



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL IPN

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Control de sistemas con retardo basados en un enfoque de
pasividad**

TESIS QUE PRESENTA
Edgar Estrada Cruz

PARA OBTENER EL GRADO DE
Maestro en Ciencias

EN LA ESPECIALIDAD DE
Control Automático

DIRECTORES DE TESIS
Dra. Sabine Mondié Cuzange
Dr. Fernando Castaños Luna

México, D.F.

Noviembre, 2013

Agradecimientos

“A CONACYT por su invaluable apoyo para la realización de esta Tesis.”

Índice general

Lista de Figuras	VI
Lista de Tablas	VII
Resumen	VIII
Abstract	IX
Notaciones y Símbolos	X
Introducción	XI
1. Antecedentes	1
1.1. Teoría de sistemas pasivos	1
1.1.1. Sistemas pasivos	2
1.1.2. Estabilidad de sistemas pasivos	3
1.1.2.1. Estabilización de sistemas pasivos	6
1.1.3. Interconexión de sistemas pasivos	6
1.2. Sistemas con retardo en el tiempo	8
1.2.1. Sistemas de tipo retardado	8
1.2.2. Sistemas de tipo neutral	9
1.2.3. Análisis de estabilidad	10
1.2.3.1. Enfoque temporal para la estabilidad de sistemas de tipo retardado	10
1.2.3.2. Enfoque frecuencial para la estabilidad de sistemas de tipo retardado	10
1.2.3.3. Enfoque temporal para la estabilidad de sistemas de tipo neutral	12
1.2.3.4. Enfoque frecuencial para la estabilidad de sistema de tipo neutral	13
1.3. Método de \mathcal{D} -partición	14

2. Pérdida de desempeño debido a los retardos en el canal de comunicación	18
2.1. Introducción	18
2.2. Retardos cero en el canal de comunicación	20
2.2.1. Fronteras de σ -estabilidad	21
2.2.2. Regiones de σ -estabilidad	22
2.2.3. Ganancias mínimas para un decaimiento exponencial σ prescrito	23
2.3. Retardos no cero y constantes en el canal de comunicación	24
2.3.1. Fronteras de σ -estabilidad	25
2.3.2. Regiones de σ -estabilidad	26
2.3.3. Sintonización del máximo decaimiento σ alcanzable en lazo cerrado	27
2.3.4. Ganancias mínimas para un decaimiento exponencial σ prescrito	30
2.4. Conclusiones	31
3. Uso de la transformación de dispersión	32
3.1. Introducción	32
3.2. Sistema en lazo cerrado y el efecto de la normalización	37
3.2.1. Cuasipolinomio en lazo cerrado	37
3.2.2. Transformación de dispersión normalizada	38
3.3. Impedancia virtual d constante	43
3.3.1. Fronteras de σ -estabilidad	43
3.3.2. Regiones de σ -estabilidad	45
3.3.3. Sintonización del máximo decaimiento exponencial σ alcanzable en lazo cerrado	48
3.3.4. Ganancias mínimas para un decaimiento exponencial σ prescrito	50
3.4. Impedancia virtual d variable	51
3.5. Impedancia virtual $d = \zeta k_p$	55
3.5.1. Fronteras de σ -estabilidad	56
3.5.2. Sintonización del máximo decaimiento exponencial σ alcanzable en lazo cerrado	58
3.5.3. Ganancias mínimas para un decaimiento exponencial σ prescrito	63
3.6. Impedancia virtual $d = k_p$, cuasipolinomio de tipo retardado, $\zeta = 1$. .	63
3.6.1. Fronteras de σ -estabilidad	64
3.6.2. Regiones de σ -estabilidad	64
3.6.3. Sintonización del máximo decaimiento exponencial σ alcanzable en lazo cerrado	68
3.6.4. Ganancias mínimas para un decaimiento exponencial σ prescrito	70
3.7. Conclusiones	71

4. Límite teórico de desempeño en el uso de la transformación de dispersión	73
4.1. Introducción	73
4.2. Determinación del σ supremo en función de los retardos	73
4.3. Conclusiones	74
5. Resultados cuantitativos y cualitativos	75
5.1. Introducción	75
5.2. Resultados cuantitativos	75
5.3. Resultados cualitativos	77
5.4. Conclusiones	78
Conclusiones	79
A. Funciones de transferencia	80
A.1. Canal de comunicación con retardos	80
A.2. Canal de comunicación con transformación de dispersión estandar	83
A.3. Canal de comunicación con transformación de dispersión normalizada	87
Bibliografía	91

Índice de figuras

1.	Lazo de control.	XIII
1.1.	Conexión en paralelo de dos sistemas pasivos.	7
1.2.	Conexión en realimentación de dos sistemas pasivos.	8
1.3.	Ejemplo: Fronteras de la \mathcal{D} -partición.	16
2.1.	Lazo de control con retardos en el canal de comunicación.	20
2.2.	Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación libre de retardos.	22
2.3.	Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación con retardos.	26
3.1.	Lazo de control incluyendo canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión.	36
3.2.	Variables de dispersión para $d = 1$: (a) s_0^+ , s_{0n}^+ y (b) s_1^- , s_{1n}^-	42
3.3.	Variables de dispersión para $d = 0.5$: (a) s_0^+ , s_{0n}^+ y (b) s_1^- , s_{1n}^-	42
3.4.	Variables de dispersión para $d = 0.2$: (a) s_0^+ , s_{0n}^+ y (b) s_1^- , s_{1n}^-	43
3.5.	Regiones de σ -estabilidad; canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión.	46
3.6.	Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión, $\sigma < 0.4$	47
3.7.	Zona de estabilidad en tercera dimensión para $\sigma = 4$ y $d \in [0.1225, 1]$	53
3.8.	Zona de estabilidad en tercera dimensión para diferentes valores de σ	55
3.9.	Gráfica de $\zeta(\sigma)$ para diferentes valores de h	59
3.10.	Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación retardado con transformación de dispersión, $d = k_p$, $\sigma < 3$	65
3.11.	Mapas de σ -estabilidad, canal de comunicación retardado con transformación de dispersión, $d = k_p$, $\sigma \in [4, \sigma_\zeta^*]$	66
3.12.	Región de σ -estabilidad en tercera dimensión, canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión, $d = k_p$, $\sigma = 1$	67
3.13.	Región de σ -estabilidad en tercera dimensión, canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión, $d = k_p$, $\sigma = 2$	68
3.14.	Región de σ -estabilidad en tercera dimensión, canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión, $d = k_p$, $\sigma = 4$	69

Índice de tablas

2.1.	Ganancias mínimas para la ley de control PI , caso libre de retardo.	24
2.2.	Máximo decaimiento exponencial en lazo cerrado; canal de comunicación con retardos.	29
2.3.	Ganancias mínimas para la ley de control PI ; canal de comunicación con retardos.	31
3.1.	Máximo decaimiento exponencial en lazo cerrado, canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión.	50
3.2.	Ganancias mínimas para la ley de control PI , canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión.	51
3.3.	Máximo decaimiento exponencial para $d = 0.1225$	52
3.4.	Ganancias mínimas para la ley de control PI para diferentes valores de la impedancia virtual d	53
3.5.	Máximo decaimiento exponencial para diferentes valores de d	54
3.6.	Máximo decaimiento exponencial σ alcanzable para $d = \zeta k_p$, para diferentes valores de ζ	62
3.7.	Ganancias mínimas para la ley de control PI , canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión, $d = k_p$	70
5.1.	Máximo decaimiento alcanzable y ganancias de control para los diferentes esquemas de control.	76
5.2.	Ganancias mínimas para $\sigma = 1.5$ para los diferentes esquemas de control. . .	77
5.3.	Estabilidad en los diferentes esquemas de control.	77
5.4.	σ -estabilidad para los diferentes esquemas de control.	78

Resumen

En esta tesis se realiza un análisis profundo del desempeño de un sistema de primer orden en lazo cerrado con la ley de control Proporcional-Integral (PI) a través de la interconexión de un canal de comunicación con retardos, basado en un enfoque de pasividad. El estudio se lleva a cabo en el dominio de la frecuencia, centrándose en la ubicación de las raíces dominantes en el plano complejo, que a menudo se denomina σ -estabilidad. En particular, se usa una extensión del método de \mathcal{D} -partición propuesto por Neimark.

La transformación de dispersión, caracterizada por su impedancia virtual d , emula los retardos como una línea de transmisión. Esta se introduce con el fin de recuperar la propiedad de pasividad que se pierde cuando los retardos están presentes en el canal de comunicación. Se muestra que el desempeño del sistema en lazo cerrado mejora, el cual se cuantifica en términos de su σ -estabilidad.

Se proponen esquemas de control donde los parámetros de la planta se conocen y los retardos se suponen conocidos, constantes e iguales. Se proponen reglas de sintonización para las ganancias de control, k_p y k_i para lograr un desempeño dado o máximo en una serie de casos especiales.

Como la impedancia virtual d de la línea de transmisión emulada también es un parámetro libre, se realiza el análisis del desempeño del sistema en este caso. Se muestra que el máximo decaimiento alcanzable no depende de los parámetros de la planta y es inversamente proporcional a la suma de los retardos en el canal de comunicación.

Abstract

In this thesis, the in depth analysis of the performance of a Proportional-Integral (PI) control law applied to a first order system through a delayed interconnection channel within a passivity based framework is performed. The study is carried out in the frequency domain, focusing on the location of the dominant roots in the complex plane, which is often called σ -stability. In particular, an extension of the \mathcal{D} -partition method proposed by Neimark is used.

The scattering transformation, characterized by its virtual impedance d , emulates delays as a transmission line. It is introduced in order to recover the passivity which is lost when delays are present in the communication channel. It is shown to improve as well the performance of the closed loop system, which is quantified by its σ -stability.

It's propose control schemes where the plant parameters are given and the delays are assumed to be known, constants and equals. It's propose tuning rules for the control gains, k_p and k_i to achieve a given or maximum performance in a number of special cases.

As the virtual impedance d of the emulated transmission line is also a free parameter, the analysis of the system performance is also performed in this case. It is shown that the maximum achievable decay does not depend on the plant parameters and that it is inversely proportional to the sum of delays in the communication channel.

Notaciones y Símbolos

\mathbb{R}^+	Conjunto de números reales estrictamente positivos
\mathbb{R}	Campo de los números reales
\mathbb{R}^n	Espacio de n -vectores con entradas en \mathbb{R}
\mathbb{C}	Campo de los números complejos
i	Unidad imaginaria, $i^2 = -1$
$\Re\{s\}$	Parte real de un número complejo $s \in \mathbb{C}$
$\Im\{s\}$	Parte imaginaria de un número complejo $s \in \mathbb{C}$
$C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones continuas con valores en \mathbb{R}^n definida en $[-h, 0]$
$PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones continuas a pedazos con valores en \mathbb{R}^n definida en $[-h, 0]$
$\ \varphi\ _h$	Norma uniforme, $\ \varphi\ _h = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} \ \varphi(\theta)\ _h$
$\ x\ $	Norma Euclidiana de un vector $x \in \mathbb{R}^n$
$\text{grad}(\cdot)$	Grado de un polinomio

Introducción

El control basado en pasividad se fundamenta en el hecho de que la interconexión de dos subsistemas pasivos genera un sistema pasivo. La estabilidad de Lyapunov del sistema interconectado sigue de la propiedad de pasividad, mientras que la estabilidad asintótica es usualmente alcanzada mediante la adición adecuada de amortiguamiento. Debido a su simplicidad y robustez, el control basado en pasividad ha atraído la atención de los investigadores en el área de control por décadas, ejemplo de ello son los trabajos de Ortega et al. [40] y Van der Schaft [13].

Sin embargo, si un canal de comunicación con retardos se introduce entre la planta y el controlador, el argumento de pasividad falla debido a que un canal de comunicación con retardos no es pasivo [1]. Anderson y Spong en [1] proponen una modificación simple en el canal de comunicación, inspirada en el estudio de líneas de transmisión. Ésta permite la transformación del canal de comunicación con retardos en un sistema pasivo, recuperando la simplicidad y eficacia del diseño basado en pasividad. En esta tesis la idea de desempeño en un sistema lineal invariante en el tiempo se establecerá en términos de la ubicación de las raíces dominantes, denominada σ -estabilidad.

Antecedentes

En la literatura existen dos enfoques para analizar la estabilidad de un sistema dependiente del retardo: (i) el frecuencial, donde la estabilidad se determina a partir de la ubicación de las raíces de la función característica asociada al sistema en el plano complejo, como se puede observar en [2], [19], [20], [26]; (ii) el temporal, donde las condiciones de estabilidad se basan en la extensión del segundo método de Lyapunov a sistemas con retardos [2], [14], [19].

En el marco del enfoque frecuencial sobresalen las siguientes propuestas; en Neimark [31], [32] plantean las ideas básicas sobre las regiones de estabilidad de los sistemas con retardos y se introduce el método de \mathcal{D} -partición o \mathcal{D} -subdivisión. En Cooke y Van Den Driessche [11] y Cooke y Turi [12], entre muchas otras propuestas, se determinan las regiones de estabilidad estudiando la ubicación en el plano complejo de las raíces de un tipo especial de cuasipolinomios o funciones características.

Villafuerte et al. [45] estudian el uso del método de \mathcal{D} -partición extendido propuesto por Neimark para determinar las regiones de σ -estabilidad de un cuasipolinomio, es decir, las regiones donde se asegura que la solución del cuasipolinomio tiene un decaimiento exponencial dado.

Un problema que ha recibido gran atención por parte de la comunidad científica en el área de control en años recientes, es la estabilidad de un sistema teleoperado, donde la distancia que existe entre los sistemas interconectados genera un retardo en la comunicación que afecta directamente la estabilidad del sistema [42]. En 1965 se aborda por primera vez el problema de teleoperación con retardos en la comunicación en [15]; el esquema de control propuesto no presentó problemas de inestabilidad. En 1966 en el trabajo de Ferrel [16] se observa por primera vez inestabilidad debida a los retardos en el canal de comunicación.

Fue en 1989 cuando Anderson y Spong en [1] dan solución al caso escalar del problema, basándose en la teoría de sistemas pasivos y en las variables de dispersión, donde proponen emular los retardos presentes en el canal de comunicación como una línea de transmisión pasiva. Una extensión es el trabajo de Niemeyer y Slotine [33], donde se hacen consideraciones importantes sobre la causalidad de la línea de transmisión y se introducen técnicas de control adaptable.

A partir de la propuesta de Anderson y Spong han surgido muchos esquemas de control para dar solución a éste problema; por ejemplo en [43] se analiza el caso multidimensional a través de la transmisión digital de datos, mientras que en [44] se proponen técnicas de control adaptable para la interconexión de dos sistemas Hamiltonianos interconectados a través de una línea de transmisión con retardos. En [30] se propone el uso del predictor de Smith, del filtro de Kalman y de un regulador de energía, el cual es un filtro para mejorar el rendimiento de un teleoperador con retardo variable. El caso de retardo constante es estudiado en [29]. Otras propuestas simples se realizan en [39] y [38], en estas referencias se propone una ley de control P y PD más la inyección de amortiguamiento respectivamente. También se ha visto como un problema de sincronización de posición en [8], [9] y velocidad en [6], un esquema para lograr estabilidad asintótica en posición y velocidad con retardo constante la encontramos en [35]. Existen muchos trabajos con diferentes enfoques de control, como pasividad, predicción y control adaptable. Para mayor referencia se pueden revisar [37], [27], [36], [28], [7], [5]. En [21] se pueden encontrar distintos esquemas de control propuestos para solucionar

el problema de inestabilidad generado por el retardo en la comunicación.

Nuño et al. en el tutorial [34] se revisan diferentes esquemas de control que aseguran estabilidad asintótica basados en pasividad, organizados en tres grupos: (i) variables de dispersión, (ii) inyección de amortiguamiento y (iii) control adaptable.

Motivación

A lo largo de la historia el problema de teleoperación se ha centrado en analizar la estabilidad cuando existen retardos en el canal de comunicación entre dos sistemas interconectados debido a diferentes causas, entre las que se encuentra la distancia entre los sistemas como la mas común. A partir de la primera propuesta realizada por Anderson y Spong [1], basada en la teoría de sistemas pasivos y en las variables de dispersión, se han derivado muchas propuestas, donde el problema se ataca desde distintas perspectivas y con diferentes esquemas de control, algunos manteniendo el enfoque de pasividad y de variables de dispersión con retardo constante o variable, algunos otros desde el punto de vista de tiempo discreto, entre muchas otras propuestas.

Consideremos un esquema de control como se muestra en la Fig. 1, donde la planta es

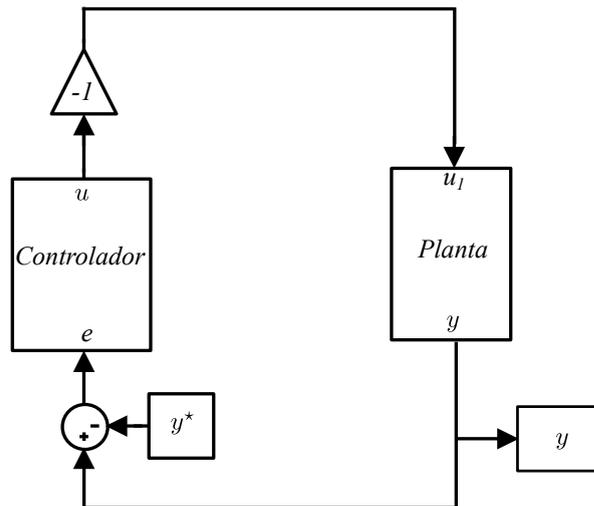


FIGURA 1: Lazo de control.

un sistema lineal de primer orden de la forma

$$\dot{x} = -a_0x + a_1u_1, \quad (1a)$$

$$y = x. \quad (1b)$$

Proponemos una ley de control Proporcional P de la forma

$$u = k_p e. \quad (2)$$

Usando el siguiente patrón de interconexión: $u_1 = -u$ y $e = y - y^*$, donde y^* es la referencia de control. La ley de control (2) estabiliza la planta (1), pero presenta error en estado estacionario. Para corregir el error agregamos un término integral a la ley de control produciéndose una ley Proporcional-Integral (PI) de la forma

$$\dot{\xi} = e, \quad (3a)$$

$$u = k_p e + k_i \xi. \quad (3b)$$

Ahora bien, surgen las siguientes preguntas: ¿El sistema en lazo cerrado es pasivo?, ¿Cómo sintonizar la ley de control PI (3)? y ¿Cuáles son los valores de las ganancias de la ley de control PI (3) que estabilizan el sistema tal que se alcanza un desempeño dado o máximo?.

Si el sistema presenta retardos en la comunicación, esto es $u_1 = -u(t - h)$ y $e = y(t - h) - y^*$, donde h es el retardo. Sabemos que el canal de comunicación con retardos no es un elemento pasivo por lo que el sistema en lazo cerrado no es pasivo, además de que puede generar inestabilidad, entonces: ¿Cómo se afecta la σ -estabilidad del sistema en lazo cerrado con los retardos en el canal de comunicación?, ¿Cómo sintonizar la ley de control PI (3) con la presencia de retardos en el canal de comunicación?.

El método de \mathcal{D} -partición extendido presentando por Villafuerte et al. en [45] permitirá obtener estabilidad exponencial del sistema con retardo en la comunicación. El tutorial de Nuño et al. [34], presenta un sistema con retardo en la comunicación que recupera la pasividad y estabilidad a partir de la aplicación de la transformación de dispersión. Aplicando esta transformación en el sistema en lazo cerrado con retardos en la comunicación: ¿El sistema recupera la pasividad?, ¿Cómo sintonizar la ley de

control PI (3) con retardos en el canal comunicación mas la transformación de dispersión?, ¿Cual es el efecto en la σ -estabilidad con la introducción de la transformación de dispersión?.

Este trabajo se desarrolla en torno a estas preguntas.

Objetivos de la tesis

En el presente trabajo se pretende sintonizar una ley de control Proporcional-Integral (PI) que establezca un sistema lineal de primer orden, garantizando una cota de decaimiento exponencial dada. Se presentan los siguientes casos de estudio:

- I . La comunicación entre el controlador PI y el sistema lineal se encuentra libre de retardos. En este caso el argumento de pasividad se satisface debido a que cuando dos subsistemas pasivos se interconectan con realimentación negativa el sistema es pasivo.
- II . Se introducen retardos entre la comunicación del controlador PI y el sistema lineal de primer orden. El argumento de pasividad falla en este caso, porque el retardo es un elemento no pasivo.
- III . La pasividad se recupera al introducir la transformación de dispersión en el canal de comunicación con retardos, emulando una línea de transmisión pasiva, *sin pérdidas*. Se revisan los siguientes casos:
 - a . Uso de una transformación de dispersión general.
 - b . Uso de una transformación de dispersión normalizada.
 - c . Análisis del efecto del parámetro d , que corresponde a la impedancia virtual de la línea de transmisión emulada, sobre la σ -estabilidad.
- IV . Se realiza una comparación numérica entre los distintos esquemas analizados.

Metodología

La metodología propuesta es la siguiente:

1. En cada uno de los esquemas estudiados, canal de comunicación libre de retardos, con retardos y con retardos más la transformación de dispersión, se emplea el método frecuencial de \mathcal{D} -partición para delimitar en un espacio paramétrico las ganancias de la ley de control PI que estabilicen a un sistema lineal de primer orden en lazo cerrado.
2. Se realiza un estudio analítico para validar los resultados gráficos y se obtienen expresiones para calcular el valor de las ganancias de la ley de control PI que genere en un sistema lineal de primer orden una solución con la cota de decaimiento exponencial máxima cuando sea posible, además se obtienen fórmulas analíticas para determinar las ganancias mínimas para la ley de control PI para un decaimiento exponencial dado.

Organización de la tesis

En el primer capítulo se dan algunos resultados sobre la teoría de sistemas pasivos, sistemas con retardo de tipo retardado y de tipo neutral, así como su estabilidad. Asimismo, se da una breve explicación y un ejemplo del método de \mathcal{D} -partición propuesto por Neimark [31], [32].

El segundo capítulo está organizado en dos partes; en la primera se considera el caso con canal de comunicación libre de retardos, se propone y analiza un método gráfico frecuencial para sintonizar la ley de control PI con el fin de estabilizar un sistema lineal de primer orden en lazo cerrado para una cota de decaimiento exponencial dada. Así mismo, se presentan fórmulas algebraicas para determinar las ganancias mínimas del controlador PI tal que el sistema en lazo cerrado tenga una cota de decaimiento exponencial dada. En la segunda parte se introducen retardos en el canal de comunicación, de manera que la propiedad de pasividad falla. De igual manera se propone y analiza un método gráfico frecuencial para sintonizar la ley de control PI en lazo

cerrado. En este caso es posible determinar de manera analítica fórmulas algebraicas para la cota de decaimiento exponencial máxima y para las ganancias correspondientes del controlador PI . También se obtienen fórmulas algebraicas para las ganancias mínimas del controlador PI para un decaimiento exponencial dado menor al decaimiento exponencial máximo alcanzable.

En el tercer capítulo se recupera la propiedad de pasividad al introducir la transformación de dispersión. En este caso, se emula el canal de comunicación como una línea de transmisión. Al igual que en el capítulo 2 se propone y analiza un método gráfico frecuencial para sintonizar la ley de control PI con el fin de estabilizar el sistema lineal de primer orden en lazo cerrado. Se determinan fórmulas analíticas para obtener el máximo decaimiento exponencial alcanzable y las ganancias del controlador PI correspondientes; además, se proporcionan fórmulas para las ganancias mínimas del controlador PI dado un decaimiento exponencial menor al máximo decaimiento exponencial alcanzable para las elecciones particulares de la impedancia virtual d constante y $d = \zeta k_p$, analizando el caso particular $d = k_p$, que reduce el cuasipolinomio de tipo neutral a uno de tipo retardado. Se realiza un análisis gráfico sobre el espacio de parámetros $(k_p, k_i, d) \in \mathbb{R}^3$.

En el Capítulo 4 se propone una fórmula para determinar la cota superior para el decaimiento exponencial σ_{sup} , la cual no depende de los parámetros de la planta; sólo se necesita conocer los valores de los retardos en el canal de comunicación.

En el último capítulo se hace una comparación cualitativa y cuantitativa entre los esquemas analizados y se dan algunos comentarios sobre el beneficio que brinda el introducir la transformación de dispersión en un canal de comunicación con retardos y la correcta elección del parámetro d .

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Teoría de sistemas pasivos

Un sistema pasivo se caracterizan porque la energía almacenada en éste es inferior a la energía suministrada desde el exterior. Por lo tanto, un sistema pasivo es incapaz de almacenar toda la energía que se le suministra, es decir, un sistema pasivo “*gasta*” parte de la energía adquirida. Si puede almacenar toda la energía que se le suministra es estrictamente pasivo, es decir, sin pérdidas; por ejemplo una línea de transmisión.. Como consecuencia, un sistema pasivo tienen propiedades de estabilidad deseables [47]. Se ha mostrado, por ejemplo, que los sistemas pasivos que satisfacen la propiedad de *detectabilidad* pueden estabilizarse por medio de una realimentación estática de salida [4].

A continuación se dan algunos conceptos y definiciones básicas sobre la teoría de sistemas pasivos, su estabilidad y la interconexión de los mismos.

1.1.1. Sistemas pasivos

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1.1a)$$

$$y = h(x), \quad (1.1b)$$

donde el estado $x \in X = \mathbb{R}^n$, la entrada $u \in U = \mathbb{R}^m$ y la salida $y \in Y = \mathbb{R}^m$.

f y g son campos vectoriales suaves y h es un mapeo suave. Se supone que f tiene un punto de equilibrio en el origen, i.e. $f(0) = 0$, y que $h(0) = 0$.

En el espacio $U \times Y$ de variables externas se define una función

$$w : U \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

llamada *tasa de suministro*. Ésta función constituye una abstracción del concepto de “*potencia de entrada*”. En los sistemas físicos, la potencia de entrada está asociada con la energía almacenada. Para sistemas más generales, como los descritos por (1.1) no es fácil asociar la energía almacenada con la potencia de entrada. Sin embargo los conceptos de energía almacenada y disipación están relacionados a través de la siguiente definición.

Definición 1.1. [13] Decimos que el sistema (1.1) es disipativo con respecto a la tasa de suministro w si existe una función $S : X \rightarrow \mathbb{R}^+$, llamada función de almacenamiento, tal que para todo $x_0 \in X$, todo $t_1 \geq t_0$, y todas las funciones de entrada $u \in U$

$$S(x(t_1)) \leq S(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w(u(t), y(t)) dt, \quad (1.3)$$

donde $x(t_0) = x_0$ es la condición inicial y $x(t_1)$ es el estado de (1.1) en el tiempo t_1 que resulta de la condición inicial x_0 y la función de entrada $u(\cdot)$. Si la igualdad se mantiene en (1.3) para todo x_0 , $t_1 \geq t_0$, y toda $u(\cdot)$, entonces, (1.1) es un sistema *sin pérdida* con respecto a w .

La expresión (1.3) se llama *desigualdad de disipación* [46] y expresa el hecho de que la energía almacenada $S(x(t_1))$ del sistema (1.1) en un tiempo t_1 es, a lo más, igual a la

suma de energía almacenada en t_0 , $S(x(t_0))$, y la energía suministrada externamente durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. Es decir, no hay creación interna de energía, sólo es posible tener disipación. La siguiente definición caracteriza la noción de almacenamiento disponible, la cual juega un papel importante para determinar si un sistema es pasivo o no.

