

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco
Departamento de Control Automático

Seguimiento de Trayectorias en Sistemas
de Control Basado en el Método de la
Elipsoide Invariante

TESIS

Que presenta

José Guillermo Rodríguez Servín

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Control Automático

Director de la Tesis:

Dr. Alexander Poznyak Gorbach

Contenido

Resumen	v
Abstract	vi
Acknowledgements	vii
1 Introducción	1
1.1 Motivación	2
1.2 Seguimiento por retroalimentación de estado	3
2 Preliminares	7
2.1 Estabilidad en el Sentido de Lyapunov	9
2.2 Puntos de equilibrios estables y asintóticamente estables	10
2.3 Funciones de Lyapunov	11
2.4 Estabilidad según Lyapunov. Sistemas no estacionarios	13
2.5 Desigualdades matriciales lineales	14
2.5.1 Resultados de desigualdades matriciales lineales	15
2.6 Método de la elipsoide invariante	16
2.6.1 Elipsoide	16
2.6.2 Conjunto invariante	18
2.6.3 Elipsoide invariante	19
3 Formulación del problema	23
3.1 Descripción del sistema	23

4	Resultados principales	27
4.1	Elipsoide invariante	27
4.1.1	Problema relajado	29
4.1.2	Elipsoide adaptable	32
4.2	Ejemplo numerico	34
4.2.1	Modelo del sistema	35
4.2.2	Resultados numéricos	38
5	Conclusiones	47
	Bibliografia	48

Resumen

Este trabajo está dedicado al problema de diseño de un control de seguimiento robusto para una clase de sistemas no lineales en tiempo continuo con incertidumbres acotadas. Se estudia una familia de sistemas dinámicos no lineales y extendemos la técnica de elipsoide invariante para el control de seguimiento robusto.

El procedimiento de diseño se basa en el enfoque de Lyapunov convencional para conjuntos invariantes de sistemas dinámicos y está dada en términos de la solución de un conjunto de desigualdades matriciales lineales.

Abstract

This work is dedicated to the design problem of robust tracking control for a class of nonlinear continuous-time systems with bounded uncertainties. We study a family of nonlinear dynamical systems and extend the invariant ellipsoid technique for robust tracking control.

The design procedure is based on the conventional Lyapunov-like approach to invariant sets of dynamical systems and is given in terms of the solution of a set of Linear Matrix Inequalities.

Agradecimientos

Quiero agradecer al CONACYT por la beca otorgada, sin este apoyo no me hubiera sido posible continuar mis estudios.

Quiero agradecer a las Bibliotecas del CINVESTAV por su extenso y muy diverso catalogo de títulos disponibles para los estudiantes y profesores.

Quiero agradecer al Dr. Alexander Poznyak Gorbach, por su apoyo durante el trabajo de tesis. A mis sinodales el Dr. Joaquín Collado M. y el Dr. Fernando Castaños Luna por sus comentarios y consejos.

Quiero agradecer a mi Esposa e hijo por tenerme paciencia y comprenderme por el tiempo que no les pude dedicar durante la maestría y por el apoyo incondicional en los momentos difíciles.

Finalmente quiero agradecer a mi Madre por su apoyo durante toda mi formación.

Capítulo 1

Introducción

Hoy en día, los sistemas de control son inevitables, aparecen en casi todas partes: en nuestros hogares (por ejemplo, radio, televisión, reproductor de Discos), en varios tipos de vehículos (por ejemplo, en automóviles, aviones, naves espaciales, barcos), en la industria (por ejemplo, robots, control de procesos), en las telecomunicaciones, la ingeniería biomédica, y en muchos otros lugares y situaciones.

El primer paso en el análisis y la síntesis para un sistema de control es el desarrollo de un modelo matemático adecuado para una planta dada. El modelo matemático para una planta puede, en principio, ser obtenido a partir de la estructura de la planta y las propiedades de los elementos individuales de la planta, junto con las leyes físicas fundamentales. Los sistemas lineales ha sido el área del control más estudiada, ya que cuenta con una base fuerte de herramientas de análisis y control, sin embargo, la mayoría de los problemas físicos son implícitamente no lineales en su naturaleza. Resulta natural, que al tratar con un modelo no lineal, este se linealice alrededor de un punto nominal y se analice el modelo lineal.

El desarrollo adecuado de un modelo matemático para una planta es, excepto en casos simples, generalmente complejo. Tenga en cuenta que un

modelo matemático simplificado puede eliminar características intrínsecas de la planta y un modelo matemático más complejo causará dificultad matemática. No obstante, que tan complejo sea el modelo, siempre existirán tanto incertidumbres paramétricas como ruido en la medición, es bajo estas situaciones que nace el control robusto, para compensar y permitir incertidumbre en el modelado.

1.1 Motivación

En esta tesis tiene como objetivo atacar el seguimiento de trayectorias de manera robusta, con el fin de hacer eso, vamos a introducir el siguiente problema.

Considere si sistema no lineal

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ denota la entrada por medio de los cuales el sistema puede ser controlado, con ($m < n$).

Además, una trayectoria estado de referencia factible $x_r(t) \in \mathbb{R}^n$ conocida para que el sistema (1.1) realice un seguimiento, factible significa que una vez estando en la trayectoria de referencia es posible permanecer en esa trayectoria.

$$\dot{x}_r = \varphi(t, x_r) \quad (1.2)$$

Problema 1.1 *Problema de seguimiento de estados por retroalimentación de estado.* Considere el sistema (1.1), asuma que existe una trayectoria de referencia viable x_r dada que satisface (1.2), encontrar una ley de control

$$u = u(t, x_r, x)$$

tal que para el sistema en lazo cerrado resultante de (1.1), $\dot{x} = f(t, x, u(t, x_r, x))$ se tenga

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_r(t)\| &= 0 \\ \|x(t) - x_r(t)\| &\leq \kappa \quad \forall t \geq t_o \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por otro lado, si tenemos un sistema no lineal con una perturbación aditiva $\xi(t)$

$$\dot{x} = f(t, x, u) + \xi(t) \quad (1.4)$$

y una sistema de referencia (1.2) el error de seguimiento (1.3) nunca sera igual a cero, por lo que se plantea el siguiente problema.

Problema 1.2 *Problema de seguimiento robusto de estados por retroalimentación de estado.* Considere el sistema (1.4), asuma que existe una trayectoria de referencia viable x_r dada que satisface (1.2), encontrar una ley de control

$$u = u(t, x_r, x)$$

tal que para el sistema en lazo cerrado resultante de (1.4), $\dot{x} = f(t, x, u(t, x_r, x)) + \xi(t)$ se tenga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_r(t)\| \leq \varepsilon \quad (1.5)$$

para un $\varepsilon > 0$, dado como parámetro de diseño.

1.2 Seguimiento por retroalimentación de estado

En esta sección se resuelve el problema de seguimiento robusto para sistemas lineales.

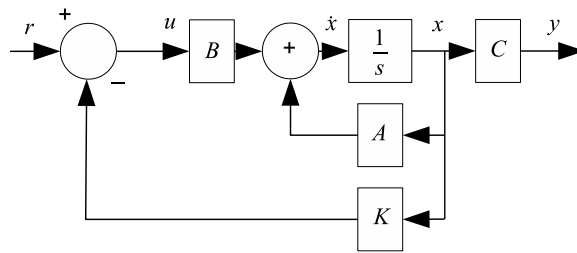


Figure 1.1: Retroalimentación de estado.

Considere el sistema por retroalimentación de estado mostrado en la figura 1.1, suponga que la señal de referencia r es una constante o $r(t) = a$, para $t \geq 0$, el problema es encontrar una ganancia de retroalimentación de

estado tal que $y(t)$ se aproxime a $r(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, esto es conocido como seguimiento asintótico de una entrada escalón como referencia. Con el objetivo de obtener un seguimiento robusto y rechazo de la perturbación, considere el sistema dinámico

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \xi(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1.6}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $u(t) \in \mathbb{R}$ y $\xi(t) \in \mathbb{R}$ es una perturbación desconocida pero acotada.

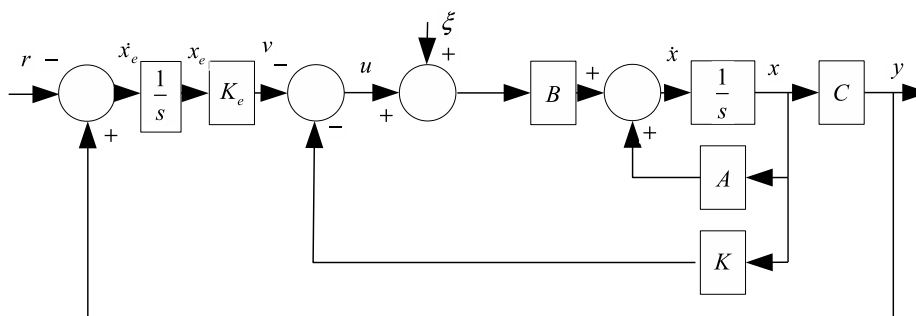


Figure 1.2: Seguimiento por retroalimentación de estado.

Con el objetivo de diseñar un control tal que la salida $y(t)$ tienda asintóticamente a $r(t)$, además de la retroalimentación de estado, se introduce un integrador y una retroalimentación unitaria de la salida como se muestra en la figura 1.2. Sea la salida del integrador denotada por $x_e(t)$ una variable de estado adicional, entonces el sistema (1.6) tiene el vector de estado aumentado $\begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix}$, así de la figura 1.2

$$\dot{x}_e = y - r = Cx - r\tag{1.7}$$

$$u = \begin{bmatrix} K & K_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix}\tag{1.8}$$

sustituyendo el control (1.8) en (1.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_e(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_e \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{A_c} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \xi(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Teorema 1.1¹ Si (A, B) es controlable y si $C(sI - A)^{-1}B$ no tiene ceros en $s = 0$, entonces todos los eigenvalores de la matriz A_c en (1.9) pueden ser asignados arbitrariamente seleccionando una ganancia de retroalimentación $\begin{bmatrix} K & K_e \end{bmatrix}$.

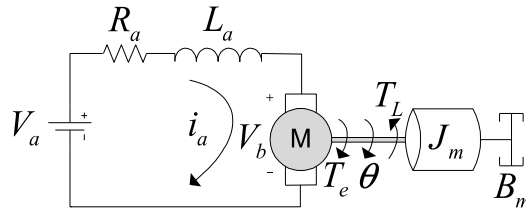


Figure 1.3: Motor de CD.

