



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL**

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Control Visual de Robots Paralelos Planos Redundantes

Tesis que presenta:

M. en C. Miguel Angel Trujano Cabrera

Para obtener el Grado de:

Doctor en Ciencias

En la Especialidad de:

Control Automático

Directores de Tesis:

Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma

Dr. Alberto Soria López

Dedicada a:

A Dios por todo.

A mis padres Félix y Gloria por el apoyo incondicional.

Con cariño a mi hermana Blanca.

Agradecimientos

*A la nación por haberme otorgado una beca del CONACYT
para poder realizar mis estudios de doctorado.*

*Al Dr. Rubén A. Garrido Moctezuma y al Dr. Alberto Soria López por la oportunidad de
trabajar con ellos, por su asesoría y comprensión.*

*Al CINVESTAV y al Departamento de Control Automático
por la formación que me han otorgado.*

*Al Ing. José de Jesús Meza Serrano y al Ing. Gerardo Castro Zavala
del Centro de Servicios Experimentales del Departamento de Control Automático por su
cooperación y apoyo en la puesta en funcionamiento del equipo de laboratorio.*

A mis amigos y compañeros que de alguna manera me apoyaron.

Resumen

En este documento se estudia la estabilidad de reguladores que usan información visual comúnmente llamados controladores Visual Servoing, para el control de posición de robots paralelos planos redundantes. Tradicionalmente, los esquemas de control para estos robots hacen uso de la cinemática directa para cerrar el lazo de control, en consecuencia cualquier error en la solución de la cinemática directa o en la estimación de los parámetros cinemáticos genera un error en el cálculo de las coordenadas del órgano terminal del robot. Así, el empleo de un sistema de visión permite obtener la posición del órgano terminal evitándose el uso de la cinemática directa.

Basandose en las mediciones obtenidas con el sistema de visión en una configuración de cámara fija, se proponen leyes de control que permitan que el órgano terminal alcance una posición constante deseada dentro del espacio de trabajo del robot. Se presentan controladores de tipo Proporcional Derivativo (PD) y Proporcional-Integral-Derivativo (PID) para calcular los pares necesarios en las articulaciones activas del robot paralelo. Estas propuestas de control no hacen uso de mediciones de velocidad y emplean como alternativa estimaciones de velocidad proporcionadas por un filtro lineal pasa-altas alimentado con mediciones de posición. También se presentan casos en donde se considera incertidumbre al cerrar el lazo de control, particularmente los resultados obtenidos muestran robustez del sistema en lazo cerrado con respecto a incertidumbre en la matriz Jacobiana que es usada en el cálculo de las leyes de control.

Como novedad de este trabajo se presentan análisis de estabilidad utilizando funciones de Lyapunov estrictas que junto con el empleo del segundo método de estabilidad de Lyapunov aseguran que los sistemas en lazo cerrado obtenidos sean asintóticamente estables en un punto de equilibrio, diferenciándose así de los análisis usuales donde se requieren funciones candidatas de Lyapunov junto con el teorema de Barbashin-Krassovskii o el principio de invariancia de La Salle.

Finalmente, los algoritmos de control propuestos son evaluados en un robot paralelo plano de articulaciones rotacionales usado como prototipo de laboratorio y se ilustran los resultados experimentales correspondientes.

Abstract

In this document, we study the stability of regulators using visual information for position control of redundant planar parallel robots. Traditionally, control schemes for these robots make use of the forward kinematics to close the control loop. Therefore, any error in the solution of the forward kinematics or in the kinematic parameter estimation generates an error in the robot end-effector coordinates. Thus, the use of a vision system allows obtaining the position of the end-effector avoiding the use of the forward kinematics.

Based on the measurements obtained with the vision system under a fixed camera configuration, several control laws are proposed to reach a desired constant position within the parallel robot workspace. Proportional Derivative (PD) and Proportional-Integral-Derivative (PID) algorithms are used to calculate the joint torques on the parallel robot active joints. These controllers do not make use of velocity measurements; instead, they use velocity estimates obtained through a high-pass linear filter fed with position measurements. Additionally, this work address the robustness problem in face of uncertainties in the Jacobian matrix associated to the robot active joints.

One of the contributions of this dissertation is the stability analysis employing strict Lyapunov functions together with the second Lyapunov method to ensure closed-loop asymptotic stability at the equilibrium point. The proposed approach contrasts from analysis requiring Lyapunov candidate functions together with LaSalle's invariance principle. Finally, the proposed control laws are implemented on a planar parallel robot laboratory prototype.

Índice

Agradecimientos	V
Resumen	VII
Abstract	IX
1. Introducción	1
1.1. Configuraciones cinemáticas de robots manipuladores	3
1.2. Robots paralelos planos de 3 GDL	4
1.3. Antecedentes del control de robots paralelos planos	6
1.4. Alternativa de control en posición para robots paralelos planos redundantes	7
1.5. Motivación	9
1.6. Objetivos de la tesis	11
1.7. Estructura de la tesis	12
1.8. Publicaciones	12
2. Modelado del sistema robótico	13
2.1. Descripción del robot paralelo plano redundante	13
2.2. Cinemática del robot paralelo	14
2.2.1. Cinemática directa	16
2.2.2. Cinemática inversa	17
2.2.3. Cinemática diferencial	19
2.3. Dinámica del robot paralelo	21
2.3.1. Propiedades de la ecuación dinámica del robot paralelo	24
2.4. Modelado del sistema de visión	25
3. Control Visual de un Robot Paralelo Plano	33
3.1. Formulación del problema de control	34
3.2. Control Visual Proporcional Derivativo	36
3.2.1. Ley de control IBVS PD	36
3.2.2. IBVS PD con matriz Jacobiana S incierta	37
3.2.3. IBVS PD utilizando un estimado de la velocidad	38

3.3. Control Visual Proporcional Integral Derivativo	40
3.3.1. Ley de control IBVS PID	41
3.3.2. IBVS PID utilizando un estimado de la velocidad	42
3.4. Conclusión	44
4. Resultados Experimentales	45
4.1. Plataforma experimental	45
4.2. Resultados experimentales de la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad	48
4.2.1. Resultados experimentales considerando una matriz Jacobiana conocida sin incertidumbre	48
4.2.2. Resultados experimentales considerando incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S}	52
4.3. Experimentos correspondientes a la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad	58
4.3.1. Resultados experimentales de la ley de control IBVS PID usando un estimado de la velocidad y con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta	62
4.4. Comentarios	67
5. Conclusiones y trabajo futuro	69
I Apéndices	71
A. Demostración de la Proposición 1	73
B. Definición y cálculo de la matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose	75
C. Demostraciones de Estabilidad para las leyes de control visual PD	77
C.1. Estabilidad de la ley de control IBVS PD	77
C.2. Estabilidad de la ley de control IBVS PD con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta .	80
C.3. Estabilidad de la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad	81
D. Demostraciones de Estabilidad para las leyes de control visual PID	85
D.1. Estabilidad de la ley de control IBVS PID	85
D.2. Estabilidad de la ley de control IBVS PID utilizando un valor estimado de la velocidad	89
Bibliografía	93
Lista de acrónimos	99

Índice de figuras

1.1. Estructura de un manipulador de cadena cinemática abierta	1
1.2. Robot SCARA.	2
1.3. Robots paralelos planos completos con cadenas idénticas de tres grados de libertad.	5
1.4. Esquema de un robot paralelo redundante 3-RRR.	7
2.1. Estructura del robot paralelo plano redundante	14
2.2. Esquema y marco coordenado del robot paralelo.	15
2.3. Espacio de trabajo del robot para distintas longitudes en los eslabones. . .	17
2.4. Soluciones de la cinemática inversa.	19
2.5. Mecanismo equivalente en cadena cinemática abierta.	23
2.6. Configuración cámara fija.	26
2.7. Configuración cámara en mano.	26
2.8. Esquema de control visual basado en posición.	27
2.9. Esquema de control visual basado en imagen.	27
2.10. Sistema robótico en configuración cámara fija	28
2.11. Transformación de perspectiva.	29
2.12. Marcos coordenados del robot y del sistema de visión.	29
2.13. Definición del error de posición imagen.	31
3.1. Sistema robótico	34
3.2. Configuraciones singulares cuando el órgano terminal llega a la frontera del espacio de trabajo. A la izquierda, un brazo completamente extendido y a la derecha, un brazo completamente extendido y uno plegado casi por completo.	35
3.3. Diagrama de la ley de control IBVS PD usando un estimado de la velocidad.	39
3.4. Diagrama de la ley de control IBVS PID con estimación de velocidad.	43
4.1. Plataforma experimental	46
4.2. Imagen del espacio de trabajo del robot con orientación $\beta = 0$ rads	47
4.3. Desplazamiento del órgano terminal con la ley control IBVS PD usando un estimado de la velocidad.	49
4.4. Respuesta del sistema en lazo cerrado con la ley control IBVS PD usando un estimado de la velocidad.	49

4.5. Error de posición imagen con la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad	51
4.6. Pares de control en las articulaciones activas para la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad.	52
4.7. Evolución temporal de las entradas de las matrices pseudo-inversas $(\mathbf{S}^T)^+$ y $(\hat{\mathbf{S}}^T)^+$; ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad	53
4.8. Efecto de la matriz Jacobiana $\hat{\mathbf{S}}$ en la respuesta del sistema en lazo cerrado con la ley de control IBVS PD usando un estimado de la velocidad.	54
4.9. Error de posición imagen con la matriz $\hat{\mathbf{S}}$ en la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad.	55
4.10. Pares de control en las articulaciones activas de la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad y con una matriz Jacobiana incierta $\hat{\mathbf{S}}$	57
4.11. Desplazamiento del órgano terminal con la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad.	58
4.12. Respuesta del sistema en lazo cerrado con la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad.	59
4.13. Error de posición imagen con la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad.	60
4.14. Pares de control correspondientes a las articulaciones activas de la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad.	61
4.15. Comportamiento de las componentes de la matriz pseudoinversa $(\mathbf{S}^T)^+$ cuando se presenta incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S}	62
4.16. Respuesta del sistema en lazo cerrado con la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad y con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta.	63
4.17. Error de posición imagen para la ley de control IBVS PID usando un estimado de la velocidad y con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta.	64
4.18. Pares de control de las articulaciones activas usando la ley de control IBVS PID con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta	66
5.1. Comportamiento del sistema en lazo cerrado para posicionarse dentro del espacio de trabajo.	70

Índice de Tablas

1.1. Características del robot tipo SCARA de acuerdo con el fabricante (masa del robot, capacidad de carga, repetitividad) [1].	3
4.1. Valores del error de posición imagen con la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad.	50
4.2. Valores del error de posición imagen usando la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad y con la matriz Jacobiana $\hat{\mathbf{S}}$	56
4.3. Valores del error de posición imagen para la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad.	59
4.4. Valores del error de posición imagen para la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad y con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta	65

Capítulo 1

Introducción

Muchos de los robots manipuladores tienen forma antropomórfica ya que se asemejan a un brazo humano. Se constituyen de cuerpos rígidos llamados *eslabones* que se conectan entre si desde una base mediante *articulaciones* que permiten el movimiento relativo entre cada eslabón. Esta arquitectura se le conoce como *robot de cadena cinemática abierta*. Las articulaciones en estos manipuladores típicamente son rotacionales (denotadas por R) o prismáticas (denotadas por P) que pueden ser actuadas en forma eléctrica, hidráulica o neumática. Para hacer la distinción entre un robot serie y un robot paralelo se usan los conceptos de grado de conexión de un eslabón, cadena cinemática abierta y cadena cinemática cerrada definidos en [2]. El *grado de conexión* de cada eslabón en un manipulador es el número de eslabones conectados por una articulación a ese eslabón específico. Una *cadena cinemática abierta* se define como aquella en la que cada eslabón posee un grado de conexión menor o igual a 2. Entonces los robots serie pueden definirse como cadenas cinemáticas abiertas puesto que todos los grados de conexión de los eslabones son iguales a 2, excepto dos de ellos: la base y el órgano terminal, los cuales tienen grado de conexión igual a 1. Una *cadena cinemática cerrada* se obtiene cuando uno de los eslabones excluyendo la base, posee un grado de conexión mayor o igual a 3. La figura 1.1 muestra el esquema de un robot en serie donde los eslabones se conectan con articulaciones rotacionales desde la base del robot hasta el órgano terminal.

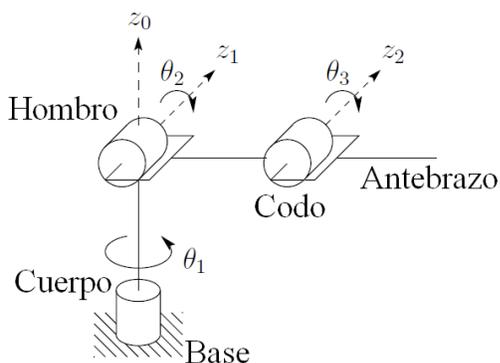


Figura 1.1: Estructura de un manipulador de cadena cinemática abierta

El número de *grados de libertad* (GDL) o la *movilidad* de un manipulador es el número de coordenadas independientes necesarias para especificar la configuración (posición y orientación) del mecanismo en el espacio. En el caso de un manipulador de cadena cinemática abierta, cada articulación define una coordenada y el número de articulaciones es igual al número de grados de libertad. Si las n articulaciones son actuadas, es posible controlar n grados de libertad. Por ejemplo, el robot en cadena cinemática abierta *SCARA* (Selective Compliance Assembly Robot Arm) permite el control de cuatro grados de libertad desde la base hasta el órgano terminal (vea figura 1.2). La tabla 1.1 proporcionada por [1] muestra características generales de robots tipo SCARA. Notése en esa tabla que la relación capacidad de carga/masa es menor a 0.05 para el robot Adept 1XL, y 0.1 para el robot Adept 3XL; estos robots tienen los valores más grandes de masa y levantan cargas más pesadas que los demás. Entonces, para levantar una carga de 500 kg la masas de los robots tendría que ser de al menos 10,000 kg y 5000 kg, respectivamente. Otro punto que se puede notar es la precisión de posicionamiento. Los fabricantes especifican la repetitividad del manipulador para establecer con qué precisión puede un manipulador regresar a una posición deseada [1].

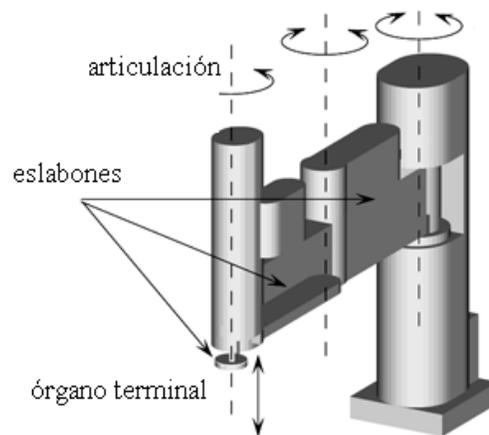


Figura 1.2: Robot SCARA.

La *precisión* de un manipulador es la distancia entre la posición deseada y la posición actual alcanzada por el órgano terminal y la *repetitividad* es la capacidad del manipulador que especifica la precisión con que puede regresar el órgano terminal a una posición deseada desde distintas posiciones de inicio. Usualmente no se mide directamente la posición y orientación del órgano terminal. Entonces se debe considerar la geometría del manipulador y la rigidez de los eslabones para calcular la posición del órgano terminal usando las mediciones de los ángulos o desplazamientos en las articulaciones, esto es, se debe calcular la cinemática directa del robot. En consecuencia, la precisión está condicionada por factores tales como los sensores que se usan para medir los ángulos o desplazamientos de las articulaciones, flexibilidad en los eslabones debida a los efectos gravitacionales y al de otras cargas, la calidad de la construcción geométrica del robot y la presencia de otros efectos estáticos y dinámicos. Así, generalmente se considera que la precisión de un robot de cadena cinemática abierta es pobre.

Robot	GDL	Masa (kg)	Carga (kg)	Repetitividad (mm)	Relación Carga/Masa
Adept I800	4	34	5.5	± 0.02	0.1617
Adept 1XL	4	265	12	± 0.025	0.0452
Adept 3XL	4	266	25	± 0.038	0.0939
Epson E2C251	4	14	3	± 0.01	0.21442
Epson E2S45x	4	20	5	± 0.015	0.25
Epson E2H853	4	37	2	± 0.025	0.054
Seiko EC250	4	14	3	± 0.01	0.21438
Seiko EH850	4	43	10	± 0.025	0.2325
Toshiba SR-504HSP	4	38	2	± 0.02	0.0526

Tabla 1.1: Características del robot tipo SCARA de acuerdo con el fabricante (masa del robot, capacidad de carga, repetitividad) [1].

Los robots de cadena cinemática abierta tienen baja capacidad de carga y pobre exactitud debido a que cada eslabón tiene que soportar el peso de los eslabones restantes junto con la carga que se manipula y éstos pueden estar sujetos a deformaciones. La precisión para posicionar el órgano terminal dependerá de las deformaciones por flexión que no son medidas por los sensores integrados al robot, lo que implica fabricar los eslabones para que sean rígidos y pesados. Entonces, la necesidad de rigidez en los eslabones generará que el robot tenga una masa significativa y durante movimientos de alta velocidad el robot presentará altos valores de par debidos a las inercias de los eslabones, fuerzas centrípetas y de Coriolis lo cual hace el control del robot más complicado. Puede concluirse que los robots de cadena cinemática abierta son inapropiados para tareas que requieren alta precisión de posicionamiento al manipular cargas pesadas a alta velocidad.

1.1. Configuraciones cinemáticas de robots manipuladores

Los robots manipuladores industriales se pueden clasificar cinemáticamente según el tipo de articulaciones (R ó P) de los primeros tres grados de libertad como: articular (RRR), esférica (RRP), SCARA (RRP), cilíndrica (RPP) o Cartesiana (PPP). Estas configuraciones articulares corresponden a robots de cadena cinemática abierta [3].

Algunos de los problemas que ocurren con manipuladores de cadena cinemática abierta se pueden resolver mecánicamente mediante la distribución de la carga en los eslabones, es decir, mediante la conexión del órgano terminal a la base mediante varias cadenas cinemáticas donde cada una soporta una fracción de la carga total. Esta idea permitió desarrollar una nueva clase de manipuladores llamados *robots paralelos*. Un *robot paralelo* es un mecanismo de cadena cinemática cerrada y cuyo órgano terminal está unido a la base mediante varias cadenas cinemáticas [1] permitiéndose mayor rigidez estructural y en consecuencia mayor exactitud que los robots de cadena cinemática abierta.

1.2. Robots paralelos planos de 3 GDL

Los robots paralelos para los cuales el número de cadenas que se conectan al órgano terminal es estrictamente igual al número de GDL del órgano terminal son llamados *manipuladores paralelos completos*. Hay dos clases principales de robots paralelos: *Planos*, los cuales poseen tres grados de libertad en el plano, y *espaciales*, los cuales se mueven en el espacio tridimensional. Una fórmula que determina los grados de libertad de un mecanismo es la fórmula de Grübler [4], que para el órgano terminal de un mecanismo plano determina la movilidad de m grados de libertad de la manera siguiente

$$m = 3(N - J - 1) + \sum_{i=1}^J d_i. \quad (1.1)$$

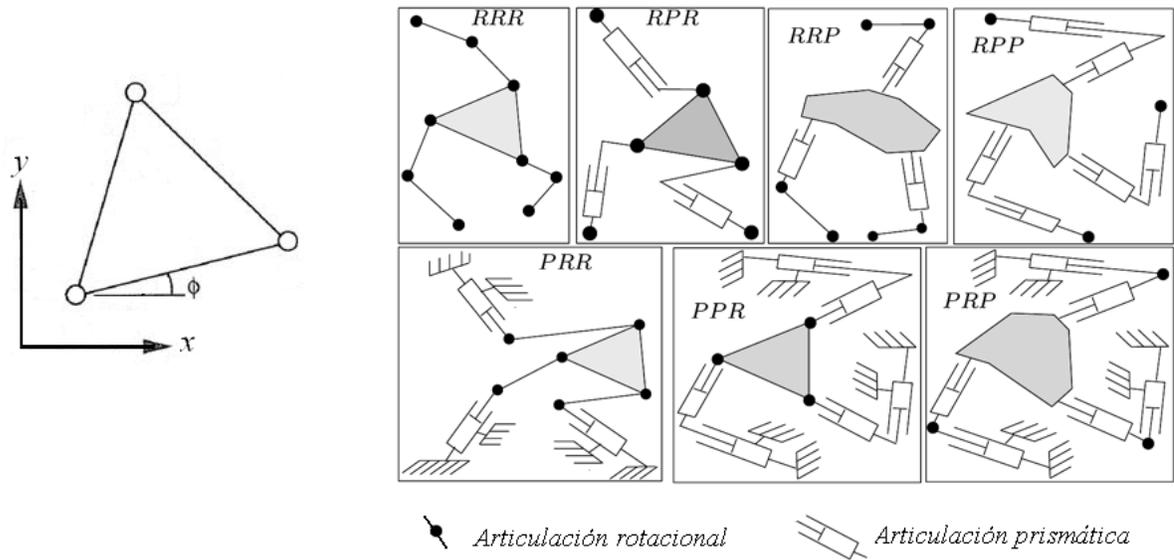
En el caso de los robots paralelos completos con m grados de libertad que poseen m cadenas cinemáticas idénticas para soportar el órgano terminal, la fórmula de Grüber para mecanismos tridimensionales puede escribirse como

$$m = 6(N - J - 1) + \sum_{i=1}^J d_i, \quad (1.2)$$

donde N es el número total de cuerpos rígidos del mecanismo, incluyendo la base, J es el número total de articulaciones y d_i es el número de GDL asociados a la articulación i .

Considérese una plataforma móvil triangular plana como se muestra en la figura 1.3a, con tres grados de libertad a controlar en el plano: dos de traslación a lo largo de los ejes x e y y la orientación con ángulo ϕ alrededor del eje z perpendicular al plano. De acuerdo a la definición antes dada, un robot paralelo plano completo tiene tres cadenas cinemáticas que conectan la base a la plataforma móvil. Cada una de ellas está constituida con tres articulaciones: una que es impulsada por un actuador, una que conecta dos eslabones entre si y otra que conecta la plataforma móvil a los eslabones previos. De acuerdo al tipo de articulación, ya sea rotacional (R) o prismática (P), cada cadena puede ser denotada por la secuencia de esas tres articulaciones desde la base hasta la plataforma donde se encuentra el órgano terminal en las siguientes formas: RRR, RPR, RRP, RPP, PRR, PPR, PRP (ver figura 1.3b).

Los robots paralelos planos con 3 grados de libertad han sido estudiados extensivamente y trabajos como [5, 6, 7] se enfocan en el análisis de singularidades de robots 3–RRR. En [1] se definen como *configuraciones singulares* aquellas posturas (posición y orientación) particulares del órgano terminal para las cuales los robots paralelos pierden su rigidez inherente y en donde el órgano terminal tendrá grados de libertad incontrolables. El trabajo en [5] es un estudio inicial de singularidades en robots paralelos planos donde se definen las configuraciones singulares cuando las matrices Jacobianas asociadas pierden rango y reporta tres tipos de singularidades. La metodología empleada consiste en derivar respecto del tiempo las restricciones cinemáticas no lineales impuestas por los enlaces de las cadenas denotadas en la forma $F(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = 0$, donde F es una función implícita de dimensión n de las variables \mathbf{q}_a que denota el vector de articulaciones actuadas, y de \mathbf{X} que denota



(a) Plataforma móvil triangular plana.

(b) Notación de las cadenas de acuerdo a la secuencia de sus articulaciones. Imagen obtenida de la referencia [1]

Figura 1.3: Robots paralelos planos completos con cadenas idénticas de tres grados de libertad.

la postura del órgano terminal. Esto proporciona una relación entre las velocidades en las articulaciones actuadas y la velocidad del órgano terminal en la forma

$$\mathbf{J}_X \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_{q_a} \dot{q}_a, \quad (1.3)$$

donde $\mathbf{J}_X = \partial F(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) / \partial \mathbf{X}$ y $\mathbf{J}_{q_a} = \partial F(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) / \partial \mathbf{q}_a$ son matrices Jacobianas de dimensión $n \times n$ con n denotando los GDL de los elementos conectados. Pueden identificarse tres tipos diferentes de singularidades en mecanismos de cadena cinemática cerrada analizando los casos en que las matrices Jacobianas son singulares. Si \mathbf{J}_{q_a} es singular la movilidad del órgano terminal pierde uno o más GDL. Este tipo de singularidad es análoga a aquellas que presenta un manipulador de cadena cinemática abierta. Para el robot 3-RRR estas singularidades ocurren cuando los eslabones de un brazo están completamente extendidos o completamente plegados. Si \mathbf{J}_X es singular, el órgano terminal tendrá movilidad aún cuando todos los actuadores estén inactivos, es decir, el manipulador ganará uno o más grados de libertad. El tercer tipo de singularidades se presenta cuando ambas matrices Jacobianas \mathbf{J}_X y \mathbf{J}_{q_a} son singulares.

Por otro lado, trabajos como [8, 9, 10, 11] observan que los robots redundantes ofrecen una buena oportunidad para resolver problemas tales como la eliminación de singularidades o la solución de la cinemática directa. Se distinguen tres tipos de redundancia para los robots paralelos planos:

- *Redundancia cinemática:* Al menos uno de los brazos es un generador de movimiento con un mayor número de grados de libertad de lo necesario. Esta redundancia puede utilizarse para ampliar el área del espacio de trabajo.

- *Actuación redundante*: El movimiento del órgano terminal está limitado por un actuador extra. Esta redundancia se utiliza sobre todo para evitar singularidades.
- *Medición redundante*: El número de sensores es mayor que el número de articulaciones actuadas. Esta redundancia desempeña un papel importante en la solución de la cinemática directa, en la reducción de los errores de posicionamiento y en la calibración del robot.

La descripción cinemática de los robots paralelos difiere de la correspondiente a los robots de cadena cinemática abierta y por lo tanto éstos requieren el empleo de métodos de análisis ad-hoc, los cuales pueden ser analíticos o geométricos. La literatura en robótica [1, 3, 4, 12] muestra que usualmente el análisis de la cinemática inversa es más sencillo para robots paralelos que para los robots de cadena abierta. En la cinemática inversa, la posición del órgano terminal se especifica y el problema es encontrar el valor de las coordenadas articulares que conducen el órgano terminal a la posición especificada. Obtener la cinemática inversa es esencial para el control de la posición de robots paralelos [1, 4]. En forma contraria, determinar la postura del órgano terminal a partir de mediciones de las articulaciones actuadas genera un problema cuya solución no es única, esto es, el órgano terminal puede admitir varias posiciones y orientaciones en el espacio de trabajo para un conjunto dado de ángulos en las articulaciones [4].

1.3. Antecedentes del control de robots paralelos planos

El presente trabajo se enfocará en un robot paralelo plano con la característica de que el órgano terminal es una conexión común para los brazos, convirtiéndose en un robot paralelo plano redundante de tipo 3–RRR (vea figura 1.4). Este manipulador es una combinación de redundancia cinemática y actuación redundante, y presenta un espacio de trabajo libre de singularidades y equilibrado en términos de transmisión de fuerza si se elige una configuración particular de la cinemática inversa [13]. En muchos casos, los algoritmos de control aplicados a este tipo de robots usan la cinemática directa para estimar la posición del órgano terminal [14, 15, 16, 17, 18]. Los trabajos [19, 20] implementan experimentalmente controladores PID a nivel articular para realizar seguimiento de trayectoria para robots planos de 2-GDL y 3-GDL, respectivamente. En [21] se presenta una combinación de un controlador PD tradicional y un controlador saturado PI denominado S-PI para cada actuador de un robot paralelo de 3-GDL; estos controladores son sincronizados para estabilizar el movimiento de cada actuador y a su vez hacer que el error de sincronización sea cero; los controladores no necesitan los parámetros del modelo dinámico para su implementación y los experimentos con un prototipo demuestran la eficacia del enfoque. Métodos para diseñar basándose en el modelo dinámico se proponen en [22, 23], los cuales aseguran un alto desempeño en velocidad y precisión para robots paralelos en la tarea de empaquetado de dispositivos semiconductores. Sin embargo, los errores en los parámetros cinemáticos usados en estos controladores generan errores de posición.

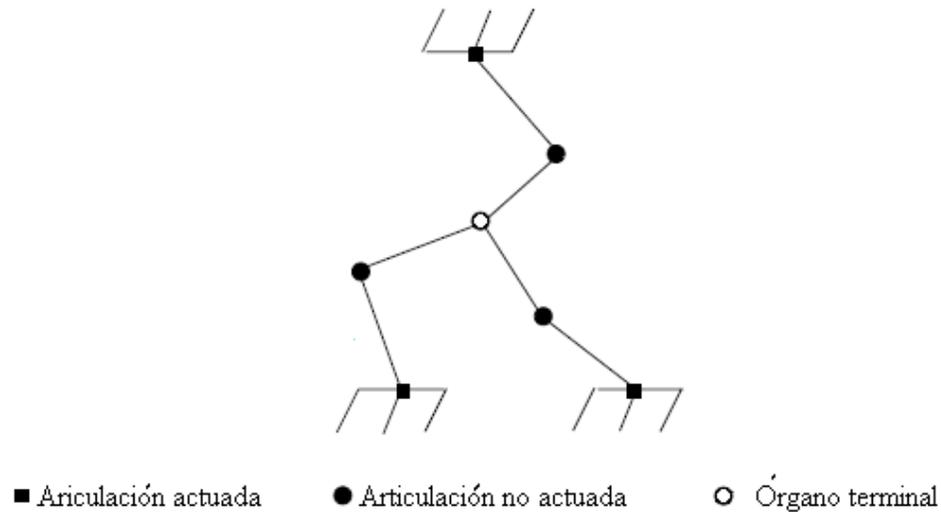


Figura 1.4: Esquema de un robot paralelo redundante 3-RRR.

1.4. Alternativa de control en posición para robots paralelos planos redundantes

La aplicación de técnicas *Visual Servoing* para el control de robots paralelos es una alternativa viable a los sistemas de control que usan la solución de la cinemática directa. *Visual Servoing* o *Control Visual* es un enfoque de control de robots basado en la percepción visual del robot y la ubicación de las piezas que manipula [24, 25, 26, 27, 28]. Concretamente, el control visual involucra el uso de una o más cámaras en un sistema de visión computarizado para controlar la posición del órgano terminal. Entre las ventajas del control visual podemos mencionar que mejora la exactitud de posicionamiento a pesar de incertidumbres mecánicas del manipulador, y puede aplicarse en entornos no estructurados permitiendo a los robots realizar sus tareas aunque la ubicación exacta del robot y de las piezas de trabajo se desconozcan [29].

La cámara puede colocarse en algún lugar del entorno donde se ubica el robot permitiendo la obtención de imágenes del robot y de su espacio de trabajo, o bien, puede montarse en el órgano terminal del robot proporcionando imágenes del espacio de trabajo. Para los propósitos de esta tesis, se implementara el control visual para extraer las características de la imagen obtenida con una cámara colocada sobre el espacio de trabajo del robot.

Hay dos técnicas básicas usadas en el control visual de robots manipuladores: *control visual basado en posición* (PBVS por sus siglas en inglés), que usa la posición y orientación relativas al referencial del espacio de trabajo del robot como la consigna de realimentación del control y el *control visual basado en imagen* (IBVS por sus siglas en inglés) que usa directamente las características extraídas de la imagen como consigna para la realimentación del control [25]. El uso de estas dos técnicas en control visual para manipuladores de ca-

dena cinemática abierta se reporta en trabajos como [30, 31, 32, 33, 24, 34], donde puede observarse que la técnica basada en imagen es la mejor opción para el control de posición en un plano porque la realimentación del control está definida a nivel visual permitiendo reducir el tiempo computacional del procesamiento de las imágenes, no necesitando la calibración de la cámara, no dependiendo de la dinámica del robot y no requiriendo un entorno estructurado.

El uso de control visual en robots paralelos espaciales también se ha reportado en varios trabajos de investigación. Entre ellos, las referencias [35, 36, 37, 38, 39, 40] consideran un sistema de visión calibrado y lo usan como un sensor redundante para identificar el modelo cinemático del manipulador. Los autores obtienen mediciones visuales de los eslabones para realizar control Cartesiano de robots paralelos usando el modelo cinemático inverso diferencial para generar la señal de control aplicada a los actuadores. Además, estas propuestas no toman en cuenta el modelo dinámico del robot para diseñar el controlador; tampoco consideran posibles incertidumbres en el Jacobiano que se obtiene del modelo cinemático diferencial y no estudian formalmente la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Las referencias [41, 42, 43, 44] toman en cuenta la dinámica del robot para el diseño de controladores que calculan los pares de control en los actuadores. Específicamente, las referencias [41, 42] usan algoritmos de lógica difusa para estimar incertidumbres en el modelo dinámico del robot y los controladores mostrados en [43, 44] se basan en técnicas de *par calculado*.

Para manipuladores de cadena cinemática abierta, existen métodos que abordan el problema de *incertidumbre* en los parámetros cinemáticos y dinámicos mediante el uso de técnicas de control adaptable [45, 46, 47, 48, 49, 50]. A pesar de ser efectivas en este caso, aplicar estos enfoques en manipuladores paralelos planos sigue siendo un problema abierto. Además, los controladores adaptables son complejos, difíciles de sintonizar y pueden generar respuestas transitorias con oscilaciones. Por lo tanto, la opción propuesta en este trabajo de tesis es considerar el problema de incertidumbre como un problema de *perturbación* en el sistema en lazo cerrado. Como se menciona en [51], las perturbaciones pueden resultar de errores de modelado, deterioro en los componentes del sistema, incertidumbres y alteraciones que existen en cualquier sistema. Típicamente, el valor exacto de la perturbación es desconocido pero se considera acotado.

