



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD DISTRITO FEDERAL

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Aplicaciones de la Resonancia Paramétrica en Sistemas  
Mecánicos**

Tesis que presenta

M en C. Josué Javier Téllez Luna

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

En la especialidad de

Control Automático

Director de la tesis: Dr. Joaquín Collado Moctezuma

México, Distrito Federal.

Noviembre, 2013



## Resumen

Este trabajo se da un panorama general de los aspectos más importantes sobre la teoría de los sistemas lineales con coeficientes periódicos y las ecuaciones relacionadas con ellos. Se expone además una breve introducción a las ecuaciones diferenciales parciales, una forma de aproximar sus soluciones, además de algunos métodos que permiten aproximar ecuaciones diferenciales parciales por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias haciendo posible su solución. Se habla de los diagramas de estabilidad paramétrica llamados "Lenguas de Arnold", su forma de obtenerlos y los algoritmos computacionales que se utilizaron en este trabajo.

Se muestran algunos ejemplos de sistemas cuya ecuación involucra coeficientes periódicos, su análisis de estabilidad y la validación de resultados. Los ejemplos mostrados son: 1) Un doble oscilador lineal acoplado que consta de dos masas conectadas por resortes, en el cual, se hace variar periódicamente la elasticidad de uno de los resortes para inducir amortiguamiento al sistema. 2) El Péndulo de Kapitza en dos variantes, primero excitado periódicamente, en el cuál, se utiliza la excitación como medio para estabilizar el punto de equilibrio superior y se hace una caracterización de la región de atracción de dicho punto de equilibrio con respecto a la frecuencia de la excitación; segundo, con una excitación no periódica donde se estudia el comportamiento de fenómenos que no suceden con excitación periódica. 3) El puente de Tacoma, es este ejemplo se genera un diagrama que nos muestra la estabilidad del sistema para diferentes valores de sus parámetros y por último 4) Análisis de la estabilidad de una plataforma petrolera sometida a vibración inducida por el oleaje del mar (que se supone periódica), dicha plataforma, se puede modelar por una ecuación diferencial parcial de cuarto orden con coeficientes periódicos. Al final del trabajo se hace un análisis de los resultados obtenidos, las aportaciones más importantes y el trabajo futuro a realizar.



## **Abstract**

In this work we show a general review of the most important issues of the periodic linear systems theory and the related equations. We present a brief introduction of partial linear equations, one method to obtain approximation of its solutions, and one method to solve the partial differential equation by the use of a related system of ordinary differential equations. We talk about the parametric stability diagrams, so called “Arnold Tongues”, the methods to obtain the diagrams and the computational algorithms used in this work to calculate it. We show some examples of systems whose equation involves periodic coefficients, and their stability analysis. The examples are: 1) A linear double coupled oscillator consisting of two masses connected by springs, in which, the elasticity of a spring is periodically varied to induce damping to the system. 2) The Kapitza pendulum in two variants, first periodically excited, in which, excitation is used to stabilize the upper equilibrium point and we make a characterization of the region of attraction of the upper equilibrium point with respect to the excitation frequency, and second, with a non-periodic excitation in which, we study the phenomena that not occur in the periodic excitation case. 3) The Tacoma bridge, is this example we apply the Galerkin Method to the system equations and generates a diagram that shows the stability of the system for different values of their parameters, and lastly 4) Analysis of the stability of an oil platform considering vibration induced by ocean waves (periodic supposed), the platform can be modeled by a partial differential equation of the fourth order with periodic coefficients. At the end of the work we make an analysis of the obtained results, the most important contributions and future work to be performed.



# Índice

0.1	Introducción . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1	Sistemas Lineales con coeficientes periódicos . . . . .	5
1.2	Teoría de Floquet . . . . .	5
1.2.1	Propiedades de los sistemas periódicos . . . . .	5
1.3	La matriz de Monodromía . . . . .	6
1.4	La ecuación de Hill . . . . .	9
1.4.1	La ecuación de Hill con disipación . . . . .	9
1.5	La ecuación de Mathieu . . . . .	9
1.5.1	La ecuación de Mathieu con disipación . . . . .	10
1.5.2	La ecuación de Mathieu sometida a una excitación de frecuencia variable . . . . .	11
1.5.3	Estabilidad de la ecuación de Mathieu . . . . .	11
1.5.4	La ecuación de Meissner . . . . .	12
1.6	Método de perturbaciones . . . . .	12
1.7	Introducción a las Ecuaciones diferenciales parciales . . . . .	14
1.7.1	Definición de Ecuación Diferencial Parcial. . . . .	15
1.8	Métodos de aproximación de soluciones de PDE . . . . .	16
1.8.1	Método de solución para ecuaciones con variables separables . . . . .	16
1.8.2	El método de Galerkin . . . . .	16
1.9	Control Vibracional . . . . .	20
1.9.1	Introducción . . . . .	20
1.9.2	Definición del Control Vibracional . . . . .	20
1.9.3	Teoría de control Vibracional . . . . .	20
1.10	Control Vibracional de un sistema descrito por una ecuación diferencial de orden $n$ . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Diagramas de estabilidad de la ecuación de Hill</b>	<b>25</b>
2.1	Introducción . . . . .	25
2.1.1	Lenguas de Arnold . . . . .	25
2.1.2	Diagramas típicos para la ecuación de Mathieu . . . . .	26
2.2	Algoritmos para el dibujo de los diagramas de estabilidad . . . . .	27

---

2.2.1	Método de Determinantes infinitos . . . . .	28
2.2.2	Método de cálculo numérico punto por punto . . . . .	30
2.2.3	Método por discretización . . . . .	33
2.2.4	Método de cálculo por seguimiento de frontera. . . . .	34
<b>3</b>	<b>Análisis de sistemas excitados periódicamente</b>	<b>39</b>
3.1	El doble oscilador acoplado . . . . .	39
3.1.1	El modelo matemático . . . . .	39
3.1.2	Respuesta temporal del sistema . . . . .	41
3.1.3	Análisis de estabilidad del sistema en presencia de excitación paramétrica . . . . .	41
3.1.4	Inducción de amortiguamiento en el doble oscilador acoplado	42
3.1.5	Conclusión . . . . .	46
3.2	El Péndulo de Kapitza excitado periódicamente . . . . .	47
3.2.1	Descripción del problema . . . . .	47
3.2.2	El modelo matemático . . . . .	47
3.2.3	Análisis de estabilidad . . . . .	48
3.2.4	Calculando las curvas de transición por el método de per- turbaciones . . . . .	50
3.3	Prototipo del Péndulo de Kapitza . . . . .	53
3.3.1	Comparación de resultados teóricos y prácticos obtenidos del prototipo . . . . .	55
3.3.2	Conclusiones . . . . .	57
3.4	El Péndulo de Kapitza con excitación No periódica . . . . .	57
3.4.1	El modelo matemático . . . . .	58
3.4.2	Análisis de estabilidad por medio del método de Perturba- ciones . . . . .	62
3.4.3	Prototipo del Péndulo de Kapitza excitado de forma No Periódica . . . . .	64
3.4.4	Diagrama de estabilidad experimental . . . . .	65
3.4.5	Conclusiones . . . . .	66
3.5	El Puente de Tacoma . . . . .	67
3.5.1	Descripción del problema . . . . .	67
3.5.2	El modelo matemático . . . . .	67
3.5.3	Aplicación del Método de Galerkin a la PDE . . . . .	69
3.5.4	Análisis de estabilidad . . . . .	71
3.5.5	Conclusiones . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Modelado y Análisis de una plataforma petrolera</b>	<b>73</b>
4.1	Análisis de una membrana rectangular . . . . .	73
4.1.1	El modelo matemático . . . . .	73
4.1.2	Condiciones iniciales y de frontera . . . . .	75



---

4.1.3	Excitación paramétrica de la membrana en la variable temporal . . . . .	78
4.1.4	Excitación paramétrica de la membrana en las variables espaciales . . . . .	79
4.2	Análisis de la plataforma Petrolera . . . . .	85
4.2.1	El modelo matemático . . . . .	85
4.2.2	Condiciones iniciales y de frontera . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Conclusiones Generales, Aportaciones y trabajo futuro</b>	<b>89</b>
5.1	Observaciones generales y Aportaciones de este trabajo . . . . .	89
5.2	Trabajo por realizar . . . . .	91



---

## 0.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos han sido estudiadas extensivamente debido a que tienen muchas aplicaciones en los campos de la física y la ingeniería [44], por ejemplo en el estudio de los puentes de suspensión [45], discos giratorios, pendulos elásticos, el péndulo de Kapitza [33], vibraciones en ejes de rotación [13], propagación de ondas acústicas y electromagnéticas [3] o en un sistema de una grúa montada sobre un barco bajo la acción de las olas del mar [31] por citar algunos.

Las bases de este tipo de ecuaciones han sido establecidas por muchos autores incluidos Floquet [11], Hill [17], Mathieu [24], Faraday [10], entre otros. Un estudio profundo y muy detallado se encuentra en los trabajos de Yakubovich y Starzhinskii [45],[46].

Si el valor de un parámetro de un sistema varía periódicamente con el tiempo, un punto de equilibrio del sistema puede ser inestable, aún si dicho punto era estable para todos los valores fijos en los que varía ese parámetro [1], en este caso la estabilidad del sistema puede calcularse utilizando la teoría de Floquet, la cual, establece que si los valores característicos de la matriz de monodromía asociada al sistema se encuentran dentro del círculo unitario, las soluciones del sistema serán funciones acotadas y si alguno de ellos tiene módulo mayor a uno o existen valores característicos repetidos sobre la frontera del círculo la solución del sistema será inestable. Este criterio de estabilidad es equivalente al de los sistemas discretos.

En un sistema físico el incremento en la solución causa que el modelo linealizado no sea válido y los términos no lineales generan una solución acotada. Sin embargo la inestabilidad sigue presente.

Este trabajo trata de la modelación, análisis y control de algunos ejemplos de sistemas que involucran un término de excitación periódica en alguno de los parámetros.

En el primer capítulo se da un panorama general sobre la teoría de los sistemas periódicos y ecuaciones relacionadas con ellos, se presenta brevemente la teoría de Floquet, teoremas importantes sobre la estabilidad de dichos sistemas y formas de equivalencia y conversión de las ecuaciones que se utilizan durante todos los demás capítulos. Además se da una breve introducción a las ecuaciones diferenciales parciales y algunos métodos de aproximación de sus soluciones en particular, el Método de Galerkin. Y se presenta el método de Perturbaciones.

En el capítulo dos se habla de los diagramas de estabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes periódicos, su forma de obtenerlos, los principales algoritmos computacionales que aparecen en la literatura y los que se han utilizado en este trabajo, se presenta además un nuevo método computacional para obtener dichos diagramas que se basa únicamente en el seguimiento de la frontera de estabilidad y que consume pocos recursos computacionales.

---

En el capítulo tres, se muestran algunos ejemplos de sistemas cuya ecuación involucra coeficientes periódicos y que permiten analizar aspectos importantes, su análisis de estabilidad y la validación de resultados, los ejemplos mostrados son:

Primeramente un sistema de doble oscilador lineal acoplado que consta de dos masas conectadas por resortes, el cual, es un sistema modelado considerando parámetros concentrados y por tanto se obtienen ecuaciones diferenciales ordinarias, además se trabaja en la región lineal de todos los elementos [2]. Aplicando la teoría de Floquet, se hace un análisis de estabilidad paramétrica del sistema considerando la variación periódica de la rigidez de uno de los resortes y luego se induce una excitación paramétrica para aumentar el amortiguamiento del sistema y por lo tanto generar una atenuación en las oscilaciones de la respuesta de dicho sistema.

Segundo, el Péndulo de Kapitza en dos variantes: a) El péndulo sometido a una excitación periódica armónica, obteniendo el modelo matemático y el análisis de estabilidad, este sistema es modelado por una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden aunque puede aproximarse por una ecuación de Mathieu [33], si la excitación es periódica puede aplicarse la teoría de Floquet para obtener el diagrama de estabilidad paramétrica, o usando el método de perturbaciones calcular de manera aproximada las curvas de transición de las regiones estable e inestable del sistema. b) Se aplica una excitación No-periódica al punto de suspensión del péndulo, se observa de inicio el cambio de comportamiento del péndulo y se caracteriza de manera aproximada las curvas de transición por medio del método de perturbaciones ya que para excitaciones no periódicas no es posible utilizar la teoría de Floquet.

Para ilustrar mejor el trabajo sobre el péndulo, se desarrolló un prototipo físico en el que se han desarrollado algunos experimentos sobre su comportamiento y se han caracterizado algunos puntos en las regiones estable e inestable, obteniendo experimentalmente una parte de la frontera de estabilidad del sistema. Luego se ha agregado una segunda excitación al prototipo con el fin de obtener una excitación no periódica y se han repetido los experimentos para poder comparar los resultados de las dos excitaciones además de los resultados teóricos obtenidos.

Finalmente se presenta el ejemplo del Puente de Tacoma sometido a excitación paramétrica, dicho sistema es importante pues puede modelarse por medio de ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden, una para la dinámica de flexión y otra para la dinámica torsional [45], dichas ecuaciones se reduce a un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden por medio del método de Galerkin, donde  $n$  es el grado de aproximación que se tome (número de modos naturales de oscilación), en este ejemplo se muestra como, por medio de un método de aproximación, se analiza la estabilidad de una ecuación diferencial parcial con coeficientes periódicos.

En el capítulo cuatro, se muestra un análisis, comenzando por una membrana isotrópica modelada por la ecuación de onda de dos dimensiones y después se

---

analiza la ecuación diferencial parcial de una plataforma que es de cuarto orden, considerando tanto las condiciones iniciales, como las condiciones de frontera, aproximando su solución por medio del método de Galerkin y caracterizando sus regiones de estabilidad paramétrica.

En el capítulo cinco se hace un resumen de resultados, el trabajo futuro y las aportaciones más importantes de este trabajo.

---

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se presentan los principales teoremas para sistemas modelados por ecuaciones lineales con coeficientes periódicos, un breve análisis de las ecuaciones más típicas (Mathieu y Hill), se presenta un resumen sobre la clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales, el método de Galerkin para aproximación de la solución de ecuaciones diferenciales y el método de perturbaciones que se utilizará para ecuaciones cuyos coeficientes no necesariamente son periódicos.

### 1.1 Sistemas Lineales con coeficientes periódicos

Los sistemas lineales periódicos son un tipo de sistemas descritos por la ecuación

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad -\infty < t < \infty \quad (1.1)$$

Donde  $A(t)$  es una matriz con funciones periódicas como elementos, las cuales, tiene periodo mínimo  $T$  esto es:

$$A(t + T) = A(t) \quad (1.2)$$

### 1.2 Teoría de Floquet

#### 1.2.1 Propiedades de los sistemas periódicos

La solución de un sistema periódico no necesariamente es periódica

La solución de (1.1) es :

$$x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0)$$

donde  $\phi(t, t_0)$  es la matriz de transición de estados del sistema [18].

En general  $\phi(t, t_0)$  no se puede calcular analíticamente ver [18], [45]:

Algunas propiedades de  $\phi(t, t_0)$ : [18],[8]

---

$$\dot{\phi}(t, t_0) = A(t)\phi(t, t_0)$$

$$\phi(t_0, t_0) = I$$

$I$  es la matriz identidad.

La periodicidad del sistema implica que:

$$\phi(t + T, t_0 + T) = \phi(t, t_0)$$

### 1.3 La matriz de Monodromía

#### Definición

Dado un sistema como (1.1), la matriz de monodromía está definida en [18] de la siguiente manera:

$$M_{t_0} := \phi(t_0 + T, t_0) \tag{1.3}$$

donde  $\phi(t, t_0)$  es la matriz de transición de estados del sistema  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $A(t)$  es periódica con periodo mínimo  $T$ .

#### Teorema 1 [18]

Los eigenvalores de la matriz de monodromía (1.3) son independientes de  $t_0$ .

$$\sigma(M_{t_0}) = \sigma(M_{t_1}), \forall t_0, t_1 \in [0, T],$$

donde  $\sigma(X)$  representa el espectro de la matriz  $X$ .

La estabilidad asintótica de un sistema lineal periódico es equivalente a la estabilidad asintótica de un sistema lineal invariante en el tiempo bajo un cambio de coordenadas periódico como la realización desarrollada por Lyapunov en [22]. Este cambio de coordenadas depende de la solución del sistema periódico, la cual, casi siempre es imposible calcular analíticamente.

Ahora se presentan algunos teoremas sobre sistemas periódicos descritos por la ecuación (1.1).

#### Teorema 2 (Floquet) [18], [6]

Un sistema como (1.1), con  $A(t + T) = A(t)$  tiene al menos una solución no idénticamente cero, tal que

$$x(t + T) = \lambda x(t), \forall t, \lambda \neq 0$$



---

Sea un sistema homogéneo como (1.1), entonces existe una matriz periódica e invertible  $P(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y una matriz constante  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que

$$\phi(t, t_0) = P^{-1}(t)e^{R(t-t_0)}P(t_0) \quad (1.4)$$

Ver [44], [45]. Además  $P(t) = P(t+T)$  es periódica del mismo periodo que el sistema original.

Si (1.4) es evaluado durante un periodo de tiempo:

$$\phi(t_0 + T, t_0) = P^{-1}(t_0)e^{RT}P(t_0)$$

La última ecuación muestra que la matriz de monodromía es similar a  $e^{RT}$ .

Asumiendo  $t_0 = 0$ , entonces para cualquier  $t \geq 0$ ,  $t$  puede escribirse como:  $t = KT + \tau$ ,  $K \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\tau \in [0, T)$ , y

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t, 0)x(0) \\ &= \phi(KT + \tau, 0)x(0) \\ &= \phi(KT + \tau, \tau)\phi(\tau, 0)x(0) \\ &= \phi^K(KT + \tau, \tau)\phi(\tau, 0)x(0) \\ &= M_0^K \phi(\tau, 0)x(0) \end{aligned}$$

El resultado anterior muestra que la estabilidad del sistema depende sólo de los valores característicos de la matriz de monodromía.

**Teorema 3 (Floquet-Lyapunov) [19]**

El sistema periódico (1.1) es:

Asintóticamente estable si y sólo si:

$$\sigma(M) \subset \overset{\circ}{D}_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}. \quad (1.5)$$

Estable si:

$$\sigma(M) \subset \overline{D}_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

y  $\lambda_i \in \sigma(M) : |\lambda_i| = 1$ ,  $\lambda_i$  es una raíz simple del polinomio mínimo  $m_M(\lambda)$ .

Inestable si y sólo si

$$\exists \lambda_i \in \sigma(M) : |\lambda_i| > 1$$

---

o si  $|\lambda_i| = 1$  es una raíz múltiple de  $m_M(\lambda)$ .

Este teorema establece las condiciones necesarias y suficientes sobre la estabilidad del sistema usando los valores característicos de la matriz de monodromía.

En la mayoría de los casos no es posible calcular la matriz de monodromía de manera analítica. Por lo tanto es necesario obtener una solución numérica del sistema (1.1) integrando numéricamente entre  $[0, T]$  usando los vectores de condiciones iniciales:  $[1 \ 0 \ \dots \ 0]^T, [0 \ 1 \ \dots \ 0]^T$ , para sistemas con dimensión en variables de estado igual a 2.

Si se trabaja con sistemas de dimensión mayor que 2, será necesario resolver numéricamente el sistema para cada uno de los vectores de condiciones iniciales de dimensión  $n$ , siendo  $n$  la dimensión correspondiente.

$$e_1, e_2, \dots, e_n \text{ donde } e_i^T = [0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (1.6)$$

con el 1 ubicado en la  $i$  -ésima posición

Para calcular la matriz de monodromía de un sistema como (1.1) se procede de la siguiente manera:

Primero se evaluará numéricamente la solución del sistema utilizando el vector de condiciones iniciales representado por la primer columna de la matriz identidad de tamaño adecuado en un periodo mínimo  $T$ , el vector solución obtenido será la primer columna de la matriz de monodromía, se repite el procedimiento con cada uno de los vectores de condiciones iniciales de acuerdo al orden del sistema.

#### **Teorema 4** [18]

Sea  $[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)]$  una matriz cuyas columnas son soluciones linealmente independientes del sistema  $n$ -dimensional  $\dot{x} = A(t)x$ .

Entonces

$$W(t) = \det[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)]$$

$W(t)$  es llamado el Wronskiano del conjunto de soluciones.

Para todo  $t_0$ , el Wronskiano de un conjunto de soluciones linealmente independientes de  $\dot{x} = A(t)x$  satisface [Jacobi-Liouville]

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{tr}\{A(s)\} ds \right) \quad (1.7)$$

donde  $\text{tr}\{A(s)\}$  es la traza de  $A(s)$  (suma de los elementos de la diagonal principal).

El resultado anterior se puede particularizar para el caso periódico.

#### **Teorema 5** [18]

---

Sea el sistema  $\dot{x} = A(t)x$ , donde  $A(t)$  tiene periodo mínimo  $T$ ,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$  son los valores característicos de la matriz de monodromía del sistema entonces:

$$\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \dots \cdot \mu_n = \exp\left(\int_0^T \text{tr}\{A(s)\} ds\right) \quad (1.8)$$

los valores característicos repetidos se cuentan de acuerdo a su multiplicidad.

## 1.4 La ecuación de Hill

La ecuación de Hill [23] es una clase de ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes reales periódicos

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cdot p(t))x = 0; \quad p(t+T) = p(t) \quad (1.9)$$

La ecuación de Hill puede ser representada en la forma (1.1), haciendo

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta p(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

### 1.4.1 La ecuación de Hill con disipación

La siguiente es la ecuación de Hill con disipación, ecuación (1.11) y se puede transformar a su equivalente ecuación de Hill dada.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \quad (1.11)$$

Se hace el cambio de variable  $y(t) = e^{-\frac{1}{2} \int p(t) dt} \cdot u(t)$ , con lo cual, obtenemos:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left[ q(t) - \frac{1}{2} \frac{dp(t)}{dt} - \frac{1}{4} p^2(t) \right] u(t) = 0 \quad (1.12)$$

Es necesario en este punto hacer énfasis en que se requiere que el coeficiente  $p(t)$  debe ser diferenciable para poder llevar a cabo la transformación [16].

## 1.5 La ecuación de Mathieu

La ecuación de Mathieu es un caso particular de la ecuación de Hill (1.9) donde  $p(t) = \cos(t)$  y es la siguiente:

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t) x = 0 \quad (1.13)$$

también puede expresarse como

$$\dot{x} = A(t) \cdot x \quad (1.14)$$

con

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta \cos t & 0 \end{bmatrix}$$

$A(t)$  es una matriz cuyos coeficientes son funciones periódicas con periodo mínimo  $2\pi$ . La estabilidad de la solución está en función de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

### 1.5.1 La ecuación de Mathieu con disipación

Ahora se considera el caso de la ecuación de Mathieu con disipación

$$\ddot{x} + k\dot{x} + (\alpha + \beta \cos t) x = 0 \quad (1.15)$$

Se trata de reducir esta ecuación a una ecuación de Mathieu como (1.13), para ello se realiza el siguiente cambio de variable

$$x(t) = u(t)v(t)$$

se sustituye en la ecuación y reacomodando términos obtenemos

$$\ddot{u}v + \dot{u}(2\dot{v} + kv) + \left[ \ddot{v} + k\dot{v} + (\alpha + \beta \cos t)v \right] u = 0$$

se quiere reducir el término de primer orden de modo que

$$2\dot{v} + kv = 0$$

resolviendo

$$v(t) = e^{-\frac{k}{2}t}$$

se sustituye en la ecuación (1.15)

$$\ddot{u}e^{-\frac{k}{2}t} + \left[ \left(\frac{k}{2}\right)^2 e^{-\frac{k}{2}t} - \left(\frac{k^2}{2}\right) e^{-\frac{k}{2}t} + (\alpha + \beta \cos t) e^{-\frac{k}{2}t} \right] u = 0$$

$$e^{-\frac{k}{2}t} \left[ \ddot{u} + \left[ \left(\alpha - \frac{k^2}{4}\right) + \beta \cos t \right] u \right] = 0$$

dividiendo entre  $e^{-\frac{k}{2}t}$

obtenemos

$$\ddot{u} + \left[ \left(\alpha - \frac{k^2}{4}\right) + \beta \cos t \right] u = 0$$

---

la cual, es una ecuación de Mathieu sin disipación, sólo que ahora los coeficientes están modificados por el término disipativo.

### 1.5.2 La ecuación de Mathieu sometida a una excitación de frecuencia variable

Sea una ecuación con coeficientes periódicos del tipo de Mathieu como:

$$\ddot{x} + (\alpha_0 + \beta w^2 \cos(wt)) x = 0 \quad (1.16)$$

en donde  $\alpha_0$  es fijo y los parámetros de la excitación que varían son  $(\beta, w)$  podemos hacer un cambio de variable independiente como:

$$\tau = wt \quad (1.17)$$

sustituyendo (1.17) en (1.16) obtenemos

$$x'' + \left( \frac{\alpha}{w^2} + \beta \cos(\tau) \right) x = 0 \quad (1.18)$$

donde  $x''$  representa la  $\frac{d^2x}{d\tau^2}$  en la cual, la variación de los parámetros no implica la variación de la frecuencia de la función periódica de excitación.

### 1.5.3 Estabilidad de la ecuación de Mathieu

La estabilidad de la solución de la ecuación de Mathieu depende de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

Sean  $\mu_1$  y  $\mu_2$  los valores característicos de  $M = \phi(T, 0)$  y debido a (1.8) se tiene:

$$\text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta \cos t & 0 \end{bmatrix} = 0$$

y

$$\mu_1 \mu_2 = 1$$

y la ecuación característica es:

$$\mu^2 - D(\alpha, \beta)\mu + 1 = 0 \quad (1.19)$$

A pesar que  $D$  no se especifica explícitamente podemos hacer las siguientes deducciones acerca de la estabilidad del sistema.

Usando el teorema 3 se tiene:

- 
- a)  $|D| < 2 \Leftrightarrow |\mu_i| = 1, \mu_1 \neq \mu_2,$

entonces el sistema es estable

- b)  $|D| = 2$

$$b_1) \quad D = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = 1$$

entonces existe una solución periódica de periodo  $2\pi$ , la otra solución es en general inestable

$$b_2) \quad D = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = -1$$

entonces existe una solución periódica de periodo  $4\pi$ , la otra solución es en general inestable

- c)  $|D| > 2 \Leftrightarrow \exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ con } \mu_1 < 1, \mu_2 > 1$

entonces el sistema es inestable

- No se ha especificado la función  $D(\alpha, \beta)$  explícitamente pero se conocen las condiciones para que las curvas de soluciones periódicas con periodo  $2\pi$  y  $4\pi$  ocurran. Estas curvas son las fronteras entre las regiones estable e inestable y son llamadas "Curvas de transición". Las curvas de transición se encuentran cuando se cumplen con la condición de que  $D(\alpha, \beta) = \pm 2$ .

### 1.5.4 La ecuación de Meissner

La ecuación de Meissner es una ecuación de Hill (1.9) en donde  $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$ :

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cdot \text{sign}(\cos t))x = 0 \tag{1.20}$$

Esta ecuación es de los casos excepcionales de la ecuación de Hill pues se puede integrar analíticamente. La solución aparece explícitamente en [[34], pp 276-277].

## 1.6 Método de perturbaciones

Muchos problemas físicos tienen ciertas características esenciales que hacen muy difícil o incluso imposible el cálculo de su solución analítica exacta por ejemplo no linealidades, coeficientes variables, formas complejas de frontera, no linealidades en las condiciones de frontera o en algunos casos fronteras desconocidas, si queremos obtener información acerca de la solución de estas ecuaciones se deberán implementar aproximaciones, soluciones numéricas o una combinación de ambos.

En el método de perturbaciones, la solución es aproximada por los primeros términos de una expansión en series de potencias de un parámetro pequeño, usualmente no más de dos términos. Dicho parámetro puede aparecer naturalmente

---

en la ecuación, o puede introducirse de manera artificial por conveniencia. Dicha expansión será llamada "Perturbación de parámetros". [30]

Algunos problemas físicos que incluyen a la función  $u(x, \varepsilon)$  pueden representarse matemáticamente por la ecuación diferencial  $L(u, x, \varepsilon) = 0$  y su condición de frontera  $B(u, \varepsilon) = 0$ , donde  $x$  es la variable independiente escalar o vector, y  $\varepsilon$  es un parámetro. En general, estos problemas no pueden resolverse de manera exacta. Sin embargo, existe un  $\varepsilon = \varepsilon_0$  ( $\varepsilon$  puede ser escalado de modo que  $\varepsilon_0 = 0$ ) para el cual, el problema anterior puede resolverse exactamente o más fácilmente. Se busca encontrar una solución para un  $\varepsilon$  pequeño, en potencias de  $\varepsilon$  esto es:

$$u(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (1.21)$$

donde  $u_n$  es independiente de  $\varepsilon$  y  $u_0(x)$  es la solución del problema para  $\varepsilon = 0$ .

Se sustituye la ecuación (1.21) en  $L(u, x, \varepsilon) = 0$  con  $B(u, \varepsilon) = 0$ , se desarrolla en términos del parámetro  $\varepsilon$  y se agrupan coeficientes para cada potencia de  $\varepsilon$ . Como estas ecuaciones deberán satisfacerse para todos los valores de  $\varepsilon$ , cada coeficiente deberá desvanecerse debido a que en la secuencia los coeficientes de  $\varepsilon$  son linealmente independientes. Se obtendrán usualmente ecuaciones simples que gobiernan el comportamiento de cada  $u_n$ , las cuales serán resueltas de manera sucesiva.

Para mostrar la aplicación del método de perturbaciones, se tomará la siguiente ecuación

$$u = 1 + \varepsilon u^3 \quad (1.22)$$

Si  $\varepsilon = 0$ ,  $u = 1$ .

para  $\varepsilon$  pequeño pero diferente de cero, sea:

$$u = 1 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots \quad (1.23)$$

sustituyendo (1.23) en (1.22) se tiene

$$1 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots = 1 + \varepsilon (1 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots)^3$$

desarrollamos y reescribimos

$$\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots = \varepsilon (1 + 3\varepsilon u_1 + 3\varepsilon^2 (u_2 + u_1^2) + \dots)$$

agrupando por potencias de  $\varepsilon$

$$\varepsilon(u_1 - 1) + \varepsilon^2(u_2 - 3u_1) + \varepsilon^3(u_3 - 3u_2 - 3u_1^2) + \dots = 0$$

Puesto que la ecuación es una identidad en  $\varepsilon$ , cada coeficiente de  $\varepsilon$  se desvanece independientemente con lo cual:

---

$$u_1 - 1 = 0 \tag{1.24}$$

$$u_2 - 3u_1 = 0 \tag{1.25}$$

$$u_3 - 3u_2 - 3u_1^2 = 0 \tag{1.26}$$

La solución de (1.24) es:

$$u_1 = 1$$

La solución de (1.25):

$$u_2 = 3u_1 = 3$$

y la solución de (1.26):

$$u_3 = 3u_2 + 3u_1^2 = 12$$

con lo cual la solución será:

$$u = 1 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3 + \dots$$

que es una aproximación de tercer orden de la solución puesto que faltan los términos para potencias de  $\varepsilon$  mayores a 3.

## 1.7 Introducción a las Ecuaciones diferenciales parciales

Dado que las ecuaciones relacionadas con este trabajo son ecuaciones diferenciales parciales, se aborda brevemente su tratamiento [[15],[12]].

Las ecuaciones diferenciales parciales (PDE) sirven para modelar varios problemas físicos y geométricos, se obtienen cuando las funciones desconocidas (las soluciones) dependen de dos o más variables independientes. Es justo decir que únicamente los problemas más simples pueden modelarse a través de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), la mayoría de los problemas en dinámica, elasticidad, transferencia de calor, teoría electromagnética y mecánica cuántica requieren PDE. El rango de aplicaciones de las PDE es enorme en comparación con las ODE [20].

A continuación se mencionan algunas PDE relacionadas con problemas físicos y se consideran algunos métodos para resolver problemas con condiciones iniciales y valores en la frontera. Los métodos utilizados para obtener las soluciones de la ecuación deberán satisfacer las condiciones dadas por el problema físico.



---

### 1.7.1 Definición de Ecuación Diferencial Parcial.

Una ecuación diferencial parcial (PDE) es una ecuación que incluye una o más derivadas parciales de una función desconocida, a la que se llamará  $u$ , que depende de dos o más variables independientes (frecuentemente el tiempo  $t$  y una o más variables espaciales). El orden de la derivada más alta es llamado el orden de la PDE.

Se dirá que la PDE es homogénea si todos sus términos contienen a la función desconocida  $u$ . [20]

Las PDE de segundo orden más utilizadas son:

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Ecuación de onda de una dimensión
$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Ecuación de calor en una dimensión
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	Ecuación de Laplace en dos dimensiones
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$	Ecuación de Poisson en dos dimensiones
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$	Ecuación de onda en dos dimensiones
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	Ecuación de Laplace en tres dimensiones

Donde  $c$  es una constante positiva,  $t$  es el tiempo,  $x, y, z$  son las coordenadas cartesianas y dimensión es el número de dichas coordenadas en la ecuación.

Una solución en alguna región  $R$  del espacio de las variables independientes espaciales de una PDE es una función que contiene todas las derivadas parciales que aparecen en la PDE en algún dominio contenido en  $R$ . Se requiere que la función sea continua sobre la frontera de  $R$  y que sus derivadas se encuentren definidas en el interior de  $R$ , es decir, satisface a la PDE en el interior de  $R$ .

