



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Coloraciones Completas en Gráficas Bipartitas Geométricas

TESIS QUE PRESENTA

Gabriel Medina Alvarez

PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias en Computación

DIRECTORA DE TESIS

Dra. Dolores Lara Cuevas

MÉXICO, DISTRITO FEDERAL

15 DE MAYO DE 2015

Resumen

El estudio del problema de coloración de aristas en gráficas geométricas es reciente. Una gráfica geométrica es una gráfica dibujada (encajada) en el plano donde los vértices son puntos y las aristas son segmentos de recta entre parejas de puntos. El problema de la coloración de aristas consiste en asignar un máximo o mínimo de colores a las aristas de la gráfica, de tal forma que las aristas que son disjuntas posean colores distintos. Este número k de colores utilizado, se encuentra acotado por las condiciones que impone el llamado índice de coloración. Actualmente, los resultados existentes en la literatura para coloraciones en gráficas bipartitas geométricas, son escasos. En esta tesis estudiamos algunos índices de coloración para gráficas geométricas. Específicamente, obtenemos cotas para los índices de coloración *cromático*, *acromático* y de *Grundy*; en particular, nos centramos en el estudio de los dos últimos. Diseñamos algoritmos de coloración para dar cotas inferiores para ciertas familias de gráficas, mientras que, para obtener las cotas superiores, utilizamos procesos de conteo para ciertas familias de gráficas, y buscamos encajes que requieran pocos colores para cualquier familia. Las cotas obtenidas son bastante justas, y en algunos casos son cerradas. Además, diseñamos diversas aplicaciones y experimentos computacionales, los cuales usamos como apoyo para obtener las cotas combinatorias. Así también, implementamos los algoritmos de coloración propuestos.

Abstract

The problem of coloring the edges of a geometric graph, has been studied only recently. A geometric graph is a graph drawn in the plane, such that its vertices are distinct points and its edges are straight-line segments connecting pairs of points. An edge coloring of a geometric graph is an assignment of colors to the edges of the graph, so that no two adjacent edges have the same color. There exist a collection of edge-coloring type problems, that is, problems in which the question is whether it is possible to color the edges of a given graph using k colors, and in such a way that the coloring meets some additional requirements. These additional requirements are defined by one of the (so called) coloring indexes. Currently, there are only few results about edge-coloring problems for geometric graphs. In this thesis, we study some edge-coloring problems for some families of geometric graphs. Specifically, we give upper and lower bounds for the *chromatic*, *achromatic* and *Grundy* indexes. For each one of these indexes, we designed coloring algorithms to provide lower bounds for some families of geometric graphs. As for the upper bounds, we used combinatorial techniques to obtain them for some families of graphs, and we searched for geometric embeddings requiring few colors for every family of graphs. The obtained bounds are quite tight and, in some cases, even closed. In addition, we designed computer applications and perform experiments which helped us to support these combinatorial bounds. We have also implemented the proposed coloring algorithms.

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mis padres Luis Medina Marín y Felisa Alvarez Ruiz, por el gran cariño que me han brindado a lo largo de mi vida. A mis hermanos Luis, María Isabel y Emmanuel, por todo su apoyo brindado incondicionalmente. Particularmente agradezco a mi hermano Enrique, por las dudas resueltas y los conocimientos transmitidos, que de cierta forma ayudaron a la realización de este trabajo.

A la Dra. Dolores Lara Cuevas, mi asesora de tesis, a quien agradezco enormemente su disposición al resolver mis dudas, su paciencia para explicar magistralmente los temas de su área de estudio, y en general, por todo el conocimiento y experiencia adquirido gracias a ella. A mis sinodales Dr. Guillermo Morales Luna y Dr. Carlos A. Coello Coello, a quienes agradezco por el tiempo que se tomaron para revisar esta tesis y por sus oportunas correcciones de la misma.

Agradezco también al Departamento de computación del CINVESTAV por permitirme realizar estudios de maestría y brindarme una educación con excelentes profesores. Asimismo agradezco al CONACyT por el apoyo económico brindado para poder realizar dichos estudios.

Gracias también a mis compañeros y amigos del departamento de computación, especialmente a Ana Belem Márquez, quien me ha apoyado mucho a lo largo de estos dos años. Finalmente agradezco al grupo de secretarías del departamento por su ayuda y disposición para facilitar toda clase de trámites.

Índice general

1. Introducción	1
2. Antecedentes	3
2.1. Gráficas	3
2.2. Gráficas geométricas	5
2.3. Gráficas bipartitas geométricas	10
2.4. Coloraciones completas	11
2.5. Estado del arte	17
3. Índice cromático	21
3.1. Definiciones	21
3.2. Gráficas convexas separables	24
3.3. Gráficas alternantes	26
3.4. Gráficas convexas	29
3.4.1. Número impar de cúmulos	31
3.4.2. Número par de cúmulos	33
4. Índice acromático	35
4.1. Definiciones	35
4.2. Cota superior	37
4.3. Gráficas alternantes	39
4.3.1. Cota inferior	39
4.3.2. Cotas finales	43
4.4. Gráficas generales	45
5. Índice de Grundy	47
5.1. Gráficas convexas separables	47
5.1.1. Cota inferior	47
5.1.2. Cotas finales	53

5.2. Gráficas alternantes	54
5.2.1. Cota inferior	54
5.2.2. Cota superior	56
5.2.3. Cotas finales	62
5.3. Gráficas generales	63
6. Experimentos e implementaciones	67
6.1. Pruebas aleatorias y exhaustivas	67
6.2. Aplicación para dispositivos móviles	73
7. Conclusiones y trabajo futuro	77
A. Lista de resultados	79
Bibliografía	82

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la teoría cromática de gráficas comenzó con el conocido problema de los *Cuatro Colores* en 1852. Desde entonces, numerosos resultados han consolidado esta área de estudio. Actualmente, los conceptos estudiados en esta área son de utilidad para resolver un gran número de problemas en diversas áreas de investigación.

En esta tesis estudiamos la Teoría Cromática de Gráficas aplicada a gráficas geométricas, en particular, a gráficas bipartitas. Una gráfica geométrica es una gráfica dibujada en el plano tal que sus vértices son puntos y sus aristas son segmentos de recta que unen parejas de estos puntos. El estudio formal de las gráficas geométricas es una disciplina relativamente nueva donde abundan los problemas abiertos [19]. Esta disciplina posee resultados importantes dentro de áreas como Combinatoria, Análisis y Diseño de Algoritmos y Visualización de Gráficas, entre otras.

El problema de coloración de gráficas geométricas comenzó a ser estudiado recientemente [19]. En este problema se desea conocer el número de colores necesarios para colorear las aristas de una gráfica. Dicho valor se encuentra acotado por las restricciones que impone el índice de coloración estudiado. En esta tesis nos limitamos a estudiar coloraciones donde las aristas incidentes tienen colores distintos y que, dada cualquier pareja de colores, existen al menos dos aristas incidentes con estos colores. Según el índice de coloración nos puede interesar que el número de colores sea mínimo (*índice cromático*), máximo (*índice acromático*) o máximo y que cumpla la propiedad de Grundy (*índice de Grundy*). Esta última propiedad será definida más adelante.

El objetivo de esta tesis es determinar el número de colores para los índices de coloración *cromático*, *acromático* y de *Grundy* en gráficas geométricas que son bipartitas y completas, es decir, que los vértices tienen una etiqueta roja o azul y cualquier vértice azul es adyacente a cualquier vértice rojo. Nuestro interés, en particular, se encuentra en los dos últimos índices de coloración mencionados. La experiencia indica que determinar de manera exacta estos valores es complicado. Por esto deseamos, como mínimo, obtener cotas para cada uno de ellos. Es importante señalar que, en general, el estudio de coloración de gráficas geométricas tiene un enfoque teórico. Una parte importante en este trabajo es diseñar algoritmos de coloración que ayuden a obtener los resultados esperados, y además hacer implementaciones de los mismos.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 introducimos la notación, los conceptos básicos y algunos resultados importantes referentes a gráficas geométricas y a coloraciones completas. En el capítulo 3 describimos un algoritmo, mediante el cual, obtenemos el número exacto de colores para el índice cromático de gráficas bipartitas convexas. En el capítulo 4 obtenemos una cota superior para el índice pseudoGrundy, la cual resulta de gran utilidad para acotar el número de colores de cualquier coloración completa. También exhibimos un algoritmo para acotar inferiormente el índice acromático en gráficas alternantes. En el capítulo 5 obtenemos, a través de un algoritmo, el número de colores para los índices acromático y de Grundy simultáneamente, esto para gráficas que son convexas separables. También explicamos un algoritmo para la cota inferior del índice de Grundy en gráficas alternantes, así como algunos procesos de conteo útiles para obtener cotas superiores. En el capítulo 6 presentamos los experimentos por computadora, así como las aplicaciones desarrolladas que fueron útiles para obtener los resultados. Finalmente exponemos nuestras conclusiones y posible trabajo futuro en el capítulo 7.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo definimos los conceptos utilizados a lo largo de este trabajo. Comenzamos con algunas definiciones y resultados clásicos referentes a gráficas y a gráficas geométricas. Posteriormente nos centramos en los temas esenciales de esta tesis, los cuales son gráficas bipartitas geométricas y coloraciones completas, enfatizando los índices de coloración a estudiar. Finalmente exponemos algunos artículos relacionados y posicionamos nuestra investigación a través del estado del arte.

2.1. Gráficas

En esta sección nos centramos en los conceptos referentes a gráficas abstractas. Estas definiciones se encuentran principalmente en [5] y [8].

Una **gráfica** (o grafo) es una pareja de conjuntos $G = (V, E)$ donde $V \neq \emptyset$ y $E \subseteq V \times V$. Al conjunto V se le denomina el **conjunto de vértices** y al conjunto E se le denomina el **conjunto de aristas** de la gráfica. Nos referimos a V como $V(G)$ y a E como $E(G)$. Denotaremos a las aristas $(u, v) \in E(G)$ como $(u, v) = uv$ cuando necesitemos especificar sus incidencias, o como $(u, v) = e$ en otro caso.

El **grado de un vértice** v en la gráfica G es el número de vértices adyacentes a v ; es decir, el número de aristas de G incidentes con v . A este valor lo denotamos como $gr(v)$. El siguiente teorema demuestra una propiedad básica para cualquier gráfica G .

Teorema 2.1.1. *Sea G una gráfica con $|E(G)| = m$ para algún $m \in \mathbb{Z}^+$, entonces*

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2m.$$

Demostración. Al sumar $gr(v)$ para todos los vértices, cada arista de G es contada dos veces, una vez por cada uno de sus vértices. ■

Una gráfica G es **completa** si para cualesquiera $v_1, v_2 \in V(G)$, se tiene que $uv \in E(G)$. Es decir, si para cualesquiera dos vértices en G existe una arista de la gráfica que los conecta. Si G es completa y $|V(G)| = n$ la denotaremos como K_n . La figura 2.1 muestra la gráfica completa con cinco vértices, K_5 .

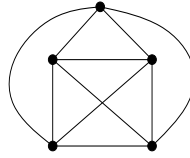


Figura 2.1: K_5 .

Sean u y v dos vértices de una gráfica G . Un **camino** P de u a v en G es una secuencia de vértices en G de la forma $P = \{u = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, v = x_{k+1}\}$, tales que vértices consecutivos en P son adyacentes en G . Un **ciclo** C es un camino P con $u = v$, $k \geq 2$, tal que los vértices intermedios x_i para $2 \leq i \leq k$ son distintos. Si k es impar diremos que C es un **ciclo impar**, en otro caso diremos que C es un **ciclo par**. Una gráfica G es **conexa** si para cualesquiera $u, v \in V(G)$, existe un camino P de u a v en G .

Decimos que una gráfica G es **bipartita** si existen un par de conjuntos disjuntos U y W tales que $V(G) = U \cup W$, y donde cada arista de G conecta un vértice de U con un vértice de W . El siguiente teorema muestra una caracterización para este tipo de gráficas. Debido a que la demostración utiliza conceptos que no son requeridos en esta tesis, únicamente mostramos un bosquejo la misma. La prueba detallada del teorema puede verse en [8].

Teorema 2.1.2. *Una gráfica G es bipartita si y sólo si G no contiene ningún ciclo impar.*

Bosquejo. Supongamos primero que G es bipartita, entonces $V(G) = U \cup W$. Sea $C = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_1\}$ un ciclo cualquiera en G . Supongamos que $x_1 \in U$.

2.2. GRÁFICAS GEOMÉTRICAS

Entonces, como G es bipartita, tenemos que $x_2 \in W$, $x_3 \in U$ y así sucesivamente. De esta forma, $x_i \in V$ cuando i es impar, y $x_i \in U$ cuando i es par. Como $x_1 \in U$, se sigue que $x_k \in W$ y k es un número par, es decir, C es un ciclo par.

Supongamos ahora que G no contiene ningún ciclo impar, la idea de la demostración es que, a partir de un *árbol generador* de la gráfica G , hacemos una partición de $V(G)$. Esto dependiendo de la paridad de la *distancia* desde la raíz del árbol a cada vértice. Finalmente se muestra que G es bipartita utilizando dicha partición. ■

2.2. Gráficas geométricas

En esta sección presentamos los conceptos y resultados de gráficas geométricas. Para un estudio más detallado de este tipo de gráficas véase [19].

Un **encaje** h de una gráfica $G = (V, E)$ es una función inyectiva que aplica el conjunto de vértices V a un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ de puntos en el plano, y al conjunto de aristas E a un conjunto de curvas cuyos puntos finales pertenecen a S . Si las curvas de S son segmentos de recta, diremos que h es un **encaje geométrico**.

Decimos que una gráfica G es **planar** (o aplanable) si existe un encaje de G tal que ninguno de los segmentos de recta asociados a $E(G)$ se intersectan (excepto, quizá, en sus extremos). Decimos que G es **planar maximal** si es planar y para cualquier $uv \in E(G)$, la gráfica G con aristas $E(G) \cup \{uv\}$ no es aplanable.

Los teoremas 2.2.1 y 2.2.2 muestran propiedades fundamentales para caracterizar a las gráficas planares: el teorema 2.2.1 es la conocida identidad de Euler, y el teorema 2.2.2 acota el número de aristas para cualquier gráfica planar. A continuación se muestran bosquejos de las demostraciones de ambos teoremas. Para una presentación completa de estas demostraciones véase [5].

Teorema 2.2.1 (Identidad de Euler). *Sea G una gráfica planar conexa con $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$, y r regiones. Entonces*

$$n - m + r = 2.$$

Bosquejo. La idea de la demostración es reducir G a un árbol y contar su número de caras, y aristas. Si G no es un árbol, removemos una arista que pertenezca a un ciclo. Eliminar esta arista reduce r y m en 1, mientras que $n+m-r$ permanece constante. Continuamos removiendo aristas de esta forma hasta que G sea un árbol. Un árbol tiene $n = m + 1$ y $r = 1$, por lo tanto, $n - m + r = 2$, como lo deseamos. ■

Teorema 2.2.2. *Sea G una gráfica planar con $|V(G)| = n \geq 4$ y $|E(G)| = m$. Entonces*

$$m \leq 3n + 6.$$

Bosquejo. Si G es planar maximal, entonces cualquier *región* esta rodeada por 3 aristas (las regiones son triángulos), y cualquier arista pertenece a 2 regiones. Por lo tanto,

$$2m = 3r.$$

Si usamos el teorema 2.2.1 y sustituimos $r = \frac{2m}{3}$, obtenemos

$$n - m + \frac{2m}{3} = 2 \Rightarrow m = 3n - 6.$$

Por tanto, si G es una gráfica planar que no es maximal, se tiene que

$$m \leq 3n - 6,$$

como lo deseamos. ■

El siguiente teorema demuestra que cualquier gráfica planar puede ser dibujada en el plano, con la característica de que sus aristas son segmentos de recta (un encaje geométrico) y ninguna de estas aristas se intersecta. Una demostración similar del teorema puede verse en [22]. Un algoritmo para generar este tipo de encajes sin cruces se encuentra en [7].

Teorema 2.2.3 (de Fáry). *Sea G una gráfica planar. Entonces existe un encaje geométrico de G en el que ninguna de sus aristas se intersectan (salvo, quizá, en sus extremos).*

Bosquejo. La idea de la demostración es la siguiente: supogamos que G es planar maximal. En caso contrario, agregamos aristas disjuntas (es decir, que no intersectan a ninguna otra arista de G) a la gráfica hasta que sea planar maximal. Como G es planar maximal, todas las regiones de G deben ser triángulos (formadas por 3 aristas), de lo contrario, podemos agregar al

2.2. GRÁFICAS GEOMÉTRICAS

menos una arista disjunta, contradiciendo que G es planar maximal.

Sean a , b y c los vértices de un triángulo en G . Probaremos por inducción sobre n que existe un encaje geométrico de G tal que el triángulo abc es la cara exterior del encaje (figura 2.2). Si $n = 3$ el resultado es inmediato. Suponemos que se cumple para $1 \leq i < n$. Notamos que $gr(v) \geq 3$, para todo $v \in V(G)$ con $n \geq 4$ (todas las regiones son triángulos).

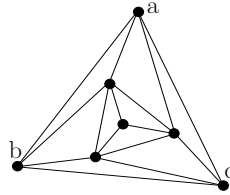


Figura 2.2: Encaje que tiene a abc como cara exterior.

Notemos que, para $n \geq 4$ se tiene que $gr(v) \geq 3$, para todo $v \in V(G)$. Por el teorema 2.2.2, la gráfica G tiene $3n - 6$ aristas. Definimos la *deficiencia* de $v \in V(G)$ como $def(v) = 6 - gr(v)$. Al sumar las deficiencias de todos los vértices, y por el teorema 2.1.1, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in V(G)} def(v) &= \sum_{v \in V(G)} (6 - gr(v)) \\
 &= 6n - \sum_{v \in V(G)} gr(v) \\
 &= 6n - 2m \\
 &= 6n - 2(3n - 6) \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

Para todo $v \in V(G)$ se tiene que $def(v) \leq 3$ ($gr(v) \geq 3$). Como la suma total es 12, existen al menos 4 vértices con deficiencia positiva. Elegimos uno de ellos que sea diferente de a, b y c , llamémosle w .

Creamos la gráfica $G' = G \setminus \{w\}$ y agregamos las aristas necesarias a G' para que sea planar maximal (se agregan dentro de la región donde se encuentra w). Por la hipótesis de inducción, G' tiene un encaje geométrico en el cual el triángulo abc es la cara exterior del encaje. Al remover las aristas agregadas, nos sobra un polígono P de 5 lados como máximo ($gr(w) \leq 5$ puesto que

$def(w) \geq 0$).

Por el Teorema de la Galería de Arte [9], existe un punto interior de P , llamémosle v , de tal forma que las aristas que van de v a los vértices de P no cruzan ninguna arista de P . Finalmente colocamos a w en la posición de v . ■

Una **gráfica geométrica** $\mathbf{G} = (S, \overline{E})$ de G es la imagen de un encaje geométrico particular de G . Nos referiremos a los puntos de S como los vértices de \mathbf{G} , y a los segmentos de recta que conectan a puntos en S , como las aristas de \mathbf{G} . Nos referimos a estos conjuntos como $V(\mathbf{G})$ y $E(\mathbf{G})$, respectivamente. Llamaremos a la gráfica geométrica \mathbf{G} de G como la gráfica geométrica \mathbf{G} , y si solo trabajamos con gráficas geométricas, nos referiremos a ésta como la gráfica \mathbf{G} . Sean $u, v \in V(\mathbf{G})$, denotaremos a los elementos de $E(\mathbf{G})$ como uv cuando sea necesario especificar sus incidencias, o como e en otro caso.

Una gráfica geométrica \mathbf{G} es **completa** si, para cualesquiera $u, v \in V(\mathbf{G})$, con $u \neq v$, se tiene que $uv \in E(\mathbf{G})$. Una gráfica completa con n puntos se denota como K_n . La figura 2.3 muestra la gráfica abstracta K_4 y dos gráficas geométricas distintas asociadas a esta gráfica.

