



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**

**UNIDAD MÉXICO
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO**

**MODELADO Y CONTROL DE UN MINI UAV
CONVERTIBLE**

Tesis que presenta:

M. en C. Víctor José Rosas Vásquez

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

En la especialidad de

Control Automático

Director de la tesis: Jorge Antonio Torres Muñoz y Rogelio Lozano Leal

México D.F.

Marzo, 2013

AGRADECIMIENTOS

Antes que todo le doy gracias a Dios por estar siempre a mi lado.

A mi Madre por su amor, su voluntad, su carácter, y sobre todo por no haber abandonado nunca la esperanza que tiene en su hijo.

A mis asesores: Dr. Jorge Antonio Torres Muñoz y Rogelio Lozano Leal por la oportunidad que me brindaron para trabajar con ellos.

Al Dr. Alejandro Malo Tamayo por todo el tiempo y ayuda que siempre me brindo.

A mis sinodales Dr. Vadim Azmhyakov, Dr. Moisés Bonilla y Dr. Sergio Salazar Cruz por su tiempo y apoyo.

Al CONACyT por la beca otorgada para realizar mis estudios. Apoyo sin el no hubiera sido posible llevarlos a cabo.

ABSTRACT

The study of the unmanned aerial mini-vehicles (mini UAV's) has had a great development in the last years due to the important applications that can be accomplished. On one hand convertible planes have the advantage of performing vertical take-off and hovering flights like helicopters. On the other hand convertible planes can also fly long distance as classical airplanes. They do not require wide spaces for taking-off or landing or the use of mechanisms such as a catapult. Convertible planes present therefore many advantages to be used in places where no take-off or landing facilities are available such as after an earthquake, during flooding, on ships or ocean platforms, etc.

This work presents the mathematical model of a new configuration of a fixed wing mini-UAV (Unmanned Aerial Vehicle). The mini-UAV is not a tail-sitter configuration and takes-off with the fuselage at the horizontal position. The mathematical model takes in count the contributions of the aerodynamics properties of the mini-UAV and provides a platform for future works.

An experimental prototype of this new configuration driven by four brushless motors has been built including the onboard avionics. The experimental prototype consists of a classical plane low-speed configuration to which four rotors have been installed to form a quad rotor. The two front rotors can be tilted 90° forward to change to plane mode.

The applied control law for hover mode is based on separated saturation control strategy while in transition mode is based on back stepping non linear control. Numerical simulations have shown the satisfactory performance of the proposed control laws in vertical take-off, hover and transition modes working in independent form. More over the simulation study showed good transition properties when going from hover mode to forward fly operation, hence a good interaction between both control strategies has been evaluated.

In what that concerns real time experiments take-off and hovering operation was evaluated reaching high performance attitude control.

RESUMEN

El estudio de aviones no tripulados miniatura convertibles “mini UAV” por sus siglas en inglés, ha tenido en los últimos años un gran desarrollo debido a la importancia que han cobrado las tareas que dichos vehículos pueden cumplir. Por un lado los aviones convertibles tienen la ventaja de realizar despegues verticales y vuelo en sustentación como los helicópteros convencionales. Por otro lado estos vehículos pueden volar grandes distancias como los aviones clásicos. Estas características permiten prescindir de grandes espacios para despegues-aterrizajes o de elementos tales como catapultas utilizadas con este fin. Los vehículos convertibles presentan muchas ventajas para ser usados en lugares donde no se tienen las facilidades para realizar despegue o aterrizajes convencionales como sucede después de un temblor, una inundación, un incendio forestal, etc.

Este trabajo presenta el modelo matemático de una nueva configuración de un “mini-UAV” de ala fija. La configuración no pertenece a los conocidos como “sentados en cola” que despegan con el fuselaje en posición vertical. Este vehículo despegue con el fuselaje en posición horizontal. El modelo matemático toma en cuenta la contribución aerodinámica propia del vehículo lo cual lo hace más completa para servir de plataforma a futuros trabajos.

Un prototipo de esta nueva configuración impulsado por cuatro motores “brushless” fue construido. El prototipo consiste de un avión clásico de baja velocidad con cuatro motores montados en formación de cuadrirrotor. Los dos motores delanteros pueden girar hacia adelante 90° para cambiar la dinámica del vehículo.

Para las etapas de operación del despegue y el vuelo en sustentación se utilizó una ley de control de funciones de saturación separadas, mientras que para la etapa de transición se utilizó una ley de control no lineal conocida como “backstepping”. Se realizaron simulaciones de las leyes de control sobre el modelo obtenido y se mostró el buen desempeño de las mismas trabajando de manera independiente. Además se estudio en simulación la interacción de ambas leyes de control sobre el modelo general mostrando un buen desempeño durante la transición.

En lo que respecta a experimentación en tiempo real se realizaron pruebas de despegue y sustentación con resultados muy satisfactorios.

Índice general

1. Introducción	9
1.1. Motivación y marco de la tesis	9
1.2. Motivación	16
1.3. Objetivos de la tesis	17
1.4. Organización de la tesis	18
2. Modelo matemático del UAV	19
2.1. Consideraciones generales	20
2.1.1. Referenciales	20
2.1.2. Vectores generalizados y matrices de rotación	22
2.1.3. Aspectos aerodinámicos	27
2.1.4. Construcción del modelo	29
3. Control del UAV	49
3.1. Dinámica de vuelo en sustentación	51
3.1.1. Consideraciones aerodinámicas	51
3.1.2. Dinámica traslacional	52
3.1.3. Dinámica rotacional	53
3.2. Ley de control: vuelo en sustentación	57

3.2.1.	Control de la dinámica de altitud (z) y zigzaguo (ψ).	57
3.2.2.	Control de la dinámica longitudinal (x, θ).	60
3.2.3.	Control de la dinámica lateral (y, ϕ).	70
3.2.4.	Simulación de vuelo en sustentación del UAV	71
3.3.	Dinámica de vuelo de transición	80
3.3.1.	Consideraciones aerodinámicas	85
3.3.2.	Dinámica traslacional	85
3.3.3.	Dinámica rotacional	87
3.4.	Ley de control: vuelo de transición	87
3.4.1.	Análisis de la secuencia de transición	90
3.4.2.	Simulación conjunta del vuelo de sustentación y de transición del UAV	91
4.	Prototipo del UAV	101
4.1.	Diseño Conceptual ¹	101
4.1.1.	Geometrías del UAV	102
4.1.2.	Dimensionamiento de los elementos del UAV	103
4.1.3.	Diseño aerodinámico	106
4.1.4.	Estabilidad y control estático longitudinal	108
4.2.	Prototipo del UAV: La Raie Manta	112
4.2.1.	Construcción	112
4.2.2.	Pruebas sobre el prototipo	113

¹Diseño y construcción realizados en colaboración con los alumnos de Ingeniería Aeronáutica de la ESIME Ticoman: Hernández Álvarez Enrique; Montoya Ramos Roberto Sinhue durante su estancia de servicio social en la UMI LAFMIA 3175 CNRS

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
5. Conclusiones	121
5.1. Conclusiones y Trabajo futuro	121
5.2. Publicaciones	124
6. Apéndice A: Aspectos aerodinámicos adicionales	125
6.0.1. Calculos de geometrías	125
6.0.2. Calculos aerodinámicos	127

Índice de figuras

- 1.1. Aviones de despegue vertical: Izq. Ryan X-13, Der. Harrier 11

- 2.1. Prototipo del mini-UAV La raie manta 19
- 2.2. Referenciales usados para el modelado del UAV 21
- 2.3. Detalle del referencial móvil sobre los motores frontales 22
- 2.4. Fuerzas actuando sobre el UAV 31
- 2.5. Distancias de las fuerzas actuando en el UAV 40

- 3.1. Etapas de operación del UAV 50
- 3.2. Programa de simulación del modelo matemático del UAV 71
- 3.3. Medidas del prototipo “La Raie Manta”. Acotación en cm. 72
- 3.4. Geometría del perfil e423 en el JavaFoil 73
- 3.5. Coeficientes aerodinámicos del E423 obtenidos del JavaFoil 74
- 3.6. Posiciones espaciales del cg del UAV 76
- 3.7. Posiciones angulares del UAV 78
- 3.8. Comportamiento de las señales de control u_ϕ, u_θ 79
- 3.9. Posición del UAV 81
- 3.10. Posición angular teta del UAV 81
- 3.11. Posición angular fi, psi, del UAV 82

3.12. Simulación de despegue en Virtual World	82
3.13. Levantamiento del ala principal	83
3.14. Arrastre del ala principal	83
3.15. Señal de control u_ϕ vs. tiempo	84
3.16. Señal de control u_θ vs. tiempo	84
3.17. Modificaciones al programa de simulación del modelo matemático del UAV	92
3.18. Posición del UAV vs. tiempo	95
3.19. Posición del UAV vs tiempo durante la transición	95
3.20. Velocidad del UAV vs. tiempo	96
3.21. Velocidad vs tiempo durante la transición	96
3.22. Ángulo de ataque vs tiempo	97
3.23. Ángulo de ataque vs tiempo durante la transición	97
3.24. Deflexión del elevador durante la transición	98
3.25. Levantamiento del ala principal durante la transición	98
3.26. Arrastre del ala principal durante la transición	99
4.1. Geometría del perfil E423	108
4.2. Vista 3d del ala con perfil E423	108
4.3. Curva polar del ala del prototipo La Raie Manta	109
4.4. Curva coeficiente de levantamiento C_L vs Angulo de ataque α	110
4.5. Curva coeficiente de momentos C_m vs Angulo de ataque α	111
4.6. Vista frontal del prototipo La Raie Manta	112
4.7. Vista posterior del prototipo La Raie Manta	113
4.8. Vista lateral del prototipo La Raie Manta	114
4.9. Amortiguador mecánico para la central inercial	115

4.10. Prueba No.1 Vuelo en sustentación de La Raie Manta 116

4.11. Prueba No.2 Vuelo en sustentación de La Raie Manta 116

4.12. Ángulo ϕ vs. tiempo. Prueba 1 vuelo en sustentación. 117

4.13. Ángulo θ vs. tiempo. Prueba 1 vuelo en sustentación. 117

4.14. Ángulo ψ vs. tiempo. Prueba 1 vuelo en sustentación. 118

4.15. Ángulo ϕ vs. tiempo. Prueba 2 vuelo en sustentación. 118

4.16. Ángulo θ vs. tiempo. Prueba 2 vuelo en sustentación. 119

4.17. Ángulo ψ vs. tiempo. Prueba 2 vuelo en sustentación. 119

4.18. Ángulo ϕ vs. tiempo. Prueba 2 vuelo en sustentación acercamiento . . 120

4.19. Ángulo θ vs. tiempo. Prueba 2 vuelo en sustentación acercamiento. . 120

6.1. Distribución de lavantamientos semi-envergadura para un perfil e423 . 128

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y marco de la tesis

El estudio de los vehículos aéreos no tripulados conocidos como UAV's por sus siglas en ingles (Unmanned Aerial Vehicles), ha tenido un gran desarrollo en los últimos años, debido a la importancia de las tareas que dichos vehículos pueden desempeñar. Las principales tareas de dichos vehículos se han dado en el campo militar con ejemplos muy conocidos como el del Predator RQ-L1 el cual tuvo una participación destacada en la guerra de Irak para el ataque de blancos con aviones piloteados de manera remota. Dentro de las misiones de tipo civil se puede citar aquellas donde se necesita supervisión aérea en zonas de desastres naturales (terremotos, tsunamis, incendios, etc.) o de accidentes (explosiones nucleares, rompimientos de presas, etc.) cuya naturaleza implica un riesgo latente.

La ausencia del piloto proporciona al vehículo la posibilidad de participar en eventos donde la integridad física del piloto puede ser comprometida pero el costo de dicha ventaja se ve reflejado en una mayor inversión en sistemas de control cuya

complejidad crece con el grado de autonomía que se desee. Así entonces UAV's como el mencionado Predator tienen costos millonarios los cuales ciertamente no pueden ser fácilmente sustentados. Es aquí donde surgen los mini-UAV's los cuales poseen las características básicas de los grandes UAV's, pero con dimensiones considerablemente menores y por supuesto menores costos.

Dentro de los mini-UAV's se encuentran los mini-UAV's convertibles los cuales tienen la capacidad de realizar el despegue vertical como helicóptero y cambiar después a la dinámica de avión. La posibilidad del despegue y/o aterrizaje vertical elimina la necesidad de grandes espacios o dispositivos adicionales tales como catapultas o paracaídas usados para esos fines y la capacidad de cambiar a la dinámica de avión le da al vehículo la posibilidad de realizar recorridos de grandes distancias difíciles de pensar en términos de eficiencia-gasto de combustible para un helicóptero convencional de esas dimensiones. Dentro de este tipo de UAV's existen dos configuraciones típicas, en primer lugar se encuentran los conocidos como de cuerpo rotatorio (tail-sitter) tal como el Ryan X-13 mostrado en la figura 1; en segundo lugar se encuentran los conocidos como de configuración convencional tal como el Harrier mostrado en la misma figura. Ambos de ala fija.

La necesidad de una mayor autonomía de los UAV's demanda a su vez una mayor cantidad de sistemas de control capaces de realizar este trabajo de manera más eficiente, por tanto, el estudio de las técnicas de control se vuelve más importante en este campo de la investigación así como el estudio de microprocesadores (el progreso tecnológico ofrece cada día dispositivos más rápidos, económicos y accesibles), de elementos de censado tales como centrales inerciales (IMU's), de sistemas de posicionamiento espacial (GPS, sistemas de visión, etc.), de sistemas de filtrado (digital, analógico) además del análisis de diferentes configuraciones de UAV's desde el punto de vista aerodinámico. Este último punto es básico pues la naturaleza



Figura 1.1: Aviones de despegue vertical: Izq. Ryan X-13, Der. Harrier

misma del problema pasa la mayor de las veces por un conflicto entre funcionalidad y conservación de las características aerodinámicas necesarias.

En cuanto a las técnicas de control los UAV's son un problema muy complejo pues sus modelos matemáticos son fuertemente no lineales además de ser sistemas subactuados que requieren de gran robustez y maniobrabilidad ante las perturbaciones tales como viento o turbulencia por citar algunas.

En [1] se pueden consultar conceptos básicos generales sobre aeronaves (distintas configuraciones) de despegue vertical conocidos como VTOL (vertical take-off and landing) para después continuar con problemas más complejos. *Fantoni et al* [2] trabajan con el modelo de una aeronave de despegue vertical particular conocida como PVTOL (planar vertical take-off and landing), haciendo una serie de consideraciones simplifican el modelo matemático y proponen la inclusión de un parámetro de incertidumbre que depende de las características físicas del aeronave, proponen el algoritmo de una ley de control que linealiza el modelo y estabiliza la dinámica; la ley de control se valida mediante simulación con un parámetro de incertidumbre propuesto.

En cuanto al control de cuadrirrotores diversos autores han atacado el problema con distintas técnicas. *Mistler et al* [3] presentan el modelo en términos de ecuaciones diferenciales del cuadrirrotor al cual llegan por medio de la aplicación de las leyes de Newton además de un control que linealiza y desacopla la dinámica del mismo. Analizan igualmente la estabilidad y robustez de la ley de control en presencia de ciertas perturbaciones (viento y turbulencia) todo lo anterior en simulación numérica. *Castillo et al* [4] llegan al modelo del cuadrirrotor vía Lagrange y simplifican el modelo haciendo consideraciones físicas. Proponen un control basado en saturaciones anidadas. Hacen un análisis de la estabilidad local mediante experimentación en un mini-cuadrirrotor validando el buen desempeño de la ley de control. Así mismo, *Castillo et al* [5] hacen una comparación entre la ley de control de saturaciones separadas y un LQR aplicando ambos algoritmos a un mini-cuadrirrotor de lo cual determinan un mejor desempeño de la ley de control de saturaciones. Estas referencias de control de cuadrirrotores representan la mitad de la base conceptual del presente trabajo. La otra mitad son los trabajos basados en configuraciones de mini-UAV's convertibles. *Escareño et al* [6] proponen una configuración de birrotor contra-rotativo con una particular disposición física de manera que una de los motores se encuentra justo encima del elevador para aprovechar al máximo el flujo de la hélice en el control de cabeceo o "pitch" para realizar la transición entre las dos dinámicas. Desarrollan un modelo matemático simplificado que incluye las características aerodinámicas del vehículo las cuales no son preponderantes en el prototipo por la construcción tan básica del mismo (ala principal de perfil plano). Proponen una ley de control de "tracking error" la cual validan en simulación con un buen desempeño. En la práctica se valida la ley de control para el vuelo en sustentación "hover" solamente y el desempeño es bueno en general. Utilizan un sistema de control conocido como: embarcado a bordo el cual consta de un procesador (Rabbit 3000) y una

central inercial (Sparkfun6DOF). *Bataillé et al* [7] presentan un prototipo llamado “Vertigo”. Realizan interesantes pruebas del vehículo completo en un túnel de viento para investigar experimentalmente los coeficientes aerodinámicos del vehículo como un “todo”. Realizan las mismas pruebas con las hélices en movimiento (a velocidades predeterminadas) a fin de investigar el efecto del flujo forzado de las hélices sobre los coeficientes aerodinámicos. Este mismo problema lo analizan teóricamente utilizando la teoría del disco para el flujo forzado de las hélices y llegan a la necesidad de resolver un polinomio de grado cuarto para poder encontrar la componente de aire forzado que en teoría disminuye el ángulo de ataque del viento relativo durante la transición del vehículo. Proponen una ley de control de retroalimentación clásica y validan sus resultados en la simulación y sobre el prototipo. Aquí cabe mencionar el trabajo de *McVeigh et al* [8] que realizan un estudio para la NASA sobre la influencia del flujo forzado de las hélices sobre la capacidad de carga de alas estrechas debido a la disminución del ángulo de ataque del viento relativo fenómeno que se agudiza en ángulos cercanos al desplome. Lo anterior utilizando igualmente la teoría del disco. En [9] *Escareño et al* proponen una configuración de UAV de los conocidos como “tail sitter”. Analizan la misma problemática de la incidencia de flujo de aire forzado por las hélices sobre la disminución del ángulo de ataque en la transición. Proponen que las superficies aerodinámicas del UAV se encuentran totalmente sumergidas en el flujo del aire forzado por las hélices. Pero utilizan finalmente un prototipo sin perfil aerodinámico (placa plana) con lo cual eliminan casi por completo esta contribución tan importante. Toman el modelo simplificado y aplican una técnica de control de “back stepping” para la etapa de vuelo en sustentación del UAV. Validan el control en simulación y en la práctica en el prototipo. Resulta interesante la propuesta del sistema de control embarcado que utilizan con la incorporación de una central inercial de propia manufactura. *Maqsood et al* [10] proponen una configuración de avión

convencional ala-cola para el UAV. El empuje esta dado por dos motores frontales en configuración de tracto-rotor fijos de manera que asumen que el flujo de aire forzado solo baña un cuarto de la envergadura total del ala conocida como “spam” del ala. El otro 75 % del ala está dividido en dos secciones laterales las cuales pivotean durante la transición sobre un punto ubicado a 0.25 de la cuerda del ala atrás del borde de ataque de la misma. Asimismo estudian dos configuraciones en las cuales varía la relación longitud de ala-cuerda de ala conocida como alargamiento o “aspect ratio” y analizan las implicaciones de estos cambios en la configuración sobre las características aerodinámicas del vehículo. Generan trayectorias óptimas durante la transición para diferentes escenarios variando las variables citadas arriba utilizando un “toolbox” de Matlab. Igualmente realizan un análisis de relación peso-empuje durante la transición afín de no perder altitud durante la misma teniendo en cuenta el tiempo requerido para dicha etapa. *Daisuke et al* [11] proponen una configuración de UAV similar a la anterior. Construyen un prototipo llamado “Skyeye V” con la adición de superficies de control en el frente del ala llamadas “slats” las cuales son retráctiles. Estudian en un túnel de viento las características aerodinámicas del prototipo completo y la influencia de la posición de los “slats” en la condición de desplome (stall) del ala principal. Realizan pruebas en campo del UAV durante la transición para corroborar los resultados de experimentación obtenidos en el túnel de viento. De igual manera *Daisuke* [12] utiliza el mismo prototipo Skyeye V y desarrolla un modelo matemático no lineal limitando el estudio a dos coordenadas espaciales. Genera optimización de trayectorias óptimas y estudia el efecto de las superficies de control frontales “slats” y posteriores llamadas “flaps” en la velocidad necesaria para lograr la transición evitando llegar al desplome. Resulta un trabajo complementario del anterior citado. *Frank et al* [13] no construyen un prototipo específico de UAV solo toman un avión comercial convencional con un rotor en el frente y lo equipan de

la electrónica necesaria para poder controlarlo en vuelo en sustentación y en vuelo de crucero o “level flight” y la transición entre uno y otro. Proponen un modelo matemático no lineal utilizando la representación angular en cuaterniones. Todas las pruebas se realizan en un espacio confinado donde los movimientos del vehículo son controlados por una computadora central y un sistema de cámaras que determinan la posición espacial y angular del avión por medio de marcas distintivas previamente colocadas en él. No se trata de control embarcado y el control funciona muy bien en el ambiente controlado no hay mención alguna de trabajos al aire libre. *William et al* [14] trabajan con un avión similar al citado anteriormente. Proponen algunas mejoras para la duración de vuelo simulan en el avión la transición de forma manual en un ambiente controlado y con un sensor óptico montado en el vehículo el cual proponen como una solución para controlar el ángulo de cabeceo más adelante. *Roberts et al* [15] utilizan la misma aeronave que en los dos casos anteriores. Generan trayectorias óptimas para que el vehículo se posicione sobre una percha y estudia el efecto de diferentes factores aerodinámicos el cumplimiento de dichas trayectorias. *Stone et al* [16] generan el diseño de un prototipo llamado “T-Wing”. Diseño novedoso éste por tratarse de un avión no convencional. Mediante un análisis computacional realizan la optimización de su diseño previo y analizan aspectos puramente aerodinámicos. En [17] *Stone* analiza su prototipo desde un punto de vista más enfocado en el control del mismo. Plantea el uso de tres diferentes formas de representación angular dependiendo del trabajo que se trate. Realiza cinco tipos de pruebas experimentales sobre el prototipo que van desde el hover en modo semi-automático hasta el vuelo vertical completamente autónomo.

1.2. Motivación

En la actualidad existen vehículos aéreos no tripulados muy sofisticados que pueden realizar misiones muy importantes y especializadas, pero tienen un pequeño defecto, son muy costosos tanto en su construcción como en su operación y mantenimiento. Este tipo de vehículos son básicamente utilizados en operaciones militares por países cuyos presupuestos en este rubro resultan exorbitantes (Estados Unidos, Francia, Israel, etc.). Entonces para misiones de tipo civil este tipo de UAV no son del todo rentables por lo cual se han desarrollado igualmente vehículos de menor costo para este fin.

Sin embargo como en muchos rubros la dependencia tecnológica es el camino siempre a seguir. Por tanto este trabajo surge con la intención de generar un prototipo propio capaz de servir como plataforma de investigación en tiempo real, como respuesta a la necesidad social de disponer de vehículos autónomos de plataforma abierta, que permitan investigar de forma eficiente técnicas para el control autónomo de un vehículo aéreo.

La configuración propuesta surge de la necesidad de atacar el mismo problema desde una óptica diferente a fin de evitar ciertas dificultades técnicas que otros trabajos previamente citados han presentado en su momento. Dicha configuración trata de presentar una configuración más comercial y considerada más cómoda desde que el cuerpo del vehículo no pivotea. Así mismo se elimina el problema del desplome del ala principal llamado “stall” el cual es muy común en vehículos cuyo cuerpo principal pivotea como ya se menciono previamente.

Además de la construcción del prototipo se pretende generar un modelo matemático que tome en cuenta la influencia aerodinámica del vehículo a fin de probar diversas leyes de control sobre una plataforma más parecida a la realidad que permita una

mejor evaluación de dichas leyes a partir de una exigencia mayor debido a la complejidad de dicho modelo.

Actualmente en México los vehículos aéreos autónomos son un tema de investigación poco explotado, de ahí la importancia de abrir camino en este campo que podría llegar a ser gran impacto y por qué no, superar el trabajo desarrollado a nivel mundial, compitiendo con países de primer mundo.

1.3. Objetivos de la tesis

El principal objetivo de esta tesis es el diseño y construcción de un vehículo aéreo autónomo de despegue vertical capaz de lograr la transición entre la dinámica de helicóptero y la de avión convencional, de dimensiones tales que pueda ser transportador por una persona (peso menor a 2 kg); controlado por un sistema electrónico, embarcado a bordo del vehículo, que permita la implementación de diferentes leyes de control a fin de llevar a cabo las diferentes etapas de operación del UAV.

Como objetivos particulares se tienen:

- Desarrollar un prototipo capaz de despegar de manera vertical como un helicóptero pero que además cubra con los requisitos aerodinámicos mínimos necesarios para realizar un vuelo convencional.
- Realizar el modelo matemático generalizado del prototipo. A fin de probar en simulación las leyes de control propuestas para las diferentes etapas de operación. Dicha simulación resulta esencial debido al riesgo que se tiene al realizar las pruebas necesarias sobre el modelo real.
- Implementar un sistema rotación de los motores frontales capaz de cumplir con la rotación de los mismos durante la transición de las dinámicas.

