiene caos a la "primera", aún si ya se ha conseguido en un instante

anterior, basta retirar la fuente de alimentación ($\pm 9V$) y volver a conectarlo para darse cuenta de que ya no existe. Para vencer este problema, es necesario apagar y prender la fuente de alimentación para cargar las condiciones iniciales de los capacitores (y en caso de que no se haya utilizado un girador, el inductor). También se deben evitar campos magnéticos cerca del circuito si se desea preservar el caos.

Los inconvenientes mencionados contribuyeron a una pobre fidelidad en los datos obtenidos, lo que resultó en la ambigua representación del atractor *Double Scroll* del oscilador de Chua (ver Figura (5.14)).

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

Se atacó el problema de SG en sistemas no lineales estrictamente diferentes. Se introdujo una nueva definición usando el concepto de elemento primitivo diferencial. Se diseñó un controlador dinámico capaz de lograr la Sincronización Completa en el sistema transformado y la Sincronización Generalizada en las coordenadas originales. Finalmente, se mostraron los resultados numéricos que ilustran la efectividad de la metodología.

Como trabajo futuro se ha pensado principalmente, en la implementación electrónica (analógica o digital) del controlador propuesto en esta Tesis y su acoplamiento con los circuitos ya desarrollados, con la finalidad de obtener los mismos resultados favorables que se consiguieron en simulación, es decir, obtener la SG y la Sincronización Completa.

Durante el trabajo experimental se observó que, el sistema representado por (3.2) es mucho más rápido que el definido en (3.1), así como la existencia de una diferencia en amplitudes, esto supone una complicación a la hora de sincronizar, por lo que se debe hacer el mismo escalamiento en el tiempo y amplitud de señales para ambos sistemas. Esta parte también se estima como un trabajo futuro.

Otra situación que debe tenerse en mente, es considerar la naturaleza del ruido presente en los circuitos electrónicos y las perturbaciones externas, lo que podría originar resultados indeseados.

Bibliografía

- [1] N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel. "Generalized synchronization of chaos directionally coupled chaotic systems", *Physics Review*, E-51, pp. 980-994, (1995).
- [2] A. Fradkov, R. Evans, B. Andrievsky. "Control of chaos: Methods and applications in mechanics", *Phil. Trans. R. Soc. A.*, pp. 2279-2309, (2006).
- [3] R. Martínez-Guerra, W. Yu. "Chaotic synchronization and secure communication via sliding-mode observer", *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*, pp. 235-243, (2008).
- [4] R. Femat, G. Solís Perales. "Robust synchronization of chaotic systems via feedback", *Lectures notes in control and information sciences*, Springer-Verlag, (2008).
- [5] A. Fradkov. "Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control", Springer-Verlag, (2007).
- [6] S.H. Strogatz. "Nonlinear dynamics and chaos", Perseus Books, (1994).
- [7] R. Aguilar-Lopez, R. Martínez-Guerra, H. Puebla, R. Hernández-Suárez. "High order sliding mode dynamic control for chaotic intracellular calcium oscillations", *Nonlinear analysis: Real world applications*, (2009).
- [8] B.R. Andrievskii. "Control of chaos: Methods and applications", *Automation and remote control*, pp. 505-533, (2004).
- [9] M. Feki. "An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication", *Chaos, Solutions and fractals*, pp. 141-148, (2003).
- [10] T. Yang. "A survey of chaotic secure communication systems", *Int. journal of computational cognition*, pp. 81-130, (2004).
- [11] K.S. Halle, C.W. Wu, M. Itoh, L. Chua. "Spread spectrum communication through modulation of chaos", *Int J. bifurcation and chaos*, pp. 469-467, (1993).
- [12] R. De Carlo, S. Zak, S. Drakunov. "Control handbook, chapter variable structure and sliding mode control", *Electrical engineering handbook*, CRC Press Inc, (1996).

-
- [13] L.M. Pecora, T.L. Carroll. "*Synchronization in chaotic systems*", *Phys. Rev. Lett.*, (1990);64:821–4.
- [14] E. Ott, C. Gregori, J.A. Yorke. "*Controlling chaos*", *Phys. Rev. Lett.* 64, pp. 1196-1199, (1990).
- [15] Wikipedia. "*Caos*.", <http://es.wikipedia.org/wiki/Caos>. Consulta: 15 de agosto de 2013.
- [16] G. Shewale. N. Shinde. A. Shirode. "*A report on chaos theory*", *Sardar Patel Institute of Technology*, october (2012).
- [17] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares, C.S. Zhou. "*The synchronization of chaotic systems*", *Physics Reports* 366 pp. 1-101 (2002).
- [18] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. "*Synchronization*", Cambridge University Press, Cambridge, UK, (2001).
- [19] G.V. Osipov, J. Kurths, C. Zhou. "*Synchronization in oscillatory networks*", Springer, Berlin, Germany, (2007).
- [20] E.T. Hall. "*The Dance of Life: The Other Dimension of Time*", Anchor books, New York, NY, USA, (1983).
- [21] N. Wiener. "*Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine*", John Wiley and Sons, New York, NY, USA, (1948).
- [22] A.T. Winfree. "*Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators*", *J. Theor. Biol.*, Vol. 16, pp. 15–42, (1967).
- [23] A.T. Winfree. "*The Geometry of Biological Time*", Springer-Verlag, Berlin, Germany, (1980).
- [24] A.V. Gaponov-Grekhov, M.I. Rabinovich, I. M. Starobinets. "*Dynamic model of the spatial development of turbulence*", *JETP Lett.* 39, 688-91 [*Pis'ma Zh. Éksp. Teor. Fiz* 39, 545 (1984)].
- [25] H.G. Winful, L. Rahman. "*Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers*", *Phys. Rev. Lett.* 65, 1575 (1990).
- [26] H. Fujisaka, T. Yamada. "*Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems*" *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 69, 3247, (1983).
- [27] W.L. Ditto, K. Showalter (Eds.). "*Focus issue on control and synchronization of chaos*", *Chaos* 7 (4) (1997).