En general una PDE puede tener muchas soluciones enteramente diferentes unas de otras. Una solución única para una PDE que corresponde a un problema físico será obtenida por medio del uso de condiciones adicionales del problema. Estas condiciones de la solución pueden ser valores de la frontera de la región  $R$  (condiciones de frontera), o cuando el tiempo  $t$  es una de las variables o alguna de sus derivadas, se pueden prescribir condiciones iniciales.

Al igual que en las ODE, el principio de superposición también es aplicable para las PDE lineales y homogéneas [20].

---

## 1.8 Métodos de aproximación de soluciones de PDE

### 1.8.1 Método de solución para ecuaciones con variables separables

En general no es posible calcular de manera analítica la solución de las PDE, sólo se podrá en algunos casos cuando la PDE es lineal y homogénea, si es así, se puede utilizar el método de variables separables para calcular la solución. Para lo cual se deberán seguir tres pasos.

- Paso 1: Proponer la solución como una función separable, esto es, como producto de dos funciones, una función del tiempo y otra en función de las variables espaciales

$$u(t, x) = h(t) \cdot g(x)$$

Haciendo esto, se puede obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), es decir, cada ecuación dependerá de una sola variable independiente.

- Paso 2: Determinar las soluciones de las ODE obtenidas en el paso anterior de modo que satisfagan las condiciones de frontera.
- Paso 3: Finalmente, utilizando Series de Fourier, componer una solución general de la PDE, que satisfaga tanto las condiciones iniciales como las condiciones de frontera.

En cualquier otro caso, se puede estimar la solución casi únicamente de forma numérica mediante algún método de aproximación.

### 1.8.2 El método de Galerkin

El método de Galerkin [[14],[41]] calcula la mejor aproximación a la solución real de una ODE o PDE (en general una función que pertenece a un espacio vectorial de dimensión infinita) en un subespacio de dimensión finita. El método de Galerkin es una aplicación del teorema de la proyección en espacios de Hilbert [14].

El problema a resolver es el siguiente: dado un vector  $u$  en un espacio de Hilbert  $V$  con producto interior,  $u \in V$  y sea  $W$  un subespacio de dimensión finita, encontrar la mejor aproximación  $w$  al vector  $u$  en  $W$  en el sentido que  $\|u - w\|$  es lo más pequeño posible, donde  $\|\cdot\|$  es la norma inducida por el producto interior [14].

---

## Ortogonalidad

Sea  $V$  un espacio de Hilbert con producto interior  $(\cdot, \cdot)$ ,  $u, v$  son vectores en  $V$  que satisfacen que  $(u, v) = 0$ , se dice entonces que  $u$  y  $v$  son ortogonales, donde  $(u, v)$  representa el producto interior de  $u$  y  $v$ .

### Teorema 6 (De la proyección) [14]

Suponga  $V$  un espacio vectorial con producto interno  $(\cdot, \cdot)$  y  $W$  un subespacio de dimensión finita de  $V$ , entonces  $\forall u \in W$ ,

- $\exists! w_0 \in W$  que satisface

$$\|u - w_0\| < \|u - z\| \quad \forall z \in W, \quad z \neq w_0$$

Más aún  $u - w_0 \perp W$ , i.e.  $\forall w \in W : (u - w_0, w) \equiv 0$ .

- Un vector  $w_0$  es la mejor aproximación a  $u$  en  $W$  si y sólo si satisface la condición de ortogonalidad

$$w_0 \in W, (u - w_0, z) = 0, \forall z \in W \tag{1.27}$$

Si  $W$  es un espacio de dimensión finita, su base se puede escribir como  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ,  $\forall w \in W$ , la siguiente representación es única

$$w = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$$

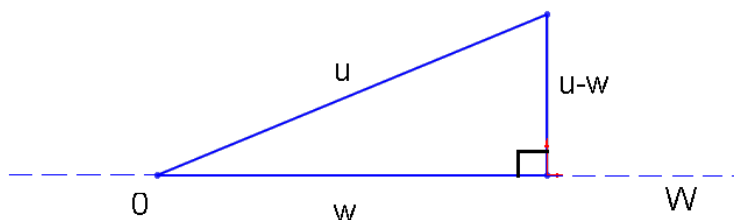


Figura 1-1. Diagrama del método de la proyección

Si  $w$  satisface la condición de ortogonalidad, entonces tomando  $z = w_j$  en la ecuación (1.27) se tiene:

---


$$\begin{aligned} \left( u - \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j, w_i \right) &= 0, i = 1, 2, \dots, n \\ \Rightarrow (u, w_i) - \sum_{j=1}^n \alpha_j (w_j, w_i) &= 0, i = 1, 2, \dots, n \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j (w_j, w_i) &= (u, w_i), i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Si escogemos  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  un conjunto ortonormal, es decir:

$$i) w_i \perp w_j \quad \forall i \neq j \quad \text{ó} \quad (w_i, w_j) = 0 \quad \forall i \neq j;$$

$$ii) (w_i, w_i) = 1;$$

entonces

$$\alpha_j = (u, w_j), j = 1, 2, \dots, n$$

$$w = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$$

### Aproximación de la solución de ecuaciones diferenciales mediante el uso de métodos de residuo ponderado

Sea la siguiente ecuación diferencial con condiciones en la frontera definida sobre el intervalo  $[a, b]$  (Ver [25]).

$$D\{y(x), x\} = 0 \tag{1.28}$$

donde  $D$  representa un operador diferencial.

Se considera primero, que la solución  $y(x)$  de la ecuación diferencial pertenece a un espacio vectorial de dimensión infinita  $V$ . El objetivo es aproximar dicha solución de la mejor forma posible utilizando una función en un subespacio de dimensión finita  $W \subset V, W \in \mathbb{R}^n$

El primer paso de los métodos de residuo ponderado es proponer una solución de prueba con coeficientes constantes desconocidos que se determinarán después.

La función de prueba debe ser continua y aplicar sobre todo el dominio, se escoge de modo que satisfaga las condiciones de frontera de la solución.

---

En general la precisión de la solución depende de la elección de la función de prueba.

La solución de prueba tiene la forma

$$y^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$$

Donde los  $w_j$  son funciones de la base de  $W$  y  $\alpha_j$  son coeficientes por determinar.

Una vez que se escoge la función de prueba se calcula el residuo sustituyendo dicha función en la ecuación diferencial.

$$R(x) = D\{y^*(x), x\}$$

$R(x)$  es el residuo que se obtiene al sustituir la solución aproximada.

Debido a que la solución de prueba no es igual a la solución exacta, el residuo no es cero para todo  $x$  en el dominio de la función, aunque se puede asegurar que es cero en los extremos del intervalo puesto que la función de prueba satisface idénticamente las condiciones de la frontera. Nótese que el residuo también es función de los parámetros desconocidos de la función de prueba.

Como siguiente paso se determinan los coeficientes de la función de prueba de modo que dicha solución se aproxime lo mejor posible a la solución exacta.

Para calcular los coeficientes se impone la condición que las funciones  $\phi(x)$  sean ortogonales a la función de residuo ponderado  $R(x)$ .

$$(\phi(x), R(x)) = 0$$

$\phi(x)$  son funciones de peso que en los métodos de residuo ponderado pueden escogerse arbitrariamente, para el método de Galerkin se utilizan las mismas funciones de la base  $w_i$  del subespacio  $W$  con las cuales se escribió la solución de prueba.

Así, la integral de residuo promedio en el intervalo es cero

$$= \int_a^b \phi(x) \cdot D[y^*(x), x] dx = 0$$

obteniendo un problema algebraico de eigenvalores donde

$$\sum_{i=1}^n A \cdot a_i - b_i = 0$$

Dicha condición genera un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  coeficientes desconocidos.

Una vez calculados los coeficientes se sustituyen en la solución de prueba.

---

Se debe resordar que la solución calculada por el método de Galerkin es una aproximación en un subespacio finito de una función perteneciente a un espacio de dimensión infinita, por tanto, si fuera necesario se puede aumentar la dimensión del subespacio  $W$ , para obtener una mejor solución.

## 1.9 Control Vibracional

### 1.9.1 Introducción

En general existen dos principios principales en el control automático, el control en retroalimentación y el control precalculado o "feedforward". Para aplicar dichos principios deben medirse los estados para retroalimentación o las perturbaciones para feedforward y deberá introducirse una señal de control aditiva apropiada [27].

Existen sistemas que por su naturaleza no permiten ninguna medición o introducción de señales de control de manera aditiva. El principio de control vibracional puede utilizarse en estos casos pues no requiere ni medición, ni adición de señales de control en dicha forma.

### 1.9.2 Definición del Control Vibracional

El efecto de cambiar las propiedades dinámicas de un sistema mediante la introducción de oscilación en sus parámetros (con valor medio cero) será referido como control vibracional [27].

En algunos casos, la introducción de vibraciones no cambia los coeficientes en la ecuación promediada y así, las propiedades integrales de la dinámica del sistema se mantienen intactas, en este caso, si el sistema original es inestable, no se podrá estabilizar por medio de la introducción de oscilaciones en sus parámetros.

Así, el efecto del control vibracional aparece como una propiedad estructural de algunos sistemas dinámicos.

### 1.9.3 Teoría de control Vibracional

Dado el sistema descrito por la ecuación

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = \text{constante} \quad (1.29)$$

Se harán oscilar los elementos de la matriz  $A$  con la ley de control  $B(t) = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^n$ , donde  $b_{ij} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ij}^s \sin(s\omega_{ij}t + \theta_{ij}^s)$  son funciones periódicas con valor medio cero. Como resultado se obtiene:

$$\dot{x} = [A + B(t)]x \quad (1.30)$$

**Definición 1** *Estabilizabilidad vibracional*

El sistema descrito por la ecuación (1.29), se dirá vibracionalmente estabilizable si existe una matriz periódica  $B(t)$  (con valor medio cero) tal que la solución trivial  $x = 0$  del sistema (1.30) es asintóticamente estable [26].

**Definición 2** *Controlabilidad Vibracional*

Los elementos  $a_{ij}$  de la matriz  $A$  se dicen vibracionalmente controlables si existe una matriz periódica  $B(t)$  (con valor medio cero) tal que  $\bar{b}_{ij} \neq 0$  donde  $\bar{b}_{ij}$  son los elementos de la Matriz  $B(t)$  después de aplicar el método de promediación a la ecuación (1.30) [26].

**Definición 3** *Observabilidad en principio*

El sistema (1.29) se dirá observable en principio, si existe un vector  $c$  tal que el sistema (1.29) es observable con respecto a la salida  $(c, x)$  [27].

Para que el sistema (1.29) sea vibracionalmente estabilizable es necesario (y en caso de que el sistema sea observable en principio, necesario y suficiente) que la matriz  $A$  tenga traza negativa [26].

El sistema (1.29) es vibracionalmente estabilizable por vibraciones naturales si y sólo si la traza de cada polinomio no trivial de la matriz  $A$  es negativa.

Se asume que la matriz  $A$  es de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

O que el sistema (1.29) es la forma de Cauchy de un sistema de  $n - \text{ésimo}$  orden. Se introducen las vibraciones naturales  $B(t)$ .

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -b_n(\omega t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -b_1(\omega t) \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

sea

$$b_i(\omega t) = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_i^s \sin(s\omega t + \theta_i^s), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.33)$$

con

$$\alpha_i^1 \gg a_i \quad (i = 1, \dots, n); \quad \omega \gg \sup_i |\lambda_i| \quad (1.34)$$

$\lambda_i, \quad i = 1, \dots, n$  son los eigenvalores de la matriz  $A$ .

Son vibracionalmente controlables aquellos elementos  $a_i$ , de la matriz  $A$  escrita en forma (1.31) para los cuales  $i \geq 2$ ; con las condiciones (1.33) y (1.34) es válido:

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\bar{b}_n \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\bar{b}_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

$$\text{con } \bar{b}_i = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_2^s \alpha_i^s}{2\omega^s s^2} \cos(\theta_2^s - \theta_i^s), \quad i = 2, \dots, n \quad [26].$$

De la fórmula (1.35) se sigue que usando el método de control vibracional el coeficiente  $a_2$  sólo puede ser decrementado y los coeficientes restantes  $a_i$ , ( $i \geq 3$ ) pueden independientemente incrementarse o decrementarse de acuerdo con la relación entre las fases  $\theta_2^s$  y  $\theta_i^s$ . Más aún la fórmula (1.35) muestra que para cambiar cualquiera de los coeficientes  $a_i$ , ( $i \geq 3$ ) las vibraciones deberán introducirse en el coeficiente  $a_2$  además de introducirlo en el coeficiente del controlador; de otra forma el efecto deseado no es obtenido.

## 1.10 Control Vibracional de un sistema descrito por una ecuación diferencial de orden $n$ .

Supongamos que se tiene una planta cuya dinámica está dada por la ecuación diferencial siguiente: (Los coeficientes  $a_i$  y la variable independiente  $t$  han sido reducidas a su forma adimensional) [28].

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad (1.36)$$

Se introducen vibraciones a los coeficientes  $a_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) en la ecuación (1.36) de acuerdo con:

$$b_i(\omega t) = k_i \sin(\omega t + \theta_i), \quad (i = 1, \dots, n)$$

con lo cual tenemos la ecuación:

$$x^{(n)} + (a_1 + b_1(t))x^{(n-1)} + \dots + (a_n + b_n(t))x = 0$$

Por medio de un procedimiento análogo para el sistema (1.36) y utilizando algunas constantes  $k_i$  y  $\omega$  suficientemente grandes,

$$k_i \gg a_i, \quad \omega = \lambda k, \quad \lambda \sim 1,$$

( $k$  es del mismo orden de magnitud que  $k_i$ ) de una ecuación con coeficientes periódicos a una ecuación con coeficientes constantes de la forma.



---

$$x^{(n)} + (a_1 + \bar{b}_1)x^{(n-1)} + \dots + (a_n + \bar{b}_n)x = 0,$$

donde  $\bar{b}_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) son constantes.

Está claro que el efecto del control vibracional aparece sólo en el caso en que al menos una de las constantes  $\bar{b}_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) es diferente de cero (de otra forma la dinámica por promediación de la planta controlada no cambia después de la introducción de las vibraciones paramétricas).

Para que la solución  $x = 0$  de una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  con coeficientes constantes sea estabilizable por medio de la introducción de una vibración paramétrica con valor medio cero, es necesario y suficiente que los signos de los coeficientes de la  $n - \text{ésima}$  y  $(n - 1) - \text{ésima}$  derivada coincidan.

Como consecuencia del teorema, las vibraciones relacionadas pueden ser funciones periódicas arbitrarias en forma y frecuencia, bajo el entendido de que deben tener valor medio cero.

El método de control vibracional se muestra efectivo en el problema de estabilización del estado de equilibrio de la planta descrita por la ecuación (1.36) si y sólo si  $a_1 > 0$ , puesto que el coeficiente  $a_1$  es igual al negativo de la suma de los eigenvalores del polinomio característico correspondiente a la ecuación (1.36). Lo último implica que el método de control vibracional es efectivo únicamente en los sistemas de la forma (1.36) en los cuales la suma de los eigenvalores es negativa.

Así, el método de control vibracional permite cambiar la localización del espectro de la ecuación característica correspondiente con la ecuación (1.36), pero sólo de forma que la suma de los eigenvalores permanece constante.

---

# Capítulo 2

## Diagramas de estabilidad de la ecuación de Hill

En este capítulo se habla de los diagramas de estabilidad para la ecuación de Hill, su forma de obtenerlos, las modificaciones que se deben hacer para los sistemas de orden superior, los principales algoritmos computacionales que aparecen en la literatura y los que se han utilizado en este trabajo, se presenta además un algoritmo nuevo, el cual, dibuja el diagrama de estabilidad de una ecuación de Hill haciendo un seguimiento de la frontera que separa las regiones estable e inestable.

### 2.1 Introducción

Si los parámetros del sistema son funciones periódicas con respecto al tiempo, su estabilidad estará gobernada por la teoría de Floquet.

La estabilidad de la ecuación de Hill (2.1) depende de los parámetros  $(\alpha, \beta)$  [23].

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cdot p(t))x = 0; \quad p(t + T) = p(t) \quad (2.1)$$

Al fenómeno que se presenta cuando la estabilidad de una ecuación está condicionada por los valores de sus parámetros se conoce como estabilidad paramétrica y se dice que la ecuación es estable, si su solución es acotada e inestable cuando la solución es no acotada [4],[45].

#### 2.1.1 Lenguas de Arnold

El diagrama que representa las zonas de estabilidad de una ecuación con coeficientes que varían periódicamente se conoce como diagrama de estabilidad paramétrica y las zonas inestables del diagrama se denominan Lenguas de Arnold.

## 2.1.2 Diagramas típicos para la ecuación de Mathieu

Se presentan ahora dos diagramas de estabilidad que son típicos en la literatura, [4], [18], [23] uno para la ecuación de Mathieu (1.13) donde varían los parámetros  $(\alpha, \beta)$  de la ecuación y el segundo referente a la ecuación (1.16), en la cual, los parámetros que varían son  $(w, \beta)$  permaneciendo constante  $\alpha$ , siendo  $\beta$  la amplitud de la función de excitación y  $w$  su frecuencia.

### Diagrama de estabilidad con variación de los coeficientes de la excitación $(\alpha, \beta)$

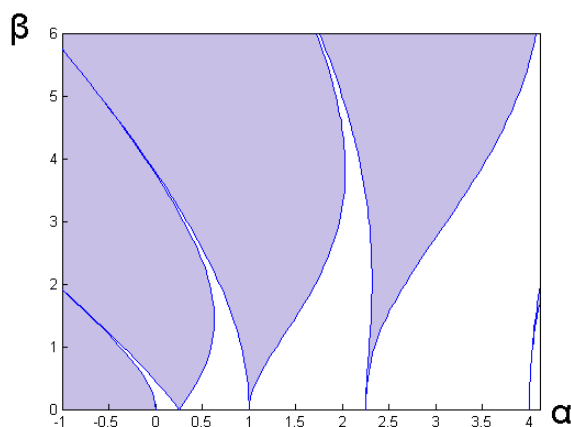


Figura 2-1. Diagrama de estabilidad para la ecuación de Mathieu. (Blanco zona estable, gris zona inestable).

En el diagrama de la figura anterior se puede observar que cada lengua de Arnold intersecta al eje  $\beta = 0$  en  $\alpha_0 = \frac{n^2}{4}$  donde  $n \in \mathbb{Z}^+$  es el número de lengua, y se describen intervalos de estabilidad e inestabilidad alternados, las fronteras de estabilidad son también alternadamente soluciones periódicas de periodo  $2\pi$  y soluciones de periodo  $4\pi$ .

### Diagrama de estabilidad con variación de la frecuencia de la excitación

El diagrama para la ecuación  $\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos(wt)) x = 0$  variando  $(\beta, w)$  es:

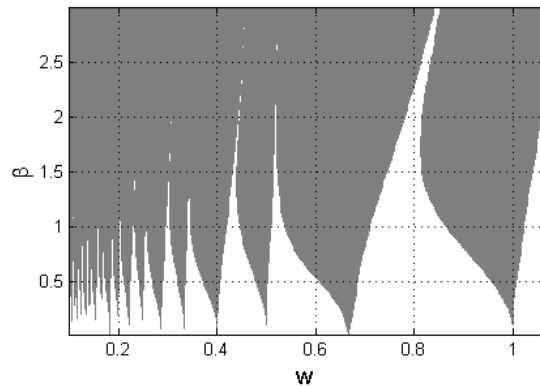


Figura 2-2. Diagrama de estabilidad para la ecuación de Mathieu variando amplitud y frecuencia. (Blanco-estable, negro-inestable).

La primer diferencia con el diagrama en que varían los coeficientes, es que todas las lenguas están concentradas entre cero y 2, la primera lengua del diagrama de estabilidad inicia en  $w = 1$ , y mientras aumenta el número de lengua se van acercando cada vez más al eje vertical. Se puede obtener un diagrama alternativo graficando en el eje horizontal  $T = \frac{2\pi}{w}$ , con lo cual, el diagrama se parece más al anterior en que varían los coeficientes  $(\alpha, \beta)$ .

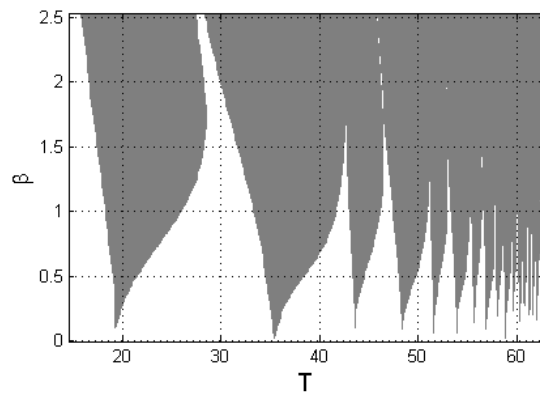


Figura 2-3. Diagrama de estabilidad para la ecuación de Mathieu variando amplitud  $\beta$  y frecuencia de la excitación  $\omega$ . Gráfica  $\beta$  vs  $T$ ,  $T = (2\pi/w)$ .

## 2.2 Algoritmos para el dibujo de los diagramas de estabilidad

Las ecuaciones con coeficientes periódicos son una clase de ecuaciones variantes en el tiempo, en las cuales, salvo un muy reducido número de ejemplos es imposible obtener una solución analítica. Dado lo anterior, en la literatura se pueden

encontrar varios algoritmos para estimar el diagrama de estabilidad paramétrica de este tipo de ecuaciones, por ejemplo, utilizando determinantes infinitos como en [4], por aproximación numérica, por discretización ver [19].

En este trabajo se hace una recapitulación de estos métodos, además se presenta un método numérico alternativo para el cálculo de los diagramas de estabilidad paramétrica de la ecuación de Hill. El método presentado se basa en un algoritmo que hace un seguimiento de la frontera de la región de estabilidad, este algoritmo utiliza pocos recursos computacionales y menos memoria que los otros métodos mencionados, se presenta también una comparación de desempeño de los métodos utilizados, ventajas y desventajas entre ellos.

## 2.2.1 Método de Determinantes infinitos

Dada la ecuación de Mathieu (1.13), primero se buscan los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que nos obtienen una solución de periodo  $2\pi$ , se representa la solución por medio de la serie de fourier compleja [[18],[43]].

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad (2.2)$$

sustituyendo (2.2) en la ecuación de Mathieu (1.13) y haciendo:

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\beta c_{n+1} + 2(\alpha - n^2) c_n + \beta c_{n-1}] e^{int} = 0$$

Para satisfacer la ecuación todos los coeficientes de  $e^{int}$  deben valer cero, con lo cual, se puede obtener un determinante tridiagonal formado con los coeficientes llamado determinante de Hill. Para que el sistema infinito de ecuaciones formado tenga solución no trivial se debe garantizar que determinante de Hill sea cero.

Asumiendo que  $\alpha \neq n^2$ , se puede escribir la expresión  $\beta c_{n+1} + 2(\alpha - n^2) c_n + \beta c_{n-1}$ , como  $\gamma_n c_{n+1} + c_n + \gamma_n c_{n-1} = 0$  donde  $\gamma_n = \frac{\beta}{2(\alpha - n^2)}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y el determinante se puede escribir como:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \gamma_1 & 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \gamma_0 & 1 & \gamma_0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \gamma_1 & 1 & \gamma_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

Ahora dado  $\beta$  se calcula  $\alpha$  que haga cero al determinante de Hill.

---

Para determinar las soluciones de periodo  $4\pi$  se procede de la misma forma pero se representa la solución por medio de la serie de fourier compleja

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{\frac{1}{2}int} \quad (2.3)$$

sustituyendo (2.3) en la ecuación de Mathieu (1.13) y sustituyendo

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}\beta d_{n+2} + \left( \alpha - \frac{1}{4}n^2 \right) d_n + \frac{1}{2}d_{n-1} \right] e^{int} = 0$$

Calculando simbólicamente la tercera aproximación de los determinantes de Hill para las ecuaciones de periodo  $2\pi$  y  $4\pi$  tenemos:

$$H_1(\alpha, \beta) = 4(\alpha - 1)(-2\alpha + 2\alpha^2 - \beta^2),$$

$$H_2(\alpha, \beta) = 2(16 - 20\alpha + 4\alpha^2 - \beta^2)(16\alpha - 20\alpha^2 + 4\alpha^3 + 8\beta^2 - 3\alpha\beta^2),$$

$$H_3(\alpha, \beta) = 8(-72 + 98\alpha - 28\alpha^2 + 2\alpha^3 + 5\beta^2 - \alpha\beta^2) \cdot$$

$$(-288\alpha + 392\alpha^2 - 112\alpha^3 + 8\alpha^4 - 144\beta^2 + 72\alpha\beta^2 - 8\alpha^2\beta^2 + \beta^4)$$

Por medio de Matlab se calculan los valores para  $\alpha$  que satisfacen las ecuaciones anteriores para cada valor de  $\beta$  dado, y se grafican todos los puntos de coordenadas  $(\alpha, \beta)$ .

Con este algoritmo se obtiene la siguiente gráfica que representa las fronteras de las zonas de parámetros estable e inestable para cada combinación de valores  $\alpha, \beta$  de la ecuación de Mathieu [18].

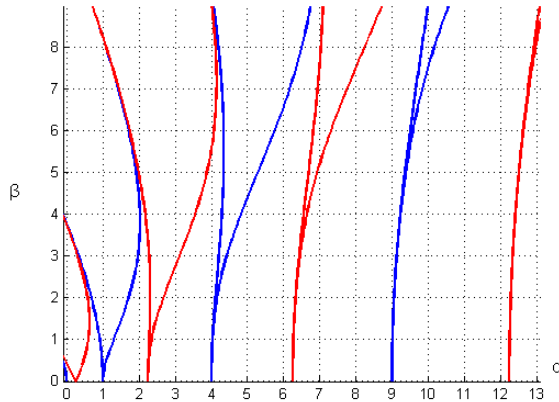


Figura 2-4. Diagrama de estabilidad de la ecuación de Mathieu por el algoritmo de determinantes infinitos. El algoritmo unicamente calcula la frontera de las zonas de estabilidad.

### 2.2.2 Método de cálculo numérico punto por punto

Para obtener el diagrama de estabilidad de la ecuación de Hill

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cdot p(t))x = 0; p(t + T) = p(t)$$

calcularemos primeramente la matriz de monodromía asociada a la ecuación de manera numérica, en Matlab se puede resolver numéricamente la ecuación utilizando la función ODE45 una vez con cada condición inicial definida como en (1.6) y evaluando exactamente en el valor del periodo mínimo  $T$  de la ecuación.

El valor obtenido al resolver numéricamente la ecuación utilizando cada vector de condiciones iniciales define una columna de la matriz de monodromía, si el sistema en variables de estado es de dimensión 2, se calcula la traza de la matriz de monodromía obtenida y se utilizan las condiciones establecidas para  $D$  de la ecuación (1.19), dibujando un punto en la coordenada  $(\alpha, \beta)$  de parámetros si  $tr(M) > 2$  y dejando en blanco en caso contrario obtenemos el siguiente diagrama:



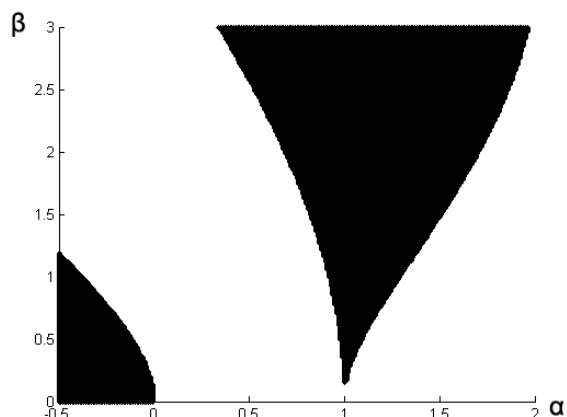


Figura 2-5. Diagrama de parámetros de la ecuación de Mathieu con  $tr(M) > 2$

Recordemos que para la ecuación de Mathieu las lenguas interceptan al eje  $\beta = 0$  en  $\alpha_0 = \frac{n^2}{4}$ , las lenguas obtenidas son aquellas cuyo índice  $n$  es par.

Si se calcula la traza de la matriz de monodromía y se dibuja un punto en la coordenada  $(\alpha, \beta)$  de parámetros si  $tr(M) < -2$  se tiene:

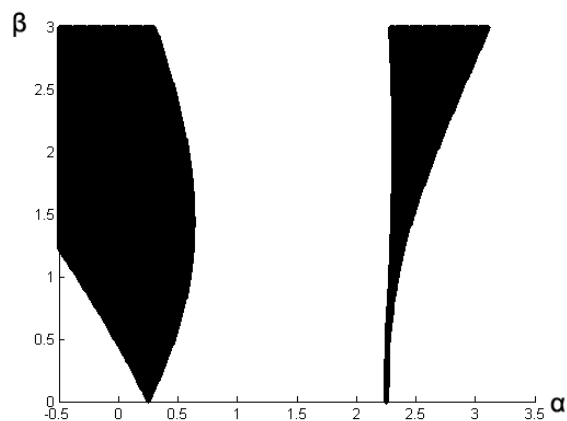


Figura 2-6. Diagrama de parámetros de la ecuación de Mathieu con  $tr(M) < -2$

El diagrama anterior muestra las lenguas para cuando  $n$  es impar.

En resumen, las fronteras de las regiones de estabilidad están definidas por los pares de parámetros  $(\alpha, \beta)$  cuya traza de la matriz de monodromía  $tr(M) = 2$ .

Las regiones estables del diagrama son aquellas en las cuales  $-2 < tr(M) < 2$ .

Y las regiones inestables, se presentan alternadamente en los valores de parámetros  $(\alpha, \beta)$  con  $tr(M) > 2$  y  $tr(M) < -2$ .

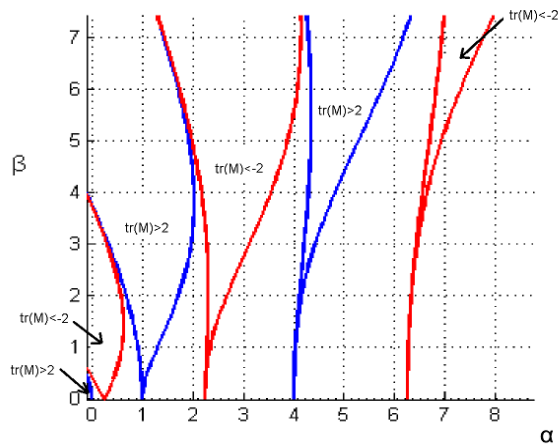


Figura 2-7. Distribución de las regiones de estabilidad con respecto al valor de la traza de la matriz de monodromía.

Este programa es muy sencillo en su concepción pero es sumamente lento puesto que el programa tendrá que evaluar punto por punto todo el intervalo requerido. Si el sistema es de grado 2, el método de evaluar los intervalos de la traza de la matriz de monodromía tiene buenos resultados

Utilizando este programa de cálculo punto por punto y usando el criterio de la traza obtenemos la siguiente gráfica para la ecuación de Mathieu.

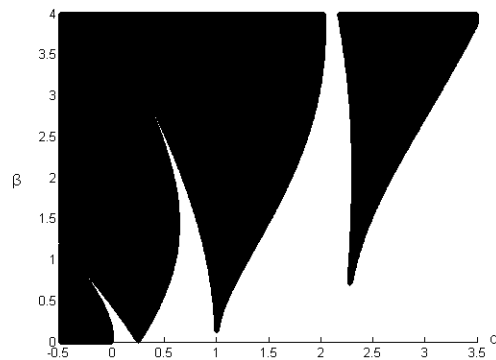


Figura 2-8. Diagrama de estabilidad de la ecuación de Mathieu obtenido mediante programa de calculo numérico punto por punto. (Blanco-zona estable, Negro-zona inestable).

Utilizando este código es muy fácil incluir términos de disipación en la ecuación o modificarlo para graficar las zonas de estabilidad cuando la variación se introduce en la frecuencia de la función, además es posible modificar el grado de la ecuación o sistema de ecuaciones sin mayores problemas salvo que para grado diferente de 2 como ya se mencionó el criterio de la traza no es aplicable y se tendrán que calcular los valores característicos de la matriz de monodromía, lo

cual, computacionalmente tiene una mayor dificultad y se incrementan los errores del cálculo numérico, para este caso, se deberá evaluar el criterio de estabilidad para los valores característicos como en el teorema 3.

Para comparar este algoritmo con el de determinantes infinitos se incluye la siguiente gráfica.

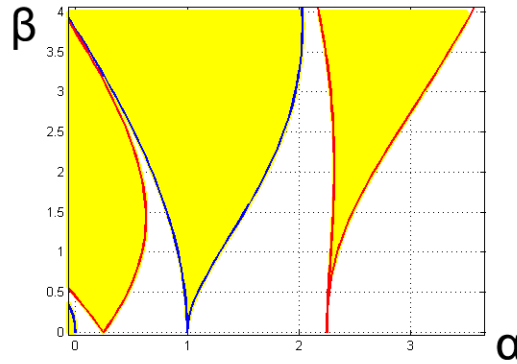


Figura 2-9. Comparación de los resultados obtenidos con el algoritmo por determinantes infinitos y por cálculo numérico.

En la gráfica se puede ver que los dos métodos nos obtienen los mismos resultados, salvo que el tiempo de computo del método de cálculo numérico punto por punto es mucho mayor.

### 2.2.3 Método por discretización

Debido a que el análisis de la ecuación de Hill en dominio de tiempo continuo presenta dificultades analíticas, se puede discretizar la ecuación utilizando, por ejemplo, el método de diferencias finitas. Subsecuentemente obtener un sistema periódico que aún es variante en el tiempo (tiempo discreto) y se puede aplicar después la técnica de "lifting" para obtener un sistema invariante en el tiempo [19].