Ejemplo 1.1 Considere la ecuación del motor de CD de la figura 1.3

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_b}{L_a} \\ \frac{k_m}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B (u + \xi) \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C x \end{aligned}$$

donde x_1 es la corriente i_a y x_2 es la velocidad angular del motor, además $R_a = 2\Omega$, $L_a = 2.2 \times 10^{-2} H$, $k_b = 1.2 \times 10^{-2} V \frac{s}{rad}$, $k_m = 1.2 \times 10^{-2} N \frac{m}{A}$, $B_m = 9.3 \times 10^{-3} kg \frac{m}{s^2}$, $J_m = 1.4 \times 10^{-3} kgm^2$,

¹La demostración de este teorema puede ser consultada en [6]

queremos que la salida siga a la señal de referencia $r(t) = 1 - e^{-2t}$, por lo que haciendo uso de la formula de Ackerman para asignar los polos

$$[-30, -10, -5] \text{ a } \begin{bmatrix} A - BK & -BK_e \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

se obtienen las siguientes ganancias $K = \begin{bmatrix} -1.1561 & 0.6173 \end{bmatrix}$, $K_e = 3.85$, para un ruido aleatorio con amplitud 0.05 y frecuencia igual a 1Hz, se obtienen la siguiente grafica de la figura 1.4.

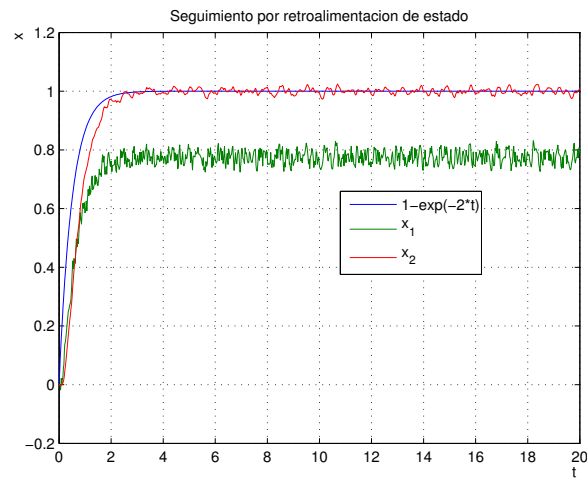


Figure 1.4: Seguimiento por retroalimentación de estado.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo representan de manera breve algunos de los conceptos teóricos empleados en la formulación del problema y en el desarrollo de las soluciones, así como conceptos básicos clave para el método del elipsoide invariante, finalizando con una descripción del caso más simple del método del elipsoide invariante.

Definición 2.1 [6] *Un sistema es llamado sistema lineal si para cada t_0 y cualesquiera dos pares de estados entrada-salida*

$$\left. \begin{array}{l} x_i(t_0) \\ u_i(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_i(t), \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2$$

cumplan las siguientes propiedades

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t_0) + x_2(t_0) \\ u_1(t) + u_2(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_1(t) + y_2(t), \quad t \geq t_0$$

y

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x_i(t_0) \\ \alpha u_i(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha y_i(t), \quad t \geq t_0$$

para cualquier constante real α

La primera propiedad es llamada la propiedad de aditividad y la segunda, propiedad de homogeneidad. Estas propiedades pueden combinarse de la

siguiente manera formando la propiedad de superposición

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 x_1(t_0) + \alpha_2 x_2(t_0) \\ \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), t \geq t_0$$

para cualesquiera constantes reales α_1 y α_2 . Un sistema es llamado *sistema no lineal* si no cumple la propiedad de superposición.

Por otro lado, los sistemas *afines* son una clase específica de sistemas no lineales. De manera general estos son sistemas que representan un mapeo f con una parte lineal más una traslación, como podemos ver en la siguiente definición.

Definición 2.2 Función afín: [7] Una función real $f : \chi \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$ con $\chi \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$, es afín si es de la forma

$$f(x) = F^x x + F^0$$

donde $F^x \in \mathbb{R}^{n_f \times n_x}$ y $F^0 \in \mathbb{R}^{n_f}$.

Definición 2.3 Un sistema no lineal afín en el control se define como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x(t)) + Bu \\ x(0) &= x_o \end{aligned} \tag{2.1}$$

Cuando se estudian los sistemas no lineales, se trabaja generalmente con sistemas dinámicos modelados por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas entre sí, que pueden representarse en forma compacta con la ecuación diferencial vectorial de primer orden

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{2.2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de *estado* y $u \in \mathbb{R}^n$ es el vector de entradas de control, ($m < n$). Es posible considerar también una ecuación de salida

$$y = h(t, x, u) \tag{2.3}$$

donde $y \in \mathbb{R}^m$ es un vector de variables de interés, por ejemplo, variables físicamente medibles o variables que se desea que se comporten de alguna

forma especial.

Muchas veces la entrada u no aparece explícitamente en (2.2). En éste caso, la ecuación de estado es conocida como la ecuación de estado *no forzada*

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.4)$$

una ecuación de estado no forzada no necesariamente significa que la entrada del sistema es cero, puede estar dada en función del tiempo $u = \gamma(t)$, porque fué dada como una retroalimentación del estado $u = \gamma(x)$, o ambas $u = (t, x)$.

Un caso especial de (2.4) surge cuando la función f no depende explícitamente de t , esto es

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.5)$$

en tal caso el sistema se dice que es *autónomo* o *invariante en el tiempo*, es decir, que su comportamiento es invariante al corrimiento del origen temporal. Veremos a continuación un concepto importante relacionado con la ecuación de estado.

Definición 2.4 Punto de equilibrio: *Un punto $x = x^*$ en el espacio de estado, es un punto de equilibrio (PE) de (2.4), si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es x^* , el estado permanece en x^* en todo tiempo futuro, es decir, si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

para el sistema autónomo (2.5), los PE son todas la raíces reales de la ecuación

$$f(x) = 0$$

2.1 Estabilidad en el Sentido de Lyapunov

La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería. En sistemas dinámicos, existen distintos tipos de problemas de

estabilidad que surgen en el estudio de los sistemas dinámicos, sin embargo, nos concentraremos en el *segundo método de Lyapunov*, este es un método para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio.

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el *sentido de Lyapunov*, un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre. Un punto de equilibrio se dice *estable* si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio; permanecen en las cercanías del mismo, de otro modo; el punto de equilibrio es *inestable*. Un punto de equilibrio se dice *asintóticamente estable* si todas las soluciones que se inciden en las cercanías del punto de equilibrio, no sólo permanecen las cercanías del mismo, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito.

2.2 Puntos de equilibrios estables y asintóticamente estables

Consideremos el sistema autónomo

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (2.6)$$

donde $f : D \rightarrow R^n$ es un mapeo localmente Lipschitz desde un dominio $D \subset R^n$ en R^n . Supongamos que $\bar{x} \in D$ es un PE de (2.6), es decir $f(\bar{x}) = 0$. Vamos a caracterizar y estudiar la estabilidad de \bar{x} . Por conveniencia, asumiremos que $\bar{x} = 0$.

Definición 2.5 [12] *El PE $x = 0$ de (2.6) es*

- *estable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- *inestable si no es estable*

- *asintóticamente estable (AE)* si es estable y δ puede elegirse tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

2.3 Funciones de Lyapunov

Con el fin de formular el teorema de Lyapunov, definamos la energía de un sistema dinámico $E(x)$ como la suma de sus energía cinética y potencial, se dice que un sistema es conservativo cuando no hay disipación de energía, es decir, $E(x) = \text{const}$ durante la evolución del sistema, o sea $\frac{dE}{dt} = 0$ sobre las trayectorias del sistema. Como $E(x) = c$ forma contornos cerrados alrededor de $x = 0$ para c pequeño, se puede concluir que $x = 0$ es un PE estable. Por otro lado, cuando se disipa energía durante la evolución del sistema, se tiene que $\frac{dE}{dt} \leq 0$ sobre las trayectorias del mismo. Es decir que la energía decrece hasta que llegue a cero, mostrando que la trayectoria tiende a $x = 0$ cuanto $t \rightarrow \infty$.

En 1892, Lyapunov mostró que algunas otras funciones, no sólo la energía, pueden usarse para determinar la estabilidad de un PE. Sea $V : D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable en un dominio $D \subset R^n$ que contiene el origen. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (2.6) está dada por

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

Teorema 2.1 (Lyapunov). *Sea el origen $x = 0$ un PE de (2.6) y sea $D \subset R^n$ un dominio que contiene el origen. Sea $V : D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable tal que*

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (2.7)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D \quad (2.8)$$

Entonces $x = 0$ es estable, Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\}$$

entonces $x = 0$ es AE.

Una función continuamente diferenciable que satisface (2.7) se denomina función de Lyapunov. La superficie $V(x) = c$ se denomina *superficie de Lyapunov* o superficie de nivel. La condición $\dot{V} \leq 0$ implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se introduce en el conjunto $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$ y nunca se puede salir de él. Cuando $\dot{V} < 0$, la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov interior con un c menor. A medida que c decrece, la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se achica hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$. Si solo sabemos que $\dot{V} \leq 0$, no podemos asegurar que la trayectoria tienda al origen, pero podemos concluir que el origen es estable porque la trayectoria puede ser encerrada en cualquier bola B_ε sólo con requerir que el estado inicial $x(0)$ pertenezca a una superficie de Lyapunov contenida en dicha bola.

Una función $V(x)$ que satisface (2.7) se dice definida positiva, si satisface $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$ se dice semidefinida positiva. Una función $V(x)$ se dice definida negativa o semidefinida negativa si $-V(x)$ es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente. Usando esta terminología, reformulando el teorema de Lyapunov podemos decir que el origen es estable si existe una función $V(x)$ definida positiva continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x)$ sea semidefinida negativa y es asintóticamente si $\dot{V}(x)$ es definida negativa. Una clase de funciones escalares de que la definición del signo se puede comprobar fácilmente es la clase de funciones de la forma cuadrática (que al mismo tiempo define una elipse¹)

$$V(x) = x^\top P x$$

¹Más adelante en este capítulo se introduce su definición.

donde P es una matriz real simétrica, en este caso, $V(x)$ es positiva definida si y solo si P es una matriz definida positiva.