Definición 1.2. [13] El almacenamiento disponible S_a , de un sistema (1.1) con tasa de suministro w es la función $S_a : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$S_a(x) = \sup_{x_0=x, u \in U, t_0 \geq 0} \left(- \int_{t_0}^{t_1} w(u(t), (y)) \right) . \quad (1.4)$$

El almacenamiento disponible puede ser interpretado como la cantidad de energía máxima que puede ser extraída del sistema (1.1). En [46] se muestra que si un sistema de la forma de (1.1) con tasa de suministro w es disipativo, entonces el almacenamiento disponible $S_a(x)$ es finito para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y además cualquier función de almacenamiento S satisface

$$0 \leq S_a(x) \leq S(x) .$$

El término S_a también es una función de almacenamiento.

Una elección importante de la tasa de suministro está dada por el producto interno $w = u^T y$. Ahora podemos dar una definición de pasividad.

Definición 1.3. [13] El sistema (1.1) con $U = Y = \mathbb{R}^m$ es **pasivo** si es disipativo con respecto a la tasa de suministro $w(u, y) = u^T y$. El sistema (1.1) es estrictamente pasivo con respecto a la entrada si existe $\delta > 0$ tal que (1.1) es disipativo con respecto a $w(u, y) = u^T y - \delta \|u\|^2$. El sistema (1.1) es estrictamente pasivo con respecto a la salida si existe $\epsilon > 0$ tal que (1.1) es disipativo con respecto a $w(u, y) = u^T y - \epsilon \|y\|^2$. Finalmente, el sistema (1.1) es conservativo si es estrictamente pasivo con respecto a la tasa de suministro $w(u, y) = u^T y$.

1.1.2. Estabilidad de sistemas pasivos

Regresemos a la desigualdad de disipación (1.3) y consideremos una función de almacenamiento S continuamente diferenciable. Dividiendo por $t_1 - t_0$, y haciendo que $t_1 \rightarrow t_0$,

podemos ver que (1.3) es equivalente a

$$S_x(x) (f(x) + g(x)u) \leq w(u, h(x)), \quad \forall x, u, \quad (1.5)$$

donde $S_x(x)$ es el vector columna de derivadas parciales

$$S_x(x) = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n}(x) \right).$$

La desigualdad (1.5) se llama *desigualdad diferencial de disipación*. Podemos establecer una relación directa entre disipatividad y la estabilidad de Lyapunov para este fin. Nos concentraremos en los resultados para estabilidad de un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$.

Recordaremos algunas nociones y resultados de la teoría de Lyapunov. Consideremos el conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.6)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$. Suponemos que f es continua y localmente Lipschitz, lo que implica la existencia y unicidad de las soluciones de (1.6) [10]. La solución de (1.6) para la condición inicial $x(0) = x_0$ está dada por $x(t, x_0)$, con $t \in [0, T(x_0))$ y $T(x_0) > 0$ es el tiempo máximo de definición de la solución.

Definición 1.4. [13] Sea x^* un punto de equilibrio de (1.6), esto es, $f(x^*) = 0$ y así $x(t, x^*) = x^*$, para todo t . El punto de equilibrio x^* es

1. Estable, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon)$ tal que

$$\|x_0 - x^*\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t, x_0) - x^*\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0,$$

2. Asintóticamente estable, si es estable y existe $r(x^*) > 0$ tal que

$$\|x_0 - x^*\| < r(x^*) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = x^*,$$

3. Globalmente asintóticamente estable, si es estable y $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = x^*$ para todo $x_0 \in X$.

4. Inestable, si no es estable.

A continuación enunciamos dos herramientas para el análisis de estabilidad usando funciones de Lyapunov.

Teorema 1.5. [13] Sea x^* un punto de equilibrio de (1.6). Sea $V : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continuamente diferenciable con

$$V(x^*) = 0, \quad V(x) > 0, \quad x \neq x^*,$$

tal que

$$\dot{V}(x) := V_x f(x) \leq 0, \quad \forall x \in X.$$

Entonces x^* es un punto de equilibrio estable. Si, además,

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in X, \quad x \neq x^*.$$

entonces x^* es un punto de equilibrio asintóticamente estable, el cual es globalmente asintóticamente estable si V es una función propia, esto es, los conjuntos $\{x \in X \mid 0 \leq V(x) \leq c\}$ son compactos para cada $c \in \mathbb{R}^+$.

Del Teorema 1.5 y haciendo uso del Principio de Invarianza de LaSalle [22], se tiene el siguiente lema.

Lema 1.1. [13] Sea $S : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de almacenamiento continua para (1.1), i.e., (1.5) se satisface. Supongamos que la tasa de suministro w satisface

$$w(0, y) \leq 0, \quad \forall y.$$

Supongamos que $x_* \in X$ es un mínimo local estricto para S . Entonces, x_* es un punto de equilibrio estable del sistema no forzado $\dot{x} = f(x, 0)$ con función de Lyapunov $V(x) = S(x) - S(x_*) \geq 0$, para x en torno a x_* . Supongamos que no hay solución de $\dot{x} = f(x)$ que no sea otra que $x(t) = x_*$ que permanece en $\{x \in X \mid w(0, h(x, 0))\}$ para todo t . Entonces x_* es un equilibrio asintóticamente estable, el cual es globalmente asintóticamente estable si $V \geq 0$ es propia.

1.1.2.1. Estabilización de sistemas pasivos

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1.7a)$$

$$y = h(x), \quad (1.7b)$$

con función de almacenamiento S , esto es

$$\frac{dS}{dt} \leq u^T y.$$

Si el sistema no es estrictamente pasivo con respecto a la salida y , una manera sencilla de hacerlo pasivo con respecto a y es a través de una realimentación estática de salida

$$u = -ky + v, \quad k > 0,$$

con la nueva entrada $v \in \mathbb{R}^m$. Entonces el sistema en lazo cerrado satisface

$$\frac{dS}{dt} \leq v^T y - k\|y\|^2,$$

y por lo tanto es estrictamente pasivo con respecto a la salida. Note que ésto puede ser interpretado como la interconexión de realimentación del sistema pasivo (1.7) con un sistema estático estrictamente pasivo con respecto a la entrada $\bar{u} = k\bar{y}$, $k > 0$, a través de las restricciones de interconexión de realimentación $u = \bar{u} + v$, $\bar{y} = y$.

1.1.3. Interconexión de sistemas pasivos

En la Fig. 1.1 se muestra el esquema que representa a dos sistemas que se encuentran en una conexión paralela. Consideremos a ambos sistemas pasivos de manera que se tienen dos funciones de almacenamiento, V_1 para el primer sistema cuya entrada es u_1 y su salida y_1 , y V_2 la segunda función de almacenamiento correspondiente al segundo

sistema con entrada u_2 y salida y_2 . Por lo tanto se satisface que

$$\dot{V}_1 \leq u_1^T y_1 , \tag{1.8a}$$

$$\dot{V}_2 \leq u_2^T y_2 . \tag{1.8b}$$

Notemos que debido a la manera en que están conectados los sistemas, se tiene que la

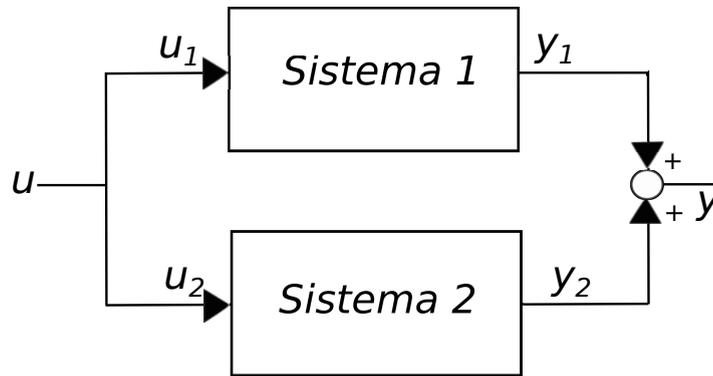


FIGURA 1.1: Conexión en paralelo de dos sistemas pasivos.

entrada u se conecta a ambos sistemas esto es $u = u_1 = u_2$, y la salida total resultante de la conexión paralela es $y = y_1 + y_2$. Por otra parte, sabemos que la función de almacenamiento se puede interpretar como la energía del sistema. Por consiguiente, la función de almacenamiento de los sistemas conectados en paralelo es simplemente la suma de sus correspondientes funciones de almacenamiento, esto es

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leq u_1^T y_1 + u_2^T y_2 ,$$

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leq u^T (y_1 + y_2) ,$$

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leq u^T y .$$

Por lo tanto, dos sistemas pasivos que se conectan en paralelo como se muestra en la Fig. 1.1, dan como resultado un sistema pasivo.

Ahora abordaremos la situación en la que dos sistemas pasivos se conectan en realimentación como se muestra en la Fig. 1.2. Nuevamente se satisface (1.8) y por la disposición de las señales en la figura vemos que la salida total del sistema realimentado es igual a la salida del primer sistema y a su vez es igual a la entrada del segundo sistema,

$y = y_1 = u_2$. La entrada del primer sistema está expresada por $u_1 = u - y_2$. Una vez definido esto se hacen las siguientes manipulaciones algebraicas

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 + \dot{V}_2 &\leq u_1^T y_1 + u_2^T y_2 , \\ \dot{V}_1 + \dot{V}_2 &\leq (u - y_2)^T y + y^T y_2 , \\ \dot{V}_1 + \dot{V}_2 &\leq u^T y - y_2^T y + y_2^T y , \\ \dot{V}_1 + \dot{V}_2 &\leq u^T y , \end{aligned}$$

las cuales expresan el hecho de que la pasividad se mantiene en un sistema construido por la realimentación de dos sistemas pasivos como se muestra en la Fig. 1.2. Estas propiedades de los sistemas pasivos conectados en paralelo o realimentación abren alternativas interesantes para resolver problemas de control basados en un enfoque de pasividad.

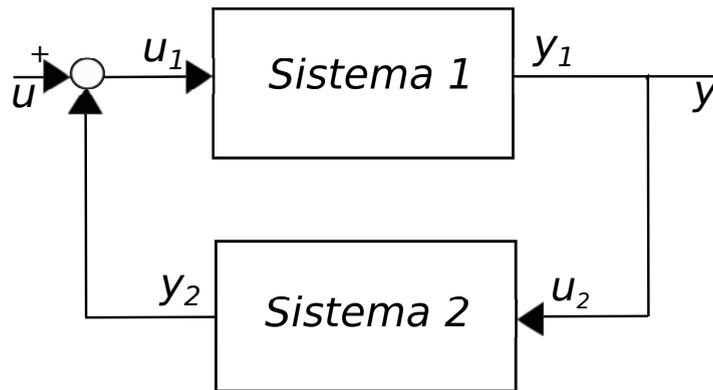


FIGURA 1.2: Conexión en realimentación de dos sistemas pasivos.

1.2. Sistemas con retardo en el tiempo

1.2.1. Sistemas de tipo retardado

Consideremos el sistema lineal invariante en el tiempo con retardo de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h) , \tag{1.9}$$

donde $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices constantes, $h \in \mathbb{R}^n$ es el retardo.

Sea la condición inicial $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Suponemos que φ pertenece al espacio de funciones continuas a pedazos definidas en el segmento $[-h, 0]$, $PC : ([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Sea $x(t, \varphi)$ la solución de (1.9) para la condición inicial

$$x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta) \quad \theta \in [-h, 0],$$

y $x_t(\varphi)$ denota la restricción de la solución al segmento $[t-h, t]$

$$x_t(\varphi) : \theta \rightarrow x(t + \theta, \varphi), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Para elementos del espacio $PC : ([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ usamos la norma uniforme

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

En [20] se demuestra que para cada condición inicial φ la existencia y unicidad de las soluciones del sistema (1.9) están garantizadas.

1.2.2. Sistemas de tipo neutral

Consideremos el sistema con retardo en el tiempo de tipo neutral de la forma

$$\dot{x} - D\dot{x}(t-h) = f(t, x_t) . \tag{1.10}$$

Aquí, la funcional $f(t, \varphi)$ está definida para $t \in [0, \infty]$ y $\varphi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$,

$$f : [0, \infty] \times C([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n ,$$

y es continua con $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $h \in \mathbb{R}^+$. La información necesaria para el cálculo de una solución particular del sistema incluye un instante de tiempo inicial $t_0 \geq 0$ y una función inicial $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, y se supone que

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta) , \quad \theta \in [-h, 0].$$

El estado del sistema en $t \geq t_0$ está definido como la restricción,

$$x_t : \theta \rightarrow x(t + \theta) , \quad \theta \in [-h, 0] ,$$

de la solución $x(t)$ en el segmento $[t - h, t]$.

La existencia y unicidad de la solución se puede revisar en [20].

1.2.3. Análisis de estabilidad

A continuación se enuncian algunos conceptos acerca de estabilidad de los sistemas con retardos en el marco de los enfoques temporal y frecuencial.

1.2.3.1. Enfoque temporal para la estabilidad de sistemas de tipo retardado

Definición 1.6. [14] El sistema (1.9) es estable si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|\psi\|_h < \delta \Rightarrow \|x(t, \psi)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0 .$$

Definición 1.7. [14] El sistema (1.9) es estable asintóticamente si es estable y además para cada $\epsilon > 0$ existe un $\Delta = \Delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|\psi\|_h < \Delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \psi) = 0 .$$

Definición 1.8. [14] El sistema (1.9) es exponencialmente estable si existen $\delta > 0$, $\sigma > 0$ y $\beta > 0$ tales que

$$\|\psi\|_h < \delta \Rightarrow \|x(t, \psi)\| < \beta \|\psi\|_h e^{-\sigma t}, \quad \forall t > 0 . \quad (1.11)$$

1.2.3.2. Enfoque frecuencial para la estabilidad de sistemas de tipo retardado

En el enfoque frecuencial el criterio de Mikhailov y Nyquist son los resultados más usados [18], [41]. A continuación se enuncian los conceptos y resultados principales.

Al igual que en los sistemas libres de retardos, una condición necesaria y suficiente para concluir sobre la estabilidad en un sistema de la forma (1.9) es que su función característica,

$$p(s, h) := \det\{sI_n - A_0 - A_1e^{-sh}\} = 0, \quad (1.12)$$

donde $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad, tenga todas sus raíces ubicadas en el semiplano complejo izquierdo, es decir

Definición 1.9. [14] El sistema (1.9) es estable si

$$\{s \in \mathbb{C} : p(s, h) = 0 \text{ y } \operatorname{Re}\{s\} > 0\} = \emptyset$$

Definición 1.10. [14] Las raíces de la función característica (1.12) que se encuentran ubicadas en el semiplano derecho del plano complejo son conocidas como raíces inestables de (1.9). Las raíces estables de (1.9) son las que no son inestables.

Debido al termino trascendental e^{-sh} , la función característica (1.12) tiene un número infinito de raíces. Sin embargo, es posible establecer los siguientes resultados.

Lema 1.2. [2] Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un número finito de raíces con parte real más grande que α . Considere la función característica dada en (1.12) y defina

$$\sigma_0 = \max_{j=1, \dots, \infty} \{\operatorname{Re}\{s_j\} : p(s_j, h) = 0; h \in \mathbb{R}^+, s_j \in \mathbb{C}\}.$$

Entonces, para cada $\alpha > \sigma_0$, existe una constante $L > 1$ tal que las soluciones del sistema (1.9) satisfacen la siguiente cota de decaimiento exponencial

$$\|x(t, \psi)\| \leq Le^{\alpha t} \|\psi\|_h, \quad \forall t \geq 0.$$

Además, si la estabilidad del sistema (1.9) es dependiente del retardo, entonces el valor de $\sigma_0 = \sigma_0(h)$ varía continuamente con respecto al valor del retardo h .

Como consecuencia del Lema 1.2, si el sistema (1.9) es estable asintóticamente, entonces también es estable exponencialmente, así las soluciones del sistema (1.9) tienen una cota de decaimiento exponencial σ por lo que se dice que el sistema es σ -estable. Aquí, se

emplea el término σ para categorizar las soluciones del sistema (1.9) de acuerdo a su velocidad de convergencia. También se emplea para enfatizar que todas las raíces de la función característica (1.12) se encuentran a la izquierda de la abscisa $-\sigma$ del plano complejo. De manera formal se declara en el siguiente lema

Lema 1.3. *Consideremos el sistema dado en (1.9) y su función característica correspondiente (1.12). Si el sistema (1.9) es estable asintóticamente, entonces, es estable exponencialmente, es decir, existen constantes positivas β y σ tales que*

$$\|x(t, \psi)\| \leq \beta e^{-\sigma t} \|\psi\|_h, \quad \forall t \geq 0,$$

Asimismo, se dice que el sistema (1.9) es σ -estable.

1.2.3.3. Enfoque temporal para la estabilidad de sistemas de tipo neutral

A continuación se dan algunos conceptos acerca de la estabilidad de los sistemas con retardo del tipo neutral.

Definición 1.11. [24] La solución trivial del sistema (1.10) es estable si para cualquier $\epsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que para cada función inicial $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, con $\|\varphi\|_h < \delta(\epsilon, t_0)$, la siguiente desigualdad se cumple:

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0. \quad (1.13)$$

Definición 1.12. [24] La solución trivial del sistema (1.10) se dice asintóticamente estable si para cualquier $\epsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\Delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que para cada función inicial $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, con $\|\varphi\|_h < \Delta(\epsilon, t_0)$, las siguientes condiciones se mantienen:

1. $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \epsilon$, para $t \geq t_0$.
2. $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$, cuando $t - t_0 \rightarrow \infty$.

Definición 1.13. [24] La solución trivial del sistema (1.10) se dice exponencialmente estable si existe $\Delta_0 > 0$ y $\sigma > 0$ y $\gamma > 1$ tal que para cada t_0 y $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$,

con $\|\varphi\|_h < \Delta(\epsilon, t_0)$, las siguiente desigualdad se cumple:

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| < \gamma e^{-\sigma(t-t_0)} \|\varphi\|_h, \quad t \geq t_0. \quad (1.14)$$

1.2.3.4. Enfoque frecuencial para la estabilidad de sistema de tipo neutral

Consideremos un sistema de la forma (1.10), tal que $f(t, x_t) = A_0x(t) + A_1x(t-h)$, esto es

$$\dot{x} - D\dot{x}(t-h) = A_0x(t) + A_1x(t-h),$$

con las matrices constantes $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El sistema (1.10) tiene la función característica

$$p(s, h) := \det \{ (I_n - De^{-sh})s - A_0 - A_1e^{-sh} \} = 0, \quad (1.15)$$

donde $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. Entonces, el sistema (1.10) es estable si todas sus raíces están ubicadas en el semiplano complejo izquierdo. Para el sistema (1.10) definimos

$$\sigma_0 = \max_{j=1, \dots, \infty} \{ \operatorname{Re}\{s_j\} : p(s_j, h) = 0; h \in \mathbb{R}^+, s_j \in \mathbb{C} \}, \quad (1.16)$$

Teorema 1.14. [17] *Considere el sistema descrito por (1.10). Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

a . *El sistema (1.10) es estable si $\sigma_0 < 0$.*

b . *Para cualquier $\alpha > \sigma_0$, existe $L > 0$ tal que cualquier solución $x(t)$ de (1.10) con condición inicial φ está acotada por*

$$\|x(t)\| = Lm_\varphi e^{\alpha t},$$

donde

$$m_\varphi = \max_{h \leq t \leq 0} (\|\varphi(t)\| + \|\dot{\varphi}(t)\|).$$

1.3. Método de \mathcal{D} -partición

Existen métodos que permiten determinar condiciones bajo las cuales una función característica tiene raíces ubicadas en el semiplano izquierdo complejo. La idea básica fue propuesta por Neimark [31], [32]. Ésta consiste en calcular una descomposición o subdivisión particular del espacio paramétrico de una función característica en regiones. La particularidad de estas regiones es que la función característica tiene raíces estables o inestables respecto a los puntos paramétricos que se encuentran dentro de las regiones. Además, para cada punto de la frontera de las regiones la función característica correspondiente tiene por lo menos una raíz sobre el eje imaginario. Este método es conocido como el método de \mathcal{D} -partición o \mathcal{D} -subdivisión [11], [25].

La idea de hacer uso del método de \mathcal{D} -partición en esta tesis se debe a que el problema en consideración, aun que de dimensión infinita, implica un número reducido de parámetros.

El método de \mathcal{D} -partición está basado en el hecho de que las raíces de una función característica son funciones continuas con respecto a sus parámetros, incluido el retardo, y el hecho de que las raíces pasan de un semiplano complejo a otro sólo a través del eje imaginario. A continuación se da a conocer el método de \mathcal{D} -partición y un ejemplo.

Consideremos el cuasipolinomio característico

$$f(s) = p + qe^{-hs} , \quad (1.17)$$

donde p y q son polinomios tal que $\text{grad}(p) > \text{grad}(q)$. Las raíces de (1.17) para un h fijo son funciones continuas de sus coeficientes, suponemos que el coeficiente del término principal de (1.17) no es igual a cero, lo cual significa que siempre se satisface para ecuaciones con el argumento retardado. El método de \mathcal{D} -partición divide el espacio de parámetros en regiones. Las fronteras de estas regiones corresponden al cuasipolinomio teniendo al menos una raíz sobre el eje imaginario o el origen en el plano complejo. En cada región de tal \mathcal{D} -partición el cuasipolinomio tiene el mismo número de raíces con parte real positiva contando sus multiplicidades. Para una variación continua de los parámetros, el número de raíces con parte real positiva cambian sólo si una raíz cruza

el eje imaginario, esto es, si el punto en espacio de parámetros cruza la frontera de la \mathcal{D} -partición.

Para cada región de la \mathcal{D} -partición, es posible asignar un entero i que es el número de raíces con parte real positiva del cuasipolinomio definido por los puntos de esta región. En la \mathcal{D} -partición es posible encontrar regiones que corresponden a cuasipolinomios con raíces con parte real negativa. Estas regiones se denominan simplemente regiones o dominios de estabilidad.

Así, la estabilidad por el método de \mathcal{D} -partición en el espacio de parámetros se reduce al siguiente esquema: A partir de un cuasipolinomio de la forma (1.17) realizar la \mathcal{D} -partición y encontrar las regiones de estabilidad. Es suficiente verificar la estabilidad de un solo punto dentro de cada región.

Cabe señalar que para un punto interior de la región la función característica tiene n raíces inestables. Este número n es llamado grado de inestabilidad de una región [25].

Ejemplo 1.1. *Consideremos el sistema*

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-h) , \quad (1.18)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}^+$. El cuasipolinomio característico es escrito como

$$f(s) = s + a + be^{-hs}, \quad (1.19)$$

el cual tiene una raíz en cero si

$$a + b = 0, \quad (1.20)$$

que corresponde a la línea recta roja de la \mathcal{D} -partición de la Fig. 1.3. Ahora, siguiendo el método de \mathcal{D} -partición, encontrar el conjunto de puntos en los parámetros (a, b) tal que el cuasipolinomio (1.19) tiene al menos una raíz sobre el eje imaginario. En este orden de ideas, considerar $s = j\omega$ en (1.19):

$$j\omega + a + be^{-j\omega h} = 0 . \quad (1.21)$$

Separando la parte real e imaginaria y haciendo uso de la identidad $e^{-j\omega h} = \cos(\omega h) - \sin(\omega h)$ obtenemos

$$a + b \cos(\omega h) = 0 \quad \text{y} \quad \omega - b \sin(\omega h) = 0, \quad (1.22)$$

respectivamente. Resolviendo para los parámetros a y b obtenemos las ecuaciones paramétricas para las fronteras de la \mathcal{D} -partición:

$$a(\omega) = -\omega \cot(\omega h), \quad (1.23)$$

$$b(\omega) = \frac{\omega}{\sin(\omega h)}. \quad (1.24)$$

De las ecuaciones de arriba tenemos que como $\omega \rightarrow 0$, $(a, b) \rightarrow (-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$, que pertenecen a la línea recta dada por (1.20). Entonces, las fronteras de la \mathcal{D} -partición de la Fig. 1.3 están compuestas por la línea recta roja (1.20) y las ecuaciones paramétricas (1.23), las líneas azules, haciendo $\omega \rightarrow \infty$.

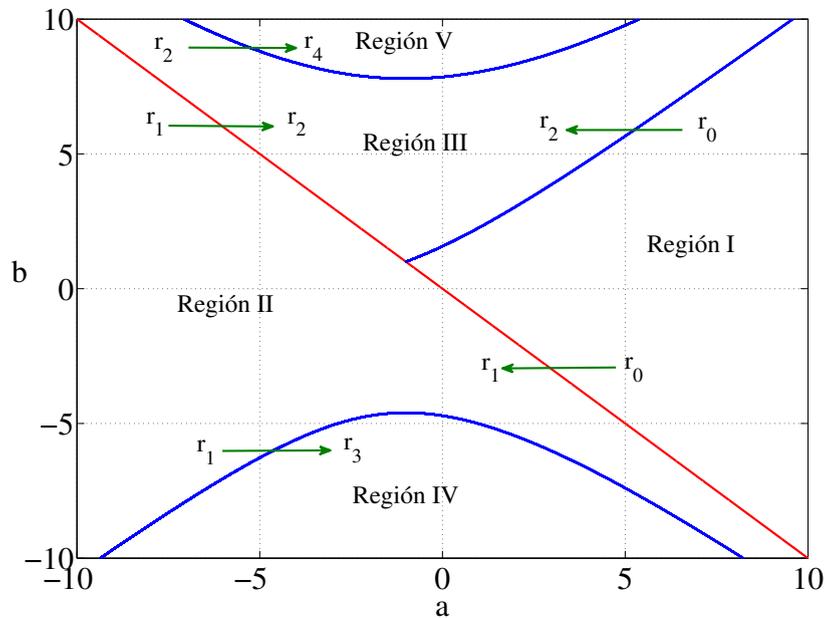


FIGURA 1.3: Ejemplo: Fronteras de la \mathcal{D} -partición.

En cada región tenemos el mismo número de raíces inestables, así que solo basta con revisar cuantas raíces inestables de un punto en cada región del espacio de parámetros

tiene el cuasipolinomio.

Denotando r_i como las raíces del cuasipolinomio donde i es el número de raíces con parte real positiva dentro de la región. Principio de la flecha indica cuantas raíces con parte real positiva r_i hay en la región presente y el final de la flecha indica la cantidad de raíces con parte real positiva hay después de cruzar una frontera. Cabe señalar que por la frontera $s = j\omega$ cruzan un par de raíces complejas conjugadas al semiplano derecho (línea azul), mientras que por la frontera $s = 0$ sólo cruza una raíz al semiplano positivo (línea roja).

Podemos observar que en la región I no hay raíces con parte real positiva por lo que podemos concluir que es la región estable.

En esta tesis usamos el programa **QPMR** por sus siglas en inglés "Quasi-Polynomial Mapping based Rootfinder" en **Matlab** para determinar el número de raíces con parte real positiva. También es posible usar el Criterio de Mikhailov [26] en un punto de cada región.