La técnica de "lifting" es simple, consiste en calcular un nuevo estado que contiene toda la información de un periodo mínimo del sistema (en un sistema discreto, el nuevo estado tiene dimensión finita) y al igual que el sistema original obtendremos un sistema periódico, el nuevo sistema será invariante en el tiempo en cada periodo.

Usando la técnica de lifting se puede formar un sistema lineal invariante en el tiempo en tiempo discreto como:

$$z_k = [ y_{Kk+1} \quad y_{Kk+2} \quad \cdots \quad y_{Kk+K} ]^T$$

$$z_{k+1} = Az_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Para dibujar el diagrama de estabilidad se calculan los valores característicos del sistema aproximado y se determina la estabilidad del par de parámetros.

### 2.2.4 Método de calculo por seguimiento de frontera.

Este algoritmo calcula la frontera entre las regiones estable e inestable del diagrama de estabilidad paramétrica de la ecuación de Hill, en particular se muestran los diagramas de estabilidad obtenidos con dicho algoritmo para las ecuaciones de Mathieu y Meissner [37].

Se debe recordar que las áreas inestables del diagrama de estabilidad paramétrica son aquellas en las que el valor de la traza de la matriz de monodromía asociada ( $M$ ) es mayor en valor absoluto a 2, y así, la frontera de la zona de estabilidad cumple con  $|tr(M)|=2$ , esto es,  $tr(M) = 2$  o  $tr(M) = -2$ , de hecho, la primer lengua de estabilidad del diagrama (lengua cero) tiene su frontera cuando  $tr(M) = 2$ , para la lengua uno, ambas fronteras derecha e izquierda serán dibujadas por pares de parámetros en los cuales  $tr(M) = -2$ , la segunda lengua tendrá fronteras con  $tr(M) = 2$ , y así sucesivamente.

En la figura 2-10 se muestra este comportamiento sobre el diagrama de estabilidad de la ecuación de Mathieu.

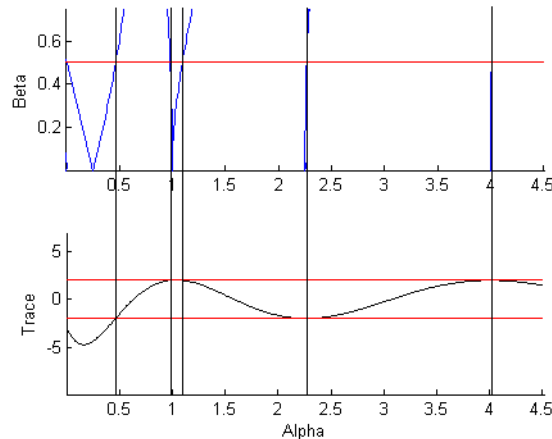


Figura 2-10. Abajo: Diagrama de la traza de la ecuación de Mathieu para  $\beta = 0.5$ . Arriba: Comparación del diagrama de estabilidad de la ecuación de Mathieu y los valores de la traza.

Para dibujar el diagrama de estabilidad paramétrica por medio del método de seguimiento de frontera se procede de la siguiente manera.

Dada una ecuación de Hill como (1.9) se determina el inicio de cada lengua de Arnold (intersección con el eje horizontal), para ello hacemos  $\beta = 0$  y se determina el valor de  $\alpha$  para el cual la ecuación presenta inestabilidad paramétrica, para la

ecuación de Mathieu estos valores están dados por  $\alpha = \frac{n^2}{4}$  donde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  [18].

Así, la primera lengua de Arnold inicia en  $\alpha = 0$ , tomando este punto como el valor inicial se da un incremento al parámetro vertical de un tamaño adecuado, si el incremento es demasiado grande la frontera calculada puede ser más imprecisa, si el incremento es demasiado pequeño el algoritmo tenderá a hacerse lento.

Puesto que la frontera entre las zonas estable e inestable es una curva suave su pendiente será acotada, por lo tanto, se puede determinar un intervalo horizontal asociado con el valor del incremento vertical, en el que se puede garantizar que se encuentra otro punto de la frontera de estabilidad. El tamaño del intervalo horizontal puede ser fijo o puede ser calculado utilizando la pendiente de la curva de la frontera de estabilidad del paso anterior.

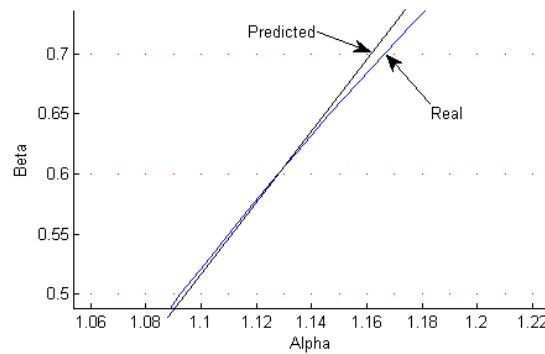


Figura 2-11. Estimación del siguiente punto sobre la frontera de estabilidad usando la pendiente de la curva.

Se evalúa la traza de la matriz de monodromía asociada a la ecuación de Hill para cada par  $(\alpha, \beta)$  dentro del intervalo obtenido, para ello se utilizará el algoritmo de aproximación numérica ya explicado anteriormente y se determina el punto en el cual el valor de  $|tr(M)|$  es más cercano a 2, la precisión del valor obtenido del punto sobre la frontera dependerá del número de divisiones tomadas sobre el intervalo horizontal calculado.

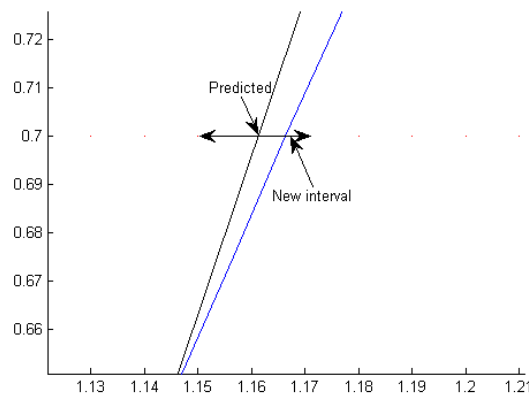


Figura 2-12. El diagrama muestra el nuevo intervalo horizontal centrado en el valor que se predice utilizando la pendiente.

Después que se calcula el nuevo punto sobre la frontera, se hace un nuevo incremento vertical y se determina el siguiente intervalo horizontal para calcular el siguiente punto, se repite el procedimiento hasta alcanzar el intervalo vertical deseado.

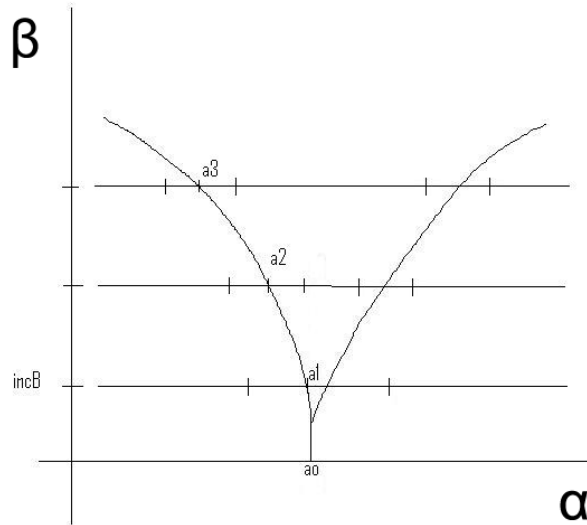
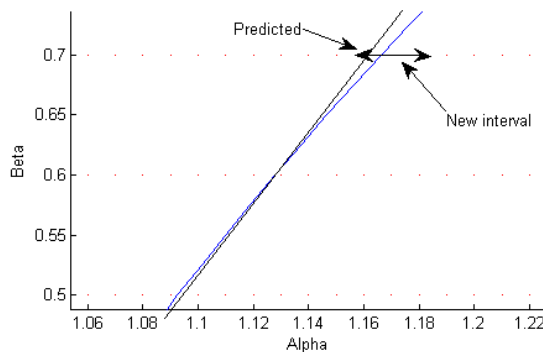


Figura 2-13. Ilustración de los intervalos utilizados para el cálculo de las fronteras de estabilidad por el método de seguimiento de frontera.

Después de obtener la frontera de la lengua cero, se calcula el valor inicial de  $\alpha$  para la siguiente lengua y se procede de la misma manera a determinar la frontera para la lengua 1 y todas las subsecuentes, al calcular las fronteras excepto para la lengua cero, se debe poner atención en determinar bien el tamaño del intervalo horizontal, esto debido a que como se dijo anteriormente, las dos fronteras de cada lengua de estabilidad satisfacen la condición  $|tr(M)| = 2$ , y si el intervalo es demasiado grande el algoritmo puede brincar de una frontera a otra obteniendo un diagrama incorrecto, se puede entonces determinar el valor de la pendiente y mover el intervalo horizontal en la dirección de dicha pendiente.



---

Figura 2-14. Nuevo intervalo escogido a la derecha debido a la dirección de la pendiente.

La mayor ventaja de este algoritmo es que utiliza muy pocos recursos computacionales evitando la saturación de la memoria y no se requiere demasiado tiempo de cómputo para obtener el diagrama de estabilidad, además es posible implementarlo en cómputo paralelo para obtener varias lenguas de estabilidad al mismo tiempo y hacer el algoritmo aún más rápido.

Adicionalmente se puede cambiar la ecuación del sistema sin hacer modificaciones directas al código del algoritmo, sin embargo, si se agrega amortiguamiento a la ecuación del sistema no puede utilizarse el algoritmo directamente puesto que el punto de cruce de las lenguas con el eje horizontal no es conocido.

Usando el criterio de estabilidad basado en los valores característicos de la matriz de monodromía (Teorema 3) es posible incrementar la dimensión del sistema descrito en ecuaciones de estado y obtener diagramas de estabilidad para sistemas de dimensión mayor a 2.

En la siguiente figura se puede observar la comparación entre los diagramas de estabilidad obtenidos por dos algoritmos, en negro el diagrama de estabilidad calculado por el algoritmo de aproximaciones numéricas, los puntos grises son las fronteras de estabilidad calculadas con el algoritmo de seguimiento de trayectoria.

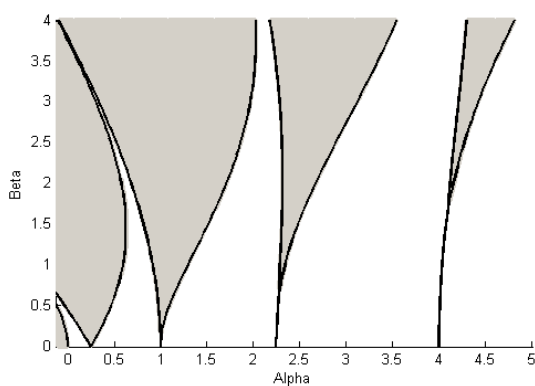


Figura 2-15. Comparación de los diagramas de estabilidad para la ecuación de Mathieu calculados por el algoritmo de aproximaciones numéricas y por el método de seguimiento de trayectoria.

Usando el algoritmo de seguimiento de trayectoria se obtiene el diagrama de estabilidad para la ecuación de Meissner ecuación (1.20):

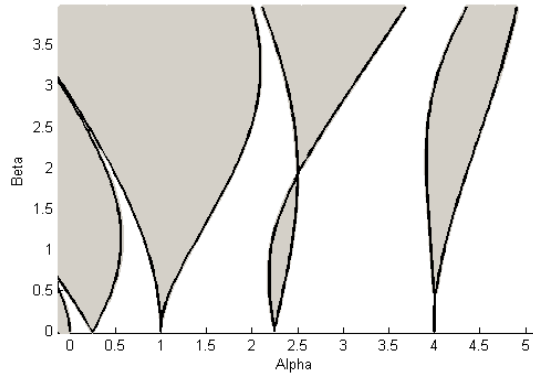


Figura 2-16. Comparación de los diagramas de estabilidad para la ecuación de Meissner por medio del algoritmo de aproximaciones numéricas (negro) y por el método de seguimiento de trayectoria (línea gris).



# Capítulo 3

## Análisis de sistemas excitados periódicamente

En este capítulo, se muestran algunos ejemplos de sistemas cuya ecuación involucra coeficientes periódicos y que permiten analizar aspectos importantes de este trabajo, su análisis de estabilidad y la validación de resultados, los ejemplos mostrados son: el doble oscilador lineal, al cual se induce amortiguamiento a partir de la variación periódica de la elasticidad de uno de los resortes; el péndulo de Kapitza excitado de manera harmónica y con excitación no periódica y por último el puente de Tacoma que está modelado por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

### 3.1 El doble oscilador acoplado

Primeramente se describirá el modelo matemático de un doble oscilador lineal acoplado, haciendo un estudio de su estabilidad cuando alguno de sus parámetros varía periódicamente e induciendo amortiguamiento utilizando una excitación paramétrica sobre la elasticidad de uno de los resortes que lo componen [38].

#### 3.1.1 El modelo matemático

El diagrama del doble oscilador es:

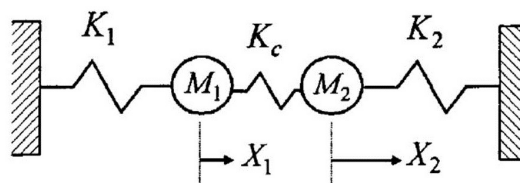


Figura 3-1. Doble oscilador acoplado.

Las ecuaciones de energía cinética y potencial del sistema son:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_c(x_1 - x_2)^2$$

El lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_c(x_1 - x_2)^2$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i} \right] - \left[ \frac{\delta L}{\delta x_i} \right] = 0$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema son [2]:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + (k_1 + k_c)x_1 - k_cx_2 = 0$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + (k_2 + k_c)x_2 - k_cx_1 = 0$$

La representación matricial se verá como:

$$\ddot{x} + \begin{bmatrix} \frac{k_1+k_c}{m_1} & -\frac{k_c}{m_1} \\ -\frac{k_c}{m_2} & \frac{k_2+k_c}{m_2} \end{bmatrix} x = 0$$

Factorizando cada término de elasticidad de los resortes, la ecuación se puede escribir como:

$$\ddot{x} + \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} k_c + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} k_2 \right\} x = 0 \quad (3.1)$$

En la ecuación (3.1), si la elasticidad de algún resorte varía periódicamente, la ecuación (3.1) es una ecuación matricial de Hill.

Considerando un término de fricción viscosa (fricción del aire) en la ecuación (3.1) se tiene:

$$\ddot{x} + \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \dot{x} + \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} k_c + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} k_2 \right\} x = 0 \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Respuesta temporal del sistema

La respuesta temporal de la ecuación (3.2) considerando  $k_1 = 1, k_2 = 1, k_c = 1, \gamma = 0.0005, m_1 = 1, m_2 = 1, w = 1$  calculada sobre Matlab Simulink es:

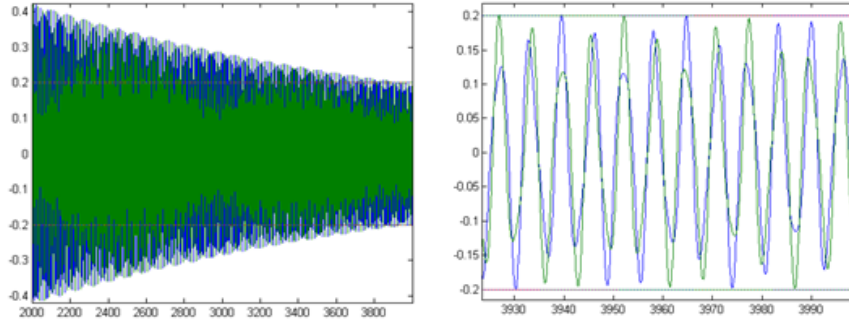


Figure 3-2. Respuesta temporal del sistema sin excitación, considerando un término de amortiguamiento  $\gamma = 0.0005$  con condición inicial  $x_1(0) = 1$ .

Observese que a los 4000s. la amplitud de la respuesta del sistema es 0.2 debido al término de amortiguamiento de la ecuación (3.2).

Se desea incrementar el amortiguamiento del sistema por medio del uso de un término de control vibracional para lograr una mayor atenuación de las oscilaciones.

### 3.1.3 Análisis de estabilidad del sistema en presencia de excitación paramétrica

Se debe poder asegurar que si se agrega un término de excitación paramétrica la respuesta del sistema seguirá siendo estable, para ello, se analizará la ecuación (3.2) considerando que la elasticidad del resorte  $k_c$  varía de manera periódica en el tiempo,  $k_c = \alpha + \beta \cos(wt)$ , donde  $k_2 = 1, k_c = 1, \gamma = 0, m_1 = 1, m_2 = 1, w = 1$ .

La ecuación del sistema es:

$$\ddot{x} + \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (\alpha + \beta \cos(wt)) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} x = 0 \quad (3.3)$$

Usando el algoritmo por discretización para dibujar los diagramas de estabilidad presentado en el capítulo 2 se obtiene el diagrama de la figura 3-3.

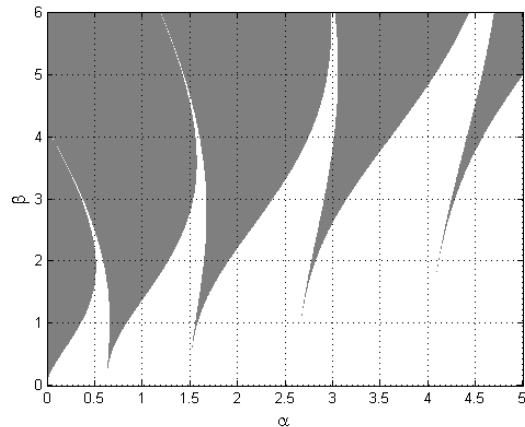


Figura 3-3. Diagrama de estabilidad de la ecuación (3.3) considerando una excitación periódica en la elasticidad del resorte  $k_c$ .

### 3.1.4 Inducción de amortiguamiento en el doble oscilador acoplado

La meta es reducir la amplitud de la oscilación del sistema (incrementar el amortiguamiento), para este propósito introducimos una oscilación periódica sobre la elasticidad del resorte  $k_c$  de la forma:

$$k_c = \alpha + \beta \cos(wt)$$

Se necesita escoger valores para  $\alpha, \beta$  y  $w$  que ocasionen la reducción de la oscilación y que además garanticen la estabilidad del sistema.

Se escogen entonces puntos sobre la zona blanca del diagrama de estabilidad de la figura 3-3.

Para poder apreciar mejor los efectos de la excitación paramétrica inducida sobre  $k_c$  se deja uno de los parámetros de la excitación constante y se varían los dos restantes.

#### Caso 1: Dejando $w$ fijo

Dado  $w = 1$  se escogen los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que incrementen el amortiguamiento del sistema de la ecuación (3.2), por ejemplo escogemos  $\beta = 1.5$ , y ajustamos el valor de  $\alpha$  para obtener el mayor amortiguamiento posible.

El valor de  $\alpha$  se escoge dentro de la región localizada entre dos lenguas de Arnold (Ver figura 3-4).

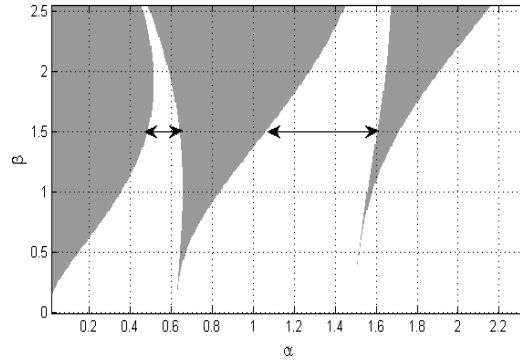


Figura 3-4. Región estable entre dos lenguas de Arnold.

El amortiguamiento inducido por el término de control vibracional  $k_c = \alpha + \cos(t)$  es mayor para el valor mínimo de  $\alpha = 1.4$  ubicado en la parte central del intervalo estable entre las lenguas 1 y 2 y decrece en los otros valores del intervalo.

En la figura 3-5 la atenuación del sistema es al rededor del 30% mayor que la del sistema al que no se aplica el término de excitación paramétrica, la amplitud de la respuesta del sistema es 0.152 (en el sistema original es 0.2).

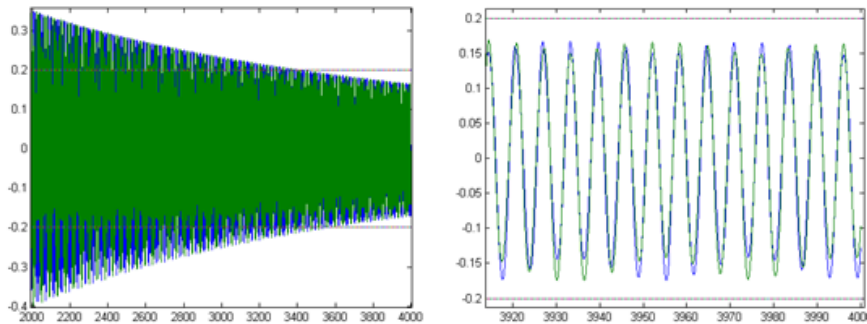


Figure 3-5. Respuesta temporal del sistema considerando  $k_c = 1.4 + 1.5 \cos(t)$ , esta función de excitación paramétrica provee el mayor amortiguamiento dentro del intervalo.

Si  $\alpha$  es mayor de este valor, el amortiguamiento inducido ya no se incrementa. Esto es, para un valor dado de  $\beta$  y  $w$  existe un mínimo  $\alpha$  que nos da el máximo amortiguamiento inducido. Esto puede verse en la figura 3-6.

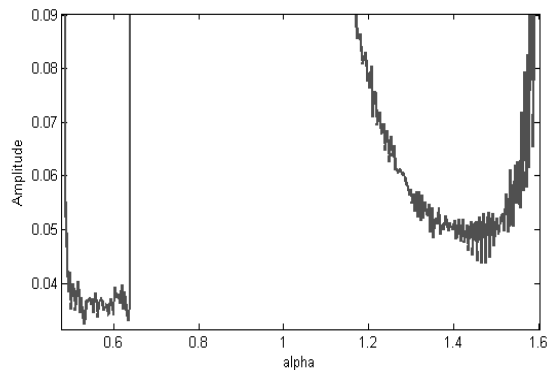


Figura 3-6. La figura muestra el patrón de atenuación dentro de los intervalos estables entre las lenguas 1, 2 y 3. Donde  $\beta = 1.5$ ,  $w = 1$ . Podemos ver que la máxima atenuación inducida se alcanza en la primer lengua de estabilidad.

Ahora se cambia el valor de  $\beta$  a 0.5 y se repite el experimento, tratando de determinar el valor de  $\alpha$  que obtiene la máxima atenuación.

Haciendo  $\alpha = 1.6$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $w = 1$  se tiene:

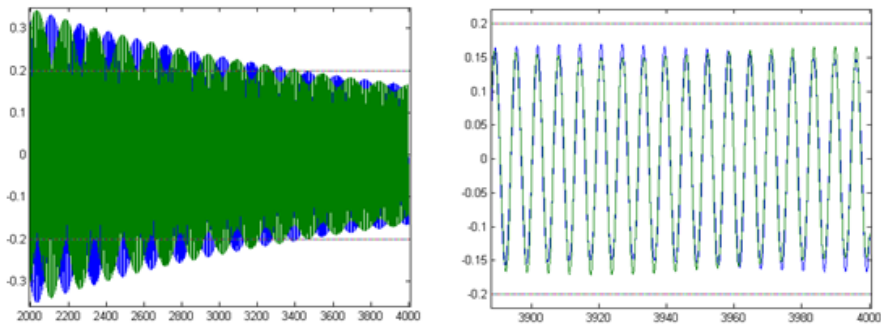


Figura 3-7. Respuesta temporal del sistema excitado parametricamente con  $k_c = 1.6 + 0.5 \cos(t)$  Vs  $k_c = 1.6$ .

En este caso se alcanza la misma atenuación que en el ejemplo anterior, para lo cual, es necesario un valor mayor de  $\alpha$ .

Usando  $\alpha = 0.49$ ,  $\beta = 2.5$ ,  $w = 1$  se obtiene:

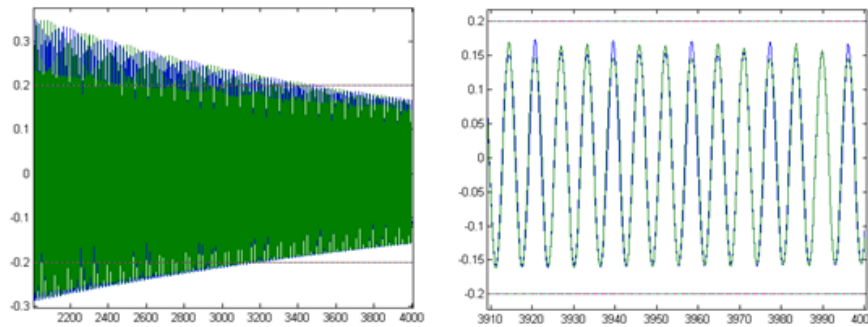


Figura 3-8. Respuesta temporal del sistema usando  $k_c = 0.49 + 2.5 \cos(t)$ .

En los tres ejemplos de este caso, se puede ver que para un valor mayor de  $\beta$  el valor de  $\alpha$  necesario para obtener la máxima atenuación inducida es menor.

## Caso 2: Utilizando $\alpha$ fijo

En este caso, se inicia con  $\alpha = 1.4$  fijo y se selecciona  $\beta = 1.5$ , se hace variar la frecuencia de la excitación hasta obtener la máxima atenuación en la amplitud de la respuesta temporal del sistema.

Se puede ver que cuando la frecuencia se incrementa, la máxima atenuación es alcanzada con valores menores de  $\alpha$ . Utilizando un valor reducido de  $\alpha = 1$  se ajusta el valor del parámetro de frecuencia  $w$  para asegurar obtener el mayor término de amortiguamiento inducido. El término de excitación periódica tiene la forma  $k_c = 1 + 1.5 \cos(wt)$ .

Por ejemplo para  $w = 5$  se alcanza un amortiguamiento inducido por el término de excitación periódica de aproximadamente 24% (la amplitud de la respuesta temporal es 0.152).

La respuesta del sistema es:

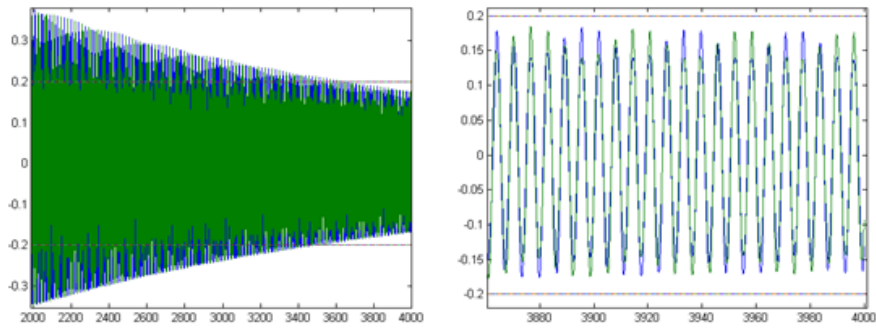


Figura 3-9. Respuesta temporal del sistema con  $k_c = 1 + 1.5 \cos(5t)$ . La figura muestra que es posible inducir amortiguamiento variando la frecuencia de la excitación periódica.

### 3.1.5 Conclusión

Este es un ejemplo de un sistema mecánico relativamente sencillo, un doble oscilador lineal coplado en el que se consideran parámetros concentrados y por tanto la dinámica del sistema está descrita por ecuaciones diferenciales ordinarias. En este ejemplo se puede ver que si se induce una excitación periódica en alguno de los parámetros del sistema, puede incrementarse el amortiguamiento y por lo tanto obtener una mayor atenuación en las oscilaciones de la respuesta temporal cuando los valores de los parámetros de la excitación periódica son adecuados. Es posible alcanzar el mismo valor final de la amplitud del sistema en aproximadamente tres cuartas partes del tiempo y es posible obtener una atenuación final de la amplitud del sistema de aproximadamente 30%. Adicionalmente para un valor mayor de  $\beta$  en la excitación paramétrica, la máxima atenuación inducida es alcanzada con un valor menor de  $\alpha$  y si la frecuencia se incrementa, el valor de  $\alpha$  para un  $\beta$  fijo también se reduce.

También es posible agregar un término de control vibracional en más de uno de los parámetros del sistema.



---

## 3.2 El Péndulo de Kapitza excitado periódicamente

### 3.2.1 Descripción del problema

El péndulo de Kapitza es un péndulo simple, rígido, al cual, se le aplica una excitación periódica en el punto de sujeción; este es un ejemplo típico de los sistemas con coeficientes periódicos. En esta sección se deducirá la ecuación del péndulo y se estimarán las condiciones de estabilidad del mismo. El modelo en este caso es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden. Aunque se puede obtener sin mayor problema una aproximación lineal que corresponde a una ecuación de Hill [39].

### 3.2.2 El modelo matemático

El esquema del péndulo de Kapitza es el siguiente:

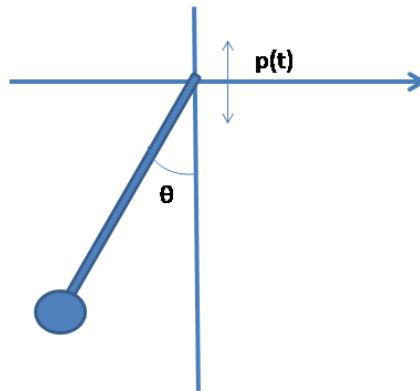


Figura 3-10. El péndulo de Kapitza. donde  $p(t)$  es la excitación en el punto de suspensión

donde  $l$  es la longitud del péndulo

$\theta$  es el ángulo medido a partir de la vertical

$p(t)$  es la función de excitación

Las energías cinética y potencial son:

$$T = \frac{1}{2}m \left( \left( l\dot{\theta} \cos(\theta) \right)^2 + \left( -l\dot{\theta} \sin(\theta) + \dot{p}(t) \right)^2 \right)$$

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) + \frac{1}{2}m \left( \dot{p}(t) \right)^2 - ml\dot{\theta} \sin(\theta)\dot{p}(t)$$

---


$$V = -mg(l \cos(\theta) + p(t))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \ddot{\theta} - ml \dot{\theta} \cos(\theta) \dot{p}(t) + ml \sin(\theta) \ddot{p}(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -ml \dot{\theta} \cos(\theta) \dot{p}(t)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgl \sin(\theta)$$

La ecuación es:

$$ml^2 \ddot{\theta} + (mgl + ml \ddot{p}(t)) \sin(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} + \frac{1}{l} \ddot{p}(t) \right) \sin(\theta) = 0 \quad (3.4)$$

sustituyendo  $p(t) = a \cos(wt)$

La oscilación de un péndulo con respecto a la posición vertical inferior, al cual, se le aplica una excitación periódica en el punto de suspensión, considerando que está sometido a una componente de fricción viscosa está gobernada por la ecuación:

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \left( w_0^2 - \frac{a}{l} w^2 \cos(wt) \right) \sin(\theta) = 0 \quad (3.5)$$

donde

$l$  longitud del péndulo

$g$  constante de aceleración gravitacional

$w$  frecuencia de la excitación

$a$  amplitud de la excitación

$\gamma$  es el coeficiente de fricción viscosa

$w_0$  frecuencia natural de oscilación  $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

### 3.2.3 Análisis de estabilidad

#### Utilizando la teoría de Floquet

La posición invertida del péndulo es estable si se cumple la siguiente condición [33]:

$$aw > \sqrt{2gl}$$

o también

$$2w_0^2 l^2 = a^2 w^2$$

donde las variables están definidas como en la ecuación (3.5), aquí se puede ver que la condición de estabilidad del péndulo depende de la frecuencia natural de oscilación mas no de la masa.

Linealizando al rededor del punto de equilibrio superior del péndulo (posición invertida), es decir  $\theta \approx \pi$ , el punto de equilibrio será  $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$ , se tiene

$$\ddot{\theta} + \left(-w_0^2 + \frac{a}{l}w^2 \cos(wt)\right) \theta = 0 \quad (3.6)$$

la ecuación (3.6) es una ecuación de Mathieu.

haciendo  $\alpha = -w_0^2$  y  $\beta = \frac{a}{l}w^2$  obtenemos:

$$\ddot{\theta} + (\alpha + \beta \cos(wt)) \theta = 0 \quad (3.7)$$

El diagrama de estabilidad para la región de parámetros  $(\alpha, \beta)$  haciendo  $w = 1$  la ecuación (3.7) se obtiene por medio de un programa de cálculo numérico punto por punto que utiliza las condiciones descritas en el capítulo 1 para la ecuación (1.19), el diagrama puede verse en la siguiente figura.

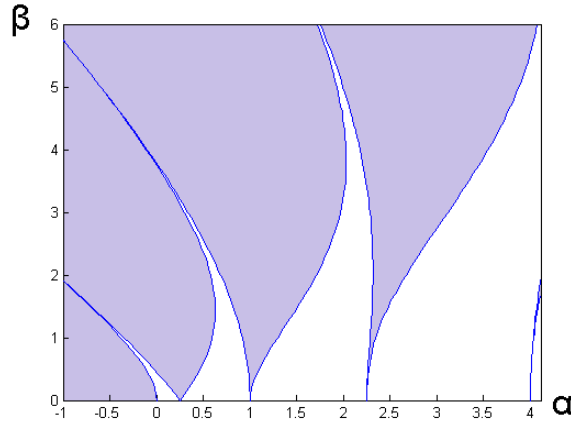


Figura 3-11. Diagrama de estabilidad para la ecuación de Mathieu sin amortiguamiento.

La zona blanca representa la región estable del diagrama, las zonas sombreadas en gris representan las regiones inestables. Las fronteras en general son inestables, tienen una solución periódica y la otra solución linealmente independiente es usualmente inestable. La excepción es cuando las fronteras izquierda y derecha colapsan en un solo punto y todas las soluciones son periódicas. Estos puntos son llamados puntos de Coexistencia [23]. Ver figura 3-12.