- Diseñar las estrategias de control que sean factible en la implementación en tiempo real sobre el prototipo. Utilizando un procesador de bajo costo a bordo del prototipo.

1.4. Organización de la tesis

Este trabajo ha sido organizado de la siguiente forma:

- En el capítulo 2 se desarrollará el modelo dinámico completo del UAV propuesto.
- El capítulo 3 se presentan las estrategias de control implementadas en el UAV para orientación, posición y transición. Así como los resultados de la simulación de dichas estrategias en el modelo desarrollado en el capítulo anterior.
- En capítulo 4 se presenta el diseño de los elementos principales del prototipo así como algunos aspectos de su construcción, además de los resultados prácticos obtenidos.
- El capítulo 5 contiene las conclusiones, trabajos futuros y los trabajos que hasta ahora han sido publicados.
- En el apéndice A se presenta el diseño de los elementos faltantes del prototipo.

Capítulo 2

Modelo matemático del UAV

El presente trabajo se centra en el prototipo del UAV convertible llamado “La Raie Manta” mostrado en la figura 2.1.



Figura 2.1: Prototipo del mini-UAV La raie manta

Dicha configuración se trata básicamente de la fusión de un cuadirrotor y de un avión convencional como se puede observar en la figura 2.1. Para la transición entre

las dinámicas de helicóptero y avión, los motores frontales tendrán la capacidad de pivotar sobre su eje hasta 90 grados hacia el frente. Para la transición se reconocen dos dinámicas del UAV a saber: 1) Vuelo en sustentación o “hover”, donde haciendo las consideraciones pertinentes sobre el modelo matemático se llega a la dinámica de un cuadirrotor (con las salvedades correspondientes a las variaciones debidas a los cambios en los momentos de inercia, el peso y la adición de superficies con respuesta aerodinámica característica) esta dinámica se analiza con las herramientas usadas en [1], [18], [19] y [20]. y 2) Vuelo horizontal, donde bien puede incluirse la dinámica de transición dado que la configuración propuesta permite ver la transición como “un despegue con altura” y para lo cual existen herramientas suficientes en [1], [21], [23] y [25], por citar algunos ejemplos.

2.1. Consideraciones generales

Uno de los objetivos del presente trabajo es desarrollar un modelo matemático general del UAV para utilizarlo en las diferentes etapas de la operación del mismo teniendo en cuenta que en cada caso se hará las consideraciones necesarias para poder realizar el análisis pertinente a fin de llegar a las leyes de control requeridas en cada caso. Después de lo cual las leyes de control serán probadas en simulación sobre el modelo completo y una vez validadas podrán ser experimentadas en el UAV.

2.1.1. Referenciales

Se define un primer referencial llamado “referencial inercial” o “referencial fijo” representado por $I = \{x^I, y^I, z^I\}$. Este referencial se considera atado a la tierra la cual a su vez se considera plana y estacionara. Se define un segundo referencial

llamado “referencial del cuerpo” representado por $B = \{x^B, y^B, z^B\}$. Este referencial se considera atado al cuerpo del UAV y se coloca el origen del mismo en el centro de gravedad (cg) del UAV, con el eje x^B coincidiendo con la línea longitudinal de simetría del vehículo. Se define un tercer referencial llamado “referencial de estabilidad” representado por $S = \{x^S, y^S, z^S\}$. El origen de este se coloca en el centro aerodinámico del ala principal (ca) del UAV. La posición angular de este referencial depende del ángulo de ataque α del UAV respecto a la dirección relativa del viento. Se define un cuarto referencial llamado “referencial aerodinámico” representado por $A = \{x^A, y^A, z^A\}$. El origen como en el caso anterior se coloca en el centro aerodinámico del ala (ca) y la posición angular de este referencial depende del ángulo de derrape β del UAV respecto del eje x^S por lo cual depende del ángulo de ataque también. Estos dos últimos referenciales se refieren exclusivamente a los efectos aerodinámicos del vehículo [21], [23] y se pueden ver en la figura 2.2.

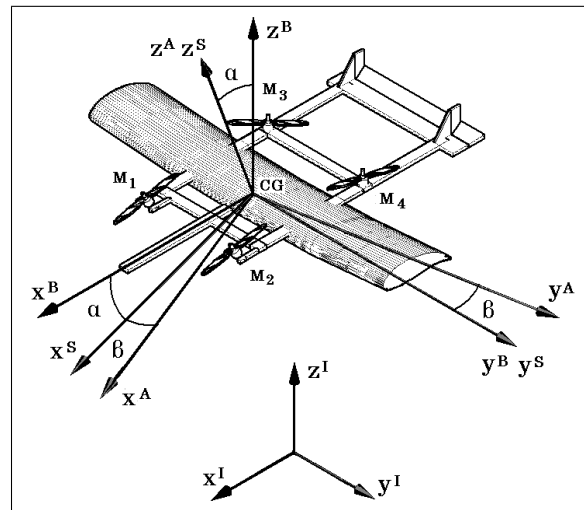


Figura 2.2: Referenciales usados para el modelado del UAV

Por último se define un quinto referencial debido a la capacidad de pivoteo que los

motores frontales tendrán. Dicho referencial llamado referencial móvil se representa por $M = \{x^M, y^M, z^M\}$. Este referencial está colocado sobre un eje paralelo al eje y^B y pasa a través del centro de masa de los motores frontales los cuales se desplazarán hacia adelante girando un ángulo μ con respecto al eje z^B . El cambio del ángulo μ de rotación de los motores frontales originará un cambio en las fuerzas de empuje de estos [24], y también pueden llegar a provocar problemas de desplome. Estos aspectos se discutirán más a detalles cuando se estudié la transición del UAV. En la figura 2.3 se muestra lo referente a este último referencial.

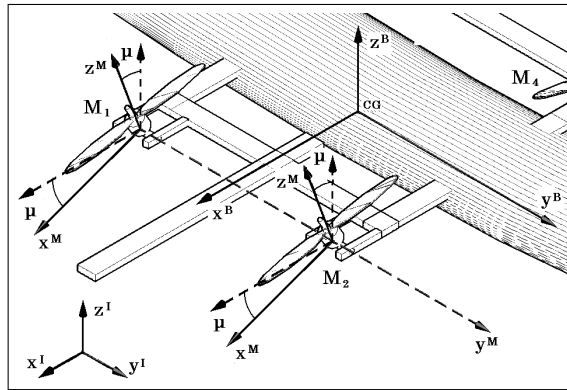


Figura 2.3: Detalle del referencial móvil sobre los motores frontales

2.1.2. Vectores generalizados y matrices de rotación

Se define el vector generalizado $Q = [q_1, q_2] \in \mathbb{R}^6$ donde $q_1 = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ representa las coordenadas de posición espacial relativas al referencial inercial I . Las coordenadas angulares del vehículo están representadas por el vector $q_2 = [\phi, \theta, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ las cuales son expresadas en la representación de los ángulos de Euler [1],[21]. En algunas ocasiones para los elementos expresados en el referencial inercial los superíndices se suprimen.

Para la dinámica traslacional se define el vector generalizado de fuerzas expresado en el referencial del cuerpo: $F^B = [F_A^B + F_M^B]^T$ donde F_A^B es el vector de las fuerzas aerodinámicas del UAV expresadas en el referencial del cuerpo y F_M^B es el vector de las fuerzas generadas por los motores expresadas en el referencial del cuerpo.

Se define m como la masa del UAV. Los vectores $V^B = [u, v, w]^T$ como la velocidad traslacional del centro de gravedad (cg) del UAV en el referencial del cuerpo y $V^I = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ como la velocidad traslacional del centro de gravedad (cg) del UAV en el referencial inercial. La velocidad angular del UAV expresada en el referencial del cuerpo es: $\omega^B = [p, q, r]^T$. El vector de la fuerza de gravedad expresado en el referencial inercial I es: $G^I = [0, 0, -g]^T$, y expresado en el referencial del cuerpo es: $G^B = (R1^{B \rightarrow I})^{-1} G^I$.

Para la dinámica rotacional se define de manera similar un vector generalizado de pares expresado en el referencial del cuerpo: $\Gamma^B = [\Gamma_A^B + \Gamma_M^B + \Gamma_D^B + \Gamma_G^B]$; donde Γ_A es el vector de pares generados por las fuerzas aerodinámicas, Γ_M es el vector de pares generados por los motores, Γ_D es el vector de pares de arrastre (D) los cuales son contrarios al movimiento de las hélices y Γ_G es el vector de pares giroscópicos.

Para llevar las fuerzas y los pares de un referencial a otro se definen las siguientes matrices de rotación. Se toma por convención que los ángulos abriendo en sentido anti-horario serán positivos y en sentido horario son negativos.

Primeramente se define la matriz de rotación $R1^{I \rightarrow B}$ para ir del referencial inercial (I) al referencial del cuerpo (B). Utilizando la rotación roll, pitch, yaw (ϕ, θ, ψ), se tiene:

$$R1^{I \rightarrow B} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & c_\phi s_\psi + c_\psi s_\theta s_\phi & s_\phi s_\psi - c_\phi c_\psi s_\theta \\ -c_\theta s_\psi & c_\phi c_\psi - s_\theta s_\phi s_\psi & c_\psi s_\phi + c_\phi s_\theta s_\psi \\ s_\theta & -c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

con $s_a = \sin(a)$ y $c_a = \cos(a)$.

Para llevar las fuerzas aerodinámicas al referencial del cuerpo son necesarias dos rotaciones por tanto la composición de dos matrices. La primera $R2^{A \rightarrow S}$ lleva las fuerzas aerodinámicas del referencial aerodinámico (A) al referencial de estabilidad (S):

$$R2^{A \rightarrow S} = \begin{pmatrix} c_\beta & -s_\beta & 0 \\ s_\beta & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

La segunda $R3^{S \rightarrow B}$ lleva las fuerzas del referencial de estabilidad (S) al referencial del cuerpo (B):

$$R3^{S \rightarrow B} = \begin{pmatrix} c_\alpha & 0 & -s_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

La composición de ambas matrices lleva las fuerzas aerodinámicas del referencial aerodinámico al referencial del cuerpo, entonces $R4^{A \rightarrow B} = R3^{S \rightarrow B} R2^{A \rightarrow S}$ de lo que:

$$R4^{A \rightarrow B} = \begin{pmatrix} c_\alpha & 0 & -s_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\beta & -s_\beta & 0 \\ s_\beta & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$R4^{A \rightarrow B} = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta & -c_\alpha s_\beta & -s_\alpha \\ s_\beta & c_\beta & 0 \\ c_\beta s_\alpha & -s_\alpha s_\beta & c_\alpha \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Donde α y β son los ángulos de ataque y derrape del UAV respectivamente, descrito previamente.

Para llevar las fuerzas de los motores frontales al referencial del cuerpo se define la matriz:

$$R5^{M \rightarrow B} = \begin{pmatrix} c_\mu & 0 & -s_\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\mu & 0 & c_\mu \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

donde μ es el ángulo de movimiento de los motores delanteros relativo al referencial B .

En el caso del timón, la fuerza generada por éste no se ve afectada por el ángulo de ataque ya que esta se representa paralela al eje y^B , pero si se afecta por el ángulo de derrape β que en este caso actúa como el al ángulo de ataque. Por lo que para llevar las fuerzas aerodinámicas generadas en el timón hacia el cuerpo se define la matriz:

$$R6^{A \rightarrow B} = \begin{pmatrix} c_\beta & s_\beta & 0 \\ -s_\beta & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

El tensor de inercia del UAV respecto a los ejes del referencial del cuerpo se define por:

$$I^B = \begin{pmatrix} I_{x^B} & -I_{x^B y^B} & -I_{x^B z^B} \\ -I_{y^B x^B} & I_{y^B} & -I_{y^B z^B} \\ -I_{z^B x^B} & -I_{z^B y^B} & I_{z^B} \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 I_{x^B} &= \int_m (y^2 + z^2) dm; \\
 I_{y^B} &= \int_m (x^2 + z^2) dm, \\
 I_{z^B} &= \int_m (y^2 + x^2) dm
 \end{aligned}$$

Definen los momentos principales de inercia respecto a los ejes del referencial del cuerpo, y:

$$\begin{aligned}
 I_{x^B y^B} &= I_{y^B x^B} = \int_m (yx) dm \\
 I_{y^B z^B} &= I_{z^B y^B} = \int_m (yz) dm \\
 I_{z^B x^B} &= I_{x^B z^B} = \int_m (xz) dm
 \end{aligned}$$

Define los productos de inercia respecto a planos formados por los ejes del referencial del cuerpo. Se considera la simetría del cuerpo del UAV respecto el eje x^B , de lo cual, todos los productos de inercia respecto a éste eje son cero y además para simplificar los cálculos se omiten los productos de inercia restantes por considerarse de un valor muy pequeño, en comparación con los momentos de inercia principales. Se tiene entonces, una matriz de inercia diagonal, que toma en cuenta solo la contribución de los momentos de inercia sobre los ejes principales. Omitiendo los índices por facilidad, el tensor de inercia queda definido como:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Más adelante se puede retomar este último apartado e investigar el peso de esta simplificación en el desarrollo de este trabajo.

2.1.3. Aspectos aerodinámicos

Las fuerzas aerodinámicas de levantamiento (L) y arrastre (D) se definen como [21], [24]:

$$L = \frac{1}{2} \rho S C_L (V_R)^2 \quad (2.8)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho S C_D (V_R)^2 \quad (2.9)$$

También se genera en el ala principal un momento (Γ_{ac}) definido por [21]:

$$\Gamma_{ac} = \frac{1}{2} \rho S \bar{c} C_m (V_R)^2 \quad (2.10)$$

Se toma por convención que dichas fuerzas aparecen a un cuarto de la cuerda del ala tomando como inicio el borde de ataque de la misma. Se tiene además que ρ es la densidad del aire, V_R es la velocidad relativa del aire, S es la área superficial, \bar{c} es la longitud media de la cuerda del ala principal. Los coeficientes aerodinámicos de levantamiento C_L , de arrastre C_D y de momento C_m , están definidos por [21]:

$$C_L = \frac{\partial (C_L)}{\partial \alpha} \alpha \quad (2.11)$$

$$C_D = C_{D\text{mín}} + K C_L^2 \quad (2.12)$$

$$C_m = \frac{\partial (C_m)}{\partial \alpha} \alpha \quad (2.13)$$

Donde las razones de cambio $\frac{\partial(C_L)}{\partial\alpha}$ y $\frac{\partial(C_m)}{\partial\alpha}$ están en función del perfil aerodinámico utilizado. En vuelo horizontal normalmente se toma la parte lineal de dichos parámetros (pendiente de la recta) para ángulos de ataque "pequeños".

La constante K depende de las condiciones físicas de las superficies, de la potencia de los motores y del régimen de velocidad del UAV (número de Reynolds).

En general en el presente trabajo solo se tomará en cuenta la dependencia del ángulo de ataque contra coeficientes aerodinámicos, a fin de simplificar el análisis subsecuente, pero se debe mencionar que dichos coeficientes dependen también del número de Reynolds (dependencia implícita de la velocidad). Más adelante se abordará dicha problemática de forma detallada cuando se trate el problema de la transición.

Para la velocidad relativa del aire, se define primeramente un vector de velocidad del viento en el referencial inercial, omitiendo el superíndice:

$$V_{wind} = \begin{bmatrix} V_{wind_x} \\ V_{wind_y} \\ V_{wind_z} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Se tiene entonces que la velocidad del (*cg*) del UAV en el referencial inercial (V^I), tomando en cuenta la componente del viento y la velocidad del (*cg*) del UAV en el referencial del cuerpo (V^B) está definida por [21]:

$$V^I = R1^{B \rightarrow I} V^B + V_{wind} \quad (2.15)$$

Tomando la velocidad relativa del aire (V_R) igual y de sentido contrario a la velocidad del (*cg*) del UAV en el referencial inercial (V^I):

$$V_R = -V^I \quad (2.16)$$

En lo siguiente se utilizará la siguiente nomenclatura para los subíndices de los elementos aerodinámicos: Para lo referente al cuerpo y el ala principal tratados como un “todo” se utilizará (wb), para la cola se utilizará (t), para el elevador se utilizará (e), para los alerones ($a1, a2$) y para el timón (r). La designación obedece a la necesidad de ser consistente con la mayoría de la literatura que utiliza siglas del idioma inglés

Por el momento los fenómenos aerodinámicos de las hélices respecto al cambio del ángulo de ataque del UAV no se consideran en detalle. Más adelante en el estudio de la transición se volverá sobre este tema. Entonces se define la fuerza de empuje de los motores:

$$F_{Mi} = K_i \omega_i \quad (2.17)$$

Donde K_i es una constante que incluye los aspectos físicos de las hélices (ángulo de ataque, diámetro, forma, etc.) y ω_i es la velocidad angular de cada motor.

Además se tiene para cada motor un par de arrastre el cual es contrario al movimiento de rotación de la hélice siendo proporcional a la velocidad angular del motor (ω_i) y a una constante que incluye los aspectos físicos de las hélices (K_{Di}) de lo se define cada par como:

$$\tau_{DMi} = K_{Di} \omega_i \quad (2.18)$$

2.1.4. Construcción del modelo

Tomando las ecuaciones del modelo matemático generalizado para un cuerpo rígido [21], [23], [26] expresadas en el referencial del cuerpo, se tiene para la dinámica traslacional y rotacional respectivamente:

$$m\dot{V}^B + mV^B \times \omega^B = F^B + mG^B \quad (2.19)$$

$$I\dot{\omega}^B + I\omega^B \times \omega^B = \Gamma^B \quad (2.20)$$

Dinámica Traslacional

Reescribiendo (2.19) en el referencial inercial:

$$m\dot{V}^I = (R1^{I \rightarrow B})^{-1} F^B + mG^I \quad (2.21)$$

Desarrollando (2.21):

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & -c_\theta s_\psi & s_\theta \\ c_\phi s_\psi + c_\psi s_\theta s_\phi & c_\phi c_\psi - s_\theta s_\phi s_\psi & -c_\theta s_\phi \\ s_\phi s_\psi - c_\phi c_\psi s_\theta & c_\psi s_\phi + c_\phi s_\theta s_\psi & c_\theta c_\phi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_x^B \\ F_y^B \\ F_z^B \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Reescribiendo (2.22) en sus componentes rectangulares:

$$m\ddot{x} = F_x^B (c_\theta c_\psi) - F_y^B (c_\theta s_\psi) + F_z^B (s_\theta) \quad (2.23)$$

$$m\ddot{y} = F_x^B (c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi) + F_y^B (c_\phi c_\psi - s_\phi s_\theta s_\psi) - F_z^B (s_\phi c_\theta) \quad (2.24)$$

$$m\ddot{z} = F_x^B (s_\phi s_\psi - c_\psi s_\theta c_\phi) + F_y^B (s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi) + F_z^B (c_\phi c_\theta) - mg \quad (2.25)$$

Para desarrollar los vectores generalizados de fuerzas F_i^B en cada eje, se usara la figura 2.4 donde se muestra de manera esquemática las fuerzas que actúan sobre el UAV.

El vector generalizado de fuerzas está expresado por:

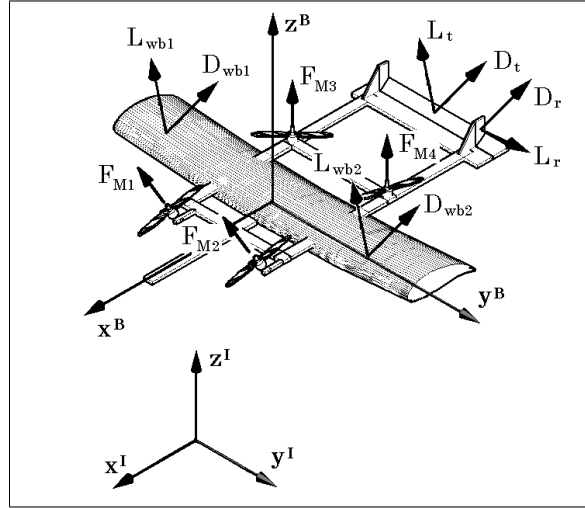


Figura 2.4: Fuerzas actuando sobre el UAV

$$F^B = \begin{bmatrix} F_x^B & F_y^B & F_z^B \end{bmatrix}^T = [F_A^B + F_M^B]^T. \quad (2.26)$$

Desarrollando el vector generalizado de fuerza de los motores en el referencial del cuerpo:

$$F_M^B = [R5^{M \rightarrow B} F_{M1}^M + R5^{M \rightarrow B} F_{M2}^M + F_{M3}^B + F_{M4}^B]^T \quad (2.27)$$

Las fuerzas de los motores frontales $M1$ y $M2$ se debe llevar del referencial móvil al referencial del cuerpo por medio de la matriz $R5^{M \rightarrow B}$, por otro lado las fuerzas de los motores $M3$ y $M4$ se encuentran en el referencial del cuerpo; desarrollando(2.27):

$$\begin{aligned}
F_M^B &= \begin{pmatrix} c_\mu & 0 & -s_\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\mu & 0 & c_\mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{M1} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} c_\mu & 0 & -s_\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\mu & 0 & c_\mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{M2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{M3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{M4} \end{bmatrix} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$F_M^B = \begin{bmatrix} -F_{M1}s_\mu - F_{M2}s_\mu \\ 0 \\ F_{M1}c_\mu + F_{M2}c_\mu + F_{M3} + F_{M4} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Se define el vector generalizado de fuerzas aerodinámicas en el referencial del cuerpo:

$$F_A^B = [R4^{A \rightarrow B} F_{Awb}^S + R4^{A \rightarrow B} F_{At}^S + R6^{A \rightarrow B} F_{Ar}^S] \quad (2.30)$$

La fuerza del ala principal y el cuerpo (wb) y de la cola (t) se llevan del referencial de estabilidad al del cuerpo por medio de la matriz $R4^{A \rightarrow B}$ y la fuerza del timón (r) por medio de la matriz $R6^{A \rightarrow B}$.

Antes de continuar es conveniente establecer una convención arbitraria para las fuerzas aerodinámicas:

1. Las fuerzas aerodinámicas del ala principal y el cuerpo del UAV se consideran como un solo elemento. En este trabajo en particular, se omite el efecto del cuerpo y se trabaja únicamente con los efectos del ala principal. La fuerza aerodinámica resultante se dividen en dos fuerzas: una izquierda y una derecha

debido a la influencia de la deflexión de los alerones que afecta de manera contraria en cada lado.

2. Las fuerzas aerodinámicas del conjunto ala principal-cuerpo y de la cola, se ven afectados por los mismo ángulo de ataque y de derrape, pues no se consideran por el momento el efecto del flujo turbulento detrás del ala principal que afecta a la cola.
3. Se tomará el arrastre (D) de todos los elementos con signo negativo, pues siempre aparece en dirección contraria al movimiento.
4. En lo que respecta al levantamiento (L) el signo depende del signo del ángulo de ataque. Así para el levantamiento del ala/cuerpo (L_{wb}) y el levantamiento de la cola (L_t) el signo de la fuerza será el mismo que el del ángulo α .
5. La dependencia de las fuerzas debido a las deflexiones será expresada por medio de los paréntesis aplicando la misma terminología para el ángulo de ataque; por ejemplo: $L_{1wb}(\alpha, \delta_{a1})$ denota la dependencia de la fuerza de levantamiento del lado derecho del ala-cuerpo respecto del ángulo de ataque y de la deflexión del alerón derecho.