Capítulo 2

Pérdida de desempeño debido a los retardos en el canal de comunicación

2.1. Introducción

Consideremos un sistema lineal de primer orden de la forma

$$\dot{x} = -ax + bu_1, \quad (2.1a)$$

$$y_1 = x, \quad (2.1b)$$

(por ejemplo un motor de corriente continua CD), donde u_1 , y_1 y $x \in \mathbb{R}$ son el voltaje de entrada, la velocidad de salida y el estado respectivamente. Los parámetros a y b se suponen positivos por lo que el sistema es pasivo con la función de almacenamiento

$$V_S(x) = \frac{1}{2b}x^2, \quad (2.2)$$

esto es,

$$\dot{V}_S(x) = \frac{1}{b}x(-ax + bu_1) = -\frac{a}{b}x^2 + y_1u_1 \leq y_1u_1.$$

Ahora consideremos el controlador Proporcional-Integral (*PI*)

$$\dot{\xi} = u_0, \quad (2.3a)$$

$$y_0 = k_p u_0 + k_i \xi, \quad (2.3b)$$

donde $u_0, y_0, \xi \in \mathbb{R}$ son la entrada, salida y estado del controlador respectivamente. Las ganancias proporcional e integral k_p y k_i se suponen positivas. De igual manera el controlador es pasivo con la función de almacenamiento

$$V_C(\xi) = \frac{k_i}{2} \xi^2, \quad (2.4)$$

en otras palabras

$$\dot{V}_C(\xi) = k_i \xi u_0 = (y_0 - k_p u_0) u_0 = y_0 u_0 - k_p u_0^2.$$

Debido a que la interconexión por realimentación negativa de dos elementos pasivos es pasiva, el sistema de primer orden y el controlador *PI* se interconectan bajo el siguiente patrón:

$$u_1 = -y_0 \quad \text{y} \quad u_0 = y_1 - y_1^*. \quad (2.5)$$

El sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control *PI* (2.3), siguiendo el patrón de interconexión (2.5) es pasivo con la función de almacenamiento

$$V_1(x, \xi) = V_S(x) + V_C(\xi),$$

esto es

$$\dot{V}_1(x, \xi) = \dot{V}_S(x) + \dot{V}_C(\xi) = -\frac{a}{b} x^2 + u_1 x + u_0 y_0 - k_p u_0^2 = -\left(\frac{a}{b} x^2 + k_p u_0^2\right).$$

Cuando un canal de comunicación con retardos se introduce en el lazo de control, con h_1 como el retardo entre la comunicación del controlador *PI* al sistema y h_2 el retardo entre la comunicación del sistema al controlador *PI* como se muestra en la Fig. 2.1, la pasividad del sistema falla debido a que un canal de comunicación con retardos no es

pasivo [1], la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{be^{-h_1s}(k_p s + k_i)}{s^2 + (a + bk_p e^{-hs})s + bk_i e^{-hs}} \quad (2.6)$$

donde $h := h_1 + h_2$. Los cálculos de la función de transferencia (2.6) se encuentran en

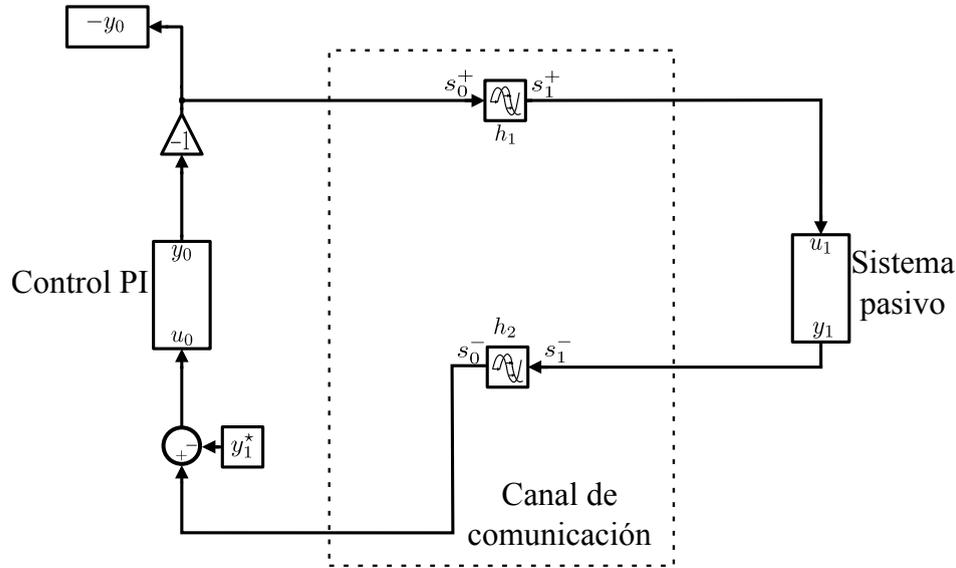


FIGURA 2.1: Lazo de control con retardos en el canal de comunicación.

el Apéndice A.1.

Observación 2.1. Note que en todas las figuras y ejemplos de este trabajo, los valores de los parámetros son $a = 0.4$, $b = 50$ y $h = 0.3$.

2.2. Retardos cero en el canal de comunicación

Consideremos la función de transferencia

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{b(k_p s + k_i)}{s^2 + (a + bk_p)s + bk_i} \quad (2.7)$$

Un caso particular de la función de transferencia (2.6) sucede cuando no existen retardos en el canal de comunicación, esto es $h_1 = h_2 = 0$.

La función característica en este esquema es el siguiente polinomio

$$p(s, k_p, k_i) = s^2 + (a + bk_p) s + bk_i . \quad (2.8)$$

La σ -estabilidad de un sistema lineal puede ser caracterizada en el dominio de la frecuencia: Todas las raíces de la ecuación característica deben de tener la parte real más pequeña que $-\sigma$. Así, haciendo el cambio de variable $s \rightarrow s - \sigma$ reduce el análisis de la σ -estabilidad de (2.8) a la estabilidad del polinomio transformado

$$p_\sigma(s, k_p, k_i) = s^2 + (a - 2\sigma + bk_p) s + (\sigma^2 - a\sigma + bk_i - bk_p\sigma) . \quad (2.9)$$

2.2.1. Fronteras de σ -estabilidad

Siguiendo el método de \mathcal{D} -partición determinamos las fronteras en $s = 0$ y $s = j\omega$. Para la primera frontera sustituimos $s = 0$ en (2.9), donde obtenemos la siguiente ecuación

$$p_\sigma(0, k_p, k_i) = \sigma^2 - a\sigma + bk_i - bk_p\sigma = 0 ,$$

la cual corresponde a la línea descrita por

$$k_i(k_p) = \frac{\sigma}{b} (bk_p + a - \sigma) . \quad (2.10)$$

Para obtener la segunda frontera sustituimos $s = j\omega$ en (2.9), el polinomio se transforma en

$$p_\sigma(j\omega, k_p, k_i) = -\omega^2 + j\omega(a - 2\sigma + bk_p) + (\sigma^2 - a\sigma + bk_i - bk_p\sigma) = 0.$$

Separando la parte real e imaginaria de este polinomio, obtenemos el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} \Re(p_\sigma(j\omega, k_p, k_i)) &= -\omega^2 + \sigma^2 - a\sigma + bk_i - bk_p\sigma = 0 , \\ \Im(p_\sigma(j\omega, k_p, k_i)) &= \omega(a + bk_p - 2\sigma) = 0 . \end{aligned}$$

Resolviendo para k_p and k_i se llega a las soluciones

$$k_p = \frac{2\sigma - a}{b}, \quad (2.11)$$

$$k_i(\omega) = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{b}, \quad (2.12)$$

que determinan las regiones de σ -estabilidad en el espacio de parámetros.

2.2.2. Regiones de σ -estabilidad

Las regiones en el espacio de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$ donde el polinomio (2.9) es estable, i.e. el polinomio (2.8) es σ -estable, se dibujan a partir del método de \mathcal{D} -partición con la ecuación (2.10) y las ecuaciones (2.11) y (2.12) de la sección anterior.

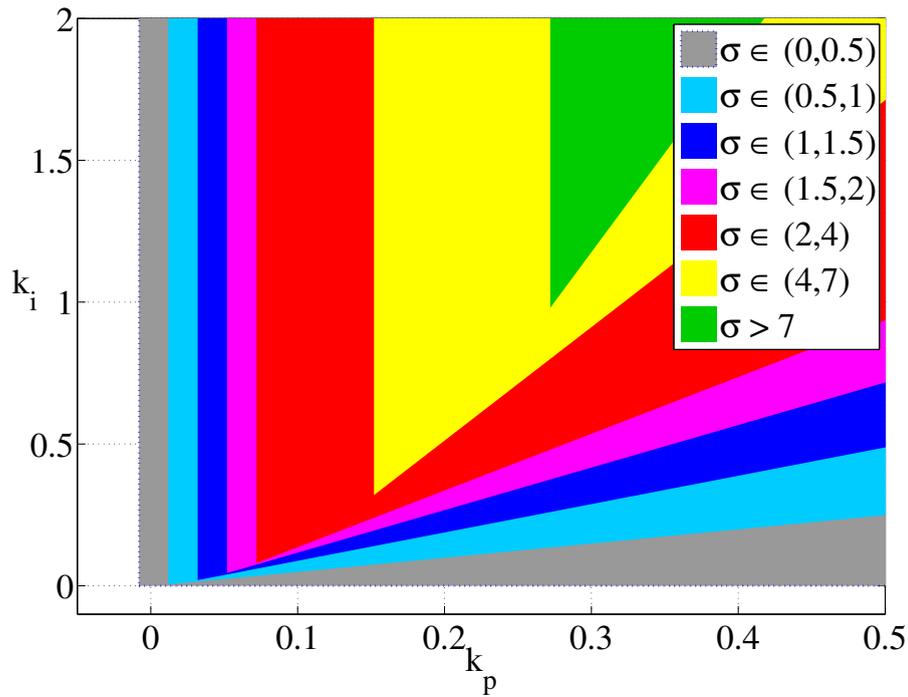


FIGURA 2.2: Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación libre de retardos.

Observación 2.2. En el mapa de la \mathcal{D} -partición de la Fig. 2.2 se puede observar que es posible asignar un decaimiento exponencial σ arbitrariamente grande. Por otro lado,

se puede caracterizar de manera analítica el punto donde las fronteras (2.10) y (2.11), (2.12) se intersectan dado un valor de σ , es fácil observar en la Fig. 2.2 que este punto corresponde a las ganancias con valores mas pequeños de la ley de control PI. De esta forma se propone una regla de sintonización tal que para alcanzar una σ -estabilidad deseada se tienen expresiones analíticas y no será necesario recurrir al mapa de \mathcal{D} -partición. En la intersección de las fronteras el polinomio (2.9) se tienen dos raíces en $s=0$.

2.2.3. Ganancias mínimas para un decaimiento exponencial σ prescrito

Las observaciones anteriores permiten caracterizar el controlador *PI* con las ganancias más pequeñas tal que se puede alcanzar un σ -estabilidad dada.

Proposición 2.1. *Considere el sistema (2.1) y el controlador PI (2.3) en lazo cerrado. Para un σ dado las ganancias mínimas para el controlador PI, están dadas por*

$$k_p = \frac{2\sigma - a}{b}, \quad (2.13)$$

$$k_i = \frac{\sigma^2}{b}. \quad (2.14)$$

Demostración. En la intersección de las fronteras (2.10) y (2.11), (2.12) el polinomio (2.9) tiene una raíz doble en $s = 0$, entonces se satisface $p_\sigma(s, k_p, k_i) |_{s=0} = 0$ y $\frac{\partial}{\partial s} p_\sigma(s, k_p, k_i) |_{s=0} = 0$, es decir,

$$p_\sigma(s, k_p, k_i) |_{s=0} = \sigma^2 - a\sigma + bk_i - b\sigma k_p = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} p_\sigma(s, k_p, k_i) |_{s=0} = a + bk_p - 2\sigma = 0. \quad (2.16)$$

La expresión (2.13) sigue de (2.16). Finalmente, sustituyendo (2.13) en (2.15) obtenemos (2.14) □

Ejemplo 2.1. *A partir de (2.13) y (2.14) determinamos las ganancias mínimas k_p y k_i para los valores de σ que se muestran en la Fig. 3.10. Los resultados se observan en la Tabla 2.1.*

σ	0.5	1	1.5	2	4	7
k_p (2.13)	0.012	0.032	0.052	0.072	0.152	0.272
k_i (2.14)	0.005	0.02	0.045	0.08	0.32	0.98

TABLA 2.1: Ganancias mínimas para la ley de control PI , caso libre de retardo.

Las condiciones para que la ley de control PI sea pasiva, lo que deriva en la pasividad y estabilidad del sistema en lazo cerrado son $k_p > 0$ y $k_i > 0$. Entonces, las ganancias de la ley de control PI admisibles son todas aquellas positivas.

2.3. Retardos no cero y constantes en el canal de comunicación

El retardo es un elemento no pasivo, debido a ésto la propiedad de pasividad del sistema en lazo cerrado se pierde. En esta sección analizamos cómo el desempeño del sistema se afecta con la presencia de retardos fijos y constantes en el canal de comunicación.

La función de transferencia con retardos en el canal de comunicación de acuerdo a la interconexión descrita en la Fig. 2.1, es (2.6). Para detalles de los cálculos ver el Apéndice A.1.

La estabilidad del sistema está determinada por el cuasipolinomio característico

$$p(s, k_p, k_i) = s^2 + (a + bk_p e^{-hs})s + bk_i e^{-hs}. \quad (2.17)$$

La σ -estabilidad de este cuasipolinomio es analizada estudiando la estabilidad del cuasipolinomio transformado

$$p_\sigma(s, k_p, k_i) = s^2 + (a - 2\sigma + bk_p e^{-h(s-\sigma)})s + \sigma^2 - a\sigma + be^{-h(s-\sigma)}(k_i - k_p\sigma). \quad (2.18)$$

2.3.1. Fronteras de σ -estabilidad

De acuerdo al método de \mathcal{D} -partición, las fronteras pueden ser calculadas como sigue. La primer frontera se obtiene sustituyendo $s = 0$. La expresión (2.18) se reduce a

$$p_\sigma(0, k_p, k_i) = \sigma^2 - a\sigma + be^{h\sigma}(k_i - k_p\sigma) = 0,$$

que corresponde a la ecuación

$$k_i = \left(\frac{a - \sigma}{be^{h\sigma}} + k_p \right) \sigma. \quad (2.19)$$

La segunda frontera se obtiene sustituyendo $s = j\omega$ y $e^{-h(j\omega - \sigma)} = e^{h\sigma}(\cos(h\omega) - j \sin(h\omega))$ en (2.18), esto es

$$p_\sigma(j\omega, k_p, k_i) = -\omega^2 + j\omega(a - 2\sigma + bk_p e^{h\sigma}(\cos(h\omega) - j \sin(h\omega))) + \sigma^2 - a\sigma + be^{h\sigma}(\cos(h\omega) - j \sin(h\omega))(k_i - k_p\sigma) = 0.$$

Separando la parte real e imaginaria del cuasipolinomio, se tiene

$$k_p(\omega \sin(h\omega) - \sigma \cos(h\omega)) + k_i \cos(h\omega) = \frac{\sigma a - \sigma^2 + \omega^2}{be^{h\sigma}}, \quad (2.20)$$

$$k_p(\omega \cos(h\omega) + \sigma \sin(h\omega)) - k_i \sin(h\omega) = \frac{\omega(2\sigma - a)}{be^{h\sigma}}. \quad (2.21)$$

Reescribiendo (2.20) y (2.21) en forma matricial, se llega a

$$\begin{bmatrix} \omega \sin(h\omega) - \sigma \cos(h\omega) & \cos(h\omega) \\ \omega \cos(h\omega) + \sigma \sin(h\omega) & -\sin(h\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p \\ k_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma a - \sigma^2 + \omega^2}{be^{h\sigma}} \\ \frac{\omega(2\sigma - a)}{be^{h\sigma}} \end{bmatrix}.$$

Resolviendo para k_p y k_i , obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas

$$k_p(\omega) = \frac{(2\sigma - a)\omega \cos(h\omega) + (h\sigma - \sigma^2 + \omega^2) \sin(h\omega)}{b\omega e^{h\sigma}}, \quad \omega \neq 0, \quad (2.22)$$

$$k_i(\omega) = \frac{(\sigma^2 + \omega^2)(\omega \cos(h\omega) + (a - \sigma) \sin(h\omega))}{b\omega e^{h\sigma}}, \quad \omega \neq 0. \quad (2.23)$$

2.3.2. Regiones de σ -estabilidad

A partir del método de \mathcal{D} -partición, la ecuación (2.19) y las ecuaciones paramétricas (2.22), (2.23) de la sección anterior permiten determinar las regiones en el espacio de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$ donde el cuasipolinomio (2.18) es estable, i.e. el cuasipolinomio (2.17) es σ -estable.

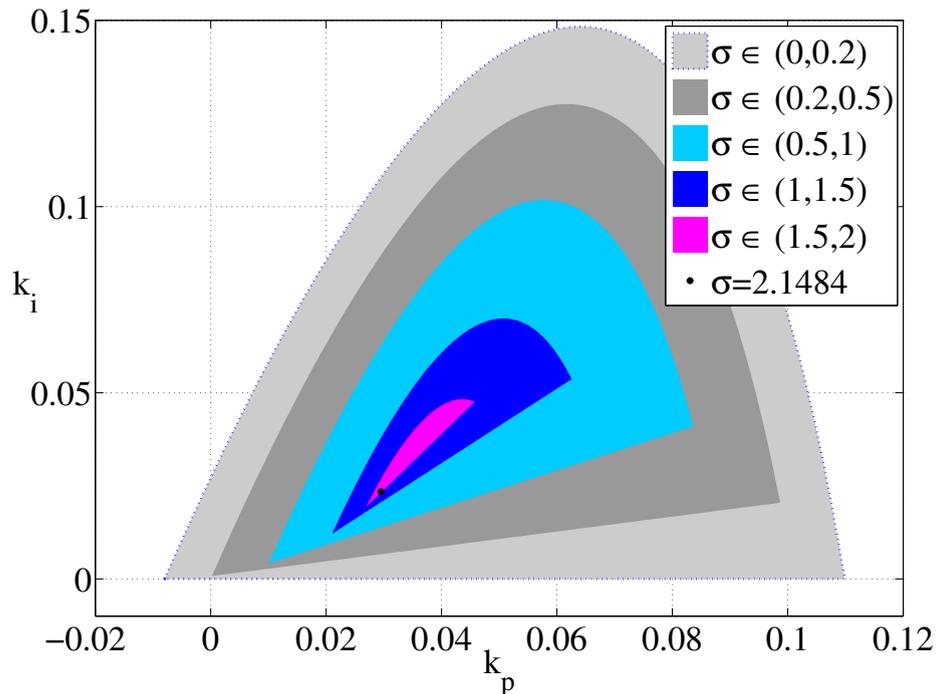


FIGURA 2.3: Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación con retardos.

Observación 2.3. Uno puede observar en la Fig. 2.3 que la región de estabilidad en el espacio de parámetros se ha reducido de manera drástica con respecto a la Fig. 2.2. Por otro lado, conforme el decaimiento exponencial deseado incrementa, la región de σ -estabilidad se contrae y colapsa en algún valor σ^* . Está claro que la σ -estabilidad del sistema en lazo cerrado disminuye. Para un decaimiento dado la región está delimitada por la ecuación (2.19) y las ecuaciones paramétricas (2.22), (2.23) correspondientes al cruce de una raíz real en $s = 0$, y un par de raíces imaginarias en $s = j\omega$ respectivamente, del cuasipolinomio (2.18). En consecuencia, para los valores de las ganancias de control k_p y k_i en el punto de colapso el cuasipolinomio (2.18) tiene una raíz triple en

$s = 0$.

Debido a ésto podemos caracterizar el máximo decaimiento exponencial σ^* alcanzable y las ganancias correspondientes para el controlador *PI*. Además como se observa en la Fig. 2.3 una de las intersecciones de las fronteras corresponde a las ganancias más pequeñas para la ley de control *PI* dado un valor de σ , para las ganancias de control k_p y k_i en este punto el cuasipolinomio (2.18) tiene una raíz doble en $s = 0$.

2.3.3. Sintonización del máximo decaimiento σ alcanzable en lazo cerrado

En contraste con el caso libre de retardo, no es posible alcanzar un decaimiento exponencial arbitrariamente grande. En esta sección caracterizaremos el máximo decaimiento exponencial σ alcanzable.

Proposición 2.2. *Considere el sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control (2.3) donde $k_p, k_i > 0$ y retardos en el canal de comunicación $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$. El máximo decaimiento exponencial alcanzable está dado por*

$$\sigma^* = \frac{ah + 4 - \sqrt{a^2h^2 + 8}}{2h}, \quad (2.24)$$

y corresponde a las ganancias de control k_p^* y k_i^*

$$k_p^* = \frac{\sqrt{a^2h^2 + 8} - 2}{hbe^{\gamma_2}}, \quad (2.25)$$

$$k_i^* = \frac{-(ah + 1)^2 - 27 + (ah + 10)\sqrt{a^2h^2 + 8}}{2h^2be^{\gamma_2}}, \quad (2.26)$$

donde

$$\gamma_2 = \frac{ah + 4 - \sqrt{a^2h^2 + 8}}{2}.$$

Demostración. La observación anterior de que en el punto de colapso existe una raíz triple en $s = 0$, implica que el cuasipolinomio (2.18), su primera y segunda derivada son iguales a cero. En otras palabras, las condiciones $p_\sigma(\cdot)|_{s=0} = 0$, $\frac{\partial}{\partial s}p_\sigma(\cdot)|_{s=0} = 0$ y

$\frac{\partial^2}{\partial s^2} p_\sigma(\cdot) |_{s=0} = 0$ se cumplen, esto es

$$p_\sigma(s, k_p, k_i, h) |_{s=0} = -b\sigma e^{h\sigma} k_p + be^{h\sigma} k_i + \sigma^2 - a\sigma = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} p_\sigma(s, k_p, k_i, h) |_{s=0} = be^{h\sigma} (1 + h\sigma) k_p - hbe^{h\sigma} k_i + a - 2\sigma = 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} p_\sigma(s, k_p, k_i, h) |_{s=0} = -hbe^{h\sigma} (2 + h\sigma) k_p + h^2 be^{h\sigma} k_i + 2 = 0. \quad (2.29)$$

Obtenemos k_i de (2.27)

$$k_i = \frac{b\sigma e^{h\sigma} k_p - \sigma^2 + a\sigma}{be^{h\sigma}}, \quad (2.30)$$

sustituyendo (2.30) en (2.28) se obtiene la solución para k_p

$$k_p = \frac{-a - h\sigma^2 + (2 + ah)\sigma}{be^{h\sigma}}. \quad (2.31)$$

Ahora se sustituye (2.31) en (2.30) y simplificando se obtiene

$$k_i = \frac{\sigma^2 (ah - h\sigma + 1)}{be^{h\sigma}}. \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.31) y (2.32) en (2.29), se reduce a la ecuación de segundo grado

$$h^2\sigma^2 - (ah^2 + 4h)\sigma + 2ah + 2 = 0.$$

Resolviendo esta última obtenemos

$$\sigma_{1,2} = \frac{ah + 4 \pm \sqrt{a^2 h^2 + 8}}{2h}.$$

Si sustituimos la primera solución $\sigma_1 = (ah + 4 + \sqrt{a^2 h^2 + 8}) / 2h$, entonces k_p se define como sigue

$$k_p = -\frac{\sqrt{a^2 h^2 + 8} + 2}{hbe^{\sigma_1}},$$

y k_i está dada por

$$k_i = -\frac{(10 + ah)\sqrt{a^2 h^2 + 8} + a^2 h^2 + 2ah + 28}{2h^2 be^{\sigma_1}},$$

donde

$$\gamma_1 = \frac{ah + 4 + \sqrt{a^2h^2 + 8}}{2}.$$

Se observa que en este caso las soluciones son negativas y no satisfacen las condiciones $k_p > 0$ y $k_i > 0$, por lo que esta solución es descartada.

Ahora, sustituimos la segunda solución $\sigma_2 = (ah + 4 - \sqrt{a^2h^2 + 8})/2h$ y k_p se define como sigue

$$k_p = \frac{\sqrt{a^2h^2 + 8} - 2}{hbe^{\gamma_2}},$$

y k_i es

$$k_i = \frac{-(ah + 1)^2 - 27 + (10 + ah)\sqrt{a^2h^2 + 8}}{2h^2be^{\gamma_2}},$$

donde

$$\gamma_2 = \frac{ah + 4 - \sqrt{a^2h^2 + 8}}{2}.$$

En este caso las soluciones son positivas y satisfacen la condición para $k_p > 0$ y $k_i > 0$ y se obtiene (2.24), (2.25) y (2.26). \square

Observación 2.4. En este caso, proveemos fórmulas analíticas en términos del retardo h y los parámetros del sistema a y b para el máximo decaimiento exponencial σ^* alcanzable, así como para las ganancias de control correspondientes k_p^* y k_i^* . Claramente, esto es una regla de sintonización.

Ejemplo 2.2. *Cálculo del máximo decaimiento exponencial σ^* y las ganancias correspondientes k_p y k_i de la ley de control PI.*

$\sigma_1 = 11.585$	$k_p = -0.0099$	$k_i = -0.1956$
$\sigma_2 = 2.1484$	$k_p = 0.02907$	$k_i = 0.02304$

TABLA 2.2: Máximo decaimiento exponencial en lazo cerrado; canal de comunicación con retardos.

Es claro que la segunda solución satisface la condición $k_p > 0$ y $k_i > 0$.

2.3.4. Ganancias mínimas para un decaimiento exponencial σ prescrito

Las observaciones de la Sección 2.3.2 permiten caracterizar las ganancias más pequeñas del controlador PI para un decaimiento exponencial $\sigma < \sigma^*$ dado.

Proposición 2.3. *Considere el sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control (2.3) donde $k_p, k_i > 0$ y retardos en el canal de comunicación $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$. Entonces las ganancias mínimas del controlador PI para un $\sigma < \sigma^*$ dado, son*

$$k_p = \frac{h\sigma^2 - (2 + ah)\sigma + a}{be^{h\sigma}}, \quad (2.33)$$

$$k_i = \frac{\sigma^2 (ah - h\sigma + 1)}{be^{h\sigma}}. \quad (2.34)$$

Demostración. En la intersección de las dos fronteras (2.19) y (2.22,) (2.23) el cuasi-polinomio (2.18) tiene una raíz doble en $s = 0$. Por lo tanto, la expresión (2.18) y su derivada con respecto a s son igual a cero, esto es, $p_\sigma(\cdot)|_{s=0} = 0$ y $\frac{\partial}{\partial s} p_\sigma(\cdot)|_{s=0} = 0$, las cuales corresponden a (2.27) y (2.28), repectivamente

$$-b\sigma e^{h\sigma} k_p + be^{h\sigma} k_i + \sigma^2 - a\sigma = 0,$$

$$be^{h\sigma} (1 + h\sigma) k_p - hbe^{h\sigma} k_i + a - 2\sigma = 0.$$

De igual manera podemos escribirlas como sigue

$$-\sigma k_p + k_i = \frac{-\sigma^2 + a\sigma}{be^{h\sigma}},$$

$$(1 + h\sigma) k_p - hk_i = \frac{-a + 2\sigma}{be^{h\sigma}},$$

o, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} -\sigma & 1 \\ 1 + h\sigma & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p \\ k_i \end{bmatrix} = -\frac{e^{-h\sigma}}{b} \begin{bmatrix} \sigma(a - \sigma) \\ a - 2\sigma \end{bmatrix}.$$

Resolviendo el sistema lineal para k_p y k_i , obtenemos (2.33) y (2.34). \square

Ejemplo 2.3. Las ganancias mínimas para $\sigma < \sigma^* = 2.1484$, para los valores de σ de la Fig. 2.3, están dadas en la tabla 2.3.

