



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

“Control de un Cuadrirotor (X4) por medio de Visión  
Estereoscópica”

**Tesis que presenta**

M. en C. Zizilia Zamudio Beltrán

**Para obtener el Grado de**

Doctora en Ciencias

**En la Especialidad de**

CONTROL AUTOMÁTICO

**Directores de la Tesis:  
Dr. Jorge Torres Muñoz  
Dr. Rogelio Lozano Leal**

México, Distrito Federal.

FEBRERO, 2013

*I KNOW I'M RIGHT WHERE I BELONG ... SOMETHING FROM NOTHING NEVER PROVED ME WRONG .... BUT WHO  
WOULD HAVE KNOWN HOW BITTERSWEET THIS WOULD TASTE? ... STILL MY HEART WILL GO ON ... GMD*

## **AGRADECIMIENTOS**

*Al CONACYT por el apoyo económico otorgado para la realización de mis estudios de Doctorado. Número de Becario 203585.*

*Al CINVESTAV y al Departamento de Control Automático por la formación académica otorgada durante casi 7 años, junto con el personal que siempre me brindó un excelente trato y siempre tuve su apoyo, Lucerito, Paty, Sonia y Elizabeth.*

*A mis Sinodales Dr. Wen Yu Liu, Dr. Vadim Azhmyakov, Dr. Moisés Bonilla y el Dr. José Luis Rullán por sus valiosos comentarios otorgados sobre la tesis para su mejora.*

*Al Dr. Rogelio Lozano por la dirección de la tesis, a mi Asesor Dr. Jorge Torres por todo el respaldo brindado desde que tomó la dirección de la tesis, sólo tuve de su parte un gran apoyo y fue fundamental para terminal el presente trabajo.*

*A mis amigos y compañeros del Departamento de Control Automático, con los que he compartido grandes momentos y no tengo palabras que expresen todo mi agradecimiento por hacer más ligero este camino, escucharme cuando lo he necesitado y ser grandes seres humanos, Arturo Gil, Carlitos, Chucho, Irving, Jorge, Lalito, Miguel Ángel, Micho, Normita y Torvic.*

*A Edgar, mi amigo, mi compañero, por todo el tiempo de felicidad que me has brindado, por estar a mi lado, apoyarme en mi trabajo y pasar tiempos difíciles juntos.*

*A mi Familia, la cual ha sido la que más he sacrificado, mis hermanas, ejemplo de lucha y trabajo, Luz sabes que te amo con toda el alma, tu eres mi persona favorita, a mi mamá que a pesar de la distancia y el tiempo su ejemplo permanece en mi mente y me recuerda cada instante la mujer que me gustaría ser algún día, mi corazón y alma son tuyas, pero sin duda al que más le debo es a mi Papá Zam por apoyarme siempre en mis decisiones y alentarme a terminar todo lo que empiezo, por ser mi soporte, por darme un ejemplo de vida íntegra, ERES MI VIDA!*

*Y a todas aquellas personas que de una u otra forma hicieron posible la culminación del presente trabajo.*

## Resumen

En esta tesis se presenta la estabilización de vuelo de un helicóptero de cuatro motores, mejor conocido como cuadrimotor, en donde se usan sensores inerciales para estabilizar el vuelo en orientación y la información de un sistema de visión (monocular y estereoscópica) para lograr una posición determinada con respecto a una marca, se describe el modelo dinámico del vehículo. Además, se realiza la estimación de las velocidades lineales  $v_x$  y  $v_y$  por medio de flujo óptico, usando la implementación en OpenCv del algoritmo de Lucas-Kanade por su fácil implementación computacional. Toda esta información proporcionada por los sensores se usa para la implementación de la estrategia de control no lineal, la cual se basa en la técnica de las saturaciones anidadas. Esta estrategia de control y el sistema de visión se han implementado en tiempo real para el control de la aeronave.

## Abstract

This work presents the stabilization of a helicopter which has four engines, better known as quadrotor, where inertial sensors are used to stabilize the orientation's flight and information of a vision system (monocular and stereoscopic) is used to achieve a certain position with respect to a land mark, the dynamic model of the vehicle is described. Moreover, we estimated the linear velocities  $v_x$  and  $v_y$  by optical flow, using the software "OpenCV" which has the implementation of Lucas-Kanade algorithm. The information provided by the sensors is used to implement the non-linear control strategy, which is based on the technique of nested saturations. The control strategy and the vision system have been implemented in real time on the quadrotor.

# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>9</b>
1.1. Motivación y marco de la tesis . . . . .	9
1.2. Tema e importancia de la tesis . . . . .	13
1.3. Visual servoing y Control Visual . . . . .	14
1.4. Objetivos de la tesis . . . . .	15
1.5. Organización de la tesis . . . . .	16
<b>2. MODELO DINÁMICO DEL CUADRIROTOR</b>	<b>19</b>
2.1. Introducción . . . . .	19
2.2. Principio básico del Cuadrirotor . . . . .	20
2.3. Representación de la orientación . . . . .	23
2.4. Modelo Dinámico . . . . .	25
2.4.1. Ecuaciones de movimiento de Lagrange . . . . .	28
2.5. Simulación . . . . .	32
2.6. Conclusiones . . . . .	33
<b>3. ESTRATEGIA DE CONTROL</b>	<b>35</b>
3.1. Control por medio de funciones de Saturación Anidadas . . . . .	37
3.2. Control de la altura y el ángulo de guiñada . . . . .	38

3.3. Control del ángulo $\phi$ y del desplazamiento en el eje $y$ . . . . .	40
3.4. Control del ángulo $\theta$ y del desplazamiento en el eje $x$ . . . . .	41
3.5. Simulación . . . . .	42
3.6. Conclusiones . . . . .	45
<b>4. VISUAL SERVOING</b>	<b>47</b>
4.1. Conceptos Generales . . . . .	48
4.2. Modelo de Proyección Central . . . . .	51
4.2.1. Calibración y Parámetros de la Cámara . . . . .	56
4.3. Visión Estéreo . . . . .	58
4.3.1. Disparidad . . . . .	60
4.3.2. Triangulación . . . . .	60
4.4. Flujo Óptico . . . . .	62
4.4.1. Fundamentos Matemáticos . . . . .	64
4.4.2. Método Lucas-Kanade . . . . .	65
<b>5. RESULTADOS</b>	<b>69</b>
5.1. Construcción de la Plataforma . . . . .	69
5.1.1. Estructura del cuadrirotor . . . . .	72
5.1.2. Unidad de Procesamiento . . . . .	74
5.1.3. Sensores . . . . .	75
5.1.4. Comunicación inalámbrica . . . . .	76
5.1.5. Batería . . . . .	77
5.2. Sistema de Visión . . . . .	78
5.2.1. Calibración de las cámaras . . . . .	78
5.2.2. Estimación de la posición del cuadrirotor . . . . .	81
5.2.3. Flujo Óptico . . . . .	86

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
5.2.4. Combinación de Posición y Flujo óptico . . . . .	90
5.3. Control del cuadrirotor . . . . .	92
5.3.1. Visión Monocular . . . . .	92
5.3.2. Visión Estereoscópica. . . . .	93
5.4. Seguimiento de Trayectoria . . . . .	94
<b>6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO</b>	<b>105</b>
6.1. Publicaciones . . . . .	107
<b>Bibliografía</b>	<b>108</b>



# Índice de figuras

2.1. Helicóptero de Bothezat . . . . .	20
2.2. Esquema del Cuadri-Rotor . . . . .	21
2.3. Momentos de cabeceo, alabeo y guiñada . . . . .	22
2.4. Sistemas de Referencias . . . . .	24
2.5. Rotaciones del sistema $\mathbf{O}_{UVW}$ . . . . .	26
2.6. Simulación del Modelo Dinámico del Cuadrirotor . . . . .	32
2.7. Respuesta en Posición . . . . .	33
2.8. Respuesta en Orientación . . . . .	34
2.9. Dinámica del Cuadrirotor . . . . .	34
3.1. Control de Orientación y Posición . . . . .	36
3.2. Función de Saturación . . . . .	38
3.3. Simulación del contron en el Cuadrirotor . . . . .	42
3.4. Vuelo del cuadrirotor en el simulador . . . . .	43
4.1. Visual Servoing . . . . .	49
4.2. Geometría de la cámara por proyección central . . . . .	53
4.3. Sistema Estéreo . . . . .	59
4.4. Geometría para cámaras paralelas . . . . .	61

5.1. Plataforma X4 . . . . .	70
5.2. Cuerpo del Cuadrirotor . . . . .	72
5.3. Motor Brushless y Propelas . . . . .	73
5.4. Rabbit RCM300 . . . . .	74
5.5. IMU . . . . .	75
5.6. XBee . . . . .	76
5.7. Batería LiPo . . . . .	77
5.8. Imágenes Cargadas en Matlab . . . . .	79
5.9. Error . . . . .	80
5.10. Parámetros Extrínsecos de la cámara . . . . .	80
5.11. Parámetros intrínsecos de la cámara . . . . .	81
5.12. Descriptor . . . . .	82
5.13. Correspondencia de la distancia en z . . . . .	84
5.14. Desempeño del Polinomio (grado 7) . . . . .	85
5.15. Posición con una cámara . . . . .	86
5.16. Posición con Visión Estéreo . . . . .	87
5.17. Diagrama de bloques del algoritmo . . . . .	88
5.18. Esquema del Software del sistema . . . . .	89
5.19. Posición y Flujo óptico Estereo . . . . .	91
5.20. Gyro en x monocular . . . . .	92
5.21. Gyro en y monocular . . . . .	93
5.22. Acelero en x monocular . . . . .	94
5.23. Acelero en y monocular . . . . .	95
5.24. Posición (x,y) . . . . .	96
5.25. Altura del Cuadrirotor . . . . .	97
5.26. Cuadrirotor en Vuelo . . . . .	97

5.27. Gyr en x - estereo . . . . .	98
5.28. Gyro en y - estereo . . . . .	98
5.29. Acelero en x - estereo . . . . .	99
5.30. Acelero en y - estereo . . . . .	99
5.31. Distancia z - estereo . . . . .	100
5.32. Vuelo del Cuadrirotor con Visión Estereo . . . . .	100
5.33. Pruebas del algoritmo de reconocimiento de una Línea Roja . . . . .	101
5.34. Detección de una Línea Roja . . . . .	101
5.35. Comportamiento de los Gyros en el seguimiento de una línea . . . . .	102
5.36. Comportamiento de los Acelerados en el seguimiento de una línea . . . . .	102
5.37. Vuelo del Cuadrirotor realizando el seguimiento de línea . . . . .	103



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Motivación y marco de la tesis

En los últimos años hemos sido testigos de un creciente interés en vehículos aéreos no tripulados (UAVs), debido a sus numerosas aplicaciones tanto en el campo militar o en el campo civil, ya que son múltiples las ocasiones en las que disponer de un punto de vista elevado o tener la capacidad de situar un sensor en una zona de difícil acceso por tierra facilitaría tareas cotidianas de inspección o vigilancia. Una característica importante es que los sistemas de navegación autónoma pueden sustituir a los operadores humanos en múltiples entornos peligrosos, como la vigilancia de volcanes activos, operaciones de búsqueda y salvamento de personas en desastres naturales, inspección de estructuras civiles de gran tamaño, vigilancia de fronteras, etc.. El difícil acceso por tierra hasta el objeto a ser inspeccionado puede convertir un sencillo trabajo en una tarea costosa. Actualmente, la mayoría de las inspecciones aéreas son realizadas mediante el uso de helicópteros tripulados.

El riesgo del operador a bordo de las aeronaves, se muestra de forma irrefutable cuando, de forma ocasional, aparece la necesidad de realizar labores tales como la de inspección, vigilancia o búsqueda de víctimas en ambientes perjudiciales para la salud del personal que interviene en ellas, como es el caso de los accidentes de origen nuclear o químico. Ante estas necesidades, la comunidad científica se ha planteado la posibilidad de realizar dichas labores utilizando vehículos aéreos no tripulados, desarrollando complejas técnicas para su control y haciendo uso de modernos sistemas de comunicaciones. El progreso de la tecnología en la miniaturización y aumento de la capacidad de energía y el desempeño de los sistemas electromecánicos en realidad permite el desarrollo y la fabricación de versiones de UAVs pequeños y altamente automatizados.

Los helicópteros proporcionan la agilidad necesaria debido a su dinámica e inestabilidad inherente, el helicóptero de 4 rotores conocido también como cuadrirotor, tiene características adicionales deseables, además de que se han vuelto comunes en control y los laboratorios de aeronáutica gracias a su simplicidad mecánica y facilidad de mantenimiento. A diferencia de los helicópteros convencionales que tienen ángulos de cabeceo variables, un cuadrirotor tiene un ángulo de cabeceo fijo y la velocidad de los rotores se modifica de tal manera que se produzcan las fuerzas de elevación deseadas para controlar el helicóptero. Las ventajas de esta configuración son que el helicóptero puede ser miniaturizado sin grandes problemas y que cada rotor produce la elevación para que la carga sea incrementada.

Los movimientos básicos de un quadrirotor son generados por la variación de la velocidad de cada uno de los cuatro rotores, cambiando así las fuerzas de sustentación. Desafortunadamente, sólo cuatro grados de libertad pueden ser controlados directamente variando la velocidad de rotación de los motores individualmente

o colectivamente. Por lo tanto, el cuadri-rotor pertenece a una clase especial de sistemas subactuados no lineales, ya que 6 grados de libertad son controlados a través de 4 entradas.

Con el fin de crear una entidad autónoma UAV, se necesita del conocimiento de la posición del helicóptero y la orientación del vehículo. Esta información puede ser obtenida de los sistemas de navegación inercial (INS), Sistemas de Posicionamiento Global (GPS) u otros sensores, como sensores de ultrasonidos, sensores de radar láser, etc.. Por lo general, múltiples sensores se utilizan para superar las limitaciones de un sensor individual, lo que aumenta la fiabilidad y la disminución de los errores.

Los sistemas de visión son empleados como sensores y nos permiten obtener imágenes del entorno, procesarlas y tomar ciertas decisiones basadas en la evaluación de la(s) imagen(es) adquirida(as). Su uso en diversas aplicaciones sigue creciendo en parte a la aparición de sistemas de visión económicos de bajo consumo. La visión para el control de vuelo abarca una amplia gama de áreas de investigación tales como la detección de objetos y de seguimiento, la estimación de la posición, la fusión de sensores con sistemas de navegación inercial y GPS, y el modelado y control multivariable de sistemas no lineales.

El principal problema en la navegación es detectar y combinar las características de los estímulos sensoriales. La selección de características es importante ya que determinará la complejidad en la descripción de las características, la detección y el juego. Los investigadores han utilizado diferentes tipos de patrones para ser reconocidos por los sistemas basados en visión por computadora [1]. Para el enfoque de control visual [2], el primer paso consiste en definir un conjunto particular de características en la imagen. El método de control visual  $2\frac{1}{2}D$  se utiliza en [3] para hacer el trayecto cartesiano de los UAV controlable. Otros trabajos recientes presen-

tan enfoques visuales para el posicionamiento de vehículos aéreos no tripulados. En [4] un objetivo compuesto por cuatro círculos se utiliza para localizar los vehículos aéreos no tripulados con respecto a la tierra con un error basado en un dato del centroide esférico. En [5] usan un sistema de visión con una cámara en tierra para estimar la posición del quadrirotor. Este sistema utiliza cinco marcas de color unido a la parte inferior de la quadrirotor, la posición del helicóptero se estima obteniendo el promedio de la posición de cinco marcas. El uso de un objetivo para el aterrizaje autónomo se ha aplicado en [6], [7] y [8]. El uso de vídeo para estimar el movimiento de vehículos aéreos no tripulados de vuelo ha sido descrita en [9]. Las estrategias de seguimiento con objetivos son estudiados en [10].

Además, el flujo óptico o velocidad de imagen ha sido utilizado para la navegación de vehículos aéreos en [11], [12], [13] y [14]. Es también utilizado para el cálculo de detección de movimiento, tiempo de colisión, medición de disparidad en imágenes estereoscópicas, etc.. El flujo óptico es calculado utilizando una secuencia de imágenes ordenadas en el tiempo que permiten la estimación del movimiento en una imagen en dos dimensiones, ya sea como una imagen instantánea de velocidad o una imagen discreta de desplazamientos [15].

Cabe mencionar, que en algunas ocasiones los vehículos aéreos en miniatura se utilizan simplemente como plataformas tecnológicas, útiles para la validación de determinados conceptos aerodinámicos, leyes de control o ciertos equipos y/o programas informáticos. Estas plataformas son de gran utilidad, ya que permiten observar y analizar los límites del vehículo con la finalidad de verificar su confiabilidad y desempeño en vuelo [16].

## 1.2. Tema e importancia de la tesis

Como respuesta a la necesidad social de disponer de vehículos autónomos, en los últimos años han aparecido algunos sistemas comerciales que permiten su guiado y control. Estos sistemas tienen un coste elevado, pero significativamente inferior al coste de los sistemas militares. No obstante, una de sus grandes desventajas es que son sistemas cerrados, con capacidades autónomas limitadas, por lo que se pretende realizar una plataforma abierta, que permita investigar de forma eficiente técnicas para el control autónomo de un vehículo aéreo, incorporando además algoritmos de visión, los cuales permitirán obtener una mayor información del sistema, dejando abierto un campo más para futuras aplicaciones.

Estamos interesados en la estabilización del cuadrirotor con un enfoque de control basado en visión. Se desea calcular la posición del mini-helicóptero con respecto a un objetivo visual usando primeramente una cámara para posteriormente usar visión estéreo, con el fin de mejorar el desempeño del sistema de visión. Este sistema también se utiliza para estimar la velocidad lineal del mini-helicóptero. El control no lineal, que se lleva a cabo se basa en saturaciones anidadas y funciona a una frecuencia de muestreo que es compatible con el sistema de visión que se utiliza para la posición y la estimación de la velocidad.

En México los vehículos aéreos autónomos son un tema de investigación relativamente nuevo, por lo que la importancia de abrir camino en este tema es de gran impacto, ya que se pretende igualar y superar el trabajo desarrollado a nivel mundial compitiendo con países de primer mundo.

### 1.3. Visual servoing y Control Visual

La visión es un sensor muy práctico ya que dentro de ciertos límites imita la visión humana y permite una medición del ambiente de trabajo sin un contacto directo con éste. La visión artificial es una disciplina que se enfrenta con el problema de captar e interpretar las imágenes del entorno que envuelve a un sistema inteligente y le está enviando enormes cantidades de píxeles o elementos luminosos de información que resultan cruciales tanto para aprender y predecir acontecimientos, como para reaccionar frente al mundo. Algunos de los aspectos más estudiados en este ámbito son: reconocimiento de objetos y sus características, visión del color y análisis visual del movimiento [17].

El desempeño de los sistemas robóticos en ambientes estructurados en presencia de objetos cuya posición y orientación son bien conocidos, es un problema actualmente en estudio. Sin embargo, la realización de tareas en entornos dinámicos presenta numerosas dificultades que no están resueltas. Es conocido que la capacidad de los sensores utilizados incrementan o disminuyen la versatilidad y el campo de aplicación de los robots. Los sistemas de visión son capaces de proporcionar información de gran utilidad en estos entornos cambiantes, los cuales proporcionan información sobre los objetos en la escena de trabajo. Además, el uso de la visión en el campo de la robótica está impulsada por la amplia disponibilidad de cámaras de bajo costo. Hoy en día los sistemas de visión proporcionan una información muy rica, con bajo nivel de ruido. Sin embargo, la extracción de información relevante en tiempo real desde una sola imagen o un conjunto de imágenes es una tarea bastante difícil que sigue siendo un obstáculo importante para el uso de la visión en robots móviles [18].

La transformación de un espacio tridimensional a un plano de dos dimensiones que es realizada por una cámara puede modelarse utilizando el modelo de proyección

central. Una de las principales ventajas de utilizar este modelo, es que la relación entre las coordenadas del mundo y las coordenadas en píxeles es una proyección lineal y esta propiedad es independiente de la elección de los sistemas de coordenadas en el plano imagen y en el mundo. Además, este modelo ignora efectos no lineales tales como aquellos causados por las distorsiones de las lentes [19].

## 1.4. Objetivos de la tesis

El objetivo principal de esta tesis consiste en combinar un sistema de visión, el cual nos proporcionará la posición y velocidad lineal del vehículo junto con una unidad de medición inercial (IMU) la cual nos ayudará a lograr la estabilización en orientación del cuadrirotor, para lograr un buen desempeño del cuadrirotor en vuelo estacionario. El sistema de visión se lleva a bordo y la imagen se envía a una PC, la cual calcula el flujo óptico y la posición con respecto a un objetivo determinado. El flujo óptico se obtiene por medio del método de Lucas-Kanade piramidal. Las mediciones obtenidas con la IMU se utilizan para estabilizar la orientación de la quadrotor usando un algoritmo de control basado en saturaciones anidadas. Como trabajo adicional el sistema de visión implementado se utilizará para realizar el seguimiento de trayectoria de una línea.

Como objetivos particulares se tienen:

- Desarrollar una plataforma de arquitectura abierta, esto con el fin de poder implementar diferentes algoritmos y técnicas tanto de control como de visión, esta plataforma debe ser capaz de mantenerse de forma controlada en el aire.

- Describir el modelo matemático de un cuadrirotor, con lo que realizará la simulación del sistema, éste punto es básico para el desarrollo del sistema de control que se implementará en el vehículo, ya que se necesita corroborar el desempeño de la plataforma antes de ser implementada de manera real, debido al riesgo que la plataforma implica.
- Implementar un sistema de visión, el cual nos ayudará a estimar la posición del cuadrirotor con respecto a una marca y su velocidad lineal de la aeronave, estos datos servirán para realizar el control de la aeronave, además se realizará el seguimiento de trayectoria de una línea recta con ayuda del flujo óptico.
- Implementar una estrategia de control para el vuelo en orientación y por medio de los datos obtenidos con el sistema de visión (posición y velocidad lineal) controlar el vuelo estacionario de la plataforma experimental, con la cual el desempeño del cuadrirotor en tiempo real tenga un buen desempeño.

## 1.5. Organización de la tesis

Este trabajo ha sido organizado de la siguiente forma:

- En el capítulo 2 se desarrollará el modelo dinámico del cuadrirotor.
- En el capítulo 3 se introducen las bases matemáticas aplicadas para la implementación de los sistemas de visión (monocular y estéreo).
- El capítulo 4 está destinado a presentar la estrategia de control a implementarse en el cuadrirotor, para orientación, posición y el seguimiento de una trayectoria (línea).

- En capítulo 5 se presentan los resultados tanto del sistema de visión (monocular y estéreo), como del control implementado en el cuadrirotor en tiempo real y los resultados del seguimiento de una trayectoria (línea).
- El capítulo 6 contiene las conclusiones, trabajos futuros y los trabajos publicados.



## Capítulo 2

# MODELO DINÁMICO DEL CUADRIROTOR

### 2.1. Introducción

El helicóptero es una de las más complejas máquinas voladoras. Esta complejidad se debe a su versatilidad y maniobrabilidad de ejecutar muchas clases de tareas. El helicóptero clásico está convencionalmente equipado con un motor principal y un rotor situado en la cola del vehículo. Sin embargo existen otros tipos de helicópteros, incluyendo el helicóptero de doble rotor y el helicóptero de rotor co-axial. En esta tesis se interesa particularmente en el control de un mini-helicóptero con cuatro motores. Para este trabajo se le llamará **cuadrirotor**.

En 1922, George de Bothezat construyó un helicóptero con cuatro rotores bajo el patrocinio del Ejército de los EE.UU. (figura 2.1). El helicóptero tenía cuatro rotores "sixbladed", los cuales estaban montados en los extremos de vigas de 18 m de longitud, formando una cruz. Los ejes del cuadrirotor no eran paralelos, pero

ligeramente inclinados hacia el interior. El helicóptero tenía un peso de 1700 kg [20].

