



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Control Automático

Nuevas propiedades de la ecuación de Hill

Tesis que presenta

Carlos Alberto Franco Tello

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Control automático

Director de Tesis

Dr. Joaquín Collado

México, Distrito Federal

Agosto, 2013

RESUMEN

En este trabajo se presentan dos nuevas propiedades de la ecuación de Hill. La primera propiedad habla sobre el comportamiento de las zonas de estabilidad e inestabilidad, del plano $\alpha - \beta$ cuando se agrega un término disipativo a una ecuación de Hill. Se muestra que algunas zonas que son estables cuando la ecuación de Hill no tiene disipación se pueden convertir en inestables cuando se añade disipación, este hecho ya había sido estudiado pero solo para sistemas de más de dos grados de libertad. La segunda propiedad explica la relación que existe entre las zonas de estabilidad e inestabilidad de la ecuación de Hill con disipación y las curvas de velocidad de escape a infinito. Se desarrolló un teorema el cual nos permite calcular el coeficiente de disipación y un término de corrección dado un valor de velocidad de escape a infinito, este teorema también implica que las zonas de velocidad de escape a infinito menores a un determinado valor pueden ser eliminadas con la presencia de disipación.

Además de estas dos propiedades, se muestran las lenguas de Arnold de la ecuación de Lamé.

Finalmente se presenta un ejemplo donde un sistema de un grado de libertad sometido a excitación paramétrica se puede modelar con la ecuación de Mathieu, se analizan las zonas estables e inestables, en el plano $\alpha - \beta$, del sistema con disipación y sin disipación, y se muestra que algunas zonas que eran estables sin disipación se convierten en inestables con disipación.

ABSTRACT

This paper presents two new properties of the Hill equation. The first property speaks about the behavior of the zones of stability and instability, in the plane $\alpha - \beta$, when adding a dissipative term to a Hill equation. We show that some areas which are stable when the Hill equation has no dissipation can become unstable when it is added dissipation, this fact has already been studied, but only for systems for more than two degrees of freedom. The second property explains the relationship between the areas of stability and instability of the Hill equation with dissipating term and the escape velocity to infinity curves. We developed a theorem which allows us to calculate the dissipation coefficient and a correction term given a value of escape velocity to infinity, this theorem also implies that the escape velocity to infinity zones under a certain value can be eliminated with the presence of dissipation.

Besides these two properties, we show A'rnold tongues Lamé's equation.

Finally we present an example where a system of one degree of freedom under parametric excitation can be modeled with the Mathieu equation, we analyze the stable and unstable regions, in the plane $\alpha - \beta$, of the system with and without dissipative term, and shows that some areas which were stable without dissipation become unstable with dissipation.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, especialmente a mis padres, por todo el apoyo me han brindado.

Al doctor Joaquín Collado por su paciencia y por todo lo que me ha enseñado.

Al Conacyt por la beca otorgada.

TABLA DE CONTENIDO

1.0 INTRODUCCIÓN	2
2.0 PRELIMINARES MATEMÁTICOS	4
2.1 Matriz fundamental y de transición de estados	4
2.2 Propiedades de la matriz de transición de estados	5
2.3 Sistemas Periódicos	7
2.3.1 Matriz de monodromía	7
2.3.1.1 Propiedades de la matriz de monodromía	7
2.3.1.2 Multiplicadores característicos	8
2.3.1.3 Exponentes característicos	8
2.3.2 Teoría de Floquet	8
2.3.3 Ejemplos. Ecuaciones de Hill, Mathieu y Meissner	11
2.3.4 Lenguas de Arnol'd	12
2.3.5 Tres ecuaciones de Hill integrables	12
3.0 SISTEMAS HAMILTONIANOS Y ECUACIÓN DE LAMÉ	18
3.1 Matriz Hamiltoniana	19
3.2 Matriz Simpléctica	20
3.3 Ecuación de Hill como sistema Hamiltoniano	21
3.4 Ecuación de Lamé	22
3.4.1 Funciones Elípticas	23
3.4.2 Trigonometrización de la ecuación de Lamé	26
4.0 COEXISTENCIA EN LA ECUACIÓN DE HILL	29
4.1 Método para determinar coexistencia	30

4.2	Coexistencia en la ecuación de Lamé	31
4.3	Coexistencia en la ecuación de Hermite	38
5.0	ECUACIÓN DE HILL. NUEVOS RESULTADOS	42
5.1	Velocidad de escape a infinito en zonas inestables	43
5.1.1	Comparación vs Ec. de Hill amortiguada	44
5.2	Ecuación de Lamé. Velocidad de escape a infinito	49
5.3	Respuesta oscilatoria y no oscilatoria de la ecuación de Hill	50
5.4	Ecuación de Hill de dos grados de libertad	51
5.4.1	Las Lenguas de Arnol'd no son disjuntas	52
6.0	EJEMPLO DE APLICACIÓN	53
6.1	Modelado del sistema	53
6.2	Obtención aproximada de las primeras 3 curvas de transición de la ecuación de Mathieu	56
6.3	Condiciones de estabilidad aproximadas del péndulo de Kapitza con disipación.	59
6.4	Zonas de estabilidad e inestabilidad	63
7.0	CONCLUSIONES	65
	BIBLIOGRAFÍA	66

1.0 INTRODUCCIÓN

El estudio de las ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos, ha sido basto, gracias no solo a que estas aparecen al estudiar un gran numero de sistemas de diferentes tipos, ya sean eléctricos, mecánicos, astronómicos, entre otros, si no a que las propiedades de este tipo de ecuaciones diferenciales son realmente interesantes.

La principal herramienta para el análisis de las ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos, en particular de la ecuación de Hill $\ddot{x} + (\alpha + \beta q(t))x = 0$ con $q(t + T) = q(t)$, es la teoría de Floquet, la cual nos brinda condiciones analíticas para determinar las zonas de estabilidad o inestabilidad, que dependen del exponente característico, que a su vez depende de un multiplicador característico, que depende de la solución de la ecuación diferencial. En el capítulo 2 se puede encontrar el desarrollo de la teoría de Floquet, conceptos fundamentales y la solución de tres diferentes ecuaciones integrables de tipo Hill.

Una de las principales, y más útiles, propiedades de la ecuación de Hill es que se puede ver como un sistema Hamiltoniano y así heredar las propiedades de sistemas hamiltonianos. Una de estas propiedades es que la matriz de transición de estados de los sistemas hamiltonianos son simplecticas, esto se traduce en que los multiplicadores característicos asociados a la ecuación de Hill son simétricos con respecto al círculo unitario. En el capítulo 3 se habla con mas detalle de la ecuación de Hill como sistema Hamiltoniano y se presenta la ecuación de Lamé.

Algunas ecuaciones diferenciales de tipo Hill presentan puntos de coexistencia¹, es decir, un intervalo de inestabilidad (α_n, α_{n+1}) para un determinado valor de β , colapsa para dar paso a un punto estable llamado punto de coexistencia, estos puntos pueden ser vistos en la

¹Se llaman puntos de coexistencia, porque coexisten 2 soluciones T -periódicas linealmente independientes.

representación de zonas estables e inestables del plano $\alpha - \beta$, llamado lenguas de Arnol'd, de ecuaciones como Meissner, Lamé y la ecuación elíptica de Hermite. En el capítulo 4 se analiza la ecuación de Lamé y Hermite para determinar las condiciones para las cuales estas ecuaciones tienen puntos de coexistencia.

En el capítulo 5 se presentan; las curvas de velocidad de escape a infinito que, representan zonas donde el máximo multiplicador característico pertenece a un intervalo definido (para zonas inestables); Zonas de oscilación y no oscilación, estas zonas son presentadas para mostrar que las soluciones inestables de la alguna ecuación tipo Hill pueden ser oscilatorias²; Se muestra como las zonas estables para una ecuación de Hill sin amortiguamiento pueden ser zonas inestables cuando se agrega un termino disipativo. Además se presenta un nuevo teorema que compara las Lenguas de Arnol'd de una ecuación tipo Hill con amortiguamiento contra las Curvas de velocidad de escape a infinito.

Por ultimo se presenta como ejemplo de aplicación el péndulo de Kapitza con disipación, se obtienen las curvas de transición aproximadas de la ecuación de Mathieu y se dan condiciones aproximadas para la estabilidad del péndulo de Kapitza con amortiguamiento.

²Una solución $x(t)$ se dice oscilatoria, si \exists una secuencia infinita $\{t_n\}$, $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tal que $x(t_n) = 0$, esta no es la única definición de solución oscilatoria, pero es la que utilizada en esta tesis.

2.0 PRELIMINARES MATEMÁTICOS

En la primer parte de este capítulo se presentan algunos conceptos básicos sobre la solución de ecuaciones diferenciales lineales variantes en el tiempo. La segunda parte es dedicada principalmente a la descripción de la teoría de Floquet utilizada para el estudio de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos, finalmente se presentan la ecuación de Hill y algunos casos particulares que se utilizaran en los siguientes capítulos.

2.1 MATRIZ FUNDAMENTAL Y DE TRANSICIÓN DE ESTADOS

Sea el sistema lineal variante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para cada estado inicial $x(t_0)$ de (2.1) tiene una solución única¹ $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Podemos ordenar las n soluciones como $M = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$. Dado que cada $x_i(t)$ satisface (2.1), tenemos

$$\dot{M}(t) = A(t)M(t)$$

sí esta matriz es no singular, equivalentemente $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente, para todo tiempo t entonces la matriz recibe el nombre de *matriz fundamental*, esta matriz no es única.

¹El lado derecho satisface la condición de Lipschitz $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ y $A(t)$ es medible, por lo que para cada condición inicial existe una única solución.

Definición 2.1. Sea $M(t)$ una matriz fundamental de (2.1), entonces $\Phi(t, t_0) = M(t) M^{-1}(t_0)$, es llamada matriz de transición de estados. Esta matriz es la única solución de $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0)$ con condiciones iniciales $\Phi(t_0, t_0) = I_{n \times n}$

En el caso particular que la matriz A de la ecuación (2.1) sea invariante en el tiempo, la matriz de transición de estados es $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$

2.2 PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE TRANSICIÓN DE ESTADOS

La matriz de transición de estados especifica como la dinámica del sistema evoluciona en el tiempo, esta matriz es de gran importancia en el estudio de ecuaciones diferenciales. A continuación presentamos algunas de sus propiedades mas importantes.

Si $\Phi(t, t_0)$ es una matriz de transición, entonces

Propiedad 1. $\Phi(t, t) = I$

Prueba. La prueba sigue de la definición de matriz de transición de estados,

$$\Phi(t, t) = M(t) M^{-1}(t) = I$$

□

Propiedad 2. $[\Phi(t, t_0)]^{-1} = \Phi(t_0, t)$

Prueba. La prueba también sigue de la definición de matriz de transición de estados,

$$[\Phi(t, t_0)]^{-1} = [M(t) M^{-1}(t_0)]^{-1} = M(t_0) M^{-1}(t) = \Phi(t_0, t)$$

□

Propiedad 3. $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1) \Phi(t_1, t_0)$, $\forall t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

Teorema 2.1. (Abel-Jacobi-Liuville) Si $\Phi(t, t_0)$ es la matriz de transición de $x(t) = A(t)x(t)$, entonces

$$\det \Phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t \text{tr} \{A(\sigma)\} d\sigma \right] \quad (2.2)$$

y por lo tanto $\det \Phi(t, t_0)$ es no cero si $\int_{t_0}^t \text{tr} A(\sigma) d\sigma$ es finito.

Prueba. Sea $\Phi(t, t_0)$ la matriz de transición de estados, con $\Phi(t, t_0) = [\phi_{ij}(t, t_0)]$ y definiendo $W(t) = \det \Phi(t, t_0)$. Entonces $\frac{dW(t)}{dt}$ es igual a la suma de los n determinantes Δ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, $\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \Delta_i$, donde Δ_k es igual al $\det \Phi(t, t_0)$, excepto por tener $\dot{\phi}_{kj}(t, t_0)$, $j = 1, 2, \dots, n$, en lugar de $\phi_{kj}(t, t_0)$ en su k -ésimo renglón.

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{11}(t, t_0) & \dot{\phi}_{12}(t, t_0) & \cdots & \dot{\phi}_{1n}(t, t_0) \\ \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{2n}(t, t_0) & \cdots & \phi_{2n}(t, t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t, t_0) & \phi_{n1}(t, t_0) & \cdots & \phi_{nn}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

$$\text{como } \dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0) \quad \implies \quad \dot{\phi}_{ij}(t, t_0) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \phi_{kj}(t, t_0)$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} \phi_{k1}(t, t_0) & \sum_{k=1}^n a_{1k} \phi_{k2}(t, t_0) & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k} \phi_{kn}(t, t_0) \\ \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{22}(t, t_0) & \cdots & \phi_{2n}(t, t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t, t_0) & \phi_{n1}(t, t_0) & \cdots & \phi_{nn}(t, t_0) \end{bmatrix} =$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} \phi_{11}(t, t_0) & \phi_{12}(t, t_0) & \cdots & \phi_{1n}(t, t_0) \\ \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{22}(t, t_0) & \cdots & \phi_{2n}(t, t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t, t_0) & \phi_{n2}(t, t_0) & \cdots & \phi_{nn}(t, t_0) \end{vmatrix} + \dots + a_{1n} \begin{vmatrix} \phi_{n1}(t, t_0) & \phi_{n2}(t, t_0) & \cdots & \phi_{nn}(t, t_0) \\ \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{22}(t, t_0) & \cdots & \phi_{2n}(t, t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t, t_0) & \phi_{n2}(t, t_0) & \cdots & \phi_{nn}(t, t_0) \end{vmatrix}$$

recordando que el determinante de matrices con renglones linealmente dependientes es 0, tenemos que

$$\Delta_1 = a_{11} W(t)$$

Haciendo el mismo procedimiento obtenemos, $\Delta_i = a_{ii} W(t)$, por lo tanto

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii} W(t) = \text{tr} A(t) W(t)$$

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos (2.2), [5]. □

2.3 SISTEMAS PERIÓDICOS

Considere el sistema de primer orden

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (2.3)$$

donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ real o compleja, con periodo mínimo T , esto es

$$A(t+T) = A(t), \quad -\infty < t < \infty$$

El objetivo de esta sección es dar a grandes rasgos la estructura general de la solución de (2.3).

2.3.1 Matriz de monodromía

La matriz de monodromía de (2.3) es una matriz E asociada con una matriz fundamental $M(t)$ de (2.3) a través de la relación [11][8]

$$M(t+T) = M(t)E \quad (2.4)$$

donde T es el periodo de la matriz $A(t)$.

Nota 1: La matriz $M(t)$ puede ser o no ser periódica, y no es única

2.3.1.1 Propiedades de la matriz de monodromía 1) La matriz de monodromía es no singular.

Utilizando la ecuación (2.4) observamos que

$$\det [M(t+T)] = \det [M(t)E] = \det M(t) \det E \neq 0.$$

2) La matriz de monodromía E es obtenida evaluando la matriz de transición de estados $\Phi(t, t_0)$ a lo largo del periodo mínimo de $A(t)$

Recordando que la matriz de transición de estados $\Phi(t, t_0)$ es la matriz solución normalizada del sistema (2.3), evaluando a lo largo del periodo mínimo de $A(t)$ tenemos

$$\Phi(T + t_0, t_0) = \Phi(t_0, t_0)E = E$$

2.3.1.2 Multiplicadores característicos Definición 2.2. Sea E la matriz de monodromía de (2.3), y μ un eigenvalor de E : $\det[\mu I - E] = 0$, entonces μ es llamado multiplicador característico de (2.3).

Los multiplicadores característicos μ son independientes de la elección de $M(t)$, para probar esto proponemos dos matrices fundamentales diferentes, $M(t)$ y $\bar{M}(t)$; definimos $\bar{M}(t) = M(t)L$ donde L es una matriz constante, no singular y sea T el periodo mínimo de $A(t)$. Entonces

$$\bar{M}(t+T) = M(t+T)L = M(t)EL = \bar{M}(t)L^{-1}EL = \bar{M}(t)D$$

donde $D = L^{-1}EL$ por lo tanto

$$\det[\mu I - D] = \det[\mu I - L^{-1}EL] = \det[L^{-1}(\mu I - E)L] = \det(\mu I - E)$$

y así podemos concluir que D y E tienen los mismos eigenvalores [8][11][6].

2.3.1.3 Exponentes característicos Definición 2.3. Sea μ un multiplicador característico, real o complejo, del sistema (2.3), correspondiente al periodo mínimo T de $A(t)$. Entonces ρ , definido por $e^{\rho T} = \mu$ es llamado un exponente característico del sistema [11][8][6].

Nota 2: Obsérvese que los multiplicadores característicos son únicos mientras que los exponentes característicos no lo son. Para fijar los valores de los exponentes característicos se requiere que $\rho = \frac{1}{T} \ln(\mu)$, donde es tomado el valor principal del logaritmo.

2.3.2 Teoría de Floquet

La teoría de Floquet es una herramienta muy importante para el estudio de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos, esta teoría se compone principalmente de los dos teoremas dados a continuación.

Teorema 2.2. (Teoría de Floquet)[6][11] Sea el sistema (2.3) con $A(t) = A(t+T)$, T es el periodo mínimo de $A(t)$ y $A(t)$ es una matriz de $n \times n$, tiene al menos una solución $x(t)$ no idéntica a cero con

$$x(t+T) = \mu x(t) \tag{2.5}$$

donde μ es un multiplicador característico de (2.3).

Prueba. Sea $M(t)$ una matriz fundamental del sistema (2.1). Entonces $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$. Como $A(t) = A(t+T)$, $M(t+T)$ satisface la misma ecuación y por lo tanto $M(t+T)$ es otra matriz fundamental. Las columnas de $M(t+T)$ son una combinación lineal de las columnas de $M(t)$, por lo tanto

$$M(t+T) = M(t)E \quad (2.6)$$

notamos que (2.6) es la definición de matriz de monodromía (2.4), recordando que μ es el multiplicador característico $\det(\mu I - E) = 0$, sea s el eigenvector correspondiente a μ , $(\mu I - E)s = 0$.

Definiendo la solución $x(t) = M(t)s$, entonces

$$x(t+T) = M(t+T)s = M(t)Es = M(t)\mu s = \mu x(t)$$

□

Teorema 2.3. *Suponga que la matriz de monodromía del Teorema 2.2 tiene n distintos eigenvalores, μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ entonces (2.3) tiene n soluciones linealmente independientes que satisfacen 2.5 de la forma*

$$x_i = p_i(t) e^{\rho_i t} \quad (2.7)$$

donde ρ_i es el exponente característico correspondiente a μ_i , $p_i(t)$ son vectores de funciones con periodo T [11][8]

Prueba. Para cada μ_i corresponde una solución $x_i(t)$ que satisface (2.5):

$$x_i(t+T) = \mu_i x_i(t) = e^{\rho_i T} x_i(t)$$

Por lo tanto, para todo t

$$x_i(t+T) e^{-\rho_i(t+T)} = x_i(t) e^{-\rho_i t}$$

reescribiendo

$$x_i(t+T) e^{-\rho_i(t+T)} = p_i(t+T) = x_i(t) e^{-\rho_i t} = p_i(t)$$

Lo que implica que $p_i(t)$ tiene periodo T

□

Teorema 2.4. Para el sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, donde $A(t)$ tiene periodo mínimo T , sean los multiplicadores característicos del sistema $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Entonces

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n = \exp \left(\int_0^T \text{tr} \{A(s)\} ds \right) \quad (2.8)$$

los multiplicadores característicos son contados de acuerdo con su multiplicidad .