Tomando en cuenta todas las consideraciones anteriores, desarrollando (2.30):

$$\begin{aligned}
F_A^B &= \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta & -c_\alpha s_\beta & -s_\alpha \\ s_\beta & c_\beta & 0 \\ c_\beta s_\alpha & -s_\alpha s_\beta & c_\alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -(D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) \\ 0 \\ L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} c_\beta & s_\beta & 0 \\ -s_\beta & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -D_r(\beta, \delta_r) \\ -L_r(\beta, \delta_r) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$F_A^B = \begin{bmatrix} -c_\alpha c_\beta (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) - s_\alpha (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)) - c_\beta D_r(\beta, \delta_r) - s_\beta L_r(\beta, \delta_r) \\ -s_\beta (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) + s_\beta D_r(\beta, \delta_r) - c_\beta L_r(\beta, \delta_r) \\ -c_\beta s_\alpha (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) + c_\alpha (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)) \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Sustituyendo (2.32) y (2.29) en (2.26) y escribiendola en sus componentes rectangulares:

$$\begin{aligned}
F_x^B &= -c_\alpha c_\beta (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) - s_\alpha (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) \\
&\quad + L_t(\alpha, \delta_e)) - c_\beta D_r(\beta, \delta_r) - s_\beta L_r(\beta, \delta_r) + F_{M1}s_\mu + F_{M2}s_\mu \quad (2.33)
\end{aligned}$$

$$F_y^B = -s_\beta (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) + s_\beta D_r(\beta, \delta_r) - c_\beta L_r(\beta, \delta_r) \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
F_z^B &= -c_\beta s_\alpha (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) + c_\alpha (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) \\
&\quad + L_t(\alpha, \delta_e)) + F_{M1}c_\mu + F_{M2}c_\mu + F_{M3} + F_{M4} \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Estas son las resultantes de las fuerzas aerodinámicas en los tres ejes del referencial del cuerpo. Finalmente sustituyendo (2.33), (2.34) y (2.35) en (2.23), (2.24) y (2.25), se tiene la dinámica traslacional del UAV de forma explícita:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= (c_\theta c_\psi) (-c_\alpha c_\beta (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) - s_\alpha (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \\
&\quad + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)) - c_\beta D_r(\beta, \delta_r) - s_\beta L_r(\beta, \delta_r) + F_{M1}s_\mu + F_{M2}s_\mu) \\
&\quad - (c_\theta s_\psi) (-s_\beta (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) + s_\beta D_r(\beta, \delta_r) \\
&\quad - c_\beta L_r(\beta, \delta_r)) + (s_\theta) (-c_\beta s_\alpha (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) \\
&\quad + c_\alpha (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)) + F_{M1}c_\mu + F_{M2}c_\mu + F_{M3} + F_{M4}) \quad (2.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{y} = & (c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi) (-c_\alpha c_\beta (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) - s_\alpha (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \\
& + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)) - c_\beta D_r(\beta, \delta_r) - s_\beta L_r(\beta, \delta_r) + F_{M1} s_\mu + F_{M2} s_\mu) \\
& + (c_\phi c_\psi - s_\phi s_\theta s_\psi) (-s_\beta (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) + s_\beta D_r(\beta, \delta_r) \\
& - c_\beta L_r(\beta, \delta_r)) - (s_\phi c_\theta) (-c_\beta s_\alpha (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) \quad (2.37) \\
& + c_\alpha (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)) + F_{M1} c_\mu + F_{M2} c_\mu + F_{M3} + F_{M4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{z} = & (s_\phi s_\psi - c_\phi s_\theta c_\psi) (-c_\alpha c_\beta (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) - s_\alpha (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \\
& + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)) - c_\beta D_r(\beta, \delta_r) - s_\beta L_r(\beta, \delta_r) + F_{M1} s_\mu + F_{M2} s_\mu) \\
& + (s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi) (-s_\beta (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) + s_\beta D_r(\beta, \delta_r) \\
& - c_\beta L_r(\beta, \delta_r)) + (c_\phi c_\theta) (-c_\beta s_\alpha (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) \quad (2.38) \\
& + c_\alpha (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)) + F_{M1} c_\mu + F_{M2} c_\mu + F_{M3} + F_{M4}) - mg
\end{aligned}$$

Dinámica Rotacional

Tomando (2.20) se tiene la dinámica rotacional del UAV expresada en el referencial del cuerpo:

$$I\dot{\omega}^B + I\omega^B \times \omega^B = \Gamma^B \quad (2.39)$$

Expresando la velocidad angular ω^B en función de los ángulos de Euler [1], [21], [23]:

$$\omega^B = R\dot{q}_2 \quad (2.40)$$

con:

$$\dot{q}_2 = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \quad (2.41)$$

y de la rotación utilizada en se tiene:

$$R = \begin{pmatrix} c_\psi c_\theta & s_\psi & 0 \\ -s_\psi c_\theta & c_\psi & 0 \\ s_\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

derivando (2.40):

$$\dot{\omega}^B = \dot{R}\dot{q}_2 + R\ddot{q}_2 \quad (2.43)$$

despejando $\dot{\omega}$ de (2.39):

$$\dot{\omega}^B = I^{-1} [\Gamma^B - (I\omega^B \times \omega^B)] \quad (2.44)$$

igualando (2.43) y (2.44):

$$\dot{R}\dot{q}_2 + R\ddot{q}_2 = I^{-1} [\Gamma^B - (I\omega^B \times \omega^B)] \quad (2.45)$$

Desarrollando el lado izquierdo de (2.45):

$$\begin{aligned} \dot{R}\dot{q}_2 + R\ddot{q}_2 &= \begin{pmatrix} -s_\psi c_\theta \dot{\psi} - c_\psi s_\theta \dot{\theta} & c_\psi \dot{\psi} & 0 \\ -c_\psi c_\theta \dot{\psi} + s_\psi s_\theta \dot{\theta} & -s_\psi \dot{\psi} & 0 \\ c_\theta \dot{\theta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} c_\psi c_\theta & s_\psi & 0 \\ -s_\psi c_\theta & c_\psi & 0 \\ s_\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}\dot{q}_2 + R\ddot{q}_2 &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} (-s_\psi c_\theta \dot{\psi} - c_\psi s_\theta \dot{\theta}) + \dot{\theta} (c_\psi \dot{\psi}) \\ \dot{\phi} (-c_\psi c_\theta \dot{\psi} + s_\psi s_\theta \dot{\theta}) + \dot{\theta} (-s_\psi \dot{\psi}) \\ \dot{\phi} (c_\theta \dot{\theta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{\phi} (c_\psi c_\theta) + \ddot{\theta} (s_\psi) \\ \ddot{\phi} (-s_\psi c_\theta) + \ddot{\theta} (c_\psi) \\ \ddot{\phi} s_\theta + \ddot{\psi} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}\dot{q}_2 + R\ddot{q}_2 &= \begin{bmatrix} \ddot{\phi} c_\psi c_\theta + \ddot{\theta} s_\psi - \dot{\phi} \dot{\theta} c_\psi s_\theta - \dot{\phi} \dot{\psi} s_\psi c_\theta + \dot{\theta} \dot{\psi} c_\psi \\ -\ddot{\phi} s_\psi c_\theta + \ddot{\theta} c_\psi + \dot{\phi} \dot{\theta} s_\psi s_\theta - \dot{\phi} \dot{\psi} c_\psi c_\theta - \dot{\theta} \dot{\psi} s_\psi \\ \ddot{\phi} s_\theta + \ddot{\psi} + \dot{\phi} \dot{\theta} c_\theta \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (2.48)$$

Desarrollando el lado derecho de (2.45) y tomando el tensor de inercia diagonal como ya previamente se considero:

$$\begin{aligned} I^{-1} [\Gamma^B - (I\omega^B \times \omega^B)] &= I^{-1} \left(\Gamma^B - (I) \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta} \\ -s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta} \\ s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta} \\ -s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta} \\ s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} I^{-1} [\Gamma^B - (I\omega^B \times \omega^B)] &= I^{-1} \left(\begin{bmatrix} \Gamma_x^B \\ \Gamma_y^B \\ \Gamma_z^B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta})(s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi})(I_y - I_z) \\ (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta})(s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi})(I_z - I_x) \\ (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta})(-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta})(I_x - I_y) \end{bmatrix} \right) \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} I^{-1} [\Gamma^B - (I\omega^B \times \omega^B)] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} \left(\Gamma_x^B - (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta})(s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi})(I_y - I_z) \right) \\ \frac{1}{I_y} \left(\Gamma_y^B - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta})(s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi})(I_z - I_x) \right) \\ \frac{1}{I_z} \left(\Gamma_z^B - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta})(-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta})(I_x - I_y) \right) \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (2.51)$$

sustituyendo (2.48) y (2.51) en (2.45):

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \ddot{\phi}c_\psi c_\theta + \ddot{\theta}s_\psi - \dot{\phi}\dot{\theta}c_\psi s_\theta - \dot{\phi}\dot{\psi}s_\psi c_\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}c_\psi \\ -\ddot{\phi}s_\psi c_\theta + \ddot{\theta}c_\psi + \dot{\phi}\dot{\theta}s_\psi s_\theta - \dot{\phi}\dot{\psi}c_\psi c_\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}s_\psi \\ \ddot{\phi}s_\theta + \ddot{\psi} + \dot{\phi}\dot{\theta}c_\theta \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} \left(\Gamma_x^B - (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta})(s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi})(I_y - I_z) \right) \\ \frac{1}{I_y} \left(\Gamma_y^B - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta})(s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi})(I_z - I_x) \right) \\ \frac{1}{I_z} \left(\Gamma_z^B - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta})(-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta})(I_x - I_y) \right) \end{bmatrix} \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Finalmente despejando para $\ddot{q}_2 = (\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi})$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \frac{1}{c_\psi c_\theta} [-\ddot{\theta}s_\psi + \dot{\phi}\dot{\theta}c_\psi s_\theta + \dot{\phi}\dot{\psi}s_\psi c_\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}c_\psi \\ &+ \frac{1}{I_x} \left(\Gamma_x^B - (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta})(s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi})(I_y - I_z) \right)] \quad (2.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{1}{c_\psi} [\ddot{\phi}s_\psi c_\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}s_\psi s_\theta + \dot{\phi}\dot{\psi}c_\psi c_\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}s_\psi \\ &+ \frac{1}{I_y} \left(\Gamma_y^B - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta})(s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi})(I_z - I_x) \right)] \quad (2.54)
\end{aligned}$$

$$\ddot{\psi} = -\ddot{\phi}s_\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}c_\theta + \frac{1}{I_z} \left(\Gamma_z^B - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta})(-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta})(I_x - I_y) \right) \quad (2.55)$$

Las ecuaciones (2.53)-(2.55) expresan la dinámica rotacional del UAV en función de los ángulos de Euler.

Para desarrollar los vectores generalizados de pares Γ_i^B en cada eje del referencial del cuerpo, se usara la figura 2.5 donde se muestra de manera esquemática las distancias a las cuales actúan las fuerzas sobre el UAV y se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

- 1. Por facilidad se supone que el centro de gravedad (*cg*) coincide con el centro aerodinámico (*ca*) del ala principal, con lo cual simplificará mucho

los cálculos al eliminar ciertos pares debidos a las fuerzas aerodinámicas del ala. Dicha consideración tiene sentido, ya que en la práctica es posible realizar dicha coincidencia en el prototipo.

2. Se utilizará la convención de la mano derecha para el signo de los pares.

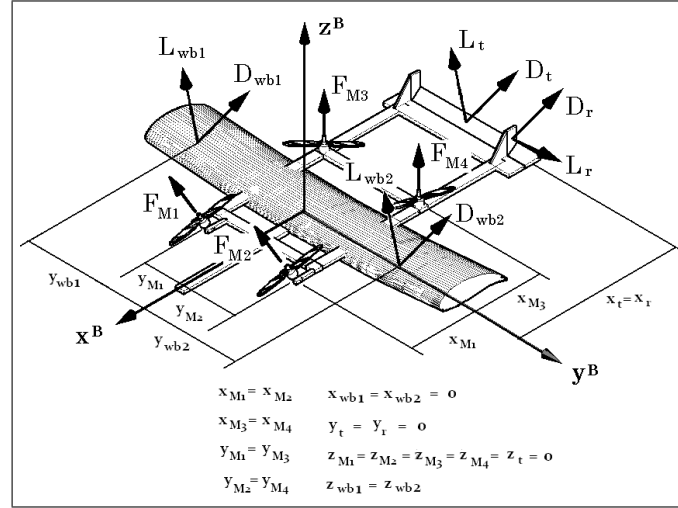


Figura 2.5: Distancias de las fuerzas actuando en el UAV

Se define el vector generalizado de pares:

$$\Gamma^B = \begin{bmatrix} \Gamma_x^B & \Gamma_y^B & \Gamma_z^B \end{bmatrix}^T = [\Gamma_M^B + \Gamma_A^B + \Gamma_D^B + \Gamma_G^B]^T. \quad (2.56)$$

Se define el vector de pares debidos a las fuerzas de los motores en el referencial del cuerpo:

$$\begin{aligned} \Gamma_M^B &= [d_{M1}] \times [R^{5^{M \rightarrow B}} F_{M1}^M] + [d_{M2}] \times [R^{5^{M \rightarrow B}} F_{M2}^M] \\ &\quad + [d_{M3}] \times [F_{M3}^B] + [d_{M4}] \times [F_{M4}^B] \end{aligned} \quad (2.57)$$

Las distancias serán expresadas en el referencial del cuerpo por tanto no se ven afectadas por ninguna matriz de rotación. Por otro lado las fuerzas de los motores $M1$ y $M2$ se deben llevar del referencial móvil al referencial del cuerpo por medio de la matriz $R5^{M \rightarrow B}$ la fuerzas de los motores $M3$ y $M4$ ya están en el referencial del cuerpo. Se define d_{M_i} es la distancia al cg del UAV del i -ésimo motor. De acuerdo con la figura 6:

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \Gamma_M^B = & \begin{bmatrix} x_{M1} \\ y_{M1} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s_\mu F_{M1} \\ 0 \\ c_\mu F_{M1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{M2} \\ -y_{M2} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s_\mu F_{M2} \\ 0 \\ c_\mu F_{M2} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -x_{M3} \\ y_{M3} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{M3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_{M4} \\ -y_{M4} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{M4} \end{bmatrix} \quad (2.58) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \Gamma_M^B = & \begin{bmatrix} c_\mu F_{M1} y_{M1} \\ -c_\mu F_{M1} x_{M1} \\ s_\mu F_{M1} y_{M1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_\mu F_{M2} y_{M2} \\ -c_\mu F_{M2} x_{M2} \\ -s_\mu F_{M2} y_{M2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{M3} y_{M3} \\ F_{M3} x_{M3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{M4} y_{M4} \\ F_{M4} x_{M4} \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Rightarrow \quad (2.59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_M^B = & \begin{bmatrix} c_\mu (y_{M1} F_{M1} - y_{M2} F_{M2}) + y_{M3} F_{M3} - y_{M4} F_{M4} \\ -c_\mu (x_{M1} F_{M1} + x_{M2} F_{M2}) + x_{M3} F_{M3} + x_{M4} F_{M4} \\ s_\mu (y_{M1} F_{M1} - y_{M2} F_{M2}) \end{bmatrix} \quad (2.60) \end{aligned}$$

De manera similar se define el vector de pares debidos a las fuerzas aerodinámicas expresados en el referencial del cuerpo:

$$\begin{aligned} \Gamma_A^B &= R4^{A \rightarrow B} \Gamma_{ac}^B + [d_{wb1}] \times [R4^{A \rightarrow B} F_{Awb1}^S] + [d_{wb2}] \times [R4^{A \rightarrow B} F_{Awb2}^S] \\ &\quad + [d_t] \times [R4^{A \rightarrow B} F_{At}^S] + [d_r] \times [R6^{A \rightarrow B} F_{Ar}^S] \end{aligned} \quad (2.61)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \Gamma_A^B &= \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta & -c_\alpha s_\beta & -s_\alpha \\ s_\beta & c_\beta & 0 \\ c_\beta s_\alpha & -s_\alpha s_\beta & c_\alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\Gamma_{ac} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{wb1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s_\alpha L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) - c_\alpha c_\beta D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \\ -s_\beta D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \\ c_\alpha L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) - c_\beta s_\alpha D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{wb2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s_\alpha L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) - c_\alpha c_\beta D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) \\ -s_\beta D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) \\ c_\alpha L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) - c_\beta s_\alpha D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -x_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s_\alpha L_t(\alpha, \delta_e) - c_\alpha c_\beta D_t(\alpha, \delta_e) \\ -s_\beta D_t(\alpha, \delta_e) \\ c_\alpha L_t(\alpha, \delta_e) - c_\beta s_\alpha D_t(\alpha, \delta_e) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -x_r \\ 0 \\ z_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s_\beta L_r(\beta, \delta_r) - c_\beta D_r(\beta, \delta_r) \\ s_\beta D_r(\beta, \delta_r) - c_\beta L_r(\beta, \delta_r) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.62)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
\Gamma_A^B = & \begin{bmatrix} c_\alpha s_\beta \Gamma_{ac} \\ -c_\beta \Gamma_{ac} \\ s_\alpha s_\beta \Gamma_{ac} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} s_\beta z_{wb1} D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \\ -s_\alpha z_{wb1} L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) - c_\alpha c_\beta z_{wb1} D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} s_\beta z_{wb2} D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) \\ -s_\alpha z_{wb2} L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) - c_\alpha c_\beta z_{wb2} D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 \\ c_\alpha x_t L_t(\alpha, \delta_e) - c_\beta s_\alpha x_t D_t(\alpha, \delta_e) \\ s_\beta x_t D_t(\alpha, \delta_e) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} c_\beta z_r L_r(\beta, \delta_r) - s_\beta z_r D_r(\beta, \delta_r) \\ -s_\beta z_r L_r(\beta, \delta_r) - c_\beta z_r D_r(\beta, \delta_r) \\ c_\beta x_r L_r(\beta, \delta_r) - s_\beta x_r D_r(\beta, \delta_r) \end{bmatrix} \tag{2.63}
\end{aligned}$$

Además como $z_{wb1} = z_{wb2} = z_{wb} \Rightarrow$

$$\Gamma_A^B = \begin{bmatrix} c_\alpha s_\beta \Gamma_{ac} + s_\beta z_{wb} (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2})) + c_\beta z_r L_r(\beta, \delta_r) - s_\beta z_r D_r(\beta, \delta_r) \\ -c_\beta \Gamma_{ac} - s_\alpha z_{wb} (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2})) - c_\alpha c_\beta z_{wb} (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2})) \\ + c_\alpha x_t L_t(\alpha, \delta_e) - c_\beta s_\alpha x_t D_t(\alpha, \delta_e) - s_\beta z_r L_r(\beta, \delta_r) - c_\beta z_r D_r(\beta, \delta_r) \\ s_\alpha s_\beta \Gamma_{ac} + s_\beta x_t D_t(\alpha, \delta_e) + c_\beta x_r L_r(\beta, \delta_r) - s_\beta x_r D_r(\beta, \delta_r) \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

Para los torques de arrastre Γ_D^B de los motores:

$$\Gamma_D^B = (R5^{M \rightarrow B}) [\tau_{DM1}^M] + (R5^{M \rightarrow B}) [\tau_{DM2}^M] + [\tau_{DM3}^B] + [\tau_{DM4}^B] \quad (2.65)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \Gamma_D^B &= \begin{pmatrix} c_\mu & 0 & -s_\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\mu & 0 & c_\mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_{DM1}^M \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} c_\mu & 0 & -s_\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\mu & 0 & c_\mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{DM2}^M \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{DM3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_{DM4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.66)$$

\Rightarrow

$$\Gamma_D^B = \begin{bmatrix} s_\mu \tau_{DM1} \\ 0 \\ -c_\mu \tau_{DM1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_\mu \tau_{DM2} \\ 0 \\ c_\mu \tau_{DM2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{DM3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_{DM4} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

\Rightarrow

$$\Gamma_D^B = \begin{bmatrix} s_\mu (\tau_{DM1} - \tau_{DM2}) \\ 0 \\ c_\mu (\tau_{DM2} - \tau_{DM1}) + \tau_{DM3} - \tau_{DM4} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Para los torques giroscopicos Γ_G^B solo se toma en cuenta solo los efectos de los motores delanteros al pivotar:

$$\Gamma_G^B = (\omega^B \times [(R5^{M \rightarrow B}) (I_{Helice}) [\omega_{M1}^M]]) + (\omega^B \times [(R5^{M \rightarrow B}) (I_{Helice}) [\omega_{M2}^M]]) \quad (2.69)$$

Donde I_{Helice} es el tensor de inercia de la hélice, que en este caso solo se toma la componente respecto al eje z del referencial móvil (z^M). ω_{M1}^M es la velocidad angular del motor:

$$\begin{aligned} \Gamma_G^B &= \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta} \\ -s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta} \\ s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} c_\mu & 0 & -s_\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\mu & 0 & c_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{z^M} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{M1}^M \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta} \\ -s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta} \\ s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} c_\mu & 0 & -s_\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\mu & 0 & c_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{z^M} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{M2}^M \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_G^B &= \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta} \\ -s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta} \\ s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s_\mu I_{z^M} \omega_{M1} \\ 0 \\ -c_\mu I_{z^M} \omega_{M1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta} \\ -s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta} \\ s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s_\mu I_{z^M} \omega_{M2} \\ 0 \\ c_\mu I_{z^M} \omega_{M2} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_G^B &= \begin{bmatrix} -c_\mu (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) \omega_{M1} I_{z^M} \\ c_\mu (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) \omega_{M1} I_{z^M} + s_\mu (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) \omega_{M1} I_{z^M} \\ -s_\mu (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) \omega_{M1} I_{z^M} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} c_\mu (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) \omega_{M2} I_{z^M} \\ -c_\mu (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) \omega_{M2} I_{z^M} - s_\mu (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) \omega_{M2} I_{z^M} \\ s_\mu (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) \omega_{M2} I_{z^M} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_G^B &= \begin{bmatrix} c_\mu (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) I_{z^M} (\omega_{M2} - \omega_{M1}) \\ c_\mu (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) I_{z^M} (\omega_{M1} - \omega_{M2}) + s_\mu (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) I_{z^M} (\omega_{M1} - \omega_{M2}) \\ s_\mu (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) I_{z^M} (\omega_{M2} - \omega_{M1}) \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (2.73)$$

Sustituyendo (2.60), (2.64), (2.68) y (2.73) en sus componentes rectangulares:

$$\begin{aligned}
\Gamma_x^B &= c_\mu (y_{M1}F_{M1} - y_{M2}F_{M2}) + y_{M3}F_{M3} - y_{M4}F_{M4} + c_\alpha s_\beta \Gamma_{ac} \\
&\quad + s_\beta z_{wb} (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2})) + c_\beta z_r L_r(\beta, \delta_r) \\
&\quad - s_\beta z_r D_r(\beta, \delta_r) + s_\mu (\tau_{DM1} - \tau_{DM2}) \\
&\quad + c_\mu (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) I_{z^M} (\omega_{M2} - \omega_{M1})
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_y^B &= -c_\mu (x_{M1}F_{M1} + x_{M2}F_{M2}) + x_{M3}F_{M3} + x_{M4}F_{M4} - c_\beta \Gamma_{ac} \\
&\quad - s_\alpha z_{wb} (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2})) - c_\alpha c_\beta z_{wb} (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \\
&\quad + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2})) + c_\alpha x_t L_t(\alpha, \delta_e) - c_\beta s_\alpha x_t D_t(\alpha, \delta_e) - s_\beta z_r L_r(\beta, \delta_r) \\
&\quad - c_\beta z_r D_r(\beta, \delta_r) + c_\mu p I_{z^M} (\omega_{M1} - \omega_{M2}) + s_\mu r I_{z^M} (\omega_{M1} - \omega_{M2})
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_z^B &= s_\mu (y_{M1}F_{M1} - y_{M2}F_{M2}) + s_\alpha s_\beta \Gamma_{ac} + s_\beta x_t D_t(\alpha, \delta_e) \\
&\quad + c_\beta x_r L_r(\beta, \delta_r) - s_\beta x_r D_r(\beta, \delta_r) + c_\mu (\tau_{DM2} - \tau_{DM1}) \\
&\quad + \tau_{DM3} - \tau_{DM4} + s_\mu (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) I_{z^M} (\omega_{M2} - \omega_{M1})
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Finalmente sustituyendo (2.74), (2.75) y (2.76) en (2.53), (2.54) y (2.55), se tiene la dinámica rotacional del UAV de forma explícita:

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} = & \frac{1}{c_\psi c_\theta} \left(-\ddot{\theta} s_\psi + \dot{\phi} \dot{\theta} c_\psi s_\theta + \dot{\phi} \dot{\psi} s_\psi c_\theta - \dot{\theta} \dot{\psi} c_\psi \right) \\
& + \frac{1}{I_x c_\psi c_\theta} (c_\mu (y_{M1} F_{M1} - y_{2M} F_{2M}) + y_{3M} F_{3M} - y_{4M} F_{4M} + c_\alpha s_\beta \Gamma_{ac} \\
& + s_\beta z_{wb} (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2})) + c_\beta z_r L_r(\beta, \delta_r) - s_\beta z_r D_r(\beta, \delta_r) \\
& + s_\mu (\tau_{DM1} - \tau_{DM2}) + c_\mu (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) I_{zM} (\omega_{M2} - \omega_{M1}) \\
& - (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) (I_y - I_z) \tag{2.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} = & \frac{1}{c_\psi} \left(\ddot{\phi} s_\psi c_\theta - \dot{\phi} \dot{\theta} s_\psi s_\theta + \dot{\phi} \dot{\psi} c_\psi c_\theta + \dot{\theta} \dot{\psi} s_\psi \right) + \frac{1}{I_y c_\psi} (-c_\mu (x_{M1} F_{M1} + x_{2M} F_{2M}) \\
& + x_{3M} F_{3M} + x_{4M} F_{4M} - c_\beta \Gamma_{ac} - s_\alpha z_{wb} (L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2})) \\
& - c_\alpha c_\beta z_{wb} (D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2})) + c_\alpha x_t L_t(\alpha, \delta_e) - c_\beta s_\alpha x_t D_t(\alpha, \delta_e) \\
& - s_\beta z_r L_r(\beta, \delta_r) - c_\beta z_r D_r(\beta, \delta_r) + c_\mu (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) I_{zM} (\omega_{M1} - \omega_{M2}) \\
& + s_\mu (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) I_{zM} (\omega_{M1} - \omega_{M2}) - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) (I_z - I_x) \tag{2.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi} = & -\ddot{\phi} s_\theta - \dot{\phi} \dot{\theta} c_\theta + \frac{1}{I_z} (s_\mu (y_{M1} F_{M1} - y_{2M} F_{2M}) + s_\alpha s_\beta \Gamma_{ac} + s_\beta x_t D_t(\alpha, \delta_e) \\
& + c_\beta x_r L_r(\beta, \delta_r) - s_\beta x_r D_r(\beta, \delta_r) + c_\mu (\tau_{DM2} - \tau_{DM1}) + \tau_{DM3} - \tau_{DM4} \\
& + s_\mu (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) I_{zM} (\omega_{M2} - \omega_{M1}) \\
& - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) (I_x - I_y) \tag{2.79}
\end{aligned}$$

Hasta aquí se tiene el modelo dinámico completo del UAV en las ecuaciones:(2.36), (2.37), (2.38) dinámica traslacional y (2.77), (2.78), (2.79) dinámica rotacional. El motivo de expresar de manera explícita dichas ecuaciones obedece al deseo de mostrar la complejidad de dicho modelado debido a los efectos aerodinámicos del mismo. En la mayoría de los trabajos citados anteriormente, no se expresa de esta manera el modelado pero uno de los objetivos de este trabajo es tener un modelo lo más

completo posible del UAV. En el siguiente capítulo se analizará el caso particular de la dinámica de despegue vertical y de la ley de control utilizada.

