

**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Control Adaptable para Sistemas descritos en Ecuaciones  
Diferenciales Parciales basado en la Técnica de Redes  
Neuronales Diferenciales**

Tesis que presenta

**M. en C. Rita Quetziquel Fuentes Aguilar**

Para presentar el exámen

**Doctoral**

En la Especialidad de

**Control Automático**

Directores de Tesis:

Dr. Alexander S. Poznyak Gorbach

Dr. Jorge Isaac Chairez Oria

México D.F.

Noviembre, 2012



# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen</b>	<b>X</b>
<b>Abstract</b>	<b>XII</b>
<b>Objetivos</b>	<b>XIV</b>
<b>Notación</b>	<b>XVI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.1.0.1. Solución Analítica . . . . .	2
1.1.0.2. Solución numérica por el Método de Diferencias Finitas . . . . .	2
1.1.0.3. Solución numérica mediante el Método del Elemento Finito . . . . .	3
1.2. Sistemas de Parámetros Distribuidos . . . . .	5
1.2.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales . . . . .	5
1.2.2. Métodos de Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales . . . . .	7
1.2.3. Condiciones de Existencia . . . . .	7
1.2.3.1. Método de Diferencias Finitas . . . . .	8
1.2.3.2. Método de Elemento Finito . . . . .	10
1.3. Aproximación mediante Redes Neuronales Diferenciales . . . . .	12
1.3.1. Aplicación de la Técnica de RND en la aproximación de EDP . . . . .	15
1.4. Definiciones Importantes . . . . .	15
1.4.1. Espacio de Banach . . . . .	15

1.4.1.1. Espacio de Sobolev . . . . .	16
1.4.2. Estabilidad Práctica . . . . .	16
1.4.2.1. Definición de Estabilidad Práctica . . . . .	16
1.4.2.2. Estabilizabilidad Práctica . . . . .	16
1.4.3. Ecuación de Riccati . . . . .	18
<b>2. Identificación de Sistemas de Parametros Distribuidos en 2D</b>	<b>19</b>
2.1. Sistema de Parametros Distribuidos y su aproximación . . . . .	20
2.1.1. Aproximación numérica para funciones inciertas . . . . .	20
2.1.2. Aproximación mediante Redes Neuronales Diferenciales . . . . .	22
2.2. Neuro Identificación para Sistemas de Parámetros Distribuidos . . . . .	24
2.2.1. Estructura del Identificador . . . . .	24
2.2.2. Leyes de Aprendizaje para los pesos del Identificador . . . . .	24
2.3. Formulación del Problema de Identificación . . . . .	26
2.4. Resultado Principal . . . . .	26
2.5. Conclusiones del Capítulo . . . . .	27
<b>3. Identificación de Sistemas de Parametros Distribuidos en 3D</b>	<b>28</b>
3.1. Aproximación en Diferencias Finitas en 3D . . . . .	29
3.1.1. Aproximación numerica para funciones inciertas . . . . .	29
3.1.2. Aproximación Mediante Redes Neuronales Diferenciales . . . . .	30
3.2. Neuro Identificación para Sistemas de Parámetros Distribuidos . . . . .	31
3.2.1. Estructura del Identificador . . . . .	31
3.2.2. Leyes de Aprendizaje para los pesos del Identificador . . . . .	32
3.3. Formulación del Problema de Identificación . . . . .	33
3.4. Resultado Principal . . . . .	34
3.5. Conclusiones del Capitulo . . . . .	35
<b>4. Identificación Complejos</b>	<b>36</b>
4.0.1. Ecuación de Ginzburg-Landau (de Tipo Parabólico) . . . . .	36
4.1. Aproximación de Ecuaciones Diferenciales Parciales Complejas . . . . .	37
4.2. Identificador de Ecuaciones Parciales Diferenciales Complejas . . . . .	40
<b>5. Identificación de Sistemas descritos en EDP Hiperbólicas</b>	<b>43</b>
5.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales de tipo Hiperbólico . . . . .	44

5.1.1.	Representación en Variables de Estado . . . . .	44
5.1.2.	Aproximación numérica para EDP hiperbólicas . . . . .	45
5.2.	Neuro Identificación de PDEs-Hiperbólicas . . . . .	46
5.2.1.	Neuro Identificador . . . . .	47
5.2.2.	Leyes Adaptables para ajustar las trayectorias de los pesos . . . . .	48
5.3.	Establecimiento del Problema . . . . .	49
5.4.	Resultado Principal . . . . .	49
5.5.	Conclusiones del Capítulo . . . . .	50
<b>6.</b>	<b>Neuro-Identificación basada en el Método de Elemento Finito</b>	<b>51</b>
6.1.	Aproximación de un Sistema de Parámetros Distribuidos en 2D . . . . .	52
6.1.1.	Explicación Principal . . . . .	52
6.2.	Descripción de la Red Neuronal Diferencial . . . . .	53
6.3.	Neuro-Identificador . . . . .	54
6.3.1.	Estructura del Neuro-Identificador para Sistemas Distribuidos . . . . .	56
6.4.	Conclusiones del Capítulo . . . . .	59
<b>7.</b>	<b>Observador Neuronal basado en la Técnica de "Backstepping" para EDP</b>	<b>60</b>
7.1.	Observadores para EDP . . . . .	60
7.1.1.	Teoría de "Backstepping" para EDP . . . . .	61
7.1.2.	Redes Neuronales Diferenciales . . . . .	61
7.2.	Clase de EDP . . . . .	62
7.3.	Diseño del Observador Neuronal . . . . .	63
7.4.	Transformación Directa. Prueba del Teorema . . . . .	65
7.5.	Prueba de Causalidad. Transformación Inversa . . . . .	66
7.6.	Conclusiones del Capítulo . . . . .	67
<b>8.</b>	<b>Control basado en Redes Neuronales Diferenciales para EDP</b>	<b>68</b>
8.1.	Clase de sistema de parámetros distribuidos inciertos . . . . .	68
8.2.	Identificación de Sistemas de Parámetros Distribuidos usando Redes Neuronales Diferenciales . . . . .	70
8.3.	Red Neuronal Diferencial para EDP . . . . .	71
8.4.	Estrategia de control para EDP . . . . .	72

<b>9. Resultados Numéricos</b>	<b>75</b>
9.1. Proceso de Identificación de EDP en 2D	75
9.2. Proceso de Identificación de EDP en 3D	77
9.2.1. Dinámica del Crecimiento Tumoral	77
9.3. Proceso de Identificación de EDP Hiperbólicas	80
9.3.1. Cadena vibrante de un intervalo finito	80
9.4. Proceso de Identificación de EDP Complejas	82
9.4.1. Simulación de la Estimación de la ecuación de Landou	82
9.5. Proceso de Identificación de EDP basado en FEM	85
9.6. Neuro-Observador basado en la Técnica de Backstepping	86
9.7. Resultados Numéricos	86
9.8. Control para Sistemas de Parametros Distribuidos	90
9.9. Resultados Numéricos	90
9.10. Cuadro Comparativo	92
9.11. Publicaciones	94
<b>10. Conclusiones</b>	<b>95</b>
<b>11. Trabajo a Futuro</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>98</b>
<b>12. Apéndices</b>	<b>107</b>
12.1. Apéndice A	107
12.1.1. Prueba de la convergencia del Error de Identificación para EDP en 2D usando RND	107
12.2. Apéndice B	110
12.2.1. Prueba de la convergencia del Error de Identificación para EDP en 3D usando RND	110
12.3. Apéndice C	114
12.3.1. Prueba de la convergencia del Error de Identificación para EDP Complejas usando RND	114
12.4. Apéndice D	116
12.4.1. Prueba de la convergencia del Error de Identificación para EDP hiperbólicas usando RND	116

12.5. Apéndice E . . . . .	119
12.5.1. Prueba de la convergencia del Error de Identificación para los elementos que forman un EDP en 2D usando RND basadas en el MEF . . . . .	119

# Índice de figuras

---

1.1. Diagrama Representativo del Método de Diferencias Finitas en una dimensión .	8
1.2. Diagrama Representativo del Método de Diferencias Finitas en dos dimensiones	9
1.3. Diagrama Representativo del Método de Diferencias Finitas en tres dimensiones	10
1.4. División del Dominio en elementos . . . . .	12
1.5. Definición de la solución por valores en 2 puntos diferentes . . . . .	13
1.6. Definición de la función base global para un elemento . . . . .	13
1.7. Sistema de Parámetros Distribuidos visto como una Caja Gris . . . . .	14
6.1. Dominio de la Malla . . . . .	53
6.2. Elemento Triangular de 3 nodos . . . . .	53
9.1. Trayectorias del Modelo en EDP . . . . .	76
9.2. Trayectorias producidas por el Identificador basado en RND . . . . .	77
9.3. Diferencia entre las trayectorias estimadas por la red neuronal y las trayectorias de la EDP . . . . .	77
9.4. Índice de desempeño de la RND . . . . .	78
9.5. Trayectoria Numérica producida por el modelo matemático descrito por la EDP en 3D a los 46 días a lo largo del dominio completo. . . . .	79
9.6. Trayectoria Numérica producida por la Red Neuronal Diferencial en 3D a los 46 días a lo largo del dominio completo. . . . .	79
9.7. Error de la Aproximación. Diferencia entre la solución de la EDP en 3D y la estimación de la RND en 3D a los 46 días de simulación. . . . .	79
9.8. Comparación entre las trayectorias de la EDP en 3D y la aproximación de la RND para la coordenada z a los 46 días de simulación. . . . .	80
9.9. Solución numérica de la EDP hiperbólica . . . . .	81
9.10. Solución numérica de la RND estimando las trayectorias de una EDP de tipo hiperbólico . . . . .	81



9.11. Error producido por los estados estimados de la red en comparación con la trayectoria de la EDP hiperbólica . . . . .	81
9.12. Trayectorias de la CVDNN para aproximar la magnitud de la ECGL . . . . .	82
9.13. Magnitud de las trayectorias de la ECGL . . . . .	82
9.14. Diferencia entre la magnitud de la EDGL y la CVDNN . . . . .	83
9.15. Trayectorias de la fase de la EDGL . . . . .	83
9.16. Trayectorias de la CVDNN para aproximar la fase de la EDGL . . . . .	84
9.17. Dinámica del error de la aproximación de la fase hecha por la CVDNN . . . . .	84
9.18. Numerical trajectory produced by the mathematical model described by 2D partial differential equation at time 9s along the whole domain. . . . .	85
9.19. Trayectorias numericas producidas por la red neuronal aproximando el modelo a los 9 segundos de simulación . . . . .	86
9.20. Trayectoria numérica producida por la diferencia entre las trayectorias de la EDP y las trayectorias de la RND a los 9 segundos de simulación . . . . .	86
9.21. Dinámica del sistema . . . . .	87
9.22. Dinámica del Kernel, solución a la ecuación hiperbólica con condiciones de Neumann a cero . . . . .	87
9.23. El comportamiento de la aproximación realizada por el Observador Neuronal . . . . .	88
9.24. La dinámica del error va a cero exponencialmente en el tiempo para cada valor de $x$ con diferentes valores de decaimiento. . . . .	88
9.25. El comportamiento de la dinámica del sistema en el tiempo $t = 8$ y $t = 15$ segundos, comparada con la aproximación hecha por la RND en los mismos tiempos . . . . .	89
9.26. Dinámica del error a 8 segundos de simulación . . . . .	89
9.27. Comportamiento de la dinámica del sistema a los 15 segundos de simulación comparado con la aproximación realizada por la RND al mismo tiempo . . . . .	89
9.28. Dinámica del Error a los 15 segundos de simulación . . . . .	89
9.29. Trayectorias del sistema cuando no se aplica una acción de control . . . . .	90
9.30. Trayectorias de la RND como identificador . . . . .	90
9.31. Diferencia entre las trayectorias del sistema y la aproximación de la RND . . . . .	91
9.32. Sistema de referencia . . . . .	91
9.33. Trayectorias del sistema al aplicarsele control . . . . .	91
9.34. Seguimiento de trayectorias de la RND con control . . . . .	92

9.35. Diferencia entre las trayectorias de la RND y la Referencia . . . . . 92

# Agradecimientos

---

A DIOS, EL AMOR DE MI VIDA.

A *la Mami*, OMA ERES LA MEJOR, GRACIAS POR TODO.

A *Eri*, ERES MUY IMPORTANTE, TE QUIERO MUCHO.

A *mi familia*, POR QUE SÉ QUE CUENTO CON USTEDES EN TODO MOMENTO.

AL *M. en C. Alejandro García González*, POR QUE NO HAS DEJADO DE ENSEÑARME UN SÓLO DÍA.

AL *Dr. Isaac Chairez Oria*, GRACIAS POR CADA MOMENTO QUE ME HAS DADO, IMPRESIONANTE LO QUE SE PUEDE APRENDER DE TI.

AL *Dr. Alexander Poznyak*, POR SU ENSEÑANZA, EJEMPLO Y MOTIVACIÓN, GRACIAS.  
A MIS *sinodales*, DR. LUVIANO, POR SU REVICIÓN, CONSEJOS Y APOYO, DR. WEN YU,  
POR SU IMPULSO, DR. BAROUH POR SUS OBSERVACIONES.

AL *Dr. Vadim Azmiakov*, POR SU EXIGENCIA Y HONESTIDAD, GRACIAS POR CADA UNO DE SUS COMENTARIOS Y SUS SONRISAS.

A *mis compañeros*, SOBRE TODO LOS QUE ME ACOMPAÑARON DESDE TIEMPO ATRÁS, GRACIAS POR SUS PALABRAS, AYUDA Y POR ESTAR AHÍ.

A *mis amigos*, GRACIAS POR SU TIEMPO, LOS BUENOS MOMENTOS Y SUS ORACIONES.

...

AL **CONACYT** POR SUS ESTIMULOS Y POR CADA APOYO OTORGADO PARA LA CULMINACIÓN DE ÉSTA TESIS.

AL **CINVESTAV** POR CADA ESTIMULO Y POR SER UNA EXCELENTE INSTITUCIÓN.

# Resumen

---

En esta tesis se presenta una alternativa de solución numérica basada en Redes Neuronales Diferenciales para resolver el problema de Identificación no paramétrica así como atacar el problema de estimación de estados de sistemas inciertos de parámetros distribuidos. Los sistemas de parámetros distribuidos por naturaleza suelen describirse empleando ecuaciones diferenciales parciales, dichas ecuaciones pueden ser de tipo parabólico, hiperbólico o elíptico, dependiendo de su estructura, y se pueden presentar para una, dos o tres dimensiones (considerando esta última como el máximo escalafón definido al menos en un sentido físico). A pesar de estas características que permiten tener descripciones más cercanas a la realidad del fenómeno que describen, las ecuaciones diferenciales parciales presentan como desventaja la dificultad para encontrar sus soluciones exactas, además de que los métodos de aproximación numérica que existen para su solución están definidos sólo si su estructura es perfectamente conocida. En este trabajo se persigue encontrar una alternativa de solución para sistemas cuya estructura matemática es desconocida. Cualquier función continua definida en un conjunto compacto puede ser aproximada por una Red Neuronal. Con base a las propiedades bien estudiadas de las Redes Neuronales como aproximadores universales, es que se han reducido los problemas de identificación no paramétrica y de observación de estados, a encontrar una expresión para la definición de la dinámica de los pesos, de forma tal que se asegure, mediante las leyes de aprendizaje, la convergencia de las trayectorias de la red a los estados de la ecuación diferencial parcial. Esto se consigue mediante el análisis de Lyapunov, donde se determinan las condiciones de estabilidad del error de identificación y para el caso del observador de estados, el error de estimación. El resultado se extiende del caso escalar [35] donde consideramos una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico a los casos de ecuaciones de tipo hiperbólico en una dimensión, así como ecuaciones en 2 y 3 dimensiones, para finalizar con el caso de estimación de estados y control de un sistema de parámetros distribuidos, todos, siguiendo el mismo proceso basado en las técnicas de control adaptable que obedecen al segundo método de Lyapunov. Para

mostrar el comportamiento de la metodología sugerida, al menos en un sentido cualitativo, se analiza el problema de modelado para un sistema con parámetros distribuidos en sus diferentes vertientes, desde la ecuación que describe el crecimiento tumoral en una y dos dimensiones, hasta la presentación de una ecuación de tipo hiperbólico para ejemplificar numéricamente los casos extendidos. El desempeño de cada identificador propuesto se considera aceptable, dada la correspondencia entre la dinámica del modelo y las trayectorias numéricas obtenidas por el algoritmo del identificador basado en Redes Neuronales Diferenciables. El segundo resultado que se presenta ataca el problema de estimación de estados y consiste en un observador de estados basado en Redes Neuronales Diferenciales para Sistemas no lineales inciertos con parámetros distribuidos, donde se considera que el único conocimiento que se tiene de la planta son las condiciones iniciales y las condiciones a la frontera. La metodología sugerida se basa en los resultados anteriores, donde se emplean dos técnicas numéricas diferentes, el método de diferencias finitas y el método del elemento finito, con lo que se alcanza una apertura a estructuras de ecuaciones más complejas definidas en diferentes coordenadas, como cilíndricas o esféricas para casos de sistemas más complejos, así como la introducción de la transformación de Volterra para el caso del observador, tema que será descrito en el capítulo correspondiente. Finalmente la presentación de un control de sistemas inciertos de parámetros distribuidos en el que se considera que algunos puntos en el dominio son controlables, por lo que, es posible tomar en cuenta los métodos distribuidos de control y la técnica de RN. Las estructuras de Red definidas, las aproximaciones numéricas y el desempeño de cada identificador, del estimador y del control, se presentan mostrando al lector la capacidad de la metodología definida en esta tesis, así como su posible expansión a otras clases de ecuaciones diferenciales parciales, con lo que el alcance de este resultado no termina con este documento.

# Abstract

---

This thesis presents an alternative numerical solution based in Differential Neural Networks to solve the Non parametric identification problem, state estimation and control of uncertain distributed parameters systems. These systems can be described using partial differential equations in one, two or three dimensions, even when the characteristics of their representation let have more realistic descriptions of the phenomena, this equations have the disadvantage of their difficult analytical and numerical solution, much more when the exact solution depends of the well knowing structure.

In this work, the aim is to find an strategy of solution for systems of uncertain mathematical structure. Any continuous function defined in a compact set can be approximated by a Neural Network. Using the well-known properties of the Neural Networks as universal approximators, the problem of identification, estimation and control can be solved, trough the search of an expression for the weights definition, in a way that the learning laws, the trajectory convergence of the neural network to the partial differential equation. This is possible through a Lyapunov analysis, where the conditions determined the error stability. The result is extended from a 2D parabolic partial derivatives equation to the 1D hyperbolic, 2D and 3D partial differential equations.

In order to demonstrate the behavior of the suggested methodology, in a qualitative sense, the modeling problem is analyze for a distributed parameters systems in its various aspects, from the equation to describe the tumor growth in 1D or 2D, until the presentation of the hyperbolic equation to exemplify numerically the extended cases.

The performance of each proposed Differential Neural Network is considered acceptable because the correspondence of the models dynamics and the numerical trajectories obtained for an identifier algorithm, the estimator and the control. The suggested methodology is based in two numerical methods, the finite difference method and the finite element method, the last one, allows obtaining a more complex structures.

Defined network structures, numerical approximations and performance of each identifier, the estimator and control, are presented showing the reader the ability of the methodology defined in this thesis, and its possible expansion to other classes of partial differential equations, whereby the scope of result does not end with this document.

# Objetivos

---

## 1. Objetivos Generales

- Identificar sistemas con parámetros distribuidos tipo parabólicos en dos y tres dimensiones utilizando una Redes Neuronales Diferenciales.
- Obtener la extensión del método para identificación de sistemas con parámetros distribuidos tipo parabólicos descrito en ecuaciones diferenciales parciales complejas utilizando Redes Neuronales Diferenciales.
- Obtener la extensión del método para identificación de sistemas con parámetros distribuidos tipo hiperbólico utilizando Redes Neuronales Diferenciales.
- Obtener la extensión del método para identificación de sistemas con parámetros distribuidos mediante una clase de Red Neuronal Diferencial basada en el método de elemento finito para mallas no regulares.
- Desarrollar un algoritmo de estimación de estados para sistemas inciertos con parámetros tipo parabólicos distribuidos basados en la técnica de transformaciones integrales de Volterra empleando aproximación numérica.
- Desarrollar un algoritmo de control basado en el seguimiento de trayectorias utilizando Redes Neuronales Diferenciales.

## 2. Objetivos Particulares

- Obtener los algoritmos de ajuste de la Red Neuronal Diferencial para la identificación de sistemas de parametros distribuidos en dos y tres dimensiones.
- Obtener los algoritmos de ajuste de la Red Neuronal Diferencial para identificación de sistemas de parámetros distribuidos de tipo hiperbólico y de tipo complejo.



- Probar la identificación de sistemas de parámetros distribuidos en un caso práctico de crecimiento tumoral y de deformación tisular.
- Realizar la prueba de causalidad para obtener el parámetro de ajuste de la Red Neuronal Diferencial como observador de estados basado en la integral de Volterra.
- Probar la eficiencia del control desarrollado para ecuaciones diferenciales parciales.

# Notación

---

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertenece o es elemento de ""
$\subseteq$	Está contenido o es un subconjunto de ""
$A^T$	Traspuesta de una matriz
$A^{-1}$	Inversa de una matriz
$tr A$	Traza de una matriz
$det A$	Determinante de una matriz
$I$	Matriz identidad
$ x $	Valor absoluto de un número
$\ x\ $	Norma euclidiana de un vector, es decir, $\ x\  = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
$\ x\ _A$	Es la norma ponderada de un vector, es decir, $x^T A x \leq 1$
$ $	Tal que
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto interno
$R(R_+)$	Conjunto de números reales (no negativos)
$R^n(R_+^n)$	Conjunto de vectores reales (no negativos)
$R^{n \times m}$	Conjunto de matrices reales con n renglones y m columnas
LMI	Desigualdad Matricial Lineal
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial con respecto al tiempo
$u_t$	Derivada parcial de $u$ con respecto al tiempo

## **1.1. Motivación**

En la ciencia y en la ingeniería, existen diversas aplicaciones en sistemas que pueden ser descritos por Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) para describir procesos distribuidos geoméricamente. En particular, las ecuaciones en derivadas parciales son una descripción formal que ofrece una representación cercana al ente tratado, pero que sacrifican la utilización de métodos convencionales de resolución analítica de dichas ecuaciones, en favor de la fiabilidad del modelo. Estas ecuaciones no suelen tener una solución analítica sencilla, la mayor parte de las veces es necesario realizar aproximaciones y estudiar el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones. Actualmente, muchos métodos numéricos han sido desarrollados para construir soluciones aproximadas de las descripciones matemáticas de sistemas no lineales basados en ecuaciones diferenciales parciales. Entre otras, la técnica del elemento finito, la técnica de diferencias finitas, el método de colocación ortogonal, Runge Kutta, predictor-corrector y el método de líneas son los algoritmos más populares para obtener las mencionadas soluciones numéricas, sin embargo estos poseen algunas desventajas en su implementación, dado que requieren de la discretización del dominio en un número finito de elementos donde la solución es encontrada de manera local. Aún cuando estos métodos dan una solución aproximada, se requiere del conocimiento total del sistema para discretizar el dominio, esto no sería posible ante perturbaciones, lo que aumenta la dificultad de aplicarlos para 2 y 3 dimensiones. Adicional a esto, la solución aproximada a las derivadas es discontinua y puede afectar la estabilidad de la solución. Por esto, es necesario lidiar con mallas finitas, lo que incrementa significativamente el costo computacional. Finalmente, estos metodos están bien definidos por sistemas lineales

con una bien conocida estructura. Otra alternativa a la solución numérica de sistemas con elementos inciertos es el enfoque de Redes Neuronales (RN). Enfoque que transforma el problema original en uno de tipo no lineal adaptable robusto. La técnica de RN es una herramienta útil en el análisis de una variedad de problemas relacionados con la teoría de control, tales como la identificación, la estimación y el seguimiento de trayectorias. Además, estas redes tienen la ventaja de poder aplicarse en presencia de incertidumbres o de dinámicas no modeladas, ya que su estructura incorpora retroalimentación. Es así que, el problema de la identificación, la estimación y el control de sistemas descritos en ecuaciones diferenciales parciales en 2D, 3D, complejos, de tipo hiperbólico y parabólico, es atacado bajo la unión de esta herramienta (Redes Neuronales Diferenciales) y tanto, la técnica de diferencias finitas como la técnica del elemento finito. Para evidenciar la necesidad de utilizar la técnica de Redes Neuronales en la solución de ecuaciones diferenciales parciales **inciertas**, se considera el siguiente ejemplo numérico basado en el Método de Diferencias Finitas:

### 1.1.0.1. Solución Analítica

Sea la ecuación diferencial parcial siguiente:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = -f \quad (1.1)$$

que satisface las condiciones iniciales y a la frontera

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 \\ u(1) &= 0 \\ u(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

La solución analítica de esta ecuación (9.3) es:

$$u(x) = \frac{1}{2}(x - x^2), f = 1 \quad (1.3)$$

### 1.1.0.2. Solución numérica por el Método de Diferencias Finitas

Si ahora se resuelve numéricamente la ecuación (9.3) y se compara con la solución analítica encontrada en (1.3) implementando el Método de Diferencias finitas se observa lo siguiente:

$$\frac{u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i}{h^2} + f(x_i), (i = 1, \dots, n) \quad (1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} x_i &= ih, i = 0, \dots, m - 1 \\ h &= 0.1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Es así que la solución de esta ecuación se obtendrá al resolver la ecuación (1.4) de manera iterativa. De igual manera, la ecuación (1.4) puede reescribirse como:

$$A_h u_h = f_h \quad (1.6)$$

donde

$$u_h = [u_1, \dots, u_n]^T \in \mathfrak{R}^n$$

$$f_h = \left[ f(x_1) + \frac{1}{h^2}, f(x_2), \dots, f(x_{n-1}), f(x_n) + \frac{1}{h^2} \right]^T$$

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (1.7)$$

Resolviendo el sistema lineal (1.6) y sustituyendo  $f = 1$ , llegamos a una aproximación numérica de la solución analítica mostrada en (1.3).

### 1.1.0.3. Solución numérica mediante el Método del Elemento Finito

Sin embargo, el método de diferencias finitas no es la única forma que se tiene para obtener la solución numérica de una ecuación diferencial parcial. El método del elemento finito es otra alternativa, a continuación se presenta la solución de la ecuación ejemplo (9.3) mediante la metodología de Galerkin que es una de las maneras de aplicar dicho método:

Se introduce un subespacio finito-dimensional  $V_k \subset H_0^1(0, 1)$  asociado a las funciones base:

$$V_k = \text{span}_{1(x), 2(x), \dots, k(x)} \quad (1.8)$$

Así, cada elemento de  $V_k$ , llamado  $u_k$  puede escribirse en forma única como

$$u_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j \phi_j, \alpha_j \in \mathfrak{R} \quad (1.9)$$

donde  $\{\phi_{i=1}^k\}$  es el conjunto base. Eligiendo entonces las funciones base para (9.3), se selecciona

$$V = \text{span} \{x(x-1), x^2(x-1)\}$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= x(x-1) \\ \phi_2 &= x^2(x-1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

De esta  $V$  dependerá la solución. Reescribiendo en su forma matricial:

$$Ax = f \quad (1.11)$$

donde  $A_{i,j}$  es la matriz de cambio (simétrica, no singular y definida positiva),  $x_i = \alpha_i$  y  $f_i = (f, \phi_i)$  es el vector de carga.

Siguiendo con el método de Galerkin,

$$\begin{aligned} i = 1, j = 1 \\ A_{11} &= \left( \frac{d_1}{dx}, \frac{d_1}{dx} \right) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{d_1}{dx} \right)^2 = \int_0^1 \left( \frac{d(x^2-x)}{dx} \right)^2 = \frac{1}{3} \\ i = 1, j = 2 \\ A_{12} &= \left( \frac{d_2}{dx}, \frac{d_1}{dx} \right) = \frac{1}{6} = A_{21} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} i = 2, j = 2 \\ A_{22} &= \left( \frac{d_2}{dx}, \frac{d_2}{dx} \right) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{d_2}{dx} \right)^2 = \frac{2}{15} \\ f_1 &= \int_0^1 1 = -\frac{1}{6} \\ f_2 &= \int_0^1 2 = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Resolviendo la ecuación (1.11), se tiene que  $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$  y  $\alpha_2 = 0$  pues

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{6}\alpha_2 &= -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{2}{15}\alpha_2 &= -\frac{1}{12} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Por lo que la "solución Galerkin" es:

$$u_2(x) = -\frac{1}{2}\phi_1 + 0\phi_2 = \frac{1}{2}(x - x^2) = u(x) \quad (1.17)$$

Se observa que para obtener la solución aproximada de la ecuación (9.3) de manera analítica o numérica, se requiere del conocimiento completo de la estructura de la ecuación diferencial

parcial, por lo que, utilizar estas mismas metodologías en un sistema que es parcialmente conocido, no es posible. El uso de la técnica de Redes Neuronales Diferenciales, permite tener la aproximación de una ecuación diferencial parcial incierta, y su aplicación es posible en problemas que suelen presentarse en el modelado de procesos, como la identificación de sistemas de parámetros distribuidos con incertidumbres. Otro problema común es la falta de sensado de variables medibles o la dificultad de adquirir una trayectoria del sistema que es desconocida, es por esto que, bajo el mismo principio presentado en los trabajos de [60], se presenta un observador de estados basado en Redes Neuronales Diferenciales y la Transformación Integral de Volterra. De igual manera, el fin principal de tener a disposición estas variables para conocer su comportamiento es poder controlarlo. Es por esto que se ha diseñado un control para seguimiento de trayectorias, que utiliza las propiedades de las redes junto con los principios de control óptimos presentados por [78] para controlar un sistema descrito en ecuaciones diferenciales parciales, donde algunos puntos en la malla pueden ser controlados.

## 1.2. Sistemas de Parámetros Distribuidos

Los sistemas pueden agruparse según las características de las variables que los definen, dependiendo de estas es que se da lugar a la elección del tipo de ecuación que se usará para su representación. Un sistema de parámetros distribuidos es aquel en el que las variables que parametrizan estas relaciones constitutivas están distribuidas espacialmente, es decir dependen tanto del tiempo como de coordenadas espaciales [18]. Dicho en otras palabras, un sistema distribuido no posee un número finito de puntos en los cuales las variables puedan ser definidas, mientras que, un sistema de parámetros concentrados puede ser descrito por un número finito de sus variables. Es por todas estas características que, los sistemas de parámetros distribuidos suelen ser modelados por Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP).

### 1.2.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Una ecuación diferencial parcial o ecuación en diferencias, es una relación entre una función  $f$  de varias variables independientes  $x, y, z, t, \dots$  y las derivadas parciales de  $f$  respecto a esas variables [88]. Una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden con dos variables independientes y con funciones reales puede pertenecer a uno de tres tipos generales. Esta clasificación solo depende de los coeficientes de las derivadas de segundo orden. Naturalmente suponemos que al menos uno de los coeficientes  $A, B, C$  y  $D$  no es cero. La ecuación en

derivadas parciales lineal y de segundo orden:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \quad (1.18)$$

donde  $A, B, C, D, E,$  y  $F$  son funciones reales, será:

- Hiperbólica si  $B^2 - 4AC > 0$
- Parabólica si  $B^2 - 4AC = 0$
- Elíptica si  $B^2 - 4AC < 0$

Las ecuaciones de segundo orden se clasifican debido al hecho de que se desean resolver ecuaciones sujetas a ciertas condiciones que pueden ser de frontera o iniciales. El tipo de condiciones adecuadas para cierta ecuación depende si es hiperbólica, parabólica o elíptica.

Dada una ecuación diferencial, el valor de la variable dependiente en la frontera puede ser dado de diversas formas [33]. Tipos de condiciones iniciales y de frontera:

- a Dirichlet.- La variable dependiente es prescrita sobre la frontera. También se denomina la condición a la frontera de primer orden.
- b Homogenea.- La variable dependiente sobre la frontera.
- c Mixtas.- Una combinación de la variable dependiente y su derivada normal está dada en la frontera, o un tipo de dato a la frontera esta dado sobre una parte diferente de la frontera. Esto también es llamado una condición a la frontera de tercer tipo.
- d Newman.- La derivada normal de la variable dependiente está dada en la frontera. Esta es también llamada una condición a la frontera de segundo tipo.

A veces, en los datos a la frontera también se incluyen valores de la variable dependiente en sus puntos interiores. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) están definidas naturalmente en espacios de Sobolev ( $W^{m,p}$ ), donde las derivadas se entienden en un sentido débil (es la derivada de una función que se supone no diferenciable, sólo integrable) para hacer el espacio completo, el de Banach. Es así que un espacio de Sobolev es un espacio Banach (o un espacio Hilbert) de funciones con suficientes derivadas para algunas aplicaciones de dominio y equipado con una norma que mide tanto el tamaño como la suavidad de una función.



### 1.2.2. Métodos de Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Una solución de una ecuación diferencial parcial es cualquier función que la verifica idénticamente. Las EDP son una descripción idealizada de sistemas no lineales, utilizada en la representación matemática de fenómenos naturales dependientes tanto del tiempo como del espacio. La desventaja que presentan es que no es fácil obtener sus soluciones exactas. Las soluciones de las EDP pueden calcularse mediante métodos analíticos o aproximarse mediante métodos numéricos. Para ciertas clases de EDPs se conocen las soluciones analíticas, pero en general es necesario buscar soluciones aproximadas. A continuación se presenta una introducción de los dos métodos numéricos más comunes, ya que el presente trabajo abordará ambas técnicas en la identificación de diversos sistemas de parámetros distribuidos. De los métodos de aproximación numérica disponibles para resolver ecuaciones diferenciales, los más utilizados son el método de diferencias finitas y el método de elementos finitos [88].

### 1.2.3. Condiciones de Existencia

Antes de poder aplicar cualquier método de solución de ecuaciones diferenciales parciales, es necesario conocer si la solución a dicha ecuación existe. Es así que para introducir el concepto de existencia y unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales parciales se considera el Teorema de Cauchy-Kovalevskaya (véase [28], [29]), que es un teorema general de existencia, por lo que puede considerarse como central. Este teorema se aplica a las EDP's de una forma general

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = f_i \left( t, x, u, \frac{u}{t}, \frac{u}{x}, \dots \right), \quad i = 1, \dots, m$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m)$  y por cada  $i = 1, \dots, m$ , la función  $f_i$  depende de las derivadas de las funciones  $u_j$  sólo de orden  $n_j$ , es independiente de  $\frac{\partial^{u_j} u_j}{\partial t^{n_j}}$ , y es una función analítica de todos sus argumentos, que cubren una gran cantidad de sistemas. No obstante, en la práctica, los métodos de series de potencias propuestos en el teorema de Cauchy-Kovalevskaya no son tan frecuentes. Además, la teoría no lineal de EDP's, es mucho menos unificada en su enfoque, dado que los diversos tipos de no linealidad deben ser tratados de manera muy diferente. Por ejemplo en [29], la prueba se basa en el análisis funcional y en la estimación de "energías" para probar la existencia de las soluciones débiles. En el sentido amplio, una solución débil  $u$  es una función que no es continuamente diferenciable e incluso puede no ser continua, pero que, sin embargo, considera que satisface la ecuación en algún sentido definido de manera precisa. Tales soluciones, son muy usadas ya que una gran cantidad de fenómenos naturales

modelados por EDP no soportan soluciones suficientemente suaves. Para más información al respecto, se sugiere al lector revisar el trabajo de Garabedian [40], que presenta un análisis preciso de las herramientas necesarias para el estudio de este tipo de soluciones.

### 1.2.3.1. Método de Diferencias Finitas

El Método consiste en una aproximación de derivadas parciales por expresiones algebraicas envolviendo los valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados [49]. El valor de los puntos seleccionados se convierten en las incógnitas, en vez de la distribución espacial continua de la variable dependiente. El sistema de ecuaciones algebraicas debe ser resuelto y puede envolver un número largo de operaciones aritméticas. El método puede realizarse de manera regresiva o progresiva. Esta técnica puede seguirse para los diferentes casos de ecuación diferencial parcial, ya sea en una, dos o tres dimensiones (1D, 2D, 3D). A continuación se presenta la construcción de malla requerida para las diversas soluciones. Para aplicar el método de diferencias finitas para 1D es necesario construir un conjunto (rejilla o malla, figura (1.2.3.1)), que divida el subdominio  $x \in [0, 1]$  en  $N$  secciones equidistantes definidas como  $x^i$ .

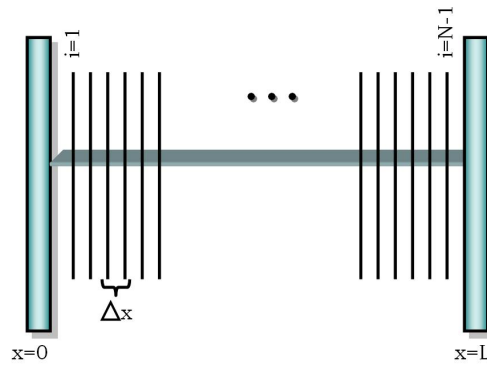


Figura 1.1: Diagrama Representativo del Método de Diferencias Finitas en una dimensión

Usando la descripción de malla, se puede tener la siguiente definición:

$$u^i = u(x^i, t)$$

$$u_t^i = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{x=x^i}$$

$$u_x^i = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x^i}$$

Para aplicar el método de diferencias finitas para 2D es necesario construir un conjunto (rejilla o malla, figura (1.2.3.1)), que divida el subdominio  $x \in [0, 1]$  en  $N$  y  $y \in [0, 1]$  en  $M$  secciones equidistantes definidas como  $x^i, y^j$ .

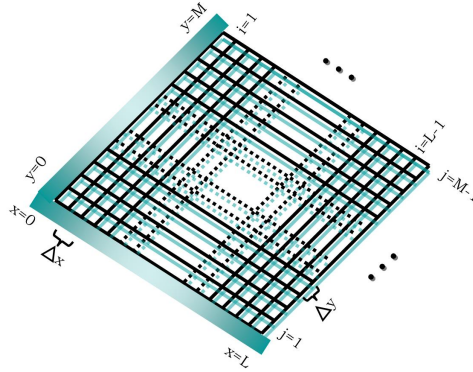


Figura 1.2: Diagrama Representativo del Método de Diferencias Finitas en dos dimensiones

Usando la definición de malla, es posible tener la siguiente definición:

$$u^{i,j} = u(x^i, y^j, t)$$

$$u_t^{i,j} = \left. \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} \right|_{x=x^i, y=y^j}$$

$$u_{xy}^{i,j} = \left. \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial xy} \right|_{x=x^i, y=y^j}$$

Para aplicar el método de diferencias finitas para 3D es necesario construir un conjunto (rejilla o malla, figura (1.2.3.1)), que divida los subdominios  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$  y  $z \in [0, 1]$  en  $L$ ,  $N$  y  $M$  secciones equidistantes definidas como  $x^i, y^j, z^k$ .