Para realizar control a nivel espacio de tarea se utiliza el modelo cinemático inverso diferencial para obtener la matriz Jacobiana, la cual transforma la velocidad del órgano terminal a velocidades articulares. A pesar de poderse expresar en forma algebraica el modelo cinemático inverso diferencial de robots paralelos, éste depende tanto de la configuración articular y de las coordenadas de posición del órgano terminal. Para robots paralelos con un número reducido de grados de libertad como en el caso del robot en estudio (ver figura 1.4), es posible pensar en trasladar las técnicas de control visual desarrolladas para manipuladores de cadena cinemática abierta tales como las mostradas en [24],[33], [30] para obtener de forma directa la posición del órgano terminal.

En la referencia [36] se menciona que las técnicas de control visual generan una velocidad de referencia para el órgano terminal que se convierte en velocidades articulares mediante el

modelo cinemático inverso diferencial; la dificultad que se presenta para el control visual de robots paralelos es que el modelo cinemático inverso diferencial necesita las estimaciones de las coordenadas del órgano terminal obtenidas con la cinemática directa, la cual es difícil de obtener. En cambio, con ayuda del sistema de visión se obtienen directamente las coordenadas del órgano terminal sin necesidad de calcular la cinemática directa.

Es bien sabido que para aplicaciones de robots moviéndose libremente en su espacio de trabajo se pueden implementar controladores de posición como los de tipo proporcional derivativo (PD) o proporcional-integral-derivativo (PID) que son ampliamente usados debido a su simplicidad y robustez [12]. Ejemplos de investigaciones que demuestran algunas propiedades útiles de los controladores PID son [52, 53, 54], los cuales aseguran estabilidad asintótica en el sentido local cuando se aplican al control articular de robots. Controladores para resolver el problema de control de posición que aseguran estabilidad semiglobal y global son [55, 56, 57, 58, 59], los cuales consideran parámetros inciertos y no se basan en el modelo dinámico del robot para ser implementados. Sin embargo, para asegurar la estabilidad asintótica invocan el principio de invariancia de LaSalle. Un caso en donde el controlador se basa en el conocimiento exacto del modelo dinámico y es utilizado para hacer seguimiento de trayectoria es el realizado en [60]; el diseño del controlador se realiza utilizando la técnica de modos deslizantes. Por otro lado, en [61] la estabilidad asintótica se garantiza sin usar el principio de invariancia de LaSalle, esto mediante funciones estrictas de Lyapunov demostrando robustez de un controlador PID contra perturbaciones externas.

Tipicamente, los controladores PD o PID consideran disponibles de forma ideal todas las mediciones de los estados del sistema, las cuales desafortunadamente en la práctica pueden ser complicadas de obtener. Aunque los manipuladores están equipados con sensores de alta precisión para medir posición, en general no están dotados con sensores de velocidad y las mediciones de velocidad frecuentemente contienen niveles altos de ruido. Además, una consideración en aplicaciones robóticas es descartar el uso de sensores de velocidad debido al incremento en costo, volumen y peso. En [62] los autores consideran el problema de regulación usando solamente mediciones de posición y proponen un controlador para asegurar estabilidad asintótica global. El método de estimación de velocidad de ese trabajo usando la denominada "derivada sucia" aquí se tomará en cuenta.

1.5. Motivación

Dentro de los trabajos mencionados que atacan el control visual de robots paralelos, son pocos los que comprueban sus resultados usando plataformas experimentales [38, 40, 43, 44] y que además presenten un análisis formal de estabilidad [39]. El resto muestra simulaciones numéricas para comprobar sus resultados y no proporcionan análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado. En el caso de los trabajos que abordan el problema de control de robots de cadena cinemática abierta, el análisis formal de estabilidad usualmente invoca el principio de invariancia de Krassovskii–LaSalle y consideran controladores basados o no basados en el modelo dinámico del robot para asegurar estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado.

Este trabajo de tesis contribuye al control visual de robots paralelos presentando análisis de algoritmos de control visual basados en imagen (IBVS), de tipo PD y PID para el control de posición de un robot paralelo plano redundante. Los algoritmos de control propuestos consideran únicamente el uso de mediciones de posición proporcionadas por el sistema de visión y los sensores angulares en las articulaciones. Los problemas abordados en este trabajo son: (i) estimación de velocidad a partir de la medición visual del órgano terminal para calcular el término de amortiguamiento en la ley de control y (ii) el efecto de la incertidumbre en la matriz Jacobiana del robot en el sistema en lazo cerrado. Si bien es posible eliminar el uso de la cinemática directa del robot empleando un sistema de visión, los parámetros de la cinemática tales como la longitud de los eslabones y el valor de los ángulos en las articulaciones son necesarios para el cálculo de la matriz Jacobiana del robot, la cual se emplea a su vez en el cálculo de la ley de control para la regulación directa en el espacio de tarea. Es importante mencionar que dichos parámetros cinemáticos pueden presentar incertidumbres.

El análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado se lleva a cabo mediante el segundo método de Lyapunov en donde se toma en cuenta la dinámica del robot con la presencia de perturbaciones, y a diferencia de otros trabajos se concluye estabilidad asintótica sin invocar el principio de invariancia de Barbashin-Krassovskii-LaSalle. En este contexto, la contribución de la tesis consiste en proponer funciones de Lyapunov definidas positivas, no acotadas radialmente y con derivada total, la cual presenta todos los estados y que sea definida negativa. A este tipo de funciones candidatas de Lyapunov se les conoce como *Funciones Estrictas de Lyapunov*; que ayudan en este trabajo de tesis a proporcionar una sintonización que toma en cuenta el tamaño de las condiciones iniciales del sistema en lazo cerrado. Para robots manipuladores de cadena cinemática abierta, los trabajos [61, 63] son algunos de los precedentes en el análisis de estabilidad con funciones estrictas de Lyapunov. En [61] se analiza la robustez de un controlador PID cuando el manipulador está sometido a perturbaciones externas y se establecen las condiciones para asegurar estabilidad asintótica semiglobal. Simulaciones considerando la fricción de Coulomb como perturbación muestran el desempeño del controlador. En [63] se presenta la metodología y condiciones que deben satisfacer los controladores para obtener funciones estrictas de Lyapunov basándose en la energía del sistema en lazo cerrado.

Una contribución más de la tesis es la implementación práctica de las leyes de control propuestas. Esto con el fin de distinguirse de varios trabajos mencionados previamente, los cuales presentan únicamente simulaciones numéricas. El trabajo de tesis considera como causa de incertidumbre en la matriz Jacobiana errores en la longitud de los eslabones que componen el robot y en los ángulos de las articulaciones que los conectan.

Otro aspecto a mencionar es que la dinámica de un robot paralelo redundante es descrita como un sistema no lineal de segundo orden, el cual puede presentar perturbaciones, y es controlado por pares de las articulaciones activas, que son multiplicados por una matriz Jacobiana que cambia de acuerdo al movimiento del robot a la región del espacio de trabajo en donde se ubique el órgano terminal, y que al no ser cuadrada no tiene inversa. En otras

palabras, se controla un sistema no lineal cuya ganancia es variante en el tiempo y que puede presentar incertidumbres. Por lo tanto, el estudio de estos sistemas sugiere que no conocer la estructura de la matriz Jacobiana implica no conocer la ganancia del sistema.

En esta tesis, se estudia el control de posición de un robot paralelo plano redundante implementando algoritmos de control visual. El propósito es mostrar que sin el uso de la cinemática directa puede implementarse controladores visuales similares a los controladores diseñados para robots de cadena cinemática abierta al considerar el control basado en imagen. Debido a que la estructura de las ecuaciones dinámicas de los robots paralelos redundantes es similar a la de los modelos dinámicos de los robots de cadena cinemática abierta, también se pueden considerar efectos de incertidumbres y/o perturbaciones para extender los análisis de robustez con controladores PD y PID al caso de robots paralelos. Esto se resuelve proponiendo funciones de Lyapunov estrictas para realizar el análisis de estabilidad y comprobando experimentalmente el funcionamiento de los controladores. Esto es innovador en el campo de control visual de robots paralelos porque dentro de la literatura encontrada no se presentan estudios de estabilidad exhaustivos; en la mayoría de los casos se proponen controladores que requieren el conocimiento exacto de los parámetros cinemáticos o bien del modelo dinámico para su diseño, y se realizan únicamente simulaciones numéricas para corroborar los resultados. Finalmente, podemos considerar que los algoritmos de control presentados en la tesis se pueden implementar en otra clase de robots paralelos, ya que la condición necesaria en estos controladores es medir la posición del órgano terminal.

1.6. Objetivos de la tesis

- i. Abordar el problema de control en regulación de posición de robots paralelos planos.
- ii. Presentar algoritmos de control visual basados en imagen (IBVS) que consideren incertidumbres y/o perturbaciones y que prescindan de la medición directa de la velocidad del órgano terminal.
- iii. Estudiar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante la Teoría de estabilidad de Lyapunov sin utilizar el Principio de invariancia de LaSalle y empleando funciones estrictas de Lyapunov.
- iv. Implementar los algoritmos de control propuestos en un prototipo de laboratorio para mostrar en forma práctica la eficacia de las propuestas de control.

1.7. Estructura de la tesis

- El capítulo 2 presenta el modelado del sistema robótico consituido por el robot paralelo plano redundante y el sistema de visión.
- El capítulo 3 se centra en los algoritmos de control visual basados en imagen denominados como: IBVS PD (PID), IBVS PD con matriz Jacobiana incierta e IBVS PD (PID) usando una estimación de velocidad. Para estas propuestas se mencionan las consideraciones para el diseño de cada controlador y se enuncian los respectivos resultados de estabilidad. El desarrollo de los análisis que determinan los resultados de estabilidad se presentan en los Apéndices.
- El capítulo 4 muestra los resultados obtenidos en tiempo real de la implementación de las leyes de control en un prototipo de laboratorio. El desarrollo experimental de este trabajo fue llevado a cabo en el Centro de Servicios Experimentales del Departamento de Control Automático.
- El capítulo 5 presenta las conclusiones del trabajo realizado y las perspectivas futuras de la temática estudiada.

1.8. Publicaciones

- Miguel A. Trujano, Rubén Garrido, Alberto Soria, Robust Stable Visual Control of Parallel Robots under Uncertain Camera Orientation, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Jaime Gallardo-Alvarado, Ramón Rodríguez-Castro (Eds.), ISSN: 1729-8806, InTech.
- M. Trujano, R. Garrido, A. Soria, Control Visual tipo PID para un Robot Paralelo Plano Redundante, *Congreso Nacional Asociación de México de Control Automático A. C. (AMCA 2011)*, Saltillo, Coahuila. 3-7 de Octubre 2011.
- M.A. Trujano, R.Garrido, A. Soria, Visual PID Control of a Reduntant Parallel Robot. *ASME 2011/IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA 2011)*. August 28-31, 2011. Washington D.C., USA.
- Miguel A. Trujano, Rubén Garrido, Alberto Soria, Stable Visual PID Control of Redundant Planar Parallel Robots, Capítulo en libro *PID Control, Implementation and Tuning*, Tamer Mansour (Ed.), pp. 27-50, ISBN: 978-953-307-166-4, InTech, Abril 2011, Disponible en <http://www.intechopen.com>.
- M.A. Trujano, R. Garrido, A. Soria, Stable Visual Servoing of an Overatuated Planar Parallel Robot, *7th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2010)*, Tuxtla Gutiérrez, Mexico, September 8-10, 2010.

Capítulo 2

Modelado del sistema robótico

En este capítulo se muestra el modelado del sistema robótico constituido por el robot paralelo plano redundante y el sistema de visión. Se presentan los modelos matemáticos que describen los conceptos de cinemática y dinámica para el robot bajo estudio. Con base a los métodos descritos en [1, 4], la cinemática directa se determina usando un método de eliminación del que se obtiene una solución única para el conjunto de ángulos de las articulaciones actuadas. La cinemática inversa se calcula en forma analítica mostrándose que hay dos soluciones para cada brazo del robot. Además, se obtiene la relación entre las velocidades articulares con la velocidad del órgano terminal y la relación de las aceleraciones angulares con la aceleración del órgano terminal.

La descripción del modelo dinámico presentada en este capítulo se basa en la formulación de Lagrange–D’Alembert descrita en [64] que proporciona una relación para obtener el modelo dinámico de mecanismos redundantes en cadena cinemática cerrada. Esta formulación se basa en las ecuaciones de Lagrange con restricciones y en el empleo del principio de D’Alembert. El cálculo de los multiplicadores de Lagrange de las ecuaciones de Lagrange se sustituye por el cálculo de una matriz constante. Entonces, la formulación Lagrange–D’Alembert es conveniente y útil para derivar las ecuaciones de movimiento sin resolver explícitamente las fuerzas de restricción instantáneas presentes en el robot. Posteriormente, se mencionan las técnicas de control visual existentes para así establecer la técnica adoptada para el robot estudiado; y finalmente, se presenta el modelado del sistema de visión.

2.1. Descripción del robot paralelo plano redundante

La configuración geométrica del robot en estudio se presenta en la figura 2.1. Este robot está constituido de tres cadenas cinemáticas con dos eslabones de la misma longitud y tres articulaciones rotacionales (R) cada una, las cuales son cadenas cinemáticas de tipo RRR. La articulación en la base de cada cadena está actuada por un motor de corriente directa con imán permanente y se llamará *articulación activa*, las articulaciones al final de cada cadena se conectaran entre si convirtiéndose en el órgano terminal; la articulación que conecta los eslabones de cada cadena no está actuada y se llamará *articulación pasiva*.

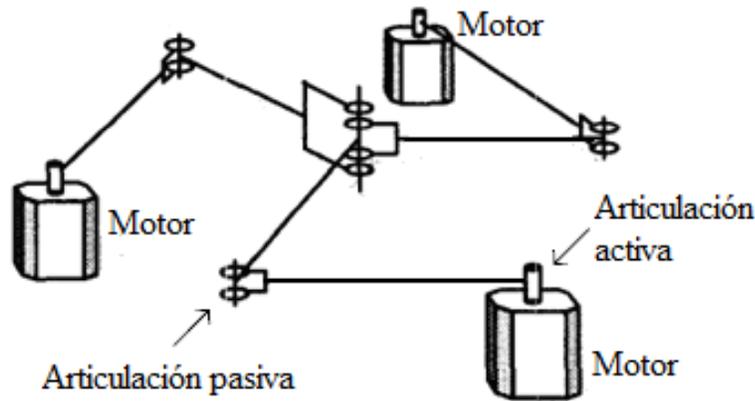


Figura 2.1: Estructura del robot paralelo plano redundante

Para medir el valor de los ángulos de cada articulación activa y pasiva se instrumenta cada una de ellas con un decodificador absoluto magnético miniatura.

El robot puede realizar movimientos en el plano horizontal y tendrá una movilidad de $m = 3$ GDL de acuerdo a la fórmula de Grüber para robots paralelos planos dada por

$$m = 3(N - J - 1) + \sum_{i=1}^J d_i. \quad (2.1)$$

Como se explicó en el capítulo 1, N corresponde al número total de eslabones incluyendo la base, J denota el número de articulaciones y d_i el número de GDL de cada articulación. En conjunto, el robot tiene ocho eslabones y nueve articulaciones de rotación, información que al sustituirse en (2.1) corrobora los 3 GDL del órgano terminal.

2.2. Cinemática del robot paralelo

La cinemática estudia el movimiento de un mecanismo sin considerar las fuerzas o pares que causan o resultan del movimiento. Así, los aspectos de interés en la cinemática son la posición, la velocidad, la aceleración y todas las derivadas de orden superior de la variable de posición con respecto del tiempo.

El análisis cinemático de los robots paralelos se realiza en dos partes: *Cinemática Inversa* y *Cinemática Directa*. En la Cinemática Inversa, se especifica la posición del órgano terminal y el problema es encontrar las variables articulares que producen en el órgano terminal la posición especificada. Para la Cinemática Directa, a partir de las variables articulares el problema es encontrar la posición y la orientación del órgano terminal. De manera general, a medida que el número de cadenas cinemáticas cerradas en el mecanismo aumenta, la dificultad en la solución de la cinemática directa también aumenta, mientras que la dificultad para la solución de la cinemática inversa disminuye [1].

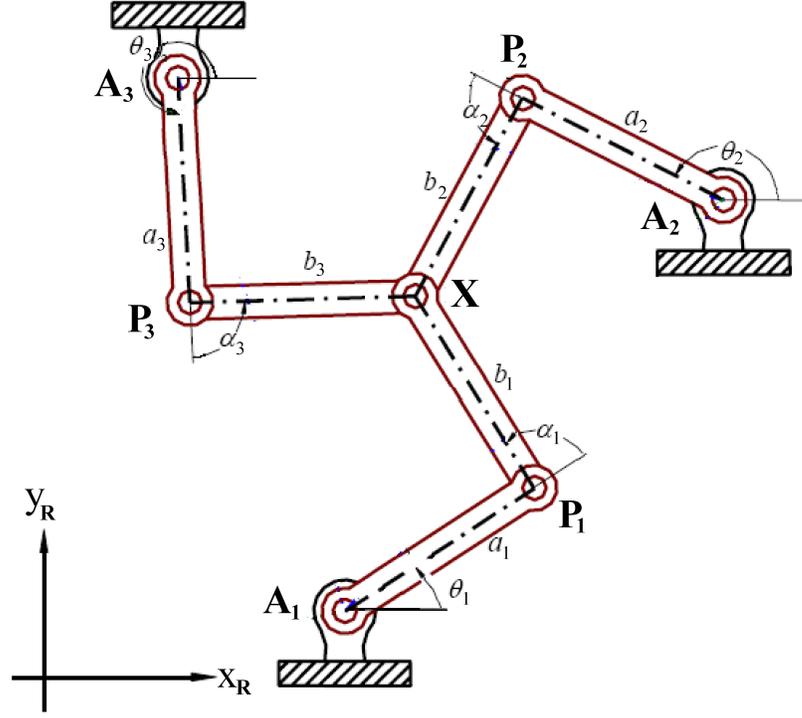


Figura 2.2: Esquema y marco coordenado del robot paralelo.

Para la descripción cinemática del robot se establece un marco de referencia. La figura 2.2 muestra un esquema del robot junto con un marco coordenado $x_{\mathbf{R}} - y_{\mathbf{R}}$. Todos los eslabones de los brazos se consideran de la misma longitud, $L = a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3$. El término \mathbf{A}_i representa la i -ésima articulación activa con coordenadas $\mathbf{X}_{\mathbf{A}_i} = [x_{\mathbf{A}_i} \ y_{\mathbf{A}_i}]^T$ con respecto al marco de referencia $x_{\mathbf{R}} - y_{\mathbf{R}}$. El término \mathbf{P}_i representa la articulación pasiva del brazo i con coordenadas $\mathbf{X}_{\mathbf{P}_i} = [x_{\mathbf{P}_i} \ y_{\mathbf{P}_i}]^T$. El vector $\mathbf{X} = [x \ y]^T$ define la posición del órgano terminal, la variable θ_i denota el ángulo de la i -ésima articulación activa y la variable α_i es el ángulo de la i -ésima articulación pasiva. Estos ángulos permiten definir los siguientes vectores de posición para las articulaciones activas y pasivas

$$\mathbf{q}_a = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T \in \mathfrak{R}^3, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{q}_p = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T \in \mathfrak{R}^3. \quad (2.3)$$

El vector de posiciones articulares se obtiene al combinar los vectores anteriores y se define como

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{q}_p^T]^T \in \mathfrak{R}^6. \quad (2.4)$$

2.2.1. Cinemática directa

Para el cálculo de la cinemática directa se consideran como datos los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 para poder determinar las coordenadas (x, y) del órgano terminal. Entonces la cinemática directa será escrita como $(x, y) = f(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. En general, la cinemática directa de los robots paralelos tiene más de una solución debido a que el órgano terminal puede admitir varias posiciones y orientaciones en el espacio de trabajo [1, 4]. El análisis siguiente presenta las ecuaciones para las tres cadenas cinemáticas en el robot, las cuales son reducidas algebraicamente a tres ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas. Aplicando el método de eliminación el sistema de orden cuadrático se reduce a un sistema de dos ecuaciones lineales. Finalmente, mediante sustituciones se obtienen las coordenadas de posición del órgano terminal como funciones de los ángulos de las articulaciones activas.

Usando la distancia que hay de cada articulación pasiva al órgano terminal se obtiene

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\mathbf{P}_i}\|^2 = L^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

con

$$\mathbf{X}_{\mathbf{P}_i} = \mathbf{X}_{\mathbf{A}_i} + L \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

y $\|\cdot\|$ establece la norma Euclidiana para vectores y matrices.

Aplicando la definición de norma Euclidiana a la expresión (2.5) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales con dos incógnitas

$$x^2 + y^2 - 2xx_{\mathbf{P}_i} - 2yy_{\mathbf{P}_i} + \|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_i}\|^2 = L^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Posteriormente, mediante sustracciones se eliminan los términos cuadráticos convirtiendo el sistema anterior en un sistema de dos ecuaciones lineales

$$2x(x_{\mathbf{P}_2} - x_{\mathbf{P}_1}) + 2y(y_{\mathbf{P}_2} - y_{\mathbf{P}_1}) + \|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_1}\|^2 - \|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_2}\|^2 = 0, \quad (2.8)$$

$$2x(x_{\mathbf{P}_3} - x_{\mathbf{P}_1}) + 2y(y_{\mathbf{P}_3} - y_{\mathbf{P}_1}) + \|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_1}\|^2 - \|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_3}\|^2 = 0. \quad (2.9)$$

Finalmente, resolviendo para las variables x y y se obtienen las expresiones que determinan la cinemática directa del robot paralelo

$$x = \frac{\|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_1}\|^2 (y_{\mathbf{P}_2} - y_{\mathbf{P}_3}) + \|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_2}\|^2 (y_{\mathbf{P}_3} - y_{\mathbf{P}_1}) + \|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_3}\|^2 (y_{\mathbf{P}_1} - y_{\mathbf{P}_2})}{2[x_{\mathbf{P}_1}(y_{\mathbf{P}_2} - y_{\mathbf{P}_3}) + x_{\mathbf{P}_2}(y_{\mathbf{P}_3} - y_{\mathbf{P}_1}) + x_{\mathbf{P}_3}(y_{\mathbf{P}_1} - y_{\mathbf{P}_2})]}, \quad (2.10)$$

$$y = \frac{\|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_1}\|^2 (x_{\mathbf{P}_2} - x_{\mathbf{P}_3}) + \|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_2}\|^2 (x_{\mathbf{P}_3} - x_{\mathbf{P}_1}) + \|\mathbf{X}_{\mathbf{P}_3}\|^2 (x_{\mathbf{P}_1} - x_{\mathbf{P}_2})}{2[y_{\mathbf{P}_1}(x_{\mathbf{P}_2} - x_{\mathbf{P}_3}) + y_{\mathbf{P}_2}(x_{\mathbf{P}_3} - x_{\mathbf{P}_1}) + y_{\mathbf{P}_3}(x_{\mathbf{P}_1} - x_{\mathbf{P}_2})]}. \quad (2.11)$$

Es importante comentar que las coordenadas de posición del órgano terminal no dependen de los valores de los ángulos en todas las articulaciones; éstas únicamente dependen de los ángulos de las articulaciones activas. Por lo tanto, es posible escribir la cinemática directa del robot como $\mathbf{X} = f(\mathbf{q}_a)$.

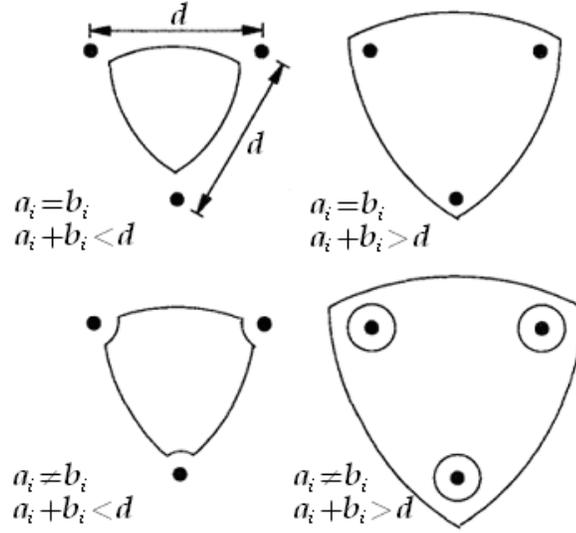


Figura 2.3: Espacio de trabajo del robot para distintas longitudes en los eslabones.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, el conjunto que define el espacio de trabajo del robot; entonces la posición del órgano terminal debe pertenecer a este conjunto, es decir, $\mathbf{X} \in \Omega$. La figura 2.3 muestra los límites del espacio de trabajo del robot para $a_i = b_i$ y para el caso general $a_i \neq b_i$, la variable d denota la distancia entre la posición de dos articulaciones activas consecutivas. El robot estudiado tiene la configuración $a_i = b_i$, $a_i + b_i < d$.

2.2.2. Cinemática inversa

En el caso de la cinemática inversa, se dan como datos las coordenadas del órgano terminal (x, y) y se determinan los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 , ésto es, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = f^{-1}(x, y)$. El método algebraico modela en forma independiente cada cadena cinemática considerando el órgano terminal como punto común para las tres cadenas; esto es, que todas las cadenas cinemáticas tienen la misma posición relativas al marco coordenado definido $x_{\mathbf{R}} - y_{\mathbf{R}}$. Las ecuaciones obtenidas son resueltas en forma independiente para obtener una solución en forma cerrada.

Partiendo del sistema de ecuaciones expresado por (2.7), se factorizan los términos de tal forma que este sistema quede expresado en función de los ángulos en las articulaciones activas de la siguiente forma

$$x^2 + y^2 - 2xx_{\mathbf{P}_i} - 2yy_{\mathbf{P}_i} + (x_{\mathbf{A}_i} + L \cos \theta_i)^2 + (y_{\mathbf{A}_i} + L \sin \theta_i)^2 = L^2.$$

Desarrollando los términos cuadrados y sustituyendo las componentes de $\mathbf{X}_{\mathbf{P}_i}$

$$x^2 + y^2 - 2x(x_{\mathbf{A}_i} + L \cos \theta_i) - 2y(y_{\mathbf{A}_i} + L \sin \theta_i) + x_{\mathbf{A}_i}^2 + 2Lx_{\mathbf{A}_i} \cos \theta_i + L^2 \cos^2 \theta_i + y_{\mathbf{A}_i}^2 + 2Ly_{\mathbf{A}_i} \sin \theta_i + L^2 \sin^2 \theta_i = L^2.$$

Al factorizar términos se obtiene la siguiente expresión

$$(x - x_{\mathbf{A}i})^2 + (y - y_{\mathbf{A}i})^2 - 2Lx \cos \theta_i - 2Ly \sin \theta_i + 2Lx_{\mathbf{A}i} \cos \theta_i + 2Ly_{\mathbf{A}i} \sin \theta_i = 0,$$

que es igual a

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\mathbf{A}i}\|^2 - 2L(x - x_{\mathbf{A}i}) \cos \theta_i - 2L(y - y_{\mathbf{A}i}) \sin \theta_i = 0.$$

Con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones expresado en función de los ángulos de las coordenadas activas

$$\phi_i \cos \theta_i + \gamma_i \sin \theta_i = \xi_i; \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_i &= 2L(x - x_{\mathbf{A}i}), \\ \gamma_i &= 2L(y - y_{\mathbf{A}i}), \\ \xi_i &= \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\mathbf{A}i}\|^2. \end{aligned}$$

Resolviendo para θ_i en el sistema de ecuaciones anterior se obtiene

$$\theta_i = \arctan 2 \left(\frac{\gamma_i}{\phi_i} \right) + \arctan 2 \left(\frac{\pm \sqrt{\phi_i^2 + \gamma_i^2 - \xi_i^2}}{\xi_i} \right); \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

Los detalles de la obtención de la solución (2.13) se dan en la referencia [65]. Se observa que los ángulos de las articulaciones activas dependen únicamente de las coordenadas de la posición del órgano terminal, es decir, $\mathbf{q}_a = f^{-1}(\mathbf{X})$.

Ahora, se procede a obtener las expresiones de los ángulos en las articulaciones pasivas. La posición del órgano terminal para cada brazo es de la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\mathbf{P}i} + L \begin{bmatrix} \cos(\theta_i + \alpha_i) \\ \sin(\theta_i + \alpha_i) \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Despejando los términos que involucran los ángulos de las articulaciones pasivas y resolviendo para e éstos se obtiene

$$\alpha_i = \arctan 2 \left(\frac{y - y_{\mathbf{P}i}}{x - x_{\mathbf{P}i}} \right) - \theta_i; \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Estas soluciones representan dos configuraciones diferentes para cada uno de los brazos. Entonces, el robot tiene $2^3 = 8$ configuraciones por las soluciones obtenidas en cada brazo como se muestra en la figura 2.4. Las configuraciones *a* y *e* son las más adecuadas para implementarse experimentalmente porque presentan una mayor simetría y destreza en el espacio de trabajo sin presentarse singularidades [13].

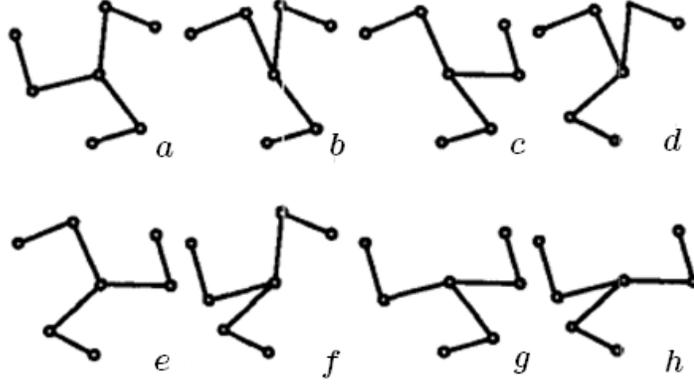


Figura 2.4: Soluciones de la cinemática inversa.

2.2.3. Cinemática diferencial

Se introduce a continuación la relación entre las velocidades angulares de las articulaciones activas y la velocidad lineal del órgano terminal del robot. Después, se muestra la relación entre las velocidades angulares de las articulaciones pasivas y la velocidad lineal del órgano terminal del robot. Finalmente, se presentan las relaciones entre las aceleraciones de las articulaciones y la aceleración del órgano terminal.

Derivando respecto del tiempo la expresión (2.14), se obtiene lo siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \dot{\theta}_i L \begin{bmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \end{bmatrix} + (\dot{\theta}_i + \dot{\alpha}_i) L \begin{bmatrix} -\sin(\theta_i + \alpha_i) \\ \cos(\theta_i + \alpha_i) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

el cual es un sistema de dos ecuaciones con incógnitas $\dot{\theta}_i$ y $\dot{\alpha}_i$ para cada brazo del robot paralelo.

Resolviendo para las velocidades en las articulaciones activas $\dot{\theta}_i$ se tiene la siguiente expresión

$$\dot{\theta}_i = \frac{\cos(\theta_i + \alpha_i)\dot{x} + \sin(\theta_i + \alpha_i)\dot{y}}{L \sin \alpha_i}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.17)$$

Agrupando la expresión anterior en un arreglo matricial determina la relación entre las velocidades angulares de las articulaciones activas y la velocidad del órgano terminal dada por

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{S}\dot{\mathbf{X}}, \quad (2.18)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}_a = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T$, $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \quad \dot{y}]^T$ y $\mathbf{S} \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}$ es la matriz Jacobiana que realiza el mapeo de velocidades del espacio de tarea al espacio articular correspondiente a las

articulaciones activas y está definida como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_1 + \alpha_1)}{L \sin \alpha_1} & \frac{\sin(\theta_1 + \alpha_1)}{L \sin \alpha_1} \\ \frac{\cos(\theta_2 + \alpha_2)}{L \sin \alpha_2} & \frac{\sin(\theta_2 + \alpha_2)}{L \sin \alpha_2} \\ \frac{\cos(\theta_3 + \alpha_3)}{L \sin \alpha_3} & \frac{\sin(\theta_3 + \alpha_3)}{L \sin \alpha_3} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Ahora bien, de la expresión (2.16) se resuelve para las velocidades en las articulaciones pasivas $\dot{\alpha}_i$, dando como resultado

$$\dot{\alpha}_i = \frac{-d_{ix}\dot{x} - d_{iy}\dot{y}}{L^2 \sin \alpha_i}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

con

$$\begin{aligned} d_{ix} &= L[\cos \theta_i + \cos(\theta_i + \alpha_i)], \\ d_{iy} &= L[\sin \theta_i + \sin(\theta_i + \alpha_i)], \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3.$$

De forma similar, agrupando en un arreglo matricial las ecuaciones anteriores se define la relación entre las velocidades de las articulares pasivas y del órgano terminal

$$\dot{\mathbf{q}}_p = \mathbf{H}\dot{\mathbf{X}} \quad (2.21)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}_p = [\dot{\alpha}_1 \quad \dot{\alpha}_2 \quad \dot{\alpha}_3]^T$ y $\mathbf{H} \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}$ es la matriz Jacobiana que realiza el mapeo de velocidades del espacio de tarea al espacio articular correspondiente a las articulaciones pasivas y se define como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{d_{1x}}{L^2 \sin \alpha_1} & -\frac{d_{1y}}{L^2 \sin \alpha_1} \\ -\frac{d_{2x}}{L^2 \sin \alpha_2} & -\frac{d_{2y}}{L^2 \sin \alpha_2} \\ -\frac{d_{3x}}{L^2 \sin \alpha_3} & -\frac{d_{3y}}{L^2 \sin \alpha_3} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Por lo tanto, al agrupar (2.18) y (2.21) se obtiene la relación general dada por

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{q}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{W}\dot{\mathbf{X}}, \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{W} \in \mathfrak{R}^{6 \times 2}$ es la matriz Jacobiana completa del mecanismo con respecto a la velocidad lineal del órgano terminal $\dot{\mathbf{X}}$. Debido a la existencia de dos matrices Jacobianas, el robot paralelo estará en una configuración geométrica con singularidades cuando alguna de las matrices Jacobianas, \mathbf{S} o \mathbf{H} , no tengan rango completo.