2.4 Estabilidad según Lyapunov. Sistemas no estacionarios

Consideremos el siguiente sistema no estacionario

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.9)$$

donde $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es seccionalmente continua en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty) \times D$, y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen $x = 0$. El origen es un PE de (2.9) para todo $t = 0$ si

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Definición 2.6 *El PE $x = 0$ de (2.9) es*

- *estable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.10)$$

- *uniformemente estable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, independientemente de t_0 , tal que (2.10) se satisface.*
- *inestable, si no es estable.*
- *asintóticamente estable, si es estable y existe $c = c(t_0)$ tal que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, para todo $\|x(t_0)\| < c$.*
- *uniformemente asintóticamente estable, si es uniformemente estable y existe $c > 0$ independiente de t_0 tal que para todo $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, uniformemente en t_0 ; es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $T = T(\varepsilon)$ tal que*

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon), \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

- *globalmente uniformemente asintóticamente estable, es es uniformemente estable y para cada par de números positivos ε y c , existe $T = T(\varepsilon, c)$ tal que*

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, c), \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

2.5 Desigualdades matriciales lineales

[5][20] Una desigualdad matricial lineal (LMI, por sus siglas en inglés) es una expresión de la forma

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \prec 0 \quad (2.11)$$

donde

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un vector de n números reales, llamado las variables de decisión.
- F_0, \dots, F_n son matrices reales y simétricas, es decir, $F_j = F_j^\top$, para $j = 0, \dots, n$
- la desigualdad $\prec 0$ en (2.11) significa que $F(x)$ es definida negativa, es decir, $u^\top F(x) u < 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$ distinto de cero. Dado que todos los valores propios de una matriz simétrica real son reales, (2.11) es equivalente a decir que todos los valores propios $\lambda(F(x))$ son negativos. Equivalente, el valor propio máximo $\lambda_{max}(F(x)) < 0$

La LMI (2.11) es una restricción convexa en x , es decir, el conjunto $\{x \mid F(x) \prec 0\}$ es convexo. Aunque, la LMI (2.11) parece tener una forma especializada, ésta puede representar una amplia variedad de restricciones convexas en x . En particular, las desigualdades lineales, desigualdades cuadráticas (convexas), desigualdades matriciales normadas, y restricciones que surgen en la teoría de control, tales como las desigualdades matriciales cuadráticas convexas y de Lyapunov, todas pueden ser representadas en la forma de una LMI.

Varias LMIs $F_1(x) \prec 0, \dots, F_k(x) \prec 0$ pueden ser expresadas como la LMI sencilla

$$\text{diag}(F_1(x), \dots, F_k(x)) \prec 0$$

que es una matriz con elementos diagonales F_i . Cuando las matrices F_i son diagonales, la LMI $F(x) \prec 0$ es justo un conjunto de desigualdades lineales.

2.5.1 Resultados de desigualdades matriciales lineales

El criterio de Sylvester permite determinar condiciones necesaria y suficientes para que una forma cuadrática $V(x)$ sea definida positiva o definida negativa.

Teorema 2.2 (Criterio de Sylvester para definición positiva) [13]

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sea definida positiva, es que los menores principales de A sean estrictamente positivos, es decir se debe tener

$$a_{11} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad \dots \quad |A| > 0 \quad (2.12)$$

Teorema 2.3 (Criterio de Sylvester para definición negativa) [13]

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sea definida negativa, es que los menores principales de A de orden par sean estrictamente positivos y que los menores principales de orden impar sean estrictamente negativos, es decir se debe tener

$$a_{11} < 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \quad \dots \quad \begin{matrix} |A| > 0 & (n \text{ par}) \\ |A| < 0 & (n \text{ impar}) \end{matrix} \quad (2.13)$$

Teorema 2.4 (Complemento de Schur) [19] *Sea S una matriz simétrica cuadrada particionada como*

$$S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

donde S_{11} es una matriz simétrica $n \times n$ y S_{22} es una matriz simétrica $m \times m$.

Entonces

$$S > 0$$

si y solo si

$$\begin{aligned} S_{11} &> 0 \\ S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T &> 0 \\ \text{ó} & \\ S_{22} &> 0 \\ S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} &> 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Lema 2.1 [19] Para cualquier par de matrices $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y cualquier matriz simétrica y definida positiva $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se cumplen las siguientes desigualdades

$$\mathcal{X}^T \mathcal{Y} + \mathcal{Y}^T \mathcal{X} \leq \mathcal{X}^T \Lambda \mathcal{X} + \mathcal{Y}^T \Lambda^{-1} \mathcal{Y}$$

y

$$(\mathcal{X} + \mathcal{Y})^T (\mathcal{X} + \mathcal{Y}) \leq \mathcal{X}^T (I_{n \times n} + \Lambda) \mathcal{X} + \mathcal{Y}^T (I_{n \times n} + \Lambda) \mathcal{Y}$$

2.6 Método de la elipsoide invariante

El método de la elipsoide invariante para la estabilización de un sistema no lineal afín en presencia de perturbaciones, consiste en encontrar una ley de control lineal estabilizante que minimize, en algún sentido, el efecto de las perturbaciones. Esto se caracteriza mediante una elipsoide, cuyo tamaño está relacionado con las perturbaciones a los estados, es decir, la evolución de nuestro sistema dinámico está contenida en la elipsoide. Permítame introducir las siguientes definiciones para que esto quede más claro.

2.6.1 Elipsoide

Con el fin de definir el conjunto de los elipsoides, primero vamos a hacer la siguiente definición.

Definición 2.7 [4] Un conjunto $S \in \mathbb{R}^n$ es convexo si para todo $x_1 \in S$ y $x_2 \in S$ tenemos que

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in S \quad \forall \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Una clase famosa de conjuntos convexos, sin duda la más popular en el área de control de sistemas dinámicos, es la de los conjuntos elipsoidales o elipsoides.

Definición 2.8 [4] Dado un vector $c \in \mathbb{R}^n$, llamado el centro, y una matriz definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un elipsoide es un conjunto de la forma

$$\mathcal{E}(c, P) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - c)^\top P (x - c) \leq 1, P > 0 \right\}$$

Así un elipsoide con centro en el origen se denotara

$$\mathcal{E}(P) := \mathcal{E}(0, P) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^\top P x \leq 1 \right\}$$

En el caso unidimensional la elipsoide $\mathcal{E}(P)$ es un intervalo; de esta forma, si las perturbaciones de un sistema, $\eta \in \mathbb{R}$, se caracterizan con la elipsoide $\mathcal{E}(P)$, $P\eta^2 \leq 1$ con $P = 4$ significaría que $|\eta| \leq \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5$, es decir, las perturbaciones (en valor absoluto) no son mayores a 0.5, note que mientras más grande sea P menor es el intervalo de η , como se aprecia en la Figura 2.1.

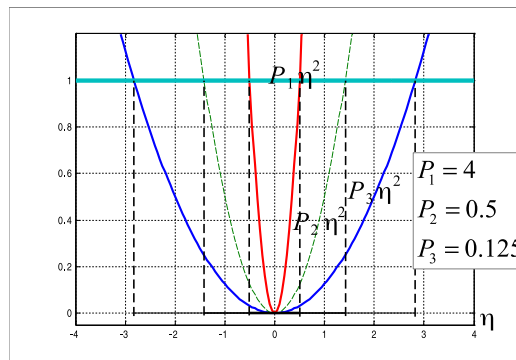


Figure 2.1: $\mathcal{E}(P) = \{\eta \mid P\eta^2 \leq 1\}$.

Por ejemplo, en el plano de fase la elipsoide es una elipse y la matriz $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ determina su forma y tamaño. La longitud de los semiejes de la elipse queda determinada por la raíz cuadrada de los valores propios de la matriz P . Sea una elipse centrada en el origen y $P = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 960 \end{bmatrix}$; el hecho de que P sea una matriz diagonal indica que los ejes de la elipse coinciden con los ejes de coordenadas. Los valores propios de $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$ son los elementos de su diagonal, entonces la longitud del semieje 1 (eje x) es 0.2 y la del semieje 2 (eje y) es 0.0322 en la figura 2.2 se muestra esta elipse dibujada;

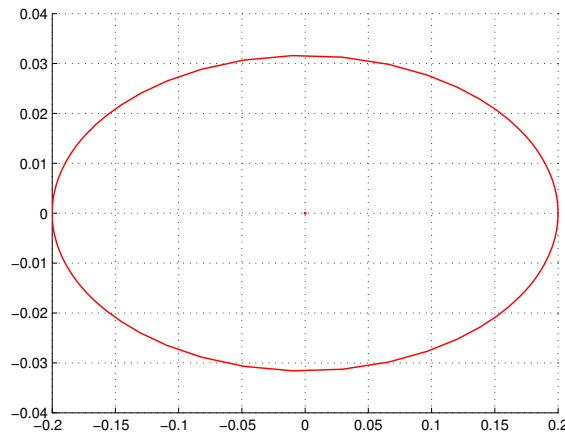


Figure 2.2: Elipsoide caso 2 dimensiones.

2.6.2 Conjunto invariante

La idea del conjunto invariante puede ser fácilmente entendida por referencia a la ecuación de estado no forzada

$$\dot{z}(t) = g(z(t), t) \quad (2.16)$$

$$z(0) = z_0$$

donde $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función adecuada tal que (2.16) tiene una solución absolutamente continua $z(\cdot)$ y $z_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.9 [4], [12], [22] Un conjunto $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ se dice un conjunto positivo invariante con respecto a (2.16) si

$$z(0) \in \mathcal{F} \Rightarrow z(t) \in \mathcal{F} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.17)$$

La definición anterior tiene una propiedad interesante que queremos para el conjunto de los elipsoides, es decir, que la solución $z(\cdot)$ de (2.16) una vez dentro de dicho conjunto, permanecerá dentro durante la evolución del sistema.

Como es sabido, el concepto de energía de un sistema, ha sido formalizado por medio de la Teoría de Lyapunov y la noción de conjunto positivo invariante tiene su origen en esta teoría. Precisamente, dada una función de Lyapunov; sus curvas son las fronteras de conjuntos positivo-invariantes.

2.6.3 Elipsoide invariante

Así, para completar el método del elipsoide invariante, hagamos la siguiente definición adicional

Definición 2.10 Un elipsoide $\mathcal{E}(\hat{P})$ se dice un elipsoide invariante mínimo asociado a (2.16) si:

- si $\mathcal{E}(\hat{P})$ es un conjunto invariante con respecto a (2.16)
- si $z(\cdot)$ define al elipsoide con centro en el origen $\mathcal{E}(\hat{P}) = \{z \in \mathbb{R}^n : z(t)^\top \hat{P} z(t) \leq 1\}$
- la matriz elipsoidal \hat{P} es solución del siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min \operatorname{tr}(P^{-1}) \\ \text{subject to } P > 0, P^\top = P \end{aligned} \quad (2.18)$$

Con el fin de tener un elipsoide $\mathcal{E}(P)$ que sea invariante, usamos el siguiente lema.