σ	0.2	0.5	1	1.5	2	2.1484
$k_p(2.33)$	2.26×10^{-4}	0.0101	0.021	0.0268	0.029	0.02907
$k_i(2.34)$	7.98×10^{-4}	0.0042	0.0121	0.0192	0.0228	0.02304

TABLA 2.3: Ganancias mínimas para la ley de control PI ; canal de comunicación con retardos.

Como en el ejemplo 2.2 las condiciones $k_p > 0$ y $k_i > 0$ se satisfacen para $\sigma > 0.2$, lo que permite tener estabilidad en el sistema en lazo cerrado con retardos en el canal de comunicación, además, en este ejemplo el valor de σ está acotado por arriba por $\sigma^* = 2.1484$.

2.4. Conclusiones

En el caso libre de retardos en el canal de comunicación es posible alcanzar una σ -estabilidad arbitraria como se observa en la Fig. 2.2, además, se provee una regla de sintonización para determinar las ganancias mínimas del controlador PI dado un valor de σ arbitrario. Al introducir retardos en el canal de comunicación las regiones de σ -estabilidad se reducen de manera drástica con respecto al caso libre de retardos. El decremento en la σ -estabilidad del sistema se debe a la introducción de los retardos, ya que éstos no son elementos pasivos. Aun así podemos garantizar σ -estabilidad para una zona en el espacio de parámetros k_p y k_i .

En este último caso se proporcionan dos reglas de sintonización. En la primera es posible proveer fórmulas analíticas en términos del retardo h y los parámetros del sistema a y b para el máximo decaimiento exponencial σ^* alcanzable y las ganancias de control k_p^* y k_i^* correspondientes. En la segunda se proporcionan expresiones para determinar las ganancias mínimas del controlador PI para un decaimiento exponencial $\sigma < \sigma^*$ dado.

Capítulo 3

Uso de la transformación de dispersión

3.1. Introducción

Como se observó en el Capítulo 2, la introducción de un canal de comunicación con retardos provoca la pérdida de la propiedad de pasividad del sistema en lazo cerrado. En el caso libre de retardos se tiene estabilidad en todo el primer cuadrante del espacio de parámetros y se puede alcanzar una σ -estabilidad arbitraria como se observa en la Fig. 2.2, cuando los retardos se introducen en el canal de comunicación se pierde la estabilidad en todo el primer cuadrante en el espacio de parámetros y la σ -estabilidad se afecta de manera drástica como muestra la Fig. 2.3.

Una propuesta para recuperar la propiedad de pasividad en la presencia de retardos en el canal de comunicación es emular una línea de transmisión sin pérdidas, debido a que ésta es un elemento pasivo [34]. Ésto permite recuperar la pasividad y estabilidad en el sentido de Lyapunov independientemente de los retardos. En este Capítulo se analiza bajo un enfoque frecuencial, el método de \mathcal{D} -partición, como se ve afectada la estabilidad y la σ -estabilidad al introducir la transformación de dispersión.

Un enfoque clásico en el estudio de líneas de transmisión consiste en aplicar una transformación lineal en las variables del puerto [3]. Mediante la aplicación de esta transformación las ecuaciones de la línea de transmisión, modelada por las ecuaciones del telégrafo, se transforman en un par de ecuaciones con retardo desacopladas, que modelan la ecuación de transporte usada para modelar un canal de comunicación con retardos.

El argumento inverso fue propuesto por Anderson y Spong en [1]: Suponer que se tiene un canal de comunicación que consiste en un par de retardos desacoplados y aplicar la transformación inversa para emular el comportamiento de una línea de transmisión. Debido a que las líneas de transmisión son pasivas, el argumento de pasividad en la interconexión del sistema se restaura.

De manera más precisa, consideremos un par de retardos dados por la ecuación diferencial parcial de transporte que modelan un canal de comunicación con retardos

$$\frac{\partial}{\partial l} s^+(l, t) = -h_1 \frac{\partial}{\partial t} s^+(l, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial l} s^-(l, t) = h_2 \frac{\partial}{\partial t} s^-(l, t),$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} s_l^+(l, t) \\ s_l^-(l, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_t^+(l, t) \\ s_t^-(l, t) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde $l \in [0, 1]$ es la variable espacial. Note que en las fronteras del canal de comunicación, las variables de dispersión satisfacen $s^+(1, t) = s^+(0, t - h_1)$ y $s^-(1, t) = s^-(0, t + h_2)$. Consideremos ahora la transformación lineal estándar

$$\begin{pmatrix} \mu(l, t) \\ v(l, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 1 & -d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s^+(l, t) \\ s^-(l, t) \end{pmatrix}, \quad d > 0, \quad (3.2)$$

donde d es la impedancia virtual, el voltaje y la corriente se modelan con las variables μ y v respectivamente, la capacitancia se define como $C = h/d$ y la inductancia como $L = dh$. Siguen de (3.2), (3.1) y $h := h_1 + h_2$ el siguiente par de ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial}{\partial l} \mu(l, t) = -d h \frac{\partial}{\partial t} v(l, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial l} v(l, t) = -\frac{h}{d} \frac{\partial}{\partial t} \mu(l, t),$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \mu_l(l, t) \\ v_l(l, t) \end{pmatrix} = -h \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1/d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t(l, t) \\ v_t(l, t) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

las cuales son un par de ecuaciones de telégrafo que modelan una línea de transmisión sin pérdida. La línea de transmisión (3.3) es pasiva, lo cual se demuestra con la funcional de Lyapunov-Krasovskii [34]

$$V_L(\mu(\cdot, t), v(\cdot, t)) = \frac{h}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{d} \mu^2(\lambda, t) + dv^2(\lambda, t) \right) d\lambda, \quad (3.4)$$

esto es

$$\dot{V}_L(\mu(\cdot, t), v(\cdot, t)) = \mu_0 v_0 - \mu_1 v_1,$$

donde

$$\mu_0 := \mu(0, t), \quad \mu_1 := \mu(1, t), \quad v_0 := v(0, t) \quad \text{y} \quad v_1 := v(1, t).$$

Es fácil demostrar la pasividad de la línea de transmisión, derivando con respecto al tiempo la funcional de Lyapunov-Krasovskii (3.4) y haciendo uso de la regla de Leibnitz, es decir

$$\begin{aligned} \dot{V}_L(\mu(\cdot, t), v(\cdot, t)) &= \frac{h}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{d} \mu^2(\lambda, t) + dv^2(\lambda, t) \right) d\lambda \\ &= h \int_0^1 \left(\frac{1}{d} \mu(\lambda, t) \mu_t(\lambda, t) + dv(\lambda, t) v_t(\lambda, t) \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.3) e integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_L(\mu(\cdot, t), v(\cdot, t)) &= - \int_0^1 \mu(\lambda, t) v_\lambda(\lambda, t) d\lambda - \int_0^1 v(\lambda, t) \mu_\lambda(\lambda, t) d\lambda \\ &= -\mu(\lambda, t) v(\lambda, t) \Big|_0^1 + \int_0^1 v(\lambda, t) \mu_\lambda(\lambda, t) d\lambda \\ &\quad - \int_0^1 v(\lambda, t) \mu_\lambda(\lambda, t) d\lambda \\ &= \mu(0, t) v(0, t) - \mu(1, t) v(1, t) \\ \dot{V}_L(\mu(\cdot, t), v(\cdot, t)) &= \mu_0 v_0 - \mu_1 v_1 \end{aligned}$$

lo que muestra que la línea de transmisión es pasiva.

La transformación (3.2) puede ser fácilmente aplicada en las fronteras del canal de comunicación con retardos (3.1), sólo es necesario tener precaución con respecto a la causalidad del sistema: Las variables $s_0^+ := s^+(0, t)$, $s_1^- := s^-(1, t)$, $\mu_0 := \mu(0, t)$ y $v_1 := v(1, t)$ son libres, mientras que $s_1^+ := s^+(1, t)$, $s_0^- := s^-(0, t)$, $v_0 := v(0, t)$ y $\mu_1 := \mu(1, t)$ dependen de las variables anteriores y sus valores pasados. Considerando estas restricciones, podemos aplicar (3.2) en la frontera $l = 0$, esto es

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ s_0^+ \end{pmatrix} = T_0 \begin{pmatrix} \mu_0 \\ s_0^- \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

donde

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1/d & -1/d \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Y aplicando (3.2) en la frontera $l = 1$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ s_1^- \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ s_1^+ \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

donde

$$T_1 = \begin{pmatrix} -d & 1 \\ -2d & 1 \end{pmatrix}.$$

Para más detalles de las transformaciones en las fronteras del canal de comunicación ver [34] y [33]. Finalmente, podemos usar el siguiente patrón de interconexión

$$u_0 = v_0 - y_1^*, \quad \mu_0 = -y_0, \quad u_1 = \mu_1 \quad y \quad v_1 = y_1, \quad (3.7)$$

como se muestra en la Fig. 3.1.

Al emular una línea de transmisión pasiva sin pérdidas, la propiedad de pasividad se restablece en el sistema en lazo cerrado. El sistema (2.1) conectado en lazo cerrado con la ley de control *PI* (2.3), emulando el canal de comunicación con retardos como una línea de transmisión, es pasivo con respecto a la funcional

$$V_2(x, \xi, \mu(\cdot, t), v(\cdot, t)) = V_S(x) + V_C(\xi) + V_L(\mu(\cdot, t), v(\cdot, t)), \quad (3.8)$$

transformaciones T_0 y T_1 en las fronteras $l = 0$ y $l = 1$ del canal de comunicación con retardos respectivamente. De esta manera se tienen tres sistemas pasivos interconectados entre si, donde el patrón de interconexión (3.7) asegura la pasividad del sistema en lazo cerrado.

3.2. Sistema en lazo cerrado y el efecto de la normalización

3.2.1. Cuasipolinomio en lazo cerrado

La función de transferencia correspondiente al esquema de la Fig. 3.1 es

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{2bde^{-h_1s}(k_p s + k_i)}{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}, \quad (3.9)$$

donde

$$\begin{aligned} p_2 &= d + k_p + e^{-hs}(d - k_p), \\ p_1 &= \alpha(k_p + d) + k_i + e^{-hs}(\beta(k_p - d) - k_i), \\ p_0 &= k_i(\alpha + e^{-hs}\beta). \end{aligned}$$

y las constantes $\alpha = db + a$ y $\beta = db - a$. Los detalles de la obtención de la función de transferencia se encuentran en el Apéndice A.2. La estabilidad del sistema está determinada por su cuasipolinomio característico

$$p(s, k_p, k_i, d) = p_2 s^2 + p_1 s + p_0. \quad (3.10)$$

La σ -estabilidad del cuasipolinomio (3.10) se analiza haciendo el cambio de variable $s \rightarrow s - \sigma$ y estudiando la estabilidad del cuasipolinomio resultante, esto es

$$p_\sigma(s, k_p, k_i, d) = p_{2_\sigma} s^2 + p_{1_\sigma} s + p_{0_\sigma}. \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} p_{2\sigma} &= d + k_p + e^{-h(s-\sigma)} (d - k_p), \\ p_{1\sigma} &= (\alpha - 2\sigma) (d + k_p) + k_i - e^{-h(s-\sigma)} ((\beta + 2\sigma) (d - k_p) + k_i), \\ p_{0\sigma} &= -(\alpha - \sigma) (\sigma (d + k_p) - k_i) + e^{-h(s-\sigma)} (\beta + \sigma) (\sigma (d - k_p) + k_i). \end{aligned}$$

Es digno de resaltar que el cuasipolinomio característico (3.10) es de tipo neutral. Su coeficiente principal, el coeficiente de grado más grande en s , es $p_{2\sigma}$. De hecho, el grado más grande en la variable e^{-hs} está presente en este coeficiente, en [2], [23] se puede encontrar un análisis sobre cuasipolinomios de tipo retardado y neutral. En el dominio del tiempo, ésto significa que la derivada con respecto al tiempo del estado del sistema no sólo depende de los estados retardados, sino también de la derivada del estado retardado.

Proposición 3.1. *Una condición necesaria para la estabilidad de sistemas con retardo de tipo neutral es la estabilidad del operador en diferencia, la transformada de Laplace del término principal; esto es, $d + k_p + e^{-hs} e^{h\sigma} (d - k_p)$. Por lo tanto, el operador en diferencia del sistema de tipo neutral impone una nueva condición de estabilidad, que esta dada como*

$$\left| e^{h\sigma} \frac{d - k_p}{d + k_p} \right| < 1. \quad (3.12)$$

Observación 3.1. La condición de estabilidad del operador en diferencia de la Proposición 3.1 cuando $\sigma = 0$ es $|(d - k_p) / (d + k_p)| < 1$, esta condición siempre se cumple.

3.2.2. Transformación de dispersión normalizada

En esta sección analizamos el efecto de usar una transformación de dispersión normalizada [34], esto es

$$\begin{pmatrix} \mu(l, t) \\ v(l, t) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2d}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{d} & -\frac{1}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^+(l, t) \\ s^-(l, t) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

La transformación (3.13) puede ser fácilmente aplicada en las fronteras del canal de comunicación con retardos (3.1), sólo es necesario tener precaución con respecto a

la causalidad del sistema: Las variables $s_0^+ := s^+(0, t)$, $s_1^- := s^-(1, t)$, $\mu_0 := \mu(0, t)$ y $v_1 := v(1, t)$ son libres, mientras $s_1^+ := s^+(1, t)$, $s_0^- := s^-(0, t)$, $v_0 := v(0, t)$ y $\mu_1 := \mu(1, t)$ dependen de las variables anteriores y sus valores pasados. Considerando estas restricciones, podemos aplicar (3.13) en la frontera $l = 0$, esto es

$$\begin{pmatrix} v_{0n} \\ s_{0n}^+ \end{pmatrix} = T_{0n} \begin{pmatrix} \mu_{0n} \\ s_{0n}^- \end{pmatrix}, \quad T_{0n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & -\sqrt{\frac{2}{d}} \\ \sqrt{\frac{2}{d}} & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

En (3.13) aplicamos $l = 1$, entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} \mu_{1n} \\ s_{1n}^- \end{pmatrix} = T_{1n} \begin{pmatrix} v_{1n} \\ s_{1n}^+ \end{pmatrix}, \quad T_{1n} = \begin{pmatrix} -d & \sqrt{2d} \\ -\sqrt{2d} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

El subíndice n indica que se trata de la transformación y variables normalizadas.

Finalmente, podemos usar el patrón de interconexión (3.7) como se muestra en la Fig. 3.1, así la función de transferencia del sistema en lazo cerrado usando la transformación de dispersión normalizada es

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{2bde^{-h_1s}(k_p s + k_i)}{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}, \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} p_2 &= d + k_p + e^{-hs}(d - k_p), \\ p_1 &= \alpha(k_p + d) + k_i + e^{-hs}(\beta(k_p - d) - k_i), \\ p_0 &= k_i(\alpha + e^{-hs}\beta). \end{aligned}$$

Los detalles del cálculo de la función de transferencia se encuentran en el Apéndice A.3.

Observación 3.2. La función de transferencia (3.16) es la misma que la función de transferencia (3.9). De esta manera, el análisis en el dominio de la frecuencia no se ve afectado por la elección del tipo de transformación de dispersión.

Se emplea la transformación de dispersión normalizada con el fin normalizar las variables de dispersión en el esquema de control. Esto se puede mostrar al obtener la norma

de las transformaciones de dispersión estándar y normalizada y su inversa. Las normas de T y T^{-1} para la transformación estándar son

$$\|T\| = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } d \leq 0, \\ \sqrt{2}d & \text{si } d > 0. \end{cases}$$

$$\|T^{-1}\| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}d} & \text{si } d < 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } d \geq 1. \end{cases}.$$

Las normas de T_n y T_n^{-1} para la transformación normalizada son

$$\|T_n\| = \|T_n^{-1}\| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d}} & \text{si } d < 1, \\ 1 & \text{si } d = 1, \\ \sqrt{d} & \text{si } d > 1. \end{cases},$$

Como se puede observar las normas para la T_n y T_n^{-1} son iguales, lo cual permite que las variables de dispersión sean iguales.

Ahora bien, centraremos nuestra atención en las señales que se envían a través del canal de comunicación, las variables de dispersión s_0^+ y s_1^- , que dependen de las variables de entrada μ_0 , s_0^- y v_1 , s_1^+ respectivamente. Para la transformación estándar las señales s_0^+ y s_1^- siguen de (3.5) y (3.1) respectivamente

$$\begin{aligned} s_0^+ &= W_0 \begin{pmatrix} \mu_0 \\ s_0^- \end{pmatrix}, & W_0 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}, \\ s_1^- &= W_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ s_1^+ \end{pmatrix}, & W_1 &= \begin{pmatrix} -2d & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Y para la transformación de dispersión normalizada las señales $s_{0_n}^+$ y $s_{1_n}^-$ siguen de (3.14) y (3.15) respectivamente

$$\begin{aligned} s_{0_n}^+ &= W_{0_n} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ s_0^- \end{pmatrix}, & W_{0_n} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{d}} & -1 \end{pmatrix}, \\ s_{1_n}^- &= W_{1_n} \begin{pmatrix} v_1 \\ s_1^+ \end{pmatrix}, & W_{1_n} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2d} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Una comparación de las señales (3.17) y (3.18) en magnitud se puede realizar en función de la norma de los vectores correspondientes, los resultados obtenidos son los siguientes: Las normas de W_0 y W_{0_n} están dadas como

$$\|W_0\| = \sqrt{5} \quad \text{y} \quad \|W_{0_n}\| = \sqrt{\frac{2}{d} + 1},$$

Y las normas de W_1 y W_{1_n} son las siguientes

$$\|W_1\| = \sqrt{4d^2 + 1} \quad \text{y} \quad \|W_{1_n}\| = \sqrt{2d + 1},$$

Es fácil observar los siguientes resultados:

- 1 . Si $d > 0.5$, se satisface $\|W_0\| > \|W_{0_n}\|$ y $\|W_1\| > \|W_{1_n}\|$, de (3.17) y (3.18) sigue que las variables de dispersión $s_0^+ > s_{0_n}^+$ y $s_1^+ > s_{1_n}^+$.
- 2 . Si $d = 0.5$, se satisface $\|W_0\| = \|W_{0_n}\|$ y $\|W_1\| = \|W_{1_n}\|$, de (3.17) y (3.18) sigue que las variables de dispersión $s_0^+ = s_{0_n}^+$ y $s_1^+ = s_{1_n}^+$.
- 3 . Si $d < 0.5$, se satisface $\|W_0\| < \|W_{0_n}\|$ y $\|W_1\| < \|W_{1_n}\|$, de (3.17) y (3.18) sigue que las variables de dispersión $s_0^+ < s_{0_n}^+$ y $s_1^+ < s_{1_n}^+$.

Simulando el sistema en lazo cerrado de la Fig. 3.1 en MATLAB Simulink para las ganancias de la ley de control $k_p = 0.1$ y $k_i = 0.1$ se comprueban los resultados anteriores.

En la Fig. 3.2 se observa que la elección de la transformación de dispersión normalizada permite tener variables de dispersión de menor magnitud con respecto a las variables

de dispersión de la transformación estandar para un valor de la impedancia virtual $d > 0.5$, esto es que $s_0^+ > s_{0_n}^+$ y $s_1^+ > s_{1_n}^+$.

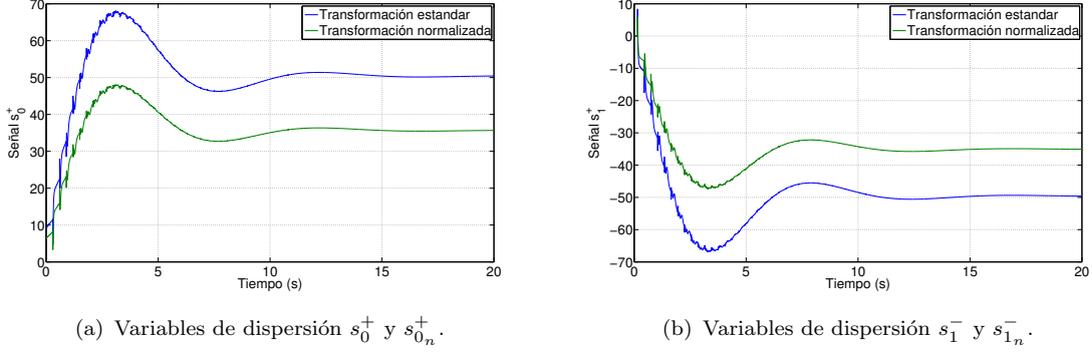


FIGURA 3.2: Variables de dispersión para $d = 1$: (a) s_0^+ , $s_{0_n}^+$ y (b) s_1^- , $s_{1_n}^-$.

En la Fig. 3.3 se observa que las variables de dispersión son iguales, esto es $s_0^+ = s_{0_n}^+$ y $s_1^+ = s_{1_n}^+$, para la elección de la transformación de dispersión normalizada y la transformación estandar para un valor de la impedancia virtual $d = 0.5$.

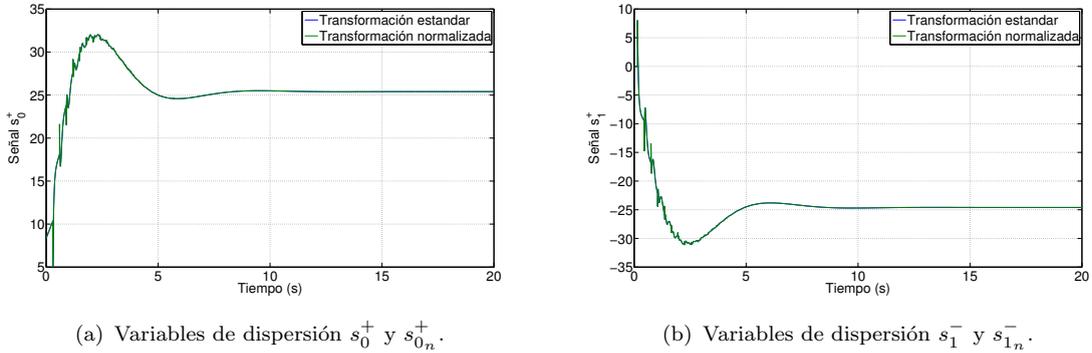


FIGURA 3.3: Variables de dispersión para $d = 0.5$: (a) s_0^+ , $s_{0_n}^+$ y (b) s_1^- , $s_{1_n}^-$.

Y en la Fig. 3.4 se observa que la elección de la transformación de dispersión normalizada permite tener variables de dispersión de mayor magnitud con respecto a las variables de dispersión de la transformación estandar para un valor de la impedancia virtual $d < 0.5$, esto es que $s_0^+ < s_{0_n}^+$ y $s_1^+ < s_{1_n}^+$.

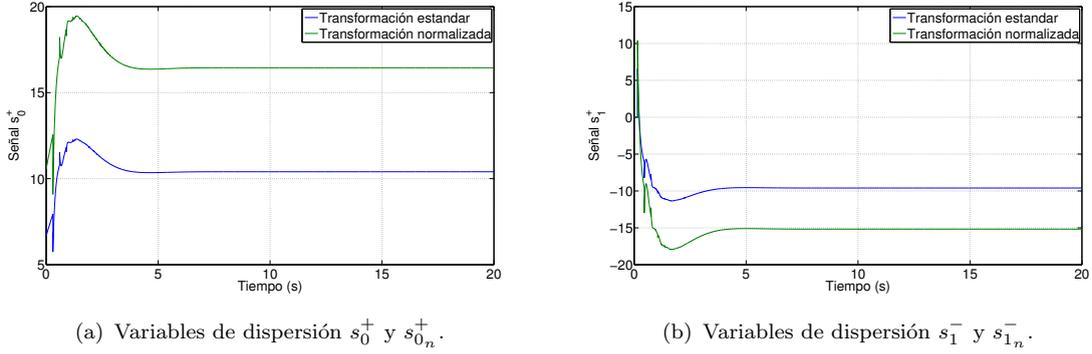


FIGURA 3.4: Variables de dispersión para $d = 0.2$: (a) s_0^+ , s_{0n}^+ y (b) s_1^- , s_{1n}^- .

Los resultados anteriores nos permite tener una idea clara de la magnitud de las variables de dispersión en el canal de comunicación en relación a la elección de la impedancia virtual.

3.3. Impedancia virtual d constante

Como se observa en la Subsección 3.2.2 los resultados de un análisis en el dominio de la frecuencia no se ven afectados por una elección en particular de la transformación de dispersión. Como un primer caso, en esta sección se analiza la situación más sencilla, una impedancia virtual d constante, se realiza un análisis a partir del método de \mathcal{D} -partición de Neimark [31], [32] sobre el cuasipolinomio transformado (3.11) de la función de transferencia (3.9).

3.3.1. Fronteras de σ -estabilidad

De acuerdo al método de \mathcal{D} -partición obtenemos la primer frontera sustituyendo $s = 0$ en (3.11), esto es, $p(0, k_i, k_p, d) = p_{0\sigma} = 0$. Simplificando obtenemos una ecuación para k_i en función de k_p

$$k_i(k_p) = \frac{\sigma(d((\alpha - \sigma) - e^{h\sigma}(\beta + \sigma)) + k_p((\alpha - \sigma) + e^{h\sigma}(\beta + \sigma)))}{\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\beta + \sigma)}. \quad (3.19)$$

La segunda frontera se obtiene sustituyendo $s = j\omega$ y $e^{-h(j\omega-\sigma)} = e^{h\sigma} (\cos(h\omega) - j \sin(h\omega))$ en (3.11), de esta manera obtenemos

$$p_\sigma(j\omega, k_p, k_i, d) = -p_{2\sigma}\omega^2 + j\omega p_{1\sigma} + p_{0\sigma} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} p_{2\sigma} &= d + k_p + e^{h\sigma} (d - k_p) (\cos(h\omega) - j \sin(h\omega)), \\ p_{1\sigma} &= (\alpha - 2\sigma) (d + k_p) + k_i \\ &\quad - e^{h\sigma} (\cos(h\omega) - j \sin(h\omega)) ((\beta + 2\sigma) (d - k_p) + k_i), \\ p_{0\sigma} &= -(\alpha - \sigma) (\sigma (d + k_p) - k_i) \\ &\quad + e^{h\sigma} (\cos(h\omega) - j \sin(h\omega)) (\beta + \sigma) (\sigma (d - k_p) + k_i). \end{aligned}$$

Separando la parte real e imaginaria de este cuasipolinomio, obtenemos el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} \Re(p_\sigma(j\omega, k_p, k_i, d)) &= \\ &(\sigma^2 - \alpha\sigma - \omega^2 + e^{h\sigma} (\omega^2 - \beta\sigma - \sigma^2) \cos(h\omega) + \omega e^{h\sigma} (\beta + 2\sigma) \sin(h\omega)) k_p \\ &+ (\alpha - \sigma - \omega e^{h\sigma} \sin(h\omega) + e^{h\sigma} (\beta + \sigma) \cos(h\omega)) k_i \\ &+ d (\sigma^2 - \alpha\sigma - \omega^2 + e^{h\sigma} (\beta\sigma + \sigma^2 - \omega^2) \cos(h\omega) - \omega e^{h\sigma} \sin(h\omega) (\beta + 2\sigma)) = 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \Im(p_\sigma(j\omega, k_p, k_i, d)) &= \\ &(\omega (\alpha - 2\sigma) + \omega e^{h\sigma} (\beta + 2\sigma) \cos(h\omega) + e^{h\sigma} (\beta\sigma + \sigma^2 - \omega^2) \sin(h\omega)) k_p \\ &+ (\omega - \omega e^{h\sigma} \cos(h\omega) - e^{h\sigma} (\beta + \sigma) \sin(h\omega)) k_i \\ &+ d (\omega (\alpha - 2\sigma) - \omega e^{h\sigma} (\beta + 2\sigma) \cos(h\omega) + e^{h\sigma} (\omega^2 - \beta\sigma - \sigma^2) \sin(h\omega)) = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Reescribiendo en forma matricial las expresiones (3.20) y (3.21) y definiendo $A = e^{h\sigma} \cos(h\omega)$ y $B = e^{h\sigma} \sin(h\omega)$ se obtiene

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sigma^2 - \alpha\sigma - \omega^2 + A(\omega^2 - \beta\sigma - \sigma^2) + B\omega(\beta + 2\sigma) & \alpha - \sigma - B\omega + A(\beta + \sigma) \\ \omega(\alpha - 2\sigma) + A\omega(\beta + 2\sigma) + B(\beta\sigma + \sigma^2 - \omega^2) & \omega - A\omega - B(\beta + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p \\ k_i \end{bmatrix} \\ &= d \begin{bmatrix} -(\sigma^2 - \alpha\sigma - \omega^2) - A(\beta\sigma + \sigma^2 - \omega^2) + B\omega(\beta + 2\sigma) \\ -\omega(\alpha - 2\sigma) + A\omega(\beta + 2\sigma) - B(\omega^2 - \beta\sigma - \sigma^2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema matricial para k_p y k_i , y definiendo $\Gamma = (\beta + \sigma)^2 + \omega^2$ y $\Xi = (\alpha - \sigma)^2 + \omega^2$, obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas

$$k_p(\omega) = \frac{d(e^{2h\sigma}\Gamma\omega - \Xi\omega + 2A(\alpha + \beta)\sigma\omega - 2B\sigma((-\alpha + \sigma)(\beta + \sigma) + \omega^2))}{\omega(e^{2h\sigma}\Gamma + \Xi - 2B(\alpha + \beta)\omega + 2A((\alpha - \sigma)(\beta + \sigma) - \omega^2))}, \quad (3.22)$$

$$k_i(\omega) = \frac{2d(\sigma^2 + \omega^2)(A(\alpha + \beta)\omega - B((-\alpha + \sigma)(\beta + \sigma) + \omega^2))}{\omega(e^{2h\sigma}\Gamma + \Xi - 2B(\alpha + \beta)\omega + 2((\alpha - \sigma)(\beta + \sigma) - \omega^2))}. \quad (3.23)$$

Donde el denominador de (3.22) y (3.23) deben ser diferentes de cero, para cada caso particular de un valor σ en el intervalo $\omega \in [0, \infty)$.