A continuación se presentan las expresiones correspondientes a las aceleraciones angulares de las articulaciones activas y pasivas.

Derivando respecto al tiempo la expresión (2.18) se obtiene la expresión para las aceleraciones angulares en las articulaciones activas

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{S}\ddot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{X}}, \quad (2.24)$$

donde la derivada de la matriz Jacobiana $\dot{\mathbf{S}} \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}$ se define como

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 + \alpha_1) \sin \alpha_1 + \dot{\alpha}_1 \cos \theta_1}{L \sin^2 \alpha_1} & \frac{\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 + \alpha_1) \sin \alpha_1 + \dot{\alpha}_1 \sin \theta_1}{L \sin^2 \alpha_1} \\ -\frac{\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 + \alpha_2) \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 \cos \theta_2}{L \sin^2 \alpha_2} & \frac{\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 + \alpha_2) \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 \sin \theta_2}{L \sin^2 \alpha_2} \\ -\frac{\dot{\theta}_3 \sin(\theta_3 + \alpha_3) \sin \alpha_3 + \dot{\alpha}_3 \cos \theta_3}{L \sin^2 \alpha_3} & \frac{\dot{\theta}_3 \cos(\theta_3 + \alpha_3) \sin \alpha_3 + \dot{\alpha}_3 \sin \theta_3}{L \sin^2 \alpha_3} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Derivando la expresión (2.21) respecto del tiempo se obtiene la relación de aceleración angular para las articulaciones pasivas

$$\ddot{\mathbf{q}}_p = \mathbf{H}\ddot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{X}} \quad (2.26)$$

donde la derivada de la matriz Jacobiana $\dot{\mathbf{H}} \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}$ se define como

$$\dot{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{d}_{1x} \sin \alpha_1 - \dot{\alpha}_1 d_{1x} \cos \alpha_1}{L^2 \sin^2 \alpha_1} & \frac{\dot{d}_{1y} \sin \alpha_1 + \dot{\alpha}_1 d_{1y} \cos \alpha_1}{L^2 \sin^2 \alpha_1} \\ \frac{\dot{d}_{2x} \sin \alpha_2 - \dot{\alpha}_2 d_{2x} \cos \alpha_2}{L^2 \sin^2 \alpha_2} & \frac{\dot{d}_{2y} \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 d_{2y} \cos \alpha_2}{L^2 \sin^2 \alpha_2} \\ \frac{\dot{d}_{3x} \sin \alpha_3 - \dot{\alpha}_3 d_{3x} \cos \alpha_3}{L^2 \sin^2 \alpha_3} & \frac{\dot{d}_{3y} \sin \alpha_3 + \dot{\alpha}_3 d_{3y} \cos \alpha_3}{L^2 \sin^2 \alpha_3} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Entonces, de (2.24) y (2.26) se obtiene la relación general de la aceleración angular en las articulaciones del robot dada en la forma

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}\ddot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{W}}\dot{\mathbf{X}}. \quad (2.28)$$

2.3. Dinámica del robot paralelo

Un método tradicional para calcular el modelo dinámico de mecanismos en cadena cinemática cerrada [1] es considerar primero una estructura equivalente y después tener en cuenta sus restricciones cinemáticas y de configuración con el uso de los multiplicadores de Lagrange o el uso del principio de D'Alembert. En [65] se ilustra el principio de D'Alembert para deducir las ecuaciones dinámicas de robots con cadenas cinemáticas cerradas. En esta sección se establece el modelo dinámico del robot paralelo plano redundante en el espacio tarea con el uso de la formulación Lagrange-D'Alembert presentada en [64]. Esta formulación es deducida usando el principio de D'Alembert y obtenida sin el cálculo de multiplicadores de Lagrange.

De acuerdo con los autores en [18, 64], la formulación de Lagrange-D'Alembert establece que usando un mecanismo equivalente de cadena cinemática abierta (MECCA) se obtiene el modelo dinámico de un robot paralelo plano redundante de la siguiente forma: la articulación central del órgano terminal es cortada virtualmente para formar el MECCA; este proceso remueve las restricciones del sistema formadas por los lazos cerrados. La figura 2.5 describe dicho mecanismo equivalente. Después, se derivan las ecuaciones de Lagrange de las cadenas cinemáticas en el MECCA y se calculan los pares articulares necesarios para generar un movimiento dado que satisfaga las restricciones de este sistema. Finalmente, se obtiene la matriz de las restricciones de sistema en lazo cerrado para calcular el modelo dinámico del mecanismo en cadena cinemática cerrada y los pares articulares para producir el mismo movimiento dado. Esto se establece en la siguiente proposición que determina la relación entre el vector de pares articulares $\boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{R}^6$ que genera un movimiento dado en el MECCA y el vector de pares articulares $\boldsymbol{\tau}_a \in \mathfrak{R}^3$ del sistema redundante de cadena cinemática cerrada que genera el mismo movimiento.

Proposición 1 *Considere que los pares articulares del sistema equivalente en cadena cinemática abierta que generan un movimiento se denotan por $\boldsymbol{\tau}$. Entonces, los pares actuados $\boldsymbol{\tau}_a$ del mecanismo redundante en cadena cinemática cerrada que se requieren para generar el mismo movimiento cumplen la relación*

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}_a = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\tau} \quad (2.29)$$

donde $\mathbf{W} = (\partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{q}_e)$ y $\mathbf{S} = (\partial \mathbf{q}_a / \partial \mathbf{q}_e)$ son matrices Jacobianas.

Demostración: ver Apéndice A.

A continuación se procede con el cálculo del modelo dinámico. El bien conocido formalismo de Euler-Lagrange [3] permite obtener las ecuaciones de movimiento de cada brazo del MECCA en la siguiente forma

$$M_i \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\alpha}_i \end{bmatrix} + C_i \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} + N_i = \begin{bmatrix} \tau_{ai} \\ \tau_{pi} \end{bmatrix}; i = 1, 2, 3 \quad (2.30)$$

donde

$$M_i = \begin{bmatrix} \bar{M}_{i11} & \bar{M}_{i12} \\ \bar{M}_{i21} & \bar{M}_{i22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i + 2\beta_i \cos \alpha_i & \gamma_i + \beta_i \cos \alpha_i \\ \gamma_i + \beta_i \cos \alpha_i & \gamma_i \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} \bar{C}_{i11} & \bar{C}_{i12} \\ \bar{C}_{i21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_i \dot{\alpha}_i \sin \alpha_i & -\beta_i (\dot{\alpha}_i + \dot{\theta}_i) \sin \alpha_i \\ \beta_i \dot{\alpha}_i \sin \alpha_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Los parámetros I_{ij} , m_{ij} y r_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, corresponden a la inercia, la masa y el centro de masa de cada eslabón. Estos se definen de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \lambda_i &= I_{i1} + I_{i2} + m_{i1} r_{i1}^2 + m_{i2} (L^2 + r_{i2}^2), \\ \beta_i &= m_{i2} r_{i2} L, \\ \gamma_i &= I_{i2} + m_{i2} r_{i2}^2. \end{aligned}$$

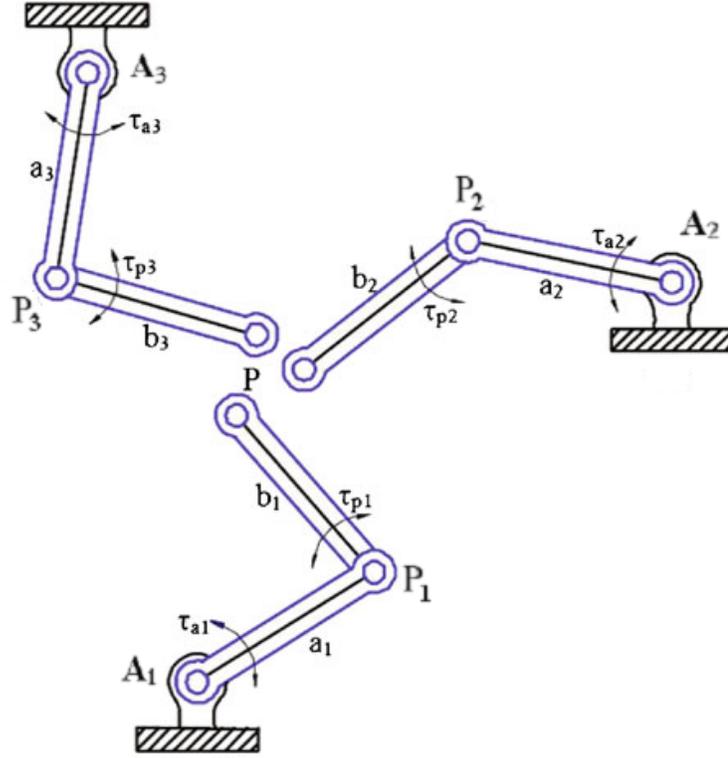


Figura 2.5: Mecanismo equivalente en cadena cinemática abierta.

Como se muestra en la figura 2.5, $\boldsymbol{\tau}_a = [\tau_{a1} \ \tau_{a2} \ \tau_{a3}]^T$ denota los pares en las articulaciones activas y $\boldsymbol{\tau}_p = [\tau_{p1} \ \tau_{p2} \ \tau_{p3}]^T$ denota los pares en las articulaciones pasivas. El término $N_i = [n_{ai} \ n_{pi}]^T$ con $i = 1, 2, 3$ representa las fuerzas de reacción en las articulaciones, la fricción en las articulaciones pasivas se considera cero y solo la fricción en las articulaciones activas se toma en cuenta.

Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene el modelo dinámico del MECCA expresado como

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{N}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.31)$$

donde los términos de este modelo se definen como

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{111} & 0 & 0 & \bar{M}_{112} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{211} & 0 & 0 & \bar{M}_{212} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{M}_{311} & 0 & 0 & \bar{M}_{312} \\ \bar{M}_{112} & 0 & 0 & \bar{M}_{122} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{212} & 0 & 0 & \bar{M}_{222} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{M}_{312} & 0 & 0 & \bar{M}_{322} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{111} & 0 & 0 & \bar{C}_{112} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_{211} & 0 & 0 & \bar{C}_{212} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{311} & 0 & 0 & \bar{C}_{312} \\ \bar{C}_{121} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_{221} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{321} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{N}} = [n_{a1} \ n_{a2} \ n_{a3} \ n_{p1} \ n_{p2} \ n_{p3}]^T, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_a \\ \boldsymbol{\tau}_p \end{bmatrix}.$$

El término $\bar{\mathbf{M}}$ denota la matriz de inercia del MECCA, $\bar{\mathbf{C}}$ es la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas, $\bar{\mathbf{N}}$ representa el vector de pares debidos a perturbaciones.

A continuación se obtiene el modelo dinámico del robot paralelo estudiado considerando las coordenadas del órgano terminal como coordenadas generalizadas independientes, es decir, $\mathbf{q}_e = \mathbf{X}$.

Sustituyendo la dinámica del MECCA dada por (2.31) en la relación (2.29) se tiene

$$\mathbf{W}^T (\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{N}}) = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}_a. \quad (2.32)$$

Sustituyendo las relaciones de las velocidades angulares (2.23) y las relaciones de las aceleraciones angulares (2.28) en (2.32) permite la obtención del modelo dinámico del robot paralelo plano redundante en términos de las coordenadas del espacio de trabajo del robot

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{N} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}_a, \quad (2.33)$$

con

$$\mathbf{M} = \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{W}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{W}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{N}}, \quad (2.36)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de inercia a nivel espacio de trabajo, \mathbf{C} es la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas a nivel espacio de trabajo y \mathbf{N} denota el vector de perturbaciones constantes que afecten al robot a nivel del espacio de trabajo.

2.3.1. Propiedades de la ecuación dinámica del robot paralelo

La matriz de inercia \mathbf{M} y la matriz de Coriolis \mathbf{C} del modelo dinámico (2.33) satisfacen las siguientes propiedades estructurales siempre que la matriz Jacobiana \mathbf{W} tenga rango completo, véanse [18, 66].

Propiedad 1 *La matriz \mathbf{M} es simétrica definida positiva.*

Propiedad 2 *La matriz $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$ es antisimétrica.*

Propiedad 3 *Existe una constante positiva k_C tal que*

$$\|\mathbf{C}\| \leq k_C \|\dot{\mathbf{X}}\|. \quad (2.37)$$

El modelo dinámico (2.33) describe la relación entre los pares articulares $\tau_a \in \mathbb{R}^3$ y las coordenadas del órgano terminal dentro del espacio de trabajo del robot $\mathbf{X} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Por último, cabe mencionar que este modelo presenta una estructura similar a la del modelo dinámico de los robots de cadena cinemática abierta.

2.4. Modelado del sistema de visión

La información visual utilizada como realimentación en un lazo de control representa una solución atractiva para el control de posición y movimiento de robots que se desenvuelven en ambientes no estructurados [26]. Existen dos clasificaciones para la configuración de control visual que son: *cámara fija* y *cámara en mano*. En sistemas robóticos con cámara fija, un sistema de visión se localiza respecto a un marco coordenado de referencia y captura imágenes tanto del robot como de su espacio de trabajo (vea figura 2.6). El objetivo es hacer que el órgano terminal del robot alcance un objeto o una posición deseada. En contraste, en la configuración cámara en mano una cámara montada en el robot proporciona la información visual del espacio de trabajo (vea figura 2.7). El fin de esta configuración es mover el robot de tal forma que la imagen de un objeto estático o en movimiento esté siempre en una perspectiva deseada en la imagen dada por la cámara.

Los esquemas de control visual también se clasifican como *esquemas basados en posición* y *esquemas basados en imagen*. El control basado en posición obtiene mediante un sistema de visión las coordenadas del órgano terminal del robot y las del objeto con el cual deberá interactuar. Para obtener esta información es necesario disponer previamente de un modelo geométrico del espacio de trabajo, esto es, se debe considerar un *entorno estructurado*. Entonces, el error entre la posición deseada del objeto y la posición obtenida después del procesamiento visual es empleado en el lazo de control. Este esquema es ineficiente en entornos no estructurados ya que es necesario conocer precisamente el modelo cinemático y geométrico del robot; además, es necesaria la calibración de la cámara. La figura 2.8 muestra un diagrama de bloques del esquema de control visual basado en posición.

Por su parte, el control basado en imagen no requiere de entornos estructurados y no necesita del cálculo de las coordenadas de posición del objeto para llevar el órgano terminal del robot hacia la posición deseada. Se parte de una imagen deseada de la que se obtienen características de interés como puede ser el contorno de un objeto, su centroide, etc. Así, este esquema posee robustez a pesar de no contar con la calibración de la cámara. En este enfoque, el sistema de visión proporciona la posición del objeto y la posición del órgano terminal; obteniéndose un error de posición medido directamente en el plano imagen que corresponde a la distancia visual entre ambas posiciones. Este error alimenta al controlador para que éste lo reduzca [25]. La figura 2.9 muestra un diagrama de bloques del esquema de control visual basado en imagen.

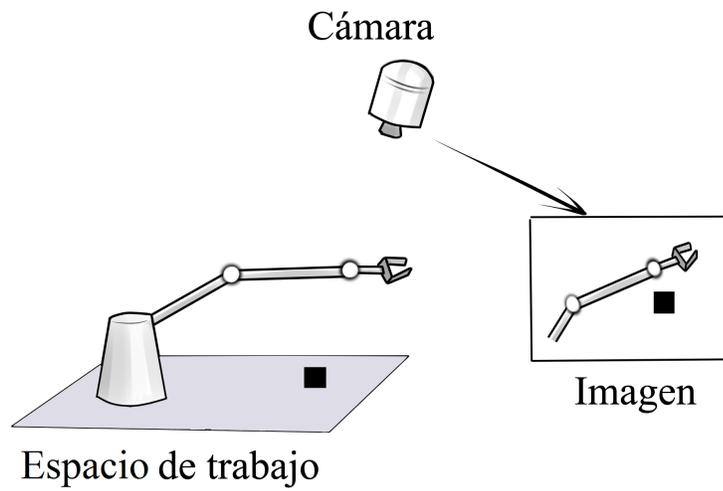


Figura 2.6: Configuración cámara fija.

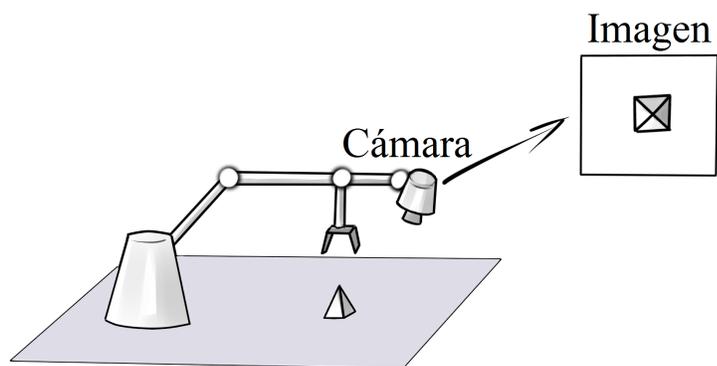


Figura 2.7: Configuración cámara en mano.

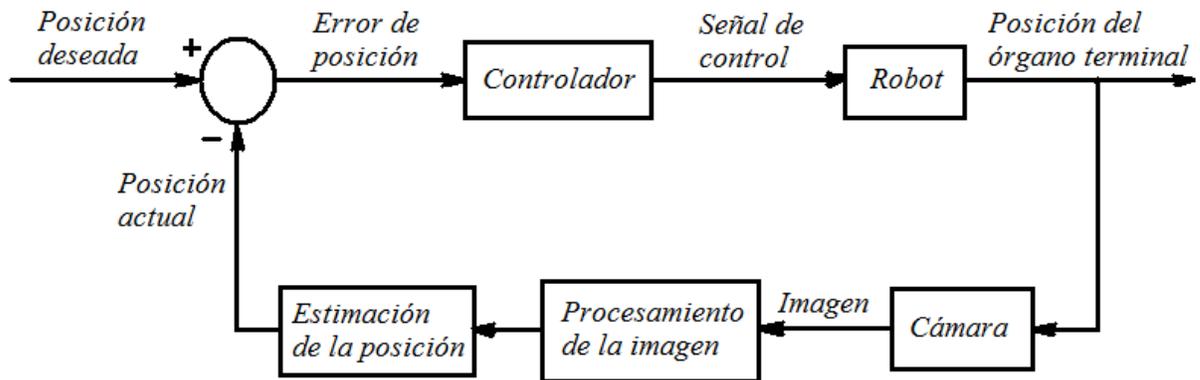


Figura 2.8: Esquema de control visual basado en posición.

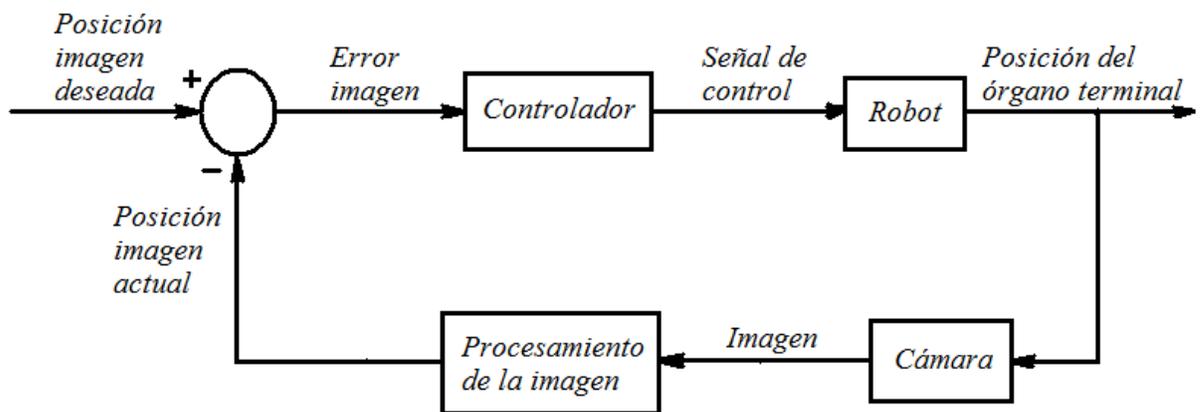


Figura 2.9: Esquema de control visual basado en imagen.

La figura 2.10 muestra la configuración del robot junto con el sistema de visión implementados en este trabajo.

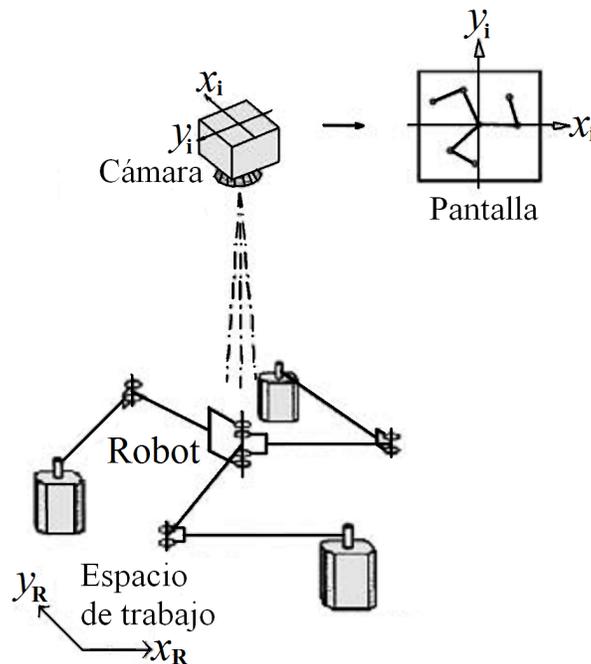


Figura 2.10: Sistema robótico en configuración cámara fija

Para la descripción del robot y el sistema de visión se considera una transformación de perspectiva (vea figura 2.11) como el modelo ideal de una cámara *pinhole* [26]. Como se mencionó en la sección 2.2, el robot se mueve en el plano coordenado horizontal $x_R - y_R$, conocido como el plano coordenado del robot.

En la figura 2.12 se observa que la posición del órgano terminal del robot con respecto a este marco coordenado es denotada por $\mathbf{X} = [x \ y]^T$. La cámara, que proporciona una imagen del espacio de trabajo del robot como también del órgano terminal, se coloca perpendicularmente al plano donde el robot se mueve. El centro óptico de la cámara se localiza a una distancia z con respecto al plano $x_R - y_R$ y el eje óptico intercepta este plano en el punto $\mathbf{O} = [O_x \ O_y]^T$. La orientación de la cámara alrededor del eje óptico con respecto al lado negativo del eje x_R del marco coordenado del robot, medido en sentido de las manecillas del reloj, es denotado por β y satisface la condición $-\pi/2 < \beta < \pi/2$. Se define el marco coordenado imagen como $x_i - y_i$ y el cual se coloca en el centro de la imagen y paralelo al marco coordenado del robot. Así, la característica visual de interés es la posición del órgano terminal $\mathbf{X}_i = [x_i \ y_i]^T$ en el marco coordenado imagen.

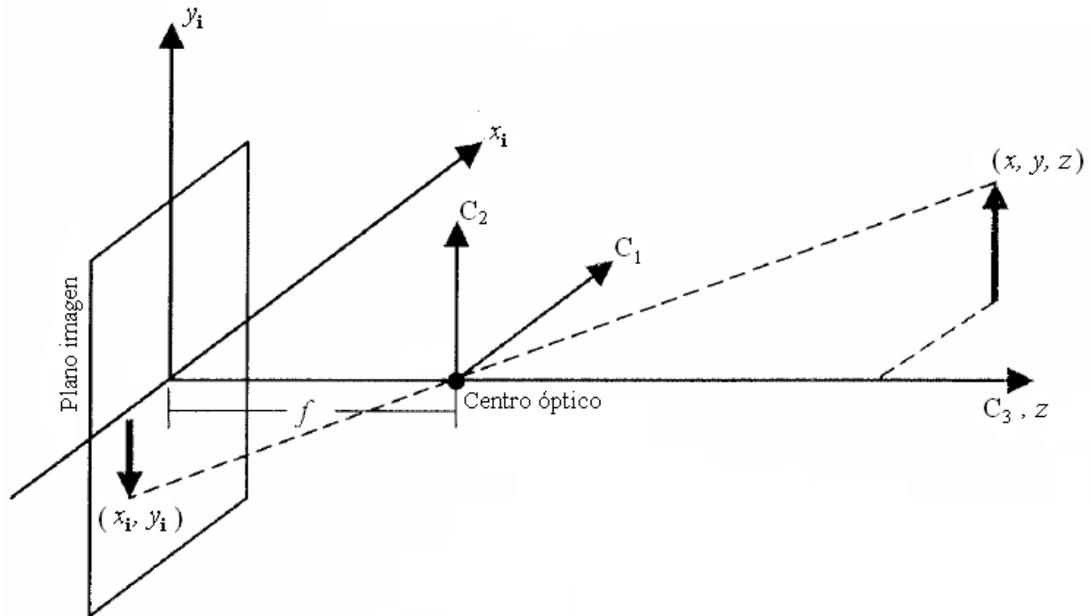


Figura 2.11: Transformación de perspectiva.

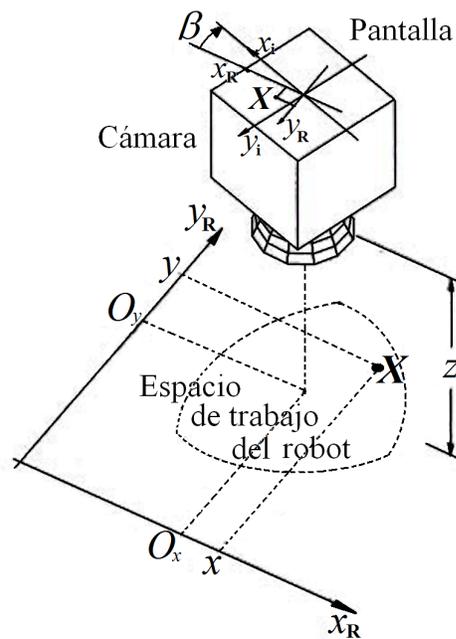


Figura 2.12: Marcos coordenados del robot y del sistema de visión.

Posición Imagen

La siguiente expresión da la posición del órgano terminal en el marco coordenado imagen proporcionada en la pantalla del sistema de visión

$$\mathbf{X}_i = \eta h R(\beta) [\mathbf{X} - \mathbf{O}] + \mathbf{C}_i, \quad (2.38)$$

donde el parámetro $\mathbf{C}_i = [c_{xi} \ c_{yi}]^T$ es el centro de la imagen, η es el factor de escala de la lente dado en *pixeles/m* y se considera negativo, h es el factor de aumento definido como

$$h = \frac{f_c}{f_c - z} < 0, \quad (2.39)$$

donde f_c es la distancia focal de la cámara. La matriz $R(\beta) \in SO(2)$ ¹ denota la rotación generada al rotar β radianes la cámara alrededor de su eje óptico en sentido de las manecillas del reloj

$$R(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Una matriz ortogonal cumple $R^T(\beta) = R^{-1}(\beta)$ y el grupo es llamado especial porque teniendo la matriz dimensión 2, su determinante siempre es igual a 1.

La derivada respecto del tiempo de la posición imagen dada en (2.38) determina la velocidad lineal del órgano terminal expresada en coordenadas imagen de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \eta h R(\beta) \dot{\mathbf{X}}. \quad (2.41)$$

Posición Imagen deseada

Se tiene que la posición deseada del órgano terminal en coordenadas imagen está dada por

$$\mathbf{X}_i^* = \eta h R(\beta) [\mathbf{X}^* - \mathbf{O}] + \mathbf{C}_i \quad (2.42)$$

donde $\mathbf{X}^* = [x^* \ y^*]^T$ denota la posición deseada del órgano terminal expresada en el marco coordenado $x_{\mathbf{R}}-y_{\mathbf{R}}$. Por otro lado, se considera que la posición deseada está localizada estrictamente dentro del espacio de trabajo del robot; en consecuencia, existe al menos un vector constante de ángulos en las articulaciones activas \mathbf{q}_{ad} para el cual el órgano terminal alcanza la posición deseada; en otras palabras, existe un conjunto no vacío $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{X}^* = f(\mathbf{q}_{ad}) \in \Omega$ para $\mathbf{q}_{ad} \in \mathcal{Q}$.

Error de posición imagen

Se define el error de posición imagen $\tilde{\mathbf{X}}_i$ como la distancia visual entre el órgano terminal y la posición deseada como se muestra en la figura 2.13 y está dado por la siguiente expresión

$$\tilde{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i^* - \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

¹El término $SO(2)$ denota el grupo ortogonal especial de matrices.

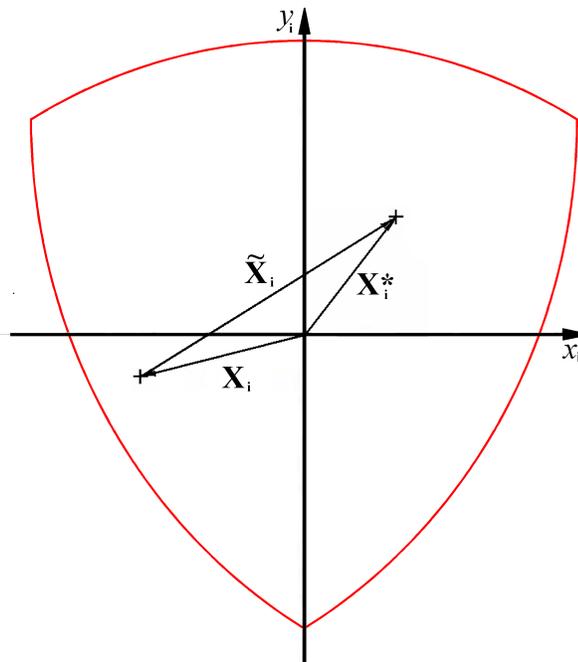


Figura 2.13: Definición del error de posición imagen.

Al proponer una posición deseada fija, la derivada respecto al tiempo del error de posición imagen es

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{X}}_i}{dt} &= -\dot{\mathbf{X}}_i \\ &= -\eta h R(\beta) \dot{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Capítulo 3

Control Visual de un Robot Paralelo Plano

En el capítulo anterior se observó que la estructura de las ecuaciones dinámicas de un manipulador paralelo redundante, mostrado en (2.33), es similar a la del modelo dinámico de un robot de cadena abierta. Esta similitud implica que es posible aplicar controladores de posición diseñados para manipuladores de cadena abierta a los manipuladores paralelos. Los controladores de tipo PD ó tipo PID son comúnmente empleados en la industria por su eficiencia computacional y su facilidad de implementación porque no se basan en un modelo dinámico. Considerar controladores que emplean el modelo dinámico requeriría mayor demanda computacional debido a que el cálculo del modelo dinámico de robots paralelos es más complicado que el correspondiente a robots de cadena abierta tomando en cuenta que se desea hacer el control en tiempo real.

Recordando que se desea realizar el control visual del robot paralelo plano redundante, los controladores de tipo PD y PID propuestos en este capítulo utilizarán realimentación visual para su implementación. La cámara sin calibrar en el sistema de visión se usa para medir directamente la posición del órgano terminal. La descripción de espacio de trabajo del robot al espacio imagen es dada por las expresiones mostradas en la Sección 2.4. Al determinar una referencia fija en la imagen \mathbf{X}_i^* y con la posición imagen del órgano terminal \mathbf{X}_i se obtiene el error de posición imagen $\tilde{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i^* - \mathbf{X}_i$ que a su vez se usa para definir el error de posición imagen rotado

$$\mathbf{Y} = R(\beta)^T \tilde{\mathbf{X}}_i, \quad (3.1)$$

y éste servirá para alimentar los algoritmos de control. La variable \mathbf{Y} está definida a nivel visual lo que implica que las leyes de control propuestas serán controladores visuales basados en imagen [25].

En las secciones siguientes del capítulo se presentan tanto la formulación del problema de control como las leyes de control visual propuestas basadas en imagen (IBVS por sus siglas en inglés) para regular la posición del órgano terminal del robot paralelo redundante. Las leyes de control propuestas serán las siguientes: IBVS PD, IBVS PD con matriz Jacobiana incierta, IBVS PD con estimación de velocidad, IBVS PID, e IBVS-PID con estimación de

velocidad. Se presentan estas leyes conforme al siguiente proceso de análisis; se parte del caso donde se considera de forma ideal que las mediciones de posición y velocidad están disponibles, las cuales son necesarias para poder implementar los reguladores. Después se presentan los reguladores cuando se toman en cuenta los casos de estimación de velocidad e incertidumbre de la matriz Jacobiana del robot.

3.1. Formulación del problema de control

Sea el sistema robótico descrito en la figura 3.1; el sistema de visión proporciona la posición del órgano terminal en coordenadas imagen \mathbf{X}_i y se especifica una posición fija deseada localizada estrictamente dentro del espacio de trabajo del robot en coordenadas imagen \mathbf{X}_i^* . Entonces, el problema se establece como el diseño de una ley de control que calcule los pares de las articulaciones activas τ_a tal que el órgano terminal del robot alcance en la imagen en pantalla la posición fija deseada. En otras palabras, el propósito de control es lograr que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{X}}_i(t) = \mathbf{0}$.