Prueba. Sea $\Phi(t+T, t)$ la matriz de transición de estados del sistema, sabemos que $E = \Phi(t_0+T, t_0)$. Los multiplicadores característicos son los eigenvalores de E por lo que

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n = \det(E) = \det(\Phi(t_0+T, t_0))$$

por la ecuación (2.2) con $t_0 = 0$ y $t = T$

$$\det \Phi(t, t_0) = \exp \left[\int_0^T \text{tr} \{A(\sigma)\} d\sigma \right]$$

□

Por los teoremas anteriores podemos concluir [19]

Todas las soluciones $x(t)$ de (2.3) son asintóticamente estables si y solo si $|\mu_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$. Esto implica que los multiplicadores característicos están dentro de un círculo unitario.

Todas las soluciones $x(t)$ de (2.3) son acotadas para $t \rightarrow \infty$ si y solo si $|\mu_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$, y para aquellos multiplicadores característicos con modulo 1, $|\mu_i| = 1$, con raíces simples del polinomio mínimo de la matriz de monodromía E Esto implica que los multiplicadores característicos están dentro o sobre del círculo unitario.

Todas las soluciones $x(t)$ de (2.3) son inestables para $t \rightarrow \infty$ si y solo si algún $|\mu_i| > 1, i = 1, 2, \dots, n$, ó algún multiplicador característico $|\mu_i| = 1$ que es una raíz múltiple del polinomio mínimo de E .

2.3.3 Ejemplos. Ecuaciones de Hill, Mathieu y Meissner

El término ecuación de Hill es una abreviación que define a las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes reales y periódicos. Aunque este tipo de ecuaciones se han estudiado antes del trabajo de G. W. Hill sobre el movimiento del perigeo lunar en 1877, se les dio su nombre por la importancia de la contribución hecha por Hill a su teoría. Existen muchas aplicaciones de la ecuación de Hill a los problemas de ingeniería y física, incluyendo problemas en mecánica, astronomía, circuitos eléctricos entre otros [13].

Escribiremos la ecuación de Hill en la forma

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta q(t)] x = 0, \quad q(t + T) = q(t) \quad (2.9)$$

El término ecuación de Mathieu fue introducido en 1868 por E. Mathieu cuando resolvió el problema con valores en la frontera asociado con una membrana vibrante con frontera elíptica. Esta ecuación es de la forma

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos t] x = 0 \quad (2.10)$$

para mayor información ver [3] pag. 8. La ecuación (2.10) también puede ser obtenida modelando un péndulo sometido a excitación paramétrica como se muestra en el capítulo de ejemplo de aplicación.

Un caso interesante dentro de la ecuación de Hill es la llamada ecuación de Meissner. Es de las pocas ecuaciones de Hill que se pueden resolver analíticamente. Escribiremos la ecuación de Meissner de la forma

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta r(t)] x = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{donde } r(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ -1 & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

2.3.4 Lenguas de Arnol'd

Consideremos la ecuación de Hill

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta q(t)] x = 0, \quad q(t + T) = q(t)$$

Las lenguas de Arnol'd indican las zonas de estabilidad e inestabilidad de la ecuación de Hill.

Las zonas de inestabilidad, también llamadas zonas prohibidas, son definidas como las regiones en el plano de los parámetros (α, β) en donde los multiplicadores característicos (eigenvalores de la matriz de monodromía) son mayores que 1 en módulo [2].

La figura 1 muestra las lenguas de Arnol'd para una ecuación de la forma de Hill.

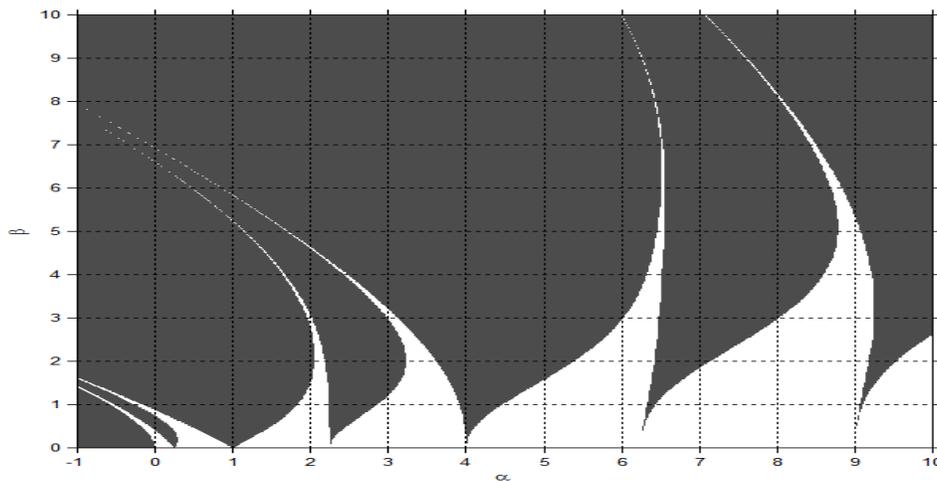


Figura 1. Lenguas de Arnol'd de $\ddot{x} + [\alpha + \beta(\sin(t) + 2 \cos(2t))] x = 0$,
 $T = 2\pi$

2.3.5 Tres ecuaciones de Hill integrables

Como es bien sabido, encontrar la matriz de transición y con ello la matriz de monodromía de las ecuaciones diferenciales con la forma de Hill es una ardua tarea. En este apartado se muestra la solución de tres ecuaciones de Hill integrables.

Recordando que la ecuación de Hill la escribimos como

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta q(t)] x = 0, \quad q(t+T) = q(t)$$

Caso 1 (Meissner) *La primer ecuación que resolvemos es cuando $q(t)$ es una señal de onda cuadrada*

$$q(t) = \begin{cases} a & 0 \leq t < T_1 \\ -b & T_1 \leq t < T \end{cases}$$

donde a y b son dos constantes positivas que cumplen la condición $\int_0^{T_1} a dt = \int_{T_1}^T b dt$

Para obtener la matriz de transición de estados $\Phi(t+T, t)$ necesitamos obtener primero $\Phi(t+T, t+T_1)$ y $\Phi(t+T_1, t)$ y aplicar la propiedad $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1) \Phi(t_1, t_0)$. Las ecuaciones de estado del sistema son

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + a\beta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ para el intervalo } 0 < t \leq T_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha - b\beta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ para el intervalo } T_1 < t \leq T$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones diferenciales tenemos que

para $\alpha > \beta b$ y $\alpha > \beta a$

$$\Phi(2\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos(T_1 - 2\pi) \sqrt{b\beta - \alpha} & -\frac{\sin(T_1 - 2\pi) \sqrt{b\beta - \alpha}}{\sqrt{-\alpha + b\beta}} \\ (\sin((T_1 - 2\pi) \sqrt{b\beta - \alpha})) \sqrt{b\beta - \alpha} & \cos(T_1 - 2\pi) \sqrt{b\beta - \alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos T_1 \sqrt{\alpha + a\beta} & \frac{\sin T_1 \sqrt{\alpha + a\beta}}{\sqrt{\alpha + a\beta}} \\ -(\sin T_1 \sqrt{\alpha + a\beta}) \sqrt{\alpha + a\beta} & \cos T_1 \sqrt{\alpha + a\beta} \end{bmatrix}$$

para $\alpha = \beta b$ y $\alpha > \beta a$

$$\Phi(2\pi, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 2\pi - T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos T_1 \sqrt{\alpha + a\beta} & \frac{\sin T_1 \sqrt{\alpha + a\beta}}{\sqrt{\alpha + a\beta}} \\ -\sqrt{\alpha + a\beta} (\sin T_1 \sqrt{\alpha + a\beta}) & \cos T_1 \sqrt{\alpha + a\beta} \end{bmatrix}$$

para $\alpha < \beta b$ y $\alpha > \beta a$

$$\Phi(2\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cosh(T_1 - 2\pi)\sqrt{b\beta - \alpha} & -\frac{\sinh(T_1 - 2\pi)\sqrt{b\beta - \alpha}}{\sqrt{-\alpha + b\beta}} \\ -(\sinh(T_1 - 2\pi)\sqrt{b\beta - \alpha})\sqrt{b\beta - \alpha} & \cosh(T_1 - 2\pi)\sqrt{b\beta - \alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos T_1\sqrt{\alpha + a\beta} & \frac{\sin T_1\sqrt{\alpha + a\beta}}{\sqrt{\alpha + a\beta}} \\ -(\sin T_1\sqrt{\alpha + a\beta})\sqrt{\alpha + a\beta} & \cos T_1\sqrt{\alpha + a\beta} \end{bmatrix}$$

Nota 2: La función $q(t)$ propuesta puede tener hasta n discontinuidades en un solo periodo, esto implica el computo de un mayor número de partes de la matriz de transición de estados $\Phi(t + T, t) = \Phi(t + T, t + T_{n-1}) \cdot \Phi(t + T_{n-1}, t + T_{n-2}) \cdot \dots \cdot \Phi(t + T_2, t + T_1) \cdot \Phi(t + T_1, t)$

En la figura 2 se muestran las lenguas de Arnol'd de la ecuación de Meissner.

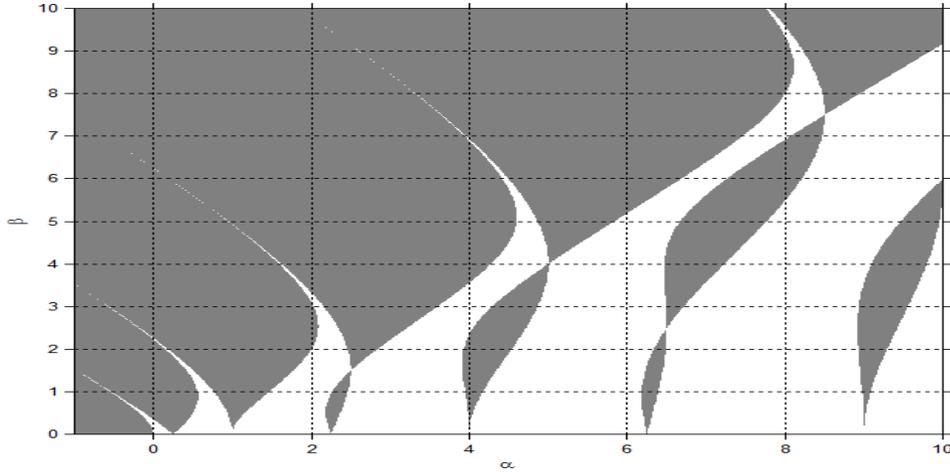


Figura 2. Lenguas de Arnol'd de la ecuación de Meissner.

Caso 2 El segundo ejemplo mostrado es cuando $q(t)$ es un tren de impulsos unitarios

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(t - \tau_{i1} - nT) - \delta(t - \tau_{i2} - nT)]; \quad \tau_{i1} \in \left(0, \frac{T}{2}\right), \tau_{i2} \in \left(\frac{T}{2}, T\right)$$

donde T es el periodo mínimo de $q(t)$ y $\delta(x - a)$ esta definida por la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$$

Tomando solo un periodo del tren de impulsos tenemos que $q(t) = \delta(t - \tau_1) - \delta(t - \tau_2)$, tenemos la ecuación

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta(\delta(t - \tau_1) - \delta(t - \tau_2)))x = 0 \quad (2.12)$$

Al igual que para el caso anterior debemos separar la matriz de transición de estados, por las dos ecuaciones anteriores, notamos que debemos hacer tres separaciones. Suponiendo que $\tau_1 = \frac{T}{4}$ y $\tau_2 = \frac{3T}{4}$, tenemos $\Phi(t + T, t) = \Phi(t + T, t + \frac{3T}{4}) \Phi(t + \frac{3T}{4}, t + \frac{T}{4}) \Phi(t + \frac{T}{4}, t)$, escribiendo la ecuación diferencial en variables de estado y resolviendo

$$\Phi\left(\frac{T}{4}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{T}{4}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) & \frac{1}{(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\sin\left(\frac{T}{4}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) \\ -(\alpha)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{T}{4}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) & \cos\left(\frac{T}{4}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) \end{bmatrix}, \text{ para el intervalo } 0 < t \leq \frac{T}{4}$$

$$\Phi\left(\frac{3T}{4}, \frac{T}{4}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{T}{2}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) & \frac{1}{(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\sin\left(\frac{T}{2}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) \\ -(\alpha)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{T}{2}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) & \cos\left(\frac{T}{2}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) \end{bmatrix}, \text{ para el intervalo } \frac{T}{4} < t \leq \frac{3T}{4}$$

$$\Phi\left(T, \frac{3T}{4}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{T}{4}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) & \frac{1}{(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\sin\left(\frac{T}{4}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) \\ -(\alpha)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{T}{4}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) & \cos\left(\frac{T}{4}(\alpha)^{\frac{1}{2}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \text{ para el intervalo } \frac{T}{2} < t \leq T$$

multiplicando las 5 matrices anteriores obtenemos la solución del caso 2.

La figura 3 muestra las lenguas de Arnol'd de la ecuación (2.12)

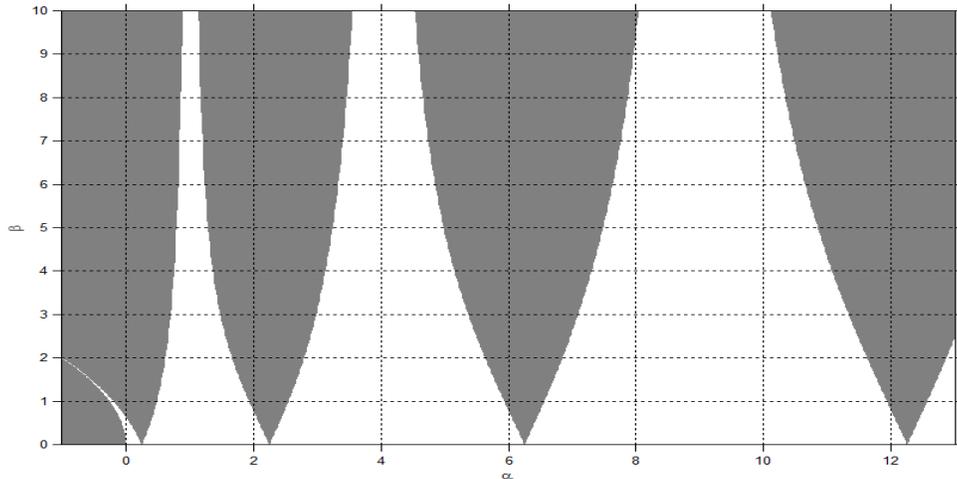


Figura 3. Lenguas de Arnol'd de la ecuacion (2.12).

Caso 3 En el tercer ejemplo consideramos $q(t)$ como una función dientes de sierra [17].

$$q(t) = at + b \quad 0 \leq t < T$$

Por lo tanto la ecuación de Hill tiene la forma

$$\ddot{x} + (\alpha_1 + \beta_1(at + b))x = 0, \quad 0 \leq t < T$$

sin pérdida de la generalidad podemos definir $\alpha = \alpha_1 + \beta_1 b$, $\beta = \beta_1 a$ y así obtener la ecuación

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta t)x = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (2.13)$$

Sea $z = \alpha + \beta t$, este cambio de variable transforma (2.13) en

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{z}{\beta^2}x = 0 \quad (2.14)$$

La solución de (2.14) puede ser expresada en términos de funciones de Bessel de orden $\frac{1}{3}$, [17]:

$$x = z^{\frac{1}{2}} \left(A_1 J_{\frac{1}{3}} \left(kz^{\frac{3}{2}} \right) + A_2 Y_{\frac{1}{3}} \left(kz^{\frac{3}{2}} \right) \right)$$

donde A_1, A_2 son constantes arbitrarias y $k = \frac{2}{3\beta}$

Haciendo

$$u_1(t) = z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}} \left(kz^{\frac{3}{2}} \right), \quad u_2(t) = z^{\frac{1}{2}} Y_{\frac{1}{3}} \left(kz^{\frac{3}{2}} \right)$$

Usando la siguiente fórmula para calcular la derivada de funciones de Bessel [4]

$$\frac{d}{dx} x^n J_n(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

haciendo

$$u_1(t) = z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}} \left(kz^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{k^{\frac{1}{3}}}{k^{\frac{1}{3}}} z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}} \left(kz^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} (kz)^{\frac{1}{3}} J_{\frac{1}{3}} \left(kz^{\frac{3}{2}} \right)$$

además

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{d}{dz} u(z) \frac{dz}{dt} \\ &= \left[\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} \left(kz^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} J_{-\frac{2}{3}} \left(kz^{\frac{3}{2}} \right) \right] \left[k \frac{3\beta}{2} z^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= z J_{-\frac{2}{3}} \left(kz^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

realizando el mismo procedimiento para $u_2(t)$ obtenemos

$$\frac{du_2(t)}{dt} = zY_{-\frac{2}{3}}\left(kz^{\frac{3}{2}}\right)$$

Por lo tanto la matriz fundamental $M(t)$ del sistema (2.13)

$$M(t) = \begin{bmatrix} z^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{3}}\left(kz^{\frac{3}{2}}\right) & z^{\frac{1}{2}}Y_{\frac{1}{3}}\left(kz^{\frac{3}{2}}\right) \\ zJ_{-\frac{2}{3}}\left(kz^{\frac{3}{2}}\right) & zY_{-\frac{2}{3}}\left(kz^{\frac{3}{2}}\right) \end{bmatrix}$$

Obteniendo la matriz transición de estados, $\Phi(t, t_0) = M(t)M^{-1}(t_0)$, haciendo

$$\theta = (\alpha + \beta t_0)^{\frac{3}{2}}, \quad \psi = (\alpha + \beta t)^{\frac{3}{2}}$$

$$M^{-1}(t_0) = \frac{1}{\det(M(t_0))} \begin{bmatrix} \theta Y_{-\frac{2}{3}}\left(k\theta^{\frac{3}{2}}\right) & \theta^{\frac{1}{2}}Y_{\frac{1}{3}}\left(k\theta^{\frac{3}{2}}\right) \\ -\theta J_{-\frac{2}{3}}\left(k\theta^{\frac{3}{2}}\right) & \theta^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{3}}\left(k\theta^{\frac{3}{2}}\right) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{\det(M(t_0))} \begin{bmatrix} \psi^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{3}}\left(k\psi^{\frac{3}{2}}\right) & \psi^{\frac{1}{2}}Y_{\frac{1}{3}}\left(k\psi^{\frac{3}{2}}\right) \\ \psi J_{-\frac{2}{3}}\left(k\psi^{\frac{3}{2}}\right) & \psi Y_{-\frac{2}{3}}\left(k\psi^{\frac{3}{2}}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta Y_{-\frac{2}{3}}\left(k\theta^{\frac{3}{2}}\right) & \theta^{\frac{1}{2}}Y_{\frac{1}{3}}\left(k\theta^{\frac{3}{2}}\right) \\ -\theta J_{-\frac{2}{3}}\left(k\theta^{\frac{3}{2}}\right) & \theta^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{3}}\left(k\theta^{\frac{3}{2}}\right) \end{bmatrix}$$

La figura 4 muestra las lenguas de Arnold de (2.13)

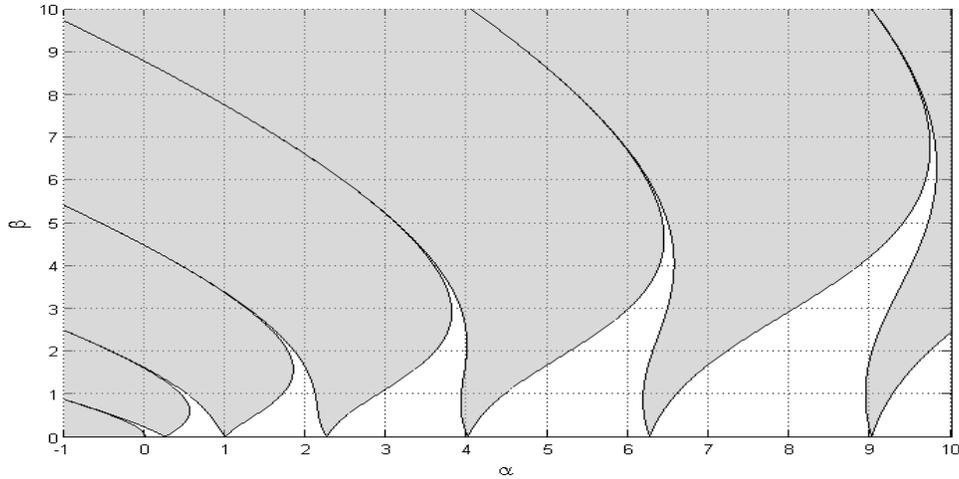


Figura 4. Lenguas de Arnold de la ecuacion (2.13) con $q(t) = t - \pi$,

$$q(t + 2\pi) = q(t).$$

3.0 SISTEMAS HAMILTONIANOS Y ECUACIÓN DE LAMÉ

Los sistemas Hamiltonianos modelan un gran número de problemas dentro de la física. En este capítulo abordaremos de una forma muy general el estudio de sistemas lineales Hamiltonianos con un número finito de grados de libertad, estos sistemas, cuando son invariantes en el tiempo, están representados por matrices Hamiltonianas, cuyos eigenvalores están situados en el plano complejo, simétricamente al eje de los reales e imaginarios [19].