Lema 2.2 [18] Sea la función $\mathcal{V} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que satisface la siguiente desigualdad diferencial

$$\dot{\mathcal{V}}(t) \leq -\alpha \mathcal{V}(t) + \beta \quad (2.19)$$

donde $\alpha > 0$, y $\beta \geq 0$. entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(t) \leq \frac{\beta}{\alpha}$.

Ahora ya estamos listos para describir el método del elipsoide invariante.

Considérese un sistema dinámico de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + Bu(t) + \xi(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{2.20}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la señal de control, $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ es una perturbación acotada asociada a la entrada $x(t)$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal desconocida y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es una matriz conocida.

En lo sucesivo se realizan las siguientes consideraciones:

- $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|\xi(t)\| \leq M_\xi$
donde $M_\xi \in \mathbb{R}_+$
- \exists una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que la función no lineal $f(x)$ es "quasi-Lipschitz", es decir, pertenece a la clase de funciones que satisface

$$f(\cdot) \in \mathcal{C}(A, c_1, c_2) := \left\{ f(\cdot) \mid \|f(x) - Ax\|^2 \leq c_1 + c_2 \|x\|^2 \right\}\tag{2.21}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^n y $c_1, c_2 > 0$ son constantes

- la siguiente desigualdad se cumple²

$$\|f(x) - Ax + \xi\|^2 \leq b_1 + b_2 \|x\|^2\tag{2.22}$$

- el par (A, B) es controlable
- Se propone un control $u(\cdot)$ para (2.20) de la forma lineal

$$u(t) = Kx(t) \quad ; K \in \mathbb{R}^{m \times n}\tag{2.23}$$

Así el sistema (2.20) puede reescribirse como un sistema lineal más una perturbación $\xi_x := f(x) - Ax + \xi$

$$\dot{x} = (A + BK)x + \xi_x\tag{2.24}$$

²En el capítulo 3 se demuestra una versión más compleja de esta desigualdad.

La idea central del método de la elipsoide invariante consiste en aplicar el lema 2.2 al sistema (2.24) en lazo cerrado. Para esto se propone la función cuadrática

$$\begin{aligned} V(x) &= x^\top P x \\ \forall t \in [0, \infty) \quad P &= P^\top > 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

que denota a la elipsoide

$$\mathcal{E}\left(\frac{\alpha}{\beta}P\right) = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n : V(x(t)) \leq \frac{\beta}{\alpha}\right\} = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x^\top \frac{\alpha}{\beta} P x \leq 1\right\} \quad (2.26)$$

donde $x(\cdot)$ es solución de (2.24), derivando (2.25) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^\top(t) P x(t) + x^\top(t) P \dot{x}(t) \\ &= ((A + BK)x + \xi_x)^\top P z(t) + z^\top(t) P ((A + BK)x + \xi_x) \\ &= z^\top(t) \left((A + BK)^\top P + P(A + BK) \right) z(t) + \xi_x^\top(x, t) P z(t) + z^\top(t) P \xi_x(x, t) \\ &= \begin{pmatrix} x(t) \\ \xi_x(x, t) \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} P(A + BK) + (A + BK)^\top P + \alpha P & P \\ & P \\ & & -\varepsilon I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \xi_x(x, t) \end{pmatrix} \\ &\quad - \underbrace{\alpha z^\top P z}_{V(z(t))} + \varepsilon \underbrace{\|\xi_x(x, t)\|^2}_{\leq b_1 + b_2 \|x\|^2} \\ &\leq \begin{pmatrix} x(t) \\ \xi_x(t) \end{pmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} W_1 & P \\ P & -\varepsilon I_n \end{bmatrix}}_{:=W \leq 0} \begin{pmatrix} x(t) \\ \xi_x(t) \end{pmatrix} \\ &\quad - \alpha V(x(t)) + \underbrace{\varepsilon b_1}_{\beta} \end{aligned}$$

donde $w_1 := P(A + BK + \frac{1}{2}\alpha I_n) + (A + BK + \frac{1}{2}\alpha I_n)^\top P + \varepsilon b_2 I_n$

Teorema 2.5 *si existe un control \hat{K} y una matriz \hat{P} tal que resuelva el problema de optimización*

$$\begin{aligned} \min \operatorname{tr}(P^{-1}) \\ \text{subject to } W \leq 0, P = P^\top > 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

entonces el elipsoide $\mathcal{E}\left(\frac{\alpha}{\beta}\hat{P}\right)$, será un elipsoide invariante de tamaño mínimo.

Este es el caso más básico del método del elipsoide invariante, y existes diferentes casos del mismo, por ejemplo: para sistemas discretos [1] [2], para sistemas con observador [9], con ecuaciones diferenciales implícitas [11], para sistemas híbridos [16] e incluso con elipsoide adaptable [14].

Capítulo 3

Formulación del problema

3.1 Descripción del sistema

Considérese un sistema dinámico de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) + \xi_x(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{3.1}$$

[10], [12], [21] donde $x(t)$ es el vector de estado $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la señal de control, $\xi_x(t) \in \mathbb{R}^n$ es una perturbación acotada asociada al estado $x(t)$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal afín desconocida, que pertenece al espacio \mathcal{L}_1 .

A continuación se presenta la ecuación diferencial que define una trayectoria de referencia específica para el sistema (3.1).

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) &= \varphi(x^*(t), t) \\ x^*(0) &= x_0\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función conocida, que describe la trayectoria objetivo y $x^*(\cdot)$ es la trayectoria deseada. También hacemos las suposiciones de acotamiento natural para las referencias dadas:

$$\begin{aligned}\|x^*(t)\| &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} x^*(t) = M_x, & \forall t \in \mathbb{R} \\ \|\varphi(x^*(t), t)\| &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \varphi(x^*(t), t) = M_\varphi & \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

A continuación introducimos nuestras principales hipótesis (\mathcal{A}):

- $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|\xi(t)\| \leq M_\xi$
donde $\xi(\cdot) \in \mathcal{L}_1$, $M_\xi \in \mathbb{R}_+$, [17], [19].
- $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|g(x(t))\| \leq M_g \in \mathbb{R}_+$
- \exists una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$f(\cdot) \in \mathcal{C}(A, c_1, c_2) := \left\{ f(\cdot) \mid \|f(x) - Ax\|^2 \leq c_1 + c_2 \|x\|^2 \right\} \quad (3.3)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^n y $c_1, c_2 > 0$ son constantes

- tanto $x(\cdot)$, como $x^*(\cdot)$ son medibles
- \exists una matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que, el par (A, B) es controlable

Considere el vector de error $e(t) := x(t) - x^*(t)$ y su correspondiente dinámica

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) + \xi_x(t) - \varphi(x^*(t), t) & (3.4) \\ e(0) &= x(0) - x^*(0) = 0 \\ \forall t &> 0 \end{aligned}$$

usando la matriz A y la matriz B que cumplen con las hipótesis (\mathcal{A}).

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + Bu(t) + \xi(x, x^*, t) \quad (3.5)$$

donde $\xi(x, x^*, t) := \xi_x(t) - \varphi(x^*(t), t) + f(x(t)) - A(x(t) - x^*(t)) + g(x(t))u(t) - Bu(t)$, representa a las dinámicas no modeladas, reescribiendo (3.5)

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + Bu(t) + \xi(x, x^*, t)$$

considere el siguiente vector extendido $z(t) := \begin{pmatrix} e(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ y su dinámica correspondiente

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{pmatrix} Ae(t) + Bu(t) + \xi(x, x^*, t) \\ Ax(t) + Bu(t) + \underbrace{\xi_x(t) + f(x(t)) - Ax(t) + g(x(t))u(t) - Bu(t)}_{\zeta(x,t)} \end{pmatrix} \\ \dot{z}(t) &= \begin{pmatrix} Ae(t) + Bu(t) + \xi(x, x^*, t) \\ Ax(t) + Bu(t) + \zeta(x, t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $\zeta(x, t) := \xi_x(t) + f(x(t)) - Ax(t) + g(x(t))u(t) - Bu(t)$.

Se propone un control $u(\cdot)$ para (3.6) de la forma lineal

$$u(t) = Ke(t) = Kx(t) - Kx^*(t) \quad ; K \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.7)$$

reescribiendo (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} A + BK & 0 \\ 0 & A + BK \end{pmatrix}}_{A(K)} z(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} \xi(x, x^*, t) \\ \zeta(x, t) - BKx^*(t) \end{pmatrix}}_{w(x, x^*, t)} \\ \dot{z}(t) &= A(K)z(t) + w(x, x^*, t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Lema 3.1

$$\begin{aligned} \|w(x, x^*, t)\|^2 &\leq b_1 + e^\top(t) (b_2 I_n + K^\top [24M_g^2 I_n + 16B^\top B] K) e(t) \\ &\quad + 8x^\top(t) K^\top B^\top BKx(t) \end{aligned}$$

donde $b_1 := \delta_1 + 4M_\xi^2 + 2c_1 + 4c_2 (M_x)^2$, $b_2 := 12c_2$,
 $\delta_1 := 4 \left(2(M_\xi)^2 + (M_\varphi)^2 + \|A\|^2 M_x^2 + c_1 + 2c_2 (M_x)^2 \right)$.