-
- [28] M.P. Kennedy, M.J. Ogorzalek (Eds.). "*Special issue on chaos synchronization, control and applications*", *IEEE Trans. Circuits Systems I fund*, Theory Appl. 44 (10) (1997), and references therein.
- [29] V.S. Afraimovich, N.N. Verichev, M.I. Rabinovich. "*Radiophys. Quantum Electron*", 29 (1986) 747.
- [30] L. Kocarev, U. Parlitz. "*Generalized synchronization, predictability and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems*", *Physics Review Letters* 76, pp. 1816-1819 (1996).
- [31] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths. "*Phase Synchronization of Chaotic Oscillators*", *Phys. Rev. Lett.* 76, pp. 1804-1807, (1996).
- [32] R. Brown, L. Kocarev. "*A unifying definition of synchronization for dynamical systems*", *Chaos* (2000);10:344-9.
- [33] C.W. Wu, L.O. Chua. "*A unifying definition of synchronization for dynamical systems*", *Int J Bifur Chaos* (1994);4(4):979-98.
- [34] R. Femat, J. Álvarez-Ramírez. "*Synchronization of a class of strictly different chaotic oscillators*", *Phys Lett A* (1997);236:307-13.
- [35] H. Nijmeijer, I.M.Y. Mareels. "*An observer looks at synchronization*", *IEEE Trans Circ Syst I*, (1997);44:882-90.
- [36] S.C. Manrubia, A.S. Mikhailov, D.H. Zannette. "*Emergence of dynamical order: synchronization phenomena in complex systems*", Singapore: World Scientific; (2004).
- [37] W. Liu, X. Qiana, J. Yang, J. Xiao. "*Antisynchronization in coupled chaotic oscillators.*", *Phys Lett A* (2006);354:119-25.
- [38] W. Liu, J. Xiao, X. Qiana, J. Yang. "*Antiphase synchronization in coupled chaotic oscillators.*", *Phys Rev E* (2006);73:057203.
- [39] B.R. Hunt, E. Ott, J.A. Yorke. "*Differentiable generalized synchronization of chaos*", *Phys Rev E* (1997);55:4029-34.
- [40] T. Yang, L.O. Chua. "*Generalized synchronization of chaos via linear transformations*", *Int J Bifur Chaos* (1999);9:215-9.
- [41] Meng. Juan, Wang. Xingyuan. "*Generalized synchronization via nonlinear control*", *Chaos* (2008);18:023108.
- [42] G. Zhang, Z. Liu, Z. Ma. "*Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems*", *Chaos Solitons Fractals* (2007);32:773-9.

- [43] Z-M Ge, C-H Yang. "The generalized synchronization of a quantum-CNN chaotic oscillator with different order systems", *Chaos Solitons Fractals* (2008);35:980–90.
- [44] A. Rodríguez, J. de León, L. Fridman. "Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers for reduced-order chaos synchronization", *Int J Non-Linear Mech* 2008;43:948–61.
- [45] K. Josic. "Invariant manifolds and synchronization of coupled dynamical systems", *Phys Rev Lett* (1998);80:3053–6.
- [46] M. Martens, E. Pécou, C. Tresser, P. Worfolk. "On the geometry of master-slave synchronization", *Chaos* (2002);12:316–23.
- [47] H.D.I Abarabanel, N.F. Rulkov, M.M. Sushchik. "Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach", *Phys. Rev E* pp. 4528-4535 (2006).
- [48] R. Femat, L. Kocarev, L. van Gerven, M.E. Monsivais-Pérez. "Towards generalized synchronization of strictly different chaotic systems", *Phys Lett A* (2005);342:247–55.
- [49] J.P. García-Sandoval, R. Femat, V. González-Álvarez. "On generalized synchronization of different-order chaotic systems: a submanifold approach", *J Phys A* (2009);42:295101.
- [50] J.G. Barajas Ramírez, K.P. Cuéllar Galarza, R. Femat. "Generalized synchronization of strictly different systems: Partial-state synchrony", *Chaos Solitons and Fractals* pp. 193-204 (2012).
- [51] E. R. Kolchin "Differential algebra and algebraic groups", *Academic*, NY, pp. 103 (1973).
- [52] "LOS GIRADORES SELECTORES DE FRECUENCIA BOBINAS o INDUCTORES SINTETICAS", <http://proton.ucting.udg.mx/~cruval/gira1.html>. Consulta: 13 de agosto de 2013.
- [53] P. Horowitz "Build a Lorenz Attractor", <http://frank.harvard.edu/~paulh/misc/lorenz.htm>. Consulta: 13 de agosto de 2013.
- [54] T. Matsumoto "A chaotic attractor from Chua's circuit.", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-31(12):1055-1058, (1984).
- [55] G.Q. Zhong, F. Ayrom. "Experimental Confirmation of chaos from Chua's circuit.", *Int. J. Circuit Theory Appl.*, 13(11);93-98, (1985).
- [56] M.P. Kennedy. "Robust OP AMP REALIZATION OF CHUA'S CIRCUIT.", *Frequenz.*, Vol. 46, No. 3-4, pp. 66-80, March-April (1992).
- [57] T. Matsumoto, L.O. Chua, M. Komuro. "The Double Scroll.", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-32(8):797-818, (1985).

- [58] V. Siderskiy.
"chuacircuits.com.", <http://www.chuacircuits.com/howtobuild1.php>. Consulta: 13 de agosto de 2013.