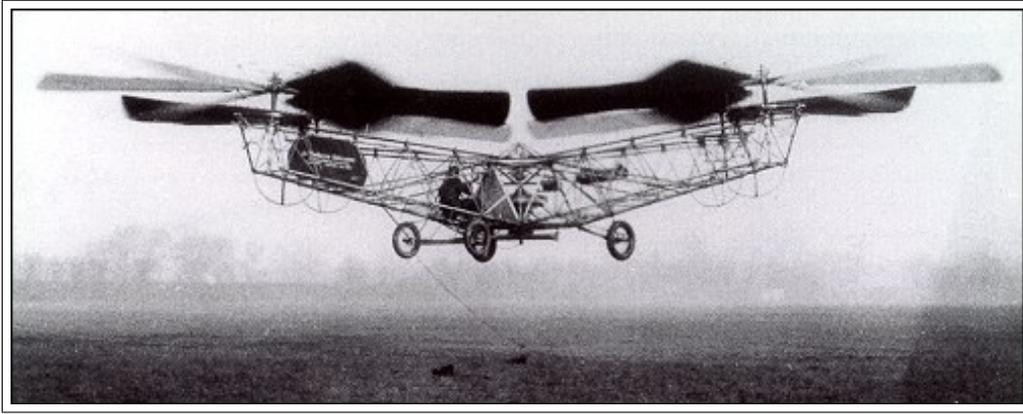


Figura 2.1: Helicóptero de Bothezat

Un helicóptero autónomo, como ya se mencionó, es muy adecuado para tareas como la vigilancia y la inspección. La capacidad inherente del helicóptero para volar a bajas velocidades, volar lateralmente y realizar maniobras en espacios estrechos hace que sea una plataforma ideal para estas tareas. Estas habilidades son especialmente útiles en entornos estructurados, donde las características que serán seguidas se entienden muy bien. La naturaleza de las características del entorno facilita la estimación del estado y el control basado en visión.

## 2.2. Principio básico del Cuadrirotor

La fuerza  $f_i$  producida por el motor  $i$  es proporcional al cuadrado de la velocidad angular, esto es,  $f_i = k\omega_i^2$ . En nuestro caso un motor sólo puede girar en una dirección fija, por lo cual la fuerza producida será siempre positiva (figura 2.2).

Algunos de los rasgos principales del cuadri-rotor son, que el motor delantero y el trasero rotan en sentido anti-horario, mientras que los otros dos rotan en sentido

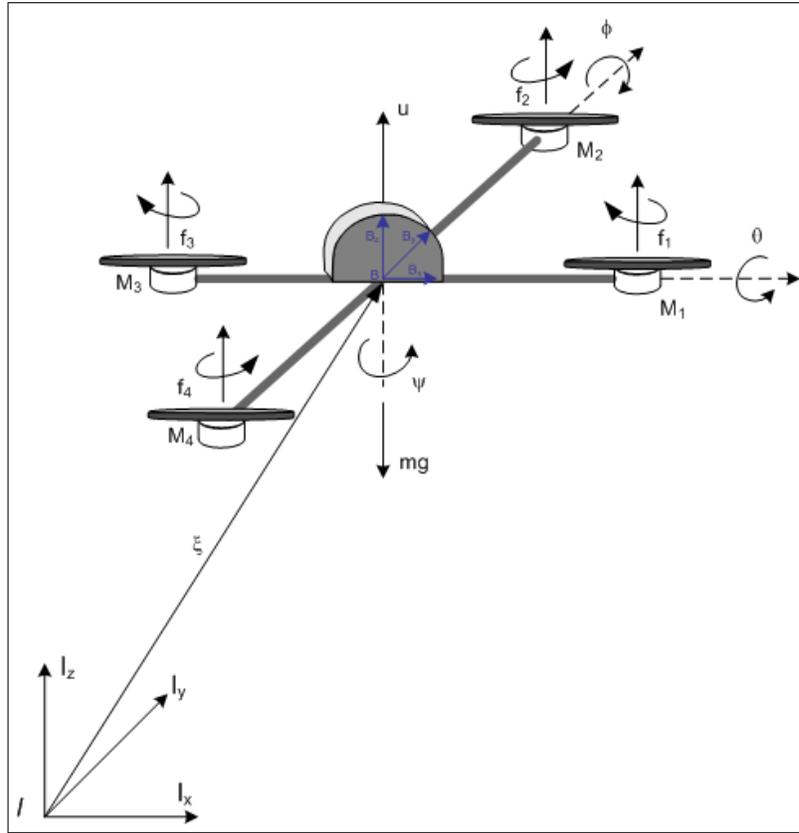


Figura 2.2: Esquema del Cuadri-Rotor

de las manecillas del reloj. Con ello, los efectos giroscópicos y los momentos aerodinámicos tienden a cancelarse en vuelo estacionario. La fuerza principal es la suma de cada fuerza producida por cada motor, es decir:

$$u = \sum_{i=1}^4 f_i \quad (2.1)$$

El momento de cabeceo (figura 2.2) es producido por la diferencia de  $f_2 - f_4$ , el momento de alabeo es producido por  $f_3 - f_1$ , y el momento de guiñada es la suma de  $\tau_{M_1} + \tau_{M_2} + \tau_{M_3} + \tau_{M_4}$ , donde  $\tau_{M_i}$  es el momento de reacción del motor  $i$  (figura 2.3).

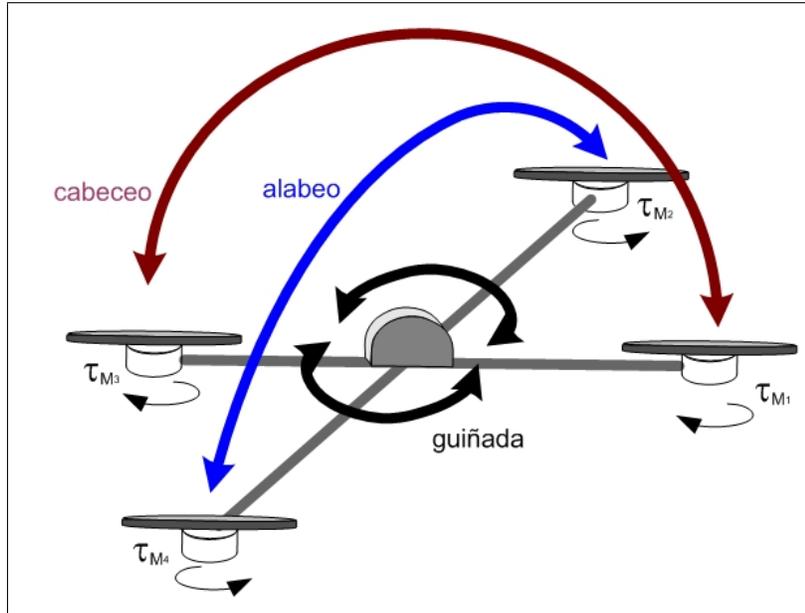


Figura 2.3: Momentos de cabeceo, alabeo y guiñada

El par del motor es opuesto por un arrastre  $\tau_{drag}$ , tal que:

$$I_{rot}\dot{\omega}_i = \tau_{M_i} - \tau_{drag} \quad (2.2)$$

donde  $I_{rot}$  es el momento de inercia del motor alrededor de su eje.

Por definición se tiene que el arrastre es:

$$\tau_{drag} = \frac{1}{2}\rho Av^2 \quad (2.3)$$

donde  $\rho$  es la densidad del aire,  $A$  es el área frontal de la hélice, y  $v$  es su velocidad relativa con respecto al aire.

En magnitud, la velocidad angular  $\omega$  es igual a la velocidad lineal  $v$  dividida por el radio de rotación  $r$ , es decir  $\omega = v/r$ . reescribiendo el arrastre (2.3), se obtiene:

$$\tau_{drag} = k_{drag}\omega^2 \quad (2.4)$$

en donde  $k_{drag} > 0$  es una constante, que depende entre otros factores, de la intensidad del aire, del radio y de la forma de la hélice.

Para maniobras cuasi-estacionarias,  $\omega$  es una constante, entonces de (2.2) se tiene que:

$$\tau_{M_i} = \tau_{drag} \quad (2.5)$$

La velocidad del motor  $M_3$  se debe aumentar y la del motor  $M_1$  disminuir para que el cuadri-rotor avance. De manera similar el movimiento lateral del helicóptero se obtiene con los motores laterales ( $M_2$  y  $M_4$ ). El movimiento de guiñada se obtiene incrementando el par del motor delantero y trasero ( $\tau_{M_1}, \tau_{M_3}$ ) mientras que se reduce el par en los motores laterales ( $\tau_{M_2}, \tau_{M_4}$ ). Todo esto manteniendo la fuerza principal  $u$ , constante.

## 2.3. Representación de la orientación

Un punto queda totalmente definido en el espacio a través de los datos de su posición. Sin embargo, para el caso de un sólido, es necesario definir cuál es su orientación con respecto a un sistema de referencia. Los vectores unitarios del sistema de referencia  $O_{XYZ}$  serán  $i_x, j_y, k_z$ , mientras que los del sistema de referencia  $O_{UVW}$  serán  $i_u, j_v, k_w$ .

Un vector  $P$  del espacio podrá ser referido a cualquiera de los sistemas de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}_{uvw} = [p_u, p_v, p_w]^T = p_u \cdot \mathbf{i}_u + p_v \cdot \mathbf{i}_v + p_w \cdot \mathbf{i}_w \quad (2.6)$$

$$P_{xyz} = [p_x, p_y, p_z]^T = p_x \cdot i_x + p_y \cdot i_y + p_z \cdot i_z \quad (2.7)$$

se puede obtener la siguiente equivalencia:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

donde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

es la matriz de rotación que define la orientación del sistema  $O_{UVW}$  con respecto al sistema  $O_{XYZ}$  (figura 2.4), donde cada elemento de  $R$  está dado por una multiplicación de vectores e.g.  $i_x i_u$ .

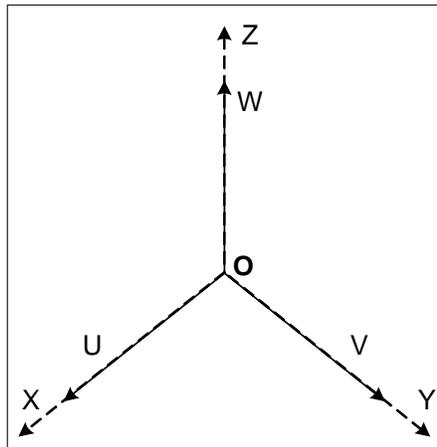


Figura 2.4: Sistemas de Referencias

Las matrices  $R(z, \psi)$ ,  $R(y, \theta)$  y  $R(x, \phi)$ , se denominan matrices básicas de rotación de un sistema espacial de tres dimensiones (figura 2.5), las cuales al ser multiplicadas

entre sí forman la matriz de rotación:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{z}, \psi)\mathbf{R}(\mathbf{y}, \theta)\mathbf{R}(\mathbf{x}, \phi) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Nótese que la matriz  $\mathbf{R}$  dada en la ecuación (2.30), difiere de esta matriz de rotación  $\mathbf{R}$  que se presenta más adelante, ya que las matrices básicas de rotación fueron multiplicadas en otra secuencia, pero no afecta la solución del problema de modelado, ya que  $\mathbf{R}$  denota los giros angulares del cuadrirotor, de esta forma se pueden tener diferentes matrices de rotación  $\mathbf{R}$ , todas ellas correctas.

## 2.4. Modelo Dinámico

A continuación se presenta el modelo dinámico del quadri-rotor. El modelo es obtenido a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Las ecuaciones generalizadas de un vehículo aéreo pueden escribirse como:

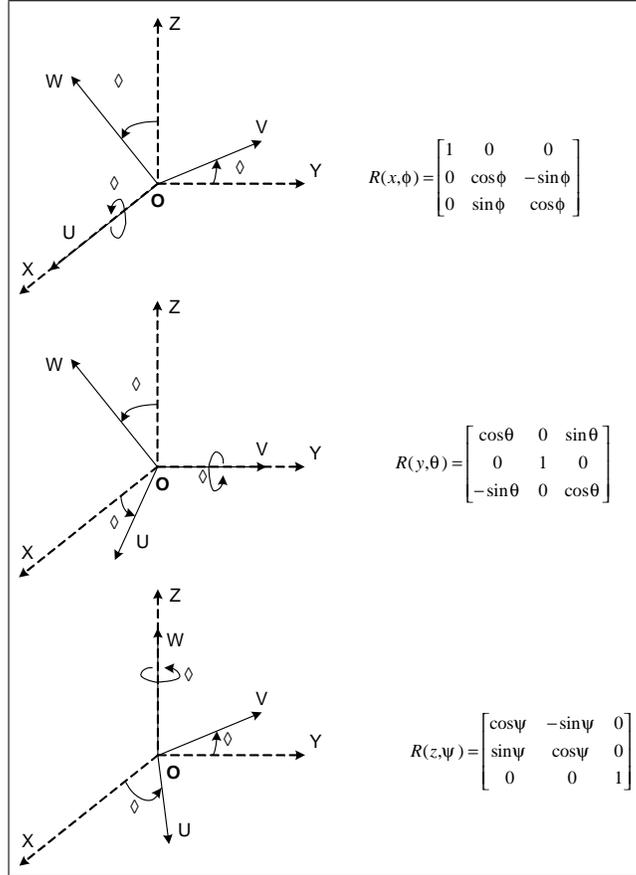
$$q = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^6, \quad (2.11)$$

donde  $\xi = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  denota la posición del centro de masa del helicóptero relativo al eje de referencia  $I$ , y  $\eta = (\psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$  son los ángulos de Euler,  $\psi$  es el ángulo de guiñada,  $\theta$  es el ángulo de cabeceo,  $\phi$  es el ángulo de alabeo [21], los cuales representan la orientación del helicóptero (figura 2.2), éstos ángulos representan la orientación del cuadrirotor. Por lo que se tienen coordenadas traslacionales y rotacionales, respectivamente:

$$\xi = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \eta = (\phi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.12)$$

La energía cinética traslacional está definida como

$$T_{trans} \triangleq \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} \quad (2.13)$$

Figura 2.5: Rotaciones del sistema  $\mathbf{O}_{UVW}$ 

donde  $m$  denota la masa del cuadrirotor. La energía cinética rotacional está definida como

$$T_{rot} \triangleq \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (2.14)$$

La energía potencial está dada por

$$U = mgz \quad (2.15)$$

en donde  $z$  es la altura a la que se encuentra el vehículo,  $g$  es la aceleración gravitacional.

El vector de la velocidad angular  $\omega$  respecto a los ejes de coordenadas del cuerpo se relaciona con las velocidades generalizadas  $\dot{\eta}$  (en la región donde los ángulos de Euler son válidos) utilizando una relación estándar cinemática [22]

$$\dot{\eta} = W_v^{-1}\omega \quad (2.16)$$

en dónde

$$W_v = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Definiendo,

$$J = J(\eta) = W_v^T \mathbf{I} W_v \quad (2.18)$$

tal que:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} \quad (2.19)$$

La matriz  $J = J(\eta)$  actúa como matriz de inercia para la energía cinética total rotacional del cuadri-rotor, expresada directamente en términos de las coordenadas generalizadas  $\eta$  y tiene la siguiente forma:

$$J = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

los términos  $I_x, I_y, I_z$  son las constantes de energía cinética en cada componente de  $x, y$  y  $z$ .

Definiendo el Lagrangiano:

$$L(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - U \quad (2.21)$$

se tiene entonces que

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} - mgz \quad (2.22)$$

### 2.4.1. Ecuaciones de movimiento de Lagrange

El modelo para las dinámicas completas del cuadrirotor se obtiene mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange con fuerzas externas generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i \quad (2.23)$$

donde  $F = (F_\xi, \tau)$ ,  $\tau$  son los momentos generalizados (guiñada, cabeceo y alabeo) y  $F_\xi$  es la fuerza traslacional aplicada al vehículo debido a las entradas de control. De la figura (2.2) se tiene:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

donde  $u$  es la entrada de control principal o fuerza principal, en la dirección del eje  $z$ , expresada como:

$$u = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \quad (2.25)$$

para  $i = 1, \dots, 4$ ,  $f_i$  es la fuerza producida por el motor  $M_i$ .

De manera general,

$$f_i = k_i \omega_i^2 \quad (2.26)$$

donde

$k_i > 0$  es una constante,

$$u = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \quad (2.27)$$

$$f_i = k_i \omega_i^2, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.28)$$

$k_i > 0$  es una constante,  $\omega_i$  es la velocidad angular del  $i$ -ésimo motor, entonces

$$F_\xi = R\hat{F} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.29)$$

en donde

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\psi s_\theta & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & c_\theta s_\phi \\ c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

es la matriz de rotación que representa la orientación del cuadrirotor. En lo que sigue, por simplicidad, usaremos  $c_\theta$  para  $\cos \theta$  y  $s_\theta$  para  $\sin \theta$ .

Los momentos o pares generalizados en la variable  $\eta$  son:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i} \\ (f_2 - f_4)l \\ (f_3 - f_1)l \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

donde  $l$  es la distancia entre los motores y el centro de gravedad, y  $\tau_{M_i}$  es el momento producido por el motor  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , al rededor del centro de gravedad del cuadri-rotor.

Puesto que el Lagrangiano no contiene términos en la energía cinética combinando  $\dot{\xi}$  con  $\dot{\eta}$ , las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser divididas en la dinámica para las coordenadas de  $\xi$  y las coordenadas de  $\eta$ , entonces

$$m\ddot{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = F_\xi \quad (2.32)$$

$$J\ddot{\eta} + J\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J \dot{\eta}) = \tau \quad (2.33)$$

Definiendo el vector de Coriolis

$$\bar{V}(\eta, \dot{\eta}) = \dot{J}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J \dot{\eta}) \quad (2.34)$$

podemos escribir

$$J\ddot{\eta} + \bar{V}(\eta, \dot{\eta}) = \tau \quad (2.35)$$

pero podemos rescribir  $\bar{V}(\eta, \dot{\eta})$  como

$$\begin{aligned} \bar{V}(\eta, \dot{\eta}) &= \left( \dot{J} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J) \right) \dot{\eta} \\ &= C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde

$C(\eta, \dot{\eta})$  son los términos de Coriolis, los cuales contienen términos giroscópicos y centrífugos asociados con  $\eta$  dependientes de  $J$ .

Puesto que el Lagrangiano no contiene términos en la energía cinética combinando  $\dot{\xi}$  con  $\dot{\eta}$ , las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser divididas en su parte traslacional y rotacional, obteniendo:

$$m\ddot{\xi} = F_{\xi} - mg$$

$$\tau = C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + J\tilde{\tau}$$

con lo que se tiene

$$m\ddot{\xi} = u \begin{bmatrix} -s_{\theta} \\ c_{\theta}s_{\phi} \\ c_{\theta}c_{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$J\ddot{\eta} = -C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \tau \quad (2.38)$$

Nótese que en la dinámica rotacional (2.38) no depende de la dinámica traslacional debido a que esta ecuación es una función de las variables de orientación y el vector de torque. Se propone un cambio de nuevas variables de entrada

$$\tau = C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + J\tilde{\tau} \quad (2.39)$$

donde

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\psi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

son nuestras nuevas entradas. Por lo que la ecuación (2.38) queda de la forma

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau} \quad (2.41)$$

Finalmente se obtiene

$$m\ddot{x} = -u \sin \theta \quad (2.42)$$

$$m\ddot{y} = u \cos \theta \sin \phi \quad (2.43)$$

$$m\ddot{z} = u \cos \theta \cos \phi - mg \quad (2.44)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi \quad (2.45)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta \quad (2.46)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi \quad (2.47)$$

Las entradas de control  $u$ ,  $\tilde{\tau}_\psi$ ,  $\tilde{\tau}_\theta$  y  $\tilde{\tau}_\phi$  corresponden al empuje total (dirigida desde la parte inferior de la aeronave) y los nuevos momentos angulares (guiñada, cabeceo y alabeo),  $x$  y  $y$  son coordenadas en el plano horizontal y  $z$  es la posición vertical,  $\psi$  es el ángulo alrededor del eje  $y$ ,  $\theta$  es el ángulo alrededor del eje  $y$ , y  $\phi$  es el ángulo alrededor del eje  $x$ . El modelo dinámico en forma completa se puede observar en [16].

## 2.5. Simulación

La simulación del modelo matemático del cuadrirotor se presenta a continuación, el diagrama a bloques se muestra en la figura (2.6), además se puede ver el resultado de las salidas en posición (ver figura 2.7) y de orientación (ver figura ??), usando una masa =  $0.8 \text{ [kg]}$  y de gravedad  $g=9.81 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$ , en la figura 2.9 se observa como el cuadrirotor tiene un comportamiento no deseado, es claro ver en las señales de salida que el sistema es inestable.

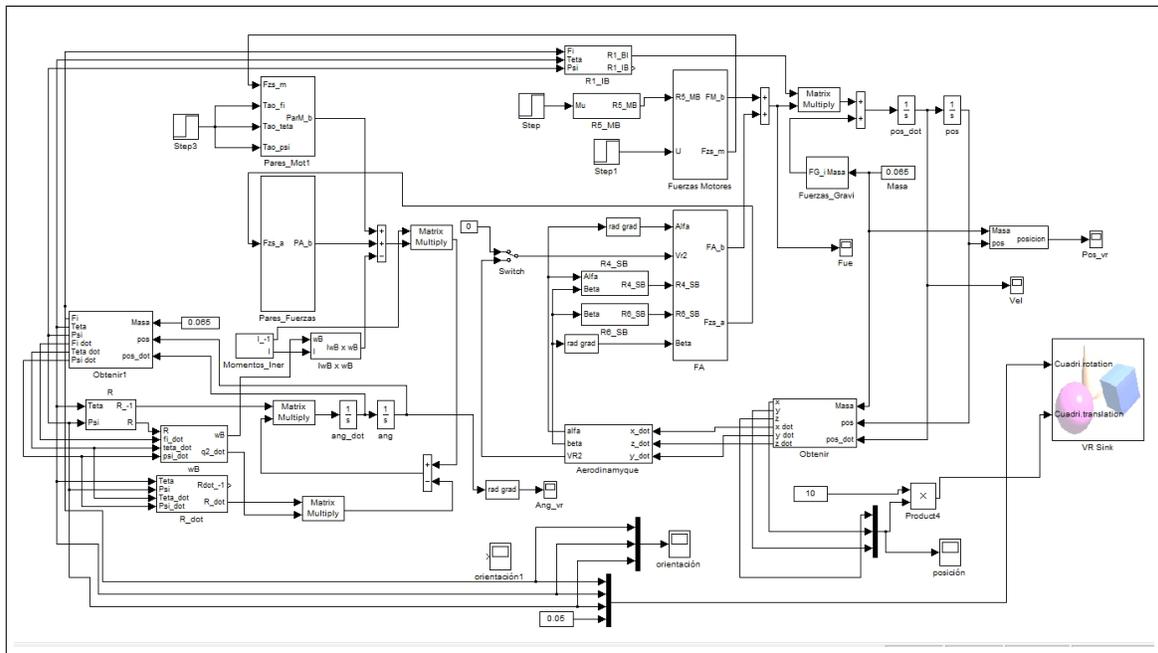


Figura 2.6: Simulación del Modelo Dinámico del Cuadrirotor

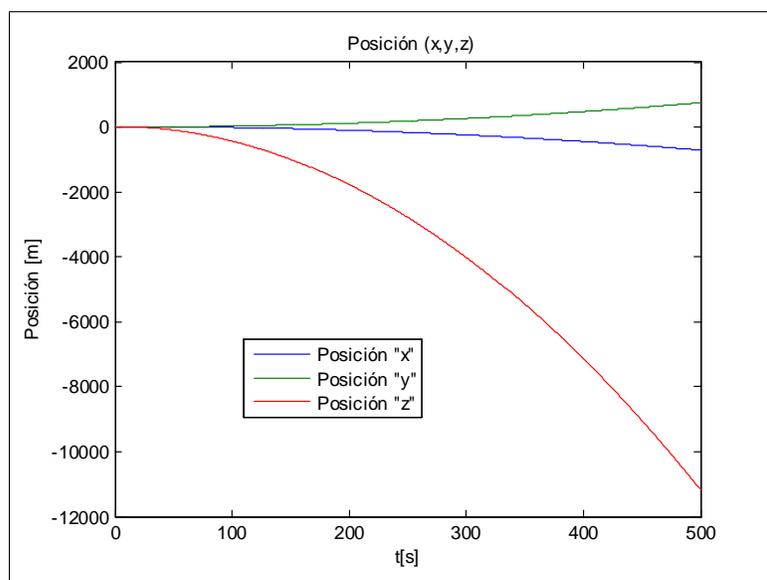


Figura 2.7: Respuesta en Posición

## 2.6. Conclusiones

En este capítulo se plantearon las ecuaciones de movimiento, que nos permiten predecir la evolución en el tiempo del cuadricóptero, el modelo dinámico se obtuvo usando las ecuaciones de Euler-Lagrange. Además por medio de la simulación se puede observar que el cuadricóptero es un sistema inestable naturalmente, por lo que es necesario tener un control en su orientación y posición para lograr un vuelo estacionario.