Prueba. Note que

$$\begin{aligned}
\|\xi(x, x^*, t)\|^2 &= \left\| \begin{array}{l} \xi_x(t) - \varphi(x^*(t), t) + f(x(t)) - A(x(t) - x^*(t)) \\ +g(x(t))Ke(t) - BKe(t) \end{array} \right\|^2 \\
&\leq 4 \left(\|\xi_x(t) + g(x(t))Ke(t) - BKe(t)\|^2 + \|\varphi(x^*)\|^2 \right) \\
&\quad + 4 \left(\|Ax^*(t)\|^2 + \|f(x) - Ax(t)\|^2 \right) \\
&\leq 4 \left(\|\varphi(x^*)\|^2 + \|Ax^*(t)\|^2 + \|f(x) - Ax(t)\|^2 + 2\|\xi_x(t)\|^2 \right) \\
&\quad + 16 \left(\underbrace{\|g(x(t))Ke(t)\|^2}_{\|g(x(t))\|^2\|Ke(t)\|^2} + \|BKe(t)\|^2 \right) \\
&\leq 4 \left(2(M_\xi)^2 + (M_\varphi)^2 + \|A\|^2 M_x^2 + c_1 + \underbrace{c_2 \|x(t)\|^2}_{=\|e+x^*\|^2 \leq 2\|e\|^2 + 2(M_x)^2} \right) \\
&\quad + 16 \left((M_g)^2 e^\top(t) K K^\top e(t) + e^\top(t) K^\top B^\top B K e(t) \right) \\
&\leq \delta_1 + e^\top(t) \left(8c_2 I_n + K^\top \left[16M_g^2 I_n + 16B^\top B \right] K \right) e(t) \\
\|w(x, x^*, t)\|^2 &= \|\xi(x, x^*, t)\|^2 + \|\zeta(x, t) - BKx^*(t)\|^2 \\
&\leq \delta_1 + e^\top(t) \left(\delta_2 I_n + K^\top \left[16M_g^2 I_n + 16B^\top B \right] K \right) e(t) \\
&\quad + \underbrace{\left\| \begin{array}{l} \xi_x(t) + f(x(t)) - Ax(t) \\ +g(x(t))Ke(t) - BK(x(t) - x^*(t)) - BKx^*(t) \end{array} \right\|^2}_{2\|f(x(t)) - Ax(t)\|^2 + 2\|\xi_x(t) + g(x(t))Ke(t) - BKx(t)\|^2} \\
&\leq \delta_1 + e^\top(t) \left(\delta_2 I_n + K^\top \left[16M_g^2 I_n + 16B^\top B \right] K \right) e(t) \\
&\quad + 2c_1 + 2c_2 \left[2\|e(t)\|^2 + 2(M_x)^2 \right] + 4M_\xi^2 \\
&\quad + 8 \left((M_g)^2 e^\top(t) K K^\top e(t) + x^\top(t) K^\top B^\top B K x(t) \right) \\
&\leq b_1 + e^\top(t) \left(b_2 I_n + K^\top \left[24M_g^2 I_n + 16B^\top B \right] K \right) e(t) \\
&\quad + 8x^\top(t) K^\top B^\top B K x(t)
\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Resultados principales

4.1 Elipsoide invariante

Consideremos la siguiente función energética $V : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$V(z) := z^T P z; \quad z \in \mathbb{R}^{2n} \quad P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

ahora consideremos la siguiente función compuesta $\mathcal{V} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{V}(t) := V(z(t)) = z^T(t) P z(t) \quad (4.1)$$

donde $z(\cdot)$ es solución de (3.8).

Teorema 4.1 *Para algún $\alpha, \varepsilon > 0$ y si existe un control \hat{K} y una matriz \hat{P} tal que resuelva el problema de optimización*

$$\begin{aligned} & \min \operatorname{tr}(P^{-1}) \\ & \text{subject to } W \leq 0, P = P^\top > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

entonces el elipsoide $\mathcal{E}\left(\frac{\alpha}{\beta}\hat{P}\right) = \left\{z(t) \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(z(t)) \leq \frac{\beta}{\alpha}\right\} = \left\{z(t) \in \mathbb{R}^n : z^\top \frac{\alpha}{\beta} P z \leq 1\right\}$

,definida por (4.1) será un elipsoide invariante de tamaño mínimo. Donde

$$\beta := \varepsilon b_1, P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix},$$

$$W(K, P) := \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & W_{13} & 0 \\ 0 & W_{22} & 0 & W_{24} \\ W_{31} & 0 & W_{33} & 0 \\ 0 & W_{42} & 0 & W_{44} \end{bmatrix} \leq 0$$

$$W_{11} = P_1 \left(A + BK + \frac{1}{2}\alpha I_n \right) + \left(A + BK + \frac{1}{2}\alpha I_n \right)^T P_1$$

$$+ \varepsilon b_2 I_n + \varepsilon 8K^\top \left[3M_g^2 I_n + 2B^\top B \right] K$$

$$W_{22} = P_1 \left(A + BK + \frac{1}{2}\alpha I_n \right) + \left(A + BK + \frac{1}{2}\alpha I_n \right)^T P_1 + \varepsilon 8K^\top B^\top BK,$$

$$W_{13} = W_{31} = W_{24} = W_{42} = P_1, \quad W_{33} = W_{44} = -\varepsilon I_{n \times n}$$

Prueba. Derivando (4.1)

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(z(t)) &= \dot{z}^T(t) Pz(t) + z^T(t) P\dot{z}(t) \\ &= (A(K)z(t) + w(x, x^*, t))^T Pz(t) \\ &\quad + z^T(t) P(A(K)z(t) + w(x, x^*, t)) \\ &= z^T(t) \left(A(K)^T P + PA(K) \right) z(t) \\ &\quad + w^T(x, x^*, t) Pz(t) + z^T(t) Pw(x, x^*, t) \\ &= \begin{pmatrix} z(t) \\ w(x, x^*, t) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{A}(K, P, \alpha) & P \\ P & -\varepsilon I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ w(x, x^*, t) \end{pmatrix} \\ &\quad - \underbrace{\alpha z^T Pz}_{\mathcal{V}(z(t))} + \underbrace{\varepsilon \|w(x, x^*, t)\|^2}_{\leq 0} \\ &\leq b_1 + e^\top(t) (b_2 I_n + K^\top [24M_g^2 I_n + 16B^\top B] K) e(t) \\ &\quad + 8x^\top(t) K^\top B^\top BKx(t) \\ &\leq \begin{pmatrix} z(t) \\ w(x, x^*, t) \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{A}(K, P, \alpha, \varepsilon) & P \\ P & -\varepsilon I \end{bmatrix}}_{\leq 0} \begin{pmatrix} z(t) \\ w(x, x^*, t) \end{pmatrix} \\ &\quad - \alpha \mathcal{V}(z(t)) + \underbrace{\varepsilon b_1}_{\beta} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{A}(K, P, \alpha) &:= PA(K) + A^T(K)P + \alpha P \\ \tilde{A}(K, P, \alpha, \varepsilon) &:= \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.3)$$

por lo que

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\alpha V(z(t)) + \beta$$

finalmente aplicando el lema 2.2

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} z^T \hat{P} z \leq \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} z^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \hat{P} z \leq 1$$

□

4.1.1 Problema relajado

Si bien el teorema 4.1, resuelve el problema de seguimiento robusto la matriz $W(K, P)$ es una desigualdad matricial Bilineal (BMI, por sus siglas en ingles), existe software para resolver BMI, como el PENBMI, este requiere licencia, es por esto que se opta por estimar a $W(K, P)$ superiormente por una matriz con condiciones tipo LMI, que se pueden resolver con el software de uso libre SEDUMI.

Considere la siguiente transformación lineal $M = \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$,

donde $Q := P_1^{-1}$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $\tilde{W} := M^T W M$. Si se pide la condición de que $Z^T W Z \leq 0$, esta se cumple solo si y sólo si $W \leq 0$, entonces debido a que $W \leq 0$ y M es una matriz a bloques no singular, esto implica que

$\widetilde{W} \leq 0$, con

$$\widetilde{W} := \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11} & 0 & I_n & 0 \\ 0 & \widetilde{W}_{22} & 0 & I_n \\ I_n & 0 & -\varepsilon I_n & 0 \\ 0 & I_n & 0 & -\varepsilon I_n \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{11} &= \left(A + BK + \frac{1}{2}\alpha I_n \right) Q + Q \left(A + BK + \frac{1}{2}\alpha I_n \right)^T + \varepsilon b_2 Q^2 \\ &\quad + \varepsilon 8QK^\top [3M_g^2 I_n + 2B^\top B] KQ \\ \widetilde{W}_{22} &= \left(A + BK + \frac{1}{2}\alpha I_n \right) Q + Q \left(A + BK + \frac{1}{2}\alpha I_n \right)^T + \varepsilon 8QK^\top B^\top BKQ \end{aligned}$$

si además de esto, se considera los siguientes cambios de variables $Y := KQ$

se obtiene

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{11} &= \left(A + \frac{1}{2}\alpha I_n \right) Q + Q \left(A + \frac{1}{2}\alpha I_n \right)^T + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon b_2 Q^2 \\ &\quad + \varepsilon 8Y^\top [3M_g^2 I_n + 2B^\top B] Y \\ \widetilde{W}_{22} &= \left(A + \frac{1}{2}\alpha I_n \right) Q + Q \left(A + \frac{1}{2}\alpha I_n \right)^T + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon 8Y^\top B^\top BY \end{aligned}$$

incluso con la transformación lineal realizada aun tenemos bilinealidades en

\widetilde{W}_{11} y \widetilde{W}_{22} , por lo que se consideran las siguientes estimaciones

$$\exists Z_1 = Z_1^T \geq 0 \text{ tal que}$$

$$Y^T [(24M_g^2 I_n + 16B^\top B)] Y < Z_1 \Leftrightarrow Z_1 - Y^T (24M_g^2 I_n + 16B^\top B) Y > 0 \quad (4.4)$$

y por el complemento de schur

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Y^\top \\ Y & (24M_g^2 I_n + 16B^\top B)^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

$$\exists Z_2 = Z_2^T \geq 0 \text{ tal que}$$

$$Y^T B^\top BY < Z_2 \Leftrightarrow Z_2 - Y^T B^\top BY > 0 \quad (4.5)$$

y por el complemento de schur

$$\begin{bmatrix} Z_2 & Y^\top \\ Y & (B^\top B)^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

$\exists Z_3 = Z_3^T \geq 0$ tal que

$$Q^2 < Z_3 \Leftrightarrow Z_3 - Q^2 > 0 \quad (4.6)$$

y por el complemento de schur

$$\begin{bmatrix} Z_3 & Q \\ Q & I_n \end{bmatrix} > 0$$

Sustituyendo (4.4), (4.5) y (4.6) podemos estimar superiormente $\widetilde{W}(K, Q) \leq W_r(Y, Q)$ lo que finalmente son condiciones tipo LMI

$$W_r = \begin{bmatrix} W_{11r} & 0 & I_n & 0 \\ 0 & W_{22r} & 0 & I_n \\ I_n & 0 & -\varepsilon I_n & 0 \\ 0 & I_n & 0 & -\varepsilon I_n \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Y^T \\ Y & (24M_g^2 I_n + 16B^T B)^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad \begin{bmatrix} Z_2 & Y^T \\ Y & (B^T B)^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad \begin{bmatrix} Z_3 & Q \\ Q & I_n \end{bmatrix} > 0$$

donde

$$W_{11r} = \left(A + \frac{1}{2}\alpha I_n \right) Q + Q \left(A + \frac{1}{2}\alpha I_n \right)^T + BY + Y^T B^T + \varepsilon b_2 Z_3 + \varepsilon 8Z_1$$

$$W_{22r} = \left(A + \frac{1}{2}\alpha I_n \right) Q + Q \left(A + \frac{1}{2}\alpha I_n \right)^T + BY + Y^T B^T + \varepsilon 8Z_2$$

reescribiendo el teorema 4.1

Teorema 4.2 *Para algún $\alpha, \varepsilon > 0$ y si existe un control \hat{K} y una matriz \hat{P} tal que resuelva el problema de optimización*

$$\begin{aligned} & \min \text{tr}(P^{-1}) \\ & \text{subject to } W_r \leq 0, P = P^T > 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

entonces el elipsoide $\mathcal{E}\left(\frac{\alpha}{\beta}\hat{P}\right) = \left\{ z(t) \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(z(t)) \leq \frac{\beta}{\alpha} \right\} = \left\{ z(t) \in \mathbb{R}^n : z^T \frac{\alpha}{\beta} P z \leq 1 \right\}$

,definida por (4.1) será un elipsoide invariante de tamaño mínimo. Donde

$$\beta := \varepsilon b_1, P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix}$$

4.1.2 Elipsoide adaptable

Consideremos la siguiente función energética $V : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$V(z) := z^\top Pz + \frac{1}{\mu} \text{tr} \left\{ (K(t) - K^*) (K(t) - K^*)^\top \right\}; \quad z \in \mathbb{R}^{2n} \quad P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (4.8)$$

ahora consideremos la siguiente función compuesta $\mathcal{V} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{V}(t) := V(z(t)) = z^\top(t) Pz(t) + \frac{1}{\mu} \text{tr} \left\{ (K(t) - K^*) (K(t) - K^*)^\top \right\} \quad (4.9)$$

donde $z(\cdot)$ es solución de (3.8) y $K^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la ganancia K obtenida al usar el teorema 4.2.