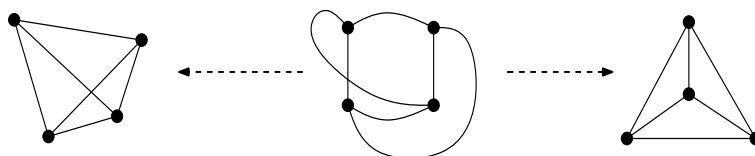


Figura 2.3: K_4 y dos encajes geométricos distintos.

Decimos que $S \subset \mathbb{R}^2$ finito está en **posición general** si no hay tres puntos en el conjunto que pertenezcan a una misma recta. Decimos que $S \subset \mathbb{R}^2$ finito está en **posición convexa** si los puntos del conjunto forman los vértices de un polígono convexo. Nótese que cualquier conjunto de puntos en el plano en posición general induce de manera natural una gráfica completa. La figura 2.4a muestra un conjunto de puntos que no se encuentran en posición general, mientras que la figura 2.4b muestra un conjunto de puntos que se encuentran en posición convexa.

Cuando sea necesario distinguir a una gráfica geométrica \mathbf{G} , si $V(\mathbf{G})$ está en posición general, nos referiremos a esta gráfica como **gráfica geométrica**

2.2. GRÁFICAS GEOMÉTRICAS

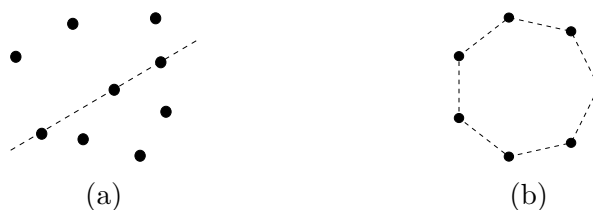


Figura 2.4: Puntos en posición no general y puntos en posición convexa.

general. De manera análoga, si $V(G)$ está en posición convexa, nos referiremos a esta gráfica como **gráfica geométrica convexa**.

Sea G una gráfica geométrica, decimos que dos aristas de G son **adyacentes** si sus segmentos de recta asociados se intersectan (figura 2.5a) o tienen algún vértice en común (figura 2.5b). Si dos aristas no son adyacentes diremos que son **disjuntas**.



Figura 2.5: Aristas adyacentes.

Definimos el **número de incidencias** $cr(G)$ de una gráfica geométrica G como el número de parejas de aristas adyacentes. Denotamos como $cr_e(G)$ al número de aristas cuyos segmentos de recta se cruzan en su interior, y por $cr_v(G)$ al número de aristas que tienen algún vértice en común.

El siguiente teorema, extraído de [19], exhibe una cota inferior para el número de incidencias por segmentos de recta de una gráfica geométrica G .

Teorema 2.2.4. *Sea G una gráfica geométrica con $V(G) = n \geq 3$ y $E(G) = m$, entonces*

$$cr_e(G) \geq m - 3n + 6.$$

Demostración. Para la prueba del teorema utilizamos inducción sobre m :

Si $m \leq 3n + 6$ el resultado se cumple trivialmente. Supongamos ahora que se cumple para $1 \leq x \leq m - 1$.

Por el teorema 2.2.2, una gráfica geométrica G con n vértices y más de $3n - 6$ aristas es aplanable. Por lo tanto, si $m > 3n - 6$, sabemos que G tiene al menos un cruce. Definimos la gráfica geométrica G_1 con $V(G_1) = V(G)$ y $E(G_1) = E(G) - \{d\}$, donde d es una arista de G que participa en, al menos, un cruce. Por la hipótesis de inducción obtenemos

$$cr_e(G) = 1 + cr_e(G_1) \leq 1 + [(m - 1) - 3n + 6] = m + 3n + 6,$$

como lo deseamos. ■

2.3. Gráficas bipartitas geométricas

En esta sección definimos el tipo de gráficas utilizadas en esta tesis. De igual forma, se muestran algunos resultados fundamentales referentes al tema. Para profundizar en el estudio de este tipo de gráficas y, en general, de conjuntos de puntos rojos y azules, véase [14].

Una gráfica geométrica G es **bipartita geométrica** si existe un par de conjuntos disjuntos $R, B \in \mathbb{R}^2$ tales que $V(G) = R \cup B$, donde cualquier arista de G conecta vértices de R con vértices de B . Nos referiremos a los elementos de R como **puntos rojos** y a los elementos de B como **puntos azules**. De esta forma, cada arista de $E(G)$ une un punto rojo con un punto azul. A este tipo de gráficas geométricas las denotamos por $K_{m,n}$, donde $|R| = m$ y $|B| = n$.

La gráfica $K_{m,n}$ es **bipartita geométrica completa** si para cualquier pareja $(r, b) \in R \times B$, se tiene que $rb \in E(K_{m,n})$. La figura 2.6 muestra la gráfica $K_{3,5}$ geométrica completa en posición general.

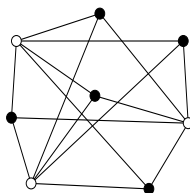


Figura 2.6: $K_{3,5}$ completa en posición general.

2.4. COLORACIONES COMPLETAS

A lo largo de esta tesis estudiaremos únicamente gráficas bipartitas geométricas completas. Esto debido a que, para este tipo de gráficas, la cantidad de resultados es escasa para los índices de coloración de interés.

Sea $K_{m,n}$ bipartita completa convexa. Decimos que $K_{m,n}$ es **alternante** si $m = n$ y $\forall x \in V(K_{m,n})$, sus dos vértices consecutivos x_l y x_r (respecto al polígono convexo que forman los puntos de S) son de color contrario, es decir, si x es azul, x_l y x_r son rojos y viceversa. Decimos que $K_{m,n}$ es **separable** si existe una recta l que separe R de B . La figura 2.7a muestra la gráfica $K_{4,4}$ alternante, y la figura 2.7b muestra a $K_{5,3}$ separable.



Figura 2.7: Vértices de $K_{4,4}$ alternante y $K_{5,3}$ separable.

El siguiente teorema demuestra una cota inferior para el número de aristas que inciden a pares. En este caso solo se consideran las incidencias respecto a los segmentos de recta. La demostración puede verse en [4].

Teorema 2.3.1. *Sea $K_{n,n}$ una gráfica bipartita completa, entonces existen, al menos, $\sqrt{\frac{n}{24}}$ aristas incidentes a pares (por aristas).*

2.4. Coloraciones completas

A continuación definimos los diferentes índices de coloración que estudiamos en este trabajo.

Una **coloración de los vértices** de una gráfica abstracta G , usando k colores, es una función suprayectiva $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que asigna a cada *vértice* de G un color del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$.

Una **coloración de las aristas** de una gráfica geométrica G , usando k colores, es una función suprayectiva $h : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que asigna a cada

arista de G un color del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$.

En esta tesis trabajaremos únicamente con coloraciones de aristas. Pero, como se verá mas adelante, es posible trabajar este tipo de coloración como una coloración de los vértices. Estas coloraciones tienen las siguientes propiedades básicas.

Sea $h : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ una coloración de las aristas de G . Decimos que h es **propia** si para cualesquiera $d, e \in E(G)$ adyacentes, se tiene que $h(d) \neq h(e)$. Es decir, cualquier pareja de aristas adyacentes posee colores distintos. Decimos que h es **completa** si para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, existen $d, e \in E(G)$ adyacentes tales que $h(d) = i$ y $h(e) = j$. Es decir, para cualquier pareja de colores existe, al menos, una pareja de aristas adyacentes que tenga dichos colores.

La figura 2.8 muestra una coloración completa para dos encajes distintos de la gráfica completa de cuatro puntos.

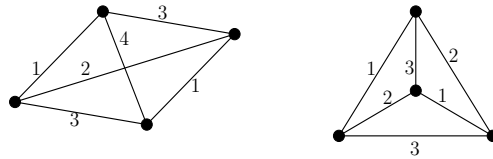


Figura 2.8: Coloración completa de dos encajes de K_4 .

Sea G una gráfica geométrica, el mínimo entero k para el cual existe una coloración propia y completa de las aristas en G , se conoce como el **índice cromático** de G y se denota por $\chi_1(G)$. El máximo entero k para el cual existe una coloración propia y completa de las aristas en G , se conoce como el **índice acromático** de G y se denota por $\alpha_1(G)$.

El **algoritmo de coloración voraz** se define de la siguiente forma: suponemos que las aristas de una gráfica geométrica G están etiquetadas de la forma e_1, e_2, \dots, e_s , entonces

1. A la arista e_1 se le asigna el color 1.
2. Una vez que las aristas e_1, e_2, \dots, e_j tienen colores asignados, donde $1 \leq j < s$, a la arista e_{j+1} se le asigna el mínimo color que no ha sido asignado a ninguna arista adyacente a e_{j+1} del conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_j\}$.

2.4. COLORACIONES COMPLETAS

Cuando el algoritmo termina, a las aristas de G se les han asignado colores de $\{1, 2, \dots, k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Notemos que la implementación de este algoritmo tiene una complejidad $O(|E(G)|^2)$ (para un estudio completo de análisis de algoritmos, véase [6]).

Una **coloración voraz** (o glotona) de las aristas de G es una coloración c que, dada una etiquetación e_1, e_2, \dots, e_m de $E(G)$, utiliza el algoritmo voraz para colorear las aristas $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. De esta definición observamos que la coloración voraz es propia y completa.

Una coloración de G es de **Grundy** si cumple la llamada **propiedad de Grundy**, es decir, si para cualquier pareja de colores (i, j) con $i < j$, cada arista de G coloreada con color j es adyacente a una arista coloreada con color i . El **índice de Grundy** de G se define como el máximo valor k para el cual existe una k -coloración Grundy propia de G y se denota por $\tau_1(G)$. El **índice pseudoGrundy** de G se define como el máximo valor k para el cual existe una k -coloración Grundy de G y se denota por $\omega_1(G)$.

La figura 2.9 muestra una coloración de Grundy para una gráfica geométrica de siete vértices.

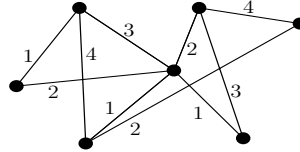


Figura 2.9: Coloración de Grundy para una gráfica con $|V(G)| = 7$.

El siguiente lema demuestra que la coloración voraz y la coloración de Grundy son equivalentes. Esto facilita el diseño de algoritmos exhaustivos y de aproximación para este índice de coloración.

Lema 2.4.1. *Sea c una coloración de G . Entonces c es una coloración de Grundy si y sólo si c es una coloración voraz.*

Demostración. Supongamos primero que c es una coloración de Grundy de G que utiliza t colores. Sea $\{e_{1,1}, e_{1,2}, \dots, e_{1,k_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,k_2}, \dots, e_{t,1}, \dots, e_{t,k_t}\}$ el conjunto etiquetado de aristas de $E(G)$, de tal forma que primero aparecen las k_1 aristas con color 1, luego las k_2 aristas con color 2 y así sucesivamente

hasta las k_t aristas de color t .

Mostraremos que c con este ordenamiento de las aristas es una coloración voraz. Nótese que las primeras k_1 aristas son disjuntas, puesto que poseen el mismo color (1) en la coloración de Grundy. Por lo tanto, el algoritmo voraz que utilice la misma etiquetación les asignaría a estas k_1 aristas el mismo color (1). En general, las k_i aristas son disjuntas por poseer el mismo color (i) en la coloración de Grundy. Por lo tanto, el algoritmo voraz les asigna el color i . Esto se justifica por la definición de coloración de Grundy, ya que cada una de estas aristas intersecta a aristas con los $i - 1$ colores previos, dejando como mínimo color disponible a i .

De esta forma, existe una etiquetación de $E(G)$ para el cual obtenemos la misma coloración con el algoritmo voraz, es decir, c es una coloración voraz.

Supongamos ahora que c es una coloración voraz. Por contradicción suponemos que c no es Grundy. Como c es propia y completa, la coloración debe fallar en la propiedad de Grundy. Es decir, existe una arista e_j con color j , tal que no intersecta a ninguna arista con color $i < j$. Pero si esto pasa, el algoritmo voraz encuentra que el color i está disponible para colorear e_j . Por lo que $c(e_j) = i$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto c tiene que ser una coloración Grundy. ■

La siguiente propiedad compara los tres índices de coloración definidos:

$$\chi_1(G) \leq \tau_1(G) \leq \alpha_1(G)$$

Definimos el **índice acromático geométrico** $\alpha_g(G)$ de una gráfica G como el máximo valor k para el cual existe una gráfica geométrica H de G tal que $\alpha_1(H) = k$. De forma análoga, el **índice de Grundy geométrico** $\tau_g(G)$ y el **índice pseudoGrundy geométrico** $\omega_g(G)$ se definen como el máximo valor k para el cual existe una gráfica geométrica H de G tal que $\tau_1(H) = k$ y $\omega_1(H) = k$, respectivamente.

Los conceptos de coloración propia, completa e índices de coloración se definen de manera análoga para coloraciones por vértices en gráficas abstractas, con la diferencia de que nos referiremos a los índices de coloración como números de coloración y omitiremos el subíndice de su respectiva simbología.

2.4. COLORACIONES COMPLETAS

En ocasiones, resulta de utilidad trabajar el problema de coloración por aristas como un problema de coloración por vértices. La relación entre los índices de coloración y los números de coloración está dada por la gráfica de intersección.

Sea G una gráfica geométrica. La **gráfica de intersección** $L(G)$ de G es una gráfica tal que $V(L(G)) = E(G)$, y dados $u, v \in V(L(G))$, la arista uv existe si y sólo si, las aristas correspondientes en G son adyacentes. Notemos que esta gráfica es abstracta (no geométrica).

El siguiente teorema, obtenido de [5], proporciona el valor exacto de número acromático para gráficas bipartitas completas.

Teorema 2.4.2. *Sea $K_{m,n}$ una gráfica bipartita completa, entonces*

$$\alpha(K_{m,n}) = 2,$$

donde α denota el número acromático.

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe alguna gráfica bipartita completa $K'_{m,n}$ para la cual $\alpha(K'_{m,n}) \neq 2$. Sabemos que $\chi(K'_{m,n}) = 2$, ya que podemos asignar un color a todos los vértices de R y otro distinto a los vértices de B , además de que es imposible colorear G con 1 color por la completitud de la gráfica. Esto implica que $K'_{m,n} \geq 3$. Sea h una 3-coloración de $K'_{m,n}$, notemos que, para al menos dos vértices u, v con $u, v \in R$ ó $u, v \in B$, se tiene que $h(u) = i \neq j = h(v)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $u, v \in B$. Como esta coloración es propia, ningún vértice de R está coloreado con color i o j . Esto implica que no hay ninguna pareja de vértices adyacentes con colores i y j . De esta forma, contradecimos que la coloración es propia, demostrando lo deseado. ■

El siguiente teorema, extraído de [5], demuestra que el número de Grundy $\tau(G)$ de una gráfica conexa G es 2.

Teorema 2.4.3. *Si G es una gráfica conexa con $\tau(G) = 2$, entonces G es bipartita completa.*

Bosquejo. Puesto que $\tau(G) = 2$ y sabemos que $\chi(G) \leq \tau(G)$, entonces $\chi(G) = 2$. Mostraremos ahora que G no contiene ningún camino P_4 como *subgráfica*

inducida. Supongamos por contradicción que sí existe. Sea $P = v_1, v_2, v_3, v_4$ una subgráfica inducida de G . Consideremos la siguiente coloración voraz

$$v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, \dots, v_n$$

Esta coloración utiliza, al menos, 3 colores (v_3 es adyacente a v_2 y v_4 por P). Por lo tanto, $\tau(G) \geq 3$, contradiciendo que $\tau(G) = 2$. Así, G no contiene ningún P de tamaño 4 como subgráfica inducida. Finalmente, por el teorema 2.1.2 se muestra que G es bipartita completa. Los detalles pueden verse en [5]. ■

El siguiente teorema presenta una cota superior, obtenida en [19], para el número acromático de cualquier gráfica G .

Teorema 2.4.4. *Si G es una gráfica con $|V(G)| = n$, entonces*

$$\alpha(G) \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8n}}{2}.$$

Demostración. Supongamos que $\alpha(G) = x$. Sabemos que cada pareja del conjunto $\{1, \dots, x\}$ de colores utilizados debe intersectarse (por ser completa). Por tanto, n debe ser, al menos, suficiente para cubrir las posibles parejas distintas con x colores. Es decir

$$n \geq \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2},$$

lo cual es equivalente a

$$x^2 - x - 2n \leq 0.$$

Al resolver esta ecuación para x obtenemos

$$x \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8n}}{2}$$

como deseamos. ■

Los teoremas 2.4.2, 2.4.3 y 2.4.4 muestran que, para gráficas abstractas, el problema de coloración ha sido ampliamente estudiado. Se tienen valores exactos para diversos números de coloración. Como se verá en los capítulos posteriores, estas herramientas no son de utilidad para las coloraciones en gráficas geométricas.

2.5. Estado del arte

El estudio de coloraciones completas en gráficas geométricas bipartitas completas es prácticamente nulo. Sin embargo existen trabajos relacionados a los índices cromático y acromático en gráficas geométricas, así como coloraciones completas en gráficas abstractas. A continuación mencionamos algunos de estos artículos, los cuales resultan fundamentales para posicionar la originalidad del trabajo de tesis.

Una referencia fundamental para el estudio de gráficas geométricas es [19]. En este trabajo, J. Pach define y formaliza los conceptos básicos del área. Contiene una amplia gama de resultados clásicos y técnicas útiles para trabajar diversos problemas en gráficas geométricas. En particular, caracteriza las gráficas geométricas que no contienen cruces por aristas. Muestra cotas inferiores, propuestas por diversos autores, para el número de cruce de cualquier gráfica geométrica. Propone cotas respecto al número de aristas para encontrar un thrackle de cierto tamaño. Muestra el uso de gráficas geométricas como herramienta para resolver problemas geométricos y combinatorios, entre otros.

Los autores en [1] extienden la noción de índice pseudoacromático y acromático para gráficas geométricas. Su principal aportación se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 2.5.1. *i) Para cualquier $n \neq 4$ y cualquier gráfica geométrica convexa K_n , se tiene que*

$$\alpha_1(K_n) = \psi_1(K_n) = \left\lfloor \frac{n^2 + n}{4} \right\rfloor,$$

ii) Para cualquier $n > 18$,

$$0,0710n^2 - \Theta(n) \leq \psi_g(K_n) \leq 0,1781n^2 + \Theta(n).$$

El primer inciso determina el valor exacto para el índice acromático para gráficas en posición convexa, así como cotas para el índice acromático geométrico. El segundo inciso muestra cotas para cualquier gráfica geométrica con $n > 18$, o de otra forma, para el índice acromático geométrico para valores grandes de n . Es importante resaltar que dicho artículo es la principal referencia para esta tesis. Las definiciones y conceptos básicos de coloraciones completas en gráficas geométricas se encuentran en este trabajo. Los

resultados obtenidos en la sección 4 para gráficas alternantes utilizan ideas y técnicas de este artículo.

En [15] los autores estudian el índice cromático para un tipo especial de gráficas $\nu(P)$ llamadas *gráficas de visibilidad*. Estas gráficas se definen en base a un conjunto $P \subset \mathbb{R}^2$, donde los vértices son los elementos de P , y $u, v \in \nu(P)$ son adyacentes si ningún otro punto de P está en el segmento de recta de u a v . Entre las principales aportaciones se encuentra la cota inferior, de complejidad super polinomial, para el número cromático de $\nu(P)$. Algunos resultados secundarios de interés son la caracterización de las gráficas 2 y 3 coloreables, las condiciones para determinar el diámetro de visibilidad y los requisitos para la planaridad de $\nu(P)$. Es importante remarcar que en este artículo resuelven un problema geométrico aplicando una transformación a gráficas abstractas. Aprovechando, de esta manera, la teoría clásica de coloración por vértices.