Definición 2.4. *La función*

$$\mathcal{H}(p, q) = [\langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q})]$$

donde $L(q, \dot{q})$ es la función de Lagrange $L(q, \dot{q}) = T - \Pi$ con T energía cinética y Π energía potencial, q representan las coordenadas generalizadas y p los impulsos generalizados y $\langle p, \dot{q} \rangle$ representa el producto interno, recibe el nombre de **función de Hamilton** o **hamiltoniano** [18].

Definición 2.5. *Se dice que un sistema es Hamiltoniano si existe una función Hamiltoniana $\mathcal{H}(p, q) \rightarrow R$, $p \in R^n$, $q \in R^n$ donde*

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \left(\frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial p_j} \right)^T \\ \dot{p}_j &= - \left(\frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial q_j} \right)^T \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde q_i son las coordenadas generalizadas y p_i son los impulsos generalizados [19].

Usando esta definición podemos ver que, para sistemas invariantes en el tiempo, la función Hamiltoniana es constante para cualquier solución de (3.1). En muchos sistemas físicos la función Hamiltoniana representa la energía de la función, la cual es constante a lo largo del tiempo.

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) = 0$$

3.1 MATRIZ HAMILTONIANA

Ahora consideremos sistemas lineales Hamiltonianos periódicos, en éste caso es posible definir a los sistemas Hamiltonianos mediante sistemas recíprocos.

Considere el sistema

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t+T) = A(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (3.2)$$

donde $A(t)$ es una matriz real o compleja $n \times n$ y T es el periodo mínimo de A . El sistema (3.2) es llamado **recíproco si** para cada multiplicador característico μ , el numero $\bar{\mu}^{-1}$ también es un multiplicador característico [8].

Lema 2.1. Si $A(t)$ de la ecuación (3.2) es real y existe una matriz $n \times n$ no singular D tal que

$$DA(t) = -A'(t)D \quad (A' \text{ es la transpuesta de } A) \quad (3.3)$$

entonces (3.2) es un sistema recíproco. La matriz de transición de estados satisface

$$\Phi'(t, t_0) D \Phi(t, t_0) = D$$

[8].

Los sistemas recíprocos más importantes son sin duda los sistemas Hamiltonianos

$$J\dot{x} = H(t)x \quad (3.4)$$

donde $H(t) = H'(t)$, y $J^{-1}H(t) = -H(t)J$ llamada **matriz Hamiltoniana** es una matriz $2n \times 2n$ de periodo T , ($H'(t)$ es la transpuesta de $H(t)$),

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

I_n es la matriz identidad $n \times n$. Como $J' = J^{-1} = -J$, el sistema (3.4) es un caso especial de (3.2) como $A = -JH$ y $JA = H = H' = A'J' = -A'J$. Por el lema anterior podemos decir que (3.4) es un sistema recíproco. Además la matriz transición de estados satisface

$$\Phi'(t, t_0) J \Phi(t, t_0) = J$$

3.2 MATRIZ SIMPLÉCTICA

Definición 1. El conjunto de todas las matrices S, J que satisfacen la ecuación

$$S^*JS = J \quad (3.6)$$

es llamado grupo simpléctico [8].

Las matrices simplécticas tienen ciertas propiedades que nos brindan ayuda en el estudio de la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales, algunas de ellas se presentan a continuación.

1) Toda matriz simpléctica es no singular

Prueba: $\det(S^*JS) = \det(S^*)\det(S)\det(J) = \det(S)^2\det(J) = \det(J) \Rightarrow \det(S) = \pm 1$

2) Los valores característicos de una matriz simpléctica son simétricos con respecto al círculo unitario

Prueba: Premultiplicando por J^{-1} y postmultiplicando por S^{-1} a (3.6)

$$J^{-1}S^*J = S^{-1}$$

podemos observar que S^* es similar a S^{-1} por lo tanto $\sigma(S) = \sigma(S^*) = \sigma(S^{-1})$ o dicho de otra forma, si $\lambda \in \sigma(S) \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(S) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(S) \Rightarrow \bar{\lambda}^{-1} \in \sigma(S)$

3) La matriz transición de estados $\Phi(t, t_0)$ es simpléctica

Prueba: Sea $Y(t) = \Phi(t, t_0)$ la matriz transición de estados de

$$\frac{dx}{dt} = JH(t)x, \quad H(t) = H'(t)$$

por lo tanto $Y(t)$ satisface

$$\dot{Y}(t) = JH(t)Y(t)$$

para que $Y(t)$ sea simpléctica se debe satisfacer la ecuación

$$Y'(t)JY(t) = J$$

derivando

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [Y'(t) JY(t)] &= \dot{Y}'(t) JY(t) + Y'(t) J\dot{Y}(t) \\ &= Y'(t) H(t) J'JY(t) + Y'(t) JJH(t) Y(t) \\ &= Y'(t) H(t) Y(t) - Y'(t) H(t) Y(t) = 0\end{aligned}$$

debido a $J'J = I_{2n}$, $JJ = -I_{2n}$. Por lo anterior podemos concluir que $Y'(t) JY(t)$ es constante y como $Y(t_0) = I_{2n}$ podemos decir que

$$Y'(t) JY(t) = J$$

3.3 ECUACIÓN DE HILL COMO SISTEMA HAMILTONIANO

Como se menciona en el capítulo anterior la ecuación de Hill tiene la forma

$$\ddot{y} + [\alpha + \beta q(t)] y = 0, \quad q(t+T) = q(t)$$

sin pérdida de generalidad podemos escribir la ecuación anterior como

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

con $k = \alpha + \beta q(t)$. Como es bien sabido, se puede representar en forma de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

con $x_1 = y$, $x_2 = m\dot{y}$, reescribiendo (3.7)

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t+T) = A(t)$$

notando que

$$A = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix} = -JH$$

con

$$H = H' = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix}$$

y así podemos decir que la ecuación de Hill es un sistema Hamiltoniano. Además, como se demostró en el apartado anterior, la matriz de transición de estados cumple con la ecuación (3.6)

$$JA(t) J' = -A'(t)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta q(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha + q(t)\beta \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de monodromía también es una matriz simpléctica por el hecho de que la matriz de transición de estados es una matriz simpléctica, de este hecho y por la teoría de Floquet, donde la estabilidad del sistema recae en la ubicación de los multiplicadores característicos con respecto al círculo unitario, podemos confirmar que, los sistemas que tengan la forma de la ecuación de Hill para ser estables deberán tener sus multiplicadores característicos sobre el círculo unitario y no ser raíz múltiple del polinomio mínimo de la matriz de monodromía; inestables si al menos un multiplicador característico no está sobre el círculo unitario o algún multiplicador característico tiene módulo 1 y es raíz múltiple del polinomio mínimo de la matriz de monodromía..

3.4 ECUACIÓN DE LAMÉ

La ecuación de Lamé puede ser escrita de la forma

$$\ddot{y} + [\alpha - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x, k^2)] y = 0 \quad (3.8)$$

donde $\operatorname{sn}(x, k^2)$ es una función elíptica de Jacobi, k^2 es llamado el módulo de $\operatorname{sn}(x, k^2)$, α es un número real y n es entero. Nosotros estudiaremos el caso general donde α, n son reales, que contiene como caso particular la ecuación de Lamé.

3.4.1 Funciones Elípticas

Las funciones elíptica de Jacobi son funciones doblemente periódicas, dependen del parámetro $0 < k^2 < 1$, conocido como el módulo y de la variable independiente x . Sea k^2 el modulo y k_1^2 el modulo complementario tales que

$$k^2 + k_1^2 = 1$$

Las constantes K, iK' están definidas por

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1-k^2 \sin^2(\theta))^{\frac{1}{2}}} \\ iK' &= i \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1-k_1^2 \sin^2(\theta))^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Las funciones elípticas de Jacobi $sn(t, k^2)$, $cn(t, k^2)$, $dn(t, k^2)$ están definidas como las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales [15]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= yz \\ \dot{y} &= -zx \\ \dot{z} &= -k^2 xy \end{aligned} \quad (3.10)$$

con condiciones iniciales $x(0) = sn(0, k^2) = 0$, $y(0) = cn(0, k^2) = 1$, $z(0) = dn(0, k^2) = 1$, el sistema de ecuaciones diferenciales (3.10) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} sn(t, k^2) &= cn(t, k^2) dn(t, k^2) \\ \frac{d}{dt} cn(t, k^2) &= -dn(t, k^2) sn(t, k^2) \\ \frac{d}{dt} dn(t, k^2) &= -k^2 sn(t, k^2) cn(t, k^2) \end{aligned} \quad (3.11)$$

del sistema (3.10) y (3.11) podemos notar que cuando $k^2 \rightarrow 0$

$$sn(t, k^2) \rightarrow \sin t, \quad cn(t, k^2) \rightarrow \cos t, \quad dn(t, k^2) \rightarrow 1$$

Propiedad 1. Del sistema (3.10) se puede observar que

$$I = x^2 + y^2, \quad J = k^2 x^2 + z^2 \quad (3.12)$$

las funciones I, J son constantes a lo largo de las soluciones de (3.10)

Prueba: Derivando (3.12) con respecto al tiempo tenemos

$$\frac{d}{dt}I(x(t), y(t)) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2xyz - 2xyz = 0$$

$$\frac{d}{dt}J(x(t), y(t)) = 2k^2x\dot{x} + 2z\dot{z} = 2k^2xyz - 2k^2xyz = 0$$

por lo tanto I, J son constantes a lo largo de las soluciones de (3.10)

Propiedad 2. Para algún k^2 fijo, $0 < k^2 < 1$, y para todo t las identidades

$$sn^2(t, k^2) + cn^2(t, k^2) = 1, \quad k^2 sn^2(t, k^2) + dn^2(t, k^2) = 1$$

se satisfacen.

Prueba: Las igualdades son las mismas que en la ecuación (3.12) con $I = J = 1$

Propiedad 3. Para algún k^2 fijo, $0 < k^2 < 1$, $sn(t, k^2)$ es una función impar; $cn(t, k^2)$ y $dn(t, k^2)$ son funciones pares de t .

Prueba: Como $(sn(t, k^2), cn(t, k^2), dn(t, k^2))$ son soluciones de (3.10), también lo son $(-sn(-t, k^2), cn(-t, k^2), dn(-t, k^2))$ pero estas dos soluciones satisfacen las condiciones iniciales $(0, 1, 1)$ por lo que el teorema de unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales asegura que estas son soluciones son idénticas.

Propiedad 4. Las funciones elípticas de Jacobi son bi-periódicas.

Prueba: Sea K el valor donde las funciones

$$\begin{aligned} sn(t + K, k^2) &= cd(t, k^2) \\ cn(t + K, k^2) &= -k_1^2 sd(t, k^2) \\ dn(t + K, k^2) &= k_1^2 nd(t, k^2) \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $cd(t, k^2) = \frac{cn(t, k^2)}{dn(t, k^2)}$, $sd(t, k^2) = \frac{sn(t, k^2)}{dn(t, k^2)}$ y $nd(t, k^2) = \frac{1}{dn(t, k^2)}$, de (3.13) podemos decir que

$$\begin{aligned} sn(t + 2K, k^2) &= cd(t + K, k^2) = -\frac{k_1^2 sd(t, k^2)}{k_1^2 nd(t, k^2)} = -sn(t, k^2) \\ cn(t + 2K, k^2) &= -k_1^2 sd(t + K, k^2) = \frac{k_1^2 cd(t, k^2)}{k_1^2 nd(t, k^2)} = -cn(t, k^2) \\ dn(t + 2K, k^2) &= k_1^2 nd(t + K, k^2) = \frac{k_1^2}{k_1^2 nd(t, k^2)} = dn(t, k^2) \end{aligned}$$

de forma similar llegamos a

$$\begin{aligned}
 sn(t + 4K, k^2) &= sn(t, k^2) \\
 cn(t + 4K, k^2) &= cn(t, k^2) \\
 dn(t + 2K, k^2) &= dn(t, k^2)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ahora escogemos iK' para que sea el valor donde las funciones

$$\begin{aligned}
 sn(t + K', k^2) &= \frac{1}{k^2} ns(t, k^2) \\
 cn(t + K', k^2) &= \frac{1}{k^2} ds(t, k^2) \\
 dn(t + K', k^2) &= ics(t, k^2)
 \end{aligned}$$

donde $ns(t, k^2) = \frac{1}{sn(t, k^2)}$, $ds(t, k^2) = \frac{dn(t, k^2)}{sn(t, k^2)}$ y $cs(t, k^2) = \frac{cn(t, k^2)}{sn(t, k^2)}$, siguiendo el mismo procedimiento obtenemos

$$\begin{aligned}
 sn(t + 2K', k^2) &= sn(t, k^2) \\
 cn(t + 4K', k^2) &= cn(t, k^2) \\
 dn(t + 4K', k^2) &= dn(t, k^2)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Por lo tanto podemos decir que $sn(t, k^2)$ es periódica con período $4K$ y $2K'$, $cn(t, k^2)$ es periodo con periodo $4K$ y $4K'$ y $dn(t, k^2)$ es periódica con periodo $2K$ y $4K'$.

Las funciones elípticas de Jacobi $x = sn(t, k^2)$, $y = cn(t, k^2)$, y $z = dn(t, k^2)$ también pueden ser definidas como aquellas funciones que satisfacen las ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^2 &= (1 - x^2)(1 - k^2 x^2), & x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= 1 \\
 \dot{y}^2 &= (1 - y^2)(k_1^2 + k^2 y^2), & y(0) &= 1, & \dot{y}(0) &= 0 \\
 \dot{z}^2 &= (1 - z^2)(z^2 - k_1^2), & z(0) &= 1, & \dot{z}(0) &= 0
 \end{aligned}$$

En particular, $sn(x, k^2)$ esta definida por

$$x = \int_0^{sn(x, k^2)} [(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt$$

Las funciones elípticas de Jacobi se pueden definir con respecto a ciertas integrales. Así si

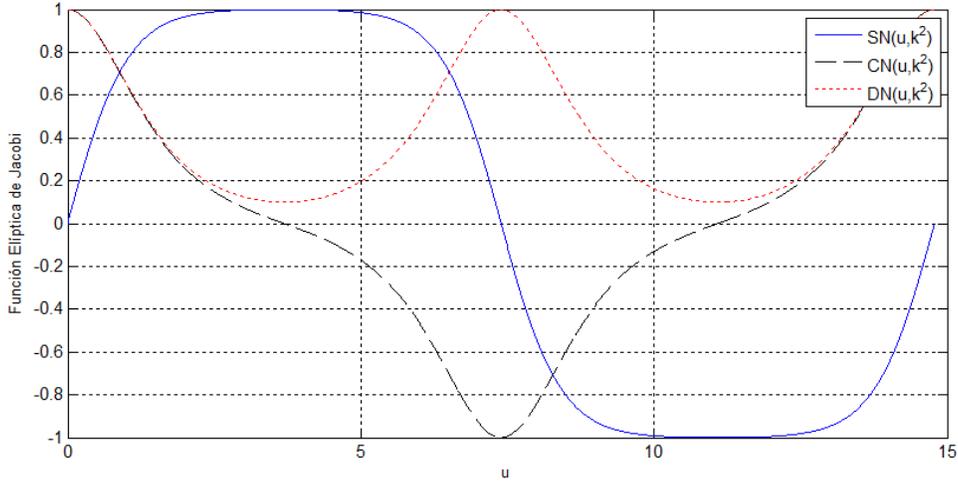
$$u = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \tag{3.16}$$

el ángulo φ es llamado la amplitud

$$\varphi = am u \quad (3.17)$$

y así podemos definir $sn(u, k^2) = \sin \varphi$, $cn(u, k^2) = \cos \varphi$, $dn(u, k^2) = (1 - k^2 \sin^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}$.

La siguiente figura muestra las graficas de las funciones elípticas de Jacobi para $k^2 = 0.99$



Funciones elpticas de Jacobi con $k^2 = 0.99$, $K = 3.6956$

Las funciones elípticas de Jacobi pueden ser utilizadas para encontrar la solución de diversas ecuaciones diferenciales como la ecuación del péndulo y la ecuación de Duffing. Para obtener más información sobre funciones elípticas de Jacobi se pueden consultar las siguientes referencias, [7][22][15][1]

3.4.2 Trigonometrización de la ecuación de Lamé

La ecuación de Lamé (3.8) puede ser escrita en 5 diferentes formas, con funciones elípticas de Jacobi, con funciones elípticas de Weierstrass, dos formas algebraicas y una trigonométrica, en este apartado obtendremos la ecuación de Lamé en forma trigonométrica a partir de (3.8) [3].

Sea la ecuación de Lamé

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\alpha - n(n+1)k^2 sn^2(x, k^2)] y = 0$$

realizando el cambio de variable $\nu = \operatorname{am} x$ donde $\operatorname{am} x$ esta definido por (3.16) y (3.17), de (3.16) podemos obtener

$$\frac{dx}{d\nu} = (1 - k^2 \sin^2 \nu)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

derivando y con respecto a ν tenemos

$$\frac{dy}{d\nu} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\nu}$$

sustituyendo (3.18) en la ecuación anterior y despejando $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = (1 - k^2 \sin^2 \nu)^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{d\nu} \quad (3.19)$$

obteniendo la segunda derivada de y con respecto a ν

$$\frac{d^2y}{d\nu^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{dx}{d\nu} \right)^2 + \frac{dy}{dx} \frac{d^2x}{d\nu^2}$$

sustituyendo (3.18) y (3.19) en la ecuación anterior y despejando $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1 - k^2 \sin^2 \nu) \frac{d^2y}{d\nu^2} - (k^2 \sin \nu \cos \nu) \frac{dy}{d\nu} \quad (3.20)$$

sustituyendo (3.20) en (3.8) y por el hecho de que $\operatorname{sn}(u, k^2) = \sin(\nu)$

$$(1 - k^2 \sin^2 \nu) \frac{d^2y}{d\nu^2} - (k^2 \sin \nu \cos \nu) \frac{dy}{d\nu} + [\alpha - n(n+1)k^2 \sin^2(\nu)] y = 0 \quad (3.21)$$

La ecuación (3.21) es la representación trigonométrica de la ecuación de Lamé, por comodidad, nos gustaría llevar esta ecuación a la forma de la ecuación de Hill (2.9).