3.3.2. Regiones de σ -estabilidad

La ecuación (3.19) y las ecuaciones paramétricas (3.22), (3.23) se usan para determinar las regiones de σ -estabilidad en el espacio de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$ a partir del método de \mathcal{D} -partición, donde el cuasipolinomio (3.11) es estable, i.e., el cuasipolinomio (3.10) es σ -estable.

Observación 3.3. En esta sección se elige la impedancia virtual $d = 1$, debido a que es un valor muy usado en la literatura.

Las regiones de σ -estabilidad para los parámetros $a = 0.4$, $b = 50$, $h = 0.3$ se muestran en la Fig. 3.5.

Corolario 3.4. *La condición de estabilidad de la Proposición 3.1 impone la siguiente restricción*

$$\frac{e^{h\sigma} - 1}{e^{h\sigma} + 1} < k_p < \frac{e^{h\sigma} + 1}{e^{h\sigma} - 1}.$$

Adicional a las fronteras de σ -estabilidad de la ecuación (3.19) y la ecuaciones paramétricas (3.22) y (3.23).

Esta condición reduce la regiones de σ -estabilidad en el espacio de parámetros para valores de $0 < \sigma < 0.4$ como se observa en la Fig. 3.6 con respecto a la Fig. 3.5, debido a que la condición para k_p del Corolario 3.4 son un par de líneas verticales en el espacio de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$.

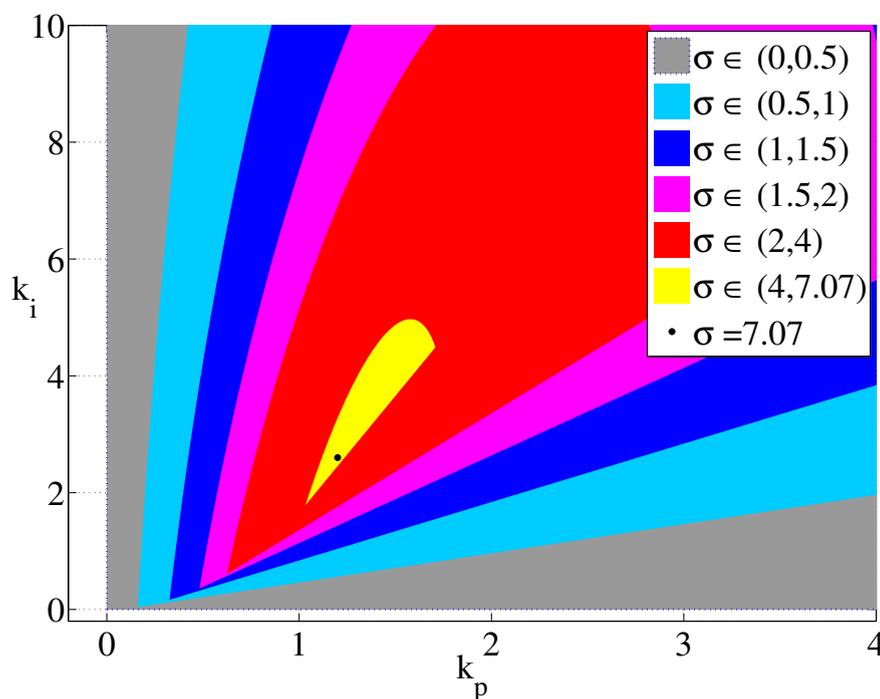


FIGURA 3.5: Regiones de σ -estabilidad; canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión.

Observación 3.5. La transformación de dispersión introducida en el canal de comunicación con retardos permite recuperar estabilidad en todo el primer cuadrante en el espacio de parámetros k_p y k_i ; que se pierde cuando existen retardos en el canal de comunicación sin la transformación de dispersión. En cuanto a la σ -estabilidad para un

valor de σ dado, el tamaño de las regiones de la Fig. 3.5 son más grandes que las de la Fig. 2.3. Así mismo, el decaimiento exponencial máximo alcanzable es $\sigma^* = 7.07$, más grande al obtenido en el esquema de control con canal de comunicación con retardos sin la transformación de dispersión, que es de $\sigma^* = 2.1418$. Claramente el decaimiento exponencial máximo alcanzable es superior al introducir la transformación de dispersión.

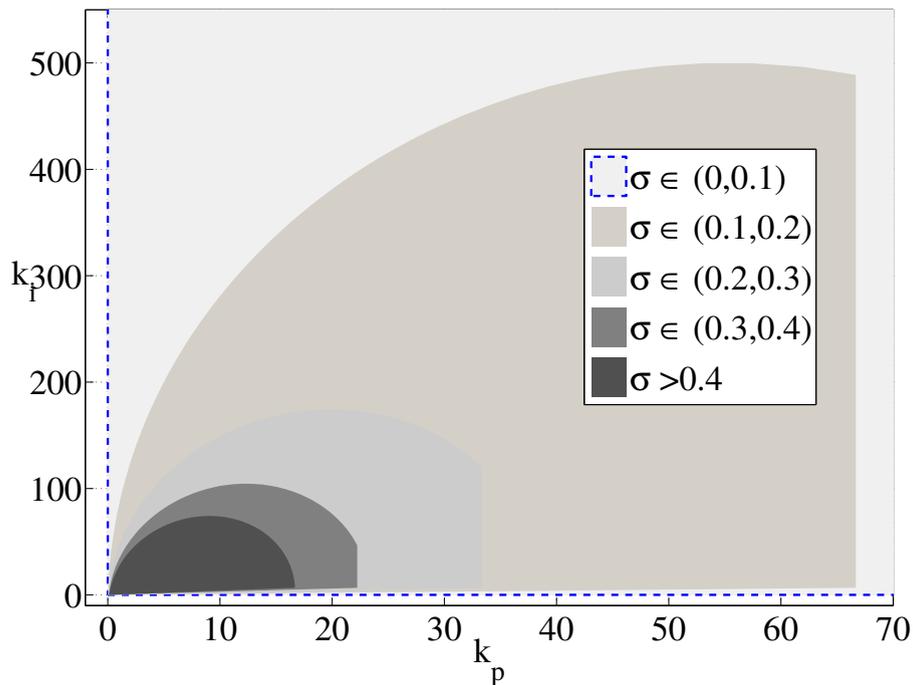


FIGURA 3.6: Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión, $\sigma < 0.4$.

Observación 3.6. Las regiones de σ -estabilidad colapsan en un punto donde existe una raíz triple, en $s = 0$, cuando la curva correspondiente a (3.22) y (3.23) intersecta en un solo punto a la línea descrita por (3.19).

3.3.3. Sintonización del máximo decaimiento exponencial σ alcanzable en lazo cerrado

Nuevamente, caracterizamos el máximo decaimiento exponencial σ_d^{*1} alcanzable y las ganancias de control correspondientes usando la Observación 3.6. En este caso, se obtiene una fórmula implícita para σ_d^* .

Proposición 3.2. *Considere el sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control (2.3) donde $k_p > 0$ y $k_i > 0$, con retardos en el canal de comunicación $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$, cuando se introduce la transformación de dispersión en el lazo de control como se muestra en la Fig. 3.1. El máximo decaimiento alcanzable es la solución positiva más grande de la función implícita para σ*

$$\begin{aligned} & h^2\sigma^4 + h(h\beta - 2h\alpha + 2)\sigma^3 - h\alpha(2h\beta - h\alpha + 6)\sigma^2 + h\alpha(4\alpha - 2\beta + h\alpha\beta)\sigma \\ & + 2\alpha(\alpha + \beta + h\alpha\beta) + e^{h\sigma}(h^2\sigma^4 - h(h\alpha - 2h\beta + 2)\sigma^3) \\ & + e^{h\sigma}(-h\beta(2h\alpha - h\beta + 6)\sigma^2 + h\beta(2\alpha - 4\beta - h\alpha\beta)\sigma + 2\beta(\alpha + \beta + h\alpha\beta)) = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

tal que las ganancias $k_p(\sigma)$ y $k_i(\sigma)$ son positivas

$$k_p(\sigma) = \frac{d((\sigma + \beta)^2 e^{2h\sigma} + 2\sigma(\alpha + \beta + h(\alpha - \sigma)(\sigma + \beta))e^{h\sigma} - (\alpha - \sigma)^2)}{(\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\sigma + \beta))^2}, \quad (3.25)$$

$$k_i(\sigma) = \frac{2d\sigma^2 e^{h\sigma}(\alpha + \beta + h(\alpha - \sigma)(\sigma + \beta))}{(\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\sigma + \beta))^2}. \quad (3.26)$$

Demostración. Para caracterizar el máximo decaimiento exponencial σ_d^* , y las ganancias k_p y k_i correspondientes a este valor σ_d^* , se sabe que este máximo se alcanza en el punto de colapso de las fronteras para $s = 0$ y $s = j\omega$ del cuasipolinomio (3.11), donde existe una raíz triple. Para la asignación de una raíz triple las condiciones $p_\sigma(\cdot)|_{s=0} = 0$, $\frac{\partial}{\partial s}p_\sigma(\cdot)|_{s=0} = 0$ y $\frac{\partial^2}{\partial s^2}p_\sigma(\cdot)|_{s=0} = 0$ para el cuasipolinomio (3.11) deben cumplirse. Esto

¹ σ_d^{*1} denota el máximo decaimiento exponencial alcanzable para una impedancia virtual d constante.

implica

$$\begin{aligned} p(s, k_p, k_i, d) |_{s=0} &= -(\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\beta + \sigma))\sigma k_p + (\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\beta + \sigma))k_i \\ &\quad - (\alpha - \sigma - e^{h\sigma}(\beta + \sigma))\sigma d = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} p(s, k_p, k_i, d) |_{s=0} &= (\alpha - 2\sigma + e^{h\sigma}((\beta + \sigma)(h\sigma + 1) + \sigma))k_p \\ &\quad + (1 - e^{h\sigma}(h\beta + h\sigma + 1))k_i \\ &\quad + ((\alpha - 2\sigma) - e^{h\sigma}((\beta + \sigma)(h\sigma + 1) + \sigma))d = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p(s, k_p, k_i, d) |_{s=0} &= (2 - e^{h\sigma}((h\sigma + h\beta + 1)(h\sigma + 2) + h\sigma))k_p \\ &\quad + he^{h\sigma}(h\sigma + h\beta + 2)k_i \\ &\quad + (2 + e^{h\sigma}((h\sigma + h\beta + 1)(h\sigma + 2) + h\sigma))d = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

De (3.27) obtenemos k_i

$$k_i(k_p, \sigma) = \frac{(\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\beta + \sigma))\sigma k_p + (\alpha - \sigma - e^{h\sigma}(\beta + \sigma))\sigma d}{\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\beta + \sigma)}. \quad (3.30)$$

Sustituyendo (3.30) en (3.28) obtenemos (3.25)

$$k_p(\sigma) = \frac{d(2\sigma(\alpha + \beta + h(\sigma + \beta))(\alpha - \sigma)e^{h\sigma} + (\sigma + \beta)^2 e^{2h\sigma} - (\alpha - \sigma)^2)}{(\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\sigma + \beta))^2}.$$

De (3.25) y (3.30) llegamos a la expresión (3.26)

$$k_i(\sigma) = \frac{2d\sigma^2 e^{h\sigma}(\alpha + \beta + h(\sigma + \beta))(\alpha - \sigma)}{(\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\sigma + \beta))^2}.$$

Usando (3.25) y (3.26) en (3.29) y simplificando obtenemos (3.24) □

Observación 3.7. En este caso no fue posible determinar fórmulas explícitas para el máximo decaimiento exponencial y las ganancias de control k_p y k_i en función de

los parámetros de la planta y el retardo h como en la Subsección 2.3.2, cuando se tiene un canal de comunicación con retardos sin la transformación de dispersión. Sin embargo, fue posible determinar para el máximo decaimiento exponencial una función trascendental de cuarto grado y ecuaciones que dependen de σ para las ganancias del controlador PI , donde la solución debe de satisfacer la condición de positividad de las tres variables σ , k_p y k_i .

Ejemplo 3.1. *A partir de la proposición 3.2 se determina el máximo decaimiento exponencial σ_d^* para $d = 1$, usando los parámetros $a = 0.4$ y $b = 50$ para la planta con $h = 0.3$. Las expresiones para determinar σ , k_p y k_i obtenidas en la proposición 3.2 se usan, donde $\alpha = bd + a = 50.4$ y $\beta = bd - a = 49.6$. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 3.1.*

	σ (3.24)	k_p (3.25)	k_i (3.26)
1	-56.4758	-1	-2.9491×10^{-6}
2	-7.0408	-1.1978	2.5514
3	7.0707	1.2026	2.6204
4	57.269	1	-2.386×10^{-6}

TABLA 3.1: Máximo decaimiento exponencial en lazo cerrado, canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión.

Claramente, las soluciones de (3.24) que proveen un decaimiento exponencial o parámetros negativos deben ser descartadas. El punto de colapso está dado por $\sigma_d^* = 7.0707$, $k_{p_d}^* = 1.2026$ y $k_{i_d}^* = 2.6204$.

3.3.4. Ganancias mínimas para un decaimiento exponencial σ prescrito

En este caso, también se pueden determinar las ganancias mínimas del controlador PI para un decaimiento exponencial deseado en lazo cerrado, usando el hecho de que hay una raíz doble del cuasipolinomio en este punto.

Proposición 3.3. *Considere el sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control (2.3) con retardos en el canal de comunicación, cuando se introduce la transformación*

de dispersión en el lazo de control como se muestra en la Fig. 3.1. Para un decaimiento $\sigma < \sigma_d^*$ deseado, las ganancias mínimas k_p y k_i están dadas por (3.25) y (3.26) respectivamente.

Demostración. El resultado sigue de (3.27) y (3.28). \square

Ejemplo 3.2. A partir de la Proposición 3.3 determinamos las ganancias mínimas k_p y k_i para un valor de la impedancia virtual $d = 1$. Calculando las ganancias mínimas para $\sigma < \sigma_d^* = 7.0707$, en este caso para los valores de σ de la Fig. 3.5.

σ	0.5	1	1.5	2	4	7.0707
k_p (3.25)	0.1613	0.3262	0.4822	0.6255	1.0328	1.2026
k_i (3.26)	0.0422	0.1656	0.3601	0.6103	1.7859	2.6204

TABLA 3.2: Ganancias mínimas para la ley de control PI , canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión.

Para satisfacer la propiedad de pasividad k_p y k_i deben de ser positivas.

Como se observa en la Fig. 3.5 y en la Tabla 3.2, la introducción de la transformación de dispersión permite mejorar el desempeño en el sistema en lazo cerrado, desde el punto de vista del máximo decaimiento exponencial alcanzable. Además, permite ampliar la zona de σ -estabilidad, para un σ dado, en el espacio de parámetros.

La impedancia virtual d puede ser elegida arbitrariamente, en este caso se analiza el caso constante, en particular $d = 1$. En las secciones posteriores revisaremos varios casos donde el parámetro d puede ser elegido de otra manera y cómo la elección afecta el comportamiento del sistema, en particular la σ -estabilidad.

3.4. Impedancia virtual d variable

En la Sección 3.3 para efecto de resultados gráficos y numéricos se eligió una impedancia virtual constante $d = 1$, por ser un parámetro muy usual en la literatura.

Ahora, analizamos como se ve afectada la σ -estabilidad del sistema en lazo cerrado cuando d es variable, esto es, $d \in [0, d_{max}]$, donde d_{max} es elegido de manera arbitraria

el cual puede ser tan grande como se quiera. Así, a partir de la ecuación (3.19) y las ecuaciones paramétricas (3.22), (3.23) podemos determinar las zonas de σ -estabilidad en el espacio de parámetros $(k_p, k_i, d) \in \mathbb{R}^3$ para un σ dado.

A continuación se presenta un ejemplo para $\sigma = 4$, donde se observa el comportamiento de la zona de σ -estabilidad en el intervalo $d \in [0.1225, 1]$.

Ejemplo 3.3. *Para la función de transferencia (3.11) fijamos $\sigma = 4$, máximo decaimiento exponencial alcanzable para $d = 0.1225$. Usando los resultados de la proposición 3.2 obtenemos σ_d^* , $k_{p_d}^*$ y $k_{i_d}^*$ para $d = 0.1225$, como se muestra en la Tabla 3.3. Donde los parámetros del sistema son $a = 0.4$, $b = 50$ y la suma de retardos $h := h_1 + h_2 = 0.3$.*

d	σ_d^* (3.24)	$k_{p_d}^*$ (3.25)	$k_{i_d}^*$ (3.26)
0.1225	4	0.1573	0.2106

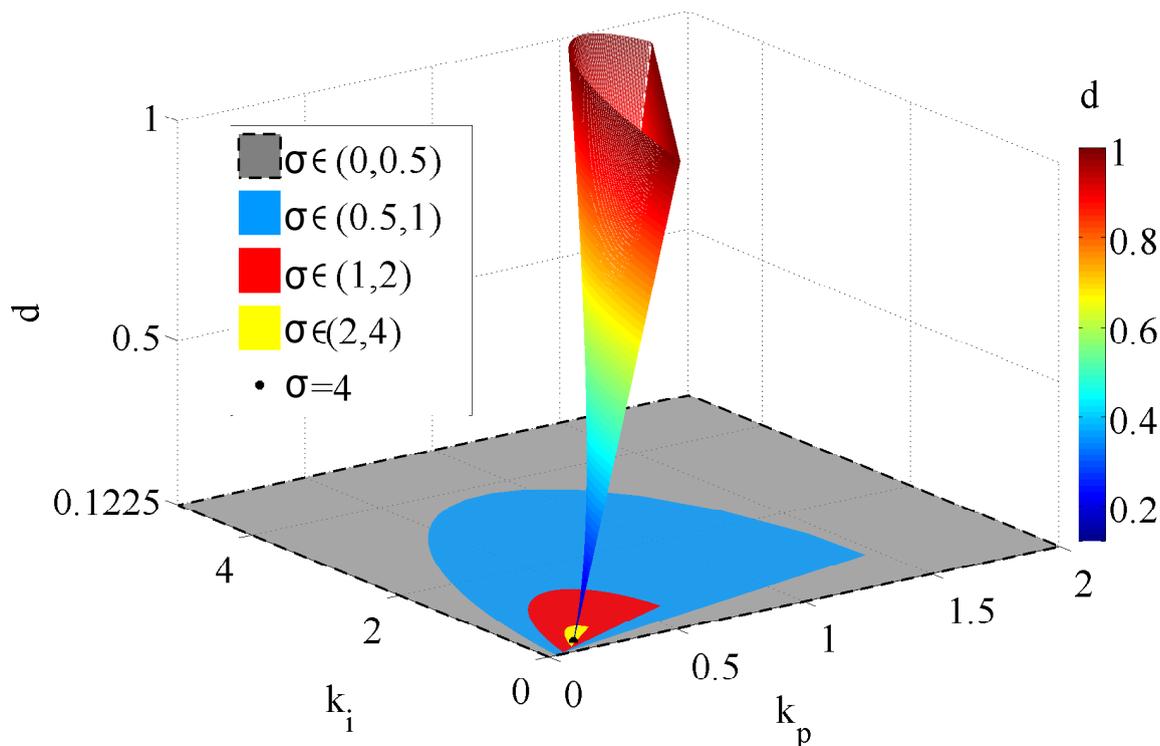
TABLA 3.3: Máximo decaimiento exponencial para $d = 0.1225$.

En la Fig. 3.7 se muestran las zonas de σ -estabilidad en el plano $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$, determinadas a partir de la ecuación (3.19) y las ecuaciones paramétricas (3.22) y (3.23) para $d = 0.1225$, donde el valor de $\sigma_d^* = 4$ es el máximo decaimiento exponencial.

En el plano $(k_p, k_i, d) \in \mathbb{R}^3$ de la Fig. 3.7 se muestra la zona de σ -estabilidad para $\sigma = 4$. Como se observa en la figura el punto inicial es $d = 0.1225$, conforme esté valor aumenta el punto de colapso σ_d^* se transforma en una zona de σ -estabilidad. La zona de σ -estabilidad aumenta conforme el valor de la impedancia virtual crece, lo cual permite tener intervalos más grandes para las ganancias de control k_p y k_i para un mismo decaimiento exponencial, pero un diferente valor de impedancia virtual.

Ahora, en la Tabla 3.4 se muestran las ganancias más pequeñas k_p y k_i de la ley de control PI para $\sigma = 4$, los resultados son generados a partir de la Proposición 3.3 para diferentes valores de la impedancia virtual d .

Se observa en la Tabla 3.4 que la ganancias de control k_p y k_i aumentan conforme el valor de la impedancia virtual aumenta.


 FIGURA 3.7: Zona de estabilidad en tercera dimensión para $\sigma = 4$ y $d \in [0.1225, 1]$.

d	k_p (3.25)	k_i (3.26)
2	1.99	3.5021
4	3.9295	6.922
6	5.8580	10.3393
8	7.7863	13.7556
10	9.7144	17.1716
100	96.4747	170.8741

 TABLA 3.4: Ganancias mínimas para la ley de control PI para diferentes valores de la impedancia virtual d .

Un análisis numérico se realiza partir de la pProposición 3.2. En la Tabla 3.5 se muestran los resultados del máximo decaimiento exponencial σ_d^* alcanzado y las respectivas ganancias $k_{p_d}^*$ y $k_{i_d}^*$ de la ley de control PI para diferentes valores de la impedancia virtual d .

Se observa en la Tabla 3.5 que el máximo decaimiento exponencial σ_d^* está acotado,

d	σ_d^* (3.24)	$k_{p_d}^*$ (3.25)	$k_{i_d}^*$ (3.26)
2	7.5055	2.4019	5.5277
4	7.7437	4.8012	11.373
6	7.8266	7.2005	17.2255
8	7.8687	9.5998	23.08
10	7.8942	11.9992	28.9352
100	7.9873	119.97	292.46

TABLA 3.5: Máximo decaimiento exponencial para diferentes valores de d .

entonces, el máximo decaimiento exponencial alcanzable al que se puede aspirar para un valor muy grande de la impedancia virtual es $\sigma_{sup} \approx 7.99$.

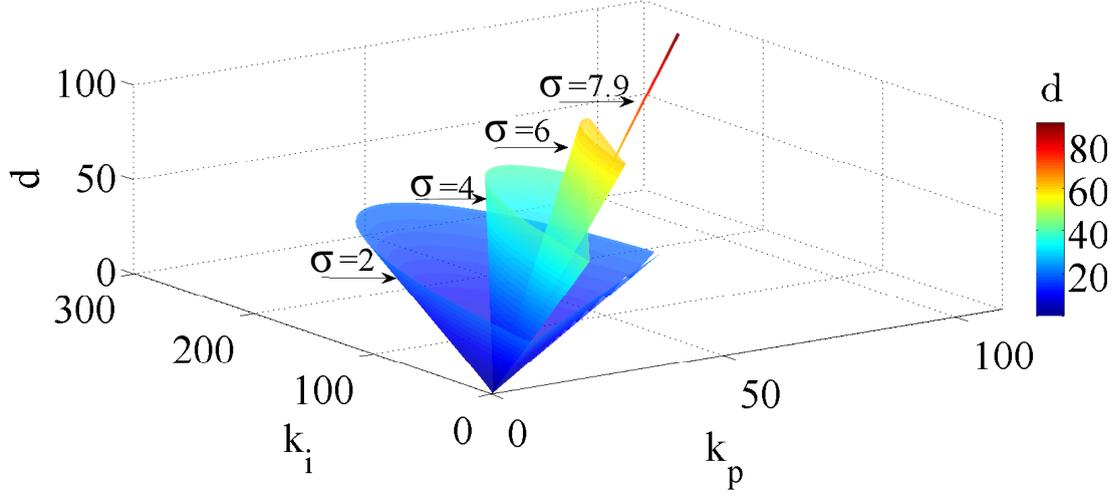
De la Tabla 3.5, observamos que existe una relación lineal entre la impedancia virtual d y la ganancia de control k_p , la cual es $d = 0.833 k_p$.

Observación 3.8. La relación lineal entre la impedancia virtual y la ganancia de control presente en la Tabla 3.5, puede ser interpretada como una regla de sintonización para la impedancia virtual para obtener el máximo decaimiento exponencial, el cual se aproxima a $\sigma_{sup} \approx 7.99$.

Ahora bien, podemos ver que la ganancias de control k_p y k_i aumentan conforme el valor de la impedancia virtual es más grande. Para comprobar estos resultados observamos de manera gráfica en la Fig. 3.8, para diferentes valores de σ .

Podemos observar que las zonas de σ -estabilidad se contraen y al final colapsan en algún punto, donde el máximo decaimiento exponencial para un d muy grande es $\sigma_{sup} \approx 7.99$. A partir de este punto no es posible obtener más zonas de σ -estabilidad, ni alcanzar un mayor decaimiento exponencial σ .