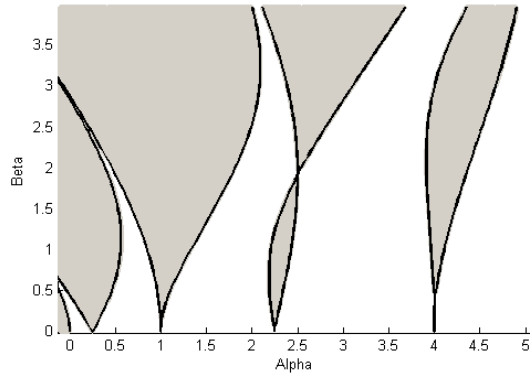


Figura 3-12. Esta gráfica muestra los puntos de coexistencia.

### 3.2.4 Calculando las curvas de transición por el método de perturbaciones

Cálculo de las curvas de transición de la ecuación de Mathieu con excitación periódica

Sea

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos(\omega t)) x = 0$$

por el método de perturbaciones se puede escribir:

$$x = x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2; \quad \alpha = \alpha_0 + \beta \alpha_1 + \beta^2 \alpha_2$$

sustituyendo

$$\left( \ddot{x}_0 + \beta \ddot{x}_1 + \beta^2 \ddot{x}_2 \right) + [(\alpha_0 + \beta \alpha_1 + \beta^2 \alpha_2) + \beta \cos(\omega t)] (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2)$$

igualando términos por potencias

$$\ddot{x}_0 + \alpha_0 x_0 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \alpha_0 x_1 = -x_0 \alpha_1 - x_0 \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_2 + \alpha_0 x_2 = -x_1 \alpha_1 - x_1 \cos(\omega t) - x_0 \alpha_2$$

Para  $x_0$  y haciendo

$$\alpha_0 = \frac{k^2 \omega^2}{4}, k = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

---

$$\ddot{x}_0 = 0 \Rightarrow x_0(t) = A_0$$

Para  $x_1$

$$\ddot{x}_1 = -A_0\alpha_1 - A_0 \cos(wt)$$

para que  $\ddot{x}_1$  sea periódica

$$\alpha_1 = 0$$

$$\ddot{x}_1 = -A_0 \cos(wt) \tag{3.8}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = A_1 + C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt)$$

$$\ddot{x}_1(t) = -C_1 w^2 \cos(wt) - C_2 w^2 \sin(wt)$$

igualando con la ecuación (3.8)

$$-C_1 w^2 \cos(wt) - C_2 w^2 \sin(wt) = -A_0 \cos(wt)$$

$$C_1 = \frac{A_0}{w^2}, C_2 = 0$$

$$x_1(t) = A_1 + \frac{A_0}{w^2} \cos(wt)$$

Para  $x_2$

$$\ddot{x}_2 = -(\cos(wt)) \left( A_1 + \frac{A_0}{w^2} \cos(wt) \right) - A_0\alpha_2$$

$$= -A_0\alpha_2 - A_1 \cos(wt) - \frac{A_0}{w^2} \cos^2(wt)$$

$$= -A_0\alpha_2 - A_1 \cos(wt) - \frac{A_0}{2w^2} [1 + \cos(2wt)]$$

$$= -A_0\alpha_2 - \frac{A_0}{2w^2} - A_1 \cos(wt) - \frac{A_0}{2w^2} \cos(2wt)$$

Para que la ecuación anterior sea periódica hacemos

$$-A_0\alpha_2 - \frac{A_0}{2w^2} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{2w^2}$$

de donde

---


$$\alpha = -\frac{1}{2w^2}\beta^2 \quad (3.9)$$

Sustituyendo  $\alpha = \frac{g}{l}, \beta = \frac{a}{l}w^2$

Se obtiene

$$\frac{g}{l} = -\frac{1}{2w^2} \left( \frac{a}{l}w^2 \right)^2 \Rightarrow 2gl = a^2w^2$$

La ecuación anterior establece la frontera de estabilidad, de donde para que el punto de equilibrio superior sea estable se debe cumplir la condición

$$aw > \sqrt{2gl}$$

Ahora para  $k = 1, \alpha_0 = \frac{w^2}{4}$

$$\ddot{x}_0 + \frac{w^2}{4}x_0 = 0 \Rightarrow x_0(t) = a_0 \cos\left(\frac{w}{2}t\right) + b \sin\left(\frac{w}{2}t\right)$$

Para  $x_1$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{w^2}{4}x_1 &= -(\alpha_1 + \cos(wt)) \left( a_0 \cos\left(\frac{w}{2}t\right) + b_0 \sin\left(\frac{w}{2}t\right) \right) \\ &= -\alpha_1 a_0 \cos\left(\frac{w}{2}t\right) - \alpha_1 b_0 \sin\left(\frac{w}{2}t\right) - a_0 \cos(wt) \cos\left(\frac{w}{2}t\right) - b_0 \cos(wt) \sin\left(\frac{w}{2}t\right) \\ &= -\alpha_1 a_0 \cos\left(\frac{w}{2}t\right) - \alpha_1 b_0 \sin\left(\frac{w}{2}t\right) - \frac{a_0}{2} \left[ \cos\left(\left(w + \frac{w}{2}\right)t\right) + \cos\left(\left(w - \frac{w}{2}\right)t\right) \right] - \\ &\quad - \frac{b_0}{2} \left[ \sin\left(\left(w + \frac{w}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(w - \frac{w}{2}\right)t\right) \right] \\ &= - \left[ \alpha_1 a_0 + \frac{a_0}{2} \right] \cos\left(\frac{w}{2}t\right) - \left[ \alpha_1 b_0 - \frac{b_0}{2} \right] \sin\left(\frac{w}{2}t\right) - \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{3w}{2}t\right) - \frac{b_0}{2} \sin\left(\frac{3w}{2}t\right) \end{aligned}$$

para obtener un comportamiento periódico

$$i) a_0 = 0 \text{ y } \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

$$ii) b_0 = 0 \text{ y } \alpha_1 = -\frac{1}{2}$$

de donde

---


$$\alpha = \frac{w^2}{4} \pm \frac{1}{2}\beta^2 + O(\beta^2)$$

El diagrama siguiente muestra las curvas de transición de la ecuación del péndulo de Kapitza, que son, las fronteras de las regiones estable e inestable del espacio de parámetros de la ecuación.

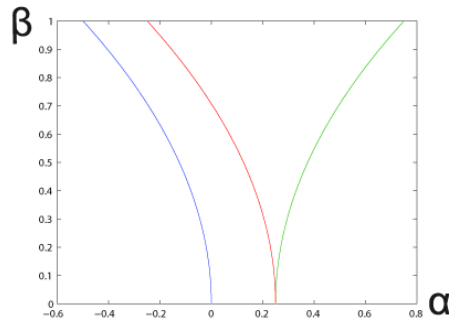


Figura 3-13. Diagrama de estabilidad para la ecuación del péndulo de Kapitza obtenido por el método de perturbaciones, con aproximación de segundo orden.

### 3.3 Prototipo del Péndulo de Kapitza

Para esta parte del trabajo se desarrolló un prototipo del péndulo de Kapitza, en el cual, es posible cambiar los parámetros  $a$  y  $w$  de la ecuación,  $a$  es la amplitud de la excitación y  $w$  es su frecuencia. La amplitud  $a$  varía con un mecanismo de desplazamiento continuo acoplado a un sistema de biela manivela. La frecuencia  $w$  varía por medio de la variación de la velocidad del motor.



Figura 3-14. Fotografía del prototipo del pendulo de Kapitza

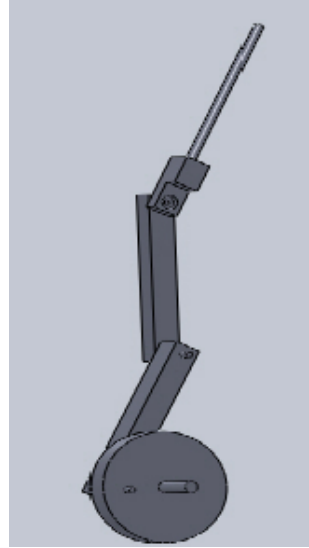


Figura 3-15. Esquema del prototipo del pendulo de Kapitza

Para propósitos prácticos en (3.5) se tiene

$$l = 0.295m, g = 9.81m/s^2, a \in (0, 0.085m), w \in (0, 32\pi rad/s)$$

Tomando (1.18) y haciendo

$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, k = \frac{\alpha}{w^2};$$

$$\theta'' + (k + \beta \cos(\tau))\theta = 0 \tag{3.10}$$

Haciendo pruebas sobre el prototipo, los valores obtenidos experimentalmente son:

$k$	$\beta$	$k$	$\beta$
-0.003	0.051	-0.039	0.152
-0.005	0.068	-0.045	0.169
-0.007	0.084	-0.049	0.186
-0.011	0.101	-0.057	0.203
-0.025	0.118	-0.063	0.220
-0.034	0.135		



---

### 3.3.1 Comparación de resultados teóricos y prácticos obtenidos del prototipo

Es necesario decir que la región estable de la zona de parámetros del punto de equilibrio superior del péndulo de Kapitza se encuentra en la parte negativa del eje horizontal del diagrama de estabilidad. Se han reescalado los valores obtenidos para hacerlos compatibles con el diagrama de estabilidad teórico de la ecuación (3.10).

En la siguiente figura se comparan los valores reales y los teóricos con un factor de amortiguamiento  $\gamma = 0.2$ , los taches representan los datos reales, la región negra representa la zona inestable y la región blanca la zona estable.

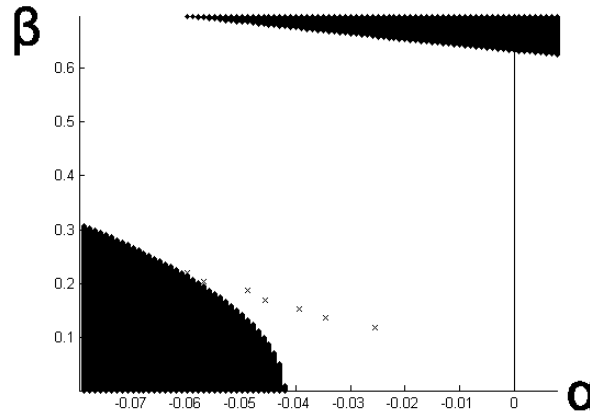


Figura 3-16. Comparando datos reales y teóricos.

La variación entre la frontera teórica y la experimental es debida a que en el cálculo de la frontera teórica se desprecia parte de la dinámica del sistema, se trabaja sobre una linealización de la ecuación y no es posible determinar exactamente el valor de la fricción en el prototipo.

(Ver [48], en el video se muestra el prototipo del péndulo de Kapitza, se hace una variación en la frecuencia de excitación hasta que la región de inestabilidad es alcanzada).

### Región de atracción del péndulo de Kapitza excitado periódicamente

Debido a que el péndulo de Kapitza ecuación (3.5) para efectos prácticos presenta un término de amortiguamiento, el diagrama de estabilidad de la ecuación con amortiguamiento está contenido en el diagrama de la ecuación no amortiguada, debido al amortiguamiento se presenta una región, en la cual, las soluciones de la ecuación no son sólo estables sino que además son asintóticamente estables.

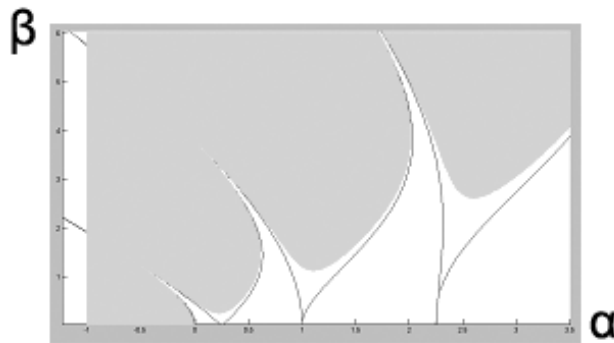


Figura 3-17. Diagrama de estabilidad de la Ecuación de Mathieu con disipación.

Entonces, existe una región de atracción, en la cual, si una perturbación mueve el péndulo de la posición de equilibrio vertical superior, el péndulo regresa al punto de equilibrio en el cual estaba.

El diagrama siguiente muestra los resultados experimentales de la región de atracción. Para obtener el diagrama se tomó un valor fijo de la amplitud de excitación  $\beta = 0.220$  en la ecuación (3.10) y se estimó el tamaño de la región para diferentes valores de la frecuencia de excitación  $w$ . En el diagrama el eje vertical representa la frecuencia  $w$  en  $rad/s$ . y el eje horizontal es el ángulo en grados.

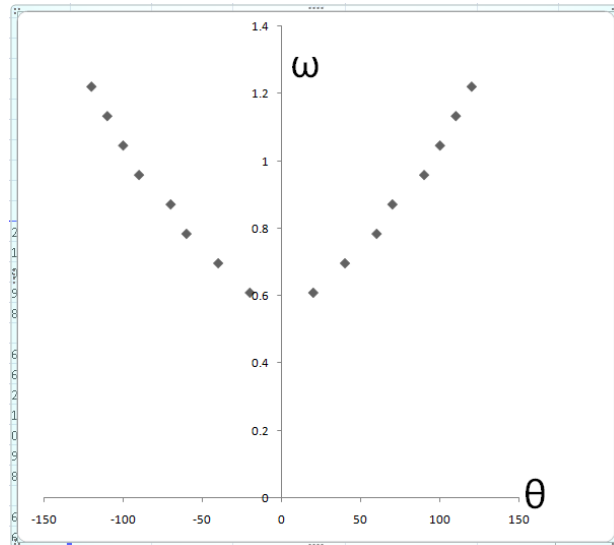


Figura 3-18. Región de atracción del punto de equilibrio superior del péndulo de Kapitza.  $w$  es la frecuencia angular de la excitación,  $\theta$  es el ángulo con la vertical en grados.

Ver [49], este video muestra una prueba en la región estable del punto de equilibrio superior del péndulo, el péndulo está sometido a una perturbación y es posible observar que el péndulo regresa al punto de equilibrio.

---

### 3.3.2 Conclusiones

Se puede notar en este punto que la estabilidad del péndulo invertido sujeto a excitación periódica vertical del punto de sujeción está gobernada por la ecuación de Mathieu (3.10), en la cual, dos parámetros  $(k, \beta)$  varían y no es necesario construir el diagrama considerando cambios de frecuencia de la excitación como en el prototipo, únicamente se deberán reescalar los valores de acuerdo con la ecuación (1.18).

Se puede observar que debido al amortiguamiento físico presente en el prototipo se presentan zonas de estabilidad asintótica en las que, cuando el péndulo invertido en equilibrio es perturbado, éste regresará a la posición de equilibrio a menos que la perturbación sea suficientemente grande para sobrepasar la región de atracción y el péndulo caera.

### 3.4 El Péndulo de Kapitza con excitación No periódica

Se introduce ahora una segunda excitación al punto de sujeción del péndulo de Kapitza (La segunda excitación es agregada por medio de una mesa vibrante).

$z(t) = a \cos(\omega t)$  es la excitación del punto de sujeción del péndulo.

La figura siguiente muestra el esquema del péndulo de Kapitza sobre la mesa vibrante:

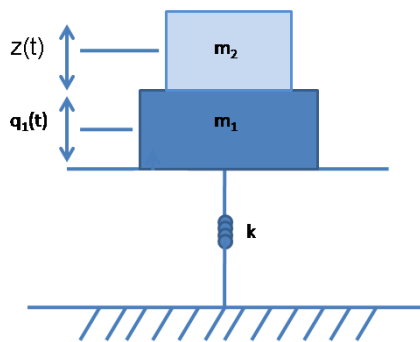


Figura 3-19. Esquema del Péndulo de Kapitza sobre una mesa vibrante.

Cuando la mesa vibrante se agrega al péndulo original, se obtiene casi siempre una excitación no periódica debido a que las frecuencias de excitación en el péndulo no son valores commensurables.

### 3.4.1 El modelo matemático

Si se considera que el movimiento de la mesa vibrante es  $q_1$  la excitación del péndulo será  $p(t) + q_1$ .

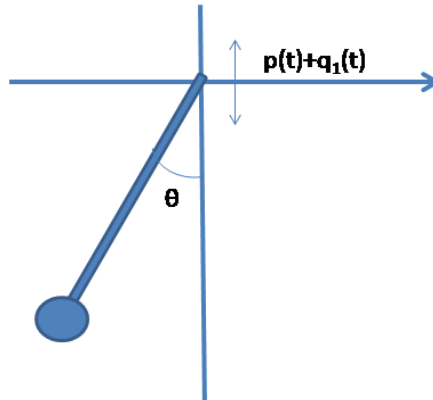


Figura 3-20. Diagrama del péndulo de Kapitza considerando la excitación de la mesa vibrante

Sustituyendo la nueva excitación en la ecuación (3.4) se tiene:

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} + \frac{1}{l} \left( \ddot{p}(t) + \ddot{q}_1 \right) \right) \sin(\theta) = 0$$

Sustituyendo  $p(t) = a \cos(\omega t)$

Ecuación del péndulo sometido a dos vibraciones en el punto de suspensión

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} - \frac{a\omega^2}{l} \cos(\omega t) + \frac{1}{l} \ddot{q}_1 \right) \sin(\theta) = 0 \quad (3.11)$$

#### Ecuación de la mesa vibrante

Las energías cinética y potencial son:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \dot{q}_1 + \dot{p}_1(t) \right)^2$$

$$V = \frac{1}{2} k q_1^2 - m_1 g q_1 - m_2 g (q_1 + p_1(t))$$

$$e_i^s = p_2(t)$$

donde

$$p_1(t) = a \cos(\omega t)$$

$$p_2(t) = b \cos(\gamma t)$$

$g$  es la aceleración de la gravedad

$e_i^s$  son la fuerzas externas aplicadas al sistema [9].

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + m_2 \ddot{p}_1(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = kq_1 - (m_1 + m_2)g$$

La ecuación de la mesa queda como

$$(m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + kq_1 = (m_1 + m_2)g - m_2 \ddot{p}_1(t) + p_2(t)$$

Sustituyendo  $p_1(t) = a \cos(\omega t)$  y  $p_2(t) = b \cos(\gamma t)$

$$(m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + kq_1 = (m_1 + m_2)g + m_2 a \omega^2 \cos(\omega t) + b \cos(\gamma t)$$

Las ecuaciones del sistema completo de Péndulo de Kapitza sobre mesa vibrante son:

Para el péndulo

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} - \frac{a\omega^2}{l} \cos(\omega t) + \frac{1}{l} \ddot{q}_1 \right) \sin(\theta) = 0 \quad (3.12)$$

Para la mesa vibrante

$$(m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + kq_1 = (m_1 + m_2)g + m_2 a \omega^2 \cos(\omega t) \quad (3.13)$$

donde

$q_1$  movimiento de la mesa vibrante

$m_1$  masa de la mesa vibrante

$m_2$  masa del péndulo

$k$  constante de elasticidad del resorte

Se despeja  $\ddot{q}_1$  de la ecuación de la mesa

$$(m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + kq_1 = (m_1 + m_2)g + m_2 a \omega^2 \cos(\omega t)$$

sea  $m = m_1 + m_2$

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{m} (mg + m_2 a \omega^2 \cos(\omega t) - kq_1)$$

Se sustituye  $q_1(t)$  es la ecuación del péndulo:

---


$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} - \frac{aw^2}{l} \cos(wt) + \frac{1}{ml} (mg + m_2aw^2 \cos(wt) - kq_1) \right) \sin(\theta) = 0$$

reacomodando términos

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{2g}{l} - \frac{aw^2}{ml} m_1 \cos(wt) - \frac{k}{m} q_1 \right) \sin(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{ml} (2mg - aw^2 m_1 \cos(wt) - kq_1) \sin(\theta) = 0 \quad (3.14)$$

### Solución de la ecuación de la mesa vibrante

Dada la ecuación (3.13), sean  $m_1, m_2, k, g, a, b, w, \gamma \geq 0$

Las soluciones homogénea y particular son:

$$q_{1h}(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$q_{1p}(t) = C_3 + C_4 \cos(wt) + C_5 \sin(wt)$$

sustituyendo en la ec. (3.13)

$$\begin{aligned} -C_4 w^2 \cos(wt) - C_5 w^2 \sin(wt) + \frac{k}{m} (C_3 + C_4 \cos(wt) + C_5 \sin(wt)) = \\ = g + \frac{m_2 a w^2}{m} \cos(wt) \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{k}{m} C_3 = g \Rightarrow C_3 = \frac{mg}{k}$$

$$\left( \frac{k - w^2 m}{m} \right) C_4 = \frac{m_2 a w^2}{m} \Rightarrow C_4 = \frac{a m_2 w^2}{k - m w^2}$$

$$\left( \frac{k - w^2 m}{m} \right) C_5 = 0 \Rightarrow C_5 = 0$$

La solución será:

$$q_1(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{mg}{k} + \frac{am_2w^2}{k - mw^2} \cos(wt)$$

Suponiendo condiciones iniciales  $q_1(0) = 0, \dot{q}_1(0) = 0$

$$q_1(0) = 0 = C_1 + \frac{mg}{k} + \frac{am_2w^2}{k - mw^2} \Rightarrow C_1 = \frac{am_2w^2}{mw^2 - k} - \frac{mg}{k}$$

$$\dot{q}_1(0) = 0 = \sqrt{\frac{k}{m}}C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

La solución general para la mesa vibrante es:

$$q_1(t) = \left[ \frac{am_2w^2}{mw^2 - k} - \frac{mg}{k} \right] \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{mg}{k} + \frac{am_2w^2}{k - mw^2} \cos(wt) \quad (3.15)$$

Sustituyendo la solución de la mesa vibrante (3.15) en la ecuación del péndulo (3.14)

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{ml} \left( 2mg - aw^2m_1 \cos(wt) - k \left\{ \left[ \frac{am_2w^2}{mw^2 - k} - \frac{mg}{k} \right] \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{mg}{k} + \frac{am_2w^2}{k - mw^2} \cos(wt) \right\} \right) \sin(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{ml} \left( mg + \left[ \frac{-km_2aw^2}{k - w^2m} - aw^2m_1 \right] \cos(wt) - k \left[ \frac{am_2w^2}{mw^2 - k} - \frac{mg}{k} \right] \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right) \sin(\theta) = 0$$

Sean

$$A_0 = -k \left[ \frac{am_2w^2}{mw^2 - k} - \frac{mg}{k} \right], A_1 = \frac{-km_2aw^2}{k - w^2m} - aw^2m_1,$$

Con lo cuál la ecuación para el péndulo de Kapitza montado sobre una mesa vibrante es:

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{ml} \left( mg + A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + A_1 \cos(wt) \right) \sin(\theta) = 0$$

linealizando al rededor de  $\theta = 0$  se obtiene:

---


$$\ddot{\theta} + \frac{1}{ml} \left( mg + A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + A_1 \cos(wt) \right) \theta = 0 \quad (3.16)$$

donde

$$m = m_1 + m_2, \quad A_0 = -k \left[ \frac{am_2w^2}{mw^2 - k} - \frac{mg}{k} \right],$$

$$A_1 = \frac{-km_2aw^2}{k - w^2m} - aw^2m_1, \quad k \neq w^2m$$

La característica del espectro del conjunto de Cantor para la ecuación de Mathieu periódicamente excitada [29],[32], desaparece cuando el término de amortiguamiento está presente y el diagrama de estabilidad se parece a uno periódico.

### 3.4.2 Análisis de estabilidad por medio del método de Perturbaciones

Sea la ecuación

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos(wt) + \beta \cos(\theta t)) x = 0$$

por el método de perturbaciones se puede escribir:

$$x = x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2$$

$$\alpha = \alpha_0 + \beta \alpha_1 + \beta^2 \alpha_2$$

sustituyendo

$$\left( \ddot{x}_0 + \beta \ddot{x}_1 + \beta^2 \ddot{x}_2 \right) + \left[ (\alpha_0 + \beta \alpha_1 + \beta^2 \alpha_2) + \beta \cos(wt) + \beta \cos(\theta t) \right] \cdot$$

$$\cdot (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2)$$

igualando términos por potencias

$$\ddot{x}_0 + \alpha_0 x_0 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \alpha_0 x_1 = -x_0 \alpha_1 - x_0 (\cos(wt) + \cos(\theta t))$$

$$\ddot{x}_2 + \alpha_0 x_2 = -x_1 \alpha_1 - x_1 (\cos(wt) + \cos(\theta t)) - x_0 \alpha_2$$



suponiendo  $k = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$

$$\ddot{x}_0 = 0 \Rightarrow x_0(t) = A_0$$

para  $x_1$

$$\ddot{x}_1 = -A_0\alpha_1 - A_0(\cos(wt) + \cos(\theta t))$$

para que sea periódica

$$\alpha_1 = 0 \text{ y } w = m\phi, \theta = n\phi, w \text{ y } \theta \text{ commensurables}$$

$$\ddot{x}_1 = -A_0(\cos(m\phi t) + \cos(n\phi t))$$

$$\ddot{x}_1 = -A_0(\cos(wt) + \cos(\theta t)) \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = C_1 + C_2 \cos(n\phi t) + C_3 \sin(n\phi t) + C_4 \cos(m\phi t) + C_5 \sin(m\phi t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) = & -C_2 n^2 \phi^2 \cos(n\phi t) - C_3 n^2 \phi^2 \sin(n\phi t) - m^2 \phi^2 C_4 \cos(m\phi t) - \\ & - m^2 \phi^2 C_5 \sin(m\phi t) \end{aligned}$$

igualando a (3.17)

$$C_2 = \frac{A_0}{n^2 \phi^2}, C_3 = 0, C_4 = \frac{A_0}{m^2 \phi^2}, C_5 = 0$$

$$x_1(t) = C_1 + \frac{A_0}{n^2 \phi^2} \cos(n\phi t) + \frac{A_0}{m^2 \phi^2} \cos(m\phi t)$$

sea

$$x_1(0) = A_1 = C_1 + \frac{A_0}{n^2 \phi^2} + \frac{A_0}{m^2 \phi^2}$$

$$C_1 = A_1 - \frac{A_0}{n^2 \phi^2} - \frac{A_0}{m^2 \phi^2}$$

$$x_1(t) = \left[ A_1 - \frac{A_0}{n^2 \phi^2} - \frac{A_0}{m^2 \phi^2} \right] + \frac{A_0}{n^2 \phi^2} \cos(n\phi t) + \frac{A_0}{m^2 \phi^2} \cos(m\phi t)$$

para  $x_2$

---


$$\begin{aligned}
\ddot{x}_2 + \alpha_0 x_2 &= - [(\cos(m\phi t) + \cos(n\phi t))] \left( \left[ A_1 - \frac{A_0}{n^2\phi^2} - \frac{A_0}{m^2\phi^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{A_0}{n^2\phi^2} \cos(n\phi t) + \frac{A_0}{m^2\phi^2} \cos(m\phi t) \right) - x_0 \alpha_2 \\
&= - \left[ A_1 - \frac{A_0}{n^2\phi^2} - \frac{A_0}{m^2\phi^2} \right] (\cos(m\phi t) + \cos(n\phi t)) - \left[ \frac{A_0}{n^2\phi^2} + \frac{A_0}{m^2\phi^2} \right] \\
&\quad \cdot \cos(m\phi t) \cos(n\phi t) - \frac{A_0}{n^2\phi^2} \cos^2(n\phi t) - \frac{A_0}{m^2\phi^2} \cos^2(m\phi t) - A_0 \alpha_2 \\
&= - \left[ A_1 - \frac{A_0}{n^2\phi^2} - \frac{A_0}{m^2\phi^2} \right] (\cos(m\phi t) + \cos(n\phi t)) - \frac{1}{2} \left[ \frac{A_0}{n^2\phi^2} + \frac{A_0}{m^2\phi^2} \right] \\
&\quad \cdot [\cos((m+n)\phi t) \cos((m-n)\phi t)] - \frac{A_0}{2n^2\phi^2} [1 + \cos(2n\phi t)] - \\
&\quad - \frac{A_0}{2m^2\phi^2} [1 + \cos(2m\phi t)] - A_0 \alpha_2
\end{aligned}$$

Para forzar que la solución sea periódica es necesario que:

$$-A_0 \alpha_2 - \frac{A_0}{2n^2\phi^2} - \frac{A_0}{2m^2\phi^2} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = - \left[ \frac{1}{2n^2\phi^2} - \frac{1}{2m^2\phi^2} \right] = -\frac{1}{2\phi^2} \left[ \frac{n^2 + m^2}{n^2 m^2} \right]$$

de donde

$$\alpha = -\frac{1}{2\phi^2} \left[ \frac{n^2 + m^2}{n^2 m^2} \right] \beta^2$$

Aquí no es posible seguir estimando las demás curvas de transición pues no es posible usar la teoría de Floquet para calcular el punto donde inician las demás lenguas.

### 3.4.3 Prototipo del Péndulo de Kapitza excitado de forma No Periódica

Para esta parte del trabajo, se agregó una mesa vibrante al prototipo del péndulo de Kapitza de la sección anterior que se puede ver en la siguiente figura, la frecuencia natural de oscilación de la mesa vibrante es constante y depende de los elementos físicos con que está construida. Ver [50]. Este video muestra

---

el prototipo del péndulo de Kapitza sobre la mesa vibrante, la frecuencia de la excitación inicia proximadamente a los  $100\text{rad/s}$ , la frecuencia de excitación se reduce gradualmente. Por los 20s. se comienza a incrementar la vibración de la mesa, por el minuto con 15 segundos la frecuencia de la excitación alcanza los  $40\text{rad/s}$  y la vibración de la mesa alcanza su máxima amplitud (resonancia), al 1:30 la frecuencia ya disminuyó lo suficiente para dejar el punto de resonancia y la vibración de la mesa decrece y finalmente al tiempo 1:45 el punto de equilibrio superior del péndulo alcanza la inestabilidad paramétrica y el péndulo cae.



Figura 3-21. Fotografía del prototipo del péndulo de Kapitza sobre la mesa vibrante.

#### 3.4.4 Diagrama de estabilidad experimental

Sobre el prototipo se observa que cuando el péndulo se encuentra sobre la mesa vibrante, su comportamiento cambia, de hecho, la región inestable de parámetros se alcanza con valores de la frecuencia de excitación  $w$  mayores que los registrados sin la mesa. En la siguiente figura se muestran los valores medidos de la frontera de estabilidad sin la mesa vibrante (circulos) y los valores medidos para la frontera de estabilidad sobre la mesa vibrante (cuadros).

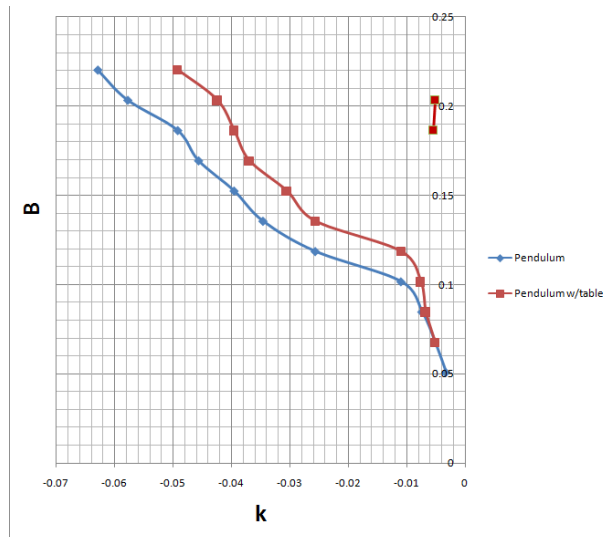


Figura 3-22. Fronteras de estabilidad del Péndulo de Kapitza Vs Péndulo de Kapitza sobre la mesa vibrante.

Por ejemplo, sobre la mesa vibrante con  $k = 0.035$ , y  $\beta = 0.135$  el péndulo es estable pero oscila al rededor del punto de equilibrio superior, este fenómeno es llamado "beating" [2] (Ver video [51]).

Para  $\beta = 0.18$ , existen dos rangos frecuencia que tienen un comportamiento inestable,  $w < 29rad/s$  ( $k = 0.039$ ) y  $w > 78rad/s$  ( $k = 0.0054$ ), Ver video [52]. En el video se puede observar que si la frecuencia de excitación se reduce o se incrementa, el punto de equilibrio superior del péndulo de Kapitza se vuelve inestable.

### 3.4.5 Conclusiones

La inclusión de la segunda excitación en el punto de sujeción (mesa vibrante) modifica el comportamiento de la estabilidad del péndulo, alcanzándose la frontera de la región inestable en valores de la excitación  $w$  mayores que los valores para el péndulo sin mesa. Usando el péndulo sobre la mesa vibrante se presenta el fenómeno de "beating" que no ocurre en el péndulo de Kapitza excitado periódicamente. Cuando las dos frecuencias no son conmensurables no es posible utilizar la teoría de Floquet para estimar las fronteras de estabilidad y se tendrá que utilizar algún otro método por ejemplo el de perturbaciones.

## 3.5 El Puente de Tacoma

### 3.5.1 Descripción del problema

Se analiza el puente de Tacoma debido a que ha sido una gran catástrofe en la ingeniería civil en los Estados Unidos y según estudios previos la caída del puente se debió al fenómeno de resonancia paramétrica [36]. Partimos de las ecuaciones propuestas por Vlasov y tomadas por Yakubovich en [45] en las cuales, la fuerza del viento se considera que varía de manera periódica, lo cual, da pie a utilizar la teoría de Floquet y de resonancia paramétrica. Será un ejemplo que nos permitirá explorar un análisis de estabilidad a un sistema descrito por ecuaciones diferenciales parciales y modelado en una sola dimensión espacial y se utilizará el Método de Galerkin para aproximar sus soluciones.