Note que

$$\begin{aligned} A(K(t)) &= A(K^* + (K(t) - K^*)) \\ &= A(K^*) + \begin{bmatrix} B(K(t) - K^*) & 0 \\ 0 & B(K(t) - K^*) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_1 &:= \begin{pmatrix} e(t) \\ x(t) \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_1 B(K(t) - K^*) & 0 \\ 0 & P_1 B(K(t) - K^*) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \\ &= \text{tr} \left\{ e(t) e^\top(t) P_1 B(K(t) - K^*) \right\} + \text{tr} \left\{ x(t) x^\top(t) P_1 B(K(t) - K^*) \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ (K(t) - K^*)^\top B^\top P_1 e(t) e^\top(t) \right\} + \text{tr} \left\{ (K(t) - K^*)^\top B^\top P_1 x(t) x^\top(t) \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ B^\top P_1 e(t) e^\top(t) (K(t) - K^*)^\top + B^\top P_1 x(t) x^\top(t) (K(t) - K^*)^\top \right\} \\ &= \text{tr} \left(B^\top P_1 \left[e(t) e^\top(t) + x(t) x^\top(t) \right] (K(t) - K^*)^\top \right) \end{aligned}$$

Derivando (4.9)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{V}}(z(t)) &= \dot{z}^T(t) Pz(t) + z^T(t) P\dot{z}(t) + \frac{1}{\mu} \text{tr} \left\{ \left(\dot{K}(t) \right) (K(t) - K^*)^\top \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \text{tr} \left\{ (K(t) - K^*) \left(\dot{K}(t) \right)^\top \right\} \\
&= (A(K(t))z(t) + w(x, x^*, t))^T Pz(t) + \frac{2}{\mu} \text{tr} \left\{ \left(\dot{K}(t) \right) (K(t) - K^*)^\top \right\} \\
&\quad + z^T(t) P(A(K(t))z(t) + w(x, x^*, t)) \\
&= z^T(t) \left(PA(K^*) + A(K^*)^T P \right) z(t) + w^T(x, x^*, t) Pz(t) \\
&\quad + z^T(t) Pw(x, x^*, t) + \frac{2}{\mu} \text{tr} \left\{ \left(\dot{K}_t \right) (K(t) - K^*)^\top \right\} \\
&\quad + 2z^T(t) P \underbrace{\begin{bmatrix} B(K(t) - K^*) & 0 \\ 0 & B(K(t) - K^*) \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} P_1 B(K(t) - K^*) & 0 \\ 0 & P_1 B(K(t) - K^*) \end{bmatrix}} z(t) \\
&= \begin{pmatrix} z(t) \\ w(x, x^*, t) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} PA(K^*) + A^T(K^*)P + \alpha P & P \\ & P & -\varepsilon I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ w(x, x^*, t) \end{pmatrix} \\
&\quad + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} e(t) \\ x(t) \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_1 B(K(t) - K^*) & 0 \\ 0 & P_1 B(K(t) - K^*) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ x(t) \end{pmatrix}}_{=\chi_1 = \text{tr}(B^\top P_1 [e(t)e^\top(t) + x(t)x^\top(t)](K(t) - K^*)^\top)} \\
&\quad - \alpha \underbrace{\left(z^T Pz + \frac{1}{\mu} \text{tr} \left\{ (K(t) - K^*) (K(t) - K^*)^\top \right\} \right)}_{\mathcal{V}(z(t))} \\
&\quad + \frac{2}{\mu} \text{tr} \left\{ \left(\dot{K}(t) \right) (K(t) - K^*)^\top \right\} + \frac{\alpha}{\mu} \text{tr} \left\{ (K(t) - K^*) (K(t) - K^*)^\top \right\} \\
&\quad + \underbrace{\varepsilon \|w(x, x^*, t)\|^2}_{b_1 + e^\top(t)(b_2 I_n + 8K^\top [3M_g^2 I_n + 2B^\top B]K)e(t) + 8x^\top(t)K^\top B^\top BKx(t)} \\
&\leq \begin{pmatrix} z(t) \\ w(x, x^*, t) \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{A}(K^*, P^*, \alpha, \varepsilon) & P^* \\ & P^* & -\varepsilon I \end{bmatrix}}_{\leq W_r \leq 0} \begin{pmatrix} z(t) \\ w(x, x^*, t) \end{pmatrix} \\
&\quad + \text{tr} \left(\underbrace{\chi_2}_{=0} (K(t) - K^*)^\top \right) \\
&\quad - \alpha \mathcal{V}(z(t)) + \underbrace{\varepsilon b_1}_{\beta}.
\end{aligned}$$

$$\text{donde } \text{chi}_1 := \left[2B^\top P_1 [e(t) e^\top(t) + x(t) x^\top(t)] + \frac{2}{\mu} \dot{K}(t) + \frac{\alpha}{\mu} (K(t) - K^*) \right]$$

Así reformulando el teorema 4.2 obtenemos.

Teorema 4.3 *Para algún $\alpha^*, \mu, \varepsilon^* > 0$ y si existe un control \hat{K}^* y una matriz \hat{P}^* tal que*

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \min \text{tr} (P^{-1}) \\ & \text{subject to } W_r \leq 0, P = P^\top > 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \dot{K}(t) = -\frac{\alpha^*}{2} (K(t) - K^*) - \mu B^\top P_1^* [e(t) e^\top(t) + x(t) x^\top(t)], \\ & \quad K(t_0) = K^* \end{aligned}$$

entonces el elipsoide

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*} \hat{P}^* \right) &= \left\{ z(t) \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(z(t)) \leq \frac{\beta^*}{\alpha^*} - \kappa = \frac{\beta^*}{\alpha^*} \left[1 - \kappa \frac{\alpha^*}{\beta^*} \right] \right\} \\ &= \left\{ z(t) \in \mathbb{R}^n : z^\top \left[\frac{\alpha^*}{\beta^*} P^* \frac{1}{\left(1 - \kappa \frac{\alpha^*}{\beta^*} \right)} \right] z \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

definida por (4.9) será un elipsoide invariante de tamaño mínimo. Donde

$$\begin{aligned} \kappa &:= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \text{tr} \left\{ (K(t) - K^*) (K(t) - K^*)^\top \right\} \\ \kappa &= \kappa(\mu) < \frac{\beta^*}{\alpha^*} \end{aligned}$$

4.2 Ejemplo numerico

Para este trabajo se considero a el péndulo invertido sobre un carrito consta de un poste cuyo punto de pivote está montado sobre un carro, que es una plataforma móvil, el péndulo es libre de girar alrededor de su punto de pivote y no tiene el control de accionamiento directo, como se muestra en la Figura 4.1. El carro puede moverse horizontalmente perpendicular al eje de rotación del péndulo y está accionado por una fuerza aplicada a ella en la misma dirección. El objetivo de control es que el sistema carro-péndulo siga una trayectoria de referencia, moviendo el carro en el plano horizontal. Puesto que la aceleración angular del polo no puede ser controlada directamente, el péndulo invertido es un sistema mecánico subactuado.

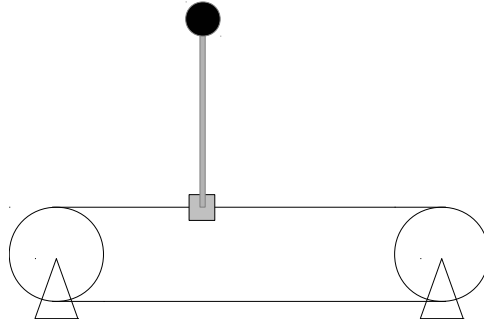


Figure 4.1: Carro-péndulo.

4.2.1 Modelo del sistema

El modelo matemático del sistema del carro-péndulo¹, se obtiene utilizando el enfoque Euler-Lagrange.

Parámetro		valor	unidad
Masa del carro	: M	0.350	kg
Masa del péndulo	: m	0.015	kg
Distancia desde el punto de pivote al centro de gravedad del péndulo	: l	0.2	m
La inercia del péndulo alrededor de su centro de gravedad	: I	0.0064	$kg \cdot m^2$
La aceleración debida a la gravedad	: g	9.81	$\frac{m}{s^2}$
Distancia del centro de masa del carro a su posición inicial	: x	variable	m
ángulo de que el péndulo con la vertical	: θ	variable	rad
La fuerza aplicada en el carro	: τ	variable	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$
Coefficiente de fricción del péndulo	: k_r	10	$\frac{kg}{s}$
Coefficiente de fricción del carro	: c	0.001	$\frac{mg \cdot m^2}{s}$

Table 4.1: Parámetros del péndulo invertido.