En [2] los autores trabajan con dos tipos de gráficas $D(S)$ y $I(S)$, cuyos conjuntos de vértices consisten en todos los subconjuntos de k puntos en $S \subset \mathbb{R}^2$. Dos conjuntos son adyacentes en $D(S)$ si sus envolturas convexas son disjuntas, y son adyacentes en $I(S)$ si sus envolturas convexas se intersectan. Obtienen, entre otros resultados, cotas para el número cromático de la gráfica $D(S)$ con valor de

$$2\lfloor \frac{n+1}{3} - 1 \rfloor \leq \chi(D(n)) \leq \min(n-2, n - \frac{\lfloor \log n \rfloor}{2}),$$

y el valor exacto de $\chi(I(n)) = n$.

En [3] los autores trabajan con la coloración por aristas para gráficas abstractas completas. Demuestran que, dados $\gamma \geq 2$ entero, $q = 2^\gamma$ y $m = (q+1)^2$, para valores de $a \in \{0, 1, 2\}$ se cumple lo siguiente:

$$\psi_1(K_{m-a}) = \alpha_1(K_{m-a}) = q(m-2a).$$

Donde $\psi_1(K_n)$ y $\alpha_1(K_n)$ representan los índices pseudoacromático y acromático respectivamente. Su principal contribución radica en mostrar la existencia, bajo ciertas condiciones, de una familia infinita de gráficas donde se cumple la igualdad de los índices de coloración mencionados. En el capítulo 5 de esta tesis, mostramos una igualdad similar entre cuatro índices de coloración.

En [13] los autores se centran en el análisis de la complejidad para el problema de determinar el número de *grundy* en gráficas bipartitas. La aportación principal del trabajo se muestra en el siguiente teorema, el cual demuestra que la coloración *grundy* por vértices es un problema *NP*-completo.

Teorema 2.5.2. *Es un problema NP-completo decidir si una gráfica bipartita G satisface que $\Gamma(G) = \Delta(G) + 1$*

La coloración *grundy* por aristas estudiada en este trabajo resulta más complicada que la coloración clásica. Por esta razón, sospechamos que este problema igualmente es *NP*-completo. Esto justifica el interés en el estudio de este tipo de coloraciones.

R. Fabila y D. Wood en [10] mejoran la cota inferior para el número cromático de un tipo especial de gráfica geométrica D_n . Donde $V(D_n)$ son los segmentos de recta que unen puntos de un $P \subset \mathbb{R}^2$ finito, con P en posición general o convexa, y las adyacencias están dadas por las intersecciones entre dichas rectas. Uno de sus principales aportes son las siguientes cotas.

$$n - \sqrt{2n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \leq \chi(D_n) < \sqrt{\frac{1}{2}n} - \frac{1}{2}(\log n) + 4.$$

Dado un conjunto P de n puntos en posición general en el plano, R. Fabila y D. Wood en [11] estudiaron y determinaron cotas para el número cromático de gráficas geométricas G_P . En este trabajo, $V(G_P)$ son los triángulos determinados por P , donde las adyacencias existen si dos triángulos comparten algún punto interior. Su principal aporte es el siguiente teorema.

Teorema 2.5.3. *Para cualquier conjunto P de n puntos en posición general en el plano*

$$\frac{n^3}{27} \leq \omega(G_P) \leq \chi(G_P) \leq \frac{27n^3}{520} + O(n^2).$$

Parte de los artículos mostrados trabaja con gráficas muy particulares. El estudio de la literatura referente del tema nos muestra la ausencia de resultados para gráficas bipartitas geométricas. No existen trabajos sobre coloraciones completas para este tipo de gráficas. Esto constituye el principal aporte y originalidad del presente trabajo de tesis.

Capítulo 3

Índice cromático

Sea $K_{m,n}$ una gráfica bipartita geométrica convexa con $m \leq n$, deseamos encontrar $\chi_1(K_{m,n})$. Es decir, el mínimo número de colores necesario para colorear todas las aristas de la gráfica. Recordemos que aristas con el mismo color deben ser disjuntas en esta coloración.

Trabajamos primero con gráficas separables seguido de gráficas alternantes. Posteriormente obtenemos el tamaño del *thrackle* para cada uno de estas familias de gráficas. Finalmente, con ayuda de los dos resultados anteriores, obtenemos cotas para cualquier gráfica convexa.

3.1. Definiciones

En esta sección introducimos los conceptos de *thrackle* y gráficas de cúmulos. Dichos conceptos son utilizados ampliamente en éste y posteriores capítulos. Para obtener una definición más general y diversas propiedades del concepto de *thrackle*, véase [16] y [20].

Definición 3.1.1. Sea G una gráfica geométrica, decimos que el subconjunto $T \subset E(G)$ es un *thrackle*¹ de G si para cualesquiera $u, v \in T$, las aristas u y v son adyacentes. Denotamos a T como $Tr(G)$. Si $|Tr(G)| = x$ para algún $x \in \mathbb{N}$ y no existe otro *thrackle* $Tr_2(G)$ tal que $|Tr_2(G)| > x$, diremos que $Tr(G)$ es un *thrackle maximal*.

¹La palabra *thrackle* fue introducida por el matemático británico John H. Conway como una variación tonal de la palabra *tangle*, que quiere decir enredo.

En la figura 3.1 se muestra un *thrackle* maximal $Tr(K_{7,7})$ alternante con $|Tr(G)| = 7$. Notemos que, en general, existen distintos *thrackles* maximales (en este caso, un *thrackle* maximal distinto es aquel formado por todas las aristas que salen de un vértice).

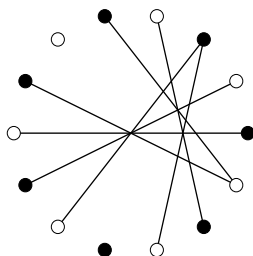


Figura 3.1: Ejemplo de *thrackle* maximal para $K_{7,7}$ alternante.

El siguiente teorema acota superiormente el tamaño del *thrackle* de cualquier gráfica geométrica, en función de su cantidad de vértices. La demostración se puede ver en [20].

Teorema 3.1.2. *Sea, G una gráfica geométrica y $Tr(G)$ cualquier thrackle de G . Entonces*

$$|Tr(G)| \leq |V(G)|.$$

Para trabajar de manera sencilla con gráficas convexas, agruparemos sus vértices en cúmulos y contaremos su número de cúmulos. Este par de conceptos los definimos a continuación.

Definición 3.1.3. *Sea $K_{m,n}$ convexa. Un cúmulo de $K_{m,n}$ es un conjunto $\bar{C} \subset V(K_{m,n})$ tal que todos los vértices de \bar{C} son rojos o son azules, además si $v \in \bar{C}$ y $u \in V(K_{m,n})$ es un vecino de v (sobre la envoltura convexa de $K_{m,n}$) con el mismo color que éste, entonces $u \in \bar{C}$.*

Definición 3.1.4. *Sea $K_{m,n}$ convexa. El número de cúmulos de $K_{m,n}$ se define como*

$$k = \frac{\sum \bar{C}_i}{2}.$$

Es decir, el número de cúmulos de cualquier color.

Ahora definimos una gráfica geométrica de cúmulos. Esta gráfica es de gran utilidad para restringir el espacio de búsqueda del *thrackle*. Nos permite tratar cualquier gráfica bipartita convexa como una gráfica bipartita alternante convexa. En particular podremos utilizar los lemas referentes a gráficas alternantes.

3.1. DEFINICIONES

Definición 3.1.5. Sean $K_{m,n}$ una gráfica convexa completa, y $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto con $|S| = 2k$. Definimos la **gráfica geométrica de cúmulos** $\widehat{K}_{k,k}$ como la gráfica bipartita donde $V(\widehat{K}_{k,k}) = S$, cada vértice de $\widehat{K}_{k,k}$ representa un cúmulo de $K_{m,n}$, y los cúmulos vecinos en $K_{m,n}$ son vértices vecinos en $\widehat{K}_{k,k}$. Cada arista de $\widehat{K}_{k,k}$ representa todas las aristas posibles de los cúmulos asociados en $K_{m,n}$.

Notemos que esta gráfica de cúmulos $\widehat{K}_{k,k}$ es *completa*, ya que $K_{m,n}$ es completa, y es alternante por definición. La figura 3.2 muestra la gráfica $K_{7,7}$ y su respectiva gráfica de cúmulos $\widehat{K}_{4,4}$.

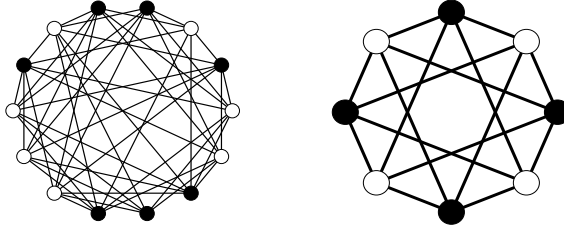


Figura 3.2: Gráfica $K_{7,7}$ convexa y su respectiva gráfica de cúmulos $\widehat{K}_{4,4}$.

Para encontrar el *thrackle* de $K_{m,n}$, nos limitamos a encontrar el *thrackle* en $\widehat{K}_{k,k}$. Ahora debemos fijarnos en las aristas de $K_{m,n}$ que tienen asociada una arista en el *thrackle* de $\widehat{K}_{k,k}$ (recordemos que cada arista de $\widehat{K}_{k,k}$ representa las aristas en $K_{m,n}$ que van de los vértices de un cúmulo al otro).

Podemos ver que si dos aristas se intersectan en el *thrackle* de la gráfica $\widehat{K}_{k,k}$, todas las aristas entre los dos pares de cúmulos en $K_{m,n}$ igualmente se cortan. Esto puesto que cualquier recta de una pareja de cúmulos separa a los dos cúmulos por completo, lo cual implica que cualquier arista entre estos cúmulos forzosamente cortará a dicha recta.

Únicamente nos resta encontrar el máximo número de rectas incidentes por cada arista de $\widehat{K}_{k,k}$. Notemos que cada pareja de estos cúmulos puede verse como el caso bipartita separado por una recta. De esta forma, el máximo número de rectas que se intersectan entre un par de cúmulos es $b + r - 1$, donde b es el número de vértices azules y r de rojos.

3.2. Gráficas convexas separables

En esta sección estudiamos las gráficas de tipo $K_{m,n}$ convexas separables. Es decir, los m puntos rojos pueden ser separados por una línea recta de los n puntos azules. Demostremos primero la siguiente cota inferior para el tamaño del *thrackle*.

Lema 3.2.1. *Sea $K_{m,n}$ separable, entonces*

$$|Tr(K_{m,n})| \geq n + m - 1.$$

Demostración. Sean a y b dos vértices vecinos de $K_{m,n}$ de colores diferentes. Podemos construir un *thrackle* con la arista ab , así todas las aristas de $K_{m,n}$ que tienen como vértice en común a a o a b . La figura 3.3 muestra este *thrackle*:

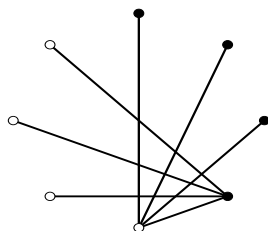


Figura 3.3: Rectas que se cruzan todas entre sí en $K_{m,n}$.

Notemos que todas las aristas con vértice en a se cruzan entre sí, de igual manera que aquellas que comparten al vértice b . Cualquier arista que tiene en común al vértice de a , separa al vértice b con aquellos vértices de color contrario a b . Por lo tanto, todas estas aristas se cruzan.

De esta forma obtenemos n aristas con vértice en a más m aristas con vértice en b menos la arista ab duplicada, lo cual nos da el resultado deseado. ■

Ahora procedemos a demostrar una cota superior para el índice cromático en este tipo de gráficas. Este resultado se obtuvo en colaboración con C. Matías [17], lo mismo sucede en los lemas que posean las siglas *MML* (por los autores) dentro de este capítulo.

Lema 3.2.2 (MML). *Sea $K_{m,n}$ separable, entonces*

$$\chi_1(K_{m,n}) \leq n + m - 1.$$

3.2. GRÁFICAS CONVEXAS SEPARABLES

Demostración. Mostraremos un algoritmo de coloración para $K_{m,n}$ separable que utiliza $n + m - 1$ colores.

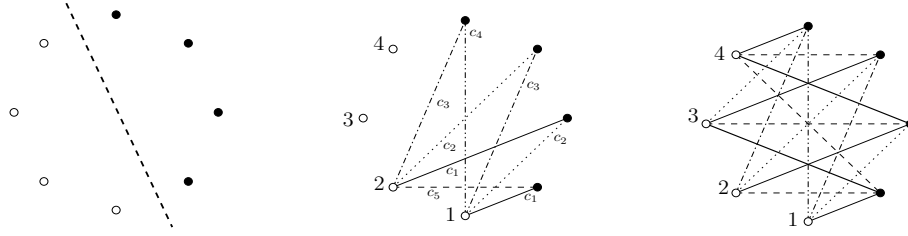


Figura 3.4: Algoritmo para la coloración del caso 2 de $K_{m,n}$.

Primero se fija un punto, en este caso uno de los m rojos y se colorean todas sus adyacencias, lo cual requiere de n colores (figura 3.4a). Posteriormente se recorren los puntos de color rojo en sentido de las manecillas del reloj y se colorean en el mismo orden. Notemos que la primer arista que se coloca induce un nuevo color, puesto que corta el racimo de aristas del punto anterior. El resto de los colores para dicho vértice pueden ser completados con los mismos colores utilizados en el vértice anterior, siguiendo el mismo orden hasta completar todas las adyacencias del vértice en cuestión (figura 3.4b).

Este proceso se repite para cada uno de los puntos rojos restantes, obteniendo finalmente la gráfica totalmente coloreada (figura 3.4c). El procedimiento propuesto genera n colores para el primer punto rojo y un color por los $m - 1$ puntos restantes. Notemos que, por construcción, esta coloración es propia y completa. ■

La implementación para el algoritmo del lema 3.2.2 se generaliza en la sección 3.4. Sin embargo, podemos notar que, si la entrada es $K_{n,m}$, la complejidad del algoritmo es $O(nm)$.

Ahora, utilizamos los lemas anteriores para obtener el valor exacto del índice cromático.

Teorema 3.2.3. *Sea $K_{m,n}$ una gráfica geométrica bipartita separable, entonces*

$$\chi_1(K_{m,n}) = n + m - 1.$$

Demostración. Es consecuencia directa de los lemas 3.2.1 y 3.2.2. ■

Finalmente, con ayuda de los resultados previos, obtenemos el tamaño exacto del *thrackle* de $K_{m,n}$ separable.

Lema 3.2.4. *Sea $K_{m,n}$ una gráfica geométrica bipartita separable, entonces*

$$|Tr(K_{m,n})| = n + m - 1.$$

Demostración. Se sigue del lema 3.2.1 y del teorema 3.2.3. ■

3.3. Gráficas alternantes

En esta sección trabajamos gráficas convexas alternantes. Comenzamos acotando el tamaño del *thrackle* para este tipo de gráficas de la siguiente forma:

Lema 3.3.1. *Sea $K_{n,n}$ alternante, entonces*

$$|Tr(K_{n,n})| \geq n.$$

Demostración. Para todo $v \in K_{n,n}$ tenemos que $deg(v) = n$, por lo tanto existen, al menos, n aristas con un vértice en común. ■

A continuación mostraremos, por medio de un algoritmo de coloración, que podemos obtener una coloración propia de la gráfica alternante utilizando n colores.

Lema 3.3.2 (MML). *Sea $K_{n,n}$ alternante, entonces*

$$\chi_1(K_{n,n}) \leq n.$$

Demostración. A continuación exhibimos un **algoritmo** para colorear $K_{n,n}$ utilizando n colores. Es importante remarcar que todas las operaciones realizadas en el algoritmo son modulo n .

Primero enumeramos los vértices respecto al orden de las manecillas del reloj. Así, para un vértice fijo i , colorearemos las n aristas siguientes con el color i :

$$e_{i-j-1, i+j} \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, n$$

Las aristas coloreadas de esta forma se muestran en la figura 3.5.

3.3. GRÁFICAS ALTERNANTES

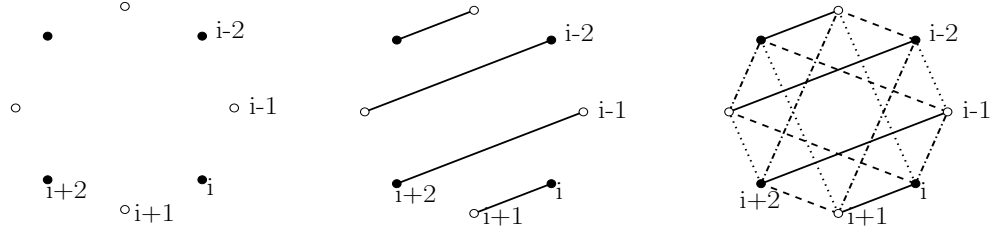


Figura 3.5: Algoritmo para la coloración de $K_{n,n}$.

Al repetir esta coloración, variando el valor de i para $i = 1, \dots, n$, se logran colorear las n^2 aristas de la gráfica $K_{n,n}$ utilizando n colores.

Notemos que la coloración propuesta es propia. Esto debido a que, para un color i , las aristas $e_{i-j-1, i+j}$ son paralelas (por la posición convexa de los vértices y la enumeración elegida).

Como logramos obtener una coloración que para $K_{n,n}$ alternante que utiliza n colores. Se sigue que $\chi_1(K_{n,n}) \geq n$, como lo deseamos. ■

El algoritmo 1, representa el algoritmo de coloración del lema 3.3.2. De esto se sigue que, para una gráfica $K_{n,n}$ como entrada, la complejidad del algoritmo es $O(n^2)$. Como el número de aristas es n^2 , afirmamos que la implementación del algoritmo tiene la mínima complejidad posible.

Ahora, al utilizar los lemas anteriores obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.3. *Sea $K_{n,n}$ alternante, entonces*

$$\chi_1(K_{n,n}) = n.$$

Demostración. Es consecuencia directa de los lemas 3.3.1 y 3.3.2. ■

Al utilizar los resultados anteriores, obtenemos el tamaño exacto del *thrackle* de $K_{n,n}$ alternante de la siguiente manera.

Lema 3.3.4. *Sea $K_{n,n}$ alternante, entonces*

$$|Tr(K_{n,n})| = n.$$

Demostración. Es consecuencia del razonamiento utilizado en la demostración del lema 3.3.1 y del teorema 3.3.3. ■

Algoritmo 1 Índice cromático para gráficas alternantes

```
1: Input: graph : GeomGraph \*alternante*\.  
2: Output: graph \*coloreada*\.  
3:  $iL : Int, iR : Int, edge : GeomEdge$ .  
4:  $V : Int \leftarrow graph.getNumVertices()$ ;  
5:  $t : Int \leftarrow 0$ ;  
6: for  $i = 0$  to  $V$  do  
7:   if edge.Color  $\neq$  NONE then return graph;  
8:    $iR \leftarrow i$  ;  
9:    $iL \leftarrow i + 1$ ;  
10:  edge  $\leftarrow graph.getEdge(iR, iL)$ ;  
11:  edge.Color  $\leftarrow t$ ;  
12:  while  $(iL+1) \bmod(V) \neq iR$  do  
13:     $iL \leftarrow (iL+1) \bmod(V)$ ;  
14:     $iR \leftarrow (iR-1) \bmod(V)$ ;  
15:    edge.Color  $\leftarrow t$ ;  
16:  end while  
17:   $t \leftarrow t + 1$ ;  
18: end for  
19: return graph;
```

3.4. GRÁFICAS CONVEXAS

Finalizamos esta sección con un resultado que será de utilidad para trabajar el caso general.

Lema 3.3.5. *Sea $Tr(K_{n,n})$ un thrackle maximal con n de tamaño par, entonces existe al menos un vértice de $K_{n,n}$ que no pertenece a ninguna arista del thrackle.*

Demostración. Por el lema 3.3.4, el tamaño del *thrackle* es n . Suponemos que cada vértice de la gráfica aparece en al menos una arista del *thrackle*. Puesto que tenemos $2n$ vértices y n aristas, cada vértice debe pertenecer a una única arista.