### 3.5.2 El modelo matemático

Se comenzará el análisis partiendo de las ecuaciones de la dinámica del puente de Tacoma presentadas por Yakubovich en [45].

Se asumirá que  $\eta$  es la deflexión vertical del eje  $x$  del puente,  $\phi$  es el ángulo de torsión de la sección transversal.

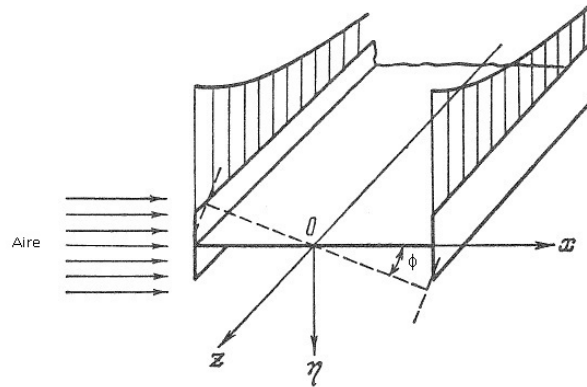


Figura 3-23. Esquema del puente de Tacoma

Las ecuaciones flexional y torsional del puente de suspensión son:

$$pF \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - r_1^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} \right) + EFr_1^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - 2H \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial (M_y \phi)}{\partial z^2} = \bar{q}_y$$

$$p \left( Fr^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - I_w \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} \right) + M_y \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - \left( GI_d \frac{Hb^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \bar{M} \quad (3.18)$$

$$\phi(o, t) = \phi(l, t) = \eta(o, t) = \eta(l, t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \phi(o, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi(l, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta(o, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta(l, t)}{\partial z^2} = 0$$

Donde

$l$  - es la longitud del puente;  $H$  - es la tensión en los cables de soporte;  $q$  - fuerza del viento;  $M_y$  - momento de flexión;  $\eta$  - flexión vertical del puente;  $\phi$  - ángulo de giro de la sección transversal;  $G$  - es el módulo en cortante;  $E$  - modulo de elasticidad;  $q_y$  - sustentación

Si se introducen las variables adimensionales

$$u_1 = \frac{\eta}{l}, u_2 = \frac{r}{l}, \zeta = \frac{z}{l}$$

Y se sustituyen en la ecuacion (3.18), despreciando la sustentación tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \alpha_1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial \zeta^2 \partial t^2} + \frac{g}{l} \left( \beta_1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial \zeta^4} - \gamma_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} + \lambda \frac{\partial^2 (f_o u_2)}{\partial \zeta^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \alpha_2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial \zeta^2 \partial t^2} + \frac{g}{l} \left( \lambda f_o \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} + \beta_2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial \zeta^4} - \gamma_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \zeta^2} - \lambda \delta u_2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$u_j(0, t) = u_j(1, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_j(0, t)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 u_j(1, t)}{\partial \zeta^2} = 0, \quad j = 1, 2$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{ql}{\rho r}, \alpha_1 = \frac{r_1^2}{l^2}, \beta_1 = \frac{EFr_1^2}{\rho l_3}, \gamma_1 = \frac{2H}{\rho l}, \alpha_2 = \frac{I_w}{Fr^2 l^2} \\ \beta_2 &= \frac{EI_w}{\rho r^2 l^3}, \gamma_2 = \frac{GI_d + \frac{1}{2}Hb^2}{\rho r^2 l}, \delta = \frac{b}{2\rho}, f_o = \frac{1}{2}\zeta(1 - \zeta) \end{aligned}$$

$\rho$  - es el peso por unidad de longitud del puente

$g$  - es la aceleración de la gravedad

Se asume que el puente está bajo el efecto de una excitación periódica transversal al puente, en este caso el viento que puede modelarse como:

$$q = q_0 + q_1 \cos(2\theta t)$$

$\theta$  - es la frecuencia con que el vórtice cruza la orilla del puente.

$$\theta = k \cdot v, k = 2\pi S/h$$

$v$  – velocidad del viento

$h$  – dimensión lateral característica del perfil del puente (ancho)

$S$  – número de Strouhal,  $S \approx 0.16$

Los vórtices cruzan las dos orillas del puente alternadamente por lo tanto se toma en consideración el doble de la frecuencia en la acción del viento en el puente.

Y reescribimos la ecuación del viento de la siguiente manera

$$p(t) = p_0 + p_1 \cos(2\theta t)$$

con

$$p_0 = (q_0 l)/(\rho r), p_1 = (q_1 l)/(\rho r)$$

### 3.5.3 Aplicación del Método de Galerkin a la PDE

Para reducir el sistema de ecuaciones diferenciales parciales a un sistema de ecuaciones ordinarias se aplicará el Método de Galerkin que consiste en proponer una solución separable como producto de la solución espacial y la solución temporal.

Usando  $w_i(\zeta) = \sqrt{2} \sin(i\pi\zeta)$  como la solución espacial, la solución general será:

$$u(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n w_n(\zeta) \quad (3.20)$$

$w_i(\zeta)$  - son los elementos de la base del espacio finito en la cual se obtendrá la aproximación

La sumatoria viene dada al resolver el problema de eigenvalores que se presenta de la solución separable. Cada valor de  $n$ , genera un modo normal de oscilación.

Se sustituye (3.20) en las ecuaciones del sistema (3.19) obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_i(\zeta) \left[ m_v \frac{d^2 y_{1n}}{dt^2} + c_v y_{1n} + d_v y_{2n} \right] = 0$$

Tomando los primeros  $n$  modos naturales de oscilación se genera un sistema de  $2n$  ecuaciones en términos de  $y_{1n}$  y  $y_{2n}$ ; Los primeros  $n$  componentes de la ecuación corresponden con la deflexión horizontal del puente y los últimos  $n$  son el comportamiento torsional.

Introduciendo

$$y = \underbrace{[y_1 \dots y_n]}_{flexion}, \underbrace{[y_{n+1} \dots y_{2n}]}_{torsión}^T$$

Se obtiene el siguiente sistema

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + (P_0 + p(t)P_1)y = 0$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{2n} \end{bmatrix}; P_0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{2n} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & B \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$A = \|a_{\mu v}\|_{\mu, v=1}^n, B = \|b_{\mu v}\|_{\mu, v=1}^n$$

donde  $A = \|a_{\mu v}\|_{\mu, v=1}^n$ , representa que  $A$  es una matriz de  $n \times n$

$$m_v = 1 + \alpha_v v^2 \pi^2, c_v = \frac{g}{l} (\beta_v v^4 \pi^4 + \gamma_v v^2 \pi^2), v = 1, 2, \dots, 2n;$$

$$\alpha_v = \alpha_1, \beta_v = \beta_1, \gamma_v = \gamma_1, \text{ para } v \leq n \quad y$$

$$\alpha_v = \alpha_2, \beta_v = \beta_2, \gamma_v = \gamma_2, \text{ para } v > n$$

$$a_{\mu v} = \begin{cases} -\frac{g}{4l} \left(1 + \frac{1}{3}v^2\pi^2\right), & \mu = v, \\ \frac{2gv\mu^3|(-1)^\mu + (-1)^v|}{l(v^2 - \mu^2)^2}, & \mu \neq v, \end{cases}$$

$b_{\mu v} = -\frac{g_0}{l} \delta_{\mu v}$ ,  $\delta_{\mu v}$  es la delta de Kronecker.

En la ecuación (3.21) los términos correspondientes con los valores de  $B$  representaran la magnitud de los modos simples de torsión afectados por la excitación paramétrica y los valores correspondientes de  $A$  representan los modos combinados (Flexión-Torsión) o modos de acoplamiento.

Reescribiendo

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (M^{-1}P_0 + p(t)M^{-1}P_1) y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (Q_0 + p(t)Q_1) y = 0 \quad (3.22)$$

donde  $Q_0 = M^{-1}P_0$ , y  $Q_1 = M^{-1}P_1$ .



---

Se tiene una ecuación vectorial de Mathieu con:

$$p(t) = p(t + T) = \alpha + \beta \cos(\omega t) \quad (3.23)$$

### 3.5.4 Análisis de estabilidad

Utilizando la ecuación (3.22) se dibuja el diagrama de estabilidad del puente de Tacoma relativa a los parámetros de la excitación paramétrica de la ecuación (3.23). El proceso de obtener el diagrama de estabilidad es basado en un programa Matlab que evalúa pares de parámetros de la excitación y determina punto por punto si la respuesta del sistema es estable o no.

En la ecuación (3.22) se puede observar que la excitación  $p(t)$  se aplica únicamente a los modos rotacionales del puente, puesto que en  $Q_1$  todos los valores correspondientes con los modos de flexión son cero, a pesar de ello su efecto pasa a los modos de flexión debido los términos de acoplamiento contenidos en las ecuaciones del sistema.

En el sistema se variaron los parámetros  $(\alpha, \omega)$  obteniendo el siguiente diagrama de estabilidad.

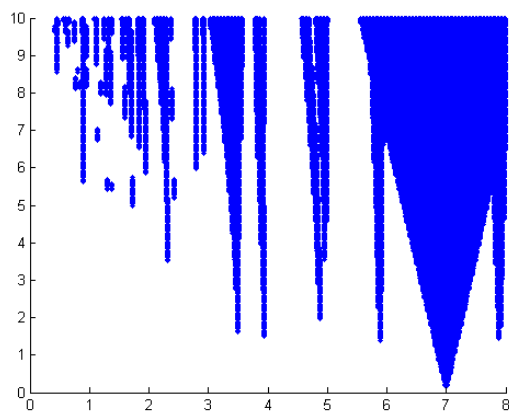


Figura 3-24. Gráfica de estabilidad del puente de Tacoma cuando varían  $(\beta, \omega)$

Si los parámetros que varían son  $(\alpha, \beta)$  obtenemos el diagrama

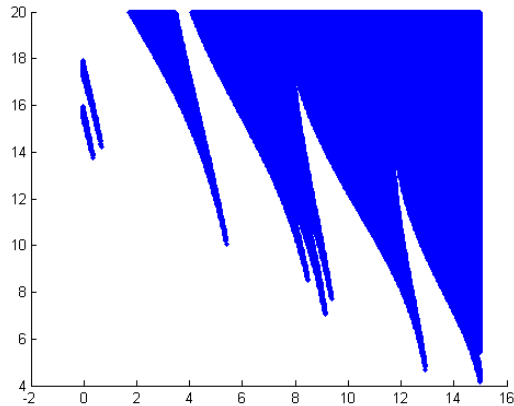


Figura 3-25. Diagrama de estabilidad para el puente de Tacoma utilizando 3 modos en flexión y 3 en torsión.

En la figura anterior los puntos de la zona en color negro representan el comportamiento inestable de las soluciones, y la zona blanca es la parte estable.

### 3.5.5 Conclusiones

Sobre el ejemplo del Puente de Tacoma, podemos observar que al ser un sistema modelado considerando parámetros distribuidos, es necesario modelarlo a través de ecuaciones diferenciales parciales, como se mencionó en los antecedentes del trabajo esto implica que no es posible calcular la solución analítica y por tanto habrá que utilizar algún método de aproximación, en este caso se utiliza el Método de Galerkin que nos convierte la ecuación diferencial parcial en un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias usando  $n$  modos naturales de oscilación, con este cambio, es posible identificar las zonas de parámetros en las que el puente será estable o inestable y dibujar el diagrama de estabilidad de la ecuación diferencial parcial.

Se observa también que a pesar de que la excitación periódica se aplica únicamente a los modos torsionales de la ecuación del puente, la oscilación se transmite a los modos de flexión provocando problemas de estabilidad también en dichos modos, debido al acoplamiento existente en las ecuaciones.

Ver video [47], en el video se puede ver el comportamiento del puente justo antes de caerse.

# Capítulo 4

## Modelado y Análisis de una plataforma petrolera

### 4.1 Análisis de una membrana rectangular

Se analiza primeramente la membrana rectangular por ser un modelo más sencillo para la plataforma, en este modelo, no se consideran componentes de fricción o amortiguamiento en el sistema, tomándose en cuenta que el material es completamente elástico y puede considerarse además el material isotrópico, con lo cual, las propiedades físicas serán las mismas en cualquier dirección considerada.

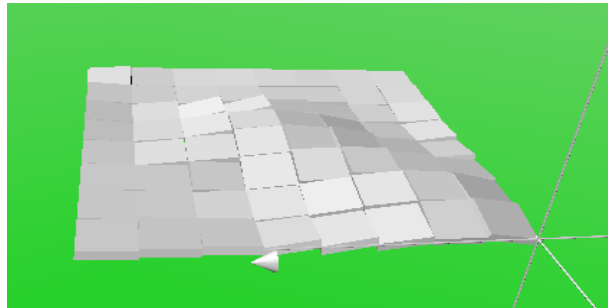


Figura 4-1. Esquema de una membrana rectangular.

#### 4.1.1 El modelo matemático

Una membrana se puede modelar por medio de la ecuación de onda en dos dimensiones, que es una ecuación diferencial parcial (PDE) de tres variables independientes, si se considera que el material de la membrana no es isotrópico será:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

---

Una membrana isotr3pica tendr3a por ecuaci3n:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

Las condiciones iniciales de la ecuaci3n son:

$$u(x, y, 0) = \alpha(x, y); \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \beta(x, y)$$

donde

$c, d$  son constantes de las caracter3sticas del material

$x, y$  son las variables espaciales

$u$  es la posici3n vertical de cada punto de la membrana

Tomando condiciones de frontera homog3neas alrededor de la membrana,  $u =$

0. Se puede proponer una soluci3n separable de la ecuaci3n (4.2) como:

$$u(x, y, t) = h(t)\varphi(x, y) \quad (4.3)$$

sustituyendo (4.3) en (4.2) se tiene:

$$\varphi(x, y) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 h(t) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$$

reacomodando t3rminos

$$\frac{1}{c^2 h} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{1}{\varphi} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$$

Se observa que el lado izquierdo de la ecuaci3n es solamente dependiente del tiempo y el lado derecho depende 3nicamente de las variables espaciales, por lo tanto, la igualdad se satisface s3lo por una constante  $\lambda$ , debido que  $t$  es independiente de las variables espaciales y viceversa [[15], [25], [20]], reescribimos la ecuaci3n parcial (4.2) como dos ecuaciones diferenciales, una ordinarias con respecto al tiempo y otra parcial que depende s3lo de las variables espaciales.

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\lambda \varphi \quad (4.5)$$

El signo menos de  $\lambda$  es debido a que para la soluci3n del problema se requieren valores caracter3sticos positivos.

---

### 4.1.2 Condiciones iniciales y de frontera

Se analiza ahora el efecto de las condiciones de frontera en las ecuaciones, se considera una membrana rectangular de dimensiones  $L \times H$

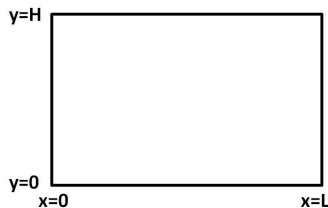


Figura 4-2. Condiciones de frontera de la membrana.

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 0 & \quad u(x, 0, t) = 0 \\ u(L, y, t) = 0 & \quad u(0, H, t) = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Las condiciones de frontera homogéneas completan el problema bidimensional de eigenvalores como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -\lambda \varphi \\ \varphi(0, y) = 0 & \quad \varphi(x, 0) = 0 \\ \varphi(L, y) = 0 & \quad \varphi(0, H) = 0 \end{aligned}$$

#### Aproximación de la solución mediante el método de Galerkin

Este nuevo problema es también lineal y homogéneo, se vuelve a proponer una segunda solución separable como:

$$\varphi(x, y) = f(x)g(y) \tag{4.7}$$

sustituyendo (4.7) en (4.5)

$$g(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f(x) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\lambda f(x)g(y)$$

reescribiendo

---


$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\lambda \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

Claramente el lado izquierdo de la ecuación depende únicamente de  $x$  y el lado derecho está sólo en términos de  $y$ , si se introduce una segunda constante de separación  $\mu$  se puede nuevamente reducir la ecuación diferencial parcial obteniendo dos ecuaciones diferenciales ordinarias una para cada variable espacial:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\mu f \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2 g}{dy^2} = -(\lambda - \mu)g \quad (4.9)$$

Con condiciones de frontera:

$$f(0) = 0 \quad y \quad f(L) = 0; \quad g(0) = 0 \quad y \quad g(H) = 0$$

Se obtienen dos problemas de eigenvalores del tipo de Sturm-Liouville [[15], [25]], uno para cada variable.

### El problema de eigenvalores

Para la ecuación (4.8) sus valores característicos son:

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y sus correspondientes funciones características

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

En este caso el problema tiene infinito número de valores característicos.

Usando la ecuación (4.9) también obtenemos un infinito número de valores característicos y este problema depende de las dos constantes de separación propuestas, por tanto, se asignan dos índices que serán utilizados para representar la variación de las dos constantes de separación.

Los valores característicos:

$$\lambda_{nm} - \mu_n = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \text{ para cada } \mu_n$$

Sus correspondientes funciones características

$$g_{nm}(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)$$

la constante de separación para este caso  $\lambda_{nm}$  se calcula como:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

así la solución espacial será:

$$\varphi(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

### La solución General

Se propone ahora una solución general para la ecuación (4.2) como una solución separable (Método de Galerkin [[14], [21]])

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{nm}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.10) en (4.2) se tiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)}_{\text{Solución espacial}} \cdot \quad (4.11)$$

$$\cdot \left[ \underbrace{\frac{d^2 y_{nm}}{dt^2} + c^2 \left( \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \right) y_{nm}(t)}_{\text{Ecuación temporal}} \right] = 0$$

### Frecuencias naturales de oscilación

Se calculan a continuación las frecuencias naturales de oscilación de los tres primeros modos, estos modos, para efectos prácticos son los modos de mayor energía.

$$w_k(n, m) = c \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2}$$

Para un ejemplo numérico, sean  $c = 2.2361$ ,  $L = H = 40$

Modo		Frecuencia
$n$	$m$	(rad/s)
1	1	0.8862
2	2	1.2533
3	3	1.5350

### 4.1.3 Excitación paramétrica de la membrana en la variable temporal

Ahora, se agrega un término de excitación paramétrica a la membrana, en este momento, únicamente a la parte temporal de la ecuación sin modificar la respuesta espacial.

La excitación paramétrica será:

$$p(t) = \alpha + \beta \cos(\omega t) \quad (4.12)$$

Se obtiene la ecuación temporal

$$\frac{d^2 y_{nm}}{dt^2} + c^2 \left[ \left( \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{H} \right)^2 \right) + p(t) \right] y_{nm} = 0 \quad (4.13)$$

Utilizando la ecuación (4.11) se puede observar que la estabilidad de la membrana depende únicamente de la parte temporal de la ecuación debido a que la parte espacial permanece siempre acotada.

Por esta razón, se realizará un estudio sobre la estabilidad de la parte temporal únicamente para obtener el diagrama de estabilidad de la ecuación completa de la membrana.

Tomando únicamente los tres primeros modos de oscilación. La ecuación de la respuesta temporal para cada modo será:

$$\frac{d^2 y_{nm}}{dt^2} + \left[ c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{H} \right)^2 \right) + p(t) \right] y_{nm}(t) = 0 \quad n, m = 1, 2, 3$$

Con lo cual obtenemos un sistema de nueve ecuaciones diferenciales ordinarias: Sea

$$y = [ y_{11} \quad y_{12} \quad \cdots \quad y_{32} \quad y_{33} ]^T$$

Podemos escribir el sistema como

$$\ddot{y} + \left\{ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc} \sigma(1,1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(1,2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma(3,2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma(3,3) \end{array} \right] + \\ + p(t) \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right\} y = 0$$



---

donde  $\sigma(n, m) = c^2 \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{H} \right)^2 \right]$

### Diagrama de estabilidad

Usando un programa en código M de Matlab, el diagrama de estabilidad (Lenguas de Arnold) obtenido para la membrana (4.13) con la excitación de la ecuación (4.12) haciendo  $\omega = 1$  y variando  $\alpha, \beta$  es:

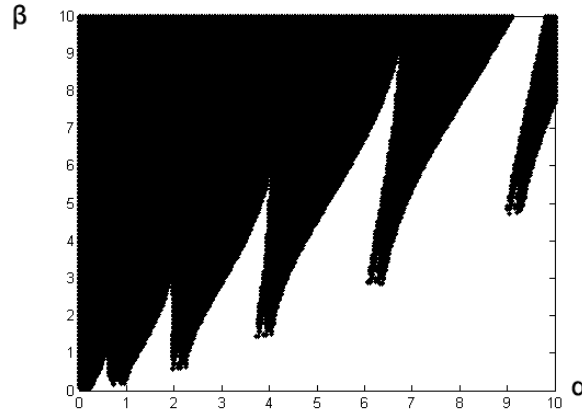


Figura 4-3. Diagrama de estabilidad paramétrica de la membrana isotrópica excitada en la variable temporal.

### 4.1.4 Excitación paramétrica de la membrana en las variables espaciales

#### Excitación normal a un borde

Considerando excitación paramétrica en uno de los bordes de la membrana manteniendo fijos todos los demás.

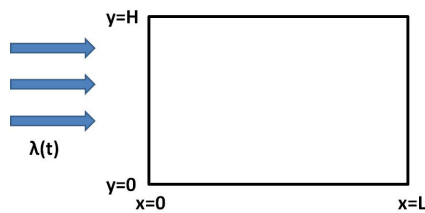


Figura 4-4. Esquema de la membrana rectangular excitada por un costado

La ecuación de la excitación es  $p(t) = \alpha + \beta \cos(\omega t)$ ,  $\alpha > \beta$  con ello, las condiciones de frontera toman la forma:

$$\begin{aligned} \varphi(0, y) &= \alpha + \beta \cos(\omega t) & \varphi(x, H) &= 0 \\ \varphi(L, y) &= 0 & \varphi(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

y proponiendo nuevamente una solución separable para el sistema como  $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$ , la cual, debe satisfacer las condiciones de frontera

$$f(x, t) = (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

$$g(y, t) = \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)$$

$$\varphi(x, y, t) = (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \quad (4.14)$$

se propone nuevamente una solución general para la ecuación de la membrana (4.2) como:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{nm}(t) (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \quad (4.15)$$

sustituyendo (4.15) en (4.2):

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)}_{\text{solución espacial}} \cdot \\ & \cdot \left[ \underbrace{\left( \alpha + \beta \cos(\omega t) \right) \frac{d^2 y_{nm}}{dt^2} - 2(\beta \omega \sin(\omega t)) \frac{dy_{nm}}{dt}}_{\text{solución temporal}} + \right. \\ & \left. + \underbrace{\left( c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{2H} \right)^2 \right) (\alpha + \beta \cos(\omega t)) - \beta \omega^2 \cos(\omega t) \right)}_{\text{solución temporal}} y_{nm}(t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

En este punto, es importante notar que la excitación paramétrica aplicada a las condiciones de frontera de la membrana (variables espaciales) se transfiere a la respuesta temporal de la ecuación después de aplicar la solución por variables separables.

Para analizar la estabilidad de esta ecuación (4.16), sólo se utilizará la parte temporal de ella, puesto que como se dijo anteriormente, la parte espacial de la solución está acotada.

La parte temporal es:

$$(\alpha + \beta \cos(\omega t)) \frac{d^2 y_{nm}}{dt^2} - 2(\beta \omega \sin(\omega t)) \frac{dy_{nm}}{dt} + \left[ c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{H} \right)^2 \right) (\alpha + \beta \cos(\omega t)) - \beta \omega^2 \cos(\omega t) \right] y_{nm}(t)$$

Transformando la ecuación en su correspondiente ecuación de Hill como en (1.12):

$$\ddot{y} + p(t)y = 0$$

en este caso tenemos

$$p(t) = K_{nm} - 2 \frac{\beta \omega^2 \cos(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} - 2 \left( \frac{\beta \omega \sin(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \right)^2 \quad (4.17)$$

con

$$K_{nm} = c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{H} \right)^2 \right)$$

Aquí se puede ver el porqué se impuso la condición  $\alpha > \beta$  cuando se agregó la excitación, esto es con el fin de evitar la indeterminación de la función  $p(t)$ .

El diagrama de estabilidad para la membrana excitada en un borde es el siguiente:

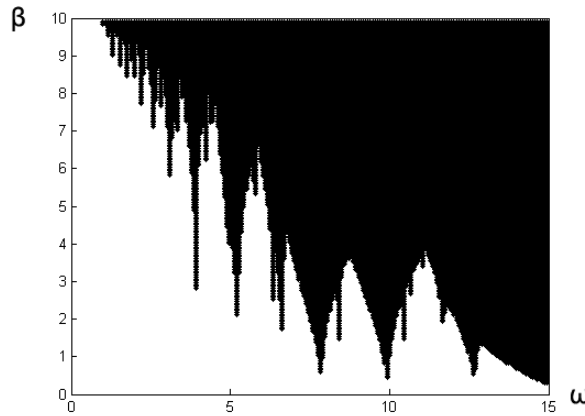


Figura 4-5. Diagrama de estabilidad de la membrana isotrópica con excitación paramétrica normal a un borde variando  $(\beta, \omega)$ .

### Excitación oblicua a los bordes de la membrana

Ahora se agrega excitación paramétrica sobre las dos variables espaciales.

Se muestra las nuevas condiciones de frontera en la figura siguiente:  $p(t) = \alpha + \beta \cos(\omega t), \alpha > \beta$

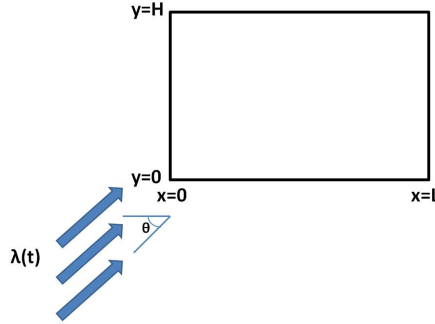


Figura 4-6. Diagrama de la membrana rectangular excitada transversalmente.

Asumiendo un ángulo constante  $\theta$  y descomponiendo la excitación en sus componentes horizontal y vertical, las condiciones de frontera serán:

$$\varphi(0, y) = (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos(\theta); \quad \varphi(x, H) = 0 \quad (4.18)$$

$$\varphi(L, y) = 0; \quad \varphi(x, 0) = (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \sin(\theta)$$

Se propone nuevamente como antes una solución separable  $\eta(x, y) = f(x)g(y)$ . Esta solución debe satisfacer las condiciones de frontera.

$$f(x) = \cos(\theta)(\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

$$g(y) = \sin(\theta)(\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos\left(\frac{m\pi y}{2H}\right)$$

$$\eta(x, y) = f(x) \cdot g(y) = \cos(\theta) \sin(\theta) (\alpha + \beta \cos(\omega t))^2 \cdot \quad (4.19)$$

$$\cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{2H}\right)$$

La solución separable será

$$u(x, y, t) = \eta(x, y) \cdot y_{nm}(t) \quad (4.20)$$

Y la solución general se escribirá como:

---


$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{nm}(t) \cos(\theta) \sin(\theta) (\alpha + \beta \cos(\omega t))^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{2H}\right) \quad (4.21)$$

sustituyendo (4.21) en (4.2) obtenemos:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\cos(\theta) \sin(\theta) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{2H}\right)}_{\text{solución espacial}} \cdot \left[ \underbrace{(\alpha + \beta \cos(\omega t))^2 \frac{d^2 y_{nm}}{dt^2} - 4(\beta \omega \sin(\omega t))(\alpha + \beta \cos(\omega t)) \frac{dy_{nm}}{dt}}_{\text{solución temporal}} + \right. \quad (4.22)$$

$$\left. + \underbrace{\left[ c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{2H} \right)^2 \right) (\alpha + \beta \cos(\omega t))^2 - \right.}_{\text{solución temporal}} \right.$$

$$\left. \left. \underbrace{-2\beta \omega^2 \cos(\omega t)(\alpha + \beta \cos(\omega t)) + 2(\beta \omega \sin(\omega t))^2}_{\text{solución temporal}} \right] y_{nm}(t) \right] = 0$$

La parte temporal de la solución puede escribirse como:

$$\frac{d^2 y_{nm}}{dt^2} - \frac{4(\beta \omega \sin(\omega t))}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \frac{dy_{nm}}{dt} + \left[ K_{nm} - 2 \frac{\beta \omega^2 \cos(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} + 2 \left( \frac{\beta \omega \sin(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \right)^2 \right] y_{nm}(t) = 0$$

con

$$K_{nm} = c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{2H} \right)^2 \right)$$

Haciendo la transformación desarrollada en (1.12) cuando la excitación se aplica en las dos variables espaciales obtenemos:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + p(t)u(t) = 0$$

con

$$p(t) = K_{nm} - 4 \frac{\beta \omega^2 \cos(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} - 4 \left( \frac{\beta \omega \sin(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \right)^2$$

En esta ecuación se puede observar que la función de excitación para la membrana excitada de forma oblicua tiene la misma forma que la función de excitación de la membrana con excitación en un solo borde, ecuación (4.17), salvo que las constantes de cada término cambian.

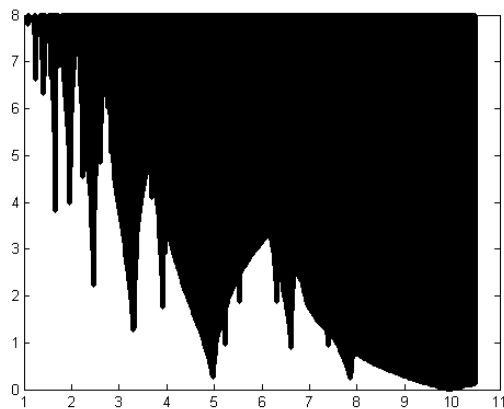


Figura 3-25. Diagrama de estabilidad para la membrana rectangular excitada de forma oblicua.

En la gráfica de la figura 3-25, se puede observar que la variación de frecuencia en la excitación paramétrica es determinante en la estabilidad del sistema, pues se presenta una gran cantidad de lenguas de Arnold y por tanto muchos intervalos estables e inestables intercalados. Así el introducir una segunda excitación puede fácilmente inestabilizar la respuesta del sistema si no se escogen adecuadamente los parámetros de dicha excitación.

---

## 4.2 Análisis de la plataforma Petrolera

### 4.2.1 El modelo matemático



Figura 4-8. Fotografía de una plataforma petrolera

La ecuación que describe el movimiento libre de flexión  $u(x, y, t)$  de una plataforma sujeta a carga transversal, cuando el plano  $xy$  se hace coincidir con el plano medio de la plataforma y el eje  $z$  se toma directamente hacia abajo es [[35],[42]]:

$$\Delta\Delta u = \frac{q(x, y)}{D}$$

donde  $\Delta\Delta$  es un operador diferencial definido como:

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

y  $D$  es la constante de rigidez a la flexión [7]

$$D = \frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)}$$

$h$  es el espesor de la plataforma

$\nu$  es la razón de Poisson

$E$  es el módulo de elasticidad

Se tomará en consideración únicamente las fuerzas de inercia sobre la plataforma:

$$q(x, y) = -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

se obtiene la ecuación de la plataforma como:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = -\frac{m}{D} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.23)$$

## 4.2.2 Condiciones iniciales y de frontera

Aplicaremos ahora una excitación periódica transversal a la frontera de la plataforma tal y como se hizo con la membrana.

La excitación será  $p(t) = \alpha + \beta \cos(\omega t)$ ,  $\alpha > \beta$ , y se aplicará a la plataforma en un ángulo  $\theta$  constante con respecto a la horizontal

Con esto al igual que en (4.18) las condiciones de frontera serán:

$$\varphi(0, y) = (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos(\theta); \quad \varphi(x, H) = 0$$

$$\varphi(L, y) = 0; \quad \varphi(x, 0) = (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \sin(\theta)$$

La solución general se escribirá como:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{nm}(t) \cos(\theta) \sin(\theta) (\alpha + \beta \cos(\omega t))^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{2H}\right) \quad (4.24)$$

sustituyendo (4.24) en (4.23) obtenemos:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\cos(\theta) \sin(\theta) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{2H}\right)}_{\text{solución espacial}} \cdot \left[ \underbrace{(\alpha + \beta \cos(\omega t))^2 \frac{d^2 y_{nm}}{dt^2} - 4(\beta \omega \sin(\omega t))(\alpha + \beta \cos(\omega t)) \frac{dy_{nm}}{dt}}_{\text{solución temporal}} + \right. \quad (4.25)$$

$$+ \left. \underbrace{c^2 \left( \left(\frac{n\pi}{2L}\right)^4 + 2 \left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{2H}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2H}\right)^4 \right) (\alpha + \beta \cos(\omega t))^2 -}_{\text{solución temporal}} \right.$$

$$\left. \underbrace{-2\beta \omega^2 \cos(\omega t)(\alpha + \beta \cos(\omega t)) + 2(\beta \omega \sin(\omega t))^2}_{\text{solución temporal}} \right] y_{nm}(t) = 0$$

Por lo tanto, como en el caso de la membrana para hacer un análisis de estabilidad se utilizará únicamente la parte temporal de la ecuación puesto que con este enfoque la solución espacial siempre está acotada.

La parte temporal de la solución puede escribirse como:

$$\frac{d^2 y_{nm}}{dt^2} - \frac{4(\beta \omega \sin(\omega t))}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \frac{dy_{nm}}{dt} +$$



$$+ \left[ K_{nm} - 2 \frac{\beta \omega^2 \cos(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} + 2 \left( \frac{\beta \omega \sin(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \right)^2 \right] y_{nm}(t) = 0$$

con

$$K_{nm} = c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^4 + 2 \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 \left( \frac{m\pi}{2H} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{2H} \right)^4 \right)$$

Haciendo la transformación desarrollada en (1.12) cuando la excitación se aplica a la plataforma en las dos variables espaciales obtenemos:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + p(t)u(t) = 0$$

$$p(t) = K_{nm} - 4 \frac{\beta \omega^2 \cos(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} - 4 \left( \frac{\beta \omega \sin(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \right)^2$$

Esta ecuación es la misma que la obtenida para la membrana rectangular excitada de forma oblicua salvo que el valor de  $K_{nm}$  cambia.