Usando la descripción de malla, es posible tener la siguiente definición:

$$u^{i,j,k} = u(x^i, y^j, z^k, t)$$

$$u_t^{i,j,k} = \left. \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} \right|_{x=x^i, y=y^j, z=z^k}$$

$$u_{xyz}^{i,j,k} = \left. \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial xyz} \right|_{x=x^i, y=y^j, z=z^k}$$

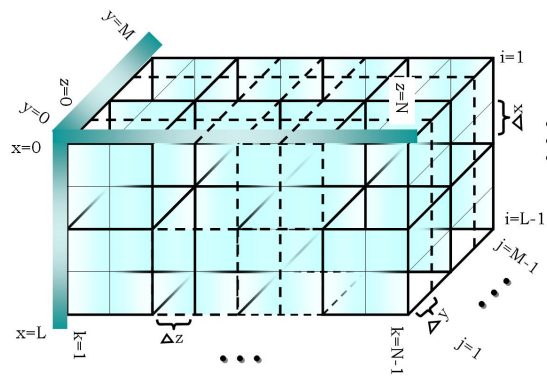


Figura 1.3: Diagrama Representativo del Método de Diferencias Finitas en tres dimensiones

### 1.2.3.2. Método de Elemento Finito

#### MÉTODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS

El método de diferencias finitas (FEM, por sus siglas en inglés), es un procedimiento numérico para obtener una aproximación de la solución a diversos problemas encontrados en ingeniería [49]. Los elementos finitos asemejan fragmentos de la estructura. Los nodos aparecen en la periferia de los elementos y sirven como conectores que mantienen a los elementos unidos. Los elementos pueden tener diferentes representaciones, es así que, en una dimensión pueden verse como líneas, en dos dimensiones pueden ser áreas triangulares o cuadrilaterales y en tres dimensiones pueden ser prismas o tetraedros. Todos los elementos que comparten un nodo tienen los mismos componentes de desplazamiento en ese nodo. Antes del desarrollo del método de elemento finito, existe una familia de métodos usados para resolver numéricamente una ecuación diferencial, estos métodos pertenecen al Método conocido como de los Residuos Ponderados (MWR, por sus siglas en inglés). Se presentará una subclase particular del MWR, el método de Galerkin [30]. En el MWR una solución aproximada se sustituye en la ecuación diferencial. Como la solución aproximada no satisface idénticamente la ecuación, un *residuo*, o término de error, resulta. Antes de comenzar con la explicación principal se requiere de unos conceptos previos. El dominio es un conjunto abierto que es acotado  $\omega = (0, 1)$  que define donde la ecuación diferencial está definida. Un espacio vectorial normado que es completo se llama de Banach.  $L_2(\omega)$  es el espacio vectorial de funciones cuadrado-integrables definidas sobre el dominio.

$$u \in L_2(\omega) \Leftrightarrow \int_{\omega} u^2 < \infty$$

$L_2(\omega)$  está equipado con un producto interno por lo que es un espacio normado, y será un espacio de Hilbert cuando esté completo. Para  $k > 0$ , es espacio de Sobolev  $H^k(0, 1)$  el cual

es el conjunto de funciones:  $v : (0, 1) \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que  $v$  y todas sus derivadas (incluyendo  $k$ ) son integrables al cuadrado, con el producto interno  $H^k(0, 1)$  define un espacio de Hilbert. Una clase de solución de Sobolev será  $F(u) \leq F(v), \forall v \in H_0^1(0, 1)$ . Si (1.19), es una ecuación diferencial parcial bien definida, entonces si  $u$  la resuelve, también  $u$  resolverá su formulación variacional la cual es equivalente a la solución de Sobolev (solución débil) y si esto ocurre con  $u$  como una función suficientemente suave entonces se llamará solución fuerte.

$$u_{xx}(x) = -f, (0 < x < 1) \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (1.19)$$

El objetivo es aproximar  $u$  por funciones  $\tilde{u}$ , esto es una combinación lineal de funciones de base elegidas desde un conjunto lineal independiente. Ahora se introduce un subespacio finito-dimensional  $V_k \subset H_0^1(0, 1)$  asociado a las funciones base:

$$V_k = \text{span}\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_k(x)\}$$

así cada elemento de  $V_k$ , llamado  $u_k$  puede escribirse de forma única como:

$$u_k \cong \tilde{u}_k = \sum_{i=1}^k a_i \phi_i \quad (1.20)$$

donde  $a_i \in \mathfrak{R}$  y  $\phi_{i=1}^k$  es el conjunto base. Ponemos el problema variacional  $V$  sobre  $V_k$ , es decir, buscamos que  $u_k \in V_k$ , tal que

$$\left( \frac{du_k}{dx}, \frac{dv_k}{dx} \right) = (f, v_k), \forall u_k \in V_k$$

Esta última ecuación es la llamada "Solución de Galerkin" [30]. Tomando  $v_k$  como  $\phi_i$  se tiene:

$$\left( \frac{du_k}{dx}, \frac{d\phi_i}{dx} \right) = (f, \phi_i)$$

entonces, se puede tener

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \left( \frac{d\phi_j}{dx}, \frac{d\phi_i}{dx} \right) = (f, \phi_i)$$

Reescribiendo en su forma matricial:

$$Ax = f$$

donde  $A_{ij} = \left( \frac{d\phi_j}{dx}, \frac{d\phi_i}{dx} \right)$  es la matriz de cambio, debe ser simétrica y definida positiva,  $x_j = \alpha_j$  para  $i, j = 1, \dots, k$  y  $f_i = (f, \phi_i)$  es el vector de carga. Una propiedad del método de Galerkin es que si  $u$  es una solución de la formulación variacional  $(\int_{\omega} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} = \int_{\omega} f v, \forall v \in H_0^1)$  y  $u_k$  es la solución de Galerkin, entonces

$$\left\| \frac{d}{dx}(u - u_k) \right\| \leq \left\| \frac{d}{dx}(u - v_k) \right\|, k \in V_k$$

Para asegurar que  $V_k \subset V$ , la función  $u_k = \sum_j \alpha_j x^{j-1}$  debe satisfacer dos condiciones:

- $u_k(x) \in H^1(0,1) \rightarrow u_k \in C^\infty(0,1)$
- $u_k(0) = 0 = u_k(1) \rightarrow V_k = \text{span} \{ \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_k(x) \}$

El algoritmo para resolver una ecuación diferencial parcial en una dimensión utilizando el método de Galerkin puede describirse como sigue [91]:

- 1 Dividir la cerradura del dominio en ELEMENTOS (figura (1.4))
- 2 Aproximar a pedazos de  $u$  usando un polinomio de bajo orden  $u_e(x)$  definido por valores en dos diferentes puntos  $x_1 \neq x_2$  (figura (1.5)), donde los nodos satisfacen las condiciones de interpolación.
- 3 Satisfacción de requerimientos de suavidad. Concatenando  $u_e(x)$  se obtiene la función global  $u_k(x) = A_{e=1}^n(x) = \alpha_0 N_0(x) + \alpha_1 N_1(x) + \dots + \alpha_n N_n$ . Definiendo así  $N_i(x)$  la función base global (figura (1.6)).
- 4 Satisfacer condición a la frontera. Removiendo las funciones base  $N_0(x)$  y  $N_n(x)$  del conjunto de base  $u_k^*(x) = \alpha_1 N_1(x) + \dots + \alpha_{n-1} N_{n-1}(x)$  se asocia con el espacio de aproximación  $V_{n-1}^* = \text{span} N_1(x), \dots, N_{n-1}(x)$

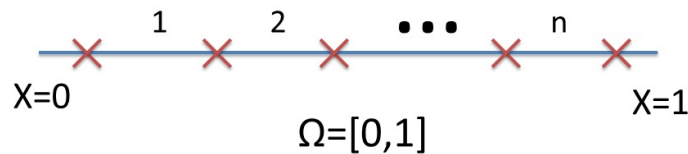


Figura 1.4: División del Dominio en elementos

### 1.3. Aproximación mediante Redes Neuronales Diferenciales

Los métodos de aproximación analítica a la solución de EDP, proporcionan frecuentemente información útil acerca del comportamiento de la solución en valores críticos de la variable dependiente, pero tienden a ser más difíciles de aplicar que los métodos numéricos. Entre las consideraciones que justifican el uso de métodos numéricos para solucionar ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales se encuentran:

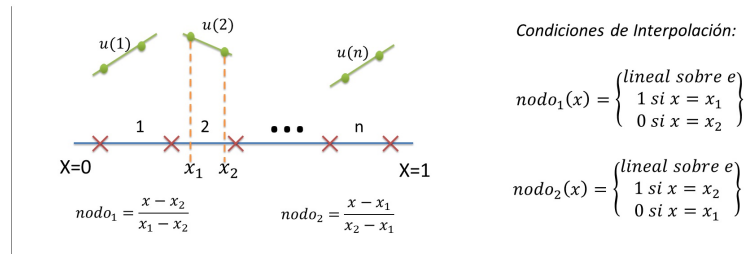
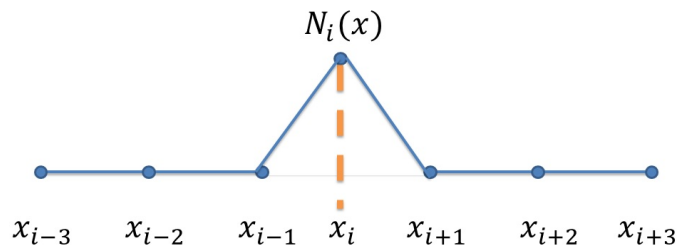


Figura 1.5: Definición de la solución por valores en 2 puntos diferentes



La Función Base Global:

$$N_i(x) = \begin{cases} \text{lineal sobre } [0,1] \\ 1 \text{ si } x = x_i \\ 0 \text{ si } x = x_j \end{cases} \quad (j \neq i)$$

Figura 1.6: Definición de la función base global para un elemento

- Los datos de los problemas reales presentan siempre errores de medición, y el trabajo aritmético para la solución está limitado a un número finito de cifras significativas que resultan en errores de redondeo. Por lo tanto, incluso los métodos analíticos proporcionan resultados que son aproximaciones numéricas.
- La evaluación numérica de las soluciones analíticas es a menudo una tarea laboriosa y computacionalmente ineficiente pues requieren de un gran número de iteraciones en el cálculo y el tratamiento de los datos en serie, mientras que los métodos numéricos generalmente proporcionan soluciones numéricas adecuadas, de manera simple y eficiente.

Otro inconveniente es que para alcanzar una solución numérica, estos métodos están bien definidos sólo si la estructura de la EDP es perfectamente conocida. Es así que, si el modelo matemático de los procesos considerados está incompleto o es parcialmente conocido, la metodología de redes neuronales es la herramienta sugerida [78]. En éste trabajo, para resolver este problema, se considera al sistema como una caja gris (figura (1.7)) donde el conocimiento del mismo es limitado y sólo se dispone de la entrada y/o la salida del sistema. Se presenta

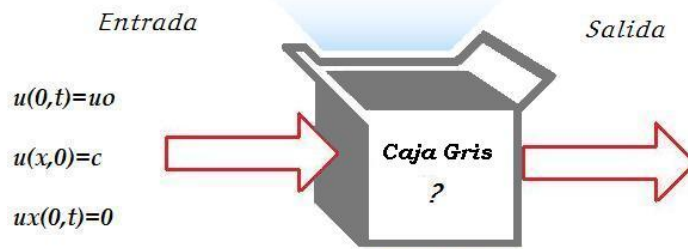


Figura 1.7: Sistema de Parámetros Distribuidos visto como una Caja Gris

una estrategia basada en redes neuronales diferenciales para resolver el problema de identificación no paramétrica de sistemas no lineales *inciertos* (*Caja gris*) descritos en EDP. Es así que basados en metodologías numéricas de solución de EDP, se han diseñado diversas estructuras de Red Neuronal Diferencial (RND) que aproximen las trayectorias de diversos sistemas de parámetros distribuidos. Las estructuras de red aquí presentadas resuelven, para cada punto de una partición cartesiana para EDPs parabólicas e hiperbólicas en todo tiempo, el problema de la identificación no paramétrica basada en el método de diferencias finitas, así como para



cada punto de una partición no cartesiana, basado en el método de elemento finito. En capítulos posteriores se tocará cada caso.

### 1.3.1. Aplicación de la Técnica de RND en la aproximación de EDP

Por el buen comportamiento de las redes neuronales recurrentes dinámicas [41] como aproximadores universales de funciones complejas no lineales, es posible la representación y modelado de un sistema no lineal utilizando redes neuronales artificiales. La representación real de muchos sistemas se obtiene mediante ecuaciones diferenciales de alto orden, de la misma manera, una red neuronal recurrente dinámica, puede ser modelada por medio de ecuaciones diferenciales de cierta complejidad, esta propiedad es la que las diferencia de otras y lo que les da el nombre de redes neuronales diferenciales. El enfoque de Redes Neuronales Diferenciales que es presentado en éste trabajo, aprovecha la información de las propiedades aplicadas a la RND [78] y si el modelo matemático de un proceso se considera incompleto o parcialmente conocido, ofrece una alternativa eficaz para atacar el problema de la identificación no paramétrica y otros, [67]. El problema que se discute en este estudio es la aplicación de una solución numérica basada en RND para resolver el problema de identificación no paramétrica de sistemas no lineales inciertos descritos en EDP.

## 1.4. Definiciones Importantes

Las siguientes definiciones son necesarias para el resultado principal en esta tesis.

### 1.4.1. Espacio de Banach

**Definición:** Sea  $X$  un espacio vectorial normado y sea  $d$  la métrica asociada. Si  $X$  es un espacio métrico completo con respecto a  $d$  se dice que  $X$  es un *espacio de Banach*. Un espacio normado se dice completo si toda secuencia de Cauchy en él es convergente. Resumiendo lo anterior puede decirse que, un espacio de Banach es un espacio vectorial normado que es un espacio métrico completo respecto a la métrica derivada de su norma.

### 1.4.1.1. Espacio de Sobolev

Se utiliza la norma de Sobolev (1.21) para las funciones  $u(x, t)$  por cada  $t$  fijo definido como sigue: Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $v \in C^m(\Omega)$ . Se define la norma de  $v(x)$  como

$$\|v\|_{m,p} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \left( \int_{\Omega} |D^{\alpha} v(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (1.21)$$

( $1 \leq p < \infty, D^{\alpha} v(x) := \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} v(x)$ ). Esta es la norma de Sobolev en la cual la integración es en el sentido de Lebesgue. La completitud del espacio de funciones  $v(x) \in C^m(\Omega)$ :  $\|v\|_{m,p} < \infty$  con respecto a  $\|\cdot\|_{m,p}$  es el espacio de Sobolev  $H^{m,p}(\Omega)$ . Para  $p = 2$ , el espacio de Sobolev es un espacio de Hilbert [1],[65].

### 1.4.2. Estabilidad Práctica

En esta sección se tratará el tema de estabilidad práctica para ecuaciones diferenciales ordinarias, dado que bajo las metodologías que se emplearán en capítulos siguientes, no se requiere de la definición de este tema para otra clase de ecuaciones.

Considerese el siguiente sistema no lineal descrito con EDO's

$$\dot{z}(t) = g(z(t), v(t)) + \varpi(t) \quad (1.22)$$

con  $z(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $v(t) \in \mathfrak{R}^m$  y  $\varpi(t)$  una incertidumbre o perturbación externa tal que  $\|\varpi(t)\|^2 \leq \varpi^+$ .

#### 1.4.2.1. Definición de Estabilidad Práctica

Sean el intervalo de tiempo  $T$  y una función fija  $v(t)^* \in \mathfrak{R}^m$  sobre  $T$ . Dada  $\varepsilon > 0$ , el sistema no lineal (1.22) se dice  $\varepsilon$ -estable prácticamente sobre  $T$  bajo la presencia de  $\varpi(t)$  si existe una  $\delta > 0$  ( $\delta$  dependiente y el intervalo  $T$ ) tal que  $z(t) \in B[0, \varepsilon], \forall t \in T$ , siempre que  $z(t_0) \in B[0, \delta]$ .

#### 1.4.2.2. Estabilizabilidad Práctica

El sistema (1.22) se dice  $\varepsilon$ -estabilizable si para algún  $\varepsilon > 0$  fijo existe una función  $v(\cdot)$  y el número  $\delta > 0$  tal que para cualquier solución  $z_t$  del sistema (1.22) con cualquier condición inicial  $\|z_0\| \leq \delta$  está acotada como

$$\|z_t\| \leq \varepsilon \quad (1.23)$$

En otras palabras, el sistema (1.22) es  $\varepsilon$ -estable si la función adaptable diseñada  $v(\cdot)$  mantiene cualquier trayectoria del sistema dentro de la  $\varepsilon$ -vecindad  $B[0, \varepsilon]$  dada del origen. Es así que, existe la estabilidad uniformemente práctica que aparece cuando para toda  $\delta > 0$ , el límite superior (1.23) se mantiene. Similar a la teoría de estabilidad de Lyapunov para soluciones de sistemas no lineales, se aplica el método directo mencionado anteriormente para la  $\varepsilon$ -estabilidad práctica de sistemas no lineales usando funciones tipo Lyapunov prácticas bajo la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres en el modelo. Nótese que estas funciones tienen propiedades con diferencias significativas para las funciones de Lyapunov en la teoría clásica de estabilidad. La siguiente proposición requiere del siguiente Lema:

**Lema:** Sea una función no negativa  $V(t)$  que satisface la siguiente desigualdad diferencial

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha V(t) + \beta$$

donde  $\alpha > 0$  y  $\beta \geq 0$ . Entonces

$$\left[ 1 - \frac{\mu}{\sqrt{V(t)}} \right]_+ \rightarrow 0$$

con  $\mu = \sqrt{\beta/\alpha}$  y la función  $[\cdot]_+$  definida como

$$[z]_+ := \begin{cases} z & \text{if } z \geq 0 \\ 0 & \text{if } z < 0 \end{cases}$$

*Demostración.* La prueba de este Lema puede consultarse en [79]. □

### Proposición

Dado un intervalo de tiempo  $T$  y una función  $v(\cdot)$  sobre una función continuamente diferenciable  $V(z, t)$  que satisface  $V(0, t) = 0, \forall t \in T$  se dice  $\varepsilon$ -función práctica tipo Lyapunov sobre  $T$  bajo  $v$  si existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$\dot{V}(z, t) \leq -\alpha V(z, t) + H(\varpi^+)$$

con  $H$  función acotada no lineal no negativa acotada con cota superior  $H^+$ . Lo que es más, las trayectorias de  $z_t$  se mantienen en la zona  $\varepsilon := \frac{H^+}{\alpha}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En esta proposición  $\dot{V}(z_t, t)$  denota la derivada de  $V(z, t)$  a lo largo  $z_t$ , i.e.,  $\dot{V}(z, t) = V_z(z, t) \cdot (g(z_t, v_t) + \varpi_t) + V_t(x, t)$ .

*Demostración.* La prueba se sigue directamente del Lema (1.4.2.2). □

Dado un intervalo de tiempo  $T$  y una función  $v(\cdot)$  sobre  $T$ , el sistema no lineal (1.22) es  $\varepsilon$ -estable prácticamente,  $T$  bajo  $v$  si existe una  $\varepsilon$ -función tipo Lyapunov práctica  $V(x, t)$  sobre  $T$  bajo  $v$ .

### 1.4.3. Ecuación de Riccati

A lo largo de la presentación de la metodología presentada y cada uno de los resultados obtenidos, se presentará la necesidad de conocer una clase especial de ecuaciones de Riccati, cuya solución será necesaria en la mención de los teoremas que contienen los resultados principales. Se enuncian las condiciones necesarias para encontrar su solución. *La clase especial de Ecuaciones de Riccati*  $PA + A^T P + PRP + Q = 0$  tiene solución positiva sí y sólo si las siguientes cuatro condiciones se cumplen [78]:

- La matriz  $A$  es estable,
- El par  $(A, R^{1/2})$  es controlable,
- El par  $(Q^{1/2}, A)$  es observable,
- Las matrices  $(A, Q, R)$  deben de ser seleccionadas de tal manera que se cumple la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{4} (A^T R^{-1} - R^{-1} A) R (A^T R^{-1} - R^{-1} A)^T + Q \leq A^T R^{-1} A$$

La última condición limita el mayor valor propio de  $R$  evitando la inexistencia de la solución positiva de la ecuación de Riccati.

---

## 2

# Identificación de Sistemas de Parametros Distribuidos en 2D

---

La motivación para esta sección surge a partir de diferentes modelos en EDP en dos dimensiones utilizados en la dinámica de fluidos, en la absorción percutanea de medicamentos y en el tratamiento de efluentes con contaminantes móviles disueltos. Para tratar con los modelos que describen esta clase de sistemas tanto en el tiempo como en el espacio, en particular para dos dimensiones (2D), es fundamental aproximar la solución de la ecuación diferencial parcial que los describe de manera numérica con el fin de investigar la predicción de su comportamiento, dado que las soluciones analíticas por lo general no están disponibles y dado que los métodos numéricos convencionales consideran ecuaciones que presentan cierto grado de incertidumbre o que están sujetos a perturbaciones, se propone un método basado en redes neuronales diferenciales (RND). El esquema propuesto utiliza un algoritmo de discretización (para la generación de una malla en el dominio de la ecuación), basado en un enfoque de diferencias finitas. El problema de identificación se resuelve para cada nodo en la malla utilizando redes neuronales continuas. Por lo tanto, un conjunto de RND está trabajando en paralelo para aproximar la solución de la EDP a lo largo de todo el dominio. La solución que aquí se presenta ha sido desarrollada con un dominio de dos dimensiones que cubre un amplio conjunto de sistemas reales de parámetros distribuidos, como las ya mencionados y otros, tales como la transferencia de calor o el proceso de difusión en una membrana.

## 2.1. Sistema de Parametros Distribuidos y su aproximación

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\begin{aligned} u_t(x, y, t) &= f(u(x, y, t), u_x(x, y, t), u_{xx}(x, y, t), \\ &u_y(x, y, t), u_{yy}(x, y, t), u_{xy}(x, y, t), u_{yx}(x, y, t)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

aquí  $u(t)$  tiene  $n$  componentes ( $u(t) \in \mathfrak{R}^n$ ) definidos sin pérdida de generalidad en un dominio dado como  $x \in [0, 1]$ ,  $t \geq 0$ , con condiciones a la frontera (Neumann y Dirichlet) y condiciones iniciales dadas por:

$$\begin{aligned} u_x(0, y, t) &= 0 \in \mathfrak{R}^n, \quad u(0, y, t) = u_0 \in \mathfrak{R}^n \\ u(x, y, 0) &= c \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

En (2.1),  $u_t(x, y, t)$  está dado para  $\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}$  y

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}, \quad u_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ u_y(x, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial y}, \quad u_{yy}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y^2} \\ u_{xy}(x, t) &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial y}, \quad u_{yx}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

### 2.1.1. Aproximación numérica para funciones inciertas

Considerese una función  $h_0(\cdot)$  en  $H^{m,2}(\Omega)$ . Por [21],  $h_0(\cdot)$  puede reescribirse como

$$\begin{aligned} h_0(x, \theta^*) &= \sum_i \sum_j \theta_{ij}^* \Psi_{ij}(x) \\ \theta_{ij} &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(x) \Psi_{ij}(x) dx, \quad \forall i, j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donde  $\{\Psi_{ij}(x)\}$  son funciones que constituyen una base en  $H^{m,2}(\Omega)$ . Esta expresión se conoce como una función de expansión de series  $h_0(x, \theta^*)$ . Basada en esta expansión de series, una red neuronal (RN) toma la siguiente estructura matemática

$$h_0(x, \theta) := \sum_{i=M_1}^{M_2} \sum_{j=N_1}^{N_2} \theta_{ij} \Psi_{ij}(x) = \Theta W(x)$$

esto puede ser usado para aproximar una función no lineal  $h_0(x, \theta^*) \in S$  con la adecuada selección de los integradores  $M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathbb{Z}^+$  donde

$$\Theta = [\theta_{M_1 N_1}, \dots, \theta_{M_1 N_2}, \dots, \theta_{M_2 N_1}, \dots, \theta_{M_2 N_2}]^T$$

$$W(x) = [\Psi_{M_1 N_1}(x), \dots, \Psi_{M_1 N_2}(x), \dots, \Psi_{M_2 N_1}(x), \dots, \Psi_{M_2 N_2}(x)]^T$$

Siguiendo el Teorema de Stone-Wiestrass [19], si

$$\varepsilon(M_1, M_2, N_1, N_2) = h_0(x, \theta^*) - h_0(x, \theta)$$

es el error de aproximación de la RN, entonces para cualquier constante positiva  $\varepsilon$  existen constantes positivas  $M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\|(M_1, M_2, N_1, N_2)\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.3)$$

La idea principal detrás de la aplicación de RND [78] a la aproximación de la solución de EDP es usar una clase de metodo de diferencias finitas pero para funciones no lineales inciertas. Así, es necesario construir un conjunto (normalmente llamado malla o reja) que divide el subdominio  $x \in [0, 1]$  en  $N$  secciones equidistantes y  $y \in [0, 1]$  en  $M$  secciones equidistantes definidas como  $(x^i, y^j)$  de tal manera que  $x^0 = y^0 = 0$  y  $x^N = y^M = 1$ . Usando esta descripción de malla, se utilizará la siguiente definición

$$u^{i,j}(t) := u(x^i, y^j, t)$$

$$u_t^{i,j}(t) := \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{x=x^i, y=y^j}$$

$$u_x^{i,j}(t) := u_x(x, y, t)|_{x=x^i, y=y^j}, \quad u_{xx}^{i,j}(t) := u_{xx}(x, y, t)|_{x=x^i, y=y^j}$$

$$u_y^{i,j}(t) := u_y(x, y, t)|_{x=x^i, y=y^j}, \quad u_{yy}^{i,j}(t) := u_{yy}(x, y, t)|_{x=x^i, y=y^j}$$

$$u_{xy}^{i,j}(t) := u_{xy}(x, y, t)|_{x=x^i, y=y^j}$$

Usando la descripción de malla y aplicando la representación de diferencias finitas

$$\begin{aligned} u_x^{i,j}(t) &\simeq \frac{u^{i,j}(t) - u^{i-1,j}(t)}{\Delta x}, & u_{xx}^{i,j}(t) &\simeq \frac{u_x^{i,j}(t) - u_x^{i-1,j}(t)}{\Delta x} \\ u_y^{i,j}(t) &\simeq \frac{u^{i,j}(t) - u^{i,j-1}(t)}{\Delta y}, & u_{i,j,yy}(t) &\simeq \frac{u_y^{i,j}(t) - u_y^{i,j-1}(t)}{\Delta y} \\ u_{xy}^{i,j}(t) &\simeq \frac{u_y^{i,j}(t) - u_y^{i-1,j}(t)}{\Delta x}, & u_{y,x}^{i,j}(t) &\simeq \frac{u_x^{i,j}(t) - u_x^{i,j-1}(t)}{\Delta y} \end{aligned} \quad (2.4)$$

la  $(\Delta x, \Delta y)$ -aproximación de la EDP no lineal (2.1) puede representarse como

$$\begin{aligned} \dot{u}^{i,j}(t) = u_t^{i,j}(t) \simeq \\ f \left( u^{i,j}(t), \frac{u^{i,j}(t) - u^{i-1,j}(t)}{\Delta x}, \frac{u_x^{i,j}(t) - u_x^{i-1,j}(t)}{\Delta x}, \frac{u^{i,j}(t) - u^{i,j-1}(t)}{\Delta y}, \right. \\ \left. \frac{u_y^{i,j}(t) - u_y^{i,j-1}(t)}{\Delta y}, \frac{u_y^{i,j}(t) - u_y^{i-1,j}(t)}{\Delta x}, \frac{u_x^{i,j}(t) - u_x^{i,j-1}(t)}{\Delta y} \right) = \Phi(u^{i,j}, u^{i-1,j}, u^{i-2,j}, u^{i,j-1}, u^{i,j-2}, u^{i-1,j-1}) \\ (i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Esta representación está basada en el método de diferencias finitas, donde basados en la aproximación realizada se tiene una discretización del sistema, reduciendo la ecuación diferencial parcial en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

### 2.1.2. Aproximación mediante Redes Neuronales Diferenciales

Sumando y restando los términos correspondientes, (2.1) se puede representar como

$$\begin{aligned} u_t(x, y, t) = Au(x, y, t) + \mathring{V}_1 \sigma(x, y) u(x, y, t) + \mathring{V}_2 \varphi^1(x, y) u_x(x, y, t) + \mathring{V}_3 \gamma^1(x, y) u_{xx}(x, y, t) \\ \mathring{V}_4 \varphi^2(x, y) u_y(x, y, t) + \mathring{V}_5 \gamma^2(x, y) u_{yy}(x, y, t) + \mathring{V}_6 \psi(x, y) u_{xy}(x, y, t) + \tilde{f}(x, y, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \mathring{V}_1 \in \mathfrak{R}^{n \times s_1}, \mathring{V}_2 \in \mathfrak{R}^{n \times s_2}, \\ \mathring{V}_3 \in \mathfrak{R}^{n \times s_3}, \mathring{V}_4 \in \mathfrak{R}^{n \times s_4}, \mathring{V}_5 \in \mathfrak{R}^{n \times s_5}, \mathring{V}_6 \in \mathfrak{R}^{n \times s_6} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Aquí  $\tilde{f}(x, t) \in \mathfrak{R}^n$  representa el término del *error de modelado*,  $A$  y  $\mathring{V}_k$  ( $k = \overline{1, 6}$ ) cualquier matriz constante y el conjunto de funciones

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) \in \mathfrak{R}^{s_1}, \varphi^1(x, y) \in \mathfrak{R}^{s_2}, \gamma^1(x, y) \in \mathfrak{R}^{s_3} \\ \varphi^2(x, y) \in \mathfrak{R}^{s_4}, \gamma^2(x, y) \in \mathfrak{R}^{s_5}, \psi(x, y) \in \mathfrak{R}^{s_6} \end{aligned}$$

obedece las siguientes condiciones de sector:

$$\begin{aligned} \left\| \sigma(x, y) - \sigma(x', y') \right\|^2 &\leq L_\sigma \left( \|x - x'\|^2 + \|y - y'\|^2 \right) \\ \left\| \varphi^i(x, y) - \varphi^i(x', y') \right\|^2 &\leq L_{\varphi^i} \left( \|x - x'\|^2 + \|y - y'\|^2 \right) \\ \left\| \gamma^i(x, y) - \gamma^i(x', y') \right\|^2 &\leq L_{\gamma^i} \left( \|x - x'\|^2 + \|y - y'\|^2 \right) \\ \left\| \psi(x, y) - \psi(x', y') \right\|^2 &\leq L_\psi \left( \|x - x'\|^2 + \|y - y'\|^2 \right) \end{aligned}$$

que están acotadas en  $x$  y en  $y$ , i.e.,  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \|\sigma(\cdot)\|^2 \leq \sigma^+, \|\varphi^k(\cdot)\|^2 \leq \varphi^{k+}, \\ \|\gamma^k(\cdot)\|^2 \leq \gamma^{k+}, \|\psi(\cdot)\|^2 \leq \psi^+, \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$



Siguiendo la metodología de las RND [78] y aplicando la misma representación a (2.5), se considera, basados en el MDF, la siguiente estructura de RND en la que para cada  $x^i, y^j$  se tiene una solución en el tiempo. Los estados dados se deducen de la representación de malla para dos dimensiones, se tiene entonces que para cada  $i \in (1, \dots, N)$ ,  $j \in (1, \dots, M)$  la aproximación de la solución es

$$u_t^{i,j}(t) = A^{i,j} u^{i,j}(t) + \mathring{W}_1^{i,j} \sigma(x^i, y^j) u^{i,j}(t) + \mathring{W}_2^{i,j} \varphi^1(x^i, y^j) u^{i-1,j}(t) + \mathring{W}_3^{i,j} \gamma^1(x^i, y^j) u^{i-2,j}(t) + \mathring{W}_4^{i,j} \varphi^2(x^i, y^j) u^{i,j-1}(t) + \mathring{W}_5^{i,j} \gamma^2(x^i, y^j) u^{i,j-2}(t) + \mathring{W}_6^{i,j} \psi(x^i, y^j) u^{i-1,j-1}(t) + \tilde{f}^{i,j}(t)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{i,j}(t) := & \Phi(u^{i,j}, u^{i-1,j}, u^{i-2,j}, u^{i,j-1}, u^{i,j-2}, u^{i-1,j-1}) \\ & - A^{i,j} u^{i,j}(t) - \mathring{W}_1^{i,j} \sigma(x^i, y^j) u^{i,j}(t) - \mathring{W}_2^{i,j} \varphi^1(x^i, y^j) u^{i-1,j}(t) - \mathring{W}_3^{i,j} \gamma^1(x^i, y^j) u^{i-2,j}(t) \\ & - \mathring{W}_4^{i,j} \varphi^2(x^i, y^j) u^{i,j-1}(t) - \mathring{W}_5^{i,j} \gamma^2(x^i, y^j) u^{i,j-2}(t) - \mathring{W}_6^{i,j} \psi(x^i, y^j) u^{i-1,j-1}(t) \end{aligned}$$

$$\mathring{W}_1^i \in \mathfrak{R}^{n \times s_1}, \mathring{W}_2^i \in \mathfrak{R}^{n \times s_2}, \mathring{W}_3^i \in \mathfrak{R}^{n \times s_3}$$

Se asume que los términos del error de modelado satisfacen lo siguiente

- *Suposición 1:*

$$\|\tilde{f}^{i,j}(t)\|_{\Lambda_f}^2 \leq f_1^{i,j}, \lambda_f > 0$$

- *Suposición 2:* El gradiente del error de modelado

$$\nabla_x \tilde{f}(x, y, t) |_{x=x_i} := \nabla_x \tilde{f}^{i,j} \text{ y } \nabla_y \tilde{f}(x, y, t) |_{x=x_i} := \nabla_y \tilde{f}^{i,j}$$

está acotada como

$$\begin{aligned} \|\nabla_x \tilde{f}^{i,j}\|_{\lambda_f}^2 & \leq f_2^{i,j} \\ \|\nabla_y \tilde{f}^{i,j}\|_{\lambda_f}^2 & \leq f_3^{i,j} \end{aligned}$$

donde  $f_k^{i,j}$  ( $k = \overline{1,3}$ ) son constantes.

## 2.2. Neuro Identificación para Sistemas de Parámetros Distribuidos

### 2.2.1. Estructura del Identificador

Basado en la metodología de las RND [78], considerese la siguiente estructura del neuro-identificador

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{u}^{i,j}(t) = & A^{i,j} \hat{u}^{i,j}(t) + W_1^{i,j}(t) \sigma(x^i, y^j) \hat{u}^{i,j}(t) + W_2^{i,j}(t) \varphi^1(x^i, y^j) \hat{u}^{i-1,j}(t) \\ & + W_3^{i,j}(t) \gamma^1(x^i, y^j) \hat{u}^{i-2,j}(t) + W_4^{i,j}(t) \varphi^2(x^i, y^j) \hat{u}^{i,j-1}(t) + W_5^{i,j}(t) \gamma^2(x^i, y^j) \hat{u}^{i,j-2}(t) \\ & + W_6^{i,j}(t) \psi(x^i, y^j) \hat{u}^{i-1,j-1}(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\forall i = 0, \dots, N; \hat{u}_{-1}(t) = \hat{u}_{-2}(t) = 0$  donde  $A^{i,j} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz constante a seleccionar,  $\hat{u}^{i,j}(t)$  es el estimado de  $u^{i,j}(t)$ . Designese un neuro-identificador individual para cada punto  $x_i, y_j$ . La colección de tales identificadores constituye una *red de RND* que contienen  $N$  neuro-identificadores trabajando conectados en paralelo. Aquí  $\sigma(x^i, y^j)$ ,  $\varphi^1(x^i, y^j)$ ,  $\varphi^2(x^i, y^j)$ ,  $\gamma^1(x^i, y^j)$ ,  $\gamma^2(x^i, y^j)$  y  $\psi(x^i, y^j)$  son vectores de activación para la RND. Esto significa que la aproximación aplicada simplifica significativamente la especificación de  $\sigma(\cdot, \cdot)$ ,  $\varphi^1(\cdot, \cdot)$ ,  $\varphi^2(\cdot, \cdot)$ ,  $\gamma^1(\cdot, \cdot)$ ,  $\gamma^2(\cdot, \cdot)$  y  $\psi(\cdot, \cdot)$  que ahora son constantes.

### 2.2.2. Leyes de Aprendizaje para los pesos del Identificador

Para cada  $i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M$  defínanse las funciones vectoriales

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{i,j}(t) &:= \hat{u}^{i,j}(t) - u^{i,j}(t) \\ \tilde{u}_x^{i,j}(t) &:= \hat{u}_x^{i,j}(t) - u_x^{i,j}(t), \quad \tilde{u}_y^{i,j}(t) := \hat{u}_y^{i,j}(t) - u_y^{i,j}(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sean las matrices variantes en el tiempo  $W_r^{i,j}(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $r = \overline{1,6}$  que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales matriciales

$$\begin{aligned} \dot{W}_r^{i,j}(t) &:= \bar{W}_r^{i,j}(t) = -\alpha \tilde{W}_r^{i,j}(t) - K_r^{-1} P^{i,j} \hat{u}^{i,j}(t) \left( \hat{U}^{(i,j),r}(t) \right)^\top \left( \Omega^r(x^i, y^j) \right)^\top \\ &- K_r^{-1} S_1^{i,j} \tilde{u}_x^{i,j}(t) \left( \hat{U}^{(i,j),r}(t) \right)^\top \left( \Omega_x^r(x^i, y^j) \right)^\top - K_r^{-1} S_2^{i,j} \tilde{u}_y^{i,j}(t) \left( \hat{U}^{(i,j),r}(t) \right)^\top \left( \Omega_y^r(x^i, y^j) \right)^\top, \quad r = \overline{1,6} \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{U}^{(i,j),1}(t) &= \hat{u}^{i,j}(t) & \Omega^1(x^i, y^j) &= \sigma(x^i, y^j) \\
\tilde{U}^{(i,j),2}(t) &= \hat{u}^{i-1,j}(t) & \Omega^2(x^i, y^j) &= \varphi^1(x^i, y^j) \\
\tilde{U}^{(i,j),3}(t) &= \hat{u}^{i-2,j}(t) & \Omega^3(x^i, y^j) &= \gamma^1(x^i, y^j) \\
\tilde{U}^{(i,j),4}(t) &= \hat{u}^{i,j-1}(t) & \Omega^4(x^i, y^j) &= \varphi^2(x^i, y^j) \\
\tilde{U}^{(i,j),5}(t) &= \hat{u}^{i,j-2}(t) & \Omega^5(x^i, y^j) &= \gamma^2(x^i, y^j) \\
\tilde{U}^{(i,j),6}(t) &= \hat{u}^{i-1,j-1}(t) & \Omega^6(x^i, y^j) &= \psi(x^i, y^j)
\end{aligned}$$

con matrices positivas  $K_r$  ( $r = \overline{1,6}$ ) y  $P^{i,j}$ ,  $S_1^{i,j}$  y  $S_2^{i,j}$  ( $i = \overline{0, N}; j = \overline{0, M}$ ) que son soluciones definidas positivas ( $P^{i,j} > 0$ ,  $S_1^{i,j} > 0$  y  $S_2^{i,j} > 0$ ) de las ecuaciones algebraicas de Riccati dadas por

$$\begin{aligned}
Ric(P^{i,j}) &:= P^{i,j} A^{i,j} + [A^{i,j}]^\top P^{i,j} + P^{i,j} R_P^{i,j} P^{i,j} + Q_P^{i,j} = 0 \\
Ric(S_1^{i,j}) &:= S_1^{i,j} A^{i,j} + [A^{i,j}]^\top S_1^{i,j} + S_1^{i,j} R_{S_1}^{i,j} S_1^{i,j} + Q_{S_1}^{i,j} = 0 \\
Ric(S_2^{i,j}) &:= S_2^{i,j} A^{i,j} + [A^{i,j}]^\top S_2^{i,j} + S_2^{i,j} R_{S_2}^{i,j} S_2^{i,j} + Q_{S_2}^{i,j} = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde

$$\begin{aligned}
R_P^{i,j} &:= \sum_{r=1}^6 \hat{W}_r^{i,j} \Lambda_r (\hat{W}_r^{i,j})^\top + \Lambda_7 \\
R_{S_1}^{i,j} &:= \sum_{r=1}^6 \hat{W}_r^{i,j} \Lambda_{r+7} (\hat{W}_r^{i,j})^\top + \Lambda_{14} \\
R_{S_2}^{i,j} &:= \sum_{r=1}^6 \hat{W}_r^{i,j} \Lambda_{r+14} (\hat{W}_r^{i,j})^\top + \Lambda_{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_P^{i,j} &:= \|\Omega^1(x^i, y^j)\|_{\Lambda_1^{-1}}^2 + \|\Omega^2(x^{i-1}, y^j)\|_{\Lambda_2^{-1}}^2 + \|\Omega^3(x^{i-2}, y^j)\|_{\Lambda_3^{-1}}^2 + \|\Omega^4(x^i, y^{j-1})\|_{\Lambda_4^{-1}}^2 + \\
&\quad \|\Omega^5(x^i, y^{j-2})\|_{\Lambda_5^{-1}}^2 + \|\Omega^6(x^{i-1}, y^{j-1})\|_{\Lambda_6^{-1}}^2 + Q_1^{i,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{S_1}^{i,j} &:= \|\Omega_x^1(x^i, y^j)\|_{\Lambda_8^{-1}}^2 + \|\Omega_x^2(x^{i-1}, y^j)\|_{\Lambda_9^{-1}}^2 + \|\Omega_x^3(x^{i-2}, y^j)\|_{\Lambda_{10}^{-1}}^2 + \|\Omega_x^4(x^i, y^{j-1})\|_{\Lambda_{11}^{-1}}^2 + \\
&\quad \|\Omega_x^5(x^i, y^{j-2})\|_{\Lambda_{12}^{-1}}^2 + \|\Omega_x^6(x^{i-1}, y^{j-1})\|_{\Lambda_{13}^{-1}}^2 + Q_2^{i,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{S_2}^{i,j} &:= \|\Omega_y^1(x^i, y^j)\|_{\Lambda_{15}^{-1}}^2 + \|\Omega_y^2(x^{i-1}, y^j)\|_{\Lambda_{16}^{-1}}^2 + \|\Omega_y^3(x^{i-2}, y^j)\|_{\Lambda_{17}^{-1}}^2 + \|\Omega_y^4(x^i, y^{j-1})\|_{\Lambda_{18}^{-1}}^2 + \\
&\quad \|\Omega_y^5(x^i, y^{j-2})\|_{\Lambda_{19}^{-1}}^2 + \|\Omega_y^6(x^{i-1}, y^{j-1})\|_{\Lambda_{20}^{-1}}^2 + Q_3^{i,j}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Omega_x^r(x_i, y_j) &:= \frac{d}{dx} \Omega^r(x, y) \Big|_{x=x_i, y=y_j} \\
\Omega_y^r(x_i, y_j) &:= \frac{d}{dy} \Omega^r(x, y) \Big|_{x=x_i, y=y_j}
\end{aligned}$$

Además, aquí  $\tilde{W}_k^{i,j}(t) := W_k^{i,j}(t) - \hat{W}_k^{i,j}$ ,  $k = \overline{1,6}$ .

La *Clase especial* de ecuación de Riccati ( $PA + A^T P + PRP + Q = 0$ ) tiene solución positiva si las condiciones dadas en el capítulo 1 sobre ella se cumplen.

## 2.3. Formulación del Problema de Identificación

El establecimiento del problema de identificación (estimación) para sistemas no lineales (2.6) analizado en este estudio, puede formularse como sigue:

Para el sistema no lineal, dado por la EDP vectorial (2.6), se analiza la calidad del identificador (4.6) suministrado con las leyes de ajuste (3.9), estimando la cota superior del error de identificación  $\delta$  dado por

$$\delta := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \left\| \hat{u}^{i,j}(t) - u^{i,j}(t) \right\|_{P^{i,j}}^2 \quad (2.11)$$

(con  $P^{i,j}$  de (6.11)), y, si es posible, reducirlo a el menor valor posible, seleccionando los parámetros libres que participan dentro de la estructura del identificador de la RND.

## 2.4. Resultado Principal

El resultado principal de este trabajo se presenta a continuación.