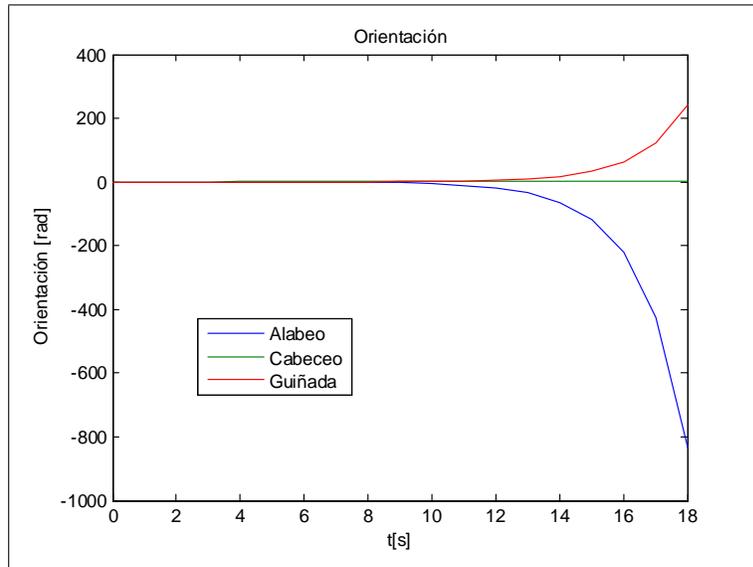


Figura 2.8: Respuesta en Orientación



Figura 2.9: Dinámica del Cuadrirotor

## Capítulo 3

# ESTRATEGIA DE CONTROL

En esta sección se presenta una estrategia de control no lineal basado en la técnica de las saturaciones anidadas. Se utilizará el modelo matemático obtenido utilizando el enfoque de Euler-Lagrange. Esta estrategia se basa en una idea de A.R. Teel [23] para la estabilización de una cadena de integradores lineal utilizando saturaciones anidadas, la cual, ha sido utilizada para controlar algunos sistemas subactuados, la motivación de usar esta estrategia de control es porque asegura que los motores no recibirán una cantidad de energía no deseada y la implementación en el microprocesador de esta ley de control no es complicada.

Otra ventaja de utilizar este controlador es que cada estado puede ser regulado de manera secuencial usando reglas de prioridad. De igual forma, cada entrada de control puede ser aplicada de manera independiente, además es relativamente simple, esta propiedad es importante en la ejecución de tiempo real para el vehículo.

Primeramente se aplicará la técnica de asignación de polos para estabilizar la altura del cuadricóptero y el ángulo de guiñada. El control del ángulo de  $\phi$  y el desplazamiento en la coordenada " $y$ " se estabilizan con una ley de control no lineal. De

manera semejante se estabiliza el ángulo de  $\theta$  y el desplazamiento " $x$ " por medio de una ley de control no lineal.

Hablando en términos generales, cada una de las entradas de control se pueden usar para controlar uno o dos grados de libertad, de la siguiente manera: La entrada de control  $\tilde{\tau}_\psi$  es usada para hacer el desplazamiento de guiñada cero,  $\tilde{\tau}_\theta$  es usado para controlar el ángulo de cabeceo y el movimiento horizontal en el eje " $x$ ", de semejante manera  $\tilde{\tau}_\phi$  es usado para controlar el ángulo de alabeo y el desplazamiento en el eje " $y$ " (ver figura 3.1)

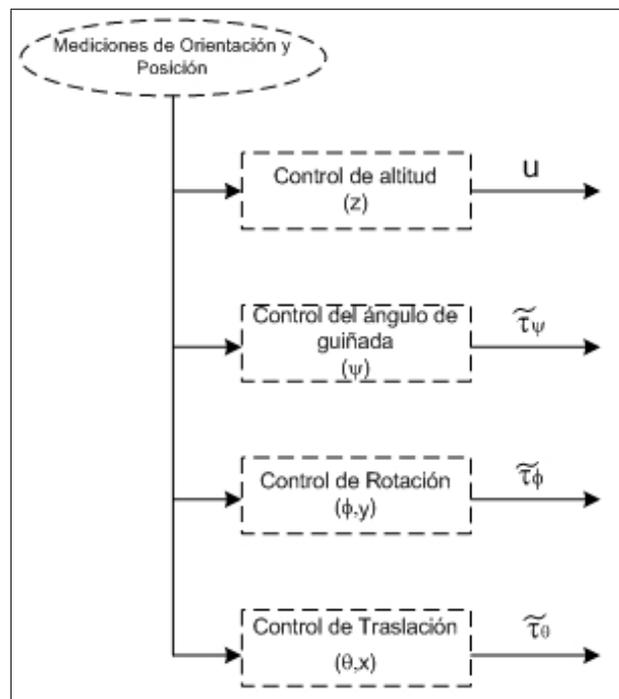


Figura 3.1: Control de Orientación y Posición

### 3.1. Control por medio de funciones de Saturación Anidadas

Enseguida, ilustraremos de manera breve los fundamentos del control por medio de funciones de saturación anidadas, una explicación más detallada se puede encontrar en [23].

Se define una función de saturación como sigue:

**Definición 1 (1)** (*Función de saturación lineal, ver figura (3.2)*)

Dadas dos constantes positivas  $L, M$  con  $L \leq M$ , una función  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se denomina una saturación lineal para  $(L, M)$  si es una función continua, no decreciente y satisface:

1.  $s\sigma(s) > 0 \quad \forall s \neq 0$
2.  $\sigma(s) = 0 \quad \text{cuando} \quad |s| \leq L$
3.  $|\sigma(s)| \leq M \quad \forall s \in \mathbb{R}$

Consideremos un sistema lineal constituido por múltiples integradores de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u \end{aligned} \tag{3.1}$$

La idea fundamental de esta técnica es encontrar una ley de control que establezca asintóticamente de forma global el sistema (3.1), derivándose el siguiente teorema

**Teorema 1 (1)** *Existe una función lineal  $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cualquier conjunto de constantes  $\{(L, M)\}$  donde  $L_i \leq M_i$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $M_i < \frac{L_{i+1}}{2}$  para*

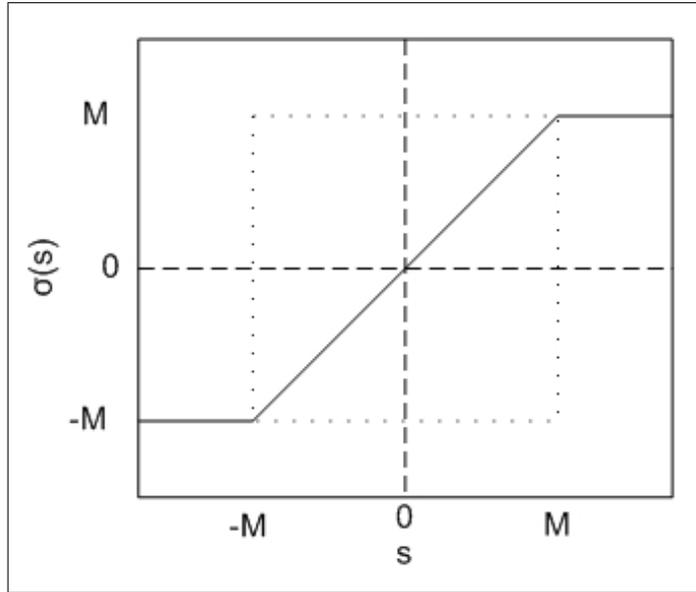


Figura 3.2: Función de Saturación

$i = 1, \dots, n - 1$ , y para cualquier conjunto de funciones  $\{\sigma_i\}$  que son saturaciones lineales para  $\{(L_i, M_i)\}$ , el control acotado

$$u = -\sigma_n (h_n(x) + \sigma_{n-1} (h_{n-1}(x) + \dots + \sigma_1 (h_1(x))) \dots) \quad (3.2)$$

da como resultado una estabilización asintótica global del sistema (3.1).

## 3.2. Control de la altura y el ángulo de guiñada

El desplazamiento vertical  $z$  en (2.44) y el ángulo de guiñada, son forzados a satisfacer la dinámica de un sistema lineal. Por lo que se propone la siguiente ley de control:

$$u = \frac{r_1 + mg}{\cos \theta \cos \phi} \quad (3.3)$$

en donde  $r_1$  representa un controlador PD, de la forma

$$r_1 = -a_{z_1}\dot{z} - a_{z_2}(z - z_d) \quad (3.4)$$

siendo  $a_{z_1}$ ,  $a_{z_2}$  constantes positivas y  $z_d$  es la referencia sobre la altura deseada.

La ley de control sobre el ángulo de guiñada será:

$$\tilde{\tau}_\psi = -a_{\tau_1}\dot{\psi} - a_{\tau_2}(\psi - \psi_d) \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.3)-(3.5) en (2.42)-(2.45) respectivamente y asumiendo  $\cos \theta \cos \phi \neq 0$ , esto es  $\theta, \phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ , se obtiene

$$m\ddot{x} = -\frac{(r_1 + mg) \tan \theta}{\cos \phi} \quad (3.6)$$

$$m\ddot{y} = (r_1 + mg) \tan \phi \quad (3.7)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} (-a_{z_1}\dot{z} - a_{z_2}(z - z_d)) \quad (3.8)$$

$$\ddot{\psi} = -a_{\tau_1}\dot{\psi} - a_{\tau_2}(\psi - \psi_d) \quad (3.9)$$

Las ganancias de control  $a_{z_1}, a_{z_2}, a_{\tau_1}, a_{\tau_2}$ , se determinan de tal manera que se asegure una respuesta estable del cuadrirotor. De (3.8) y (3.9) se tiene que si  $\psi_d$  y  $z_d$  son constantes,  $\dot{\psi}$  y  $\ddot{\psi} \rightarrow 0$ , haciendo uso de (3.9), implica que

$$\psi \rightarrow \psi_d \quad (3.10)$$

de manera similar se tiene que

$$z \rightarrow z_d \quad (3.11)$$

### 3.3. Control del ángulo $\phi$ y del desplazamiento en el eje $y$

Ahora se determinará la entrada  $\tilde{\tau}_\phi$  para estabilizar el subsistema  $(y, \phi)$ , el cual está dado por (3.7) y (2.46) respectivamente. Se asume que  $\psi_d = 0$  en (3.5) y (3.9). Además de (3.10) se sigue que  $\psi \rightarrow 0$ . Nótese que de (3.4) y (3.8), implican que  $r_1 \rightarrow 0$ , para un tiempo  $T$  suficientemente grande  $r_1$  y  $\psi$  serán pequeños, por lo que el sistema se reduce a:

$$\ddot{y} = g\phi \quad (3.12)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi \quad (3.13)$$

Las ecuaciones (3.12) y (3.13) representan un sistema formado por cuatro integradores en cascada, con lo cual se puede aplicar la técnica de saturaciones anidadas, de la siguiente manera:

$$\tilde{\tau}_\phi = -\sigma_{\phi_1} \left( \dot{\phi} + \sigma_{\phi_2} \left( \phi + \dot{\phi} + \sigma_{\phi_3} \left( 2\phi + \dot{\phi} - \frac{\dot{y}}{g} + \sigma_{\phi_4} \left( \dot{\phi} + 3\phi - 3\frac{\dot{y}}{g} - \frac{y}{g} \right) \right) \right) \right) \quad (3.14)$$

en donde  $\sigma_a$  es una función de saturación de la forma:

$$\sigma_a(s) = \begin{cases} -a & s < -a \\ s & -a \leq s \leq a \\ a & s > a \end{cases} \quad (3.15)$$

Utilizando el algoritmo de control, el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable, ver [23], y por lo tanto  $\phi$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $y$  y  $\dot{y}$  convergen a cero. Para regular "y" a una posición deseada, la ecuación (3.14) queda de la forma:

$$\tilde{\tau}_\phi = -\sigma_{\phi_1} \left( \dot{\phi} + \sigma_{\phi_2} \left( \phi + \dot{\phi} + \sigma_{\phi_3} \left( 2\phi + \dot{\phi} - \frac{\dot{y}}{g} + \sigma_{\phi_4} \left( \dot{\phi} + 3\phi - 3\frac{\dot{y}}{g} - \frac{e_y}{g} \right) \right) \right) \right) \quad (3.16)$$

en donde

$$e_y = y_d - y$$

Aquí,  $y_d$  representa la posición de referencia deseada para  $y$ .

### 3.4. Control del ángulo $\theta$ y del desplazamiento en el eje $x$

De la ecuación (3.12) y (3.14) se obtiene que  $\phi \rightarrow 0$  y sabiendo que  $r_1 \rightarrow 0$ , de lo cual (3.6) se reduce a:

$$\ddot{x} = -g \tan \theta$$

por lo que el subsistema  $(x, \theta)$  puede ser representado por

$$\ddot{x} = -g \tan \theta \quad (3.17)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta \quad (3.18)$$

Por lo que se propone el siguiente algoritmo

$$\tilde{\tau}_\theta = -\sigma_{\theta_1} \left( \dot{\theta} + \sigma_{\theta_2} \left( \theta + \dot{\theta} + \sigma_{\theta_3} \left( 2\theta + \dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{g} + \sigma_{\theta_4} \left( \dot{\theta} + 3\theta - 3\frac{\dot{x}}{g} - \frac{x}{g} \right) \right) \right) \right) \quad (3.19)$$

Se tiene también que  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $x$  y  $\dot{x}$  convergen a cero. De semejante manera que "y", para regular "x" a una posición deseada, la ecuación (3.19) queda de la forma:

$$\tilde{\tau}_\theta = -\sigma_{\theta_1} \left( \dot{\theta} + \sigma_{\theta_2} \left( \theta + \dot{\theta} + \sigma_{\theta_3} \left( 2\theta + \dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{g} + \sigma_{\theta_4} \left( \dot{\theta} + 3\theta - 3\frac{\dot{x}}{g} - \frac{e_x}{g} \right) \right) \right) \right) \quad (3.20)$$

en donde

$$e_x = x_d - x$$

Aquí,  $x_d$  representa la posición de referencia deseada para  $x$ .

En este capítulo se presentó la estrategia de control no lineal basado en la técnica de las saturaciones anidadas aplicándolo al cuadrirotor, con lo cual se asegura la estabilidad del sistema.

### 3.5. Simulación

A continuación se valida la ley de control implementada en el modelo del cuadrirotor por medio de la simulación del sistema y así corroborar el comportamiento del vehículo. La plataforma que se utilizó para la simulación del modelo fue Simulink de Matlab R2009, el diagrama a bloques correspondiente se muestra en la figura (3.3)

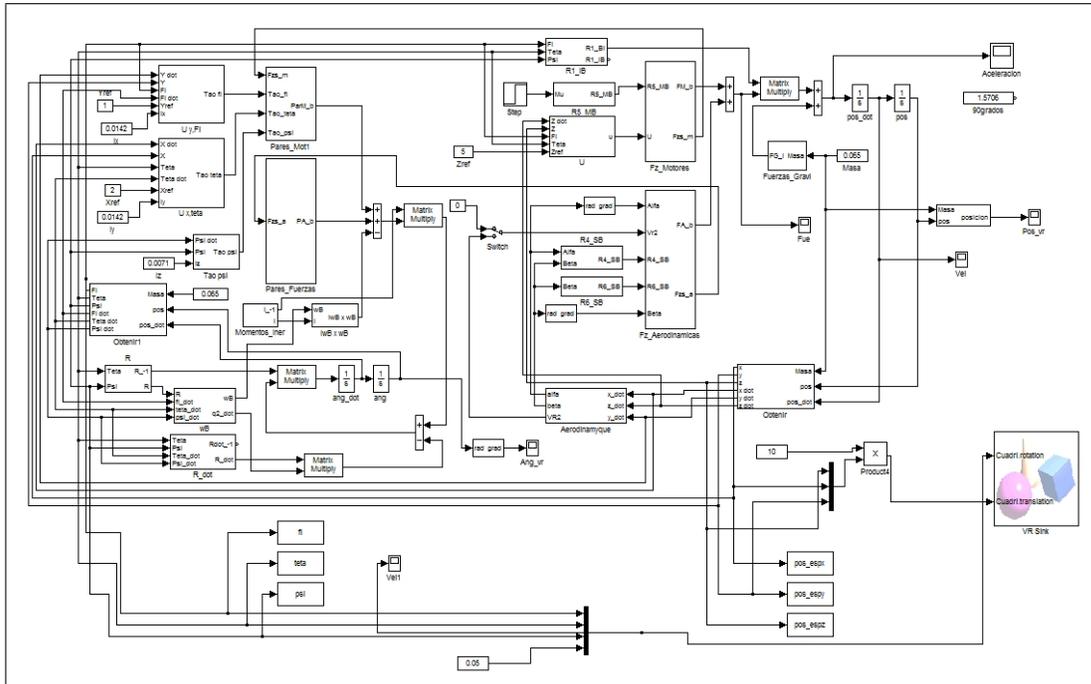


Figura 3.3: Simulación del control en el Cuadrirotor

Los parámetros utilizados en la simulación fueron los siguientes:

$$m= 0.8 \text{ [kg]}$$

$$g=9.81 \text{ [}\frac{m}{s^2}\text{]}$$

$$I_x=0.0142 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$I_y=0.0142 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$I_z=0.0071 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

Los resultados obtenidos de la simulación (ver figura 3.4) se muestran en las figuras (3.5) y (3.4), mostrándose la posición y los ángulos de orientación respectivamente, la posición de referencia es  $(x, y, z) = (2, 1, 10)$ , como se puede observar en ambas gráficas se logra estabilizar la aeronave hasta hacer 0 los ángulos respectivos a la orientación y lograr llegar a la referencia  $(x, y, z)$ , con lo que se logra el vuelo estacionario deseado.

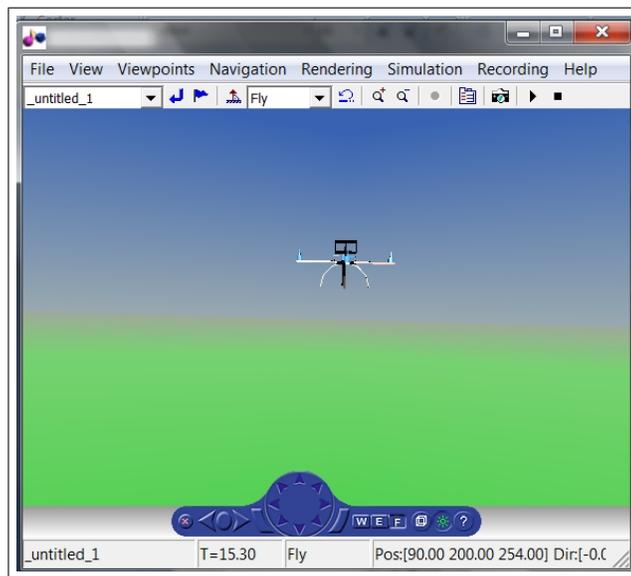
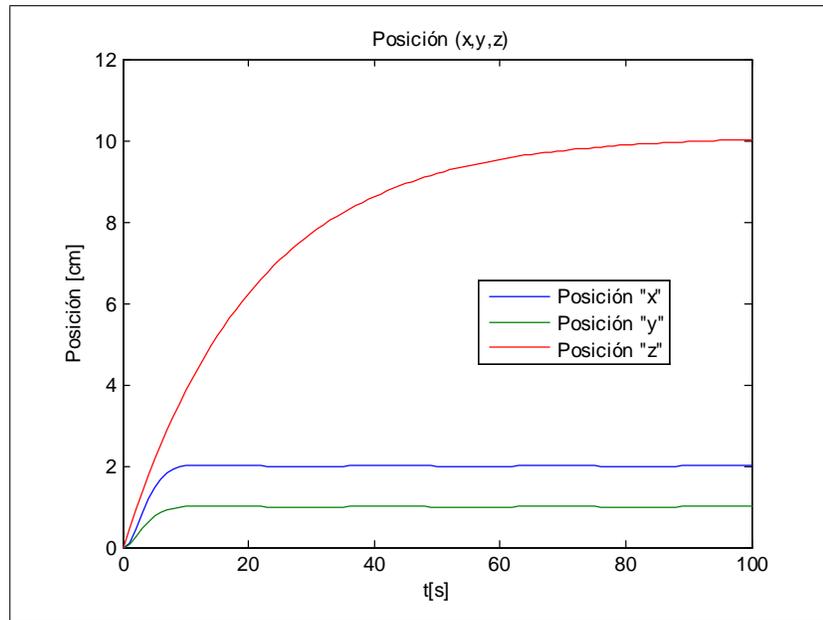
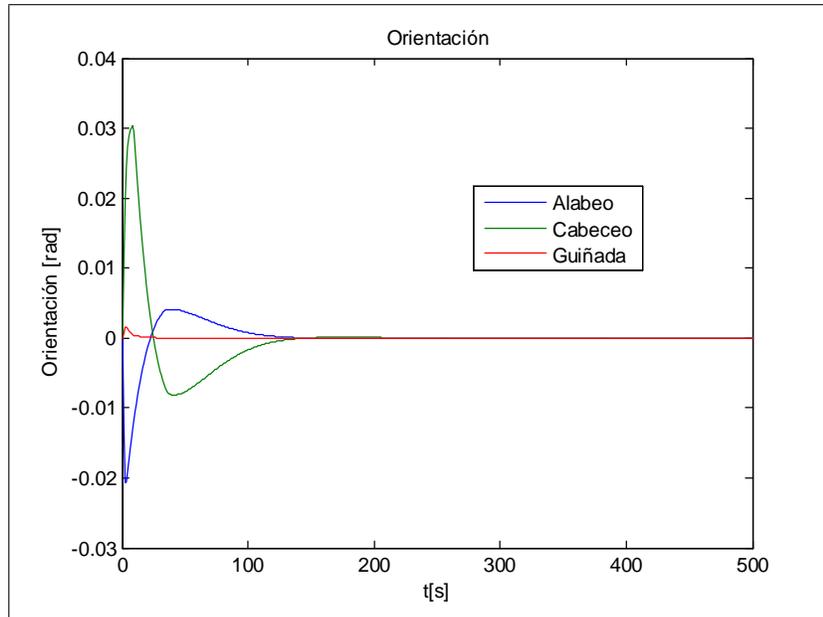


Figura 3.4: Vuelo del cuadrirotor en el simulador



Posición del Cuadrirotor (Simulación)



Ángulos de Orientación (Simulación)

## 3.6. Conclusiones

En este capítulo se implementó una estrategia de control no lineal para estabilizar el cuadrirotor basada en saturaciones anidadas, usando primero la técnica de asignación de polos para estabilizar la distancia en "z" y el ángulo de guiñada. En los resultados de simulación se verifica el buen desempeño del cuadrirotor con la estrategia de control implementada, logrando estabilizar el vuelo en una posición deseada. El ajuste de ganancias es relativamente sencillo, además se hace fácil la implementación de esta ley en un microcontrolador.