Capítulo 3

Control del UAV

“Por algoritmo de control se entiende la metodología a seguir a fin de estabilizar el sistema a controlar”. Existe un gran número de técnicas de control entre las que podemos destacar: redes neuronales, “backstteping”, saturaciones separadas, saturaciones anidadas, modos deslizantes, etc. El uso de cada una de estas depende de las características físicas del sistema y de las posibilidades de ejecución de las mismas dependiendo del tipo de procesador utilizado.

Para justificar la elección de una técnica de control en particular es necesario primeramente definir en el presente trabajo las diferentes etapas de operación del UAV. En la figura 3.1 se muestran las siguientes etapas: 1) el despegue, 2) el aterrizaje, 3) el vuelo en sustentación o en adelante simplemente sustentación, etapa en la cual los cuatro motores se encuentran en posición vertical, 4) la transición etapa durante la cual el UAV pasa de la sustentación al vuelo horizontal y viceversa, lo anterior por medio del pivoteo de los motores frontales y finalmente 5) la etapa de vuelo horizontal.

Hay que tener cuidado de no confundir las etapas de operación del UAV pre-

viamente expuestas, con las dinámicas del mismo, las cuales son únicamente dos: dinámica de helicóptero y dinámica de avión. Pues en cada etapa de operación el UAV posee una de las dos dinámicas antes mencionadas. Se puede hacer notar que la transición podría considerarse como una tercera dinámica, pero por el momento ésta discusión se deja para después.

En el presente trabajo se estudiará solamente el control de las etapas de vuelo en sustentación y de transición. Sin embargo, más adelante se verá la aplicación en simulación, de la ley de control propuesta para el vuelo en sustentación, al despegue.

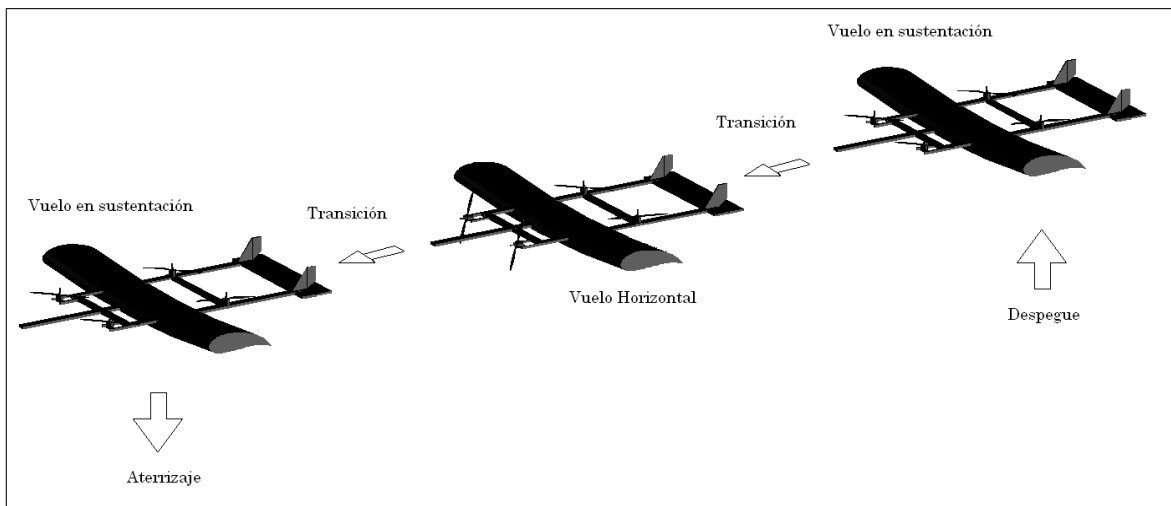


Figura 3.1: Etapas de operación del UAV

Primeramente para la etapa de vuelo en sustentación se trabajará con la ley de control de saturaciones separadas. El UAV en sustentación exhibe un comportamiento similar al de un cuadrirrotor. Y ésta ley de control ha mostrado un buen desempeño con este tipo de vehículos, tal como se reporta en trabajos previamente citados en la sección 1.1. Esta ley de control al ser acotada, resulta muy recomendable en la implementación sobre un prototipo real, el cual se encuentra acotado por

sus limitaciones físicas (potencia máxima de los motores, de la pila, de la electrónica, etc.). La implementación de dicha ley de control resulta sencilla desde el punto de vista de programación y en este caso en especial, la central inercial brinda las entradas necesarias para dicha implementación. De hecho al analizar la simplificación del modelo matemático general del UAV para la dinámica de sustentación la posibilidad de adquirir las entradas de la central inercial permitirá un importante cambio de variable que simplifique dicho modelo. Por lo tanto esta sencillez en la adquisición de datos hace posible la utilización de procesadores de bajo costo y programación relativamente sencilla, aunque, de limitadas características técnicas lo cual si no resulta ideal por el lado tecnológico, si lo es por el lado económico.

Se trabajará sobre el modelo matemático desarrollado previamente, para después proponer una ley de control y validarla por medio de simulación numérica en el modelo completo.

3.1. Dinámica de vuelo en sustentación

En el capítulo anterior se obtuvo un modelo matemático completo para las dinámicas traslacional y rotacional del UAV. En este punto se analizan algunas cuestiones técnicas de dicha etapa de operación para ayudar a simplificar el análisis.

3.1.1. Consideraciones aerodinámicas

Cuando el UAV se encuentra en vuelo en suspensión, se pueden hacer las suposiciones siguientes:

1. Se desprecian los desplazamiento en las direcciones (x, y) por ser mínimos en comparación con el desplazamiento en la dirección (z) . De lo anterior se con-

sidera nula la velocidad relativa del aire $V_R = 0$ con lo cual las fuerzas aerodinámicas no existen. Para una primera aproximación esta suposición resulta valida, más adelante se analizará la dimensión de ésta.

2. Al no existir velocidad relativa del viento, el ángulo de ataque y el ángulo de derrape son cero $\alpha = 0$, $\beta = 0$.
3. Los desplazamientos en (z) no generan fuerzas aerodinámicas solamente fuerzas de arrastre debido al movimiento del ala en el viento. Estas fuerzas pueden ser consideradas como “arrastres parásitos”, sin embargo por el momento no se consideran.
4. Los ángulos de la dinámica rotacional (ϕ, θ, ψ) se consideran dentro de cierto rango de movimiento lo suficientemente pequeño tal que se cumple: $\cos(A) \approx 1$, $\sin(A) \approx A$ y $\tan(A) \approx A$.
5. En vuelo en suspensión, los motores delanteros no se mueven y su ángulo de desplazamiento es $\mu = 90$ de lo cual $\cos(\mu) = 1$, $\sin(\mu) = 0$

3.1.2. Dinámica traslacional

Se aplican las suposiciones anteriores (exceptuando la cuarta) a la dinámica traslacional definida por (2.36), (2.37) y (2.38) de lo cual se obtiene:

$$m\ddot{x} = s_\theta(F_{M1} + F_{M2} + F_{M3} + F_{M4}) \quad (3.1)$$

$$m\ddot{y} = -s_\phi c_\theta(F_{M1} + F_{M2} + F_{M3} + F_{M4}) \quad (3.2)$$

$$m\ddot{z} = c_\phi c_\theta(F_{M1} + F_{M2} + F_{M3} + F_{M4}) - mg \quad (3.3)$$

Las ecuaciones (3.1) - (3.3) describen la dinámica traslacional del UAV en modo de vuelo en suspensión, la cual se va asemejando cada vez más a la de un cuadirrotor. Tomando en cuenta la cuarta consideración no incluida hasta el momento, se llega a:

$$m\ddot{x} = \theta(F_{M1} + F_{M2} + F_{M3} + F_{M4}) \quad (3.4)$$

$$m\ddot{y} = -\phi(F_{M1} + F_{M2} + F_{M3} + F_{M4}) \quad (3.5)$$

$$m\ddot{z} = (F_{M1} + F_{M2} + F_{M3} + F_{M4}) - mg \quad (3.6)$$

Finalmente las ecuaciones (3.4) - (3.6) describen la dinámica traslacional del UAV y coinciden estas con las ecuaciones de traslación de un cuadirrotor tal como se reportan en [1].

3.1.3. Dinámica rotacional

De igual forma que en la dinámica traslacional, se aplican las suposiciones anteriores (exceptuando la cuarta) a las ecuaciones (2.77), (2.78) y (2.79) de lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{1}{c_\psi c_\theta} \left(-\ddot{\theta} s_\psi + \dot{\phi} \dot{\theta} c_\psi s_\theta + \dot{\phi} \dot{\psi} s_\psi c_\theta - \dot{\theta} \dot{\psi} c_\psi \right) + \frac{1}{I_x c_\psi c_\theta} (y_{M1} F_{M1} - y_{2M} F_{2M} \\ &\quad + y_{3M} F_{3M} - y_{4M} F_{4M} + (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) I_{z^M} (\omega_{M2} - \omega_{M1}) \\ &\quad - (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) (I_y - I_z) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{1}{c_\psi} \left(\ddot{\phi} s_\psi c_\theta - \dot{\phi} \dot{\theta} s_\psi s_\theta + \dot{\phi} \dot{\psi} c_\psi c_\theta + \dot{\theta} \dot{\psi} s_\psi \right) + \frac{1}{I_y c_\psi} (-x_{M1} F_{M1} - x_{2M} F_{2M} \\ &\quad + x_{3M} F_{3M} + x_{4M} F_{4M} + (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) I_{z^M} (\omega_{M1} - \omega_{M2}) \\ &\quad - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) (I_z - I_x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -\ddot{\phi} s_\theta - \dot{\phi} \dot{\theta} c_\theta + \frac{1}{I_z} (\tau_{DM2} - \tau_{DM1} + \tau_{DM3} - \tau_{DM4} \\ &\quad - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) (I_x - I_y)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tomando en cuenta la cuarta consideración y además considerando que las velocidades angulares de los motores delanteros son iguales $\omega_{M1} = \omega_{M2}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= -\ddot{\theta} s_\psi + \dot{\phi} \dot{\theta} c_\psi s_\theta + \dot{\phi} \dot{\psi} s_\psi c_\theta - \dot{\theta} \dot{\psi} c_\psi - \frac{1}{I_x} \left((-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) (I_y - I_z) \right) \\ &\quad + \frac{1}{I_x} (y_{M1} F_{M1} - y_{2M} F_{2M} + y_{3M} F_{3M} - y_{4M} F_{4M}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \ddot{\phi} s_\psi c_\theta - \dot{\phi} \dot{\theta} s_\psi s_\theta + \dot{\phi} \dot{\psi} c_\psi c_\theta + \dot{\theta} \dot{\psi} s_\psi - \frac{1}{I_y} \left((c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) (I_z - I_x) \right) \\ &\quad + \frac{1}{I_y} (-x_{M1} F_{M1} - x_{2M} F_{2M} + x_{3M} F_{3M} + x_{4M} F_{4M}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -\ddot{\phi} s_\theta - \dot{\phi} \dot{\theta} c_\theta - \frac{1}{I_z} \left((c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) (-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta}) (I_x - I_y) \right) \\ &\quad + \frac{1}{I_z} (\tau_{DM2} - \tau_{DM1} + \tau_{DM3} - \tau_{DM4}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

De (2.40), (2.41) y (2.42) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\psi} \frac{1}{c_{\theta}} & -s_{\psi} \frac{1}{c_{\theta}} & 0 \\ s_{\psi} \frac{1}{1} & c_{\psi} \frac{1}{1} & 0 \\ -c_{\psi} \frac{s_{\theta}}{c_{\theta}} & s_{\psi} \frac{s_{\theta}}{c_{\theta}} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (c_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + s_{\psi} \dot{\theta}) \\ (-s_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + c_{\psi} \dot{\theta}) \\ (s_{\theta} \dot{\phi} + \dot{\psi}) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Aplicando la cuarta consideración:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + s_{\psi} \dot{\theta}) - (-s_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + c_{\psi} \dot{\theta}) \psi \\ (c_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + s_{\psi} \dot{\theta}) \psi + (-s_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + c_{\psi} \dot{\theta}) \\ -(c_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + s_{\psi} \dot{\theta}) \theta + (-s_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + c_{\psi} \dot{\theta}) \psi \theta + (s_{\theta} \dot{\phi} + \dot{\psi}) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Considerando que se tiene la capacidad de obtener los valores de (ϕ, θ, ψ) , $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ y $(\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi})$ de la central inercial. Entonces se pueden eliminar los productos de estos.

Para realizar esta simplificación primeramente se definen las siguientes variables:

$$\tau_{\phi} = y_{M1} F_{M1} - y_{2M} F_{2M} + y_{3M} F_{3M} - y_{4M} F_{4M} \quad (3.15)$$

$$\tau_{\theta} = -x_{M1} F_{M1} - x_{2M} F_{2M} + x_{3M} F_{3M} + x_{4M} F_{4M} \quad (3.16)$$

$$\tau_{\psi} = \tau_{DM2} - \tau_{DM1} + \tau_{DM3} - \tau_{DM4} \quad (3.17)$$

se sustituyen (3.15)-(3.17) en (3.10)-(3.12) y se obtiene:

$$\begin{aligned} I_x \ddot{\phi} &= I_x (-\ddot{\theta} \psi + \dot{\phi} \dot{\theta} \theta + \dot{\phi} \dot{\psi} \psi - \dot{\theta} \dot{\psi}) \\ &\quad - \left((-s_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + c_{\psi} \dot{\theta}) (s_{\theta} \dot{\phi} + \dot{\psi}) (I_y - I_z) \right) + \tau_{\phi} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} I_y \ddot{\theta} &= I_y (\ddot{\phi} \psi - \dot{\phi} \dot{\theta} \psi \theta + \dot{\phi} \dot{\psi} + \dot{\theta} \dot{\psi} \psi) \\ &\quad - \left((c_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + s_{\psi} \dot{\theta}) (s_{\theta} \dot{\phi} + \dot{\psi}) (I_z - I_x) \right) + \tau_{\theta} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} I_z \ddot{\psi} &= I_z (-\ddot{\phi} \theta - \dot{\phi} \dot{\theta}) \\ &\quad - \left((c_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + s_{\psi} \dot{\theta}) (-s_{\psi} c_{\theta} \dot{\phi} + c_{\psi} \dot{\theta}) (I_x - I_y) \right) + \tau_{\psi} \end{aligned} \quad (3.20)$$

ahora se definen las variables siguientes en función de los valores conocidos:

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_\phi &= \tau_\phi - I_x(\ddot{\theta}\psi + \dot{\phi}\dot{\theta}\theta + \dot{\phi}\dot{\psi}\psi - \dot{\theta}\dot{\psi}) \\ &\quad - \left((-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta})(s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi})(I_y - I_z) \right)\end{aligned}\quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_\theta &= \tau_\theta + I_y(\ddot{\phi}\psi - \dot{\phi}\dot{\theta}\psi\theta + \dot{\phi}\dot{\psi} + \dot{\theta}\dot{\psi}\psi) \\ &\quad - \left((c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta})(s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi})(I_z - I_x) \right)\end{aligned}\quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_\psi &= \tau_\psi - I_z(\ddot{\phi}\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}) \\ &\quad - \left((c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta})(-s_\psi c_\theta \dot{\phi} + c_\psi \dot{\theta})(I_x - I_y) \right)\end{aligned}\quad (3.23)$$

sustituyendo (3.21)-(3.23) en (3.18)-(3.20) finalmente se obtiene:

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} \hat{\tau}_\phi \quad (3.24)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_y} \hat{\tau}_\theta \quad (3.25)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_z} \hat{\tau}_\psi \quad (3.26)$$

Las ecuaciones (3.24), (3.25) y (3.26) describen la dinámica rotacional del UAV y corresponden a las ecuaciones de la dinámica de un cuadirrotor [1].

Hasta aquí se tienen las ecuaciones simplificadas del UAV en vuelo en suspensión. Y estas corresponden a las ecuaciones de un cuadirrotor tal como se citan en trabajos anteriores. Por lo anterior se justifica el hecho de trabajar el UAV en esta etapa de operación como si de un cuadirrotor se tratara. Pero se debe tener en cuenta que las suposiciones hechas se encuentran dentro de ciertos límites los cuales no pueden perderse de vista para hacer una valoración lo más objetiva posible de la ley de control que se propondrá y del desempeño de la misma.

3.2. Ley de control: vuelo en sustentación

Se toman las ecuaciones simplificadas (3.1)-(3.3) y (3.24)-(3.26) de la dinámica del UAV en vuelo en sustentación y se define la entrada de control:

$$u = F_{M1} + F_{M2} + F_{M3} + F_{M4} \quad (3.27)$$

sustituyendo(3.27) en la dinámica previamente citada se obtiene:

$$m\ddot{x} = s_{\theta}u \quad (3.28a)$$

$$m\ddot{y} = -s_{\phi}c_{\theta}u \quad (3.28b)$$

$$m\ddot{z} = c_{\phi}c_{\theta}u - mg \quad (3.28c)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_x}\hat{\tau}_{\phi} \quad (3.28d)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_y}\hat{\tau}_{\theta} \quad (3.28e)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_z}\hat{\tau}_{\psi} \quad (3.28f)$$

En adelante, el trabajo se desarrollará sobre las ecuaciones (3.28a)-(3.28f) que representan la simplificación de la dinámica completa del UAV en vuelo en sustentación. Estas ecuaciones son similares a las reportadas en trabajos de cuadricópteros y esto se debe a la naturaleza misma del vehículo, sin embargo, se insiste en no perder de vista todas las suposiciones realizadas a fin de llegar a este punto.

3.2.1. Control de la dinámica de altitud (z) y zigzaguo (ψ).

Primeramente se estabilizará la altitud del vehículo (posición en z) y el zigzaguo del mismo (ángulo de “yaw” ψ). Para lo cual se propone el control:

$$u = m \left(\frac{z_p + g}{c_\phi c_\theta} \right) \quad (3.29)$$

donde:

$$z_p = -K_{z1}\dot{z} - K_{z2}z \quad (3.30)$$

Sustituyendo (3.29) y (3.30) en (3.28c) se tiene:

$$\ddot{z} = -K_{z1}\dot{z} - K_{z2}z \quad (3.31)$$

Siguiendo del criterio de Hurwitz, se seleccionan $K_{z1}, K_{z2} > 0$ de tal forma que exista un tiempo t_1 tal que $\forall t > t_1$ se tenga que $z_p \rightarrow 0$, y la dinámica de z sea estable.

De manera similar para la dinámica de zigzagueo se propone una entrada de control:

$$\hat{\tau}_\psi = I_z \psi_p \quad (3.32)$$

donde:

$$\psi_p = -K_{\psi1}\dot{\psi} - K_{\psi2}\psi \quad (3.33)$$

Sustituyendo (3.32) y (3.33) en (3.28f) se tiene:

$$\ddot{\psi} = -K_{\psi1}\dot{\psi} - K_{\psi2}\psi \quad (3.34)$$

De igual forma $K_{\psi1}, K_{\psi2} > 0$ son seleccionadas de tal forma que la dinámica de ψ sea estable y entonces exista un tiempo t_2 tal que $\forall t > t_2$ se tiene que $\psi_p \rightarrow 0$.

Sustituyendo la entrada de control (3.29) en (3.28a) y (3.28b) se tiene:

$$\ddot{x} = \frac{\tan \theta}{\cos \phi} (z_p + g) \quad (3.35a)$$

$$\ddot{y} = -\tan \phi (z_p + g) \quad (3.35b)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} \hat{\tau}_\phi \quad (3.35c)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_y} \hat{\tau}_\theta \quad (3.35d)$$

Se supone que existe un tiempo t_1 tal que $\forall t > t_1$ se tiene que $z_p \rightarrow 0$ por lo que $(z_p + g) = g$. Aplicando esto a las ecuaciones (3.35a) y (3.35b), definiendo las variables:

$$\hat{\tau}_\phi = u_\phi I_x \quad (3.36a)$$

$$\hat{\tau}_\theta = u_\theta I_y \quad (3.36b)$$

y tomando en cuenta la suposición de que se trabaja con ángulos lo suficientemente pequeños tal que se cumple: $\cos(A) \approx 1$, $\sin(A) \approx A$ y $\tan(A) \approx A$. Se obtiene finalmente de (3.35a)-(3.35d):

$$\ddot{x} = \theta g \quad (3.37a)$$

$$\ddot{y} = -\phi g \quad (3.37b)$$

$$\ddot{\phi} = u_\phi \quad (3.37c)$$

$$\ddot{\theta} = u_\theta \quad (3.37d)$$

Las ecuaciones (3.37a) y (3.37d) describen la dinámica longitudinal del UAV (posición en x y ángulo de “pitch” θ , es decir dinámica de cabeceo del vehículo). A su vez, las ecuaciones (3.37b) y (3.37c) describen la dinámica lateral del UAV (posición

en y y ángulo de “roll” ϕ , es decir dinámica de alabeo del vehículo). Como puede observarse, las simplificaciones realizadas permiten que las ecuaciones se encuentren desacopladas por lo cual pueden trabajarse de manera independiente.