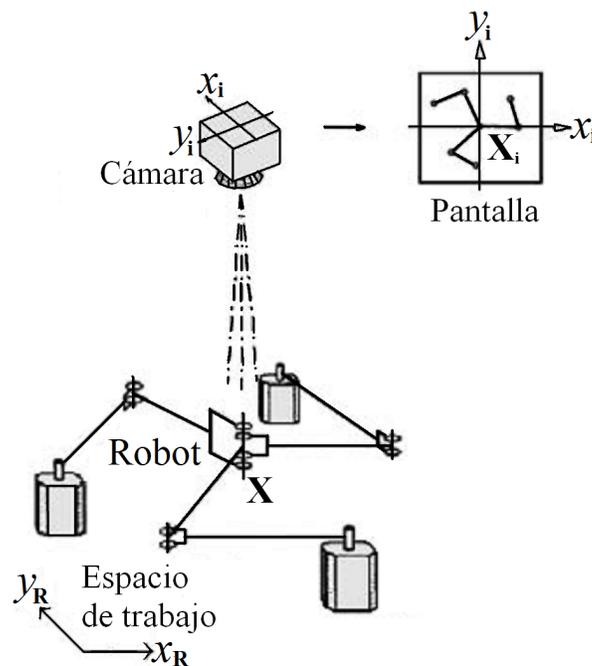


Figura 3.1: Sistema robótico

Para resolver el problema establecido previamente, se considera que la ley de control

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}_a \quad (3.2)$$

determina los pares en la dinámica del robot paralelo dada por la expresión

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{N} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}_a. \quad (3.3)$$

El vector de pares de las articulaciones activas $\boldsymbol{\tau}_a$ es la solución de (3.2). Sin embargo, el robot paralelo es redundante y la matriz Jacobiana $\mathbf{S}^T \in \mathfrak{R}^{2 \times 3}$ no es cuadrada lo que implica que no tiene inversa. Para determinar los pares de las articulaciones activas en la ecuación (3.2) se usa la pseudo-inversa de Moore-Penrose de la matriz \mathbf{S}^T (ver Apéndice B) definida como

$$(\mathbf{S}^T)^+ = \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \quad (3.4)$$

la cual satisface $\mathbf{S}^T (\mathbf{S}^T)^+ = \mathbf{I}$. Así, los pares de control $\boldsymbol{\tau}_a$ se calculan como

$$\boldsymbol{\tau}_a = (\mathbf{S}^T)^+ \mathbf{u} \quad (3.5)$$

que es equivalente a resolver (3.2) en el sentido de Mínimos Cuadrados. La solución en (3.5) tendrá sentido sólo si la pseudo-inversa (3.4) está bien definida, esto es, si la matriz Jacobiana $\mathbf{S} \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}$ es de rango completo. La matriz Jacobiana \mathbf{S} perderá rango si el robot paralelo presenta una configuración singular como las mostradas en la figura 3.2. Esto no pasa al considerar que el órgano terminal se mueve siempre dentro del espacio de trabajo; por lo tanto la matriz Jacobiana \mathbf{S} se supondrá siempre de rango completo.

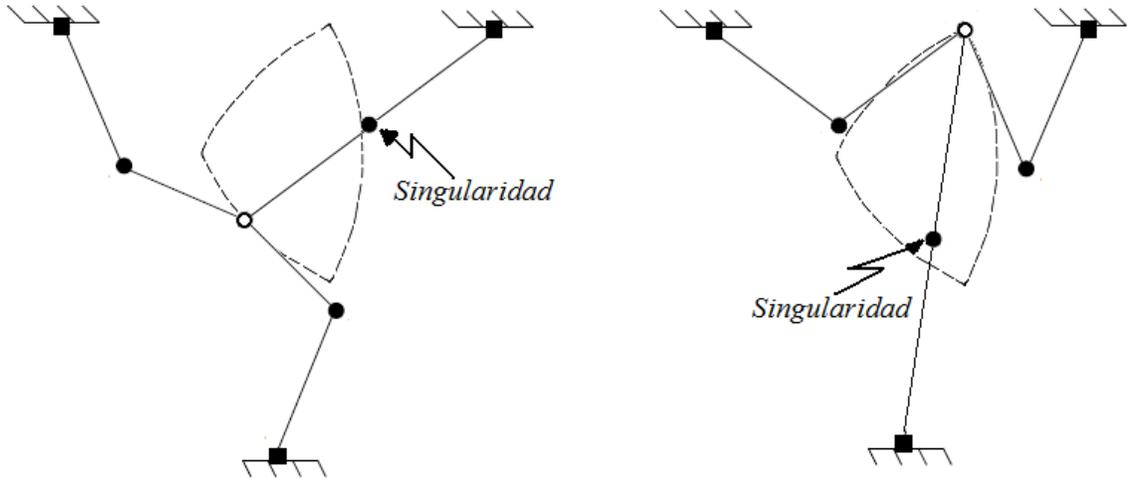


Figura 3.2: Configuraciones singulares cuando el órgano terminal llega a la frontera del espacio de trabajo. A la izquierda, un brazo completamente extendido y a la derecha, un brazo completamente extendido y uno plegado casi por completo.

3.2. Control Visual Proporcional Derivativo

En la referencia [67] se menciona que el controlador tipo PD es una estrategia simple y se considera como un controlador sensible porque la acción derivativa es esencialmente de previsión, responde a la velocidad de cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Por lo tanto, se considera que la acción derivativa se anticipa al cambio del error corrigiendo oportunamente la respuesta del sistema para aumentar su estabilidad. La acción derivativa añade amortiguamiento al sistema obteniéndose un comportamiento aceptable para una respuesta transitoria y permitiendo que el valor en la ganancia proporcional pueda incrementarse, lo cual redundaría en una mejora en la precisión en estado estacionario.

Para realizar los análisis de los algoritmos de control PD se considera que las fuerzas externas en el modelo dinámico (3.3) denotadas por \mathbf{N} son cero. En consecuencia el modelo dinámico (3.3) puede escribirse de la siguiente forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}_a. \quad (3.6)$$

3.2.1. Ley de control IBVS PD

Como primer caso de estudio, el controlador PD utiliza la medición de la posición del órgano terminal en coordenadas imagen para determinar el error de posición imagen $\tilde{\mathbf{X}}_i$; éste a su vez determina la variable de control \mathbf{Y} . También requiere las mediciones de los ángulos de las articulaciones \mathbf{q} para obtener la matriz Jacobiana \mathbf{S} que es usada para calcular la matriz pseudo-inversa $(\mathbf{S}^T)^+$. La velocidad visual $\dot{\tilde{\mathbf{X}}}_i$ se supone medible y también se considera que la matriz Jacobiana \mathbf{S} se conoce exactamente. La derivada respecto al tiempo de la variable de control \mathbf{Y} es

$$\dot{\mathbf{Y}} = -R(\beta)^T \dot{\tilde{\mathbf{X}}}_i. \quad (3.7)$$

Entonces, utilizando la ecuación (3.5) se propone la siguiente ley de control visual PD para obtener los pares activos $\boldsymbol{\tau}_a$

$$\boldsymbol{\tau}_a = (\mathbf{S}^T)^+ [\alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}}] \quad (3.8)$$

donde k_1 , k_2 y α son constantes positivas.

Al sustituir la ley de control (3.8) en el modelo dinámico (3.6) se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{S}^T (\mathbf{S}^T)^+ [\alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}}] \\ &= \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sustituyendo $\dot{\mathbf{X}}_i$ dada por (2.41) en (3.7) y considerando como estados $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})$ permite escribir el sistema en lazo cerrado (3.9) como un sistema no lineal autónomo de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta h \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{M}^{-1} \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Las condiciones para establecer estabilidad asintótica de este sistema en lazo cerrado se presentan en la siguiente proposición.

Proposición 2 *Considere el modelo dinámico de un robot paralelo plano redundante (3.6) junto con la ley de control visual PD (3.8). Eligiendo la constante positiva α suficientemente grande, entonces, el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado (3.10) es asintóticamente estable y la función de Lyapunov estricta que lo garantiza es la siguiente*

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}. \quad (3.11)$$

Demostración: ver Apéndice C.1

3.2.2. IBVS PD con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta

El algoritmo de control anterior supone el conocimiento exacto de la matriz Jacobiana \mathbf{S} la cual es requerida para obtener la matriz pseudo-inversa $(\mathbf{S}^T)^+$, que a su vez es necesaria para calcular los pares de control $\boldsymbol{\tau}_a$. Sin embargo, un aspecto a considerar es que la medición en tiempo real de la posición en las articulaciones $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{q}_p^T]^T$ podría tener retardos y además podrían presentarse errores en esas mediciones. En consecuencia la matriz Jacobiana \mathbf{S}^T puede presentar incertidumbre. Otro aspecto que puede causar que la matriz \mathbf{S} sea incierta es la longitud de los eslabones, ésta es fija pero su valor exacto puede ser desconocido. Entonces, se supone como incierta la matriz Jacobiana \mathbf{S}^T y su valor estimado será denotado por $\hat{\mathbf{S}}^T$. Por lo tanto, los pares de control en las articulaciones activas $\boldsymbol{\tau}_a$ serán calculados como

$$\boldsymbol{\tau}_a = (\hat{\mathbf{S}}^T)^+ \mathbf{u}. \quad (3.12)$$

Se supone que la posición deseada del órgano terminal se encuentra estrictamente dentro del espacio de trabajo del robot, lo que implica que éste no presenta singularidades. Se supone además que la matriz $\hat{\mathbf{S}}$ y su transpuesta $\hat{\mathbf{S}}^T$ tienen rango completo.

A partir de la ecuación (3.12), la ley de control visual PD (3.8) se propone ahora como

$$\boldsymbol{\tau}_a = (\hat{\mathbf{S}}^T)^+ [\alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}}]. \quad (3.13)$$

Al sustituir la ley de control (3.13) en el modelo dinámico (3.6) se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{S}^T (\hat{\mathbf{S}}^T)^+ [\alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}}]. \quad (3.14)$$

Se observa que en el lado derecho de (3.14) el producto $\mathbf{S}^T (\hat{\mathbf{S}}^T)^+$ no será igual a la matriz identidad debido a la incertidumbre en la matriz pseudo-inversa. Sin embargo, al sumar y restar el lado derecho del sistema en lazo cerrado (3.9) al lado derecho de (3.14), se obtendrá el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} = \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}} + \Delta \quad (3.15)$$

donde

$$\Delta := \left[\mathbf{S}^T (\hat{\mathbf{S}}^T)^+ - \mathbf{I} \right] \left[\alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}} \right] \quad (3.16)$$

es una perturbación que resulta de la incertidumbre en la matriz Jacobiana. Se supone

$$\left\| \mathbf{S}^T (\hat{\mathbf{S}}^T)^+ - \mathbf{I} \right\| \leq \rho, \quad (3.17)$$

donde ρ es una constante positiva e \mathbf{I} es la matriz identidad de dimensiones adecuadas.

Considerando como estados $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})$ se escribe el sistema en lazo cerrado (3.15) de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta h \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{M}^{-1} \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \Delta \} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

el cual es un sistema diferencial autónomo. En $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$, la perturbación Δ desaparece y el origen es un punto de equilibrio del sistema. La estabilidad del sistema (3.18) se establece en la siguiente proposición.

Proposición 3 *Considere el modelo dinámico de un robot paralelo plano redundante (3.6) junto con la ley de control visual PD (3.13). Para un valor suficientemente grande de α , si la cota ρ en (3.17) es suficientemente pequeña, entonces, el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado (3.18) es asintóticamente estable y la función de Lyapunov estricta (3.11) garantiza dicha estabilidad.*

Demostración: ver Apéndice C.2

3.2.3. IBVS PD utilizando un estimado de la velocidad

Se emplea un enfoque similar al empleado en la referencia [62] para evitar el uso de la medición de la velocidad del órgano terminal. La ley de control (3.8) requiere la derivada $\dot{\mathbf{Y}}$ definida en (3.7) para poder agregar amortiguamiento. Entonces, para evitar el uso de $\dot{\mathbf{Y}}$ se modifica la ley de control (3.8) como

$$\boldsymbol{\tau}_a = (\mathbf{S}^T)^+ \left[\alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\boldsymbol{\xi}} \right] \quad (3.19)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -2\alpha \boldsymbol{\xi} + \alpha^2 \mathbf{Y} \quad (3.20)$$

donde α , k_1 y k_2 son constantes escalares positivas y esta ley de control agrega amortiguamiento utilizando $\dot{\xi}$ producido por (3.20). Esta estimación corresponde a un filtro pasa-altas presentado primero en [62] y reformulado aquí ligeramente para conveniencia del análisis de estabilidad. La función de transferencia correspondiente a la ecuación (3.20) es

$$G_{\dot{\xi}}(s) = \frac{\alpha^2 s}{s + 2\alpha}. \quad (3.21)$$

El diagrama de Bode en la componente de magnitud de este filtro se comporta como la función de transferencia s a bajas frecuencias, esto es, que este filtro se comporta como el operador de derivada respecto del tiempo a bajas frecuencias. El diagrama de bloques correspondiente a la ley de control descrita por (3.19) y (3.20) se muestra en la figura 3.3.

Sustituyendo la ley de control (3.19) en el modelo dinámico del robot paralelo (3.6) genera el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} = \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\xi}. \quad (3.22)$$

Al definir como estados del sistema $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi})$, el sistema en lazo cerrado (3.22) puede ser escrito como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta h \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{M}^{-1} \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\xi} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \} \\ -2\alpha \dot{\xi} - \eta h \alpha^2 \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

el cual es un sistema diferencial autónomo siendo $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \dot{\xi} = \mathbf{0}$ un punto de equilibrio. El resultado de estabilidad se establece en la siguiente proposición.

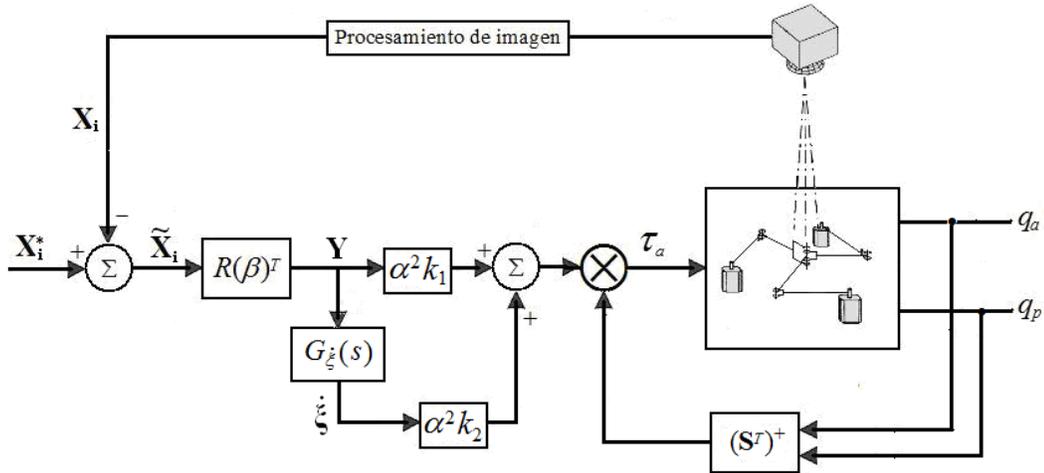


Figura 3.3: Diagrama de la ley de control IBVS PD usando un estimado de la velocidad.

Proposición 4 *Considere la dinámica del robot paralelo (3.6) junto con la ley de control dada por las expresiones (3.19) y (3.20). Si el valor de α es suficientemente grande, entonces el sistema en lazo cerrado (3.23) en el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable y la función estricta de Lyapunov que lo garantiza está dada por*

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = \frac{\eta h}{2} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\alpha^2 k_1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \frac{k_2}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{k_1}{\alpha k_2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}. \quad (3.24)$$

Demostración: ver Apéndice C.3

Considerando incertidumbre en la matriz pseudo-inversa $(\mathbf{S}^T)^+$ de la ley de control (3.19) se obtiene el siguiente resultado

Corolario 1 *Si la ley de control visual PD dada por las expresiones (3.19) y (3.20) emplea una matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta de tal forma que en el sistema en lazo cerrado (3.23) se presenta una incertidumbre como la definida en (3.16), la cual desaparece en el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}$ y satisface la cota (3.17), entonces, la función estricta de Lyapunov (3.24) garantiza para un valor de α grande y una cota ρ^* que el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable.*

Demostración: La demostración es similar a la descrita en el Apéndice C.3; en cuanto al empleo de la cota (3.17) sobre la matriz Jacobiana se sigue un procedimiento similar al descrito en el Apéndice C.2.

3.3. Control Visual Proporcional Integral Derivativo

En la sección anterior se observó que las leyes de control PD aseguran estabilidad asintótica del punto de equilibrio en ausencia de perturbaciones. Pero el equilibrio no puede coincidir con el deseado si se presentan perturbaciones constantes. Para evitar ese inconveniente, una realimentación integral puede compensar perturbaciones constantes logrando que el punto de equilibrio se alcance y la estabilidad asintótica se conserve.

Un controlador PID típico tiene la siguiente forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_P \mathbf{e} + \mathbf{K}_I \int_0^t \mathbf{e}(\sigma) d\sigma + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}, \quad (3.25)$$

donde $\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y}$, define el error con \mathbf{r} como referencia constante, \mathbf{y} es la variable de salida y $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_I, \mathbf{K}_D$ son matrices definidas positivas. Entonces, el error \mathbf{e} junto con su integral y su derivada respecto al tiempo alimentan este controlador. La derivada del error es $\dot{\mathbf{e}} = -\dot{\mathbf{y}}$, la cual permite modificar la ley de control (3.25) a la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_P \mathbf{e} + \mathbf{K}_I \int_0^t \mathbf{e}(\sigma) d\sigma - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{y}}. \quad (3.26)$$

Este último controlador evita los cambios abruptos en la señal de referencia cuando \mathbf{r} cambia de un valor constante a otro valor. En la aplicación de control visual para robots paralelos que se desea implementar, \mathbf{r} y \mathbf{y} son respectivamente la posición imagen deseada \mathbf{X}_i^* y la posición imagen medida \mathbf{X}_i del órgano terminal del robot; con lo que la variable \mathbf{e} corresponderá a $\tilde{\mathbf{X}}_i$, que es usada en la variable \mathbf{Y} definida por (3.1). El modelo dinámico del robot paralelo establecido en (2.33) se empleará en los análisis subsecuentes; se considera que las perturbaciones externas corresponden al término \mathbf{N} de dicho modelo.

3.3.1. Ley de control IBVS PID

La ley de control visual PID considerando la solución de los pares activos $\boldsymbol{\tau}_a$ dada por (3.5) se propone como

$$\boldsymbol{\tau}_a = (\mathbf{S}^T)^+ \left[\alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}} + \alpha^2 k_3 \int_0^t \mathbf{Y}(\sigma) d\sigma \right] \quad (3.27)$$

donde k_1, k_2, k_3 y α son constantes escalares positivas. Por la definición de la derivada $\dot{\mathbf{Y}}$ en (3.7), esta ley de control requiere la velocidad del órgano terminal en coordenadas imagen $\dot{\mathbf{X}}_i$. Además, supone un conocimiento exacto de la matriz Jacobiana \mathbf{S} .

Sustituyendo la ley de control (3.27) en el modelo dinámico (2.33) produce el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{N} = \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}} + \alpha^2 k_3 \int_0^t \mathbf{Y}(\sigma) d\sigma. \quad (3.28)$$

Se define el estado

$$\mathbf{Z}(t) = \int_0^t \mathbf{Y}(\sigma) d\sigma - \frac{1}{\alpha^2 k_3} \mathbf{N}, \quad (3.29)$$

lo cual permite reescribir el sistema en lazo cerrado (3.28) como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} = \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}} + \alpha^2 k_3 \mathbf{Z}. \quad (3.30)$$

Definiendo como estados del sistema $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z})$ permite escribir el sistema en lazo cerrado (3.30) de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta h \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{M}^{-1} \left\{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} + \alpha^2 k_3 \mathbf{Z} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \right\} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

el cual es un sistema diferencial autónomo con punto de equilibrio en $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{Z} = \mathbf{0}$. Las condiciones que determinan la estabilidad asintótica se establecen en la siguiente proposición.

Proposición 5 *Sea el modelo dinámico del robot paralelo (2.33) junto con la ley de control visual PID (3.27). Supóngase un valor suficientemente grande de α tal que las ganancias en el controlador satisfagan*

$$k_1 > \max \left\{ k_3 + \frac{2\eta h \lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2}, k_2 + \frac{k_3}{\eta h} \right\}, \quad (3.32)$$

$$k_2 > \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2}, \quad (3.33)$$

$$k_3 > 0, \quad (3.34)$$

entonces, el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{Z} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado (3.31) es asintóticamente estable y la función de Lyapunov estricta que lo garantiza es

$$\begin{aligned} V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}) &= \frac{1}{2\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \frac{1}{2} \alpha (k_1 + k_3) \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Z}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \alpha \left(k_2 + \frac{k_3}{\eta h} \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Demostración: ver Apéndice D.1

3.3.2. IBVS PID utilizando un estimado de la velocidad

Descartando la variable $\dot{\mathbf{Y}}$ para agregar el amortiguamiento como en la ley de control (3.27), se propone la siguiente ley de control PID visual con una estimación de velocidad

$$\boldsymbol{\tau}_a = (\mathbf{S}^T)^+ \left[(\alpha^3 k_a + \alpha^2 k_b) \mathbf{Y} + \alpha^2 k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \alpha^2 k_b \int_0^t \mathbf{Y}(\sigma) d\sigma \right], \quad (3.36)$$

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = -\alpha \boldsymbol{\zeta} + \alpha^2 \mathbf{Y} \quad (3.37)$$

donde k_a, k_b y α son constantes escalares positivas y (3.37) es un filtro lineal pasa-altas que obtiene estimados de velocidad a partir de la variable \mathbf{Y} .

Al igual que en el caso de la ley de control IBVS PD utilizando un estimado de velocidad de la Sección 3.2.3; la estimación (3.37) es una reformulación aquí hecha para propósitos de análisis de la presentada en [62]. La función de transferencia de la ecuación (3.37) es

$$G_{\dot{\boldsymbol{\zeta}}}(s) = \alpha \left(\frac{\alpha s}{s + \alpha} \right). \quad (3.38)$$

El diagrama de Bode de este filtro en la componente de magnitud a bajas frecuencias se comporta como el operador de derivada respecto del tiempo.

El diagrama de bloques correspondiente de la ley de control (3.36) se muestra en la figura 3.4. Al sustituir la ley de control (3.36) en el modelo dinámico (2.33) se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{N} = (\alpha^3 k_a + \alpha^2 k_b) \mathbf{Y} + \alpha^2 k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \alpha^2 k_b \int_0^t \mathbf{Y}(\sigma) d\sigma. \quad (3.39)$$

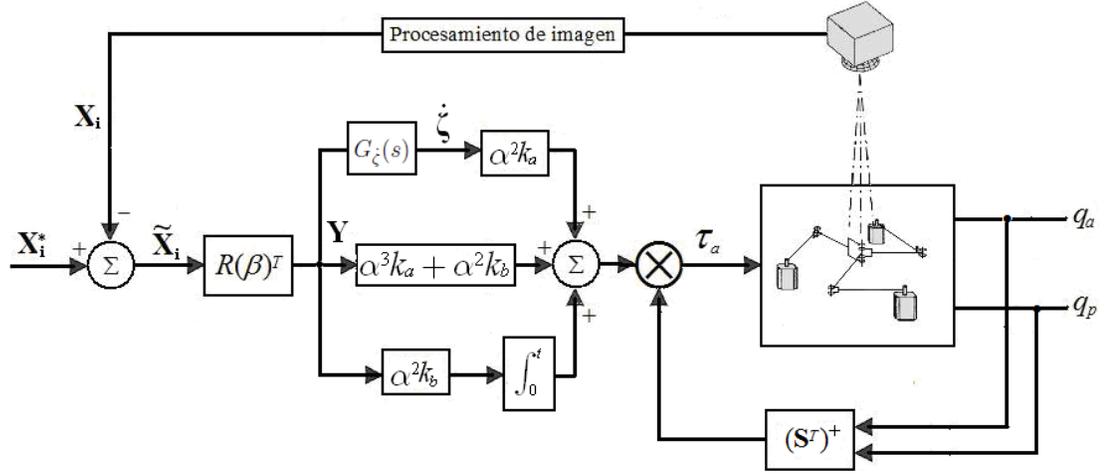


Figura 3.4: Diagrama de la ley de control IBVS PID con estimación de velocidad.

Definiendo el estado Λ como

$$\Lambda = \mathbf{Y} + \int_0^t \mathbf{Y}(\sigma) d\sigma - \frac{1}{\alpha^2 k_b} \mathbf{N} \quad (3.40)$$

permite reescribir (3.39) como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} = \alpha^3 k_a \mathbf{Y} + \alpha^2 k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \alpha^2 k_b \Lambda. \quad (3.41)$$

Considerando como estados $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \Lambda, \dot{\boldsymbol{\zeta}})$, se puede escribir el sistema en lazo cerrado anterior de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{X}} \\ \Lambda \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta h \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{M}^{-1} \{ \alpha^3 k_a \mathbf{Y} + \alpha^2 k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \alpha^2 k_b \Lambda - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \} \\ -\eta h \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{Y} \\ -\alpha \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \eta h \alpha^2 \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

el cual es un sistema autónomo donde el origen es un punto de equilibrio. La estabilidad asintótica de este sistema se establece en la siguiente proposición.

Proposición 6 *Considere la dinámica del robot paralelo (2.33) junto con la ley de control dada por las expresiones (3.36) y (3.37). Si el valor de α es suficientemente grande, entonces el sistema en lazo cerrado (3.42) en el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \Lambda = \dot{\boldsymbol{\zeta}} = 0$ es asintóticamente estable y la función estricta de Lyapunov que lo garantiza está dada por*

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \Lambda, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) = \eta h \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \alpha^3 k_a \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \alpha^2 k_b \Lambda^T \Lambda + k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} - \frac{k_b}{\alpha k_a} \Lambda^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}. \quad (3.43)$$

Demostración: ver Apéndice D.2

3.4. Conclusión

Note que el las leyes de control propuestas permiten calcular los pares de las articulaciones activas τ_a para que el órgano terminal del robot alcance en la imagen en pantalla la posición fija deseada.

Cada controlador mostrado asegura estabilidad asintótica de sus respectivos sistemas en lazo cerrado. Esto se logra al proponer funciones estrictas de Lyapunov, que al igual que los controladores, son caracterizadas por un parámetro de alta ganancia, y este parámetro al ser escogido con un valor muy grande genera la condición suficiente de estabilidad asintótica. Además, esta misma condición de estabilidad es necesaria para el caso de incertidumbre en la matriz Jacobiana, siempre y cuando ésta sea muy pequeña. Cabe destacar que en ningún análisis fue necesario el principio de invariancia de LaSalle.

Capítulo 4

Resultados Experimentales

De las leyes de control analizadas en el capítulo anterior, solamente es posible implementar las leyes de control que usan estimados de la velocidad. Este capítulo presenta de forma experimental el comportamiento del sistema en lazo cerrado usando estimación de la velocidad para las leyes de control IBVS PD e IBVS PID. En particular, los resultados experimentales presentados son: descripción gráfica de las posiciones de referencia, comportamiento del sistema en lazo cerrado, error en estado estacionario, pares de control de las articulaciones activas. Por otro lado, es posible generar incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S} de forma experimental; esto al modificar valores en los parámetros que la determinan, y así poder observar el efecto en el desempeño de las leyes de control.

4.1. Plataforma experimental

El robot redundante plano paralelo mostrado por la figura 4.1 sirve como prototipo de laboratorio para evaluar los algoritmos de control visual propuestos. La longitud de los eslabones que componen al prototipo es de $L = 15$ cm. Tres motores de corriente directa con imán permanente de la marca Litton Poly-Scientific modelo C34-L80-W40 operan las articulaciones activas a través de bandas de tiempo con un radio de 3.6:1. Para controlar los motores se usan amplificadores de modulación digital de ancho de pulso que trabajan en modo corriente de la marca Copley Controls, modelo Junus 90. Seis decodificadores absolutos magnéticos de eje en miniatura de la marca US Digital modelo MA3 con una resolución de 10 bits proporcionan las mediciones de los ángulos θ_i y α_i de las articulaciones activas y pasivas, respectivamente. Estas mediciones se usan para calcular las matrices pseudo-inversas $(\mathbf{S}^T)^+$ y $(\hat{\mathbf{S}}^T)^+$.

Esta arquitectura experimental es una actualización de la presentada en [68]. La compone una computadora llamada *Computadora de Visión* y dotada con un procesador Intel Core 2 Quad de 2.5 GHz que se encarga de la adquisición y procesamiento de las imágenes tomadas con una cámara marca Dalsa, modelo CA-1D-128A; la cual se conecta a la computadora de visión mediante una tarjeta de interfaz National Instruments 1422. La paquetería Visual C++, la librería de procesamiento de imagen ICE y el sistema de

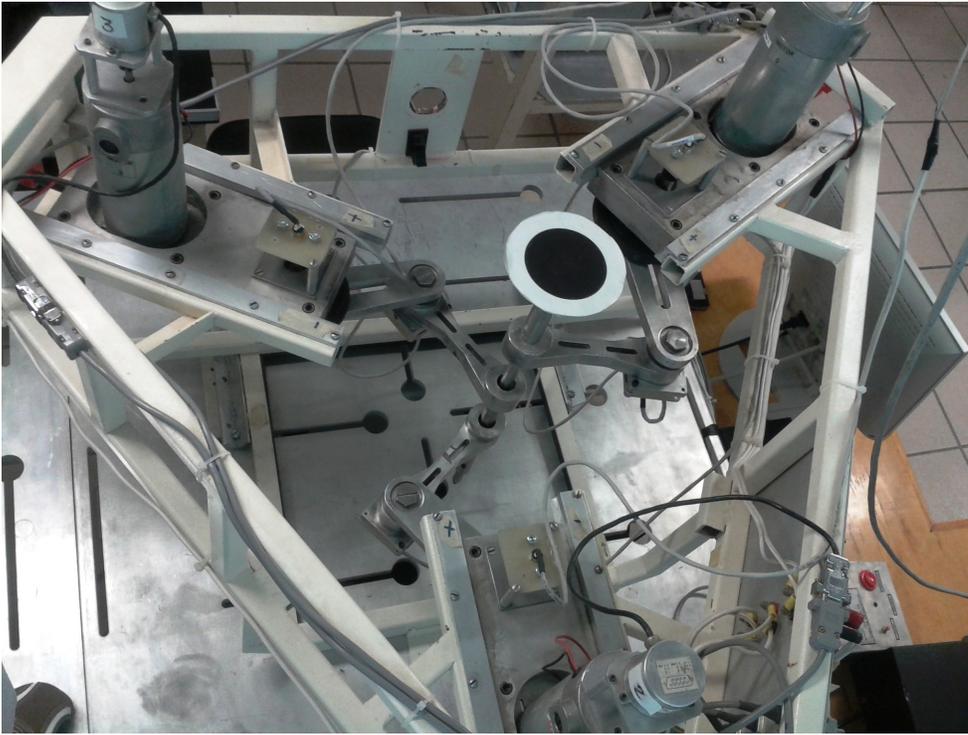


Figura 4.1: Plataforma experimental

procesamiento de imagen DIAS desarrollado por [69], permiten realizar el procesamiento de imágenes requerido. Una segunda computadora llamada *Computadora de Control* que compone la arquitectura y dotada con un procesador Intel Core 2 de 2.4 GHz, ejecuta los algoritmos de control y procesa la adquisición de datos. Esta computadora recibe información proveniente de la computadora de visión mediante un puerto RS-232 a 115 Kbaud. La transmisión y recepción de datos se realiza mediante una tarjeta Servotogo. Esta mide los voltajes de las señales enviadas por los decodificadores magnéticos y proporciona voltajes de control a los amplificadores Junus 90. La paquetería Matlab/Simulink R2007a bajo la plataforma en tiempo real Wincon 5.2 genera el código para ejecutar los algoritmos de control en tiempo real. Un contador de tiempo fija un periodo de muestreo $T_{ie} = 1\text{ms}$, el cual corresponde al reloj principal del sistema en lazo cerrado y a su vez fija también el tiempo de muestreo de la medición de los decodificadores magnéticos. El periodo de muestreo de las imágenes es $T_{im} = 3\text{ms}$; durante este intervalo de tiempo, la computadora de visión realiza la adquisición y procesamiento de datos; además, en este intervalo también se incluye el tiempo requerido para enviar únicamente las coordenadas del centroide del órgano terminal a la computadora de control a través del puerto RS-232.

Para poder implementar las leyes de control se considera que la cámara tiene una orientación de $\beta = 0$ rads (vea figura 4.2), ésto supondrá que la matriz de rotación usada en la variable de control \mathbf{Y} es igual a la matriz identidad ($R(\beta) = I$). Por otro lado, la referencia $\mathbf{X}_i^* = [x_i^* \ y_i^*]^T$ es de la siguiente forma: La componente x_i es una señal cuadrada de 16 píxeles de amplitud con una frecuencia de 0.1 Hz más una señal constante de 80 píxeles, y



Figura 4.2: Imagen del espacio de trabajo del robot con orientación $\beta = 0$ rads

la componente y_i es una señal cuadrada de 16 píxeles de amplitud con una frecuencia de 0.1 Hz más una señal constante de 70 píxeles. Así, podrán tenerse dos posiciones fijas en el espacio de trabajo que el robot tendrá que alcanzar. El filtro lineal

$$G(s) = \frac{20}{s + 20} \quad (4.1)$$

filtra las señales de referencia y sirve para suavizar sus bordes y evitar así sobreimpulsos en las señales de control. Las leyes de control son implementadas utilizando diagramas de bloques en Simulink usando el método numérico ODE 45 Domain-Price. En las leyes de control con estimación de velocidad se implementa un filtro lineal pasa-altas alimentado con la señal de error de posición imagen $\tilde{\mathbf{X}}_i$, el cual tiene como función de transferencia

$$G_d(s) = \frac{400s}{s + 400}. \quad (4.2)$$

Por otro lado, la acción integral de la ley de control PID fue implementada con un integrador de tiempo discreto usando el método de integración trapezoidal con el periodo de muestreo igual al del sistema de visión de 3ms y con una entrada de reinicio (reset) de tipo "nivel"; esta señal activa al integrador cuando se emplean leyes de control con acción integral.