# Capítulo 4

## VISUAL SERVOING

La robótica guada por sensores de visión es uno de los principales temas de investigación en los últimos años y el reciente desarrollo tecnológico a facilitado el avance en este campo. La técnica de visual servoing es una solución atractiva para el posicionamiento de un robot y tiene el potencial de proveer un bajo costo y un bajo mantenimiento para la automatización del mismo. Además, esta tecnología permite realizar aplicaciones complejas en tiempo real. Esta técnica es el resultado de fusionar varias áreas entre las cuales se pueden mencionar: el procesamiento de imágenes, la cinemática, la dinámica, la teoría de control y el cómputo en tiempo real, etc. La tarea de la técnica de visual servoing es el control de robots usando información visual. El sistema de visión se encuentra integrado en forma física por una o más cámaras, una interfaz electrónica y una unidad de procesamiento.

Un control en bucle cerrado de un sistema robot, donde la visión se utiliza como sensor de medida, normalmente consiste en dos procesos interconectados: tracking y control. El tracking proporciona una estimación continua y una actualización de las características a detectar durante el movimiento robot/objeto. Basándonos en las

medidas proporcionadas por el sensor de visión, se genera una secuencia de control. Además, el sistema requiere de una inicialización.

La técnica de Visual Servoing también se está utilizando en robótica móvil para el seguimiento de líneas, navegación terrestre, aérea y submarina [24] y [25]. En el campo de la robótica móvil aérea, como es el caso de helicópteros, actualmente han salido muchos artículos con distintos enfoques tales como [26] y [27].

## 4.1. Conceptos Generales

En un sistema robot existen, normalmente, dos formas de utilizar la información visual recibida:

- **Control del robot en lazo abierto:** la extracción de las características del objeto por parte del sistema de visión y el control de robot son tareas separadas donde, en primer lugar, se procesa la información por el sistema de visión y en segundo lugar se realiza la generación de la secuencia de control (ver figura 4.1, izquierda). Un caso típico es el reconocimiento del objeto a ser manipulado, calculando su posición y orientación relativa al sistema de coordenadas de la cámara. Con esta información, el robot se mueve desde la posición actual a la deseada. Para estimar la pose del objeto se debe tener un modelo del mismo. Para mover el robot a partir de la información extraída respecto al sistema de coordenadas de la cámara, esta debe estar calibrada con respecto al robot. Además, se deben tener los modelos directo e inverso de la cinemática del robot en cuestión para poder pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas del robot y viceversa. Así, el robot puede ejecutar la tarea pero de forma ciega ya que no va a saber si el objeto se ha movido del lugar mientras está ejecutando la misma.

- **Control del robot en lazo cerrado** (Visual Servoing): En 1979 [28] introdujeron el término Visual Servoing para distinguir su enfoque de los trabajos anteriores en este campo (ver figura 4.1, derecha). En 1980 se introdujo la siguiente taxonomía de Visual Servoing [29]:

- *Sistemas dinámicos look-and-move*. Este tipo de sistemas mejoran el control del robot en dos fases: el sistema de visión proporciona información a la entrada del controlador, que utiliza información de las articulaciones para internamente estabilizar el robot.
- *Sistemas Visual Servoing Directo*. Aquí, el controlador visual controla directamente las articulaciones del robot y el controlador del robot se elimina.

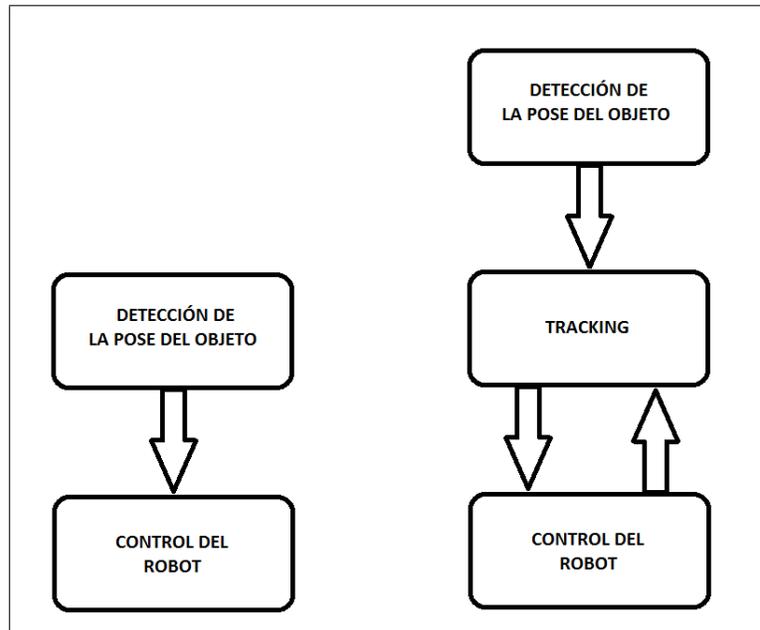


Figura 4.1: Visual Servoing

Una tarea típica del Visual Servoing incluye:

- “Posicionamiento”, tal como alinear la pinza del robot con el objetivo.
- “Tracking”, tener una pose constante entre el robot y el objeto en movimiento.

En ambos casos, la información extraída de la imagen se utiliza para medir el error entre la localización actual del robot y su referencia o localización deseada. La información de la imagen se utiliza para realizar la tarea, ya sea:

- ● ○ Utilizando el plano de la imagen (Visual Servoing 2D o más conocido como Image-Based Visual Servoing).
- Visual Servoing 3D (o más conocido como Positio-Based Visual Servoing), donde se emplea un modelo de la cámara y del objeto para extraer la información de la pose del mismo con respecto al sistema de coordenadas cámara/mundo/robot.

Por lo tanto, utilizando lo anteriormente dicho, existen tres enfoques básicos conocidos por todo investigador de esta temática que son:

■ Position-Based Visual Servoing (PBVS). El sistema extrae la información 3D de la escena, con el modelo de la cámara conocido (normalmente en conjunción con un modelo conocido del objeto) se utiliza para estimar la pose del objeto respecto del sistema de coordenadas de la cámara. La tarea de posicionamiento o tracking se define en el espacio 3D.

■ Image-Based Visual Servoing (IBVS). Las medidas en el plano de imagen 2D se utilizan directamente para mover el robot de la posición actual a la deseada. Tareas típicas como tracking y posicionamiento se realizan reduciendo el error de las características en el plano de imagen.

■ Hybrid-Based Visual Servoing (HBVS) o  $2 \frac{1}{2}$  D Visual Servoing. Se realiza una combinación entre los dos enfoques anteriores, dónde el error a minimizar se

especifica tanto en el plano de imagen como en el 3D.

Por lo tanto, la idea general del Visual Servoing es ver la relación existente entre el robot y el objeto, y calcular la velocidad asociada a las articulaciones del robot necesaria para minimizar el error especificado. En este caso lo que se hace para el robot aéreo es estimar la posición del cuadrirotor dada una marca en el suelo y esta información es la que será usada en la ley de control para mantenerlo en una posición deseada.

En éste capítulo se describe la obtención de la posición  $(x, y, z)$  la cual será la información que se utilizará en la ley de control (ecuaciones 3.20, 3.16 y 3.8 respectivamente). Se describirá el modelo de proyección central con lo cual se podrá determinar  $(x, y, z)$  con una cámara (visión monocular), además se describirá la geometría utilizada para la obtención de  $(x, y, z)$  con dos cámaras (visión estéreo) y por último se explicará el flujo óptico, el cual será usado para la estimación de la velocidad lineal del vehículo y llevar a 0 ese movimiento en el cuadrirotor.

## 4.2. Modelo de Proyección Central

El tipo de modelo de cámara utilizado para este trabajo es el de proyección central. Es por esto que en esta sección se desarrolla un modelo para la cámara con propiedades particulares que representen el mapeo de la cámara. El modelo de proyección central define la relación geométrica entre los puntos en 3D y su proyección correspondiente en 2D. Cuando se usa éste modelo, este mapeo de 3D a 2D es llamado proyección en perspectiva [30].

Existen una gran variedad de tipos de cámaras en el mercado que pueden ser utilizadas en la reconstrucción de imágenes, pero estas pueden englobarse princi-

palmente en dos tipos: cámaras analógicas y cámaras digitales (utilizadas en este trabajo). Cada una cuenta con características especiales como son resolución, frecuencia de captura de imágenes, tipo de chip (CCD, CMOS), etc.. Veremos que todas las cámaras modeladas mediante proyección central son una especialización del modelo general proyectivo. El modelo general de cámara es examinado usando las herramientas de geometría proyectiva. Se verá que entidades geométricas de la cámara, tales como el centro de proyección central y plano imagen pueden ser calculadas fácilmente desde su representación matricial. Casos especiales de la cámara proyectiva general heredan sus propiedades, por ejemplo su geometría que es calculada usando la misma expresión algebraica.

Para desarrollar este modelo se considera la proyección central de puntos en el espacio dentro de un plano. Dado el centro de proyección, al cual se le conoce como centro de la cámara o centro óptico, denotado por  $C$  como el origen de un sistema de coordenadas Euclidiano y considerando el plano  $z = f$ , el cual es llamado plano imagen o plano focal, mientras que  $f$  se conoce como distancia focal, la cual no es otra cosa que la distancia entre el centro de proyección y el plano imagen. Tenemos que, de acuerdo al modelo de cámara proyectiva, un punto en el espacio con coordenadas  $X = (X, Y, Z)^T$  es mapeado a su punto correspondiente en el plano imagen  $m$  donde la línea formada por el punto  $M$  y el centro de la proyección intersectan al plano imagen, ver figura (4.2). Este es un mapeo de un espacio euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$  a un espacio euclidiano bidimensional  $\mathbb{R}^2$ .

Por triángulos semejantes es posible calcular que el punto  $(X, Y, Z)^T$  es mapeado al punto  $(f\frac{X}{Z}, f\frac{Y}{Z}, f)^T$  en el plano imagen. Ignorando la coordenada final del punto en el plano imagen por ser un valor fijo, se puede observar que la relación vectorial

$$(X, Y, Z)^T \mapsto \left( \frac{fX}{Z}, \frac{fY}{Z} \right)^T \quad (4.1)$$

describe la proyección central mapeando desde el referencial del mundo a las coordenadas del plano imagen.

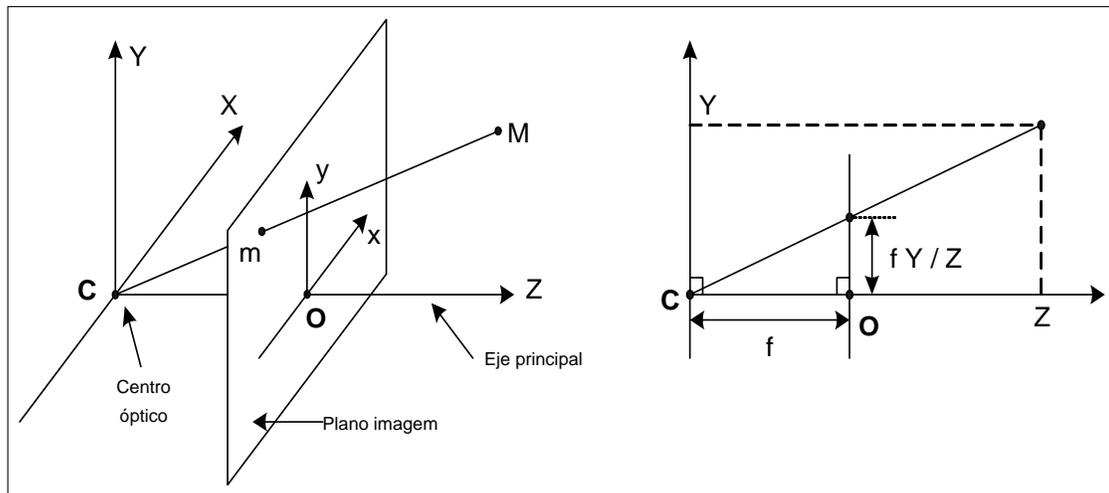


Figura 4.2: Geometría de la cámara por proyección central

La línea que pasa por el centro óptico y que es perpendicular al plano imagen se conoce como eje principal de la cámara o simplemente eje óptico. Además, el punto donde el eje óptico interseca al plano imagen se conoce como punto principal de la imagen y el cual es denotado por  $O$ . Ahora bien, sea un sistema de coordenadas  $O_{xyz}$  asociado al plano imagen y el cual tiene su origen en el punto principal de la imagen  $p$ , este sistema de coordenadas se asigna de forma que su eje  $z$  se alinea con el eje óptico. Y considere el sistema de coordenadas  $C_{XYZ}$  centrado en el centro óptico y el cual es paralelo al referencial asociado al plano imagen, este sistema se comone como el sistema de coordenadas de la cámara.

Si los puntos del mundo y la imagen están representados por vectores homogéneos, entonces la proyección central esta simplemente expresada como el mapeo lineal entre

sus coordenadas homogéneas. En particular (4.1) puede ser expresada como

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

o

$$\begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}(f, f, 1) & | & 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

donde  $\text{diag}(f, f, 1)$  representa una matriz diagonal y  $0_{3 \times 1} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  representa un vector de ceros.

Ahora introduciremos la notación,  $X \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  representa los puntos en el mundo 3D expresados por los vectores homogéneos  $(X, Y, Z, 1)^T$ ,  $x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  representa los puntos de la imagen expresados por vectores homogéneos  $(U, V, S)^T$  y  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  es la matriz homogénea llamada matriz de proyección de la cámara. Con lo anterior (4.3) puede ser expresada como

$$x = PX \quad (4.4)$$

donde

$$P = \text{diag}(f, f, 1)[I \mid 0], \quad (4.5)$$

define la matriz de la cámara para el modelo de proyección central.

En la expresión (4.1) se asume que el origen de las coordenadas en el plano imagen esta en el punto principal, en la práctica esto no es así, por lo que en general hay un mapeo de la forma

$$(X, Y, Z)^T \mapsto \left( \frac{fX}{Z} + p_x, \frac{fY}{Z} + p_y \right)^T \quad (4.6)$$

donde el vector  $(p_x, p_y)^T$  representa las coordenadas del punto principal. La expresión anterior puede ser reescrita en coordenadas homogéneas como

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} fX + zp_x \\ fY + zp_y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x & 0 \\ 0 & f & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Ahora, definimos

$$K = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

y

$$\mathbf{X}_{cam} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

entonces (4.7) tiene la forma

$$\mathbf{x} = [K \mid 0_{3 \times 1}] \mathbf{X}_{cam} \quad (4.10)$$

La matriz  $K$  es llamada la matriz de calibración de la cámara,  $\mathbf{X}_{cam}$  es el vector que representa las coordenadas del objetivo  $X$  expresadas en el referencial de la cámara, con el eje principal de la cámara colineal al eje- $Z$ , por lo que el sistema coordenado es llamado sistema referencial de la cámara.

### 4.2.1. Calibración y Parámetros de la Cámara

#### Parámetros de la Cámara

De forma breve se puede decir que los parámetros intrínsecos de una cámara son aquellos que definen la geometría y la óptica de la cámara, mientras que los parámetros extrínsecos definen la posición y orientación de la cámara con respecto a un sistema de coordenadas ubicado en la escena [31].

En la expresión (4.8), la matriz  $K$  (matriz de calibración) es una matriz triangular superior de  $3 \times 3$ , no singular, cuyos elementos son los parámetros intrínsecos y estos son, la distancia focal  $f$ , las coordenadas del punto principal, la corrección de ortogonalidad y el número de píxeles por unidad de longitud en coordenadas imagen.

Puesto que el sistema de coordenadas del mundo no guarda ninguna relación geométrica específica con el sistema de coordenadas de la cámara, entonces, estos dos referenciales se relacionan por medio de una matriz de transformación homogénea típica, la cual incluye una rotación  $R$  y una traslación  $t$ , la cual está dada por

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

en donde,  $t$  representa las coordenadas del origen del sistema de coordenadas de la cámara, las cuales son expresadas en el sistema de coordenadas del mundo, mientras que la matriz de rotación  $R$  define la orientación del sistema de coordenadas de la cámara con respecto al sistema de coordenadas del mundo. Esta matriz de rotación es una matriz ortogonal, de dimensiones  $3 \times 3$ .

## Calibración

En los sistemas de visión artificial, para poder determinar la posición, orientación y medidas de los objetos, es necesario obtener la relación existente entre las coordenadas de los píxeles y sus correspondencias en la escena [32]. Esto se sigue mediante el proceso de calibración de la cámara con un sistema de transformación de coordenadas que proporciona como resultado una matriz que contiene los parámetros del "modelo de la cámara"[33]. El conocimiento de estos parámetros es indispensable para poder extraer información métrica del mundo  $3D$  a partir de sus imágenes  $2D$ . En efecto, el proceso de calibración abre la posibilidad de realizar aplicaciones tales como reconocimiento y seguimiento, así como la reconstrucción  $3D$ , los cuales se basan en el conocimiento de los parámetros de la cámara, así como todas las publicaciones de Visión Artificial que implican mediciones geométricas [19].

Los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara normalmente se calculan utilizando un patrón de calibración que contiene rasgos fácilmente detectables en la imagen capturada, por ejemplo un damero (tablero de ajedrez). Existen diversas técnicas de calibración de cámara. De acuerdo a la literatura estas pueden ser clasificadas en dos grandes categorías: Calibración fotogramétrica y autocalibración [34]:

- Calibración fotogramétrica. Se realiza mediante la observación de patrones cuya geometría en el espacio  $3D$  es conocida con un buen nivel de precisión. Los patrones de calibración normalmente están posicionados en dos o tres planos ortogonales entre ellos. En algunos casos, basta con un único plano, cuya traslación es perfectamente conocida. Este tipo de calibración requiere una configuración elaborada, pero sus resultados son eficientes.

- Autocalibración. Este método se basa en el movimiento de la cámara observando una escena estática, a partir de sus desplazamientos y usando únicamente la información de la imagen. La rigidez de la escena impone en general restricciones sobre los parámetros de cámara. Tres imágenes tomadas por una misma cámara con parámetros intrínsecos fijos son suficientes para obtener tanto los parámetros extrínsecos como intrínsecos.

### 4.3. Visión Estéreo

La capacidad que tienen las personas para apreciar los detalles situados en distintos planos varía con facilidad, esta capacidad está directamente relacionada a la distancia interocular. Cuanto mayor es la distancia entre los ojos mayor es la distancia límite a la que se puede seguir apreciando el relieve de los objetos. La distancia límite puede variar entre 60 y cientos de metros entre diferentes personas.

La visión estereo es necesaria en el día a día de cualquier ser humano, la utilizamos constantemente, sin ella sería prácticamente imposible practicar cualquier deporte, introducir una llave en su cerradura o conducir un automóvil entre otras muchas actividades [35].

Para poder conseguir simular la visión estereoscópica necesitamos de algún dispositivo físico que realice las mismas funciones que los ojos y realicen una captura del entorno, una vez obtenidas las imágenes necesarias se aplicarán una serie de métodos o técnicas para conseguir la sensación de espacio (tarea de la que se encarga el cerebro).

En la figura (4.3) se describe el sistema de visión estereo, en el cual se pueden ver tres sistemas de referencia, uno absoluto y dos relativos a las cámaras. El sistema

absoluto, que pertenece a la escena real tridimensional que se está observando, está dado por el origen de coordenadas  $O$  y los ejes  $\{X, Y, Z\}$ . El sistema de referencia relativo de la cámara izquierda está dado por el origen de coordenadas  $O_I$  y los ejes  $\{X_I, Y_I, Z_I\}$ , y el sistema de referencia que falta es el de la cámara derecha, donde su origen de coordenadas es  $O_D$  y los ejes  $\{X_D, Y_D, Z_D\}$ .

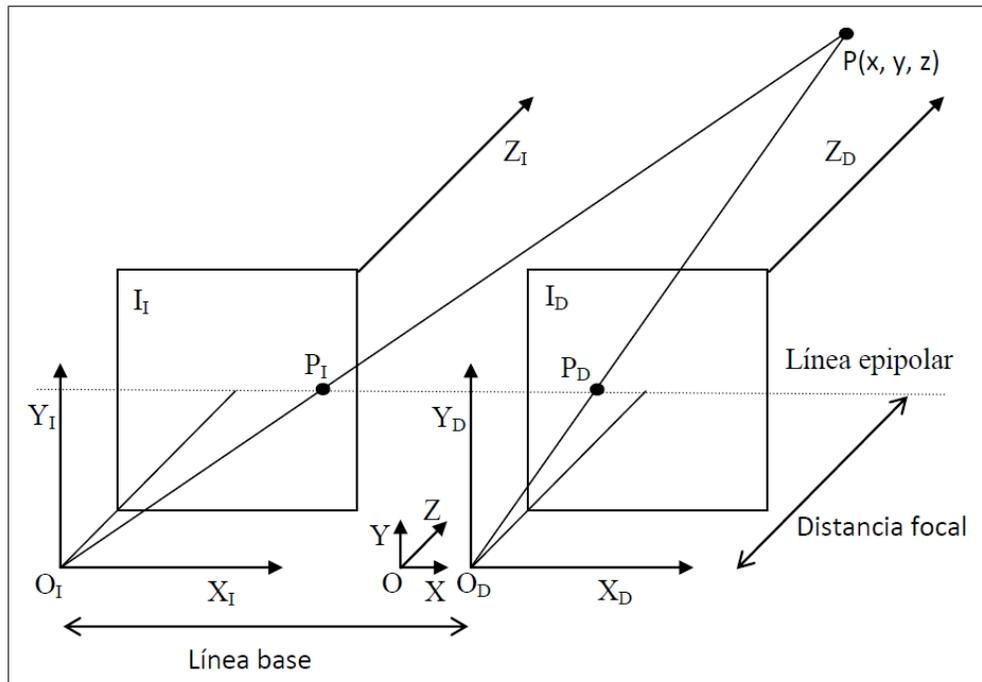


Figura 4.3: Sistema Estéreo

El punto  $P$  en la escena tridimensional se proyecta en la imagen izquierda como el punto  $P_I$  y en la imagen derecha tiene como proyección  $P_D$ . Para obtener la proyección de un punto en una imagen se hace pasar un rayo por su centro óptico y por el propio punto, en la intersección de este rayo con el plano imagen se formará la proyección del punto.

### 4.3.1. Disparidad

El sistema visual humano es capaz de ver en tres dimensiones principalmente porque tenemos visión binocular. Esta visión tiene lugar porque los dos ojos miran al mismo objeto desde ángulos ligeramente distintos, obteniendo como resultado dos imágenes muy parecidas pero no iguales. Se conoce como disparidad binocular a la ligera diferencia entre los dos puntos de vista proporcionados por ambos ojos. La disparidad binocular es la forma de percibir profundidad, el cerebro procesa estos dos puntos de vista distintos y por triangulación calcula la profundidad del objeto observado [31].

### 4.3.2. Triangulación

Se llama así al proceso de determinar la posición de un punto  $P$  en el espacio físico, a partir de al menos dos imágenes distintas en las que se pueda ver el punto, y el conocimiento de la posición de las cámaras para cada una de las imágenes.

El sistema de visión con dos cámaras es coplanar, esto es, que sus respectivos planos de imagen se encuentran dentro del mismo plano, y están separados por una distancia conocida. Los ejes de visión son perpendiculares al plano donde se encuentran las cámaras y son paralelos entre sí, además, cuentan con la misma dirección. Se supondrá que la distancia focal y la amplitud del campo de visión de ambas cámaras es la misma, y es conocida.

La geometría de dos cámaras en estéreo con ejes ópticos paralelos desde una perspectiva superior se describe en la figura (4.4). El valor de la línea base está determinado por el valor  $b$  y  $f$  es la distancia focal de las dos cámara.  $P$  es un punto de la realidad y  $P_i$  y  $P_d$  son sus proyecciones en la imagen izquierda y derecha respectivamente.