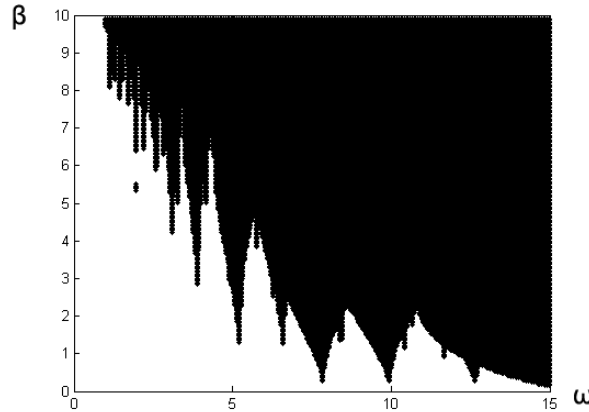


Figura 4-9. Diagrama de estabilidad para la plataforma petrolera aplicando excitación en los dos bordes de la membrana variando  $(\beta, \omega)$ .

#### Conclusión

De este ejemplo se puede concluir que es posible agregar un término de excitación paramétrica para evitar la resonancia o para inducir amortiguamiento, utilizando el diagrama anterior, podemos escoger los valores de los parámetros adecuados para mejorar el comportamiento del sistema sin riesgo de llevar al sistema a un comportamiento inestable.

---

# Capítulo 5

## Conclusiones Generales, Aportaciones y trabajo futuro

### 5.1 Observaciones generales y Aportaciones de este trabajo

En este trabajo se han recopilado algunas técnicas para el análisis de las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes periódicos y para aproximar soluciones, en particular se ha incorporado el método de Galerkin que nos permite estimar la solución de una PDE por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

- Se desarrollaron diferentes algoritmos que utilizando la teoría de Floquet calculan el diagrama de estabilidad paramétrica de ecuaciones o sistemas de ecuaciones con excitación periódica  $p(t) = \alpha + b \cos(\omega t)$  en dos vertientes 1) cuando varían los parámetros  $(\alpha, \beta)$  de la excitación dejando fija la frecuencia y 2) cuando varían  $(\beta, \omega)$  y se deja fija  $\alpha$ .

En este caso:

- – Se reporta un nuevo método computacional que permite dibujar el diagrama de estabilidad paramétrica de ecuaciones de tipo Hill, este método trabaja por medio de un seguimiento de la frontera de estabilidad, este método consume menos memoria y es más rápido que algunos de los algoritmos reportados en la literatura, además se plantea incorporar estrategias de cómputo paralelo que lo hagan aún más rápido.

Se analizaron algunos sistemas mecánicos, en naturaleza diferentes, en los cuales se incluye un término de excitación paramétrica.

- 
- El doble oscilador lineal en el cual se incluye variación periódica en la elasticidad de uno de los resortes. En el diagrama de estabilidad se puede ver que debido a la variación paramétrica el sistema puede inestabilizarse con baja amplitud de la excitación a la frecuencia adecuada.

La aportación es este caso es:

- – Se presenta una forma de inducir amortiguamiento a un sistema mecánico mediante el uso de un término de excitación periódica en uno de los parámetros, en este caso induciendo la variación periódica de la elasticidad de uno de los resortes del sistema, con lo cual, se obtiene una reducción en la amplitud de las oscilaciones del sistema de al rededor de 30%.
- El péndulo de Kapitza, modelado por una ecuación de Hill, en este caso se construyó un prototipo para contrastar los resultados teóricos con los prácticos medidos en el prototipo. Se incluyeron tanto excitación periódica armónica como excitación no periódica, en esta última no es aplicable la teoría de Floquet y además aparecen fenómenos que no se presentan en el caso periódico.

En este sistema la aportación es:

- – Se hace una caracterización de la región de atracción del péndulo de Kapitza, se muestra que si la frecuencia de excitación del punto de sujeción aumenta, también aumenta la amplitud de las perturbaciones que el péndulo puede soportar sin que se haga inestable el punto de equilibrio superior. Cabe mencionar que en este punto se aplica un control vibracional en lazo abierto al sistema para mantener estable el punto de equilibrio superior del péndulo.
- El puente de Tacoma que es un sistema en que se consideran parámetros distribuidos y por tanto es modelado por dos ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden.
- La membrana rectangular isotrópica considerada perfectamente elástica sin fricción, sometida a excitación paramétrica en i) La parte temporal de la ecuación, ii) Normal a una frontera de membrana, iii) De forma oblicua a la membrana. Se muestra que utilizando las condiciones de frontera se puede obtener el diagrama de estabilidad en cada caso. Cabe mencionar que la membrana es modelada por la ecuación de onda en dos dimensiones que es una ecuación diferencial parcial con tres variables independientes.

- 
- Y por último se muestra el ejemplo de una plataforma petrolera, modelada por una ecuación diferencial parcial de cuarto orden con tres variables independientes, a la que de igual forma se aplica excitación paramétrica y utilizando el método de Galerkin se calcula una aproximación a su solución y el diagrama de estabilidad paramétrica.

Para los tres últimos ejemplos la aportación es la siguiente:

- – Se desarrolló un método para analizar la estabilidad de sistemas modelados por ecuaciones diferenciales parciales utilizando técnicas de aproximación, en particular usando el método de Galerkin para convertir la ecuación diferencial parcial en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, se muestra como incluir variación paramétrica en la PDE por medio de las condiciones de frontera y se implementó un método computacional que calcula punto por punto la estabilidad del sistema de ecuaciones en variables de estado de orden  $n$ , donde  $n$  es el número de modos naturales de oscilación utilizados con el cual es posible obtener el diagrama de estabilidad del sistema modelado por ecuaciones diferenciales parciales.

## 5.2 Trabajo por realizar

- Durante el trabajo se aplicó de manera práctica un control vibracional primero al doble oscilador lineal, después al péndulo invertido (Péndulo de Kapitza), falta ahora establecer, utilizando la teoría de control vibracional presentada en el capítulo 1, las condiciones y valores que deberá cumplir la ecuación del péndulo de Kapitza para los cuales, la implementación del control vibracional tenga buenos resultados.
- Además se pretende agregar también un control vibracional a la ecuación de la plataforma petrolera con el objetivo de evitar la resonancia paramétrica y reducir las oscilaciones inducidas por el oleaje del mar sobre la plataforma. Para ello se deberá establecer si la ecuación de la plataforma es susceptible a la aplicación del control vibracional.
- Se trabajará para implementar el algoritmo de seguimiento de frontera en computo paralelo sobre una GPU para reducir el tiempo de cálculo.
- Se desarrollará un algoritmo en computo paralelo para obtener diagramas de estabilidad para sistemas modelados por ecuaciones de estado de dimensión mayor a 4.

- 
- Se seguirá estudiando el amortiguamiento inducido por medio de la inclusión de una excitación paramétrica en un sistema mecánico, para establecer las condiciones y valores que garanticen los mejores resultados y para determinar que tipo de sistemas son candidatos a aplicar esta técnica.

# Bibliografía

- [1] V.I. Arnold. Mathematical methods of classical mechanics. 2th edition. Springer. Translation of Russian original edition. Moscow 1974.
- [2] F. Axisa. Modelling of Mechanical Systems. Discrete Systems. Volume 1. Kogan Page Science, USA 2004. Page 263.
- [3] S. Bitantti et al. Periodic control. Encyclopedia of Electrical and Electronical Engineering 16 (1999), pp.59-74.
- [4] V. Bolotin. The dynamic stability of elastic systems. Holden Day Inc. USA 1964.
- [5] R. Brockett. Finite Dimensional Linear Systems. John Wiley. USA 1970.
- [6] L. Cesari. Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, 2nd ed. Springer-Verlag, 1963.
- [7] S. Chakraverty. Vibration of plates. CRC Press. USA 2009
- [8] C. Chen. Linear Systems Theory and Design. Oxford University Press. USA 1999.
- [9] B. Fabien. Analytical System Dynamics. Modelling and Simulation. Springer. USA 2009.
- [10] M. Faraday. On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces. Transactions Royal Society (1831), pp. 299-318.
- [11] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Annales de la Ecole Normal Superior (1883), pp.47-89.
- [12] F. John. Partial Differential Equation, Applied Mathematical Science, Springer, USA, 1986.
- [13] G. Genta. Vibrations dynamics and control. Springer USA 2009.

- 
- [14] M. Gokenbach. Understanding and implementing the finite element method. Ed. SIAM USA 2006. Ch. 3.
- [15] R. Haberman. Elementary applied partial differential equations. 2do edition. Prentices Hall. USA 1987.
- [16] C. Hayashi. Forced oscillations in Non-linear Systems. Nipon Printing and Publishing, LTD. Japón 1953.
- [17] W.G. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee. Acta Math 8 (1886). pp. 1-36.
- [18] Jordan Smith. Nonlinear Ordinary Differential Equations. Oxford University Press. USA 2007. 4th Edition.
- [19] Jardón H. Tesis: Control de sistemas modelados por la ecuación de Hill con base en discretización. DCA CINVESTAV IPN, México, D.F. 2010.
- [20] E. Kreyszig. Advance Engineering Mathematics. John Wiley. Singapore 2006.
- [21] Y. Kwon. The finite element method using Matlab. CRC Press LLC USA 1997.
- [22] A. Lyapunov. General problem of the stability of motion, Original in Russian (1892). English translation, Taylor and Francis 1992.
- [23] W Magnus and S Winkler. Hill's Equation. Dover. USA 2004.
- [24] E. Mathieu. Memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. J. Math Pures Appl. 13 (1868), pp. 137-203.
- [25] L. Meirovich Computational Methods in structural Dynamics. Sijthoff & Noordhoff, Netherlands 1980. Ch. 8.
- [26] S. Meerkov. Vibrational Control of nonlinear systems: Vibrational stabilizability. Automatic Control, IEEE transactions on Volume 31, Issue 8. Aug. 1986.
- [27] S. Meerkov. Principle of vibrational control: Theory and applications. Automatic Control, IEEE transactions on Volume 25, Issue 4. Aug 1980.
- [28] S. Meerkov. The effectiveness of the method of vibrational control for dynamics systems described by a differential equation of order  $n$ . Traslated for Avtomatika i telemekhanika, No.4, pp 5-10, Abril 1975 Moscú.
- [29] J. Moser. An example of a Schroedinger equation with almost periodic potential and nowhere dense spectrum. Birkhäuser Verlag, Basel. 1981.



- 
- [30] A. Nayfeh. Perturbation Method. John Wiley. USA 1973.
- [31] A. H. Nayfeh et al, Dynamics and control of cranes: A review. Journal of Vibration and control, 9 (2003), pp.863-908.
- [32] R. Rand. A quasiperiodic Mathieu Equation. Series on Stability, Vibration and Control of Systems Series B: Vol. 2. World Scientific Publishing Company. The Richard Rand 50th Anniversary Volume. pp. 203-221
- [33] A.A. Seyranian, et al. The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Volume 70, Issue 5, Elsevier. Rusia 2006, pp.754-761.
- [34] Seyranian, Mayliabaev. Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. World Scientific. Singapore 2003.
- [35] Szabo B. Finite Element Analysis. John Wiley. Canada 1991.
- [36] V. Yakubovich. Mathematical analysis of the stability of suspension bridges via the example of Tacoma bridge. Vestnik Leningrad Univ. Vol 24, 1969. No. 1.
- [37] J. Téllez, J. Collado. Boundary following Algorithm for calculating the Arnold tongues in Hill's Equation. Enviado para aprobación y en su caso publicación a Elsevier, Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2013.
- [38] J. Téllez, J. Collado. Attenuation of oscillations in a mechanical system using a vibrational parameter. 2nd International Symposium on Computer, Communication, Control and Automation (3CA) . Singapur, December 1-2, 2013.
- [39] J. Téllez, J. Collado. Estimate of the Region of Attraction of a Kapitza Pendulum Subject to an Harmonic Excitation and Analysis of the Pendulum Behavior for a Non Harmonic Excitation. 10th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. Mexico october 2013.
- [40] J. Téllez, J. Collado. Stability Analysis of a membrane under parametric excitation. 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. Merida october 2011.
- [41] Thomee. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Springer Verlag. Netherlands 2000.
- [42] S. Timoshenko. Theory of Plates and Shells. Mc. Graw Hill. 1959.

- 
- [43] Whittaker ET & Watson. A course of modern analysis. Cambridge University Press. 1962.
- [44] V. Yakubovich and V.M. Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 1. John Wiley, Jerusalem, 1975. Ch. 4.
- [45] V. Yakubovich and V.M. Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 2. John Wiley, Jerusalem, 1975. Ch. 5.
- [46] V. Yakubovich and V.M. Starzhinskii. Parametric Resonance in Linear Systems, Nauka, 1982 (In Russian), pp. 209-212.
- [47] <http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs> "Video sobre la caída del puente de Tacoma"
- [48] <http://youtu.be/Vu2ueBey4IA> "Prototipo del péndulo de Kapitza"
- [49] <http://youtu.be/II21SVZUK2E> "Prueba de estabilidad del péndulo de Kapitza"
- [50] <http://youtu.be/ubXRi8JGBK0> "Péndulo de Kapitza excitado de forma Quasi-periódica"
- [51] <http://youtu.be/20XUGxBOUaM> "Fenómeno de Beating"
- [52] [http://youtu.be/JiIGpIZG\\_bQ](http://youtu.be/JiIGpIZG_bQ) "Prueba de estabilidad del péndulo de Kapitza excitado de manera Quasi-periódica"

# Anexo

## Artículos Publicados



# Stability analysis of a membrane under parametric excitation

J. Téllez, J. Collado  
DCA CINVESTAV IPN, México, D.F.  
Phone: 57473800 ext 2646  
Email: jtellez@ctrl.cinvestav.mx

**Abstract**—This paper presents a study of the behavior of a membrane in presence of parametric excitation, membrane is first discretized using Galerkin Method and obtained a stability diagram that corresponds to the variation of the excitation parameters. Three cases are worked, one when the parametric excitation is added in the temporary response arbitrarily, the other two when the parametric excitation is applied in the boundary of the membrane.

## I. INTRODUCTION

The problem developed in this work is a stability analysis of an isotropic membrane starting with the two dimensional wave equation, the membrane is considered under the effect of a parametric excitation. A discretization of the wave equation is made using the Galerkin Method, discretizing the equation and separating the temporal and spatial dynamics, calculating the approximate solution of the wave equation in three cases. First, when the boundary condition are zero and the excitation function is applied only to the temporal part of the equation, second when the excitation function is applied only over one boundary of the membrane, and finally when the excitation function is applied diagonally and impact two boundaries of the membrane.

## II. PRELIMINARIES

### A. Vibrating membrane.

Let us consider the displacement  $u$  of a vibrating membrane of any shape.[22] The displacement  $u(x, y, t)$  satisfies the two-dimensional wave equation.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

the initial conditions will be:  $u(x, y, t) = \alpha(x, y)$ ;  
 $\frac{du(x, y, t)}{dt} = \beta(x, y)$

and an homogeneous boundary condition  $u = 0$  is the most common condition.

### B. Galerkin method.

Galerkin methods [30] are a class of methods for converting a continuous operator problem (such as a differential equation) to a discrete problem. In principle, it is equivalent to apply the Method of Variation of parameters to a function space. Typically one applies some constraints on the function space to characterize the space with a finite set of basis functions. In this work, the discretization of the two dimensional wave equation is made assuming that the solution is separable, i.e,  $u(x, y, t) = \rho(t) \cdot \eta(x, y)$  taking  $\eta(x, y)$  as a given approximation function of known shape .

### C. The Hill's equation

The Hill's equation [3] is a second order linear homogeneous equation with real periodic coefficients

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cdot p(t))x = 0; p(t + T) = p(t) \quad (1)$$

### D. Periodic systems

The periodic systems are a kind of system describe for the equation:

$$\dot{x} = A(t)x \quad x \in R^n, \quad -\infty < t < \infty \quad (2)$$

Where  $A(t)$  is a matrix with periodic functions as elements, which minimum period  $T$ , this is:

$$A(t + T) = A(t) \quad (3)$$

Hill's equation can be represented in form (2), making  $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta \cos(t) & 0 \end{bmatrix}$

A periodic system do not necessarily have a periodic solution

The solution of (3) is:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

Where  $\Phi(t, t_0)$  is calculated as in [2, 10]:  
Some properties of  $\Phi(t, t_0)$ :

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I$$

The periodicity of the system implies that

$$\Phi(t_0 + T, t_0 + T) = \Phi(t, t_0)$$

### E. Monodromy matrix

It is defined as:

$$M := \Phi(t_0 + T, t_0) \quad (4)$$

*Theorem 1:* [2]. Eigenvalues of monodromy matrix (4) are independent of the initial condition  $t_0$ . The asymptotic stability of a periodic linear system is equivalent to the asymptotic stability of a linear time invariant system under a periodic change of coordinates as transformations developed by Lyapunov in [17], this change of coordinates depends on the solution of the periodic system and almost always is impossible to calculate it.

We now present some theorems for periodic systems

*Theorem 2:* (Floquet). [2, 18]

A system like (2), with  $A(t+T) = A(t)$  has at least a non identically zero solution, such that

$$x(t+T) = \lambda x(t), \forall t, \lambda \neq 0$$

Let a homogeneous system like (3), then there exist a periodic and invertible matrix  $P(t) \in R^{n \times n}$  and a constant matrix  $R \in R^{n \times n}$  such that

$$\Phi(t, t_0) = P^{-1}(t)e^{R(t-t_0)}P(t_0) \quad (5)$$

See [9, 10].

If (5) is evaluate during one period of time:

$$\Phi(t_0 + T, t_0) = P^{-1}(t_0)e^{RT}P(t_0)$$

Last equation shows that the monodromy matrix is similar to  $e^{RT}$ .

and assuming  $t_0 = 0$ , then any  $t \geq 0$  can be rewrite as:  $t = kt + \tau, k \in N, \tau \in [t_0, T)$ , and

$$x(t) = \Phi(t, 0)x(0)$$

$$= M^k \Phi(\tau, 0)x(0)$$

The above result show that the system stability depends only of the eigenvalues of the monodromy matrix.

*Theorem 3:* (Lyapunov-Floquet).

The periodic system (3) is:

Asymptotically stable if and only if:

$$\sigma(M) \subset \overset{\circ}{D}_1 := \{z \in C : |z| < 1\}.$$

Stable if:

$$\sigma(M) \subset \overline{D}_1 := \{z \in C : |z| \leq 1\}$$

and  $\lambda_i \in \sigma(M) : |\lambda_i| = 1$ , where  $\lambda_i$  is a simple root of its minimal polynomial  $m_M(\lambda)$ .

Unstable if and only if

$$\exists \lambda \in \sigma(M) : |\lambda_i| > 1$$

or if  $|\lambda_i| = 1$  is a multiple root of  $m_M(\lambda)$

This theorem gives necessary and sufficient conditions about the system stability using the eigenvalues of the monodromy matrix. In most of the cases is not possible calculate this matrix in an analytical form. It's necessary obtain a numerical solution of the system (1) using each one of the vectors of initial condition:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T; \quad (6) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T; \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

For each pair of parameters  $(\alpha, \beta)$ , and using the theorem 4 determinate if the point is stable or unstable. The representation in the plane  $\alpha - \beta$  of the unstable region give us to the called Arnold Tongues.

Any methods to obtain Arnold tongues are:

- Using infinite determinant as is developed in [1].
- Using the exact or numerical solution of (1). Using this solution evaluate for a given pair  $(\alpha, \beta)$  a large value of  $t$  and determinate in this value, if the solution is bounded or not.
- Calculating numerically the monodromy matrix for each pair  $(\alpha, \beta)$  as in (4), and using theorem (3) determinate if the solution is stable or unstable. Numerically the monodromy matrix can be obtain evaluating  $t = T$  (minimum period) in the numerical solution of the system, the system must be solved one time for each one of the initial conditions vector defined in (6). Alternatively to the theorem 3 can also be used a criteria that compare the trace of the monodromy matrix to establish if the solution of the system is stable [3].
- Other methods based in discretization. See [19].

## III. DEVELOPMENT

### A. The equation

An isotropic membrane can be modelled using the two dimensional wave equation, which is a partial differential equation in three independent variables.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

The initial condition of the equation are:  $u(x, y, 0) = \alpha(x, y); \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \beta(x, y)$

Considering homogenous boundary conditions around the membrane,  $u = 0$ , A separable solution of (7) can be proposed as

$$u(x, y, t) = h(t)\Phi(x, y) \quad (8)$$

replacing (8) in (7) we have:

$$\Phi(x, y) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 h(t) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

dividing (8) by  $c^2$

$$\frac{1}{c^2 h} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = -\lambda$$

the right hand side of the equation is time dependent only, and the left side depends uniquely on the spatial variables, the equality is satisfy only for a constant  $\lambda$ , due  $t$  is independent of the spatial variables and vice versa (see [22, 11, 15]), then rewriting the partial equation (7) as two ordinarily differential equations, one for time, and the second for spatial behavior (ODE)

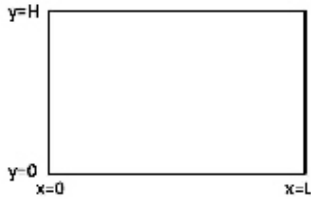
$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\lambda c^2 h \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\lambda \Phi \quad (10)$$

minus sign of  $\lambda$  responds the need in the problem that positive eigenvalues are required.

### B. Boundary Conditions

Analyzing the effect of boundary conditions on the last equations and considering a rectangular membrane with dimensions  $L \times H$



The boundary conditions are:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 0 & \quad u(x, 0, t) = 0 \\ u(L, y, t) = 0 & \quad u(x, H, t) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

The homogeneous boundary condition complete the bidi-dimensional eigenvalue problem as:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\lambda \Phi$$

$$\begin{aligned} \Phi(0, y) = 0 & \quad \Phi(x, 0) = 0 \\ \Phi(L, y) = 0 & \quad \Phi(x, H) = 0 \end{aligned}$$

This new problem is also linear and homogenous, a separable solution is proposed again as:

Let

$$\Phi(x, y) = f(x)g(y) \quad (12)$$

replacing (12) in (10)

$$g(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f(x) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\lambda f(x)g(y)$$

rewriting

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\lambda \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\mu$$

Clearly the right hand side of the equation depends only of  $x$  and the left hand side is only en terms of  $y$ , introducing a second separation constant  $\mu$  and reduce the partial equation, two ordinary equations are obtained as above:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\mu f \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -(\lambda - \mu)g \quad (14)$$

With boundary condition as:

$$f(0) = 0 \quad \text{and} \quad f(L) = 0; \quad g(0) = 0 \quad \text{and} \quad g(H) = 0$$

Two eigenvalue problem of Sturm-Liouville type [22, 11] are obtained , one in each variable.

### C. The eigenvalue problem

For (13) the eigenvalues are:

$$\mu_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

and his corresponding eigenfunctions

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

In this case the problem has a infinite number of eigenvalues.

Using (14) an infinite number of eigenvalues are obtained too, and this problem depends of the two separation constants and two indexes are used to represent the variation of the two values of separation constants for each case.

The eigenvalues are:

$$\lambda_{nm} - \mu_n = \left( \frac{m\pi}{H} \right)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \text{ for each } \mu_n$$

The corresponding eigenfunctions

$$g_{nm}(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)$$

the separation constant for this case  $\lambda_{nm}$  is calculated as:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

thus the spatial solution are:

$$\Phi(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \quad n=1,2,3,\dots \quad m=1,2,3,\dots$$

#### D. General Solution

Proposing a general solution for (7) as a separable solution (Galerkin Method [4, 6])

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)}_{\text{Spatial solution}} \cdot \underbrace{\left[ \frac{\partial^2 y_{nm}}{\partial t^2} + c^2 \left( \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \right) y_{nm} \right]}_{\text{Temporal equation}} = 0 \quad (15)$$

#### E. Natural frequency of oscillation

Calculating only the natural frequency of oscillation of the first three modes, these modes, for practical effects, are the higher energy modes.

The natural frequency of oscillations of each one of these modes due to the temporary part of the equation is:

$$w_k(n, m) = c \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2}$$

For a numerical example, let be  $c = 2.2361$ ,  $L = H = 40$

Mode	Frequency (rad/sec.)
11	0.8862
22	1.2533
33	1.5350

#### F. Including the parametric excitation

Now, a parametric excitation term is added to the membrane. In this part, only a excitation term to the temporary part is added to the equation, without modify the spatial response.

Parametric excitation

$$q = \alpha + \beta \cos(\omega t) \quad (16)$$

Temporary equation

$$\frac{\partial^2 y_{nm}}{\partial t^2} + c^2 \left[ \left( \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \right) + q \right] y_{nm} = 0$$

putting the parametric excitation only in the modes where  $n = m$  for  $i = 1, 2, 3$ , leaving the combined modes as previously.

In this example, can be seen that the periodic variation of any parameter of the system induce instability zones in the behavior of the system, called parametric instability zones.

#### G. Parametric stability of the membrane

Using the discretized equation (15) the membrane stability depends only of the temporary part of the equation due to the spacial part is always bounded. For this reason, a stability

analysis of the temporary part of the equation is made to obtain the stability diagram of the membrane. Taking again only first

three modes of oscillation. The equation of the temporary response of each mode is:

$$\frac{d^2 y_{nm}}{dt^2} + c^2 \left( \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \right) y_{nm} = 0$$

The parametric excitation take the form:  $q = \alpha + \beta \cos(\omega t)$

Writing the equations in matrix form:

$$\begin{bmatrix} \ddots \\ x_1 \\ \ddots \\ x_2 \\ \ddots \\ x_3 \end{bmatrix} = c^2 \begin{bmatrix} \sigma(1,1) & \sigma(1,2) & \sigma(1,3) \\ \sigma(2,1) & \sigma(2,2) & \sigma(2,3) \\ \sigma(3,1) & \sigma(3,2) & \sigma(3,3) \end{bmatrix} +$$

$$+ q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

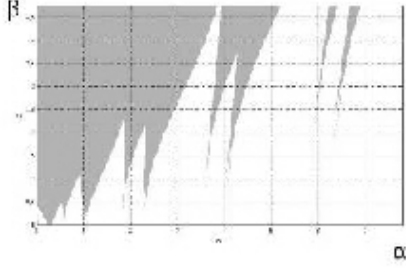
where  $\sigma(n, m) = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$

#### H. Stability diagram

Using a Matlab M program, the stability diagram of the membrane (Arnold Tongues) is obtained using (16).

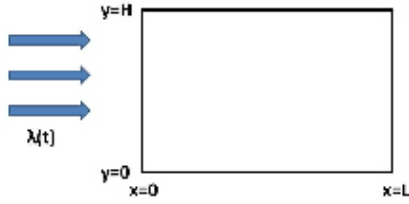
The stability diagram is:





1) Adding parametric excitation over the spatial variables:

Considering parametric excitation (periodic) in one of the edges of the membrane and all another are fixed.



the excitation equation is  $\lambda(t) = \alpha + \beta \cos(\omega t)$ ,  $\alpha > \beta$  with this the boundary conditions take the form:

$$\begin{aligned} \Phi(0, y) &= \alpha + \beta \cos(\omega t) & \Phi(x, H) &= 0 \\ \Phi(L, y) &= 0 & \Phi(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

and proposing again a separable solution for the system as  $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$  this solution must satisfy the boundary conditions

$$f(x) = (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

$$g(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)$$

$$\Phi(x, y) = (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \quad (17)$$

a general solution for the membrane equation (7) is proposed as:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{nm} (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \quad (18)$$

replacing (18) in (7):

$$\begin{aligned} & \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)}_{\text{Spatial solution}} * \\ & * \left[ \underbrace{(\alpha + \beta \cos(\omega t)) \frac{\partial^2 y_{nm}}{\partial t^2} - 2(\beta \omega \sin(\omega t)) \frac{\partial y_{nm}}{\partial t}}_{\text{Temporal equation}} + \right. \\ & \left. + \underbrace{\left( c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{2H} \right)^2 \right) - \beta \omega^2 \cos(\omega t) \right) y_{nm}}_{\text{Temporal equation}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

It is important to note that the parametric excitation applied to the boundary condition (spatial variable) is transferred to the temporary response after applied the separable solution.

To analyze the stability of this equation, only the temporary part of the equation (19) is used because the spatial solution is bounded,

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \frac{\partial^2 y_{nm}}{\partial t^2} - 2(\beta \omega \sin(\omega t)) \frac{\partial y_{nm}}{\partial t} + \\ & + \left[ c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{H} \right)^2 \right) - \beta \omega^2 \cos(\omega t) \right] y_{nm} \end{aligned}$$

transforming now this equation in its equivalent hill's equation.

we have

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t) y = 0$$

making the variable change  $y(y) = u(t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \int p(t) dt}$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u(t) \left[ q(t) - \frac{1}{2} \frac{dp(t)}{dt} - \frac{1}{4} p^2(t) \right] = 0 \quad (20)$$

making  $\varphi(t) = q(t) - \frac{1}{2} \frac{dp(t)}{dt} - \frac{1}{4} p^2(t)$  gives a hill's equation.

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + [\varphi(t)] u(t) = 0$$

in this case

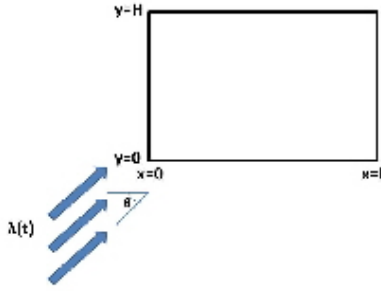
$$\varphi(t) = \frac{K_{nm} + \beta \omega^2 \cos(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} + \left( \frac{\beta \omega \sin(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \right)^2$$

and

$$K_{nm} = c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{H} \right)^2 \right)$$

2) Adding parametric excitation over two boundaries.:  
Now, a parametric excitation is added over the two spatial variables.

The new boundary condition it's shown in the figure:  
 $\lambda(t) = \alpha + \beta \cos(\omega t)$ ,  $\alpha > \beta$



assuming a constant  $\Phi$  and decomposing the excitation in its components, one horizontal and one vertical:

$$\Phi(0, y) = (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos(\Phi); \Phi(x, H) = 0$$

$$\Phi(L, y) = 0; \Phi(x, 0) = (\alpha + \beta \cos(\omega t)) \sin(\Phi)$$

as earlier a separable solution is obtained as  $\eta(x, y) = f(x)g(y)$ . This solution must satisfy the boundary conditions.

$$f(x) = \cos(\Phi)(\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

$$g(y) = \cos(\Phi)(\alpha + \beta \cos(\omega t)) \cos\left(\frac{m\pi y}{2H}\right)$$

$$\eta(x, y) = \cos(\Phi) \sin(\Phi)(\alpha + \beta \cos(\omega t))^2 \cdot \quad (21)$$

$$\cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{2H}\right)$$

$$u(x, y, t) = \eta(x, y) \cdot y_{nm}(t) \quad (22)$$

replacing (22) in (7) gives:

$$\frac{\partial^2 y_{nm}}{\partial t^2} - \frac{2(\beta\omega \sin(\omega t))}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \frac{\partial y_{nm}}{\partial t} + \left[ K_{nm} - \frac{2\beta\omega [\sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t) - \beta\omega \sin^2(\omega t)]}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \right] y_{nm} = 0$$

making the transformation development in (20) when the excitation is applied over two boundaries gives:

$$\varphi(t) = -\frac{2\beta\omega \sin(\omega t) + 3\beta\omega^2 \cos(\omega t) - (\beta\omega \sin(\omega t))^2}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} +$$

$$+ K_{nm} - 3 \left( \frac{\beta\omega \sin(\omega t)}{\alpha + \beta \cos(\omega t)} \right)^2$$

and

$$K_{nm} = c^2 \left( \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{2H} \right)^2 \right)$$

## REFERENCES

- [1] V. Bolotin. The dynamic stability of elastic systems. Holden Day Inc. USA 1964.
- [2] Jordan Smith. Nonlinear Ordinary Differential Equations. Oxford University Press. USA 2007. 4th Edition.
- [3] W Magnus and S Winkler. Hill's Equation. Dover. USA 2004.
- [4] M. Gokenbach. Understanding and implementing the finite element method. Ed. SIAM USA 2006. Ch. 3.
- [5] Hutton. Fundamental of finite element analysis. Mc Graw Hill USA 2004. Ch. 5.
- [6] Young Kwon. The finite element method using Matlab. CRC Press LLC USA 1997.
- [7] Thomee. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Springer Verlag. Netherlands 2000.
- [8] V. Jakubovic. Mathematical analysis of the stability of suspension bridges via the example of Tacoma bridge. Vestnik Leningrad Univ. Vol 24, 1969. No. 1.
- [9] V. Yakubovich and Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 1. John Wiley, Jerusalem, 1975. Ch. 4.
- [10] V. Yakubovich and Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 2. John Wiley, Jerusalem, 1975. Ch. 4.
- [11] L. Meirovich Computational Methods in structural Dynamics. Sijthoff & Noordhoff, Netherlands 1980. Ch. 8.
- [12] J. Collado, H. Jardón, Vibrational Stabilization method of Hill type systems by reshaping Arnold Tongues. Pre print 2010.
- [13] S. Timoshenko. Theory of Plates and Shells. Mc. Graw Hill. 1959.
- [14] R. Brockett. Finite Dimensional Linear Systems. John Wiley. USA 1970
- [15] E. Kreyszig. Advance Engineering Mathematics. John Wiley. Singapore 2006.
- [16] G. Genta. Vibration dynamics and Control. Springer. USA 2009.
- [17] A. Lyapunov. General problem of the stability of motion, Original in Russian (1892). English translation, Taylor and Francis 1992.
- [18] L. Cesari. Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, 2nd ed. Springer-Verlag, 1963.
- [19] H. Jardón. Thesis: Control of systems modeled for the Hill's equation based in discretization. DCA CINVESTAV IPN, Mexico, D.F. 2010.
- [20] Boyce and Dprima. Elementary Differentials Equations. 7th Edition. John Wiley. USA 2001.
- [21] Quarteroni. Numerical Aproximation of partial differential equations. Springer. Berlin 2008.
- [22] R. Haberman. Elementary applied partial differential equations. 2do edition. Prentices Hall. USA 1987.
- [23] Fish and Belytschko. A first course of finite element. John Wiley. England 2007.
- [24] L. E. Malvern. Introduction to the mechanics of the continuous medium. Prentice Hall. USA 1969.
- [25] B. Szabo. Finite Element Analysis. John Wiley. Canada 1991.
- [26] S. Graham Kelly. Fundamentals on Mechanical Vibrations. Mc. Graw Hill, Singapour 2000
- [27] M. D. Landau and E.M. Lifshitz. Mechanics. Butterworth Heineman. 3th edition Moscow 1993., 14th reimpression. 2000
- [28] R. Bellman. Stability Theory of Differential Equations. Mc. Graw Hill. USA 1953.
- [29] S. Chakraverty. Vibration of plates. CRC Press. USA 2009
- [30] A. Ern, J.L. Guermond, Theory and practice of finite elements, Springer, 2004

# Estimate of the Region of Attraction of a Kapitza Pendulum Subject to an Harmonic Excitation and Analysis of the Pendulum Behavior for a Non Harmonic Excitation

J. Tellez  
DCA CINVESTAV  
Mexico, D.F.

Email: jtellez@ctrl.cinvestav.mx

J. Collado  
DCA CINVESTAV  
Mexico, D.F.

Email: jcollado@ctrl.cinvestav.mx

**Abstract**—In this work, we present a stability analysis of the inverted pendulum subjected to a vertical excitation in the suspension point. First we apply a harmonic excitation term and physically determine the attraction region when considering a damping term, this can be seen as the estimation of the degree of robustness of the pendulum subjected to an open loop vibrational control. Next that we apply physically two independent excitations to obtain a non harmonic excitation, which is almost always a quasi periodic function. Physically the second excitation function will be add to the pendulum using a vibrating table, due to this the stability region grows, and presents the beating phenomena that not appears for harmonic excitation

of the degree of robustness of the pendulum subjected to an open loop vibrational control.