3.2.2. Control de la dinámica longitudinal (x, θ) .

Para comenzar se define una función de saturación:

$$F_n(e) = \begin{cases} n & e > n \\ e & -n \leq e \leq n \\ -n & e < -n \end{cases} \quad (3.38)$$

Se toman las ecuaciones (3.37a) y (3.37d) las cuales tienen la forma de un cuádruple integrador:

$$x^{iv} = gu_\theta \quad (3.39)$$

Siguiendo el algoritmo trabajado en [26]. Se propone la ley de control de saturaciones separadas:

$$u_\theta = -F_a(h_1) - F_b(h_2) - F_c(h_3) - F_d(h_4) \quad (3.40)$$

Con $F_n(h_n)$ función de saturación, definida en (3.38). Y para mostrar que dicha ley de control estabiliza el cuádruple integrador de (3.39), siguiendo el trabajo citado [26], se definen las siguientes variables en función de las aceleraciones angulares y lineales $(\dot{\theta}, \dot{x})$ y de las posiciones correspondientes (θ, x) :

$$h_1 = \dot{\theta} \quad (3.41)$$

$$h_2 = \dot{\theta} + \theta \quad (3.42)$$

$$h_3 = \dot{\theta} + 2\theta + \frac{1}{g}\dot{x} \quad (3.43)$$

$$h_4 = \dot{\theta} + 3\theta + \frac{3}{g}\dot{x} + \frac{1}{g}x \quad (3.44)$$

Se define la función positiva:

$$V_1 = \frac{1}{2}(h_1)^2 \quad (3.45)$$

derivando (3.45):

$$\dot{V}_1 = h_1 \dot{h}_1 \quad (3.46)$$

se tiene que:

$$\dot{h}_1 = \ddot{\theta} = u_\theta \quad (3.47)$$

por tanto:

$$\dot{V}_1 = h_1 [-F_a(h_1) - F_b(h_2) - F_c(h_3) - F_d(h_4)] \quad (3.48)$$

Prueba 1 *Se debe analizar entonces, cuando se cumple que la derivada de la función V_1 , es negativa. De (3.48) se tiene:*

$$\dot{V}_1 = -h_1 [F_a(h_1) + F_b(h_2) + F_c(h_3) + F_d(h_4)] \quad (3.49)$$

Se cumple entonces que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 < 0 &\Leftrightarrow \\ h_1 < 0 \text{ y } [F_a(h_1) + F_b(h_2) + F_c(h_3) + F_d(h_4)] < 0 \\ \text{ó } h_1 < 0 \text{ y } [F_a(h_1) + F_b(h_2) + F_c(h_3) + F_d(h_4)] < 0 \end{aligned}$$

Se tienen dos casos. se trabajará con el primero. Se cumple que:

$$h_1 < 0 \text{ y } [F_a(h_1) + F_b(h_2) + F_c(h_3) + F_d(h_4)] < 0$$

si:

$$h_1 < 0 \Rightarrow F_a(h_1) < 0 \quad (3.50)$$

entonces:

$$\begin{aligned} [F_a(h_1) + F_b(h_2) + F_c(h_3) + F_d(h_4)] < 0 \\ \Leftrightarrow \\ F_a(h_1) < -(F_b(h_2) + F_c(h_3) + F_d(h_4)) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Por la forma como está definida la función de saturación se toma el caso más crítico para los valores extremos, de lo cual (3.51) puede escribirse:

$$a < -(b + c + d) \quad (3.52)$$

finalmente tomando en cuenta (3.50) se tiene:

$$a > (b + c + d) \quad (3.53)$$

Se trabaja con el segundo caso. Se cumple:

$$h_1 > 0 \quad \text{y} \quad [F_a(h_1) + F_b(h_2) + F_c(h_3) + F_d(h_4)] > 0$$

si:

$$h_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad F_a(h_1) > 0 \quad (3.54)$$

entonces:

$$\begin{aligned} [F_a(h_1) + F_b(h_2) + F_c(h_3) + F_d(h_4)] &> 0 \\ &\Leftrightarrow \\ F_a(h_1) &> -(F_b(h_2) + F_c(h_3) + F_d(h_4)) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Por la forma como está definida la función de saturación se toma el caso más crítico para los valores extremos, de lo cual (3.55) puede escribirse:

$$a > -(b + c + d) \quad (3.56)$$

finalmente se tiene:

$$-a < (b + c + d) \quad (3.57)$$

Concluyendo de (3.53) y (3.57) se tiene que: $\dot{V}_1 < 0 \Leftrightarrow |a| > (b + c + d)$

Retomando el análisis de la función V_1 . Si se tiene que la variable h_1 tiende a un valor alto y entonces:

$$|h_1| > a$$

pero a es tal que cumple el criterio:

$$|a| > (b + c + d)$$

entonces se tiene que:

$$\dot{V}_1 < 0$$

y por la Teoría de Lyapunov se tiene que:

$$h_1 \rightarrow 0$$

de lo cual se puede asegurar que existe un tiempo:

$$T_1 \text{ tal que } |h_1| < a$$

y que:

$$\forall t > T_1$$

se cumple que:

$$-F_a(h_1) = -h_1 \tag{3.58}$$

Se dice entonces que la función se encuentra en la región lineal y que está acotada. Se sigue entonces de (3.47) que:

$$\dot{h}_1 = -h_1 - F_b(h_2) - F_c(h_3) - F_d(h_4) \tag{3.59}$$

Derivando (3.42):

$$\dot{h}_2 = \ddot{\theta} + \dot{\theta} \quad (3.60)$$

sustituyendo (3.47), (3.59) y (3.40) en (3.60):

$$\dot{h}_2 = -F_b(h_2) - F_c(h_3) - F_d(h_4) \quad (3.61)$$

Para h_2 se define la función positiva:

$$V_2 = \frac{1}{2} (h_2)^2 \quad (3.62)$$

derivando (3.62):

$$\dot{V}_2 = h_2 \dot{h}_2 \quad (3.63)$$

sustituyendo (3.61) en (3.63) se tiene:

$$\dot{V}_2 = h_2 [F_b(h_2) - F_c(h_3) - F_d(h_4)] \quad (3.64)$$

De igual manera que para V_1 , si se tiene que la variable h_2 tiende a un valor alto y entonces:

$$|h_2| > b$$

pero b es tal que cumple el criterio:

$$|b| > (c + d)$$

entonces se tiene que:

$$\dot{V}_2 < 0$$

y por la Teoría de Lyapunov se tiene que:

$$h_2 \rightarrow 0$$

de lo cual se puede asegurar que existe un tiempo:

$$T_2 \text{ tal que } |h_2| < b$$

y que:

$$\forall t > T_2$$

se cumple que:

$$-F_b(h_2) = -h_2 \quad (3.65)$$

Se dice entonces que la función se encuentra en la región lineal y que está acotada. De lo cual se sigue entonces de (3.59) que:

$$\dot{h}_1 = -h_1 - h_2 - F_c(h_3) - F_d(h_4) \quad (3.66)$$

Derivando (3.43):

$$\dot{h}_3 = \ddot{\theta} + 2\dot{\theta} + \frac{1}{g}\ddot{x} = \ddot{\theta} + (\dot{\theta}) + (\dot{\theta} + \frac{1}{g}\ddot{x}) \quad (3.67)$$

de (3.47) y sustituyendo (3.66) se tiene:

$$\dot{h}_3 = -h_1 - h_2 - F_c(h_3) - F_d(h_4) + (\dot{\theta}) + (\dot{\theta} + \frac{1}{g}\ddot{x}) \quad (3.68)$$

sustituyendo (3.40) y (3.41) en 3.68:

$$\dot{h}_3 = -F_c(h_3) - F_d(h_4) \quad (3.69)$$

Se define para h_3 la función positiva:

$$V_3 = \frac{1}{2}(h_3)^2 \quad (3.70)$$

derivando (3.70):

$$\dot{V}_3 = h_3 \dot{h}_3 \quad (3.71)$$

sustituyendo (3.69), en (3.71) se tiene:

$$\dot{V}_3 = h_3 [-F_c(h_3) - F_d(h_4)] \quad (3.72)$$

De igual manera que para V_1 y V_2 , si se tiene que la variable h_3 tiende a un valor alto y entonces:

$$|h_3| > c$$

pero c es tal que cumple el criterio:

$$|c| > d$$

entonces se tiene que:

$$\dot{V}_3 < 0$$

y por la Teoría de Lyapunov se tiene que:

$$h_3 \rightarrow 0$$

de lo cual se puede asegurar que existe un tiempo:

$$T_3 \text{ tal que } |h_3| < c$$

y que:

$$\forall t > T_3$$

se cumple que:

$$-F_c(h_3) = -h_3 \quad (3.73)$$

Se dice entonces que la función se encuentra en la región lineal y que está acotada. De lo cual se sigue entonces de (3.66) que:

$$\dot{h}_1 = -h_1 - h_2 - h_3 - F_d(h_4) \quad (3.74)$$

Por último derivando (3.44):

$$\dot{h}_4 = \ddot{\theta} + 3\dot{\theta} + \frac{3}{g}\ddot{x} + \frac{1}{g}\dot{x} = \ddot{\theta} + (\dot{\theta}) + (\dot{\theta} + \frac{1}{g}\ddot{x}) + (\dot{\theta} + \frac{2}{g}\ddot{x} + \frac{1}{g}\dot{x}) \quad (3.75)$$

de (3.47) y sustituyendo (3.66) se tiene:

$$\dot{h}_4 = -h_1 - h_2 - h_3 - F_d(h_4) + (\dot{\theta}) + (\dot{\theta} + \frac{1}{g}\ddot{x}) + (\dot{\theta} + \frac{2}{g}\ddot{x} + \frac{1}{g}\dot{x}) \quad (3.76)$$

sustituyendo (3.68), (3.40), (3.41) y (3.42) en (3.76):

$$\dot{h}_4 = -F_d(h_4) \quad (3.77)$$

Se define la función positiva para h_4 :

$$V_4 = \frac{1}{2} (h_4)^2 \quad (3.78)$$

derivando (3.78):

$$\dot{V}_4 = h_4 \dot{h}_4 \quad (3.79)$$

sustituyendo (3.77), en (3.79):

$$\dot{V}_4 = h_4 [-F_d(h_4)] \quad (3.80)$$

Este caso es un poco diferente a los anteriores pues cuando la variable h_4 tiende a un valor alto y entonces:

$$|h_4| > d$$

es suficiente que d sea tal que:

$$d > 0$$

entonces se tiene que:

$$\dot{V}_4 < 0$$

y por la Teoría de Lyapunov se tiene que:

$$h_4 \rightarrow 0$$

de lo cual se puede asegurar que existe un tiempo:

T_4 tal que $|h_4| < d$

y que:

$$\forall t > T_4$$

se cumple que:

$$-F_d(h_4) = -h_4 \quad (3.81)$$

Se dice entonces que la función se encuentra en la región lineal y que está acotada. De lo cual se sigue entonces de (3.74) y (3.47) que:

$$u_\theta = -h_1 - h_2 - h_3 - h_4 \quad (3.82)$$

Entonces para todo tiempo mayor a T_4 se tiene que la ley de control es acotada y que todas las variables tienden a cero es decir que dicha ley de control estabiliza el sistema y además la misma ley de control tiende a cero.

$$u_\theta = -F_a(\dot{\theta}) - F_b(\dot{\theta} + \theta) - F_c\left(\dot{\theta} + 2\theta + \frac{1}{g}\dot{x}\right) - F_d\left(\dot{\theta} + 3\theta + \frac{3}{g}\dot{x} + \frac{1}{g}x\right) \quad (3.83)$$

Una prueba más formal de la estabilización de esta ley de control para un integrador de n estados se expone en el trabajo realizado en [30].

3.2.3. Control de la dinámica lateral (y, ϕ) .

Por la similitud de las dinámicas expresadas en (3.37a)-(3.37d) se ahorra todo el análisis anterior y se expresa solamente la ley de control:

$$u_\phi = -F_a \left(\dot{\phi} \right) - F_b \left(\dot{\phi} + \phi \right) - F_c \left(\dot{\phi} + 2\phi + \frac{1}{g} \dot{y} \right) - F_d \left(\dot{\phi} + 3\phi + \frac{3}{g} \dot{y} + \frac{1}{g} y \right) \quad (3.84)$$

Se tiene el control completo de la dinámica del UAV en vuelo en sustentación. El próximo paso es pasar a la simulación numérica.

3.2.4. Simulación de vuelo en sustentación del UAV

Se tiene el control completo del vuelo en sustentación del UAV. Lo siguiente es validar dichos controles con la simulación numérica, para lo cual se reproduce el modelo matemático y el control en Simulink de Matlab R2009, tal como se muestra en la figura 3.2:

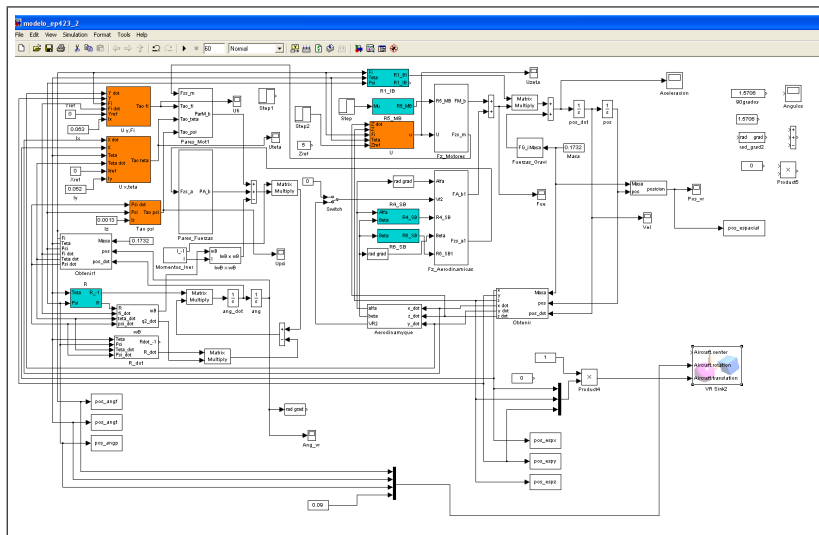


Figura 3.2: Programa de simulación del modelo matemático del UAV

Los parámetros utilizados en la simulación se toman del prototipo “La Raie man-ta” mostrado en la figura 2.1 y se especifican en la siguiente tabla:

Parametro	Valor
m	1,7 [kg]
g	9,81 [$\frac{m}{s^2}$]
I_y	0,052 [kgm^2]
I_x	0,063 [kgm^2]
I_z	0,0013 [kgm^2]
ρ	0,95 [$\frac{Kg}{m^3}$]
S_{wb}	0,4352 [m^2]
S_t	0,0713 [m^2]
S_r	0,0356 [m^2]

Las medidas del prototipo utilizadas igualmente en la simulación se muestran en la figura 3.3:

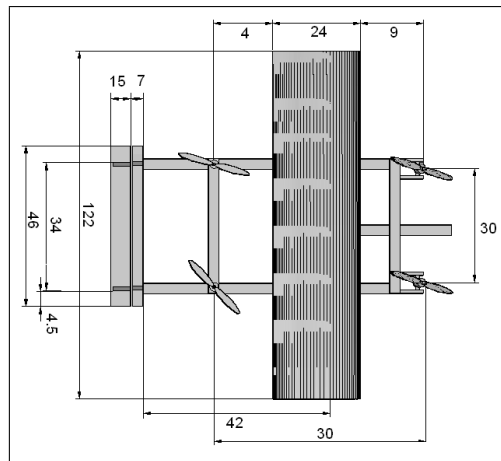


Figura 3.3: Medidas del prototipo “La Raie Manta”. Acotación en cm.

Antes de continuar hay que enfatizar que los datos aerodinámicos obtenidos en

esta sección, para el perfil utilizado en el ala principal del prototipo, son utilizados solamente con fines de simulación. Para el diseño y construcción del prototipo se utilizan otros datos similares obtenidos bajo algunos ángulos de análisis un poco diferentes, tal como se verá en el siguiente capítulo. Así entonces, se utiliza en el prototipo un perfil de ala E423. Los datos aerodinámicos del perfil (coeficientes de levantamiento, arrastre y momentos) se obtienen del JavaFoil Versión 2.20. A un número de Reynolds de 60000, altura de 2200mts y densidad el aire de $0,95\text{kg}/\text{m}^3$ para un ángulo de ataque de 0 a 360 grados. La figura 3.4 muestra la geometría del perfil y las coordenadas del mismo como se presentan en el JavaFoil.

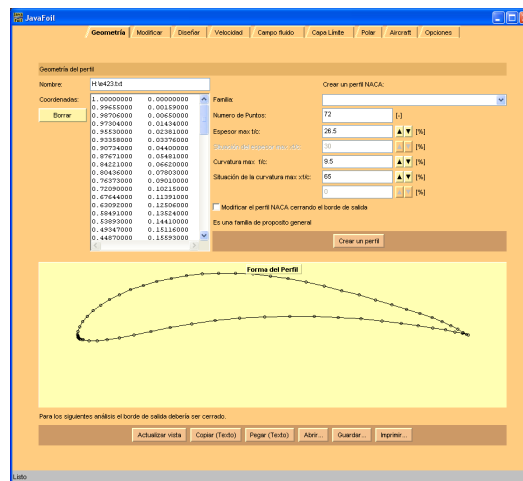


Figura 3.4: Geometría del perfil e423 en el JavaFoil

Y en la figura 3.5 se muestran las graficas obtenidas del JavaFoil para los coeficientes aerodinámicos del perfil.

Los datos obtenidos del JavaFoil se llevan a Matlab y mediante la herramienta *cftool* se realiza un ajuste de recta con lo cual se obtienen funciones para poder introducir dichos coeficientes en la simulación. Las funciones de los coeficientes utilizadas

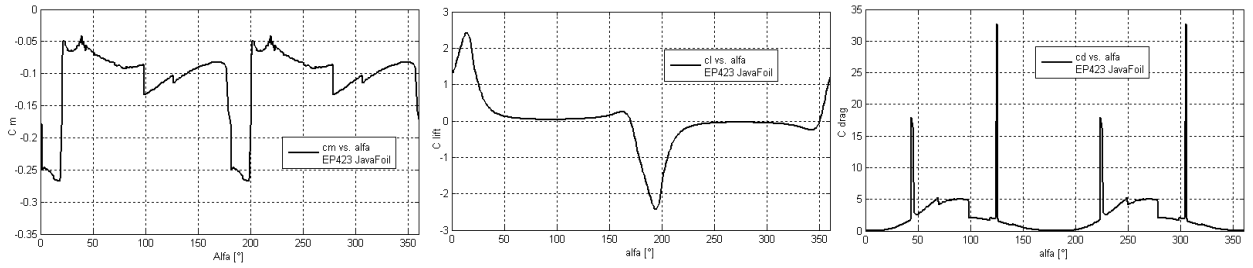


Figura 3.5: Coeficientes aerodinámicos del E423 obtenidos del JavaFoil

en la simulación son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 C_L(\alpha) = & 0,6408 \sin(0,01748 * (\alpha + 1,2)) + 0,5931 \sin(0,05241 * (\alpha + 0,8054)) \\
 & + 0,4601 \sin(0,08736 * (\alpha + 0,521)) + 0,3096 \sin(0,1223 * (\alpha + 0,2508)) \\
 & + 0,1809 \sin(0,1574 * (\alpha - 0,07061)) + 0,09186 \sin(0,1928 * (\alpha - 0,5393)) \\
 & + 0,04226 \sin(0,2269 * (\alpha - 1,194)) + 0,03636 \sin(0,2956 * (\alpha - 2,755))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_D(\alpha) = & 31,67 \exp(-((\alpha - 304) / 0,5321)^2) + 31,66 \exp(-((\alpha - 124) / 0,5314)^2) \\
 & + 18,41 \exp(-((\alpha - 43,55) / 1,116)^2) + 18,41 \exp(-((\alpha - 223,6) / 1,116)^2) \\
 & + 4,96 \exp(-((\alpha - 77,96) / 36,99)^2) + 4,952 \exp(-((\alpha - 258,1) / 36,84)^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_m(\alpha) = & -0,1072 - 0,02479 \cos(0,03487\alpha) + 0,007735 \sin(0,03487\alpha) \\
& -0,03451 \cos(2 * 0,03487\alpha) - 0,0254 \sin(2 * 0,03487\alpha) \\
& -0,02448 \cos(3 * 0,03487\alpha) - 0,02608 \sin(3 * 0,03487\alpha) \\
& -0,006315 \cos(4 * 0,03487\alpha) - 0,02974 \sin(4 * 0,03487\alpha) \\
& -0,001663 \cos(5 * 0,03487\alpha) - 0,01995 \sin(5 * 0,03487\alpha) \\
& +0,008662 \cos(6 * 0,03487\alpha) - 0,01401 \sin(6 * 0,03487\alpha) \\
& +0,00359 \cos(7 * 0,03487\alpha) - 0,007547 \sin(7 * 0,03487\alpha) \\
& +0,006348 \cos(8 * 0,03487\alpha) + 0,005108 \sin(8 * 0,03487\alpha)
\end{aligned}$$

Simulación en vuelo de sustentación del UAV

Con todos estos datos se tiene completo el modelo en Simulink. Se realizó la primera simulación para vuelo en sustentación con los siguientes datos:

Posición	Valor inicial	Referencia
x	0,58 [m]	0,0 [m]
y	0,58 [m]	0,0 [m]
z	4,45 [m]	5,0 [m] , 6,0 [m]
ϕ	0,0 [rad]	0,0 [rad]
θ	0,0 [rad]	0,0 [rad]
ψ	0,0 [rad]	0,0 [rad]

En la figura 3.6 se presenta el comportamiento de las posiciones espaciales del centro de gravedad del UAV. En todas las figuras se marcó el tiempo a los 30 seg., que es el momento donde se cambia la referencia de la posición en z . Puede observarse

que la respuesta es bastante “suave”, sin sobre tiros ni oscilaciones bruscas. En todos los casos la referencia se alcanza sin problema y en un corto tiempo.

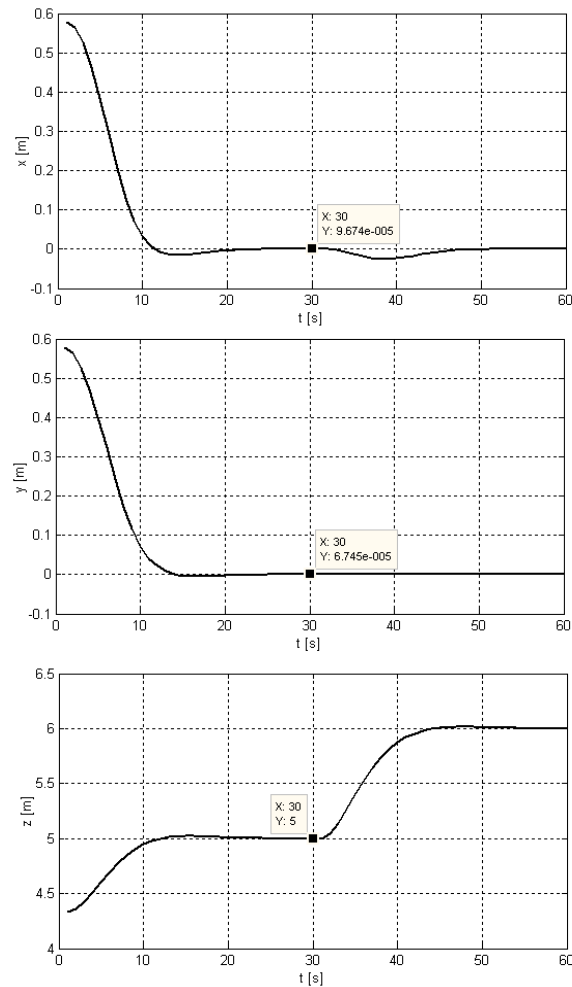


Figura 3.6: Posiciones espaciales del cg del UAV

Las respuestas de las posiciones angulares se presentan en la figura 3.7. Puede apreciarse que el cambio de referencia en la posición z genera perturbaciones en la posiciones angulares iniciales. De igual forma se aprecia el cambio de referencia en el

segundo 30. En general la ley de control responde bastante bien regresando a cero las posiciones angulares en un corto tiempo. En este caso las oscilaciones son un poco más pronunciadas, pero los valores en radianes son muy pequeños.

En las figura 3.8 se presenta la respuesta de las señales de control correspondientes a las leyes de control de saturaciones separadas. Se puede ver el comportamiento convergente a cero tal como se esperaba. El sobretiro inicial es para romper la inercia. En el segundo 30 igualmente se marcan las señales y como puede verse solo hay una pequeña alteración en u_θ , la otra señal no se altera significativamente.

Hasta aquí se tiene una simulación del vuelo en sustentación. Las características aerodinámicas no tienen influencia en este caso, por lo cual no se trata nada referentes a estas.

Simulación de despegue del UAV

Despegue (0,0,20) La simulación del UAV en modo de despegue resulta más interesante en el presente trabajo porque se muestran más la características aerodinámicas del vehículo. Primeramente se corre una simulación con los siguientes valores:

Posición	Valor inicial	Referencia
x	0 [m]	0 [m]
y	0 [m]	0 [m]
z	0 [m]	20 [m]
ϕ	0,0 [rad]	0,0 [rad]
θ	0,0 [rad]	0,0 [rad]
ψ	0,0 [rad]	0,0 [rad]

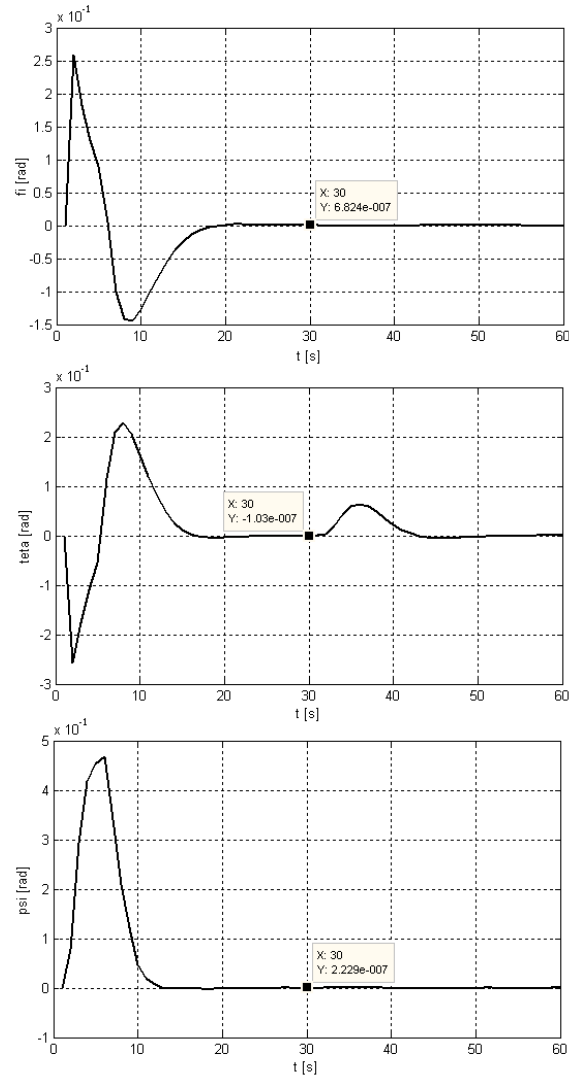


Figura 3.7: Posiciones angulares del UAV

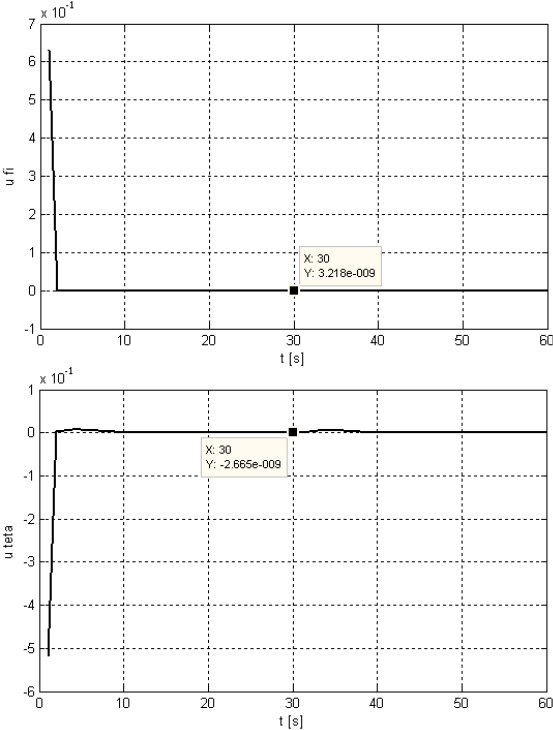


Figura 3.8: Comportamiento de las señales de control u_{ϕ} , u_{θ}

En la figura 3.9 se ve el comportamiento de la posición espacial del centro de gravedad (cg) del UAV, como se observa la posición y no se altera considerablemente y x solo un poco. esto debido al buen control de posición. En la figura 3.10 se muestra la posición angular teta del UAV y las posiciones ϕ y ψ en la figura 3.11, esta separación obedece a la diferencia tan grande que existe entre las dimensiones de estas, pues para realizar el despegue el UAV se mueve primordialmente sobre el cabeceo, los otros movimientos son muy pequeños.