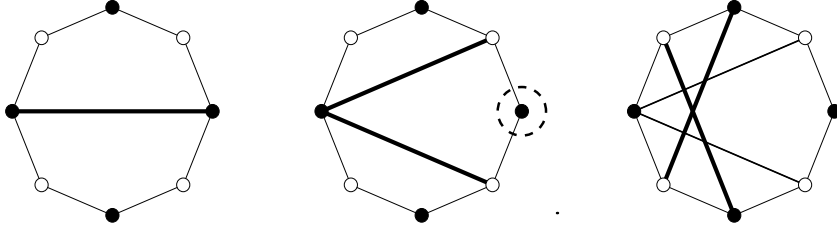


Figura 3.6: Contradicción de $t > n$.

Para que estas aristas formen un *thrackle*, debe existir al menos una arista que divida los puntos en $n - 1$ puntos cada color, es decir, que divida exactamente a los puntos. Por la paridad de la gráfica, el vértice diametralmente opuesto, que separa el conjunto de vértices en $n - 1$ elementos de cada lado de la recta, posee el mismo color (n es par).

Esto hace imposible encontrar dicha arista, y por tanto, existe al menos un vértice que no pertenece a ninguna arista del *thrackle*. ■

3.4. Gráficas convexas

Sea $K_{m,n}$ convexa, donde hay m vértices azules y n vértices rojos. Mostraremos, a través de un algoritmo, que $n + m - k$ es una cota superior para el índice cromático de $K_{m,n}$.

Lema 3.4.1 (MML). *Sea $K_{m,n}$ convexa con k cúmulos, entonces*

$$\chi_1(K_{m,n}) \leq n + m - k.$$

Demostración. Utilizaremos un algoritmo, cuya idea es generar una gráfica alternante $K_{s,s}$ que contenga a la gráfica $K_{m,n}$, para así poder utilizar el teorema 3.3.3. Esto lo logramos agregando un vértice azul (con todas sus posibles adyacencias) entre dos rojos que sean vecinos y viceversa, un vértice rojo entre dos azules vecinos. La figura 3.7 ejemplifica este proceso.

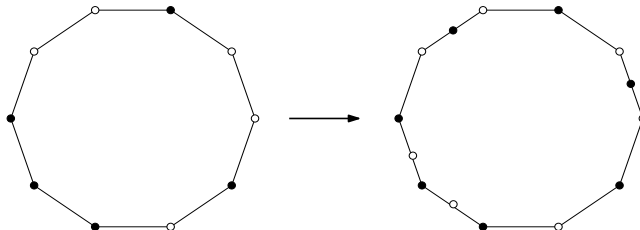


Figura 3.7: Gráfica alternante generada de G arbitraria.

Para facilitar los resultados expresados, diremos que la gráfica $K_{m,n}$ tiene r_1, \dots, r_c vértices por cada cúmulo rojo, lo cual implica que $\sum_{i=1}^c r_i = m$. De igual forma la gráfica tiene b_1, \dots, b_c vértices por cada cúmulo azul, lo cual implica que $\sum_{i=1}^c b_i = n$.

Veamos que, para generar la gráfica alternante $K_{s,s}$, necesitamos que, por cada cúmulo (rojo o azul) con cualquier número b vértices, se agreguen $b - 1$ vértices intercalados del color contrario. De esta forma, el número total de vértices de color rojo para esta gráfica alternante generada es:

$$m + \sum_{i=1}^k (b_i - 1) = m + n - k$$

de igual forma para los vértices del color azul son:

$$n + \sum_{i=1}^k (r_i - 1) = n + m - k$$

Así, por el caso 1, para este alternante $K_{s,s}$ con $s = m + n - k$, se colorea utilizando $n + m - k$ colores, es decir

$$\chi_1(K_{s,s}) = m + n - k$$

Removiendo los mismos vértices que se agregaron para generar este alternante, obtenemos una coloración propia con el mismo número de colores para la

3.4. GRÁFICAS CONVEXAS

gráfica original $K_{m,n}$. De esta forma tenemos:

$$\chi_1(K_{m,n}) \leq m + n - k.$$

La conclusión se sigue. ■

El algoritmo 2, muestra la implementación realizada del algoritmo de coloración del lema 3.4.1. Como la gráfica alternante generada tiene $n + m - k$ vértices y la complejidad del algoritmo 1 es cuadrática, se sigue que, para una gráfica $K_{m,n}$ convexa como entrada, la complejidad de nuestro algoritmo es $O((n + m - k)^2)$.

Algoritmo 2 Índice cromático para gráficas convexas

```
1: Input: graph :GeomGraph \*convexa*\.  
2: Output: graph \*coloreada*\.  
3: pointsToRemove : List Int ← ExtendToAlternant( graph );  
4: graph ← Algoritmo 1 ( graph );  
5: graph.RemovePoints( pointsToRemove );  
6: return graph;
```

Para la obtención de la cota inferior de $K_{m,n}$ trabajaremos por separado los casos donde el número de cúmulos k es impar o es par.

3.4.1. Número impar de cúmulos

El siguiente lema acota el tamaño del *thrackle* cuando el número de cúmulos es impar.

Lema 3.4.2. *Sea $K_{m,n}$ con k cúmulos impar, entonces*

$$|Tr(K_{m,n})| \geq n + m - k.$$

Demostración. Consideremos la gráfica de cúmulos $\widehat{K}_{k,k}$. Como k es impar, podemos obtener el *thrackle* maximal de tamaño k tomando, para cada vértice, la arista correspondiente a su vértice más lejano. La figura 3.8 muestra estas aristas.

Es claro que cada cúmulo aparece únicamente en una diagonal de $\widehat{K}_{k,k}$, y que todos ellos aparecen en una de estas diagonales. Además cada una de

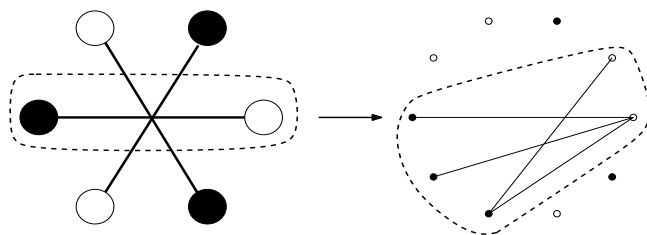


Figura 3.8: *Thrackle* alternante por cúmulos y un respectivo *thrackle*.

estas aristas contiene, en $K_{m,n}$, $b_i + r_i - 1$ aristas que se cruzan a pares, para $i = 1, \dots, k$. Por lo tanto, el número total de aristas del *thrackle* en $K_{m,n}$ es:

$$\sum_{i=1}^k (b_i + r_i - 1) = \sum_{i=1}^k b_i + \sum_{i=1}^k r_i - k = m + n - k.$$

Esto nos indica que, al menos, existen $n + m - k$ aristas que se cruzan a pares en la gráfica $K_{m,n}$. Es decir,

$$|Tr(K_{m,n})| \geq m + n - k,$$

para este caso. ■

Utilizando los lemas anteriores obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.4.3. *Sea $K_{m,n}$ con k cúmulos impar, entonces*

$$\chi_1(K_{m,n}) = n + m - k.$$

Demostración. Es consecuencia directa de los lemas 3.4.1 y 3.4.2. ■

Al utilizar los resultados anteriores, obtenemos el tamaño exacto del *thrackle* maximal de $K_{m,n}$ para este caso.

Lema 3.4.4. *Sea $K_{m,n}$ con k cúmulos impar, entonces*

$$|Tr(K_{m,n})| = n + m - k.$$

Demostración. Se sigue del lema 3.4.2 y del teorema 3.4.3. ■

3.4.2. Número par de cúmulos

En el siguiente lema obtenemos el número de aristas del *thrackle* cuando el número de cúmulos es par. Notemos que, en este caso, influye el tamaño del cúmulo más pequeño (C_{min}).

Lema 3.4.5. *Sea $\mathbf{K}_{m,n}$ con k cúmulos par, entonces*

$$|Tr(\mathbf{K}_{m,n})| = m + n - |C_{min}| - (k - 1).$$

Demostración. Por el lema 3.3.4 para la gráfica de cúmulos $\widehat{\mathbf{K}}_{k,k}$ asociada, sabemos que, para cualquier *thrackle* maximal, existe al menos un cúmulo de vértices que no pertenece a ninguna arista. Podemos remover este cúmulo, puesto que no afecta en nada nuestro conteo del *thrackle* de $\widehat{\mathbf{K}}_{k,k}$. La gráfica restante es, de hecho, una gráfica bipartita que contiene $k-1$ cúmulos. Este k es impar, y además, tiene $n+m-s$ vértices, donde s es el número de vértices del cúmulo extraído.

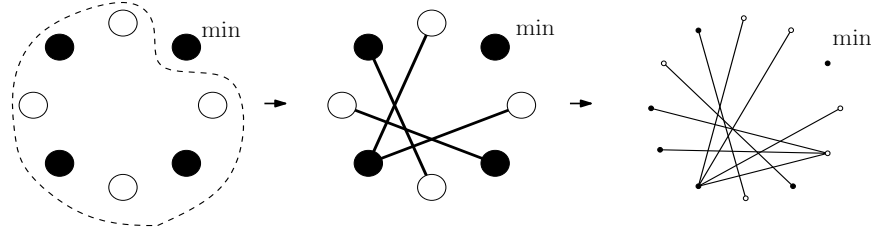


Figura 3.9: Máximo *thrackle* para el caso par.

Este caso impar ya lo resolvimos en la sección anterior y es un valor cerrado. Por lo tanto, sabemos que el tamaño del *thrackle* en este caso es

$$|Tr(\mathbf{K}_{m,n})| \geq n + m - s - (k - 1).$$

El resultado se maximiza cuando s tiene el menor valor posible, es decir, cuando $s = |C_{min}|$. Por lo tanto

$$|Tr(\mathbf{K}_{m,n})| = n + m - |C_{min}| - (k - 1),$$

dando por terminada la demostración. ■

Utilizando este lema obtenemos nuestra cota más estrecha para el índice cromático de $\mathbf{K}_{m,n}$ para este caso.

Lema 3.4.6. *Sea $K_{m,n}$ con k cúmulos par, entonces*

$$m + n - |C_{min}| - (k - 1) \leq \chi_1(K_{m,n}) \leq m + n - k.$$

Demostración. Es consecuencia directa de los lemas 3.4.1 y 3.4.5. ■

Finalmente, al observar las cotas obtenidas para el tamaño del *thrackle* en ambos casos, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 3.4.7. *Sea $K_{m,n}$ convexa, entonces*

$$n \leq |Tr(K_{m,n})| \leq n + m - 1.$$

Demostración. Obtenemos la cota inferior notando que $deg(v) = n$ para cualquier $v \in K_{m,n}$, mientras que la cota superior es consecuencia de los lemas 3.4.4 y 3.4.6. ■

Capítulo 4

Índice acromático

En este capítulo presentamos las cotas obtenidas para el índice acromático en gráficas bipartitas geométricas completas. Recordemos que, en el índice acromático, buscamos que la coloración tenga el máximo número de colores posible, además de que sea propia y completa. En la sección 4.2 obtenemos una cota superior válida para cualquier distribución de los vértices, con algunos casos particulares para posición convexa. Posteriormente estudiamos las gráficas alternantes, cerrando el resultado cuando el número de vértices es impar y obteniendo una cota estrecha cuando es par. Finalmente obtenemos cotas para gráficas bipartitas generales. El índice acromático para gráficas separables se trabaja en el capítulo 5.

4.1. Definiciones

En esta sección enunciamos los conceptos utilizados en el desarrollo del algoritmo de coloración del teorema 4.3.1. Estos conceptos fueron definidos anteriormente en [1].

Definición 4.1.1. Sean $K_{m,n}$ y $e_{i,j} \in E(K_{m,n})$ con $i, j \in \{1, \dots, n+m\}$. Decimos que $e_{i,j}$ es una **arista bisectora** (*halving edge*) si en los dos semiplanos definidos por la recta de $e_{i,j}$, se encuentran al menos $\lfloor \frac{n+m-2}{2} \rfloor$ vértices de $K_{m,n}$. En particular, si $K_{n,n}$ es alternante, debe haber $n-1$ vértices en cada semiplano.

El siguiente concepto caracteriza parejas de aristas que, indirectamente, contienen una arista bisectora.

Definición 4.1.2. Sean $K_{m,n}$ y $e_{i,j}, e_{j+1,k} \in E(K_{m,n})$ con $i, j, k \in \{1, \dots, n+m\}$. Decimos que la pareja $(e_{i,j}, e_{j+1,k})$ una **pareja bisectora** (*halving pair*) si, al menos, una de $e_{i,j+1}, e_{i,k}$ o $e_{j,k}$ es arista bisectora. A esta arista la llamamos **testigo** (*witness*) de la pareja bisectora.

En la figura 4.1 se muestran ejemplos de una arista bisectora y una pareja bisectora. Notemos que, como se ve en la figura, la arista testigo puede ser una arista no factible, solamente debe cumplir el requisito de separar el espacio de vértices adecuadamente.

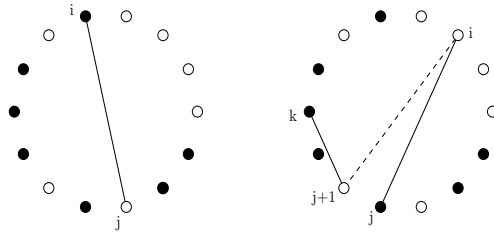


Figura 4.1: Ejemplos de una arista bisectora y una pareja bisectora para $K_{7,7}$ convexa.

Decimos que una arista e incide con una pareja bisectora si e incide con alguna arista de la pareja. De manera análoga, decimos que dos parejas bisectoras inciden si, al menos, una arista de la primera pareja incide con una arista de la segunda pareja bisectora.

El siguiente lema demuestra que cualquier pareja de aristas bisectoras, parejas bisectoras o combinación de éstas inciden, ya sea por vértices o por segmentos de recta. La demostración se puede ver en [1].

Lema 4.1.3. *Sea $K_{m,n}$, entonces:*

- i) *Cualesquiera dos aristas bisectoras inciden.*
- ii) *Cualquier arista bisectora incide con cualquier pareja bisectora.*
- iii) *Cualesquiera dos parejas bisectoras inciden.*

Finalmente enunciamos el concepto de gráfica circulante, el cual nos será de gran utilidad para dividir el conjunto de aristas de manera conveniente. Esta definición la tomamos de [1], la cual adaptamos para gráficas bipartitas. Si se desea una definición más general, véase [12].

4.2. COTA SUPERIOR

Definición 4.1.4. Sea $K_{n,n}$ alternante donde sus vértices están etiquetados en sentido horario, y sea $J \subset \{1, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$. Una **gráfica circulante** $C_n(J)$ de $K_{n,n}$ es una gráfica geométrica, donde el conjunto de vértices es

$$V(C_n(J)) = V(K_{n,n})$$

y el conjunto de aristas es

$$E(C_n(J)) = \{e_{i,j} \in E(K_{n,n}) \mid j - i \equiv k \pmod{n} \text{ o } j - i \equiv -k \pmod{n}, k \in J\}.$$

Una partición inmediata de $K_{n,n}$ inducida por J es

$$E(K_{n,n}) = \bigcup_{i=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} E(C_n(\{i\})).$$

Usaremos esta partición para desarrollar los algoritmos de los teoremas 4.3.1 y 5.2.1. La figura 4.2 muestra la gráfica circulante $C_8(\{3\}) = C_8(\{\lceil \frac{8}{2} \rceil - 1\})$ de $K_{8,8}$ alternante. Notemos que, intuitivamente, las aristas de esta gráfica representan saltos de tamaño $k \in J$.

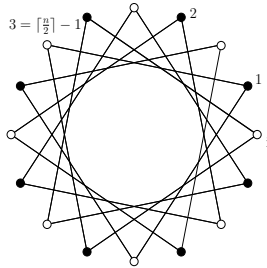


Figura 4.2: Aristas de la gráfica circulante $C_8(\{3\})$ de $K_{8,8}$ alternante.

4.2. Cota superior

En esta sección acotamos superiormente el índice pseudoacromático. Obtenemos corolarios de este resultado para algunas familias específicas de gráficas.

El siguiente teorema da una cota superior para el índice pseudoacromático de cualquier gráfica bipartita completa en posición convexa, la cual tenga un *thrackle* de tamaño t (véase la definición 3.1.1), donde $n \leq t \leq n + m - 1$ (véase el lema 3.4.7).

Teorema 4.2.1. *Sea $K_{m,n}$ convexa y sea $Tr(K_{m,n})$ un thrackle de $K_{m,n}$ con $|Tr(K_{m,n})| = t$ máxima, donde $n \leq t \leq n + m - 1$. Entonces*

$$\psi_1(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{t + nm}{2} \right\rfloor$$

donde $\psi_1(K_{m,n})$ es el índice pseudoacromático de $K_{m,n}$.

Demostración. Sea C una coloración pseudoacromática que usa x colores. Puesto que el total de aristas es nm , el máximo número posible de clases cromáticas de cardinalidad mayor que uno en C es $nm - x$. Por lo tanto existen al menos $x - (nm - x) = 2x - nm$ clases cromáticas de tamaño uno en C . Como el tamaño del thrackle es t , el máximo número de estas clases cromáticas es justamente t . Entonces, en el mejor caso

$$\begin{aligned} 2x - nm &= t \\ x &= \frac{t + nm}{2} \end{aligned}$$

Y, puesto que x debe ser un número entero, tenemos

$$x = \left\lfloor \frac{t + nm}{2} \right\rfloor$$

Veamos ahora que este valor es el mínimo posible. Supongamos, por contradicción, que existe una gráfica geométrica $K_{m,n}$ para la cual existe una coloración completa que utiliza $\left\lfloor \frac{t+nm}{2} \right\rfloor + 1$ colores.

Esta coloración debe tener a lo más $nm - \left\lfloor \frac{t+nm}{2} \right\rfloor - 1$ clases cromáticas de cardinalidad mayor que uno. Entonces, existen al menos $\left\lfloor \frac{t+nm}{2} \right\rfloor + 1 - (nm - \left\lfloor \frac{t+nm}{2} \right\rfloor - 1)$ clases cromáticas de tamaño uno, esto es:

$$2 \left\lfloor \frac{t + nm}{2} \right\rfloor + 2 - nm = \begin{cases} t + 2 & \text{si } n \text{ y } m \text{ son impares,} \\ t + 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Lo cual contradice la hipótesis de que $|Tr(K_{m,n})| = t$ con t máximo. Concluye así la demostración. ■

Por lo demostrado en el lema 3.2.4, sabemos que si $K_{m,n}$ es una gráfica bipartita completa con un número k impar de cúmulos, entonces $|Tr(K_{m,n})| = n + m - k$. Usando el teorema 4.2.1 obtenemos el siguiente lema.

Lema 4.2.2. *Sea $K_{m,n}$ convexa con $m \leq n$ y un k impar de cúmulos. Entonces el índice pseudoacromático de $K_{m,n}$ es a lo más $\left\lfloor \frac{n+m+nm-k}{2} \right\rfloor$.*

4.3. GRÁFICAS ALTERNANTES

Si la gráfica bipartita es separable, entonces $k = 1$. Por lo tanto, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.2.3. *Sea $K_{m,n}$ convexa separable. El índice pseudoacromático de $K_{m,n}$ es a lo más $\left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1$.*

Notemos que, para una gráfica bipartita alternante se tiene que $k = n$ y $m = n$. Recordemos además que el tamaño del *thrackle* maximal de una gráfica alternante es n . Así, del teorema 4.2.1 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.2.4. *Sea $K_{n,n}$ alternante. El índice pseudoacromático de $K_{n,n}$ es a lo más $\frac{n^2+n}{2}$.*

4.3. Gráficas alternantes

En esta sección consideramos gráficas alternantes. Demostramos que, para este tipo de gráficas, nuestra cota para el índice acromático es cerrada cuando el número de vértices por color es impar, y damos una cota inferior para el caso contrario.

4.3.1. Cota inferior

El siguiente teorema da una cota inferior del índice acromático, la cual, obtenemos al exhibir un algoritmo de coloración. Una demostración análoga se hizo en [1] para gráficas geométricas completas (no bipartitas).