In the second part of this work, we introduce another excitation using a vibrating table, if the frequencies of the two excitations are not commensurable we obtain a non harmonic excitation, which is almost always a quasi periodic function and Floquet's theory is not applicable to calculate the stability regions in this case. We present the mathematical model to the non harmonic excited Kapitza pendulum and we compare the practical results obtain over the prototype of the harmonic excited and non harmonic pendulums.

## I. INTRODUCTION

Linear Periodic systems are a kind of linear systems whose coefficients are time varying continuous periodic functions, one of the most representative system of this type is the linearized Kapitza pendulum, which is modelled by Hill's equation [3].

If the variation of the parameters are periodic, the stability behavior of the system is governed by Floquet's theory, which states that if the eigenvalues of the monodromy matrix of the system are inside the unitary circle the solutions of the system will be bounded functions, and if any of the eigenvalues has modulus greater than one the solution of the system will be unstable. This criterion is equivalent to a discrete time systems [2].

In this work, we present a stability behavior of the Kapitza pendulum, first when we apply a harmonic excitation function. Using an open loop vibrational control we obtain stability in the upper equilibrium point of this pendulum. (inverted pendulum).

We have built a prototype of the Kapitza pendulum to obtain practical results of the stability behavior and compare it with the theoretical ones. Over the prototype we estimate the size of the region within which the upper equilibrium position is perturbed the system has the ability to return to the equilibrium position in which it was. This can be seen as the estimation

## II. STABILITY OF HILL'S EQUATION

For linear systems described by ordinary differential equation with periodic coefficients, the Floquet theory can be used to reduce the problem of stability to a calculus of eigenvalues of the Monodromy Matrix, which is roughly speaking, the state transition Matrix evaluated after one Period.

For systems described by second order differential equations, we can find two stability criteria, one with respect to the characteristic values of the equation and the second with respect to the trace of the monodromy matrix. Both criteria are listed below.

### A. The Hill's equation

The Hill's equation is a second order linear homogeneous equation with real periodic coefficients [3]. Without loss of generality  $p(t)$  is a zero average function:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + (\alpha + \beta p(t))y &= 0; \\ p(t + T) &= p(t); \int_0^T p(t)dt = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

where  $T$  is the minimum period of  $p(t)$ .

The stability analysis of Hill's equation is much more involved than linear differential equation with constant coefficients [1], [5].

Hill's equation (1) can be represented in space state form:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta p(t)) & 0 \end{bmatrix} x \quad (2)$$

where  $x = \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$

The Hill's equation with damping: Now we consider the Hill equation with damping as:

$$\ddot{y} + q(t)\dot{y} + p(t)y = 0 \quad (3)$$

It is possible reduce this equation to a Hill's type as (1), making the variable change  $y(t) = u(t)v(t)$ . Eliminating the first order term, we have:

$$\ddot{u} + \left( q(t) - \frac{1}{2}\dot{p}(t) - \frac{1}{4}p^2(t) \right) u = 0$$

This is a Hill equation without damping, but the effect of the damping modify the values of the parameters.

It is necessary at this point to emphasize that it is required that the coefficient  $p(t)$  must be differentiable in order to carry out the transformation [12].

The Mathieu equation is a particular case of Hill's equation (1) where  $p(t) = \alpha + \beta \cos(t)$  i.e.:

$$\ddot{y} + (\alpha + \beta \cos t) y = 0 \quad (4)$$

### B. Monodromy matrix

The Monodromy matrix is defined in [2] as:

$$M := \Phi(t_0 + T, t_0) \quad (5)$$

where  $\Phi(t_0, t)$  is a fundamental matrix of the system  $\dot{x} = Ax$  and  $T$  is the minimum period of  $p(t)$ .

It may be proved that  $\sigma(M)$  does not depends on  $t_0$  [2]; here,  $\sigma(R)$  represents the set of eigenvalues including multiplicity of the square matrix R.

### C. Stability criteria for the Hill's equation

#### 1) Criterion of the characteristic values:

*Theorem 1:* The periodic system (2) is:

Asymptotically stable if and only if:

$$\sigma(M) \subset \overset{\circ}{D}_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Stable if:

$$\sigma(M) \subset \overline{D}_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

here  $\lambda_i \in \sigma(M)$  if  $|\lambda_i| = 1$  then  $\lambda_i$  is a simple root of its minimal polynomial  $m_M(\lambda)$ .

Unstable if and only if  $\exists \lambda_i \in \sigma(M) : |\lambda_i| > 1$ , or

$\sigma(M) \subset \overline{D}_1$  and  $|\lambda_i| = 1$  is a multiple root of

$m_M(\lambda)$

Here,  $M$  is any monodromy matrix of system (2).<sup>1</sup>

This theorem gives us necessary and sufficient conditions about the system stability using the eigenvalues of the monodromy matrix [3].

<sup>1</sup>Any monodromy matrix means that does not matter which one is calculated

2) *Criterion of the monodromy matrix trace:* Given a system described by equation (2), its stability can be determined by analyzing the value of the trace of the monodromy matrix associated with the system [3], [9].

- $|tr(M)| < 2$  the solution is stable
- $|tr(M)| > 2$  the solution is unstable
- $|tr(M)| = 2$  there is one periodic ( $tr(M) = -2$ ) or antiperiodic ( $tr(M) = 2$ ) solution. In general it is unstable, the exception is when boundaries from left and right of one Arnold Tongue collapses in a single point: then all solutions are periodic. These points are called coexistence. See [13] or [[3],chapter VII]

### III. THE KAPITZA PENDULUM

The scheme of the Kapitza pendulum is:

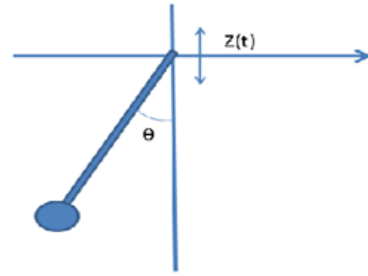


Figure 1. Kapitza Pendulum scheme.  $z(t)$  is the excitation in the suspension point

The oscillation about the lower vertical position of a pendulum to which a periodic excitation is applied in the suspension point and considering a damping term is governed for the next equation:

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \left( \frac{g}{l} + \frac{1}{l}z(t) \right) \sin(\theta) = 0 \quad (6)$$

where  $\theta$  is the angular position

$l$  pendulum length

$\gamma$  damping coefficient

if  $z(t) = a \cos(wt)$  is the excitation in the suspension point, the equation (6) look like:

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \left( \frac{g}{l} - \frac{a}{l}w^2 \cos(wt) \right) \sin(\theta) = 0 \quad (7)$$

where  $w$  is the excitation frequency, and  $a$  it's amplitude.

Considering  $\gamma = 0$  in the equation (7), we have the undamped Kapitza pendulum equation

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} - \frac{a}{l}w^2 \cos(wt) \right) \sin(\theta) = 0 \quad (8)$$

Linearizing the equation around  $\theta = \pi$ , the equation (8) takes the form:

$$\ddot{\theta} + \left( w_0^2 - \frac{a}{l}w^2 \cos(wt) \right) \theta = 0 \quad (9)$$

$w_0$  is the natural frequency of oscillation of the pendulum  $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Analyzing the equation (9), the inverted position of the pendulum is stable if the next condition is satisfied [7]

$$aw > \sqrt{2gl} \quad (10)$$

The equation (9) is a Hill's equation in which the excitation is an harmonic periodic function, and it is called Mathieu equation.

Let be  $\alpha = w_0^2$  and  $\beta = -\frac{a}{l}$  we have:

$$\ddot{\theta} + (\alpha + \beta w^2 \cos(wt)) \theta = 0 \quad (11)$$

writing (11) in form of (2), and using the stability criterion based on monodromy matrix trace, we draw the stability diagram for the Mathieu equation.

The stability region of the parameters  $(\alpha, \beta)$  making  $w = 1$  for the equation (11) are in the next figure.

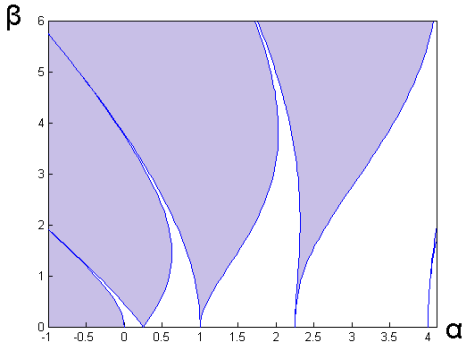


Figure 2. Stability diagram for Mathieu equation without damping.

White region represents stable zones of parameters and shadow regions are unstable ones, these are the so called Arnold tongues. The boundaries are in general unstable, they have one solution periodic and the other solution linearly independent is usually unbounded.

3) *Effect of the change of frequency in the parametric excitation:* In the Mathieu equation (8) the parameters of the excitation are  $(\beta, w)$ . We make a change of independent variable as:

$$\tau = wt \quad (12)$$

Replacing (12) in (11) we have

$$\theta'' + \left( \frac{\alpha}{w^2} + \beta \cos(\tau) \right) \theta = 0 \quad (13)$$

where ' denotes a derivation with respect to  $\tau$ ; the variation of parameters does not imply the variation in the frequency of the excitation.

4) *Experimental prototype of the Kapitza pendulum:* We developed a physical prototype of the Kapitza pendulum, in which, it is possible to change two parameters of the equation,  $a$  and  $w$ ;  $a$  is the amplitude of the excitation and  $w$  is its frequency. The amplitude  $a$  varies with a continuous scrolling mechanism coupled to the crank rod system, the frequency  $w$  varies from motor speed. These two parameters can be interpreted as the control variables of an open loop control system applied to the Kapitza Pendulum (See [14]; this video shows the Kapitza pendulum prototype. We make a variation of the excitation frequency until the instability is reached).

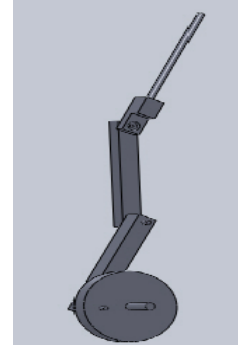


Figure 3. Scheme of the prototype of Kapitza pendulum

We construct a stability diagram of the upper equilibrium point of the Kapitza pendulum experimentally, using the prototype; we plot the results in comparison with the theoretical ones obtained with a Matlab program. This program evaluates the trace of the monodromy matrix associated with the system in a small interval near the stability boundary to determine the next point in the transition curve.

Taking (13) and making

$$k = \frac{g}{l \cdot w^2}; \beta = -\frac{a}{l}$$

we have

$$\theta'' + (k + \beta \cos(\tau)) \theta = 0 \quad (14)$$

For practical purposes in (14):

$$l = 0.295m, g = 9.81m/s^2$$

$$a \in (0, 0.085m), w \in (0, 32\pi rad/s)$$

The physical parameters obtained are:

$k$	$\beta$	$k$	$\beta$
-0.003	0.051	-0.039	0.152
-0.005	0.068	-0.045	0.169
-0.007	0.084	-0.049	0.186
-0.011	0.101	-0.057	0.203
-0.025	0.118	-0.063	0.220
-0.034	0.135		

At this point it is necessary to say that the stability region of the upper equilibrium point of the Kapitza pendulum is in the negative part of the horizontal axis of the stability diagram and we rescale the obtained values to make it compatible with the theoretical stability diagram of the equation (14).

In the next figure we compare the real data and the theoretical stability diagram with damping factor  $\gamma = 0.2$ ; the cross marks represent real data, black region is the theoretical unstable values; stable zone is white.

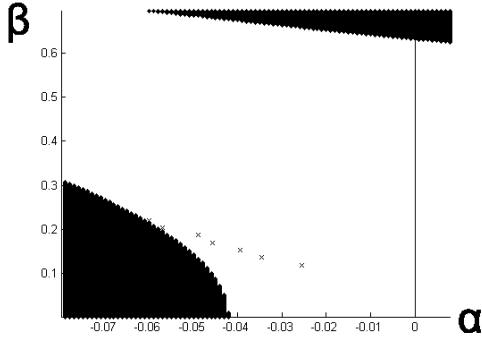


Figure 4. Comparing Theoretical vs physical data.

#### A. Attraction region of the periodic excited Kapitza Pendulum

Due physical prototype has a damping term as in the equation (7), the stability diagram is contained within the undamped stability one, and practically in the prototype appears a region, in which, the solutions of the equation are not only bounded, but also are asymptotically stable, and we can say that the open loop control applied to the pendulum has a certain degree of robustness to angle changes caused by disturbances.

Then, there is an attraction region, in which, if a perturbation moves the pendulum position of the upper vertical equilibrium point the pendulum returns to the equilibrium position it was in.

The next diagram shows the experimental results of the attraction region. To obtain the diagram we take a fixed value of the amplitude of the excitation  $\beta = 0.220$  in (14) and estimate the size of this region for any values of the frequency  $w$ . In the diagram the vertical axis represents the frequency  $w$  in rad/sec., and the horizontal axis is the angle in degrees.

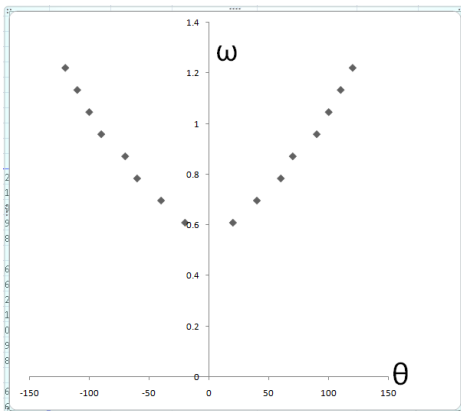


Figure 5. Attraction Region of the upper equilibrium point of Kapitza pendulum.  $w$  is the angular frequency of the excitation,  $\theta$  is the angle of the pendulum in degree.

In figure 5 we can see that if the excitation frequency is greater also is larger the size of the disturbance that the open loop vibrational control can support, this is according to equation (10), in which, we fixed the  $a$  parameter and increase  $w$ , such that the product  $aw$  is becoming larger than  $\sqrt{2gl}$ . While  $aw$  become greater the disturbance supported by the upper equilibrium point of the pendulum is also bigger.

See [15]. This video shows a test of the stability region over the upper equilibrium point. The pendulum is subjected to a disturbance and it's possible to see that the pendulum returns to its equilibrium position.

#### B. Introducing a non harmonic excitation

We now introduce a second excitation  $q_1(t)$  to the suspension point of the pendulum (the second excitation is produced by a vibrating table); remember that  $z(t) = a \cos(wt)$  is the excitation over the suspension point of the pendulum; to this excitation now add the corresponding excitation of the vibrating table.

The scheme of the Kapitza pendulum over the vibrating table is presented in the next figure:

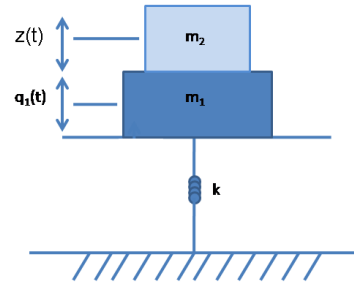


Figure 6. Scheme of Kapitza Pendulum over the vibrating table

When the vibrating table is adding to the original pendulum, we obtain a non harmonic excitation term, which is almost always quasi-periodic due to the natural frequency of the table and the frequency of the excitation in the pendulum are not commensurable numbers; this is because physically the parameters  $a, w$ , the spring constant and gravity are almost certainly irrational numbers.

See [16]. This video shows the prototype of the Kapitza pendulum on the vibrating table; the excitation frequency begins approximately at  $100 \text{ rad/s}$  and is reduced gradually. At second 20, the table begins to increase the amplitude of its vibration; in the minute 1:15 the excitation frequency comes to about  $40 \text{ rad/s}$  and the oscillation of the table reaches its maximum amplitude (linear resonance); at 1:30 frequency has dropped sufficiently to avoid the linear resonance point of the table and the table vibration decreases; and finally at 1:45 the upper equilibrium point of the pendulum reaches the instability condition and the pendulum falls.



The mathematical model for the Kapitza pendulum over the vibrating table are:

For the pendulum

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} - \frac{aw^2}{l} \cos(wt) + \frac{1}{l} \ddot{q}_1 \right) \sin(\theta) = 0 \quad (15)$$

For the vibrating table

$$(m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + kq_1 = (m_1 + m_2)g + m_2aw^2 \cos(wt) \quad (16)$$

where  $q_1$  is the movement of vibrating table,  $m_1$  mass of the vibrating table,  $m_2$  mass of the pendulum,  $k$  the spring constant

Solving (16) and replacing in (15) and linearizing around  $\theta = \pi$  we have:

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{ml} \left( mg + A_0 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + A_1 \cos(wt) \right) \theta = 0 \quad (17)$$

where

$$m = m_1 + m_2, A_0 = -k \left[ \frac{am_2w^2}{mw^2 - k} - \frac{mg}{k} \right],$$

$$A_1 = \frac{-km_2aw^2}{k - w^2m} - aw^2m_1, k \neq w^2m$$

The characteristic of Cantor-Like spectrum of the almost periodic Mathieu Equation disappears when the damping term is present, and the Arnold Tongues diagram resembles a periodic one [10], [11].

Over the prototype we observe that when the pendulum is over the vibrating table, the stability behavior of the pendulum change; in fact, stable zone is smaller than the previous one without the table. In the next figure, we show the measured values of the original stability boundary taken of the prototype ( $\circ$ ), and the measured values of the stability boundary of the pendulum over the table ( $\blacksquare$ ). Stable parameters area is above the boundary line in both cases.

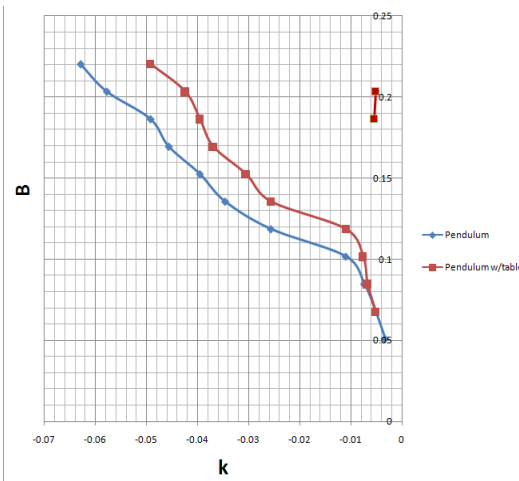


Figure 7. Boundary stability of Kapitza pendulum Vs Kapitza Pendulum over the vibrating table.

With the non harmonic excitation we can found behaviors that do not occur without it; for example with  $k = 0.035$ , and  $\beta = 0.135$  the pendulum is stable but oscillates around the upper equilibrium point. This phenomena is called "beating" [8]. (See [17])

For  $\beta = 0.18$ , there are two frequencies that have a unstable behavior,  $w = 29rad/s$  ( $k = 0.039$ ) and  $w = 78rad/s$  ( $k = 0.0054$ ), See [18]. In the video you can see that if the excitation frequency is decreased or increased the upper equilibrium point of the pendulum over the vibrating table becomes unstable.

#### IV. CONCLUSION

First, we can see, that the stability of the inverted pendulum subjected to a vertical harmonic periodic excitation in governed by the Mathieu equation (14), in which, two parameters ( $k, \beta$ ) varies and it is not necessary to draw the diagram considering the changes of frequency as in the prototype, we only rescale the values according with (13). The inclusion of a non harmonic excitation in the suspension point (vibrating table) modify the stability behavior, the stability region grows and instability boundary is reached at an excitation frequency  $w$  greater than the pendulum without the table. Using the vibrating table the pendulum presents the phenomenon of "beating" that does not occurs in harmonic periodically excited pendulum. When the two frequencies are not commensurable it's not possible apply the Floquet's Theory to calculate the stability boundaries.

#### REFERENCES

- [1] V. Bolotin. The dynamic stability of elastic systems. Holden Day Inc. USA 1964.
- [2] Jordan Smith. Nonlinear Ordinary Differential Equations. Oxford University Press. USA 2007. 4th Edition.
- [3] W. Magnus and S Winkler. Hill's Equation. Dover. USA 2004.
- [4] V. Yakubovich and Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 1. John Wiley, Jerusalem, 1975. Ch. 4.
- [5] V. Yakubovich and Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 2. John Wiley, Jerusalem, 1975. Ch. 5.
- [6] A. Lyapunov. General problem of the stability of motion, Original in Russian (1892). English translation, Taylor and Francis 1992.
- [7] A.A. Seyranian et al. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Volume 70, Issue 5, 2006, Pages 754-761.
- [8] F.Axisa. Modelling of Mechanical Systems. Discrete Systems. Volume 1. Kogan Page Science, USA 2004. Page 263.
- [9] L.Moreno, J.Collado. Reshaping Arnold Tongues. IEEE 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, (CCE 2009).
- [10] J. Moser. An example of a Schroedinger equation with almost periodic potential and nowhere dense spectrum. Birkhäuser Verlag, Basel. 1981.
- [11] R.Rand. A quasiperiodic Mathieu Equation. Series on Stability, Vibration and Control of Systems Series B: Vol. 2. World Scientific Publishing Company.The Richard Rand 50th Anniversary Volume. pp.203-221
- [12] C. Hayashi. Forced oscillations in Non-linear Systems. Nipon Printing and Publishing, LTD. Japón 1953.
- [13] S.Winkler. The Coexistence Problem for Hill's Equation. Ph. D. Thesis, NY University, 1958, 91pp.
- [14] <http://youtu.be/Vu2ueBey4IA> "Kapitza pendulum Prototype"
- [15] <http://youtu.be/Il21SVZUK2E> "Stability test over the Pendulum"
- [16] <http://youtu.be/ubXRi8JGBK0> "Quasi periodic Kapitza Pendulum"
- [17] <http://youtu.be/20XUGxBOUaM> "Beating phenomena"
- [18] [http://youtu.be/JiIGpIZG\\_bQ](http://youtu.be/JiIGpIZG_bQ) "Stability of Quasi periodic Kapitza Pendulum"

# Attenuation of oscillations in a mechanical system using a vibrational parameter.

J. Tellez  
Control Department  
Cinvestav IPN - UPVM  
Mexico City, Mexico  
jtellez@ctrl.cinvestav.mx

J. Collado  
Control Department  
Cinvestav IPN  
Mexico City, Mexico  
jcollado@ctrl.cinvestav.mx

**Abstract**—In this work we attenuate the oscillations of a mechanical system using a vibrational control term introduced in the elasticity of a spring. First we must analyze the stability of the system due to the induction of periodic excitation can cause parametric resonance.

## I. INTRODUCTION

The linear differential equations with periodic coefficients have been studied extensively motivated by applications in the fields of physics and engineering [1], for example in the study of suspension bridges [2], rotating discs, elastic pendulums, the Kapitza pendulum [15], vibrations in rotating shafts [13], propagation of acoustic or electromagnetic waves [11] or a system of a crane mounted on a ship under the action of the waves [6] to name just a few.

Basis of such equations were established by several authors including Floquet [9], Hill [10], Mathieu [8], Faraday [7], and others. A very detailed and deep presentation are the works of Yakubovich and Starzhinskii [2] and [16].

In this work we analyze the stability of a mechanical double harmonic oscillator subject to a parametric periodic excitation induced in the elasticity of a spring and we increase the attenuation of the system temporal response adding a vibrational parameter, we characterize the values of the parameter in order to achieve the maximum attenuation.

## II. PERIODIC SYSTEMS

The periodic systems are a kind of systems described by the equation:

$$\dot{x} = A(t)x \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad -\infty < t < \infty \quad (1)$$

Where the elements of  $A(t)$  are piecewise continuous periodic functions, with minimum period  $T$ .

$$A(t+T) = A(t)$$

### A. Properties of periodic systems

A periodic system do not necessarily have a periodic solution [3].

The solution of (1) is:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

In general  $\Phi(t, t_0)$  can not be computed for the periodic case, except for some very specific systems.

Some properties of  $\Phi(t, t_0)$  (See [21]):

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \Phi(t_0, t_0) = I$$

The periodicity of the system implies that

$$\Phi(t+T, t_0+T) = \Phi(t, t_0)$$

for any  $t, t_0$ .

*Theorem 1:* [3],[20]

A system like (1), with  $A(t+T) = A(t)$  has at least one no identically zero solution, such that

$$x(t+T) = \lambda x(t), \forall t, \lambda \neq 0$$

Let a homogeneous system like (1), then there exist a periodic and invertible matrix  $P(t) = p(t+T) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  and a constant matrix  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  such that (See [1] and [2]).

$$\Phi(t_0+T, t_0) = P^{-1}(t_0)e^{RT}P(t_0)$$

Last equation shows that the monodromy matrix is similar to  $e^{RT}$ .

If we assume  $t_0 = 0$ , then for any  $t \geq 0$ ,  $t$  can be written as:  $t = kT + \tau, k \in \mathbb{Z}^+, (\text{non negative integers})$   $\tau \in [0, T)$ .

$$x(t) = \Phi(t, 0)x(0)$$

$$= \Phi^k(T + \tau, \tau)\Phi(\tau, 0)x(0) = M^k\Phi(\tau, 0)x(0)$$



Boundedness of  $x(t)$  depends only on the boundedness of the factor  $M^k$  due to  $\Phi(\tau, 0)$  is bounded because  $\tau \in [0, T)$  and a linear System can not go to infinity in finite time; and  $x(0)$  is also bounded.

The above result show that the system stability depends only of the eigenvalues of the monodromy matrix.

### B. The Hill's equation

The Hill's equation is a second order linear homogeneous equation with real periodic coefficients [4], without loss of generally  $p(t)$  is a zero average function.

$$\begin{aligned} \ddot{y} + (\alpha + \beta \cdot p(t))y &= 0; \\ p(t+T) &= p(t), \int_0^T p(t)dt = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Its stability analysis is much more involved than linear differential equation with constant coefficients [5],[2].

Hill's equation (2) can be represented in state space form:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta p(t) & 0 \end{bmatrix} x \quad (3)$$

$$\text{where } x = \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$$

### C. Stability of Hill's Equation

For linear systems described by ordinary differential equation with periodic coefficients, the Floquet's theory can be used to reduce the problem of stability to the calculus of eigenvalues of the Monodromy Matrix, which is roughly speaking, the state transition Matrix evaluated after one Period.

### D. Monodromy matrix

The Monodromy matrix is defined in [3] as:

$$M := \Phi(t_0 + T, t_0) \quad (4)$$

where  $\Phi(t, t_0)$  is a fundamental matrix of the system  $\dot{x} = Ax$  and  $T$  is the minimum period of  $p(t)$ .

It may be proved that  $\sigma(M)$  does not depends on  $t_0$  [3]; where  $\sigma(R)$  represents the set of eigenvalues including multiplicity of the square matrix  $R$ .

### E. Stability criteria for the Hill's equation

**Theorem 2:** The periodic system (3) is (See [4]):

Asymptotically stable if and only if:

$$\sigma(M) \subset \overset{\circ}{D}_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Stable if:

$$\sigma(M) \subset \overline{D}_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

and  $\lambda_i \in \sigma(M) : |\lambda_i| = 1, \lambda_i$  is a simple root of its minimal polynomial  $m_M(\lambda)$ .

Unstable if and only if  $\exists \lambda_i \in \sigma(M) : |\lambda_i| > 1$ , or

$\sigma(M) \subset \overline{D}_1$  and  $|\lambda_i| = 1$  is a multiple root of  $m_M(\lambda)$

where  $M$  is any monodromy matrix of system (3).<sup>1</sup>

This theorem gives us necessary and sufficient conditions about the system stability using the eigenvalues of the monodromy matrix [4].

### F. Vibrational control

The effect of changing the dynamic properties of a system by the introduction of oscillations in its parameters (with zero mean value) will be referred as vibrational control [18].

Given the system described by the equation

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in E_n, \quad A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = \text{constante} \quad (5)$$

If we vibrate the elements of the matrix  $A$  with the control law  $B(t) = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^n$ , where  $b_{ij} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ij}^s \sin(s\omega_{ij}t + \theta_{ij}^s)$  are periodic functions with zero mean value, then:

$$\dot{x} = [A + B(t)]x \quad (6)$$

Vibrations used for control and stabilization can be arbitrary periodic functions in form and frequency on the understanding that they must have zero mean value [19].

**Definition 3:** The system described by the equation (5), will be said vibrationally stabilizable, if there exists a periodic matrix  $B(t)$  (with zero mean value), such that the trivial solution  $x = 0$  of the system (6) is asymptotically stable [19].

## III. DEVELOPMENT

Now, using the mathematical model of the double harmonic oscillator, we make a stability analysis when one of its parameters varies periodically.

### A. The double harmonic oscillator

The diagram of the double harmonic oscillator is:

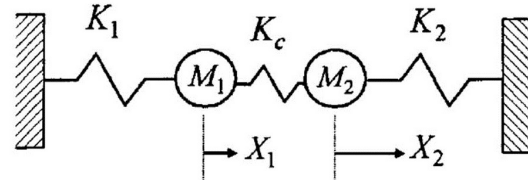


Figure 1. Double harmonic oscillator scheme.

The movement equations of the system are (See [17]):

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_c)x_1 - k_c x_2 = 0$$

<sup>1</sup>Any monodromy matrix means that does not matter for which value of  $t_0$  is calculated.

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (k_2 + k_c)x_2 - k_c x_1 = 0$$

The matrix representation of the system is:

$$\ddot{x} + \begin{bmatrix} \frac{k_1+k_c}{m_1} & -\frac{k_c}{m_1} \\ -\frac{k_c}{m_2} & \frac{k_2+k_c}{m_2} \end{bmatrix} x = 0$$

Factorizing each spring term, the system equations looks like:

$$\ddot{x} + \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} k_c + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} k_2 \right\} x = 0 \quad (7)$$

In the equation (7), if the stiffness of any spring varies periodically, the equation (7) is a Hill's type matrix equation.

If we consider a viscous friction term (air friction) in the equation (7):

$$\ddot{x} + \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \dot{x} + \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} k_c + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} k_2 \right\} x = 0 \quad (8)$$

### B. Temporal response of the system

The temporal response of the equation (8) considering  $k_1 = 1, k_2 = 1, k_c = 1, \gamma = 0.0005, m_1 = 1, m_2 = 1, w = 1$  calculated over Matlab Simulink is:

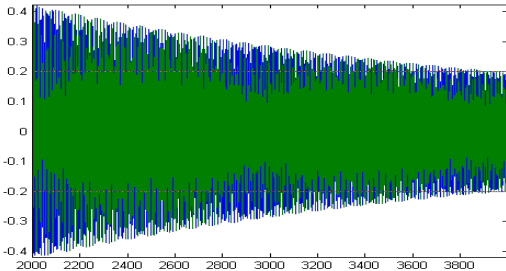


Figure 2. Free temporal response of the system, considering a damping term  $\gamma = 0.0005$  an initial displacement condition  $x_1(0) = 1$ .

Observe that the value at 4000 sec. has an amplitude about 0.22 due to the damping term of the equation (8).

We want to increase the damping of the system using a vibrational control term and attenuate the oscillations.