**Teorema 2.1.** *Considere el modelo del sistema no lineal (2.1) ( $i = 0, \dots, N$ ;  $j = 0, \dots, M$ ), dado por el sistema de EDP con incertidumbres (perturbaciones) en el estado y en la salida, bajo las condiciones a la frontera (6.2). Supongase también que el neuro-identificador está dado por (4.6) cuyos parámetros se ajustan por las leyes de aprendizaje (3.9) con parámetros  $\alpha$ . Si las matrices  $Q_1^{i,j}$  definidas positivas,  $Q_2^{i,j}$ ,  $Q_3^{i,j}$  indican la existencia de las soluciones positivas  $P^{i,j}$ ,  $S_1^{i,j}$  y  $S_2^{i,j}$  ( $i = 0, \dots, N$ ) de las ecuaciones de Riccati (6.11), entonces, para todo  $i = 0, \dots, N$ ;  $j = 0, \dots, M$  la siguiente  $\rho$ -cota superior*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \left[ \left\| \hat{u}^{i,j}(t) - u^{i,j}(t) \right\|_{P^{i,j}}^2 + \left\| \hat{u}_x^{i,j}(t) - u_x^{i,j}(t) \right\|_{S_1^{i,j}} + \left\| \hat{u}_y^{i,j}(t) - u_y^{i,j}(t) \right\|_{S_2^{i,j}} \right] \leq \mu \quad (2.12)$$

se asegura con  $\mu_0 := \sqrt{NM} \alpha^{-1/2}$  y

$$\begin{aligned} \mu &:= \mu_0 \sqrt{\max_{i,j} \Psi} \\ \Psi &:= \varpi \sum_{s=1}^3 f_s^{i,j} \geq (\tilde{f}^{i,j}(t))^T \Lambda_7^{-1} \tilde{f}^{i,j}(t) + (\tilde{f}_x^{i,j}(t))^T \Lambda_{14}^{-1} \tilde{f}_x^{i,j}(t) + (\tilde{f}_y^{i,j}(t))^T \Lambda_{21}^{-1} \tilde{f}_y^{i,j}(t) \\ \varpi &:= \max \{ \lambda_{\max}(\Lambda_7^{-1}), \lambda_{\max}(\Lambda_{14}^{-1}), \lambda_{\max}(\Lambda_{21}^{-1}) \} \end{aligned}$$

Lo que es más, los pesos  $W_{r,t}$   $r = \overline{1,6}$  siguen acpotadas proporsionalmente a  $\mu$ , esto es,  $\|W_{r,t}\| \leq K_r \mu$ ,  $r = \overline{1,6}$ . La prueba detallada esta dada en el Apéndice.

## 2.5. Conclusiones del Capítulo

El enfoque sugerido tiene por objeto resolver el problema de la identificación no paramétrica de sistemas no lineales (con incertidumbres) dado por EDP de tipo parabólico en 2D. La estabilidad practica para el proceso de identificación se demuestra basada en una clase de análisis de Lyapunov. El mismo análisis conduce a la generación de las correspondientes leyes de aprendizaje para la RND sugerida y provee de las condiciones para la identificación de una cota superior. Es así que la identificación de una EDP incierta en 2D se consigue cuando el error entre las trayectorias del sistema con las características establecidas en (2.1) y las trayectorias de la red converge a cero o a una zona cercana a cero. En el capítulo de resultados se muestra la eficiencia de la metodología sugerida de una manera cualitativa, donde el parecido entre ambas trayectorias puede verse mediante el análisis de los resultados de las simulaciones.

---

# 3

## Identificación de Sistemas de Parámetros Distribuidos en 3D

---

Casi todo lo descrito en EDP (o PDE por sus siglas en inglés) ya ha aparecido en una y dos dimensiones. Al añadir una tercera dimensión se asciende en la escala dimensional a su peldaño final, en el espacio físico por lo menos. Es por esto que, las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden en tres dimensiones (3D-PDEs) aparecen en muchos problemas de modelado de configuraciones de equilibrio de los cuerpos rígidos, la ecuación de onda en tres dimensiones (3D) que gobierna las vibraciones de los sólidos, líquidos, gases y ondas electromagnéticas, y el modelado de ecuaciones en tres dimensiones de calor, utilizada en los rocesos de difusión espacial. Estas ecuaciones definen un estado que representa las coordenadas rectangulares en  $\mathfrak{R}^3$ . Existen algunas técnicas básicas de solución para resolver 3D-PDEs: separación de variables y funciones Green o soluciones de fondo. Por desgracia, la más poderosa de las herramientas no se traslada a dimensiones más altas. Es así que, muchas técnicas numéricas se han desarrollado para tres dimensiones, por ejemplo, el método de diferencias finitas (FDM por sus siglas en inglés) y el método de elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés). Una estrategia basada en RND para la identificación no paramétrica de un modelo matemático descrito en 3D-PDE se propone. Las leyes de adaptación de los pesos garantizan la estabilidad práctica de las trayectorias.

### 3.1. Aproximación en Diferencias Finitas en 3D

El problema requiere de la propuesta de un identificador no paramétrico basado en RND en tres dimensiones. Considérese el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$u_t = f(u, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}, u_z, u_{zz}, u_{xy}, u_{yx}, u_{xz}, u_{yz}) + \xi \quad (3.1)$$

aquí  $u_h = u_h(x, y, z, t)$  donde  $h$  representa  $t, x, y, z, xx, yy, zz, xy, xz, yx, yz$  y  $u = u(x, y, z, t)$  tiene  $n$  componentes ( $u(x, y, z, t) \in \mathfrak{R}^n$ ) definidos en un dominio dado por  $[x, y, z] \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1], t \geq 0, \xi = \xi(x, y, z, t) \in \mathfrak{R}^n$  es una incertidumbre en la dinámica del estado. Esta EDP tiene un conjunto de condiciones a la frontera (Neumann y Dirichlet) y condiciones iniciales dadas por:

$$\begin{aligned} u_x(0, y, z, t) = 0 \in \mathfrak{R}^n, u(x, 0, z, t) = u_0 \in \mathfrak{R}^n \\ u(x, y, 0, t) = u_0 \in \mathfrak{R}^n, u(x, y, z, 0) = c \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (3.2)$$

En (3.1),  $u_t(x, y, z, t)$  está dado para  $\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}$

#### 3.1.1. Aproximación numerica para funciones inciertas

La idea principal detrás de la aplicación de RND [78] a la aproximación de la solución de EDP es usar una clase de metodo de diferencias finitas pero para funciones no lineales inciertas. Así, es necesario construir un conjunto (normalmente llamado malla o reja) que divide el subdominio  $x \in [0, 1]$  en  $L$  secciones equidistantes,  $y \in [0, 1]$  en  $M$  secciones equidistantes y  $z \in [0, 1]$  en  $N$  secciones equidistantes cada una de ellas definidas como  $(x^i, y^j, z^k)$  de tal manera que  $x^0 = y^0 = z^0 = 0$  y  $x^L = y^M = z^N = 1$ .

$$u^{i,j,k}(t) := u(x^i, y^j, z^k, t)$$

$$u_t^{i,j,k}(t) := \left. \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} \right|_{x=x^i, y=y^j, z=z^k}$$

$$u_x^{i,j,k}(t) := u_x(x, y, z, t) \Big|_{x=x^i, y=y^j, z=z^k}$$

$$u_{xx}^{i,j,k}(t) := u_{xx}(x, y, z, t) \Big|_{x=x^i, y=y^j, z=z^k}$$

Analogamente, se pueden considerar otros casos ( $u_{xx}, u_y, u_{yy}, u_z, u_{zz}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}$ ). Usando la descripción de malla y aplicando la representación de diferencias finitas

$$\begin{aligned} u_x^{i,j,k}(t) &\simeq \frac{u^{i,j,k}(t) - u^{i-1,j,k}(t)}{\Delta x} \\ u_{xx}^{i,j,k}(t) &\simeq \frac{u_x^{i,j,k}(t) - u_x^{i-1,j,k}(t)}{\Delta^2 x} \end{aligned}$$

y sigue para todos los casos tales que  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ -aproximación de la EDP no lineal (3.1) puede representarse como

$$\begin{aligned} \dot{u}^{i,j,k}(t) &= u_t^{i,j,k}(t) \simeq \Phi(u^{i,j,k}, u^{i-1,j,k}, u^{i-2,j,k}, u^{i,j-1,k}, u^{i,j-2,k}, u^{i,j,k-1}, \\ &u^{i,j,k-2}, u^{i-1,j-1,k}, u^{i-1,j,k-1}, u^{i,j-1,k-1}, u^{i-1,j-1,k-1}) \\ &(i = 0, \dots, L; j = 0, \dots, M, k = 0, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.1.2. Aproximación Mediante Redes Neuronales Diferenciales

Sumando y restando los términos correspondientes, (3.1) se puede representar como

$$\begin{aligned} u_t &= Au + \mathring{V}_1 \sigma u + \mathring{V}_2 \phi^1 u_x + \mathring{V}_3 \gamma^1 u_{xx} \mathring{V}_4 \phi^2 u_y + \mathring{V}_5 \gamma^2 u_{yy} + \mathring{V}_6 \phi^3 u_z + \mathring{V}_7 \gamma^3 u_{zz} \\ &+ \mathring{V}_8 \psi^1 u_{xy} + \mathring{V}_9 \psi^2 u_{yz} \mathring{V}_{10} \psi^3 u_{xz} + \mathring{V}_{11} \sigma^2 u_{xyz} + \tilde{f} \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde  $u_t = u_t(x, y, z, t)$ ,  $u = u(x, y, z, t)$ ,  $\sigma = \sigma(x, y, z)$ ,  $u_x = u_x(x, y, z, t)$ ,  $u_{xx} = u_{xx}(x, y, z, t)$ , lo mismo para  $\sigma^2$ ,  $\phi^i, \gamma^i, \psi^i, u_y, u_{yy}, u_z, u_{zz}, u_{xy}, u_{yz}, u_{xz}$  y  $u_{xyz}$  ( $i = \overline{1, 3}$ )  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\mathring{V}_1 \in \mathfrak{R}^{n \times s_1}$ ,  $\mathring{V}_2 \in \mathfrak{R}^{n \times s_2}$ ,  $\mathring{V}_3 \in \mathfrak{R}^{n \times s_3}$ ,  $\tilde{f} = \tilde{f}(x, y, z, t)$ ,  $\mathring{V}_4 \in \mathfrak{R}^{n \times s_4}$ ,  $\mathring{V}_5 \in \mathfrak{R}^{n \times s_5}$ ,  $\mathring{V}_6 \in \mathfrak{R}^{n \times s_6}$ ,  $\mathring{V}_7 \in \mathfrak{R}^{n \times s_7}$ ,  $\mathring{V}_8 \in \mathfrak{R}^{n \times s_8}$ ,  $\mathring{V}_9 \in \mathfrak{R}^{n \times s_9}$ ,  $\mathring{V}_{10} \in \mathfrak{R}^{n \times s_{10}}$ .

Aquí  $\tilde{f}(x, t) \in \mathfrak{R}^n$  representa el término del *error de modelado*,  $A$  y  $\mathring{V}_k$  ( $k = \overline{1, 6}$ ) cualquier matriz constante y el conjunto de funciones sigmoidales tienen el tamaño correspondiente ( $\sigma(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_1}$ ,  $\phi^1(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_2}$ ,  $\gamma^1(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_3}$ ,  $\phi^2(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_4}$ ,  $\gamma^2(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_5}$ ,  $\psi^1(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_6}$ ,  $\phi^3(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_7}$ ,  $\gamma^3(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_8}$ ,  $\psi^2(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_9}$ ,  $\psi^3(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_{10}}$ ,  $\sigma^2(x, y, z) \in \mathfrak{R}^{s_{11}}$ ) y se conocen como *las funciones de activación de la red neuronal*. Estas funciones obedecen las siguientes condiciones de sector:

$$\begin{aligned} \|\sigma^1(x, y, z) - \sigma^1(x', y', z')\|^2 &\leq L_{\sigma^1} \left( \|x - x'\|^2 + \|y - y'\|^2 \right) + \|z - z'\|^2 \\ \|\sigma^2(x, y, z) - \sigma^2(x', y', z')\|^2 &\leq L_{\sigma^2} \left( \|x - x'\|^2 + \|y - y'\|^2 + \|z - z'\|^2 \right) \\ \|\phi^s(x, y, z) - \phi^s(x', y', z')\|^2 &\leq L_{\phi^s} \left( \|x - x'\|^2 + \|y - y'\|^2 + \|z - z'\|^2 \right) \end{aligned}$$

que están acotadas en  $x, y$  y  $z$ , i.e.,

$$\|\sigma(\cdot)\|^2 \leq \sigma^{(l-1)+}, \|\phi^l(\cdot)\|^2 \leq \phi^{l+}, \|\gamma^l(\cdot)\|^2 \leq \gamma^{l+}, \|\psi^l(\cdot)\| \leq \psi^{l+}, l = 1, 3$$

Seguindo la metodología de las RND [78] y aplicando la misma representación a (3.3), se tiene para cada  $i \in (1, \dots, L)$ ,  $j \in (1, \dots, M)$ ,  $k \in (1, \dots, N)$  el siguiente identificador robusto

$$u_t^{i,j,k}(t) = A^{i,j,k} u^{i,j,k}(t) + \sum_{p=1}^{11} \mathring{W}_p^{i,j,k} \phi^s U(t) + \tilde{f}^{i,j,k}(t) \quad (3.6)$$



En la suma se tiene que  $s = \overline{1,3}$ ,  $\phi$  representa funciones  $\sigma, \varphi, \gamma, \psi$  y  $U$  puede ser tomado como los correspondientes  $u^{i,j,k}, u^{i-1,j,k}, u^{i-2,j,k}, u^{i,j-1,k}, u^{i,j-2,k}, u^{i,j,k-1}, u^{i,j,k-2}, u^{i-1,j-1,k}, u^{i,j-1,k-1}, u^{i-1,j,k-1}, u^{i-1,j-1,k-1}$ . En esta ecuación el término  $\tilde{f}^{i,j,k}(t)$ , que usualmente se reconoce como el error de modelado, satisface la siguiente identidad, y aqui, se ha omitido la dependencia a  $x^i, y^j, z^k$  de cada función sigmoial :

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{i,j,k}(t) := & \Phi \left( u^{i,j,k}, u^{i-1,j,k}, u^{i-2,j,k}, u^{i,j-1,k}, u^{i,j-2,k}, \right. \\ & \left. u^{i,j,k-1}, u^{i,j,k-2}, u^{i-1,j-1,k}, u^{i-1,j,k-1}, u^{i,j-1,k-1}, u^{i-1,j-1,k-1} \right) \\ & - A^{i,j,k} u^{i,j,k}(t) - \sum_{p=1}^{11} \hat{W}_p^{i,j,k} \phi^s U(t) \end{aligned}$$

donde  $\hat{W}_p^i \in \mathfrak{R}^{n \times s_p}, p = \overline{1,11}$ ,

$\phi^s, \phi$  representa funciones  $\sigma, \varphi, \gamma, \psi$  y  $s = \overline{1,3}$ ,

$U(t)$  represents the corresponding  $(u^{i,j,k}, u^{i-1,j,k}, u^{i-2,j,k}, u^{i,j-1,k}, u^{i,j-2,k}, u^{i,j,k-1}, u^{i,j,k-2}, u^{i-1,j-1,k}, u^{i-1,j,k-1}, u^{i,j-1,k-1}, u^{i-1,j-1,k-1})$ .

Asumimos que los términos del error de modelado satisfacen lo siguiente

▪ *Suposición 1:*

$$\left\| \tilde{f}^{i,j,k} \right\|^2 \leq f_1^{i,j,k} \quad (3.7)$$

▪ *Suposición 2:* El gradiente del error de modelado  $\nabla_x \tilde{f}(x, y, z, t) |_{x=x_i} := \nabla_x \tilde{f}^{i,j,k}, \nabla_y \tilde{f}(x, y, z, t) |_{x=x_i} := \nabla_y \tilde{f}^{i,j,k}$  y  $\nabla_z \tilde{f}(x, y, z, t) |_{z=z_i} := \nabla_z \tilde{f}^{i,j,k}$  está acotado como  $\left\| \nabla_x \tilde{f}^{i,j,k} \right\|^2 \leq f_2^{i,j,k}, \left\| \nabla_y \tilde{f}^{i,j,k} \right\|^2 \leq f_3^{i,j,k}$  donde  $f_r^{i,j,k} (r = \overline{1,3})$  son constantes.

## 3.2. Neuro Identificación para Sistemas de Parámetros Distribuidos

### 3.2.1. Estructura del Identificador

Basado en la metodología de las RND [78], considerese la siguiente estructura del neuro-identificador

$$\frac{d}{dt} \hat{u}^{i,j,k} = A^{i,j,k} \hat{u}^{i,j,k} + \sum_{p=1}^{11} W_p^{i,j,k}(t) \phi^s \hat{U} \quad (3.8)$$

$\forall i = 0, \dots, N; \hat{u}_{-1}(t) = \hat{u}_{-2}(t) = 0$  donde  $A^{i,j,k} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz constante a seleccionar,  $\hat{u}^{i,j,k}(t)$  es el estimado de  $u^{i,j,k}(t)$ .  $\hat{U}$  es cada uno de los estados  $\hat{u}^{i,j,k}, \hat{u}^{i-1,j,k}, \hat{u}^{i-2,j,k}, \hat{u}^{i,j-1,k}, \hat{u}^{i,j-2,k}, \hat{u}^{i,j,k-1}, \hat{u}^{i,j,k-1}, \hat{u}^{i,j,k-2}, \hat{u}^{i-1,j-1,k}, \hat{u}^{i-1,j,k-1}, \hat{u}^{i-1,j-1,k-1}$  y  $A^{i,j,k} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$

es una matriz constante a ser seleccionada,  $\hat{u}^{i,j,k}(t)$  es el estimado de  $u^{i,j,k}(t)$ . Desígnese un neuro-identificador individual para cada punto  $x_i, y_j, z_k$ . La colección de tales identificadores constituye una *red de RND* que contienen  $N$  neuro-identificadores trabajando conectados en paralelo. Aquí  $\sigma^1(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\phi^1(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\phi^2(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\phi^3(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\gamma^1(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\gamma^2(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\gamma^3(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\psi^1(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\psi^2(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\psi^3(x^i, y^j, z^j)$  y  $\sigma^2(x^i, y^j, z^j)$ , son vectores de activación para la RND. Esto significa que la aproximación aplicada simplifica significativamente la especificación de  $\sigma^1(\cdot, \cdot)$ ,  $\phi^1(\cdot, \cdot)$ ,  $\phi^2(\cdot, \cdot)$ ,  $\phi^3(\cdot, \cdot)$ ,  $\gamma^1(\cdot, \cdot)$ ,  $\gamma^2(\cdot, \cdot)$ ,  $\gamma^3(\cdot, \cdot)$  y  $\psi^1(\cdot, \cdot)$ ,  $\psi^2(\cdot, \cdot)$ ,  $\psi^3(\cdot, \cdot)$ ,  $\sigma^2(\cdot, \cdot)$  que ahora son constantes.

### 3.2.2. Leyes de Aprendizaje para los pesos del Identificador

Para cada  $i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M, k = 0, \dots, L$  defínase la funciones vectoriales así como sus derivadas con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$  para cada  $i, j, k$

$$\begin{aligned}\tilde{u}^{i,j,k}(t) &:= \hat{u}^{i,j,k}(t) - u^{i,j,k}(t) \\ \tilde{u}_s^{i,j,k}(t) &:= \hat{u}_s^{i,j,k}(t) - u_s^{i,j,k}(t) \\ s &= x, y, z\end{aligned}$$

Sean las matrices variantes en el tiempo  $W_r^{i,j,k}(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $r = \overline{1, 11}$  que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales matriciales

$$\begin{aligned}\dot{W}_r^{i,j,k}(t) &:= \frac{d}{dt} \bar{W}_r^{i,j,k}(t) = -\alpha \bar{W}_r^{i,j,k}(t) - K_r^{-1} P^{i,j,k} \hat{u}^{i,j,k} \left( \hat{U}^{(i,j,k),r} \right)^\top \left( \Omega^r(x^i, y^j, z^j) \right)^\top \\ &- K_r^{-1} S_1^{i,j,k} \tilde{u}_x^{i,j,k} \left( \hat{U}^{(i,j,k),r} \right)^\top \left( \Omega_x^r(x^i, y^j, z^j) \right)^\top - K_r^{-1} S_2^{i,j,k} \tilde{u}_y^{i,j,k} \left( \hat{U}^{(i,j,k),r} \right)^\top \left( \Omega_y^r(x^i, y^j, z^j) \right)^\top \\ &- K_r^{-1} S_3^{i,j,k} \tilde{u}_z^{i,j,k} \left( \hat{U}^{(i,j,k),r} \right)^\top \left( \Omega_z^r(x^i, y^j, z^j) \right)^\top\end{aligned}\tag{3.9}$$

donde  $\Omega^h(x^i, y^j, z^j) = S^l(x^i, y^j, z^j)$  ( $h = \overline{1, 10}, l = \overline{1, 3}$ ) representa las correspondientes funciones de activación  $\sigma^l(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\phi^l(x^i, y^j, z^j)$ ,  $\gamma^l(x^i, y^j, z^j)$  y  $\psi^l(x^i, y^j, z^j)$ . Aquí

$$\begin{aligned}\hat{U}^{(i,j,k),1}(t) &= \hat{u}^{i,j,k}(t) & \tilde{U}^{(i,j,k),2}(t) &= \hat{u}^{i-1,j,k}(t) & \tilde{U}^{(i,j,k),3}(t) &= \hat{u}^{i-2,j,k}(t) \\ \tilde{U}^{(i,j,k),4}(t) &= \hat{u}^{i,j-1,k}(t) & \tilde{U}^{(i,j,k),5}(t) &= \hat{u}^{i,j-2,k}(t) & \tilde{U}^{(i,j,k),6}(t) &= \hat{u}^{i-1,j-1,k}(t) \\ \tilde{U}^{(i,j,k),7}(t) &= \hat{u}^{i-1,j-1,k}(t) & \tilde{U}^{(i,j,k),8}(t) &= \hat{u}^{i-1,j-1,k}(t) & \tilde{U}^{(i,j,k),9}(t) &= \hat{u}^{i-1,j-1,k}(t) \\ \tilde{U}^{(i,j,k),10}(t) &= \hat{u}^{i-1,j-1,k}(t) & \tilde{U}^{(i,j,k),11}(t) &= \hat{u}^{i-1,j-1,k-1}(t)\end{aligned}$$

con matrices positivas  $K_r$  ( $r = \overline{1, 11}$ ) y  $P^{i,j,k}$ ,  $S_1^{i,j,k}$  y  $S_2^{i,j,k}$  ( $i = \overline{0, N}; j = \overline{0, M}$ ) que son soluciones definidas positivas ( $P^{i,j} > 0$ ,  $S_1^{i,j} > 0$ ,  $S_2^{i,j} > 0$ ) y  $S_3^{i,j,k}$  ( $i = \overline{0, N}; j = \overline{0, M}, k = \overline{0, L}$ ) de las

ecuaciones algebraicas de Riccati dadas por

$$\begin{aligned}
Ric(P^{i,j,k}) &:= P^{i,j,k}A^{i,j,k} + [A^{i,j,k}]^\top P^{i,j,k} + P^{i,j,k}R_P^{i,j,k}P^{i,j,k} + Q_P^{i,j,k} = 0 \\
Ric(S_1^{i,j,k}) &:= S_1^{i,j,k}A^{i,j,k} + [A^{i,j,k}]^\top S_1^{i,j,k} + S_1^{i,j,k}R_{S_1}^{i,j,k}S_1^{i,j,k} + Q_{S_1}^{i,j,k} = 0 \\
Ric(S_2^{i,j,k}) &:= S_2^{i,j,k}A^{i,j,k} + [A^{i,j,k}]^\top S_2^{i,j,k} + S_2^{i,j,k}R_{S_2}^{i,j,k}S_2^{i,j,k} + Q_{S_2}^{i,j,k} = 0 \\
Ric(S_3^{i,j,k}) &:= S_3^{i,j,k}A^{i,j,k} + [A^{i,j,k}]^\top S_3^{i,j,k} + S_3^{i,j,k}R_{S_3}^{i,j,k}S_3^{i,j,k} + Q_{S_3}^{i,j,k} = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde cada  $R_B^{i,j,k}$  tiene la forma:

$$R_B^{i,j,k} := \sum_{r=1}^{11} \mathring{W}_r^{i,j,k} \Lambda_{r+b} \left( \mathring{W}_r^{i,j,k} \right)^\top + \Lambda_b$$

Matrices  $Q_B^{i,j,k}$  tienen la forma

$$\begin{aligned}
Q_B^{i,j,k} &:= \|\Omega_m^1(x^i, y^j, z^k)\|_{\Lambda_1^{-1}}^2 + \|\Omega_m^2(x^{i-1}, y^j, z^k)\|_{\Lambda_2^{-1}}^2 + \|\Omega_m^3(x^{i-2}, y^j, z^k)\|_{\Lambda_3^{-1}}^2 \\
&\quad + \|\Omega_m^4(x^i, y^{j-1}, z^k)\|_{\Lambda_4^{-1}}^2 + \|\Omega_m^5(x^i, y^{j-2}, z^k)\|_{\Lambda_5^{-1}}^2 + \|\Omega_m^6(x^i, y^j, z^{k-1})\|_{\Lambda_6^{-1}}^2 \\
&\quad + \|\Omega_m^7(x^i, y^j, z^{k-2})\|_{\Lambda_7^{-1}}^2 + \|\Omega_m^8(x^{i-1}, y^{j-1}, z^k)\|_{\Lambda_8^{-1}}^2 + \|\Omega_m^9(x^i, y^{j-1}, z^{k-1})\|_{\Lambda_9^{-1}}^2 \\
&\quad + \|\Omega_m^{10}(x^{i-1}, y^j, z^{k-1})\|_{\Lambda_{10}^{-1}}^2 + \|\Omega_m^{11}(x^{i-1}, y^{j-1}, z^{k-1})\|_{\Lambda_{11}^{-1}}^2 + Q_B^{i,j,k}
\end{aligned}$$

donde  $B$  puede ser  $P, S_1, S_2, S_3$  y  $b = (7, 14, 21, 28)$ , representa la derivada parcial; para  $S_1$  es con respecto a  $x$ , para  $S_2$  con respecto a  $y$  y  $S_3$  con respecto a  $z$ , y  $\Lambda_l^{-1}$  ( $l = \overline{1, 46}$ ). Donde

$$\begin{aligned}
\Omega_x^r(x_i, y_j, z_j) &:= \frac{d}{dx} \Omega^r(x, y, z) \Big|_{x=x_i, y=y_j, z=z_k} \\
\Omega_y^r(x_i, y_j, z_j) &:= \frac{d}{dy} \Omega^r(x, y, z) \Big|_{x=x_i, y=y_j, z=z_k} \\
\Omega_z^r(x_i, y_j, z_j) &:= \frac{d}{dz} \Omega^r(x, y, z) \Big|_{x=x_i, y=y_j, z=z_k}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Además, aquí  $\tilde{W}_k^{i,j,k}(t) := W_k^{i,j,k}(t) - \mathring{W}_k^{i,j,k}$ ,  $k = \overline{1, 11}$ .

La *Clase especial* de ecuación de Riccati ( $PA + A^\top P + PRP + Q = 0$ ) tiene solución positiva si las condiciones dadas en el capítulo 1 se cumplen.

### 3.3. Formulación del Problema de Identificación

El establecimiento del problema de identificación (estimation) para sistemas no lineales (3.4) analizado en este estudio, puede formularse como sigue:

*Para el sistema no lineal, dado por la EDP vectorial (3.4), se analiza la calidad del identificador (4.6) suministrado con las leyes de ajuste (3.9), estimando la cota superior del error de*

identificación  $\delta$  dado por

$$\delta := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left\| \hat{u}^{i,j,k}(t) - u^{i,j,k}(t) \right\|_{P^{i,j,k}}^2 \quad (3.12)$$

(con  $P^{i,j,k}$  de (6.11)), y, si es posible, reducirlo a el menor valor posible, seleccionando los parámetros libres que participan dentro de la estructura del identificador de la RND.

### 3.4. Resultado Principal

El resultado principal de este trabajo se presenta a continuación.

**Teorema 3.1.** *Considere el modelo del sistema no lineal (3.1) ( $i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M, k = 0, \dots, L$ ), dado por el sistema de EDP con incertidumbres (perturbaciones) en el estado y en la salida, bajo las condiciones a la frontera (6.2). Supongase también que el neuro-identificador está dado por (4.6) cuyos parámetros se ajustan por las leyes de aprendizaje (3.9) con parámetros  $\alpha$ . Si las matrices  $Q_1^{i,j,k}$  definidas positivas,  $Q_2^{i,j,k}$ ,  $Q_3^{i,j,k}$  indican la existencia de las soluciones positivas  $P^{i,j,k}$ ,  $S_1^{i,j,k}$ ,  $S_2^{i,j,k}$  y  $S_3^{i,j,k}$  ( $i = 0, \dots, N$ ) de las ecuaciones de Riccati (6.11), entonces, para todo  $i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M; k = 0, \dots, L$  la siguiente  $\rho$ -cota superior*

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^N \left[ \left\| \hat{u}^{i,j,k}(t) - u^{i,j,k}(t) \right\|_{P^{i,j,k}}^2 + \left\| \hat{u}_x^{i,j,k}(t) - u_x^{i,j,k}(t) \right\|_{S_1^{i,j,k}} \right. \\ & \left. + \left\| \hat{u}_y^{i,j,k}(t) - u_y^{i,j,k}(t) \right\|_{S_2^{i,j,k}} + \left\| \hat{u}_z^{i,j,k}(t) - u_z^{i,j,k}(t) \right\|_{S_3^{i,j,k}} \right] \leq \mu \end{aligned} \quad (3.13)$$

se asegura con  $\mu_0 := \sqrt{LMN} \alpha^{-1/2}$  y

$$\begin{aligned} \mu & := \mu_0 \sqrt{\max_{i,j,k} \Psi} \\ \Psi & := \varpi_{s=1}^3 f_s^{i,j,k} \geq (\tilde{f}^{i,j,k}(t))^T \Lambda_7^{-1} \tilde{f}^{i,j,k}(t) + \left( \tilde{f}_x^{i,j,k}(t) \right)^T \Lambda_{14}^{-1} \tilde{f}_x^{i,j,k}(t) + \\ & \quad \left( \tilde{f}_y^{i,j,k}(t) \right)^T \Lambda_{21}^{-1} \tilde{f}_y^{i,j,k}(t) + \left( \tilde{f}_z^{i,j,k}(t) \right)^T \Lambda_{28}^{-1} \tilde{f}_z^{i,j,k}(t) \\ \varpi & := \max \{ \lambda_{\max}(\Lambda_7^{-1}), \lambda_{\max}(\Lambda_{14}^{-1}), \lambda_{\max}(\Lambda_{21}^{-1}), \lambda_{\max}(\Lambda_{28}^{-1}) \} \end{aligned}$$

Lo que es más, los pesos  $W_{r,t}$   $r = \overline{1, 11}$  siguen acotadas proporcionalmente a  $\mu$ , esto es,  $\|W_{r,t}\| \leq K_r \mu$ ,  $r = \overline{1, 11}$ .

*Demostración.* La prueba detallada está dada en el Apéndice. □

### **3.5. Conclusiones del Capitulo**

El enfoque sugerido tiene por objeto resolver el problema de la identificación no paramétrica de sistemas no lineales (con incertidumbres) dado por EDP de tipo parabólico en 3D. La estabilidad práctica para el proceso de identificación se demuestra basada en una clase de análisis de Lyapunov. El mismo análisis conduce a la generación de las correspondientes leyes de aprendizaje para la RND sugerida y provee de las condiciones para la identificación de una cota superior.

---

# 4

## Identificación Complejos

---

La ecuación compleja de Schrödinger y de Ginzburg-Landau son dos de las ecuaciones no lineales más estudiadas en la comunidad física y matemática. La ecuación de Landau describe varios fenómenos de ondas no lineales hasta superconductividad, mientras que la ecuación de Schrödinger es una ecuación que describe como el estado cuántico de un sistema físico cambia en el tiempo. Estos son ejemplos de Ecuaciones Parciales Diferenciales Complejas (C-PDE por sus siglas en inglés) [31].

—En este capítulo una estrategia basada en Redes Neuronales Diferenciales para la identificación de una clase de modelos descritos por ecuaciones diferenciales parciales con un estado complejo, se propone. El problema de identificación es reducido a encontrar una expresión exacta para la dinámica de los pesos usando las propiedades de las RND. En éste caso, la RND puede verse como dos redes acopladas donde una de ellas reproduce la parte real de la ecuación compleja y la otra provee la identificación de la parte imaginaria, donde cada estado estimado es un estado complejo. Les leyes de adaptación para los pesos complejos aseguran la convergencia de las trayectorias de la RND a los estados de la C-PDE. Para investigar el comportamiento cualitativo de la metodología sugerida, aquí el problema de modelado no paramétrico para dos plantas de parámetros distribuidos se analiza: las ecuaciones de Schrödinger y Ginzburg-Landau.

En lo siguiente,  $j$  denota la unidad imaginaria,  $\sqrt{-1}$ .

### 4.0.1. Ecuación de Ginzburg-Landau (de Tipo Parabólico)

En física, la ecuación compleja de Ginzburg-Landau (CGLE por sus siglas en inglés) es usada para modelar una gran variedad de fenómenos, desde ondas no lineales hasta superconducti-

vidad, cristales líquidos y transiciones de fase de segundo orden a otras. La ecuación describe la evolución de amplitudes de modos inestables para cualquier proceso que exhibe una bifurcación Hopf, para los cuales un espectro continuo de números de onda inestable se toma en cuenta [7]. Esta puede ser considerada como una forma general para una gran clase de bifurcaciones y fenómenos de onda no lineales en sistemas espacialmente extendidos. La ecuación está dada por:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + (1 + j\alpha) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - (1 + j\beta) |A|^2 A \quad (4.1)$$

donde  $A$  es una función compleja de (escalados) tiempo  $t$  y espacio  $x$  ( $A$  menudo en una dimensión reducida  $D = 1$  o  $2$ ) y los parámetros reales  $b$  y  $c$  caracterizan los términos de dispersión lineal y no lineal. La ecuación puede reducirse a la ecuación *real* de Ginzburg-Landau

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - |A|^2 A$$

que puede llamarse también la ecuación de difusión no lineal compleja.

En este capítulo, ambos modelos son tratados con el propósito de mostrar un método alternativo de solución presentado en las secciones siguientes.

## 4.1. Aproximación de Ecuaciones Diferenciales Parciales Complejas

Considerese la ecuación diferencial parcial con estado complejo

$$u_t(x, t) = f(u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t)) + g(u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t)) j \quad (4.2)$$

con condiciones a la frontera tipo Dirichlet y Neumann:

$$u(0, t) = u_0, u(1, t) = 1, u_x(0, t) = 0 \quad (4.3)$$

El dominio de la EDP es  $x \in [0, 1]$ ,  $t \geq 0$ . Sea  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  continua a pedazos en  $t$ . Supongase que las funciones no lineales inciertas  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  satisfacen la condición de Lipschitz  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_1 \|x - y\|$ , y  $\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq L_2 \|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in B := \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , donde  $L_1$  y  $L_2$  son constantes y  $\|f\|^2 = (f, f)$ ,  $\|g\|^2 = (g, g)$  [65]. La norma definida arriba en (6.13) está dada en el espacio de Sobolev.

### 3.1. APROXIMACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES COMPLEJAS

Ahora considerese una función  $h_0(\cdot)$  in  $H^{m,2}(\Omega)$ . Por [21],  $h_0(\cdot)$  puede ser reescrita como

$$h_0(x) = \sum_i \sum_j \theta_{ij} \Psi_{ij}(x)$$

$$\theta_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(x) \Psi_{ij}(x) dx, \forall i, j \in \mathbb{Z}$$

La última expresión es llamada una función en expansión de series de  $h_0(x)$ . Basados en esta expansión de series, pero considerando la versión compleja del algoritmo back-propagation complejo, una red neuronal toma la siguiente estructura matemática

$$\begin{aligned} \hat{h}_0(x, \theta) & : = \sum_{i=M_1}^{M_2} \sum_{j=N_1}^{N_2} \theta_{ij} \Psi_{ij}(x) + \varkappa_0 \\ & = \sum_{i=M_1}^{M_2} \sum_{j=N_1}^{N_2} (\theta_{ij,R} \Psi_{ij,R}(x) - \theta_{ij,I} \Psi_{ij,I}(x)) + \varkappa_{0,R} \\ & \quad + j \left[ \sum_{i=M_1}^{M_2} \sum_{j=N_1}^{N_2} (\theta_{ij,R} \Psi_{ij,I}(x) + \theta_{ij,I} \Psi_{ij,R}(x)) + \varkappa_{0,I} \right] \\ & = Re[\hat{h}_0] + jIm[\hat{h}_0] \\ & = \Theta_R^T W_R(x) + j\Theta_I^T W_I(x) := \Theta^T W(x) \end{aligned}$$

que puede ser usada para aproximar cualquier función no lineal compleja  $h_0(x) \in S$  con la adecuada selección de los integradores, para las partes real y compleja,  $M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$  donde

$$\Theta = [\theta_{M_1 N_1}, \dots, \theta_{M_1 N_2}, \dots, \theta_{M_2 N_1}, \dots, \theta_{M_2 N_2}]^T$$

$$W(x) = [\Psi_{M_1 N_1}, \dots, \Psi_{M_1 N_2}, \dots, \Psi_{M_2 N_1}, \dots, \Psi_{M_2 N_2}]^T$$

Siguiendo el Teorema de Stone Wiestrass [19], si  $\varepsilon(M_1, M_2, N_1, N_2) = h_0(x) - \hat{h}_0(x, \theta)$  es el error de aproximación de la red neuronal compleja (RN-C), entonces para una constante arbitraria positiva  $\varepsilon$  existen algunas constantes  $M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$  such that

$$\|\varepsilon(M_1, M_2, N_1, N_2)\|_2 \leq \varepsilon < \infty \quad (4.4)$$

para todo  $x \in X \subset \mathbb{C}$ . En el caso cuando  $x \in X^n \subset \mathbb{C}^n$  ( $x := [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ), el  $\Psi_{ij}$  argumento ( $x$ ) debe modificarse por  $(x, c) = c^T x = \sum_{i=1}^n x_i c_i$  with  $c \in X^n$  como el vector de pesos constante.

Siguiendo la metodología de las redes neuronales diferenciales, asumimos que existe un conjunto de parametros:

$$W_1^{i,*} \in \mathfrak{R}^{s_1}, W_2^{i,*} \in \mathfrak{R}^{s_2}, W_3^{i,*} \in \mathfrak{R}^{s_3}$$

$$W_4^{i,*} \in \mathfrak{R}^{s_4}, W_5^{i,*} \in \mathfrak{R}^{s_5}, W_6^{i,*} \in \mathfrak{R}^{s_6}$$



tal que

$$\begin{aligned} u_i - \int_0^t \left( A_r^i u_i + [W_1^{i,*}]^\top \sigma(x_i) u_i + [W_2^{i,*}]^\top \varphi(x_i) u_{i-1} - [W_3^{i,*}]^\top \gamma(x_i) u_{i-2} - \tilde{f}^i \right) d\tau \\ - j \int_0^t \left( A_c^i u_i + [W_4^{i,*}]^\top \sigma(x_i) u_i + [W_5^{i,*}]^\top \varphi(x_i) u_{i-1} - [W_6^{i,*}]^\top \gamma(x_i) u_{i-2} \right) d\tau = 0 \end{aligned}$$

donde las funciones

$$\sigma(\cdot) \in \mathfrak{R}^{s_1}, \varphi(\cdot) \in \mathfrak{R}^{s_2}, \gamma(\cdot) \in \mathfrak{R}^{s_3}$$

obedecen las siguientes condiciones de sector:

$$\begin{aligned} \|\sigma(v_i) - \sigma(\tilde{v}_i)\|^2 &\leq L_\sigma \|v_i - \tilde{v}_i\|^2 \\ \|\varphi(v_i) - \varphi(\tilde{v}_i)\|^2 &\leq L_\varphi \|v_i - \tilde{v}_i\|^2 \\ \|\gamma(v_i) - \gamma(\tilde{v}_i)\|^2 &\leq L_\gamma \|v_i - \tilde{v}_i\|^2 \end{aligned}$$

que estan acotadas en  $U$ , i.e.,

$$\|\sigma(\cdot)\|^2 \leq \sigma^+, \|\varphi(\cdot)\|^2 \leq \varphi^+, \|\gamma(\cdot)\|^2 \leq \gamma^+$$

Notece que, dado que se requiere de  $\partial u(x,t)/\partial t$  in (4.2), los pesos de la RND-Compleja se seleccionan variantes en el tiempo. Por otro lado, aqui  $\sigma(\cdot)$ ,  $\varphi(\cdot)$ ,  $\gamma(\cdot)$  son funciones de activación de la RND-compleja, no un conjunto de eigenfunciones. Esto es, la propiedad de la aproximación de la RND-Compleja significativamente implica la especificación de  $\sigma(\cdot)$ ,  $\varphi(\cdot)$ ,  $\gamma(\cdot)$ .

Los términos  $\tilde{f}^i$ , llamados *errores de modelado* de cada RND-Compleja aplicados para la aproximación de la EDP-C, esto es

$$\begin{aligned} \tilde{f}^i : &= f^i - \left( A_r^i u_i + [W_1^{i,*}]^\top \sigma(x_i) u_i + [W_2^{i,*}]^\top \varphi(x_i) u_{i-1} + [W_3^{i,*}]^\top \gamma(x_i) u_{i-2} \right) \\ &- j \left( A_c^i u_i + [W_4^{i,*}]^\top \sigma(x_i) u_i + [W_5^{i,*}]^\top \varphi(x_i) u_{i-1} + [W_6^{i,*}]^\top \gamma(x_i) u_{i-2} \right) \end{aligned}$$

- *Suposición 1.* El error de modelado  $\tilde{f}^i$  satisface el siguiente grupo de desigualdades:

$$\|\tilde{f}^i\|^2 \leq f_0^i \|u_i\|^2 + f_1^i \|u_{i-1}\|^2 + f_2^i \|u_{i-2}\|^2 + f_3^i \quad (4.5)$$

y

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}^i\|^2 := \|\tilde{f}^i + A^i \Delta^i(t,x)\|^2 &\leq F_0^i \|u_i\|^2 + F_1^i \|u_{i-1}\|^2 \\ &+ F_2^i \|u_{i-2}\|^2 + F_3^i \|\Delta^i(t,x)\|^2 + F_4^i \end{aligned}$$

- *Suposición 2.* El gradiente del error de modelado esta acotado como sigue:

$$\|\nabla_x \tilde{f}^i\|^2 \leq f_4^i \|u_i\|^2 + f_5^i \|u_{i-1}\|^2 + f_6^i \|u_{i-2}\|^2 + f_7^i$$

llegando a

$$\|\nabla_x \tilde{f}^i\|^2 := \|\nabla_x \tilde{f}^i + A^i \Delta_x^i(t, x)\|^2 \leq F_5^i \|u_i\|^2 + F_6^i \|u_{i-1}\|^2 + F_7^i \|u_{i-2}\|^2 + F_8^i \|\Delta_x^i(t, x)\|^2 + F_9^i$$

donde  $A^i = A_r^i + A_c^i$ ,  $\Delta^i(t, x) := \hat{u}_i(x, t) - u_i(x, t)$  and  $f_j^i, F_k^i$  ( $j = \overline{0, 7}, k = \overline{0, 9}$ ) son constantes.