Los valores en las ganancias para cada una de las leyes de control se obtuvieron mediante un proceso de sintonización de la siguiente forma: Se aumentó la ganancia en la acción proporcional a un valor suficientemente grande hasta observar sobretiros y oscilaciones en el posicionamiento del órgano terminal; posteriormente se aumentó la ganancia en la acción derivativa para eliminar los sobretiros y oscilaciones al alcanzar el estado estacionario. Este procedimiento se repitió hasta observar un posicionamiento sin sobretiros y con un error en estado estacionario razonablemente pequeño; finalmente se incrementó la ganancia en la acción integral (en su caso) para reducir o bien, eliminar el error en estado estacionario.

4.2. Resultados experimentales de la ley de control IB-VS PD empleando un estimado de la velocidad

4.2.1. Resultados experimentales considerando una matriz Jacobiana conocida sin incertidumbre

Se presentan los datos obtenidos en forma gráfica correspondientes al algoritmo de control proporcional derivativo determinado por las expresiones (3.19) y (3.20). El método propuesto en [62] estima la velocidad con un filtro lineal pasa altas, cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{bs}{s+b} \quad (4.3)$$

donde b es un parámetro que permite variar el ancho de banda del filtro. El filtro propuesto en (3.20) es una descripción a conveniencia para realizar el análisis de estabilidad de la ley de control (3.19), y ésta tiene como función de transferencia

$$G_{\xi}(s) = \frac{\alpha^2 s}{s+2\alpha}. \quad (4.4)$$

En la implementación práctica se usa el filtro (4.2) que tiene la estructura descrita por (4.3). Entonces, multiplicando la parametrización de la ganancia derivativa de la ley de control (3.19) por la función de transferencia $G_{\xi}(s)$, se obtiene el siguiente desarrollo que relaciona el filtro (4.4) con el filtro (4.2)

$$\alpha^2 k_2 G_{\xi}(s) = \alpha^2 k_2 \left(\frac{\alpha^2 s}{s+2\alpha} \right) = \frac{\alpha^3 k_2}{2} \left(\frac{2\alpha s}{s+2\alpha} \right) = \frac{\alpha^3 k_2}{2} \left(\frac{bs}{s+b} \right) = \alpha^2 k'_2 G(s),$$

con $k'_2 = \frac{\alpha k_2}{2}$. El valor usado en las pruebas fue $b = 2\alpha = 400$. Las ganancias obtenidas de la sintonización para la ley de control fueron: $\alpha^2 k_1 = 118.5$ y $\alpha^2 k_2 = 3.94$. De estos valores se obtienen los parámetros $\alpha = 200$, $k_1 = 2.9625 \times 10^{-3}$ y $k'_2 = 98.5 \times 10^{-6}$.

El comportamiento del posicionamiento se presenta en las gráficas dadas por las figuras 4.3 y 4.4. Se usarán $\mathbf{X}_i \uparrow$ y $\mathbf{X}_i \downarrow$ para denotar el movimiento del órgano terminal dentro de la frontera del espacio de trabajo permitida denotada por $\bar{\Omega}$. Estas notaciones serán empleadas en las figuras que ilustren el posicionamiento del órgano terminal como la figura 4.3.

El error de posición imagen correspondiente se muestra en la figura 4.5, cuyos valores se reportan en la tabla 4.1. Para cuantificar de manera precisa el desempeño del controlador se establece sobre esta tabla de error; una media aritmética de los valores absolutos de los errores reportados en la tabla. La media aritmética para cada una de las componentes del error en posición imagen se definen como

$$\bar{x}_i = \frac{1}{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{K}} |\tilde{x}_{i_j}| \quad (4.5)$$

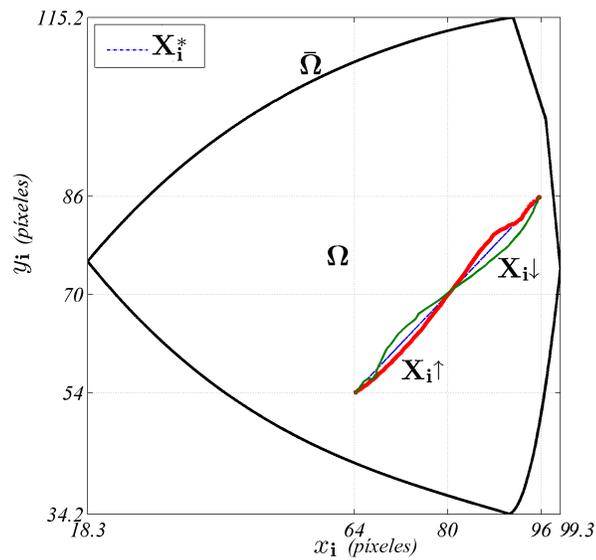


Figura 4.3: Desplazamiento del órgano terminal con la ley control IBVS PD usando un estimado de la velocidad.

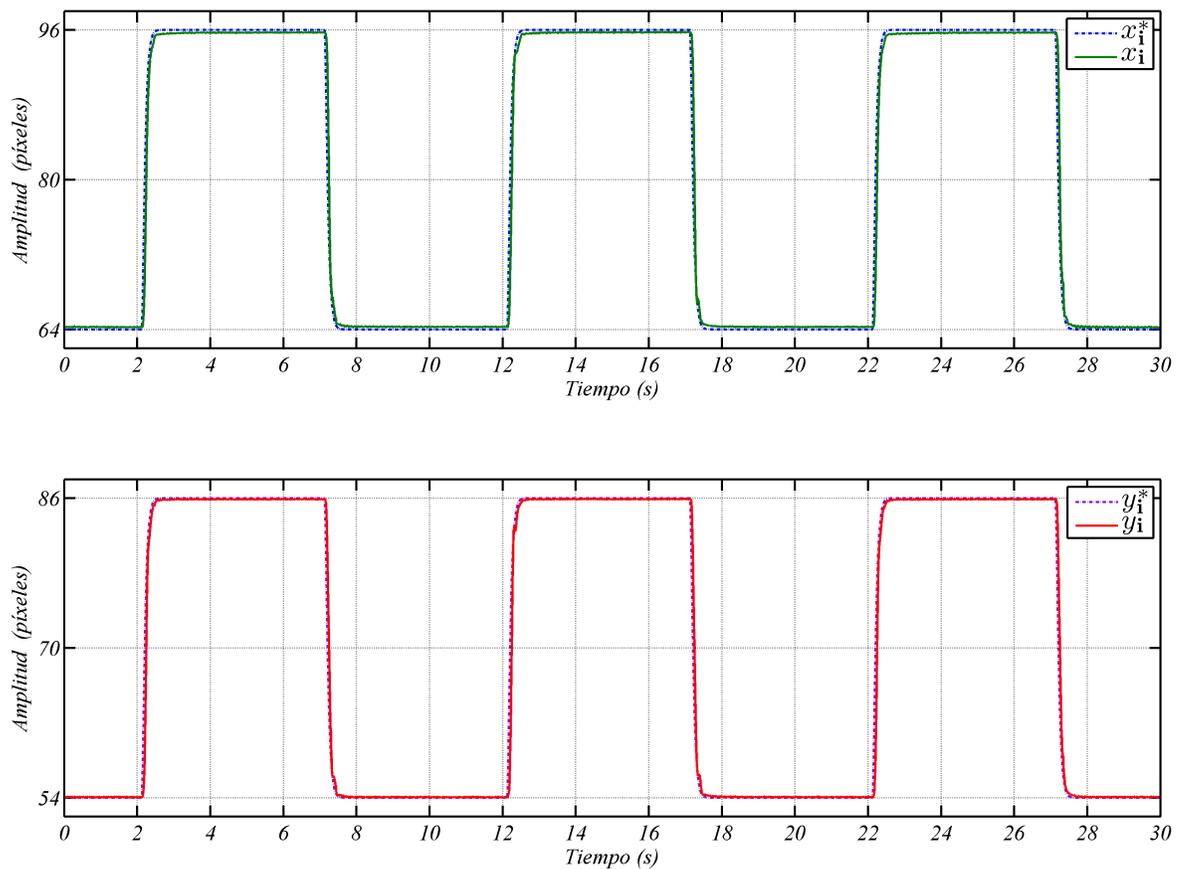


Figura 4.4: Respuesta del sistema en lazo cerrado con la ley control IBVS PD usando un estimado de la velocidad.

$$\bar{\tilde{y}}_i = \frac{1}{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{K}} |\tilde{y}_{i_j}| \quad (4.6)$$

donde \mathcal{K} es el número total de valores por columna en la tabla y \tilde{x}_{i_j} o \tilde{y}_{i_j} será el error correspondiente al j -ésimo renglon. Las expresiones (4.5) y (4.6) servirán también para determinar el promedio de los errores en las subsiguientes tablas.

Tiempo (s)	\tilde{x}_i (píxeles)	\tilde{y}_i (píxeles)
2	-0.240	-0.040
4	0.340	0.140
6	0.300	0.180
8	-0.220	-0.100
10	-0.296	0.080
12	-0.240	0.047
14	0.297	0.054
16	0.310	-0.086
18	-0.240	-0.113
20	-0.245	-0.063
22	-0.200	-0.022
24	0.320	0.200
26	0.340	0.130
28	-0.157	-0.067
30	-0.220	-0.062
Promedio valor absoluto	0.2639	0.0922

Tabla 4.1: Valores del error de posición imagen con la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad.

Estos resultados muestran que el controlador tiene un buen desempeño sin presentar oscilaciones al alcanzar el estado estacionario, se observa además que el error en su componente \tilde{x}_i no supera el valor de 0.4 píxeles y la componente \tilde{y}_i presenta el error más aproximado a cero. También se observa que al moverse el órgano terminal a la posición (96,86), que es la más cercana a la frontera del espacio de trabajo, el error es ligeramente mayor. Esto se debe a que el robot alcanza una configuración donde uno de sus brazos está cerca de una singularidad. La señales de control para las articulaciones activas se muestran en la figura 4.6. Notar que éstas no rebasan el valor de 10v, el cual corresponde al valor máximo de voltaje de salida de los convertidores digital-analógicos de la tarjeta de adquisición de datos.

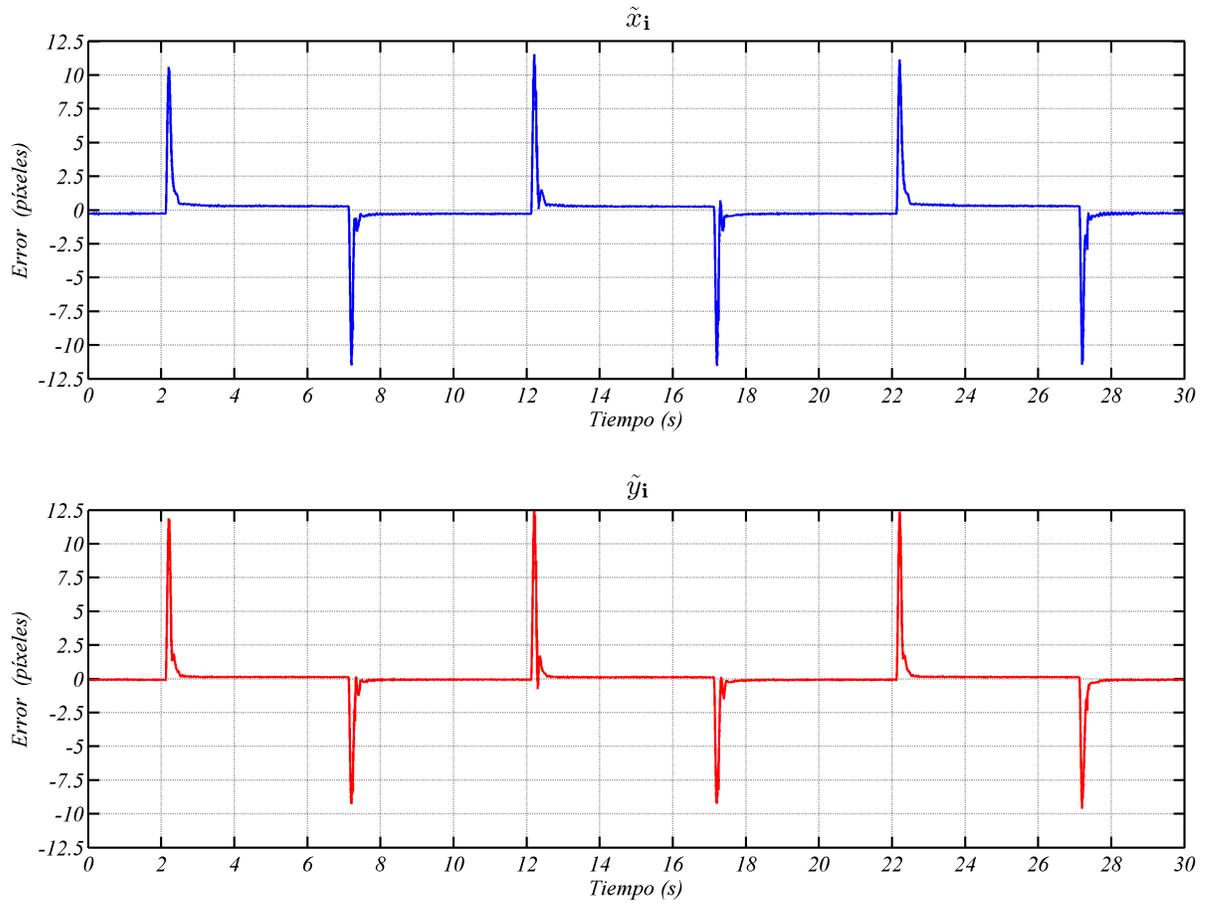


Figura 4.5: Error de posición imagen con la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad

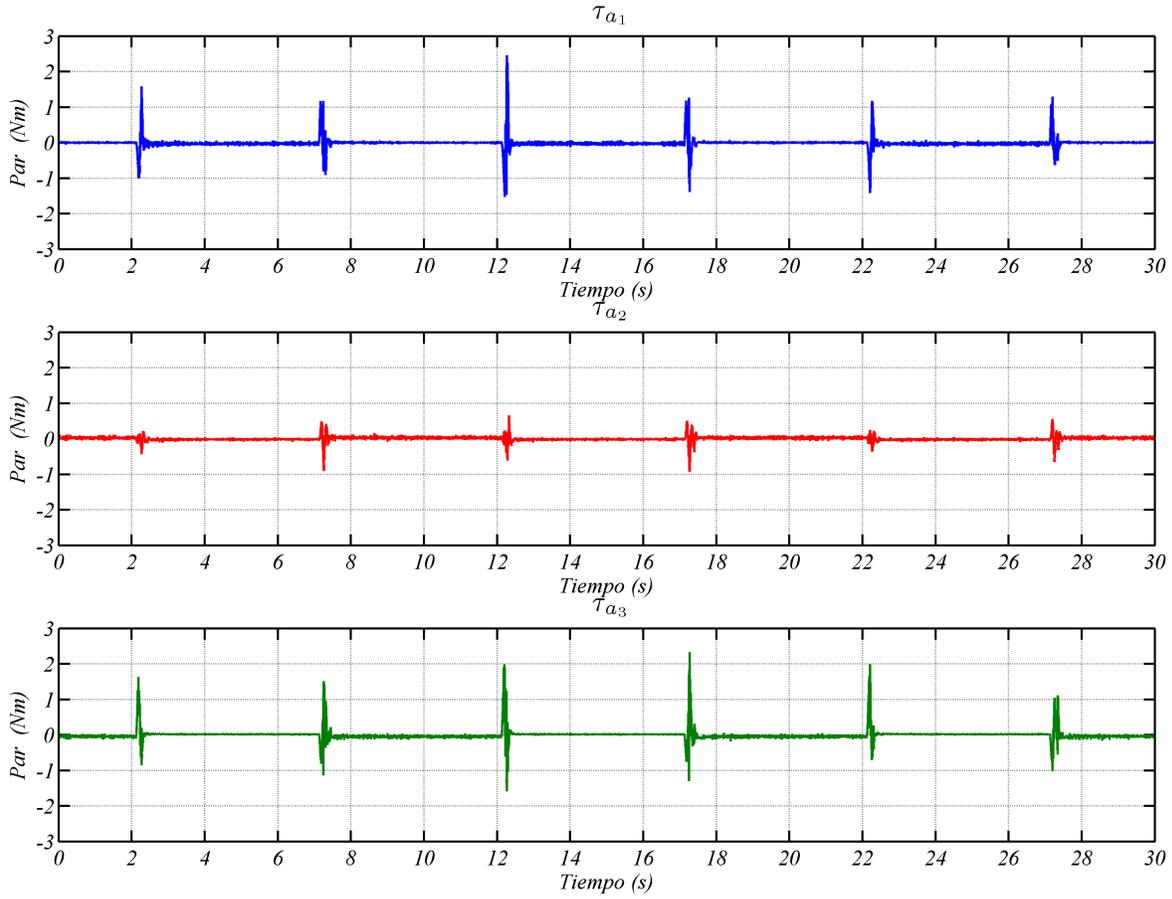


Figura 4.6: Pares de control en las articulaciones activas para la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad.

4.2.2. Resultados experimentales considerando incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S}

Como opciones para obtener una matriz Jacobiana incierta y poder calcular su correspondiente matriz pseudo-inversa $(\hat{\mathbf{S}}^T)^+$ se introdujo un error en los ángulos de las articulaciones y un valor menor de la longitud nominal de los eslabones. Introduciendo primero errores aleatorios en los ángulos de las articulaciones con valores $\pm 2^\circ$ y $\pm 4^\circ$, los valores de la cota para la desigualdad

$$\left\| \mathbf{s}^T (\hat{\mathbf{S}}^T)^+ - \mathbf{I} \right\| \leq \rho$$

fueron $\rho = \{ 0.098, 0.1131, 0.1127, 0.1507, 0.1425, 0.18, 0.115, 0.1225 \}$.

Considerando después la longitud de los eslabones $\hat{L} = 12$ cm, la cota fue de $\rho = 0.2$. Además, el comportamiento considerando ambas situaciones mostraba resultados no muy

distintos al solo modificar la longitud de los eslabones. Por lo tanto, al observar que la incertidumbre es mayor modificando únicamente el valor de la longitud de los eslabones se muestran los resultados considerando esa situación a lo largo de la tesis. La matriz Jacobiana incierta $\hat{\mathbf{S}}$ estará definida como

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_1 + \alpha_1)}{\hat{L} \sin \alpha_1} & \frac{\sin(\theta_1 + \alpha_1)}{\hat{L} \sin \alpha_1} \\ \frac{\cos(\theta_2 + \alpha_2)}{\hat{L} \sin \alpha_2} & \frac{\sin(\theta_2 + \alpha_2)}{\hat{L} \sin \alpha_2} \\ \frac{\cos(\theta_3 + \alpha_3)}{\hat{L} \sin \alpha_3} & \frac{\sin(\theta_3 + \alpha_3)}{\hat{L} \sin \alpha_3} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Conservando los valores de sintonización utilizados en la subsección 4.2.1 se observa el efecto de la matriz Jacobiana incierta $\hat{\mathbf{S}}$ en el cálculo de la matriz pseudo-inversa. Las entradas de la matriz pseudo-inversa calculada se ilustra en la figura 4.7, la cual muestra el cambio de sus valores al reducir el valor de la longitud en los eslabones durante un intervalo de tiempo.

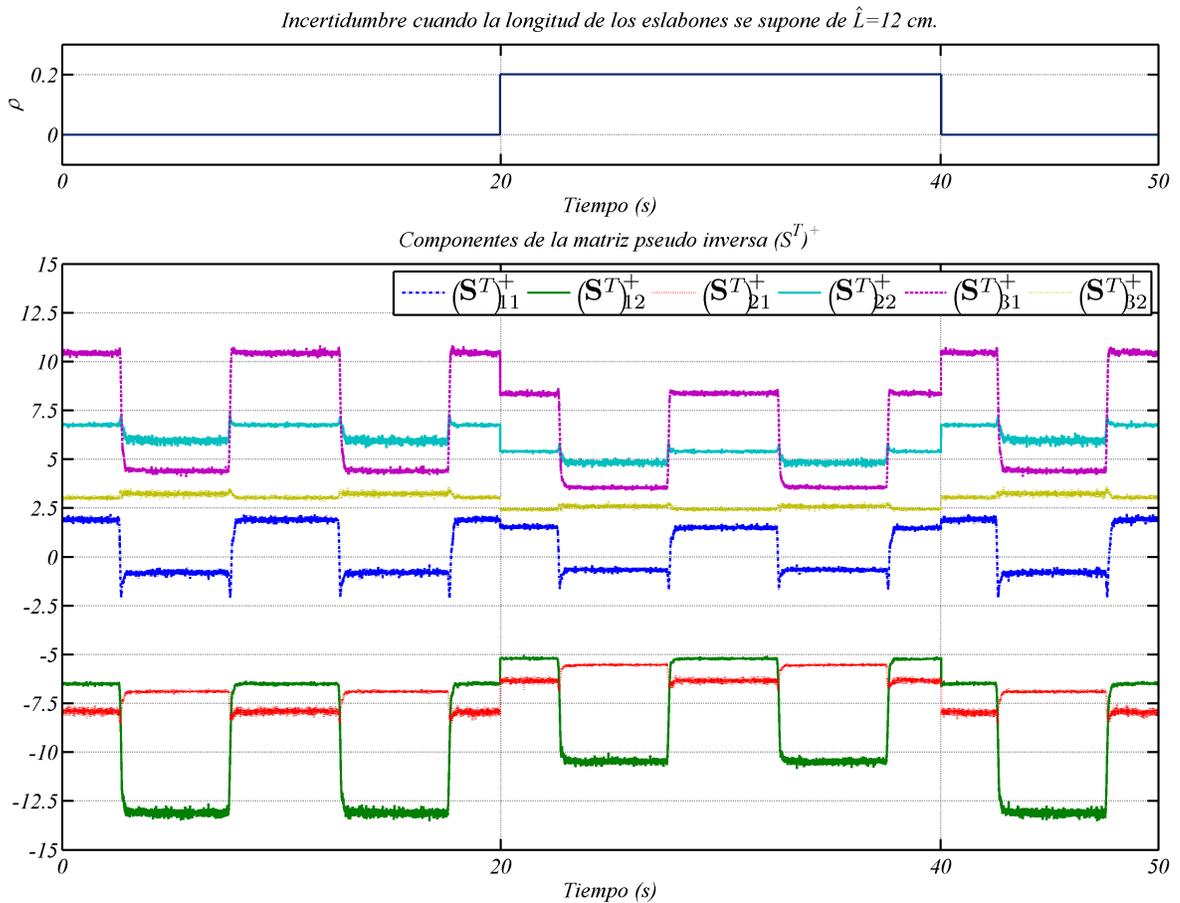


Figura 4.7: Evolución temporal de las entradas de las matrices pseudo-inversas $(\mathbf{S}^T)^+$ y $(\hat{\mathbf{S}}^T)^+$; ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad

Como se mencionó previamente, se entenderá como *incertidumbre* al cambio de la longitud en los eslabones. La figura 4.8 ilustra el comportamiento del órgano terminal para alcanzar las posiciones deseadas y el correspondiente error de posición imagen se presenta en la figura 4.9. El valor de las componentes correspondientes al error de posición imagen se dan en la tabla 4.2.

De estos resultados se observa que durante el intervalo de tiempo donde la incertidumbre está presente, el desempeño del sistema en lazo cerrado no se modifica gravemente y no se presentan oscilaciones al alcanzar las posiciones deseadas.

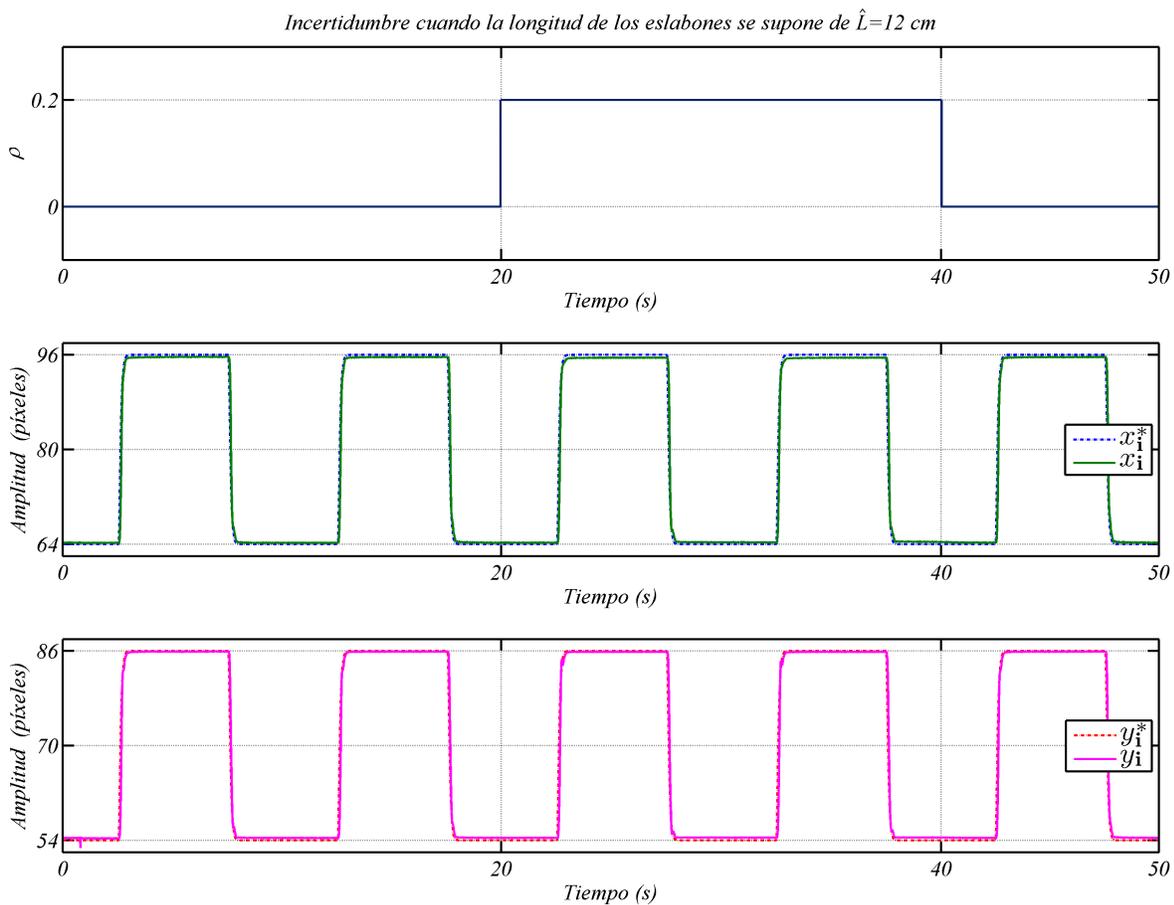


Figura 4.8: Efecto de la matriz Jacobiana \hat{S} en la respuesta del sistema en lazo cerrado con la ley de control IBVS PD usando un estimado de la velocidad.

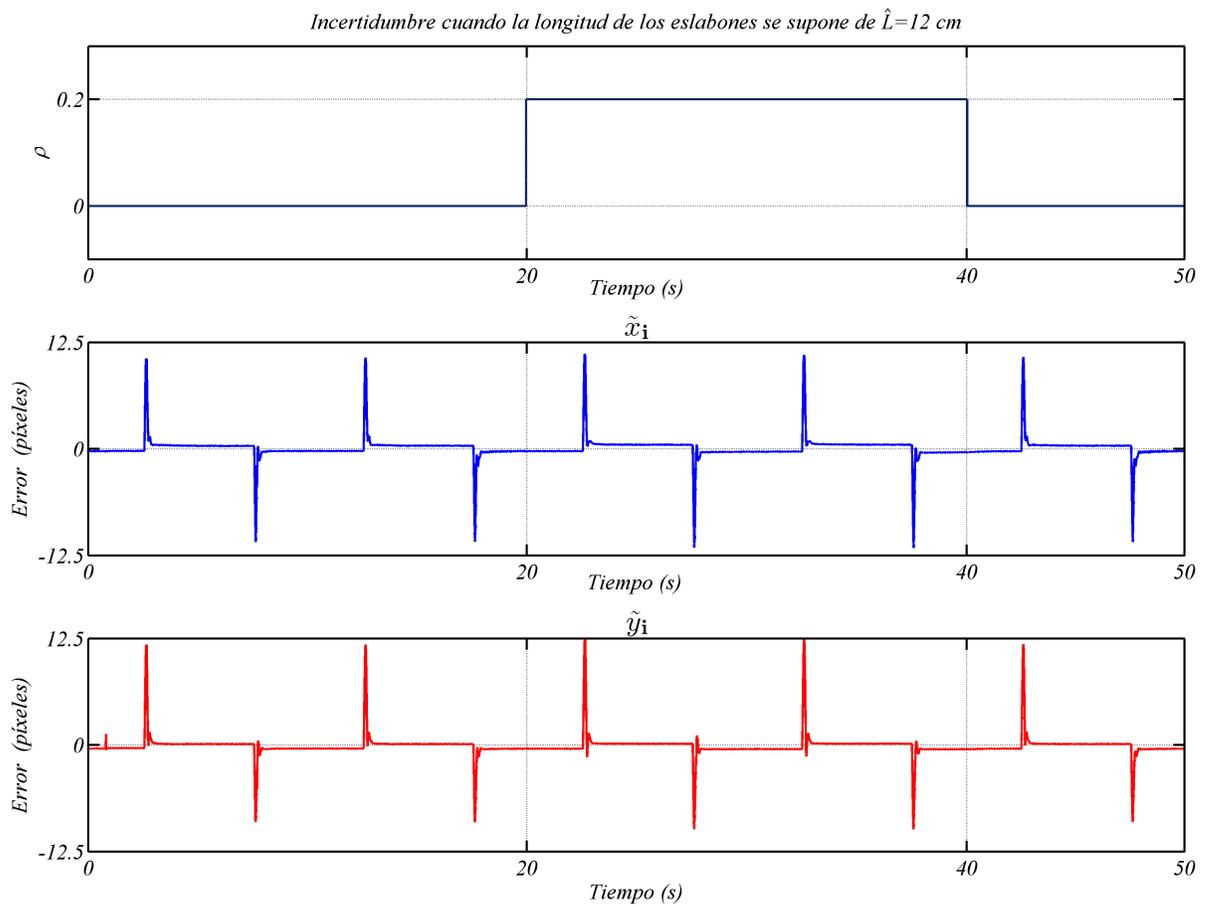


Figura 4.9: Error de posición imagen con la matriz \hat{S} en la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad.

Tiempo (s)	\tilde{x}_i (píxeles)	\tilde{y}_i (píxeles)
2.5	-0.2033	-0.3948
5.0	0.2953	0.1333
7.5	0.3090	0.1050
10.0	-0.2480	-0.4013
12.5	-0.2534	-0.4000
15.0	0.3646	0.1358
17.5	0.3660	0.1246
20.0	-0.2653	-0.4060

Promedio en valor absoluto
 $\bar{\tilde{x}}_i = 0,2881$
 $\bar{\tilde{y}}_i = 0,2626$

22.5	-0.2200	-0.4190
25.0	-0.5000	0.1990
27.5	0.4500	0.1794
30.0	-0.3400	-0.4529
32.5	-0.3100	-0.5000
35.0	0.4800	0.1726
37.5	0.4700	0.1300
40.0	-0.4305	-0.5151

Promedio en valor absoluto
 $\bar{\tilde{x}}_i = 0,4000$
 $\bar{\tilde{y}}_i = 0,3210$

42.5	-0.2600	-0.4170
45.0	-0.3543	0.1358
47.5	0.3400	0.1156
50.0	-0.2500	-0.4410

Promedio en valor absoluto
 $\bar{\tilde{x}}_i = 0,3010$
 $\bar{\tilde{y}}_i = 0,2773$

Intervalo de tiempo cuando se presenta la incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S}

Tabla 4.2: Valores del error de posición imagen usando la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad y con la matriz Jacobiana $\hat{\mathbf{S}}$.

Durante el intervalo de tiempo en donde la incertidumbre de la matriz Jacobiana se presenta; las componentes del error toman valores mayores a los correspondientes cuando la incertidumbre no se presenta. Esto se corrobora observando los valores promedio de las componentes en los intervalos de tiempo presentados. Por otro lado, el efecto de la incertidumbre en los pares de control se ilustra en la figura 4.10, donde se observa que éstos disminuyen en su magnitud para realizar el movimiento entre posiciones deseadas durante el intervalo de tiempo que la incertidumbre está presente; ésto ilustra el hecho de que la ganancia del sistema en lazo cerrado depende de la estimación de la matriz Jacobiana.