En primer lugar, presentamos las energías cinética y potencial, que se utilizan para calcular el Lagrangiano. La energía cinética del carro es $K_1 =$

¹El siguiente desarrollo puede consultarse en [8]

$\frac{M\dot{r}^2}{2}$. La energía cinética del péndulo es $K_2 = \frac{m\dot{x}_G^2}{2} + \frac{m\dot{y}_G^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2}$ donde $x_G = r + l \sin \theta$ and $y_G = l \cos \theta$. Entonces la energía cinética total es

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} (M + m) \dot{r}^2 + ml\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} (I + ml^2) \dot{\theta}^2$$

La energía potencial total es $P = mgl (\cos \theta - 1)$. Entonces la función lagrangiana viene dada por

$$\begin{aligned} L &= K - P \\ L &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{r}^2 + ml\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} (I + ml^2) \dot{\theta}^2 - mgl (\cos \theta - 1) \end{aligned}$$

Las correspondientes ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (q, \dot{q}) - \frac{\partial L}{\partial q} (q, \dot{q}) \right) = \tau$$

donde $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ representa las variables generalizadas, uno para cada grado de libertad del sistema, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ denota fuerzas que se aplican externamente al sistema. En nuestro caso, las variables generalizadas son x y θ , es decir, $q = (x, \theta)^T$. Tenemos, pues,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= (M + m) \dot{r} + ml\dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml\dot{r} \cos \theta + (I + ml^2) \dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mgl \sin \theta + ml\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

finalmente obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} (M + m) \ddot{r} - mgl (\sin \theta) \dot{\theta}^2 + ml (\cos \theta) \ddot{\theta} &= f - k_r \dot{r} \\ (I + ml^2) \ddot{\theta} - mgl \sin \theta + ml\ddot{r} \cos \theta &= -c\dot{\theta} \end{aligned}$$

El sistema se puede escribir en la forma estándar

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (4.11)$$

donde

$$q = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} \quad M(q) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & I + ml^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml \sin \theta \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{and } \tau = \begin{bmatrix} f - k_r \dot{r} \\ -c\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Las ecuaciones no lineales generales están dadas por

$$\begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(I + ml^2)(ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - k_r \dot{r})}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 \theta} + \frac{ml \cos \theta (c\dot{\theta} - mgl \sin \theta)}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \\ \frac{(M + m)(mgl \sin \theta - c\dot{\theta})}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 \theta} + \frac{ml \cos \theta (k_r \dot{r} - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta)}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \frac{(I + ml^2)}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \\ \frac{-ml(\cos \theta)}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \end{bmatrix} f$$

sea $M_T = M + m$, $J = I + ml^2$, $\eta = ml$

Definamos el estado del sistema como

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

donde r es la posición horizontal del carro y θ es el ángulo que forma el péndulo con la vertical. La variable de control, u , es la fuerza aplicada al carro.

Las ecuaciones del péndulo están dadas por

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

donde

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \\
g(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J}{M_T J - \eta^2 \cos^2(x_2)} \\ \frac{-\eta \cos(x_2)}{M_T J - \eta^2 \cos^2(x_2)} \end{pmatrix} \\
f_1(x) &= \frac{\eta^2 g \sin(x_2) \cos(x_2)}{M_T J - \eta^2 \cos^2(x_2)} - \frac{k_r J}{M_T J - \eta^2 \cos^2(x_2)} x_3 \\
&\quad + \frac{\eta c \cos(x_2)}{M_T J - \eta^2 \cos^2(x_2)} x_4 - \frac{\eta J \sin(x_2)}{M_T J - \eta^2 \cos^2(x_2)} x_4^2 \\
f_2(x) &= \frac{\eta M_T g \sin(x_2)}{M_T J - \eta^2 \cos^2(x_2)} + \frac{\eta k_r \cos(x_2)}{M_T J - \eta^2 \cos^2(x_2)} x_3 \\
&\quad - \frac{M_T c}{M_T J - \eta^2 \cos^2(x_2)} x_4 - \frac{\eta^2 \sin(x_2) \cos(x_2)}{M_T J - \eta^2 \cos^2(x_2)} x_4^2
\end{aligned}$$

4.2.2 Resultados numéricos

Se proponen las siguientes matrices A y B

$$A = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3252 & -5.1561 & 0.4007 \\ 0 & 2.6494 & 7.3991 & -4.0060 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.7 \\ -2.2 \\ -0.3844 \\ -1.5399 \end{bmatrix}$$

y los siguientes parámetros² que se muestran en la tabla 4.2, necesarios para la estimación de $\|w(x, x^*, t)\|^2$.

M_x	0.2
M_φ	0.2
M_ξ	0.05
M_g	2.8016
b_1	11.8824
b_2	6.8381×10^{-06}

Table 4.2: Parámetros de estimaciones del péndulo invertido.

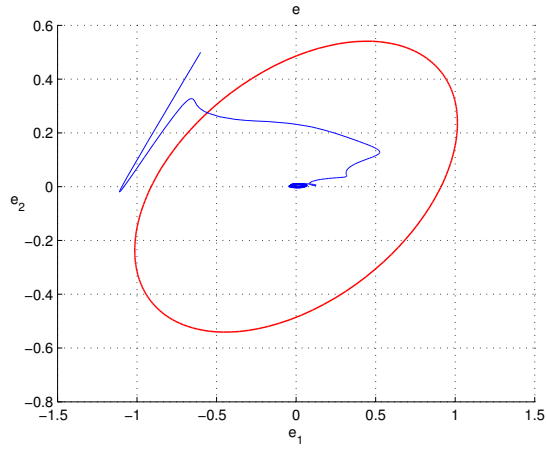
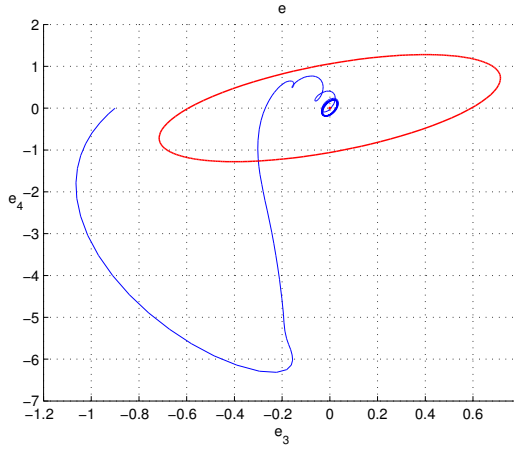
Para un $\alpha = 1.5$ y un $\varepsilon = 0.5$ se obtuvo el siguiente par de matrices

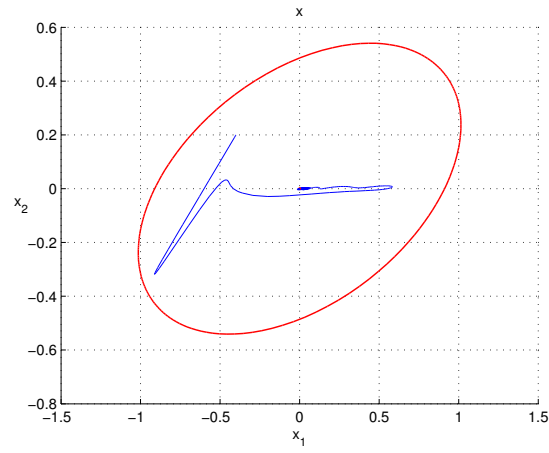
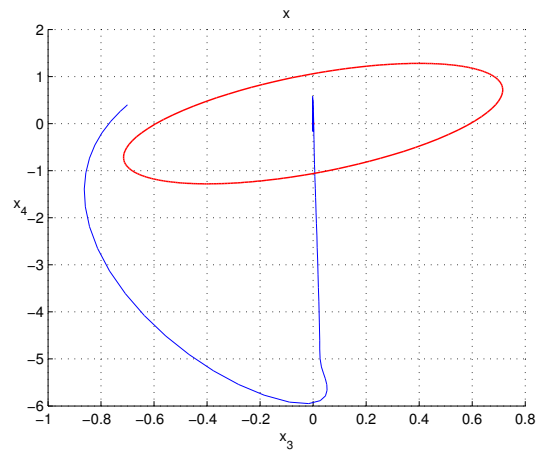
$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 7.1394 & -23.8838 & -3.7269 & -2.5653 \\ -23.8838 & 107.9960 & 15.2526 & 9.7622 \\ -3.7269 & 15.2526 & 6.1539 & 0.5914 \\ -2.5653 & 9.7622 & 0.5915 & 4.1423 \end{bmatrix},$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -16.5246 & 72.8124 & 10.6249 & 7.0845 \end{bmatrix}$$

y con $x(0) = [-0.4, 0.2, -0.7, 0.4]^\top$ y $x^*(0) = [0.2, -0.3, 0.2, 0.4]^\top$ se obtuvieron las siguientes graficas

²Ver lema 3.1.

Figure 4.2: Elipsoide del error e_1 y e_2 .Figure 4.3: Elipsoide del error e_3 y e_4 .

Figure 4.4: Elipsoide del estado x_1 y x_2 .Figure 4.5: Elipsoide del estado x_3 y x_4 .

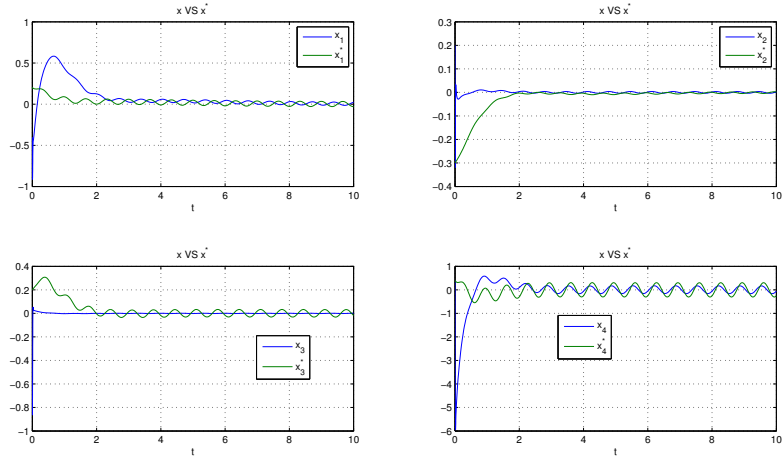
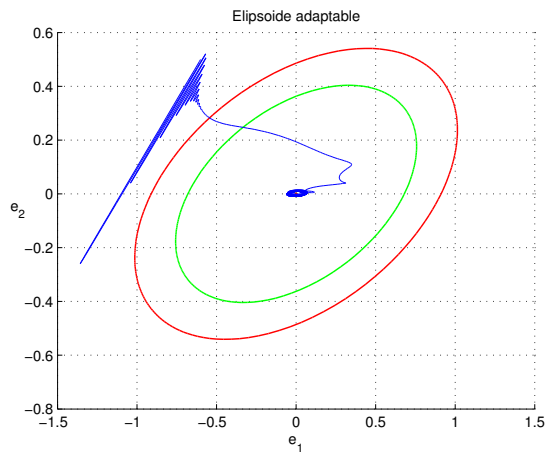
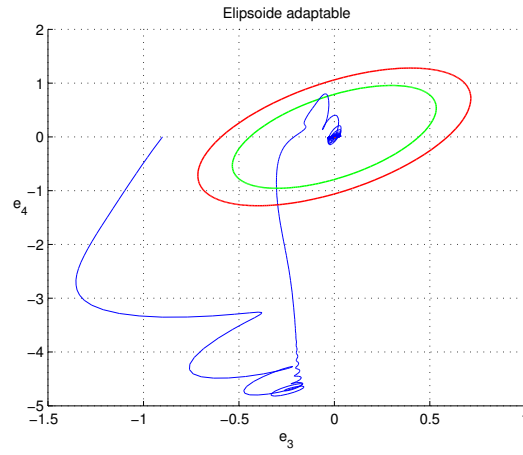
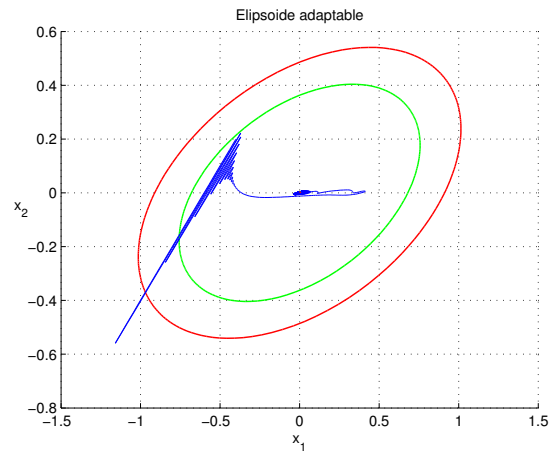