Multiplicando ambos lados de la ecuación (3.21) por $(1 - k^2 \sin^2 \nu)^{-1}$ y definiendo $\beta = n(n+1)k^2$ tenemos

$$\frac{d^2y}{d\nu^2} - \frac{k^2 \sin \nu \cos \nu}{1 - k^2 \sin^2 \nu} \frac{dy}{d\nu} + \frac{\alpha - \beta \sin^2(\nu)}{1 - k^2 \sin^2 \nu} y = 0 \quad (3.22)$$

definiendo

$$\begin{aligned} f(\nu) &= -\frac{k^2 \sin \nu \cos \nu}{1 - k^2 \sin^2 \nu} \\ g(\nu) &= \frac{\alpha - \beta \sin^2(\nu)}{1 - k^2 \sin^2 \nu} \end{aligned} \quad (3.23)$$

proponiendo la transformación

$$y(\nu) = z(\nu) e^{-\frac{1}{2} \int_0^\nu f(\tau) d\tau} \quad (3.24)$$

obteniendo la primer y segunda derivada con respecto a ν

$$\dot{y}(\nu) = \dot{z}(\nu) e^{-\frac{1}{2} \int_0^\nu f(\tau) d\tau} - \frac{1}{2} z(\nu) f(\nu) e^{-\frac{1}{2} \int_0^\nu f(\tau) d\tau} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(\nu) &= e^{-\frac{1}{2} \int_0^\nu f(\tau) d\tau} \left[\ddot{z}(\nu) - \frac{1}{2} \dot{z}(\nu) f(\nu) \right] \\ &+ f(\nu) e^{-\frac{1}{2} \int_0^\nu f(\tau) d\tau} \left[-\frac{1}{2} \dot{z}(\nu) - \frac{1}{2} \dot{z}(\nu) + \frac{1}{4} z(\nu) f(\nu) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

sustituyendo (3.24)-(3.26) en (3.22) obtenemos

$$\ddot{z}(\nu) + \left[g(\nu) - \frac{1}{2} \dot{f}(\nu) - \frac{1}{4} f^2(\nu) \right] z(\nu) = 0$$

sustituyendo (3.23) en la ecuación anterior y simplificando tenemos

$$\ddot{z}(\nu) + \left(\frac{k^2 \cos^2(\nu) (2 + k^2 \sin^2 \nu) + 2(-1 + k^2 \sin^2 \nu) (-2\alpha + (k^2 + 2\beta) \sin^2 \nu)}{4(-1 + k^2 \sin^2 \nu)^2} \right) z(\nu) = 0 \quad (3.27)$$

y así obtenemos la ecuación de Lamé trigonometrizada en formato de la ecuación de Hill.

Notamos que la ecuación (3.27) no es mas simple que (3.8), la ventaja de la ecuación (3.27) sobre la ecuación de Lamé original reside en el uso de funciones conocidas, $\sin(t)$ y $\cos(t)$, la representación trigonométrica de la ecuación de Lamé, es utilizada para describir algunas de las propiedades más importantes como la ubicación de puntos de coexistencia, en el próximo capítulo se hablará más sobre la ecuación de Lamé y los puntos de coexistencia.

4.0 COEXISTENCIA EN LA ECUACIÓN DE HILL

Dada la ecuación de Hill

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta q(t)] x = 0, \quad q(t + T) = q(t) \quad (4.1)$$

existe una serie infinita de valores γ de α y β fija, tales que

$$\gamma_0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \gamma_3 \leq \dots \quad (4.2)$$

$$\bar{\gamma}_1 \leq \bar{\gamma}_2 < \bar{\gamma}_3 \leq \bar{\gamma}_4 < \dots \quad (4.3)$$

Para $\alpha = \gamma_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) existe una solución T -periódica de (4.1); para $\alpha = \bar{\gamma}_i$ existe una solución $2T$ -periódica, a veces llamada antiperiódica de (4.1).

Los valores γ se obtienen resolviendo la ecuación

$$x_1(T, \alpha) + \dot{x}_2(T, \alpha) - 2 = 0$$

para obtener (4.2) y para obtener (4.3) se resuelve la ecuación

$$x_1(T, \alpha) + \dot{x}_2(T, \alpha) + 2 = 0$$

Donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de (4.1) con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 1$

Nota: γ_i y $\bar{\gamma}_i$ son los valores de α donde los multiplicadores característicos $\mu = 1$ y $\mu = -1$, respectivamente.

Los intervalos

$$(-\infty, \gamma_0), (\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2), (\gamma_1, \gamma_2), (\bar{\gamma}_3, \bar{\gamma}_4), \dots$$

son intervalos de inestabilidad, dicho de otra forma, para valores de α dentro de estos intervalos existen soluciones linealmente independientes de (4.1) no acotadas. Las secuencias (4.2) y (4.3) están relacionadas por la desigualdad

$$-\infty < \gamma_0 < \bar{\gamma}_1 \leq \bar{\gamma}_2 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \dots$$

Por lo tanto las soluciones con periodo T o $2T$ juegan un papel muy importante en al estabilidad puesto los valores γ_i son obtenidos con los multiplicadores característicos de periodo T y los valores $\bar{\gamma}_i$ son obtenidos con los multiplicadores característicos de período $2T$.

La *coexistencia* se define como la ocurrencia simultánea de dos soluciones de período T o $2T$, esto sucede cuando dos valores γ_i o $\bar{\gamma}_i$ se unen. En otras palabras, cuando un intervalo de inestabilidad colapsa.

4.1 MÉTODO PARA DETERMINAR COEXISTENCIA

Un método para determinar la coexistencia de las soluciones de una ecuación diferencial, fue desarrollado por Ince [10], este consiste en asumir la existencia de una solución par y una impar con periodo fundamental T o $2T$, estas soluciones pueden ser representadas como una serie infinita de cosenos y senos respectivamente, el requerimiento de convergencia, de las soluciones, lleva a la condición que el determinante 2×2 formado por el n -ésimo y el $(n - 1)$ -ésimo coeficiente, de cada solución T o $2T$, debe tender a 0 mientras n tiende a infinito [14]. Los determinantes están conectados por relaciones de recurrencia obtenidas al sustituir una solución, en forma de serie infinita, en la ecuación diferencial estudiada.

En el caso de la ecuación de Mathieu, como fué mostrado por Ince [10], la condición para que el determinante tienda a 0 es que la serie de cosenos o la serie de senos tiendan a 0 idénticamente, por lo tanto la coexistencia en el caso de la ecuación de Mathieu es imposible.

Para aplicar este método, es necesario transformar la ecuación diferencial que deseemos estudiar en una ecuación de Ince

$$(1 + a \cos(2x)) \ddot{y}(x) + b \sin(2x) \dot{y}(x) + (c + d \cos(2x)) y(x) = 0 \quad (4.4)$$

y seguir el método. Para conocer los pasos detallados ver el artículo original de Ince [10].

4.2 COEXISTENCIA EN LA ECUACIÓN DE LAMÉ

En el problema de la coexistencia en la ecuación de Hill, el caso de la ecuación de Lamé es particularmente importante, porque ofrece un ejemplo de una ecuación del tipo Hill para el cual todos los intervalos de inestabilidad desaparecen excepto por un número finito de ellos.

Sea la ecuación de Lamé en forma trigonométrica

$$(1 - k^2 \sin^2 x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (k^2 \sin x \cos x) \frac{dy(x)}{dx} + [\alpha - n(n+1)k^2 \sin^2(x)] y(x) = 0 \quad (4.5)$$

se desea transformar (4.5) a la ecuación de Ince (4.4), recordando que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ y $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$

$$\begin{aligned} (1 - k^2 \sin^2 x) &= 1 - k^2 (\cos^2 x - \cos 2x) = 1 - \frac{k^2 - k^2 \cos 2x}{2} \\ k^2 \sin x \cos x &= \frac{k^2}{2} \sin 2x \\ n(n+1)k^2 \sin^2 x &= n(n+1)k^2 (\cos^2 x - \cos 2x) = \frac{n(n+1)k^2(1 - \cos 2x)}{2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

sustituyendo (4.6) en (4.5)

$$\left(\frac{2 - k^2 + k^2 \cos 2x}{2} \right) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - \left(\frac{k^2}{2} \sin 2x \right) \frac{dy(x)}{dx} + \left[\frac{2\alpha - n(n+1)k^2(1 - \cos 2x)}{2} \right] y(x) = 0$$

multiplicando ambos lados por $\frac{2}{2-k^2}$

$$\left(1 + \left(\frac{k^2}{2-k^2} \right) \cos 2x \right) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - \left(\frac{k^2}{2-k^2} \sin 2x \right) \frac{dy(x)}{dx} + \left[\frac{2\alpha - n(n+1)k^2(1 - \cos 2x)}{2-k^2} \right] y(x) = 0$$

definiendo

$$\begin{aligned} a &= -b = \frac{k^2}{2-k^2} \\ c &= \frac{2\alpha - n(n+1)k^2}{2-k^2} \\ d &= \frac{n(n+1)k^2}{2-k^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

obtenemos la ecuación de Ince de la ecuación de Lamé.

Asumiendo que (4.4) tiene soluciones periódicas de la forma

$$y_{ce} = \sum_0^{\infty} A_{2n} \cos 2nx \quad (4.8)$$

$$y_{se} = \sum_0^{\infty} B_{2n} \sin 2nx \quad (4.9)$$

$$y_{co} = \sum_0^{\infty} A_{2n+1} \cos (2n+1)x \quad (4.10)$$

$$y_{so} = \sum_0^{\infty} B_{2n+1} \sin (2n+1)x \quad (4.11)$$

sustituyendo la solución (4.8) en (4.4) obtenemos las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{2} - b - 2a\right) A_2 + cA_0 &= 0 \\ \left(\frac{d}{2} - 2b - 8a\right) A_4 + (c-4) A_2 + dA_0 &= 0 \\ \left(\frac{d}{2} - 3b - 18a\right) A_6 + (c-16) A_4 + \left(\frac{d}{2} + b - 2a\right) A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

el termino general para $n \geq 2$ es

$$\begin{aligned} (d - (2n+2)b - (2n+2)^2 a) A_{2n+2} + 2(c - 4n^2) A_{2n} \\ + (d + (2n-2)b - (2n-2)^2 a) A_{2n-2} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Haciendo lo mismo para la solución (4.9), las relaciones de recurrencia son

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{2} - 2b - 8a\right) B_4 + (c-4) B_2 &= 0 \\ \left(\frac{d}{2} - 3b - 18a\right) B_6 + (c-16) B_4 + \left(\frac{d}{2} + b - 2a\right) B_2 &= 0 \\ \left(\frac{d}{2} - 4b - 32a\right) B_8 + (c-32) B_6 + \left(\frac{d}{2} + 2b - 8a\right) B_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

el termino general para $n \geq 2$ es

$$\begin{aligned} (d - (2n+2)b - (2n+2)^2 a) B_{2n+2} + 2(c - 4n^2) B_{2n} \\ + (d + (2n-2)b - (2n-2)^2 a) B_{2n-2} = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Reescribiendo (4.13) y (4.15)

$$\begin{aligned} (-d + (2n + 2)b + (2n + 2)^2 a) \frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} + (-d - (2n - 2)b + (2n - 2)^2 a) \frac{A_{2n-2}}{A_{2n}} &= 2(c - 4n^2) \\ (-d + (2n + 2)b + (2n + 2)^2 a) \frac{B_{2n+2}}{B_{2n}} + (-d - (2n - 2)b + (2n - 2)^2 a) \frac{B_{2n-2}}{B_{2n}} &= 2(c - 4n^2) \end{aligned}$$

igualando los lados izquierdos de las dos ecuaciones anteriores y multiplicando por

$$((2n + 2)^2 a + (2n + 2)b - d)^{-1}$$

$$\begin{aligned} &A_{2n+2}B_{2n} + \left(\frac{-d - (2n - 2)b + (2n - 2)^2 a}{(2n + 2)^2 a + (2n + 2)b - d} \right) A_{2n-2}B_{2n} \\ &= B_{2n+2}A_{2n} + \left(\frac{-d - (2n - 2)b + (2n - 2)^2 a}{(2n + 2)^2 a + (2n + 2)b - d} \right) B_{2n-2}A_{2n} \end{aligned}$$

agrupando términos

$$A_{2n+2}B_{2n} - B_{2n+2}A_{2n} = \left(\frac{(2n - 2)^2 a - (2n - 2)b - d}{(2n + 2)^2 a + (2n + 2)b - d} \right) (B_{2n-2}A_{2n} - A_{2n-2}B_{2n})$$

reescribiendo

$$\begin{vmatrix} A_{2n+2} & A_{2n} \\ B_{2n+2} & B_{2n} \end{vmatrix} = \frac{(2n - 2)^2 a - (2n - 2)b - d}{(2n + 2)^2 a + (2n + 2)b - d} \begin{vmatrix} A_{2n} & A_{2n-2} \\ B_{2n} & B_{2n-2} \end{vmatrix} \quad (4.16)$$

de los primeros términos de las relaciones de recurrencia (4.12) y (4.14), obtenemos que

$$\left(-\frac{d}{2} + 2b + 8a \right) \frac{A_4}{A_2} - d \frac{A_0}{A_2} = \left(-\frac{d}{2} + 2b + 8a \right) \frac{B_4}{B_2}$$

agrupando términos

$$\left(-\frac{d}{2} + 2b + 8a \right) (A_4 B_2 - B_4 A_2) = d A_0 B_2$$

reescribiendo

$$\begin{vmatrix} A_4 & A_2 \\ B_4 & B_2 \end{vmatrix} = \frac{d}{8a + 2b - \frac{d}{2}} A_0 B_2 \quad (4.17)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (4.16) y (4.17) podemos decir que

$$\begin{vmatrix} A_{2n+2} & A_{2n} \\ B_{2n+2} & B_{2n} \end{vmatrix} = -2 \prod_{r=1}^n \frac{(2r - 2)^2 a - (2r - 2)b - d}{(2r + 2)^2 a + (2r + 2)b - d} A_0 B_2 \quad (4.18)$$

reescribiendo (4.18) con ayuda de la teoría de la función Gama

$$\prod_{n=1}^m \left[\frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_k)} \right] = \prod_{m=1}^k \frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)}$$

reescribiendo el cociente del lado derecho de la ecuación (4.18)

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^n \frac{(2r-2)^2 a - (2r-2)b - d}{(2r+2)^2 a + (2r+2)b - d} &= \prod_{r=1}^n \frac{(r-1)^2 - (r-1)\frac{b}{2a} - \frac{d}{4a}}{(r+1)^2 + (r+1)\frac{b}{2a} - \frac{d}{4a}} \\ &= \prod_{r=1}^n \frac{\left(r - \left(1 + \frac{b}{4a} - \frac{\sqrt{b^2+4ad}}{4a}\right)\right) \left(r - \left(1 + \frac{b}{4a} + \frac{\sqrt{b^2+4ad}}{4a}\right)\right)}{\left(r - \left(-1 - \frac{b}{4a} - \frac{\sqrt{b^2+4ad}}{4a}\right)\right) \left(r - \left(-1 - \frac{b}{4a} + \frac{\sqrt{b^2+4ad}}{4a}\right)\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(2 + \frac{b}{4a} + \frac{\sqrt{b^2+4ad}}{4a}\right) \Gamma\left(2 + \frac{b}{4a} - \frac{\sqrt{b^2+4ad}}{4a}\right)}{\Gamma\left(-\frac{b}{4a} + \frac{\sqrt{b^2+4ad}}{4a}\right) \Gamma\left(-\frac{b}{4a} - \frac{\sqrt{b^2+4ad}}{4a}\right)} \end{aligned}$$

definiendo $p = \frac{b}{4a}$, $q = \frac{\sqrt{b^2+4ad}}{4a}$

$$\prod_{r=1}^n \frac{(2r-2)^2 a - (2r-2)b - d}{(2r+2)^2 a + (2r+2)b - d} = \frac{\Gamma(2+p+q) \Gamma(2+p-q)}{\Gamma(-p+q) \Gamma(-p-q)}$$

por lo tanto podemos reescribir (4.18)

$$\begin{vmatrix} A_{2n+2} & A_{2n} \\ B_{2n+2} & B_{2n} \end{vmatrix} = -2 \frac{\Gamma(2+p+q) \Gamma(2+p-q)}{\Gamma(-p+q) \Gamma(-p-q)} A_0 B_2 \quad (4.19)$$

Como se dijo en la sección anterior, la condición para que las soluciones periódicas coexistan, es que el determinante de la matriz formada por las relaciones de recurrencia (4.19) sea igual a 0, esto es debido a la condición de convergencia de las soluciones representadas en forma de series infinitas, es decir la serie $\sum_0^{\infty} D_n \cos nx$ sera convergente si $D_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, por lo que

$$\frac{\Gamma(2+p+q) \Gamma(2+p-q)}{\Gamma(-p+q) \Gamma(-p-q)} A_0 B_2 = 0 \quad (4.20)$$

De la ecuación (4.20) se puede ver que la condición para que las soluciones π periódicas coexistan se cumple cuando:

1.- Si $A_0 B_2 \neq 0$ y el argumento de una de las dos funciones gama del denominador de (4.20) es igual a 0 o es un entero negativo, esto debido a que la función gama tiene polos simples en 0 y en los enteros negativos.

2.- Si $A_0B_2 = 0$ y uno de los argumentos de las dos funciones gamma del numerador de (4.20) es igual a 0 o es un entero negativo.

La segunda condición se debe a que si $A_0B_2 = 0$ la serie de senos (4.9) o la de cosenos (4.8) se desvanece, a menos que el denominador de (4.18) sea igual a 0, esto implica que las funciones gama del numerador de (4.20) tengan argumento 0 o un entero negativo.