## 4.2. Identificador de Ecuaciones Parciales Diferenciales Complejas

Considere la siguiente estructura de identificador adaptable para cada nodo  $i$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{u}_i(x, t) = & A_r^i \hat{u}_i(x, t) + \left[ W_{1,t}^i \right]^\top \sigma(\hat{x}_i) \hat{u}_i(x, t) + \left[ W_{2,t}^i \right]^\top \varphi(\hat{x}_i) \hat{u}_{i-1}(x, t) + \left[ W_{3,t}^i \right]^\top \gamma(\hat{x}_i) \hat{u}_{i-2}(x, t) \\ & + A_c^i \hat{u}_i(x, t) + \left[ W_{4,t}^i \right]^\top \sigma(\hat{x}_i) \hat{u}_i(x, t) + \left[ W_{5,t}^i \right]^\top \varphi(\hat{x}_i) \hat{u}_{i-1}(x, t) + \left[ W_{6,t}^i \right]^\top \gamma(\hat{x}_i) \hat{u}_{i-2}(x, t) \quad j \\ & \forall i \in [3, N] \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $(A_r^i + A_c^i) \in \mathfrak{R}^-$  y donde el las matrices variantes en tiempo

$$W_{1,t}^i \in \mathfrak{R}^{s_1}, W_{2,t}^i \in \mathfrak{R}^{s_2}, W_{3,t}^i \in \mathfrak{R}^{s_3} \quad (4.7)$$

$$W_{4,t}^i \in \mathfrak{R}^{s_4}, W_{5,t}^i \in \mathfrak{R}^{s_5}, W_{6,t}^i \in \mathfrak{R}^{s_6} \quad (4.8)$$

son los llamados pesos de la RNDC y la variable  $\hat{u}_i(x, t)$  es el estimado de  $u_i(x, t)$ .

Los pesos satisfacen las ecuaciones diferenciales matriciales con  $h = 1, 2, 3, g = 4, 5, 6$

$$\begin{aligned} \dot{W}_h^i(t) = & -\frac{2}{K_h} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^\top(t, x) T_r^i \Omega_i^h(t, x) - \frac{2}{K_h} \sum_{i=1}^N (\Delta^i(t, x))^\top P_r^i \Omega_i^h(t, x) \\ & - \alpha_m^i \tilde{W}_h^i(t) - \frac{2}{K_h} \sum_{i=1}^N (\Delta_x^i(t, x))^\top S_r^i \Omega_i^{h*}(t, x) \\ \dot{W}_g^i(t) = & -\frac{2}{K_g} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^\top(t, x) T_c^i \Omega_i^g(t, x) - \frac{2}{K_g} \sum_{i=1}^N (\Delta^i(t, x))^\top P_c^i \Omega_i^g(t, x) \\ & - \alpha_n^i \tilde{W}_g^i(t) - \frac{2}{K_g} \sum_{i=1}^N (\Delta_x^i(t, x))^\top S_c^i \Omega_i^{g*}(t, x) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
\Omega_i^1 &= \sigma(\hat{x}_i)\hat{u}_i(x,t) & \Omega_i^1 &= \sigma(\hat{x}_i)\hat{u}_i(x,t) \\
\Omega_i^{1*} &= \nabla_x \sigma(\hat{x}_i)\hat{u}_i(x,t) & \Omega_i^{1*} &= \nabla_x \sigma(\hat{x}_i)\hat{u}_i(x,t) \\
\Omega_i^2 &= \varphi(\hat{x}_i)\hat{u}_{i-1}(t,x) & \Omega_i^2 &= \varphi(\hat{x}_i)\hat{u}_{i-1}(t,x) \\
\Omega_i^{2*} &= \nabla_x \varphi(\hat{x}_i)\hat{u}_{i-1}(t,x) & \Omega_i^{2*} &= \nabla_x \varphi(\hat{x}_i)\hat{u}_{i-1}(t,x) \\
\Omega_i^3 &= \gamma(\hat{x}_i)\hat{u}_{i-2}(t,x) & \Omega_i^3 &= \gamma(\hat{x}_i)\hat{u}_{i-2}(t,x) \\
\Omega_i^{3*} &= \nabla_x \gamma(\hat{x}_i)\hat{u}_{i-2}(t,x) & \Omega_i^{3*} &= \nabla_x \gamma(\hat{x}_i)\hat{u}_{i-2}(t,x)
\end{aligned}$$

con  $P_r^i, S_r^i, P_c^i, S_c^i, T_r^i$  y  $T_c^i$  ( $i = \overline{3, N}$ ) son soluciones definidas positivas ( $P_r^i > 0, S_r^i > 0, T_r^i > 0, P_c^i > 0, S_c^i > 0$  y  $T_c^i > 0$ ) de las ecuaciones algebraicas de Riccati dadas por:

$$\begin{aligned}
P_D^i A_D^i + [A_D^i]^\top P_D^i + P_D^i \Lambda_{D,\alpha}^i P_D^i + \lambda_{\max} \left( [\Lambda_{P,D}^i]^{-1} \right) F_{3,D}^i I_{n \times n} + Q_{P,D}^i &= 0 \\
S_D^i A_D^i + [A_D^i]^\top S_D^i + S_D^i \Lambda_{S,D}^i S_D^i + \lambda_{\max} \left( [\Lambda_{S,D}^i]^{-1} F_{8,D}^i I_{n \times n} \right) + Q_{S,D}^i &= 0 \\
T_D^i A_D^i + [A_D^i]^\top T_D^i + T_D^i \Lambda_{T,D}^i T_D^i + Q_{T,D}^i + \lambda_{\max} \left( [\Lambda_{P,D}^i]^{-1} \right) F_{0,D}^i I_{n \times n} + \\
\left( \lambda_{\max} \left( [\Lambda_{S,D}^i]^{-1} F_{5,D}^i \right) + \lambda_{\max} \left( [\Lambda_{T,D}^i]^{-1} \right) f_{0,D}^i \right) I_{n \times n} &= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde  $D$  indica la correspondiente parte real (denotada con el subíndice  $r$ ) o la parte compleja (denotada por el subíndice  $c$ ).

Empleando el Complemento de Schur a la ecuación 6.11 puede ser reescrita como una desigualdad matricial lineal (LMI, por sus siglas en inglés) siguiendo la tecnica de equivalencia para una desigualdad matricial no lineal [77].

La *clase especial* de ecuación de Riccati  $PA + A^\top P + PRP + Q = 0$  tiene solución positiva si y sólo si, la LMI 4.11 tiene solución factible. Esto es  $\forall P > 0$

$$\begin{bmatrix} -PA - A^\top P - Q & P \\ P & R \end{bmatrix} > 0 \tag{4.11}$$

donde  $A, Q = Q^T, R = R^T > 0$  son matrices dadas de tamaño apropiado. Esta LMI puede resolverse por diversos metodos eficientes con el fin de determinar si es factible o no, y en caso de serlo, calcular la solución. Algunos métodos numericos existentes para la resolución de LMI son el algoritmo Elipsoidal o el método del punto interior, implementados de forma computacional empleando las herramientas de SeDuMi o Yalmip, por ejemplo. El problema de estimación de estados para sistemas no lineales inciertos en este estudio, puede comenzarse como:

*Establecimiento del Problema. Bajo el sistema no lineal complejo con una adecuada selección de matrices  $A_r^i$  y  $A_c^i$ , y con la estructura de identificador neuronal complejo and with the*

## 4.2. IDENTIFICADOR DE ECUACIONES PARCIALES DIFERENCIALES COMPLEJAS

*complex value neural network identifier structure suministrado con la ley de ajuste 4.9 incluyendo la selección de  $W_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), la cota superior para el error de estimación  $\beta$  definido como*

$$\beta := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\hat{u}(t, x) - u(t, x)\|_P^2 \quad (4.12)$$

$P > 0$ ,  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  debe obtenerse, y si es posible, reducir a su valor menor posible, usando solo los parametros libres q participan en la estructura de la RND.

En el capítulo de Resultados Numéricos puede observarse la simulación de la Ecuación de Landou y la simulación de la estimación de dicha ecuación, hecha por la Red Neuronal Diferencial aquí propuesta, así como el error de identificación que demuestra cualitativamente su eficiencia.

---

# 5

## Identificación de Sistemas descritos en EDP Hiperbólicas

---

Hasta ahora hemos tratado el problema de la identificación de sistemas de parámetros distribuidos descritos en ecuaciones parciales lineales de segundo orden, es decir, ecuaciones de tipo parabólico. Esta clase de PDE se caracterizan por ser de primer orden en el tiempo. Sin embargo, algunos problemas clásicos tratados en el marco de las PDEs no puede obedecer a la mencionada estructura de PDE parabólica. En este capítulo, se introduce la idea principal para identificar PDEs-hiperbólicas, en este caso, la más básica de ellas es la ecuación de onda que modela los distintos fenómenos oscilatorios, es decir, vibraciones de las cuerdas, por ejemplo. La principal característica distintiva de una ecuación de onda es que es de segundo orden en el tiempo. Tanto PDEs parabólicas e hiperbólicas definen su estado en espacio y tiempo. Por supuesto, ambas ecuaciones pueden ser afectadas por fenómenos adicionales que causan inestabilidad (en lugar de un decaimiento monótono o una oscilación pura), pero la distinción clave se mantiene: los sistemas de tipo parabólico tiene valores propios reales en su mayoría, mientras que las PDE's-hiperbólica tiene valores propios imaginarios en su mayoría. Las propiedades definidas para problemas hiperbólicos incluyen problemas de Cauchy, velocidad finita de propagación, y la existencia de estructuras tipo onda con formas infinitamente variadas. La infinita variedad de formas de onda hacen de las ecuaciones hiperbólicas las más utilizadas en el modelado del envío de información, por ejemplo en el odio, la vista, la televisión y la radio. Otros ejemplos de áreas en las que los sistemas son descritos por estas ecuaciones pueden ser, en dinámica de fluidos, acústica, particularmente las ecuaciones de Maxwell, en especial en el vacío ya que la atmosfera apenas es distinguible del vacío en bajas intensidades, etc.

## 5.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales de tipo Hiperbólico

Considérese la ecuación diferencial parcial incierta de tipo hiperbólico

$$u_{tt}(x,t) = f(u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t)) \quad (5.1)$$

aquí  $u(x,t)$  se define por un componente ( $u(x,t) \in \mathfrak{R}^1$ ) en un dominio dado como  $x \in [0, 1]$ ,  $t > 0$ , con condiciones iniciales y a la frontera de Neumann y Dirichlet dadas por:

$$u_x(0,t) = 0, u(0,t) = u_0, u(x,0) = c \quad (5.2)$$

En (5.1),  $u_{tt}(x,t)$  significa  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$  y

$$u_x(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, u_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

### 5.1.1. Representación en Variables de Estado

Usando la teoría de representación de variables de estado  $u(x,t) = u_1(x,t)$ , el sistema (5.1) puede ser representado como sigue:

$$\begin{aligned} u_{1,t}(x,t) &= u_2(x,t) \\ u_{2,t}(x,t) &= f(u_1(x,t), u_{1,x}(x,t), u_{1,xx}(x,t)) \end{aligned}$$

Siguiendo con esta descripción el sistema no lineal incierto puede representarse (en forma vectorial) como sigue:

$$v(x,t) := \begin{bmatrix} v_1(x,t) \\ v_2(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{bmatrix}$$

y además

$$v_t(x,t) = g(v(x,t), v_x(x,t), v_{xx}(x,t)) = \begin{bmatrix} v_2(x,t) \\ f(v_1(x,t), v_{1,x}(x,t), v_{1,xx}(x,t)) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

aquí  $v(x,t) \in \mathfrak{R}^2$  y el sistema (5.3) tiene las siguientes condiciones iniciales y a la frontera

$$\begin{aligned} v_1(0,t) &= u_0, v_1(x,0) = c \\ v_{1,x}(0,t) &= 0, v_2(x,0) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

El sistema (5.1) considerando las condiciones iniciales y a la frontera (6.2) es conducido a un espacio de Hilbert  $H$  equipado con el producto interno  $(\cdot, \cdot)$ . Sea  $h(t)$  sea una función continua

a pedazos  $t$ . Por  $L_\infty(a, b; H)$ , se denota el conjunto de las funciones- $H$  con valores  $h$  tales que  $(h(\cdot), u)$  es medible en el sentido de Lebesgue para todo  $u \in H$  y  $\text{ess máx}_{t \in [a, b]} \|h(x, t)\| < \infty$ . Supongase que la función no lineal  $h(x, t)$  satisface la *condición de Lipschitz*  $\|h(x, t) - h(y, t)\| \leq L\|x - y\|$ ,

$$\forall z, y \in B_r(z_0) := \{z \in \mathfrak{R}^n \mid \|z - z_0\| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1]$$

donde  $L$  es constante y  $\|h\|^2 = (h, h)$  es usada sólo para asegurar que existe alguna  $\delta > 0$  tal que la ecuación de estado  $\dot{z} = h(z, t)$  con  $z(t_0) = z_0$  tiene solución única sobre  $[t_0, t_0 + \delta]$  [65]. La norma definida arriba se encuentra en el espacio de Sobolev y esta dada como en [1].

### 5.1.2. Aproximación numérica para EDP hiperbólicas

La principal idea detrás de la aplicación de las RND [78] para aproximar la solución de las PDE-hiperbólicas es usar una clase de método de diferencias finitas pero para funciones no lineales inciertas. Así, es necesario construir un mallado que divida al sub-dominio  $x \in [0, 1]$  en  $N$  secciones equidistantes definidas como  $x_i$  de forma tal que  $x_0 = 0$  y  $x_N = 1$ . Usando esta descripción de malla, es posible utilizar la siguiente identidad:

$$v_{i,t}(t) := \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{x=x_i}$$

Aquí  $v_i \in \mathfrak{R}^2$  representa la solución de la PDE en el punto  $x_i$  expresado en forma vectorial. Usando la descripción de malla, la PDE no lineal incierta (5.1) puede representarse como sigue:

$$v_t(x, t) = g(v(x, t), v_x(x, t), v_{xx}(x, t)) \quad (5.5)$$

Aplicando la representación en diferencias finitas tenemos que:

$$v_{i,x}(t) \simeq \frac{v_i(t) - v_{i-1}(t)}{\Delta x}, \quad v_{i,xx}(t) \simeq \frac{v_{i,x}(t) - v_{i-1,x}(t)}{\Delta x} \quad (5.6)$$

La aproximación  $\Delta x$  de la EDP no lineal (5.1) puede representarse como:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(t) = v_{i,t}(t) &\simeq g \left( v_i(t), \frac{v_i(t) - v_{i-1}(t)}{\Delta x}, \frac{v_{i,x}(t) - v_{i-1,x}(t)}{\Delta x} \right) = \\ &g \left( v_i(t), \frac{v_i(t) - v_{i-1}(t)}{\Delta x}, \frac{v_i(t) - 2v_{i-1}(t) + v_{i-2}(t)}{(\Delta x)^2} \right) = \Phi(v, v_{i-1}, v_{i-2}), \quad (i = 0, \dots, N) \end{aligned}$$

## 5.2. Neuro Identificación de PDEs-Hiperbólicas

Añadiendo y restando los términos correspondientes, podemos representar (5.1) como

$$v_t(x, t) = Av(x, t) + \mathring{V}_1 \sigma(x) + \mathring{V}_2 \varphi(x) v_x(x, t) + \mathring{V}_3 \gamma(x) v_{xx}(x, t) + \tilde{g}(x, t)$$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \mathring{V}_r := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times s_r} \\ \mathring{W}_r^\top \end{bmatrix}, r = 1, \dots, 3 \quad (5.7)$$

$$A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}, \mathring{V}_1 \in \mathfrak{R}^{2 \times s_1}, \mathring{V}_2 \in \mathfrak{R}^{2 \times s_2}, \mathring{V}_3 \in \mathfrak{R}^{2 \times s_3}$$

$$\tilde{g}(x, t) := g(v(x, t), v_x(x, t), v_{xx}(x, t)) - Av(x, t) - \mathring{V}_1 \sigma(x) - \mathring{V}_2 \varphi(x) - \mathring{V}_3 \gamma(x)$$

Aquí  $\tilde{g}(x, t) \in \mathfrak{R}^2$  representa el término del *error de modelado*,  $A$  y  $\mathring{V}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) cualquier matriz constante y el conjunto de funciones

$$\sigma(x) \in \mathfrak{R}^{s_1}, \varphi(x) \in \mathfrak{R}^{s_2}, \gamma(x) \in \mathfrak{R}^{s_3}$$

obedecen las siguientes condiciones de sector:

$$\begin{aligned} \|\sigma(x) - \sigma(x')\|^2 &\leq L_\sigma \|x - x'\|^2 \\ \|\varphi(x) - \varphi(x')\|^2 &\leq L_\varphi \|x - x'\|^2 \\ \|\gamma(x) - \gamma(x')\|^2 &\leq L_\gamma \|x - x'\|^2 \end{aligned}$$

que son acotadas en  $x$ , i.e.,

$$\|\sigma(\cdot)\|^2 \leq \sigma^+, \|\varphi(\cdot)\|^2 \leq \varphi^+, \|\gamma(\cdot)\|^2 \leq \gamma^+$$

Siguiendo la metodología de RND [78], se tiene para cada  $i \in (0, \dots, N)$

$$v_t^i(t) = A^i v^i(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ [\mathring{W}_1^i]^\top \sigma(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v^i(t) +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ [\mathring{W}_2^i]^\top \varphi(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v^{i-1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ [\mathring{W}_3^i]^\top \gamma(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v^{i-2}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{g}^i(t) \end{bmatrix}$$

donde

$$\tilde{g}^i(t) := \Phi(v_i, v_{i-1}, v_{i-2}) - A^i v^i - \begin{bmatrix} 0 \\ [\mathring{W}_1^i]^\top \sigma(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v^i(t)$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ [\mathring{W}_2^i]^\top \varphi(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v^{i-1}(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ [\mathring{W}_3^i]^\top \gamma(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v^{i-2}(t)$$

$$\mathring{W}_1^i \in \mathfrak{R}^{2 \times s_1}, \mathring{W}_2^i \in \mathfrak{R}^{2 \times s_2}, \mathring{W}_3^i \in \mathfrak{R}^{2 \times s_3}$$

Asumimos que los terminos del error de modelado satisfacen lo siguiente:



■ *Suposición 1:*

$$\|\tilde{g}^i\|^2 \leq g_0^i \|v_i\|^2 + g_1^i \|v_{i-1}\|^2 + g_2^i \|v_{i-2}\|^2 + g_3^i \quad (5.8)$$

y

$$\begin{aligned} \|\bar{g}^i\|^2 &:= \|\bar{g}^i + A^i w\|^2 \leq G_0^i \|v_i\|^2 + \\ &G_1^i \|v_{i-1}\|^2 + G_2^i \|v_{i-2}\|^2 + G_3^i \|w\|^2 + G_4^i \end{aligned}$$

■ *Suposición 2:* El gradiente del error de modelado  $\nabla_x \tilde{g}(x, t)|_{x=x_i} := \nabla_x^i \tilde{g}^i$  está acotado com

$$\|\nabla_x \tilde{g}^i\|^2 \leq g_4^i \|v_i\|^2 + g_5^i \|v_{i-1}\|^2 + g_6^i \|v_{i-2}\|^2 + g_7^i$$

llegando a

$$\begin{aligned} \|\nabla_x \bar{g}^i\|^2 &:= \|\nabla_x \bar{g}^i + A^i w\|^2 \leq G_5^i \|v_i\|^2 + \\ &G_6^i \|v_{i-1}\|^2 + G_7^i \|v_{i-2}\|^2 + G_8^i \|w\|^2 + G_9^i \end{aligned}$$

dónde  $G_k^i$  ( $j = \overline{0,7}$ ,  $k = \overline{0,9}$ ) son constantes.

### 5.2.1. Neuro Identificador

Basado en la metodología de las RND [78], se considera el siguiente neuro identificador

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{v}^i(x, t) &= A^i \hat{v}^i(x, t) + K^i (\hat{v}^i(t) - v^i(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ [W_{1,t}^i]^\top \sigma(x^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^i(t) + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ [W_{2,t}^i]^\top \varphi(x^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^{i-1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ [W_{3,t}^i]^\top \gamma(x^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^{i-2}(t) \quad (5.9) \\ K^i &= \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}, \forall i \in [3, N] \end{aligned}$$

donde  $A^i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz constante a ser seleccionada,  $\hat{v}_i(t)$  es el estimado de  $v_i(t)$ . Se selecciona una RND individual para cada punto  $x_i$ . La colección de tales identificadores constituirá una *red de RND* que contiene  $N$  identificadores neuronales conectados, trabajando en paralelo. Aquí  $\sigma(x_i)$ ,  $\varphi(x_i)$ ,  $\gamma(x_i)$  son vectores de activación de la red. Esto significa que la aproximación neuronal simplifica significativamente la especificación de  $\sigma(\cdot)$ ,  $\varphi(\cdot)$ ,  $\gamma(\cdot)$  que ahora son constantes.

El conjunto de matrices  $K^i$  se usa para compensar las incertidumbres producidas cuando el vector en tiempo variante se extiende de  $u(x, t)$  a  $v(x, t)$ . Estas matrices deben seleccionarse de forma tal que las nuevas matrices

$$\tilde{A}^i := A^i + K^i$$

sean estables.

Como el acceso a los valores  $v_i, v_{i-1}, v_{i-2}$  sobre  $X$  es posible, pueden estudiarse tres diferentes tipos de neuro identificadores (4.6):

- En el primer tipo (llamado *Estructura Serie*) todos los estados  $v_i, v_{i-1}, v_{i-2}$  se incluyen en la estructura del identificador como (instead of)  $\hat{v}_i, \hat{v}_{i-1}, \hat{v}_{i-2}$ ;

- En el segundo tipo (llamado *Estructura Serie-Paralelo*)  $v_{i-1}, v_{i-2}$  se usa una estructura de identificador en vez de  $\hat{v}_{i-1}, \hat{v}_{i-2}$  siempre que  $\hat{v}_i$  se mantenga ;

- Para el tercer tipo (llamado *Estructura Paralelo*) es exactamente (4.6).

En este estudio, sólo el tercer caso, es decir, la estructura paralela, es analizado. Los otros dos análisis pueden ser hechos siguiendo la misma metodología que este.

### 5.2.2. Leyes Adaptables para ajustar las trayectorias de los pesos

La capacidad adaptativa de las RND es debida a sus pesos. Las soluciones de los pesos de la RND se presentan como ecuaciones diferenciales vectoriales. Además, el conjunto de matrices  $W_{1,t}^i, W_{2,t}^i, W_{3,t}^i$  satisfacen las ecuaciones diferenciales dadas por

$$\begin{aligned} \dot{W}_r^i(t) &= -\frac{\alpha}{2} \tilde{W}_r^i(t) - K_r^{-1} I^r(x^i) [\hat{v}^i(t)]^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ I^r(x^i) &:= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \Psi^r(x^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^i(\Delta^i(t)) + T^i \hat{v}^i(t) \\ \Psi^1 = \sigma, \Psi^2 = \varphi, \Psi^3 = \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \Psi_x^r(x^i) \end{bmatrix} [S^i \Delta_x^i(x, t)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

con  $P^i, S^i$  y  $T^i$  ( $i = \overline{3, N}$ ) son soluciones definidas positivas ( $P^i > 0, S^i > 0$  y  $T^i > 0$ ) del siguiente conjunto de ecuaciones de Riccati algebraicas dadas por

$$\begin{aligned} P^i A^i + [A^i]^\top P^i + P^i \Lambda_\alpha^i P^i + \lambda_{\max} \left( [\Lambda_P^i]^{-1} \right) F_3^i I_{n \times n} + Q_P^i &= 0 \\ S^i A^i + [A^i]^\top S^i + S^i \Lambda_S^i S^i + \lambda_{\max} \left( [\Lambda_S^i]^{-1} \right) F_8^i I_{n \times n} + Q_S^i &= 0 \\ T^i A^i + [A^i]^\top T^i + T^i \Lambda_T^i T^i + Q_T^i + \lambda_{\max} \left( [\Lambda_P^i]^{-1} \right) F_0^i I_{n \times n} + \\ & \left( \lambda_{\max} \left( [\Lambda_S^i]^{-1} \right) F_5^i + \lambda_{\max} \left( [\Lambda_T^i]^{-1} \right) f_0^i \right) I_{n \times n} = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

La *Clase especial* de ecuación de Riccati ( $PA + A^\top P + PRP + Q = 0$ ) tiene solución positiva si las condiciones dadas en el capítulo 1 se cumplen.

### 5.3. Establecimiento del Problema

El problema de la identificación de estados para sistemas no lineales inciertos analizados en este estudio, puede ser escrito como sigue:

*Establecimiento del Problema.* Considerando sistema no lineal con una adecuada selección de matrices  $A^i$  y con la estructura del identificador basado en la Red Neuronal Diferencial (4.6) con las leyes de ajuste (6.10) (incluyendo la selección de  $\hat{W}_j^i$ ,  $j = 1, 2, 3$ ), la cota superior para el error de estimación  $\beta$  definido como

$$\beta := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\hat{v}(x, t) - v(x, t)\|_P^2 \quad (5.12)$$

$P > 0$ ,  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  debe obtenerse, y si es posible, reducir a su valor más pequeño posible, usando cualquiera de los parametros libres participantes en la estructura de la RND.

### 5.4. Resultado Principal

El resultado principal de este capítulo es dado en el siguiente teorema:

**Teorema 5.1.** *Sea el sistema lineal descrito en EDPs, desconocido y perturbado en el estado y en la salida (5.1) con condiciones a la frontera de Dirichlet y Neumann definidas en (6.2). Además, supóngase la estructura del identificador adaptable no paramétrico (4.6) cuyos parámetros se ajustan como la ley de adaptación dada en (6.10). Si existen matrices  $Q_P^i$ ,  $Q_S^i$  y  $Q_T^i$  definidas positivas tales que las ecuaciones de Riccati (6.11) tienen soluciones definidas positivas  $P^i$ ,  $S^i$  y  $T^i$  ( $i = \overline{3, N}$ ), entonces la siguiente cota superior*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\hat{v}(x, t) - v(x, t)\|_P \leq \rho \quad (5.13)$$

se asegura para el proceso de identificación de estados no paramétrica, donde

$$\rho := \sqrt{\min_i (\alpha_m^i)^{-1} N \max_i \left( \lambda_{\max} \left( [\Lambda_P^i]^{-1} \right) F_4^i \right)} + \sqrt{\min_i (\alpha_m^i)^{-1} N \max_i \left( \lambda_{\max} \left( [\Lambda_S^i]^{-1} \right) F_9^i \right)} + \sqrt{\min_i (\alpha_m^i)^{-1} N \max_i \left( \lambda_{\max} \left( [\Lambda_T^i]^{-1} \right) f_3^i \right)}$$

Además la siguiente cota superior es alcanzada para el gradiente del error de estimación:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial}{\partial x} [\hat{v}(x, t) - v(x, t)] \right\| \leq \rho_x$$

con

$$\rho_x := \|S\|^{-1} \sqrt{\underset{i}{\text{mín}}(\alpha_m^i)^{-1} N \underset{i}{\text{máx}} \left( \lambda_{\text{máx}} \left( [\Lambda_P^i]^{-1} \right) F_4^i \right) N \underset{i}{\text{máx}} \left( \lambda_{\text{máx}} \left( [\Lambda_S^i]^{-1} \right) F_9^i \right)} \\ + \|S\|^{-1} \sqrt{\underset{i}{\text{mín}}(\alpha_m^i)^{-1} N \underset{i}{\text{máx}} \left( \lambda_{\text{máx}} \left( [\Lambda_T^i]^{-1} \right) f_3^i \right)}$$

Lo que es más, los pesos  $W_{1,t}$ ,  $W_{2,t}$  y  $W_{3,t}$  están también acotados con las siguientes cotas

$$\|W_{1,t}\| \leq K_1 \rho, \quad \|W_{2,t}\| \leq K_2 \rho, \quad \|W_{3,t}\| \leq K_3 \rho$$

*Demostración.* La prueba detallada se encuentra en el apéndice. □

## 5.5. Conclusiones del Capítulo

La aproximación sugerida resuelve el problema de la identificación no paramétrica de sistemas no lineales inciertos descritos por ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico. La convergencia asintótica para el error de identificación ha sido demostrada aplicando el análisis tipo Lyapunov usando una clase especial de funcional de Lyapunov. El mismo análisis permite la generación de las condiciones correspondientes para la cota superior de los pesos envueltos en la estructura del neuro-identificador.

---

# 6

## Neuro-Identificación basada en el Método de Elemento Finito

---

Existen algunos métodos numéricos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales parciales con un esfuerzo razonable. Los más comunes de estos métodos son el de diferencias finitas (FDM, por sus siglas en inglés) y el de elemento finito (FEM por sus siglas en inglés), este último tiene la ventaja de ser fácilmente aplicado a objetivos irregulares, con condiciones a la frontera complejas, dispone de paquetes computacionales usados para facilitar el modelado sólido y la generación de la malla, pero también cuenta con algunas desventajas, primero, no se genera una solución general, segundo, es necesario tener experiencia para construir un buen modelo de elemento finito y un computador poderoso. Ambos métodos necesitan del conocimiento completo de la estructura del sistema al que van a ser aplicados. Es así que este capítulo presenta una estrategia diferente para aproximar la solución numérica de una ecuación diferencial parcial con incertidumbres usando Redes Neuronales Diferenciales. Específicamente, el método propuesto se describe para una clase de EDP en 2D usando el método de elemento finito. El problema de identificación se resuelve para cada elemento producido en la malla usando redes neuronales diferenciales. Además, otra red neuronal diferencial, que llamaremos ensambladora, se construye para aproximar la solución completa de la EDO a través de todo el dominio, donde la relación entre cada elemento es especificada. Ejemplos de sistemas descritos en ecuaciones diferenciales diferenciales en 2D son el de transferencia de calor en una hoja, el proceso de difusión en una membrana, etc. Finalmente, un algoritmo novedoso se ha diseñado para resolver el problema de redes neuronales diferenciales simultáneas usando la idea de FEM.

## 6.1. Aproximación de un Sistema de Parámetros Distribuidos en 2D

Considere la ecuación diferencial parcial en 2D parcialmente conocida:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u_{xx}(t), u_{xy}(t), u_{yx}(t), u_{yy}(t), u_x(t), u_y(t), u(t)) + \xi(t) \quad (6.1)$$

Aquí,  $u(t)$  es lo mismo que  $u(x, y, t)$  así como  $u_{xx}(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t)$  y lo mismo para las otras combinaciones.  $\xi(t)$  representa  $\xi(x, y, t)$ .  $u(t)$  has by  $n$  componentes  $u(t) \in \mathfrak{R}^n$  definidos en un dominio  $x, y \in [0, 1]$   $t \geq 0$ , con condiciones a la frontera (Neumann y Dirichlet) y condiciones iniciales dadas por:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= c_1 \in \mathfrak{R}^n & u_x(0, y, t) &= 0 \\ u(x, 0, t) &= c_2 \in \mathfrak{R}^n & u(x, y, 0) &= u_0 \in \mathfrak{R}^n \\ u_y(x, 1, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Basados en las condiciones dadas en el primer capítulo de esta tesis, la metodología para obtener la aproximación numérica para funciones inciertas no lineales, se sigue en la estrategia de identificación para el problema aquí presentado.

### 6.1.1. Explicación Principal

La idea principal detrás de la aplicación de las RND [78] para aproximar la solución de una EDP es usar una clase de FEM pero para funciones no lineales inciertas. Así es necesario construir un conjunto (comunmente llamado rejilla o *malla*) que divide los sub-dominios  $x, y \in [0, 1]$  en  $N$  formas geometricas simples llamadas *elementos* de forma tal que  $x^0 = y^0 = 0$  y  $x^N = y^M = 1$ , las propiedades y las relaciones gobernantes se expresan en términos de los valores desconocidos en puntos específicos en los elementos llamados *nodos*, todos los nodos tienen relación con los otros alrededor del elemento (veáse la figura 6.1), aquí, cada elemento se aproxima por una RND donde el vector de nodos es considerado como la entrada. Un proceso de ensamblaje se aplica para ligar los elementos individuales, derivado de este proceso, un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias se obtiene, en este proceso una RND del estado en 2D se construye. En este caso, un vector de elementos estimados será la entrada. Para la discretización del dominio es necesario seleccionar elementos finitos en dos dimensiones, uno de los elementos en 2D más simples es el elemento triangular de tres nodos (vease la figura 6.2), la relación entre cada nodo es considerada en la función sigmoideal correspondiente al segundo

peso de la RND de estimación de elementos, así como la relación entre los elementos está dada por la forma dada al segundo peso de la RND de ensamble.

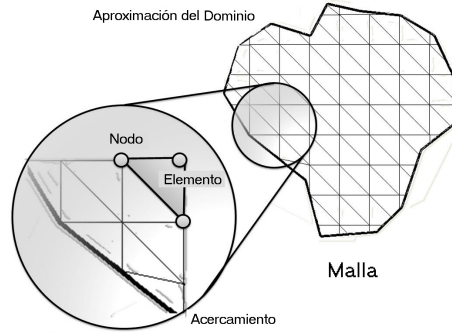


Figura 6.1: Dominio de la Malla

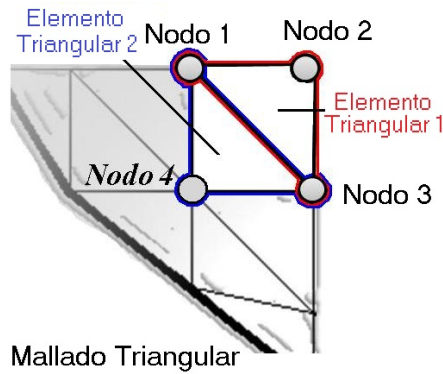


Figura 6.2: Elemento Triangular de 3 nodos

## 6.2. Descripción de la Red Neuronal Diferencial

Usando la descripción de malla, los elementos triangulares lineales y siguiendo la metodología de RND, asumimos que existe un conjunto de parametros

$$\mathring{W}_1 \in \mathfrak{R}^{n \times s_1}, \mathring{W}_2 \in \mathfrak{R}^{n \times s_2} \tag{6.3}$$

tales que

$$u_t - \int_0^t (Au(x,y,t) + [W_1^\circ]^\top \sigma(u) + [W_2^\circ]^\top \varphi(u)v(x,y,t) - \tilde{f}(x,y,t)) d\tau = 0$$

donde las funciones

$$\sigma(u) = \sigma(u(x, y, t)) \in \mathfrak{R}^{s_1}, \varphi(u) = \varphi(u(x, y, t)) \in \mathfrak{R}^{s_2}$$

obedecen las siguientes condiciones de sector:

$$\begin{aligned} \|\sigma(\tilde{v}_1(x, y, t)) - \sigma(\tilde{v}_2(x, y, t))\|^2 &\leq L_\sigma \|\tilde{v}_1(x, y, t) - \tilde{v}_2(x, y, t)\|^2 \\ \|\varphi(\tilde{v}_1(x, y, t)) - \varphi(\tilde{v}_2(x, y, t))\|^2 &\leq L_\varphi \|\tilde{v}_1(x, y, t) - \tilde{v}_2(x, y, t)\|^2 \end{aligned}$$

que están acotadas en  $U$ , i.e.,

$$\|\sigma(\cdot)\|^2 \leq \sigma^+, \quad \|\varphi(\cdot)\|^2 \leq \varphi^+,$$

Notese que, dado que se requiere de  $\partial u(x, y, t)/\partial t$  en (6.1), los pesos de la RND se seleccionan variantes en el tiempo. Por otro lado, aquí  $\sigma(u(x, y, t))$ ,  $\varphi(u(x, y, t))$ , son los vectores de activación de la RN, no un conjunto de eigenfunciones. Esto es, la propiedad de aproximación de la RND significativamente simplifica la especificación de  $\sigma(\cdot)$ ,  $\varphi(\cdot)$ . Los términos  $\tilde{f}^{i,j}(x, y, t)$ , llamados *erro de modelado* de cada RN aplicada para la aproximación de la EDP.

### 6.3. Neuro-Identificador

La ecuación que describe el neruo-identificador adaptable bajo la idea del elemeto finito es:

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = A\hat{u}(x, y, t) + W_1(t)\sigma(\hat{u}(x, y, t)) + W_2(t)\phi(\hat{u}(x, y, t))u_e(x, y, t) \quad (6.4)$$

donde  $\hat{u}(t)$  es lo mismo que  $\hat{u}(x, y, t) \in \mathfrak{R}^n$  y se considera el estado estimado de la RN,  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz Hurwitz obtenida por la selección de  $A_1, \dots, A_n$  de cada RND que describe cada elemento en el dominio de la malla.  $W_1(t)$  es la matriz de pesos para la retroalimentación del estado no lineal,  $W_2(t)$  es la matriz de pesos de ensamble que relaciona cada nodo de cada elemento con los otros, su estructura depende de la elección de la partición, (vease la figura (6.2)), y  $u_e(x, y, t)$  es un vector que contiene los estados estimados que representan los elementos. Cada elemento se forma por 3 nodos (en el caso de la partición triangular), y se representa por una RND de la forma:



Elemento 1

$$\begin{aligned} \frac{du_{e1}}{dt}(x, y, t) &:= A_1 \hat{u}_{e1}(x, y, t) + W_{1,e1}(t) \sigma_{e1}(u(x, y, t)) \\ &+ W_{2,e1}(t) \phi_{e1}(u(x, y, t)) v(x, y, t) \end{aligned}$$

Elemento 2

$$\begin{aligned} \frac{du_{e2}}{dt}(x, y, t) &:= A_2 \hat{u}_{e2}(x, y, t) + W_{1,e2}(t) \sigma_{e2}(u(x, y, t)) \\ &+ W_{2,e2}(t) \phi_{e2}(u(x, y, t)) v(x, y, t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

⋮

Elemento n

$$\begin{aligned} \frac{du_{en}}{dt}(x, y, t) &:= A_n \hat{u}_{en}(x, y, t) + W_{1,en} \sigma_{en}(u(x, y, t)) \\ &+ W_{2,en} \phi_{en}(u(x, y, t)) v(x, y, t) \end{aligned}$$

donde  $A_k \in \mathfrak{R}^-$  con  $k = 1, \dots, n$ ,  $v(x, y, t)$  es la entrada acotada,  $\hat{u}_{ek}$  es el estado estimado de el  $k$ -ésimo elemento ( $k = 1, \dots, n$ ) formado por 3 nodos através del espacio para una  $x^i$  y una  $y^j$  dadas. Las matrices variantes en el tiempo  $W_{i,ek}$  ( $i = 1, 2$ ,  $k = \overline{1, n}$ ) satisfacen las ecuaciones diferenciales matriciales

$$\begin{aligned} \dot{W}_{1,ek}(t) &= -\frac{2}{K_{11}} S_k \Delta_k(x, y, t) \sigma_{ek}(u(x, y, t))^\top \\ \dot{W}_{2,ek}(t) &= -\frac{2}{K_{22}} S_k \Delta_k(x, y, t) \phi_{ek}(u(x, y, t))^\top v(x, y, t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde  $[W_{2,ek}]_+ := W_{2,ek(i,j) \in F=0}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $\sigma_{ek}(u(x, y, t))$  y  $\phi_{ek}(u(x, y, t))$  son vectores de activación sigmoidales de la RND,  $\Delta_k = \hat{u}_{ek}(x, y, t) - u_k(x, y, t)$ , para esta clase especial de RND usada en la estimación de elementos en una malla, es necesario dar una estructura donde la interrelación entre los nodos en un elemento pueda ser especificada, en este caso la matriz  $\Phi_{ek}(u(x, y, t))$  tendrá la siguiente forma:

$$\Phi_{ek}(u(x, y, t)) = \begin{bmatrix} \phi_{e1}^1 & \phi_{e1}^2 & 0 & 0 & \phi_{e1}^3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_{e2}^1 & 0 & 0 & \phi_{e2}^2 & \phi_{e2}^3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \phi_{ek}^1 & 0 & 0 & \phi_{ek}^2 & \phi_{ek}^3 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$S_k$  es una solución definida positiva ( $S_k > 0$ ) de la clase especial de ecuación algebraica de Riccati dada por

$$S^i A + A^T S^i + S^i R S^i + Q_S^i = 0 \quad (6.8)$$

tiene solución positiva si y sólo si las cuatro condiciones dadas en [78] se cumplen.

**Teorema 6.1.** *Sea un sistema no lineal que puede ser descrito en EDP, desconocido y perturbado en el estado (6.1) con condiciones a la frontera de tipo Dirichlet y Neuman definidas en (6.2), se considera que se tiene acceso a mediciones discretas de puntos repartidos sobre el dominio. Dichos puntos se definen como el vector de entrada  $v(x, y, t)$  que representa los nodos. Además, supongase la estructura del identificador adaptable no paramétrico (6.5) para cada elemento de la partición del dominio, el número de elementos se defirá de acuerdo al número de nodos disponibles. Los parámetros del identificador para cada elemento se ajustan como la ley adaptable dada en (6.6). Si existe una matriz  $Q_S^i$  definida positiva tal que la ecuación de Riccati (6.8) tiene solución definida positiva  $S^i$  y asumiendo que (6.12) se cumplen para el vector  $v(x, y, t)$ , entonces el error de identificación  $\Delta_e(x, y, t)$  satisface lo siguiente*

$$\limsup \int_0^T \Delta_e^T(x, y, t) Q_0 \Delta_e(x, y, t) dt \leq \bar{\eta} \quad (6.9)$$

*Demostración.* La prueba general se presenta en el apéndice y puede seguirse a detalle en [78].