En la figura 3.12 se muestra la trayectoria generada por el UAV en la simulación dentro del mundo virtual de simulink en tres dimensiones.

En las figuras 3.13 y 3.14, se muestran las graficas del levantamiento (L) y el arrastre (D) del ala principal respectivamente. Es claro que dichas características no tienen mayor significación debido a la naturaleza del despegue. Por lo tanto hasta aquí se deja por el momento las características aerodinámicas del UAV.

Por último se presentan en las figuras 3.15 y 3.16 las señales de control u_ϕ y u_θ . Como puede observarse se utiliza más energía en conservar la posición de cabeceo que la de balanceo aunque en general ambas señales son de magnitud muy pequeña. Finalmente ambas señales convergen a cero tal como se esperaba.

3.3. Dinámica de vuelo de transición

De igual forma que en la sección anterior, se utilizara el modelo matemático general obtenido en el capítulo anterior para las dinámicas traslacional y rotacional del UAV. En este punto se analizan algunas cuestiones técnicas de dicha etapa de operación para ayudar a simplificar el análisis.

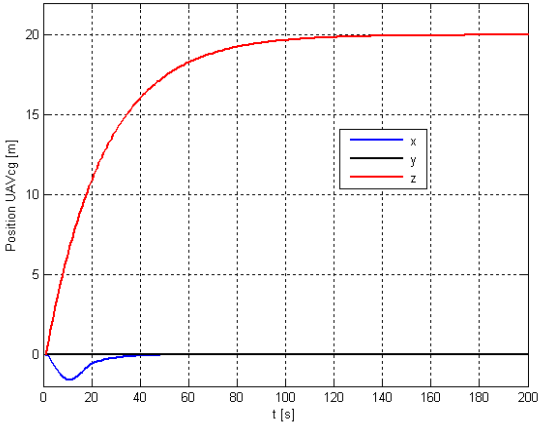


Figura 3.9: Posición del UAV

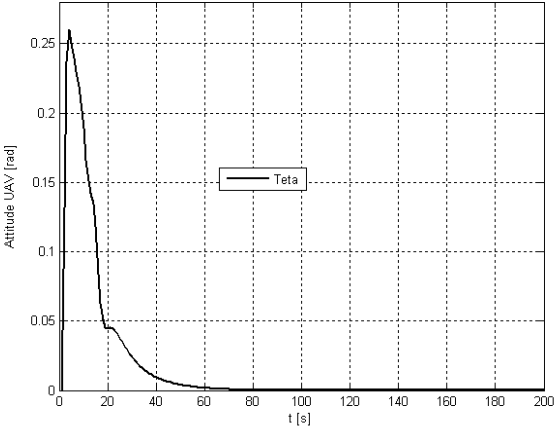


Figura 3.10: Posición angular teta del UAV

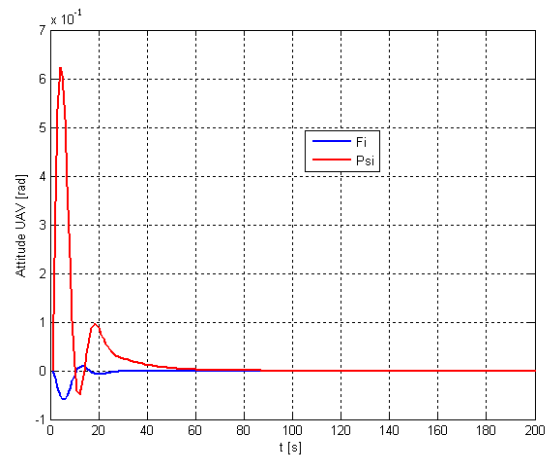
Figura 3.11: Posición angular ϕ , ψ , del UAV

Figura 3.12: Simulación de despegue en Virtual World

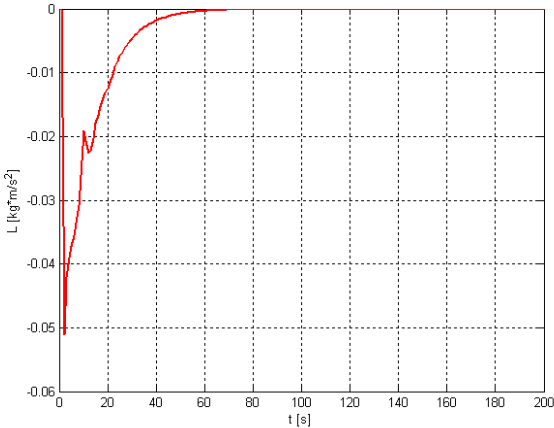


Figura 3.13: Levantamiento del ala principal

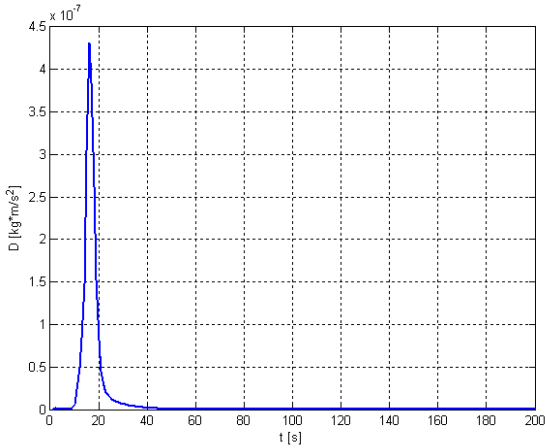
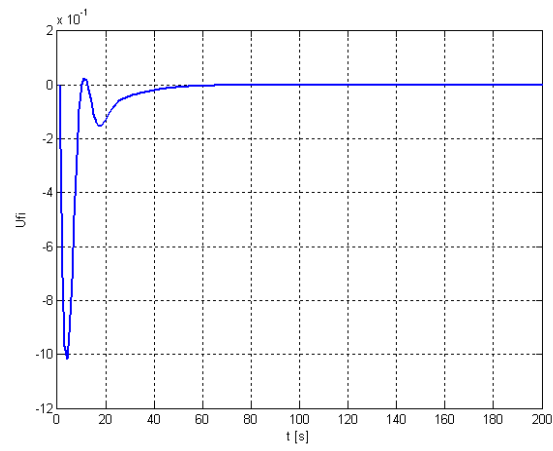
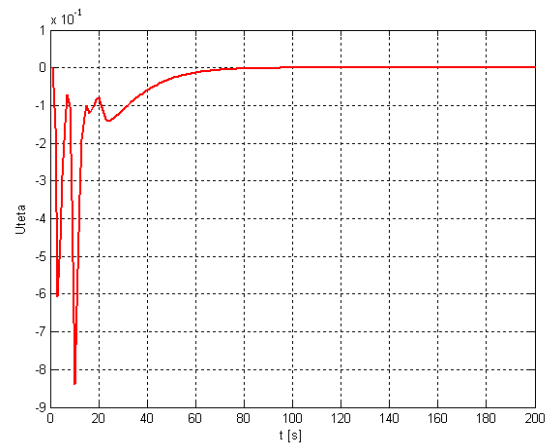


Figura 3.14: Arrastre del ala principal

Figura 3.15: Señal de control u_ϕ vs. tiempoFigura 3.16: Señal de control u_θ vs. tiempo

3.3.1. Consideraciones aerodinámicas

Cuando el UAV se encuentra en vuelo de transición, se pueden hacer las suposiciones siguientes:

1. Se considera que la dinámica en la dirección (y) es cero. Es decir que no existe movimiento en dicha dirección.
2. De igual forma se consideran cero las dinámicas de los ángulos (ϕ, ψ)
3. En el vuelo de transición los motores delanteros se mueven hacia adelante y su ángulo de desplazamiento va de $\mu = 0$ a $\mu = 90$.
4. Se considera que el ángulo de derrape β es igual a cero.
5. Se considera que el centro de gravedad coincide con el centro aerodinámico. De lo cual las fuerzas aerodinámicas del ala principal no tienen contribución en los momentos.
6. Se trabajará esta parte en el referencial del cuerpo y en especial en el referencial aerodinámico por ser en este en donde surgen las fuerzas aerodinámicas las cuales serán objeto de control de este trabajo.

3.3.2. Dinámica traslacional

Se aplican las suposiciones anteriores a la dinámica traslacional definida por (2.36), (2.37) y (2.38) y se expresan las ecuaciones en el referencial del cuerpo, de lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}^B &= -c_\alpha(D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) - s_\alpha(L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \\
&\quad + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)) - D_r(\beta, \delta_r) + F_{M1}s_\mu + F_{M2}s_\mu - s_\theta mg
\end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{z}^B &= -s_\alpha(D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)) + c_\alpha(L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) \\
&\quad + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)) + F_{M1}c_\mu + F_{M2}c_\mu + F_{M3} + F_{M4} - c_\theta mg
\end{aligned} \quad (3.86)$$

Se define como:

$$\begin{aligned}
D &= [D_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + D_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + D_t(\alpha, \delta_e)] \\
L &= [L_{wb1}(\alpha, \delta_{a1}) + L_{wb2}(\alpha, \delta_{a2}) + L_t(\alpha, \delta_e)]
\end{aligned}$$

se omite por simplicidad la simbología de la dependencia del ángulo de ataque y la deflexión. Además se tiene que:

$$F_{M1} = F_{M2} = \frac{F_D}{2} y F_{M3} = F_{M4} = \frac{F_T}{2}$$

las ecuaciones (3.85) y (3.86) quedan como:

$$m\ddot{x}^B = -c_\alpha(D) - s_\alpha(L) + F_D s_\mu - s_\theta mg \quad (3.87)$$

$$m\ddot{z}^B = -s_\alpha(D) + c_\alpha(L) + F_D c_\mu + F_T - c_\theta mg \quad (3.88)$$

Finalmente las ecuaciones (3.87) y (3.88) describen la dinámica traslacional del UAV en el referencial del cuerpo de forma mucho más simplificada.

3.3.3. Dinámica rotacional

De igual forma que en la dinámica traslacional, se aplican las suposiciones anteriores a las ecuaciones (2.77), (2.78) y (2.79) de lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} = & \frac{1}{I_y} (-c_\mu (x_{M1}F_{M1} + x_{2M}F_{2M}) + x_{3M}F_{3M} + x_{4M}F_{4M} - \Gamma_{ac} \\
& + c_\alpha x_t L_t(\alpha, \delta_e) - s_\alpha x_t D_t(\alpha, \delta_e) + c_\mu (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) I_{z^M} (\omega_{M1} - \omega_{M2}) \\
& + s_\mu r I_{z^M} (\omega_{M1} - \omega_{M2}) - (c_\psi c_\theta \dot{\phi} + s_\psi \dot{\theta}) (s_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) (I_z - I_x)) \quad (3.89)
\end{aligned}$$

No se debe perder de vista que la ecuación (3.89) desde el análisis inicial se encuentra en el referencial del cuerpo.

3.4. Ley de control: vuelo de transición

Las ecuaciones simplificadas (3.87)-(3.89) definen la dinámica del UAV en el referencial del cuerpo. Sin embargo si se considera que el UAV en esta etapa de operación se comporta como un avión convencional, se pueden tomar las ecuaciones de [33]:

$$\dot{V} = \frac{1}{m} [-D + T_D \cos \alpha - mg (\cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta)] \quad (3.90)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{mV} [-L - T_D \sin \alpha + mg (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta)] + q \quad (3.91)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (3.92)$$

Como los ángulos θ y α se encuentran en el mismo plano, se define el ángulo de trayectoria $\Gamma = \theta - \alpha$ de lo cual podemos escribir el sistema de ecuaciones:

$$\dot{V} = \frac{1}{m} [-D + T_D \cos \alpha - mg \sin \Gamma] \quad (3.93)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{mV} [-L - T_D \sin \alpha + mg \cos \Gamma] + q \quad (3.94)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (3.95)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_y} M \quad (3.96)$$

Con M definido como la suma de momentos del UAV respecto a su centro de gravedad tal como se expresa en la ecuación (3.87)

Se implementará la ley de control de *backstepping* diseñada previamente en [34], para lo cual se realizan las siguientes consideraciones para el vuelo de transición:

1. Se considera la velocidad relativa del UAV constante de lo cual $\dot{V} = 0$.
2. Se tiene el ángulo de trayectoria $\Gamma = \theta - \alpha$ de lo cual $\dot{\Gamma} = \dot{\theta} - \dot{\alpha}$.
3. Aplicando la consideración anterior a las ecuaciones (3.90)-(3.92) se tiene:

$$\dot{\Gamma} = \frac{1}{mV} [L + T_D \sin \alpha - mg \cos \Gamma] \quad (3.97)$$

4. El término $T_D \sin \alpha$ se desprecia considerando que se trabajan ángulos de ataque pequeños $< 20^\circ$ y por tanto la magnitud de dicho termino es mucho menor que la magnitud del levantamiento.
5. Debido al hecho de la coincidencia del centro de gravedad y del centro aerodinámico se tiene que la mayor contribución a los momentos del UAV es la deflexión δ_e del elevador de lo cual $M = C_m(\alpha)\delta$.

Con estas consideraciones y haciendo el cambio de variable $\zeta = \Gamma - \frac{1}{2}\pi$ el sistema de ecuaciones se puede reescribir:

$$\dot{\zeta} = -\frac{g \cos(z + \frac{1}{2}\pi)}{V} + \frac{Cl_\alpha}{mV} \quad (3.98)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{g \cos(z + \frac{1}{2}\pi)}{V} - \frac{Cl_\alpha}{mV} + q \quad (3.99)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_y} C_m(\alpha) \delta \quad (3.100)$$

Ahora el sistema se encuentra en la forma de *feed forward* para el *backstepping*, de lo cual siguiendo el procedimiento escrito en [34], se llega finalmente a la ley de control:

$$u = \delta = \frac{I_y}{C_m(\alpha)} \left[-(\alpha - \alpha_{ref}) - k_2 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_{ref}) + \ddot{\theta}_{ref} \right] \quad (3.101)$$

Donde α_{ref} , $\dot{\theta}_{ref}$, $\ddot{\theta}_{ref}$ son los valores de referencia preestablecidos y $k_2 > 0$.

Siguiendo el trabajo publicado en [34], se definen los errores:

$$e = \frac{mV}{Cl_\alpha} [\Gamma - \Gamma_{ref}] \quad (3.102)$$

$$e_1 = \alpha - \alpha_{ref} \quad (3.103)$$

$$e_2 = \dot{\theta} - \dot{\theta}_{ref} \quad (3.104)$$

de cual las derivadas de los mismos son:

$$\dot{e} = -K \frac{mV}{Cl_\alpha} [\Gamma - \Gamma_{ref}] + [\alpha - \alpha_{ref}] \quad (3.105)$$

$$\dot{e}_1 = K \frac{mV}{Cl_\alpha} [\Gamma - \Gamma_{ref}] - [\alpha - \alpha_{ref}] - k_1 [\alpha - \alpha_{ref}] + [\dot{\theta} - \dot{\theta}_{ref}] \quad (3.106)$$

$$\dot{e}_2 = K \frac{mV}{Cl_\alpha} [\Gamma - \Gamma_{ref}] - [\alpha - \alpha_{ref}] - k_2 [\dot{\theta} - \dot{\theta}_{ref}] \quad (3.107)$$

con $k, k_1, k_2 > 0$. Escribiendo las tres últimas ecuaciones de forma vectorial:

$$\dot{\mathbf{e}} = -K\mathbf{e} + S\mathbf{e} \quad (3.108)$$

con $S = S^T$ se satisface $\mathbf{e}^T S \mathbf{e} = 0 \quad \forall \mathbf{e}$ de tal forma que con la función candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad (3.109)$$

se tiene que:

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (-K\mathbf{e} + S\mathbf{e}) \mathbf{e} = -\mathbf{e}^T K \mathbf{e} < \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{e} \quad (3.110)$$

Lo cual prueba que el sistema es asintóticamente estable respecto al origen.

3.4.1. Análisis de la secuencia de transición

Durante esta etapa de operación el UAV deberá iniciar en la dinámica de helicóptero y pasar a la dinámica de avión teniendo cada una de ellas su control. Se utiliza la velocidad relativa del UAV definida con anterioridad, como el parámetro de medida para transitar de una dinámica a otra y por consecuencia entre la aplicación de uno y otro control. De lo cual la forma de atacar el problema en un primer ensayo es la siguiente:

1. Una vez alcanzados los valores de referencia del vuelo en sustentación se cambian las referencias de la posición (x) y del ángulo (θ) de lo cual se obtiene un movimiento frontal del UAV que incrementa la velocidad relativa del mismo lo suficiente para obtener un levantamiento que contrarreste el peso del UAV. Todo lo anterior bajo la acción de la ley de control del vuelo en sustentación.

2. Dos segundos después de alcanzar el levantamiento mencionado, se cancela la ley de control del vuelo en sustentación y se giran los motores delanteros 90 grados hacia adelante y los motores traseros se apagan por completo. Con lo cual se tiene todo el empuje horizontal. La ley de control del vuelo de transición entra un segundo antes de esta última acción. Es decir un segundo después de alcanzar el levantamiento deseado.
3. Estas acciones permiten una transición durante la cual existe un breve instante de tiempo en el cual ambas leyes de control actúan al mismo tiempo y por tanto no existe tiempo sin acción de control alguna.
4. Un trabajo futuro versaría sobre la forma óptima de realizar el cambio entre una y otra ley de control teniendo como parámetro el levantamiento deseado y como medidas la altitud del UAV y el ahorro de energía de la pila utilizada.

Veamos la acción de este procedimiento en la simulación numérica sobre el modelo matemático general del UAV con las leyes de control respectivamente diseñadas.

3.4.2. Simulación conjunta del vuelo de sustentación y de transición del UAV

Se tiene el control completo del vuelo en sustentación y de transición del UAV. Lo siguiente es validar ambos controles sobre el modelo matemático obtenido en el capítulo 2. Se toma el modelo utilizado en la simulación anterior en Simulink de Matlab R2009, tal como se muestra en la figura 3.2.

Todos los parámetros del UAV, así como las características aerodinámicas del mismo, continúan siendo las mismas. Tan solo se incluye la ley de control del vuelo

de transición. Las principales modificaciones en el programa de Simulink se muestran en la figura 3.17:

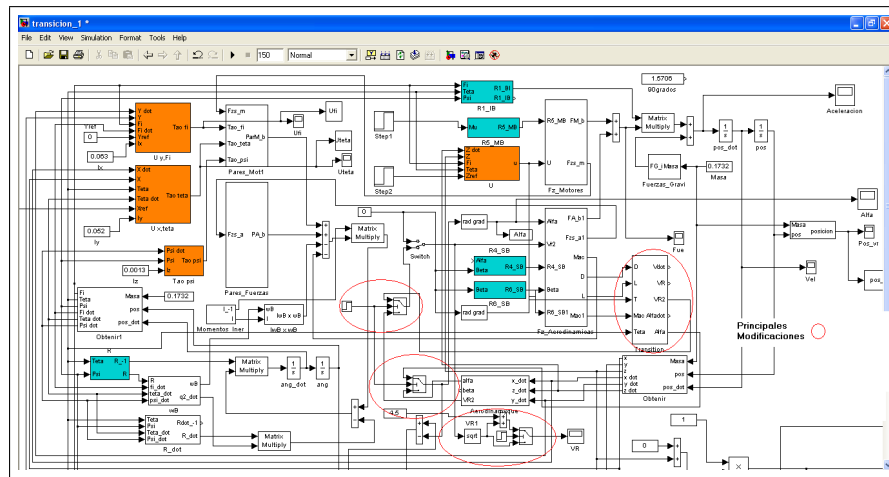


Figura 3.17: Modificaciones al programa de simulación del modelo matemático del UAV

Simulación conjunta

Se realizó la simulación conjunta de ambos modos de operación del UAV con los siguientes parámetros preestablecidos para cada caso:

Secuencia de tiempos:

Ley de Control	Tiempo	Operación
Control de vuelo en sustentación	0 – 99[s]	Vuelo en sustentación
Control de vuelo en sustentación	Segundo 100	Cambio de referencias
C. vuelo en sustentación/ C. de transición	Segundo 104	Entrada de control de transición
Control de transición	Segundo 105	Salida de control de sustentación
Control de transición	Segundo 106	Giro de los motores delanteros
Control de transición	0 – 150 [s]	Vuelo de transición

En el despegue:

Posición	Valor inicial	Referencia
x	0 [m]	0 [m]
y	0 [m]	0 [m]
z	0 [m]	7 [m]
ϕ	0,0 [rad]	0,0 [rad]
θ	0,0 [rad]	0,0 [rad]
ψ	0,0 [rad]	0,0 [rad]

Inicio de transición con ley de control del vuelo en sustentación:

Posición	Valor inicial	Referencia
x	0 [m]	20 [m]
y	0 [m]	0 [m]
z	0 [m]	7 [m]
ϕ	0,0 [rad]	0,0 [rad]
θ	0,0 [rad]	0,1745 [rad]
ψ	0,0 [rad]	0,0 [rad]

Inicio de transición con ley de control del vuelo en sustentación:

Estado	Valor inicial	Referencia
V	3 [m/s]	4,5 [m/s]
α	0,1047 [rad]	0,12 [rad]
$\dot{\theta}$	0,0 [rad/s]	0,0 [rad/s]

En la figura 3.18 se muestra el comportamiento de la posición espacial del centro de gravedad (cg) del UAV. Se observa que la posición y no se altera considerablemente a pesar de no tener control. La posición x cambia en el tiempo de acuerdo a la referencia de velocidad preestablecida. La altitud del UAV comienza a aumentar de manera constante de acuerdo a la consigna de mantener constantes la velocidad y el ángulo de ataque del UAV. En la figura 3.19 se muestra un acercamiento de la gráfica anterior pero en los instantes donde comienza la transición (segundo 100) y donde se realiza el cambio de ley de control (segundo 105). En la figura se observa que la transición se realiza sin sobre saltos en lo que respecta a la posición.

Sin embargo para la velocidad la transición se realiza de manera un poco más abrupta, como puede observarse en la figuras 3.20 y 3.21. En la figura 3.20 se observa

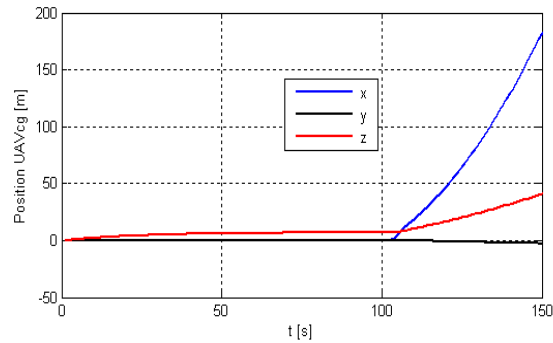


Figura 3.18: Posición del UAV vs. tiempo

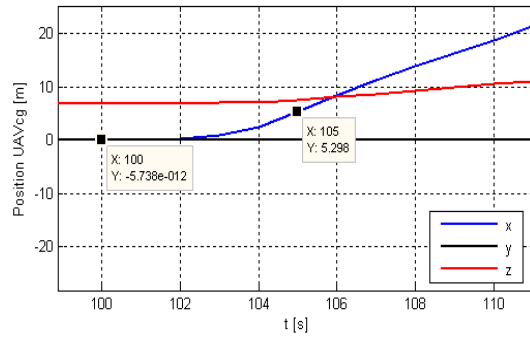


Figura 3.19: Posición del UAV vs tiempo durante la transición

el incremento de la velocidad a partir del segundo 100 que es el momento donde se cambia la referencia de la posición x y del ángulo θ bajo la acción del control del vuelo en sustentación. En la figura 3.21 se puede observar como a partir del segundo 105 cuando se hace el cambio de control la velocidad continúa aumentando y después de casi 5 segundos se logra llevar la velocidad a su valor de referencia.

Para el ángulo de ataque la transición también resulta poco suave como se observa de las figuras 3.22 y 3.23. En la figura 3.22 se observa el momento del cambio (segundo

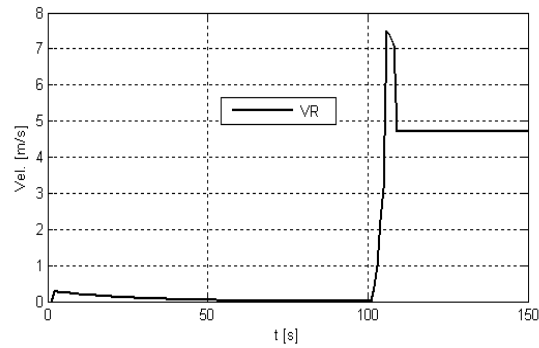


Figura 3.20: Velocidad del UAV vs. tiempo

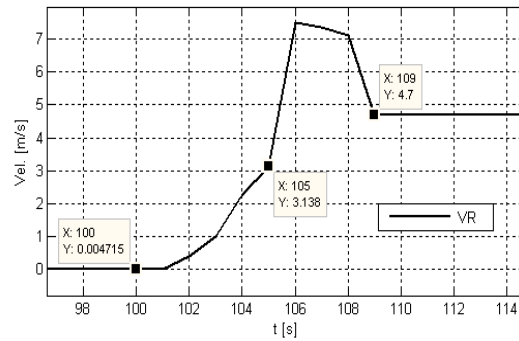


Figura 3.21: Velocidad vs tiempo durante la transición

100) de un ángulo de ataque cercano a los 90° (ascenso vertical) hacía un ángulo de ataque cercano a los 12° que es el valor de referencia. La figura 3.23 muestra como antes del cambio de la ley de control (segundo 105) el ángulo de ataque comienza a descender y después la ley de control lo lleva a su valor de referencia.