Como conclusión, a partir de los resultados gráficos y numéricos el elegir un valor de la impedancia virtual grande nos permite tener zonas de σ -estabilidad más grandes en el espacio de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$, no así el máximo decaimiento exponencial, el cual se encuentra acotado y aumenta muy poco al aumentar el valor de d . Así, el máximo decaimiento exponencial se alcanza cuando $d \rightarrow \infty$, lo que implica que $k_p, k_i \rightarrow \infty$, esto de la relación lineal que existe entre la impedancia virtual y la ganancia de control k_p .


 FIGURA 3.8: Zona de estabilidad en tercera dimensión para diferentes valores de σ .

3.5. Impedancia virtual $d = \zeta k_p$

Como se observó en la sección anterior, existe una relación lineal entre la impedancia virtual d y la ganancia de control k_p . Además, para un valor muy grande de la impedancia virtual se alcanza el máximo decaimiento exponencial. Así, una elección general de la impedancia virtual es $d = \zeta k_p$, donde $\zeta \in \mathbb{R}^+$. Con la elección $d = \zeta k_p$ el cuasipolinomio característico de tipo neutral (3.10) se convierte en

$$p(s, k_p, k_i) = p_2 s^2 + p_1 s + p_0, \quad (3.31)$$

donde

$$\begin{aligned} p_2 &= k_p (\zeta_1 + \zeta_2 e^{-hs}), \\ p_1 &= (k_i + \zeta_1 k_p (a + b\zeta k_p) + e^{-hs} (\zeta_2 k_p (a - b\zeta k_p) - k_i)), \\ p_0 &= k_i (a + b\zeta k_p + e^{-hs} (-a + b\zeta k_p)), \end{aligned}$$

y las constantes $\zeta_1 = \zeta + 1$ y $\zeta_2 = \zeta - 1$. Si elegimos $\zeta = 1$, i.e., $d = k_p$ el cuasipolinomio se reduce a un cuasipolinomio de tipo retardado; éste será analizado como un caso particular en la Sección 3.6. La σ -estabilidad del cuasipolinomio (3.31) se determina a partir de la estabilidad del cuasipolinomio transformado (3.32), esto es, haciendo el

cambio de variable $s \rightarrow s - \sigma$ en el cuasipolinomio (3.31), lo que resulta en el siguiente cuasipolinomio

$$p_\sigma(s, k_p, k_i) = p_{2_\sigma} s^2 + p_{1_\sigma} s + p_{0_\sigma}. \quad (3.32)$$

donde

$$\begin{aligned} p_{2_\sigma} &= k_p (\zeta_1 + \zeta_2 e^{-h(s-\sigma)}), \\ p_{1_\sigma} &= (\zeta_1 k_p (a + b\zeta k_p - 2\sigma) + k_i + e^{-h(s-\sigma)} (\zeta_2 k_p (a - b\zeta k_p - 2\sigma) - k_i)), \\ p_{0_\sigma} &= -(a + b\zeta k_p - \sigma) (\zeta_1 k_p \sigma - k_i) - e^{-h(s-\sigma)} (a - b\zeta k_p - \sigma) (\zeta_2 k_p \sigma + k_i). \end{aligned}$$

3.5.1. Fronteras de σ -estabilidad

A partir del método de \mathcal{D} -partición podemos determinar las fronteras de las zonas de σ -estabilidad, la primera frontera se obtiene sustituyendo $s = 0$ en (3.32), que se reduce a $p_\sigma(0, k_p, k_i) = p_{0_\sigma} = 0$, entonces tenemos

$$k_i(k_p) = k_p \sigma \frac{\zeta_1 (a + b\zeta k_p - \sigma) + e^{h\sigma} \zeta_2 (a - b\zeta k_p - \sigma)}{a + b\zeta k_p - \sigma - e^{h\sigma} (a - b\zeta k_p - \sigma)}. \quad (3.33)$$

La segunda frontera se obtiene sustituyendo $s = j\omega$ y $e^{-h(j\omega-\sigma)} = e^{h\sigma} (\cos(h\omega) - j \sin(h\omega))$ en (3.32), el cuasipolinomio se reduce a

$$p_\sigma(j\omega, k_p, k_i) = -\omega^2 p_{2_\sigma} + j\omega p_{1_\sigma} - p_{0_\sigma}.$$

donde

$$\begin{aligned} p_{2_\sigma} &= k_p (\zeta_1 + \zeta_2 e^{h\sigma} (\cos(h\omega) - j \sin(h\omega))), \\ p_{1_\sigma} &= \zeta_1 k_p (a + b\zeta k_p - 2\sigma) + k_i \\ &\quad + e^{h\sigma} (\cos(h\omega) - j \sin(h\omega)) (\zeta_2 k_p (a - b\zeta k_p - 2\sigma) - k_i), \\ p_{0_\sigma} &= (a + b\zeta k_p - \sigma) (\zeta_1 k_p \sigma - k_i) \\ &\quad + e^{h\sigma} (\cos(h\omega) - j \sin(h\omega)) (a - b\zeta k_p - \sigma) (\zeta_2 k_p \sigma + k_i). \end{aligned}$$

Separando la parte real e imaginaria, tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \Re(p_\sigma(j\omega, k_p, k_i)) &= -b\zeta k_p^2 (\zeta_1 \sigma - \zeta_2 \sigma e^{h\sigma} \cos(h\omega) + \zeta_2 \omega e^{h\sigma} \sin(h\omega)) \\ &+ k_p (\zeta_2 e^{h\sigma} (a - 2\sigma) \omega \sin(h\omega) - (a\sigma - \sigma^2 + \omega^2) (\zeta_1 + \zeta_2 e^{h\sigma} \cos(h\omega))) \\ &+ k_i (a + b\zeta k_p - \sigma - e^{h\sigma} (a - b\zeta k_p - \sigma) \cos(h\omega) - e^{h\sigma} \omega \sin(h\omega)) = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \Im(p_\sigma(j\omega, k_p, k_i)) &= b\zeta k_p^2 (\zeta_1 \omega - \zeta_2 e^{h\sigma} (\omega \cos(h\omega) + \sigma \sin(h\omega))) \\ &+ k_p ((a - 2\sigma) \omega (\zeta_1 + \zeta_2 e^{h\sigma} \cos(h\omega)) + \zeta_3 (a\sigma - \sigma^2 + \omega^2) e^{h\sigma} \sin(h\omega)) \\ &+ k_i (\omega - e^{h\sigma} \omega \cos(h\omega) + e^{h\sigma} (a - b\zeta k_p - \sigma) \sin(h\omega)) = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para obtener las soluciones k_p y k_i de (3.34) y (3.35), primero obtenemos k_i de (3.34), esto es

$$k_i(\omega, k_p) = k_p \frac{\delta_1 (a\sigma - \sigma^2 + \omega^2) + \delta_2 b\zeta k_p \sigma - \zeta_2 \omega (a - b\zeta k_p - 2\sigma) e^{h\sigma} \sin(h\omega)}{a + b\zeta k_p - \sigma - (a - b\zeta k_p - \sigma) e^{h\sigma} \cos(h\omega) - \omega e^{h\sigma} \sin(h\omega)}, \quad (3.36)$$

donde $\delta_1 = (\zeta_1 + \zeta_2 e^{h\sigma} \cos(h\omega))$ y $\delta_2 = (\zeta_1 - \zeta_2 e^{h\sigma} \cos(h\omega))$.

Sustituyendo (3.36) en (3.35) y simplificando, obtenemos la ecuación de segundo grado

$$b^2 \zeta^2 (\theta_1 \omega + \gamma) k_p^2 + 2b\zeta \omega (\theta_2 (a - \sigma) - \eta) k_p + ((a - \sigma)^2 + \omega^2) (\theta_1 \omega - \gamma) = 0,$$

donde $\gamma = 2e^{h\sigma} (\omega \cos(h\omega) - \zeta \sigma \sin(h\omega))$ y $\eta = 2e^{h\sigma} (\zeta \sigma \cos(h\omega) + \omega \sin(h\omega))$, $\theta_1 = \zeta_1 - \zeta_2 e^{2h\sigma}$ y $\theta_2 = \zeta_1 + \zeta_2 e^{2h\sigma}$. La solución que determina las regiones de σ -estabilidad en el espacio de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$ es

$$k_p(\omega) = \frac{(\eta - (a - \sigma)\theta_2)\omega + \sqrt{(\eta - (a - \sigma)\theta_2)^2 \omega^2 + ((a - \sigma)^2 + \omega^2) (\gamma^2 - \theta_1^2 \omega^2)}}{b\zeta (\gamma + \theta_1 \omega)}. \quad (3.37)$$

Ahora, la condición de estabilidad de la proposición 3.1 se resume en el siguiente corolario para la elección particular $d = \zeta k_p$.

Corolario 3.9. *La elección $d = \zeta k_p$ en la condición de estabilidad de la Proposición 3.1, se reduce a una cota para el decaimiento exponencial, esto es*

$$\hat{\sigma} < \frac{1}{h} \ln \left(\left| \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right| \right), \quad \text{con } \zeta \neq 1. \quad (3.38)$$

Demostración. La prueba sigue de sustituir $d = \zeta k_p$ en la proposición 3.1. \square

Observación 3.10. Esta nueva condición impone una cota sobre el decaimiento exponencial. Es digno de resaltar que para $\zeta = 1$ esta condición de estabilidad no es válida, debido a que el cuasipolinomio se transforma de un cuasipolinomio de tipo neutral a uno de tipo retardado.

A partir del método de \mathcal{D} -partición podemos obtener las regiones en el espacio de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$ donde el cuasipolinomio (3.32) es estable, i.e., el cuasipolinomio (3.31) es σ -estable, usando la ecuación (3.33) y el par de ecuaciones paramétricas (3.36) y (3.37). El caso particular $\zeta = 1$ es analizado en la Sección 3.6.

3.5.2. Sintonización del máximo decaimiento exponencial σ alcanzable en lazo cerrado

Al igual que en el caso con retardos en el canal de comunicación y el caso general donde se introduce la transformación de dispersión, es posible determinar el máximo decaimiento exponencial alcanzable σ_ζ^* .

A continuación se da un lema que se necesita antes de dar la proposición correspondiente al máximo decaimiento alcanzable.

Lema 3.1. *Sea $\zeta_{min} = \min \zeta$ sujeto a*

$$\zeta + 1 - (\zeta - 1) e^{2h\sigma} - 2e^{h\sigma} (\zeta h\sigma - 1) = 0. \quad (3.39)$$

Entonces se tiene que $\zeta_{min} = 0.833557$.

² σ_ζ^* denota el máximo decaimiento exponencial alcanzable para un ζ dado.

Demostración. La expresión (3.39) podemos escribirla como una ecuación de ζ en función del producto $h\sigma$, como sigue

$$\zeta(\sigma) = -\frac{1 + e^{2h\sigma} + 2e^{h\sigma}}{1 - e^{2h\sigma} - 2h\sigma e^{h\sigma}}, \quad (3.40)$$

La gráfica de (3.40) para diferentes valores de h se muestra en la Fig. 3.9.

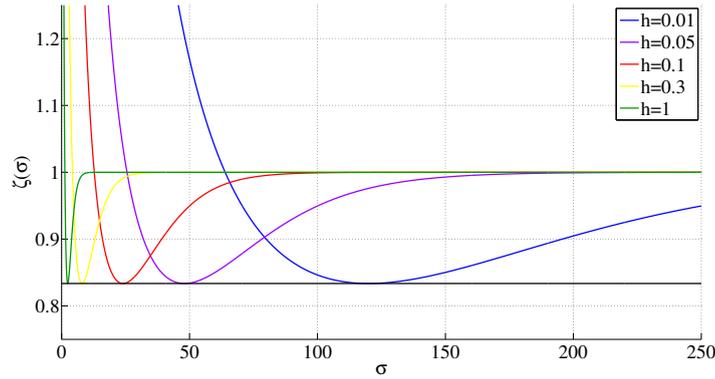


FIGURA 3.9: Gráfica de $\zeta(\sigma)$ para diferentes valores de h .

En la Fig. 3.9 se observan dos cosas importantes. La primera, para cualquier retardo h el mínimo valor de $\zeta(h\sigma)$ es 0.833557, en este punto también se localiza el máximo decaimiento exponencial σ_{sup} . La segunda, el máximo decaimiento exponencial alcanzable es inversamente proporcional al retardo h . A partir de la observación anterior determinaremos el mínimo de la expresión (3.40), para lo cual derivamos la ecuación (3.40) con respecto a σ , como sigue

$$\frac{d}{d\sigma}\zeta(\sigma) = -\frac{2he^{h\sigma}(1 + e^{h\sigma})(2 + h\sigma + e^{h\sigma}(2 - h\sigma))}{(e^{2h\sigma} + 2e^{h\sigma}h\sigma - 1)^2} = 0,$$

De aquí, para satisfacer la ecuación anterior sigue

$$h\sigma + 2 - e^{h\sigma}(h\sigma - 2) = 0, \quad (3.41)$$

donde la solución positiva de (3.41) es σ_{sup} como función de h . De (3.41) despejamos $e^{h\sigma}$ y tomamos la solución positiva, esto es

$$e^{h\sigma_{sup}} = \frac{h\sigma_{sup} + 2}{h\sigma_{sup} - 2}, \quad (3.42)$$

Ahora sustituimos (3.42) en (3.40), la cual se reduce a

$$\zeta = \frac{2}{h\sigma_{sup}}, \quad (3.43)$$

Despejando $h\sigma$ de (3.43) y sustituyendo en (3.42), obtenemos una función para determinar el mínimo valor de ζ , esto es

$$\zeta_{min} + 1 + (\zeta_{min} - 1)e^{2/\zeta_{min}} = 0, \quad (3.44)$$

de donde se verifica al resolver la ecuación (3.44) que $\zeta_{min} = 0.833557$, y que este resultado no depende del retardo h . \square

A continuación se propone una regla de sintonización para poder determinar el máximo σ alcanzable y las ganancias de control correspondientes.

Proposición 3.4. *Considere el sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control PI (2.3) donde $k_p > 0$ y $k_i > 0$ con retardos en el canal de comunicación, cuando se introduce la transformación de dispersión en el lazo de control como se muestra en la Fig. 3.1 y se elige la impedancia virtual de la línea de transmisión $d = \zeta k_p$, donde $\zeta \in \mathbb{R}^+$.*

Sea

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\zeta, h) = \min\{\sigma | \sigma > 0, \text{ satisface (3.39)}\},$$

y

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\zeta, h) = \frac{1}{h} \ln \left(\left| \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right| \right), \text{ con } \zeta \neq 1.$$

Entonces

$$\sigma_{\zeta}^* = \begin{cases} \bar{\sigma} & \text{si } \zeta \geq \zeta_{min}, \text{ con } \zeta \neq 1. \\ \hat{\sigma} & \text{si } \zeta < \zeta_{min}. \end{cases} \quad (3.45)$$

Demostración. El máximo decaimiento exponencial σ_ζ^* ocurre cuando las ganancias k_p y k_i son infinitas. En la intersección de la ecuación (3.33) y las ecuaciones paramétricas (3.37) y (3.36) hay una raíz doble en $s = 0$; esto nos permite determinar las ganancias mínimas del controlador *PI* dado un valor de σ . Para la asignación de la raíz doble las condiciones $p(\cdot)|_{s=0} = 0$ y $\frac{\partial}{\partial s}p(\cdot)|_{s=0} = 0$ deben cumplirse para el cuasipolinomio (3.32). Esto implica

$$\begin{aligned} p_\sigma(s, k_p, k_i, h)|_{s=0} &= -b\zeta k_p^2 (\zeta_1 \sigma - \zeta_2 e^{h\sigma} \sigma) - k_p \sigma (\zeta_1 + \zeta_2 e^{h\sigma}) (a - \sigma) \\ &\quad + k_i (a + b\zeta k_p - \sigma - e^{h\sigma} (a - b\zeta k_p - \sigma)) = 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} p_\sigma(s, k_p, k_i, h)|_{s=0} &= b\zeta k_p^2 (\zeta_1 - \zeta_2 e^{h\sigma} (1 + h\sigma)) \\ &\quad + k_p (\zeta_1 (a - 2\sigma) - \zeta_2 (h\sigma^2 + (2 - ah)\sigma - a) e^{h\sigma}) \\ &\quad + k_i (1 - e^{h\sigma} (1 - h(a - b\zeta k_p - \sigma))) = 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

De (3.46) obtenemos

$$k_i(k_p) = k_p \sigma \frac{b\zeta (\zeta_1 - \zeta_2 e^{h\sigma}) k_p + (\zeta_1 + \zeta_2 e^{h\sigma}) (a - \sigma)}{a + b\zeta k_p - \sigma - e^{h\sigma} (a - b\zeta k_p - \sigma)}. \quad (3.48)$$

Sustituyendo (3.48) en (3.47) llegamos a una ecuación de tercer grado. Debido a que buscamos soluciones para la ley de control $k_p > 0$ y $k_i > 0$, la solución $k_p = 0$ se descarta, así tenemos la ecuación de segundo grado

$$\begin{aligned} b^2 \zeta^2 (\theta_1 - 2e^{h\sigma} (h\zeta \sigma - 1)) k_p^2 &+ 2b\zeta (\theta_2 (a - \sigma) - 2\zeta \sigma e^{h\sigma}) k_p \\ &+ (a - \sigma)^2 (\theta_1 + 2e^{h\sigma} (h\zeta \sigma - 1)) = 0, \end{aligned}$$

con $\theta_1 = \zeta_1 - \zeta_2 e^{2h\sigma}$ y $\theta_2 = \zeta_1 + \zeta_2 e^{2h\sigma}$, donde la solución tal que k_p y k_i son positivos es

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{-\theta_2 (a - \sigma (1 + e^{h\sigma}))}{b\zeta (\theta_1 - 2e^{h\sigma} (h\zeta \sigma - 1))} \\ &\quad + \frac{\sqrt{(\theta_2 (a - \sigma) - 2\zeta \sigma e^{h\sigma})^2 - (a - \sigma)^2 (\theta_1^2 - 4e^{2h\sigma} (h\zeta \sigma - 1))}}{b\zeta (\theta_1 - 2e^{h\sigma} (h\zeta \sigma - 1))}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Como sabemos el máximo decaimiento exponencial se alcanza cuando k_p y k_i están en el infinito³. Ésto es, que el denominador de (3.49) es igual a cero, la ecuación (3.39) sigue de esta consideración.

Ahora bien, la condición de estabilidad del operador en diferencia del cuasipolinomio de tipo neutral, dada por el corolario 3.9 impone una restricción adicional sobre el máximo decaimiento exponencial, de tal manera que la ecuación (3.38) es válida para $\zeta < \zeta_{min}$, debido a que la ecuación (3.39) no tiene solución para estos valores de ζ . Por otro lado, para $\zeta \geq \zeta_{min}$, σ_ζ^* siempre es menor a $\hat{\sigma}$ como se observa en el Ejemplo 3.4, donde $\zeta_{min} = 0.833557$ como se muestra en el lema 3.1. \square

Ejemplo 3.4. *En el siguiente ejemplo determinamos el máximo decaimiento exponencial σ_ζ^* alcanzable para la elección $d = \zeta k_p$, para diferentes valores de ζ .*

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 3.6.

ζ	0.2	0.5	0.833557	1	2	4	7
$\bar{\sigma}$ (3.39)	—	—	7.9978	4.2615	1.7422	0.8422	0.4778
$\hat{\sigma}$ (3.38)	1.3516	3.662	7.9978	*	3.662	1.7028	0.9589

TABLA 3.6: Máximo decaimiento exponencial σ alcanzable para $d = \zeta k_p$, para diferentes valores de ζ .

Observación 3.11. En la Tabla 3.6 se puede observar que el máximo decaimiento exponencial alcanzable disminuye conforme ζ aumenta. De esta manera cuando ζ tiende a un valor muy grande, σ_ζ^* tiende a ser cero.

La condición de estabilidad del Corolario 3.9, que da una cota superior para el máximo decaimiento alcanzable dado un ζ , se descarta para valores mayores a $\zeta_{min} = 0.83355$ debido a que el máximo decaimiento exponencial alcanzable es menor a la cota dada por la ecuación (3.38) del Corolario 3.9.

Para valores menores a $\zeta_{min} = 0.83355$ la ecuación (3.39) no tiene solución, por lo tanto el decaimiento exponencial está delimitado por la condición de estabilidad del operador neutral dada por la ecuación (3.38).

La $*$ en la Tabla 3.6, es un caso particular, debido a que el cuasipolinomio es de tipo retardado, por lo tanto el Corolario 3.9 no aplica en este caso.

³Al elegir $d = \zeta k_p$ y de acuerdo a la sección 3.4 el máximo decaimiento exponencial se alcanza cuando $d \rightarrow \infty$ esto implica las condiciones $k_p \rightarrow \infty$ y $k_i \rightarrow \infty$

3.5.3. Ganancias mínimas para un decaimiento exponencial σ prescrito

A continuación se proponen formulas analíticas para determinar las ganancias más pequeñas k_p y k_i para la ley de control *PI*.

Proposición 3.5. *Considere el sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control *PI* (2.3) donde k_p y k_i son positivos, con retardos en el canal de comunicación $h_1, h_2 > 0$, cuando se introduce la transformación de dispersión en el lazo de control como se muestra en la Fig. 3.1 y se elige la impedancia virtual de la línea de transmisión $d = \zeta k_p$. Para un decaimiento σ deseado, las ganancias mínimas k_p y k_i están dadas por (3.49) y (3.48) respectivamente.*

Demostración. En la intersección de las fronteras que determinan las regiones de σ -estabilidad del cuasipolinomio (3.32) se tiene una raíz doble en $s = 0$, entonces se satisface $p_\sigma(s, k_p, k_i)|_{s=0} = 0$ y $\frac{\partial}{\partial s} p_\sigma(s, k_p, k_i)|_{s=0} = 0$, es decir, (3.46) y (3.47), de donde sigue (3.49) y (3.48). \square

3.6. Impedancia virtual $d = k_p$, cuasipolinomio de tipo retardado, $\zeta = 1$

La elección particular $d = \zeta k_p$ nos arroja un caso especial cuando $\zeta = 1$, lo cual resulta en la impedancia virtual $d = k_p$, la función de transferencia (3.9) se reduce a

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{2bk_p e^{-h_1 s} (k_p s + k_i)}{2k_p s^2 + (2k_p(a + bk_p) + k_i - k_i e^{-hs})s - k_i e^{-hs}(a - bk_p) + k_i(a + bk_p)}. \quad (3.50)$$

Como se puede observar $d = k_p$ permite que el cuasipolinomio característico de tipo neutral de la función de transferencia (3.9) sea reducido a uno de tipo retardado en la función de transferencia (3.50), esto es

$$p(s, k_p, k_i) = 2k_p s^2 + (2k_p(a + bk_p) + k_i - k_i e^{-hs})s - k_i e^{-hs}(a - bk_p) + k_i(a + bk_p). \quad (3.51)$$

La σ -estabilidad del cuasipolinomio (3.51) es determinada a partir de la estabilidad del cuasipolinomio transformado

$$\begin{aligned}
 p_\sigma(s, k_p, k_i) = & 2k_p s^2 + (2k_p (bk_p + a - 2\sigma) + k_i - e^{-h(s-\sigma)} k_i) s \\
 & + (k_i - 2k_p \sigma) (bk_p + a - \sigma) + e^{-h(s-\sigma)} k_i (bk_p - a + \sigma) .
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

3.6.1. Fronteras de σ -estabilidad

A partir del método de \mathcal{D} -partición se puede determinar las fronteras de las zonas de σ -estabilidad, las fronteras son obtenidas sustituyendo $\zeta = 1$ en la ecuación (3.33) y el par de ecuaciones paramétricas (3.36) y (3.37). La frontera para $s = 0$ sigue de (3.33), esto es

$$k_i(k_p) = 2k_p \sigma \frac{bk_p + a - \sigma}{bk_p + a - \sigma + e^{h\sigma} (bk_p - a + \sigma)} . \tag{3.53}$$

Las ecuaciones para la frontera $s = j\omega$ siguen de (3.36) y (3.37), las cuales son

$$k_i(\omega, k_p) = \frac{2b\sigma k_p^2 - 2(\sigma^2 - a\sigma - \omega^2) k_p}{bk_p + a - \sigma + e^{h\sigma} (bk_p - a + \sigma) \cos(h\omega) - e^{h\sigma} \omega \sin(h\omega)} , \tag{3.54}$$

$$k_p(\omega) = \frac{(\eta - (a - \sigma))\omega + \sqrt{(\eta - (a - \sigma))^2 \omega^2 + ((a - \sigma)^2 + \omega^2) (\gamma^2 - \omega^2)}}{b(\gamma + \omega)} , \tag{3.55}$$

donde $\gamma = e^{h\sigma} (\omega \cos(h\omega) - \sigma \sin(h\omega))$ y $\eta = e^{h\sigma} (\sigma \cos(h\omega) + \omega \sin(h\omega))$.

3.6.2. Regiones de σ -estabilidad

Usando la ecuación (3.53) y el par de ecuaciones paramétricas (3.54) y (3.55) obtenemos las regiones en el espacio de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$ donde el cuasipolinomio de tipo retardado (3.52) es estable, i.e., el cuasipolinomio (3.51) es σ -estable. Los mapas de σ -estabilidad se muestran en las Figs. 3.10 y 3.11.

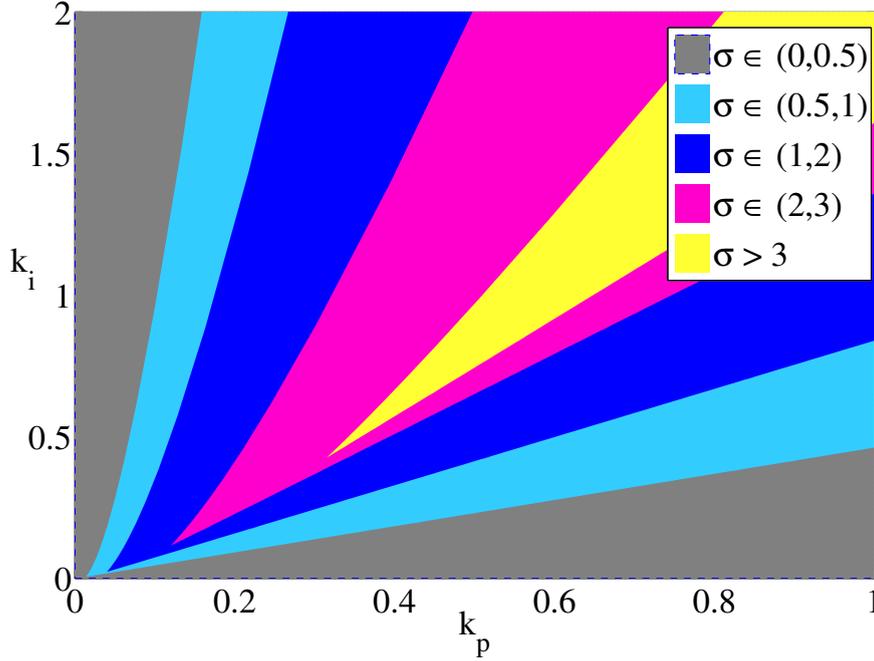


FIGURA 3.10: Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación retardado con transformación de dispersión, $d = k_p$, $\sigma < 3$.

La Fig. 3.10 muestra las zonas de σ -estabilidad para $\sigma < 3$ y la Fig. 3.11 muestra la zonas para $\sigma \in [4, \sigma_\zeta^*]$, de manera individual, debido a los valores grandes de las ganancias k_p y k_i para ley de control cuando $\sigma \rightarrow \sigma_\zeta^*$.