□

### 6.3.1. Estructura del Neuro-Identificador para Sistemas Distribuidos

El montaje de las redes neuronales de estimación de los elementos (ENN) en el sistema basado en el numero de nodos se traduce en una segunda *matriz de pesos* que relaciona la posición de un elemento con el otro, donde la entrada para la red completa será el vector con la

estimación hecha anteriormente para cada elemento:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}(x,y,t)}{dt} = & \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix} \hat{u}(x,y,t) + \begin{bmatrix} W_{1,e1}(t) \\ W_{1,e2}(t) \\ \vdots \\ W_{1,ek}(t) \end{bmatrix} \sigma(u(x,y,t)) \\ + & \begin{bmatrix} 0 & W_2^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & W_2^2 \\ W_2^3 & 0 & W_2^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_2^{k-2} \\ W_2^{k-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_2^k & 0 \end{bmatrix} \phi(u(x,y,t))u_e \end{aligned}$$

La forma general de esta RND con el ensamble de elementos esta dado en (6.4) donde  $A \in \mathfrak{R}^-$  y donde la matriz variante en tiempo  $W_1 \in \mathfrak{R}^{s_1}$  es la matriz para la retroalimentación del estado estimado y  $W_2 \in \mathfrak{R}^{s_2}$  es la matriz de entrada, y  $\hat{u}(x,y,t)$  es el estimado de  $u(x,y,t)$ . Satisfacen las ecuaciones diferenciales matriciales

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(t) &= -\frac{2}{K_1} \Delta(x,y,t) P^i \sigma^\top(\hat{u}_i) \\ \dot{W}_2(t) &= -\frac{2}{K_2} \Delta(x,y,t) P^i \phi^\top(\hat{u}_i) \hat{u}_e(x,y,t) \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$[W_2]_+ := W_{2(i,j) \in F=0}$$

con  $P^i$  ( $i = \overline{3, N}$ ) es la solución definida positiva ( $P^i > 0$ ) de la ecuación algebraica de Riccati dada por

$$P^i A^i + [A^i]^\top P^i + P^i R P^i + Q_P^i = 0 \quad (6.11)$$

La *Clase especial* de ecuación de Riccati ( $PA + A^\top P + PRP + Q = 0$ ) tiene solución positiva si las condiciones dadas en el capítulo 1 se cumplen.

La función  $u_e(x,y,t)$  se selecciona como:

$$\|u_e(x,y,t)\|^2 \leq \bar{u} \quad (6.12)$$

Existen dos posibilidades para satisfacer esta condición:

- $u_e$  se considera acotada
- Usar acciones de control acotadas  $\{u_t\}$  ( $\|u_t\| \leq u^+ < \infty$ ) y asumir que la no linealidad  $u_e(x,y,t)$  es continua.

*Establecimiento del Problema Bajo el sistema no lineal con una adecuada selección de matrices  $A_i$  y con la estructura de identificador neuronal (6.4) suministrado con la ley de ajuste (6.10) (incluyendo la selección de  $W_i^o$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), the upper bound for the estimation error  $\beta$  definida como*

$$\beta := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\hat{u}(x, y, t) - u(x, y, t)\|_S^2 \quad (6.13)$$

$P > 0$ ,  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Debe ser obtenida, y de ser posible, reducir a su minimo valor posible, usando alguno de los parámetros libres que participan en la estructura de la RN.

El resultado principal descrito en este capitulo esta dado por el siguiente teorema:

**Teorema 6.2.** *Basados en el teorema anterior (Teorema 1) y su prueba, dónde se ha demostrado que el error de identificación para cada elemento converge a una zona acotada, se supondrá la estructura de ensamble del identificador no parametrico adaptable (6.4) cuyos parámetros son ajustados como la ley de ajuste dada en (6.10). Si existe una matriz  $Q^i$  definida positiva tal que la clase especial de ecuación de Riccati (6.11) tiene solución definida positiva  $P^i$  y asumiendo que (6.12), entonces el error de identificación  $\Delta(x, y, t)$  satisface lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Delta(x, y, t)\| &\leq N \max(\|\Delta_e\|) \Omega(e^i) \\ \Omega(e^i) &= f^i(x^i + r_1(x, y) \cos \theta, y^i + r_2(x, y) \sin \theta) \\ \sum_i \Omega^i &= \Omega \end{aligned} \quad (6.14)$$

*Demostración.* La prueba detallada se escribe a continuación: Basado en el primer teorema, descrito arriba, donde se ha probado que el error de identificación de cada nodo ( $\Delta_e(x, y, t)$ ) está acotado y converge, y como el estado estimado del dominio completo con cada elemento ensamblado puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \hat{u}_T(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N \hat{u}_e \Omega(e^i) \\ \Delta(x, y, t) &= u(x, y, t) - \hat{u}(x, y, t) \\ \Delta(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N u_e(x, y, t) \Omega(e^i) - \sum_{i=1}^N \hat{u}_e(x, y, t) \Omega(e^i) \\ \Delta(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N (u_e(x, y, t) - \hat{u}_e(x, y, t)) \Omega(e^i) \\ \Delta(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N \Delta_e(x, y, t) \Omega(e^i) \\ \Delta(x, y, t) &\leq N \max(\Delta_e \leq \mu) \Omega(e^i) \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde  $\mu$  se define como  $\mu = \frac{\eta}{\min(S^{-1/2}Q_0S^{-1/2})}$  como en la prueba del Teorema 1. De esta forma, si  $\Delta_e(x, y, t)$  esta acotada, entonces  $\Delta(x, y, t)$  esta acotada también.

□

## 6.4. Conclusiones del Capítulo

La aproximación sugerida resuelve el problema de la identificación no paramétrica de sistemas lineales inciertos descritos en EPD de 2D. El diseño de la estructura de la red neuronal empleada se basó en el principio del método de elemento finito, donde el área de cada elemento que conforma el mallado es estimado mediante una red neuronal que relaciona los nodos en el mallado, para después, mediante una red neuronal de ensamble, cada elemento se relacione con el otro de acuerdo a una partición bien definida para estimar la solución completa de la EDP. La convergencia asintótica del error de identificación se demuestra tanto para cada red de estimación de elementos como para la red general de construcción de la solución, se aplicó un análisis tipo Lyapunov usando una clase especial de funcional de Lyapunov. Además, el mismo análisis permite la generación de las correspondientes condiciones para la cota superior de los pesos envueltos en los pesos contenidos en la estructura del identificador.

---

# Observador Neuronal basado en la Técnica de "Backstepping" para EDP

---

Este capítulo presenta el diseño de un Observador para sistemas inciertos de parámetros desconocidos descritos por EDP usando una combinación de la Técnica de Backstepping y la metodología de Redes Neuronales Diferenciales. Una transformación tipo Volterra es utilizada para cambiar las coordenadas de la dinámica del error en un sistema objetivo exponencialmente estable. Esto da como resultado la función de inyección (o ganancia) del observador, que será obtenida resolviendo el sistema de EDP. La RND es usada para encontrar una solución explícita al sistema de EDP y hacer que la ganancia del observador sea discontinua, lo que le da mayores ventajas. Los resultados son probados usando el método de Lyapunov.

## 7.1. Observadores para EDP

En el contexto del control, los sistemas gobernados por EDP y más recientemente por desigualdades variacionales son áreas activas de investigación [63], no mucho se ha hecho en el desarrollo de observadores. En [60], se presenta el diseño de un observador para EDP parabólicas lineales que envuelve una transformación lineal de Volterra en la que se busca que el error del observador sea transformado a un sistema exponencialmente estable. Si el *kernel* (núcleo de la transformación), es causal, la función de inyección de la salida del error en la estructura del observador propuesto estarán dadas y dependerán de este kernel. Algunas aplicaciones presentadas para este observador pueden ser encontradas en [59], [54]. En [73], se describe como un observador de estado infinito-dimensional tipo Luenberger, que usa un número finito de medi-

das, se contruye para proveer estimaciones del estado del sistema. Esto toma ventaja del método de backstepping para EDP y la teoría de RND para sistemas infinito dimensionales.

### 7.1.1. Teoría de "Backstepping" para EDP

La metodología de *Backstepping* fue desarrollada para estabilizar sistemas dinámicos, ha sido particularmente exitosa en el área de control no lineal, [61]. La idea básica de la técnica de backstepping para sistemas infinito-dimensionales fue desarrollada en [11], donde las propiedades de estabilidad de una clase de ecuaciones diferenciales LTV en un espacio de estados infinito dimensional son estudiadas. Estas ecuaciones diferenciales LTV se obtienen a partir de la discretización del sistema original (que se quiere transformar), el "sistema objetivo"(en el que el sistema original será transformado) y la transformación que resulta en relaciones recursivas tipo backstepping. La estabilización de los sistemas originales se garantiza si el kernel de la transformación es causal. La extensión de esta área en el sistema gobernado por la EDP para la estimación de estados fue propuesta por [60]. La causalidad de la transformación tipo backstepping, aplicada al error del sistema lleva a un sistema objetivo exponencialmente estable, es necesario obtener las funciones de inyección de salida del observador propuesto.

### 7.1.2. Redes Neuronales Diferenciales

Se ha dado especial atención a los neuro-observadores que proveen las estimaciones de estado para sistemas dinámicos inciertos con información reducida y bajo los efectos de perturbaciones externas. En contraste con muchos diseños de observadores que requieren la descripción del sistema matemático (el método algebraico de Lie [57], observadores tipo Lyapunov, observadores de alta ganancia [36], observadores basados en optimización [62], observadores no lineales de orden reducido [76] y otros), las redes neuronales de base son eficientes para lidiar con una gran clase de sistemas no lineales que no poseen un modelo "bien" definido. Los observadores basados en RND son estudiados por [78]. La extensión de este método para sistemas de parámetros distribuidos, más específicamente, dentro de los sistemas modelados por EDP han sido recientemente investigados [73]. Sin embargo, la convergencia en tiempo finito, bajo algunas consideraciones, es sólo posible en plantas cuya dinámica puede ser representada por EDP's si algunas mediciones pueden hacerse en el espacio completo para todo el tiempo. En casos donde la toma de medidas es sólo posible en la frontera, se espera, máximo, convergencia finita en tiempo sólo en el punto de medida. Sin embargo se tiene convergencia exponencial en

el resto del espacio.

## 7.2. Clase de EDP

Considérese la siguiente clase de EDP parabólicas:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= f(u_{xx}(x,t), u_x(x,t), u(x,t)) \\ y(x,t) &= Cu(x,t) \end{aligned} \quad (7.1)$$

donde

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &:= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \\ u_x(x,t) &:= \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad u_{xx}(x,t) := \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

El dominio de la EDP es  $x \in [0, 1], t > 0$ , con condiciones a la frontera:

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= 0 \\ u(0,t) = u_0, u(x,0) &= c, c \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Sea  $f(x,t)$  una función continua a pedazos en  $t$ . Supóngase que la función no lineal incierta  $f(x,t)$  satisface la condición de Lipschitz  $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in B := x \in \mathfrak{R}^n, \|x - x_0\| \leq r, \forall t \in [t_0, t_1]$ , donde  $L$  es constante y  $\|f\|^2 = (f, f)$  sólo para asegurar que existe alguna  $\delta > 0$  tal que la ecuación de estado  $\dot{x} = f(x,t)$  con  $x(t_0) = x_0$  tiene solución única sobre  $[t_0, t_0 + \delta]$  [65]. La norma está dada en el espacio de Sobolev.

Siguiendo la metodología de las RND, asumimos que existe un conjunto de parámetros

$$\lambda_1^{i,*} \in \mathfrak{R}^{s_1}, \lambda_2^{i,*} \in \mathfrak{R}^{s_2}, \lambda_3^{i,*} \in \mathfrak{R}^{s_3} \quad (7.4)$$

tal que

$$u_t(x,t) = Au(x,t) + \lambda_1^{i,*} u(x,t) + \lambda_2^{i,*} u_x(x,t) + \lambda_3^{i,*} u_{xx}(x,t) + \tilde{f}_1(x,t) \quad (7.5)$$

donde las funciones  $\lambda_k^{i,*}$ , con  $(k = 1, 2, 3)$  pueden seleccionarse como  $W_k^{i,o} \sigma_k(u(x,t))$ ,  $(k = 1, 2, 3)$ , donde  $W_k^{i,o}$  representa los pesos de la RND, y se seleccionan como variantes en el tiempo, y las funciones  $\sigma_k(u(x,t))$  son vectores de activación. Los términos  $\tilde{f}$ , llamados errores de modelado de cada RN están acotados.



### 7.3. Diseño del Observador Neuronal

El observador diseñado se encuentra en la configuración anti-colocado acorde con [60] y satisface la siguiente EDP parabólica

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(x,t) &= A\hat{u}(x,t) + \lambda_{1,t}^1 \hat{u}(x,t) + \lambda_{2,t} \hat{u}_x(x,t) + \lambda_{3,t} \hat{u}_{xx}(x,t) + K_0(x)\Delta(0,t) \\ \hat{y} &= C\hat{u}(x,t) \\ \Delta(0,t) &:= u(0,t) - \hat{u}(0,t)\end{aligned}\tag{7.6}$$

donde  $A \in \mathfrak{R}^-$  y  $\hat{u}(x,t)$  es el estimado de  $u(x,t)$ , las funciones  $\lambda_{k,t}$ , ( $k = \overline{1,3}$ ) pueden seleccionarse como  $W_{k,t}^i \sigma_k(\hat{u}(x,t))$ , ( $k = 1, 2, 3$ ), se supone que es posible tener información sobre  $\hat{u}(0,t)$ .

Los pesos obedecen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\lambda}_{1,t}}{dt} &= -\frac{2}{K_1} \sum_{i=1}^N PNC^T e_t \hat{u}(x,t) + \frac{1}{2} \delta P N \Lambda_4 N^T P \lambda_{1,t} \hat{u}(x,t) \\ &+ \sum_{i=1}^N SNC^T \nabla_x e_t \hat{u}_x(x,t) + \frac{1}{2} \delta S N \Lambda_{10} N^T S \hat{u}_x(x,t) + \hat{u}^T(x,t) T \hat{u}(x,t) + \alpha_i K(x) \tilde{\lambda}_{1,t} \\ \frac{d\tilde{\lambda}_{2,t}}{dt} &= -\frac{2}{K_2} \sum_{i=1}^N PNC^T e_t \hat{u}_x(x,t) + \frac{1}{2} \delta P N \Lambda_5 N^T P \lambda_{2,t} \hat{u}_x(x,t) \\ &+ \sum_{i=1}^N SNC^T \nabla_x e_t \hat{u}_{xx}(x,t) + \frac{1}{2} \delta S N \Lambda_{11} N^T S \hat{u}_{xx}(x,t) + \hat{u}^T(x,t) T \hat{u}_x(x,t) + \alpha_i K(x) \tilde{\lambda}_{2,t} \\ \frac{d\tilde{\lambda}_{3,t}}{dt} &= -\frac{2}{K_3} \sum_{i=1}^N PNC^T e_t \hat{u}_{xx}(x,t) + \frac{1}{2} \delta P N \Lambda_6 N^T P \lambda_{3,t} \hat{u}_{xx}(x,t) \\ &+ \sum_{i=1}^N SNC^T \nabla_x e_t \hat{u}_{xxx}(x,t) + \frac{1}{2} \delta S N \Lambda_{12} N^T S \hat{u}_{xxx}(x,t) + \hat{u}^T(x,t) T \hat{u}_{xx}(x,t) + \alpha_i K(x) \tilde{\lambda}_{3,t}\end{aligned}\tag{7.7}$$

donde  $e_t = C\Delta$  y en este caso, tenemos  $\Delta = N(C^T C + \delta\Delta)$  con  $N^{-1} = C^T C + \delta I$ . Se supone que existen  $P, S$  y  $T$  definidas positivas tales que, hay solución para las siguiente *clase especial* de ecuaciones de Riccati:

$$\begin{aligned}P\bar{A} + \bar{A}^T P + P R_1 P + Q_1 &= 0 \\ S\bar{A} + \bar{A}^T S + S R_2 S + Q_2 &= 0 \\ T\bar{A} + \bar{A}^T T + T R_3 T &= -Q_3 \\ \bar{A} &= A + \lambda_1^*, \\ R_1 &= \lambda_2^* \Lambda_1 \lambda_2^* + \lambda_3^* \Lambda_2 \lambda_3^*, \\ Q_1 &= \Lambda_4^{-1} + \Lambda_5^{-1} + \Lambda_6^{-1} \\ R_2 &= \lambda_2^* \Lambda_7 \lambda_2^* + \lambda_3^* \Lambda_8 \lambda_3^*, \\ Q_1 &= \Lambda_2^{-1} + \Lambda_{10}^{-1} + \Lambda_{11}^{-1} + \Lambda_{12}^{-1} \\ R_2 &= \lambda_2^* \Lambda_{13} \lambda_2^* + \lambda_3^* \Lambda_{14} \lambda_3^*,\end{aligned}\tag{7.8}$$

La función de inyección del error de salida  $K_0(x)$  debe ser diseñada usando el procedimiento de backstepping propuesto por [60]. Siguiendo la metodología mencionada, la función de in-

yección de salida se aplica en la frontera así como en el dominio espacial completo ( $\forall x \in [0, 1]$ ).

El error de observación se define como sigue:

$$\Delta(x, t) := u(x, t) - \hat{u}(x, t) \quad (7.9)$$

y su dinámica satisface la siguiente EDP parabólica

$$\Delta_t(x, t) = \lambda_{1,t}^- \Delta - \lambda_{2,t}^- \Delta_x - \lambda_{3,t}^- \Delta_{xx} + \lambda_{1,t}^- u + \lambda_{2,t}^- u_x + \lambda_{3,t}^- u_{xx} + \tilde{f}_1(x, t) - K_0(x) \Delta(0, t)$$

donde  $\lambda_1^* = A + \lambda^{i,*}$ ,  $\lambda_{1,t} = A + \lambda_{1,t}^1$  y  $\lambda_{i,t}^- = \lambda_i^* - \lambda_{i,t}$ , con ( $i = 1, 2, 3$ ). La matriz de ganancia  $K_0$  debe seleccionarse para estabilizar la dinámica del error (7.10). El problema debe ser resuelto usando la técnica de backstepping descrita en ([60]), ([59]) y ([54]). Este método usa una transformación integral, esto es, una transformación coordenada tipo backstepping

$$\omega(x, t) = \hat{u}(x, t) - \int_0^x k(x, y) \hat{u}(y, t) dy \quad (7.10)$$

Se busca que la aplicación esta transformación (7.10) haga que el error del sistema (7.10) sea transformado en un sistema exponencialmente estable, al que llamaremos sistema objetivo:

$$\omega_t(x, t) = \omega_{xx}(x, t) + g(t) \quad (7.11)$$

Es sencillo probar que el sistema objetivo (7.11) es exponencialmente estable dado que existe una función de Lyapunov que demuestra, bajo las consideraciones dadas antes, que (7.11) converge exponencialmente a  $\omega = 0$  para cada  $x$  y para cada condición inicial. Esta función de Lyapunov se seleccionó como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 [\omega^2(x, t)] dx \quad (7.12)$$

Por lo tanto, el principal resultado con respecto al observador anti-colocado está descrito por el siguiente teorema:

**Teorema 7.1.** *Sea el sistema de la forma (7.1) con las condiciones iniciales y a la frontera dadas por (7.3). Sea el observador diseñado (7.6). Entonces la dinámica del error está dada por (7.10). La transformación integral mostrada en (7.10) transforma la dinámica del error en un sistema exponencialmente estable descrito en (7.11) que asegura que el observador (7.6) converge exponencialmente al sistema (7.1)*

La prueba de este teorema se muestra en la siguiente sección.

## 7.4. Transformación Directa. Prueba del Teorema

Sea el sistema objetivo (7.11) y la transformación integral (7.10). Diferenciando (7.10) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\omega_t(x,t) = \hat{u}_t(x,t) - \int_0^x k(x,y)\hat{u}_t(y,t)dy \quad (7.13)$$

sustituyenco  $\hat{u}_t(x,t)$  se tiene

$$\begin{aligned} \omega_t(x,t) &= \hat{u}_t(x,t) - \int_x^0 k(x,y)\hat{u}_t(y,t)dy \\ \omega_t(x,t) &= A\hat{u}(x,t) + \lambda_{1,t}^1\hat{u}(x,t) + \lambda_{2,t}\hat{u}_x(x,t) + \lambda_{3,t}\hat{u}_{xx}(x,t) + K_0(x,t)\Delta(0,t) \\ &- \int_0^x k(x,y) \left[ A\hat{u}(y,t) + \lambda_{1,t}^1\hat{u}(y,t) + \lambda_{2,t}\hat{u}_x(y,t) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{3,t}\hat{u}_{xx}(y,t) + K_0(y,t)\Delta(0,t) \right] dy \end{aligned} \quad (7.14)$$

Ahora, diferenciando dos veces con respecto a  $x$ ,

$$\begin{aligned} \omega_{xx}(x,t) &= \hat{u}_{xx}(x,t) - k_x(x,x)\hat{u}(x,t) + k(x,x)\hat{u}_x(x,t) \\ &+ k_x(x,0)\hat{u}(0,t) + k_x(x,0)\hat{u}(0,t) + k_y(x,x)\hat{u}(x,t) \\ &- \int_0^x k_{xx}(x,y)\hat{u}(y,t)dy - \int_0^x k_{yy}(x,y)\hat{u}(y,t)dy \\ A + \lambda_{1,t} + k_x(x,x)g(t) - k_y(x,x)g(t) &= 0 \\ \lambda_{2,t} - k(x,x)g(t) &= 0 \\ \lambda_{3,t} - g(t) &= 0 \\ K_0(x,t)u(0,t) &= 0 \\ Ak(x,y) + \lambda_{1,t} + k_y(x,x) \\ -g(t)k_{xx}(x,y) - g(t)k_{yy}(x,y) &= 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

La dinámica del kernel se describe en (7.15) y la función de inyección de salida son:

$$K_0(x,t) = -2g(t)k_x(x,0) \quad (7.16)$$

Las últimas condiciones son parte de una EDP bien posicionada que pueden resolverse explícitamente.

En orden de completar la prueba, el siguiente teorema es necesario.

**Teorema 2** *Sea el sistema objetivo (7.11). Sea la dinámica del error descrita por (7.10). Si existe una nueva transformación integral envolviendo una nueva dinámica del kernel que puede transformarse al sistema objetivo (7.11) en la dinámica del error (7.10) y si la dinámica*

del nuevo kernel están bien definidas, entonces la transformación integral (7.10) se dice causal y es posible aplicarla dentro del diseño del observador (7.6).

La prueba de este Teorema se muestra en la siguiente sección.

## 7.5. Prueba de Causalidad. Transformación Inversa

Con el fin de completar el diseño del observador, es necesario establecer que el sistema objetivo (7.11) implica la estabilidad del sistema 7.6 con (7.10). En otras palabras se considera que la transformación integral (7.10) es invertible. Para asegurar esto, se propone una nueva transformación integral:

$$\hat{u}(x,t) = \omega(x,t) + \int_0^x L(x,y)\omega(y,t)dy \quad (7.17)$$

donde  $L(x,y)$  es el kernel de esta nueva transformación, los procesos que se llevan a cabo para obtener esta nueva transformación depende del uso del error del sistema original (7.10) y el sistema objetivo (7.11). Diferenciando (7.17) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\hat{u}_t(x,t) = \omega_t(x,t) + \int_0^x L(x,y)\omega_t(y,t)dy \quad (7.18)$$

Usando  $\omega_t(x,t) = g(t)\omega_{xx}(x,t)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(x,t) &= g(t)\omega_{xx}(x,t) + L(x,x)g(t)\omega_x(x,t) \\ &\quad - L(x,0)g(t)\omega_x(0,t) - L_y(x,x)g(t)\omega(x,t) \\ &\quad + g(t)\int_0^x L_{yy}(x,y)\omega(y,t)dy \end{aligned} \quad (7.19)$$

con las condiciones a la frontera seleccionadas como

$$\omega_x(0,t) = 0 \quad (7.20)$$

Siguiendo con (7.17), y diferenciando con respecto a  $x$  dos veces se tiene

$$\begin{aligned} \hat{u}_x(x,t) &= \omega_x(x,t) + L(x,x)\omega(x,t) - L(x,0)\omega(0,t) + \int_0^x L_y(x,y)\omega(y,t)dy \\ \hat{u}_{xx}(x,t) &= \omega_{xx}(x,t) + L(x,x)g(t)\omega_x(x,t) + L_x(x,x)g(t)\omega(x,t) + L_x(x,x)g(t)\omega(x,t) \\ &\quad + \int_0^x L_{xx}(x,y)g(t)\omega(y,t)dy \end{aligned} \quad (7.21)$$

Para concluir con esta prueba, se ha llegado a un sistema de ecuaciones que dan las condiciones que deben satisfacerse para completar la prueba de causalidad:

$$\begin{aligned}
 L(x, x) &= \frac{\bar{\lambda}_2(t)}{g(t) - \bar{\lambda}_3(t)} \\
 \bar{\lambda}_3(t) &= g(t) \\
 L(x, 0) &= 0 \\
 -g(t)L_y(x, x) - 2\bar{\lambda}_3(t)L_x(x, x) &= \bar{\lambda}_2(t)L(x, x) \\
 g(t)L_{yy}(x, y) + L_{xx}(x, y) &= (A + \bar{\lambda}_1)L(x, y) + \bar{\lambda}_2(t)L_y(x, y)
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

El kernel de la transformación inversa  $L(x, t)$ , satisface la EDP hiperbólica descrita en (7.22) y con esto es posible probar que la transformación inversa existe.

## 7.6. Conclusiones del Capítulo

Este capítulo presenta el diseño de un observador para una clase de EDP parabólica usando la teoría de RND y el procedimiento tipo backstepping obteniendo la convergencia exponencial en cada  $x$  excepto en  $x = 0$  donde se alcanzó la convergencia en tiempo finito. Una transformación integral de Volterra se usó para cambiar las coordenadas de la dinámica del error a un sistema objetivo exponencialmente estable. Las funciones de corrección en la estructura del observador se obtienen resolviendo el kernel modelado por una EDP hiperbólica. La prueba de causalidad de la transformación se probó verificando la existencia de invertibilidad que depende de la existencia de la solución de otro kernel. La estabilidad se demostró usando el método de Lyapunov.

---

# 8

## Control basado en Redes Neuronales Diferenciales para EDP

---

En este capítulo se ataca el problema de seguimiento de trayectorias para una clase de sistemas de parametros distribuidos inciertos descritos en ecuaciones diferenciales parciales. Se sugiere un nuevo neurocontrolador para resolver el problema. Se aplica un control de tipo distribuido dado que se considera que puede aplicarse a una vecindad de puntos medibles en el dominio del sistema que coinciden con la malla que se construye utilizando el método de diferencias finitas. El diseño de este controlador incluye la aproximación de las trayectorias del sistema usando redes neuronales diferenciales, se considera también la medición de las distancias entre los puntos distribuidos que son medibles y en los cuales puede aplicarse el control, esto es debido a que necesitamos caracterizar la influencia que tendrá cada punto sobre el otro dado que el método numérico empleado permite determinar la distancia entre los diversos puntos de la malla, este tipo de control es denominado "In-Domain". Un ejemplo ilustrativo presenta el seguimiento de una trayectoria de referencia y la identificación del sistema controlado.

### 8.1. Clase de sistema de parametros distruibuidos inciertos

Considérese la siguiente ecuación diferencial parcial incierta:

$$\dot{u}(x,t) = f(u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), t) + g(u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), t)v(x,t) \quad (8.1)$$

con condiciones iniciales y a la frontera de tipo Dirichlet y Neumann. Donde  $u(x,t) \in \mathfrak{R}^n$  representa el estado del sistema, definido en un dominio dado por  $[x,t] \in [0, 1], t \geq 0$ ,  $g(\cdot)$  es la

función asociada al control y  $v(\cdot) \in \mathfrak{R}^m$  representa la acción de control. Supóngase que  $f(\gamma, t)$  es una función no lineal, continua a pedazos que satisface la condición de Lipschitz (uniformemente sobre  $t$ )

$$\|f(\gamma, t) - f(\eta, t)\| \leq L \|\gamma - \eta\|$$

$$\forall \gamma, \eta \in B_r(\gamma_0) := \{\gamma \in \mathfrak{R}^n \mid \|\gamma - \gamma_0\| \leq r, \forall t \in [t_0, t_1]\}$$

donde  $L$  es una constante positiva y  $\|f\|^2 = (f, f)$  es utilizada sólo para asegurar que existe alguna  $\lambda > 0$  tal que la ecuación de estado  $\dot{\gamma} = f(\gamma, t)$  con  $\gamma(t_0) = \gamma_0$  tiene única solución sobre  $[t_0, t_0 + \lambda]$  (veáse [65]). La norma está definida en el espacio de Sobolev [1] para el caso en el que  $p = 2$ .

Es así que, bajo la proposición de un control para EDP, se busca llevar las trayectorias de  $u(x, t)$  hacia una dinámica de referencia  $u^{ref}(x, t)$  de tal forma que

$$\|u(x, t) - u^{ref}(x, t)\| \rightarrow 0$$

Dado que el sistema es incierto o parcialmente conocido, es necesario definir la diferencia entre la dinámica seguida por el sistema y la dinámica de referencia a partir de su estimado

$$\|u(x, t) - u^{ref}(x, t)\| = \|u(x, t) - \hat{u}(x, t) + \hat{u}(x, t) - u^{ref}(x, t)\|$$

donde  $u(x, t)$  es la solución del sistema,  $\hat{u}(x, t)$  es una aproximación del sistema incierto. Este estimado será realizado bajo la metodología de RND,  $u^{ref}(x, t)$  es la trayectoria de referencia.

De esta forma y basándonos en la desigualdad del triángulo, el error puede reescribirse en dos partes.

$$\|u(x, t) - u^{ref}(x, t)\| \leq \|u(x, t) - \hat{u}(x, t)\| + \|\hat{u}(x, t) - u^{ref}(x, t)\|$$

Se tiene entonces el error de identificación  $\Delta$ , que se define como la diferencia entre la salida de la neuroidentificación y el sistema:

$$\Delta = \|u(x, t) - \hat{u}(x, t)\| \rightarrow 0$$

y el error de seguimiento  $\delta$  que se define como la diferencia entre la salida de la neuroidentificación y la referencia

$$\delta = \|\hat{u}(x, t) - u^{ref}(x, t)\| \rightarrow 0$$

Las secciones siguientes se expondrá la metodología seguida para la resolución de ambos problemas de seguimiento de trayectorias.

## 8.2. Identificación de Sistemas de Parámetros Distribuidos usando Redes Neuronales Diferenciales

Nótese que el sistema (8.1) puede ser descrito como:

$$\dot{u}(x,t) = f_0(u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), v(x,t), t\Theta) + \tilde{f}_t$$

donde  $f_0(\cdot)$  será tratado como la "dinámica nominal" que puede seleccionarse acorde a los requerimientos del diseño de control, y  $\tilde{f}_t = f(u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), v(x,t), t) - f_0(u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), v(x,t), t\Theta) + \eta_{1,t}$  es la "dinámica no modelada". Aquí  $\Theta$  es el vector de parámetros sujeto a ajuste.

Es así que se propone una red de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{u}(x,t) = & Au(x,t) + W_1^\circ \sigma(u(x,t)) + W_2^\circ \phi(u(x,t))u_x(x,t) \\ & + W_3^\circ \gamma(u(x,t))u_{xx}(x,t) + W_4^\circ \gamma_2(\hat{u}(x,t))v(x,t) + \tilde{f}(x,t) \end{aligned} \quad (8.2)$$

La idea principal detrás de la aplicación de las Redes Neuronales Diferenciales para aproximar la solución de las Ecuaciones Diferenciales Parciales es usar una clase de Método de Diferencias Finitas pero, para funciones inciertas no lineales. Así es necesario construir un conjunto (llamado malla) que divide el subdominio  $x \in [0, 1]$  en  $N$  secciones equidistantes definidas como  $(x^i)$  de forma que  $x^0 = 0$  y  $x^N = 1$ . Usando esta descripción de la malla, se puede utilizar la siguiente definición:

$$\begin{aligned} u^i &= u(x^i, t) \\ u_t^i &= \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{x=x^i}, u_x^i = \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x^i} \end{aligned}$$

Usando la descripción de la malla y aplicando la representación del método de Diferencias Finitas (MDF) se tiene:

$$u_x^i(t) \simeq \frac{u^i(t) - u^{i-1}(t)}{\Delta x}, u_{xx}^i(t) \simeq \frac{u_x^i(t) - u_x^{i-1}(t)}{\Delta x}$$

Siguiendo la metodología de las redes neuronales diferenciales y el MDF, la ecuación (8.2) puede reescribirse como

$$\dot{u}_i = Au_i + W_1^\circ \sigma(u_i) + W_2^\circ \phi(u_i)u_{i-1} + W_3^\circ \gamma(u_i)u_{i-2} + W_4^\circ \gamma_2(\hat{u}_i)v_i + \tilde{f}^i$$

donde  $A$  es una matriz Hurwitz,  $W_r^\circ$  con  $r = \overline{1,4}$  son los pesos de la red neuronal,  $v$  es la acción de control,  $\tilde{f}(x,t)$  es el error de modelado y  $\sigma, \phi, \gamma$  son las funciones de activación



de la red. Bajo las bien conocidas características de las redes neuronales diferenciales, se sabe que 8.2, puede aproximar al sistema considerando siempre un error que se presenta en la reproducción de la función original.

### 8.3. Red Neuronal Diferencial para EDP

Para obtener el estimado del sistema incierto, se ha propuesto la utilización de una RND que obedece la siguiente estructura:

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_i = A\hat{u}_i + W_1^i\sigma(\hat{u}_i) + W_2^i\phi(\hat{u}_i)\hat{u}_{i-1} + W_3^i\gamma(\hat{u}_i)\hat{u}_{i-2} + W_4^i\gamma_2(\hat{u}_i)v_i \quad (8.3)$$

aquí  $\hat{u}$  es el estimado de  $u$ ,  $W_r$  con  $r = 1, 4$  son los pesos que siguen la dinámica en 8.4:

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(t) = & -\frac{2}{K_1}\sum_{i=1}^N P_1\Delta(x,t)\sigma(\hat{u}_i(x,t)) + P_2\Delta_x(x,t)\nabla_x\sigma(\hat{u}_i) \\ & + P_3\hat{u}_i\sigma(\hat{u}_i(x,t)) + P_4\delta_i(x,t)\sigma'(\hat{u}_i(x,t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_2(t) = & -\frac{2}{K_2}\sum_{i=1}^N P_1\Delta(x,t)\phi(\hat{u}_i(x,t))\hat{u}_{i-1} + P_2\Delta_x(x,t)\nabla_x\phi(\hat{u}_i)\hat{u}_{i-1}(x,t) \\ & + P_3\hat{u}_i\phi(\hat{u}_i(x,t))\hat{u}_{i-1} + P_4\delta_i(x,t)\phi'(\hat{u}_i(x,t))\tilde{u}_{i-1} \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_3(t) = & -\frac{2}{K_3}\sum_{i=1}^N P_1\Delta(x,t)\gamma(\hat{u}_i(x,t))\hat{u}_{i-2} + P_2\Delta_x(x,t)\nabla_x\gamma(\hat{u}_i)\hat{u}_{i-2} \\ & + P_3\hat{u}_i\gamma(\hat{u}_i(x,t))\hat{u}_{i-2} + P_4\delta_i(x,t)\gamma'(\hat{u}_i(x,t))\tilde{u}_{i-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_4(t) = & -\frac{2}{K_4}\sum_{i=1}^N P_1\Delta(x,t)\gamma_2(\hat{u}_i(x,t))v_i + P_2\Delta_x(x,t)\nabla_x\gamma_2(\hat{u}_i)v_i \\ & + P_3\hat{u}_i\gamma_2(\hat{u}_i(x,t))v_i \end{aligned}$$

de 8.4 se tiene que  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  satisfacen las siguientes ecuaciones de Riccati:

$$P_1A + A^T P_1 + P_1\Lambda_{P_1}P_1 + \lambda_{\max}\left([\Lambda_{P_1}]^{-1}\right)F_3^i I_{n \times n} + Q_{P_1} = 0$$

$$P_2A + A^T P_2 + P_2\Lambda_{P_2}P_2 + \lambda_{\max}\left([\Lambda_{P_2}]^{-1}F_8^i I_{n \times n}\right) + Q_{P_2} = 0$$

$$\begin{aligned} P_3A + A^T P_3 + P_3\Lambda_{P_3}P_3 + Q_{P_3} + \lambda_{\max}\left([\Lambda_{P_3}]^{-1}\right)F_0^i I_{n \times n} \\ + \left(\lambda_{\max}\left([\Lambda_{P_3}]^{-1}F_5^i\right) + \lambda_{\max}\left([\Lambda_{P_3}]^{-1}\right)f_0^i\right)I_{n \times n} = 0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$P_4A + P_4A + [A]^T P_4 + P_4\Lambda_{P_4}P_4 + Q_{P_4} = 0$$

**Definición del Problema de Identificación** En el marco del sistema no lineal con una adecuada selección de matrices  $A^i$  y con la estructura de la red neuronal diferencial como identificador suministrada con las leyes de ajuste (8.4), la cota superior para el error de estimación se define como:

$$\beta := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t) - \hat{u}(x, t)\|_P^2$$

$\beta$  debe ser obtenido, y si es posible, reducido a su valor menor posible, usando sólo los parámetros libres participantes dentro de la estructura de la RN.

**Teorema 8.1.** *Sea el sistema no lineal descrito en ecuaciones diferenciales parciales incierto y perturbado en el estado y la salida (8.1) con condiciones a la frontera de tipo Dirichlet y Neumann. Suponga además la estructura del identificador no paramétrico adaptable (8.3) cuyos parámetros se ajustan de acuerdo a la ley adaptable dada en (8.4). Si existen matrices  $Q_P^i$ ,  $Q_S^i$  y  $Q_T^i$  definidas positivas tales que las ecuaciones de Riccati (8.5) tienen soluciones positivas definidas  $P^i$ ,  $S^i$  y  $T^i$  ( $i = \overline{3, N}$ ) entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{u}_i(t, x) - u_i(t, x)| \leq \rho_1 \quad (8.6)$$

## 8.4. Estrategia de control para EDP

Para la realización del control, se tiene que  $\dot{u}^{ref}(x, t)$  (referencia) satisface una dinámica

$$\dot{u}^{ref}(x, t) = g(u^{ref}, u_{i-1}^{ref}, u_{i-2}^{ref}, t)$$

la cual puede ser representada por

$$\dot{u}^{ref}(x, t) = Au_i^{ref} + W_{1,t}^i \sigma(u_i^{ref}) + W_{2,t}^i \phi(u_i^{ref}) u_{i-1} + W_{3,t}^i \lambda(u_i^{ref}) u_{i-2} + \eta_i(u_i^{ref}, t) \quad (8.7)$$

Dado que se busca que el sistema siga esta referencia, se define el error de seguimiento de trayectoria como

$$\delta^i = \hat{u}_i(x, t) - u_i^{ref}(x, t)$$

La derivada del error de seguimiento con respecto al tiempo es

$$\frac{d\delta^i}{dt} = \frac{d\hat{u}_i(x, t)}{dt} - \frac{du_i^{ref}(x, t)}{dt}$$

de (8.7) y (8.3), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\delta^i}{dt} &= A\hat{u}_i + W_1^i \sigma(\hat{u}_i) + W_2^i \phi(\hat{u}_i) \hat{u}_{i-1} + W_3^i \gamma(\hat{u}_i) \hat{u}_{i-2} + W_4^i \lambda_2(\hat{u}_i) v_i \\ &- (A u_i^{ref} + W_{1,t}^i \sigma(u_i^{ref}) + W_{2,t}^i \phi(u_i^{ref}) u_{i-1} + W_{3,t}^i \lambda(u_i^{ref}) u_{i-2} + \eta_i(u_i^{ref}, t)) \\ &= \left( A^i \delta^i + W_{1,t}^{i,T} (\sigma(\hat{u}_i) - \sigma(u_i^{ref})) \right) + W_{2,t}^{i,T} (\phi(\hat{u}_i) \hat{u}_{i-1} - \phi(u_i^*) u_{i-1}^{ref}) \\ &\quad + W_{3,t}^{i,T} (\lambda(\hat{u}_i) \hat{u}_{i-2} - \lambda(u_i^{ref}) u_{i-2}^{ref}) + W_{4,t}^{i,T} (\lambda_2(\hat{u}_i) \hat{u}_{i-1}) v_i(u_i^{ref}) \end{aligned}$$

### Definición del Problema de Control

Para garantizar el seguimiento de las trayectorias de la red neuronal diferencial se propone la aplicación de un control compuesto de

$$v_i(x, t) = \rho_i(x) \kappa(t) \delta^i \quad (8.8)$$

donde  $v$  es la función de control,  $\rho_i$  es una función que representa la acción de control sobre aquellos puntos medibles del sistema, está dada por 8.9,  $\kappa$  es una ganancia dada como

$$\kappa(t) = \frac{\bar{\kappa}(t) \left[ W_{4,t}^{i,T} \lambda_2(\hat{u}_i) \right]^T}{\left\| W_{4,t}^{i,T} \lambda_2(\hat{u}_i) \right\|}$$

$$\rho_i(x) = \left[ \frac{1}{d(u_i, u_j)} + \rho \right]^n \begin{cases} n = -1 & \text{Solución directa} \\ n = +1 & \text{Solución inversa} \end{cases} \quad (8.9)$$

donde  $u_j \in U^m$  donde  $U^m := \{U_z : u_z \text{ son todos los puntos } z \text{ ajustables por una acción directa}\}$ .