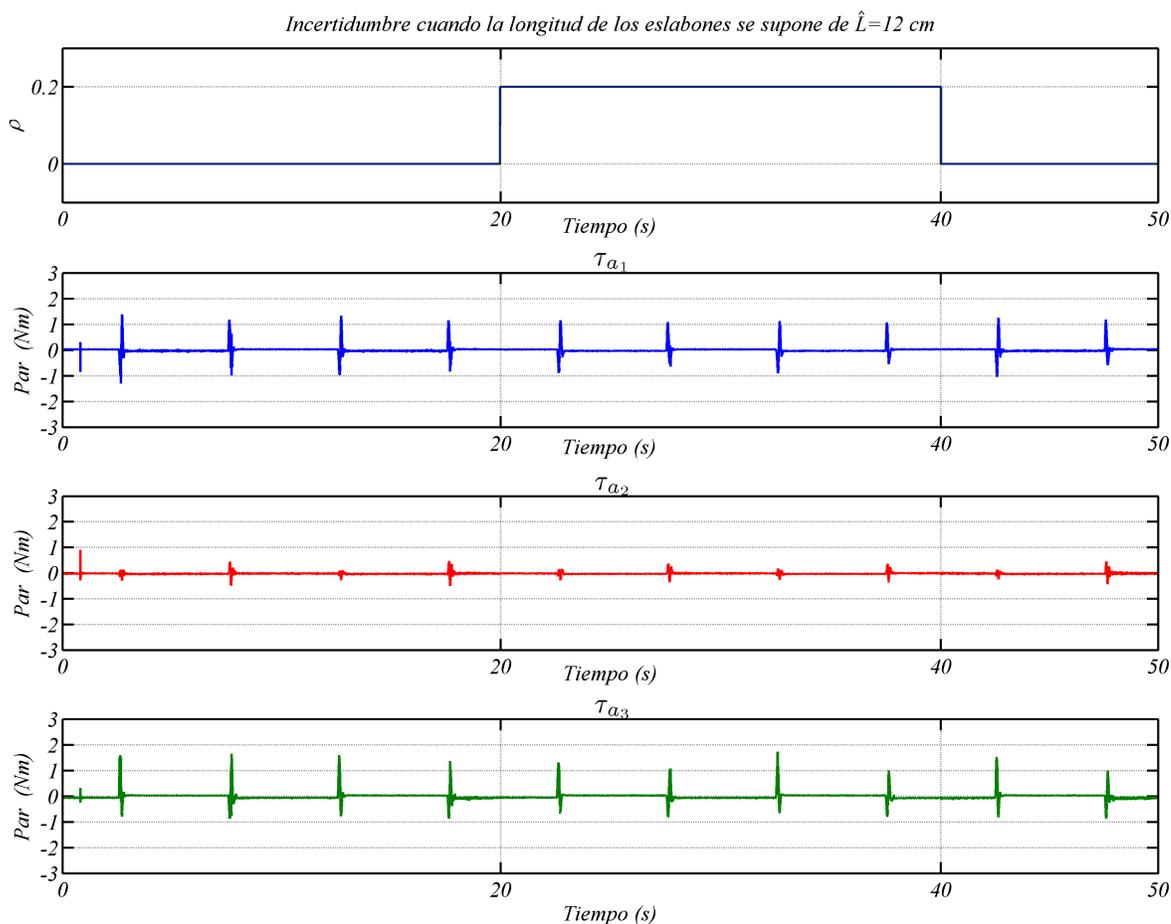


Figura 4.10: Pares de control en las articulaciones activas de la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad y con una matriz Jacobiana incierta $\hat{\mathbf{S}}$.

4.3. Experimentos correspondientes a la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad

En esta sección se presentan los datos obtenidos en forma gráfica correspondientes al algoritmo de control proporcional integral derivativo determinado por las expresiones (3.36) y (3.37).

Las ganancias para la ley de control obtenidas de la sintonización fueron:

$$\begin{aligned}\alpha^2 (\alpha k_a + k_b) &= 118, \\ \alpha^2 k_a &= 3,8, \\ \alpha^2 k_b &= 32,\end{aligned}$$

de las cuales se obtienen los parámetros $\alpha = 22.6315$, $k_a = 7.42 \times 10^{-3}$ y $k_b = 62.477 \times 10^{-3}$.

El comportamiento de posicionamiento del órgano terminal se muestra en la figura 4.11, la respuesta del sistema en lazo cerrado se presenta en la figura 4.12. El error de posición imagen correspondiente se ilustra en la figura 4.13 y valores de las componentes del error imagen se reportan en la Tabla 4.3. Los pares de control de las articulaciones activas correspondientes a esta ley de control se muestran en la figura 4.14.

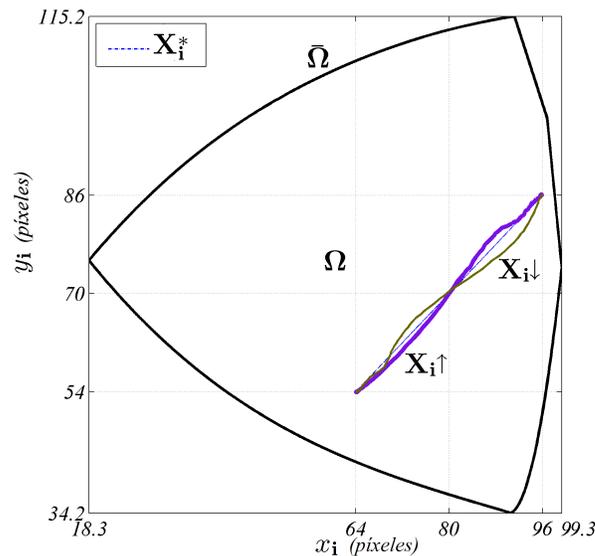


Figura 4.11: Desplazamiento del órgano terminal con la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad.

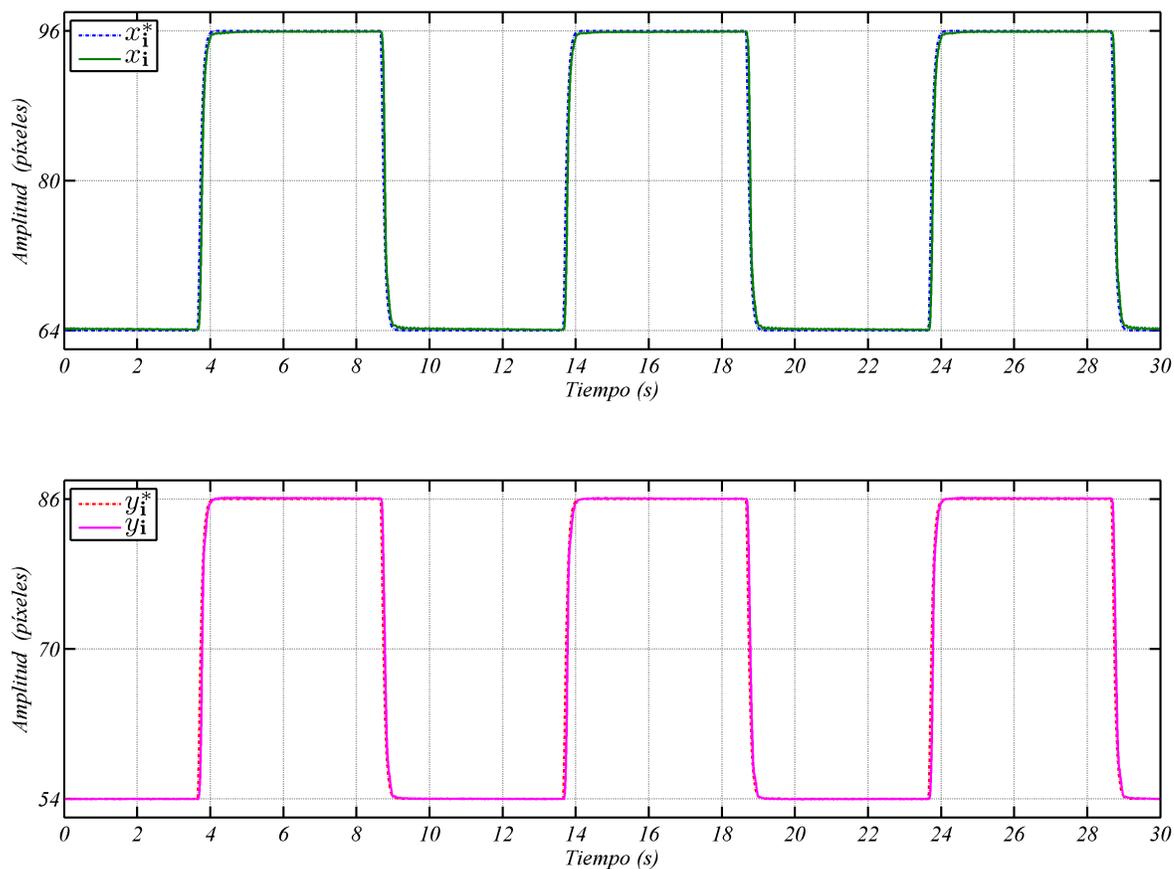


Figura 4.12: Respuesta del sistema en lazo cerrado con la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad.

Tiempo (s)	\tilde{x}_i (píxeles)	\tilde{y}_i (píxeles)
2	-0.1314	-0.0023
6	0.1123	-0.0603
8	-0.1105	-0.0900
10	-0.1800	0.0117
12	-0.0960	0.0273
16	0.1100	-0.0400
18	0.0920	-0.0250
20	-0.1860	0.0260
22	-0.0680	0.0620
26	0.0920	-0.0648
28	0.0520	-0.0534
30	-0.1800	0.0065
Promedio en valor absoluto	0.1175	0.0390

Tabla 4.3: Valores del error de posición imagen para la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad.

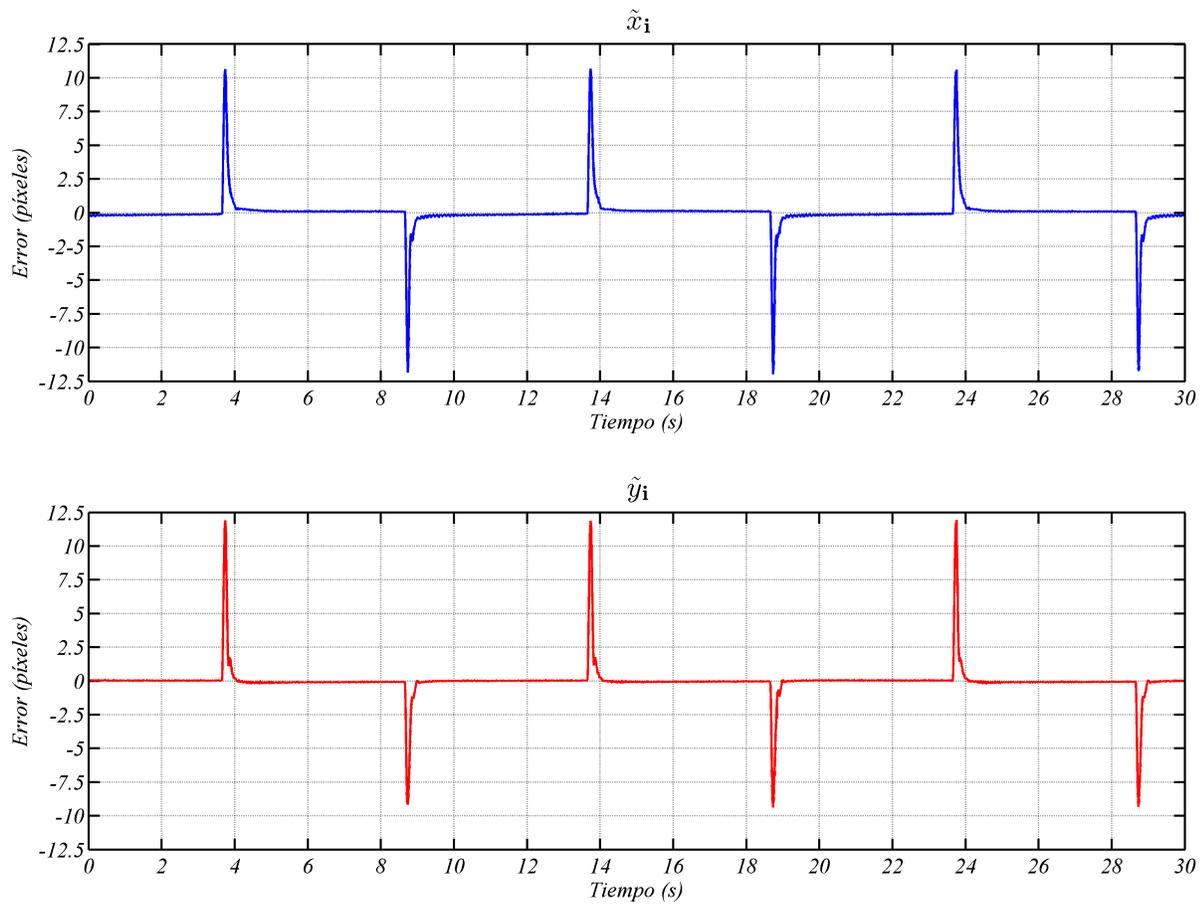


Figura 4.13: Error de posición imagen con la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad.

Estos resultados muestran un desempeño del sistema en lazo cerrado mejor al realizado con el control visual PD. El efecto de la acción integral reduce el error en estado estacionario; ésto se observa de los valores promedio reportados en la tabla 4.3 que muestran reducciones menores a la mitad del error imagen promedio en su componente \tilde{x}_i y a un tercio el error imagen promedio en su componente \tilde{y}_i de los mostrados en la tabla 4.1. Además, los pares de control tienen una magnitud menor durante el desplazamiento del órgano terminal. Por otro lado, el inconveniente de posicionar el órgano terminal cerca de la frontera del espacio de trabajo del robot no se manifiesta significativamente usando la ley de control visual PID.

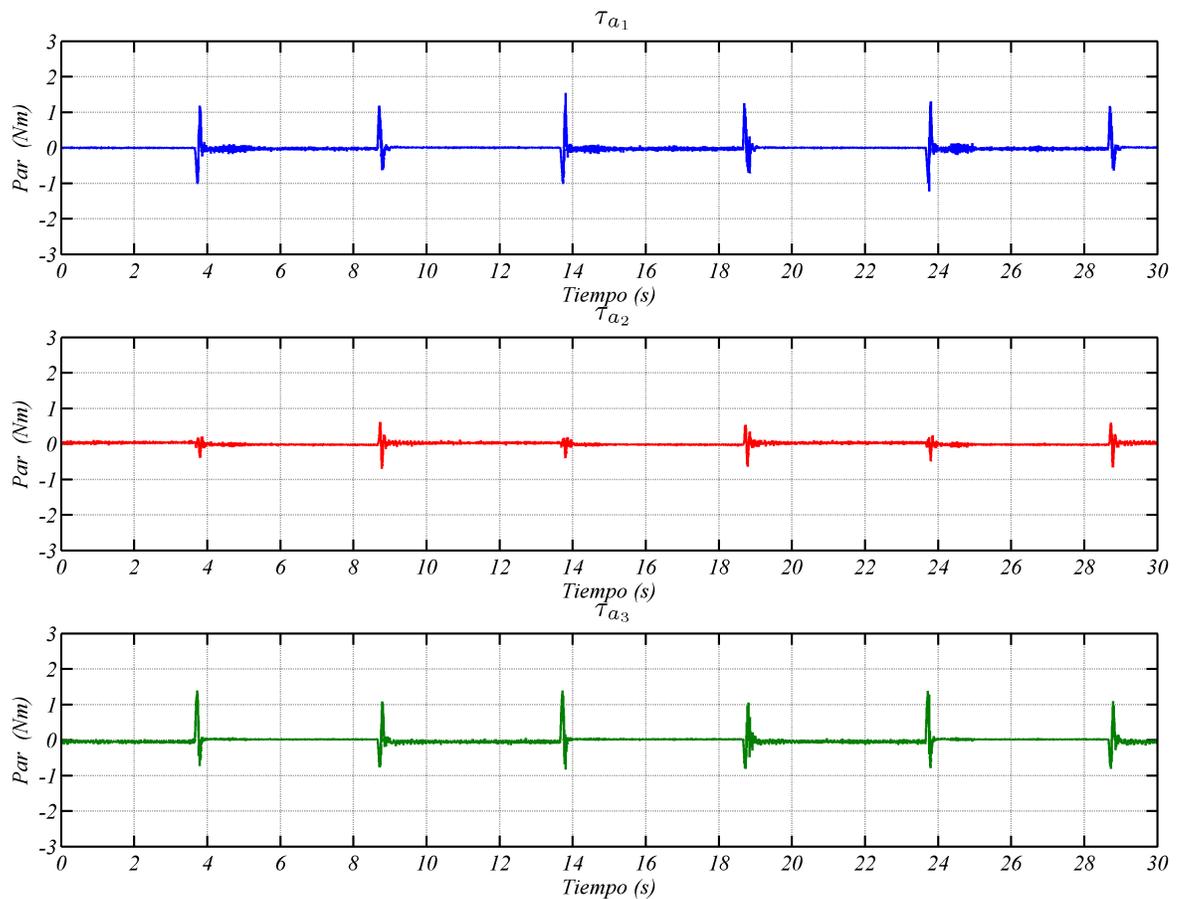


Figura 4.14: Pares de control correspondientes a las articulaciones activas de la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad.

4.3.1. Resultados experimentales de la ley de control IBVS PID usando un estimado de la velocidad y con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta

Considerando la incertidumbre generada al usar un valor menor al nominal en la longitud de los eslabones, las pruebas experimentales se desarrollan conservando los valores de sintonización de las ganancias usadas en la subsección anterior. La figura 4.15 muestra las componentes de la matriz pseudo-inversa $(\mathbf{S}^T)^+$ donde en un intervalo de tiempo; las componentes corresponden a la matriz pseudo-inversa $(\hat{\mathbf{S}}^T)^+$, esto es, cuando la incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S} se presenta.

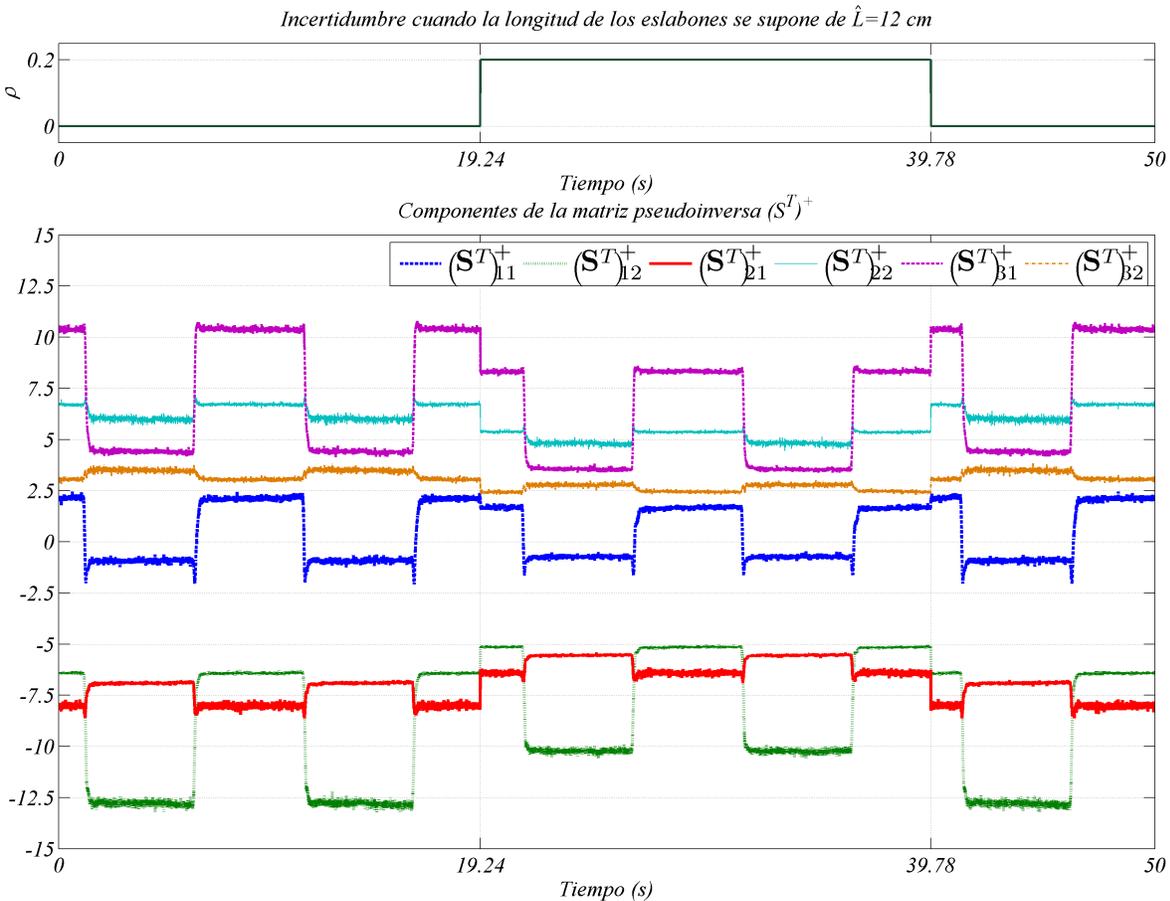


Figura 4.15: Comportamiento de las componentes de la matriz pseudoinversa $(\mathbf{S}^T)^+$ cuando se presenta incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S} .

En esta gráfica puede observarse que las componentes de la matriz pseudo-inversa $(\hat{\mathbf{S}}^T)^+$ son menores en magnitud respecto a las componentes de la matriz pseudo-inversa $(\mathbf{S}^T)^+$.

El conjunto de resultados experimentales del sistema en lazo cerrado con la ley de control (3.36) ilustra el comportamiento del sistema en lazo cerrado en la figura 4.16. El error de posición imagen correspondiente se presenta en la figura 4.17 y los valores correspondientes al error imagen se reportan en la tabla 4.4. Para hacer una comparación del comportamiento, el conjunto de resultados mencionados mostrará el intervalo de tiempo donde la incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S} se manifiesta.

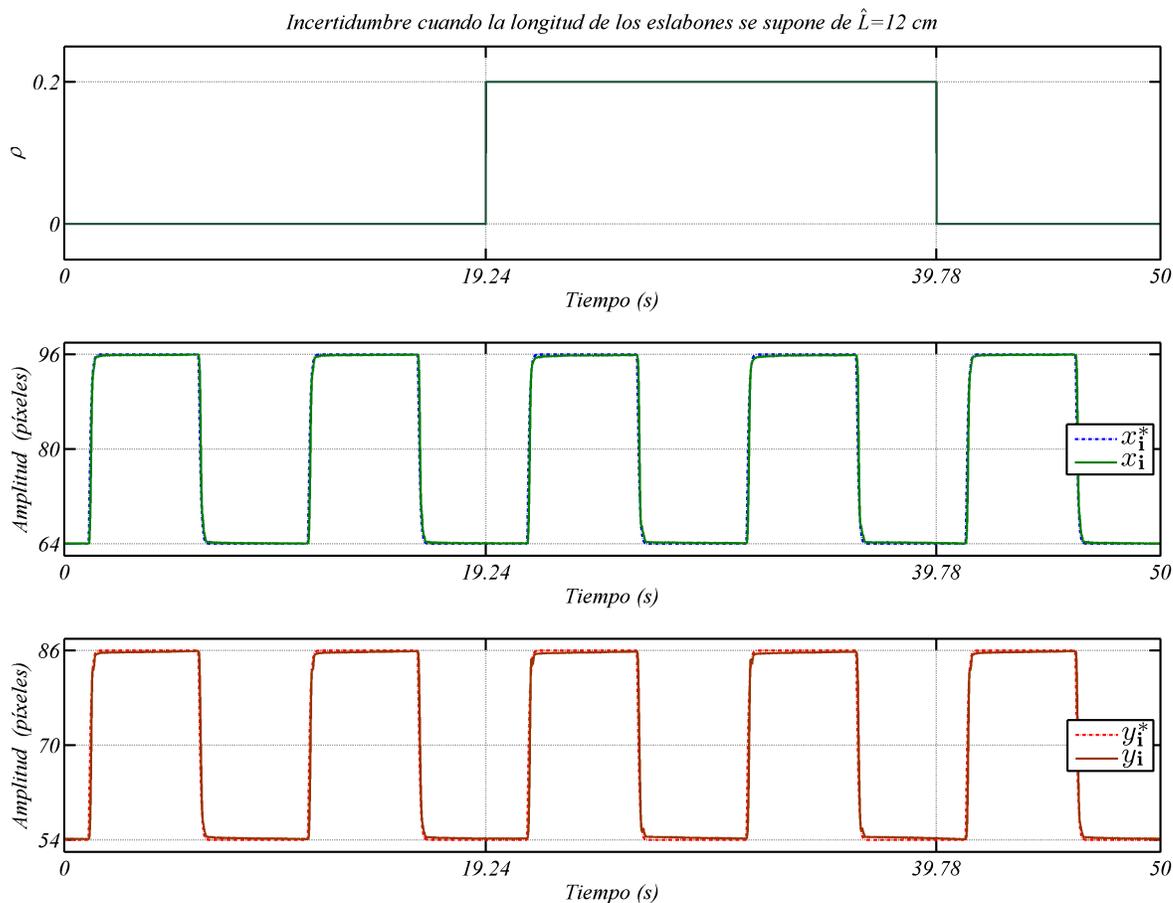


Figura 4.16: Respuesta del sistema en lazo cerrado con la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad y con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta.

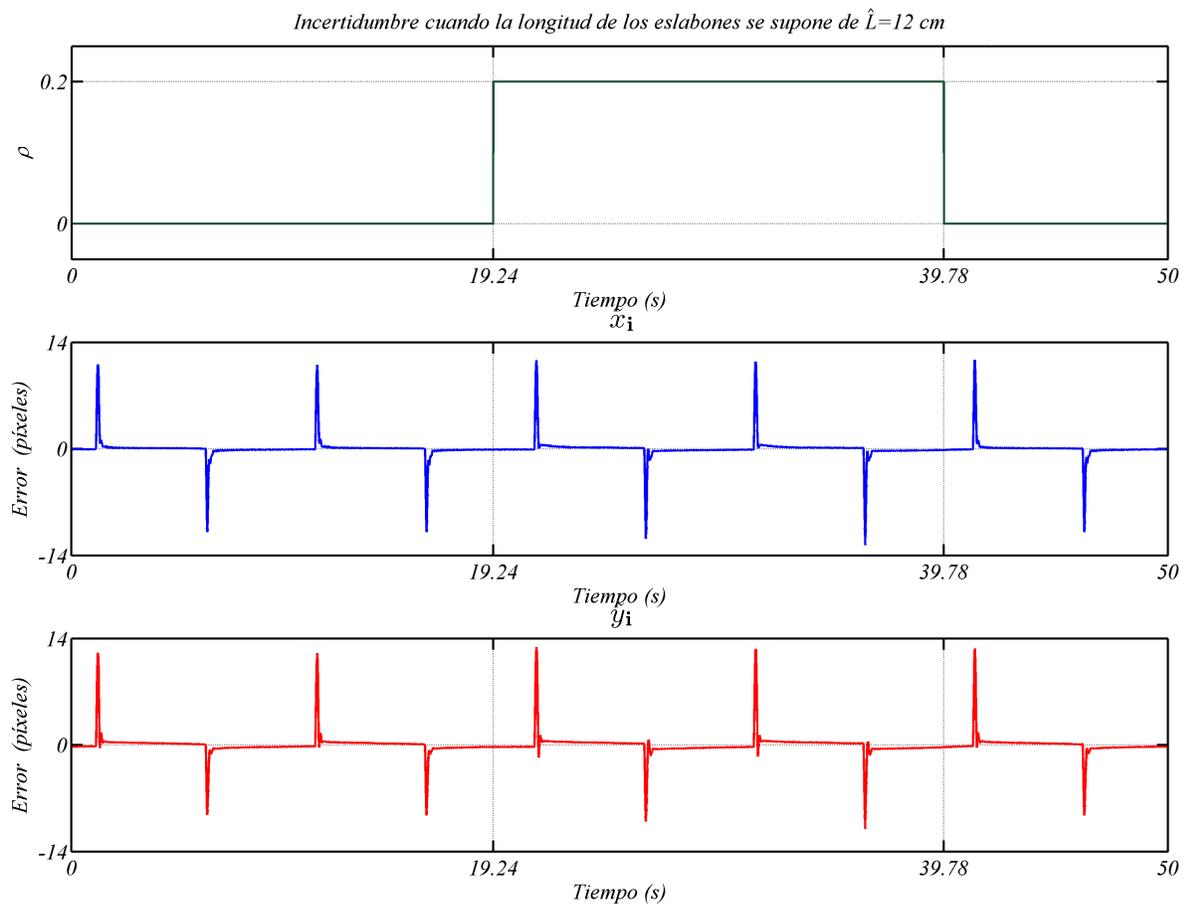


Figura 4.17: Error de posición imagen para la ley de control IBVS PID usando un estimado de la velocidad y con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta.

	Tiempo (s)	\tilde{x}_i (píxeles)	\tilde{y}_i (píxeles)	
	2.5	0.1288	0.3388	
	5.0	0.0934	0.1847	
	7.5	-0.1117	-0.3580	Promedio en valor absoluto $\bar{\tilde{x}}_i = 0,1039$ $\bar{\tilde{y}}_i = 0,2749$
	10.0	-0.0893	-0.2231	
	12.5	0.1288	0.3133	
	15.0	0.0639	0.1847	
	17.5	-0.1117	-0.3222	
	20.0	-0.0893	-0.2417	
	22.5	0.2576	0.4000	
	25.0	0.1127	-0.2146	
Intervalo de tiempo cuando se presenta la incertidumbre en la matriz Jacobiana S	27.5	-0.1851	-0.4843	Promedio en valor absoluto $\bar{\tilde{x}}_i = 0,1738$ $\bar{\tilde{y}}_i = 0,3498$
	30.0	-0.1407	-0.2694	
	32.5	0.2299	0.4797	
	35.0	0.1740	0.2394	
	37.5	-0.2011	-0.4693	
	40.0	-0.1277	-0.2383	
	42.5	0.1104	0.3475	
	45.0	0.0918	0.1847	
	47.5	-0.0794	-0.3136	Promedio en valor absoluto $\bar{\tilde{x}}_i = 0,0957$ $\bar{\tilde{y}}_i = 0,2576$
	50.0	-0.0692	-0.2043	

Tabla 4.4: Valores del error de posición imagen para la ley de control IBVS PID empleando un estimado de la velocidad y con matriz Jacobiana **S** incierta

De los resultados mostrados en las figuras 4.16 y 4.17 se observan comportamientos muy similares a los presentados en las figuras 4.12 y 4.13 cuando no hay incertidumbre. Se presentan pequeños incrementos en los valores de las componentes del error de posición imagen (ver figura 4.17 y tabla 4.4) durante el intervalo de tiempo en el que la incertidumbre de la matriz Jacobiana está presente; sugiriendo que la incertidumbre generada por un valor en la longitud de los eslabones ligeramente distinto al nominal, no afecta significativamente el comportamiento del sistema en lazo cerrado. Finalmente, los pares de control de las articulaciones activas disminuyen en magnitud durante el intervalo de tiempo cuando la incertidumbre está presente, ésto se muestra en la figura 4.18.

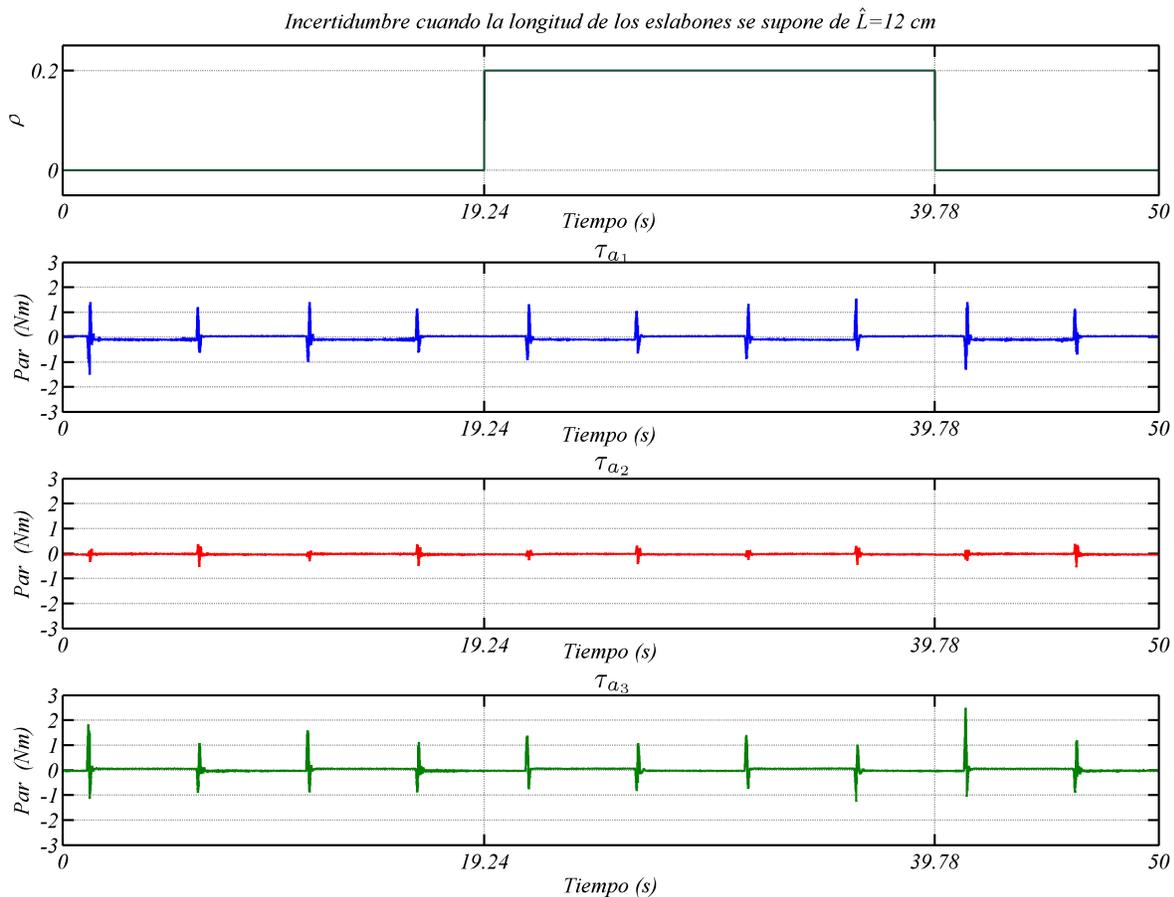


Figura 4.18: Pares de control de las articulaciones activas usando la ley de control IBVS PID con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta

4.4. Comentarios

Los experimentos realizados en un prototipo de laboratorio muestran un buen comportamiento de los controladores estudiados. De estos resultados se comprueba que un controlador PID es una alternativa viable al controlador PD para reducir el error de posicionamiento en el estado estacionario. Esto debido a que la acción integral mejora el desempeño de la ley de control PD.