Otra manera de obtener las regiones de σ -estabilidad para el cuasipolinomio de tipo retardado (3.52), se describe a continuación: A partir de las ecuaciones (3.19) y (3.22), (3.23) que determinan las fronteras $s = 0$ y $s = j\omega$ respectivamente para el cuasipolinomio de tipo neutral (3.11), se determina la zona de σ -estabilidad en el plano tridimensional para un valor σ dado, con el parámetro $d \in [0, d_{max}]$ en el eje z , donde d_{max} se elige arbitrariamente. Trazamos un plano $d = k_p$, que corte la zona de σ -estabilidad para el cuasipolinomio de tipo neutral. Así, la zona que corta la región es la zona de σ -estabilidad para el cuasipolinomio de tipo retardado (3.52) para el mismo valor de σ .

A continuación se muestran las Fig. 3.12, 3.13 y 3.14 para los valores de $\sigma = 1, 2$ y 4 respectivamente, tomando los parámetros a, b y h ya mencionados.

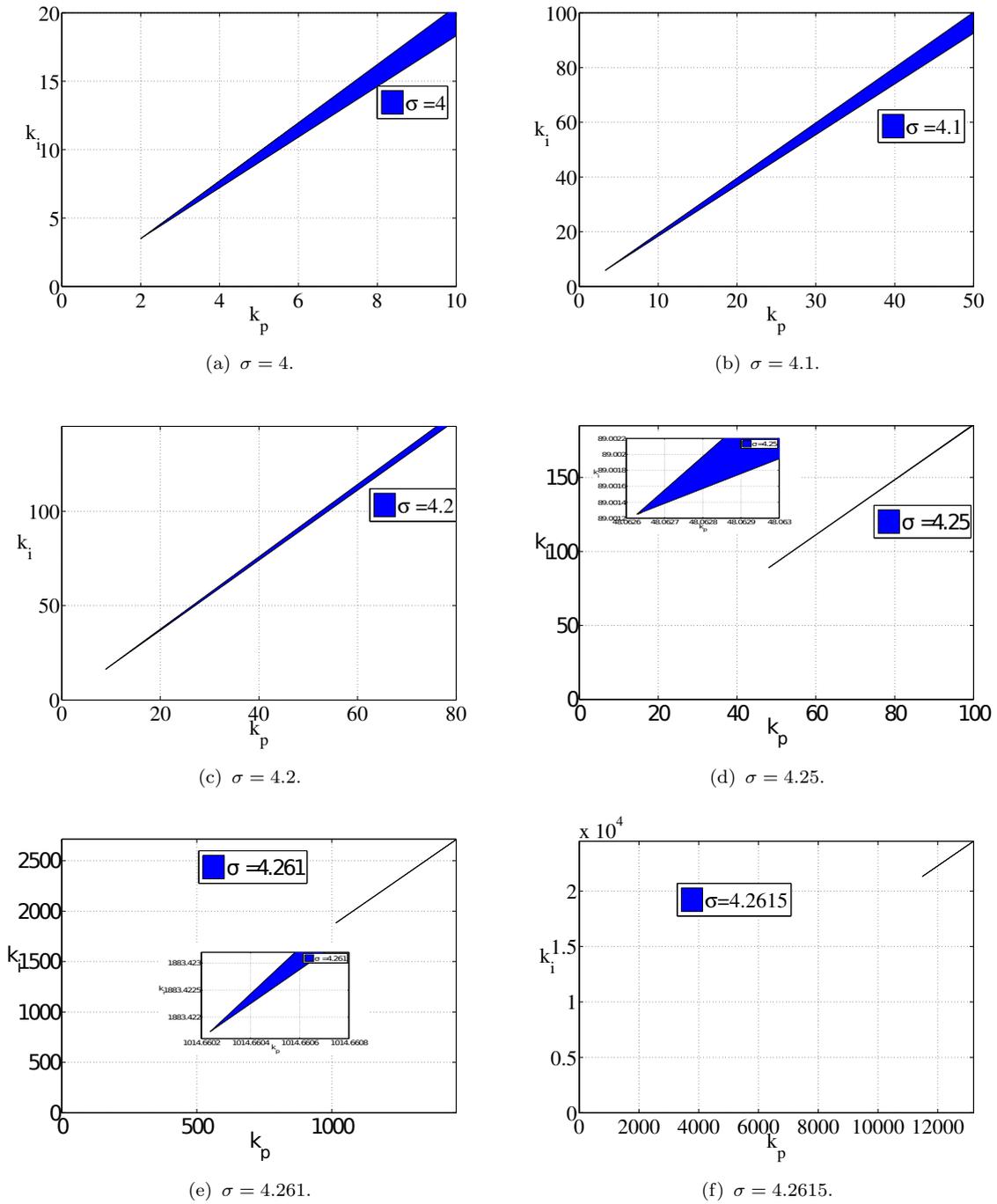


FIGURA 3.11: Mapas de σ -estabilidad, canal de comunicación retardado con transformación de dispersión, $d = k_p$, $\sigma \in [4, \sigma_c^*]$.

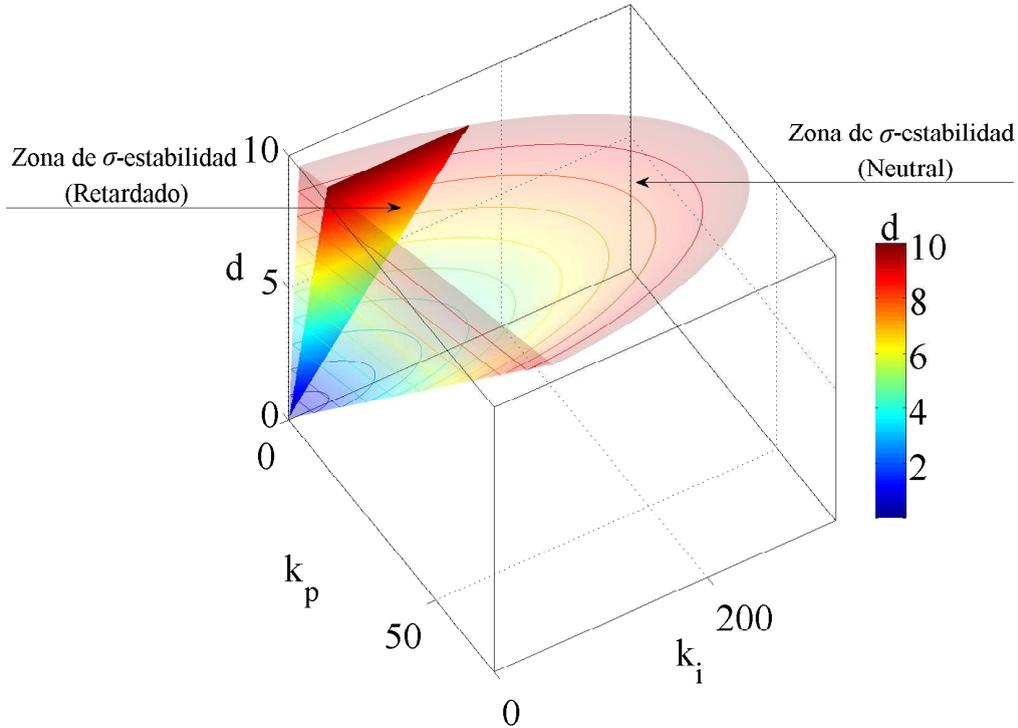


FIGURA 3.12: Región de σ -estabilidad en tercera dimensión, canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión, $d = k_p$, $\sigma = 1$.

Al realizar un análisis en las Figs. 3.12, 3.13 y 3.14, se observa que las ganancias mínimas corresponden con las que se observan en el caso donde se usa el cuasipolinomio de tipo retardado (3.51) para determinar las regiones de σ -estabilidad. También, las zonas de σ -estabilidad son las mismas de las Figs. 3.10 y 3.11. De la misma manera en las Figs. 3.12, 3.13 y 3.14, la palabra retardado indica que se trata de las zonas de σ -estabilidad para cuasipolinomio de tipo retardado (3.51) y la palabra neutral indica que se trata de las zonas de σ -estabilidad para el cuasipolinomio de tipo neutral (3.11).

Observación 3.12. En este caso la condición de estabilidad del Corolario 3.4 se descarta, debido a que sólo es cierta para un cuasipolinomio de tipo neutral. Note que el valor de σ_ζ^* para la elección particular $\zeta = 1$ es menor al caso con cuasipolinomio de tipo neutral y que el máximo decaimiento exponencial σ_1^* se alcanza bajo la condición $k_p, k_i \rightarrow$

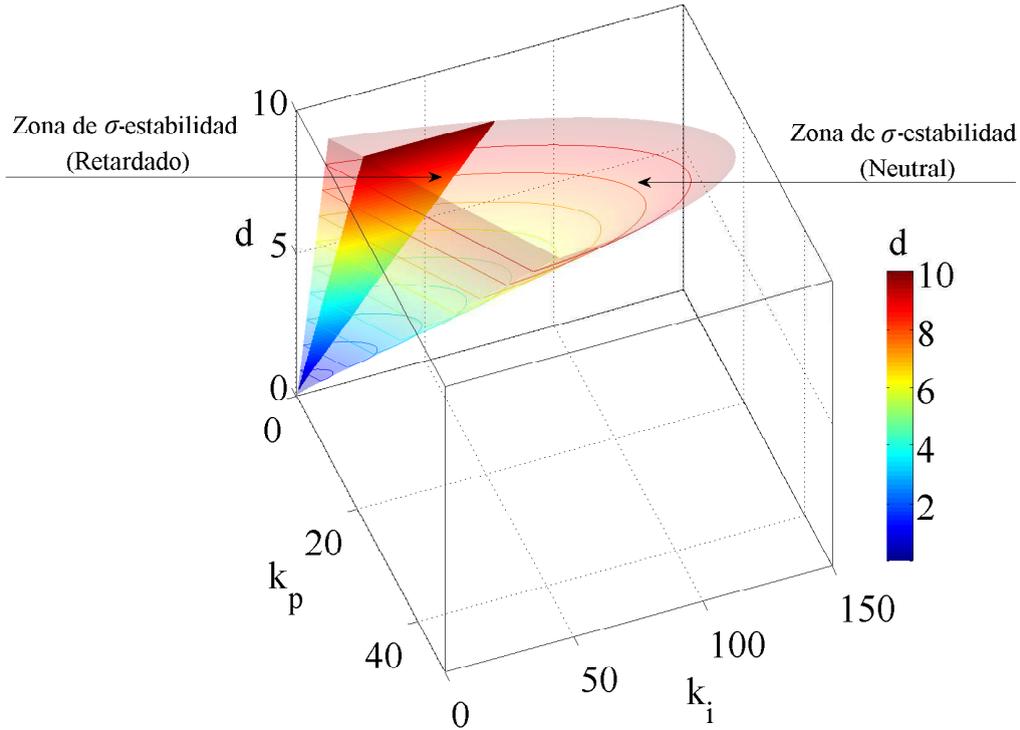


FIGURA 3.13: Región de σ -estabilidad en tercera dimensión, canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión, $d = k_p$, $\sigma = 2$.

∞ . También, para un σ dado, las ganancias de control de magnitud más pequeña corresponden a las raíces en la intersección de las fronteras para $s = 0$ y $s = j\omega$.

3.6.3. Sintonización del máximo decaimiento exponencial σ alcanzable en lazo cerrado

El máximo decaimiento exponencial alcanzable puede ser determinado a partir de la proposición 3.2, en este caso se resume en el siguiente corolario.

Corolario 3.13. *Considere el sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control PI (2.3) donde $k_p > 0$ y $k_i > 0$, con retardos en el canal de comunicación, cuando se introduce la transformación de dispersión en el lazo de control como se muestra en la Fig. 3.1 y se elige la impedancia virtual de la línea de transmisión $d = k_p$, el máximo*

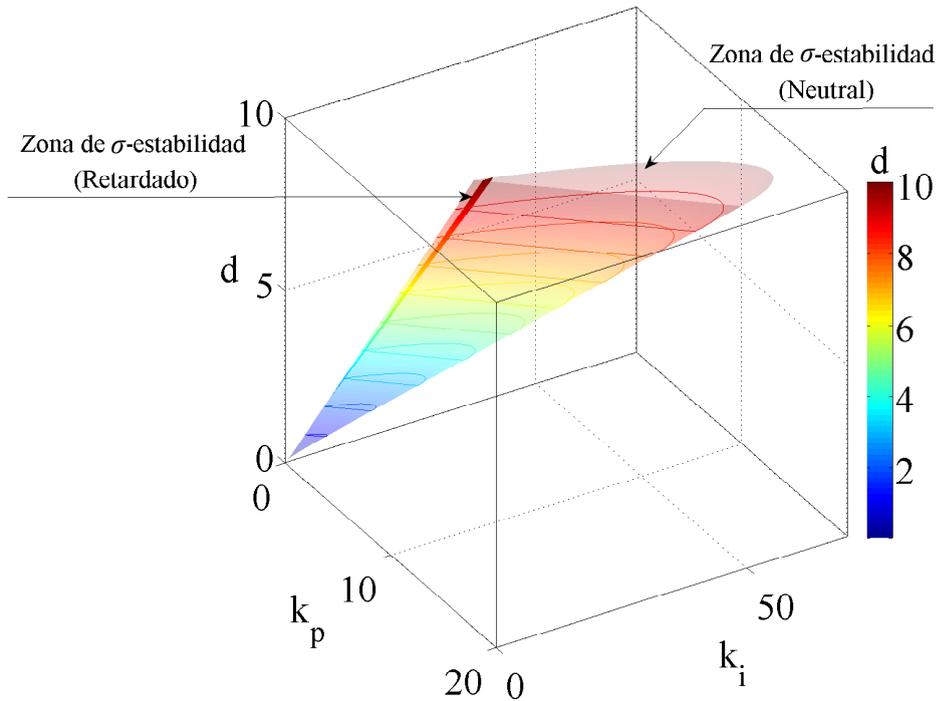


FIGURA 3.14: Región de σ -estabilidad en tercera dimensión, canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión, $d = k_p$, $\sigma = 4$.

decaimiento exponencial alcanzable es la solución positiva de la función implícita para σ

$$e^{h\sigma} (1 - h\sigma) + 1 = 0, \quad (3.56)$$

tal que las ganancias k_p y k_i son infinitas.

Demostración. La prueba sigue de sustituir $\zeta = 1$ en (3.39). □

Ejemplo 3.5. El máximo decaimiento exponencial σ_ζ^* para $\zeta = 1$, esto es $d = k_p$, como se observó en el ejemplo 3.4 es $\sigma_\zeta^* \approx 4.2615$.

3.6.4. Ganancias mínimas para un decaimiento exponencial σ prescrito

A partir de la proposición 3.5 podemos determinar la ganancias mínimas para la ley de control PI . El siguiente resultado es dado.

Corolario 3.14. *Considere el sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control PI (2.3) donde k_p y k_i son positivos, con retardos en el canal de comunicación $h_1, h_2 > 0$. Cuando se introduce la transformación de dispersión en el lazo de control como se muestra en la Fig. 3.1 y se elige la impedancia virtual de la línea de transmisión $d = k_p$. Para un decaimiento σ deseado, las ganancias mínimas k_p y k_i están dadas por*

$$k_i(k_p) = 2k_p\sigma \frac{a + bk_p - \sigma}{a + bk_p - \sigma - e^{h\sigma}(a - bk_p - \sigma)}, \quad (3.57)$$

$$k_p = \frac{-(a - \sigma(1 + e^{h\sigma}))}{b(1 - e^{h\sigma}(h\sigma - 1))} + \frac{\sqrt{(a - \sigma(1 + e^{h\sigma}))^2 - (a - \sigma)^2(1 - e^{2h\sigma}(h\sigma - 1))^2}}{b(1 - e^{h\sigma}(h\sigma - 1))}. \quad (3.58)$$

respectivamente.

Demostración. La prueba sigue de sustituir $\zeta = 1$ en (3.49) y (3.48). \square

Ejemplo 3.6. *En este ejemplo determinamos las ganancias mínimas para el caso $d = k_p$, cuasipolinomio de tipo retardado (3.51) dado un valor de σ . Las expresiones para k_p y k_i obtenidas en el Corolario 3.14 se usan.*

Los resultados se muestran en la Tabla 3.7.

σ	0.5	1	1.5	2	4	4.25
k_p (3.58)	0.0137	0.04	0.0737	0.12	1.9969	48.062
k_i (3.57)	0.0054	0.0228	0.0566	0.1157	3.4968	89.001

TABLA 3.7: Ganancias mínimas para la ley de control PI , canal de comunicación con retardos más transformación de dispersión, $d = k_p$.

El máximo decaimiento exponencial alcanzable es menor con el cuasipolinomio de tipo retardado (3.51) cuyo valor es $\sigma_{\zeta}^* = 4.2615$, mientras que con el cuasipolinomio de tipo neutral (3.11) con la elección $d = 1$ se tiene $\sigma_d^* = 7.0707$. Las zonas de σ -estabilidad son más grandes para el cuasipolinomio de tipo retardado (3.51) en comparación con las zonas del cuasipolinomio de tipo neutral (3.11), proporcionando un rango más amplio de ganancias de control k_p y k_i para un valor de σ dado.

3.7. Conclusiones

Al introducir la transformación de dispersión, se logran dos objetivos fundamentales: El primero, recuperar la pasividad del sistema al emular una línea de transmisión pasiva sin pérdidas, lo que ayuda a tener estabilidad en el sistema en lazo cerrado independientemente de los retardos en el canal de comunicación. La segunda, mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado, cuantificado en términos de su σ -estabilidad. Ahora, se tiene estabilidad en todo el primer cuadrante del espacio de parámetros, algo que se perdió al tener un canal de comunicación con retardos, también la σ -estabilidad del sistema se ve afectada de manera positiva, como se observa en la Fig. 3.5 las zonas de σ -estabilidad han aumentado de manera considerable, además de obtener un decaimiento exponencial más grande comparado con el caso con canal de comunicación con retardos sin la transformación de dispersión. La elección de $d = k_p$ para reducir el cuasipolinomio de tipo neutral (3.11) a un cuasipolinomio de tipo retardado (3.52) permite tener zonas de σ -estabilidad más grandes que la elección de una impedancia virtual constante $d = 1$ en el cuasipolinomio de tipo neutral (3.11), pero el máximo decaimiento exponencial es menor.

Fue posible determinar de manera gráfica la cota superior para el máximo decaimiento exponencial, el cual se aproxima a $\sigma_{sup} \approx 7.99$, cabe señalar que este máximo no es alcanzable, debido a que implica una impedancia virtual infinita, lo que conlleva a tener ganancias de control k_p y k_i infinitas. Sin embargo, da una idea clara de cual es el máximo decaimiento exponencial y en base a esto elegir uno adecuado que se pueda llevar a la práctica, el cual no involucre ganancias de control o impedancia virtual infinitas o muy grandes.

El hecho de usar una transformación de dispersión normalizada no afecta el análisis y resultados en el dominio de la frecuencia. Al comparar la transformación de dispersión normalizada y estandar se observó que la magnitud de las variables de dispersión en el canal canal de comunicación con retardos es diferente de acuerdo al valor de la impedancia virtual que se elija. Para $d > 0.5$ la magnitud de las variables de dispersión es menor para la transformación de dispersión normalizada, mientras que para $d < 0.5$ la magnitud de las variables de dispersión es mayor para la transformación de dispersión normalizada, además si $d = 0.5$ la magnitud de las variables de dispersión es igual para las dos transformaciones.

Capítulo 4

Límite teórico de desempeño en el uso de la transformación de dispersión

4.1. Introducción

Como se observó en capítulo anterior, existe una cota para el máximo decaimiento exponencial cuyo valor es $\sigma_{sup} \approx 7.99$. Este límite es teórico debido a que implica ganancias de control k_p y k_i infinitas, de esta manera el σ_{sup} no es alcanzable.

4.2. Determinación del σ supremo en función de los retardos

Las observaciones anteriores motivan la siguiente proposición. Para determinar el decaimiento exponencial σ_{sup} , note que esta ecuación (4.1) no depende de los parámetros de la planta a y b , sólo de la suma de retardos h .

Proposición 4.1. *Considere el sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control PI (2.3) donde $k_p > 0$ y $k_i > 0$, con retardos en el canal de comunicación $h_1 > 0$*

y $h_2 > 0$. Cuando se introduce la transformación de dispersión en el lazo de control como se muestra en la Fig. 3.1, el decaimiento exponencial máximo σ_{sup} es

$$\sigma_{sup} = \frac{2.39936}{h}, \quad (4.1)$$

donde $h := h_1 + h_2$.

Demostración. De la proposición (3.4), sabemos que el máximo decaimiento exponencial σ_ζ^* para un valor ζ particular es la solución positiva para σ de la ecuación (3.39) tal que k_p y k_i son positivas, esto es

$$\zeta + 1 - (\zeta - 1)e^{2h\sigma} - 2e^{h\sigma}(\zeta h\sigma - 1) = 0,$$

Del Lema 3.1 sabemos que $\zeta_{min} = 0.833557$, sustituyendo este valor en (3.43), se obtiene

$$\zeta_{min} = \frac{2}{h\sigma_{sup}},$$

y despejando σ_{sup} se reduce a (4.1). Claramente, el máximo decaimiento exponencial sólo depende de los retardos. \square

4.3. Conclusiones

Claramente, el decaimiento exponencial σ_{sup} es teórico, ya que no puede ser alcanzado en la práctica debido a que se obtiene bajo la condición de que las ganancias de la ley de control están en infinito. Es importante recordar que este resultado no depende de los parámetros de la planta, únicamente de la suma de los retardos del canal de comunicación.

Capítulo 5

Resultados cuantitativos y cualitativos

5.1. Introducción

En este Capítulo se realiza un análisis cuantitativo y cualitativo de los esquemas de control analizados con el fin de mostrar que la introducción de la transformación de dispersión, además de recuperar la pasividad del sistema en lazo cerrado, permite mejorar el desempeño perdido por la presencia de retardos en el canal de comunicación, el cual se cuantifica en términos de su σ -estabilidad.

5.2. Resultados cuantitativos

Un análisis numérico entre los diferentes esquemas de control analizados en los Capítulos 2 y 3 se muestran en las Tablas 5.1 y 5.2. Los esquemas de control analizados son los siguientes:

- Esquema de control libre de retardos (ECLR).
- Esquema de control con retardos en el canal de comunicación (ECRCC).

- Esquema de control con retardos en el canal de comunicacion compensados (ECRCCC).
 - Impedancia virtual d constante.
 - Impedancia virtual $d = \zeta k_p$.

En la Tabla 5.1 se muestra el máximo decaimiento exponencial para los esquemas de control mencionados.

Esquemas de control	d	ζ	Máximo decaimiento exponencial alcanzable	Ganancias de la ley de control PI
ECRCC	--	--	$\sigma^* = 2.1484$ (2.24)	$k_p^* = 2.9 \cdot 10^{-2}$ (2.25) $k_i^* = 2.3 \cdot 10^{-2}$ (2.26)
ECRCCC (d constante)	100	--	$\sigma_d^* = 7.9873$ (3.24)	$k_{pd}^* = 119.97$ (3.25) $k_{id}^* = 292.46$ (3.26)
ECRCCC (d constante)	1	--	$\sigma_d^* = 7.0707$ (3.24)	$k_{pd}^* = 1.2026$ (3.25) $k_{id}^* = 2.6204$ (3.26)
ECRCCC ($d = \zeta k_p$)	--	1	$\sigma_\zeta^* = 4.261548$ (3.56)	$k_{p\zeta}^* = \infty$ (3.58) $k_{i\zeta}^* = \infty$ (3.57)
ECRCCC ($d = \zeta_{min} k_p$)	--	0.83355	$\sigma_{\zeta_{min}}^* = 7.99786$ (3.56)	$k_{p\zeta}^* = \infty$ (3.58) $k_{i\zeta}^* = \infty$ (3.57)

TABLA 5.1: Máximo decaimiento alcanzable y ganancias de control para los diferentes esquemas de control.

Como se observa, el hecho de introducir la transformación de dispersión en el lazo de control permite mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado. Para el caso d constante se observa que si $d = \infty$ se obtiene σ_{sup} , el cual también se logra en el caso $d = \zeta k_p$ cuando $\zeta_{min} = 0.833557$ y $k_{p\zeta} \rightarrow \infty$. Hay que hacer notar que el σ_{sup} se alcanza para ganancias de control infinitas. El esquema de control ECLR no se toma en cuenta debido a que tiene σ -estabilidad arbitraria.

En la Tabla 5.2 se muestran las ganancias mínimas tal que se alcanza un decaimiento exponencial σ dado. Como se observa en la Tabla, la introducción de la transformación de dispersión permite mantener estabilidad del sistema en lazo cerrado, pero para alcanzar una σ -estabilidad arbitraria es necesario aumentar las ganancias de control

k_p y k_i , teniendo precaución de no usar valores muy grandes debido a que se pueden generar problemas de inestabilidad a la hora de realizar una implementación física.

Esquemas de control	d	ζ	σ	k_p	k_i
ECLR	--	--	1.5	$k_p = 5.2 \cdot 10^{-2}$ (2.13)	$k_i = 4.5 \cdot 10^{-2}$ (2.14)
ECRCC	--	--	1.5	$k_p = 2.68 \cdot 10^{-2}$ (2.25)	$k_i = 1.92 \cdot 10^{-2}$ (2.26)
ECRCCC (d constante)	100	--	1.5	$k_p = 43.573$ (3.25)	$k_i = 32.237$ (3.26)
ECRCCC (d constante)	1	--	1.5	$k_p = 0.4822$ (3.25)	$k_i = 0.3601$ (3.26)
ECRCCC ($d = \zeta k_p$)	--	1	1.5	$k_p = 0.0737$ (3.58)	$k_i = 0.0566$ (3.57)
ECRCCC ($d = \zeta_{min} k_p$)	--	0.83355	1.5	$k_p = 0.0619$ (3.58)	$k_i = 0.0471$ (3.57)

TABLA 5.2: Ganancias mínimas para $\sigma = 1.5$ para los diferentes esquemas de control.

5.3. Resultados cualitativos

En esta sección realizamos una comparación cualitativa entre los esquemas de control analizados desde el punto de vista del tamaño de las zonas de σ -estabilidad. En la Tabla 5.3 se comparan las zonas de estabilidad entre los esquemas de control y como la transformación de dispersión permite mejorar las regiones de estabilidad.

Esquemas de control	Estabilidad
ECLR	Estabilidad en todo el primer cuadrante
ECRCC	La zona de estabilidad se reduce a una pequeña zona cerrada en el primer cuadrante
ECRCCC (d constante)	Se recupera estabilidad en todo el primer cuadrante
ECRCCC ($d = \zeta k_p$)	Se recupera estabilidad en todo el primer cuadrante

TABLA 5.3: Estabilidad en los diferentes esquemas de control.

En la Tabla 5.4 se muestra un análisis de σ -estabilidad para los diferentes esquemas de control y cómo la transformación de dispersión permite mejorar las regiones de σ -estabilidad.