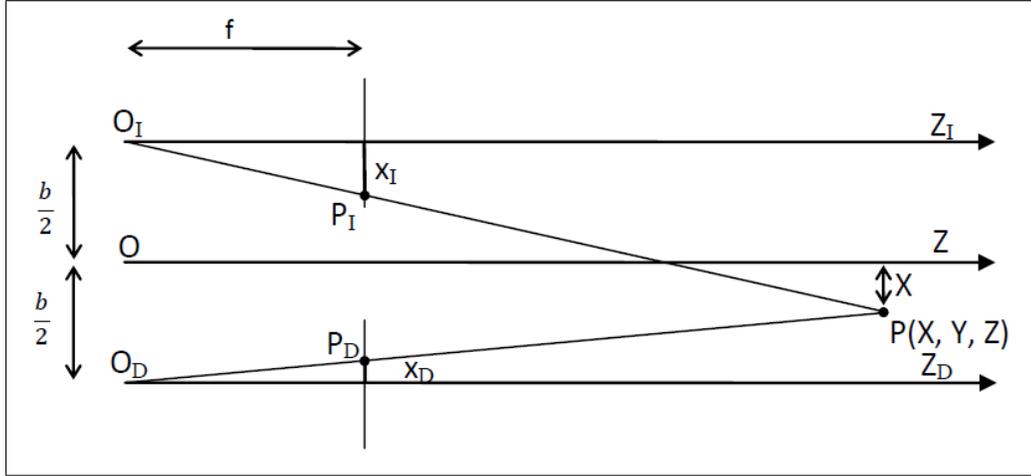


Figura 4.4: Geometría para cámaras paralelas

Considerando una relación geométrica de semejanza de triángulos, las coordenadas del punto de la escena  $P(X, Y, Z)$  pueden deducirse fácilmente de observar (ver figura 4.4), obteniendo como resultado las siguientes expresiones:

$$Iz = \frac{\frac{b}{2} + x}{z} = \frac{x_I}{f} \Rightarrow x_I = \frac{f}{z} \left( x + \frac{b}{2} \right) \quad (4.12)$$

$$Id = \frac{\frac{b}{2} - x}{z} = \frac{x_D}{f} \Rightarrow x_D = \frac{f}{z} \left( x - \frac{b}{2} \right) \quad (4.13)$$

$$d = x_I - x_D = \frac{f \cdot b}{z} \Rightarrow z = \frac{f \cdot b}{d} \quad (4.14)$$

$$x = \frac{x_I \cdot z}{f} \quad (4.15)$$

$$y = \frac{y_I \cdot z}{f} \quad (4.16)$$

En éste caso se denota la distancia de la línea base con la letra  $b$  y la distancia focal, idéntica en las dos cámaras, con la letra  $f$ . En la figura (4.4),  $P$  es un punto de la escena con coordenadas  $(x, y, z)$  según el sistema de coordenadas del mundo real;  $P_I$  es la proyección del punto  $P$  en la imagen izquierda y tiene por coordenadas  $(x_I, y_I)$ , según el sistema de coordenadas relativo de la cámara izquierda y  $P_D$  es la proyección del punto  $P$  en la imagen derecha, que tiene por coordenadas  $(x_D, y_D)$ , según el sistema de coordenadas relativo de la cámara derecha. Con la letra  $d$  se representa la disparidad del punto, que es el desplazamiento horizontal que se producen,  $d = x_I - x_D$ .

Se deduce a partir de las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14) que cuando se utiliza esta geometría, la profundidad  $Z$ , es inversamente proporcional a la disparidad de la imagen y para una profundidad dada, a mayor  $b$  mayor  $d$ , lo que sugiere que la línea base puede incrementarse para mejorar la exactitud de la profundidad medida, pero ello lleva consigo el hecho de que ahora ambas imágenes tienen menos características comunes, es decir menos bordes o regiones procedentes de los objetos de la escena, debido a las desapariciones y oclusiones de las imágenes de dichos objetos.

## 4.4. Flujo Óptico

Diversos experimentos han demostrado que la vista humana responde directamente al movimiento, que se puede considerar como uno de sus aspectos básicos. En la visión computacional se considera que el movimiento produce cambios diferenciales en la imagen que se perciben como un flujo de píxeles en el espacio de la imagen [36].

Se denomina flujo óptico al movimiento aparente captado en una secuencia de

imágenes mediante el análisis de los cambios que sufre la luminancia de los puntos de las mismas, el cual describe la dirección y velocidad del movimiento de dichos puntos. Otras definiciones asocian el flujo óptico a un conjunto denso de puntos de correspondencia entre imágenes sucesivas, obteniendo a partir de esas correspondencias, la velocidad de puntos o zonas de la imagen, pero el flujo óptico es la mejor medida del movimiento en el espacio bidimensional, tan importante para un robot móvil o para un organismo vivo. Se establece por tanto que la obtención del flujo óptico simplifica el problema del control de las acciones y movimientos de un sistema. Cuanto más preciso sea su cálculo y más rápida sea su obtención, el módulo de visión podrá obtener con menos problemas, a partir del flujo óptico, parámetros que permitan cerrar el ciclo percepción-acción en tiempo real, con operaciones simples y de un modo robusto ante posibles errores.

El flujo óptico es una pieza útil de información que se puede extraer de las imágenes capturadas por un robot móvil para determinar el movimiento relativo entre un objeto en una escena y una cámara para obtener una secuencia de imágenes 2D [36], [37], [38], [39], por lo que juega un papel importante en la estimación y descripción del movimiento, por lo cual es comúnmente utilizado en tareas de detección, segmentación y seguimiento de objetos móviles. A medida que avanza el robot, los objetos lejanos y hacia el centro de la imagen tiende a fluir más lentamente que los objetos cercanos. Los cálculos con el flujo óptico permitir la recuperación de la distancia a los objetos en la imagen y la velocidad de objetos. De esta forma, el robot puede detectar y evitar obstáculos mientras se mueve alrededor. Uno de los primeros pasos es seleccionar un algoritmo adecuado para ser programado, con respecto a la fiabilidad de los datos de flujo óptico generado, el número de marcos de imagen almacenados y la cantidad de cálculos. Uno de los algoritmos más populares e implementados para la obtención del flujo óptico es el de Lucas-Kanade.

Se han propuesto un gran número de métodos para intentar determinar el flujo óptico y otros siguen apareciendo en la actualidad aunque es necesario establecer que la mayoría de ellos se pueden observar de una forma conceptual, cumpliendo las mismas tres etapas de procesamiento siguientes:

1. Etapa de filtrado previo o suavizado, con filtros pasa bajas, para extraer la estructura de interés de la señal y para aumentar la relación señal/ruido.
2. Etapa de extracción de medidas básicas, como derivadas espacio-temporales, para medir las componentes normales de la velocidad, o búsqueda de zonas mediante técnicas de correlación.
3. Integración de las medidas realizadas en el punto anterior para producir un campo bidimensional de flujo, lo que generalmente supone realizar restricciones sobre la suavidad del campo de flujo fundamental que se ha medido.

A continuación se describe el principio de las técnicas de flujo óptico. Se considerará un video como una secuencia de imágenes en niveles de gris.

#### 4.4.1. Fundamentos Matemáticos

El cálculo del flujo óptico consiste en encontrar el desplazamiento aparente de los objetos en una secuencia de imágenes. Recuperar este desplazamiento es uno de los problemas claves en visión por computadora y se han realizado muchos trabajos de investigación sobre este campo durante los últimos años.

Si  $I(x, y, t)$  es la función de la intensidad de la imagen, en la imagen en el instante siguiente, debe mantenerse el mismo valor de  $I$ , entonces:

$$I(x, y, t) \approx I(x + dx, y + dy, t + dt) \quad (4.17)$$

donde  $(dx, dy)$  corresponde al desplazamiento de la región en  $(x, y, t)$ , después de un tiempo  $dt$ . Si la intensidad luminosa varía de forma suave respecto de  $x, y$  y  $t$ , se

puede utilizar el desarrollo en serie de Taylor en la ecuación anterior, esto conduciría a:

$$I(x + dx, y + dy, t + dt) = I(x, y, t) + \nabla I \cdot (\partial x, \partial y) + dt I_1 + R^n \quad (4.18)$$

donde  $\nabla I = (I_x, I_y)$  e  $I_1$  son las derivadas parciales de primer orden y  $R^n$  los términos de segundo orden y superiores, que se suponen despreciables. Si se opera en la ecuación anterior, se obtiene:

$$(I_x, I_y) \cdot (u, v) + I_1 = 0 \quad (4.19)$$

donde el primer término corresponde al gradiente espacial de la intensidad y el segundo al flujo óptico, concretamente denotando  $u = \frac{\partial x}{\partial t}$ ,  $v = \frac{\partial y}{\partial t}$ . A esta ecuación se le conoce como ecuación de restricción del flujo óptico. A partir de esta ecuación no es posible determinar  $\vec{v} = (dx, dy)^T$  ya que es un problema mal condicionado. Tan sólo se puede estimar  $\bar{v} \perp$ , la componente en la dirección normal a la curva de nivel, en la dirección del gradiente. Este fenómeno se conoce como el problema de apertura [40]. Para tratar con este problema lo que se suele hacer es imponer alguna restricción sobre el flujo óptico. En muchos métodos se suele imponer de forma implícita un modelo Lambertiano, en el que las intensidades de los pixels correspondientes no varían de una imagen a otra. También se suelen imponer restricciones sobre el flujo, denominadas restricciones de suavidad.

#### 4.4.2. Método Lucas-Kanade

Los métodos diferenciales fueron las primeras técnicas en formularse [36], producen un flujo óptico denso a la salida, además de tener en cuenta las contribuciones de todas las partes de la imagen, en vez de sólo puntos especiales aislados. Calculan el flujo óptico a partir de las derivadas espacio-temporales de las intensidades de luz en

el plano de imagen. Se asume que el dominio de la imagen es continuo (o diferenciable) en espacio y tiempo, suponiendo que los objetos en la escena tienen superficies que reflejan la luz de un modo casi uniforme y no hay transparencias, sombras, cambios de iluminación ni oclusiones. Con estas restricciones, que no son triviales, se pueden usar métodos globales y locales de primer y segundo orden, basados en la ecuación de la restricción de flujo óptico, que usa el gradiente de la intensidad espacial para calcular la velocidad de la imagen, definiendo una restricción local sencilla del movimiento de la imagen, haciéndola proporcional al cambio de la intensidad. Concretamente, se asume que la intensidad de imagen de cada punto visible de la escena no cambia respecto al tiempo.

Uno de los algoritmos más conocidos actualmente para seguimiento se conoce como Flujo Óptico basado en el algoritmo diseñado por Lucas y Kanade [41], este tiene como objetivo encontrar los mejores puntos en los que para la matriz de auto correlación de las segundas derivadas tengan eigen valores altos, como "las esquinas", estos tienen la característica de ser encontrados más fácilmente en imágenes posteriores en video.

Lucas y Kanade consideran al flujo localmente constante y lo determina con una solución de mínimos cuadrados con ponderación, de la ecuación (4.19). De esta forma su suposición principal es la de un modelo de velocidades constantes en una pequeña vecindad espacial  $\Omega$ . Dentro de esta región se minimiza el siguiente término:

$$\sum_{x \in \Omega} W^2(x) [\nabla I(x_1), \dots, \nabla I(x_N)]^T \quad (4.20)$$

donde  $W(x)$ , es una función de ponderación, que favorece la parte central de  $\Omega$ . Si se emplean las siguientes abreviaturas:

$$A = [\nabla I(x_1), \dots, \nabla I(x_N)]^T \quad (4.21)$$

$$W = \text{diag} [W(x_1), \dots, W(x_N)] \quad (4.22)$$

$$b = - [I_t(x_1), \dots, I_t(x_N)]^T \quad (4.23)$$

se obtiene una solución implícita, de la forma:

$$A^T W^2 A v = A^T W^2 b \quad (4.24)$$

cuando  $A^T W^2 A$  es no singular, se obtiene una solución expresada en forma cerrada que recibe el nombre de “pseudoinversa de Moore-Penrose” y es la solución de mínimos cuadrados. La matriz  $A^T W^2 A$  es singular cuando el gradiente es constante, en una o más direcciones, en la vecindad  $\Omega$ . Esta situación se puede interpretar como otro ejemplo del problema de apertura.

La matriz  $A^T W^2 A$  es una matriz de  $2 \times 2$ :

$$A^T W^2 A = \begin{bmatrix} \sum W^2(x, y) I_x^2(x, y) & \sum W^2(x, y) I_x(x, y) I_y(x, y) \\ \sum W^2(x, y) I_y(x, y) I_x(x, y) & \sum W^2(x, y) I_y^2(x, y) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

en donde todas las sumas son tomadas sobre los píxeles  $(x, y)$  en la vecindad espacial  $\Omega$ .



# Capítulo 5

## RESULTADOS

En este capítulo se describirá el desarrollo de la plataforma experimental, con la cual se validaron los algoritmos de visión y control en tiempo real. Además se explicarán a detalle los algoritmos de visión implementados, así como los resultados obtenidos.

### 5.1. Construcción de la Plataforma

En la plataforma experimental que se construyó se usó un sistema de visión artificial para estimar la velocidad horizontal y posición con respecto a una marca colocada en el piso para estabilizar el cuadricóptero en vuelo estacionario. La combinación de transductores inerciales para estabilizar al vehículo en orientación y la visión artificial para estabilizarlo en posición, incrementa las capacidades de un robot y amplía la aplicación potencial de sus sistema de visión. Al utilizar esta combinación visual-inercial de transductores se tiene la ventaja de aprovechar las principales características de cada uno de los tipos de transductores. Por otro lado, los transductores inerciales pueden realizar mediciones con un alto grado de precisión en movimien-

tos rápidos del vehículo, sin embargo, en movimientos lentos pueden presentar una gran incertidumbre. Mientras que en el caso de la cámara sucede prácticamente lo contrario, es decir, los movimientos lentos pueden ser medidos con una precisión aceptable, mientras que la medición de movimientos de alta velocidad puede llegar a ser errónea, o las incertidumbres en la medición se acrecentan.

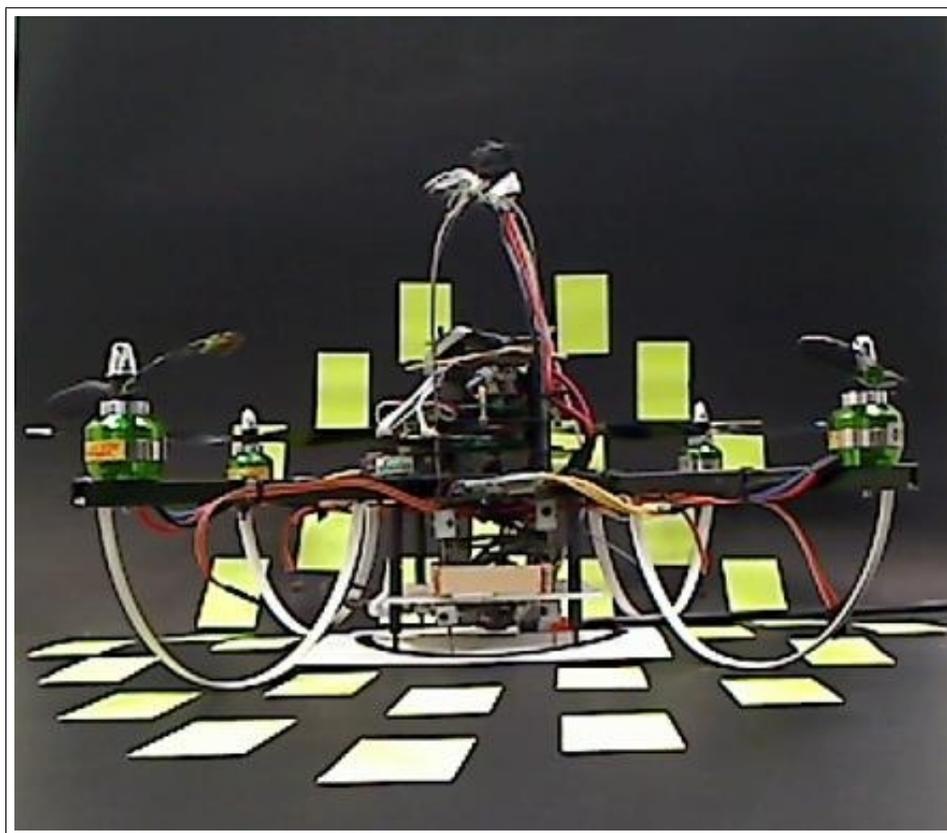


Figura 5.1: Plataforma X4

En este apartado se realiza la descripción de la construcción de la plataforma experimental de un cuadrirotor adecuado para vuelo de interior. Las especificaciones de la plataforma son las siguientes:

- La masa total del cuadrirotor es de 643 gr. sin batería, la batería tiene un peso de 185 gr., por lo que el cuadrirotor tendría un peso total de 828 gr. con cámara incluida. Mientras más pesada sea la plataforma más cara es. Muchos cuadrirotos utilizados para la investigación no superan una masa de 1 kilo, por lo que el peso de la plataforma parece ser adecuado.
- Tiene un vuelo autónomo entre 10 y 20 minutos. Dentro del laboratorio se usa una fuente de alimentación con el propósito de no estar cargando constantemente las baterías.
- La plataforma tiene la capacidad para transmitir y recibir datos en tiempo real a partir de una estación de tierra de manera inalámbrica, con lo que se evita el uso de cables que puedan enredarse en la aeronave y causar un accidente.

Los principales componentes de un cuadrirotor son:

- 4 motores eléctricos con sus respectivos controladores de velocidad electrónicos.
- 4 propelas.
- Unidad de procesamiento embarcada en el cuadrirotor.
- Un sensor para la medición de la aceleración en tres dimensiones del espacio abordo del prototipo, también de ser posible utilizar este sensor para calcular los ángulos de alabeo y cabeceo con conocimiento del vector de aceleración de la gravedad.
- Un compás electrónico para medir el ángulo de guiñada.
- Una batería que alimente tanto a los circuitos electrónicos como a los motores.
- Un fuselaje para soportar todos los componentes de la plataforma.

### 5.1.1. Estructura del cuadrirotor

#### Fuselaje

El fuselaje es la estructura mecánica del cuadrirotor, es el que soporta todos los componentes, como un "esqueleto" de seres humanos. El diseño del fuselaje a partir de cero implica importantes conceptos sobre física, aerodinámica, ingeniería de materiales y técnicas de fabricación para lograr un rendimiento determinado, también hay que tomar en cuenta la fiabilidad y los criterios de costos. Como el objetivo principal de esta tesis no es el diseño del fuselaje, se adquirió un prototipo que está a la venta. La estructura que se armó es la "Quadro XL", de la compañía Alemana Mikrokopter. Consisten en dos barras de aluminio que son sujetadas por medio de dos láminas de fibra de carbono (ver figura 5.2)



Figura 5.2: Cuerpo del Cuadrirotor

#### Motores y Propelas

Al final de cada barra de aluminio se incorpora un motor brushless con su respectiva propela (ver figura 5.3). En el caso del cuadrirotor se necesitan 2 propelas

en sentido horario y dos hélices en sentido antihorario.

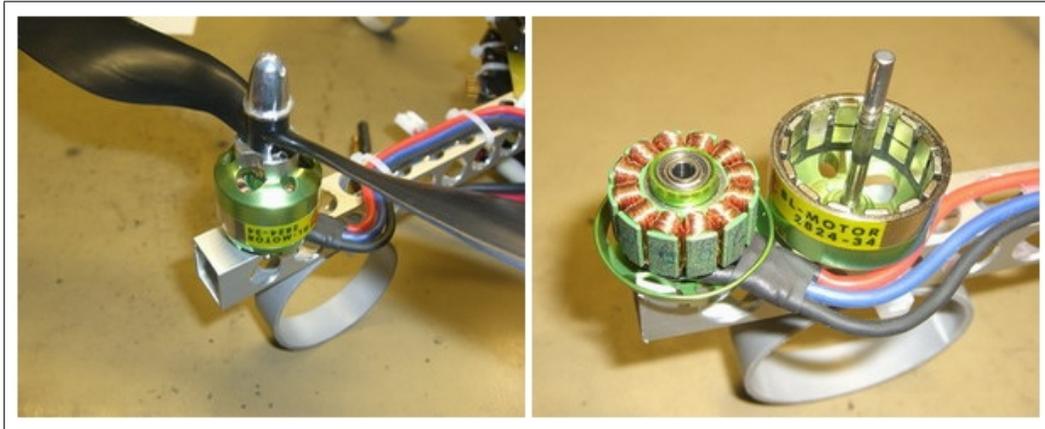


Figura 5.3: Motor Brushless y Propelas

Los motores brushless son motores trifásicos de alto rendimiento y bajo peso. Básicamente, hay dos tipos de motores brushless, los inrunner y los outrunner. Los primeros son de más velocidad, su torque máximo lo tienen a muy altas revoluciones, por lo que se usan con reductores. Los outrunner tienen su torque máximo a baja velocidad, por lo que no necesitan reductores, van directamente en la hélice. Este tipo de motores no tienen desgaste ya que sólo constan de un bobinado de varios polos y varios imanes permanentes de alta potencia, no tienen fricción de ningún tipo al no tener escobillas (carbones), lo que los provoca que tengan un tiempo de vida muy largo. Para este trabajo se utilizaron motores brushless outrunner. Estos motores trabajan gracias a los variadores de velocidad (speed control), que transforman la corriente continua de las baterías en una tensión alterna trifásica.

Los motores utilizados son de la marca Robbe, modelo ROXXY2824-34, los cuales son de 90 Watts, 1100 rev/min, y cada motor pesa 48 gramos. Cada motor puede levantar un peso de hasta 580 gr, con lo que el cuadrirotor puede levantar un peso

máximo de 2.320 kilos. La medida de las propelas para estos motores son de 10x5. Los variadores de velocidad intercambian datos con el procesador usando el protocolo de comunicación I<sup>2</sup>C.

### 5.1.2. Unidad de Procesamiento

Un sistema de estabilización es necesario para el vuelo del quadrirotor, ya que es un vehículo naturalmente inestable. La implementación de algoritmos de control para la estabilización de la plataforma se logra usando un microcontrolador. En este trabajo se utilizó el microcontrolador Rabbit RCM300 (figura 5.4), estos microcontroladores se caracterizan por una programación muy sencilla basada en C, la programación de este microcontrolador se lleva a cabo por medio del software llamado Dinamic C, además este microcontrolador cuenta con la función de multitareas. Es alimentado con 3.3 Volts, trabaja a 29.4 MHz, tiene salidas PWM, tiene 52 E/S digitales y 6 puertos serie.



Figura 5.4: Rabbit RCM300

### 5.1.3. Sensores

Los sensores de un cuadrirotor son un elemento clave para lograr la estabilización en el vuelo. Ellos son responsables de proporcionar información como la aceleración, la altitud, posición global, y otros datos relevantes. La medición de la posición angular se logra usando el sensor llamado acelerómetro, el cual estima los ángulos de cabeceo y alabeo, y los girómetros, que estiman la velocidad angular. Además se cuenta con un magnetómetro, el cual sirve para orientar al cuadrirotor según el meridiano magnético del lugar, este sensor nos permite corregir el ángulo de guiñada. Estos sensores se incorporaron en una tarjeta electrónica, la cual es llamada IMU (Inertial Measurement Unit) y se puede ver en la figura (5.5), esta tarjeta fue diseñada y hecha por el laboratorio UMI-LAFMIA. La información obtenida de esta tarjeta es enviada al microcontrolador Rabbit RCM300 para procesar los datos obtenidos de los sensores.



Figura 5.5: IMU

#### 5.1.4. Comunicación inalámbrica

Las comunicaciones inalámbricas son siempre un desafío. Uno tiene que ponderar los factores importantes como el consumo de energía, peso, velocidad de transmisión y fiabilidad. Afortunadamente, es posible utilizar hardware con el Rabbit que permite satisfacer todas las condiciones anteriores, por ejemplo, el módem XBee (figura 5.6). Se cuenta con dos módulos XBee, ya que se va a utilizar: uno para el cuadricóptero y otro en la computadora de la estación de tierra (que se encargará del procesamiento de las imágenes tomadas por la(s) cámara(s)).