Tanto para el controlador PD como para el controlador PID se describieron dos conjuntos de pruebas experimentales. El primer conjunto muestra el desempeño del sistema en lazo sin considerar incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S} . Se cuantifica el desempeño de ambos controladores usando una media aritmética de los valores absolutos de los errores reportados en las tablas 4.1 y 4.3. Con los valores promedio obtenidos se corrobora lo mencionado en el párrafo anterior. Además, respecto a las señales de control de las articulaciones activas se observa que utilizar este tipo de controladores visuales para regular la posición no satura los motores, y con este hecho se obtendrá una mayor vida útil para los mismos.

En el segundo conjunto de experimentos se observa el comportamiento de las leyes de control con incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S} . El desempeño de los controladores PD y PID se ve mermado ligeramente por la presencia de la incertidumbre. Esto es patente al observar los promedios presentados por intervalos de tiempo en las tablas 4.2 y 4.4. Por otra parte, estas leyes de control son robustas ante la incertidumbre en \mathbf{S} pues el comportamiento del sistema en lazo cerrado permanece estable, pero no son capaces de compensar sus efectos manifestados como un incremento del error en estado estacionario. Con esto último se ilustra el hecho de que la ganancia del sistema en lazo cerrado depende del valor estimado de la matriz Jacobiana.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Este trabajo de tesis ha presentado resultados teóricos y experimentales correspondientes a algoritmos de control visual PD y PID enfocados a resolver el problema de regulación de posición de robots paralelos planos. Considerar el esquema de control basado en imagen bajo la configuración cámara fija permite realizar el control directamente a nivel visual, obteniéndose la posición del órgano terminal en coordenadas imagen y cerrando el lazo de control sin necesidad de calibrar el sistema de visión, y además evitando el uso de la cinemática directa.

Los controladores presentados usan solamente mediciones de posición proporcionadas por el sistema de visión y por los sensores en las articulaciones, diferenciándose de otros controladores visuales de robots paralelos que requieren de las mediciones de velocidad. Los algoritmos de control PD y PID estudiados toman en cuenta dos casos: El uso de estimados de velocidad obtenidos con un filtro lineal pasa-altas alimentado con el error imagen rotado, y la existencia de incertidumbre en la matriz Jacobiana del robot.

En comparación con otros trabajos de control visual de robots paralelos, aquí se presentan análisis de estabilidad de los sistemas en lazo cerrado. Estos usan el segundo método de estabilidad de Lyapunov lo que permite asegurar estabilidad asintótica empleando funciones estrictas de Lyapunov, y sin necesidad de usar el principio de invariancia de LaSalle. Para el caso de los reguladores PD con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta, la prueba de estabilidad toma en cuenta la dinámica del robot paralelo y la incertidumbre se considera como una perturbación, la cual desaparece cuando el sistema en lazo cerrado alcanza el punto de equilibrio. Para los reguladores que usan estimados de la velocidad, la prueba de estabilidad toma en cuenta la dinámica del robot paralelo y la de los filtros que estiman la velocidad del órgano terminal. Parametrizar los controladores y las funciones de Lyapunov con un parámetro de alta ganancia α permite concluir que escogiendo un valor suficientemente grande de ese parámetro se tiene una condición suficiente de estabilidad asintótica en el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado.

Los experimentos realizados en un prototipo de laboratorio muestran buen desempeño del sistema en lazo cerrado aún presentándose incertidumbres en la matriz Jacobiana \mathbf{S} , cuando se utiliza un valor menor en la longitud de los eslabones. De estas pruebas se observa, para el control PD visual, que a pesar de que el efecto de la incertidumbre en

la respuesta del sistema en estado estacionario es casi imperceptible, el error en estado estacionario no se elimina por completo. Al agregar una acción integral al controlador PD visual se reducen los errores en estado estacionario mejorándose el desempeño del sistema en lazo cerrado. Aunque no se demuestra teóricamente, la estabilidad del sistema en lazo cerrado para el controlador PID se mantiene cuando existe incertidumbre en la matriz Jacobiana \mathbf{S} .

Puesto que no se presentó un análisis de estabilidad para las leyes de control visual PID con matriz Jacobiana incierta, se establece como trabajo futuro plantear el análisis de estabilidad de la ley de control IBVS PID con matriz Jacobiana incierta, y para la ley de control IBVS PID usando una estimación de la velocidad y considerando una matriz Jacobiana incierta.

Como el cálculo de la matriz Jacobiana requiere del uso de sensores en las articulaciones para medir sus ángulos. Esto se traduce en el uso de varios sensores y por ende un alto costo monetario. Por lo tanto, se plantea como otro punto de trabajo futuro obtener un método para estimar la matriz Jacobiana sin el uso de sensores de posición angular en todas las articulaciones. Esto puede realizarse usando el sistema de visión para determinar los ángulos que los eslabones formen, pero podría incrementarse el tiempo de procesamiento de imágenes y por ende el periodo de muestreo visual.

También se plantea como trabajo futuro extender los resultados de regulación de posición de robots paralelos al problema de seguimiento de trayectoria. Para poder realizar dicha tarea, primero se tendrán que planear trayectorias localizadas estrictamente dentro del espacio de trabajo del robot y que no generen configuraciones singulares. Como puede observarse en la figura 5.1, los controladores estudiados no aseguran el seguimiento de una trayectoria a pesar de lograr que el error de posicionamiento sea pequeño, por lo que este comportamiento transitorio podría no ser adecuado en algunas aplicaciones.

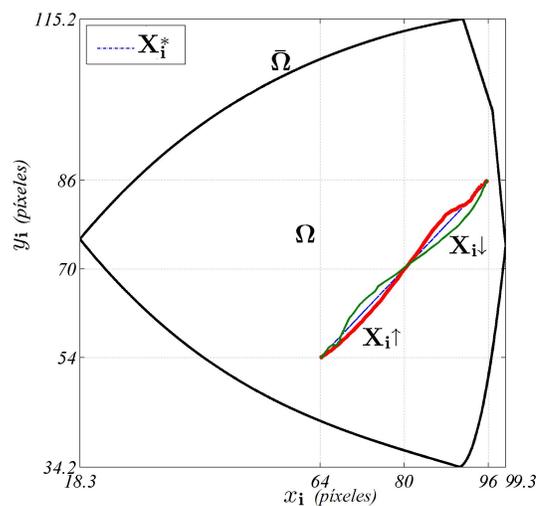


Figura 5.1: Comportamiento del sistema en lazo cerrado para posicionarse dentro del espacio de trabajo.

Parte I
Apéndices

Apéndice A

Demostración de la Proposición 1

Se denota como \mathbf{q}_e al vector de coordenadas generalizadas del mecanismo. El vector de posiciones articulares del mecanismo se define como $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{q}_p^T]^T$. Para el caso redundante, el desplazamiento virtual $\delta\mathbf{q}_a$ de las articulaciones activas está restringido. Usando las restricciones cinemáticas permite expresar \mathbf{q}_a y \mathbf{q}_p como

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_a(\mathbf{q}_e) \quad \& \quad \mathbf{q}_p = \mathbf{q}_p(\mathbf{q}_e).$$

Se derivan las expresiones anteriores para obtener

$$\delta\mathbf{q}_a = \frac{\partial\mathbf{q}_a}{\partial\mathbf{q}_e}\delta\mathbf{q}_e \quad \& \quad \delta\mathbf{q}_p = \frac{\partial\mathbf{q}_p}{\partial\mathbf{q}_e}\delta\mathbf{q}_e.$$

Estos resultados se sustituyen en las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}} - \boldsymbol{\tau} \right)^T \delta\mathbf{q} &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_a} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}_a} - \boldsymbol{\tau}_a \right)^T \delta\mathbf{q}_a \\ &+ \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_p} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}_p} - \boldsymbol{\tau}_p \right)^T \delta\mathbf{q}_p \\ &= \left[\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_a} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}_a} - \boldsymbol{\tau}_a \right)^T \frac{\partial\mathbf{q}_a}{\partial\mathbf{q}_e} \right] \delta\mathbf{q}_e \\ &+ \left[\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_p} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}_p} - \boldsymbol{\tau}_p \right)^T \frac{\partial\mathbf{q}_p}{\partial\mathbf{q}_e} \right] \delta\mathbf{q}_e. \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

La variable $\boldsymbol{\tau}_p$ es el vector de pares en las articulaciones pasivas. Ahora, debido a que \mathbf{q}_e varía libremente, la siguiente expresión se obtiene a partir de (A.1)

$$\left[\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_a} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}_a} \right)^T \quad \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_p} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}_p} \right)^T \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{q}_a}{\partial\mathbf{q}_e} \\ \frac{\partial\mathbf{q}_p}{\partial\mathbf{q}_e} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}_a^T \frac{\partial\mathbf{q}_a}{\partial\mathbf{q}_e} + \boldsymbol{\tau}_p^T \frac{\partial\mathbf{q}_p}{\partial\mathbf{q}_e}.$$

O equivalentemente

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{q}_e} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_p}{\partial \mathbf{q}_e} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}_a^T \frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{q}_e} + \boldsymbol{\tau}_p^T \frac{\partial \mathbf{q}_p}{\partial \mathbf{q}_e}. \quad (\text{A.2})$$

Al considerar cero los pares en las articulaciones pasivas se obtiene

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{q}_e} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_p}{\partial \mathbf{q}_e} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}_a^T \frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{q}_e}. \quad (\text{A.3})$$

Puesto que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

permite escribir (A.3) como

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}_a = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{q}_e} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_p}{\partial \mathbf{q}_e} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_e},$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{q}_e}.$$

Para obtener el modelo del dinámico del robot usando la relación (A.4) se utilizará como coordenada generalizada a la posición del órgano terminal, es decir, $\mathbf{q}_e = \mathbf{X}$.

Apéndice B

Definición y cálculo de la matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose

Definición La pseudo-inversa \mathbf{P}^+ [70], se define como la única matriz que cumple con las siguientes condiciones

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^+\mathbf{P} = \mathbf{P}, \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{P}^+\mathbf{P}\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^+, \quad (\text{B.2})$$

$$\left(\mathbf{P}^+\mathbf{P}\right)^T = \mathbf{P}^+\mathbf{P}, \quad (\text{B.3})$$

$$\left(\mathbf{P}\mathbf{P}^+\right)^T = \mathbf{P}\mathbf{P}^+. \quad (\text{B.4})$$

Para $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si $m < n$ y \mathbf{P} tiene rango pleno, entonces $\mathbf{P}\mathbf{P}^T$ es no singular y la pseudo-inversa puede escribirse como

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^T \left(\mathbf{P}\mathbf{P}^T\right)^{-1}, \quad (\text{B.5})$$

la cual satisface $\mathbf{P}\mathbf{P}^+ = \mathbf{I}$.

Por otra parte, si $m > n$ y el rango de \mathbf{P} es igual a n , entonces $\mathbf{P}^T\mathbf{P}$ es no singular y la matriz pseudo-inversa será

$$\mathbf{P}^+ = \left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)^{-1} \mathbf{P}^T. \quad (\text{B.6})$$

Cálculo de las matrices pseudo-inversas \mathbf{S}^+ y $(\mathbf{S}^T)^+$

La matriz Jacobiana $\mathbf{S} \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}$ definida en (2.19) tiene un rango igual a dos cuando el robot no está en una configuración singular. Por lo tanto, la pseudo-inversa de esta matriz se obtiene con la expresión (B.6), es decir

$$\mathbf{S}^+ = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T. \quad (\text{B.7})$$

Por otra parte, para la matriz transpuesta $\mathbf{S}^T \in \mathfrak{R}^{2 \times 3}$, su matriz pseudo-inversa se obtendrá mediante la expresión (B.5) en la siguiente forma

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}^T)^+ &= (\mathbf{S}^T)^T \left[\mathbf{S}^T (\mathbf{S}^T)^T \right]^{-1}, \\ &= \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Las expresiones anteriores también pueden obtenerse como sigue. Usando la relación entre las velocidades angulares de las articulaciones activas y la velocidad del órgano terminal dada por la expresión (2.18) como

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{S} \dot{\mathbf{X}}, \quad (\text{B.9})$$

se premultiplican ambos lados de (B.9) con la matriz transpuesta \mathbf{S}^T para obtenerse

$$\mathbf{S}^T \dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{S}^T \mathbf{S} \dot{\mathbf{X}}. \quad (\text{B.10})$$

Posteriormente, considerando no singular el producto $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$, se pre-multiplica la inversa $(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1}$ en ambos lados de (B.10) para obtener finalmente

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{q}}_a = \dot{\mathbf{X}}, \quad (\text{B.11})$$

donde $(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T$ es la matriz pseudo-inversa obtenida en (B.7) por la definición (B.6). Con este último hecho podemos obtener la matriz pseudo-inversa (B.8) de la transpuesta de la matriz pseudo-inversa $(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T$, es decir;

$$\begin{aligned} \left[(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \right]^T &= \mathbf{S} \left[(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \right]^T = \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-T} \\ &= \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} = (\mathbf{S}^T)^+. \end{aligned}$$

Apéndice C

Demostraciones de Estabilidad para las leyes de control visual PD

Aquí y en apéndices posteriores se usará la siguiente notación: \mathbf{I} denotará la matriz identidad de dimensión apropiada, $\|\bullet\|$ establecerá la norma Euclidiana para vectores y matrices, $\lambda_m\{\mathcal{A}\}$ y $\lambda_M\{\mathcal{A}\}$ con $\mathcal{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ denotarán respectivamente, el valor propio más pequeño y el valor propio más grande de la matriz \mathcal{A} .

Además, se usarán en los análisis subsecuentes las propiedades de las matrices \mathbf{M} y \mathbf{C} del modelo dinámico (2.33), presentadas en la sección 2.3.

C.1. Estabilidad de la ley de control IBVS PD

Este apéndice presenta la demostración de la Proposición 2. La función candidata de Lyapunov dada por (3.11) es

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}. \quad (\text{C.1})$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto de los términos

$$\frac{1}{2\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}$$

permite escribir la función candidata (C.1) como

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2\alpha} [\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Y}]^T \mathbf{M} [\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Y}] + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{2\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y}, \quad (\text{C.2})$$

la cual será una función definida positiva y no acotada radialmente si los términos

$$\frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{2\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \quad (\text{C.3})$$

corresponden a una función definida positiva no acotada radialmente para \mathbf{Y} .

Puesto que (C.3) se elimina cuando $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, sólo hay que mostrar que ésta es no acotada radialmente y positiva para todo $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$. Puesto que la matriz \mathbf{M} es simétrica definida positiva, por la desigualdad de Rayleigh–Ritz se tiene que

$$\frac{1}{2\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \leq \frac{1}{2\alpha} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\mathbf{Y}\|^2. \quad (\text{C.4})$$

Por lo tanto, se obtiene que

$$\frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{2\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \geq \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) - \frac{1}{2\alpha} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \right] \|\mathbf{Y}\|^2. \quad (\text{C.5})$$

Con lo que se muestra que (C.3) es una función definida positiva de \mathbf{Y} para un valor suficientemente grande de α . Por lo tanto, bajo esta condición la función de Lyapunov candidata (3.11) es una función definida positiva no acotada radialmente.

Al calcular la derivada respecto del tiempo de la función candidata de Lyapunov (C.1) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3.10) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) = & \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \} + \frac{1}{2\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} - \alpha \eta h \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_a \right) \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{X}} \\ & - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Desarrollando las operaciones en (C.6) para después simplificar términos permite obtener

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) = & -\eta h \alpha k_2 \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} \\ & - \alpha k_1 \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Usando la Propiedad 2 presentada en la sección 2.3.1 y después de varias simplificaciones se obtiene

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) = -\eta h \alpha k_2 \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{X}} + \frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} - \alpha k_1 \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}}. \quad (\text{C.7})$$

Ahora, se proporcionan cotas superiores de los siguientes términos

$$\frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \leq \frac{\eta h}{\alpha} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \quad (\text{C.8})$$

$$-\frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} \leq \frac{k_C}{\alpha} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \quad (\text{C.9})$$

donde se han usado la desigualdad de Rayleigh–Ritz y la Propiedad 3 dada por la ecuación (2.37). Por lo tanto, la derivada respecto del tiempo $\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})$ en (C.7) satisface

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \leq -\eta h \alpha k_2 \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 + \frac{\eta h}{\alpha} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 - \alpha k_1 \|\mathbf{Y}\|^2 + \frac{k_C}{\alpha} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2. \quad (\text{C.10})$$

Defínase $\varphi = [\|\mathbf{Y}\| \ \|\dot{\mathbf{X}}\|]^T$, $\Gamma_1 = \frac{k_C}{\alpha} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2$ y la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha k_1 & 0 \\ 0 & \eta h \left(\alpha k_2 - \frac{\lambda_M\{\mathbf{M}\}}{\alpha} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

que es definida positiva si α es suficientemente grande. Las definiciones anteriores permiten escribir la desigualdad (C.10) como

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \leq -\varphi^T \mathbf{A} \varphi + \Gamma_1. \quad (\text{C.12})$$

De la función candidata de Lyapunov (C.1) se obtiene

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \geq \frac{\alpha k_2}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y},$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{Y}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha k_2}} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}). \quad (\text{C.13})$$

Además, por la definición de φ , la siguiente desigualdad siempre es cierta

$$\|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \leq \|\varphi\|^2. \quad (\text{C.14})$$

Así, las desigualdades (C.13) y (C.14) permiten determinar la siguiente cota superior para Γ_1

$$\Gamma_1 \leq \frac{c_1}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \|\varphi\|^2 \quad (\text{C.15})$$

con $c_1 = k_C \sqrt{\frac{2}{\alpha k_2}}$. Entonces, la desigualdad (C.12) puede describirse como

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \leq -\left[\lambda_m\{\mathbf{A}\} - \frac{c_1}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \right] \|\varphi\|^2. \quad (\text{C.16})$$

Nótese que el cociente c_1/α decrece a medida que α crece y simultáneamente, los valores propios de la matriz \mathbf{A} crecerán a medida que α crezca. Defínase

$$b_1(t) = \lambda_m\{\mathbf{A}\} - \frac{c_1}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{X}}(t)),$$

Para condiciones iniciales $(\mathbf{Y}(0), \dot{\mathbf{X}}(0))$ dadas; la ganancia α se escoge de tal forma que para $t = 0$ se cumpla $b_1(0) > 0$. Con esta suposición, la desigualdad (C.16) implica que la función de Lyapunov candidata (3.11) es una función decreciente. En consecuencia $b_1(0) < b_1(t)$, para todo $t \neq 0$ y ésto asegura que la derivada $\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})$ satisfaga

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \leq -b_1(0) \|\varphi\|^2, \quad (\text{C.17})$$

la cual es una función definida negativa y φ es una función del estado $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})$.

Finalmente, usando el segundo método de estabilidad de Lyapunov (ver [51]), se concluye que el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado (3.10) es asintóticamente estable.

C.2. Estabilidad de la ley de control IBVS PD con matriz Jacobiana \mathbf{S} incierta

Este apéndice corresponde al análisis de estabilidad de la Proposición 3. Puesto que se trata de la función estricta de Lyapunov (3.11) usada para mostrar la estabilidad asintótica del caso nominal, se sabe que es una función definida positiva para valores elevados de α .

La derivada respecto del tiempo de la función (3.11) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3.18) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \left\{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} + \Delta \right\} + \frac{1}{2\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} - \eta h \alpha \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{X}} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \left\{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} + \Delta \right\} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Al usar la Propiedad 2 y al simplificar términos, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\eta h \alpha k_2 \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{X}} + \frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} - \alpha k_1 \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \Delta - \frac{1}{\alpha} \mathbf{X}^T \Delta. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Los primeros cuatro términos en el lado derecho corresponden a la derivada de $V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})$ a lo largo de las trayectorias del sistema nominal en donde $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$, la cual es una función definida negativa y satisface (C.16). Los términos restantes corresponden a la perturbación Δ . Entonces, se establece la siguiente cota superior utilizando (3.17)

$$\|\Delta\| \leq \rho \left(\alpha^2 k_1 \|\mathbf{Y}\| + \eta h \alpha^2 k_2 \|\dot{\mathbf{X}}\| \right). \quad (\text{C.19})$$

Así, con el uso de (C.16) y de (C.19), la derivada (C.18) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq - \left[\lambda_m \{ \mathbf{A} \} - \frac{c_1}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \right] \|\varphi\|^2 + \frac{1}{\alpha} \|\dot{\mathbf{X}}\| \|\Delta\| + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{X}\| \|\Delta\| \\ &\leq - \left[\alpha \lambda_m \{ \mathcal{A} \} - \frac{c_1}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \right] \|\varphi\|^2 + \rho \eta h \alpha k_2 \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \\ &\quad + \rho \alpha k_1 \|\mathbf{Y}\|^2 + \rho \alpha (k_1 + \eta h k_2) \|\dot{\mathbf{X}}\| \|\mathbf{Y}\|. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

donde $\mathcal{A} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{A}$, y la matriz \mathbf{A} está dada por (C.11). Al usar la definición de $\varphi = \left[\|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\| \right]^T$ y la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_1 & \frac{(k_1 + \eta h k_2)}{2} \\ \frac{(k_1 + \eta h k_2)}{2} & \eta h k_2 \end{bmatrix}$$

la cota en (C.20) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\left[\alpha\lambda_m\{\mathcal{A}\} - \frac{c_1}{\alpha}V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})\right]\|\varphi\|^2 - \rho\alpha\varphi^T\mathbf{B}\varphi \\ &\leq -\left[\alpha\lambda_m\{\mathcal{A}\} - \frac{c_1}{\alpha}V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) - \rho\alpha\lambda_M\{\mathbf{B}\}\right]\|\varphi\|^2.\end{aligned}\quad (\text{C.21})$$

Nótese que el cociente c_1/α decrece y las entradas de \mathcal{A} no crecerán si el valor de α crece, pero $\alpha\lambda_M\{\mathbf{B}\}$ podría crecer si α crece.

Defínase $g(\alpha, \rho, t) = \alpha\lambda_m\{\mathcal{A}\} - \frac{c_1}{\alpha}V^{1/2}(\mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{X}}(t)) - \rho\alpha\lambda_M\{\mathbf{B}\}$. Cuando $\rho = 0$, la desigualdad (C.21) es igual a la desigualdad (C.16), ésto implica que

$$g(\alpha, 0, t) = b_1(t), \quad (\text{C.22})$$

y para las condiciones iniciales $(\mathbf{Y}(0), \dot{\mathbf{X}}(0))$ dadas, se tendrá $V(0) = V(\mathbf{Y}(0), \dot{\mathbf{X}}(0))$ y se escoge un valor α^* de α suficientemente grande tal que $g(\alpha^*, 0, 0) = b_1(0) > 0$.

Entonces, existe un valor ρ^* suficientemente pequeño tal que

$$\begin{aligned}g(\alpha^*, \rho^*, 0) &= \alpha^*\lambda_m\{\mathcal{A}\} - \frac{c_1}{\alpha^*}V^{1/2}(0) - \rho^*\alpha^*\lambda_M\{\mathbf{B}\} > 0 \\ &= b_1(0) - \rho^*\alpha^*\lambda_M\{\mathbf{B}\} > 0 \\ &= g(\alpha^*, 0, 0) - \rho^*\alpha^*\lambda_M\{\mathbf{B}\} > 0\end{aligned}\quad (\text{C.23})$$

siendo $g(\alpha^*, 0, 0) > g(\alpha^*, \rho^*, 0)$. Notar también que $g(\alpha^*, 0, 0) > g(\alpha^*, \rho, 0) \forall \rho \in [0, \rho^*]$. Así, utilizando condiciones iniciales $(\mathbf{Y}(0), \dot{\mathbf{X}}(0))$ dadas, para $V(0)$ que satisfagan (C.23), determina que la función candidata de Lyapunov (3.11) aún es una función decreciente, esto es, $V(t) \leq V(0)$, entonces $g(\alpha^*, \rho^*, 0) < g(\alpha^*, \rho^*, t) \forall t > 0$.

Por lo tanto, la derivada (C.18) satisface

$$\dot{V} \leq -g(\alpha^*, \rho^*, 0)\|\varphi\|^2 \quad (\text{C.24})$$

que es una función definida negativa del estado $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})$. Aplicando el segundo método de estabilidad de Lyapunov permite concluir que el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado (3.18) es asintóticamente estable.

C.3. Estabilidad de la ley de control IBVS PD empleando un estimado de la velocidad

A continuación se procede a demostrar la Proposición 4. Definiendo las variables

$$\psi_1 = \frac{\sqrt{\eta h}}{2}\dot{\mathbf{X}} - \frac{k_1}{\alpha k_2 \sqrt{\eta h}}\mathbf{Y}, \quad (\text{C.25})$$

$$\psi_2 = \frac{\sqrt{\eta h}}{2}\dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{\alpha\sqrt{\eta h}}\dot{\xi}, \quad (\text{C.26})$$

permite escribir la función candidata de Lyapunov (3.24) en la siguiente forma

$$\begin{aligned} V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) &= \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_2 \\ &+ \frac{\alpha^2 k_1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{k_1^2}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} + \frac{k_2}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{\alpha^2 \eta h} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Ésta será una función definida positiva y no acotada radialmente probando que

$$\frac{\alpha^2 k_1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{k_1^2}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \quad (\text{C.28})$$

es una función positiva definida y no acotada radialmente para \mathbf{Y} y que

$$\frac{k_2}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{\alpha^2 \eta h} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (\text{C.29})$$

es una función definida positiva y no acotada radialmente para $\dot{\boldsymbol{\xi}}$.

La expresión (C.28) desaparece cuando $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$. Por otro lado, cuando $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}$ la expresión (C.29) desaparece. Entonces, hay que mostrar que (C.28) y (C.29) son definidas positivas y no acotadas radialmente para $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ y $\dot{\boldsymbol{\xi}} \neq \mathbf{0}$, respectivamente. La matriz \mathbf{M} es simétrica y definida positiva; por la desigualdad de Rayleigh–Ritz se tiene

$$\begin{aligned} \frac{k_1^2}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} &\leq \frac{k_1^2 \lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \|\mathbf{Y}\|^2, \\ \frac{1}{\alpha^2 \eta h} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}} &\leq \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2 \eta h} \|\dot{\boldsymbol{\xi}}\|^2. \end{aligned}$$

Lo cual conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 k_1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{k_1^2}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} &\geq \left[\frac{\alpha^2 k_1}{2} - \frac{k_1^2 \lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \right] \|\mathbf{Y}\|^2, \\ \frac{k_2}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{\alpha^2 \eta h} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}} &\geq \left[\frac{k_2}{2} - \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2 \eta h} \right] \|\dot{\boldsymbol{\xi}}\|^2. \end{aligned}$$

Entonces, para un valor suficientemente grande de α , las expresiones (C.28) y (C.29) son funciones definidas positivas para \mathbf{Y} y $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, respectivamente. Por lo tanto, la función candidata de Lyapunov (3.24) es una función definida positiva y no acotada radialmente.

La derivada respecto del tiempo de la función candidata (3.24) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3.23) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) &= \eta h \dot{\mathbf{X}}^T \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \} + \frac{\eta h}{2} \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} \\ &- \eta h \alpha^2 k_1 \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{X}} + k_2 \dot{\boldsymbol{\xi}}^T (-2\alpha \dot{\boldsymbol{\xi}} - \eta h \alpha^2 \dot{\mathbf{X}}) \\ &- \frac{k_1}{\alpha k_2} \mathbf{Y}^T \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \} - \frac{k_1}{\alpha k_2} \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\eta h k_1}{\alpha k_2} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \\ &+ \frac{1}{\alpha} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \} + \frac{1}{\alpha} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} (-2\alpha \dot{\boldsymbol{\xi}} - \eta h \alpha^2 \dot{\mathbf{X}}). \end{aligned}$$

Al usar la Propiedad 2 presentada en la sección (2.3.1) y simplificando términos, la derivada respecto del tiempo de la función candidata de Lyapunov (3.24) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) &= -\eta h \left(\alpha - \frac{k_1}{\alpha k_2} \right) \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} - \alpha k_2 \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{\alpha k_1^2}{k_2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \\ &\quad - 2 \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{k_1}{\alpha k_2} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

A continuación se establecen las siguientes cotas superiores

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} &\leq -\lambda_m \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2, \\ -\frac{k_1}{\alpha k_2} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} &\leq \frac{k_1 k_C}{\alpha k_2} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 + \frac{k_C}{\alpha} \|\dot{\boldsymbol{\xi}}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \end{aligned}$$

que son obtenidas a partir de la desigualdad de Rayleigh–Ritz y la Propiedad 3 dada por (2.37). Por lo tanto, la derivada (C.30) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) &\leq -\eta h \left(\alpha - \frac{k_1}{\alpha k_2} \right) \lambda_m \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 - \alpha k_2 \|\dot{\boldsymbol{\xi}}\|^2 - \frac{\alpha k_1^2}{k_2} \|\mathbf{Y}\|^2 \\ &\quad + 2\lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{X}}\| \|\dot{\boldsymbol{\xi}}\| + \frac{k_1 k_C}{\alpha k_2} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 + \frac{k_C}{\alpha} \|\dot{\boldsymbol{\xi}}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Definiendo $\boldsymbol{\psi} = [\|\mathbf{Y}\| \ \|\dot{\mathbf{X}}\| \ \|\dot{\boldsymbol{\xi}}\|]^T$, $\Gamma_2 = \frac{k_C}{\alpha} \left(\frac{k_1}{k_2} \|\mathbf{Y}\| + \|\dot{\boldsymbol{\xi}}\| \right) \|\dot{\mathbf{X}}\|^2$ y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha k_1^2}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & \eta h \left(\alpha - \frac{k_1}{\alpha k_2} \right) \lambda_m \{\mathbf{M}\} & -\lambda_M \{\mathbf{M}\} \\ 0 & -\lambda_M \{\mathbf{M}\} & \alpha k_2 \end{bmatrix}$$

que es una matriz definida positiva si α tiene un valor suficientemente grande. Entonces, la cota (C.31) puede ser escrita como

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) \leq -\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\psi} + \Gamma_2. \quad (\text{C.32})$$

Teniendo en cuenta que la función candidata de Lyapunov (3.24) es definida positiva para α suficientemente grande, permite establecer las siguientes cotas

$$\|\mathbf{Y}\| \leq \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{k_1}} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) \quad (\text{C.33})$$

$$\|\dot{\boldsymbol{\xi}}\| \leq \sqrt{\frac{2}{k_2}} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) \quad (\text{C.34})$$

y de la definición de $\boldsymbol{\psi}$ la siguiente desigualdad siempre es cierta

$$\|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\psi}\|^2. \quad (\text{C.35})$$

Así, con el uso de las cotas (C.33)-(C.35) se establece una cota superior para Γ_2

$$\Gamma_2 \leq \frac{c_2}{\alpha} V^{1/2} (\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) \|\boldsymbol{\psi}\|^2$$

con

$$c_2 = k_C \left(\frac{k_1}{\alpha k_2} \sqrt{\frac{2}{k_1}} + \sqrt{\frac{2}{k_2}} \right).$$

Entonces, la derivada (C.30) tendrá la siguiente cota superior

$$\dot{V} (\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) \leq - \left[\lambda_m \{ \mathbf{G} \} - \frac{c_2}{\alpha} V^{1/2} (\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) \right] \|\boldsymbol{\psi}\|^2. \quad (\text{C.36})$$

Note que el cociente c_2/α decrece a medida que α crece. Por lo tanto, defínase

$$b_2(t) = \lambda_m \{ \mathbf{G} \} - \frac{c_2}{\alpha} V^{1/2} (\mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \dot{\boldsymbol{\xi}}(t)),$$

se escoge un valor de α suficientemente grande de tal forma que para $t = 0$ se cumpla $b_2(0) > 0$. Entonces, la desigualdad (C.36) implica que la función de Lyapunov (3.24) es decreciente y se tendrá que $b_2(0) < b_2(t)$ para todo $t \neq 0$. Por lo tanto, la derivada $\dot{V} (\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}})$ satisface

$$\dot{V} (\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) \leq -b_2(0) \|\boldsymbol{\psi}\|^2 \quad (\text{C.37})$$

y el lado derecho es una función definida negativa del estado $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\xi}})$.

Finalmente, invocando el segundo método de estabilidad de Lyapunov, puede concluirse que el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable.