Finalmente, en la figura 3.24 se muestra la señal de control del vuelo de transición la cual corresponde a la deflexión del elevador, y en las figuras 3.25 y 3.26 se muestran las gráficas del levantamiento y el arrastre durante la transición.

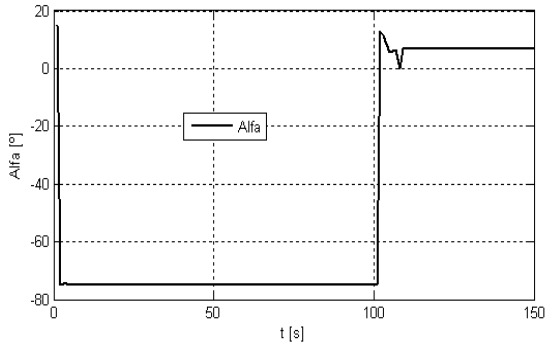


Figura 3.22: Ángulo de ataque vs tiempo

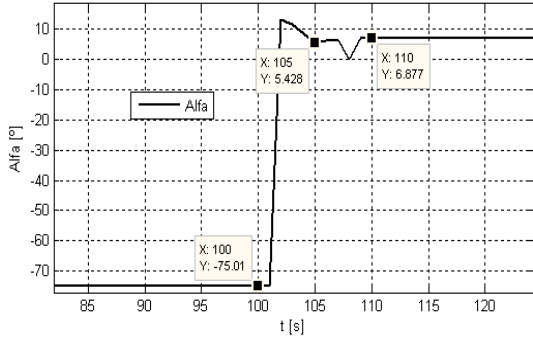


Figura 3.23: Ángulo de ataque vs tiempo durante la transición

Con esto se concluye el análisis de la simulación numérica del UAV sujeto a las leyes de control correspondientes a cada etapa del vuelo.

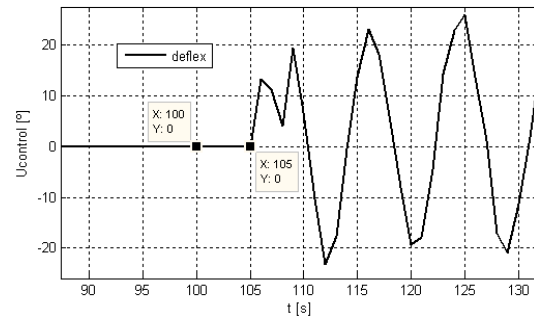


Figura 3.24: Deflexión del elevador durante la transición

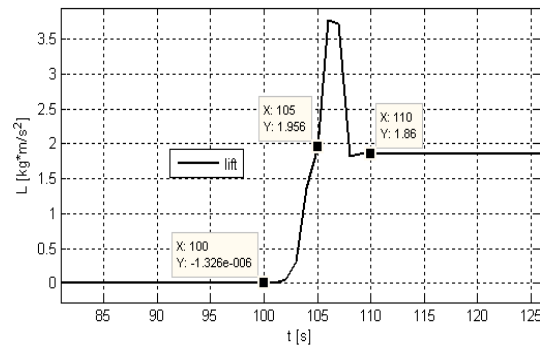


Figura 3.25: Levantamiento del ala principal durante la transición

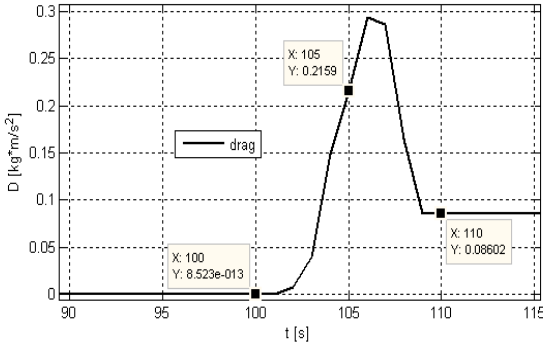


Figura 3.26: Arrastre del ala principal durante la transición

Capítulo 4

Prototipo del UAV

4.1. Diseño Conceptual¹

Se describe el diseño aerodinámico conceptual del prototipo del UAV “La Raie Manta”. El diseño está basado en los requisitos que se muestran en la siguiente tabla:

Objetivo	Valor
Peso máximo al despegue	1,1[<i>kg</i>]
Número de motores	4
Envergadura máxima	1,2[<i>m</i>]

El primer paso es definir la configuración del avión empezando por el ala. Se requiere sencillez de construcción y un peso muy ligero para una aeronave de despegue y aterrizaje vertical.

¹Diseño y construcción realizados en colaboración con los alumnos de Ingeniería Aeronáutica de la ESIME Ticoman: Hernández Álvarez Enrique; Montoya Ramos Roberto Sinhue durante su estancia de servicio social en la UMI LAFMIA 3175 CNRS

4.1.1. Geometrías del UAV

Se definen en seguida las geometrías de los elementos principales del UAV en base a las necesidades del mismo.

1. Geometría de ala. La tarea principal de la aeronave es tener un buen comportamiento a bajas velocidades, por lo que se optó por tener la configuración de ala rectangular con perfil de alto levantamiento a bajo número de Reynolds, este tipo de ala tiene una mayor sencillez de construcción y manufactura, así de esta manera se reducirá al máximo su peso.
2. Geometría de los estabilizadores. Se tienen diferentes configuraciones posibles de los estabilizadores, sin embargo se optó por tener la configuración de doble empenaje, para así aprovechar la estructura que soporta a los 4 propulsores, ya que en estos se tiene una configuración por pares, aprovechando esta estructura se ahorra igualmente peso, finalmente al tener esta configuración se tiene una mejor respuesta de control en el zigzaguo.
3. Superficies de Control. El control del cabeceo es hecho de manera convencional por el timón de profundidad del estabilizador horizontal, el control del zigzaguo es efectuado por los empenajes verticales y el control de balanceo es generado por el ala por medio de los alerones.
4. Sistemas de Propulsión. Se tendrá una configuración de 4 propulsores, los cuales realizaran de la misma manera en control de vuelo, cada motor actuará para controlar la aeronave.
5. Fuselaje. El UAV básicamente prescindirá de fuselaje, sin embargo tendrá una pequeña bahía de carga para alojar los sistemas de la aeronave, esta tendrá

que ser de fácil acceso.

4.1.2. Dimensionamiento de los elementos del UAV

Ala principal

En este capítulo se analiza solamente el diseño del ala principal del prototipo del UAV. Esto obedece principalmente al tamaño de esta en comparación con todos los otros elementos. Sin embargo en el apéndice B se encuentra el cálculo de todos los elementos faltantes.

Se necesita optimizar el diseño de un ala que tenga una envergadura máxima de $1,20[m]$, que sea ligera y que se logren acomodar todos los componentes necesarios (electrónica del UAV). Para conocer la superficie del ala requerida, se utilizan valores de carga alar (C_{alar}) típicos en aeronaves de este tamaño. Estos valores de carga alar se encuentran entre el rango siguiente:

$$2,636 \left[\frac{kg}{m^2} \right] \leq C_{alar} \leq 6,151 \left[\frac{kg}{m^2} \right]$$

Se tiene como límite un peso $W \leq 1,1[kg]$. Se calcula la superficie alar S_{wing} necesaria de la ecuación (4.1):

$$C_{alar} = \frac{W}{S_{wing}} \quad (4.1)$$

Con $C_{alar} = 4,393 \left[\frac{kg}{m^2} \right]$ y $W = 1,1[kg]$ de lo cual $S_{wing} = 0,25[m^2]$. Por razones de construcción (alcances reales en el laboratorio) se decidió limitar la envergadura (b) del ala a $1[m]$. Se propone un alargamiento (AR) entre el rango: $0 \leq AR \leq 6$. De la ecuación (4.2) se tiene una envergadura de ala $b = 1,11[m]$ para un $AR = 5$.

$$AR = \frac{b^2}{S_{wing}} \quad (4.2)$$

Se calcula el valor de la cuerda del ala (c), despejándolo de la ecuación (4.3):

$$c = \frac{S_{wing}}{b} \quad (4.3)$$

La cuerda media aerodinámica (\bar{c}) al tener una geometría de ala rectangular es:

$$\bar{c} = 0,25[m]$$

Finalmente se obtienen los siguientes parámetros los cuales se ajustan a los requerimientos iniciales:

Concepto	Valor de diseño
Envergadura del ala	$b = 1,20[m]$
Cuerda media del ala	$\bar{c} = 0,25[m]$
Superficie alar	$S_{wing} = 0,3[m^2]$
Razón de aspecto	$AR = 4,8$

Estabilizador horizontal

Una opción para estimar las dimensiones de la configuración del estabilizador horizontal es definiendo un volumen de empenaje horizontal (V_h) ecuación (4.4). Para este tipo de vehículo se tiene de tablas [27] valores $V_h \in [0,40, 0,60]$.

$$V_h = \frac{S_{eh}l_2}{S_{wing}\bar{c}} \quad (4.4)$$

Con S_{eh} superficie del estabilizador horizontal y l_2 la distancia entre las líneas que se encuentran al 25% de la \bar{c} del ala y del empenaje horizontal, este valor puede ser determinado por datos históricos. Despejando la superficie del estabilizador horizontal S_{eh} de la ecuación (4.4) se obtiene:

$$S_{eh} = \frac{V_h S_{wing} \bar{c}}{l_2} \quad (4.5)$$

El valor típico de l_2 oscila entre 2,5 y 3 veces el valor de la \bar{c} del ala de lo cual:

$$l_2 = 0,6187[m]$$

Sustituyendo en la ecuación (4.5) con $V_h = 0,5$, se obtiene:

$$S_{eh} = 0,0606[m^2]$$

Se calcula el valor de la envergadura del estabilizador horizontal despejando b_{eh} de la ecuación (4.2) proponiendo un valor de alargamiento de $Ar = 4$ [27], [28]:

$$b_{eh} = \sqrt{AR_{eh} * S_{eh}}$$

\Rightarrow

$$b_{eh} = 0,49[m]$$

Para el valor de la cuerda se utiliza la ecuación (4.4)

$$c_{eh} = \frac{S_{eh}}{b_{eh}}$$

$$\Rightarrow$$

$$c_{eh} = 0,12[m]$$

Timón de profundidad Para tener un mejor control de cabeceo se dejará un área mayor para el timón de profundidad (parte móvil del estabilizador horizontal) en el estabilizador horizontal. Para la parte fija, se dejará sólo una pequeña sección para tener espacio suficiente para el montaje de los servos.

4.1.3. Diseño aerodinámico

Diseño del ala principal del prototipo

Debido a que la principal característica del UAV será el despegue vertical, es necesario el uso de un perfil que genere un alto levantamiento a bajas velocidades. Entonces se buscan perfiles de bajo número de Reynolds. A partir de los siguientes parámetros se realiza la elección del perfil. Para calcular el número de Reynolds (Re) del ala se utiliza el valor medio de la cuerda del ala principal \bar{c} y de la velocidad de desplome (V_S). Esta velocidad se propone a partir de la velocidad de transición, tomando ésta a partir de $4[m/s]$. De lo cual se tiene:

$$Re = \frac{\rho * V_S * \bar{c}}{\mu}$$

$$\Rightarrow Re = 54,072,9327$$

Donde μ y ρ son la viscosidad dinámica y la densidad del aire, respectivamente, en la Ciudad de México. Por lo tanto, se necesita un perfil que genere un coeficiente de levantamiento (C_L) aceptable a partir de un Reynolds de 50,000. Para tal fin se utilizan los siguientes parámetros:

Peso	$W = 1,2[kg]$
Area del ala	$S_{wing} = 0,18[m^2]$
Velocidad de desplome	$V_S = 4[m/s]$
Densidad	$\rho = 0,967[\frac{kg}{m^3}]$
Viscocidad	$\mu =$

El área del ala principal se redujo a razón de las necesidades físicas del prototipo: montaje de los motores para evitar vibraciones excesivas y la limitante del peso. Se toma la ecuación (2.8) con $V_R = V_S$ y el peso (W) se iguala a la fuerza de levantamiento (L). Se calcula el coeficiente de levantamiento requerido (C_{Lreq}):

$$W = L = \frac{1}{2} \rho S_{wing} C_L (V_R)^2$$

$$\Rightarrow C_{Lreq} = 0,7899$$

A partir de éste C_{Lreq} se elige un perfil de alto levantamiento y de bajo número de Reynolds, teniendo en cuenta que el coeficiente de levantamiento disminuirá considerablemente en la práctica, se elige el perfil E423.

Curvas polares del ala

En las figuras siguientes se incluyen las curvas polares del ala del prototipo La Raie Manta.

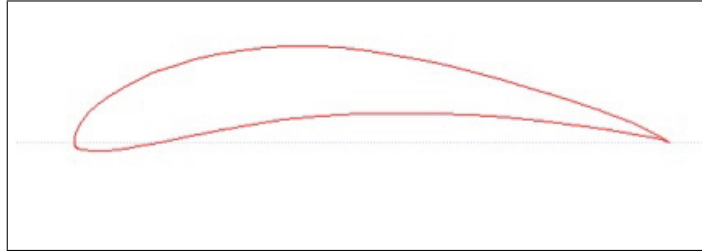


Figura 4.1: Geometría del perfil E423

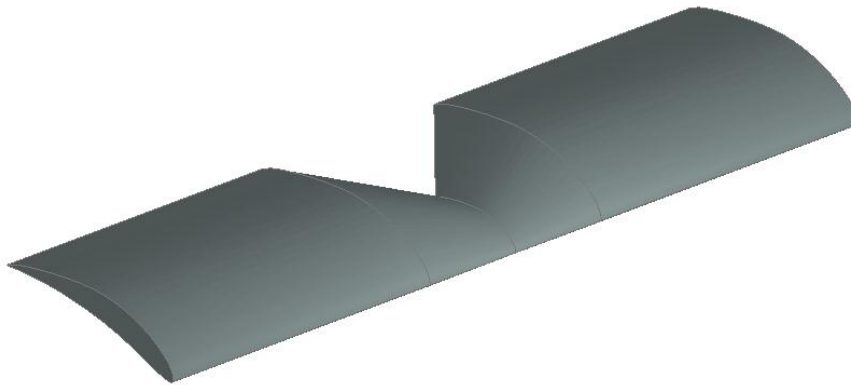


Figura 4.2: Vista 3d del ala con perfil E423

4.1.4. Estabilidad y control estático longitudinal

En el análisis de estabilidad y control longitudinal se estudia el efecto de los momentos de cabeceo y de las fuerzas verticales que actúan sobre la aeronave.

Contribución del ala

La contribución del ala a los momentos de cabeceo está definida en función de su coeficiente de momentos (C_{mw}) está definido por:

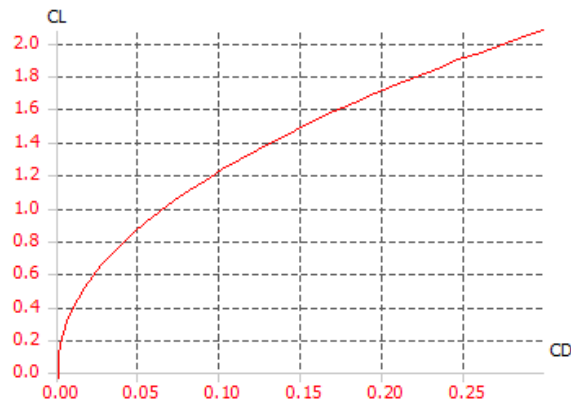


Figura 4.3: Curva polar del ala del prototipo La Raie Manta

$$C_{mw} = \left(\frac{X_a}{\bar{c}} \right) C_L + C_m \quad (4.6)$$

Donde: X_a es la distancia entre el centro aerodinámico (ca) del ala y el centro de gravedad (cg) del prototipo; C_L es el coeficiente de sustentación del ala (en función del ángulo de ataque de la misma) y C_m es el coeficiente de momentos generados en el ala (también en función del ángulo de ataque). En este caso como se hace coincidir el centro aerodinámico y el de gravedad en el prototipo se tiene:

$$C_{mw} = C_m \quad (4.7)$$

Contribución del fuselaje

No se considera al fuselaje de lo que la contribución de este es cero.

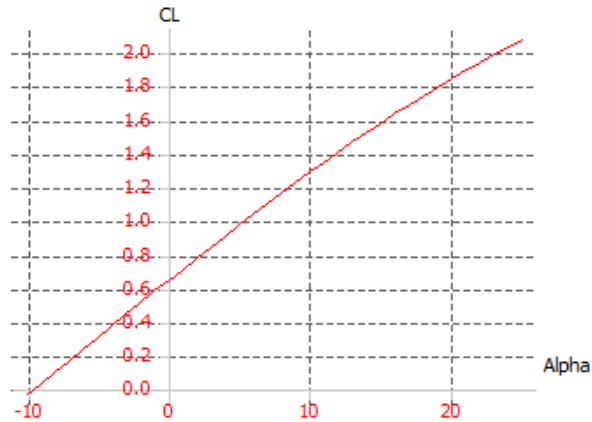


Figura 4.4: Curva coeficiente de levantamiento C_L vs Angulo de ataque α

$$C_{m_{fus}} = 0 \quad (4.8)$$

Contribución del estabilizador horizontal

La contribución a los momentos en la dinámica longitudinal del estabilizador horizontal (elevador) está dada por la ecuación:

$$C_{mh} = -\left(\frac{\alpha_h}{\alpha_w}\right)C_L(V_{eh})\eta_h\left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) - \alpha_h(\alpha_w - i_w + i_H)V_{eh}\eta_h \quad (4.9)$$

Donde: ε es el ángulo de incidencia del flujo sobre el elevador debido a la desviación provocada en dicho flujo por el ala principal. Este ángulo es conocido como “ángulo de downwash”. $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ es la razón de cambio del ángulo de downwash respecto al ángulo de ataque. α_w es el ángulo de ataque de ala principal. $\eta_h = 0,9$ eficiencia de

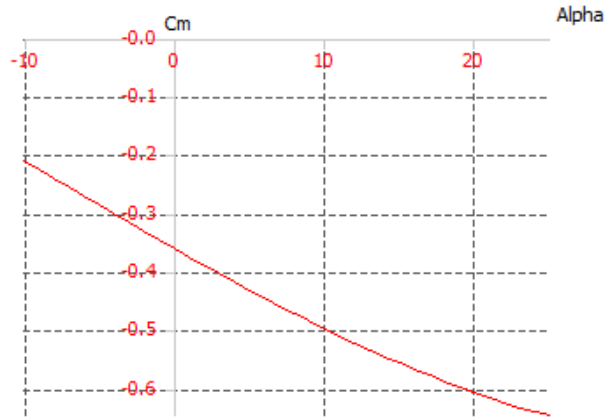


Figura 4.5: Curva coeficiente de momentos C_m vs Angulo de ataque α

estabilizador horizontal. $i_w, i_h = 0^\circ, 0^\circ$ son las incidencias geométricas del ala y del estabilizador horizontal respectivamente. De lo cual se obtiene:

$$C_{mh} = -0,3975C_L\left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) \quad (4.10)$$

Entonces finalmente se tiene la estimación final de la estabilidad longitudinal como la suma de las contribuciones anteriores:

$$C_{mcg} = C_{mw} + C_{mfus} + C_{mh} \quad (4.11)$$

⇒

$$C_{mcg} = C_m - 0,3975C_L\left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) \quad (4.12)$$

más adelante cuando se trabaje con con la transición, se volverá sobre este tema y sobre la ecuación (4.12) en particular.

4.2. Prototipo del UAV: La Raie Manta

4.2.1. Construcción

Finalmente como resultado de todo el trabajo anterior, se construyó el prototipo llamado La Raie Manta el cual se muestra en las figuras 4.6, 4.7 y 4.8. Este prototipo está basado en todas las especificaciones anteriormente calculadas.

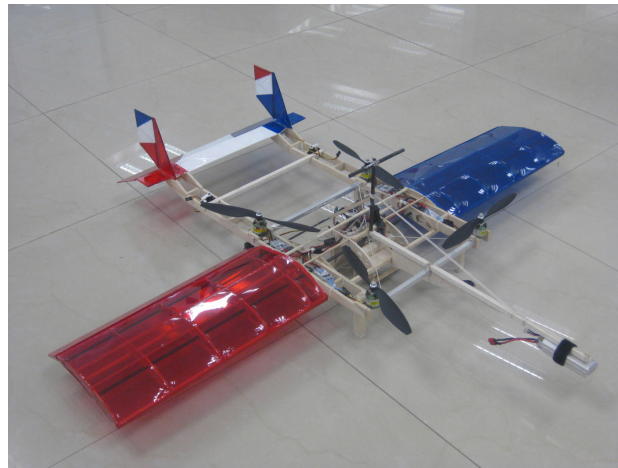


Figura 4.6: Vista frontal del prototipo La Raie Manta

El prototipo está construido en su mayoría, en madera de balsa, solo se utilizaron dos travesaños de aluminio para el montaje de los motores. El forro del prototipo es a base de MonoKote. Los motores son brushless marca Robbe, No.4956, Typ. C28 – 30 – 12. 210Watts máximo por 5 minutos a 120°C. Trabaja con un microprocesador RabbitCore RCM3400 Series, el cual trabaja a 30Mhz y 512 K SRAM. Para el sensado



Figura 4.7: Vista posterior del prototipo La Raie Manta

de la posición angular se utiliza una central inercial CH Robotics modelo UM6-LT Orientation Sensor. La cual trabaja 500 Hz usando una combinación de gyros y acelerómetros. La central inercial se encuentra montada sobre un amortiguador mecánico construido exprefeso para eliminar en lo posible el ruido de la vibración provocada por los motores. En la figura 4.9 se muestra una imagen de dicho montaje.

4.2.2. Pruebas sobre el prototipo

Se realizaron pruebas sobre el prototipo de las leyes de control propuestas en el capítulo 3. Primeramente se trabajó con el vuelo en suspensión pues el primer reto consistía en lograr estabilizar el prototipo en este modo de operación. En las figuras 4.10 y 4.11 se muestran escenas de algunas de estas pruebas realizadas en el Laboratorio de la UMI LAFMIA 3175 CNRS dentro de las instalaciones del CINVESTAV unidad México D.F.

De estas pruebas se obtuvieron mediante un modem remoto Spede , las siguientes



Figura 4.8: Vista lateral del prototipo La Raie Manta

graficas mostradas en las figuras 4.12 - 4.17 de las posiciones angulares del UAV durante el vuelo en sustentación.

En las figuras 4.12, 4.13 y 4.14 se muestran los resultados de la prueba 1. Como puede verse la mejor respuesta es para el ángulo ϕ el cual representa el movimiento en alabeo. Este se encuentra limitado entre $\pm 4^\circ$ alrededor del cero que es en este caso el valor de referencia deseado. Para el movimiento de cabeceo representado por el ángulo θ , se nota un buen comportamiento aunque el rango es un poco mayor $\pm 10^\circ$. Para el zigzagueo el control no resulta muy bueno lo cual provoca un giro del UAV respecto al eje z . La gráfica es bastante demostrativa.

En las figuras 4.15, 4.16 y 4.17 se muestran los resultados de la prueba 2 la cual se realizo después de algunos ajustes mecánicos y ajustes de las ganancias del control. La mejora del control permite meter una perturbación (golpe leve sobre un costado del ala) en el segundo 75 aproximadamente como se ve en las tres figuras.

Para poder observar mejor la mejora del control se hace un acercamiento de estas

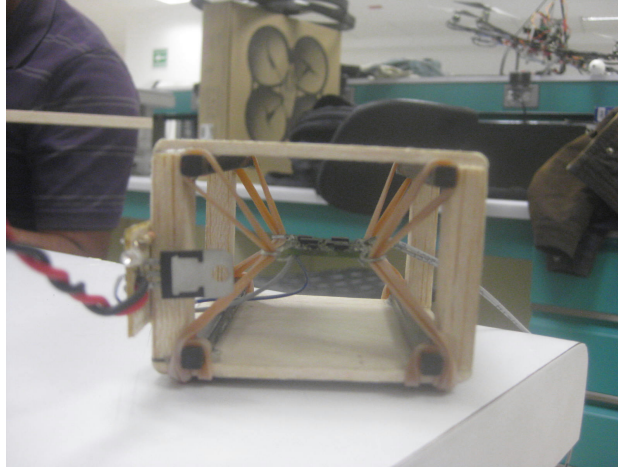


Figura 4.9: Amortiguador mecánico para la central inercial

tres figuras en las figuras 4.18 y 4.19. Como puede verse es mejor la respuesta para el ángulo ϕ el cual representa el movimiento en alabeo como en el caso anterior, sin embargo hay una mejora en el rango alrededor de la referencia, el cual puede ubicarse entre $\pm 2^\circ$. Lo cual representa la mitad del anterior. Para el movimiento de cabeceo igualmente se nota un acortamiento del rango entre un $\pm 7^\circ$. Para el zigzag no se realizó acercamiento pues la mejora de control es fácil de ver en la imagen original.