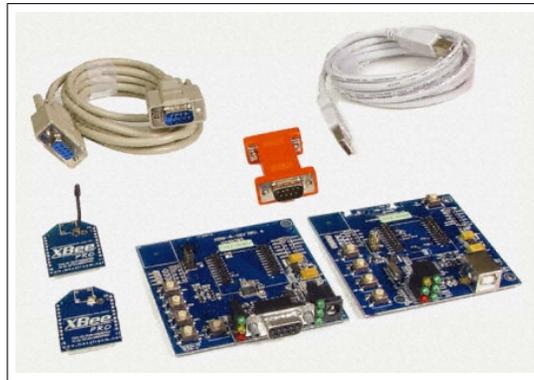


Figura 5.6: XBee

Para el manejo del cuadricóptero de forma manual, necesitamos un radiocontrol, el cual está constituido por una emisora y un receptor. La emisora se encarga de transmitir al receptor (situado en la plataforma) las órdenes dadas por el piloto, el cual mueve los sticks de mando y el receptor envía dichas órdenes al microprocesador, con el fin de transformarlas en movimiento. Para manipular el cuadricóptero se utiliza un radio control de la marca Futaba, modelo 6EX, con 6 canales (figura 5.1.4), el receptor para este radio es un receptor para 6 canales, modelo R606FS.



Radio

### 5.1.5. Batería

La batería utilizada es de litio-polímero o mejor conocida como LiPo (figura 5.7), se diferencian de otros tipos de batería, debido a su peso ligero y de alta capacidad. El manejo de estas baterías no está exenta de peligro, por lo que algunas reglas deben ser tenidas en cuenta. La batería LiPo necesitan un cargador especial, las celdas no debe ser cargadas de más, ni tampoco deben ser descargadas totalmente. La batería LiPo usada es de 3 celdas, 11.1 Volts, con una corriente de 2100 mili Amperes.



Figura 5.7: Batería LiPo

## 5.2. Sistema de Visión

En este apartado describiremos los pasos que se siguieron para la realización del sistema de visión usado para calcular la posición del cuadrirotor.

### 5.2.1. Calibración de las cámaras

En este trabajo, la calibración se implementó usando Matlab, por medio de un toolbox que ya está hecho específicamente para este propósito, este toolbox se puede descargar de la página de internet <http://www.vision.caltech.edu>. La misma página de internet nos lleva de la mano para lograr exitosamente la calibración [42].

El modelo de cámara que se utilizó fue una web Logitech Quickcam Pro 9000 de 2 megapíxeles con autofocus, aunque para su calibración es necesario desactivar esta última función.

#### Visión monocular

El procedimiento de Calibración para una sola cámara es el siguiente:

1. En la figura (5.8) se muestran las imágenes tomadas para la calibración al ser cargadas por Matlab
2. Se colocan las esquinas en cada una de las imágenes. En las figuras (2) y (2) se ilustra este punto con dos imágenes de las 21 tomadas

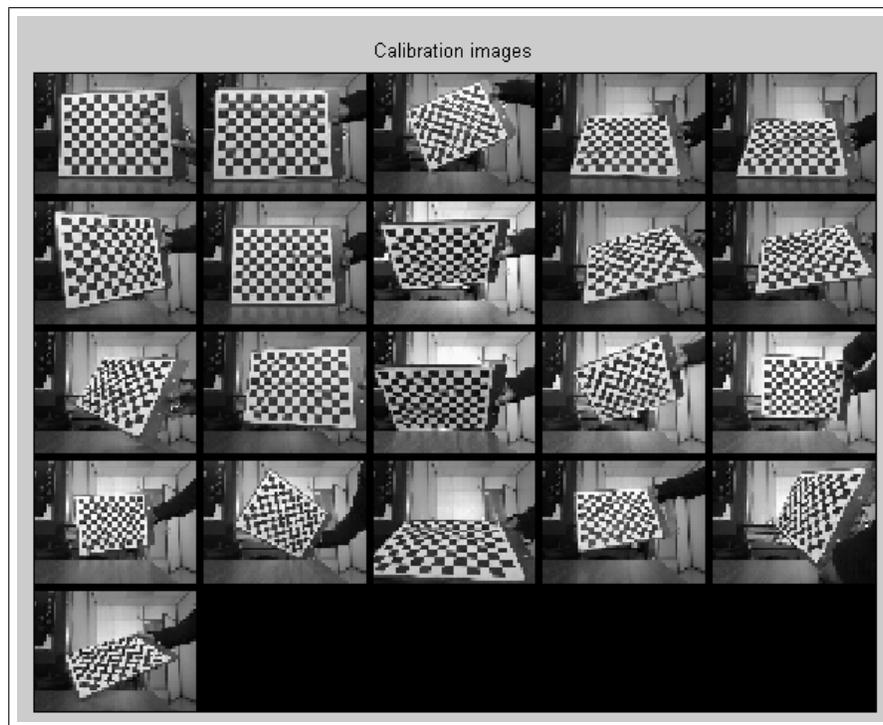
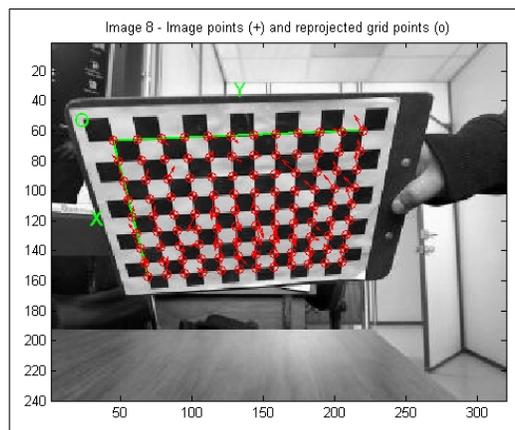
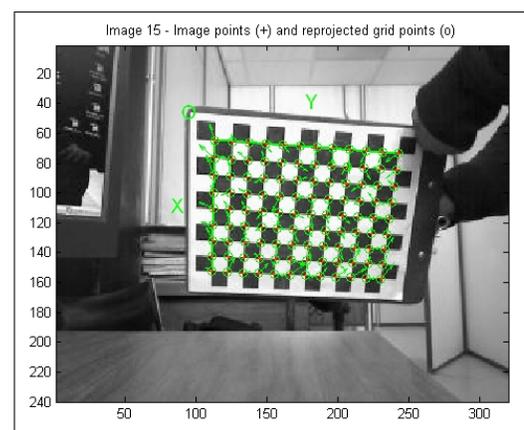


Figura 5.8: Imágenes Cargadas en Matlab



Esquinas de la Foto 8



Esquinas de la Foto 15

3. El error obtenido se muestra en la figura (5.9)

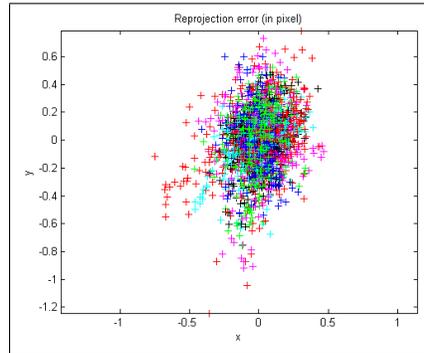


Figura 5.9: Error

4. Como en este caso la cámara se dejó fija, mientras que el patrón se movió de lugar, se muestra en la figura (5.10) los parámetros extrínsecos de acuerdo a la cámara fija.

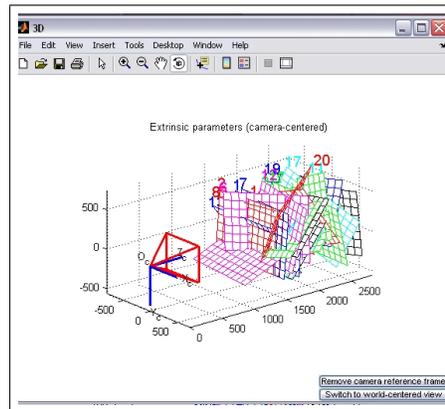


Figura 5.10: Parámetros Extrínsecos de la cámara

5. Los parámetros intrínsecos obtenidos por medio de MATLAB se muestran en la figura (5.11).

```

Calibration parameters after initialization:

Focal length:      fc = [ 262.61883  262.61883 ]
Principal point:   cc = [ 159.50000  119.50000 ]
Skew:             alpha_c = [ 0.00000 ] => angle of pixel = 90.00000 degrees
Distortion:       kc = [ 0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000 ]

Main calibration optimization procedure - Number of images: 21
Gradient descent iterations: 1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...11...12...13...14...15...16...17...18...19...done
Estimation of uncertainties...done

Calibration results after optimization (with uncertainties):

Focal length:      fc = [ 266.59206  261.44390 ] ± [ 0.90334  0.90925 ]
Principal point:   cc = [ 157.54833  115.86922 ] ± [ 1.47015  1.19086 ]
Skew:             alpha_c = [ 0.00000 ] ± [ 0.00000 ] => angle of pixel axes = 90.00000 ± 0.00000 degrees
Distortion:       kc = [ 0.04117  -0.14925  0.00791  0.00121  0.00000 ] ± [ 0.01100  0.03687  0.00154  0.00199  0.00000 ]
Pixel error:      err = [ 0.15107  0.22303 ]

```

Figura 5.11: Parámetros intrínsecos de la cámara

Estos últimos valores (parámetros intrínsecos) serán utilizados para el algoritmo de programación que se describirá posteriormente.

## Visión estéreo

En el caso de que sea necesario una calibración estéreo (2 cámaras), el primer paso es calibrar cada una de las cámaras (derecha e izquierda) de manera individual para posteriormente con ayuda del mismo toolbox de Caltech, utilizar una función específicamente para obtener los parámetros de las cámaras colocadas para la visión estéreo. Para este trabajo no se requiere de la calibración estéreo pero si de cada una de las cámaras con las que se trabajó.

### 5.2.2. Estimación de la posición del cuadrirotor

El sistema de visión fue colocado sobre el cuadrirotor, en la parte inferior del mismo, con este sistema se estima la velocidad lineal del cuadrirotor, así como su

posición con respecto al eje "z".

Para la captura del video se utiliza la librería de visión por computadora OpenCV [43], de la cual se puede obtener información en la página de internet: [opencv.willowgarage.com](http://opencv.willowgarage.com), y el entorno de programación es Visual Studio C++ 2008.

Como ya se ha mencionado, para poder calcular la posición del cuadrirotor se usó el reconocimiento de objetos por medio de un descriptor, es decir, el reconocimiento de una marca específica, en este caso fue el número uno encerrado en un círculo, como se puede ver en la figura (5.12), el algoritmo de visión reconoce esta marca, colocando un cuadro rojo que cubra el círculo.

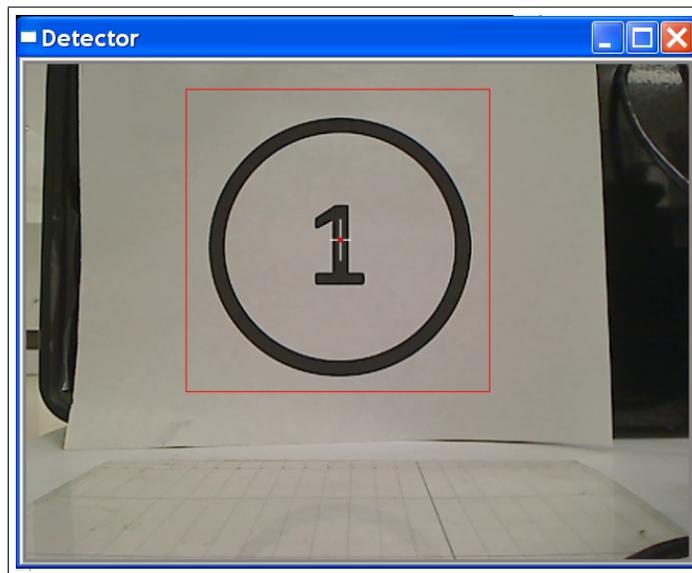


Figura 5.12: Descriptor

### Ajuste de curvas

Para el sistema de visión se realizó un ajuste de curva hecha en Matlab, esto con el fin de conocer el comportamiento del tamaño del cuadrado que encierra la marca

(el círculo encerrando el número uno) a visualizar y poder así obtener la profundidad (distancia en  $z$ ).

Un ajuste de curvas es alinear patrones o modelos adecuados para encontrar la tendencia de una disposición de datos en diferentes observaciones de tiempo. Matemáticamente, ajustar una curva implica ajustar una función  $g(x)$  a un conjunto de datos dado  $(x_i, y_i)$ . La función  $g(x)$  puede ser un polinomio, una función no lineal o una combinación lineal de funciones conocidas.

Experimentalmente la cámara logra visualizar la marca partir de 21 cm, por lo que las mediciones se empiezan a partir de ese valor y se toma la medición cada 5 cm, valor del cuadrado mostrado en la tabla es el valor de uno de sus 4 lados, los valores obtenidos son mostrados en la figura (5.13).

Una vez obtenidos los datos, se elaboró la gráfica, con estos datos realiza el ajuste de curva, con lo que encontramos la expresión matemática que representa los valores tan exactamente como sea posible. El polinomio obtenido fue de grado 7, y tiene la siguiente forma:

$$hx^7 + gx^6 + fx^5 + ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$$

en donde los coeficientes correspondientes a los términos que forman el polinomio son los siguientes:

$$a = 410,1718751289663$$

$$b = -8,2110187628243$$

$$c = 0,0917098243866$$

$$d = -0,0006110363686$$

$$e = 0,0000024590536$$

$$f = -0,0000000058237$$

$$g = 0,0000000000074466$$

$$h = -0,000000000000039599$$

Distancia de la cámara a la referencia (píxeles)	Medida del cuadrado que encierra la marca (cm)
21	421
25	376
30	320
35	270
40	220
45	200
50	182
55	164
60	152
65	141
70	126
75	120
80	113
85	108
90	100
95	93
100	90
105	86
110	79
115	77
120	74

Figura 5.13: Correspondencia de la distancia en  $z$

Como se muestra en la figura (5.14), el polinomio dentro de los valores de operación tiene el desempeño deseado.

### Visión monocular

Al realizar el ajuste de curva, se conoce la distancia en  $z$ , ésto nos ayuda a encontrar tanto la distancia en  $x$  y la distancia en  $y$ , de acuerdo al modelo de proyección central de la cámara explicado en el apartado 3.2 de ésta tesis. Como se puede ver en la figura (5.15), el programa de visión despliega la posición en  $x$ ,  $y$  y  $z$  calculadas a partir de la referencia.

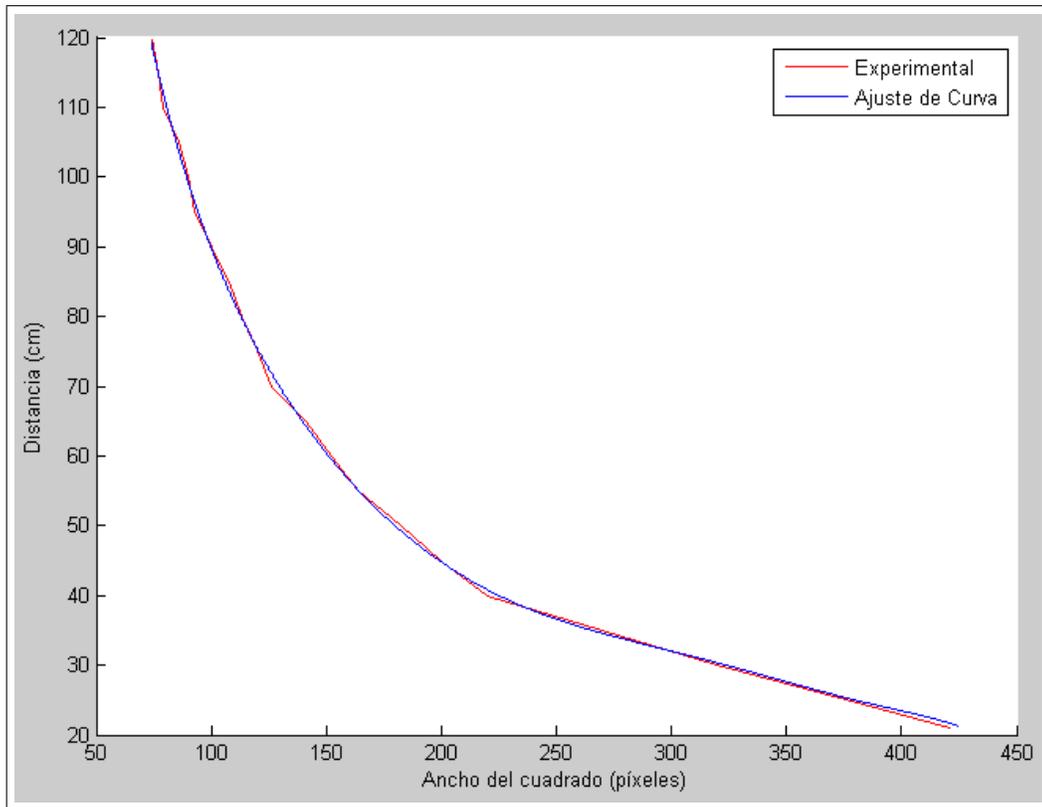


Figura 5.14: Desempeño del Polinomio (grado 7)

### Visión estéreo

Conforme a la geometría presentada para dos cámaras paralelas, es fácil obtener la posición para visión estéreo (ver figura 5.16).

Un problema importante en visión estéreo es la correspondencia de puntos en la imagen, en este caso resulta que el mismo descriptor ayuda a resolver este problema y por ende acorta el tiempo de procesamiento en el algoritmo, ya que se considera el centro de cada cuadro que encierra el descriptor como el mismo punto para ambas imágenes.

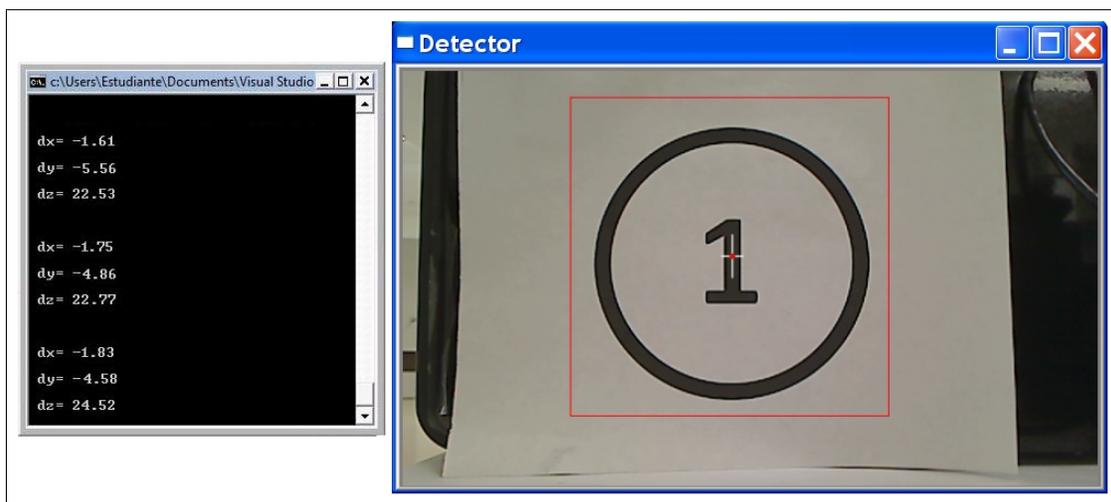


Figura 5.15: Posición con una cámara

### 5.2.3. Flujo Óptico

Para obtener un desempeño eficiente se implementó el método de Lucas y Kanade piramidal, el cual estima el flujo óptico por medio de pirámides gaussianas de una manera iterativa tratando de minimiza el error del flujo óptico. El flujo óptico es estimado sólo sobre un conjunto de puntos de la escena [44]. Este criterio de selección tiende a elegir regiones de la imagen que presenten esquinas y puntos aislados. La entrada del algoritmo es un video en tiempo real. Utilizando está información se propone el algoritmo que se presenta en la figura (5.17).

En la figura (5.18) se puede observar el esquema del software del sistema para el cálculo del flujo óptico.

En el algoritmo el primer paso es la captura del video, de éste se obtienen dos frames para los cuales se crea una imagen de 1 sólo canal (nivel de gris) usando las funciones: `allocateOnDemand` y `cvConvert Image`, posteriormente se hace uso de la función `cvGoodFeaturesToTrack`, que calcula los eigenvalores de cada píxel y tiene



Figura 5.16: Posición con Visión Estéreo

como resultado un arreglo de puntos donde se encuentran los mayores eigenvalores, que son puntos óptimos a ser seguidos, con todas las características obtenidas es posible implementar la función `cvCalcOpticalFlowPyrLK`, que implementa el algoritmo de Lucas Kanade de manera piramidal, ya que busca ampliar la ventana local entre imágenes para poder referenciar el punto a seguir. Obtenidas las mediciones necesarias se grafica el sentido y la magnitud del flujo óptico acondicionando estas medidas para su correcta visualización en la computadora por medio de la función `cvLine`, por último se obtiene una aproximación de la velocidad y la dirección en  $x$  y  $y$  mediante el cálculo matemático de los parámetros ya obtenidos.

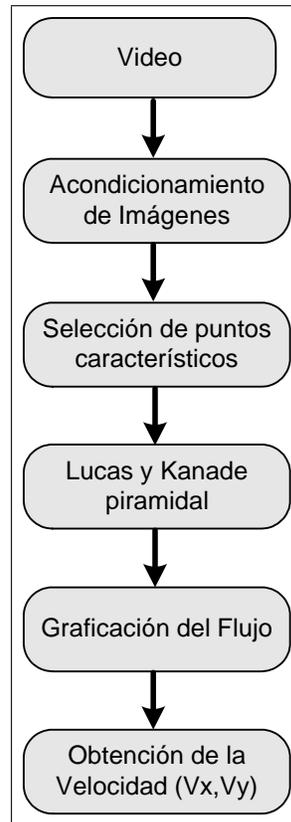


Figura 5.17: Diagrama de bloques del algoritmo

### Visión monocular

En la figura (5.2.3), se muestra el resultado del flujo óptico, el cual está representado con flechas azules, en la parte izquierda de la imagen se muestran las cantidades resultantes de la estimación de las velocidades en  $x$  y  $y$ .