Por lo tanto podemos decir que existirá coexistencia para soluciones T periódicas cuando

$$p \pm q = \pm r \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.21)$$

Hacemos el mismo procedimiento para las soluciones con periodo $2T$ (4.10) y (4.11), las relaciones de recurrencia para la solución (4.10) son

$$\begin{aligned} (d - 3b - 9a) A_3 + (2(c - 2) + d + b + a) A_1 &= 0 \\ (d - 5b - 25a) A_5 + 2(c - 9) A_3 + (d + b - a) A_1 &= 0 \\ (d - 7b - 49a) A_7 + 2(c - 25) A_5 + (d + 3b - 9a) A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

y la forma general para $n \geq 1$ es

$$\begin{aligned} (d - (2n + 3)b - (2n + 3)^2 a) A_{2n+3} + 2(c - (2n + 1)^2) A_{2n+1} \\ + (d + (2n - 1)b - (2n - 1)^2 a) A_{2n-1} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Las relaciones de recurrencia para la solución (4.11) son

$$\begin{aligned} (d - 3b - 9a) B_3 + (2(c - 1) - d + b + a) B_1 &= 0 \\ (d - 5b - 25a) B_5 + 2(c - 9) B_3 + (d + b - a) B_1 &= 0 \\ (d - 7b - 49a) B_7 + 2(c - 25) B_5 + (d + 3b - 9a) B_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

y la forma general para $n \geq 1$ es

$$\begin{aligned} (d - (2n + 3)b - (2n + 3)^2 a) B_{2n+3} + 2(c - (2n + 1)^2) B_{2n+1} \\ + (d + (2n - 1)b - (2n - 1)^2 a) B_{2n-1} = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

De las ecuaciones (4.23) y (4.25) obtenemos

$$\begin{vmatrix} A_{2n+3} & A_{2n+1} \\ B_{2n+3} & B_{2n+1} \end{vmatrix} = \frac{(2n - 1)^2 a - (2n - 1)b - d}{(2n + 3)^2 a + (2n + 3)b - d} \begin{vmatrix} A_{2n} & A_{2n-2} \\ B_{2n} & B_{2n-2} \end{vmatrix} \quad (4.26)$$

de las primeras ecuaciones de (4.22) y (4.24) obtenemos

$$(9a + 3b - d) A_3 B_1 + (a + b - d) A_1 B_1 = (9a + 3b - d) A_3 B_1 + (-a - b + d) A_1 B_1$$

agrupando terminos

$$A_3 B_1 - A_3 B_1 = 2 \frac{-a - b + d}{9a + 3b - d} A_1 B_1$$

reescribiendo

$$\begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix} = 2 \frac{-a - b + d}{9a + 3b - d} A_1 B_1$$

Por lo tanto podemos reescribir (4.26)

$$\begin{vmatrix} A_{2n+3} & A_{2n+1} \\ B_{2n+3} & B_{2n+1} \end{vmatrix} = 2 \prod_{r=0}^n \frac{(2r-1)^2 a - (2r-1)b - d}{(2r+3)^2 a + (2r+3)b - d} A_1 B_1 \quad (4.27)$$

Utilizando la teoría de la función gama y recordando que para que dos soluciones periódicas del mismo periodo coexistan, el determinante de la matriz formada por las relaciones de recurrencia debe ser igual a 0, esto implica que la ecuación

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + p + q\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + p - q\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} - p + q\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} - p - q\right)} A_1 B_1 = 0 \quad (4.28)$$

donde $p = \frac{b}{4a}$, $q = \frac{\sqrt{b^2 + 4ad}}{4a}$, se satisface.

Siguiendo los mismos argumentos que en el caso de la coexistencia en soluciones periódicas con período T , la coexistencia en soluciones $2T$ periódicas se presenta cuando uno de los argumentos de las funciones gama en la ecuación (4.28) son 0 o enteros negativos, esto es

$$p \pm q = \pm r - \frac{1}{2} \quad (4.29)$$

Por la definición (4.7) podemos ver que $p = -\frac{1}{4}$, $q = \frac{2r+1}{4}$ además de (4.21) y (4.29) notamos que

$$\begin{aligned}
-p - q &= -n && \implies r = 2n \\
-p + q &= -n && \implies r = -2n - 1 \\
p + q &= -n - 1 && \implies r = -2n - 2 \\
p - q &= -n - 1 && \implies r = 2n + 1 \\
p + q &= -n - \frac{3}{2} && \implies r = -2n - 3 \\
p - q &= -n - \frac{3}{2} && \implies r = 2n + 2 \\
-p + q &= -n + \frac{1}{2} && \implies r = -2n \\
-p - q &= -n + \frac{1}{2} && \implies r = 2n - 1
\end{aligned}$$

por esto podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Las soluciones de la ecuación de Lamé coexisten si y solo si r es un número entero. Si l está definido por $l = r$ cuando r es un entero no negativo y $l = -r - 1$ si r es un entero negativo, entonces la ecuación de Lamé tendrá $l + 1$ intervalos de inestabilidad incluyendo el intervalo de inestabilidad cero.*

La última parte del teorema se debe a la existencia o inexistencia de dos soluciones del mismo período de la ecuación de Lamé, ésta existencia de soluciones periódicas se puede obtener inspeccionando las ecuaciones de recurrencia (4.12), (4.14), (4.22) y (4.24). Para profundizar en el tema ver [13]¹.

La figura 5² muestra las lenguas de Arnol'd de la ecuación de Lamé, con modulo $k^2 = 0.9995$, recordando que $\beta = k^2 n(n + 1)$ y por el teorema anterior podemos decir que los puntos de coexistencia estarán en $\beta = 1.999$, $\beta = 5.997$, $\beta = 11.994$, $\beta = 19.99$, ...

¹Teorema 7.6, pagina 102 y Teorema 7.7, página 103.

²Las líneas rojas representan los valores de β donde las soluciones de la ecuación de Lamé coexisten.

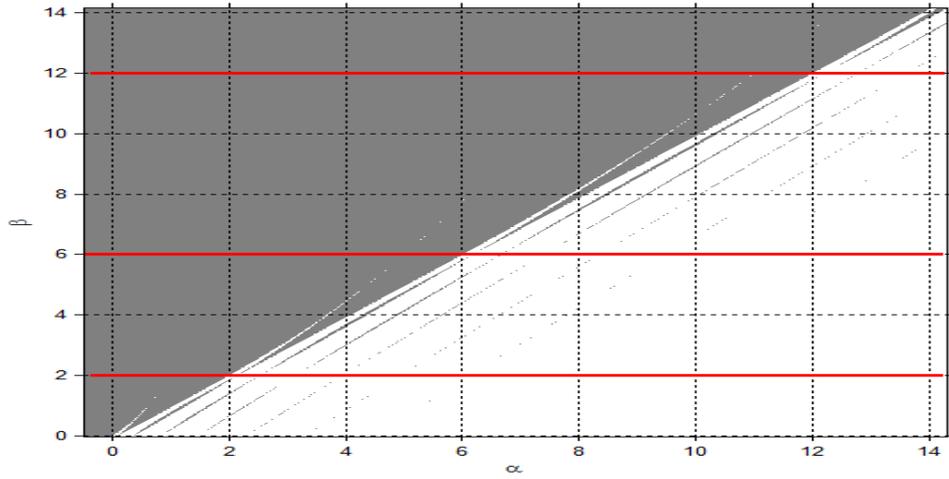


Figura 5. Lenguas de Arnol'd de la ecuacion de Lamé

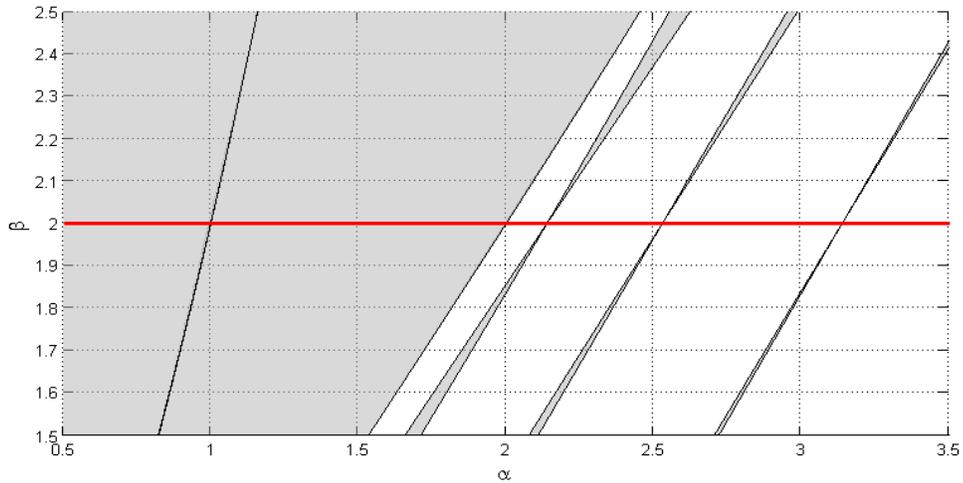


Figura 6. Acercamiento de las lenguas de Arnol'd de la ecuacion de Lamé

4.3 COEXISTENCIA EN LA ECUACIÓN DE HERMITE

La ecuación de Hermite se puede escribir de la forma

$$\ddot{y}(x) + \frac{2(r+1)k^2 \operatorname{sn}(x, k^2) \operatorname{cn}(x, k^2)}{\operatorname{dn}(x, k^2)} \dot{y}(x) + (\alpha - (m-r)(m+r+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x, k^2)) y(x) = 0 \quad (4.30)$$

al igual que en la ecuación de Lamé hacemos el cambio de variable $\nu = am(x)$, usando las ecuaciones (3.18), (3.19), (3.20) y recordando que $sn(u, k^2) = \sin \varphi$, $cn(u, k^2) = \cos \varphi$, $dn(u, k^2) = (1 - k^2 \sin^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}$ tenemos

$$(1 - k^2 \sin^2 \nu) \frac{d^2 y(x)}{d\nu^2} + (2r + 1) k^2 \sin(\nu) \cos(\nu) \frac{dy(x)}{d\nu} + (\alpha - (m - r)(m + r + 1) k^2 \sin^2(\nu)) y(x) = 0 \quad (4.31)$$

llevando la ecuación (4.31) a la forma de Ince tenemos

$$\left(1 - \frac{k^2 - k^2 \cos 2\nu}{2}\right) \frac{d^2 y(x)}{d\nu^2} + (2r + 1) \frac{k^2}{2} \sin(2\nu) \frac{dy(x)}{d\nu} + \left(\alpha - (m - r)(m + r + 1) \frac{k^2 - k^2 \cos(2\nu)}{2}\right) y(x) = 0$$

haciendo

$$\begin{aligned} a &= \frac{k^2}{2 - k^2} \\ b &= \frac{(2r + 1) k^2}{2 - k^2} \\ c &= \frac{2\alpha - (m - r)(m + r + 1) k^2}{2 - k^2} \\ d &= \frac{(m - r)(m + r + 1) k^2}{2 - k^2} \end{aligned}$$

llegamos a la ecuación de Ince.

Aplicando la misma metodología que en la sección anterior para encontrar la coexistencia en las soluciones de la ecuación de Hermite tenemos que los valores p y q son

$$\begin{aligned} p &= \frac{b}{4a} = \frac{\frac{(2r+1)k^2}{2-k^2}}{4\frac{k^2}{2-k^2}} = \frac{2r+1}{4} \\ q &= \frac{\sqrt{b^2 + 4ad}}{4a} = \frac{\sqrt{\frac{k^4 + 4k^4(m^2+m)}{(2-k^2)^2}}}{4\frac{k^2}{2-k^2}} = \frac{2m+1}{4} \end{aligned}$$

realizando un análisis similar al hecho en el caso de Lamé podemos llegar al siguiente teorema

Teorema 4.2. *Si el resultado de $r - m$ o $r + m$ es un entero, las soluciones periódica de la ecuación de Hermite (4.30) coexistirán, si $r + m$ es impar o $r - m$ es par entonces la soluciones son $2K$ periódicas, si $r + m$ es par o $r - m$ es impar entonces la soluciones serán $4K$ periódicas.*

Cuando $r + m$ y $r - m$ sean pares o impares simultáneamente entonces la ecuación de Hermite tendrá solo un número finito de intervalos de inestabilidad [14].

De la ecuación (4.30) notamos que si $r = -1$ la ecuación se convierte en la ecuación de Lamé, también podemos notar que todos los resultados obtenidos para la ecuación de Lamé pueden ser utilizados en la ecuación de Hermite.

Si m y r son enteros entonces $r + m$ y $r - m$ son pares o impares simultáneamente por lo tanto la ecuación de Hermite tendrá un número finito de intervalos de inestabilidad. A continuación se muestran 4 diagramas de las lenguas de Arnol'd de la ecuación de Hermite para diferentes valores de r .

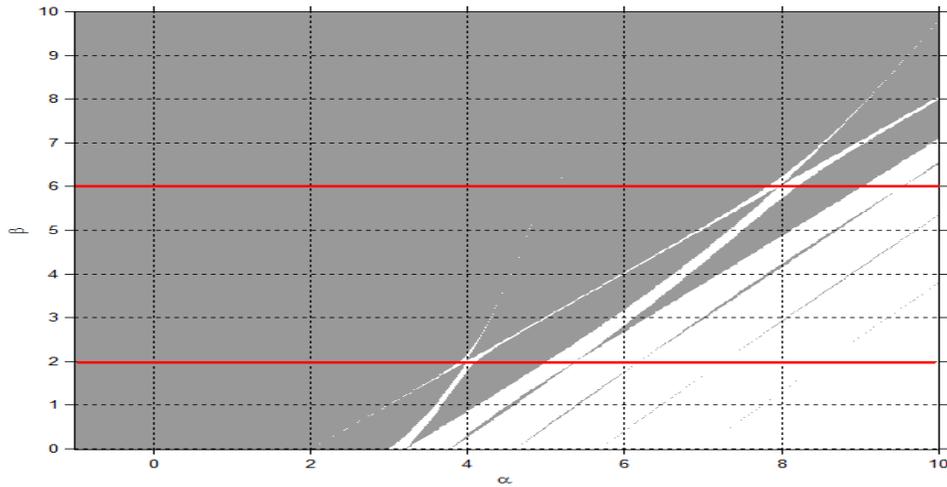


Figura 7a. Lenguas de Arnol'd de la ecuación de Hermite con $r = 2$ y modulo $k^2 = 0.9995$

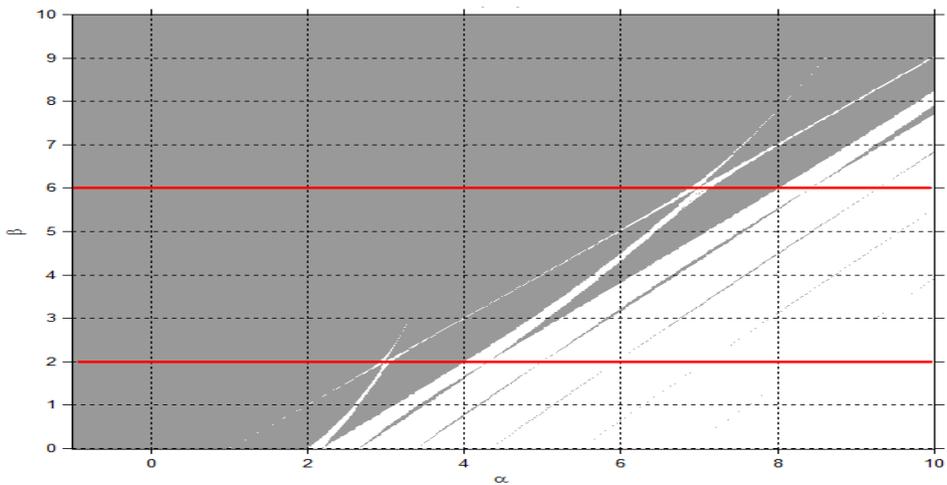


Figura 7b. Lenguas de Arnol'd de la ecuación de Hermite con $r = 1$ y modulo $k^2 = 0.9995$

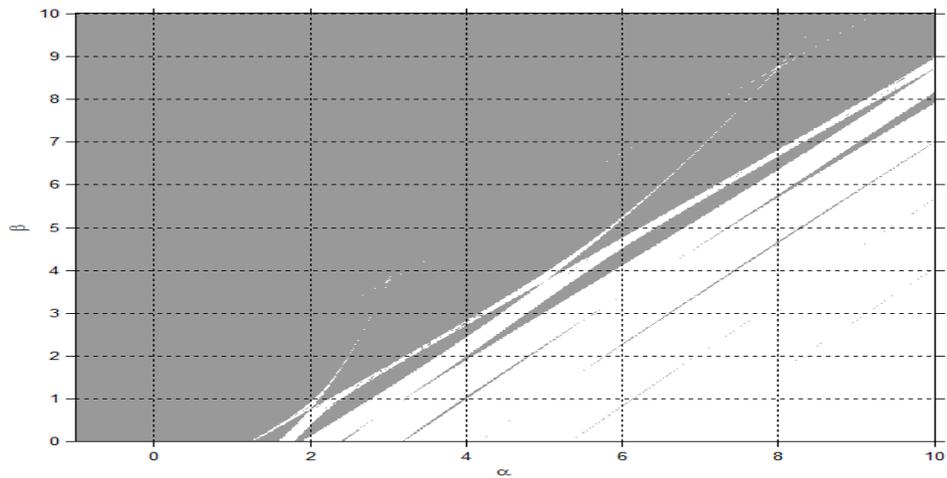


Figura 7c. Lenguas de Arnol'd de la ecuacion de Hermite con $r = 0.5$
y modulo $k^2 = 0.9995$

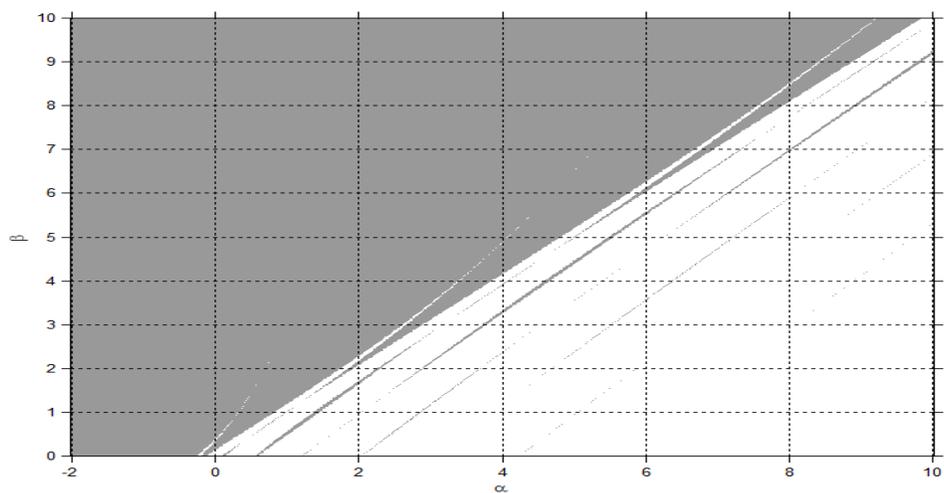


Figura 7d. Lenguas de Arnol'd de la ecuacion de Hermite con
 $r = -1.3$ y modulo $k^2 = 0.9995$

5.0 ECUACIÓN DE HILL. NUEVOS RESULTADOS

Recordando que la ecuación de Hill se puede escribir como

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta q(t)] x = 0, \quad q(t + T) = q(t) \quad (5.1)$$

donde la función $q(t)$ es periódica con periodo mínimo T . Esta ecuación y las ecuaciones con esta forma han sido estudiadas profundamente ya que con estas pueden ser modelados diferentes sistemas físicos.

La teoría de la ecuación de Hill revela un interesante fenómeno que se puede describir de manera simple. Si a una masa le aplicamos una fuerza que varíe periódicamente tal que la fuerza tienda a mover la masa a su posición de equilibrio, en proporción a la posición de la masa, uno esperaría que la masa se quedara en una vecindad cercana al punto de equilibrio. En particular si la fuerza es suficientemente grande para provocar este fenómeno se esperaría que una fuerza mayor también lo provocara, pero este puede no ser el caso, de hecho el aumento de esta fuerza puede incrementar la amplitud de la oscilación hasta llevarlo a la inestabilidad.

En este capítulo se presentan las curvas de velocidad a escape a infinito, como afecta un término disipativo en la estabilidad de la ecuación de Hill y la comparación de las curvas de escape a infinito contra las lenguas de Arnol'd de la ecuación de Hill con amortiguamiento, y se muestran las de zonas de oscilación y no oscilación de las soluciones de una ecuación de Hill.

5.1 VELOCIDAD DE ESCAPE A INFINITO EN ZONAS INESTABLES

Una característica interesante de las lenguas de Arnol'd es que las zonas inestables pueden ser divididas en zonas donde el valor absoluto máximo de los multiplicadores característicos asociados a la ecuación diferencial estudiada pertenece a un intervalo definido ($1 < |\mu|$).