**Teorema 2** Si  $v_i(x, t)$  se selecciona como en (8.8), entonces, para todo  $t \leq t^* = \frac{\|\delta\|}{\eta}$ , esto implica que las trayectorias del error de seguimiento son estables prácticamente

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \delta^i \rightarrow 0 \quad (8.10)$$

La prueba para el controlador basado en Redes tiene la siguiente estructura:

### Prueba Teorema 2

*Demostración.* Se propone la siguiente función de Lyapunov candidato

$$V_2(t) := \int_{x=0}^1 \sum_{i=1}^N \|\delta^i\|_{P_4}^2 dx$$

Siguiendo con el segundo método de Lyapunov:

$$\frac{d}{dt} V_2(t) := 2 \delta^{i,T} P_4 \frac{d}{dt} \delta^i$$

$$\begin{aligned}
V_2(t) &= 2\delta^{i,T} P_4 \left( A^i \delta^i + W_{1,t}^{i,T} (\sigma(\hat{u}_i) - \sigma(u_i^{ref})) + W_{2,t}^{i,T} (\phi(\hat{u}_i)\hat{u}_{i-1} - \phi(u_i^*)u_{i-1}^{ref}) \right. \\
&\quad \left. + W_{3,t}^{i,T} (\lambda(\hat{u}_i)\hat{u}_{i-2} - \lambda(u_i^{ref})u_{i-2}^{ref}) + W_{4,t}^{i,T} (\lambda_2(\hat{u}_i)\hat{u}_{i-1})v_i(u_i^{ref}) \right) \\
&\leq 2\delta^{i,T} P_4 \left( A^i \delta^i + W_{1,t}^{i,T} (\sigma(\hat{u}_i) - \sigma(u_i^{ref})) + W_{2,t}^{i,T} (\phi(\hat{u}_i)\hat{u}_{i-1} - \phi(u_i^{ref})u_{i-1}^{ref}) \right. \\
&\quad \left. + W_{4,t}^{i,T} \gamma_2(\hat{u}_i)v_i(u_i^{ref}) - \eta(u^{ref}(x,t)) \right)
\end{aligned}$$

Para finalizar la prueba se tiene que

$$\begin{aligned}
V_2(t) &\leq 2\delta^{i,T} P_4 \left( A^i \delta^i + W_{1,t}^{i,T} (\sigma(\hat{u}_i) - \sigma(u_i^{ref})) + W_{2,t}^{i,T} (\phi(\hat{u}_i)\hat{u}_{i-1} - \phi(u_i^{ref})u_{i-1}^{ref}) \right. \\
&\quad \left. + W_{3,t}^{i,T} (\gamma(\hat{u}_i)\hat{u}_{i-1} - \gamma(u_i^{ref})u_{i-2}^{ref}) + W_{4,t}^{i,T} \gamma_2(\hat{u}_i)v_i(u_i^{ref}) \right) \\
&\leq 2\delta^{i,T} P_4 \left( A^i \delta^i + \bar{W}_{1,t}^{i,T} L_\sigma + \bar{W}_{2,t}^{i,T} L_\phi u_{i-1} + \bar{W}_{3,t}^{i,T} L_\gamma u_{i-2} \right) \\
&\quad + 2\delta^{i,T} P_4 \left( W_{4,t}^{i,T} \gamma_2(\hat{u}_i)\rho(x)\kappa(t)\delta^i \right) \\
&\quad + 2\delta^{i,T} P_4 \eta(u_i^{ref})
\end{aligned}$$

□

---

# 9

## Resultados Numéricos

---

Este capítulo tiene como objetivo mostrar, al menos en un sentido cualitativo, la efectividad de los métodos propuestos en este trabajo. Se presentan diversos ejemplos numéricos basados en sistemas de parámetros distribuidos descritos por ecuaciones diferenciales en dos dimensiones, tres dimensiones y complejas de tipo parabólico y una ecuación de tipo hiperbólico. Cabe resaltar que para la aplicación de cada neuro-identificador propuesto no es necesario de ningún modelo matemático, sin embargo, aquí presentamos los resultados numéricos comparando las trayectorias de la red con las trayectorias de un sistema propuesto para mostrar el proceso de ajuste de la red así como su habilidad en la identificación de sistemas de parámetros distribuidos.

### 9.1. Proceso de Identificación de EDP en 2D

La simulación de modelos matemáticos es una ilustración de un sistema de referencia que muestra el comportamiento de sus trayectorias en un sentido numérico. Para mostrar los resultados del capítulo sobre Identificación de EDP en 2D, considérese la siguiente ecuación diferencial parcial descrita como se muestra:

$$u_t(x, y, t) = -(c_1 u_{xx}(x, y, t) + c_2 u_{yy}(x, y, t))$$

Este sistema puede ser representado, usando el método de diferencias finitas, como

$$\begin{aligned}
u_t^{i,j}(x,y,t) = & -c_1 \left( \frac{u^{i,j}(t) - 2u^{i-1,j}(t) + u^{i-2,j}(t)}{(\Delta x)^2} \right) \\
& -c_2 \left( \frac{u^{i,j}(t) - 2u^{i,j-1}(t) + u^{i,j-2}(t)}{(\Delta y)^2} \right) = \\
& \frac{1}{\Delta^2} \left[ -(c_1 + c_2)u^{i,j}(t) + 2c_1u^{i-1,j}(t) \right. \\
& \left. -c_1u^{i-2,j}(t) + 2c_2u^{i,j-1}(t) + c_2u^{i,j-2}(t) \right]_{\Delta x=\Delta y=\Delta}
\end{aligned}$$

Este sistema puede ser exitosamente tratado mediante el método clásico de diferencias finitas, sin embargo, con la presencia de incertidumbres se asume que mediante este método no es posible obtener una solución. Sin embargo, el método de RND es una alternativa para resolver el problema. Se considera que existe el acceso a mediciones discretas del estado  $u(x,y,t)$  a lo largo de todo el dominio, lo cual es posible en la práctica. Este modelo puede usarse sólo como un generador de datos para probar el neuro-identificador. Las condiciones iniciales y a la frontera se selecciona como sigue:

$$u(0,y,t) = rand(1), \quad u(x,0,t) = rand(1), \quad u_x(0,0,t) = 0$$

El estado estimado, producido por la RND, se muestra en la figura 9.2. Hay una importante zona donde se puede observar una gran diferencia entre el modelo y el estado estimado, esta zona se localiza al inicio del proceso de identificación y depende del periodo de aprendizaje requerido para ajustar la red. El error entre las trayectorias producidas por el modelo y por el identificador propuesto se acerca a cero durante casi todo  $x,y$  y todo  $t$ , lo que muestra la eficiencia del proceso de identificación.

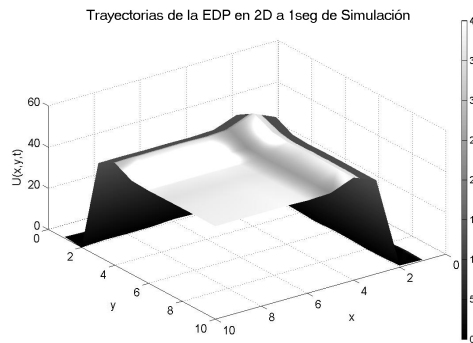


Figura 9.1: Trayectorias del Modelo en EDP

Después de 10 segundos, el identificador converge casi en toda la región  $\Omega$ .

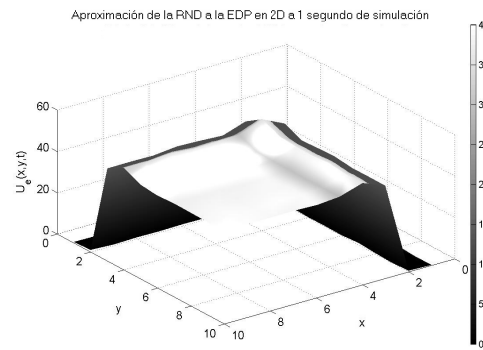


Figura 9.2: Trayectorias producidas por el Identificador basado en RND

Las trayectorias de la red se observa cercana al modelo incierto de la PDE, aun cuando las soluciones del modelo crecen después de 20 segundos. Actualmente, la diferencia entre ambos estados es casi cero.

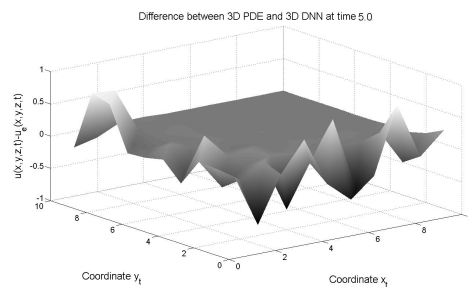


Figura 9.3: Diferencia entre las trayectorias estimadas por la red neuronal y las trayectorias de la EDP

El error obtenido tras 20 segundos de simulación se encuentra cercano a cero durante casi toda  $x, y$  y  $t$ , lo que muestra la efectividad del proceso de identificación provisto por el algoritmo neuronal sugerido.

## 9.2. Proceso de Identificación de EDP en 3D

### 9.2.1. Dinámica del Crecimiento Tumoral

El modelo matemático del crecimiento tumoral de cerebro presentado en esta sección basado en los resultados de [85]. Aquí el coeficiente de difusión se considera constante. Considérese la

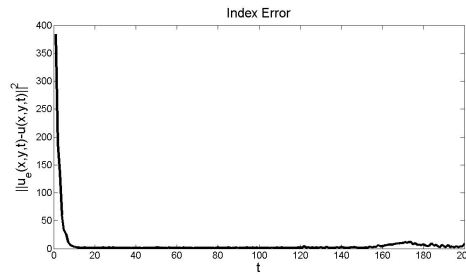


Figura 9.4: Índice de desempeño de la RND

siguiente ecuación parabólica que describe el crecimiento tumoral como sigue:

$$\begin{aligned}
 u_t(x, y, z, t) = & -Pu_x(x, y, z, t) - Ru_y(x, y, z, t) - Su_z(x, y, z, t) \\
 & + Qu_{xx}(x, y, z, t) + Qu_{yy}(x, y, z, t) + Qu_{zz}(x, y, z, t) + \Gamma - Lu(x, y, z, t)
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

donde  $u(x, y, z, t)$  es la velocidad de crecimiento del tumor cerebral,  $Q$  es el coeficiente de difusión,  $W = (P, R, S)$  es el campo de velocidad del flujo,  $\Gamma = \Gamma(u)$  es el coeficiente de proliferación y  $L = L(u)$  es el coeficiente de decaimiento de las células. Se asume que se tiene acceso a mediciones discretas del estado  $u(x, y, z, t)$  a lo largo de todo el dominio, lo cual es posible en la práctica empleando la tecnología PET-CY (por sus siglas en inglés, Positron emission tomography - computed tomography). El dominio  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  y  $0 \leq z \leq 1$ . Este modelo será usado sólo para generar los datos necesarios para probar el identificador en 3D basado en RND. Las condiciones iniciales y a la frontera se seleccionan como sigue:

$$\begin{aligned}
 u(0, 0, 0, t) = 200 \pm 20\mu, u_x(0, 0, 0, t) = 0 \\
 u_y(0, 0, 0, t) = 0, u_z(0, 0, 0, t) = 0
 \end{aligned}$$

Las trayectorias del modelo y el estado estimado producido por la RND se pueden observar en las figuras 9.8 y 9.6. La diferencia entre ambas trayectorias depende del periodo de aprendizaje requerido para ajustar la red. El error entre las trayectorias producidas por el modelo y el identificador propuesto está cercano a cero durante casi todo  $x, y, z$  y todo  $t$  lo que muestra la eficiencia del proceso de identificación provisto por el algoritmo sugerido, esto se presenta en la figura 9.7.

En las figuras 9.8, 9.6 y 9.7 se muestran las trayectorias de la EDP y de la RND para la coordenada  $z$  y el índice del error de la EDP y la RND a los 46 días, para las coordenadas  $x, z$ , respectivamente.



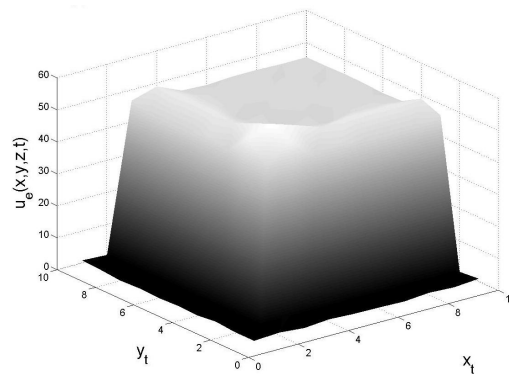


Figura 9.5: Trayectoria Numérica producida por el modelo matemático descrito por la EDP en 3D a los 46 días a lo largo del dominio completo.

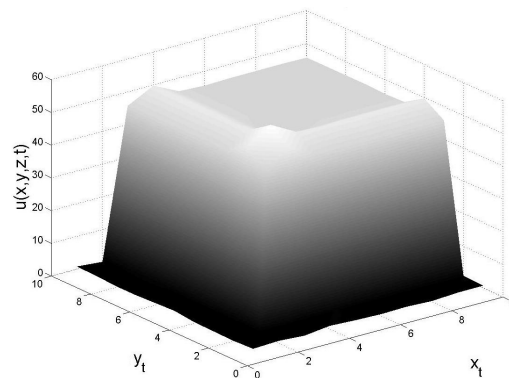


Figura 9.6: Trayectoria Numérica producida por la Red Neuronal Diferencial en 3D a los 46 días a lo largo del dominio completo.

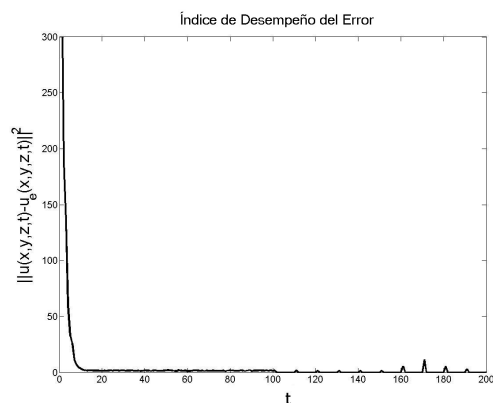


Figura 9.7: Error de la Aproximación. Diferencia entre la solución de la EDP en 3D y la estimación de la RND en 3D a los 46 días de simulación.

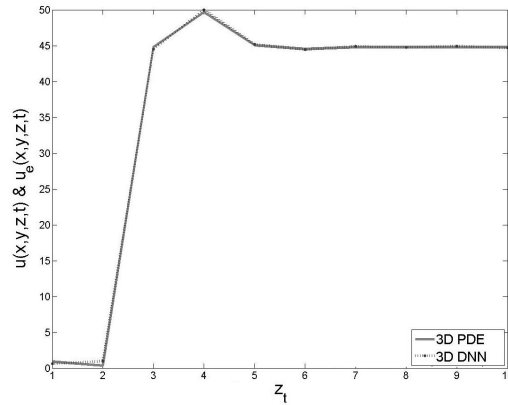


Figura 9.8: Comparación entre las trayectorias de la EDP en 3D y la aproximación de la RND para la coordenada  $z$  a los 46 días de simulación.

## 9.3. Proceso de Identificación de EDP Hiperbólicas

### 9.3.1. Cadena vibrante de un intervalo finito

Considere el problema simplificador de una cadena vibrante. Se representa la posición de un punto, en el instante  $t$ , por una función real continua  $u : [0, L] \times [0, 1) \rightarrow \mathfrak{R} : (x, t) \rightarrow u(x, t)$ , donde  $[0, L]$  representa la cadena en un marco de referencia. La EDP que describe una cadena vibrando en un intervalo finito es:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) \\ u_x(0, t) &= 0 \\ u_x(1, t) &= 0 \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales y a la frontera corresponden a la situación donde el final de la cadena en  $x = 1$  está clavado (fijo) y al final en  $x = 0$  está libre. La pendiente cero de la condición a la frontera a  $x = 0$  tiene el significado físico de que no se está aplicando fuerza al inicio que se aplique hasta el final.

El sistema de onda (9.3.1) muestra la siguiente trayectoria (Fig. 9.9). Las condiciones iniciales y a la frontera usadas en la simulación numérica son

$$\begin{aligned} u(0, t) &= rand(1), \quad u(x, 0) = 10 \\ u_x(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

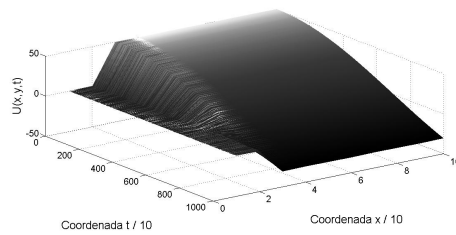


Figura 9.9: Solución numérica de la EDP hiperbólica

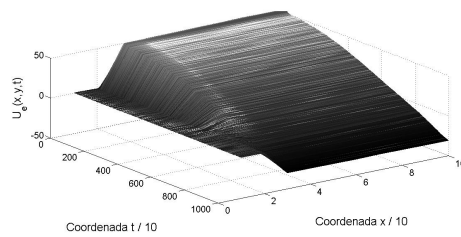


Figura 9.10: Solución numérica de la RND estimando las trayectorias de una EDP de tipo hiperbólico

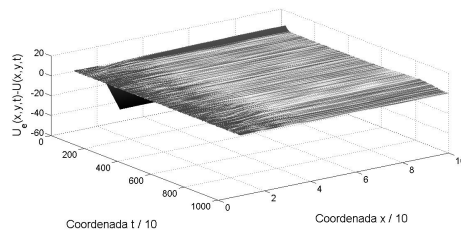


Figura 9.11: Error producido por los estados estimados de la red en comparación con la trayectoria de la EDP hiperbólica

## 9.4. Proceso de Identificación de EDP Complejas

### 9.4.1. Simulación de la Estimación de la ecuación de Landou

Aquí, se presenta la simulación numérica de la ecuación compleja de Ginzburd-Landou (ECGL):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + (1 + i\alpha) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - (1 + i\beta) |A|^2 A$$

esta ecuación puede llamarse también la "Ecuación compleja no lineal de difusión". La simulación se hace con el propósito de mostrar, de forma cualitativa, la efectividad del algoritmo propuesto. En esta sección se compara el comportamiento de las trayectorias de la ECGL con las trayectorias de la CVDNN. La magnitud y la fase de la ecuación compleja se presentan comparandolos con la CVDNN así como el error de identificación.

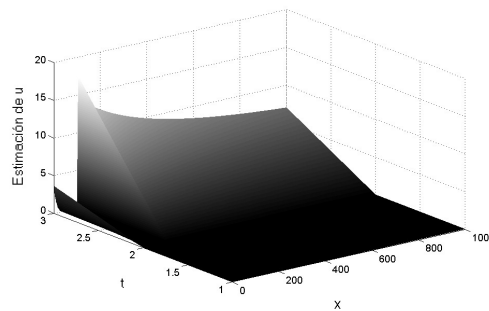


Figura 9.12: Trayectorias de la CVDNN para aproximar la magnitud de la ECGL

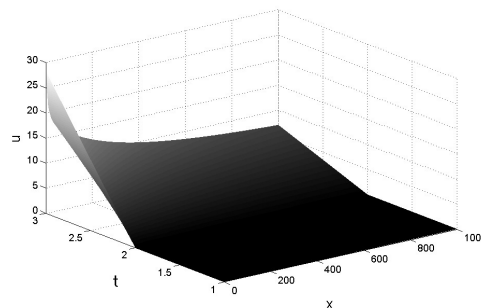


Figura 9.13: Magnitud de las trayectorias de la ECGL

La diferencia entre la simulación de la magnitud de la EDP-C 9.13 y el estado estimado producido por la CVDNN 9.12 muestra que el error 9.14 está cercano al cero durante casi

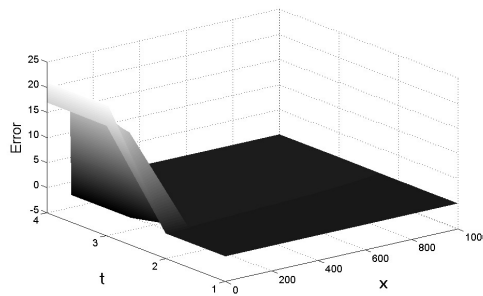


Figura 9.14: Diferencia entre la magnitud de la EDGL y la CVDNN

todo  $x$  y todo  $t$ , excepto por una zona al inicio de la simulación, donde la diferencia entre las trayectorias del modelo y de la red se presenta como consecuencia del proceso de entrenamiento necesario para ajustar al identificador.

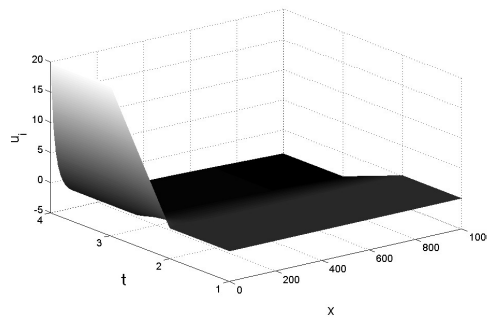


Figura 9.15: Trayectorias de la fase de la EDGL

Ambas trayectorias (Figuras 9.15 y 9.16) muestran un comportamiento similar, existe una gran diferencia entre el modelo original de la EDP-C y las trayectorias estimadas. La diferencia que se observa es dependiente del periodo de aprendizaje de la red. La figura 9.17 muestra la convergencia del error, que se mantiene cercano al cero durante casi todo  $x$  y  $t$ .

De esta forma, la técnica propuesta puede ser útil, cuando se tiene un sistema desconocido, y este sistema se modela por EDP complejas. Aquí, se muestran los ejemplos numéricos empleando una EDP compleja, pero de hecho, para la implementación de esta técnica no es necesario tener un modelo para aplicar la CVDNN. Esta aproximación puede ser aplicada con cualquier sistema complejo, aun si es incierto o si el sistema se encuentra bajo la acción de alguna perturbación. Además de esta ecuación, derivado de este trabajo se ha probado la eficiencia de la técnica para la ecuación de Schrödinger, una ecuación diferencial parcial compleja de tipo

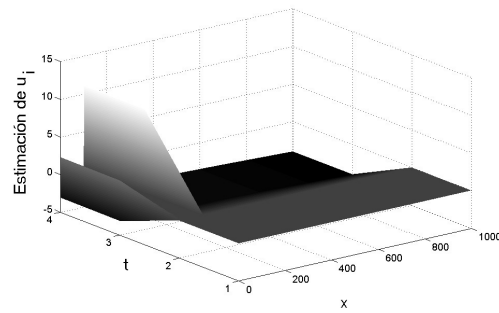


Figura 9.16: Trayectorias de la CVDNN para aproximar la fase de la EDGL

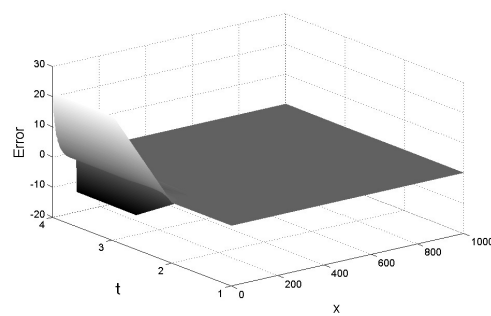


Figura 9.17: Dinámica del error de la aproximación de la fase hecha por la CVDNN

hiperbólica, además existen en física otros ejemplos de este tipo, como son las ecuaciones de Korteweg-de Vries, la EDP no lineal de Klein-Gordon, y algunas otras, provista de excelentes ejemplos para los sistemas dinámicos infinito dimensionales que poseen diversos fenómenos físicos y que muestran un comportamiento complejo incierto.

## 9.5. Proceso de Identificación de EDP basado en FEM

Con el propósito de ilustrar el principal resultado teórico derivado de la secciones previas, aquí se considera la siguiente EDP:

$$\begin{aligned}
 u_{tt}(x,y,t) &= c^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)) \\
 c &> 0 \\
 u(x,y,0) &= 0 \\
 u(x,y,1) &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}y\right) \\
 u(0,y,t) &= 1 \\
 u_t(x,y,0) &= g(0,y), \quad -\text{inf} < x,y < \text{inf}
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

La RND como identificador para EDP produce trayectorias muy cercanas a las del sistema de parámetros distribuidos descrito por EDP en 2D como puede verse en la figura (9.19). Hay una zona importante donde existe una pequeña diferencia entre las trayectorias reales y las estimadas.

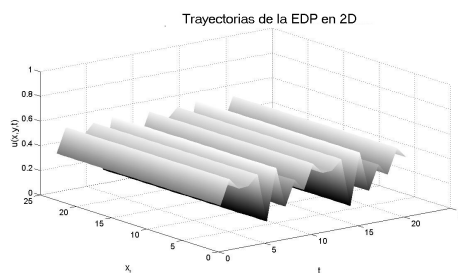


Figura 9.18: Numerical trajectory produced by the mathematical model described by 2D partial differential equation at time 9s along the whole domain.

Esta diferencia es dependiente del periodo de aprendizaje requerido para ajustar cada una de las redes, tanto las que corresponden a la estimación de los elementos como la que corresponde al ensamble general, se presenta como parte del proceso de ajuste de la RND. La diferencia entre las trayectorias del modelo en EDP y los estados estimados producidos por le RND basada en

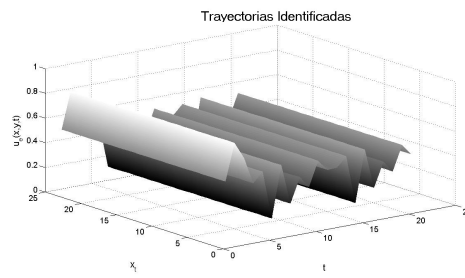


Figura 9.19: Trayectorias numericas producidas por la red neuronal aproximando el modelo a los 9 segundos de simulación

FEM se muestra en la figura (9.20). Este error se acerca a cero durante casi todo  $x$ ,  $y$  y todo  $t$ . Esto muestra la eficiencia del proceso de identificación provisto por el algoritmo de la RND.

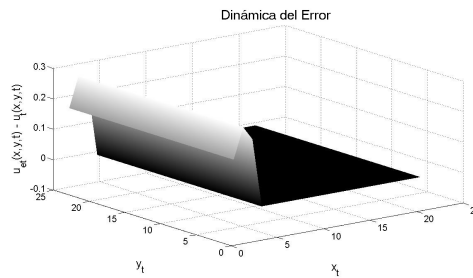


Figura 9.20: Trayectoria numérica producida por la diferencia entre las trayectorias de la EDP y las trayectorias de la RND a los 9 segundos de simulación

## 9.6. Neuro-Observador basado en la Técnica de Backstepping

### 9.7. Resultados Numéricos

El sistema numérico considerado en este ejemplo está descrito por (9.3), esta ecuación se usa sólo como un generador de datos para entrenar al Estimador. La ecuación 9.3 es una EDP parabólica con la siguiente forma:

$$u_t(x,t) = 2u_{xx}(x,t) + 0.7 \quad (9.3)$$



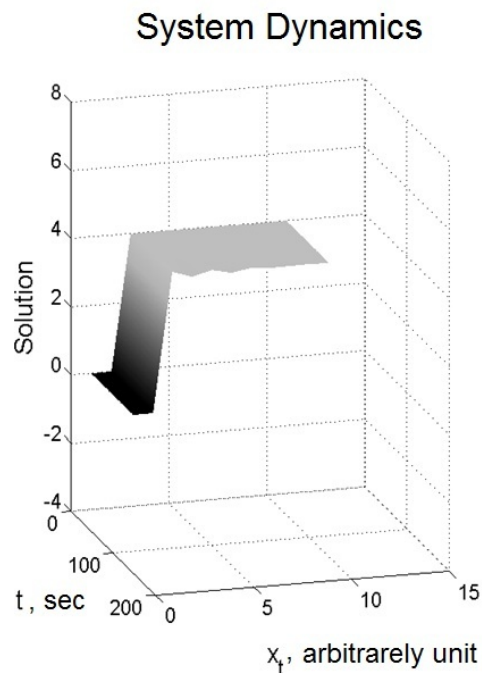


Figura 9.21: Dinámica del sistema

Los datos disponibles son acorde con (7.1) en la frontera  $u(0,t)$  y el control está en la frontera  $u(1,t) = 0$ . La dinámica de este sistema se muestra en el sistema de la figura 9.21. Donde las condiciones iniciales se eligen arbitrariamente.

El comportamiento del kernel se muestra en la figura 9.22. Es claro que el kernel satisface las condiciones mencionadas en 7.15. Las oscilaciones a lo largo de  $x$  están dadas por los diferentes valores de los parámetros  $\lambda$ .

Una vez que el kernel fue calculado numéricamente, las funciones de inyección de salida se calculan numéricamente también y el observador está disponible para ser calculado. En la

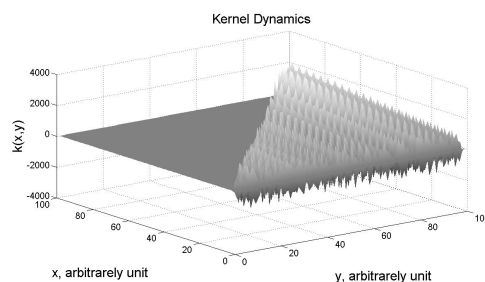


Figura 9.22: Dinámica del Kernel, solución a la ecuación hiperbólica con condiciones de Neuman a cero

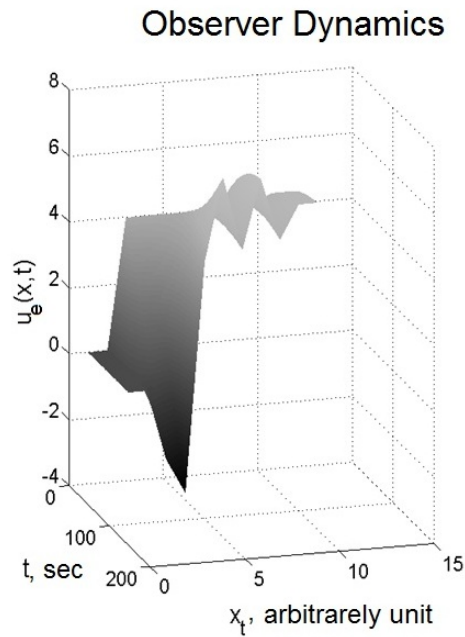


Figura 9.23: El comportamiento de la aproximación realizada por el Observador Neuronal

figura 9.23 se muestra el comportamiento del observador

Como se espera, en la frontera  $x = 0$  el observador converge en tiempo finito. Sin embargo, en los otros valores de  $x$  la convergencia es exponencial. Esto puede ser visto en la figura 9.25 donde los valores arbitrarios se eligieron para mostrar como es la evolución de  $u(x,t)$  a lo largo del tiempo cuando  $x = 0$ ,  $x = 0.25$ ,  $x = 0.75$  y  $x = 1$ .

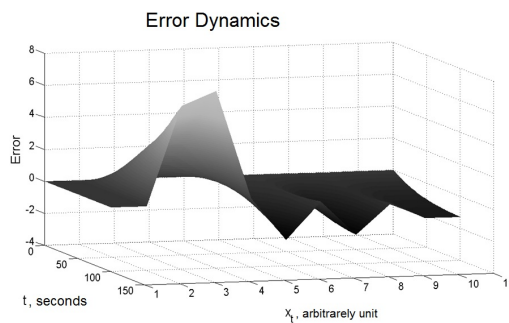


Figura 9.24: La dinámica del error va a cero exponencialmente en el tiempo para cada valor de  $x$  con diferentes valores de decaimiento.

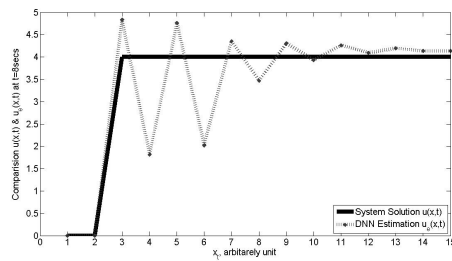


Figura 9.25: El comportamiento de la dinámica del sistema en el tiempo  $t = 8$  y  $t = 15$  segundos, comparada con la aproximación hecha por la RND en los mismos tiempos

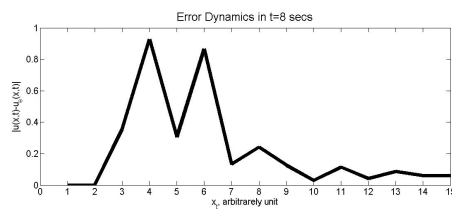


Figura 9.26: Dinámica del error a 8 segundos de simulación

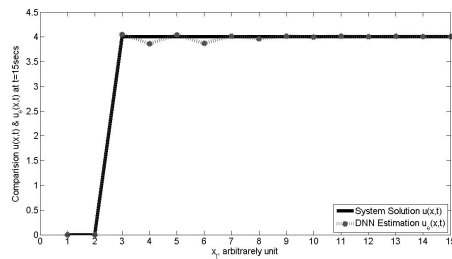


Figura 9.27: Comportamiento de la dinámica del sistema a los 15 segundos de simulación comparado con la aproximación realizada por la RND al mismo tiempo

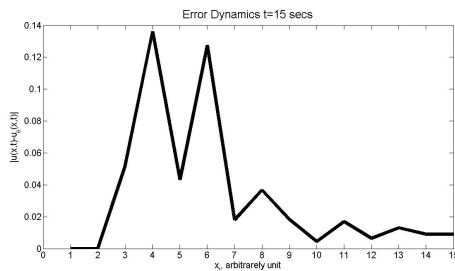


Figura 9.28: Dinámica del Error a los 15 segundos de simulación

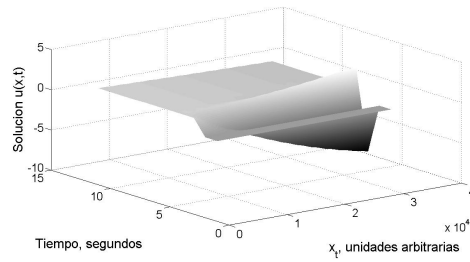


Figura 9.29: Trayectorias del sistema cuando no se aplica una acción de control

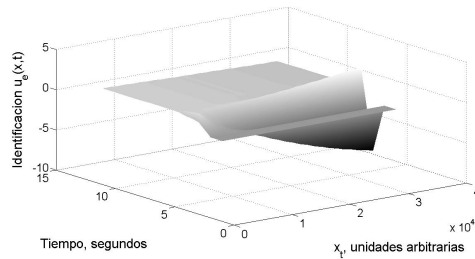


Figura 9.30: Trayectorias de la RND como identificador

## 9.8. Control para Sistemas de Parametros Distribuidos

### 9.9. Resultados Numéricos

Con el fin de mostrar el comportamiento del controlador propuesto, se ha aplicado el neurocontrol a la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + u_x(x,t) + \sin(u(x,t)) + u(x,t)v(x,t) \quad (9.4)$$

#### Proceso de Identificación

Antes de aplicar el control, se simuló la acción de la RND como identificador de esta ecuación, sin aplicar el control. La figura 9.9, muestra la trayectoria del sistema cuando  $v(x,t)$  es nula, mientras que la figura 9.9, muestra la aproximación hecha por la RND como identificador de EDP.

La figura 9.9, muestra el error de identificación producido por la RND al ser comparada con las trayectorias del sistema. Se observa que el error tiende a cero. De esta forma se comprueba cualitativamente que la aproximación de la Red está apegada a la dinámica del sistema.

#### Aplicación del Control

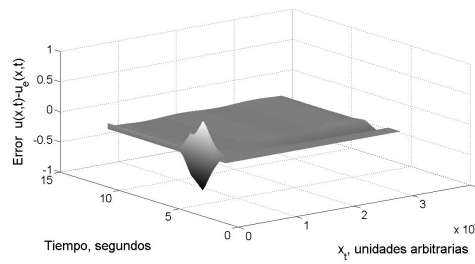


Figura 9.31: Diferencia entre las trayectorias del sistema y la aproximación de la RND

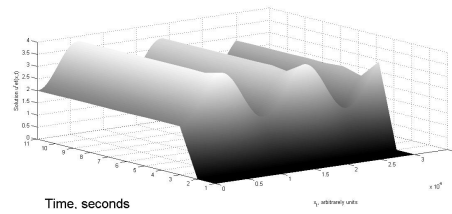


Figura 9.32: Sistema de referencia

Una vez comprobada la eficiencia de la RND en el proceso de identificación, se procede a mostrar la eficiencia en la implementación del control. Para esto, se aplica la ley de control definida en 8.8, buscando que el sistema siga la referencia definida en 9.5

$$u_t^{ref}(x,t) = u_{xx}(x,t) + 2\sin(\pi t)u(x,t) \quad (9.5)$$

Es así que aplicando el control al sistema, se tienen las siguientes trayectorias, donde se observa además del seguimiento de la trayectoria de referencia por parte del sistema, el seguimiento de la RND. Por último en la figura 9.9, la diferencia entre la trayectoria de la red y la referencia se observa tendiendo a cero.

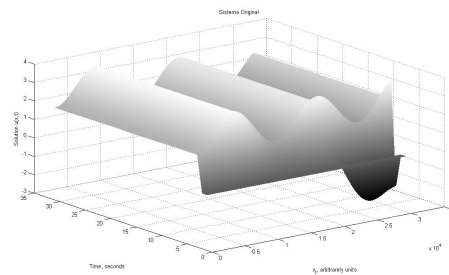


Figura 9.33: Trayectorias del sistema al aplicarse control

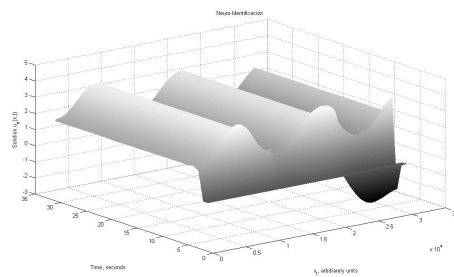


Figura 9.34: Seguimiento de trayectorias de la RND con control

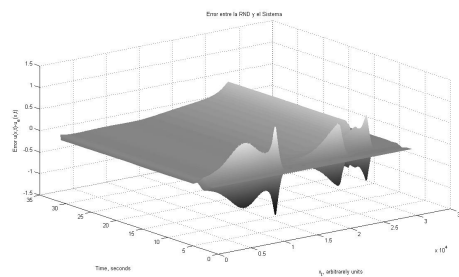


Figura 9.35: Diferencia entre las trayectorias de la RND y la Referencia

## 9.10. Cuadro Comparativo

Los resultados numéricos mostrados en secciones anteriores tienen el propósito de mostrar la efectividad del algoritmo propuesto, sin embargo, estas simulaciones de aproximaciones a sistemas de parámetros distribuidos no son las únicas que han sido desarrolladas. La tabla 9.10 muestra algunos de los trabajos que se han propuesto para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales desconocidas siguiendo la metodología de redes neuronales artificiales. La tabla se presenta para mostrar las principales características de cada técnica, de forma tal que sea posible identificar las diferencias entre ellas y así dilucidar las diferencias entre cada una.

Autor	Tipo de ED	EDP in- cierta	Propuesta	Malla Irre- gular	Ident	Estim	Precisión
Krstic et al. [60]	EDP parabólica		Backstepping			X	Alto <sup>1</sup>
Lewis et al. [67]	Ecuación de HJB.		RNA		X		Alto <sup>3</sup>
Lagaris et al. [66]	FFRN, método de colocación, función de prueba.			X	X		Medio <sup>2</sup>
Srinivasa et al. [87]	RN complejas de Hopfield.		Algoritmo complejo de Back Propagation		X		Medio <sup>b,4</sup>
Santamaria et al.	RND, MDF, descriptor.	X	Interpolación, 3D		X		Medio a Alto <sup>a,5</sup>
Algoritmo propuesto 1	RND, MEF, MDF 2D.	X	RND para elemento y RND para ensamble	X	X		Alta <sup>1</sup>
Algoritmo propuesto 2	RND, Backstepping.	X	Transformación Integral de Volterra	X		X	Media <sup>1</sup>

Cuadro Comparativo

## 9.11. Publicaciones

Como parte del trabajo realizado durante este periodo, se han desarrollado los siguientes artículos en congreso y capítulos de libro.

### ■ Capítulos de Libro

- Complex DNN for the Identification of Landau and Schrödinger equations, solicitado por la Editorial Nova Science Publishers, Inc., 2010

### ■ Congresos Internacionales

- Artículo Aceptado en el Andean Region International Conference (AndesCon) (Cuenca, Ecuador 2012)
- Presentación de Artículo: Neuro-Observer based in Backstepping Technique for Distributed Parameters Systems en el CCE (México, D.F. 2012)
- Presentación de Artículo en el 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC) (Milano, Italia 2011)
- Presentación de Artículo: Robust Identification of Uncertain Schrödinger type Complex Partial Differential Equations en el CCE (Tuxtla Gutierrez, Chiapas 2010)

### ■ Publicaciones

- Artículo Publicado: DNN State Identification of 2D Distributed Parameter Systems para ser publicado por International Journal of Systems Science (Febrero 2010)
- Artículo Publicado: Numerical modeling of the benzene reaction with ozone in gas phase using differential neural networks para ser publicado por Catalysis Today (Febrero 2010)
- Artículo Aceptado: Non-parametric identification of parabolic PDE using Differential Neural Networks IJCNN2009 Special Issue of Neural Networks para ser publicado por Elsevier (Abril 2009)
- Artículo Aceptado: 3D-Non Parametric Neural Identification para ser publicado por Hindawi (Septiembre 2011)



- La aproximación sugerida resuelve el problema de identificación no paramétrica de sistemas no lineales inciertos descritos por ecuaciones diferenciales parciales. Este resultado se presenta para ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico en una dimensión y para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas en dos y tres dimensiones utilizando la metodología de Redes Neuronales Diferenciales y Diferencias Finitas.
- El resultado de identificación utilizando el método numérico de diferencias finitas, mostró resultados aceptables con un error de aproximación cercano al cero para mallados cartesianos regulares, sin embargo no se probó para un mallado no regular.
- La metodología para identificación de estados fue extendida para una partición del dominio no uniforme, utilizando como herramientas las Redes Neuronales y el método de Elemento finito.
- La convergencia asintótica para el error de identificación ha sido demostrada aplicando el segundo método de Lyapunov usando una clase especial de funcional que prueba la estabilidad de la aproximación sugerida.
- El empleo de la técnica de Backstepping bajo el uso de la integral de Volterra combinada con las Redes Neuronales Diferenciales, resolviendo así el problema de estimación de estados para sistemas de parametros distribuidos.
- La sugerencia de un control distribuido, donde se considera que algunos puntos en el

dominio son controlables, mostró buenos resultados dada la convergencia asintótica del error. Para realizarlo se consideraron, la identificación del sistema incierto y el conocimiento de las condiciones iniciales y a la frontera.