Teorema 4.3.1. *Sea $K_{n,n}$ alternante. Entonces*

$$\alpha_1(K_{n,n}) \geq \begin{cases} \frac{n^2 + n}{2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{n^2}{2} & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. A continuación mostramos un algoritmo para colorear $K_{n,n}$ con el número de colores deseado. La idea de este algoritmo es colorear la mayor cantidad de parejas bisectoras con colores distintos, aprovechando que, por el lema 4.1.3, estas parejas inciden.

En cualquier caso, el algoritmo requiere que dividamos el conjunto de aristas de $K_{n,n}$ como partición de sus gráficas circulantes (el tamaño del salto de las

aristas o el mínimo número de vértices que separa la recta asociada) de la siguiente manera:

$$E(K_{n,n}) = \bigcup_{i \in D} E(C_n(\{i\})),$$

con $D = \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. El algoritmo comienza con $t = 0$ colores utilizados y lo manejamos por casos dependiendo de la paridad de n .

- *Caso impar*

1. Si n es impar, utilizamos la partición de $E(K_{n,n})$ de la siguiente manera:

$$E(K_{n,n}) = E(C_n(\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\})) \cup \left\{ \bigcup_{i \in I} E(C_n(\{i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i\})) \right\}$$

donde $I = \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Como n es impar, esto es igual a:

$$E(K_{n,n}) = E(C_n(\{\frac{n+1}{2}\})) \cup \left\{ \bigcup_{i \in I} E(C_n(\{i, \frac{n+1}{2} - i\})) \right\}$$

donde $I = \{1, \dots, \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor\}$. Vamos a colorear primero las aristas de

$$\bigcup_{i \in I'} E(C_n(\{i, \frac{n+1}{2} - i\})),$$

donde $I' = I \setminus \{\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor\}$. Para cada $\{i \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor - 1\}$ definimos $i' = \frac{n+1}{2} - i$. La idea es colorear una arista de $C_n(\{i\})$ y una arista de $C_n(\{i'\})$ con el mismo color. De esta forma, realizamos la asignación de colores a $C_n(\{i, i'\})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e_{j, j+2i-1} &\mapsto t & y \\ e_{j+2i, j+2(i+i')-1} &\mapsto t, \\ t &= t+1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

para cada $\{j \mid 1 \leq j \leq 2n\}$. La figura 4.3 muestra un ejemplo de estas aristas. Notemos que la asignación de las aristas forma una pareja bisectora, ya que la arista $e_{j, j+2(i+i')-1} = e_{j, j+n}$. Después de repetir el proceso para cada $i \in I'$ y, como cada $C_n(\{i\})$ tiene $2n$ aristas, se sigue que, hasta el momento, hemos utilizado $t = 2n(\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor - 1)$ colores.

4.3. GRÁFICAS ALTERNANTES

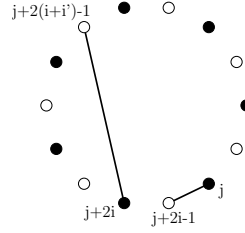


Figura 4.3: Aristas coloreadas con color j para $n = 7$, $i = 1$ y $i' = 3$.

2. Las siguientes clases de aristas permanecen sin colorear:

$$E(C_n(\{\frac{n+1}{2}\})) \cup E(C_n(\{i, \frac{n+1}{2} - i\})),$$

con $i = \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$. Ahora vamos a colorear

$$E(C_n(\{i, \frac{n+1}{2} - i\})).$$

Si $i \neq \frac{n+1}{2} - i$, entonces para colorear las $4n$ aristas con $2n$ colores utilizamos la misma asignación que en (4.1). Si $i = \frac{n+1}{2} - i$ entonces

$$E(C_n(\{i, \frac{n+1}{2} - i\})) = E(C_n(\{i\})).$$

Por lo tanto, coloreamos las $2n$ aristas con n colores de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} e_{j, j+2i-1} &\mapsto t & y \\ e_{j+2i, j+4i-1} &\mapsto t, & \\ t &= t+1 & \end{aligned} \tag{4.2}$$

para cada $\{j \mid 1 \leq j \leq n\}$. Notemos que, en cualquier caso, las aristas utilizadas forman una pareja bisectora. De esta forma hemos utilizado, hasta el momento, un total de $t = 2n \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$ colores en cualquier caso.

3. Finalmente vamos a colorear las n aristas de

$$E(C_n(\{\frac{n+1}{2}\})).$$

Como estas aristas son bisectoras, se les asignan n colores distintos. De esta forma, cuando $i \neq \frac{n+1}{2} - i$ el número final de colores es:

$$\begin{aligned} t &= 2n \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor + n \\ &= 2n \left(\frac{n+1-2}{4} \right) + n \\ &= 2n \left(\frac{n-1}{4} \right) + n \\ &= \frac{n^2+n}{2}. \end{aligned}$$

De igual manera, cuando $i = \frac{n+1}{2} - i$ el número final de colores es:

$$\begin{aligned} t &= 2n \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor + n \\ &= 2n \left(\frac{n+1}{4} \right) \\ &= \frac{n^2+n}{2}, \end{aligned}$$

que es el mismo número de colores en ambos casos. Con esto concluimos que, si n es impar, entonces

$$\alpha_1(K_{n,n}) \geq \frac{n^2+n}{2}$$

- *Caso par*

1. Si n es par, utilizamos la partición de $E(K_{n,n})$ de la siguiente manera:

$$E(K_{n,n}) = \bigcup_{i \in I} E(C_n(\{i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 - i\}))$$

donde $I = \{1, \dots, \lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}{2} \rfloor\}$. Como n es par, esto es igual a:

$$E(K_{n,n}) = \bigcup_{i \in I} E(C_n(\{i, \frac{n}{2} + 1 - i\}))$$

donde $I = \{1, \dots, \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor\}$. Vamos a colorear primero las aristas de

$$\bigcup_{i \in I'} E(C_n(\{i, \frac{n}{2} + 1 - i\})),$$

donde $I' = I \setminus \{\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor\}$. Para cada $\{i \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor - 1\}$ definimos $i' = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 - i$. La idea es colorear una arista de $C_n(\{i\})$ y una arista de $C_n(\{i'\})$ con el mismo color. De esta manera, utilizamos la asignación de colores (4.1) del caso impar. Notemos que, hasta el momento, hemos utilizado $t = 2n(\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor - 1)$ colores distintos.

2. La siguiente partición de aristas permanece sin colorear:

$$E(C_n(\{i, \frac{n}{2} + 1 - i\})),$$

con $i = \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$. Si $i \neq \frac{n}{2} + 1 - i$ entonces las $4n$ aristas se colorean con $2n$ colores utilizando la asignación (4.1) del caso impar. Si $i = \frac{n}{2} + 1 - i$ entonces

$$E(C_n(\{i, \frac{n}{2} - i\})) = E(C_n(\{i\}))$$

4.3. GRÁFICAS ALTERNANTES

Por lo tanto, coloreamos las $2n$ aristas con n colores utilizando la asignación (4.2) del caso impar.

De esta forma, cuando $i \neq \frac{n}{2} + 1 - i$ el número final de colores es

$$\begin{aligned} t &= 2n(\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor - 1) + 2n \\ &= 2n\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor \\ &= 2n(\frac{n+2-2}{4}) \\ &= \frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

De igual manera, cuando $i = \frac{n}{2} + 1 - i$ el número final de colores es

$$\begin{aligned} t &= 2n(\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor - 1) + n \\ &= 2n(\frac{n+2}{4} - 1) + n \\ &= \frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

que es el mismo número de colores en ambos casos. Con esto concluimos que, si n es par, entonces

$$\alpha_1(K_{n,n}) \geq \frac{n^2}{2}.$$

La conclusión se sigue. ■

El algoritmo 3, muestra la implementación del algoritmo de coloración del teorema 4.3.1. De esto se sigue que, para una gráfica $K_{n,n}$ como entrada, la complejidad del algoritmo es $O(n^2)$. Como el número de aristas es n^2 , afirmamos que la implementación del algoritmo tiene la mínima complejidad posible.

4.3.2. Cotas finales

En el siguiente teorema mostramos que, si $K_{n,n}$ alternante con n impar, el índice acromático tiene un valor exacto, cerrando el problema en este caso. Cuando n es par tenemos cotas superior e inferior con una distancia de $\frac{n}{2}$ entre estos valores.

Algoritmo 3 Índice acromático para gráficas alternantes

```

1: Input: graph : GeomGraph \*alternante*\ .
2: Output: graph \*coloreada*\ .
3:  $V : Int \leftarrow graph.getNumVertices()$ ;
4:  $n : Int \leftarrow \frac{V}{2}$ ;
5:  $t : Int \leftarrow 0$ ;
6:  $nIsOdd : Bool \leftarrow (n)mod(2) == 1$  ;
7:  $maxJump : Int$ ;
8: if  $nIsOdd$  then
9:    $maxJump \leftarrow floor(\frac{n+1}{4})$ ;
10: else
11:    $maxJump \leftarrow floor(\frac{n+2}{4})$ ;
12: end if
13:  $to1 : Int, to2 : Int, iPrima : Int$ ;
14:  $vPerJump : Int \leftarrow V$ ;
15: for  $i = 1$  to  $maxJump$  do
16:   if  $nIsOdd$  then
17:      $iPrima \leftarrow \frac{n+1}{2} - i$ ;
18:   else
19:      $iPrima \leftarrow \frac{n}{2} - i + 1$ ;
20:   end if
21:   if  $i == maxJump$  and  $i == iPrima$  then  $vPerJump \leftarrow n$ ;
22:   for  $j = 0$  to  $vPerJump$  do
23:      $to1 \leftarrow (j + 2i - 1)mod(V)$ ;
24:      $to2 \leftarrow (j + 2(i + iPrima) - 1)mod(V)$ ;
25:     graph.ColorEdge(j, to1, t);
26:     graph.ColorEdge((to1+1)mod(V) , to2, t);
27:      $t \leftarrow t + 1$ ;
28:   end for
29: end for
30: if  $nIsOdd$  then
31:   for  $j = 0$  to  $n$  do
32:      $to1 \leftarrow (j + n)mod(V)$ ;
33:     graph.ColorEdge(j, to1, t);
34:      $t \leftarrow t + 1$ ;
35:   end for
36: end if
37: return graph;

```

4.4. GRÁFICAS GENERALES

Teorema 4.3.2. *Sea $K_{n,n}$ alternante, entonces:*

i) *si n es impar tenemos que*

$$\alpha_1(K_{n,n}) = \frac{n^2 + n}{2}.$$

ii) *si n es par tenemos que*

$$\frac{n^2}{2} \leq \alpha_1(K_{n,n}) \leq \frac{n^2 + n}{2}.$$

Demostración. Se sigue del teorema 4.3.1 y del corolario 4.2.4. ■

4.4. Gráficas generales

Notemos que, en el teorema 4.2.1, la posición convexa se utiliza únicamente para acotar el *thrackle*. Por esta razón, podemos utilizar dicho teorema para acotar el índice pseudoacromático de gráficas en posición general de la siguiente manera.

Lema 4.4.1. *Sea $K_{m,n}$ en posición general. Entonces*

$$\psi_1(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{nm + n + m}{2} \right\rfloor$$

Demostración. Del teorema 3.1.2 sabemos que $|Tr(K_{m,n})| \leq m + n$, y por el teorema 4.2.1 la conclusión se sigue. ■

Finalmente, en el siguiente teorema demostramos nuestra cota superior obtenida para el índice acromático geométrico.

Teorema 4.4.2. *Sea $K_{m,n}$ con $m \leq n$ una gráfica abstracta, entonces*

$$\alpha_g(K_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{n(m+1)}{2} \right\rceil.$$

Demostración. Construimos una gráfica geométrica alternante $K_{m,n}$ de $K_{m,n}$ (si $m = n$) o sub-alternante (si $m < n$). El número de cúmulos de $K_{m,n}$ es m , es decir, $k = m$. Por lo demostrado en la sección 3.4 sabemos que, sin

importar la paridad de k , el tamaño del thracke maximal es $|Tr(\mathbf{K}_{m,n})| = n$. De esta forma, por el teorema 4.2.1 tenemos que

$$\alpha_1(\mathbf{K}_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{n(m+1)}{2} \right\rceil.$$

En particular esta cota se cumple para el encaje con el mínimo índice acromático, es decir

$$\alpha_g(K_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{n(m+1)}{2} \right\rceil,$$

como lo deseamos. ■

Capítulo 5

Índice de Grundy

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos para el índice de Grundy en gráficas bipartitas geométricas completas. Recordemos que, en el índice de Grundy, buscamos que la coloración tenga el máximo número de colores posible, además de que esta coloración debe ser propia, completa y que cada arista con color j , debe ser adyacente con al menos a una arista de color i para todo $i \in \{1, \dots, j-1\}$. En la sección 5.1.1 acotamos inferiormente este índice para gráficas convexas separables, cerrando esta cota en la sección 5.1.2. Posteriormente, en la sección obtenemos cotas para gráficas alternantes. Finalizamos el capítulo con el análisis para encontrar una cota superior para gráficas en posición general.

5.1. Gráficas convexas separables

En esta sección trabajamos con gráficas convexas separables, es decir, que sus puntos rojos son separables (por una recta) de sus puntos azules. Los resultados obtenidos en esta sección son los mismos si se trabaja con el índice acromático.

5.1.1. Cota inferior

El siguiente teorema exhibe un algoritmo de coloración donde buscamos utilizar la mayor cantidad de colores, conservando que la coloración sea propia y de Grundy (como veremos más adelante, el valor obtenido es el máximo posible para este caso). Esto nos proporciona la cota inferior que buscamos.

Teorema 5.1.1. *Sea $K_{m,n}$ convexa separable, entonces*

$$\tau_1(K_{m,n}) \geq \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. Utilizamos un algoritmo de coloración para obtener la cota:

La idea central de este algoritmo es, para cada color, cubrir todos los vértices utilizando a lo más dos aristas disjuntas. Al decir cubrir nos referimos a colorear aristas de la gráfica con un color i , de tal forma que, cualquier arista posterior que sea coloreada con un color $j > i$ forzosamente incida con alguna de las aristas que tienen el color i , ya sea por vértices o por intersección de los segmentos de recta.

Recordemos que nos referimos al conjunto de los n vértices como rojos (blancos en las figuras) y al conjunto de los m vértices restantes como azules (negros en las figuras). El algoritmo funciona de igual manera si se eligen al revés. Sin embargo, el proceso difiere ligeramente dependiendo de la paridad de n , razón por la cual será dividido por casos en el último paso.

1. Etiquetamos como a y b al primer y último vértice de color azul, respectivamente, con respecto al sentido de las manecillas del reloj (figura 5.1). Así también etiquetamos los vértices rojos en el mismo sentido con los valores $1, 2, \dots, n$. Asignamos a una variable t , que indica el número de colores utilizados, el valor $t = 1$

2. Ahora coloreamos las aristas $e_{a,1}$ y $e_{b,n}$ con los colores t y $t+1$ (figura 5.1). Las demás aristas que inciden en a o en b se colorean a pares por medio de la función $f(E_{a,b}) \rightarrow \{t+2, \dots, t+n\}$ tal que:

$$\begin{aligned} e_{b,i} &\mapsto t+1+i \\ e_{a,i+1} &\mapsto t+1+i \end{aligned}$$

Notemos que este paso colorea $2 + 2 * (n - 1) = 2n$ aristas utilizando $n + 1$ colores.

Este proceso de coloración es *grundy* puesto que cada diagonal o pareja de aristas separa al conjunto de vértices rojos de los vértices azules, y por ser bipartita, cualquier arista toma vértices de colores opuestos. Por lo tanto, cualquier arista por colorear será adyacente a alguna de estas aristas, ya sea

5.1. GRÁFICAS CONVEXAS SEPARABLES

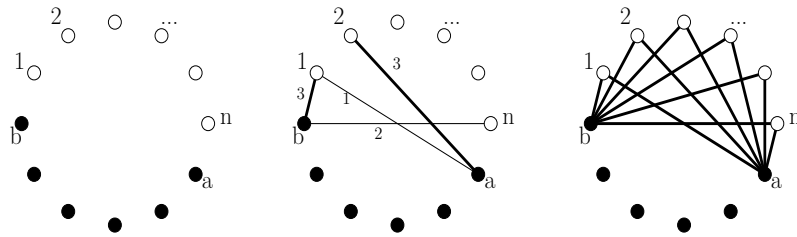


Figura 5.1: Primer paso para la coloración *grundy* de $K_{m,n}$ separable.

por poseer un vértice en común o por intersectar al segmento de recta.

3. Ahora, asignamos $t = t + n + 1$ y etiquetamos como a y b a los respectivos vecinos (del mismo color) de los vértices que tenían esta etiquetación previamente (figura 5.2). Repetimos el paso 2 con estos nuevos vértices a y b . Este proceso se repetirá $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ veces. Es decir, hasta que falten uno o dos vértices por asignar, dependiendo de la paridad de m .

Con esto tendremos coloreadas $2n \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ aristas utilizando $(n + 1) \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ colores.

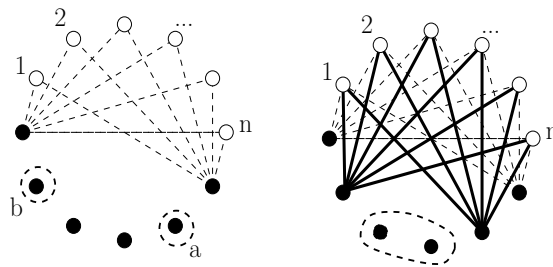


Figura 5.2: Se repite el paso 1 $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ veces variando los vértices a y b .

3-impar. Si m es *impar*, entonces queda un vértice al final del paso 2. Asignamos cada una de las aristas de dicho vértice con un color nuevo. Por construcción estos nuevos colores intersectan a todos los colores anteriores y son adyacentes entre ellos por compartir un vértice.

De esta forma, todas las aristas han sido coloreadas utilizando

$$\begin{aligned}
 (n+1) \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + n &= \frac{(n+1)(m-1)}{2} + n \\
 &= \frac{(n+1)(m+1)}{2} - 1 \\
 &= \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1
 \end{aligned}$$

colores.

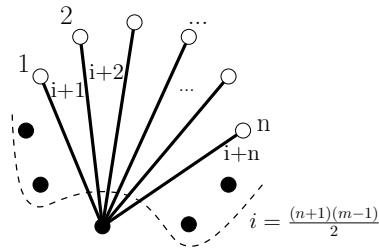


Figura 5.3: Se colorean las n aristas del último vértice con un nuevo color.

3-par. Si m es *par*, entonces quedan dos vértices al final del paso 2. Reasignamos $t = t + n + 1$, así como los vértices a y b , notando que ya no queda ningún vértice intermedio. Primero coloreamos parejas de aristas paralelas, una de a y otra de b . Para esto utilizamos la función $f(E_{a,b}) \rightarrow \{t + 1, \dots, t + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ (figura 5.4) tal que:

$$\begin{aligned}
 e_{b,i} &\mapsto t + i \\
 e_{a,n-i+1} &\mapsto t + i
 \end{aligned}$$

Notemos que este paso colorea $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ aristas utilizando $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ colores.

Las $2 \lceil \frac{n}{2} \rceil$ aristas restantes se colorean asignando un nuevo color para cada una (figura 5.4).

Con esto logramos colorear $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \lceil \frac{n}{2} \rceil = 2n$ aristas utilizando $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \lceil \frac{n}{2} \rceil$ colores.

5.1. GRÁFICAS CONVEXAS SEPARABLES

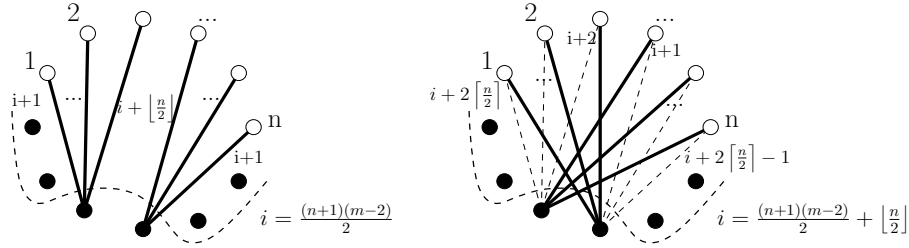


Figura 5.4: Primero se colorean las aristas que no se intersectan a pares. Posteriormente se asigna un color a cada una de ellas.