Recordando la Teoría de Floquet nos dice que una ecuación diferencial con coeficientes periódicos $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ tiene soluciones de la forma

$$x_i(t) = p_i(t) e^{\rho_i t} \quad (5.2)$$

donde ρ_i es el exponente característico correspondiente a μ_i , $p_i(t)$ son vectores de funciones con periodo T , la ecuación (5.2) implica lo siguiente; para que la ecuación diferencial con coeficientes periódicos tenga solución estable, los multiplicadores característicos deben ser menores o iguales a 1^1 , dicho de otra forma, los exponentes característicos deben ser números no positivos.

Las figuras 8 y 9 muestran las zonas de velocidad a escape a infinito de las ecuaciones de Mathieu y Meissner.

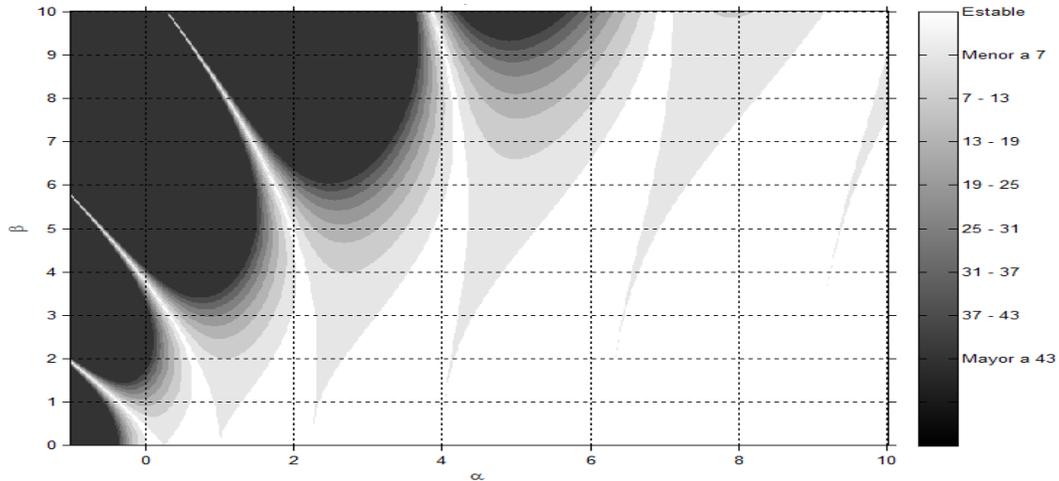


Figura 8. Curvas de velocidad de escape a infinito de la ecuacion de Mathieu.

¹En el caso de la ecuación de Hill de un grado de libertad esto es igual a que el valor absoluto de la traza de la matriz de monodromia sea menor que 2.

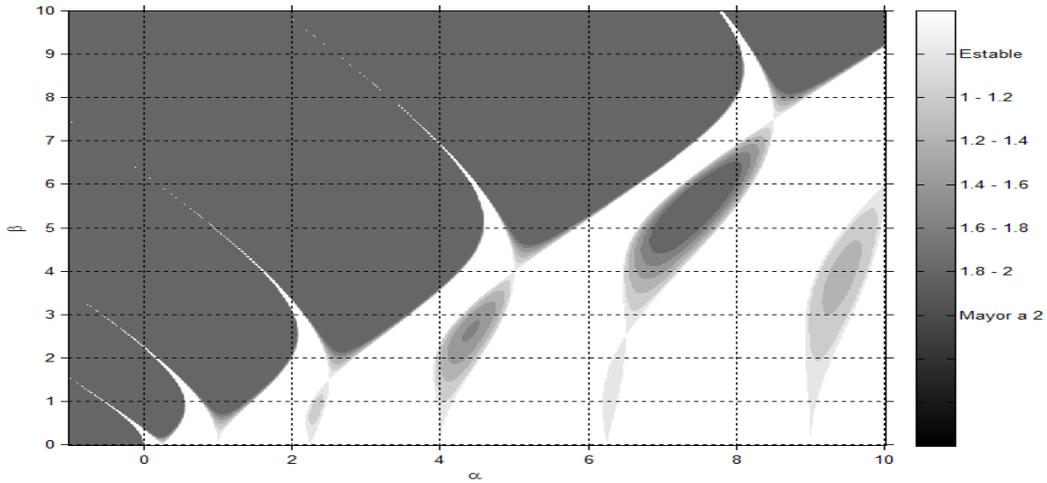


Figura 9. Curvas de velocidad de escape a infinito de la ecuacion de Meissner.

5.1.1 Comparación vs Ec. de Hill amortiguada

La ecuación de Hill con amortiguamiento se puede escribir como

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + (\alpha + \beta q(t)) x = 0 \quad (5.3)$$

donde δ es un numero real positivo y $q(t)$ es una función periódica con período T . La figura 10 muestra las lenguas de Arnol'd para (5.3) con $q(t) = \text{sign}(\cos(t))$ y $\gamma = 0.1$

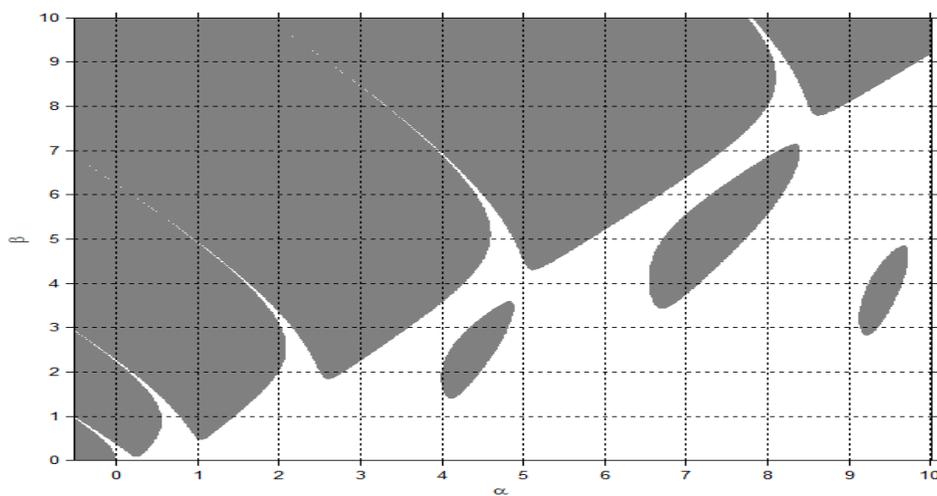


Figura 10. Lenguas de Arnol'd de la ecuacion de Meissner con disipacion $\delta = 0.1$

Una propiedad muy importante de la ecuación de Hill con amortiguamiento es que, contrario a la lógica, al añadir el término de disipación (positivo) las zonas estables de una ecuación de Hill pueden convertirse en zonas inestables. La figura 11 muestra éste inesperado hecho. El punto señalado en la figura corresponde a un punto estable sin amortiguamiento y a un punto inestable con amortiguamiento.

Las soluciones de la ecuación de Meissner con amortiguamiento y sin amortiguamiento en el punto (4.22, 6.5) se muestran en las figuras 12a y 12b.

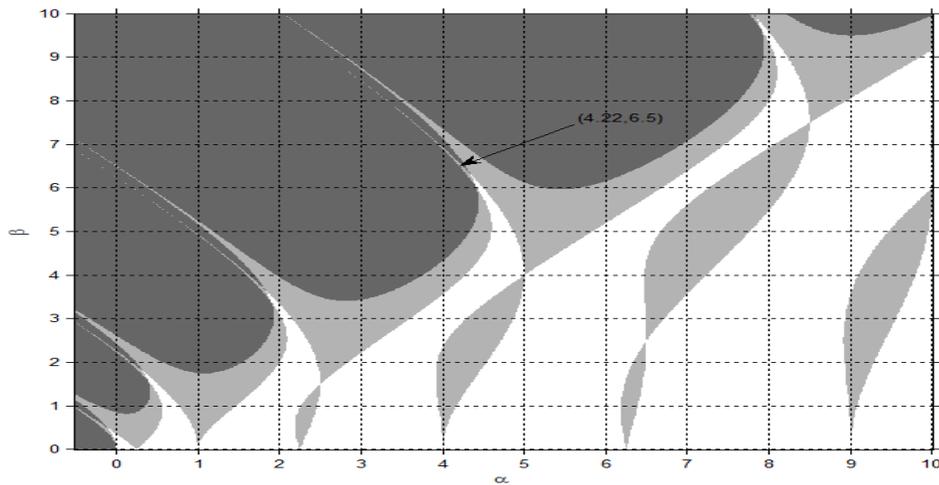


Figura 11. Sobreposición de lenguas de Arnol'd de la ecuación de Meissner sin amortiguamiento y con amortiguamiento $\delta = 0.9$

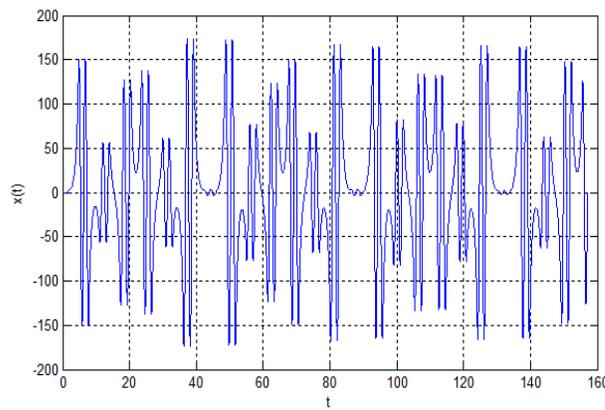


Figura 12a. Solución de la ecuación de Meissner sin amortiguamiento

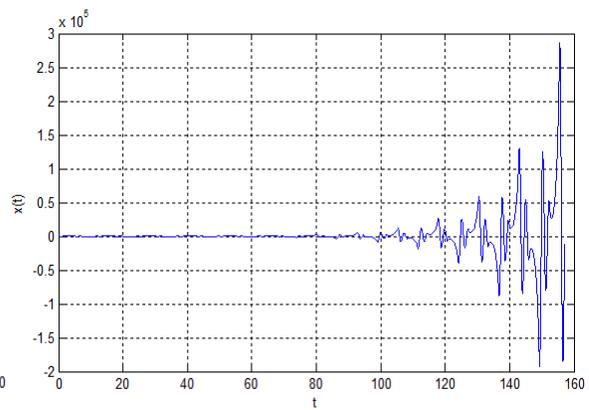


Figura 12b. Solución de la ecuación de Meissner con amortiguamiento $\delta = 0.9$

Comparando las figuras de las lenguas de Arnol'd de la ecuación de Hill con amortiguamiento contra las graficas de velocidad de escape a infinito nos damos cuenta que tienen un gran parecido, el siguiente teorema nos da la relación que existe entre las dos figuras.

Teorema 5.1. *Sea la ecuación de Hill de un grado de libertad*

$$\ddot{y} + (\alpha + \beta q(t)) y = 0 \quad (5.4)$$

y sea la ecuación de Hill con amortiguamiento

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + (\alpha_1 + \beta q(t)) x = 0 \quad (5.5)$$

la relación que existe entre las curvas de velocidad de escape a infinito de (5.4) con las zonas de estabilidad e inestabilidad de la ecuación (5.5) esta dada por

$$v = e^{\frac{1}{2}\delta T} \quad (5.6)$$

donde $v = \max[|\mu_1|, |\mu_2|]$, μ_1 y μ_2 son los multiplicadores característicos asociados a (5.4) y T es el período mínimo de la función $q(t)$ y el ajuste

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{1}{4}\delta^2$$

Prueba. Sea $\Phi_y(T, 0)$ la matriz de monodromía de la ecuación (5.4). Aplicando la transformación

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}\delta t} z(t) \quad (5.7)$$

a la ecuación (5.3) tenemos

$$\ddot{z}(t) + \left(-\frac{1}{4}\delta^2 + \alpha_1 + \beta_1 q(t) \right) z(t) = 0$$

definiendo $\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{4}\delta^2$, $\beta = \beta_1$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\ddot{z}(t) + (\alpha + \beta q(t)) z(t) = 0 \quad (5.8)$$

resolviendo (5.8) obtenemos

$$z(t) = \Phi_z(t, t_0) z(t_0)$$

evaluando en $t = T$, $t_0 = 0$ y utilizando (5.7) tenemos

$$x(T) = \Phi_z(T, 0) I_{2 \times 2} e^{\frac{1}{2}\delta T}$$

haciendo que los coeficientes α y β de las ecuaciones (5.4) y (5.8) sean iguales, podemos decir que

$$\Phi_y(T, 0) = \Phi_z(T, 0) e^{\frac{1}{2}\delta T}$$

obteniendo la traza de ambos lados de la ecuación anterior

$$\text{trace}(\Phi_y(T, 0)) = \text{trace}(\Phi_z(T, 0) e^{\frac{1}{2}\delta T})$$

de ésta ecuación es fácil ver que

$$\max[|\sigma(\Phi_y(T, 0))|] = \max\left[|\sigma(\Phi_z(T, 0) e^{\frac{1}{2}\delta T})|\right]$$

Haciendo que $v = \max[|\sigma(\Phi_y(T, 0))|]$ y $\max[|\sigma(\Phi_z(T, 0))|] = 1^2$, y con esto queda demostrado el teorema. \square

Algo que debemos notar del teorema anterior, es lo siguiente. La corrección que se hace en α es decir $\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{4}\delta^2$, recorre las lenguas de Arnol'd hacia la izquierda, esto provoca que las zonas estables de una ecuación de Hill sin amortiguamiento continúen siendo estables al agregar amortiguamiento. En la figura 13 se muestra el efecto antes mencionado.

Utilizando el teorema anterior y comparando la figura 13 con la figura 8 notamos que las lenguas de Arnol'd para la ecuación de Mathieu con amortiguamiento $\delta = 0.9372$ y $\delta = 1.1972$ corresponden a las curvas de velocidad de escape a infinito con $\max[|\sigma(\Phi(T, 0))|] = 19$ y $\max[|\sigma(\Phi(T, 0))|] = 43$ respectivamente.

²Recordar que para obtener las curvas de velocidad de escape a infinito se debe cumplir la desigualdad $\max[\sigma(\Phi(T, 0))] \geq 2$. La condición $\max[\sigma(\Phi(T, 0))] = 1$ es establecida por las condiciones de estabilidad e inestabilidad (Teoría de Floquet)

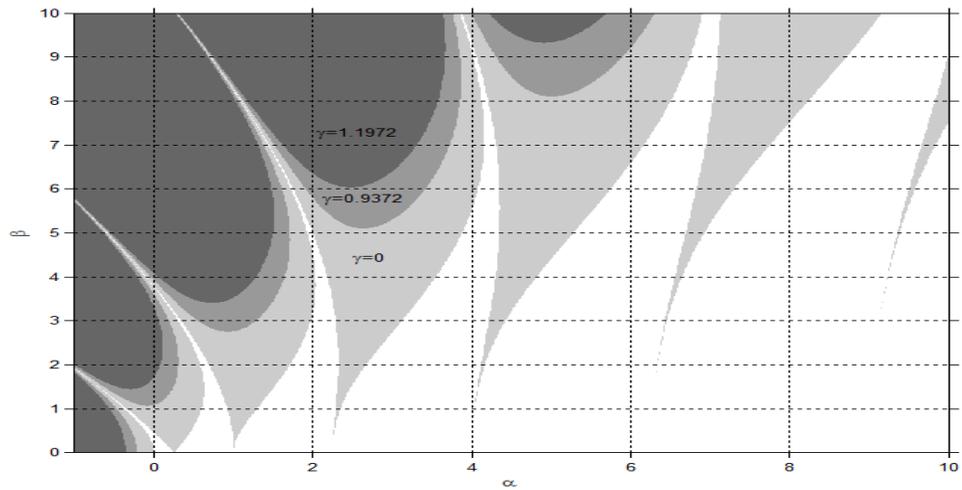


Figura 13. Lenguas de Arnol'd de la ecuacion de Mathieu, utilizando el teorema

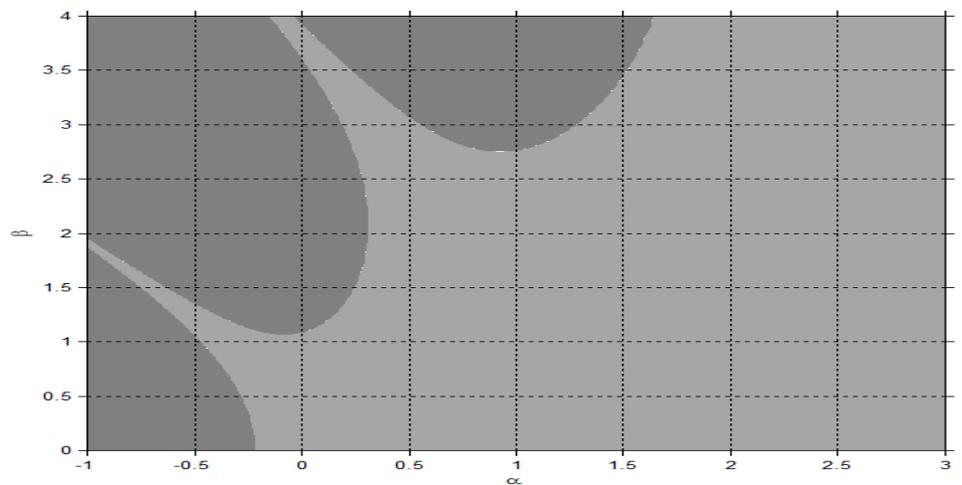


Figura 14. Sobreposicion de curvas de velocidad de escape a infinito y curvas obtenidas con el teorema 5.1

Otra forma de comprobar el teorema 5.1 es la siguiente. Se obtuvo, la curva de velocidad de escape a infinito con $\max [|\sigma(\Phi(T, 0))|] = 19$, donde las zonas grises son zonas estables y las blancas inestables, y utilizando el teorema 5.1 se obtuvo un segundo diagrama, con $\delta = 0.9372$, donde las zonas blancas son estables y las zonas grises inestables. Uniendo los dos diagramas se obtiene la figura 14. En esta figura se puede observar que las curvas de velocidad empatan a la casi a la perfección con las zonas obtenidas con el teorema 5.1,

podemos atribuir los puntos blancos a errores numericos.

5.2 ECUACIÓN DE LAMÉ. VELOCIDAD DE ESCAPE A INFINITO

Aplicando lo dicho en este capitulo, podemos obtener las curvas de de velocidad de escape a infinito de la ecuación de Lamé.

$$\ddot{y} + [\alpha - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x, k^2)] y = 0$$

Con la finalidad de reducir el tiempo de procesamiento de las lenguas de las curvas de velocidad de escape a infinito se empleo la ecuación de Lamé trigonometrizada en forma de ecuación de Hill

$$\ddot{x}(\nu) + \left(\frac{k^2 \cos^2(\nu) (2 + k^2 \sin^2 \nu) + 2(-1 + k^2 \sin^2 \nu) (-2\alpha + (k^2 + 2\beta) \sin^2 \nu)}{4(-1 + k^2 \sin^2 \nu)^2} \right) x(\nu) = 0$$

esta ecuación fue obtenida al final del capítulo 3.

La figura 15 muestra las curvas de velocidad de escape a infinito de la ecuación de Lamé.