Por el momento hasta aquí se dejan los resultados obtenidos. Si se desean ver algunas de las pruebas realizadas se puede consultar [35], [36], [37] y [38].



Figura 4.10: Prueba No.1 Vuelo en sustentación de La Raie Manta



Figura 4.11: Prueba No.2 Vuelo en sustentación de La Raie Manta

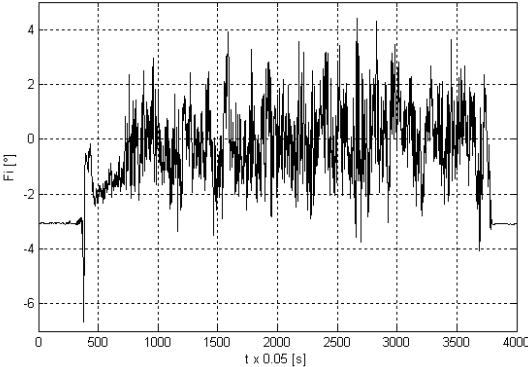


Figura 4.12: Ángulo ϕ vs. tiempo. Prueba 1 vuelo en sustentación.

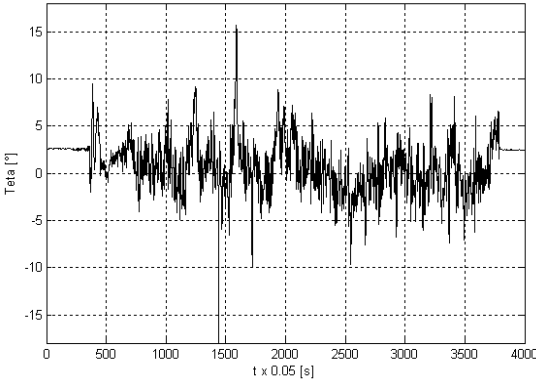


Figura 4.13: Ángulo θ vs. tiempo. Prueba 1 vuelo en sustentación.

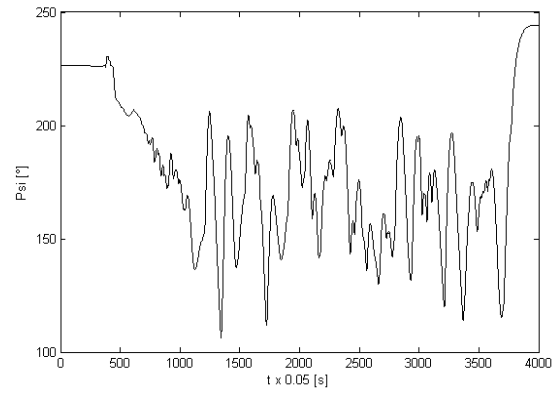


Figura 4.14: Ángulo ψ vs. tiempo. Prueba 1 vuelo en sustentación.

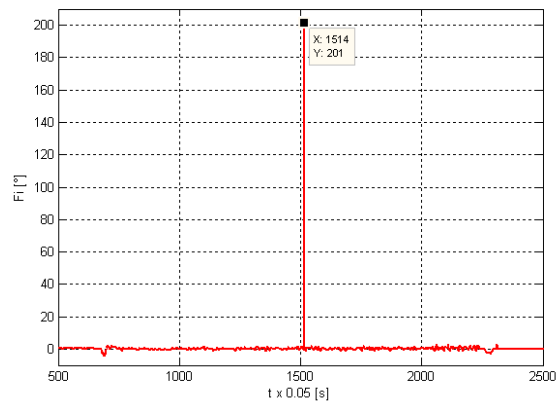


Figura 4.15: Ángulo ϕ vs. tiempo. Prueba 2 vuelo en sustentación.

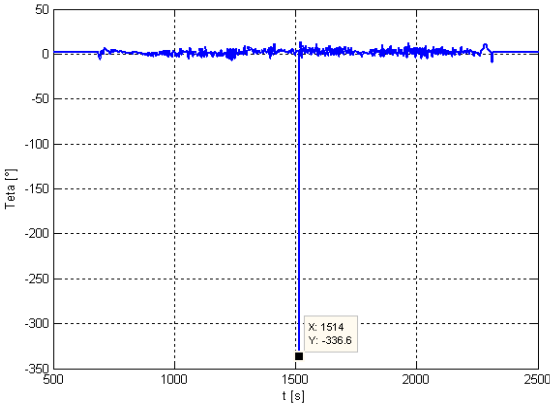


Figura 4.16: Ángulo θ vs. tiempo. Prueba 2 vuelo en sustentación.

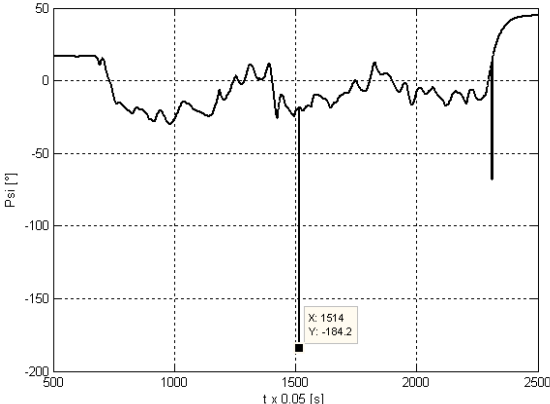


Figura 4.17: Ángulo ψ vs. tiempo. Prueba 2 vuelo en sustentación.

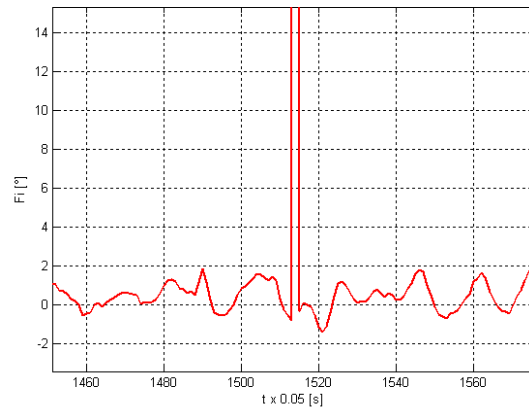


Figura 4.18: Ángulo ϕ vs. tiempo. Prueba 2 vuelo en sustentación acercamiento

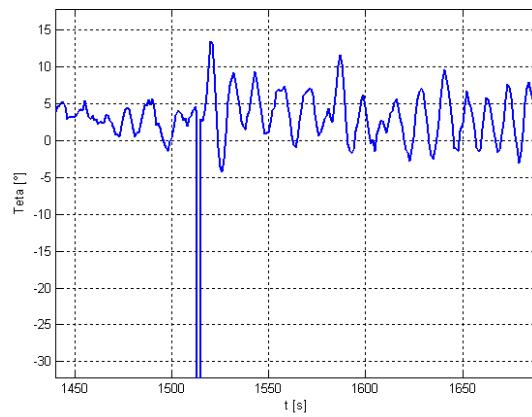


Figura 4.19: Ángulo θ vs. tiempo. Prueba 2 vuelo en sustentación acercamiento.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones y Trabajo futuro

En el presente trabajo se desarrollo el modelo matemático generalizado de la configuración del mini vehículo aéreo no tripulado propuesto. En este, se incluyen las características aerodinámicas propias del vehículo. Dicho modelo resulto bastante satisfactorio en simulación, pero cabe mencionar que aún faltan por modelarse varios elementos fundamentales tales como los motores o ciertas consideraciones tomadas en cuenta sobre el diseño del avión las cuales reducen un poco las fuerzas de levantamiento y arrastre generadas en el vehículo y que no han sido incluidas en este modelo. Se puede mencionar como un punto relevante la inclusión del modelado del filtro mecánico utilizado en la central inercial a fin de atenuar el ruido producido por la vibración de los motores. La suma de todos estos elementos complementarían el modelo matemático del vehículo propuesto lo cual proporcionaría una herramienta aún más poderosa para poder seguir avanzando en el estudio de este tipo de vehículos.

En primer lugar, se trabajó con una ley de control propuesta con anterioridad

en otros trabajos a fin de estabilizar el vehículo en el vuelo en sustentación. La forma de trabajar dicha implementación fue mediante la simplificación del modelo matemático general hasta llegar al modelo matemático conocido de un cuadirrotor y de esta forma aplicar la técnica de control conocida como de saturaciones separadas la cual ha sido probada sobre este tipo de vehículos tanto en la parte teórica como en la práctica, con buenos resultados. Se aplicó dicha ley de control sobre el modelo general en simulación a fin de validar el buen desempeño de esta. Se pudo observar que dentro de ciertos límites la ley de control funcionó adecuadamente estabilizando el vehículo.

En segundo lugar, se tomó otra ley de control propuesta en trabajos anteriores para estabilizar la etapa del vuelo en transición. La implementación fue mediante la aplicación del modelo matemático de la dinámica longitudinal de un avión convencional.

Se validaron las dos leyes de control de manera conjunta y se observó un comportamiento bastante aceptable de las dos leyes de control trabajando en conjunto. Cabe mencionar que un buen trabajo futuro será optimizar el proceso del cambio entre una y otra ley.

Para validar la ley de control en la práctica, se construyó un prototipo, en el cual se cuidó mucho el aspecto aerodinámico del mismo a fin de no perder las prestaciones del vehículo en un vuelo horizontal. El primer problema fundamental sobre el que se trabajó fue el problema del peso del prototipo debido a la naturaleza de los materiales utilizados en el Laboratorio. Además la limitación de la potencia de los motores utilizados los cuales por razones de seguridad no se permitieron elegir más grandes. Fue un gran problema poder combinar poco peso con rigidez sin perder las características aerodinámicas del vehículo, pero al fin se consiguió un prototipo que conjuntara tales características. La limitación de potencia de los motores generó otro

gran problema, la generación de ruido en los elementos de censado se volvió en momentos tan importante que no permitió en momentos la estabilización del vehículo por la saturación del sistema de control por la inclusión de dicho ruido. Por lo cual resultado primordial tomar en cuenta la parte de filtrado de la señales de los sensores (en este caso de la central inercial) se puede mencionar que el filtro mecánico implementado funcionó correctamente llegando a atenuar de tal forma la vibración que permitió elevar las ganancias para estabilizar el prototipo. Sin embargo el filtro se encuentra en una etapa experimental muy básica la cual se debe mejorar.

En general podemos mencionar que los resultados finales del prototipo son buenos. En primera se tiene un vehículo con una configuración nueva el cual puede ser completamente estabilizado en vuelo en suspensión y que pose las características aerodinámicas necesarias para un vuelo horizontal.

Hay varios puntos que podrían mencionarse como trabajo futuro:

1. Primeramente se trabajará sobre la optimización de la transición de las dinámicas en la parte teórica a fin de mejorar el presente trabajo.
2. Se validará dicha optimización sobre el modelo matemático generalizado para verificar su correcto funcionamiento.
3. En seguida se optimizará el pivoteo de los motores frontales.
4. Finalmente se llevará todo lo anterior a la práctica con la implementación de todo lo anterior en el prototipo construido.

5.2. Publicaciones

Rogelio Lozano, Octavio Garcia, Juan Escareño, Victor Rosas; “*Chapter 5 Modeling and control of a convertible plane UAV*”; Unmanned aerial vehicles (Embedded control); John Wiley & Sons, Inc. 2010.

V. Rosas, R. Lozano, J. Torres, Z. Zamudio; “*Modeling and control of a convertible airplane*”; 16th International Conference on System Theory, Control and Computing, Rumania 2012.

V. Rosas, R. Lozano, J. Torres, Z. Zamudio; “*Modeling and control of a vertical take-off airplane*”; 9th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and automatic Control, México 2012.

Capítulo 6

Apéndice A: Aspectos aerodinámicos adicionales

6.0.1. Cálculos de geometrías

Estabilizador vertical

Basado en la literatura se tiene que el factor de conicidad de los estabilizadores (λ_{ev}) es de alrededor de 0,45 a fin de reducir la resistencia inducida, mejorando así su rendimiento aerodinámico. Se propone una cuerda raíz de $Cr_{ev} = 0,12[m]$, se calcula el valor de la cuerda de punta (Ct_{ev}) con la ecuación (5,0)

$$\lambda_{ev} = \frac{Ct_{ev}}{Cr_{ev}} \quad (6.1)$$

Despejando la cuerda de punta Ct_{ev} y sustituyendo los valores se obtiene:

$$Ct_{ev} = 0,054$$

La cuerda media aerodinámica del estabilizador vertical se puede determinar con la ecuación ([27]):

$$\bar{c}_{ev} = \frac{2}{3}Cr_{ev} \left[\frac{1 + \lambda_{ev} + \lambda_{ev}^2}{1 + \lambda_{ev}} \right]$$

Configuración del empenaje para el spin recovery El empenaje vertical juega un papel importante en el *spin recovery*. Cuando en el empenaje horizontal a ángulos de ataque elevados se produce el desplome de la misma manera se produce un flujo turbulento ascendente que afecta a la eficiencia del timón. Se recomienda que este último tenga al menos un tercio de su superficie fuera de este efecto turbulento. Así entonces, la ubicación del borde de salida del empenaje vertical está a 50 % de la cuerda del estabilizador horizontal.

Conociendo la ubicación del empenaje vertical es posible encontrar l_3 que es la distancia entre las líneas del 25 % de la \bar{c} del ala y del empenaje vertical.

⇒

$$l_3 = 0,60[m]$$

Se determina ahora la superficie del empenaje vertical utilizando un volumen de empenaje vertical (V_{ev}) con un valor típico ([27]), $V_{ev} = 0,015$. Utilizando la ecuación:

$$V_{ev} = \frac{S_{ev}l_3}{S_{wing}b_{wing}} \quad (6.2)$$

se despeja S_{ev} :

$$S_{ev} = \frac{V_{ev} S_{wing} b_{wing}}{l_3}$$

$$\Rightarrow$$

$$s_{ev} = 0,009[m]$$

Para calcular la altura del empenaje vertical se utiliza la ecuación:

$$b_{ev} = \frac{2 \cdot S_{ev}}{C_{r_{ev}} + C_{t_{ev}}} \quad (6.3)$$

6.0.2. Cálculos aerodinámicos

Distribución de sustentación del ala

Se utiliza el método de Anderson [31], para la determinación de la sustentación a lo largo de la envergadura del ala. Este método divide la sustentación del ala en dos partes: La distribución de Sustentación Básica (que sólo existe en alas con torción geométrica o aerodinámica) y la distribución de Sustentación Adicional (debida al ángulo de ataque del ala), siendo esta, proporcional al coeficiente de sustentación total del ala. En este caso el ala del prototipo no tiene torsión. Entonces se define el coeficiente de levantamiento del ala debido a sustentación adicional $C_{Lsa}(y)$ en función de la ordenada (y) de la longitud total del ala, tomando como origen una esquina de la misma, por la ecuación:

$$C_{Lsa}(y) = \frac{S_{wing}}{c(y)b_{wing}} L_a(y) \quad (6.4)$$

Con $c(y)$ es la cuerda del ala en función de la ordenada (y) y $L_a(y)$ es el coeficiente de sustentación adicional local en cada estación de análisis a lo largo del ala para diversos alargamientos y conicidades [31].

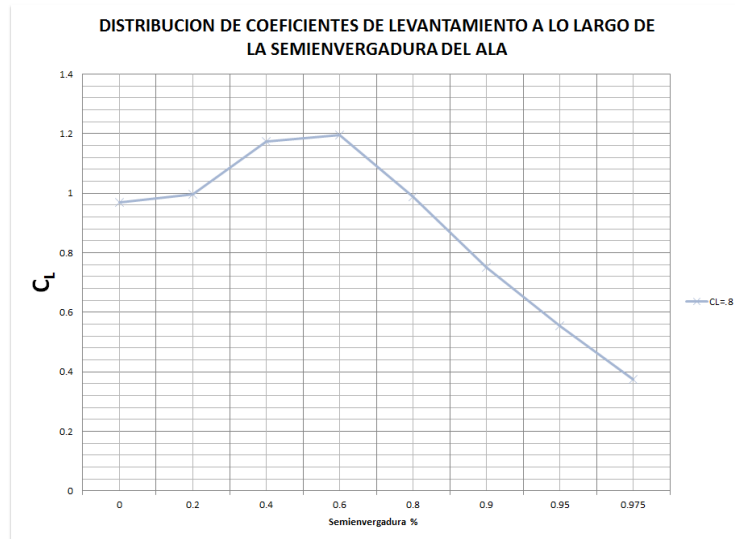


Figura 6.1: Distribución de lavantamientos semi-envergadura para un perfil e423

Estabilidad del control direccional

La estabilidad direccional estudia el caso cuando la trayectoria de vuelo no está en el plano de simetría. Esta estabilidad está definida por la suma de las contribuciones del ala, del fuselaje y de los estabilizadores verticales así como las interferencias entre estos elementos.

La contribución del ala ($C_{n\psi Ala}$) esta dada por:

$$C_{n\psi Ala} = -0,00006(\Lambda)^{1/2}$$

Donde Λ es el flechado del ala que en este caso es igual a cero por lo tanto:

$$C_{n\psi Ala} = 0$$

La contribución de los estabilizadores verticales ($C_{n\psi E.V.}$) está dada por:

$$C_{n\psi E.V.} = -\alpha_V(S_V/S_w)(l_v/b_w)\eta_V + \Delta_2 C_{n\psi}$$

Donde: $S_V = 0,019825m^2$ es la superficie de los estabilizadores verticales; $\eta_V = 0,9$ es la eficiencia de los estabilizadores verticales; $l_v = 0,63m$ es la distancia entre el (cg) del avión y el centro aerodinámico (ca) del estabilizador vertical y $\Delta_2 C_{n\psi} = 0,0001$ es la interferencia del flujo debido a la combinación ala-fuselaje; de lo cual se tiene:

$$C_{n\psi E.V.} = -0,0007906$$

Finalmente sumando las contribuciones anteriores para obtener la estimación final:

$$C_{n\psi avión} = C_{n\psi ala} + C_{n\psi fus} + C_{n\psi E.V.} + \Delta_1 C_{n\psi} + \Delta_2 C_{n\psi}$$

\Rightarrow

$$C_{n\psi avión} = -0,0008906\psi$$

Bibliografía

- [1] R. Lozano, A. Dzul and P. Castillo; “*Modelling and control of Mini-Flying Machines*”; Springer; 2005.
- [2] I. Fantoni, R. Lozano and P. Castillo; “*A simple stabilization algorithm for the PVTOL aircraft*”; 15th Triennial World Congress; Barcelona, Spain; 2002.
- [3] V. Mistler, A. Benallegue and N.K. M’Sirdi; “*Exact linearization and noninteracting of a four rotors helicopter via dynamic feedback*”; 10th IEEE Int. Workshop on Robot and Human Interactive Communication 2001; pp. 586-593
- [4] P. Castillo, A. Dzul and R. Lozano; “*Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft*”; IEEE Trans. on Control Systems Technology; Vol. 12, no.4, pp. 510-516; July 2004.
- [5] P. Castillo, R. Lozano and A. Dzul; “*Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors*”; IEEE Contr. Syst. Mag. pp. 45-55; Dec. 2005.
- [6] J. Escareño, A. Sanchez, O. Garcia and R. Lozano; “*Modeling and global control of the longitudinal dynamics of a coaxial convertible mini-UAV in hover mode*”; J Intell Robot Systems, Springer Science; USA 2008.

- [7] B. Bataillé, J. M. Moschetta, D. Poinso, C. Bérard and A. Piquereau; “*Development of a VTOL mini UAV for multi-tasking missions*”; in International Powered Lift Conference at The Royal Aeronautical Society; London 2008.
- [8] M.A. McVeigh, L. Gray and E. Kisielowski; “*Prediction of span loading of straight-wing/propeller combinations up to stall*”; National Aeronautics and Space Administration; Washington, December 1975.
- [9] J. Escareño, R.H. Stone, A. Sanchez and Rogelio Lozano; “*Modeling and control strategy for the transition of a convertible Tail-sitter UAV*”; in European Control Conference (ECC07); Kos, Greece, 2007.
- [10] A. Maqsood and Tiau Hiong Go; “*Transition flight analysis of an agile unmanned air vehicle*”; 27th International Congress of the Aeronautical Sciences; Nice, France, 2010.
- [11] Daisuke Kubo, Koji Muraoka and Noriaki Okada; “*High angle of attack flight characteristics of a wing-in-propeller-slipstream aircraft*”; 27th International Congress of the Aeronautical Sciences, Nice; France, 2010.
- [12] Daisuke Kubo; “*Study on design and transitional flight of tail-sitting VTOL UAV*”; 25th International Congress of the Aeronautical Sciences; Nice, France, 2006
- [13] Adrian Frank, James S. McGrew, Mario Valenti, Daniel Levine and Jonathan P. How; “*Hover, transition and level flight control design for a single-propeller indoor airplane*”; AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit; South Carolina, USA 2007.

- [14] William E. Green and Paul Y. Oh; “*A MAV that flies like an airplane and hovers like a helicopter*”; IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics; Monterrey, California, USA 2005.
- [15] John W. Roberts, Rick Cory and Russ Tedrake; “*On controllability of fixed-wing perching*”; American Control Conference; St. Louis Mo., USA, 2009.
- [16] H. Stone and K.C. Wong; “*Preliminary design of a tandem-wing tail-sitter UAV using multi-disciplinary design optimization*”; Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, NSW 2006, Australia.
- [17] H. Stone; “Control architecture for a tail-sitter unmanned air vehicle”; IEEE 5th Asian Control Conference; Melbourne Australia, 2004
- [18] P. Castillo, P. García, R. Lozano, P. Albertos; “*Modelado y Estabilización de un Helicóptero con Cuatro Rotores*”; Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI), ISSN 1697-7912, Vol. 4, N^o. 1, 2007 , pags. 41-57
- [19] D. Lara, A. Sanchez, R. Lozano and P. Castillo, “*Real-time embedded control system for VTOL aircrafts: Application to stabilize a quad-rotor helicopter*”, in International Conference on Control Applications, Munich, germany, October 4-6, 2006.
- [20] Escareño J., Salazar-Cruz S. and Lozano R., “*Embedded control of a four-rotor UAV*”, in American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, U.S.A., june 14-16, 2006.
- [21] B. Etkin and L. Duff Reid; “*Dynamics of Flight*”; John Wiley and Sons, Inc.; New York, 1959. ISBN 0-471-03418-5.

- [22] H. Goldstein, (1980); “*Classical Mechanics*”; Addison Wesley Series in Physics, Addison-Wesley, U.S.A., segunda edición.
- [23] R. C. Nelson; “*Flight stability and automatic control*”; McGraw Hill, Second edition, 1998.
- [24] W. Johnson; “*Helicopter theory*”; Dover publications, inc.; New York, 1946.
- [25] R.F. Stengel; “*Flight Dynamics*”; Princeton University Press; U.S.A., 2004.
- [26] J.Escareño, S. Salazar and R. Lozano; “*Modeling and control of a convertible VTOL aircraft*”; in 45th IEEE Conference on Decision & Control; San Diego, CA, USA; 2006.
- [27] Raymer D. P.; “*Aircraft Design: A Conceptual Approach*”; 3ra Ed.; EUA., AIAA, 1999
- [28] Roskam, Jam; “*Airplane Design*”; University of Kansas; Lawrence, Kansas 1985
- [29] V. Santibañez, R. Kelly and A. Loria; “*Control of robot manipulators in joint space*”; Springer, London, 2005.
- [30] A. R. Teel; “*Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls*”; Syst. and Contr. Lett. 18, 165-171, 1992
- [31] Abbott I. H, Doenhoff A. E; “*Theory of wing sections*”; Dover,1958.
- [32] Perkins C. D., Hage, R. E; “*Airplane Performance, Stability and Control*”; John Wiley, 1949.
- [33] Stevens, B.L., Lewis, F.L.; “*Aircraft control and simulation*”; John Wiley, 1992.

- [34] G.R. Flores, J. Escareño, R. Lozano, and S. Salazar; “*Quad-Tilting rotor convertible MAV: Modeling and real-time hover flight control*”; J Intell Robot Syst; Springer Science, pp. 457-471; 2012.
- [35] V. Rosas; “*Mini-Unmanned Aerial Vehicle (Outdoors test) La Raie Manta 4*”; [www.youtube.com](http://www.youtube.com/watch?v=KnkplVIeACE); <http://www.youtube.com/watch?v=KnkplVIeACE>
- [36] V. Rosas; “*Mini-Unmanned Aerial Vehicle (Spatial position test) La Raie Manta 3*”; [www.youtube.com](http://www.youtube.com/watch?v=-oXQENKPhnE); <http://www.youtube.com/watch?v=-oXQENKPhnE>
- [37] V. Rosas; “*Mini-Unmanned Aerial Vehicle (Hover and take-off mode) La Raie Manta 2*”; [www.youtube.com](http://www.youtube.com/watch?v=ERNcmCY2Jr0); <http://www.youtube.com/watch?v=ERNcmCY2Jr0>
- [38] V. Rosas; “*Mini-Unmanned Aerial Vehicle (Hover mode) La Raie Manta 1*”; [www.youtube.com](http://www.youtube.com/watch?v=ZETDG0egkAU); <http://www.youtube.com/watch?v=ZETDG0egkAU>