- Los diferentes ejemplos numéricos muestran las dinámicas de un SPD demostrando que la metodología presentada basada en redes neuronales continuas cumple con el objetivo de identificación, estimación y control de un sistema descrito en EDP.

## Trabajo a Futuro

---

El trabajo a continuar al término de esta tesis y que se deriva de los resultados presentados en la misma, es:

- Desarrollar un algoritmo de identificación donde se considere interpolación de las mediciones discretas en el estado en sistemas de parámetros distribuidos en 1D, 2D y 3D
- Metodología de Identificación Neuronal mediante la obtención de leyes de aprendizaje descritas por ecuaciones diferenciales parciales bien definidas
- Obtener los algoritmos de ajuste de la Red Neuronal Diferencial para observación de sistemas de parámetros distribuidos utilizando la Transformación Integral de Volterra y modos delizantes
- Aplicar los resultados de estimación de estados a la solución de un problema real
- Extensión del caso de identificación de ecuaciones diferenciales parciales 2D utilizando Elemento Finito y Redes Neuronales Diferenciales al caso 3D.

## Bibliografía

---

- [1] R. Adams and J. Fournier, *Sobolev spaces*, 2nd ed. New York: Academic Press, 2003.
- [2] Aarts, L.P., Veer, P.V., *Neural network method for solving partial differential equations*, *Neural Processing letters* 14, 261-271, 2001.
- [3] Alli, H., Ucar, Y., Demir, Y., *The solution of vibration control problems using artificial neural networks*, *Journal of the Franklin Institute* 340, 307-325, 2003.
- [4] Abolhassani, N. and Patel, R. and Moallem, M., *Needle insertion into soft tissue: A survey*, *Medical Engineering and Physics*, Volume 29, Number 4, pages 413-431, 2007.
- [5] Akira Hirose, *Complex Valued Neural Networks, Theories and Applications*, Series on Innovative Intelligence. Vol. 5, Tokyo Japón, 978-981-238-464-5, 2003.
- [6] A.Albert,*Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse*, Academic Press, 1972.
- [7] I.S. Aranson and L. Kramer, *The world of the complex Ginzburg-Landau equation (CGLE)*, *Rev. Mod. Phys.* 74: 99-143, 2002.
- [8] K. Atkinson and N. Han, *Theoretical Numerical Analysis*, Springer N. 2005.
- [9] Richard Bellman and George Adomian. *Partial differential equations : new methods for their treatment and solution*. Dordrecht : D. Reidel, 1985.
- [10] Beidokhti, R.S., Malek, A., *Solving initial boundary value problems for system of partial differential equations using neural network and optimization techniques*, *Journal of Franklin Institute* 346, 898-913, 2009.
- [11] A. Balogh and M. Krstic, *Stability of partial difference equations governing control gains in innite-dimensional backstepping*. *Systems Control Letters*, vol. 51, p. 151 U 164, 2004.

- [12] D. E. Catlin, *Estimation, Control, And The Discrete Kalman Filter*, Publisher: Springer-Verlag New York, LLC, 9780387967776, November 1988.
- [13] I. Chairez, R. Fuentes, A. Poznyak, T. Poznyak, M. Escudero, L. Viana, *DNN-State Identification of 2D Distributed Parameter Systems*, International Journal of Systems Science, Taylor and Francis Group, pp. 1-12, 2010.
- [14] F.C.Chen and H.K.Khalil, *Adaptive control of a class of nonlinear discrete-time systems using neural networks*, *IEEE Trans. Automatico Control*, Vol.40, No.5, 791-801, 1995.
- [15] F.C.Chen and H.K.Khalil, *Adaptive control of nonlinear systems using neural networks*, *Int.J.Control*, Vol.55, No.6, 1299-1317, 1992
- [16] D.S.Chen and R.C.Jain, *A robust back propagation learning algorithm for fuunction approximation*, *IEEE Trans.Neural Networks*, Vol5, No3, 1994.
- [17] Cheolwoo You, Myongit and Daesk Hong, *Yansei Learning Algorithms for Complex-Valued Neural Networks in Communication Signal*, Chapter IX, Complex Valued Neural Networks, pp. 194-236, 2009.
- [18] Close, Ch., Frederick, D., Newell, J., *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, Chapter 1, Introduction, John Wiley and Sons, 3rd Edition, New York, 2002.
- [19] N. E. Cotter, *The stone-weierstrass theorem and its application to neural networks* IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 1, pp. 290–295, December 1990.
- [20] G.Cybenko, *Approximation by Superposition of Sigmoidal Activation Function*, *Math.Control, Sig Syst*, Vol.2, 303-314, 1989.
- [21] B. Delyon, A. Juditsky, and A. Benveniste, *.Accuracy analysis for wavelet approximations.*, *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 6, pp. 332. 348, March 1995.
- [22] Denbigh, K. G., *The Optimal Design of Chemical Reactors*. Academic Press, New York, 1961, Cap. 1, Chem. Eng., Sci.,8, 125, 1958.
- [23] Dimitris G. Triantafyllidis and Dimitris P. Labridis, *A Finite-Element Mesh Generator Based on Growing Neural Networks*. IEEE Transactions on neural networks, Vol. 13, No. 6, 2002.
- [24] M. W. M. G. Dissanayake and N. Phan-Thien, *Neural-network based approximations for solving partial differential equations* Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 10, pp. 195-201, 2000.

- [25] I. Daubechies, *Ten lectures on Wavelets*. Philadelphia: SIAM, 1992.
- [26] Deng, S., Winter, W., Thorpe, S., Srinivasan, R., *Improved Surface Laplacian Estimates of Cortical Potential Using Realistic Models of Head Geometry*, IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Volume PP, Issue:99, accepted, 2012.
- [27] B.Egardt, *Stability of Adaptive Controllers*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.20, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [28] Y.V. Egorov, M.A. Shubin, *Partial Differential Equations 1*, New York: Springer-Verlag, 1992.
- [29] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Rodhe Island: American Mathematical Society, 1998.
- [30] Howard C. Elman, David J. Silvester and Andrew J. Wathen, *Finite Elements and Fast Iterative Solvers with Applicatios in Incompressible Fluid Dynamics* Chapter 1, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, 2005.
- [31] Fick A., *Ann. Physik*, Leipzig, 170, pp. 59, 1855.
- [32] Figueroa, Sánchez, Díaz, Rodriguez, Huegel, García, *A nonparametric modeling approach of soft tissue deformation by ANFIS*, IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics, 2012.
- [33] Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous right-hand side*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1998.
- [34] G. Fubini, *Sugli integrali multipli*, Opere scelte, 2, Cremonese pp. 243249, 1958.
- [35] R. Fuentes, A. Poznyak, T. Poznyak and I. Chairez, *Neural Numerical Modeling for Uncertain Distributed Parameter System*. IJCNN 2009.
- [36] Giccarella G., M.D. Mora and G. Germani, *Luenberger-like Observer for Nonlinear Systems* Int. J. Control. Vol. 57 pp. 537-556, 1993.
- [37] Griffiths, David J. *Introduction to Quantum Mechanics (2nd Ed.)*. Prentice Hall. ISBN 0-13-111892-7, 2004.
- [38] Garcia, R. and C. DAtellis, *Trajectory tracking in nonlinear systems via nonlinear reduced-order observers*. Int. J. Control 62: 685-715, 1995.

- [39] P. Gorman, T. Krummel, R. Webster, M. Smith, and D. Hutchens, *A prototype haptic lumbar puncture simulator*, *Studies in health technology and informatics*, pp. 106-109, 2000.
- [40] Garabedian, P.R., *Partial differential equations*, New York: Chelsea Publishing Company, 1986.
- [41] S. Haykin, *Neural Networks. A comprehensive Foundation*. New York: IEEE Press, Prentice Hall U.S., 2nd Ed. 1999.
- [42] Haidar, H., Bouix, S., Levitt, J.J., McCarley, R.W., Shenton, M.E., Soul, J.S., *Characterizing the shape of anatomical structures with Poisson's equation*, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Volume: 25 , Issue: 10, page(s): 1249 - 1257, 2006.
- [43] S. He, K. Reif, and R. Unbehauen, *Multilayer neural networks for solving a class of partial differential equations* *Neural Networks*, vol. 13, pp. 385–396, 2000.
- [44] Karl Heinz Dötz, Christoph A. Schalley, Fritz Vögtle. *Templates in Chemistry II*, Berlin Heidelberg : Springer-Verlag GmbH., 2005.
- [45] M. Färber, J. Heller, and H. Handels, *Simulation and training of lumbar punctures using haptic volume rendering and a 6 dof haptic device in Medical Imaging*. International Society for Optics and Photonics, 2007, pp. 65 090F-65 090F.
- [46] Hilera, J. R. y Martínez V. J., *Redes Neuronales Artificiales. Fundamentos Modelos y Aplicaciones*, Ed. RA-MA, 1999.
- [47] Hill, Charles G., JR., *An Introduction To Chemical Engineering Kinetics and Reactor Design*. John Wiley and Sons, 1977.
- [48] K.Hornik, *Approximation capabilities of multilayer feedforward networks*, *Neural Networks*, Vol.4 No.5,251-257,1991.
- [49] T. J. R. Hughes, *The finite element method*. New Jersey: Prentice Hall, 1987.
- [50] P.A.Ioannou and J.Sun, *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall, Inc, Upper Saddle River: NJ, 1996.
- [51] E. Jaime, *Approximation analytique de la solution d'équations différentielles partielles par réseau de neurons artificiels: Application a la simulation thermique dans les micro-systèmes*, Ph.D. dissertation, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2004.

- [52] S.Jagannathan and F.L.Lewis, *Identification of Nonlinear Dynamical Systems Using Multilayered Neural Networks*, *Automatica*, Vol.32, No.12, 1707-1712, 1996.
- [53] Z.P.Jiang and Y.Wang, *Input-to-State Stability for Discrete-Time Nonlinear Systems*.
- [54] R., Jennie; Vazquez and M. Krstic, *Backstepping boundary control of navier-stokes channel Low: A 3d extension*. Proceedings of the 2006 American Control Conference, vol. WeB02.1, p. 6, 2006.
- [55] Kalman, R.E. and Bertran, J.E. *Control Systems Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov, I: Continuous-time Systems*, *J. Basic Engineer Trans. ASME* 82, Vol. 2, pps. 371-393, 1960.
- [56] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.
- [57] Knobloch H., Isidori A. and FLocherzi D. *Topics in Control Theory*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1993.
- [58] E.B. Kosmatopulos, M.M. Polycarpou, M.A. Christodoulou and P.A. Ioamps *High order NN structures for Identification of Dynamics Systems*, *IEEE Trans., NN*, Vol. 6, No. 2, 421-422, 1995.
- [59] B. Z. B. A. Krstic, M; Guo and A. Smyshlyaev, *Observer based boundary control of an unstable wave equation*. Proceedings of the 2007 American Control Conference, vol. WeC19.2, p. 6, 2007.
- [60] M. Krstic and A. Smyshlyaev, *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*, U. S. of America, Ed. SIAM, 2008.
- [61] I. Krstic, M; Kanellakopoulos and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, N. York, Ed. Wiley, 1995.
- [62] A.J. Krener and W. Respondek. *Nonlinear observers with linealizable error dynamics*. *SIAM J. Control. Optim.*, 23:197216, 1985.
- [63] Karl Kunisch and Kazufumi Ito *Optimal Control of Parabolic Variational Inequalities*, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, Volume 93, Issue 4, Pages 329360, 2010.
- [64] Kalman, R.E. and Bertran, J.E. *Control Systems Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov, I: Continuous-time Systems*, *J. Basic Engineer Trans. ASME* 82, Vol. 2, pps. 371-393, 1960.



- [65] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.
- [66] I. E. Lagaris, A. Likas, and D. I. Fotiadis, *Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations* IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 9, no. 5, pp. 987-1000, September 1998.
- [67] F.L. Lewis, A. Yesildirek and K. Liu, *Multilayer neural-net robot controller with guaranteed tracking performance*. IEEE Trans. Neural Network, vol. 7, No. 2, pp. 1-11, 1996.
- [68] N. Mai-Duy and T. Tran-Cong, *Numerical solution of differential equations using multiquadric radial basis function networks* Neural Networks, vol. 14, pp. 185-199, 2001.
- [69] Magni, P., Terranova, N., Del Bene, F., Germani, M., De Nicolao, G., *A minimal model of tumor growth inhibition in combination regimens under the hypothesis of no interaction between drugs*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Volume PP, Issue:99, pages 1-14, 2012.
- [70] K.S. Narendra and S. Mukhopadhyak, *Adaptive Control Using NN and Approximate Models*, IEEE Trans. NN, Vol. 8, No. 3, 475-485, 1997.
- [71] Tohuru Nitta, et al, *Complex-Valued Neural Networks: Utilizing High-Dimensional Parameters*, Information Science Reference, United Kingdom, 978-160566-215-2, 2009.
- [72] Nguyen, D. H. and Widrow, B., *Neural Networks for Self-Learning Control Systems*, *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 10 pp. 18-23, 1990.
- [73] Y. Orlov and D. Dochain, *Discontinuous feedback stabilization of minimum-phase semilinear infinite-dimensional systems with application to chemical tubular reactor*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, p. 12, 2002.
- [74] Takehiko Owaga, Takushoku *Complex-Valued Neural Network and Inverse Problems*, Chapter II, Complex Valued Neural Networks, pp. 27-34, 2009.
- [75] Okamura, A.M. and Simone, C. and O'Leary, M.D., *Force modeling for needle insertion into soft tissue*, Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, Volume 51, Number 10, pages 1707-1716, 2004.
- [76] Patricia Pelle, Carlos D'Attellis, *Analysis of the BSB Model Dynamics Using Control Theory*. Neural Processing Letters 22(3): 345-359, 2005.

- [77] A. Poznyak, *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers*, Vol. 1, Deterministic Technique, Elsevier, 2008.
- [78] A. Poznyak, E. Sanchez, and W. Yu, *Differential Neural Networks for Robust Nonlinear Control (Identification, Estate Estimation an trajectory Tracking)*. Worl Scientific, 2001.
- [79] A. Poznyak, *Sliding Modes: From Principles to Implementation*. IEEE Press, 2001, ch. Chapter 3: Deterministic Output Noise Effects in Sliding Mode Observation, pp. 123-146.
- [80] Paragios, N., *Variational methods and partial differential equations in cardiac image analysis*, IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: Nano to Macro, CERTIS, Ecole Nat. des Ponts et Chaussees, France, Volumen 1, pages 17-20, 2004.
- [81] Petravic, M., Petravic, G.K., Roberts, K.V., Automatic production of programmes for solving partial dfferential equations by finite difference methods, *Computer Physics Communications* 4, 82-88, 1972.
- [82] R. Rabenstein, L. Trautmann, *Solution of Vector Partial Differential Equations by Transfer Function Models*, IEEE Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), Vol. 5, IEEE, Orlando, USA, pp. 21-24, Jun. 1999.
- [83] Razumovskii, S.D. and Zaikov, G.E. *Ozone and its reactions with organic compounds* Elsevier, 1984.
- [84] G.A. Rovithakis and M.A. Christodoulou, *Adaptive Control of Unknown Plants Using Dinamical NN*, IEEE Transactions and Systems, Vol. 24, 400-412, 1994.
- [85] Md. Rajibul Islam and Norma Alias, *A Case Study: 2D Vs 3D Partial Differential Equation toward Tumour Cell Visualisation on Multi-Core Parallel Computing Atmosphere*, *International Journal for the Advancement of Science and Arts*, Vol.10, No. 1, 2010, pp. 25-35.
- [86] Radetzky, A. and Nurnberger, A. and Pretschner, D.P., *Simulation of elastic tissues in virtual medicine using neuro-fuzzy systems*, *Medical Imaging*, pages 399-409, 1998.

- [87] Srinivasa, et.al., A Complex-Valued Hopfield Neural Network: Dynamics and Applications *Complex-Valued Neural Network and Inverse Problems*, Chapter IV, Complex Valued Neural Networks, pp. 79-104, 2009.
- [88] G. D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations: Infinite difference methods*. Oxford: Clarendon Press, 1978.
- [89] Shirvany, Y., Hayati, M., Moradian, R., Multilayer perceptron neural network with novel unsupervised training method for the solution of partial differential equations, *Applied Soft Computing* 9, 20-29, 2009.
- [90] Slotine J.J.E. *Sliding controller design for nonlinear systems*. International Journal of control, 40, 421-434, 1984.
- [91] Endre Süli y David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis* Cambridge University Press, 2003.
- [92] Tsoi, A. C. and Back, A. D., *Locally Recurrent Globally Feedforward Networks: A Critical Review of Architectures*, *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol.5, No. 2, March 1994, pp. 229-239.
- [93] Thomee, V., *From finite differences to finite elements: a short history of numerical analysis of partial differential equations*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 128, 1-54, 2001.
- [94] Tseng, A.A., Gu, S.X., A finite difference scheme with arbitrary mesh system for solving high order partial differential equations, *Computers structures* 31, 319-328, 1989.
- [95] Tsoulos, I.G., Gavrilis, D., Glavas, E., Solving differential equations with constructed neural networks, *Neurocomputing* 72, 2385-2391, 2009.
- [96] D. Triantafyllidis and D. Labridis, A finite-element mesh generator based on growing neural networks, *Neural Networks, IEEE Transactions on*, vol. 13, no. 6, pp. 1482-1496, 2002.
- [97] Wen Yu, Xiaoon Li, *Some Stability properties of Dynamic NN*, *IEEE Tran. Circuits and Systems, Part I*, Vol. 48, No. 2, 159-256, 2001.
- [98] Young, N., *An introduction to Hilbert space*, Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

- [99] Zhao Zheng and Yu Xuegang, *Hyperbolic Schrödinger Equation*, Advances in Applied Clifford Algebras 14 No. 2, 207-213 (2004).

## 12.1. Apéndice A

### 12.1.1. Prueba de la convergencia del Error de Identificación para EDP en 2D usando RND

*Teorema Principal Capítulo 2:* Considere la función tipo Lyapunov definida como la composición de  $NM$  funciones individuales de Lyapunov  $\bar{V}_{i,j}(t)$  a lo largo del espacio completo:

$$V(t) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \left[ \bar{V}^{i,j}(t) + \sum_{r=1}^6 \text{tr} \left\{ [\tilde{W}_r^i(t)]^\top K_r \tilde{W}_r^i(t) \right\} \right] \quad (12.1)$$

$$\bar{V}^{i,j}(t) := \|\tilde{u}^{i,j}(t)\|_{P^{i,j}}^2 + \|\tilde{u}_x^{i,j}(t)\|_{S_1^{i,j}}^2 + \|\tilde{u}_y^{i,j}(t)\|_{S_2^{i,j}}^2$$

La derivada en el tiempo  $\dot{V}(t)$  de  $V(t)$  puede ser obtenida usando las expresiones correspondientes

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}^{i,j}(t) = \hat{u}_t^{i,j}(t) - u_t^{i,j}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}_x^{i,j}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \hat{u}_x^{i,j}(t) - u_x^{i,j}(t) \right], \quad \frac{d}{dt} \tilde{u}_y^{i,j}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \hat{u}_y^{i,j}(t) - u_y^{i,j}(t) \right]$$

de forma tal que

$$\dot{V}(t) = 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M (\tilde{u}^{i,j}(t))^\top (t) P^{i,j} \frac{d}{dt} \tilde{u}^{i,j}(t) + 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \left[ \tilde{u}_x^{i,j}(t) \right]^\top S_1^{i,j} \frac{d}{dt} \tilde{u}_x^{i,j}(t) +$$

$$2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \left[ \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right]^\top S_2^{i,j} \frac{d}{dt} \tilde{u}_y^{i,j}(t) + 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^3 \text{tr} \left\{ \left[ \tilde{W}_r^{i,j}(t) \right]^\top K_r \dot{\tilde{W}}_r^{i,j}(t) \right\} \quad (12.2)$$

i) El término  $2 (\tilde{u}^{i,j}(t))^T P^{i,j} \frac{d}{dt} \tilde{u}^{i,j}(t)$  puede ser estimado como sigue:

$$\begin{aligned}
& 2 (\tilde{u}^{i,j}(t))^T P^{i,j} \frac{d}{dt} \tilde{u}^{i,j}(t) \leq (\tilde{u}^{i,j}(t))^T (P^{i,j} A^{i,j} + (A^{i,j})^T P^{i,j}) \tilde{u}^{i,j}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i,j}(t))^T P^{i,j} \left[ \sum_{r=1}^6 \tilde{W}_r^{i,j} \Lambda_r (\tilde{W}_r^{i,j})^T \right] P^{i,j} \tilde{u}^{i,j}(t) + (\tilde{u}^{i,j}(t))^T P^{i,j} \Lambda_7 P^{i,j} \tilde{u}^{i,j}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i,j}(t))^T \sigma^T \Lambda_1^{-1} \sigma \tilde{u}^{i,j}(t) + (\tilde{u}^{i-1,j}(t))^T (\varphi^1)^T \Lambda_2^{-1} \varphi^1 \tilde{u}^{i-1,j}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i-2,j}(t))^T (\gamma^1)^T \Lambda_3^{-1} \gamma^1 \tilde{u}^{i-2,j}(t) + (\tilde{u}^{i,j-1}(t))^T (\varphi^2)^T \Lambda_4^{-1} \varphi^2 \tilde{u}^{i,j-1}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i,j-2}(t))^T (\gamma^2)^T \Lambda_5^{-1} \gamma^2 \tilde{u}^{i,j-2}(t) + (\tilde{u}^{i-1,j-1}(t))^T (\psi)^T \Lambda_6^{-1} \psi \tilde{u}^{i-1,j-1}(t) + \\
& (\tilde{f}^{i,j}(t))^T \Lambda_7^{-1} \tilde{f}^{i,j}(t) + 2 (\tilde{u}^{i,j}(t))^T P^{i,j} \tilde{W}_1^{i,j}(t) \sigma \hat{u}^{i,j}(t) + \\
& 2 (\tilde{u}^{i,j}(t))^T P^{i,j} \tilde{W}_2^{i,j}(t) \varphi^1 \hat{u}^{i-1,j}(t) + 2 (\tilde{u}^{i,j}(t))^T P^{i,j} \tilde{W}_3^{i,j}(t) \gamma^1 \hat{u}^{i-2,j}(t) + \\
& 2 (\tilde{u}^{i,j}(t))^T P^{i,j} \tilde{W}_4^{i,j}(t) \varphi^2 \hat{u}^{i,j-1}(t) + 2 (\tilde{u}^{i,j}(t))^T P^{i,j} \tilde{W}_5^{i,j}(t) \gamma^2 \hat{u}^{i,j-2}(t) + \\
& 2 (\tilde{u}^{i,j}(t))^T P^{i,j} \tilde{W}_6^{i,j}(t) \psi \hat{u}^{i-1,j-1}(t)
\end{aligned}$$

Aqui  $\sigma$  representa a  $\sigma(x^i, y^j)$ , lo mismo que  $\gamma = \gamma(x^i, y^j)$ ,  $\varphi = \varphi(x^i, y^j)$  y  $\psi = \psi(x^i, y^j)$

ii) Para el término  $2 \left[ \tilde{u}_x^{i,j}(t) \right]^T S_1^{i,j} \frac{d}{dt} \tilde{u}_x^{i,j}(t)$  se tiene

$$\begin{aligned}
& 2 \left[ \tilde{u}_x^{i,j}(t) \right]^T S_1^{i,j} \frac{d}{dt} \tilde{u}_x^{i,j}(t) \leq (\tilde{u}_x^{i,j}(t))^T \left( S_1^{i,j} A^{i,j} + (A^{i,j})^T S_1^{i,j} \right) \tilde{u}_x^{i,j}(t) + \\
& (\tilde{u}_x^{i,j}(t))^T S_1^{i,j} \left[ \sum_{r=1}^6 \tilde{W}_r^{i,j} \Lambda_{r+7} (\tilde{W}_r^{i,j})^T \right] S_1^{i,j} \tilde{u}_x^{i,j}(t) + (\tilde{u}_x^{i,j}(t))^T (\sigma_x)^T \Lambda_8^{-1} \sigma_x \tilde{u}_x^{i,j}(t) + \\
& (\tilde{u}_x^{i-1,j}(t))^T (\varphi_x^1)^T \Lambda_9^{-1} \varphi_x^1 \tilde{u}_x^{i-1,j}(t) + (\tilde{u}_x^{i-2,j}(t))^T (\gamma_x^1)^T \Lambda_{10}^{-1} \gamma_x^1 \tilde{u}_x^{i-2,j}(t) + \\
& (\tilde{u}_x^{i,j-1}(t))^T (\varphi_x^2)^T \Lambda_{11}^{-1} \varphi_x^2 \tilde{u}_x^{i,j-1}(t) + (\tilde{u}_x^{i,j-2}(t))^T (\gamma_x^2)^T \Lambda_{12}^{-1} \gamma_x^2 \tilde{u}_x^{i,j-2}(t) + \\
& (\tilde{u}_x^{i-1,j-1}(t))^T (\psi_x)^T \Lambda_{13}^{-1} \psi_x \tilde{u}_x^{i-1,j-1}(t) + (\tilde{u}_x^{i,j}(t))^T S_1^{i,j} \Lambda_{14} S_1^{i,j} \tilde{u}_x^{i,j}(t) + \\
& 2 (\tilde{u}_x^{i,j}(t))^T S_1^{i,j} \tilde{W}_1^{i,j}(t) \sigma_x \hat{u}_x^{i,j}(t) + 2 (\tilde{u}_x^{i,j}(t))^T S_1^{i,j} \tilde{W}_2^{i,j}(t) \varphi_x^1 \hat{u}_x^{i-1,j}(t) + \\
& 2 (\tilde{u}_x^{i,j}(t))^T S_1^{i,j} \tilde{W}_3^{i,j}(t) \gamma_x^1 \hat{u}_x^{i-2,j}(t) + 2 (\tilde{u}_x^{i,j}(t))^T S_1^{i,j} \tilde{W}_4^{i,j}(t) \varphi_x^2 \hat{u}_x^{i,j-1}(t) + \\
& 2 (\tilde{u}_x^{i,j}(t))^T S_1^{i,j} \tilde{W}_5^{i,j}(t) \gamma_x^2 \hat{u}_x^{i,j-2}(t) + 2 (\tilde{u}_x^{i,j}(t))^T S_1^{i,j} \tilde{W}_6^{i,j}(t) \psi_x \hat{u}_x^{i-1,j-1}(t) + \\
& (\tilde{f}_x^{i,j}(t))^T \Lambda_{14}^{-1} \tilde{f}_x^{i,j}(t)
\end{aligned}$$

iii) Para el término  $2 \left[ \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right]^\top S_2^{i,j} \frac{d}{dt} \tilde{u}_y^{i,j}(t)$  se tiene

$$\begin{aligned}
& 2 \left[ \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right]^\top S_2^{i,j} \frac{d}{dt} \tilde{u}_y^{i,j}(t) \leq \left( \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right)^\top \left( S_2^{i,j} A^{i,j} + (A^{i,j})^\top S_2^{i,j} \right) \tilde{u}_y^{i,j}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right)^\top S_2^{i,j} \left[ \sum_{r=1}^6 \tilde{W}_r^{i,j} \Lambda_{r+14} \left( \tilde{W}_r^{i,j} \right)^\top \right] S_2^{i,j} \tilde{u}_y^{i,j}(t) + \left( \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right)^\top S_2^{i,j} \Lambda_{21} S_2^{i,j} \tilde{u}_y^{i,j}(t) + \\
& \left( \tilde{u}^{i,j}(t) \right)^\top \sigma_x^\top \Lambda_{15}^{-1} \sigma_x \tilde{u}^{i,j}(t) + \left( \tilde{u}^{i-1,j}(t) \right)^\top \left( \varphi_x^1 \right)^\top \Lambda_{16}^{-1} \varphi_x^1 \tilde{u}^{i-1,j}(t) + \\
& \left( \tilde{u}^{i-2,j}(t) \right)^\top \left( \gamma_x^1 \right)^\top \Lambda_{17}^{-1} \gamma_x^1 \tilde{u}^{i-2,j}(t) + \left( \tilde{u}^{i,j-1}(t) \right)^\top \left( \varphi_x^2 \right)^\top \Lambda_{18}^{-1} \varphi_x^2 \tilde{u}^{i,j-1}(t) + \\
& \left( \tilde{u}^{i,j-2}(t) \right)^\top \left( \gamma_x^2 \right)^\top \Lambda_{19}^{-1} \gamma_x^2 \tilde{u}^{i,j-2}(t) + \left( \tilde{u}^{i-1,j-1}(t) \right)^\top \left( \psi_x \right)^\top \Lambda_{20}^{-1} \psi_x \tilde{u}^{i-1,j-1}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right)^\top S_2^{i,j} \tilde{W}_1^{i,j}(t) \sigma_x \hat{u}^{i,j}(t) + 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right)^\top S_2^{i,j} \tilde{W}_2^{i,j}(t) \varphi_x^1 \hat{u}^{i-1,j}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right)^\top S_2^{i,j} \tilde{W}_3^{i,j}(t) \gamma_x^1 \hat{u}^{i-2,j}(t) + 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right)^\top S_2^{i,j} \tilde{W}_4^{i,j}(t) \varphi_x^2 \hat{u}^{i,j-1}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right)^\top S_2^{i,j} \tilde{W}_5^{i,j}(t) \gamma_x^2 \hat{u}^{i,j-2}(t) + 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right)^\top S_2^{i,j} \tilde{W}_6^{i,j}(t) \psi_x \hat{u}^{i-1,j-1}(t) + \\
& \left( \tilde{f}_x^{i,j}(t) \right)^\top \Lambda_{21}^{-1} \tilde{f}_x^{i,j}(t)
\end{aligned}$$

donde la desigualdad matricial [77]

$$XY^\top + YX^\top \leq X\Lambda X^\top + Y\Lambda^{-1}Y^\top$$

es válida para cualquier  $X, Y \in R^{r \times s}$  y para cualquier  $0 < \Lambda = \Lambda^\top \in R^{s \times s}$  ha sido aplicado a los términos que continen  $\tilde{f}^i(t)$  y sus derivadas. Finalmente la siguiente desigualdad se cumple

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) & \leq I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) - 2 \sum_{r=1}^6 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \text{tr} \left\{ \left( \tilde{W}_r^{i,j}(t) \right)^\top K_r \tilde{W}_r^{i,j}(t) \right\} \\
& + 2 \sum_{r=1}^6 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \text{tr} \left\{ \left( \tilde{W}_r^{i,j}(t) \right)^\top K_r^2 \tilde{W}_1^{i,j}(t) \right\} - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \alpha \bar{V}^{i,j}(t) + \varpi \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{s=1}^3 f_s^{i,j}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
I_1(t) & := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \left( \tilde{u}^{i,j}(t) \right)^\top \text{Ric} \left( P^{i,j} \right) \tilde{u}^{i,j}(t) \\
I_2(t) & := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \left( \tilde{u}_x^{i,j}(t) \right)^\top \text{Ric} \left( S_1^{i,j} \right) \tilde{u}_x^{i,j}(t) \\
I_3(t) & := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \left( \tilde{u}_y^{i,j}(t) \right)^\top \text{Ric} \left( S_2^{i,j} \right) \tilde{u}_y^{i,j}(t)
\end{aligned}$$

De las ecuaciones de Riccati definidas en (6.11),  $I_1(t) = I_2(t) = I_3(t) = 0$  y en vista de las ecuaciones de ajuste de los pesos (3.9), la desigualdad anterior se simplifica a

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \bar{V}^{i,j}(t) + \Psi$$

Aplicando el lema dado en [78], la prueba se completa.  $\square$

## 12.2. Apéndice B

### 12.2.1. Prueba de la convergencia del Error de Identificación para EDP en 3D usando RND

*Teorema Principal del Capítulo 3:* Siguiendo la prueba para el caso dos dimensional, considerese la funcional de Lyapunov definida como la composición de  $NML$  funciones de Lyapunov individuales  $\bar{V}_{i,j,k}(t)$  a lo largo de todo el espacio:

$$V(t) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left[ \bar{V}^{i,j,k}(t) + \sum_{r=1}^{11} \text{tr} \left\{ [\tilde{W}_r^i(t)]^\top K_r \tilde{W}_r^i(t) \right\} \right] \quad (12.3)$$

$$\bar{V}^{i,j,k}(t) := \left\| \tilde{u}_t^{i,j,k}(t) \right\|_{P^{i,j,k}}^2 + \left\| \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \right\|_{S_1^{i,j,k}}^2 + \left\| \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \right\|_{S_2^{i,j,k}}^2 + \left\| \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) \right\|_{S_3^{i,j,k}}^2$$

La derivada en el tiempo  $\dot{V}(t)$  de  $V(t)$  puede ser obtenida usando las expresiones correspondientes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{u}_t^{i,j,k}(t) &= \hat{u}_t^{i,j,k}(t) - u_t^{i,j,k}(t) \frac{d}{dt} \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \hat{u}_x^{i,j,k}(t) - u_x^{i,j,k}(t) \right], \\ \frac{d}{dt} \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \hat{u}_y^{i,j,k}(t) - u_y^{i,j,k}(t) \right], \quad \frac{d}{dt} \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \hat{u}_z^{i,j,k}(t) - u_z^{i,j,k}(t) \right] \end{aligned}$$

es así que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left( \tilde{u}^{i,j,k}(t) \right)^\top (t) P^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}^{i,j,k}(t) + 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left[ \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \right]^\top S_1^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) + \\ & 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left[ \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \right]^\top S_2^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) + 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left[ \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) \right]^\top S_3^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) + \\ & 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \sum_{r=1}^3 \text{tr} \left\{ \left[ \tilde{W}_r^{i,j,k}(t) \right]^\top K_r \tilde{W}_r^{i,j,k}(t) \right\} \end{aligned} \quad (12.4)$$



i) El término  $2(\tilde{u}^{i,j,k}(t))^T P^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}^{i,j,k}(t)$  puede ser estimado como sigue:

$$\begin{aligned}
& (\tilde{u}^{i,j,k}(t))^T P^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}^{i,j,k}(t) \leq (\tilde{u}^{i,j,k}(t))^T (P^{i,j,k} A^{i,j,k} + (A^{i,j,k})^T P^{i,j,k}) \tilde{u}^{i,j,k}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i,j,k}(t))^T P^{i,j,k} \left[ \sum_{r=1}^{11} \tilde{W}_r^{i,j,k} \Lambda_r (\tilde{W}_r^{i,j,k})^T \right] P^{i,j,k} \tilde{u}^{i,j,k}(t) + (\tilde{u}^{i,j,k}(t))^T P^{i,j,k} \Lambda_{12} P^{i,j,k} \tilde{u}^{i,j,k}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i,j,k}(t))^T (\sigma^1)^T \Lambda_1^{-1} \sigma^1 \tilde{u}^{i,j,k}(t) + (\tilde{u}^{i-1,j,k}(t))^T (\varphi^1)^T \Lambda_2^{-1} \varphi^1 \tilde{u}^{i-1,j,k}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i-2,j,k}(t))^T (\gamma^1)^T \Lambda_3^{-1} \gamma^1 \tilde{u}^{i-2,j,k}(t) + (\tilde{u}^{i,j-1,k}(t))^T (\varphi^2)^T \Lambda_4^{-1} \varphi^2 \tilde{u}^{i,j-1,k}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i,j-2,k}(t))^T (\gamma^2)^T \Lambda_5^{-1} \gamma^2 \tilde{u}^{i,j-2,k}(t) + (\tilde{u}^{i,j,k-1}(t))^T (\varphi^3)^T \Lambda_6^{-1} \varphi^3 \tilde{u}^{i,j,k-1}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i,j,k-2}(t))^T (\gamma^3)^T \Lambda_7^{-1} \gamma^3 \tilde{u}^{i,j,k-2}(t) + (\tilde{u}^{i-1,j-1,k}(t))^T (\psi^1)^T \Lambda_8^{-1} \psi^1 \tilde{u}^{i-1,j-1,k}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i,j-1,k-1}(t))^T (\psi^2)^T \Lambda_9^{-1} \psi^2 \tilde{u}^{i,j-1,k-1}(t) + (\tilde{u}^{i-1,j,k-1}(t))^T (\psi^3)^T \Lambda_{10}^{-1} \psi^3 \tilde{u}^{i-1,j,k-1}(t) + \\
& (\tilde{u}^{i-1,j-1,k-1}(t))^T (\sigma^2)^T \Lambda_{11}^{-1} \sigma^2 \tilde{u}^{i-1,j-1,k-1}(t) + (\tilde{f}^{i,j,k}(t))^T \Lambda_{12}^{-1} \tilde{f}^{i,j,k}(t) + \\
& 2(\tilde{u}^{i,j,k}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_1^{i,j,k}(t) \sigma^1 \hat{u}^{i,j,k}(t) + 2(\tilde{u}^{i-1,j,k}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_2^{i,j,k}(t) \varphi^1 \hat{u}^{i-1,j,k}(t) + \\
& 2(\tilde{u}^{i-2,j,k}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_3^{i,j,k}(t) \gamma^1 \hat{u}^{i-2,j,k}(t) + 2(\tilde{u}^{i,j-1,k}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_4^{i,j,k}(t) \varphi^2 \hat{u}^{i,j-1,k}(t) + \\
& 2(\tilde{u}^{i,j-2,k}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_5^{i,j,k}(t) \gamma^2 \hat{u}^{i,j-2,k}(t) + 2(\tilde{u}^{i,j,k-1}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_6^{i,j,k}(t) \varphi^3 \hat{u}^{i,j,k-1}(t) + \\
& 2(\tilde{u}^{i,j,k-2}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_7^{i,j,k}(t) \gamma^3 \hat{u}^{i,j,k-2}(t) + 2(\tilde{u}^{i-1,j-1,k}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_8^{i,j,k}(t) \psi^1 \hat{u}^{i-1,j-1,k}(t) + \\
& 2(\tilde{u}^{i,j-1,k-1}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_9^{i,j,k}(t) \psi^2 \hat{u}^{i,j-1,k-1}(t) + 2(\tilde{u}^{i-1,j,k-1}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_{10}^{i,j,k}(t) \psi^3 \hat{u}^{i-1,j,k-1}(t) + \\
& 2(\tilde{u}^{i-1,j-1,k-1}(t))^T P^{i,j,k} \tilde{W}_{11}^{i,j,k}(t) \sigma^2 \hat{u}^{i-1,j-1,k-1}(t)
\end{aligned}$$