Apéndice D

Demostraciones de Estabilidad para las leyes de control visual PID

D.1. Estabilidad de la ley de control IBVS PID

A continuación se demuestra la proposición 5. La función candidata de Lyapunov (3.35) puede reescribirse en la siguiente forma

$$\begin{aligned} V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}) &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Y} \right]^T \mathbf{M} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Y} \right] + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Z} \right]^T \mathbf{M} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Z} \right] \\ &+ \frac{\alpha k_2}{2} \left[\mathbf{Z} + \frac{1}{\eta h} \mathbf{Y} \right]^T \left[\mathbf{Z} + \frac{1}{\eta h} \mathbf{Y} \right] + \frac{\alpha k_3}{2} [\mathbf{Y} + \mathbf{Z}]^T [\mathbf{Y} + \mathbf{Z}] \\ &+ \frac{\alpha k_1}{2\eta h} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{\alpha k_3}{2\eta h} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \\ &+ \frac{\alpha k_1}{2} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} - \frac{\alpha k_2}{2} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Z}^T \mathbf{M} \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Para probar que es una función definida positiva y no acotada radialmente; se tiene que probar que

$$\frac{\alpha k_1}{2\eta h} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{\alpha k_3}{2\eta h} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y}, \quad (\text{D.2})$$

es una función definida positiva y no acotada radialmente para \mathbf{Y} y que

$$\frac{\alpha k_1}{2} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} - \frac{\alpha k_2}{2} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Z}^T \mathbf{M} \mathbf{Z} \quad (\text{D.3})$$

es una función definida positiva y no acotadas radialmente para \mathbf{Z} .

Cuando $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$, (D.2) y (D.3) desaparecen. Entonces se debe mostrar que para $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$, las expresiones (D.2) y (D.3) son definidas positivas y no acotadas radialmente.

Se sabe que la matriz \mathbf{M} es simétrica definida positiva, entonces por la desigualdad de Rayleigh–Ritz lo siguiente se cumple

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{Y} &\leq \frac{\lambda_M\{\mathbf{M}\}}{\alpha}\|\mathbf{Y}\|^2, \\ \frac{1}{\alpha}\mathbf{Z}^T\mathbf{M}\mathbf{Z} &\leq \frac{\lambda_M\{\mathbf{M}\}}{\alpha}\|\mathbf{Z}\|^2.\end{aligned}$$

Con lo anterior se obtiene

$$\frac{\alpha k_1}{2\eta h}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \frac{\alpha k_3}{2\eta h}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \frac{1}{\alpha}\mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{Y} \geq \left[\frac{\alpha(k_1 - k_3)}{2\eta h} - \frac{\lambda_M\{\mathbf{M}\}}{\alpha} \right] \|\mathbf{Y}\|^2, \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{\alpha k_1}{2}\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} - \frac{\alpha k_2}{2}\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} - \frac{1}{\alpha}\mathbf{Z}^T\mathbf{M}\mathbf{Z} \geq \left[\frac{\alpha(k_1 - k_2)}{2} - \frac{\lambda_M\{\mathbf{M}\}}{\alpha} \right] \|\mathbf{Z}\|^2. \quad (\text{D.5})$$

Entonces, para un valor suficientemente grande de α y k_1 satisfaciendo las siguientes desigualdades

$$k_1 > k_3 + \frac{2\eta h \lambda_M\{\mathbf{M}\}}{\alpha^2}, \quad (\text{D.6})$$

$$k_1 > k_2 + \frac{2\lambda_M\{\mathbf{M}\}}{\alpha^2}, \quad (\text{D.7})$$

las funciones (D.2) y (D.3) serán definidas positivas. En consecuencia, la función candidata de Lyapunov (3.35) es una función definida positiva y no acotada radialmente.

La derivada respecto del tiempo de la función candidata de Lyapunov (3.35) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3.31) se describe a continuación

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}) &= \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{X}}^T \left\{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} + \alpha^2 k_3 \mathbf{Z} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \right\} + \frac{1}{2\alpha}\dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{X}} \\ &\quad - \alpha \eta h \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{X}} + \alpha (k_1 + k_3) \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \left\{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} + \alpha^2 k_3 \mathbf{Z} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \right\} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{X}} + \frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{X}} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Z}^T \left\{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} + \alpha^2 k_3 \mathbf{Z} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \right\} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Z}^T \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{X}} \\ &\quad + \alpha \left(k_2 + \frac{k_3}{\eta h} \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \alpha \eta h \left(k_2 + \frac{k_3}{\eta h} \right) \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

Usando la Propiedad 2 que se presenta en la sección 2.3.1 y simplificando términos se obtiene finalmente la derivada respecto del tiempo de la función candidata de Lyapunov (3.35)

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}) &= -\eta h \alpha k_2 \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{X}} + \frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{X}} - \alpha \left[k_1 - k_2 - \frac{k_3}{\eta h} \right] \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \alpha k_3 \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Z}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}}.\end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

La Propiedad 3 dada por la expresión (2.37) ayuda a establecer la siguiente cota

$$-\frac{1}{\alpha} \mathbf{Z}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} \leq \frac{k_C}{\alpha} [\|\mathbf{Z}\| + \|\mathbf{Y}\|] \|\dot{\mathbf{X}}\|^2$$

y la desigualdad de Rayleigh permite concluir que

$$\frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \leq \frac{\eta h}{\alpha} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2.$$

Así, la derivada (D.8) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}) &\leq -\alpha \eta h \left[k_2 - \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2} \right] \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 - \alpha \left[k_1 - k_2 - \frac{k_3}{\eta h} \right] \|\mathbf{Y}\|^2 - \alpha k_3 \|\mathbf{Z}\|^2 \\ &\quad + \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\| + \frac{k_C}{\alpha} [\|\mathbf{Z}\| + \|\mathbf{Y}\|] \|\dot{\mathbf{X}}\|^2. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Para demostrar que la derivada $\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z})$ es una función definida negativa se definen $\phi = [\|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\| \|\mathbf{Z}\|]^T$, $\Gamma_3 = \frac{k_C}{\alpha} [\|\mathbf{Z}\| + \|\mathbf{Y}\|] \|\dot{\mathbf{X}}\|^2$ y la matriz

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \left[k_1 - k_2 - \frac{k_3}{\eta h} \right] & -\frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{2\alpha^2} & 0 \\ -\frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{2\alpha^2} & \eta h \left[k_2 - \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2} \right] & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.10})$$

Note que esta matriz será definida positiva si para un valor suficientemente grande de α , se cumplen las siguientes desigualdades:

$$k_1 > k_2 + \frac{k_3}{\eta h}, \quad (\text{D.11})$$

$$k_2 > \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2}, \quad (\text{D.12})$$

$$k_3 > 0. \quad (\text{D.13})$$

Observe que de la desigualdad (D.11) se obtiene mediante operaciones elementales lo siguiente

$$\begin{aligned} k_1 - k_2 &> \frac{k_3}{\eta h} \\ \frac{\alpha(k_1 - k_2)}{2} &> \frac{\alpha k_3}{2\eta h} \\ \frac{\alpha(k_1 - k_2)}{2} - \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha} &> \frac{\alpha k_3}{2\eta h} - \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha} \end{aligned}$$

De este último resultado, para un α suficientemente grande la cota inferior es positiva definida. Note también que el lado izquierdo de la última desigualdad, corresponde al coeficiente de donde se obtiene la desigualdad (D.7). Para que la desigualdad (D.7) se cumpla,

es suficiente con satisfacer la desigualdad (D.11). Más aún, para asegurar la positividad de la matriz de Lyapunov, y la positividad de la matriz \mathcal{H} basta con que se cumplan las desigualdades (3.32)-(3.34).

Así, la cota (D.9) se escribe como

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}) \leq -\alpha \phi^T \mathcal{H} \phi + \Gamma_3. \quad (\text{D.14})$$

Al ser la función candidata de Lyapunov (3.35) definida positiva para valores elevados de α , las siguientes cotas pueden establecerse

$$\|\mathbf{Y}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha k_2}} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}), \quad (\text{D.15})$$

$$\|\mathbf{Z}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha k_3}} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}). \quad (\text{D.16})$$

y por la definición de ϕ se tiene

$$\|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \leq \|\phi\|^2. \quad (\text{D.17})$$

Sustituyendo las cotas (D.15)–(D.17) en la definición de Γ_3 se obtiene lo siguiente

$$\Gamma_3 \leq \frac{c_3}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}) \|\phi\|^2, \quad (\text{D.18})$$

$$c_3 = k_C \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha k_2}} + \sqrt{\frac{2}{\alpha k_3}} \right).$$

Finalmente, la cota para la derivada $\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z})$ es

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}) \leq - \left[\alpha \lambda_m \{\mathcal{H}\} - \frac{c_3}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}) \right] \|\phi\|^2. \quad (\text{D.19})$$

Defínase $b_3(\alpha, t) := \alpha \lambda_m \{\mathcal{H}\} - \frac{c_3}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{Z}(t))$. Para los estados iniciales $(\mathbf{Y}(0), \dot{\mathbf{X}}(0), \mathbf{Z}(0))$ se escoge un valor α^* suficientemente grande tal que

$$b_3(\alpha^*, 0) = \alpha^* \lambda_m \{\mathcal{H}\} - \frac{c_3}{\alpha^*} V^{1/2}(0) > 0 \quad (\text{D.20})$$

donde $V^{1/2}(0) = V^{1/2}(\mathbf{Y}(0), \dot{\mathbf{X}}(0), \mathbf{Z}(0))$.

Por lo tanto, utilizando condiciones iniciales $(\mathbf{Y}(0), \dot{\mathbf{X}}(0), \mathbf{Z}(0))$, para tener $V(0) > 0$ que satisfaga (D.20) permite concluir que la función candidata (3.35) es una función decreciente, esto es, que $V(t) \leq V(0)$; entonces, $b_3(\alpha^*, 0) < b_3(\alpha, t) \forall t > 0$. Así, la derivada $\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z})$ satisface

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}) \leq -b_3(\alpha^*, 0) \|\phi\|^2 \quad (\text{D.21})$$

que es una función definida negativa del estado $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Z})$. En consecuencia, aplicando el segundo método de estabilidad de Lyapunov permite concluir que el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{Z} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado (3.31) es asintóticamente estable.

D.2. Estabilidad de la ley de control IBVS PID utilizando un valor estimado de la velocidad

Se procede a demostrar la Proposición 6. Sea la función candidata (3.43); ésta puede ser rescrita en la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \Lambda, \dot{\zeta}) &= \mathbf{z}_1^T \mathbf{M} \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2^T \mathbf{M} \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3^T \mathbf{M} \mathbf{z}_3 + \alpha^2 \left[\alpha k_a \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{3}{4\alpha^2 \eta h} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \right] \\
 &\quad + \alpha^2 k_b \Lambda^T \Lambda - \frac{3k_b^2}{4\alpha^2 \eta h k_a^2} \Lambda^T \mathbf{M} \Lambda + \frac{1}{\alpha} \left[\alpha k_a \dot{\zeta}^T \dot{\zeta} - \frac{3}{4\alpha \eta h} \dot{\zeta}^T \mathbf{M} \dot{\zeta} \right]
 \end{aligned} \tag{D.22}$$

donde

$$\mathbf{z}_1 = \sqrt{\frac{\eta h}{3}} \dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\eta h}} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{z}_2 = \sqrt{\frac{\eta h}{3}} \dot{\mathbf{X}} - \frac{k_b}{2\alpha k_a} \sqrt{\frac{3}{\eta h}} \Lambda, \quad \mathbf{z}_3 = \sqrt{\frac{\eta h}{3}} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{3}{\eta h}} \dot{\zeta}.$$

La función (D.22) será definida positiva y no acotada radialmente si los términos

$$\alpha k_a \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{3}{4\alpha^2 \eta h} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \tag{D.23}$$

$$\alpha^2 k_b \Lambda^T \Lambda - \frac{3k_b^2}{4\alpha^2 \eta h k_a^2} \Lambda^T \mathbf{M} \Lambda \tag{D.24}$$

$$\alpha k_a \dot{\zeta}^T \dot{\zeta} - \frac{3}{4\alpha \eta h} \dot{\zeta}^T \mathbf{M} \dot{\zeta} \tag{D.25}$$

con respecto a \mathbf{Y} , Λ y $\dot{\zeta}$ también lo son. Cuando $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, $\Lambda = \mathbf{0}$ y $\dot{\zeta} = \mathbf{0}$, las expresiones (D.23)-(D.25) desaparecen. Queda por demostrar que para $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$, $\Lambda \neq \mathbf{0}$ y $\dot{\zeta} \neq \mathbf{0}$, estas expresiones son definidas positivas y no acotadas radialmente. Con la desigualdad de Rayleigh–Ritz, se establecen las siguientes cotas superiores

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{4\alpha^2 \eta h} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} &\leq \frac{3}{4\alpha^2 \eta h} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\mathbf{Y}\|^2 \\
 \frac{3k_b^2}{4\alpha^2 \eta h k_a^2} \Lambda^T \mathbf{M} \Lambda &\leq \frac{3k_b^2}{4\alpha^2 \eta h k_a^2} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\Lambda\|^2 \\
 \frac{3}{4\alpha \eta h} \dot{\zeta}^T \mathbf{M} \dot{\zeta} &\leq \frac{3}{4\alpha \eta h} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\dot{\zeta}\|^2
 \end{aligned}$$

para obtener

$$\begin{aligned}
 \alpha k_a \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{3}{4\alpha^2 \eta h} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} &\leq \left(\alpha k_a - \frac{3}{4\alpha^2 \eta h} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \right) \|\mathbf{Y}\|^2, \\
 \alpha^2 k_b \Lambda^T \Lambda - \frac{3k_b^2}{4\alpha^2 \eta h k_a^2} \Lambda^T \mathbf{M} \Lambda &\leq \left(\alpha^2 k_b - \frac{3k_b^2}{4\alpha^2 \eta h k_a^2} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \right) \|\Lambda\|^2, \\
 \alpha k_a \dot{\zeta}^T \dot{\zeta} - \frac{3}{4\alpha \eta h} \dot{\zeta}^T \mathbf{M} \dot{\zeta} &\leq \left(\alpha k_a - \frac{3}{4\alpha \eta h} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \right) \|\dot{\zeta}\|^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para un valor suficientemente grande de α , las funciones (D.23)-(D.25) serán funciones definidas positivas. En consecuencia, la función candidata de Lyapunov (3.43) es una función definida positiva y no acotada radialmente.

La derivada respecto del tiempo de la función (3.43) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3.42) se describe como

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{\Lambda}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) &= 2\eta h \dot{\mathbf{X}}^T \left\{ \alpha^3 k_a \mathbf{Y} + \alpha^2 k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \alpha^2 k_b \mathbf{\Lambda} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \right\} + \eta h \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} \\
&\quad - 2\eta h \alpha^3 k_a \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{X}} + 2\alpha^2 k_b \mathbf{\Lambda}^T (-\eta h \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{Y}) + 2k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T (-\alpha \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \eta h \alpha^2 \dot{\mathbf{X}}) \\
&\quad - \mathbf{Y}^T \left\{ \alpha^3 k_a \mathbf{Y} + \alpha^2 k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \alpha^2 k_b \mathbf{\Lambda} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \right\} - \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} + \eta h \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} \\
&\quad - \frac{k_b}{\alpha k_a} \mathbf{\Lambda}^T \left\{ \alpha^3 k_a \mathbf{Y} + \alpha^2 k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \alpha^2 k_b \mathbf{\Lambda} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \right\} - \frac{k_b}{\alpha k_a} \mathbf{\Lambda}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} \\
&\quad - \frac{k_b}{\alpha k_a} (-\eta h \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{Y})^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \left\{ \alpha^3 k_a \mathbf{Y} + \alpha^2 k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \alpha^2 k_b \mathbf{\Lambda} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} (-\alpha \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \eta h \alpha^2 \dot{\mathbf{X}})^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}}.
\end{aligned}$$

Usando la Propiedad 2 en la sección 2.3.1 y simplificando términos se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{\Lambda}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) &= -\eta h \left(\alpha - 1 - \frac{k_b}{\alpha k_a} \right) \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} - \alpha^3 k_a \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{\alpha k_b^2}{k_a} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} \\
&\quad - \alpha k_a \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{k_b}{\alpha k_a} \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} - \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} \\
&\quad - \frac{k_b}{\alpha k_a} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}}.
\end{aligned} \tag{D.26}$$

Con la Propiedad 3 determinada por (2.37) se establece la siguiente cota

$$-\frac{k_b}{\alpha k_a} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} \leq k_C \left[\frac{k_b}{\alpha k_a} \|\mathbf{\Lambda}\| + \|\mathbf{Y}\| + \frac{1}{\alpha} \|\dot{\boldsymbol{\zeta}}\| \right] \|\dot{\mathbf{X}}\|^2.$$

y con la desigualdad de Rayleigh–Ritz se obtiene

$$-\eta h \left(\alpha - 1 - \frac{k_b}{\alpha k_a} \right) \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{X}} \leq -\eta h \left(\alpha - 1 - \frac{k_b}{\alpha k_a} \right) \lambda_m \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2.$$

Así, la derivada (D.26) satisface

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{\Lambda}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) &\leq -\eta h \left(\alpha - 1 - \frac{k_b}{\alpha k_a} \right) \lambda_m \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 - \alpha^3 k_a \|\mathbf{Y}\|^2 - \frac{\alpha k_b^2}{k_a} \|\mathbf{\Lambda}\|^2 \\
&\quad - \alpha k_a \|\dot{\boldsymbol{\zeta}}\|^2 + \frac{k_b \lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha k_a} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\| + \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\dot{\boldsymbol{\zeta}}\| \|\dot{\mathbf{X}}\| \\
&\quad + k_C \left[\frac{k_b}{\alpha k_a} \|\mathbf{\Lambda}\| + \|\mathbf{Y}\| + \frac{1}{\alpha} \|\dot{\boldsymbol{\zeta}}\| \right] \|\dot{\mathbf{X}}\|^2.
\end{aligned} \tag{D.27}$$

Definanse el vector $\Sigma = [\|\mathbf{Y}\| \quad \|\dot{\mathbf{X}}\| \quad \|\dot{\zeta}\| \quad \|\Lambda\|]^T$, el escalar

$$\Gamma_4 = k_C \left[\frac{k_b}{\alpha k_a} \|\Lambda\| + \|\mathbf{Y}\| + \frac{1}{\alpha} \|\dot{\zeta}\| \right] \|\dot{\mathbf{X}}\|^2$$

y la matriz

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \alpha^2 k_a & -\frac{k_b \lambda_M \{\mathbf{M}\}}{2\alpha^2 k_a} & 0 & 0 \\ -\frac{k_b \lambda_M \{\mathbf{M}\}}{2\alpha^2 k_a} & \eta h \left(1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{k_b}{\alpha^2 k_a} \right) \lambda_m \{\mathbf{M}\} & -\frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{2\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{2\alpha} & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_b^2}{k_a} \end{bmatrix}.$$

Lo anterior permite escribir la cota (D.27) de la siguiente forma compacta

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \Lambda, \dot{\zeta}) \leq -\alpha \Sigma^T \mathcal{P} \Sigma + \Gamma_4. \quad (\text{D.28})$$

Para continuar con el análisis, de la función candidata de Lyapunov (3.43) se obtienen las siguientes desigualdades

$$\|\mathbf{Y}\| \leq \frac{V^{1/2}}{\alpha \sqrt{\alpha k_a}}, \quad \|\Lambda\| \leq \frac{V^{1/2}}{\alpha \sqrt{k_b}}, \quad \|\dot{\zeta}\| \leq \frac{V^{1/2}}{\sqrt{k_a}}$$

donde $V^{1/2} = \dot{V}^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \Lambda, \dot{\zeta})$ y de la definición del vector Σ , la siguiente desigualdad siempre es cierta

$$\|\dot{\mathbf{X}}\| \leq \|\Sigma\|.$$

Entonces, usando las desigualdades anteriores se obtiene la siguiente cota superior para el escalar Γ_4

$$\begin{aligned} \Gamma_4 &\leq \frac{c_4}{\alpha} V^{1/2} \|\Sigma\|^2 \\ c_4 &= k_C \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha k_a}} + \frac{\sqrt{k_b}}{\alpha k_a} + \frac{1}{\sqrt{k_a}} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, al usar esta última cota obtenida en la desigualdad (D.28) permite establecer para $\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \Lambda, \dot{\zeta})$ la siguiente cota

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \Lambda, \dot{\zeta}) \leq - \left[\alpha \lambda_m \{\mathcal{P}\} - \frac{c_4}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \Lambda, \dot{\zeta}) \right] \|\Sigma\|^2. \quad (\text{D.29})$$

Ahora, queda por demostrar que la cota anterior es una función definida negativa. Se define

$$b_4(\alpha, t) = \alpha \lambda_m \{\mathcal{P}\} - \frac{c_4}{\alpha} V^{1/2}(t)$$

donde $V^{1/2}(t) = V^{1/2}(\mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{\Lambda}(t), \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t))$. Se escoge un valor α^* de α suficientemente grande de tal forma que para $t = 0$ se cumpla

$$b_4(\alpha^*, 0) = \alpha^* \lambda_m \{\mathcal{P}\} - \frac{c_4}{\alpha^*} V^{1/2}(0) > 0. \quad (\text{D.30})$$

Entonces, la desigualdad (D.29) implica que la función de Lyapunov candidata (3.43) es decreciente, es decir, $V(t) \leq V(0)$. Entonces, por la definición de b_4 se tendrá que $b_4(\alpha^*, 0) < b_4(\alpha, t)$, $\forall t > 0$. Con este hecho se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{\Lambda}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \leq -b_4(\alpha^*, 0) \|\boldsymbol{\Sigma}\|^2 \quad (\text{D.31})$$

que es una función definida negativa del estado $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{\Lambda}, \dot{\boldsymbol{\zeta}})$. En consecuencia, aplicando el segundo método de estabilidad de Lyapunov se concluye que $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{\Lambda} = \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado (3.42) es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Bibliografía

- [1] C. Gosselin. *Kinematic analysis, Optimization and Programming of Parallel Robotic Manipulators*. Phd thesis, Department of McGill University, Montréal, Canada, June 1988.
- [2] J. P. Merlet. *Parallel Robots, Second Edition*. Springer, 2006.
- [3] M. W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. Wiley, New York, 1989.
- [4] L. W. Tsai. *Robot Analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [5] C. Gosselin and J. Angeles. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(3):573–581, June 1990.
- [6] C. Gosselin and J. Wang. Singularity loci of planar parallel manipulators with revolute actuators. *Robotics and Autonomous Systems*, 21(4):377–398, October 1997.
- [7] I. A. Bonev, D. Zlatanov, and C. Gosselin. Singularity analysis of 3-dof planar parallel mechanism via screw theory. *ASME Journal of Mechanical Design*, 125(3):573–581, September 2003.
- [8] G.F. Liu, Y.L. Wu, X.Z. Wu, Y.Y. Kuen, and Z.X. Li. Analysis and control of redundant parallel manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* Seoul, Korea, pages 3748–3754, May 2001.
- [9] J. Wang and C. Gosselin. Kinematic analysis and design of kinematically redundant parallel mechanism. *ASME Journal of Mechanical Design*, 126(1):109–118, January 2004.
- [10] F. Firmani and R. P. Podhorodeski. Force-unconstrained poses for a redundantly-actuated planar parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 39(5):459–476, May 2004.
- [11] F. Marquet, O. Company, S. Krut, and F. Pierrot. Enhancing parallel robots accuracy with redundant sensors. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* Washington, DC, pages 4114–4119, May 2002.

-
- [12] J. J. Craig. *Introduction to Robotics, 2nd Ed.* New York, Addison Wesley, 1989.
- [13] S. Kock and W. Schumacher. A parallel x-y manipulator with actuation redundancy for high-speed and active-stiffness applications. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Leuven, Belgium, pages 2295–2300, May 1998.
- [14] S. Kock and W. Schumacher. A mixed elastic and rigid-body dynamic model of an actuation redundant parallel robot with high-reduction gears. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. San Francisco, USA, pages 1918–1923, April 2000.
- [15] S. Kock and W. Schumacher. Control of a fast parallel robot with a redundant chain and gearboxes: Experimental results. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. San Francisco, USA, pages 1924–1929, May 2000.
- [16] G. Liu and Z. Li. A unified geometric approach to modeling and control of constrained mechanical systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(4):574–587, August 2002.
- [17] L. Ren, J. K. Mills, and D. Sun. Experimental comparison of control approaches on trajectory tracking control of a 3-DOF parallel robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(5):982–988, September 2007.
- [18] H. Cheng, Y.-K. Yiu, and Z. Li. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 8(4):483–491, December 2003.
- [19] H. Cheng, G. F. Liu, Y. K. Yiu, Xiong Z. H., and Z. X. Li. Advantages and dynamics of parallel manipulators with redundant actuation. *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robot and Systems*, Maui, Hawaii, USA, pages 171–176, November 2001.
- [20] R. L. Williams and A. R. Joshi. Planar parallel 3-RPR manipulator. *Proceedings of the Sixth Conference on Applied Mechanism and Robotics*, 1999.
- [21] Y. Su, D. Sun, L. Ren, and J. K. Mills. Integration of saturated PI synchronous control and PD feedback for control of parallel manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(1):202–207, February 2006.
- [22] J. W. F. Cheung and Y. S. Hung. Modeling and control of a 2-DOF planar parallel manipulator for semiconductor packing systems. *Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. Monterrey, CA, USA, pages 717–722, July 2005.
- [23] J. W. F. Cheung and Y. S. Hung. Robust control of a high precision 4-DOF parallel manipulator. *Proceedings of the International Federation of Automatic Control*. Seoul, Korea, pages 15708–15713, July 2008.

-
- [24] L. E. Weiss, A. C. Sanderson, and C. P. Neuman. Dynamic sensor-based control of robots with visual feedback. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA-3(5):404–417, October 1987.
- [25] S. Hutchinson, G. D. Hager, and P. I. Corke. A tutorial on visual servo control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5):651–670, October 1996.
- [26] P. I. Corke. *VISUAL CONTROL OF ROBOTS: High-Performance Visual Servoing*. Taunton, Somerset, England: Research Studies Press, 1996.
- [27] F. Chaumette and S. Hutchinson. Visual servo control part I: Basic approaches. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, pages 82–90, December 2006.
- [28] F. Chaumette and S. Hutchinson. Visual servo control part II: Advanced approaches. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, pages 109–118, March 2007.
- [29] N. P. Papanikolopoulos and P. K. Khosla. Adaptive robotic visual tracking: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(3):429–445, March 1993.
- [30] R. Kelly. Robust asymptotically stable visual servoing of planar robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5):759–766, October 1996.
- [31] H.H. Fakhry and W.J. Wilson. A modified resolver acceleration controller for position-based visual servoing. *Mathl. Comput. Modelling*, 24(5):1–9, 1996.
- [32] P. Martinet and J. Gallice. Position based visual servoing using a non-linear approach. *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 531–536, 1999.
- [33] W. J. Wilson, C. C. Williams, and G. S. Bell. Relative end-effector control using cartesian position based visual servoing. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5):684–996, October 1996.
- [34] Y. Su and C. Zheng. A simple PID control for asymptotic visual regulation of robot manipulators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(13):1525–1540, 2011.
- [35] N. Andreff, A. Marchadier, and P. Martinet. Vision-based control of a Gough-Stewart parallel mechanism using legs observation. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Barcelona, Spain, 26:2535–2540, April 2005.
- [36] N. Andreff and P. Martinet. Unifying kinematic modeling, identification, and control of a Gough-Stewart parallel robot into a vision-based framework. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(6):1077–1086, December 2006.
- [37] T. Dallej, N. Andreff, and P. Martinet. Image-based visual servoing of the I4R parallel robot without proprioceptive sensors. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Rome, Italy, pages 1709–1714, April 2007.

- [38] N. Andreff and P. Martinet. Vision-based self-calibration and control of parallel kinematic mechanism without proprioceptive sensing. *Intelligent Service Robotics*, 2(2):71–80, March 2009.
- [39] J. M. Sebastián, A. Traslosheros, L. Angel, F. Roberti, and R. Carelli. Parallel robot high speed object tracking. *Image Analysis and Recognition, Lecture Notes in Computer Science*, 4633:295–306, August 2007.
- [40] L. Angel, A. Traslosheros, J. M. Sebastián, L. Pari, R. Carelli, and F. Roberti. Vision-based control of the robotenis system. *Recent Progress in Robotics: Viable Robotic Service to Human, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 370:229–240, 2008.
- [41] Z. Qi and J. E. McInroy. Nonlinear image based visual servoing using parallel robots. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Roma, Italy, April 2007.
- [42] Z. Qi and J. E. McInroy. Improved image based visual servoing with parallel robot. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 53(4):359–379, July 2008.
- [43] F. Paccot, P. Lemoine, N. Andreff, D. Chablat, and P. Martinet. A vision-based computed torque control for parallel kinematic machines. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Pasadena, CA, USA, pages 1556–1561, May 2008.
- [44] R. Dahmouche, N. Andreff, Y. Mezouar, O. Ait-Aider, and P. Martinet. Dynamic visual servoing from sequential regions of interest acquisition. *The International Journal of Robotics Research*, 31(4):520–537, April 2012.
- [45] C.C. Cheah, K. Lee, S. Kawamura, and S. Arimoto. Feedback control for robotic manipulator with an uncertain Jacobian matrix. *Journal of Robotic Systems*, 16(2):119–134, 1999.
- [46] C.C. Cheah, K. Lee, S. Kawamura, and S. Arimoto. Asymptotic stability of robot control with approximate Jacobian matrix and its application to visual servoing. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* Sydney, Australia, 4:3939–3940, December 2000.
- [47] C.C. Cheah, K. Li, S. Kawamura, and S. Arimoto. Approximate Jacobian feedback control of robots with kinematic uncertainty and its application to visual servoing. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* Seoul, Korea, 3:2535–2540, May 2001.
- [48] E. Zergeroglu, D.M. Dawson, M.S. de Queiroz, and P. Setlur. Robust visual-servo control of robot manipulators in the presence of uncertainty. *Journal of Robotic Systems*, 20(2):93–106, February 2003.
- [49] M. R. Akella. Vision-based adaptive tracking control of uncertain robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(4):748–753, August 2005.

-
- [50] C.C. Cheah, C. Liu, and J.J.E. Slotine. Adaptive tracking control for robots with unknown kinematic and dynamic properties. *The International Journal of Robotics Research*, 25(3):283–296, March 2006.
- [51] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [52] S. Arimoto and F. Miyazaki. Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability. *Robotics Research: First International Symposium*. M. Brady and R.P. Paul (Eds.), Cambridge, MA: MIT Press, pages 783–799, 1984.
- [53] J. T. Wen. PID control for manipulators. Technical report, Rensselaer Polytechnic Institute, 1989.
- [54] J. T. Wen and S. H. Murphy. PID control for manipulators. Technical Report 54, CIRSSSE, 1990.
- [55] R. Ortega, A. Loria, and R. Kelly. A semiglobally stable output feedback PI²D regulator for robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(8):1432–1436, August 1995.
- [56] V. Santibañez and R. Kelly. A class of nonlinear PID global regulators for robot manipulators. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pages 3601–3606, May 1998.
- [57] R. Kelly. Global positioning of robot manipulators via PD control plus a class of nonlinear integral actions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(7):934–938, July 1998.
- [58] C. C. Cheah, S. Kawamura, S. Arimoto, and S. Lee. PID control of robotic manipulator with uncertain Jacobian matrix. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Detroit, Michigan, pages 494–499, May 1999.
- [59] Y. Su, P. C. Muller, and C. Zheng. A global asymptotic stable output feedback PID regulator for robot manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Roma, Italy, pages 4484–4489, April 2007.
- [60] E. M. Jafarov, N. A. Parlakci, and Y. Istefanopoulos. A new variable structure PID-controller design for robot manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(1):122–130, January 2005.
- [61] A. Chaillet, A. Loría, and R. Kelly. Robustness of PID-controller manipulators with respect to external disturbances. *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, pages 2949–2954, December 2006.
- [62] H. Berghuis and H. Nijmeijer. Global regulation of robots using only position measurements. *Systems and Control Letters.*, 21(4):289–293, 1993.

-
- [63] V. Santibañez and R. Kelly. Strict Lyapunov functions for control of robot manipulators. *Automatica*, 33(4):675–682, 1997.
- [64] H. Cheng. Dynamics and control of parallel manipulators with actuation redundancy. Msc thesis, The Hong Kong University of Science and Technology, May 2001.
- [65] Domingo Torres-Cruz. *Modelado y Control de Robots Paralelos*. Phd thesis, Departamento de control Automático, CINVESTAV, Febrero 2006.
- [66] Y. K. Yiu, H. Cheng, Z. H. Xiong, G. F. Liu, and Li Z. X. On the dynamics of parallel manipulators. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Seoul, Korea, pages 3766–3771, May 2001.
- [67] K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna, 2da Ed.* Prentice Hall, 1993.
- [68] A. Soria, R. Garrido, I. Vázquez, and Vázquez R. Architecture for rapid prototyping of visual controllers. *Robotics and Autonomous Systems*, 54:486–495, 2006.
- [69] K. Voss, W. Ortmann, and H. Suesse. Dias - interactive image processing system, v5.0. Technical report, Friedrich-Schiller-University Jena, Germany, 1998.
- [70] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices*. Academic Press, 1985.

Lista de acrónimos

GDL	Grados de libertad
SCARA	Siglas en ingles de: Selective Compliance Assembly Robot Arm
MECCA	Mecanismo equivalente en cadena cinemática abierta
PD	Proporcional-Derivativo
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
IBVS	Siglas en ingles de: Image-based visual servoing. En español Control visual basado en imagen.