Así, las aristas han sido coloreadas utilizando

$$\begin{aligned}
 (n+1) \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &= \frac{(n+1)(m-2)}{2} + \frac{3n}{2} \\
 &= \frac{(n+1)(m+1) - 1}{2} - 1 \\
 &= \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1
 \end{aligned}$$

colores.

Por lo tanto, para cualquier caso, este algoritmo genera una coloración Grundy para $K_{m,n}$ separado por una recta utilizando $\left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1$ colores.

De esta forma concluimos que

$$\tau_1(K_{m,n}) \geq \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1,$$

como lo deseamos. ■

El algoritmo 4, muestra el algoritmo de coloración del teorema 5.1.1. Podemos notar que, para una gráfica $K_{n,n}$ como entrada, la complejidad del algoritmo es $O(n^2)$. Nuevamente, como la gráfica tiene n^2 aristas, la complejidad del algoritmo es mínima.

Algoritmo 4 Índice de Grundy para gráficas convexas separables

```

1: Input: graph : GeomGraph \*separable*, RBounds : (Int,Int).
2: Output: graph \*coloreada*.
3:  $V : Int \leftarrow \text{graph.getNumVertices}()$ ;
4:  $t : Int \leftarrow 0$ ;
5:  $iL : Int \leftarrow (\text{RBounds.max} + 1) \bmod(V)$  ;
6:  $iR : Int \leftarrow (\text{RBounds.min} - 1) \bmod(V)$  ;
7:  $BAvailable : Int \leftarrow V - (\text{RBounds.max} - \text{RBounds.min} + 1)$ ;
8: while BAvailable > 2 do
9:   graph.ColorEdge(iL, RBounds.min, t);
10:  graph.ColorEdge(iR, RBounds.max, t+1);
11:   $t \leftarrow t + 2$ ;
12:  for i = RBounds.min to RBounds.max do
13:    graph.ColorEdge(iR, i, t);
14:    graph.ColorEdge(iL, i+1, t);
15:     $t \leftarrow t + 1$ ;
16:  end for
17:   $iL \leftarrow (iL + 1) \bmod(V)$  ;
18:   $iR \leftarrow (iR - 1) \bmod(V)$  ;
19:  BAvailable  $\leftarrow$  BAvailable -2 ;
20: end while
21: if BAvailable == 1 then
22:   for i = RBounds.min to RBounds.max do
23:     graph.ColorEdge(iL, i, t);
24:      $t \leftarrow t + 1$ ;
25:   end for
26: else
27:    $aux : Int \leftarrow 0$ ;
28:   for i = RBounds.min to RBounds.max do
29:     graph.ColorEdge(iR, i, t);
30:     if  $i \geq (\text{RBounds.max} - aux)$  then  $t \leftarrow t + 1$ ;
31:     graph.ColorEdge(iL, RBounds.max - aux, t);
32:      $t \leftarrow t + 1$ ;
33:      $aux \leftarrow aux + 1$ ;
34:   end for
35: end if
36: return graph;

```

5.1.2. Cotas finales

El siguiente teorema engloba las cotas superior e inferior obtenidas en las secciones anteriores para el índice de Grundy en gráficas convexas separables.

Teorema 5.1.2. *Sea $K_{m,n}$ convexa separable, entonces*

$$\psi_1(K_{m,n}) = \alpha_1(K_{m,n}) = \tau_1(K_{m,n}) = \Gamma_1(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1$$

Demostración. Por el corolario 4.2.3 y, como toda coloración acromática es pseudoacromática, tenemos

$$\alpha_1(K_{m,n}) \leq \psi_1(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1.$$

Además, como toda coloración de Grundy es acromática y toda coloración pseudoGrundy es pseudoacromática, entonces

$$\tau_1(K_{m,n}) \leq \Gamma_1(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1.$$

Ahora, por el teorema 5.1.1 podemos generar una coloración Grundy con $\left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1$ colores. También sabemos que este mismo algoritmo genera una coloración acromática. Esto nos lleva a

$$\alpha_1(K_{m,n}) \geq \tau_1(K_{m,n}) \geq \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1.$$

Combinando estas desigualdades obtenemos

$$\alpha_1(K_{m,n}) = \tau_1(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1.$$

Además las cotas propuestas también son válidas para las coloraciones *pseudoacromática* (ψ_1) y *pseudograndy* (Γ_1). Por lo tanto, nuestro resultado final muestra que, para $K_{m,n}$ separable por una recta, se tiene

$$\psi_1(K_{m,n}) = \alpha_1(K_{m,n}) = \tau_1(K_{m,n}) = \Gamma_1(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1,$$

como lo deseamos. ■

5.2. Gráficas alternantes

En esta sección consideramos gráficas alternantes. Hallamos cotas, superior e inferior, de orden cuadrático para este índice de coloración.

5.2.1. Cota inferior

El siguiente teorema proporciona una cota inferior del índice de Grundy, la cual, obtenemos con un algoritmo de coloración.

Teorema 5.2.1. *Sea $K_{n,n}$ convexa alternante, entonces*

$$\tau_1(K_{n,n}) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. Para obtener la cota inferior utilizamos el siguiente **algoritmo** de coloración. La idea del algoritmo es colorear aristas con el mismo color, de tal forma que, para aristas con nuevos colores, estemos seguros que incidan con el color previo.

Dividamos el conjunto de aristas de $K_{n,n}$ como partición de sus gráficas circulares (véase la definición 4.1.4) de la siguiente manera:

$$E(K_{n,n}) = \bigcup_{i \in J} E(C_n(\{i\})),$$

donde $J = \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Asumimos que los vértices están enumerados en orden de las manecillas del reloj. Por tanto, las operaciones son congruentes módulo n . El algoritmo comienza con $t = 0$ colores utilizados y $k = 1$.

1. Coloreamos $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ aristas de $E(C_n(\{k\}))$ con $2k$ colores distintos. Para cada $\{i \mid 0 \leq i < 2k\}$, coloreamos las $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ aristas mediante la siguiente asignación:

$$e_{i+2kj, i+2k(j+1)-1} \mapsto t + i,$$

para cada $\{j \mid 0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1\}$. La forma de estas aristas se muestra en la figura 5.5.

Finalmente incrementamos el valor de $t = t + 2k$. Notemos que, en este paso, coloreamos $2k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ aristas utilizando $2k$ colores. Además, es importante

5.2. GRÁFICAS ALTERNANTES

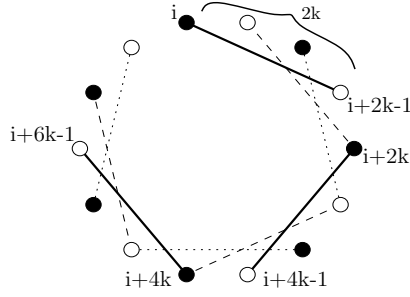


Figura 5.5: Aristas coloreadas con color $t + 1$ para $n = 7$, $k = 2$ y $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1 = 2$.

señalar que no se colorean todas las aristas de $E(C_n(\{k\}))$, solo las suficientes para obtener la cota (las aristas restantes se colorean con el algoritmo voraz).

2. Repetimos el paso 1 para cada $\{k \mid 2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$.

3. Vamos a colorear las aristas restantes de:

$$E(C_n(\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\})).$$

Independientemente de la paridad de n , el número de colores utilizados será n . Si n es par, coloreamos $2n$ aristas por medio de la asignación

$$\begin{aligned} e_{i,i+n-1} &\mapsto t + i \\ e_{i+n,i+2n-1} &\mapsto t + i \end{aligned}$$

Y si n es impar, $|E(C_n(\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}))| = n$. Por lo tanto, le asignamos un color diferente a cada arista. De esta forma, logramos obtener una coloración de Grundy de un subconjunto de $E(K_{n,n})$ utilizando

$$\begin{aligned} t &= 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} k + n \\ &= 2 \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} + n \\ &= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 + n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ &= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{aligned}$$

colores. Como podemos colorear las aristas restantes por medio del algoritmo voraz, tenemos que

$$\tau_1(K_{n,n}) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Concluye así la demostración. ■

El algoritmo 5, muestra el algoritmo de coloración del teorema 5.2.1. Por lo tanto, para una gráfica $K_{n,n}$ como entrada, la complejidad del algoritmo es $O(n^3)$.

Algoritmo 5 Índice de Grundy para gráficas convexas alternantes

```

1: Input:   graph : GeomGraph \*alternante*.
2: Output:  graph \*coloreada*.
3:  $V : Int \leftarrow graph.getNumVertices();$ 
4:  $t : Int \leftarrow 0;$ 
5:  $n : Int \leftarrow V/2 ;$ 
6:  $nIsOdd : Bool \leftarrow (n)mod(2) == 1 ;$ 
7:  $maxJump : Int \leftarrow ceil(\frac{n}{2});$ 
8:  $nFloork : Int, boundPerJump : Int;$ 
9:  $from : Int, to : Int;$ 
10: for  $k = 1$  to  $maxJump$  do
11:    $nFloork \leftarrow floor(\frac{n}{k});$ 
12:   if  $k == maxJump$  and  $nIsOdd$  then
13:      $boundPerJump \leftarrow 2k-1;$ 
14:   else
15:      $boundPerJump \leftarrow 2k;$ 
16:   end if
17:   for  $i = 0$  to  $boundPerJump-1$  do
18:     for  $j = 0$  to  $nFloork-1$  do
19:        $from \leftarrow (i+2kj)mod(V);$ 
20:        $to \leftarrow (i+2k(j+1)-1)mod(V);$ 
21:        $graph.ColorEdge(from, to, t);$ 
22:     end for
23:      $t \leftarrow t + 1;$ 
24:   end for
25: end for
26: return graph;

```

5.2.2. Cota superior

En esta sección exhibimos una cota superior del índice de Grundy para gráficas alternantes. Esta cota la obtenemos contando las incidencias por

5.2. GRÁFICAS ALTERNANTES

aristas, por vértices y realizando un proceso de conteo, aprovechando la propiedad de Grundy.

Incidencias por aristas

En el siguiente teorema obtenemos una expresión para el número de incidencias por aristas en gráficas alternantes.

Teorema 5.2.2. *Sea $K_{m,n}$ convexa con k cúmulos, $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ vértices azules por cúmulo y $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ vértices rojos por cúmulo. Entonces*

$$cr_e(K_{m,n}) = \binom{m}{2} \left[\sum_{i=1}^k \binom{b_i}{2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k b_i b_j \left[\binom{\sum_{s=i}^{j-1} r_s}{2} + \binom{m - \sum_{s=i}^{j-1} r_s}{2} \right].$$

Demostración. Para obtener el número de incidencias por aristas para $K_{m,n}$, contamos todas las parejas de aristas que se cruzan a pares. Esto lo realizamos encontrando todas las cuartetos de vértices (dos rojos y dos azules) de manera que los vértices rojos sean separables de los vértices azules. Notemos que, como $K_{m,n}$ es convexa, los cuatro vértices separables son la única configuración que generan un cruce.

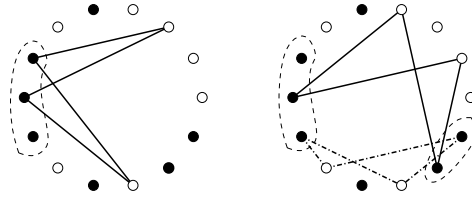


Figura 5.6: Incidencias para uno y para diferentes cúmulos.

Dentro de un mismo cúmulo (figura 5.6), cualquier pareja de vértices fuera del cúmulo de color contrario, es separable a cualquier pareja de vértices dentro del cúmulo. De manera indistinta realizamos el conteo para todos los cúmulos azules, el cual es

$$\binom{b_1}{2} \binom{m}{2} + \binom{b_2}{2} \binom{m}{2} + \dots + \binom{b_k}{2} \binom{m}{2} = \binom{m}{2} \left[\sum_{i=1}^k \binom{b_i}{2} \right].$$

Para el caso donde los vértices azules pertenecen a diferentes cúmulos (i y j), aprovechando la etiquetación de los cúmulos y la posición convexa de la gráfica, cada vértice del cúmulo i con cada vértice del cúmulo j son separables

a cualquier pareja de vértices entre los i y $j - 1$ cúmulos de color contrario, así como también entre cualquier pareja de la otra región (figura 5.6). Indistintamente realizamos el conteo para todos los cúmulos azules, el cual es

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k b_i b_j \left[\binom{\sum_{s=i}^{j-1} r_s}{2} + \binom{m - \sum_{s=i}^{j-1} r_s}{2} \right].$$

De esta forma, el número total de incidencias por aristas para cualquier $\mathbf{K}_{m,n}$ convexa es

$$cr_e(\mathbf{K}_{m,n}) = \binom{m}{2} \left[\sum_{i=1}^k \binom{b_i}{2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k b_i b_j \left[\binom{\sum_{s=i}^{j-1} r_s}{2} + \binom{m - \sum_{s=i}^{j-1} r_s}{2} \right],$$

como lo deseamos. ■

Como consecuencia del teorema 5.2.2 tenemos los siguientes corolarios, los cuales caracterizan el número de cruces por aristas cuando $\mathbf{K}_{m,n}$ es separable y cuando $\mathbf{K}_{m,n}$ es alternante, respectivamente.

Corolario 5.2.3. *Sea $\mathbf{K}_{m,n}$ convexa separable. Entonces*

$$cr_e(\mathbf{K}_{m,n}) = \binom{m}{2} \binom{n}{2}.$$

Demostración. Se aplica el teorema 5.2.2 con $k = 1$, $b_1 = m$ y $r_1 = n$. Notemos que no existen vértices de distintos cúmulos. ■

Corolario 5.2.4. *Sea $\mathbf{K}_{n,n}$ convexa alternante. Entonces*

$$cr_e(\mathbf{K}_{n,n}) = n \binom{n}{3}.$$

Demostración. Aplicamos el teorema 5.2.2 con $k = n$, $b_i = r_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Notemos que el primer término es 0, ya que $\binom{1}{2} = 0$. Por lo tanto,

5.2. GRÁFICAS ALTERNANTES

como todos los cúmulos son semejantes, la expresión se simplifica a

$$\begin{aligned}
 cr_e(K_{n,n}) &= \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{i}{2} + \binom{n-i}{2} \right] \\
 &= \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{i(i-1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i-1)}{2} \right] \\
 &= \frac{n}{4} \left[\sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} n^2 - 2n \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} n + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i \right] \\
 &= \frac{n}{4} \left[2 \sum_{i=1}^{n-1} i^2 - 2n \sum_{i=1}^{n-1} i + (n^2 + n) \sum_{i=1}^{n-1} 1 \right] \\
 &= \frac{n}{4} \left[2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{2n(n-1)n}{2} + (n-1)^2 n \right] \\
 &= \frac{n}{4} \left[(n-1)n \left(\frac{2n-1}{3} - n + (n-1) \right) \right] \\
 &= \frac{n}{4} \left[\frac{2(n-1)n(n-2)}{3} \right] \\
 &= n \left[\frac{(n-1)n(n-2)}{6} \right] = n \binom{n}{3},
 \end{aligned}$$

como lo deseamos. ■

Incidencias por vértices

A continuación realizamos el conteo del número de incidencias por vértices para cualquier gráfica geométrica $K_{m,n}$. Notemos que este conteo es el mismo para cualquier encaje de la gráfica abstracta $K_{m,n}$.

Teorema 5.2.5. *Sea $K_{m,n}$ general o convexa, entonces*

$$cr_v(K_{m,n}) = \frac{nm}{2}(n+m-2)$$

Demostración. Como $K_{m,n}$ es completa, para cada $r \in R$, existen n aristas que tienen al vértice r en común, y para cada $r \in R$, existen m aristas que tienen al vértice r en común (recordemos que $V(K_{m,n}) = R \cup B$ disjuntos con $|R| = m$ y $|B| = n$). De esta manera, para cada $v \in V(K_{m,n})$, su número de incidencias son todas las parejas distintas de aristas que tienen en común a v . Es decir, $\binom{n}{2}$ si v es rojo y $\binom{m}{2}$ si v es azul. Sumando para todos los vértices

obtenemos

$$\begin{aligned}
 cr_v(K_{m,n}) &= m\binom{n}{2} + n\binom{m}{2} \\
 &= \frac{mn(n-1)}{2} + \frac{nm(m-1)}{2} \\
 &= \frac{nm}{2}[(n-1) + (m-1)] \\
 &= \frac{nm}{2}(n+m-2),
 \end{aligned}$$

como lo deseamos. ■

En particular, cuando $K_{n,n}$ es alternante (o simplemente $n = m$), se tiene que

Corolario 5.2.6. *Sea $K_{n,n}$ alternante, entonces*

$$cr_v(K_{n,n}) = n^2(n-1).$$

Obtención de la cota

En el siguiente teorema utilizamos los conteos por vértices y por aristas obtenidos previamente, con el fin de acotar superiormente al índice acromático en cualquier gráfica bipartita con *thrackle* de tamaño t , donde el número de incidencias es conocido.

Teorema 5.2.7. *Sea $K_{m,n}$ general con $|Tr(K_{m,n})| = t$, entonces*

$$\tau_1(K_{m,n}) \leq \frac{(t+1) + \sqrt{1-t^2 + 4(cr_v(K_{m,n}) + cr_e(K_{m,n}))}}{2}.$$

Demostración. Suponemos que $\tau_1(K_{m,n}) = x$, es decir, $K_{m,n}$ utiliza x colores. Como el *thrackle* maximal es de tamaño t , para maximizar el número posible de colores, las primeras $x-t$ clases cromáticas deben contener dos aristas y las últimas t clases cromáticas deben contener una arista (de otro modo x es menor, puesto que, por cada clase cromática, habría más aristas con ese color). Como la coloración cumple la propiedad de Grundy, cada arista de la i -ésima clase cromática debe incidir con, al menos, $i-1$ aristas. Sumando las incidencias para las $x-t$ clases cromáticas con dos aristas y las t clases

5.2. GRÁFICAS ALTERNANTES

con una arista, el mínimo número de incidencias necesarias es

$$\begin{aligned}
 cr_{min}(\mathbb{K}_{m,n}) &= 2 \sum_{i=0}^{x-t-1} i + \sum_{i=x+t}^{x-1} i \\
 &= \sum_{i=0}^{x-t-1} i + \left(\sum_{i=0}^{x-t-1} i + \sum_{i=x+t}^{x-1} i \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{x-t-1} i + \sum_{i=0}^{x-1} i \\
 &= \frac{(x-t-1)(x-t)}{2} + \frac{(x-1)x}{2} \\
 &= \frac{x^2 - 2xt + t^2 - x + t}{2} + \frac{x^2 - x}{2} \\
 &= \frac{2x^2 - 2xt - 2x + t^2 + t}{2} \\
 &= x^2 - (t+1)x + \frac{t(t+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $cr_{min}(\mathbb{K}_{m,n}) \leq cr_e(\mathbb{K}_{m,n}) + cr_v(\mathbb{K}_{m,n})$, es decir

$$x^2 - (t+1)x + \frac{t(t+1)}{2} \leq cr_e(\mathbb{K}_{m,n}) + cr_v(\mathbb{K}_{m,n}),$$

o de otra forma

$$x^2 - (t+1)x + \left[\frac{t(t+1)}{2} - cr_e(\mathbb{K}_{m,n}) - cr_v(\mathbb{K}_{m,n}) \right] \leq 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática y simplificando, obtenemos

$$x \leq \frac{(t+1) + \sqrt{1 - t^2 + 4(cr_v(\mathbb{K}_{m,n}) + cr_e(\mathbb{K}_{m,n}))}}{2},$$

como lo deseamos. ■

En particular, para $\mathbb{K}_{n,n}$ alternante, la cota superior es la siguiente

Corolario 5.2.8. *Sea $\mathbb{K}_{n,n}$ alternante con $n > 2$, entonces*

$$\tau_1(\mathbb{K}_{n,n}) \leq \frac{(n+1) + \sqrt{1 + n^2 \left(\frac{2n^2 + 6n + 5}{3} \right)}}{2}.$$

Es importante remarcar que esta cota superior es más estrecha que la obtenida en el lema 4.2.4 para gráficas alternantes. Cuando $K_{m,n}$ es separable, la cota del lema 4.2.3 es una mejor cota, y de hecho, como se vio en la sección 5.1.2, es cerrada. La gráfica 5.7 muestra la comparación entre la cota del lema 4.2.4 y la obtenida en el corolario 5.2.8, notando que esta última es más estrecha, aunque la diferencia es relativamente pequeña.