Aqui  $\sigma$  representa a  $\sigma(x^i, y^j, z^k)$ , lo mismo que  $\gamma = \gamma(x^i, y^j, z^k)$ ,  $\varphi = \varphi(x^i, y^j, z^k)$  y  $\psi = \psi(x^i, y^j, z^k)$

ii) Para el término  $2 \left[ \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \right]^T S_1^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}_x^{i,j,k}(t)$  se tiene

$$\begin{aligned}
& 2 \left[ \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \right]^T S_1^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \leq \left( \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \right)^T \left( S_1^{i,j,k} A^{i,j,k} + (A^{i,j,k})^T S_1^{i,j,k} \right) \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \right)^T S_1^{i,j,k} \left[ \sum_{r=1}^{11} \tilde{W}_r^{i,j,k} \Lambda_{r+7} \left( \tilde{W}_r^{i,j,k} \right)^T \right] S_1^{i,j,k} \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) + \left( \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \right)^T \left( \sigma_x^1 \right)^T \Lambda_8^{-1} \sigma_x^1 \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_x^{i-1,j,k}(t) \right)^T \left( \varphi_x^1 \right)^T \Lambda_9^{-1} \varphi_x^1 \tilde{u}_x^{i-1,j,k}(t) + \left( \tilde{u}_x^{i-2,j,k}(t) \right)^T \left( \gamma_x^1 \right)^T \Lambda_{10}^{-1} \gamma_x^1 \tilde{u}_x^{i-2,j,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_x^{i,j-1,k}(t) \right)^T \left( \varphi_x^2 \right)^T \Lambda_{11}^{-1} \varphi_x^2 \tilde{u}_x^{i,j-1,k}(t) + \left( \tilde{u}_x^{i,j-2,k}(t) \right)^T \left( \gamma_x^2 \right)^T \Lambda_{12}^{-1} \gamma_x^2 \tilde{u}_x^{i,j-2,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_x^{i,j,k-1}(t) \right)^T \left( \varphi_x^3 \right)^T \Lambda_{13}^{-1} \varphi_x^3 \tilde{u}_x^{i,j,k-1}(t) + \left( \tilde{u}_x^{i,j,k-2}(t) \right)^T \left( \gamma_x^3 \right)^T \Lambda_{14}^{-1} \gamma_x^3 \tilde{u}_x^{i,j,k-2}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_x^{i-1,j-1,k}(t) \right)^T \left( \psi_x^1 \right)^T \Lambda_{15}^{-1} \psi_x^1 \tilde{u}_x^{i-1,j-1,k}(t) + \left( \tilde{u}_x^{i,j-1,k-1}(t) \right)^T \left( \psi_x^2 \right)^T \Lambda_{16}^{-1} \psi_x^2 \tilde{u}_x^{i,j-1,k-1}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_x^{i-1,j,k-1}(t) \right)^T \left( \psi_x^3 \right)^T \Lambda_{17}^{-1} \psi_x^3 \tilde{u}_x^{i-1,j,k-1}(t) + \left( \tilde{u}_x^{i-1,j-1,k-1}(t) \right)^T \left( \sigma_x^2 \right)^T \Lambda_{18}^{-1} \sigma_x^2 \tilde{u}_x^{i-1,j-1,k-1}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \right)^T S_1^{i,j,k} \Lambda_{19} S_1^{i,j,k} \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) + 2 \left( \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \right)^T S_1^{i,j} \tilde{W}_1^{i,j,k}(t) \sigma_x^1 \hat{u}_x^{i,j,k}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_x^{i-1,j,k}(t) \right)^T S_1^{i,j} \tilde{W}_2^{i,j,k}(t) \varphi_x^1 \hat{u}_x^{i-1,j,k}(t) + 2 \left( \tilde{u}_x^{i-2,j,k}(t) \right)^T S_1^{i,j} \tilde{W}_3^{i,j,k}(t) \gamma_x^1 \hat{u}_x^{i-2,j,k}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_x^{i,j-1,k}(t) \right)^T S_1^{i,j} \tilde{W}_4^{i,j,k} \varphi_x^2 \hat{u}_x^{i,j-1,k}(t) + 2 \left( \tilde{u}_x^{i,j-2,k}(t) \right)^T S_1^{i,j,k} \tilde{W}_5^{i,j,k} \gamma_x^2 \hat{u}_x^{i,j-2,k}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_x^{i,j,k-1}(t) \right)^T S_1^{i,j,k} \tilde{W}_4^{i,j,k} \varphi_x^3 \hat{u}_x^{i,j,k-1}(t) + 2 \left( \tilde{u}_x^{i,j,k-2}(t) \right)^T S_1^{i,j,k} \tilde{W}_5^{i,j,k} \gamma_x^3 \hat{u}_x^{i,j,k-2}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_x^{i-1,j-1,k}(t) \right)^T S_1^{i,j,k} \tilde{W}_6^{i,j,k} \psi_x^1 \hat{u}_x^{i-1,j-1,k}(t) + 2 \left( \tilde{u}_x^{i,j-1,k-1}(t) \right)^T S_1^{i,j,k} \tilde{W}_6^{i,j,k} \psi_x^2 \hat{u}_x^{i,j-1,k-1}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_x^{i-1,j,k-1}(t) \right)^T S_1^{i,j,k} \tilde{W}_6^{i,j,k} \psi_x^3 \hat{u}_x^{i-1,j,k-1}(t) + 2 \left( \tilde{u}_x^{i-1,j-1,k-1}(t) \right)^T S_1^{i,j} \tilde{W}_1^{i,j,k}(t) \sigma_x^2 \hat{u}_x^{i-1,j-1,k-1}(t) + \\
& \left( \tilde{f}_x^{i,j}(t) \right)^T \Lambda_{14}^{-1} \tilde{f}_x^{i,j}(t)
\end{aligned}$$

iii) Para el término  $2 \left[ \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \right]^T S_2^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}_y^{i,j,k}(t)$  se tiene

$$\begin{aligned}
& 2 \left[ \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \right]^T S_2^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \leq \left( \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \right)^T \left( S_2^{i,j,k} A^{i,j,k} + (A^{i,j,k})^T S_2^{i,j,k} \right) \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \left[ \sum_{r=1}^{11} \tilde{W}_r^{i,j,k} \Lambda_{r+14} \left( \tilde{W}_r^{i,j,k} \right)^T \right] S_2^{i,j,k} \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) + \left( \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \Lambda_{21} S_2^{i,j,k} \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \right)^T \sigma_y^1 \Lambda_{15}^{-1} \sigma_y^1 \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) + \left( \tilde{u}_y^{i-1,j,k}(t) \right)^T \left( \varphi_y^1 \right)^T \Lambda_{16}^{-1} \varphi_y^1 \tilde{u}_y^{i-1,j,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_y^{i-2,j,k}(t) \right)^T \left( \gamma_y^1 \right)^T \Lambda_{17}^{-1} \gamma_y^1 \tilde{u}_y^{i-2,j,k}(t) + \left( \tilde{u}_y^{i,j-1,k}(t) \right)^T \left( \varphi_y^2 \right)^T \Lambda_{18}^{-1} \varphi_y^2 \tilde{u}_y^{i,j-1,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_y^{i,j-2,k}(t) \right)^T \left( \gamma_y^2 \right)^T \Lambda_{19}^{-1} \gamma_y^2 \tilde{u}_y^{i,j-2,k}(t) + \left( \tilde{u}_y^{i,j,k-1}(t) \right)^T \left( \varphi_y^3 \right)^T \Lambda_{18}^{-1} \varphi_y^3 \tilde{u}_y^{i,j,k-1}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_y^{i,j,k-2}(t) \right)^T \left( \gamma_y^3 \right)^T \Lambda_{19}^{-1} \gamma_y^3 \tilde{u}_y^{i,j,k-2}(t) + \left( \tilde{u}_y^{i-1,j-1,k}(t) \right)^T \left( \psi_y^1 \right)^T \Lambda_{20}^{-1} \psi_y^1 \tilde{u}_y^{i-1,j-1,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_y^{i,j-1,k-1}(t) \right)^T \left( \psi_y^2 \right)^T \Lambda_{20}^{-1} \psi_y^2 \tilde{u}_y^{i,j-1,k-1}(t) + \left( \tilde{u}_y^{i-1,j,k-1}(t) \right)^T \left( \psi_y^3 \right)^T \Lambda_{20}^{-1} \psi_y^3 \tilde{u}_y^{i-1,j,k-1}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_y^{i-1,j-1,k-1}(t) \right)^T \left( \sigma_y^2 \right)^T \Lambda_{15}^{-1} \sigma_y^2 \tilde{u}_y^{i-1,j-1,k-1}(t) + 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_1^{i,j,k}(t) \sigma_y^1 \hat{u}_y^{i,j,k}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_y^{i-1,j,k}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_2^{i,j,k}(t) \varphi_y^1 \hat{u}_y^{i-1,j,k}(t) + 2 \left( \tilde{u}_y^{i-2,j,k}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_3^{i,j,k}(t) \gamma_y^1 \hat{u}_y^{i-2,j,k}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j-1,k}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_4^{i,j,k} \varphi_y^2 \hat{u}_y^{i,j-1,k}(t) + 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j-2,k}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_5^{i,j,k} \gamma_y^2 \hat{u}_y^{i,j-2,k}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j,k-1}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_4^{i,j,k} \varphi_y^3 \hat{u}_y^{i,j,k-1}(t) + 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j,k-2}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_5^{i,j,k} \gamma_y^3 \hat{u}_y^{i,j,k-2}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_y^{i-1,j-1,k}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_6^{i,j,k} \psi_y^1 \hat{u}_y^{i-1,j-1,k}(t) + 2 \left( \tilde{u}_y^{i,j-1,k-1}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_6^{i,j,k} \psi_y^2 \hat{u}_y^{i,j-1,k-1}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_y^{i-1,j,k-1}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_6^{i,j,k} \psi_y^3 \hat{u}_y^{i-1,j,k-1}(t) + 2 \left( \tilde{u}_y^{i-1,j-1,k-1}(t) \right)^T S_2^{i,j,k} \tilde{W}_1^{i,j,k}(t) \sigma_y^2 \hat{u}_y^{i-1,j-1,k-1}(t) + \\
& \left( \tilde{f}_y^{i,j,k}(t) \right)^T \Lambda_{21}^{-1} \tilde{f}_y^{i,j,k}(t)
\end{aligned}$$

iv) Para el término  $2 \left[ \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) \right]^\top S_3^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}_z^{i,j,k}(t)$  se tiene

$$\begin{aligned}
& 2 \left[ \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) \right]^\top S_3^{i,j,k} \frac{d}{dt} \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) \leq \left( \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) \right)^\top \left( S_3^{i,j,k} A^{i,j,k} + (A^{i,j,k})^\top S_3^{i,j,k} \right) \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \left[ \sum_{r=1}^{11} \tilde{W}_r^{i,j,k} \Lambda_{r+21} \left( \tilde{W}_r^{i,j,k} \right)^\top \right] S_3^{i,j,k} \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) + \left( \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \Lambda_{21} S_3^{i,j,k} \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}^{i,j,k}(t) \right)^\top \left( \sigma_z^1 \right) \Lambda_{15}^{-1} \sigma_z^1 \tilde{u}^{i,j,k}(t) + \left( \tilde{u}^{i-1,j,k}(t) \right)^\top \left( \varphi_z^1 \right)^\top \Lambda_{16}^{-1} \varphi_z^1 \tilde{u}^{i-1,j,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}^{i-2,j,k}(t) \right)^\top \left( \gamma_z^1 \right)^\top \Lambda_{17}^{-1} \gamma_z^1 \tilde{u}^{i-2,j,k}(t) + \left( \tilde{u}^{i,j-1,k}(t) \right)^\top \left( \varphi_z^2 \right)^\top \Lambda_{18}^{-1} \varphi_z^2 \tilde{u}^{i,j-1,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}^{i,j-2,k}(t) \right)^\top \left( \gamma_z^2 \right)^\top \Lambda_{19}^{-1} \gamma_z^2 \tilde{u}^{i,j-2,k}(t) + \left( \tilde{u}^{i,j,k-1}(t) \right)^\top \left( \varphi_z^3 \right)^\top \Lambda_{20}^{-1} \varphi_z^3 \tilde{u}^{i,j,k-1}(t) + \\
& \left( \tilde{u}^{i,j,k-2}(t) \right)^\top \left( \gamma_z^3 \right)^\top \Lambda_{21}^{-1} \gamma_z^3 \tilde{u}^{i,j,k-2}(t) + \left( \tilde{u}^{i-1,j-1,k}(t) \right)^\top \left( \psi_z^1 \right)^\top \Lambda_{22}^{-1} \psi_z^1 \tilde{u}^{i-1,j-1,k}(t) + \\
& \left( \tilde{u}^{i,j-1,k-1}(t) \right)^\top \left( \psi_z^2 \right)^\top \Lambda_{23}^{-1} \psi_z^2 \tilde{u}^{i,j-1,k-1}(t) + \left( \tilde{u}^{i-1,j,k-1}(t) \right)^\top \left( \psi_z^3 \right)^\top \Lambda_{24}^{-1} \psi_z^3 \tilde{u}^{i-1,j,k-1}(t) + \\
& \left( \tilde{u}^{i-1,j-1,k-1}(t) \right)^\top \left( \sigma_z^2 \right)^\top \Lambda_{25}^{-1} \sigma_z^2 \tilde{u}^{i-1,j-1,k-1}(t) + 2 \left( \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_1^{i,j,k}(t) \sigma_z^1 \hat{u}^{i,j,k}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_z^{i-1,j,k}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_2^{i,j,k}(t) \varphi_z^1 \hat{u}^{i-1,j,k}(t) + 2 \left( \tilde{u}_z^{i-2,j,k}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_3^{i,j,k}(t) \gamma_z^1 \hat{u}^{i-2,j,k}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_z^{i,j-1,k}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_4^{i,j,k} \varphi_z^2 \hat{u}^{i,j-1,k}(t) + 2 \left( \tilde{u}_z^{i,j-2,k}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_5^{i,j,k} \gamma_z^2 \hat{u}^{i,j-2,k}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_z^{i,j,k-1}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_6^{i,j,k} \varphi_z^3 \hat{u}^{i,j,k-1}(t) + 2 \left( \tilde{u}_z^{i,j,k-2}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_7^{i,j,k} \gamma_z^3 \hat{u}^{i,j,k-2}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_z^{i-1,j-1,k}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_8^{i,j,k} \psi_z^1 \hat{u}^{i-1,j-1,k}(t) + 2 \left( \tilde{u}_z^{i,j-1,k-1}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_9^{i,j,k} \psi_z^2 \hat{u}^{i,j-1,k-1}(t) + \\
& 2 \left( \tilde{u}_z^{i-1,j,k-1}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_{10}^{i,j,k} \psi_z^3 \hat{u}^{i-1,j,k-1}(t) + 2 \left( \tilde{u}_z^{i-1,j-1,k-1}(t) \right)^\top S_3^{i,j,k} \tilde{W}_{11}^{i,j,k}(t) \sigma_z^2 \hat{u}^{i-1,j-1,k-1}(t) + \\
& \left( \tilde{f}_z^{i,j,k}(t) \right)^\top \Lambda_{26}^{-1} \tilde{f}_z^{i,j,k}(t)
\end{aligned}$$

Donde la desigualdad matricial [77]

$$XY^\top + YX^\top \leq X\Lambda X^\top + Y\Lambda^{-1}Y^\top$$

es válido para  $X, Y \in R^{r \times s}$  y para cualquier  $0 < \Lambda = \Lambda^\top \in R^{s \times s}$  ha sido aplicada a los términos que contienen  $\tilde{f}^i(t)$  y a sus derivadas. Finalmente, la siguiente desigualdad se logra

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) & \leq I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) - 2 \sum_{r=1}^{11} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L tr \left\{ \left( \tilde{W}_r^{i,j,k}(t) \right)^\top K_r \tilde{W}_r^{i,j,k}(t) \right\} \\
& + 2 \sum_{r=1}^{11} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L tr \left\{ \left( \tilde{W}_r^{i,j,k}(t) \right)^\top K_r^2 \tilde{W}_1^{i,j,k}(t) \right\} - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \alpha \bar{V}^{i,j,k}(t) + \varpi \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \sum_{s=1}^3 f_s^{i,j,k}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
I_1(t) & := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left( \tilde{u}^{i,j,k}(t) \right)^\top Ric \left( P^{i,j} \right) \tilde{u}^{i,j,k}(t) \\
I_2(t) & := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left( \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \right)^\top Ric \left( S_1^{i,j,k} \right) \tilde{u}_x^{i,j,k}(t) \\
I_3(t) & := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left( \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \right)^\top Ric \left( S_2^{i,j} \right) \tilde{u}_y^{i,j,k}(t) \\
I_4(t) & := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left( \tilde{u}_z^{i,j,k}(t) \right)^\top Ric \left( S_3^{i,j} \right) \tilde{u}_z^{i,j,k}(t)
\end{aligned}$$

Para las ecuaciones de Riccati, definidas en (6.11),  $I_1(t) = I_2(t) = I_3(t) = I_4(t) = 0$  y en vista de que las ecuaciones de ajuste de los pesos (3.9), la desigualdad anterior se simplifica a

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \bar{V}^{i,j,k}(t) + \Psi$$

Aplicando el Lema dado en [78], la prueba se completa.  $\square$

## 12.3. Apéndice C

### 12.3.1. Prueba de la convergencia del Error de Identificación para EDP Complejas usando RND

*Prueba del Teorema Principal Capítulo 3:* Considere la función de Lyapunov siguiente:

$$\begin{aligned} V(t) &:= \sum_{i=1}^N \int_{x=0}^1 \bar{V}_i(t, x) dx + \sum_{k=1}^6 \text{tr} \{ [\tilde{W}_k^i(t)]^\top K_k \tilde{W}_k^i(t) \} \\ \bar{V}_i(t, x) &:= \|\Delta_r^i(t, x)\|_{P_r^i}^2 + \|\Delta_{x,r}^i(t, x)\|_{S_r^i}^2 + \|\hat{u}_{i,r}(t, x)\|_{T_r^i}^2 \\ &\quad + \|\Delta_c^i(t, x)\|_{P_c^i}^2 + \|\Delta_{x,c}^i(t, x)\|_{S_c^i}^2 + \|\hat{u}_{i,c}(t, x)\|_{T_c^i}^2 \end{aligned} \quad (12.5)$$

Siguiendo el procedimiento del segundo método de Lyapunov, la derivada en el tiempo de  $V_t$  es

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2 \sum_{i=1}^N \int_{x=0}^1 (\Delta_r^i(t, x))^\top (t) P_r^i \frac{d}{dt} \Delta_r^i(t, x) dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{x=0}^1 [\Delta_{x,r}^i(t, x)]^\top S_r^i \frac{d}{dt} \Delta_{x,r}^i(t, x) dx \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \int_{x=0}^1 \hat{u}_{i,r}^\top(t, x) T_r^i \frac{d}{dt} \hat{u}_{i,r}(t, x) dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{x=0}^1 (\Delta_c^i(t, x))^\top (t) P_c^i \frac{d}{dt} \Delta_c^i(t, x) dx \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \int_{x=0}^1 [\Delta_{x,c}^i(t, x)]^\top S_c^i \frac{d}{dt} \Delta_{x,c}^i(t, x) dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{x=0}^1 \hat{u}_{i,c}^\top(t, x) T_c^i \frac{d}{dt} \hat{u}_{i,c}(t, x) dx \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^6 \text{tr} \{ [\tilde{W}_k^i(t)]^\top K_k \dot{\tilde{W}}_k^i(t) \} dx \end{aligned} \quad (12.6)$$

Usando los resultados para los términos  $2 (\Delta_r^i(t, x))^\top P_r^i \frac{d}{dt} \Delta_r^i(t, x)$ ,  $2 (\Delta_c^i(t, x))^\top P_c^i \frac{d}{dt} \Delta_c^i(t, x)$ ,  $2 [\Delta_{x,r}^i(t, x)]^\top S_r^i \frac{d}{dt} \Delta_{x,r}^i(t, x)$ ,  $2 [\Delta_{x,c}^i(t, x)]^\top S_c^i \frac{d}{dt} \Delta_{x,c}^i(t, x)$ ,  $2 \hat{u}_{i,r}^\top(t, x) T_r^i \frac{d}{dt} \hat{u}_{i,r}(t, x)$ ,  $2 \hat{u}_{i,c}^\top(t, x) T_c^i \frac{d}{dt} \hat{u}_{i,c}(t, x)$ , y la siguiente desigualdad matricial  $XY^\top + YX^\top \leq X\Lambda X^\top + Y\Lambda^{-1}Y^\top$  válida para cualquier  $X, Y \in R^{r \times s}$  y cualquier  $0 < \Lambda =$

$\Lambda^\top \in \mathbb{R}^{s \times s}$  la siguiente desigualdad se cumple

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq \sum_{x=0}^1 \sum_{i=1}^N [\Delta_D^i(t,x)]^\top \left[ P_D^i A_D^i + [A_D^i]^\top P_D^i + P_D^i \Lambda_{\alpha,D}^i P_D^i \right] \Delta_D^i(t,x) dx \\
&\quad + \sum_{x=0}^1 \sum_{i=1}^N \left( \Delta_{x,D}^i(t,x) \right)^\top \left( S_D^i A_D^i + [A_D^i]^\top S_D^i + S_D^i \Lambda_{S,D}^i S_D^i \right) \Delta_{x,D}^i(t,x) dx \\
&\quad + \sum_{x=0}^1 \sum_{i=1}^N u_{i,D}^\top \left( T_D^i A_D^i + [A_D^i]^\top T_D^i + T_D^i \Lambda_{T,D}^i T_D^i \right) \hat{u}_{i,D} dx \\
&\quad + \sum_{x=0}^1 \sum_{i=1}^N \lambda_{\max} \left( \Lambda_{P,D}^i \right)^{-1} \left( F_{0,D}^i \|u_i\|^2 + F_{1,D}^i \|u_{i-1}\|^2 + F_{2,D}^i \|u_{i-2}\|^2 + F_{3,D}^i \|\Delta^i(t,x)\|^2 + F_{4,D}^i \right) dx \\
&\quad + \sum_{x=0}^1 \sum_{i=1}^N \lambda_{\max} \left[ \Lambda_{S,D}^i \right]^{-1} \left( F_{5,D}^i \|\hat{u}_i\|^2 + F_{6,D}^i \|u_{i-1}\|^2 + F_{7,D}^i \|\hat{u}_{i-2}\|^2 + F_{9,D}^i + F_{8,D}^i \|\Delta_x^i(t,x)\|^2 \right) dx \\
&\quad + \sum_{x=0}^1 \sum_{i=1}^N 2 \left( \Delta_D^i(t,x) \right)^\top P_D^i \left( \tilde{W}_g^i(t) \sigma(\hat{x}_i) \hat{u}_i + \tilde{W}_h^i(t) \varphi(\hat{x}_i) \hat{u}_{i-1} + \tilde{W}_l^i(t) \gamma(\hat{x}_i) \hat{u}_{i-2} \right) dx \\
&\quad + \sum_{x=0}^1 \sum_{i=1}^N 2 \left( \Delta_{x,D}^i(t,x) \right)^\top S_D^i \left( \tilde{W}_g^i(x) \nabla_x \sigma(\hat{x}_i) \hat{u}_i + \tilde{W}_h^i(t) \nabla_x \varphi(\hat{x}_i) \hat{u}_{i-1} + \tilde{W}_l^i(t) \nabla_x \gamma(\hat{x}_i) u_{i-2} \right) dx \\
&\quad + \sum_{x=0}^1 \sum_{i=1}^N 2 u_{i,D}^\top T_D^i \left( W_g^i(t) \sigma(\hat{x}_i) \hat{u}_i(x,t) + W_h^i(t) \varphi(\hat{x}_i) u_{i-1} + W_l^i(x) \gamma(\hat{x}_i) u_{i-2} \right) dx \\
&\quad + \sum_{x=0}^1 \sum_{i=1}^N \lambda_{\max} \left( \Lambda_{T,D}^i \right)^{-1} \left( f_{0,D}^i \|u_i\|^2 + f_{1,D}^i \|u_{i-1}\|^2 + f_{2,D}^i \|u_{i-2}\|^2 + f_{4,D}^i \right) dx
\end{aligned}$$

donde  $D$  indica la correspondiente parte real (denotada por el subíndice  $r$ ) o la parte compleja (denotada por el subíndice  $c$ ), y  $h = 1, 4, g = 2, 5$  y  $l = 3, 6$ .

Por las ecuaciones de Riccati definidas en (6.11) y en vista de las ecuaciones de ajuste de los pesos (4.9), la desigualdad anterior se simplifica a

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -\alpha_m^i V(t) + \sum_{i=1}^N \left( \lambda_{\max} \left( \Lambda_{S,R}^i \right)^{-1} F_9^i \right) + \sum_{i=1}^N \left( \lambda_{\max} \left( \Lambda_{S,C}^i \right)^{-1} F_{9,c}^i \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \left( \lambda_{\max} \left( \Lambda_{T,R}^i \right)^{-1} f_3^i + \lambda_{\max} \left( \Lambda_{P,R}^i \right)^{-1} F_4^i \right) + \sum_{i=1}^N \left( \lambda_{\max} \left( \Lambda_{T,C}^i \right)^{-1} f_{3,c}^i + \lambda_{\max} \left( \Lambda_{P,C}^i \right)^{-1} F_{4,c}^i \right)
\end{aligned}$$

Tomando el máximo valor sobre  $i$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -\min_i \left( \alpha_m^i \right) V(t) + N \max_i \left( \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{P,R}^i \right]^{-1} \right) F_4^i \right) + N \max_i \left( \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{P,C}^i \right]^{-1} \right) F_{4,c}^i \right) \\
&\quad + N \max_i \left( \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{S,R}^i \right]^{-1} \right) F_9^i + \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{T,R}^i \right]^{-1} \right) f_3^i \right) \\
&\quad + N \max_i \left( \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{S,C}^i \right]^{-1} \right) F_{9,c}^i + \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{T,C}^i \right]^{-1} \right) f_{3,c}^i \right)
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1, se tiene:

$$\left[ 1 - \frac{\mu}{\sqrt{V(t)}} \right]_+ \rightarrow 0$$

con

$$\mu := \sqrt{N \min_i (\alpha_m^i)^{-1} \max_i \left( \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{P,R}^i \right]^{-1} \right) F_{4,c}^i \right)} \sqrt{N \min_i (\alpha_m^i)^{-1} \max_i \left( \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{S,R}^i \right]^{-1} \right) F_{9,c}^i \right)}$$

$$\sqrt{N \min_i (\alpha_m^i)^{-1} \max_i \left( \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{T,R}^i \right]^{-1} \right) f_{3,c}^i \right)} \sqrt{N \min_i (\alpha_m^i)^{-1} \max_i \left( \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{P,C}^i \right]^{-1} \right) F_{4,c}^i \right)}$$

$$\sqrt{N \min_i (\alpha_m^i)^{-1} \max_i \left( \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{S,C}^i \right]^{-1} \right) F_{9,c}^i \right)} \sqrt{N \min_i (\alpha_m^i)^{-1} \max_i \left( \lambda_{\max} \left( \left[ \Lambda_{T,C}^i \right]^{-1} \right) f_{3,c}^i \right)}$$

□

## 12.4. Apéndice D

### 12.4.1. Prueba de la convergencia del Error de Identificación para EDP hiperbólicas usando RND

*Prueba del Teorema Principal Capítulo 5:* Considere la función tipo Lyapunov

$$V(t) := \sum_{i=1}^N \bar{V}_i(x,t) + \sum_{r=1}^3 [\tilde{W}_r^i(t)]^\top K_r \tilde{W}_r^i(t)$$

$$\bar{V}_i(x,t) := \|\Delta^i(x,t)\|_{P^i}^2 + \|\Delta_x^i(x,t)\|_{S^i}^2 + \|\hat{u}_i(x,t)\|_{T^i}^2 \quad (12.7)$$

$$\tilde{W}_r^i(t) = W_r^i(t) - \hat{W}_r^i(t)$$

$$\Delta^i(x,t) := \hat{v}^i(x,t) - v^i(x,t)$$

Siguiendo el procedimiento para el segundo método de Lyapunov, la derivada en el tiempo de  $V_t$  es

$$\dot{V}(t) = 2 \sum_{i=1}^N (\Delta^i(x,t))^\top P^i \frac{d}{dt} \Delta^i(x,t) + 2 \sum_{i=1}^N [\Delta_x^i(x,t)]^\top S^i \frac{d}{dt} \Delta_x^i(x,t)$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^N \hat{v}^i(t) T^i \frac{d}{dt} \hat{u}_i(t) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^3 [\tilde{W}_r^i(t)]^\top K_r \dot{W}_r^i(t) \quad (12.8)$$

Así la siguiente desigualdad se cumple:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N (\Delta^i(x,t))^\top (P^i A^i + [A^i]^\top P^i + Q_P) \Delta^i(x,t) \\
&+ \sum_{i=1}^N (\Delta^i(x,t))^\top P^i \left( \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_1^i]^\top \sigma(x^i) \end{bmatrix} \Lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_1^i]^\top \sigma(x^i) \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_2^i]^\top \varphi(x^i) \end{bmatrix} \Lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_2^i]^\top \varphi(x^i) \end{bmatrix}^\top \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_3^i]^\top \gamma(x^i) \end{bmatrix} \Lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_3^i]^\top \gamma(x^i) \end{bmatrix}^\top + \Lambda_4 P^i \Delta^i(x,t) \right) \\
&+ \sum_{i=1}^N (\Delta^i(x,t))^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\Lambda_1^{-1} + \Lambda_5^{-1}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\Lambda_{4,\{1,2\}}^{-1} g_0^i + 2\Lambda_{8,\{1,2\}}^{-1} g_4^i + \Lambda_{12}^{-1} \Delta^i(x,t) \\
&+ \sum_{i=1}^N (\Delta^{i-1}(x,t))^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\Lambda_2^{-1} + \Lambda_6^{-1}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\Lambda_{4,\{1,2\}}^{-1} g_1^i + 2\Lambda_{8,\{1,2\}}^{-1} g_5^i \Delta^{i-1}(x,t) \\
&+ \sum_{i=1}^N (\Delta^{i-2}(x,t))^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\Lambda_3^{-1} + \Lambda_7^{-1}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + (2\Lambda_{4,\{1,2\}}^{-1} g_2^i + 2\Lambda_{8,\{1,2\}}^{-1} g_6^i) \Delta^{i-2}(x,t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N [\Delta_x^i(x,t)]^\top (S^i A^i + (A^i)^\top S^i + Q_S) \Delta_x^i(x,t) + \sum_{i=1}^N [\Delta_x^i(x,t)]^\top S^i \Lambda_8 S^i \Delta_x^i(x,t) \\
&+ \sum_{i=1}^N [\Delta_x^i(x,t)]^\top S^i \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{W}_1^i \sigma_x(x_i) \end{bmatrix} \Lambda_5 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{W}_1^i \sigma_x(x_i) \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_2^i]^\top \varphi_x(x^i) \end{bmatrix} \Lambda_6 \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_2^i]^\top \varphi_x(x^i) \end{bmatrix}^\top \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_3^i]^\top \gamma_x(x^i) \end{bmatrix} \Lambda_7 \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_3^i]^\top \gamma_x(x^i) \end{bmatrix}^\top S^i \Delta_x^i(x,t) \right) \\
&+ \sum_{i=1}^N [\hat{v}^i(t)]^\top (T^i A^i + [A^i]^\top T^i + Q_T^i) \hat{v}^i(t) \\
&+ \sum_{i=1}^N [\hat{v}^i(t)]^\top T^i \left( \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_1^i]^\top \sigma(x^i) \end{bmatrix} \Lambda_9 \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_1^i]^\top \sigma(x^i) \end{bmatrix}^\top \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_2^i]^\top \varphi(x^i) \end{bmatrix} \Lambda_{10} \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_2^i]^\top \varphi(x^i) \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_3^i]^\top \gamma(x^i) \end{bmatrix} \Lambda_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ [\dot{W}_3^i]^\top \gamma(x^i) \end{bmatrix}^\top \right) \\
&+ K^i \Lambda_{12} [K^i]^\top T^i \hat{v}^i(t) \\
&+ \sum_{i=1}^N [\hat{v}^i(t)]^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda_9^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\Lambda_{4,\{1,2\}}^{-1} g_0^i + 2\Lambda_{8,\{1,2\}}^{-1} g_4^i \hat{v}^i(t) \\
&+ \sum_{i=1}^N [\hat{v}^{i-1}(t)]^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda_{10}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\Lambda_{4,\{1,2\}}^{-1} g_1^i + 2\Lambda_{8,\{1,2\}}^{-1} g_5^i \hat{v}^{i-1}(t) \\
&+ \sum_{i=1}^N [\hat{v}^{i-2}(t)]^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda_{11}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\Lambda_{4,\{1,2\}}^{-1} g_2^i + 2\Lambda_{8,\{1,2\}}^{-1} g_6^i \hat{v}^{i-2}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{i=1}^N \left( \Lambda_{4,\{1,2\}}^{-1} g_3^i + \Lambda_{8,\{1,2\}}^{-1} g_7^i \right) \\
& +2 \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^3 [\tilde{W}_r^i(t)]^\top K_r \dot{W}_r^i(t) + \alpha \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^3 [\tilde{W}_r^i(t)]^\top K_r \tilde{W}_r^i(t) \\
& -\alpha \sum_{i=1}^N \left[ (\Delta^i(x,t))^\top Q_p^i \Delta^i(x,t) + [\Delta_x^i(x,t)]^\top Q_s^i \Delta_x^i(x,t) \right. \\
& \left. + [\hat{v}^i(t)]^\top Q_T^i \hat{v}^i(t) - \alpha \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^3 [\tilde{W}_r^i(t)]^\top K_r \tilde{W}_r^i(t) \right] \quad (12.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^i(t) [(\Delta^i(x,t))^\top P^i \right. \\
& \left. + [\hat{v}^i(t)]^\top T^i \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\sigma(x^i)]^\top \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^i(t) [[\Delta_x^i(x,t)]^\top S^i] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\sigma(x^i)]^\top \end{bmatrix} \right. \\
& \left. + K_1 [\dot{W}_1^i(t)]^\top + \frac{\alpha}{2} K_1 [\tilde{W}_1^i(t)]^\top \tilde{W}_{1,t}^i \right. \\
& \left. +2 \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^{i-1}(t) [(\Delta^i(x,t))^\top P^i + [\hat{v}^i(t)]^\top T^i] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\varphi(x^i)]^\top \end{bmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^{i-1}(t) [[\Delta_x^i(x,t)]^\top S^i] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\varphi(x^i)]^\top \end{bmatrix} + K_2 [\dot{W}_2^i(t)]^\top + \frac{\alpha}{2} K_2 [\tilde{W}_2^i(t)]^\top \tilde{W}_{2,t}^i \right. \\
& \left. +2 \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^{i-2}(t) [(\Delta^i(x,t))^\top P^i + [\hat{v}^i(t)]^\top T^i] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\gamma(x^i)]^\top \end{bmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^{i-2}(t) [[\Delta_x^i(x,t)]^\top S^i] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\gamma(x^i)]^\top \end{bmatrix} + K_3 [\dot{W}_3^i(t)]^\top + \frac{\alpha}{2} K_3 [\tilde{W}_3^i(t)]^\top \tilde{W}_{3,t}^i + \right.
\end{aligned}$$

En vista de

$$[\dot{W}_1^i(t)]^\top := -\frac{\alpha}{2} [\tilde{W}_1^i(t)]^\top - K_1^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^i(t) [(\Delta^i(x,t))^\top P^i + [\hat{v}^i(t)]^\top T^i] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\sigma(x^i)]^\top \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}^i(t) [[\Delta_x^i(x,t)]^\top S^i] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\sigma(x^i)]^\top \end{bmatrix}$$

Además

$$\dot{W}_1^i(t) = -\frac{\alpha}{2} \tilde{W}_1^i(t) - K_1^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \sigma(x^i) \end{bmatrix} [P^i (\Delta^i(x,t)) + T^i \hat{v}^i(t)] + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \sigma(x^i) \end{bmatrix} [S^i \Delta_x^i(x,t)] \right\} [\hat{v}^i(t)]^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De las ecuaciones de Riccati definidas en (6.11) y en vista de la leyes de ajuste de los pesos (6.10), la desigualdad anterior se simplifica a

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha_m^i V(t) + \sum_{i=1}^N \left( \lambda_{\max} \left( [\Lambda_S^i]^{-1} \right) F_9^i \right) + \sum_{i=1}^N \left( \lambda_{\max} \left( [\Lambda_T^i]^{-1} \right) f_3^i + \lambda_{\max} \left( [\Lambda_P^i]^{-1} \right) F_4^i \right)$$



Tomando el máximo valor sobre  $i$ ", se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq -\min_i(\alpha_m^i)V(t) + N\max_i\left(\lambda_{\max}\left([\Lambda_P^i]^{-1}\right)F_4^i\right) + N\max_i\left(\lambda_{\max}\left([\Lambda_S^i]^{-1}\right)F_9^i + \lambda_{\max}\left([\Lambda_T^i]^{-1}\right)f_3^i\right) \\ &\leq -\alpha V(t) + N\max_i\left(\lambda_{\max}\left([\Lambda_P^i]^{-1}\right)F_4^i\right) + N\max_i\left(\lambda_{\max}\left([\Lambda_S^i]^{-1}\right)F_9^i + \lambda_{\max}\left([\Lambda_T^i]^{-1}\right)f_3^i\right)\end{aligned}$$

Aplicando el Lemma 1, se tiene:

$$\left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{V(t)}}\right]_+ \rightarrow 0$$

con

$$\mu := \frac{\sqrt{N\min_i(\alpha_m^i)^{-1}\max_i\left(\lambda_{\max}\left([\Lambda_P^i]^{-1}\right)F_4^i\right)}\sqrt{N\min_i(\alpha_m^i)^{-1}\max_i\left(\lambda_{\max}\left([\Lambda_S^i]^{-1}\right)F_9^i\right)}}{\sqrt{N\min_i(\alpha_m^i)^{-1}\max_i\left(\lambda_{\max}\left([\Lambda_T^i]^{-1}\right)f_3^i\right)}}$$

□

## 12.5. Apéndice E

### 12.5.1. Prueba de la convergencia del Error de Identificación para los elementos que forman un EDP en 2D usando RND basadas en el MEF

*Prueba del Teorema Principal Capítulo 6:* Se define la función candidata de Lyapunov como:

$$V(t) = \|\Delta_e(x, y, t)\|_S^2 + \sum_{r=1}^2 tr\left\{\tilde{W}_{r,e}^T K_r \tilde{W}_{r,e}\right\} \quad (12.10)$$

siguiendo el segundo método de Lyapunov se deriva:

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &= 2\Delta_e^T S \frac{d\Delta_e}{dt} + 2\sum_{r=1}^2 tr\left\{\tilde{W}_{r,e}^T K_r \frac{d\tilde{W}_{r,e}}{dt}\right\} \\ &= 2\Delta_e^T S \left( A\Delta_e + \tilde{W}_{1,e}(t)\sigma(\hat{u}_e) + W_{1,e}^\circ \tilde{\sigma}(\hat{u}_e, u_e) + \tilde{W}_{2,e}(t)\phi(\hat{u}_e)\hat{u}_e \right. \\ &\quad \left. + W_{2,e}^\circ \tilde{\phi}(\hat{u}_e, u_e)v(x, y, t) - \tilde{f}(x, y, t) + 2\sum_{r=1}^2 tr\left\{\tilde{W}_{r,e}^T K_r \frac{d\tilde{W}_{r,e}}{dt}\right\} \right) \\ &= 2\Delta_e^T S A\Delta_e + 2\Delta_e^T S \left( \tilde{W}_{1,e}(t)\sigma(\hat{u}_e) \right) + 2\Delta_e^T S \left( W_{1,e}^\circ \tilde{\sigma}(\hat{u}_e, u_e) \right) \\ &\quad + 2\Delta_e^T S \left( \tilde{W}_{2,e}(t)\phi(\hat{u}_e)\hat{u}_e \right) + 2\Delta_e^T S \left( W_{2,e}^\circ \tilde{\phi}(\hat{u}_e, u_e)\hat{u}_e \right) \\ &\quad - 2\Delta_e^T S \tilde{f}(x, y, t) + 2\sum_{r=1}^2 tr\left\{\tilde{W}_{r,e}^T K_r \frac{d\tilde{W}_{r,e}}{dt}\right\}\end{aligned} \quad (12.11)$$

En vista de la desigualdad matricial  $X^T Y + (X^T Y)^T \leq X^T \lambda^{-1} X + Y^T \lambda Y$  que es válida para cualquier  $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times k}$  y para cualquier matriz definida positiva  $0 < \lambda = \lambda^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , de

esta forma los términos pueden estimarse como

$$\begin{aligned}
&\leq \Delta_e^\top (SA + A^\top S) \Delta_e + 2\Delta_e^\top S (\tilde{W}_{1,e}(t) \sigma(\hat{u}_e)) \\
&+ \Delta_e^\top S W_{1,e}^\circ \Lambda_1 W_{1,e}^\circ S \Delta_e + \tilde{\sigma}(\hat{u}_T, u_e)^\top \lambda_1^{-1} \tilde{\sigma}(\hat{u}_e, u_e) + 2\Delta_e^\top S (\tilde{W}_{2,e}(t) \phi(\hat{u}_e) \hat{u}_e) \\
&\quad + \Delta_e^\top S W_{2,e}^\circ \Lambda_2 W_{2,e}^\circ S \Delta_e + \tilde{\phi}^\top(\hat{u}_e, u_e) \lambda_2^{-1} \tilde{\phi}(\hat{u}_e, u_e) v(x, y, t) \\
&- \Delta_e^\top S \Lambda_3 S \Delta_e - \tilde{f}^\top(x, y, t) \lambda_3^{-1} \tilde{f}(x, y, t) + 2 \sum_{r=1}^2 tr \left\{ \tilde{W}_{r,e}^\top K_r \frac{d\tilde{W}_{r,e}}{dt} \right\}
\end{aligned} \tag{12.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &\leq \Delta_e^\top \left( SA + A^\top S + S W_{1,e}^\circ \Lambda_1 W_{1,e}^\circ S + S W_{2,e}^\circ \Lambda_2 W_{2,e}^\circ S + Q_0 \right) \Delta_e \\
&\quad + \tilde{\sigma}(\hat{u}_e, u_e)^\top \Lambda_1^{-1} \tilde{\sigma}(\hat{u}_e, u_e) + \tilde{\phi}^\top(\hat{u}_e, u_e) \Lambda_2^{-1} \tilde{\phi}(\hat{u}_e, u_e) v(x, y, t) \\
&\quad + 2\Delta_e^\top S (\tilde{W}_{1,e}(t) \sigma(\hat{u}_e)) + 2\Delta_e^\top S (\tilde{W}_{2,e}(t) \phi(\hat{u}_e) \hat{u}_e) \\
&\quad - \Delta_e^\top S \Lambda_3 S \Delta_e - \tilde{f}^\top(x, y, t) \Lambda_3^{-1} \tilde{f}(x, y, t) + 2 \sum_{r=1}^2 tr \left\{ \tilde{W}_{r,e}^\top K_r \frac{d\tilde{W}_{r,e}}{dt} \right\}
\end{aligned} \tag{12.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &\leq \Delta_e^\top (SA + A^\top S + SRS + Q) \Delta_e - \tilde{f}^\top(x, y, t) \Lambda_3^{-1} \tilde{f}(x, y, t) \\
&+ 2tr \left\{ \tilde{W}_{1,e}^\top K_1 \frac{d\tilde{W}_{1,e}}{dt} + \tilde{W}_{1,e}(t)^\top \Delta_e^\top S \sigma(\hat{u}_e) \right\} + 2tr \left\{ \tilde{W}_{2,e}^\top K_2 \frac{d\tilde{W}_{2,e}}{dt} + \tilde{W}_{2,e}(t)^\top \Delta_e^\top S \phi(\hat{u}_e) \hat{u}_e \right\}
\end{aligned} \tag{12.14}$$

De la ecuación de pesos 6.10 y de clase especial de ecuación de Riccati 6.11 donde

$$R = W_{1,e}^\circ \Lambda_1 W_{1,e}^\circ + W_{2,e}^\circ \Lambda_2 W_{2,e}^\circ + \Lambda_3, \quad Q = D_\sigma + D_\phi \|v(x, y, t)\|^2 + Q_0$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &\leq -\tilde{f}^\top(x, y, t) \Lambda_3^{-1} \tilde{f}(x, y, t) - \Delta_e^\top Q_0 \Delta_e \\
&\leq -\eta - \Delta_e^\top Q_0 \Delta_e \\
&\leq -\lambda_{\min}(S^{-1/2} Q_0 S^{-1/2}) (\|S^{-1/2} \Delta_e\|^2 - \mu) \leq 0
\end{aligned} \tag{12.15}$$

donde  $\mu$  se define como  $\mu = \frac{\eta}{\min(S^{-1/2} Q_0 S^{-1/2})}$ . So  $V(t)$  esta acotada.  $\square$