### C. Stability analysis of the system in presence of parametric excitation

We must ensure the stability of the system when we add the periodic excitation term, for this purpose, we analyze the equation (8) and considering that the stiffness of the spring  $k_c$  varies periodically in time, as  $k_c = \alpha + \beta \cos(wt)$ , where  $k_2 = 1, k_c = 1, \gamma = 0, m_1 = 1, m_2 = 1, w = 1$ .

The system equation is:

$$\ddot{x} + \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (\alpha + \beta \cos(wt)) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} x = 0 \quad (9)$$

Using a Matlab algorithm that draws the stability diagram of figure 3.

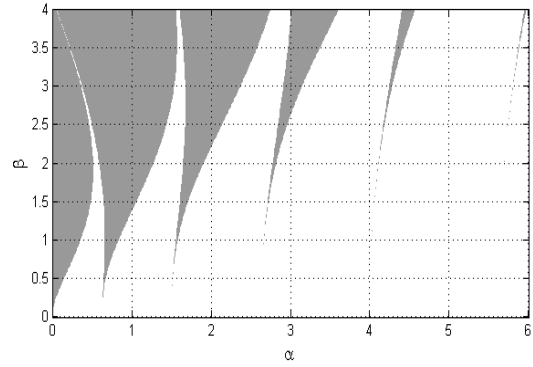


Figure 3. Stability diagram of the equation (9) considering a periodic excitation over the stiffness of  $k_c$ .

The algorithm that draw the stability diagram works as follows. First, we calculate the System Monodromy matrix column by column, for that we solve numerically de equation (9) one time for each vector of initial condition defined by each one of the identity matrix columns, next that we obtain the eigenvalues of the monodromy matrix and evaluate them in the stability criterion given in the theorem 2. We draw a gray point if the system is unstable, white points are the stable zones (See [22]). The tongues consist of unstable areas are the so called Arnold Tongues [4].

### D. Inducing damping of the double harmonic oscillator

The goal of this work is to reduce the oscillation's amplitude of the system (increase damping), for this purpose we incorporate a periodic parametric oscillation over the stiffness of the  $k_c$  spring of the form:

$$k_c = \alpha + \beta \cos(wt)$$

We need to chose the values of  $\alpha, \beta$  and  $w$  that reduced the oscillation and ensure stability of the system.

To achieve this, in the previous section we construct the stability diagram of the system, considering a periodic variation of  $k_c$  (See figure 3).

In order to appreciate the effects of parametric excitation induced in  $k_c$  we leave one of the excitations parameters fixed and vary only the remaining two.

1) *Case 1: Using a fixed  $w$ :* Given  $w = 1$  we chose the values of  $\alpha$  and  $\beta$  to increase the damping term in the equation (8), for example we chose  $\beta = 1.5$ , and adjust the  $\alpha$  value to get the best possible vibrational control term for attenuate the oscillations.

The  $\alpha$  value is chosen in the stable region located in the middle of the two Arnold tongues (See figure 4).

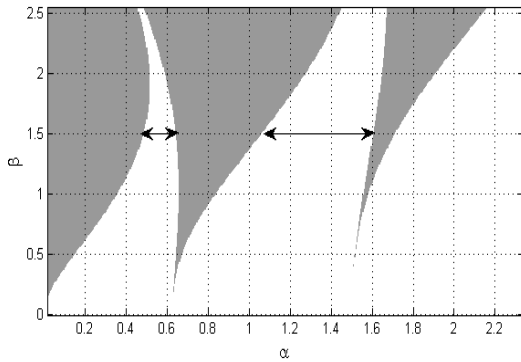


Figure 4. Stable region between two Arnold tongues.

The induced damping for the vibrational control term  $k_c = \alpha + \cos(t)$  is greater for the minimum value of  $\alpha = 1.4$  in the middle of the stable interval, and decrease in the other values of this parameter.

In the figure 5 the attenuation of the system is about 30% greater that the system without the parametric excitation, the system amplitude response is 0.152 (in the original system is 0.22).

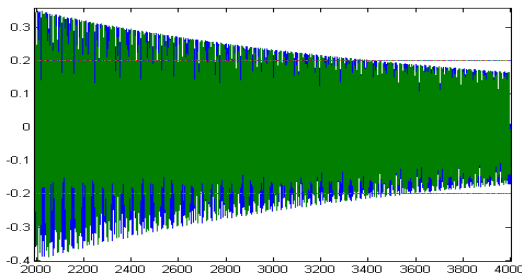


Figure 5. Temporal response for the system considering  $k_c = 1.4 + 1.5 \cos(t)$ , this excitation term provides greater attenuation of oscillations in this range

If  $\alpha$  is greater of this value the induced damping is not increase. This is, for a given values of  $\beta$  and  $w$  there

exists a minimum value of  $\alpha$  that give us the maximum induced damping. This can be seen in the Figure 6.

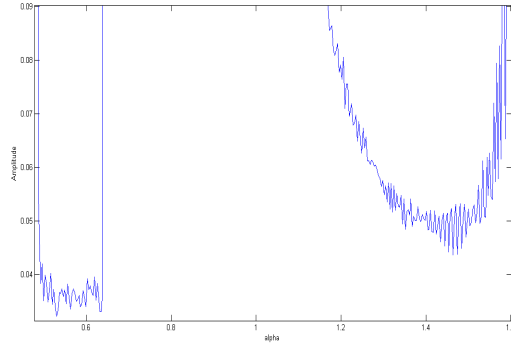


Figure 6. The figure shows the attenuation pattern in the first and second stability intervals using  $\beta = 1.5, w = 1$ . We can see that the maximum induced attenuation is achieve in the first stability interval.

Now we change the value of  $\beta$  to 0.5 and repeat the experiment, we try to determine the  $\alpha$  value to reach the maximum parametric attenuation.

Using  $\alpha = 1.6, \beta = 0.5, w = 1$  we have:

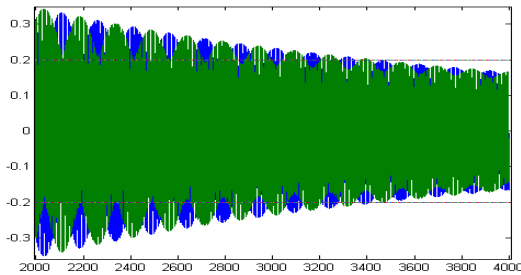


Figure 7. Temporal response of the parametric excited system using  $k_c = 1.6 + 0.5 \cos(t)$ .

The attenuation is the same as in the previous example, in this case the  $\alpha$  value is greater.

Using  $\alpha = 0.49, \beta = 2.5, w = 1$  we have:

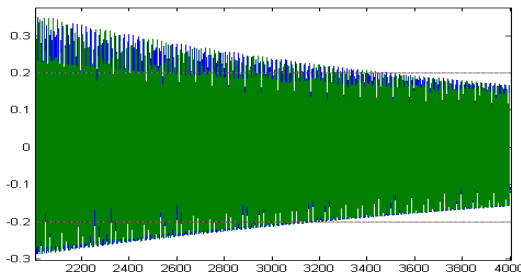


Figure 8. Temporal response of the parametric excited

system using  $k_c = 0.49 + 2.5 \cos(t)$ .

In the three examples of this case, we can see that for a greater  $\beta$  the  $\alpha$  value to reach the maximum attenuation is smaller.

2) *Case 2: Using a fixed  $\alpha$ :* In this case we start with the first example of the previous case. Given fixed  $\alpha = 1.4$  and selecting  $\beta = 1.5$ .

We note when the frequency is increase the maximum attenuation is reached for a smaller  $\alpha$ . Using a reduced  $\alpha = 1$  we adjust the frequency parameter  $w$  to ensure the best possible incorporated damping term. The periodic excitation term has the form  $k_c = 1 + 1.5 \cos(wt)$ .

For  $w = 5$  we achieve the maximum induced damping due to the periodic excitation term (temporal response amplitude is 0.152).

The system response is:

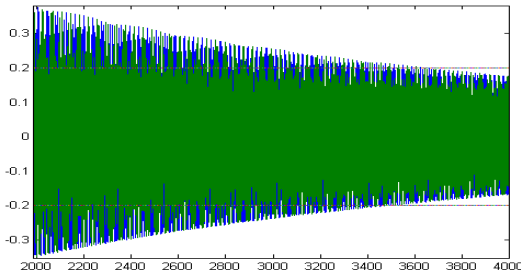


Figure 9. Temporal response of the system using  $k_c = 1 + 1.5 \cos(5t)$ . This figure shows that it is possible to induce damping varying the frequency of the periodic excitation too.

In the frequency variation case from the maximum attenuation, the reduction of the frequency cause a smaller attenuation in the system response, but in the same way the increase of the frequency has the same effect.

### E. Conclusion

We report here an example of a relatively simple mechanical system, in this case a double harmonic oscillator, we can see that if there is periodic variation in some of its parameters, the damping of the system increase if the values of the parameters are adequate. It is possible to reach the same final amplitude in the system response approximately in three quarter part of time, and it's possible to attenuating the final amplitude approximately 30%. In addition for a greater  $\beta$  in the parametric excitation the maximum induced attenuation is reached for a smaller value of  $\alpha$  and if the frequency is increase the value of  $\alpha$  for a fixed  $\beta$  in smaller too.

It is possible too, add the parametric vibrational control in more than one of the parameters of the system.

### REFERENCES

- [1] V.A. Yakubovich and V.M. Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 1. John Wiley, Jerusalem, 1975. Ch. 4.
- [2] V.A. Yakubovich and V.M. Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 2. John Wiley, Jerusalem, 1975.
- [3] D.W. Jordan and P. Smith. Nonlinear Ordinary Differential Equations. Oxford University Press. USA 2007. 4th Edition.
- [4] W. Magnus and S. Winkler. Hill's Equation. Dover. USA 2004.
- [5] V. Bolotin. The dynamic stability of elastic systems. Holden Day Inc. USA 1964.
- [6] A. H. Nayfeh et al, Dynamics and control of cranes: A review. Journal of Vibration and control, 9 (2003), pp.863-908.
- [7] M. Faraday. On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces. Transactions Royal Society (1831), pp. 299-318.
- [8] E. Mathieu. Memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. J. Math Pures Appl. 13 (1868), pp. 137-203.
- [9] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Annales de la Ecole Normal Superior (1883), pp.47-89.
- [10] W.G. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee. Acta Math 8 (1886). pp. 1-36.
- [11] S. Bitantti et al. Periodic control. Encyclopedia of Electrical and Electronical Engineering 16 (1999), pp.59-74.
- [12] V.I. Arnold. Mathematical methods of classical mechanics. 2th edition. Springer. Translation of Russian original edition. Moscow 1974.
- [13] G. Genta. Vibrations dynamics and control. Springer USA 2009.
- [14] E.T. Whittaker & G.N. Watson. A course of modern analysis. Cambridge University Press. 1962.
- [15] A.A. Seyranian, et al. The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Volume 70, Issue 5, Elsevier. Rusia 2006, pp.754-761.
- [16] V.A. Yakubovich and V.M. Starzhinskii. Parametric Resonance in Linear Systems, Nauka, 1982 (In Russian), pp. 209-212.
- [17] F.Axisa. Modelling of Mechanical Systems. Discrete Systems Volume 1. Kogan Page Science. USA 2004.
- [18] S. Meerkov. Principle of vibrational control: Theory and applications. Department of Electrical Engineering. Illinois Institute of Technology. Chicago, IL 60616.
- [19] S. Meerkov. Vibrational Control Theory. Moscow Institute of Science. USSR.
- [20] L. Cesari. Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, 2nd ed. Springer-Verlag, 1963.
- [21] Chen. Linear System Theory and design. Oxford University Press. 3th Edition. USA 1999.
- [22] H. Jardón. Tesis: Control de sistemas modelados por la ecuación de Hill con base en discretización. DCA CINVESTAV IPN, México, D.F. 2010.

# Boundary following Algorithm for calculating the Arnold tongues in Hill's Equation.

J. Tellez  
DCA CINVESTAV  
Mexico, D.F.  
Email: jtellez@ctrl.cinvestav.mx

J. Collado  
DCA CINVESTAV  
Mexico, D.F.  
Email: jcollado@ctrl.cinvestav.mx

**Abstract**—This paper presents a new method for calculating the parametric stability diagrams for the Hill's equation, in this method given a point over the stability boundary, we make a tracking on the boundary using the trace of the monodromy matrix, in particular we use it to draw the diagrams for Mathieu and Meissner equations. This method uses less computational resources and get a good performance but only applies to equations for a starting point of unstability tongue is known.

## I. INTRODUCTION

The linear differential equations with periodic coefficients have been studied extensively motivated by applications in the fields of physics and engineering [1], for example in the study of suspension bridges [2], rotating discs, elastic pendulums, the Kapitza pendulum [16] vibrations in rotating shafts [14], propagation of acoustic or electromagnetic waves [12] or a system of a crane mounted on a ship under the action of the waves [7] to name just a few.

Basis of such equations were established by several authors including Floquet [10], Hill [11], Mathieu [9], Faraday [8], and others. A very detailed and deep presentation is the work of Yakubovich and Starzhinskii [2],[18].

If a system parameter varies periodically with time, then an equilibrium can be unstable, even if it is stable for each fixed value of the parameter [13].

The parametric resonance refers to an unstable response of a system in which some parameter(s) vary periodically.

When the equation is associated with a physical system, generally resonance behavior brings adverse effects including destruction of the system, and therefore, throughout history has been necessary to estimate the parameter values that will lead to a resonance system.

The linear differential equations with periodic coefficients are a class of time-varying equations, in which, except a very small number of examples is impossible to solve analytically. Given this, we can found in the literature many algorithms for estimating parametric stability areas, for example using infinite determinants as in [6], by numerical approximation, or discretization [3].

In this work we present an alternative numerical method for calculating parametric stability diagrams to the Hill equation, particularly the cases of Mathieu and Meissner equations, this method using fewer computational resources integrates the differential equation near the stability boundaries and

not all internal points of Arnold tongues, and we present a comparison of performance against other reported algorithms.

## II. STABILITY OF HILL'S EQUATION

For linear systems described by ordinary differential equation with periodic coefficients, the Floquet theory can be used to reduce the problem of stability to a calculus of eigenvalues of the Monodromy Matrix, which is roughly speaking, the state transition Matrix evaluated after one Period.

For systems described by second order differential equations, we can find two stability criteria, one with respect to the characteristic values of the equation and the second with respect to the trace of the monodromy matrix. Both criteria are listed below.

### A. The Hill's equation

The Hill's equation is a second order linear homogeneous equation with real periodic coefficients [5], without loss of generality  $p(t)$  is a zero average function.

$$\begin{aligned} \ddot{y} + (\alpha + \beta \cdot p(t))y &= 0; \\ p(t + T) &= p(t) \\ \int_0^T p(t) dt &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Its stability analysis is much more involved than linear differential equation with constant coefficients [6],[2].

Hill's equation (1) can be represented in state space form:

$$\ddot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta p(t) & 0 \end{bmatrix} x \quad (2)$$

where  $x = \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$

The Mathieu equation is a particular case of Hill's equation (1) where  $p(t) = \cos(t)$  i.e.:

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t)x = 0 \quad (3)$$

and the Meissner equation is a Hill's equation where  $p(t) = \text{sign}(\cos(t))$ :

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cdot \text{sign}(\cos t))x = 0 \quad (4)$$

## B. Monodromy matrix

The Monodromy matrix is defined in [4] as:

$$M := \Phi(t_0 + T, t_0) \quad (5)$$

where  $\Phi(t_0, t)$  is a fundamental matrix of the system  $\dot{x} = Ax$  and  $T$  is the minimum period of  $p(t)$ .

It may be proved that  $\sigma(M)$  does not depend on  $t_0$  [4]; where  $\sigma(R)$  represents the set of eigenvalues including multiplicity of the square matrix  $R$ .

## C. Stability criteria for the Hill's equation

### 1) Criterion of the characteristic values:

*Theorem 1:* The periodic system (2) is:

Asymptotically stable if and only if:

$$\sigma(M) \subset \overset{\circ}{D}_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Stable if:

$$\sigma(M) \subset \overline{D}_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

and  $\lambda_i \in \sigma(M) : |\lambda_i| = 1$ ,  $\lambda_i$  is a simple root of its minimal polynomial  $m_M(\lambda)$ .

Unstable if and only if  $\exists \lambda_i \in \sigma(M) : |\lambda_i| > 1$ , or

$\sigma(M) \subset \overline{D}_1$  and  $|\lambda_i| = 1$  is a multiple root of  $m_M(\lambda)$

where  $M$  is any monodromy matrix of system (2).<sup>1</sup>

This theorem gives us necessary and sufficient conditions about the system stability using the eigenvalues of the monodromy matrix.[5]

2) *Criterion of the monodromy matrix trace:* Let a system described by equation (2) its stability can be determined by analyzing the value of the trace of the monodromy matrix associated with the system.[4]

- $|tr(M)| < 2$  the solution is stable
- $|tr(M)| > 2$  the solution is unstable
- $|tr(M)| = 2$  there is one periodic ( $tr(M) = -2$ ) or antiperiodic ( $tr(M) = 2$ ) solution, the other solution in general is unstable, the exception is when boundaries from left and right of one Arnold tongue collapses in a single point, the all solutions are periodic. These point are called coexistence. [20] or [[5],chapter VII]

*Definition 2:* In the  $\alpha - \beta$  plane, if we distinguished the unstable points in gray (Arnold tongues) and the stable ones in white, it is called Stability diagram

Arnold tongues are "numbered" according where are the "critical square frequencies"  $\alpha = \frac{n^2}{4}$ , the first Arnold tongue born at  $\frac{1}{4}$ , the second at 1, and so on.

*Remark 3:* Notice that the *zero - th* Arnold tongue "born" at  $(-\infty, 0]$

If at the  $i - th$  Arnold tongue the "left" boundary and the "right" boundary at  $\beta = 0$  are tangents, we say that the  $i - th$  Arnold tongue is NARROW. On the other hand if the boundaries of  $j - th$  Arnold tongue are transversal, we say that the  $j - th$  Arnold tongue is WIDE. [1],[2] or [18]

<sup>1</sup>Any monodromy matrix means that does not matter for which to is calculated.

## III. SOME FUNDAMENTAL PROPERTIES OF THE ARNOLD TONGUES.

About Hill's equation (1):

i) It is well known that critical frequencies "born" <sup>2</sup> at the points

$$\alpha = \frac{n^2}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\beta$  sufficiently small

ii) The width for Arnold tongues decreases as  $O(n^2)$ . [17]

iii) The boundaries of the Arnold tongues are analytic function [18], [[19],pp.60-61] or [[5], pp.78].

iv)  $\forall i \neq j$  Arnold tongue( $i$ )  $\cap$  Arnold tongue( $j$ ) =  $\emptyset$  this property is valid only in the scalar case, i.e., one degree of freedom. If we consider a vector Hill equation, this property in general is loose. [17],[[18],pp.209-212].

## IV. BOUNDARY FOLLOWING ALGORITHM

The (truncated) Infinite Determinants becomes very cumbersome when  $p(t + T) = p(t)$  has its Fourier series with very different terms, for instance  $p(t) = \alpha \cos(t) + \beta \cos(10t) + \gamma \cos(35t)$ .

The rest of numerical approaches for a sufficiently fine gridding in  $\alpha - \beta$  in the ranges of interest, calculates the Monodromy matrix for each pair  $(\alpha_0, \beta_0)$  and using  $tr(M)$  decides if corresponds to a stable point or to an unstable one, the algorithm is very simple but it consumes a lot of time.

The boundary following algorithm calculates only near the boundaries between stable and unstable regions of parameter stability diagram of a Hill equation in particular we show an example using the Mathieu equation.

We must remember that the unstable areas of the diagram are those in which the trace of the associated monodromy matrix ( $M$ ) is larger in absolute value than 2, and thus the boundary of the zone of stability complies with  $|tr(M)| = 2$ , i.e.,  $tr(M) = 2$  or  $tr(M) = -2$ , in fact, the first stability diagram tongue (zero tongue) has its boundary when  $tr(M) = 2$ , for tongue one, both the left and right boundaries will be drawn by the pairs of parameters that make  $tr(M) = -2$ , the second tongue will have boundaries that  $tr(M) = 2$ , and so on.

We show this behavior for the Mathieu equation on the next diagram

<sup>2</sup>"born" is used to indicate at which points of  $\alpha$  correspond when  $\beta = 0$ . Those points are called "critical square frequencies".

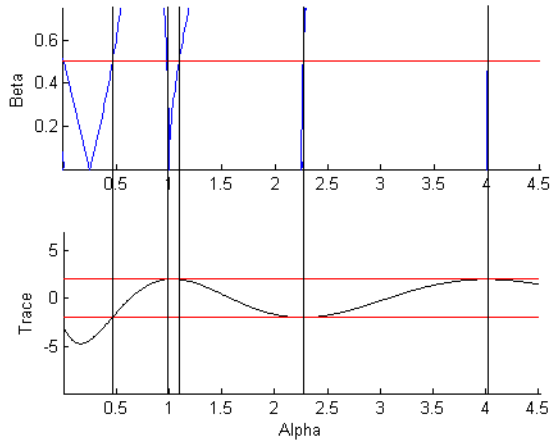


Figure 1. **Down:** Diagram for the Mathieu equation trace of monodromy matrix for  $\beta = 0.5$ . **Top:** Comparison of the stability diagram for the Mathieu equation, and the values of the trace.

Given a Hill's equation as (1) we know where are located the critical frequencies, then for  $\beta = 0$  the boundary or the Arnold tongues are given by (see [4]):

$$\alpha_0 = \frac{n^2}{4} \text{ where } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Using the golden ratio search at each interval we found "two" points at the instability boundary. Let us call the left boundary and the right boundary.

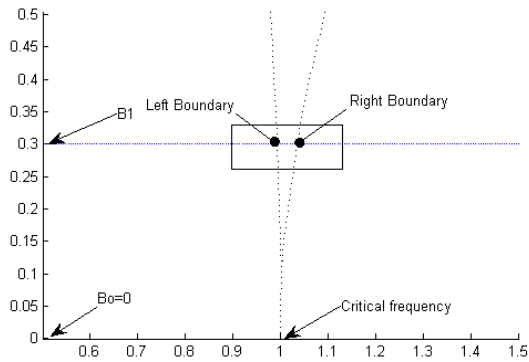


Figure 2. Right and left boundaries in the interval.

To draw the stability diagram by the boundary following algorithm is necessary to draw separately the left and right boundaries of each stability tongue. We start at the point  $(\alpha_0, 0)$ , we will give a vertical increment and defined a horizontal interval for each boundary

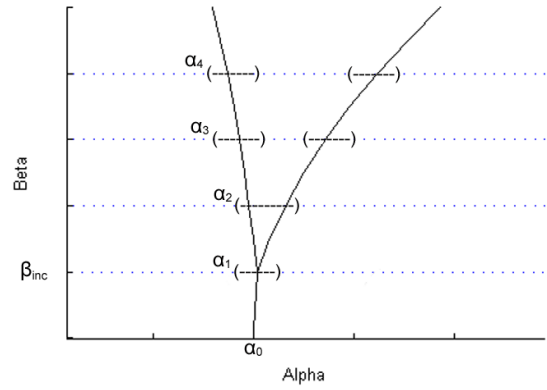


Figure 3. Illustration of the intervals used for the boundary following algorithm for calculating the stability diagram.

The first stability tongue (zero tongue) start at  $\alpha_0 = 0$ , and will increase the vertical parameter in an adequate size, if the increase is too large the calculated boundary will be inaccurate and if the increase is too small the algorithm will tend to be slow.

Since the boundary between the stable and unstable is a smooth curve its slope will be bounded and therefore we can determine a horizontal interval associated with the given vertical increase, in which can be guaranteed to find another point on the stability boundary.

The horizontal interval size can be fixed or may be calculated using the slope of the stability boundary in the previous step.

The new predicted value is calculated, based on the analyticity of the boundaries, extending the tangent to the curve at each point.

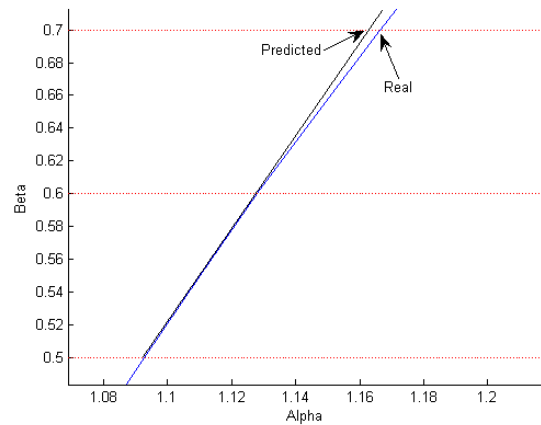


Figure 4. Estimation of the next point of the boundary using the slope of the curve.

In the obtained interval we now evaluate the trace of the monodromy matrix associated to the Mathieu equation for each pair  $(\alpha, \beta)$  and using a numerical approximation algorithm we determine the point to which the value of  $|tr(M)|$  is closer to 2, the accuracy of the obtained value for

the calculated boundary depends on the number of divisions to take over the interval.

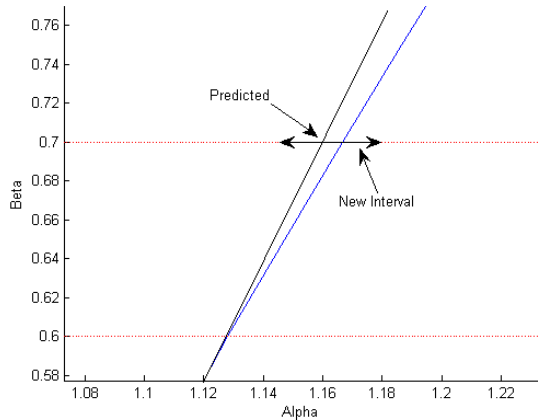


Figure 5. The diagram shows the new horizontal interval, centered in the predicted value.

After calculating this new point on the boundary, again we make a vertical increase, the new horizontal interval is calculated and we proceed to determine the new point on the boundary, continue with the procedure to achieve the desired vertical interval.

After calculating the zero tongue boundary, we calculate the initial value of  $\alpha$  for the following tongue and proceed in the same way to find the boundary, when we calculate the boundary except for zero tongue, care should be taken to determine the size of the interval, this is because as stated earlier the two boundaries of each unstability tongue satisfy the condition  $|tr(M)| = 2$ , and if the interval is too large the algorithm can jump from one boundary otherwise obtaining an incorrect diagram, we can therefore determine the value of the slope and move the horizontal interval in the direction of it.

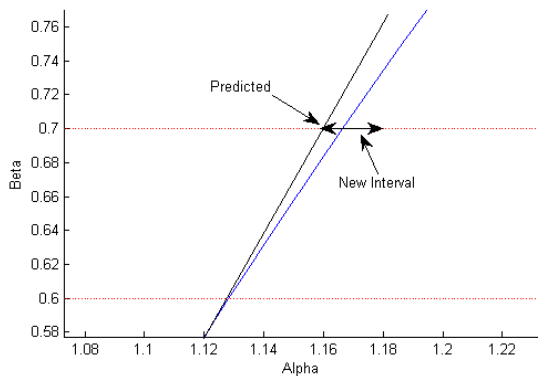


Figure 6. New interval chosen right for the direction given by the slope.

The major advantage of this algorithm is that it uses very few computer resources avoiding memory is saturated and is not required too much computation time also can be implemented in parallel computing to calculate several tongues at the same time and make the algorithm even faster.

Additionally you can substitute the equation without making modifications to the code, however when you add damping can not directly use this algorithm because the starting point of the tongues is unknown.

Using the criterion on the eigenvalues of monodromy matrix equation (Theorem 1) we can also increase the size of the system making it possible to obtain stability diagrams of higher order equations of 2.

The figure 7 shows the comparative diagram of two algorithms, in gray areas the instability diagram calculated using numerical approximations and the black lines are the stability boundaries calculated using the following boundary algorithm.

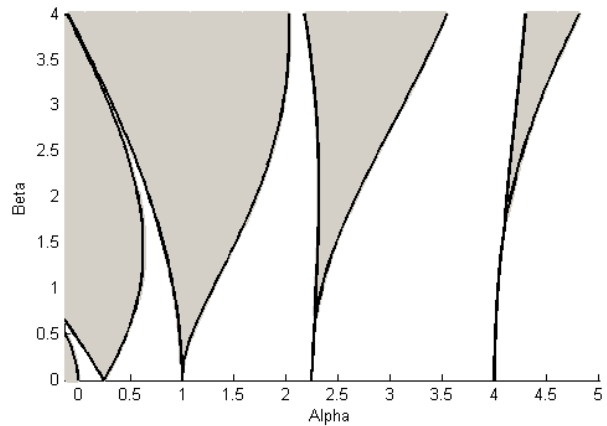


Figure 7. Comparison of the Mathieu equation stability diagram calculated by numerical approximation method versus boundary following algorithm.

Using the above algorithms we also calculate the stability diagram for Meissner equation the comparison of stability diagrams for Meissner equation (4) is:

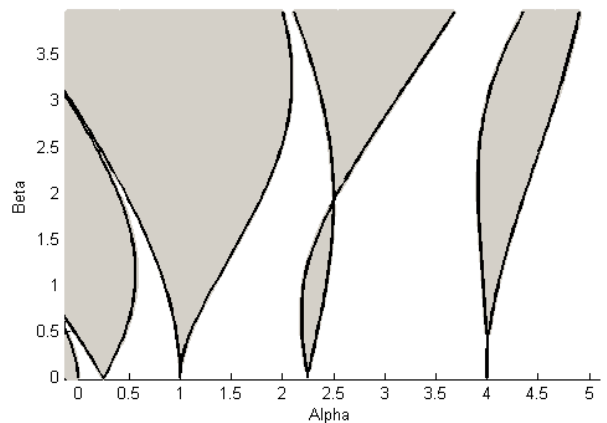


Figure 8. Comparison of stability diagrams for Meissner equation by numerical approximation algorithm (gray) and boundary following algorithm (black line).

## V. PERFORMANCE COMPARISON OF THE ALGORITHMS



To compare the performance of the algorithm provided in this paper we implemented:

- 1) A numerical approximation method, in which, all points on the diagram are evaluated.
- 2) The infinite determinant method. [4]
- 3) A discretization method (Lifting) developed in [3]
- 4) Boundary following algorithm

All algorithms was programmed in M code over Matlab 2010 on a computer with AMD Turion dual core 2.0 Ghz processor, 3GB of RAM memory and ATI Graphics Accelerator Card Radeon 1200 series,

The results of the comparison are shown in the following table:

Algorithm - Equation	Mathieu	Meissner
Num. Aproximation	10709	10940
Inf. Determinant	538	1315
Lifting	1039	1026
Boundary following	1129	1302

The results presented in the table are in seconds. In all cases the resolution of the corresponding diagrams was 1078x680 pixels.

## VI. CONCLUSIONS

We present a new method to draw stability diagrams for the Hill's equation that calculates only the boundaries between stable and unstable areas, using an algorithm that limits the number of calculations needed for this, this algorithm is computationally less expensive than others, and get a good performance but only applies to equations for a starting point of instability tongue is known.

The presented algorithm is able without difficulty to draw the stability diagram of the Mathieu and Meissner equations to name a few.

Additionally, the intervals method as calculates the boundary of the tongue is more accurate than the numerical approximation ones in the values close to the boundary, the numerical approximation method for the resolution taken in the parameters increase may not draw the low part of higher-order instability tongues because this part of the diagram is just a line.

## REFERENCES

- [1] V.A. Yakubovich and V.M. Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 1. John Wiley, Jerusalem, 1975. Ch. 4.
- [2] V.A. Yakubovich and V.M. Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 2. John Wiley, Jerusalem, 1975.
- [3] H. Jardón. Tesis: Control de sistemas modelados por la ecuación de Hill con base en discretización. DCA CINVESTAV IPN, México, D.F. 2010.
- [4] D.W. Jordan and P. Smith. Nonlinear Ordinary Differential Equations. Oxford University Press. USA 2007. 4th Edition.

- [5] W. Magnus and S. Winkler. Hill's Equation. Dover. USA 2004.
- [6] V. Bolotin. The dynamic stability of elastic systems. Holden Day Inc. USA 1964.
- [7] A. H. Nayfeh et al, Dynamics and control of cranes: A review. Journal of Vibration and control, 9 (2003), pp.863-908.
- [8] M. Faraday. On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elasting surfaces. Transactions Royal Society (1831), pp. 299-318.
- [9] E. Mathieu. Memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. J. Math Pures Appl. 13 (1868), pp. 137-203.
- [10] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Annales de la Ecole Normal Superior (1883), pp.47-89.
- [11] W.G. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee. Acta Math 8 (1886). pp. 1-36.
- [12] S. Bitantti et al. Periodic control. Encyclopedia of Electrical and Electronical Engineering 16 (1999), pp.59-74.
- [13] V.I. Arnold. Mathematical methods of clasical mechanics. 2th edition. Springer. Translation of Russian original edition. Moscow 1974.
- [14] G. Genta. Vibrations dynamics and control. Springer USA 2009.
- [15] E.T. Whittaker & G.N. Watson. A course of modern analysis. Cambridge University Press. 1962.
- [16] A.A. Seyranian, et al. The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Volume 70, Issue 5, Elsevier. Rusia 2006, pp.754-761.
- [17] V.I. Arnold. Remarks on the perturbation theory for problems of Mathieu type. Russian Math Surveys, vol. 38, No 4. 1983, pp. 215-233.
- [18] V.A. Yakubovich and V.M. Starzhinskii. Parametric Resonance in Linear Systems, Nauka, 1982 (In Russian), pp. 209-212.
- [19] R. Grimshaw. Non linear Ordinary Differential Equations. CRC press. 1993.
- [20] S.Winkler. The Coexistence Problem for Hill's Equation. Ph. D. Thesis, NY University, 1958, 91pp.