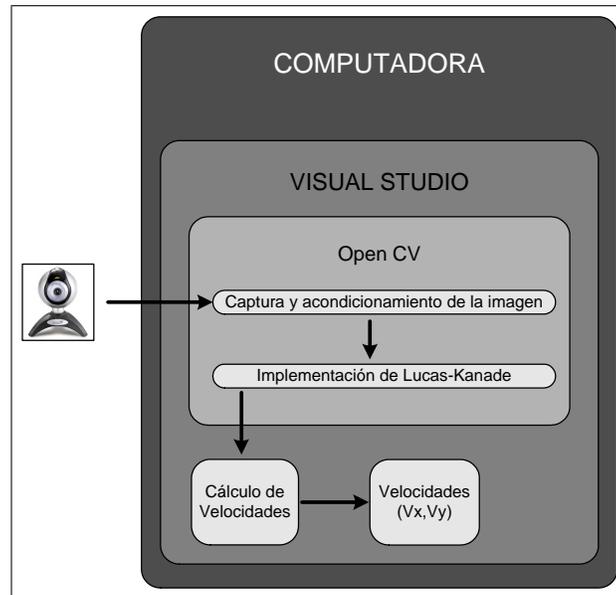
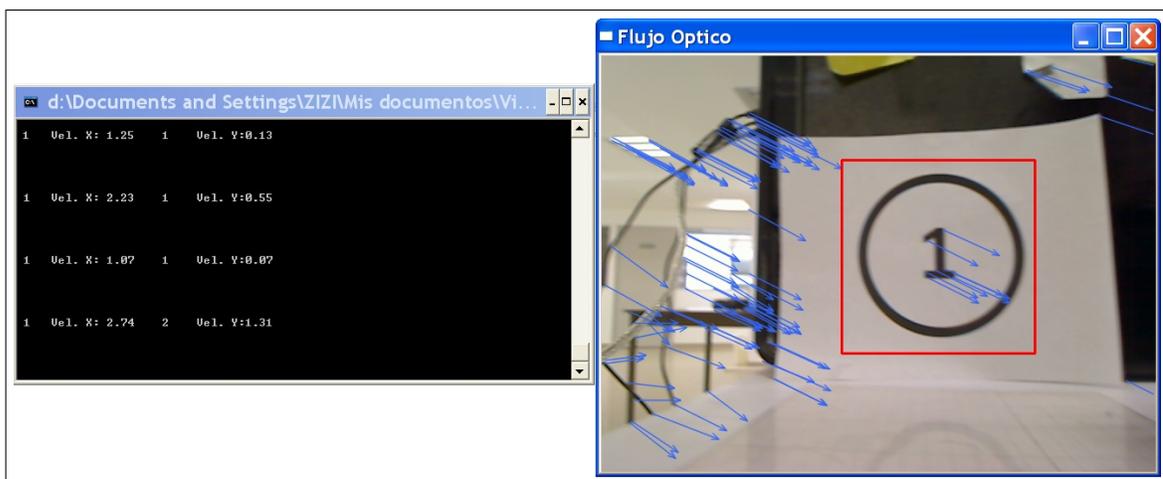


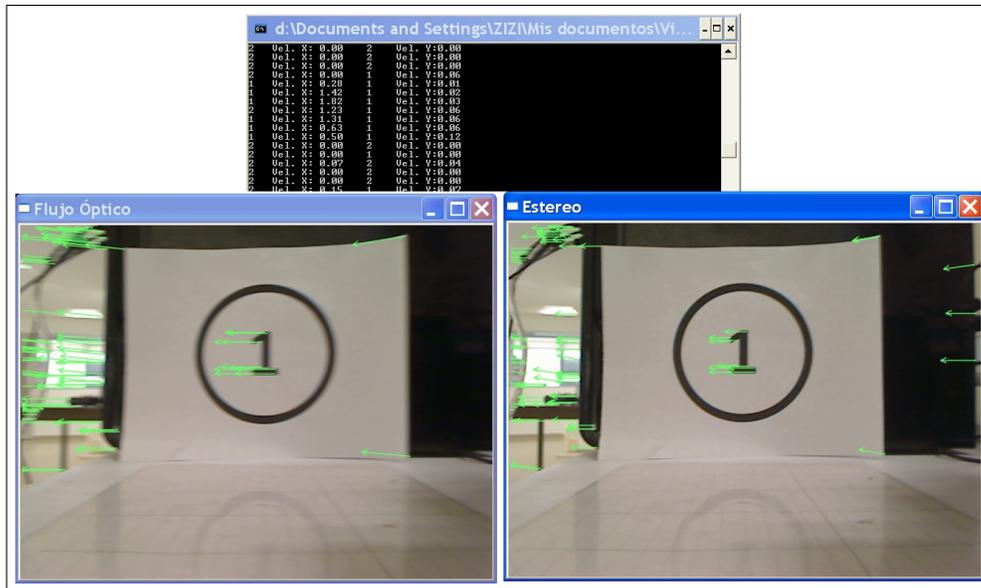
Figura 5.18: Esquema del Software del sistema



Flujo Óptico Visión Monocular

## Visión estereoscópica

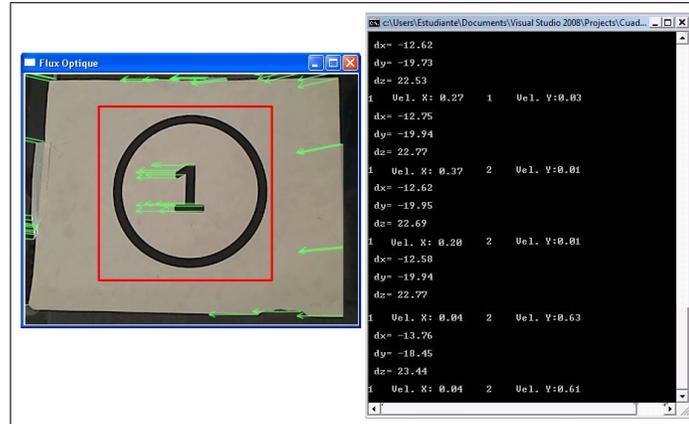
En la figura (5.2.3) se muestra el resultado para flujo óptico en un sistema de visión estéreo.



Flujo Óptico (Visión Estéreo)

### 5.2.4. Combinación de Posición y Flujo óptico

La siguiente figura (ver 5.2.4) muestra el cálculo de la posición y del flujo óptico en conjunto, para el caso monocular.



Posición y Flujo Óptico Monocular

En la figura (5.19) se observa el cálculo de la posición y del flujo óptico en conjunto, para la implementación del sistema de visión estereo.



Figura 5.19: Posicion y Flujo óptico Estereo

## 5.3. Control del cuadrirotor

### 5.3.1. Visión Monocular

Los datos de control obtenidos en tiempo real con los giroscopios se pueden observar en las figuras (5.20) y (5.21). Los datos correspondientes a la aceleración se

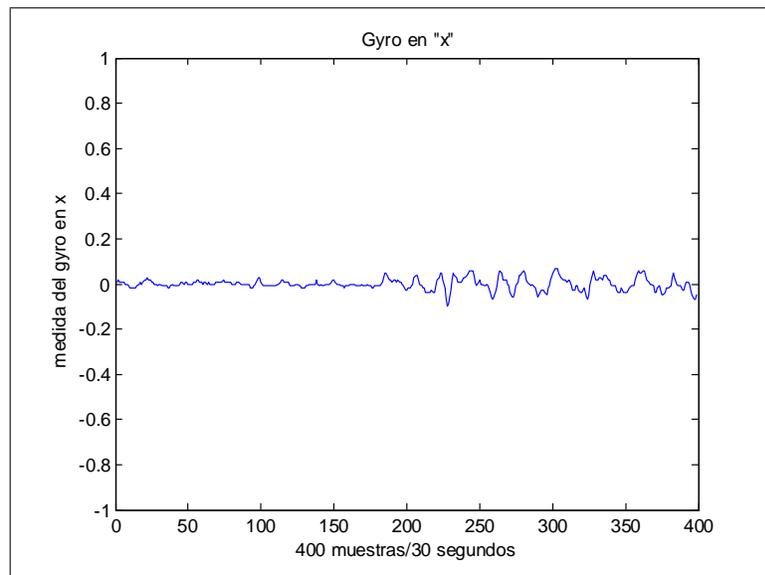


Figura 5.20: Gyro en x monocular

pueden apreciar en las figuras (5.22) y (5.23).

En la figura (5.24) se muestran las posiciones correspondientes a "xz a z" de la plataforma con respecto a la marca que se identifica, como se puede ver en las gráficas el cuadrirotor tiene un área de trabajo de aproximadamente de  $\pm 20\text{cm}$ . en ambas posiciones. En la figura (5.25), se muestra el resultado del control en altura, siendo la referencia de 40 cm aproximadamente. Por último, en la figura (5.26), se puede ver al cuadrirotor en vuelo.

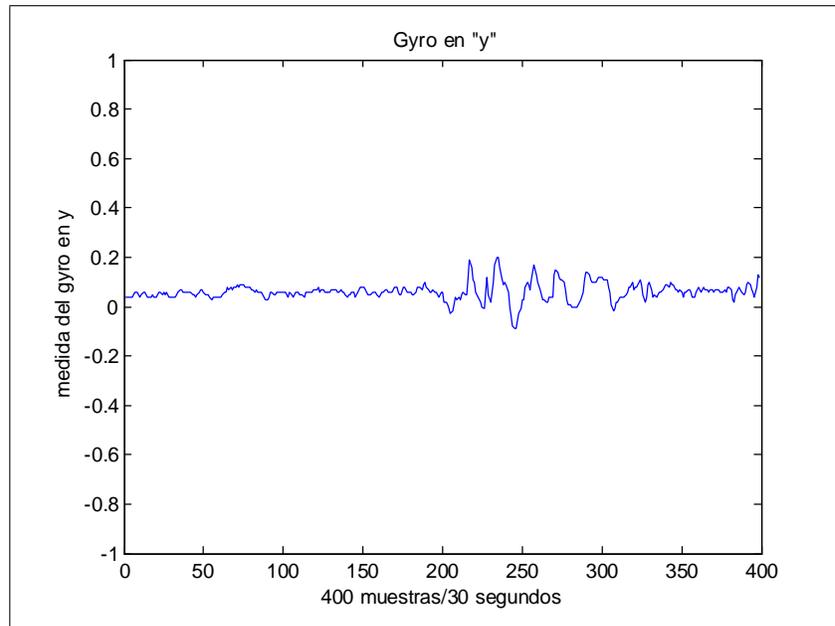


Figura 5.21: Gyro en y monocular

### 5.3.2. Visión Estereoscópica.

Ahora se presentan los resultados obtenidos con la estimación de la posición y de la velocidad de la plataforma por medio del sistema de visión estereo. En las figuras (5.27) y (5.28) se presentan las mediciones de los gyros en "x" y "y" respectivamente.

En las figuras (5.29) y (5.30) se presentan las mediciones de los aceleros en "x" y "y" respectivamente. De manera semejante a la visión estereoscópica, el cuadrirotor se controló a 40 cm de distancia con respecto a la marca identificada (ver 5.31).

Comparando los resultados obtenidos con la visión monocular se puede ver un mejor desempeño de la plataforma controlada con el sistema de visión estereo (figura 5.32), ya que el cuadrirotor tiene un mejor cálculo en la posición por lo que mejora el comportamiento de la aeronave, aún así se puede decir que el desempeño del cuadrirotor con visión monocular es bueno.

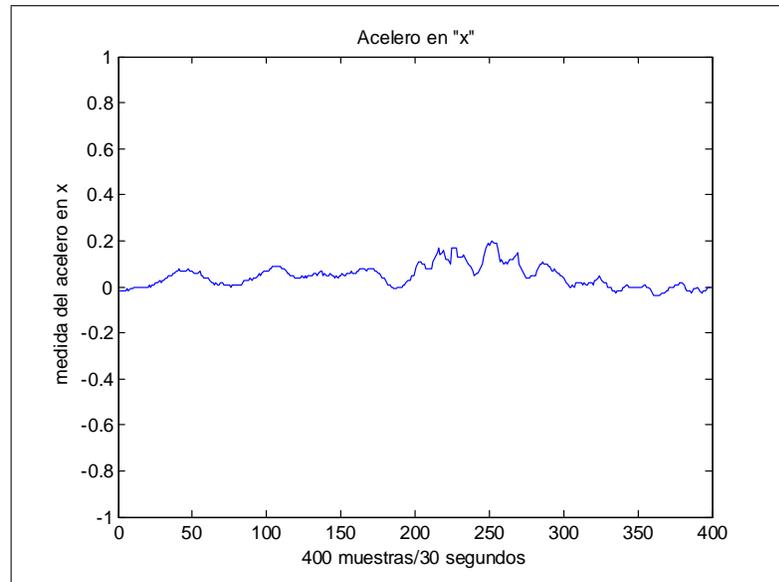


Figura 5.22: Acelero en x monocular

## 5.4. Seguimiento de Trayectoria

Para el seguimiento de trayectoria se implementó en la librería OpenCv el algoritmo que reconociera una línea roja, dentro de esta librería ya se encuentra una función que nos permite reconocer las líneas de una imagen, esta función se llama `cvHoughLines2`, que aplica la transformada de Hough para encontrar líneas, el problema con esta función es que el error en la imagen es muy grande, por lo que es necesario aplicarle antes un filtro, con el fin de corregir esos errores, además un requisito para implementar esta función es que a la imagen se le necesita aplicar la función `cvCanny` para encontrar bordes. La imagen ha de tener 1 solo canal (escala de grises). El procedimiento que se siguió para la detección de la línea fue el siguiente:

- Se captura la imagen por medio de un vídeo, al cual se le aplica un filtro de color, en este caso rojo, y sólo se delimiten las líneas proporcionadas por este

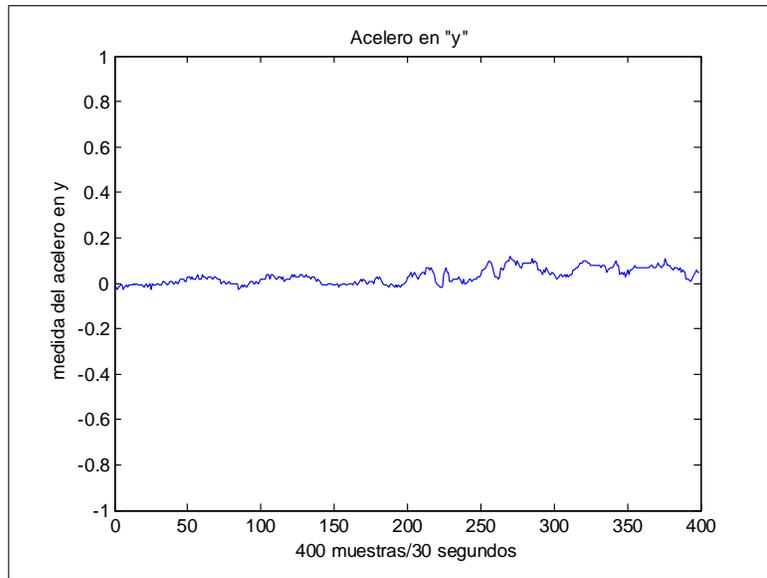


Figura 5.23: Acelero en y monocular

color.

- Después se aplicó la función `cvCanny`, la cual es necesaria para el reconocimiento de las líneas, como anteriormente ya se mencionó.
- Además se aplicó un filtro `smooth`, para reducir aún más el ruido y tener una imagen de mejor calidad.
- Posteriormente se implementó la función `cvHoughLines` para el reconocimiento de las líneas.
- Por último, se traza con la información obtenida las líneas correspondiente a nuestra marca roja en el suelo y se calcula la posición de la línea en la imagen.

En las figuras (5.33) y (5.34) se puede apreciar el resultado de la imagen una vez aplicado el algoritmo para el reconocimiento de una línea roja en diferentes

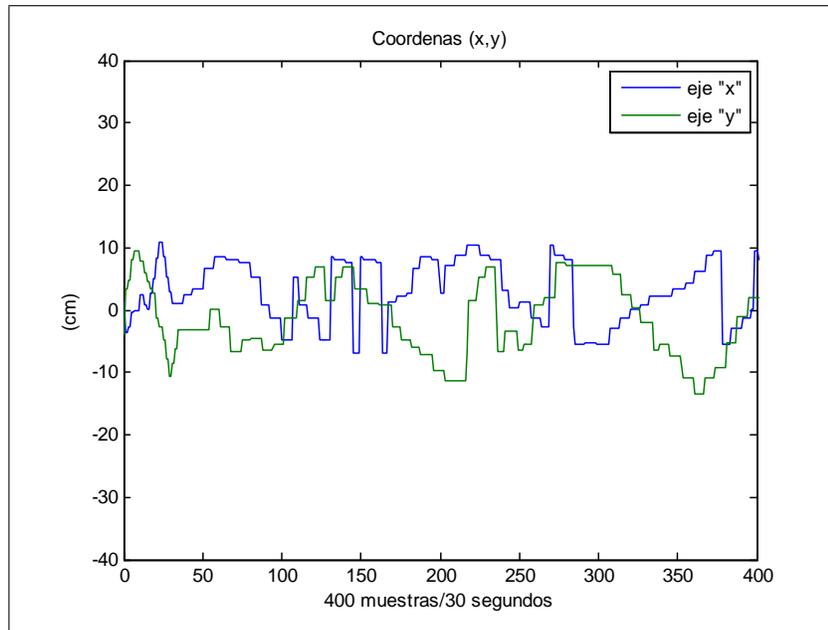


Figura 5.24: Posición (x,y)

posiciones, obteniendo su ángulo y posición en la imagen.

Una vez reconocida la línea roja, se determinó la acción a implementar en el cuadrirotor, por medio del ángulo proporcionado por la imagen se procede a realizar la acción necesaria para reubicar al cuadrirotor, ya que el ángulo que proporcione el resultado del procesamiento de la imagen será inversamente proporcional al ángulo de guiñada en el cuadrirotor, con lo que variando las velocidades de los motores 1 y 3 o 2 y 4, sea el caso se logrará la reubicación de la plataforma, con el fin de que realice el seguimiento de manera correcta. Los resultados obtenidos del comportamiento del seguimiento de la línea en los gyros y aceleros se pueden ver en las figuras (5.33) y (5.34), respectivamente.

En la figura (5.31) se observa la plataforma en vuelo realizando el seguimiento de trayectoria.