Figure 4.6: Referencia vs estado.

Las siguientes figuras corresponden al elipsoide con $K(t)$ adaptable, donde la elipse de color verde es la elipse que surge del proceso de adaptación.

Figure 4.7: Elipsoide adaptable del error e_1 y e_2 .

Figure 4.8: Elipsoide adaptable del error e_3 y e_4 .Figure 4.9: Elipsoide adaptable del estado x_1 y x_2 .

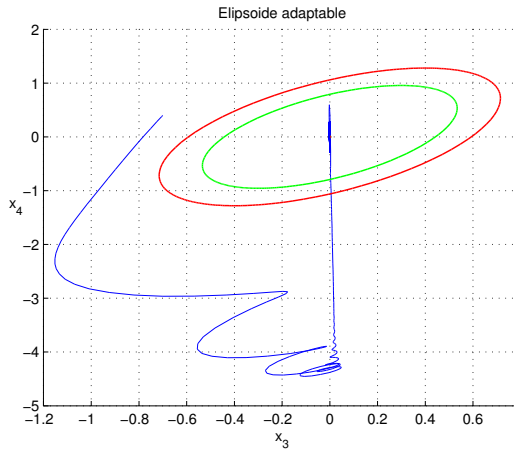


Figure 4.10: Elipsoide adaptable del estado x_3 y x_4 .

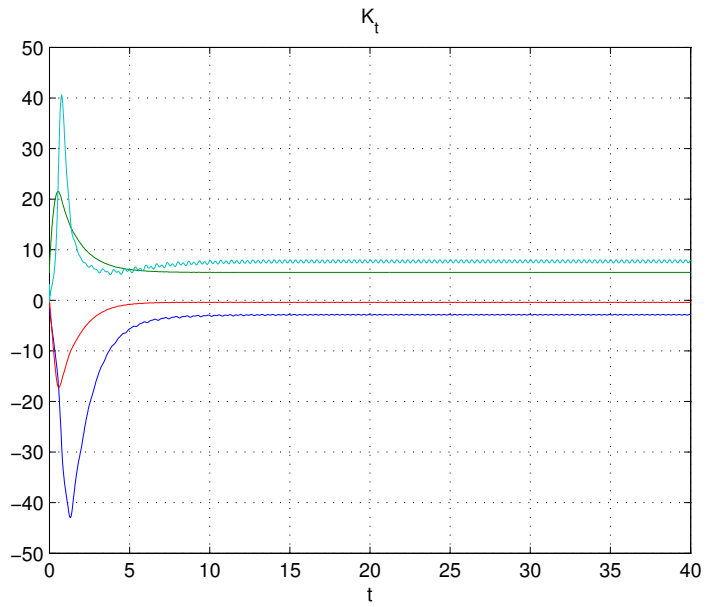


Figure 4.11: Evolución de $K(t)$.

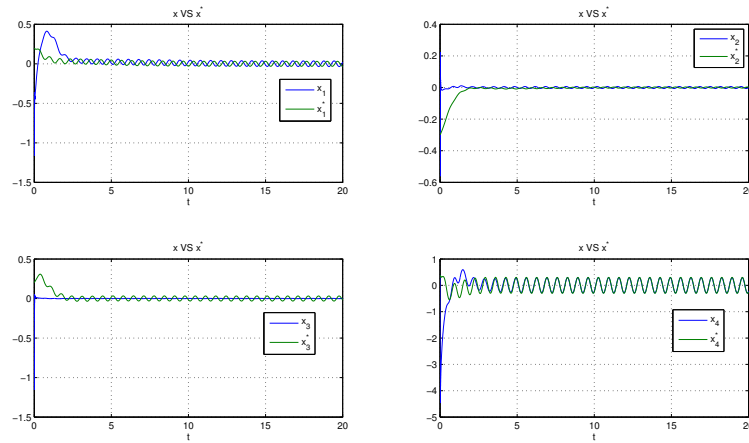


Figure 4.12: Referencia vs estado.

además se probó el método descrito en el teorema 1.1 para seguimiento de trayectorias mediante una retroalimentación de estado y se obtuvo la siguiente grafica.

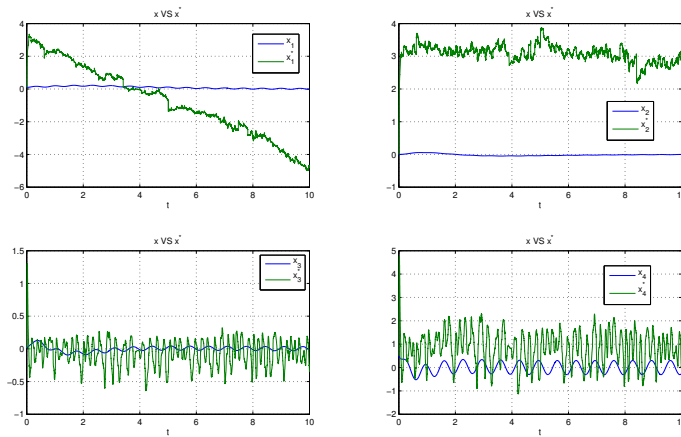


Figure 4.13: Seguimiento por retroalimentación de estado.

Donde es notorio que Carro-Pendulo no sigue a la referencia.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se propuso una extensión al método del elipsoide, para seguimiento de trayectorias para sistemas con la forma $\dot{x} = f(x) + g(x)u + \xi$, el procedimiento de diseño está basado en el caso básico del método del elipsoide invariante, pero usando un vector extendido para asegurar tanto el seguimiento como la estabilidad del sistema.

El esquema planteado, se basa en la noción de conjuntos invariantes y su estrecha relación con la teoría de Lyapunov para garantizar la estabilidad del sistema. La solución del problema se expresa mediante un problema de optimización no lineal bajo restricciones en donde la principal herramienta es la técnica de LMIs.

Finalmente, note que para caso adaptable se resuelve de manera "offline" (4.10) y en línea se adapta la ganancia K_t .

Bibliografía

- [1] ALAZKI, H., AND POZNYAK, A. Output linear feedback tracking for discrete-time stochastic model using robust attractive ellipsoid method with LMI application. In *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE, 2009 6th International Conference on* (2009), pp. 1–6.
- [2] ALAZKI, H., AND POZNYAK, A. Probabilistic analysis of Robust Attractive Ellipsoids for quasi-linear discrete-time models. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on* (2010), pp. 579–584.
- [3] ARMITANO, O. *Programación no lineal*. Limusa, 1985.
- [4] BLANCHINI, F. *Set-Theoretic Methods in Control*. Birkhäuser Boston, 2008.
- [5] BOYD, S. P., GHAOUI, L. E., FERON, E., AND BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1994.
- [6] CHEN, C.-T. *Linear system theory and design*, third ed. Oxford University Press, 1999.
- [7] CHRISTOPHERSEN, F. *Optimal control of constrained piecewise affine systems*. Springer Verlag, Berlin New York, 2007.
- [8] FANTONI, I., AND LOZANO, R. *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer London, 2002.

-
- [9] GONZALEZ, O., POZNYAK, A., AND AZHMYAKOV, V. On the robust control design for a class of nonlinear affine control systems: The invariant ellipsoid approach. In *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE, 2009 6th International Conference on* (2009), pp. 1–6.
- [10] ISIDORI, A. *Nonlinear control systems*, third ed. Springer Verlag, 1995.
- [11] JUAREZ, R., POZNYAK, A., AND AZHMYAKOV, V. On applications of Attractive Ellipsoid Method to dynamic processes governed by implicit differential equations. In *Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE), 2011 8th International Conference on* (2011), pp. 1–6.
- [12] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*, third ed. Prentice Hall, 2002.
- [13] OGATA, K. *State space analysis of control systems*. Prentice-Hall, 1967.
- [14] ORDAZ, P., AND POZNYAK, A. The Furuta’s pendulum stabilization without the use of a mathematical model: Attractive Ellipsoid Method with KL-adaptation. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on* (2012), pp. 7285–7290.
- [15] PEDREGAL, P. *Introduction To Optimization*. Springer, 2003.
- [16] PÉREZ RODRÍGUEZ, C. M. Estabilidad práctica de una clase de sistema híbridos : enfoque del elipsoide atractivo. Master’s thesis, CINVESTAV, 2010.
- [17] POLYAK, B. T., NAZIN, S. A., DURIEU, C., AND WALTER, E. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty. *Automatica* 40, 7 (2004), 1171–1179.
- [18] POZNYAK, A. S. *Variable Structure Systems: from Principles to Implementation*. Institution of Engineering and Technology, London, 2004.

-
- [19] POZNYAK, A. S. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Deterministic Techniques*, first ed. Amsterdam: Elsevier, 2008.
- [20] SCHERER, C., AND WEILAND, S. *Linear Matrix Inequalities in Control*. Delft Center for Systems and Control.
- [21] SONTAG, E. D. *Mathematical Control Theory*, second ed. New York: Springer, 1998.
- [22] ZABCZYK, J. *Mathematical Control Theory An Introduction*, second ed. Birkhäuser, 1995.