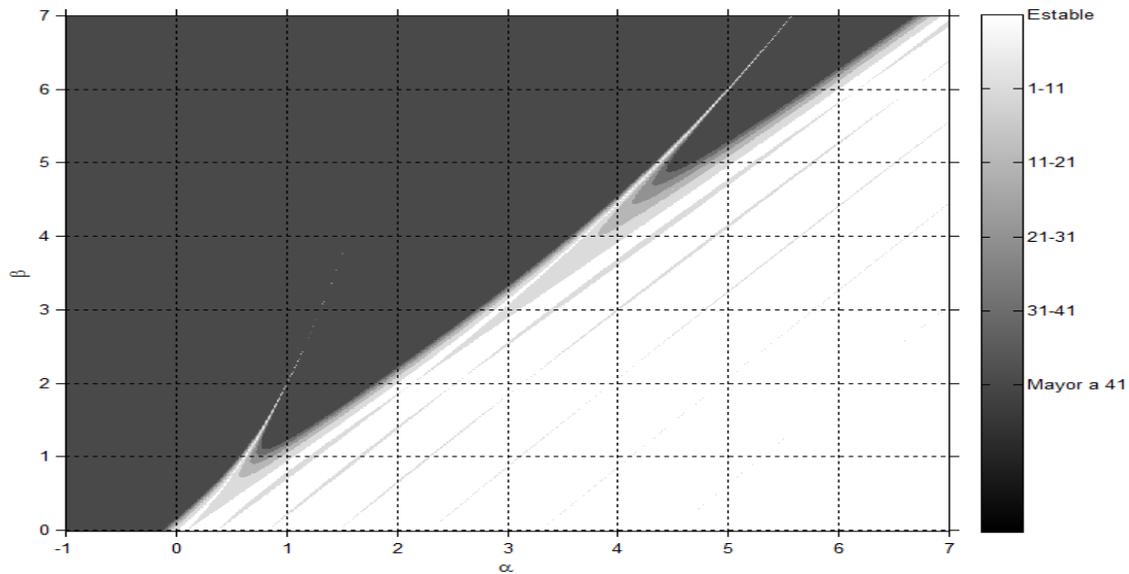


Figura 15. Zonas de velocidad de escape a infinito de la ecuacion de Lame,

$$k = 0.9995$$

5.3 RESPUESTA OSCILATORIA Y NO OSCILATORIA DE LA ECUACIÓN DE HILL

Como se vio en la sección de coexistencia de esta tesis, un problema importante dentro de la teoría de la ecuación de Hill es determinar cuando una solución es o no periódica, esto nos lleva a la pregunta ¿Cuándo una solución de Hill es oscilatoria?. En este apartado se presentan un par de resultados que nos hablan acerca de cuando una solución es o no oscilatoria.

Teorema 5.2. *Si una solución no trivial de $\ddot{x} + (\alpha + \beta q(t))x = 0$, con $q(t + T) = q(t)$ es no oscilatoria, entonces tendrá a lo mas un cero en $(-\infty, \infty)$*

Prueba. Si una solución no trivial x tiene un cero en x_1 y en x_2 ($x_1 < x_2$), entonces la función y definida como $x(t + T) = y(t)$, será una solución con ceros en $x_1 - T$ y $x_2 - T$. Por lo tanto la solución x tendrá un cero en cada intervalo $\{x_1 + nT, x_2 + nT\}$, con $n = 1, 2, 3, \dots$, y por el teorema de separacion de Sturm podemos decir que x es oscilatoria [21]. \square

El teorema de separación de Sturm nos dice que los ceros de las soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$\frac{d}{dt} \left(a(t) \frac{dx}{dt} \right) + c(t)x = 0$$

donde $a(t)$ y $c(t)$ son continuas y al menos una vez derivables, se separan unos a otros, para mas información y la prueba detallada ver [10].

Otro resultado importante dado por Hamel en 1912 nos dice lo siguiente

Teorema 5.3. *Toda solución de una ecuación de Hill será oscilatoria si $\alpha > \alpha_0$ y no oscilatoria si $\alpha < \alpha_0$, donde α_0 esta definido como el valor mas grande de α para el cual la ecuación de Hill tiene una solución periódica, para cada valor de β [21].*

Utilizando estos dos teoremas podemos obtener la curva en el plano $\alpha - \beta$ de las zonas oscilatoria y no oscilatoria. El diagrama se muestra en la figura 16.

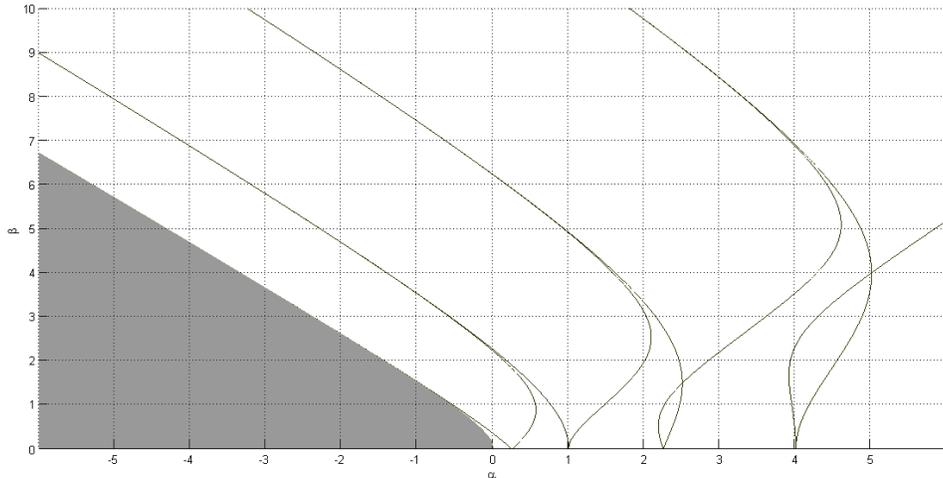


Figura 16. Se muestra la zona de respuesta no oscilatoria de la ecuacion de Meissner.

Observando la curva mostrada y leyendo detenidamente los dos teoremas anteriores, nos damos cuenta que la zona no oscilatoria concuerda con la lengua cero de la ecuación de Hill (en el diagrama de lenguas de Arnol'd).

5.4 ECUACIÓN DE HILL DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

La ecuación de Hill de dos grados de libertad se puede escribir de la siguiente forma

$$\ddot{x} + (\alpha\Lambda + \beta\Xi q(t)) x = 0$$

donde $q(t)$ es una funcion periódica de período T , $x \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\Lambda, \Xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

5.4.1 Las Lenguas de Arnol'd no son disjuntas

Las lenguas de Arnol'd de una ecuación de Hill de un grado de libertad siempre son disjuntas, esto quiere decir que para cada β existen intervalos de α estables alternados con intervalos inestables, es decir, las lenguas nunca se tocan. Esto no ocurre en las lenguas de Arnol'd de la ecuación de Hill de dos grados de libertad donde, en general, las lenguas se traslapan cuando la intensidad de excitación (β) es suficientemente grande. Esto se muestra en la figura 17.

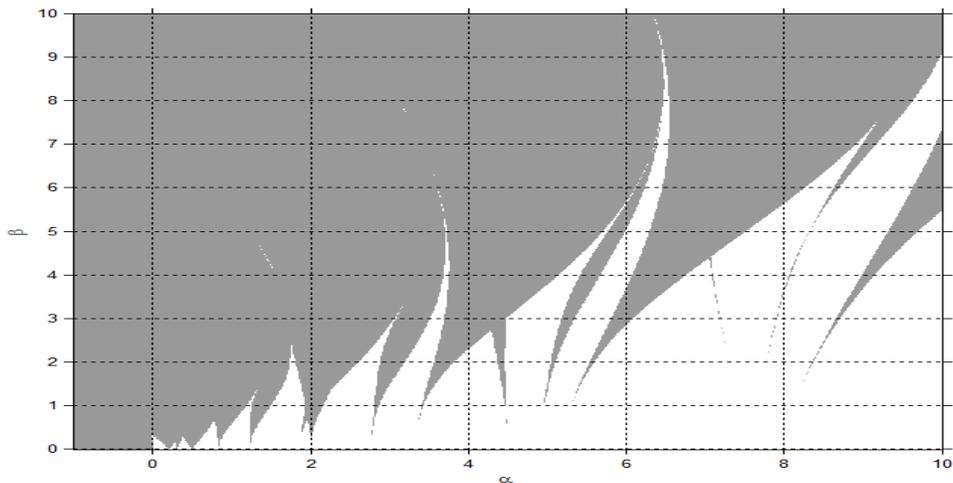


Figura 17. Lenguas de Arnold de una ecuación de Hill de dos grados de libertad.

La ecuación de Hill de dos grados de libertad utilizada para obtener la figura 17 es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \left(\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.5 & 1.3 \end{bmatrix} \cos(t) \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.0 EJEMPLO DE APLICACIÓN

En este capítulo se presenta como ejemplo de aplicación el estudio de un péndulo con amortiguamiento constante δ y con el punto de fijación sometido a excitación paramétrica.

6.1 MODELADO DEL SISTEMA

Considere el sistema de la figura

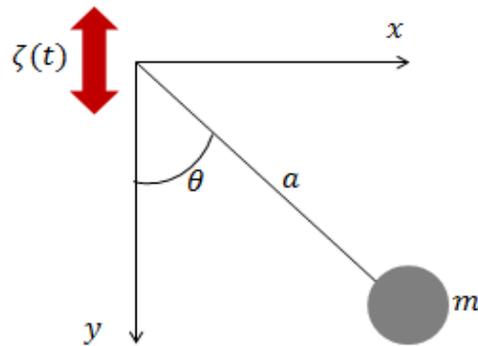


Figura 18. Pendulo de Kapitza.

Se puede obtener fácilmente los componentes

$$x = a \sin(\theta)$$

$$y = \zeta + a \cos(\theta)$$

derivando con respecto a t

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} &= \dot{\zeta} - a\dot{\theta} \sin(\theta) \\ v &= \left((-a\dot{\theta} \cos(\theta))^2 + (\dot{\zeta} - a\dot{\theta} \sin(\theta))^2 \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

donde v es la velocidad de m .

Obteniendo las ecuaciones de energía cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$ y potencial $\Pi = mgh$, donde h es distancia del extremo del péndulo al punto inferior de su trayectoria

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m \left((a\dot{\theta} \cos(\theta))^2 + (\dot{\zeta} - a\dot{\theta} \sin(\theta))^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}m \left(a^2\dot{\theta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2a\dot{\zeta}\dot{\theta} \sin \theta \right) \\ \Pi &= mg(\zeta + a(1 - \cos(\theta)))\end{aligned}$$

el Lagrangiano queda

$$L = \frac{1}{2}m \left(a^2\dot{\theta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2a\dot{\zeta}\dot{\theta} \sin \theta \right) - mg(\zeta + a(1 - \cos(\theta)))$$

Por la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_{no \ pot}$$

La ecuación de movimiento del péndulo con fricción es

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{g}{a} - \frac{\ddot{\zeta}}{a} \right] \sin \theta = -\frac{f_{fr}}{ma^2} \dot{\theta}$$

donde f_{fr} es el coeficiente de fricción. Escribiendo la ecuación anterior en funciones de estado con $\bar{x}_1 = \theta$ y $\bar{x}_2 = \dot{\theta}$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -\frac{f_{fr}}{ma^2} \bar{x}_2 - \left[\frac{g}{a} - \frac{\ddot{\zeta}}{a} \right] \sin \bar{x}_1\end{aligned}\tag{6.1}$$

es fácil ver que los puntos de equilibrio son $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$. Al linealizar el sistema de ecuaciones (6.1) alrededor del punto de equilibrio superior obtenemos la ecuación

$$\ddot{x} + \frac{f_{fr}}{ma^2}\dot{x} + \left[-\frac{g}{a} + \frac{\ddot{\zeta}}{a} \right] x = 0$$

definiendo $\tau = \omega t$, la ecuación anterior se transforma en

$$\omega^2 x'' + \frac{\omega f_{fr}}{ma^2} x' + \left[-\frac{g}{a} + \frac{\ddot{\zeta}}{a} \right] x = 0$$

donde $x' = \frac{d}{d\tau}x$, $x'' = \frac{d^2}{d\tau^2}x$. Factorizando ω^2

$$\omega^2 \left[x'' + \frac{f_{fr}}{\omega ma^2} x' + \left[-\frac{g}{a\omega^2} + \frac{\ddot{\zeta}}{a\omega^2} \right] x \right] = 0$$

haciendo que $\zeta = A \cos(\omega t)$,

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{g}{a\omega^2} \\ \beta &= -\frac{A}{a} \\ \delta &= \frac{f_{fr}}{\omega ma^2} \end{aligned} \tag{6.2}$$

y así obtenemos la ecuación

$$x'' + \delta x' + [\alpha + \beta \cos(\tau)] x = 0 \tag{6.3}$$

como se vio en capítulos anteriores (6.3) se conoce como ecuación de Mathieu con amortiguamiento.

6.2 OBTENCIÓN APROXIMADA DE LAS PRIMERAS 3 CURVAS DE TRANSICIÓN DE LA ECUACIÓN DE MATHIEU

Para obtener las curvas de transición de la ecuación de Mathieu emplearemos el método "Strained Parameters" también conocido como Linstead-Poincaré [16], este consiste en expandir la solución x y el parámetro α en series de potencia de la amplitud de la excitación, β , es decir representamos $x(t)$ y α como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + x_1(t)\beta + x_2(t)\beta^2 + x_3(t)\beta^3 + \dots \\ \alpha &= \alpha_0 + \alpha_1\beta + \alpha_2\beta^2 + \alpha_3\beta^3 + \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

y definimos

$$\delta = \bar{\delta}\beta \quad (6.5)$$

sustituyendo (6.4) y (6.5) en (6.3) y agrupando los términos similares, encontramos las siguientes relaciones

$$\ddot{x}_0(t) + \alpha_0 x_0(t) = 0 \quad (6.6)$$

$$\ddot{x}_1(t) + \alpha_0 x_1(t) = -\bar{\delta}\dot{x}_0(t) - (\alpha_1 + \cos t) x_0(t) \quad (6.7)$$

$$\ddot{x}_2(t) + \alpha_0 x_2(t) = -\bar{\delta}\dot{x}_1(t) - (\alpha_1 + \cos t) x_1(t) - \alpha_2 x_0(t) \quad (6.8)$$

$$\ddot{x}_3(t) + \alpha_0 x_3(t) = -\bar{\delta}\dot{x}_2(t) - (\alpha_1 + \cos t) x_2(t) - \alpha_2 x_1(t) - \alpha_3 x_0(t) \quad (6.9)$$

$$\ddot{x}_4(t) + \alpha_0 x_4(t) = -\bar{\delta}\dot{x}_3(t) - (\alpha_1 + \cos t) x_3(t) - \alpha_2 x_2(t) - \alpha_3 x_1(t) - \alpha_4 x_0(t) \quad (6.10)$$

\vdots

y por último se deben encontrar las condiciones para las cuales las ecuaciones (6.6)-(6.10) tengan soluciones periódicas.

Por la teoría de Floquet sabemos que las soluciones de (6.6)-(6.10) serán periódicas si $\alpha_0 = \frac{n^2}{4}$. Haciendo $n = 0$ y $\alpha_0 = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} x_0(t) &= a \\ \ddot{x}_1(t) &= -(\alpha_1 + \cos t) x_0(t) \quad \implies \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 0, \quad x_1(t) = a \cos(t) + b \quad (6.11)$$

sustituyendo (6.11) en (6.8)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2(t) &= \bar{\delta}a \sin(t) - \cos(t) (\cos(t) + b) - \alpha_2 a \\ &= \bar{\delta}a \sin(t) - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos(2t) - b \cos(t) - \alpha_2 a \end{aligned}$$

por lo tanto para evitar los términos seculares

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_2(t) = -\bar{\delta} \sin(t) + \frac{a}{8} \cos(2t) + b \cos(t) + c \quad (6.12)$$

sustituyendo (6.11) y (6.12) en (6.9)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_3(t) &= -\bar{\delta} \left(-\bar{\delta}a \cos(t) - \frac{a}{4} \sin(2t) - b \sin(t) \right) - \cos(t) \left(-\bar{\delta}a \sin(t) + \frac{a}{8} \cos(2t) + b \cos(t) + c \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (a \cos(t) + b) - \alpha_3 a \\ &= d \cos(t) + \frac{3\bar{\delta}a}{4} \sin(2t) + \bar{\delta}b \sin(t) - \frac{a}{16} \cos(3t) - \frac{b}{2} \cos(2t) - \alpha_3 a \end{aligned}$$

con $d = \bar{\delta}^2 a + \frac{7a}{16} - c$, por lo tanto

$$\alpha_3 = 0$$

$$x_3(t) = -d \cos(t) - \frac{3\bar{\delta}a}{16} \sin(2t) - \bar{\delta}b \sin(t) + \frac{a}{144} \cos(3t) + \frac{b}{8} \cos(2t) + c \cos(t) + e \quad (6.13)$$

sustituyendo (6.11)-(6.13) en (6.10)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_4(t) &= -\bar{\delta} \left(d \sin(t) - \frac{3\bar{\delta}a}{8} \cos(2t) - \bar{\delta}b \cos(t) - \frac{a}{48} \sin(3t) - \frac{b}{4} \sin(2t) \right) \\ &\quad - (\cos t) \left(-d \cos(t) - \frac{3\bar{\delta}a}{16} \sin(2t) - \bar{\delta}b \sin(t) + \frac{a}{144} \cos(3t) + \frac{b}{8} \cos(2t) + e \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\bar{\delta} \sin(t) + \frac{a}{8} \cos(2t) + b \cos(t) + c \right) - \alpha_4 a \end{aligned}$$

$$\ddot{x}_4(t) = f \sin(t) + g \cos(2t) + h \cos(t) + \frac{11a\bar{\delta}}{48} \sin(3t) + \frac{3\bar{\delta}b}{4} \sin(2t) - \frac{a}{288} \cos(4t) - \frac{b}{16} \cos(3t) + \frac{c}{2} - \alpha_4 a + \frac{d}{2}$$

con

$$\begin{aligned} f &= -d\bar{\delta} + \frac{3\bar{\delta}a}{32} - \frac{\bar{\delta}}{2} \\ g &= \frac{3\bar{\delta}^2 a}{8} + \frac{d}{2} + \frac{17a}{288} \\ h &= \bar{\delta}^2 b + \frac{7b}{16} - e \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\alpha_4 = \frac{16\bar{\delta}^2 + 7}{32} \quad (6.14)$$

o escrita de otra forma

$$\alpha_4 = \frac{16\delta^2 + 7\beta^2}{32\beta^2} \quad (6.15)$$

Sustituyendo (6.11)-(6.16) en (6.4) podemos decir que para $n = 0$ la aproximación a la curva de transición esta dada por la siguiente ecuación

$$\alpha = -\frac{\beta^2}{2} + \frac{16\delta^2 + 7\beta^2}{32\beta^2}\beta^4 + O(\beta^5) \quad (6.16)$$

Realizando el mismo procedimiento para $n = 1$, obtenemos los siguientes resultados.

$$\alpha_0 = \frac{1}{4}, x_0(t) = a \cos\left(\frac{t}{2}\right) + b \sin\left(\frac{t}{2}\right) \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + \frac{1}{4}x_1(t) &= -\bar{\delta} \left(-\frac{a}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{b}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) - (\alpha_1 + \cos t) \left(a \cos\left(\frac{t}{2}\right) + b \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) \\ &= \left(\frac{\bar{\delta}a}{2} + \frac{b}{2} - \alpha_1 b \right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \left(-\frac{\bar{\delta}b}{2} - \frac{a}{2} - \alpha_1 a \right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{a}{2} \cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \frac{b}{2} \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

para que (6.18) tenga solución periódica se debe cumplir las condiciones

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\delta}a}{2} + \frac{b}{2} - \alpha_1 b &= 0 \\ -\frac{\bar{\delta}b}{2} - \frac{a}{2} - \alpha_1 a &= 0 \end{aligned}$$

así podemos decir que

$$\alpha_1 = \pm \sqrt{\frac{1 - \bar{\delta}^2}{4}} \quad (6.19)$$

o escrita de otra forma

$$\alpha_1 = \pm \sqrt{\frac{\beta^2 - \delta^2}{4\beta^2}} \quad (6.20)$$

sustituyendo (6.18) y (6.20) en (6.4) obtenemos la aproximación de la curva de transición $n = 1$

$$\alpha = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - \delta^2}}{2} + O(\beta^3) \quad (6.21)$$

La figura 19 muestra las aproximaciones de las curvas de transición obtenidas anteriormente

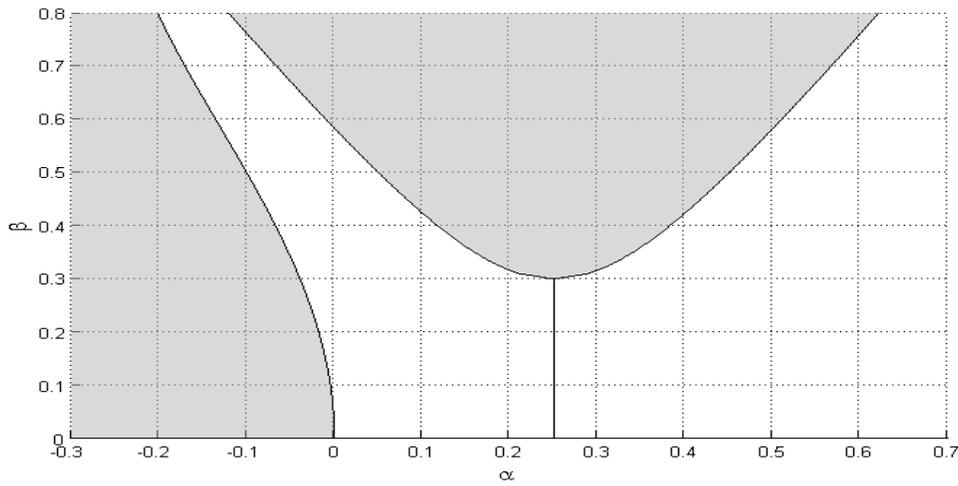


Figura 19. Aproximacion de curvas de transicion de la ecuacion de Mathieu.