Esquemas de control	σ-estabilidad
ECLR	σ -estabilidad arbitraria con regiones grandes y abiertas
ECRCC	Existe una σ -estabilidad máxima alcanzable con regiones pequeñas y cerradas
ECRCCC (d constante)	Existe una σ -estabilidad máxima alcanzable con un valor de σ mayor al esquema ECRCC con una elección adecuada de la impedancia virtual y regiones más grandes y cerradas
ECRCCC ($d = \zeta k_p$)	Existe una σ -estabilidad máxima alcanzable con un valor de σ mayor al esquema ECRCC con una elección adecuada de ζ ($\zeta = \zeta_{min}$) y regiones más grandes y abiertas

TABLA 5.4: σ -estabilidad para los diferentes esquemas de control.

5.4. Conclusiones

Con el análisis cuantitativo y cualitativo se concluye que con la presencia de retardos en el canal de comunicación, la estabilidad y σ -estabilidad del sistema en lazo cerrado se ve afectada de manera negativa. La introducción de la transformación de dispersión permite recuperar la estabilidad en el primer cuadrante y mejorar la σ -estabilidad.

Conclusiones

En este trabajo se realizó un análisis detallado de como el desempeño en un sistema interconectado pasivo se deteriora debido a la presencia de retardos en el canal de comunicación, ya que el retardo no es un elemento pasivo. También se muestra como la introducción de la llamada transformación de dispersión permite mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado y recuperar la pasividad del sistema en lazo cerrado, todo en el caso de un sistema escalar.

El problema se estudia en el contexto de sistemas con retardo en un marco frecuencial, que muestra el papel esencial de la naturaleza del cuasipolinomio en lazo cerrado. Además, se proponen formulas para el máximo decaimiento alcanzable en los esquemas ECRC y ECRCCC (impedancia virtual constante y $d = \zeta k_p$), y para la sintonización de las ganancias mínimas cuando un decaimiento exponencial deseado es especificado en todos los esquemas de control.

Asimismo, para el caso general se obtuvo una fórmula para determinar el decaimiento exponencial σ_{sup} , el cual, proporciona una cota teórica para el máximo decaimiento del sistema en lazo cerrado cuando la transformación de dispersión se introduce en el canal de comunicación. Es importante señalar que para determinar σ_{sup} no se necesita conocer los parámetros de la planta ya que solo depende de los retardos en el canal de comunicación.

Es importante mencionar que los mapas de σ -estabilidad pueden sufrir algunas variaciones de escala si otros parámetros a y b se eligen. Asimismo, la caracterización de puntos especiales y formulas de sintonización referidas al máximo decaimiento exponencial σ alcanzable y ganancias mínimas para el controlador PI son validas para todos los parámetros positivos del sistema.

De esta tesis se desprendió el siguiente artículo:

- Edgar Estrada, Sabine Mondié y Fernando Castaños. “ σ -estabilidad de sistemas de control basados en pasividad con retardos en la comunicación”. Congreso Nacional de Control Automático 2013, Ensenada, B.C., México.

Apéndice A

Funciones de transferencia

A.1. Canal de comunicación con retardos

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = -ax + bu_1, \quad (\text{A.1a})$$

$$y_1 = x, \quad (\text{A.1b})$$

con la ley de control PI

$$\dot{\xi} = u_0, \quad (\text{A.2a})$$

$$y_0 = k_p u_0 + k_i \xi, \quad (\text{A.2b})$$

usando el siguiente patrón de interconexión con el canal de comunicación con retardos como se muestra en la Fig. 2.1

$$u_0(t) = y_1(t - h_2) - y_1^*, \quad (\text{A.3a})$$

$$u_1(t) = -y_0(t - h_1). \quad (\text{A.3b})$$

donde y_1^* es la referencia de control; además, h_2 es el retardo que existe de la planta hacia el controlado PI y h_1 el retardo que existe del controlador PI hacia la planta.

Obteniendo la transformada de Laplace de (A.1), (A.2) y (A.3) generamos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$(s + a) x(s) = bu_1(s) , \quad (\text{A.4a})$$

$$y_1(s) = x(s) , \quad (\text{A.4b})$$

$$s\xi(s) = u_0(s) , \quad (\text{A.4c})$$

$$y_0(s) = k_p u_0(s) + k_i \xi(s) , \quad (\text{A.4d})$$

$$u_0(s) = e^{-h_2 s} y_1(s) - y_1^*(s) , \quad (\text{A.4e})$$

$$u_1(s) = -e^{-h_1 s} y_0(s) . \quad (\text{A.4f})$$

Sustituyendo (A.4e) en (A.4c) y (A.4d); y (A.4f) en (A.4a), se reduce el conjunto de ecuaciones a las siguientes cuatro

$$(s + a) x(s) = -be^{-h_1 s} y_0(s) , \quad (\text{A.5a})$$

$$y_1(s) = x(s) , \quad (\text{A.5b})$$

$$s\xi(s) = e^{-h_2 s} y_1(s) - y_1^*(s) , \quad (\text{A.5c})$$

$$y_0(s) = k_p (e^{-h_2 s} y_1(s) - y_1^*(s)) + k_i \xi(s) . \quad (\text{A.5d})$$

A partir de (A.5a) y (A.5b), y de (A.5c) y (A.5d) se obtienen (A.6a) y (A.6b) respectivamente, esto es

$$(s + a) y_1(s) = -be^{-h_1 s} y_0(s) , \quad (\text{A.6a})$$

$$y_0(s) = k_p (e^{-h_2 s} y_1(s) - y_1^*(s)) + k_i \left(\frac{e^{-h_2 s} y_1(s) - y_1^*(s)}{s} \right) . \quad (\text{A.6b})$$

Ahora, sustituimos (A.6b) en (A.6a) y simplificando llegamos a la siguiente función de transferencia

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{b(k_p s + k_i) e^{-h_1 s}}{s^2 + (a + bk_p e^{-(h_1+h_2)s})s + bk_i e^{-(h_1+h_2)s}} . \quad (\text{A.7})$$

Tenemos los siguientes casos

1. Definiendo el parámetro h como $h := h_1 + h_2$ la función de transferencia (A.7) se reduce a (2.6)

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{b(k_p s + k_i) e^{-h_1 s}}{s^2 + (a + b k_p e^{-h s}) s + b k_i e^{-h s}}$$

El cuasipolinomio característico es del tipo retardado.

2. Cuando no hay retardos en el canal de comunicación, esto es $h_1 = h_2 = 0$, la función de transferencia (A.7) se reduce a (2.7)

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{b(k_p s + k_i)}{s^2 + (a + b k_p) s + b k_i}$$

Como podemos observar (2.7) es un caso particular de (2.6), en este caso la función de transferencia (A.7) tiene un polinomio característico.

3. Cuando no existe retardo del controlador PI (A.2) hacia la planta (A.1), esto es $h_1 = 0$, la función de transferencia (A.7) se reduce a

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{b(k_p s + k_i)}{s^2 + (a + b k_p e^{-h_1 s}) s + b k_i e^{-h_1 s}}$$

El cuasipolinomio característico es del tipo retardado.

4. Cuando no existe retardo de la planta (A.1) hacia controlador PI (A.2), esto es $h_2 = 0$, la función de transferencia (A.7) se reduce a

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{b(k_p s + k_i) e^{-h_1 s}}{s^2 + (a + b k_p e^{-h_2 s}) s + b k_i e^{-h_2 s}}$$

El cuasipolinomio característico es del tipo retardado.

A.2. Canal de comunicación con transformación de dispersión estandar

Consideremos el sistema (A.1) y la ley de control *PI* (A.2).

Para una línea de transmisión virtual consideremos las transformaciones (3.5) y (3.1)

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ s_0^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/d & -1/d \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ s_0^- \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ s_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & 1 \\ -2d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ s_1^+ \end{pmatrix}.$$

Donde el sistema en lazo cerrado está interconectado bajo el patrón de interconexión (3.7)

$$u_0 = v_0 - y_1^*, \quad \mu_0 = -y_0, \quad u_1 = \mu_1 \quad \text{y} \quad v_1 = y_1.$$

Entonces tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\dot{x} = -ax + bu_1, \tag{A.8a}$$

$$y_1 = x, \tag{A.8b}$$

$$\dot{\xi} = u_0, \tag{A.8c}$$

$$y_0 = k_p u_0 + k_i \xi, \tag{A.8d}$$

$$v_0 = \frac{1}{d} \mu_0 - \frac{1}{d} s_0^-, \tag{A.8e}$$

$$s_0^+ = 2\mu_0 - s_0^-, \tag{A.8f}$$

$$\mu_1 = -dv_1 + s_1^+, \tag{A.8g}$$

$$s_1^- = -2dv_1 + s_1^+. \tag{A.8h}$$

Usando el patrón de interconexión (3.7) el conjunto de ecuaciones (A.8) ahora está dado como sigue

$$\dot{x} = -ax + bu_1 , \quad (\text{A.9a})$$

$$y_1 = x , \quad (\text{A.9b})$$

$$\dot{\xi} = u_0 , \quad (\text{A.9c})$$

$$y_0 = k_p u_0 + k_i \xi , \quad (\text{A.9d})$$

$$u_0 + y_1^* = -\frac{1}{d} y_0 - \frac{1}{d} s_0^- , \quad (\text{A.9e})$$

$$s_0^+ = -2y_0 - s_0^- , \quad (\text{A.9f})$$

$$u_1 = -dy_1 + s_1^+ , \quad (\text{A.9g})$$

$$s_1^- = -2dy_1 + s_1^+ . \quad (\text{A.9h})$$

Calculando la transformada de Laplace del conjunto de ecuaciones (A.9) obtenemos

$$(s + a) x(s) = bu_1(s) , \quad (\text{A.10a})$$

$$y_1(s) = x(s) , \quad (\text{A.10b})$$

$$s\xi(s) = u_0(s) , \quad (\text{A.10c})$$

$$y_0(s) = k_p u_0(s) + k_i \xi(s) , \quad (\text{A.10d})$$

$$u_0(s) + y_1^*(s) = -\frac{1}{d} y_0(s) - \frac{1}{d} s_0^-(s) , \quad (\text{A.10e})$$

$$s_0^+(s) = -2y_0(s) - s_0^-(s) , \quad (\text{A.10f})$$

$$u_1(s) = -dy_1(s) + s_1^+(s) , \quad (\text{A.10g})$$

$$s_1^-(s) = -2dy_1(s) + s_1^+(s) . \quad (\text{A.10h})$$

El retardo en el canal de comunicación esta dado por las siguientes ecuaciones

$$s_1^+ = s_0^+(t - h_1) , \quad (\text{A.11a})$$

$$s_0^- = s_1^-(t - h_2) , \quad (\text{A.11b})$$

y las transformadas de Laplace de (A.11a) y (A.11b) son

$$s_1^+(s) = s_0^+(s) e^{-h_1 s}, \quad (\text{A.12a})$$

$$s_0^-(s) = s_1^-(s) e^{-h_2 s}, \quad (\text{A.12b})$$

entonces sustituyendo (A.12a), (A.12b) y usando la notación $s_0^+(s) = p_0(s)$ y $s_1^-(s) = m_1(s)$, el conjunto (A.10) de ecuaciones ahora es

$$(s + a)x(s) - bu_1(s) = 0, \quad (\text{A.13a})$$

$$y_1(s) - x(s) = 0, \quad (\text{A.13b})$$

$$s\xi(s) - u_0(s) = 0, \quad (\text{A.13c})$$

$$y_0(s) - k_p u_0(s) - k_i \xi(s) = 0, \quad (\text{A.13d})$$

$$u_0(s) + \frac{1}{d}y_0(s) + \frac{1}{d}m_1(s)e^{-h_2 s} = -y_1^*(s), \quad (\text{A.13e})$$

$$p_0(s) + 2y_0(s) + m_1(s)e^{-h_2 s} = 0, \quad (\text{A.13f})$$

$$u_1(s) + dy_1(s) - p_0(s)e^{-h_1 s} = 0, \quad (\text{A.13g})$$

$$m_1(s) + 2dy_1(s) - p_0(s)e^{-h_1 s} = 0. \quad (\text{A.13h})$$

Se escribe el sistema de ecuaciones (A.13) en forma matricial como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} (s+a) & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_i & 0 & -k_p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{d} & \frac{1}{d}e^{-h_2 s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & e^{-h_2 s} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d & 0 & 0 & -e^{-h_1 s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2d & 0 & 1 & -e^{-h_1 s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \xi(s) \\ u_1(s) \\ u_0(s) \\ y_1(s) \\ y_0(s) \\ m_1(s) \\ p_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y_1^*(s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, la función de transferencia para la salida $y_1(s)$ y la referencia $y_1^*(s)$ esta dada como

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{2bde^{-h_1s}(k_p s + k_i)}{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}, \quad (\text{A.14})$$

donde

$$\begin{aligned} p_2 &= d + k_p + e^{-(h_1+h_2)s}(d - k_p), \\ p_1 &= \alpha(k_p + d) + k_i + e^{-(h_1+h_2)s}(\beta(k_p - d) - k_i), \\ p_0 &= k_i(\alpha + e^{-(h_1+h_2)s}\beta). \end{aligned}$$

y las constantes $\alpha = a + bd$ y $\beta = bd - a$. En este caso el cuasipolinomio característico de la función de transferencia (A.14) es del tipo neutral.

Tenemos los siguientes casos

1. Definiendo el parámetro h como $h := h_1 + h_2$ la función de transferencia (A.14) se reduce a (3.9)

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{2bde^{-h_1s}(k_p s + k_i)}{p_2 s^2 + p_1 s + p_0},$$

donde

$$\begin{aligned} p_2 &= d + k_p + e^{-hs}(d - k_p), \\ p_1 &= \alpha(k_p + d) + k_i + e^{-hs}(\beta(k_p - d) - k_i), \\ p_0 &= k_i(\alpha + e^{-hs}\beta). \end{aligned}$$

2. Si la impedancia virtual es $d = k_p$, el cuasipolinomio característico se reduce a uno del tipo retardado, esto es

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{2bk_p e^{-sh_1}(sk_p + k_i)}{2k_p s^2 + (2\alpha k_p + k_i - e^{-hs}k_i)s + \alpha k_i + e^{-hs}k_i\beta}.$$

A.3. Canal de comunicación con transformación de dispersión normalizada

Consideremos el sistema (A.1) y la ley de control *PI* (A.2).

Para una línea de transmisión virtual considere las transformaciones (3.14) y (3.15)

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ s_0^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{\sqrt{2d}}{d} \\ \frac{2}{\sqrt{2d}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ s_0^- \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ s_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & \sqrt{2d} \\ -\frac{2d}{\sqrt{2d}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ s_1^+ \end{pmatrix}.$$

Donde el sistema en lazo cerrado está interconectado bajo el patrón de interconexión (3.7)

$$u_0 = v_0 - y_1^*, \quad \mu_0 = -y_0, \quad u_1 = \mu_1 \quad \text{y} \quad v_1 = y_1.$$

Entonces, podemos escribir de la siguiente forma las ecuaciones

$$\dot{x} = -ax + bu_1, \tag{A.15a}$$

$$y_1 = x, \tag{A.15b}$$

$$\dot{\xi} = u_0, \tag{A.15c}$$

$$y_0 = k_p u_0 + k_i \xi, \tag{A.15d}$$

$$v_0 = \frac{1}{d} \mu_0 - \frac{\sqrt{2d}}{d} s_0^-, \tag{A.15e}$$

$$s_0^+ = \frac{2}{\sqrt{2d}} \mu_0 - s_0^-, \tag{A.15f}$$

$$\mu_1 = -dv_1 + \sqrt{2d} s_1^+, \tag{A.15g}$$

$$s_1^- = -\frac{2d}{\sqrt{2d}} v_1 + s_1^+. \tag{A.15h}$$

Usando el patrón de interconexión (3.7) la expresiones de (A.15) son como sigue

$$\dot{x} = -ax + bu_1 , \quad (\text{A.16a})$$

$$y_1 = x , \quad (\text{A.16b})$$

$$\dot{\xi} = u_0 , \quad (\text{A.16c})$$

$$y_0 = k_p u_0 + k_i \xi , \quad (\text{A.16d})$$

$$u_0 + y_1^* = -\frac{1}{d} y_0 - \frac{\sqrt{2d}}{d} s_0^- , \quad (\text{A.16e})$$

$$s_0^+ = -\frac{2}{\sqrt{2d}} y_0 - s_0^- , \quad (\text{A.16f})$$

$$u_1 = -dy_1 + \sqrt{2d} s_1^+ , \quad (\text{A.16g})$$

$$s_1^- = -\frac{2d}{\sqrt{2d}} y_1 + s_1^+ . \quad (\text{A.16h})$$

Calculando las transformadas de Laplace de (A.17) obtenemos

$$(s + a) x(s) = bu_1(s) , \quad (\text{A.17a})$$

$$y_1(s) = x(s) , \quad (\text{A.17b})$$

$$s\xi(s) = u_0(s) , \quad (\text{A.17c})$$

$$y_0(s) = k_p u_0(s) + k_i \xi(s) , \quad (\text{A.17d})$$

$$u_0(s) + y_1^*(s) = -\frac{1}{d} y_0(s) - \frac{\sqrt{2d}}{d} s_0^-(s) , \quad (\text{A.17e})$$

$$s_0^+(s) = -\frac{2}{\sqrt{2d}} y_0(s) - s_0^-(s) , \quad (\text{A.17f})$$

$$u_1(s) = -dy_1(s) + \sqrt{2d} s_1^+(s) , \quad (\text{A.17g})$$

$$s_1^-(s) = -\frac{2d}{\sqrt{2d}} y_1(s) + s_1^+(s) . \quad (\text{A.17h})$$

Los retardos en el canal de comunicación en el dominio de Laplace están dados por (A.12a) y (A.12b), entonces, sustituyendo (A.12a) y (A.12b), y usando la notación

$s_0^+(s) = p_0(s)$ y $s_1^-(s) = m_1(s)$, las expresiones de (A.17) ahora es

$$(s + a)x(s) - bu_1(s) = 0, \quad (\text{A.18a})$$

$$y_1(s) - x(s) = 0, \quad (\text{A.18b})$$

$$s\xi(s) - u_0(s) = 0, \quad (\text{A.18c})$$

$$y_0(s) - k_p u_0(s) - k_i \xi(s) = 0, \quad (\text{A.18d})$$

$$u_0(s) + \frac{1}{d}y_0(s) + \frac{\sqrt{2d}}{d}m_1(s)e^{-h_2s} = -y_1^*(s), \quad (\text{A.18e})$$

$$p_0(s) + \frac{2}{\sqrt{2d}}y_0(s) + m_1(s)e^{-h_2s} = 0, \quad (\text{A.18f})$$

$$u_1(s) + dy_1(s) - \sqrt{2d}p_0(s)e^{-h_1s} = 0, \quad (\text{A.18g})$$

$$m_1(s) + \frac{2d}{\sqrt{2d}}y_1(s) - p_0(s)e^{-h_1s} = 0. \quad (\text{A.18h})$$

Se escribe el sistema de ecuaciones (A.18) en forma matricial como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} (s+a) & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_i & 0 & -k_p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{d} & \frac{\sqrt{2d}}{d}e^{-h_2s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2d}} & e^{-h_2s} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d & 0 & 0 & -\sqrt{2d}e^{-h_1s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2d}{\sqrt{2d}} & 0 & 1 & -e^{-h_1s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \xi(s) \\ u_1(s) \\ u_0(s) \\ y_1(s) \\ y_0(s) \\ m_1(s) \\ p_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y_1^*(s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, la función de transferencia para la salida $y_1(s)$ y la referencia $y_1^*(s)$. Definiendo $h := h_1 + h_2$ la función de transferencia resultante es igual a (3.9)

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{2bde^{-h_1s}(k_p s + k_i)}{p_2 s^2 + p_1 s + p_0},$$

donde

$$\begin{aligned} p_2 &= d + k_p + e^{-hs} (d - k_p), \\ p_1 &= \alpha (k_p + d) + k_i + e^{-hs} (\beta (k_p - d) - k_i), \\ p_0 &= k_i (\alpha + e^{-hs} \beta). \end{aligned}$$

y las constantes $\alpha = a + bd$ y $\beta = bd - a$.

Bibliografía

- [1] ANDERSON, R., AND SPONG, M. W. Bilateral control of teleoperators with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control* 34 (1989), 494–501.
- [2] BELLMAN, R., AND COOKE, K. *Differential-Difference Equations*. Academic Press, Inc, New York, USA, 1963.
- [3] BRAYTON, R. K. Nonlinear oscillations in a distributed network. *Quart. Appl. Math.* 24 (1966), 289–301.
- [4] BYRNES, C. I., ISIDORI, A., AND WILLEMS, J. C. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 36 (1991), 1228–1240.
- [5] CHOPRA, N., BERESTESKY, P., AND SPONG, M. W. Bilateral teleoperation over unreliable communication networks. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 16, 2 (2008), 304–313.
- [6] CHOPRA, N., AND SPONG, M. W. On synchronization of networked passive systems with time delays and application to bilateral teleoperation. In *IEEE/SICE Int. Conf. Instrumentation, Control and Information Technology* (2005).
- [7] CHOPRA, N., SPONG, M. W., HIRCHE, S., AND BUSS, M. Bilateral teleoperation over the internet: The time varying delay problem. in proc. american contr. confc. american contr. conf. In *American Contr. Conf.* (2003), pp. 155–160.
- [8] CHOPRA, N., SPONG, M. W., AND LOZANO, R. Adaptive coordination control of bilateral teleoperators with time-delay. In *IEEE Conf. Decision and Control* (2004), pp. 4540–4547.

-
- [9] CHOPRA, N., SPONG, M. W., ORTEGA, R., AND BARABANOV, N. E. On tracking performance in bilateral teleoperation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 22, 4 (2006), 844–847.
- [10] CODDINGTON, E., AND LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York 1955.
- [11] COOKE, K. L., AND DRIESSCHE, P. V. D. On zeroes of some transcendental equations. *Funkcialaj Ekvacioj* 29 (1986), 77–90.
- [12] COOKE, K. L., AND TURI, J. Stability, instability in delay equations modeling human respiration. *Journal of Mathematical Biology* 32 (1994), 535–543.
- [13] DER SCHAFT, A. V. *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer Berlin Heidelberg, 1996.
- [14] EL'SGOL'TS, L. *Introduction to the Theory of Differential Equations With Deviating arguments*. Holden-Day Inc. San Francisco, USA, 1966.
- [15] FERRELL, W. R. Remote manipulation with transmission delay. *IEEE Trans. Human Factors Electron. HFE-6*, Septiembre (1965), 24–32.
- [16] FERRELL, W. R. Delayed force feedback. *IEEE Trans. Human Factors Electron. HFE-8*, (Octubre 1966), 449–455.
- [17] GU, K., KHARITONOV, V. L., AND CHEN, J. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhauser, Boston, 2003.
- [18] HAHN, W. *Introduction to the Theory of Differential Equations With Deviating Arguments*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [19] HALANAY, A. *Differential and Difference Equations*. Academic Press, New York, USA, 1966.
- [20] HALE, J., AND VERDUYN, S. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [21] HOKAYEM, P. F., AND SPONG, M. W. Bilateral teleoperation: An historical survey. *Automatica* 42, 12 (2006), 2035–2057.

-
- [22] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*, 2da ed. Prentice Hall Inc., 1996.
- [23] KHARITONOV, V., AND MONDIÉ, S. "Quasipolynômes et Stabilité Robuste", In *Traité IC2-Information-Commande-Communication, Algèbre et Analyse pour l'Automatique*. Editions HERMES Science Europe, 2001.
- [24] KHARITONOV, V. L. *Time-Delay Systems*. Birkhäuser Boston, 2013.
- [25] KOLMANOSVKII, V., AND MYSHKIS, A. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publisher, 1999.
- [26] KOLMANOSVKII, V., AND NOSOV, V. R. *Stability of Functional Differential Equations*. Academic Press, London; Orlando, 1986.
- [27] LEE, D., AND SPONG, M. W. Passive bilateral teleoperation with constant time delay. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 22, 2 (2006), 269–281.
- [28] MICHELS, W., VAN ASSCHE, V., AND NICULESCU, S.-I. Stabilization of time-delay systems with a controlled time-varying delay and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control* 50, 4 (2005), 493–504.
- [29] MUNIR, S., AND BOOK, W. Wave-based teleoperation with prediction. *American Controls Conference* 6 (Junio 2001), 4605–4611.
- [30] MUNIR, S., AND BOOK, W. J. Internet-based teleoperation using wave variables with prediction. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 7, 2 (2001), 124–133.
- [31] NEIMARK, J. I. D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials. *Prikl. Mat. Mekh.* 13 (1949), 349–380. (En Ruso).
- [32] NEIMARK, J. I. D-decomposition of spaces of quasi-polynomials. *Amer. Math. Soc. Transl.* 102 (1973), 95–131. (En Ingles).
- [33] NIEMEYER, G., AND SLOTINE, J.-J. E. Stable adaptive teleoperation. *Oceanic Engineering, IEEE Journal* 16(1) (1991), 152–162.
- [34] NUÑO, E., BASAÑEZ, J., AND ORTEGA, R. Passivity-based control for bilateral teleoperation: A tutorial. *Automatica* 47 (2011), 485–495.

-
- [35] NUÑO, E., BASAÑEZ, L., ORTEGA, R., AND OBREGÓN-PULIDO, G. Position tracking using adaptive control for bilateral teleoperators with time-delays. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2010), pp. 5370–5375.
- [36] NUÑO, E., BASAÑEZ, L., ORTEGA, R., AND SPONG, M. W. Position tracking for nonlinear teleoperators with variable time-delay. *International Journal of Robotics Research* 28, 7 (2009), 895–910.
- [37] NUÑO, E., BASAÑEZ, L., AND PRADA, M. Asymptotic stability of teleoperators with variable time-delays. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2009), pp. 4332–4337.
- [38] NUÑO, E., ORTEGA, R., BARABANOV, N., AND BASAÑEZ, L. A globally stable pd controller for bilateral teleoperators. *IEEE Transactions on Robotics* 24, 3 (2008), 753–758.
- [39] NUÑO, E., ORTEGA, R., BASAÑEZ, L., AND BARABANOV, N. A new proportional controller for nonlinear bilateral teleoperators. In *IFAC World Congress* (2008), pp. 15660–15665.
- [40] ORTEGA, R., LORÍA, A., NICKLASSON, J. P., AND SIRA-RAMIREZ, H. *Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer-Verlag. Berlin, 1998.
- [41] SALLE, J. L., AND LEFSCHETZ, S. *Stability by Lyapunov's Direct Methods: With Applications*. Academic Prees Inc (London) Ltd., 1961.
- [42] SHERIDAN, T. B. Space teleoperation through time delay: Review and prognosis. *IEEE Trans. Robot. Autom.* 9, 5 (1993).
- [43] STRAMIGIOLI, S., DER SCHAFT, A. V., MASCHKE, B., ANDREOTTI, S., AND MELCHIORRI, C. Geometric scattering in telemanipulation of port-controlled hamiltonian systems. In *39th IEEE Conf. Decision and Control, Sydney, Australia* (December 2000).
- [44] STRAMIGIOLI, S., DER SCHAFT, A. V., MASCHKE, B., AND MELCHIORRI, C. Geometric scattering in robotic telemanipulation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 18, 4 (2002), 588–596.

-
- [45] VILLAFUERTE, R., MONDIÉ, S., AND GARRIDO, R. Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21 (2012), 983 – 990.
- [46] WILLEMS, J. C. Dissipative dynamical systems- part i: General theory. *Arch. Rational Mechanics and Analysis* 45 (1972), 321–351.
- [47] WILLEMS, J. C. Dissipative dynamical systems- part ii: Linear systems with quadratic supplies rate. *Arch. Rational Mechanics and Analysis* 45 (1972), 352–393.