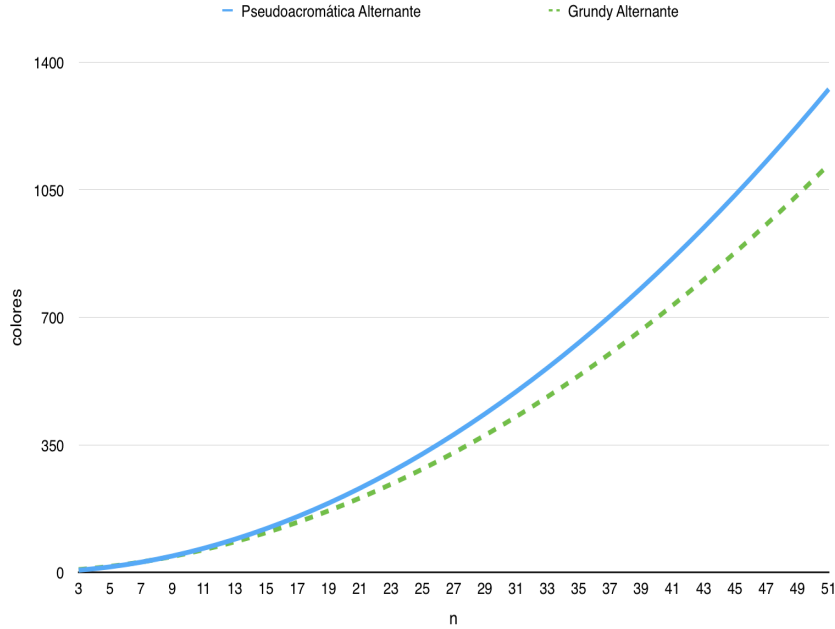


Figura 5.7: Comparativa entre las cotas superiores pseudoacromática y Grundy para $K_{n,n}$ alternante.

5.2.3. Cotas finales

A continuación mostramos el resultado final para el caso $K_{n,n}$ alternante, al combinar los resultados previamente obtenidos.

Teorema 5.2.9. *Sea $K_{n,n}$ alternante con $n > 2$, entonces*

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \tau_1(K_{n,n}) \leq \frac{(n+1) + \sqrt{1 + n^2 \left(\frac{2n^2 + 6n + 5}{3} \right)}}{2}$$

Demostración. Se sigue del teorema 5.1.1 y del corolario 5.2.8. ■

5.3. GRÁFICAS GENERALES

La gráfica 5.8 muestra las cotas inferior y superior del teorema 5.2.9. Observamos que, aunque la distancia entre dichas cotas comienza estrecha, conforme n aumenta, esta distancia se hace cada vez mayor. A pesar de esto, estas cotas resultan efectivas para valores pequeños de n ($n < 50$).

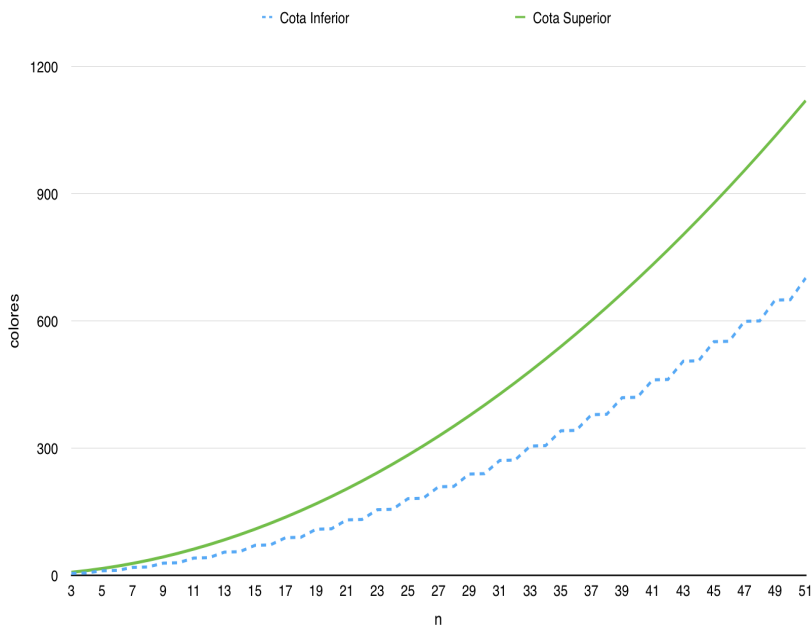


Figura 5.8: Cotas inferior y superior para el índice de Grundy de $K_{n,n}$ alternante.

5.3. Gráficas generales

Comenzamos esta sección con una cota superior del índice de Grundy para gráficas en posición general.

Lema 5.3.1. *Sea $K_{m,n}$ en posición general, entonces*

$$\tau_1(K_{m,n}) \leq \frac{n + m + 1\sqrt{1 - (n + m)^2 + nm(nm + n + m - 3)}}{2}.$$

Demostración. Para cualquier distribución de los vértices de $K_{m,n}$ tenemos que

$$cr_e(K_{m,n}) \leq \binom{n}{2} \binom{m}{2},$$

y además

$$cr_v(\mathbf{K}_{m,n}) = m \binom{n}{2} + n \binom{m}{2},$$

al sumar y simplificar esto, tenemos

$$cr_v(\mathbf{K}_{m,n}) + cr_e(\mathbf{K}_{m,n}) = \frac{nm}{4}(nm + n + m - 3)$$

Por el teorema 3.1.2 sabemos que $Tr(K_{m,n})| \leq n + m$. Al utilizar el teorema 5.2.7 con este valor obtenemos

$$\tau_1(\mathbf{K}_{m,n}) \leq \frac{n + m + 1 + \sqrt{1 - (n + m)^2 + nm(nm + n + m - 3)}}{2}.$$

Como lo deseamos. ■

A pesar de esto, como observamos en la gráfica 5.9, la cota 4.4.1 resulta ser una mejor cota, además de que funciona para cualquier coloración completa. Esto muestra que el teorema 5.2.7 funciona mejor para casos específicos donde conocemos el número exacto de incidencias.

Al utilizar pruebas aleatorias sobre el número de incidencias para gráficas bipartitas completas (explicadas en el capítulo 6), obtuvimos la estructura de la gráfica con el menor número de incidencias (figura 5.10), la cual denotamos por $\mathbf{K}_{m,n}^*$. Convenientemente, esta misma estructura contiene el menor número de cruces en su arista con más intersecciones. Esta gráfica geométrica resulta de interés puesto que, como se verá mas adelante, para el índice de Grundy geométrico, sabemos que existe un encaje, el cual, no podemos colorear con más colores que este número de incidencias.

Sabemos que, en una gráfica bipartita convexa, dos aristas inciden por aristas si sus respectivos vértices rojos y azules son separables. Si los vértices se encuentran en posición general, se debe cumplir además que la *caña* de cualquier vértice, formada por los dos vértices de color contrario, no contenga al vértice sobrante (figura 5.11).

Por lo tanto, el número de incidencias por aristas es

$$\begin{aligned} cr_e(\mathbf{K}_{m,n}^*) &= \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} \binom{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} \binom{\lceil \frac{m}{2} \rceil}{2} + \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} \binom{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} \binom{\lceil \frac{m}{2} \rceil}{2} \\ &= \left[\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} \right] \left[\binom{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lceil \frac{m}{2} \rceil}{2} \right]. \end{aligned}$$

5.3. GRÁFICAS GENERALES

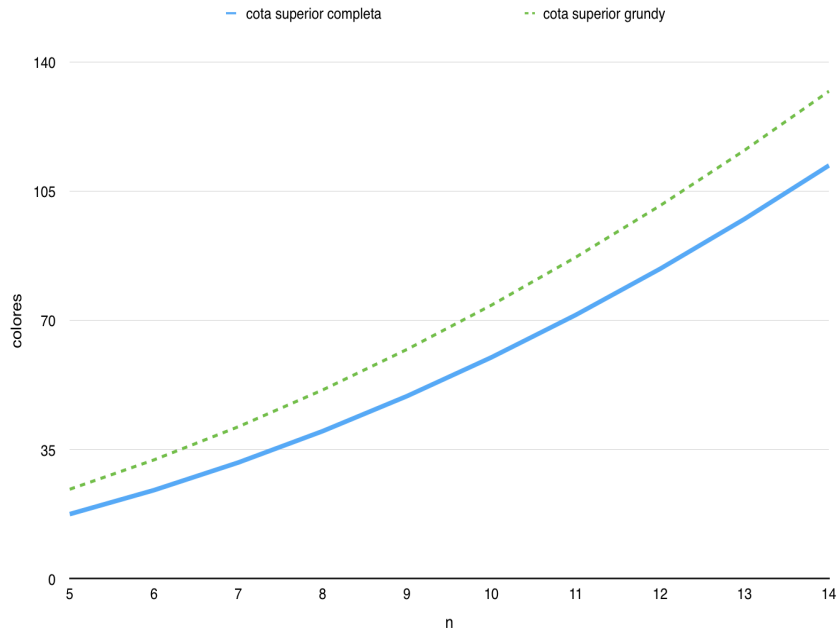


Figura 5.9: Comparativa entre cotas superiores pseudoacromática y de Grundy para $K_{m,n}$ general.

Esto porque solo se consideran las parejas de vértices por cada cuadrante, ya que, en otro caso, los vértices forman alguna de las posiciones que no generan incidencias.

Ahora, como las pruebas exhaustivas muestran la misma distribución de puntos para minimizar los cruces de la arista con mayor incidencias, notamos que dicha arista es mostrada en la figura 5.10. El número de incidencias para esta arista es

$$\begin{aligned}
 CT_{e_{max}}(K_{m,n}^*) &= \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) \left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - 1\right) \\
 &= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1,
 \end{aligned}$$

ya que, cualquier pareja de vértices de colores distintos, dentro del mismo cuadrante, incide con esta arista. Utilizando este conteo, en el siguiente teorema obtenemos una cota superior para el índice de Grundy geométrico.

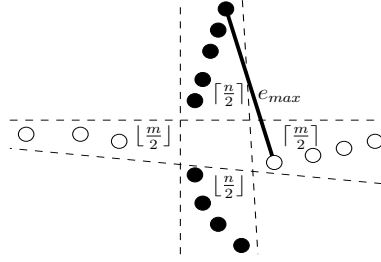


Figura 5.10: Encaje $K_{m,n}^*$ con el mínimo de incidencias.

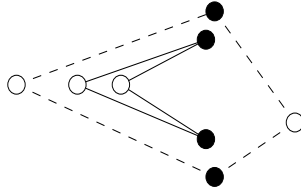


Figura 5.11: Aristas que no inciden por segmentos de recta en $K_{m,n}^*$.

Teorema 5.3.2. *Sea $K_{m,n}$ abstracta. Entonces*

$$\tau_g(K_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1.$$

Demostración. Sea $K_{m,n}$ una gráfica abstracta. Por la estructura de la figura 5.10, sabemos que existe un encaje $K_{m,n}^*$ de $K_{m,n}$ donde el número de incidencias de la arista con más cruces es

$$cr_{e_{max}}(K_{m,n}) + (n + m) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 + n + m,$$

donde $n + m$ corresponde a las incidencias por vértices de la arista. Como la coloración debe cumplir la propiedad de Grundy, no puede haber más colores que este número de incidencias. De lo contrario, existiría un color que tenga que incidir con al menos este número de colores, lo cual es imposible. De esta forma

$$\begin{aligned} \tau_1(K_{m,n}^*) &\leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + n + m + 1 \\ &= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

De esta forma, acotamos superiormente al encaje con el mínimo índice de Grundy, es decir, al índice de Grundy geométrico. ■

Capítulo 6

Experimentos e implementaciones

En este capítulo describimos los programas y experimentos desarrollados como apoyo para obtener las cotas de los capítulos previos. En la sección 6.1 describimos el proceso para realizar las pruebas exhaustivas, mencionamos las estructuras utilizadas, los resultados obtenidos, y algunos algoritmos relevantes en la implementación. En la sección 6.2 detallamos el trabajo detrás de la aplicación móvil utilizada, resaltando puntos específicos de la implementación.

6.1. Pruebas aleatorias y exhaustivas

Realizar pruebas computacionales nos permitió obtener una noción del problema en general, así como estimar el comportamiento esperado de las cotas. Realizamos diversos experimentos con un número importante de gráficas geométricas generadas aleatoriamente, así como algunas pruebas exhaustivas para instancias pequeñas. Estas pruebas fueron programadas utilizando el lenguaje de programación *C++*, por medio del ambiente *Xcode*. Estos experimentos se encuentran en una aplicación manejada por consola. A continuación describimos la estructura utilizada para representar gráficas geométricas, así como una descripción de la estructura, y los resultados de las pruebas realizadas.

Para manejar gráficas geométricas computacionalmente utilizamos una clase que llamamos *GeomGraph*, la cual contiene cuatro estructuras de datos

(figura 6.1). Dos de estas listas contienen enteros que almacenan los índices de vértices y las aristas. Las dos restantes son listas bidimensionales, una almacena las incidencias por vértice (constante para una gráfica dada), y la otra almacena las incidencias por aristas (que varía para cada encaje de la gráfica).

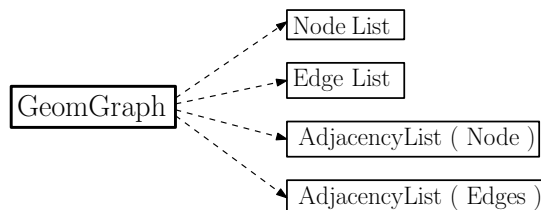


Figura 6.1: Estructuras de datos para manipular gráficas geométricas.

Antes de realizar cualquier experimento generamos una gráfica bipartita con la cual trabajamos. Una vez hecho esto, podemos realizar cualquiera de los siguientes experimentos: (a) coloración voraz de las aristas, (b) búsqueda de los encajes con el máximo/mínimo de incidencias en total y (c) búsqueda de los encajes donde la arista con más incidencias es máxima/mínima. Estos experimentos se describen a continuación:

- (a) En el experimento de coloración voraz de las aristas primero elegimos si la gráfica es convexa o general. Además, por cada repetición, modificamos la posición de los vértices (el encaje geométrico) o la etiquetación de las aristas. Al parámetro que modificamos (posición o etiquetación) lo llamamos *parámetro dinámico*. Si elegimos gráficas convexas, podemos trabajar con gráficas alternantes, separables o arbitrarias. Para calcular la coloración, utilizamos el algoritmo voraz definido en la sección 2.4, el cual depende de la etiquetación de las aristas. Para determinar la intersección de segmentos de recta de manera eficiente utilizamos el algoritmo descrito en [18].

Cualquiera que sea la opción, repetimos el proceso de coloración k veces, actualizando el parámetro aleatorio. Si elegimos variar la etiquetación, podemos realizar una búsqueda exhaustiva para encontrar los valores óptimos, aunque es recomendable utilizar este tipo de búsqueda para instancias pequeñas ($K_{m,n}$ con $mn \leq 15$). Al final del experimento mostramos el máximo y el mínimo de colores utilizados, así como las

6.1. PRUEBAS ALEATORIAS Y EXHAUSTIVAS

distribuciones de los vértices que alcanzaron estos valores. La tabla 6.1a muestra algunos resultados de $K_{m,n}$ convexa alternante, mientras que la tabla 6.1b utiliza $K_{m,n}$ en posición general. Para todos los resultados se realizaron $k = 20,000$ repeticiones.

$K_{n,n}$	colores	
	min	max
5	5	11
6	6	14
7	8	16
8	10	20
9	12	22
10	14	25
11	15	29
12	19	31
13	21	33
14	23	37

(a) $K_{m,n}$ convexa alternante.

$K_{n,n}$	colores	
	min	max
5	6	14
6	8	17
7	10	22
8	13	26
9	15	29
10	18	32
11	20	36
12	23	41
13	26	44
14	29	48

(b) $K_{m,n}$ general.

Cuadro 6.1: Algunos resultados del experimento de coloración voraz.

- (b) En este experimento buscamos los encajes con el máximo/mínimo número de incidencias. Elegimos la posición de los vértices de manera aleatoria sobre un plano de longitud fija, contamos las incidencias y repetimos este proceso k veces. La figura 6.2 muestra la distribución con el máximo número de incidencias después de $k = 100,000$ repeticiones para $K_{8,7}$. Esto reafirma nuestra sospecha de la sección 5.2.2, que esta distribución siempre es separable.
- (c) En este experimento buscamos los encajes cuya arista con más incidencias es mayor/menor. De manera análoga al caso anterior, elegimos la posición de los vértices de manera aleatoria, contamos las incidencias de la arista estudiada y repetimos este proceso k veces. La figura 6.3 muestra un encaje de $K_{8,7}$ general donde se minimizan las incidencias de la arista con más cruces. La estructura de este encaje fue utilizada para obtener la cota superior del índice de Grundy geométrico en el teorema 5.3.2. Es importante mencionar que esta distribución es equivalente a la de mínimas incidencias del experimento anterior.

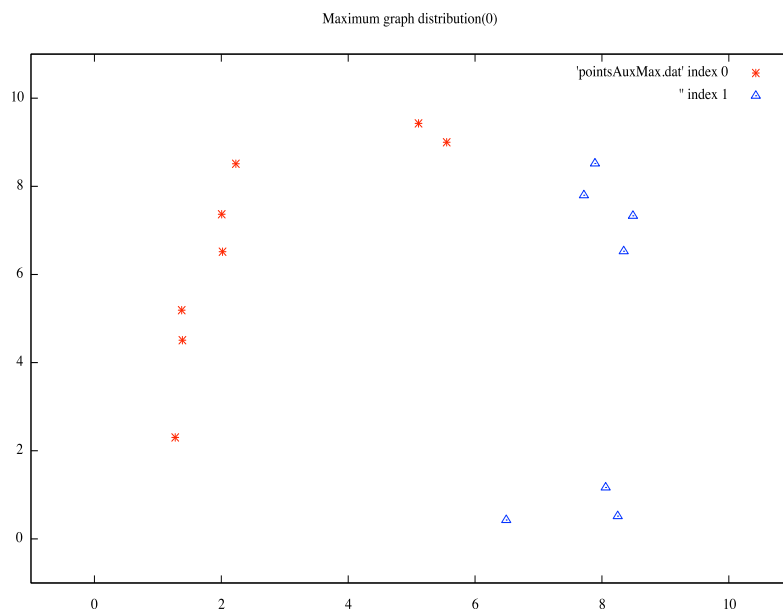


Figura 6.2: Encaje de $K_{8,7}$ que minimiza el número de incidencias ($\Delta \rightarrow$ rojos, $*$ \rightarrow azules).

Además de los experimentos, se implementaron los algoritmos desarrollados en los capítulos 3, 4 y 5. En particular se pueden colorear gráficas con el algoritmo para índice cromático en gráficas convexas (lema 3.4.1), para índice acromático en gráficas alternantes (teorema 4.3.1), y para el índice de Grundy en gráficas convexas separables (sección 5.1.1).

Cuando cualquier experimento termina, damos la opción de generar un archivo de texto con un formato establecido para visualizar la coloración. Para esto realizamos un visualizador sencillo en el lenguaje de programación JAVA. Este programa recibe como entrada el archivo de texto y la duración de la animación. Posteriormente observamos cómo las aristas se colorean en el mismo orden que el algoritmo utilizado. Cuando la animación termina, mostramos cada clase cromática por separado, con el fin de analizar la coloración. La figura 6.4 muestra las ventanas inicial y principal de la aplicación.