6.3 CONDICIONES DE ESTABILIDAD APROXIMADAS DEL PÉNDULO DE KAPITZA CON DISIPACIÓN.

En 1951 Pyotr Kapitza analizo la estabilidad de un péndulo invertido sometido a excitación paramétrica y sin considerar términos disipativos. Kapitza llego a la conclusión que para asegurar estabilidad, del péndulo invertido, se deben satisfacer las desigualdades

$$\begin{aligned} A\omega &> \sqrt{2gl} \\ A &< \frac{l}{2} \end{aligned}$$

donde A , ω es la amplitud y la fase de la oscilación aplicada al punto de fijación del péndulo, g es la fuerza de gravedad y l es la longitud del péndulo.

En esta sección haremos un análisis similar al hecho por Kapitza, con la diferencia que existe disipación en la ecuación diferencial.

De la figura 18 podemos observar que la ecuación de Mathieu con amortiguamiento sera estable si

$$-\frac{\beta^2}{2} + \frac{(4\delta\beta)^2 + 7\beta^4}{32} < \beta < \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{\beta^2 - \delta^2}}{2}$$

o escrito de otra forma

$$\sqrt{\frac{16 - 16\delta^2 - \sqrt{(-16 + 16\delta^2)^2 + 896\alpha}}{14}} < \beta < \sqrt{\left(-2\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \delta^2}$$

recordando las definiciones (6.2)

$$\sqrt{\frac{16 - 16\delta^2 - \sqrt{(-16 + 16\delta^2)^2 - 896\frac{g}{a\omega^2}}}{14}} < \frac{A}{a} < \sqrt{\left(2\frac{g}{a\omega^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \delta^2} \quad (6.22)$$

como podemos observar, (6.22) no es facil de simplificar. Podemos simplificar el ultimo termino de la desigualdad utilizando (6.14), es decir

$$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{\beta^2 - \delta^2}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{1 - \bar{\delta}^2}}{2}\beta$$

la desigualdad (6.22) se transforma en

$$\sqrt{\frac{16 - 16\delta^2 - \sqrt{(-16 + 16\delta^2)^2 - 896\frac{g}{a\omega^2}}}{14}} < \frac{A}{a} < \frac{a\omega^2 + 4g}{2a\omega^2\sqrt{1 - \bar{\delta}^2}} \quad (6.23)$$

multiplicando todos los términos de (6.23) por $a\omega$

$$a\omega\sqrt{\frac{16 - 16\delta^2 - \sqrt{(-16 + 16\delta^2)^2 - 896\frac{g}{a\omega^2}}}{14}} < A\omega < \frac{a\omega^2 + 4g}{2\omega\sqrt{1 - \bar{\delta}^2}} \quad (6.24)$$

observando el lado derecho de (6.24), notamos que la desigualdad se cumple si

$$A\omega \leq \frac{a\omega}{2\sqrt{1 - \bar{\delta}^2}}$$

recordando que $\bar{\delta} = \frac{\delta}{\beta}$ y resolviendo la desigualdad para A

$$\begin{aligned}
 A\omega &\leq \frac{A\omega}{2\sqrt{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - \delta^2}} \\
 \implies A &\leq a\sqrt{\frac{1}{4} + \delta^2}
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Para reducir el lado izquierdo de la desigualdad (6.24) tomamos solo el término asociado a β^2 de la aproximación (6.16) es decir

$$\sqrt{2ga} < A\omega \tag{6.26}$$

Por lo tanto si se satisface la desigualdad (6.25) y (6.26) podemos decir que el movimiento del péndulo invertido con disipación y sometido a excitación paramétrica ($\cos(t)$) será estable.

Es conveniente no olvidar que (6.26) es una simplificación del lado izquierdo de la desigualdad (6.24), para obtener resultados mas confiables es preferible utilizar (6.24). La figura 20 nos muestra la diferencia entre (6.26) y el lado izquierdo de (6.24) con diferentes valores de δ .

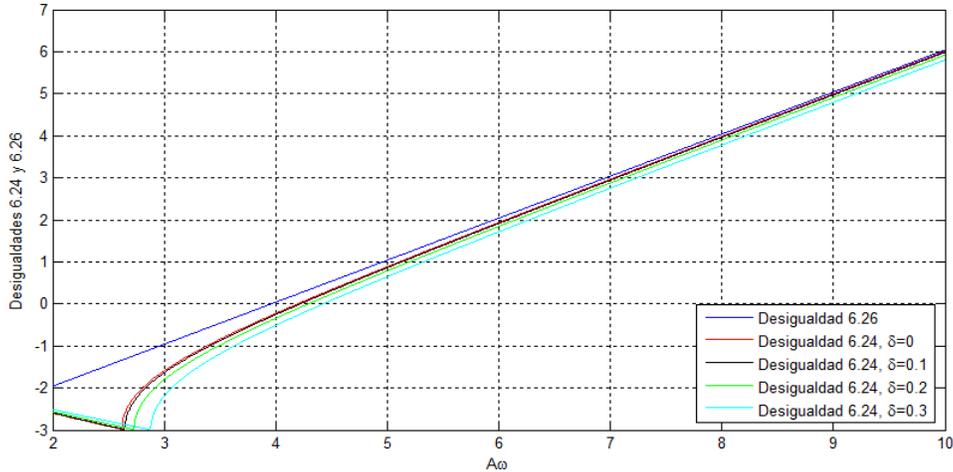


Figura 20. Diferencia entre desigualdades (6.24) y (6.26).

A modo de comprobación, se realizó una simulación con los siguientes datos

$$\begin{aligned}
 a &= 0.8m \\
 \delta &= 0.3 \\
 g &= 9.81m/s^2
 \end{aligned}$$

de (6.25) y (6.26) obtenemos

$$A \leq 0.46648$$

$$A\omega > 3.9618$$

tomando $A = 0.4$ y $\omega = 10$ se cumplen las desigualdades anteriores. Por las definiciones (6.2) obtenemos los parámetros α, β

$$\alpha = -0.12263$$

$$\beta = 0.575$$

y simulando la ecuación de Mathieu con amortiguamiento

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + [\alpha + \beta \cos(\omega t)]x = 0$$

para los parámetros α, β y δ obtenemos la siguiente respuesta

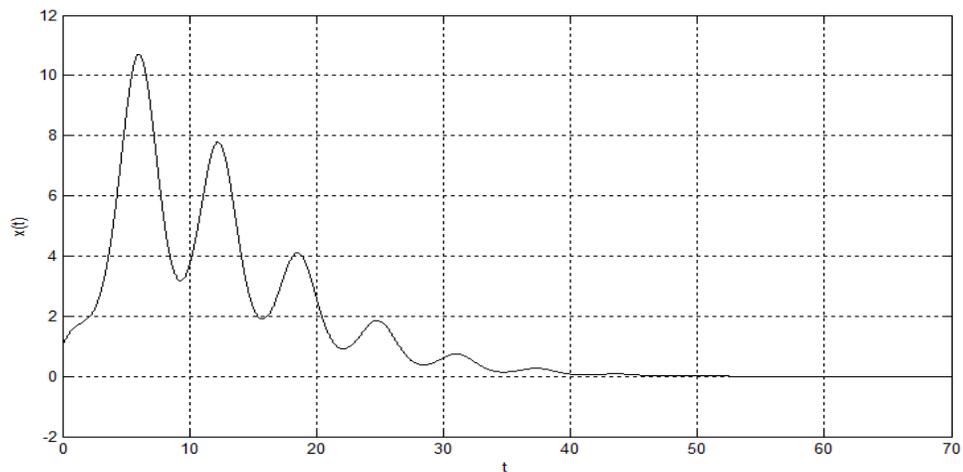


Figura 21. Respuesta de la ecuación de Mathieu con amortiguamiento.

6.4 ZONAS DE ESTABILIDAD E INESTABILIDAD

Como se vio en la sección anterior, las curvas de transición de un sistema con y sin amortiguamiento son diferentes, para finalizar este capítulo se muestra una comparación de las primeras lenguas de Arnol'd de la ecuación de Mathieu, con y sin amortiguamiento, la figura 22 muestra las lenguas sobrepuestas.

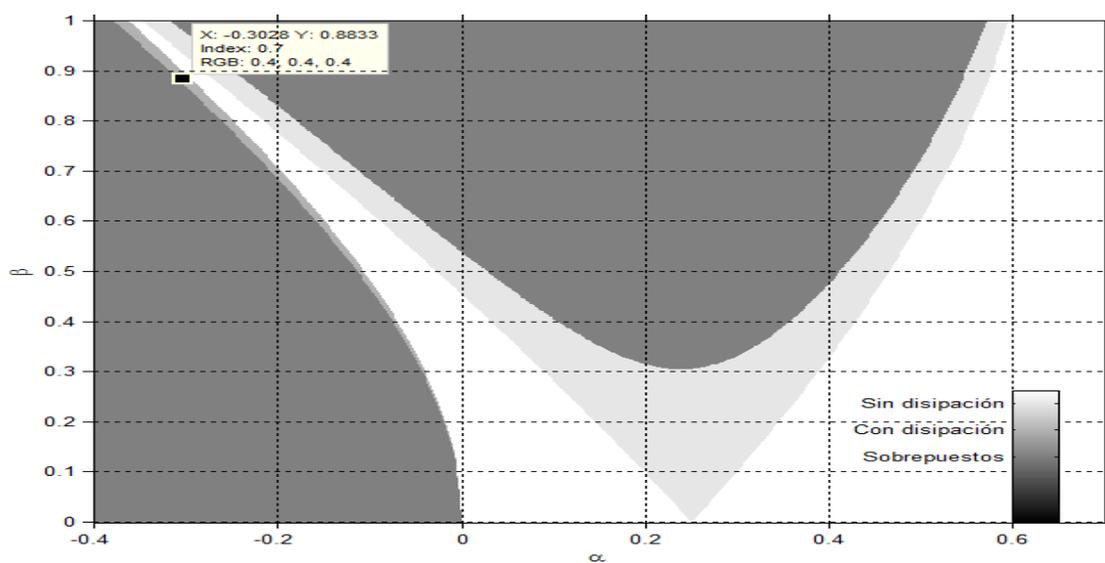


Figura 22. Lenguas de Arnold de la ecuación de Mathieu con y sin disipación
 $\delta = 0.3$.

En la figura 22 podemos notar como una zona que era estable sin término de amortiguamiento se hace inestable cuando añadimos disipación, este hecho fue estudiado en el capítulo anterior. En la figura 23a y 23b se muestran las soluciones de la ecuación de Mathieu, en el punto $\alpha = -0.3028$, $\beta = 0.8833$ sin amortiguamiento y con amortiguamiento,

respectivamente.

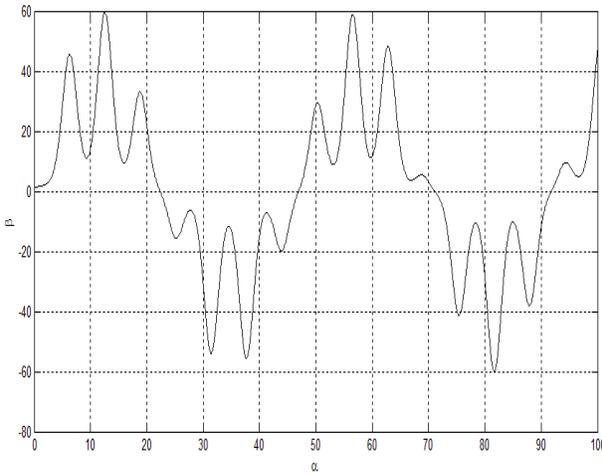


Figura 23a. Solucion de la ecuacion de Mathieu sin amortiguamiento, en el punto $(-0.3028, 0.8833)$

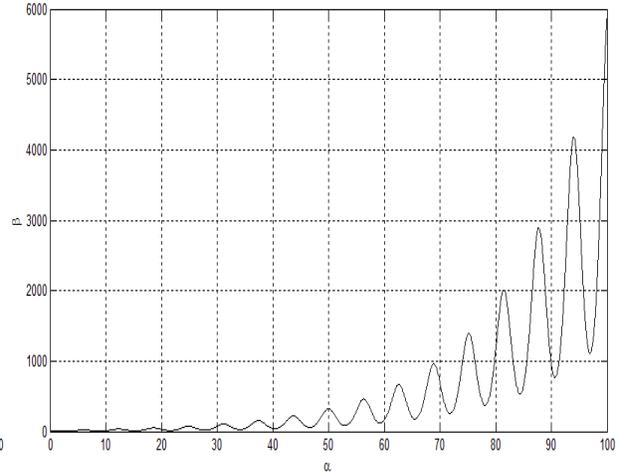


Figura 23b. Solucion de la ecuacion de Mathieu con amortiguamiento, $\delta = 0.3$, en el punto $(-0.3028, 0.8833)$

7.0 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se expusieron nuevas propiedades de las ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos, en particular de las ecuaciones tipo Hill.

- La adición de disipación, a las ecuaciones tipo Hill, no siempre es conveniente.

Es cierto que, algunas zonas que son inestables, sin término de disipación, se convierten en zonas estables al añadir amortiguamiento, pero también es cierto que algunas zonas que eran estables se transforman en inestables al añadir disipación. El conocimiento de este hecho nos hace comparar los pros y contras de añadir disipación.

- Las zonas inestables que desaparecen gracias al amortiguamiento y las zonas estables que se transforman en inestables, guardan una estrecha relación con el máximo multiplicador característico y a la corrección $\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{4}\delta^2$.

Gracias al teorema de comparación de las curvas de velocidad a escape a infinito contra las lenguas de Arnol'd de una ecuación de Hill con disipación podemos notar lo dicho anteriormente. Además,

- Las zonas con velocidad de escape a infinito menor a $\max [|\sigma(\Phi(T, 0))|]$, donde $\Phi(T, 0)$ es la matriz de monodromía asociada a alguna ecuación tipo Hill, pueden ser transformadas a zonas estables añadiendo el término disipativo con $\delta = \frac{2}{T} \ln \nu$, donde $\nu = \max [|\sigma(\Phi(T, 0))|]$.

El conocimiento de propiedades como; la velocidad con la cual una solución inestable tiende a infinito y el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Hill con disipación, ayudaran en la elección de parámetros α, β que mas convenga, al usuario, para sus intereses.

Como trabajo futuro se plantea el estudio de sistemas de dos o mas grados de libertad y la aplicación de lo contenido en la esta tesis de forma experimental.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. Dover Publications. Vol. 55, 1964.
- [2] V. I. Arnol'd. *Remarks on the perturbation theory for problems of Mathieu type*. Russian Math. Surveys 38:4, pp. 215-233, 1983.
- [3] F. M. Arscott. *Periodic differential equations, and introduction to Mathieu, Lamé and allied functions*, Oxford: Pergamon press, 1964.
- [4] F. Bowman. *Introduction to Bessel Functions*, Dover Publications. 1958.
- [5] R. W. Brockett. *Finite dimensional linear systems*, John Wiley and Sons, Inc., 1970.
- [6] L. Cesari. *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer-Verlag, 1963.
- [7] A. C. Dixon. *The elementary properties of the Elliptic Functions with examples*, Macmillan and Co. 1894.
- [8] J. K. Hale. *Ordinary differential equations*, Krieger publishing company, 1980.
- [9] R. Horn, C. R. Johnson. *Matrix analysis*, Cambridge University, 1990.
- [10] E. L. Ince. *A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions*, Proc. Cambriedge Philos. Soc. Vol. 21, pp. 117-120, 1922.
- [11] D. W. Jordan, P. Smith. *Nonlinear ordinary differential equations*, Oxford: Oxford University Press, 2007.
- [12] P. Lancaster, M. Tismenetsky. *The theory of matrices with applications*, Academic press, 1985.
- [13] W. Magnus, S. Winkler. *Hill's Equation*, Interscience publishers, 1966.
- [14] W. Magnus, S. Winkler. *The coexistence problem for Hill's Equation*. New York University, Research Report No BR-26, 1958.

- [15] K. R. Meyer. *Jacobi elliptic functions from a dynamical point of view*. The American Mathematical Monthly. Vol. 108, no 8, pp. 729-737, 2001.
- [16] A. H. Nayfeh. *Problems in perturbation*. New York et al.: Wiley, 1985.
- [17] L. A. Pipes. *Matrix solution of equations of the Mathieu-Hill Type*, Journal of Applied Physics, Vol. 24, no 7, pp. 902-910, 1953.
- [18] A. S. Poznyak. *Modelado Matemático de los sistemas mecánicos, eléctricos y electro-mecánicos*, 2005
- [19] A. P. Seyranian, A. A. Mailybaev. *Multiparameter stability theory with mechanical applications*, World Scientific, Series on stability, vibration and control of systems vol. 13, 2003.
- [20] S. V. Simakhina. *Stability analysis of Hill's equation*. Tesis Doctoral. University of Illinois at Chicago, 2003.
- [21] C. A. Swanson. *Comparison and oscillation theory of linear differential equations*, New York: Academic Press, 1968.
- [22] E. T. Whittaker, G. N. Watson. *A course of modern analysis*, Cambridge University press, 1963.
- [23] V. A. Yakubovich, V. M. Starzhinskii. *Linear differential equations with periodic coefficients*, Halsted press, 1975.