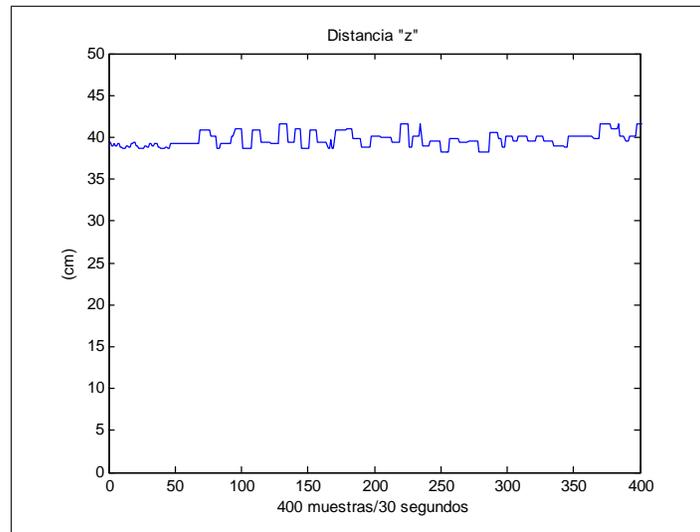


Figura 5.25: Altura del Cuadrirotor

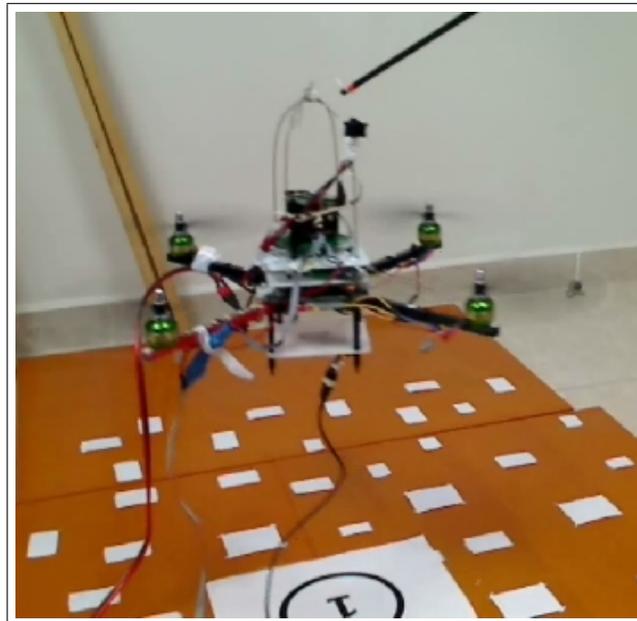


Figura 5.26: Cuadrirotor en Vuelo

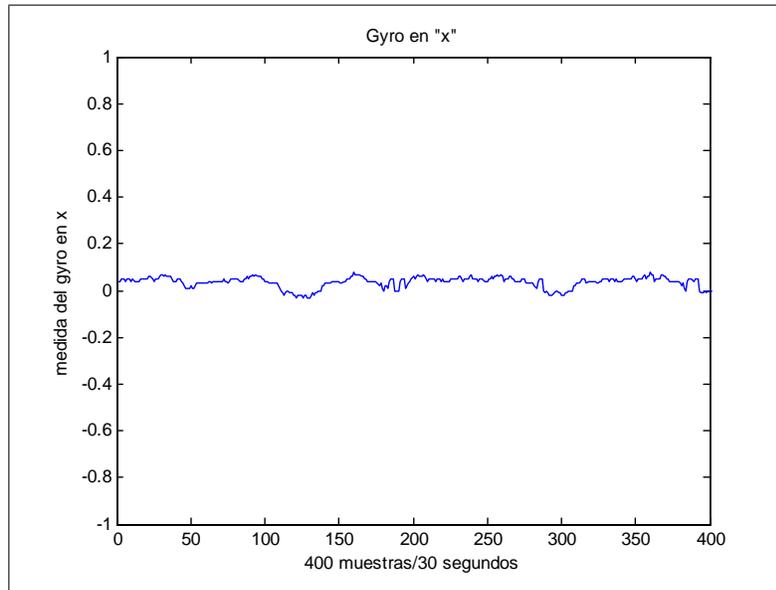


Figura 5.27: Gyr en x - estereo

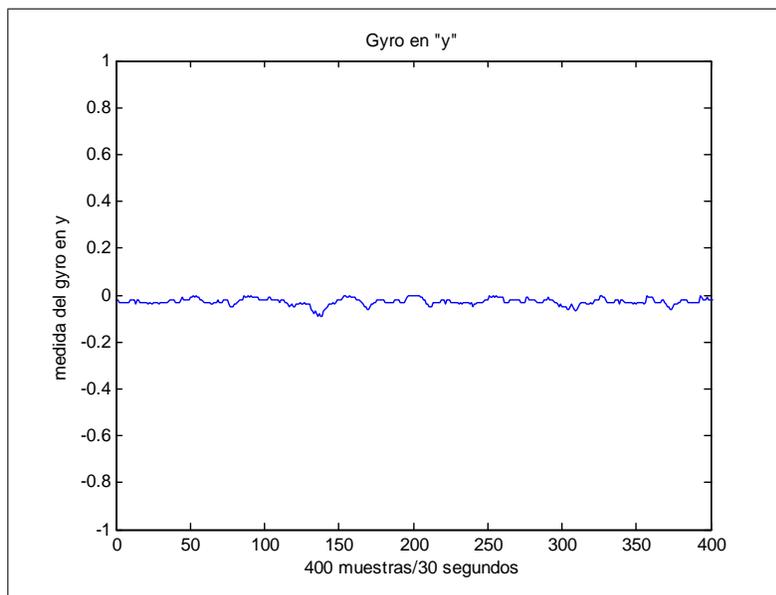


Figura 5.28: Gyro en y - estereo

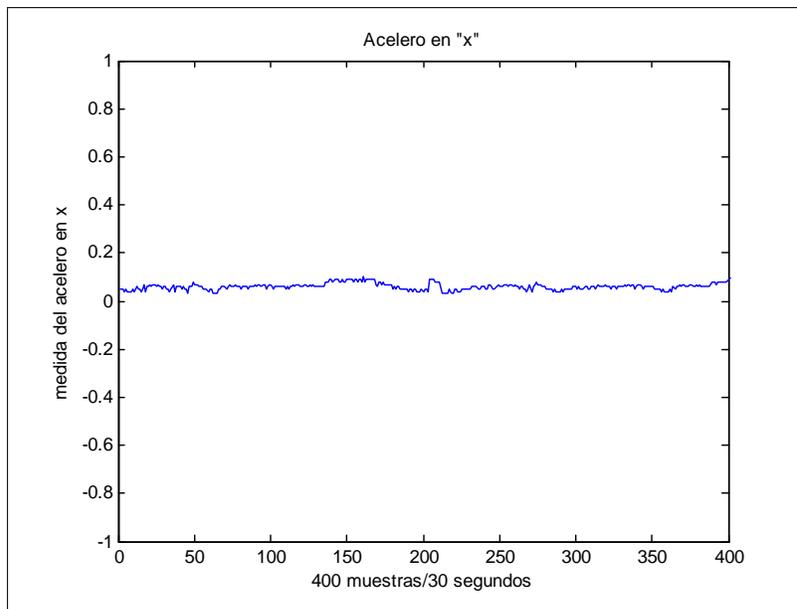


Figura 5.29: Acelero en x - estereo

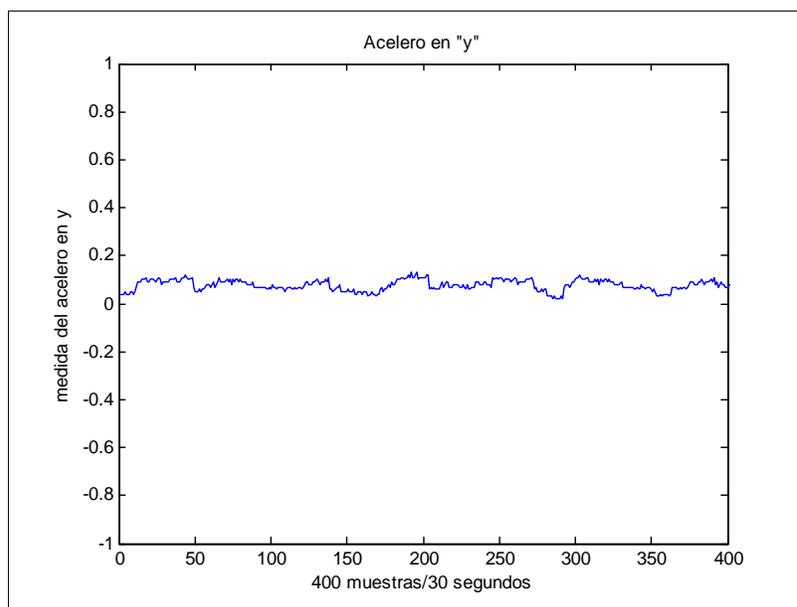


Figura 5.30: Acelero en y - estereo

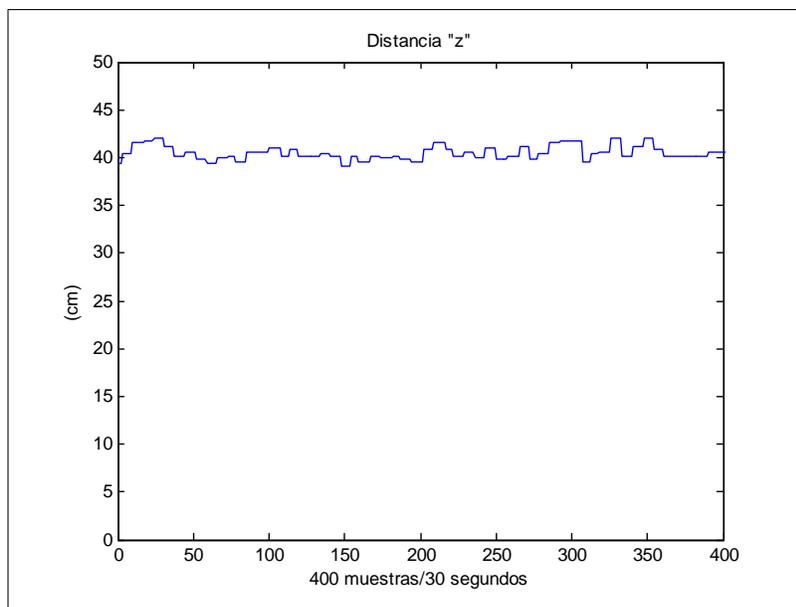


Figura 5.31: Distancia z - estéreo

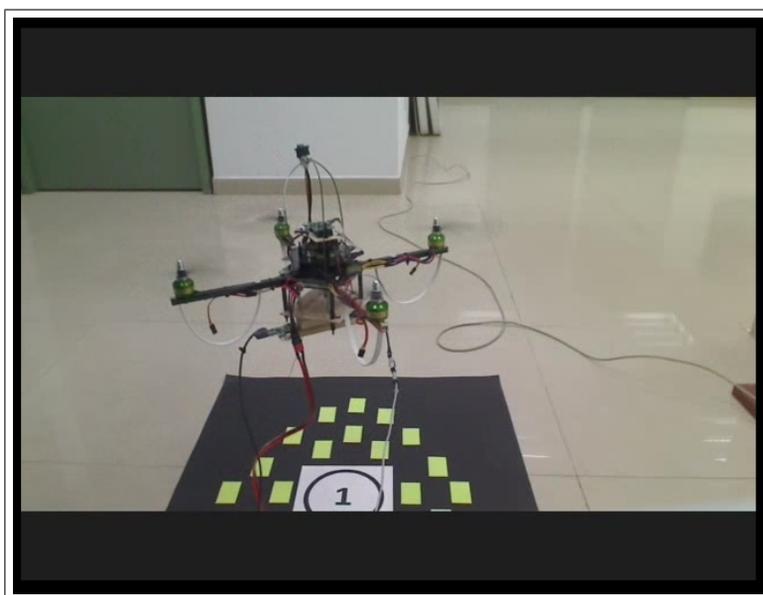


Figura 5.32: Vuelo del Cuadricóptero con Visión Estéreo

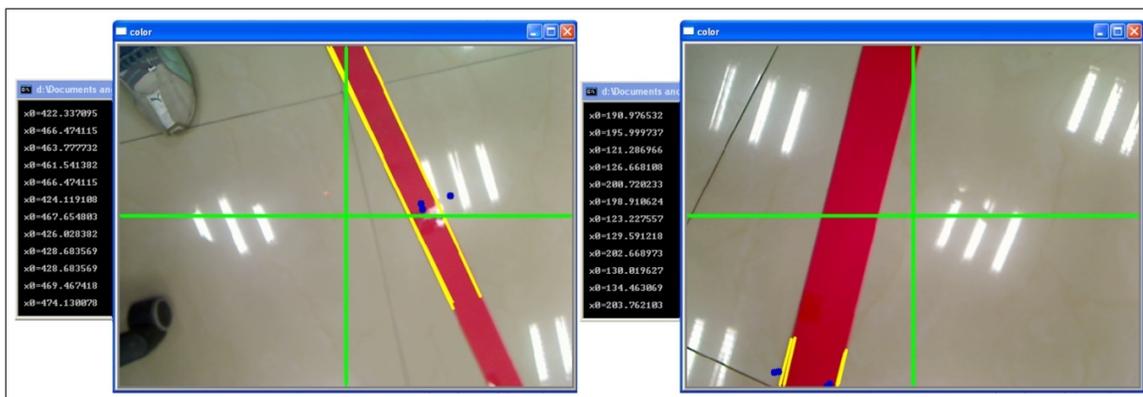


Figura 5.33: Pruebas del algoritmo de reconocimiento de una Línea Roja

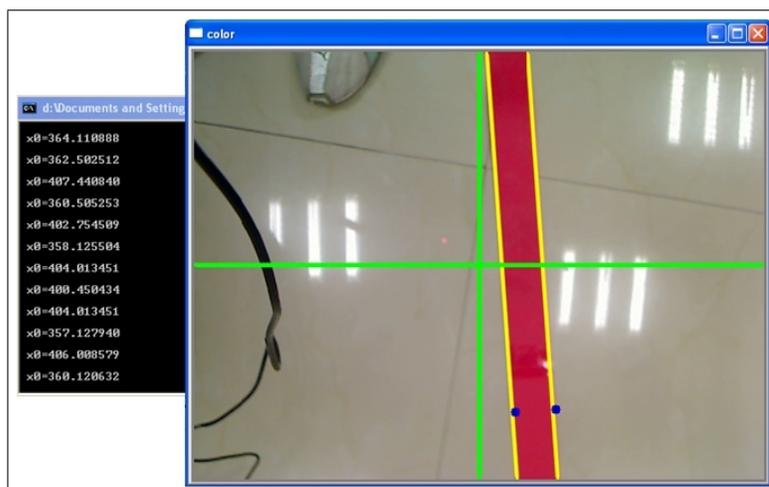


Figura 5.34: Detección de una Línea Roja

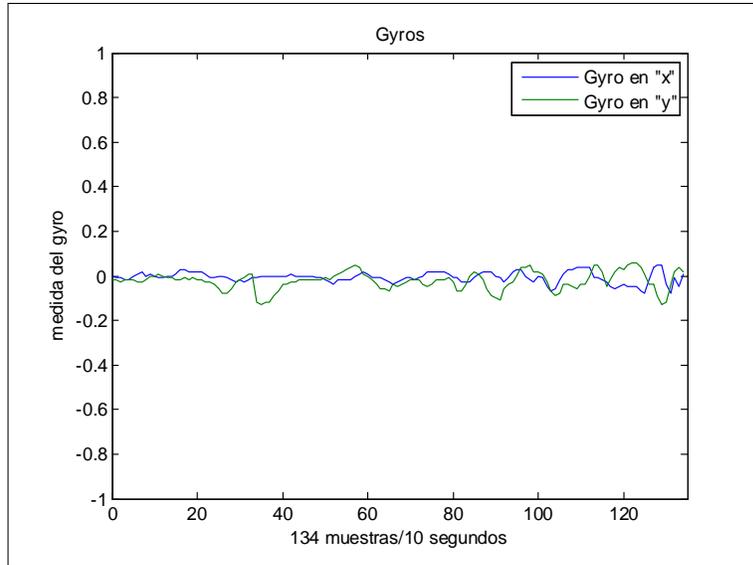


Figura 5.35: Comportamiento de los Gyros en el seguimiento de una línea

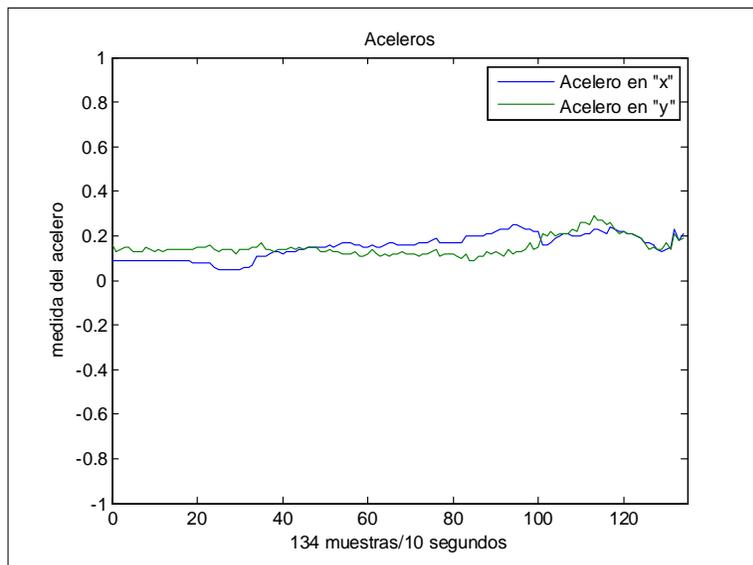


Figura 5.36: Comportamiento de los Aceleros en el seguimiento de una línea

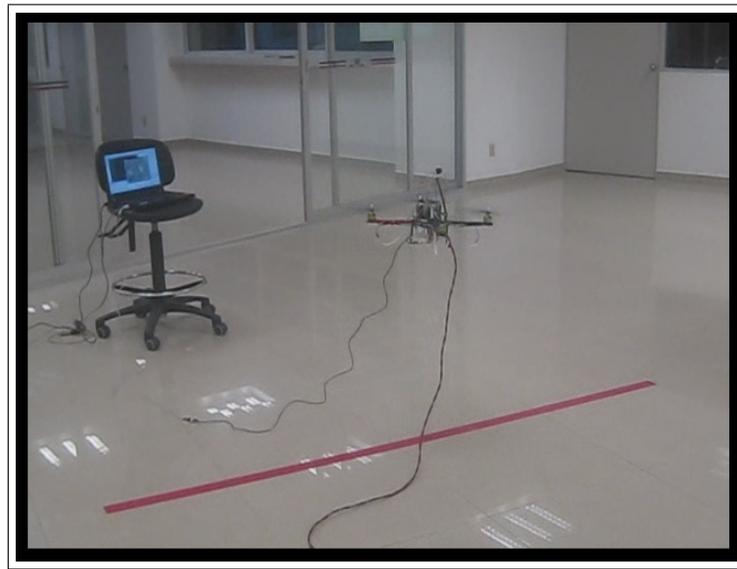


Figura 5.37: Vuelo del Cuadrirotor realizando el seguimiento de línea



## Capítulo 6

# CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

A lo largo del presente trabajo de tesis se desarrolló el control para un cuadrirotor con el fin de estabilizarlo, el cual consistió en combinar un sistema de visión para calcular la posición y velocidad en un espacio 3D del cuadrirotor con una unidad de medición inercial (IMU), la cual proporciona la orientación de la aeronave. El sistema de visión se lleva a bordo y la imagen se envía a una PC, la cual calcula el flujo óptico y la posición con respecto a un objetivo determinado. El flujo óptico se calcula utilizando el método de Lucas-Kanade piramidal. Las mediciones obtenidas con la IMU se utilizan para estabilizar la orientación de la quadrotor usando un algoritmo de control basado en saturaciones anidadas.

Para lograr el control del quadrirotor se estudió su modelo matemático, además, se construyó una plataforma en la cual se pueden implementar diferentes algoritmos y técnicas tanto de control como de visión, con lo que en base a los resultados experimentales, la ley de control implementada, la cual es basada en saturaciones

anidadas, el cuadrirotor presentó un buen desempeño sobre la estabilización de la orientación y posición, ya que se alcanzó un vuelo controlado en el aire. La plataforma fue estabilizada sobre un marca, la cual es reconocida por medio del sistema de visión, con esto se determinó la posición del cuadrirotor, usando primeramente una cámara para posteriormente mejorar el cálculo de la posición con un sistema estéreo, con lo cual se mejoró el control en tiempo real del cuadrirotor usando las mediciones de este sistema de visión estéreo.

Como trabajo adicional se implementó un algoritmo de visión con el cual se reconoce una línea roja para lograr el seguimiento de una trayectoria del aeronave. La imagen tuvo que ser sometida a filtros para lograr un buen reconocimiento y una medición correcta de la ubicación del cuadrirotor con respecto a la línea. Los resultados fueron exitosos ya que se logró el seguimiento con un vuelo controlado.

Los resultados obtenidos hasta el momento son buenos, sin embargo se pueden mejorar realizando el procesamiento de la imagen a bordo del vehículo, con el fin de aumentar la cadencia de las imágenes, de manera que se disminuya el retardo que provoca el sistema de visión, además se puede seguir tratando de compensar el hecho de que el flujo óptico nos da una medición en donde se incluye la velocidad de traslación y la de rotación, aun que se logra cierta compensación usando las mediciones proporcionadas por los girómetros.

En cuanto al sistema de visión se puede seguir mejorando el procesamiento de imágenes, como: usar un detector de bordes más eficaz, ya que cuanto mejor sea el detector de bordes capaz de obtener bordes en las imágenes, independientemente de la diferente iluminación recibida por las cámaras o el ruido, o las distorsiones introducidas por el sistema óptico, más preciso será el cálculo de las velocidades y la posición del cuadrirotor, también es necesario tener dentro de lo posible un algoritmo

que no consuma tanto tiempo para que el retardo provocado por el sistema de visión no sea de consideración. para el desempeño del cuadrirotor.

Los resultados obtenidos y la técnica aplicada en este trabajo se pueden extender a problemas de seguimiento, como de carreteras, vías de tren y/o un oleoducto. También se puede intentar reconocer obstáculos que pudieran haber en el suelo, con los que potencialmente se puede chocar y podrían ser nuevos puntos de atención en el sistema. Por lo que al sistema estéreo respecta, se puede reconstruir la escena de modo completo, con lo que se podría construir una imagen de escena virtual mucho más densa.

## 6.1. Publicaciones

Las publicaciones realizadas durante el Doctorado fueron:

- Zizilia Zamudio, Rogelio Lozano, Jorge Torres, Jose-Luis Rullan-Lara, "**Vision based stabilization of a quadrotor using nested saturation control approach**", 15th International Conference on System Theory, Control and Computing ICSTC 2011, Octubre 2011.
- Zizilia Zamudio, Rogelio Lozano, Jorge Torres, Eduardo Campos, "**Stabilization of a Helicopter Using Optical Flow**", 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control CCE 2011, Octubre 2011.
- Eric Henández, Zizilia Zamudio, Juan Manuel Ibarra, "**Soccer Ball Speed Estimation using Optical Flow for Humanoid Soccer Player**", Octava

Edición del Congreso de Electrónica, Robótica y Mecánica Automotriz CER-MA 2011, Noviembre 2011.

- Víctor Rosas, Rogelio Lozano, Jorge Torres, Zizilia Zamudio, "**Modeling and control of a vertical take-off airplane**", 9th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control CCE 2011, Septiembre 2012.
- Zizilia Zamudio, Rogelio Lozano, Jorge Torres, Víctor Rosas, "**Stereo vision for the stabilization of a quadrotor**", 16th International Conference on System Theory, Control and Computing ICSTC 2012, Octubre 2012.
- Víctor Rosas, Rogelio Lozano, Jorge Torres, Zizilia Zamudio, "**Modeling and control of a convertible airplane**", 16th International Conference on System Theory, Control and Computing ICSTC 2012, Octubre 2012.

# Bibliografía

- [1] J. Borenstein, H.R. Everett, L. Feng, y D. Wehe, **Mobile Robot Positioning-Sensors and Techniques**, Invited paper for the Journal of Robotic Systems, Special Issue on Mobile Robots, Vol. 14 No. 4, pp. 231 – 249.
- [2] B. Espiau, F. Chaumette, y P. Rives, **A New Approach to visual Servoing in Robotics**, IEEE Trans on Robotics and Automation, Vol. 8, No. 3, June 1992.
- [3] N. Metni, T. Hamel, **A UAV for bridge inspection: Visual servoing control law with orientation limits**, Automation in Construction, Vol. 17, pp. 3–10, Elsevier, 2007.
- [4] N. Guenard, T. Hamel and R. Mahony, **A practical Visual Servo Control for a Unmanned Aerial Vehicle**, Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA2002.
- [5] E. Altug, J.P. Ostrowski, R. Mahony, **Control of a Quadrotor Helicopter Using Visual Feedback**, Proc. of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and a automation, Washington, DC. May 2002.
- [6] H.-W. Schulz, M. Buschmann, L. Kruger, S. Winkler and P. Vorsmann, **Towards Vision-Based Autonomous Landing for small UAVs-First Ex-**

- perimental Results of the vision system**, Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication, Vol. 4, May 2007.
- [7] Z. Yu, K. Nonami, J. Shin and D. Celestino, **3D Vision Based Landing Control of a Small Scale Autonomous Helicopter**, International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 4, No. 1, pp. 51-56, 2007.
- [8] A. Kurdila, M. Nechyba, R. Prazenica, et al., **Vision-Based Control of Micro-Air-Vehicles: Progress and Problems In Estimation**, 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis Paradise Island, Bahamas, 2004.
- [9] Z. He, R.V. Iyer, and P.R. Chandler, **Vision-Based UAV Flight Control and Obstacle Avoidance**, American Control Conference, June 2006.
- [10] I.F. Mondragón, et al., **Visual Model Feature Tracking For UAV Control**, Intelligent Signal Processing, 2007. WISP 2007. IEEE International Symposium on, 1-6 pp. Oct. 2007.
- [11] S. Hrabar, G.S. Sukhatme, P. Corke K. Isher y J. Roberts (2005), **Combined optic-flow and stereo-based navigation of urban canyons for a uav**, In: Proc. of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS. pp. 3309-3316.
- [12] L. Muratet, S. Doncieux y J. A. Meyer (2004), **A biometric navigation system using optical flow for a rotary-wing uav in urvan environment**, IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS.
- [13] S. Hrabar y G.S. Sukhatme (2004). **A comparison of two camera configurations for optic-flow based navigation of a uav throug urban canyons**. IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS

- [14] W. E. Green, P. Y. Oh y G. L. Barrows (2004). **Flying insect inspired vision for autonomous aerial robot maneuvers in near-earth environments**. IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA.
- [15] P. Corke, D. Strelow y S. Singh (2004). **Omnidirectional visual odometry for a planetary rover**. IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS
- [16] P. Castillo, P. García, R. Lozano, P. Albertos, **Modelado y Estabilización de un Helicóptero con Cuatro Rotores**, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI), ISSN 1697-7912, Vol. 4, N<sup>o</sup>. 1, 2007 , pags. 41-57
- [17] . Pino, A. Gómez, N. De Abajo; **Introducción a la Inteligencia Artificial: Sistemas Expertos, Redes Neuronales Artificiales y Computación Evolutiva**, Universidad de Oviedo, 2001.
- [18] C. M. Soria, R. Carelli, **Control de un Robot Móvil utilizando el flujo óptico obtenido través de un sistema omnidireccional catadióptrico**, Memorias Jornadas de Investigación EIA, 2009. ISSN:2027-0313.
- [19] J. Lavin. **Reconstrucción 3D estereoscópica y monocular**, CINVESTAV, 200
- [20] R. Lozano, A. Dzul, P. Castillo; **Modelling and Control of Mini-Flying Machines**; Springer; 2005.
- [21] B. Etkin and L. duff Reid, **Dynamics of Flight**, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1959. ISBN 0-471-03418-5.

- [22] H. Goldstein, (1980). **Classical Mechanics**. Addison Wesley Series in Physics, Addison-Wesley, U.S.A., segunda edición.
- [23] A. R. Teel, **Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls**, Syst. and Contr. Lett. 18, 165-171, 1992
- [24] G. Chesi, G.L. Mariottini, D. Prattichizzo and A. Vicino. **Epipole-based visual servoing for mobile robots**. Advanced Robotics, Vol. 20, N°. 2, pp. 255-280, VSP and Robotics Society of Japan, 2006.
- [25] H. Lang, Y. Wang, C.W. de Silva. **Visual servoing with LQR control for mobile robots**. Control and Automation (ICCA), Xiamen, Junio 2010.
- [26] L. Mejias, P. Campoy, S. Saripalli and G.S. Sukhatme. **A visual Servoing approach for tracking features in urban areas using an autonomous helicopter**. Robotics and Automation (ICRA), Orlando, Mayo 2006.
- [27] C. Fan, B. Song, X. Cai and Y. Liu. **Dynamic visual servoing of a small scale autonomous helicopter in uncalibrated environments**. Intelligent Robots and Systems (IROS) IEEE/RSJ International Conference, Octubre 2009.
- [28] J. Hill and W. Park. **Real time control of a robot with a mobile camera**. 9th International Symposium on Industrial Robots, pp. 233–246, 1979.
- [29] A. Sanderson and L. Weiss. **Image-based visual servo control using relational graph error signals**, Proc. IEEE pp. 1074–1077, 1980.
- [30] R. Hartley, A. Zisserman, **Multiple View Geometry in computer vision**, Second Edition, Cambridge University Press. 2003.

- [31] O. Faugeras. Q. Luong. **The Geometry of Multiple Images: The Laws That Govern the Formation of Multiple Images of a Scene and Some of Their Applications.** The MIT Press, 2001.
- [32] J.L. Lazaro, C. Mataix, A. Gardel y M. Mazo; **Calibración de cámaras ccd con corrección bidimensional de óptcias de gran angular,** Información Tecnológica, 2000.
- [33] Z. Chen, ., D. C. Tseng y J. Y. Lin. **A simple vision algorithm for 3-D position determination using a single calibration object.** *Pattern Recognition*, 2 (2), 173-187, (1989).
- [34] A. Zhang. **A Flexible New Technique for Camera Calibration;** 1999
- [35] IV Jornadas Blendiberia; **Tecnologías Libres para Síntesis de Imagen Digital Tridimensional;** publicaciones on-line Lulu, 2006.
- [36] B. K. P. Horn and B. G. Schunck, **Determining optical flow,** *Artificial Intelligence*, vol. 17, pp. 185-203, 1981.
- [37] J. L. Barron, D. J. Fleet and S. S. Beauchemin, **Performance of optical flow techniques,** *International Journal of Computer Vision*, vol. 12, number 1, pp. 43- 77.
- [38] D. J. Meet and A. D. Jepson, **Computation of component image velocity from local phase information,** *International Journal of Computer Vision*, vol. 5, 1990.
- [39] S. Lai, y B. C. Vemuri, **Robust and efficient computation of optical flow,** Technical Report TR-95012, Computer and Information Sciences Department,

University of Florida, submitted to the International Journal of Computer Vision, 1995.

- [40] S. Ullman. **The interpretation of visual motion**. MIT Press, Cambridge, London, 1979.
- [41] D. B. Lucas y T. Kanade. **An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision**. Proceedings of Imaging Understanding Workshop.
- [42] J. B. Bouquet. **Camera Calibration Toolbox**.  
[http://www.vision.caltech.edu/bouquetj/calib\\_doc/](http://www.vision.caltech.edu/bouquetj/calib_doc/).
- [43] G. R. Bradski y A. K. **Learning OpenCV: Computer Vision with the OpenCV Library**, September 2008.
- [44] J. Shi y C. Tomasi, **Good features to track**. IEEE Computer Society Conference on 21-23 June 1994 Page(s):593 – 600.