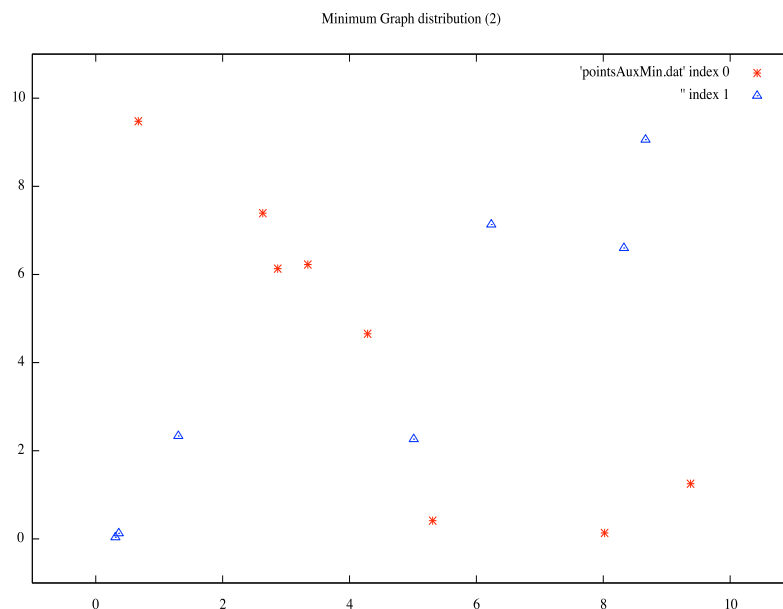


Figura 6.3: Encaje de $K_{8,7}$ que minimiza el número de incidencias por arista ($\Delta \rightarrow$ rojos, $*$ \rightarrow azules).

A manera de ejemplo, analizamos brevemente los datos experimentales obtenidos en las tablas 6.1a y 6.1b, con respecto a las cotas obtenidas en el capítulo 5.

Recordemos que la tabla 6.1a muestra el máximo y el mínimo número de colores (de acuerdo al algoritmo voraz) utilizados en un experimento de coloración. Realizamos $k = 20,000$ cambios aleatorios de la etiquetación de las aristas de $K_{n,n}$ convexa alternante, coloreando las aristas y almacenando los colores utilizados. Este proceso se repitió para $n \in \{5, \dots, 14\}$. La gráfica 6.5 muestra el máximo número de colores de la tabla 6.1a (\square), los valores de la cota inferior del teorema 5.2.1 (Δ) y la cota superior del teorema 5.2.8 (\circ).

De la gráfica 6.6 podemos notar que, para valores pequeños de n (5 y 6), el valor experimental se encuentra dentro del rango de la cota. Mientras más crece n , resulta insuficiente el número de repeticiones (20,000) para alcanzar a la cota inferior (recordemos que la cota es el mínimo para el máximo número de colores posibles). Esto muestra que la cota inferior se ajusta, aunque debemos

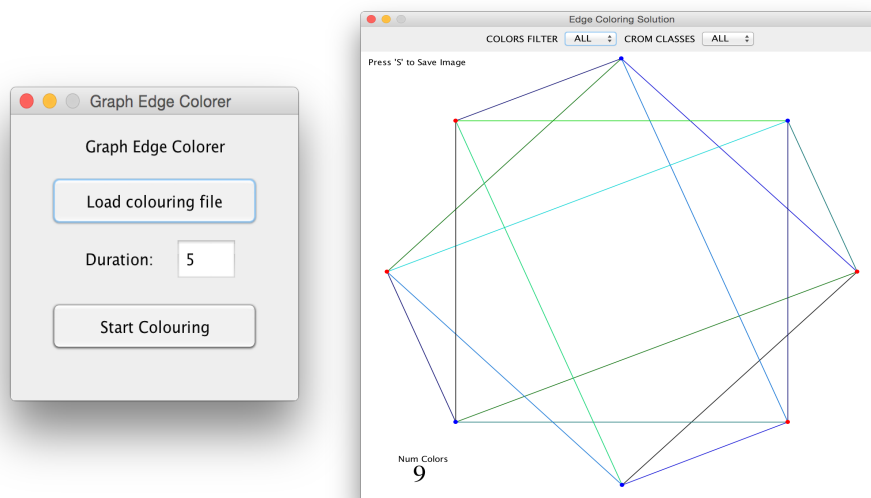


Figura 6.4: Ventana inicial y ventana principal para visualizar coloraciones.

considerar también que el número de etiquetaciones crece exponencialmente conforme aumenta n ($n^2!$). Es conveniente, como un trabajo a futuro, reducir el espacio de búsqueda en las pruebas aleatorias (algunas etiquetaciones son análogos salvo rotaciones).

Nuestro segundo conjunto de datos se encuentra en la tabla 6.1b. Aquí mostramos, de forma análoga, el máximo y el mínimo número de colores en otro experimento. Realizamos $k = 20,000$ variaciones de la posición de los vértices de $K_{n,n}$ general. Este proceso se repitió para $n \in \{5, \dots, 14\}$. La gráfica 6.6 muestra los valores máximos de la tabla 6.1b, así como la cota superior obtenida en la conjetura 4.4.1.

Sabemos que, el caso de $K_{m,n}$ en posición general es un problema difícil (sospechamos que es NP -completo). Esto se ve reflejado en la gráfica 6.6 ya que nuestra cota superior se mantiene bastante holgada respecto a los datos obtenidos. Claro que debemos considerar que, como variamos la posición y trabajamos con una sola etiquetación de las aristas, el valor de 20,000 repeticiones resulta ser poco representativo. Es importante señalar que, en este trabajo, el estudio de gráficas en posición general fue escaso (nos centramos en posición convexa para trabajar de forma secuencial). Sin embargo, estos

6.2. APLICACIÓN PARA DISPOSITIVOS MÓVILES

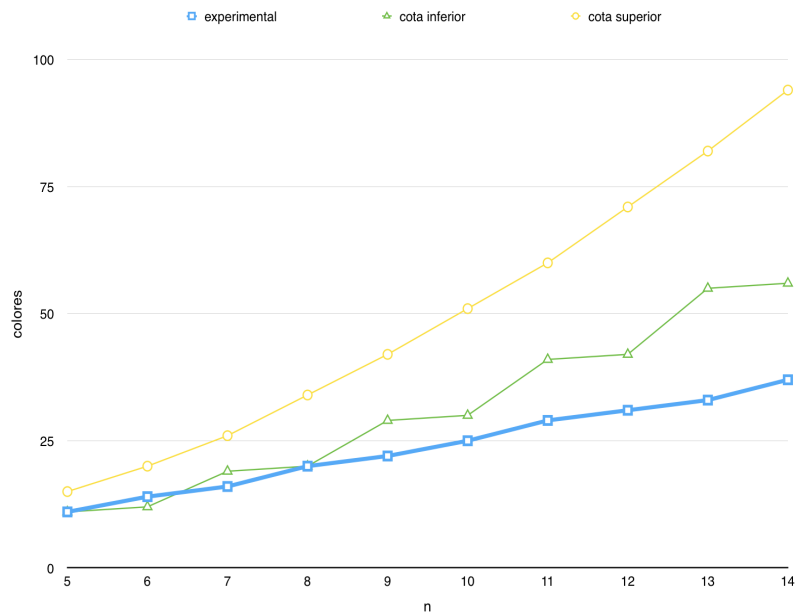


Figura 6.5: Prueba experimental y cotas para el índice de Grundy de $K_{n,n}$ alternante ($\square \rightarrow$ experimental, $\Delta \rightarrow$ inferior y $\circ \rightarrow$ superior).

experimentos proporcionan un punto de partida para poder analizar a detalle este tipo de gráficas y la estructura de sus coloraciones.

6.2. Aplicación para dispositivos móviles

La fase de diseño de los algoritmos de coloración, y en general, la obtención de ideas para posibles coloraciones, han sido los puntos fundamentales en el desarrollo de este trabajo. Por esta razón, desarrollamos una aplicación para dispositivos móviles, específicamente para iPhone y iPad, que sirve como apoyo en esta etapa temprana del desarrollo. A continuación mostramos algunos detalles de esta aplicación, así como las principales ventajas de utilizarla para el desarrollo teórico de los algoritmos.

La aplicación fue desarrollada utilizando el lenguaje de programación *SWIFT*, en el ambiente de *Xcode*. Permite crear, de manera rápida y efectiva, gráficas geométricas simples y bipartitas. Aprovecha la característica *multi-touch* para agregar vértices y aristas con facilidad. Está compuesta principalmente

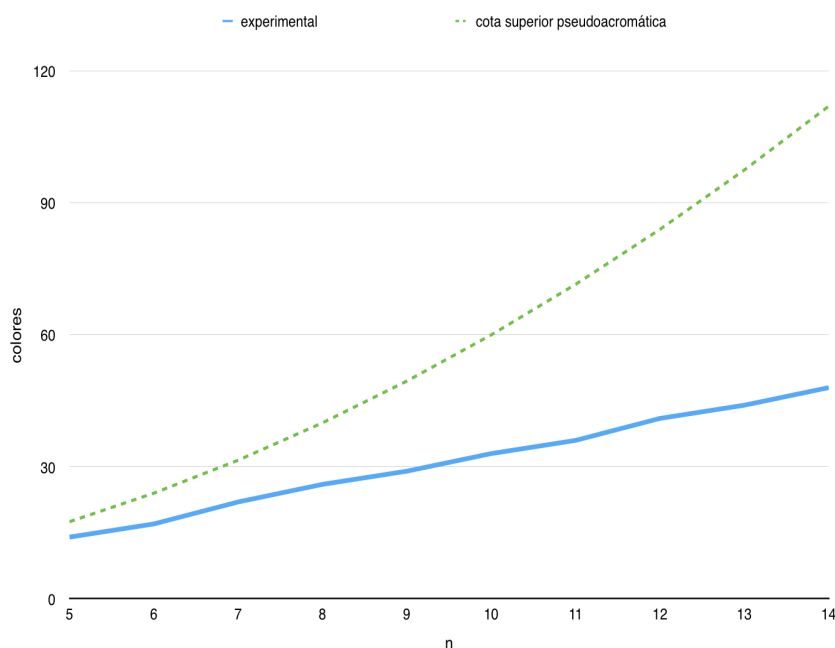


Figura 6.6: Prueba experimental y conjetura de cota superior para coloraciones completas de $K_{n,n}$ general.

por cuatro acciones: (a) edición, (b) envoltura convexa, (c) búsqueda de ruta y (d) coloración de aristas. Estas acciones se describen a continuación:

- (a) La acción de editar permite crear, modificar, y eliminar vértices y aristas de gráficas geométricas. Utilizamos una lista $list < GraphNode >$ para almacenar los vértices, donde $GraphNode$ es una estructura que contiene posición, color e identificador. De igual manera utilizamos una lista $list < GraphEdge >$ para almacenar las aristas, donde $GraphEdge$ contiene identificadores de sus vértices y color. La figura 6.7 muestra esta acción de edición.
- (b) La acción de envoltura convexa muestra un polígono convexo que contiene los vértices de la gráfica y se modifica al mover cualquier vértice. Esta acción permite comprobar si la gráfica a utilizar es convexa. Utiliza el algoritmo de Graham (véase [21]) para realizar este proceso, el cual tiene una complejidad de $O(n \log n)$. La figura 6.8 muestra esta acción de envoltura convexa.
- (c) La acción de búsqueda de ruta permite realizar pruebas de conexidad.

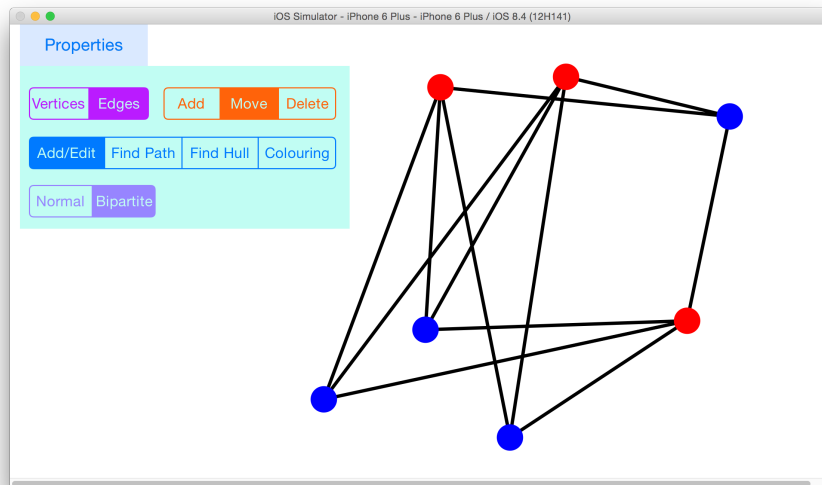


Figura 6.7: Modo de edición de gráficas geométricas.

Encuentra la ruta más corta posible, de acuerdo a la distancia euclidiana, utilizando el algoritmo de búsqueda A^* (véase [21]).

- (d) Finalmente, la acción principal para nuestro objetivo es la coloración de aristas. Esta acción permite asignar y eliminar colores etiquetados a las aristas. Comprueba, además, en cada asignación, las propiedades de coloración propia, completa y Grundy. Utiliza un arreglo bidimensional para contar todas las incidencias de cada pareja de colores posible (de acuerdo a los colores utilizados). Este proceso se realiza en cada movimiento, para así comprobar las propiedades de coloración de manera eficiente (por ejemplo, la coloración es propia si la diagonal de la matriz es el vector $\vec{0}$). La figura 6.9 muestra esta acción de coloración de aristas.

Notemos que la mayor ventaja de esta aplicación radica en poder comprobar, al momento, las principales propiedades en coloraciones completas (propia, completa y Grundy). Esto ayuda al desarrollo de algoritmos de coloración, detectando aquellos que son correctos o que fallan, es decir, que no cumplen con alguna propiedad.

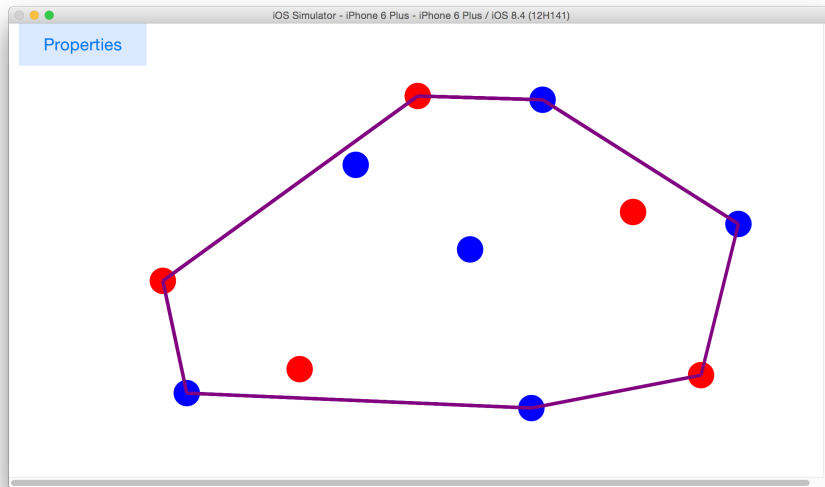


Figura 6.8: Modo de envoltura convexa.

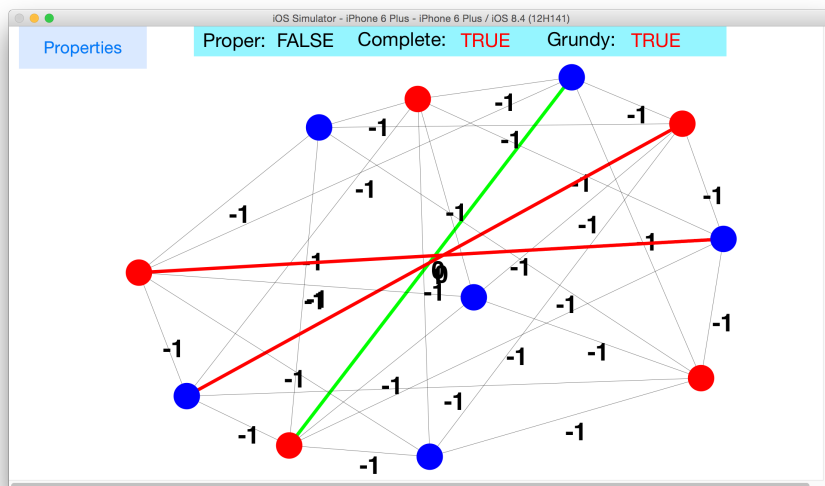


Figura 6.9: Modo de coloración de aristas.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis mostramos cotas para ciertos índices de coloración de gráficas geométricas bipartitas completas. En particular obtuvimos cotas cerradas en distintas familias de gráficas: para el índice cromático en gráficas convexas impares (respecto a los cúmulos) y el índice acromático en gráficas convexas alternantes impares (respecto a los vértices), así como para los índices acromático y de Grundy (simultáneamente) en gráficas convexas separables. Asimismo obtuvimos cotas estrechas para el índice cromático en gráficas convexas pares y el índice acromático en gráficas alternantes pares, así como para el índice de Grundy en gráficas convexas alternantes. Obtuvimos además, por procesos de conteo, cotas superiores en posición general de los índices de Grundy y acromático, así como sus respectivas cotas geométricas, es decir, para cualquier posible encaje.

Para las familias donde no logramos cerrar las cotas, sospechamos que, para el índice cromático, nuestro algoritmo debe proporcionar el mínimo número de colores sin importar la paridad de los cúmulos. Esto sospechamos, de manera análoga, para el índice acromático en gráficas alternantes. En cuanto al índice de Grundy, creemos que el algoritmo propuesto puede ser mejorado, ya que sobran aristas que completamos utilizando el algoritmo voraz.

Los experimentos comparativos realizados mostraron que la coloración por aristas es un problema difícil. Nuestras cotas obtenidas para cualquier familia de gráficas resultaron ser bastante holgadas. Esto nos motiva a continuar la búsqueda de algoritmos eficientes de coloración para gráficas convexas y generales principalmente en los índices acromático y de Grundy.

Tomando esto en cuenta, como posible trabajo a futuro está mejorar las cotas para gráficas bipartitas en posición general. Para este fin necesitamos optimizar nuestros métodos búsqueda de soluciones aproximadas. Una posible línea de investigación sería el diseño de heurísticas para mejorar estas búsquedas. Otra cuestión de interés se encuentra en cerrar las cotas para los índices acromático y de Grundy en gráficas convexas. Esto por medio de un algoritmo más general, como el hicimos para el índice cromático. Comenzamos el análisis de estos algoritmos, pero por cuestiones de complejidad (los cúmulos y sus cardinalidades entran en juego) no logramos finalizarlos. A pesar de esto, sospechamos que obtener estos índices de coloración en gráficas convexas requiere tiempo polinomial.

Finalmente, debido al gran interés que mostró la comunidad que trabaja temas afines gráficas por la aplicación móvil desarrollada, tenemos como trabajo futuro inmediato extender la funcionalidad y alcances de la aplicación móvil. En particular deseamos rediseñar la aplicación en alguna plataforma que facilite el desarrollo de aplicaciones en Android y iOS de manera simultanea. Mejorar la apariencia y el diseño con el fin de agregar módulos y funciones genéricas de manera sencilla. Esto con la finalidad de poder distribuir la aplicación y consolidarla como una herramienta de apoyo para temas afines a gráficas.

Apéndice A

Lista de resultados

A continuación mostramos las cotas obtenidas en esta tesis, las cuales representan nuestro principal aporte. Las gráficas $K_{m,n}$ son bipartitas geométricas, mientras que las gráficas $K_{m,n}$ son bipartitas abstractas. Recordemos que los resultados del índice cromático los obtuvimos en colaboración con C. Matías [17], razón por la cual tienen las siglas *MML*.

■ Índice cromático (*MML*)

- Gráficas alternantes:

$$\chi_1(K_{n,n}) = n$$

- Gráficas separables:

$$\chi_1(K_{m,n}) = n + m - 1$$

- Gráficas convexas:

$$\chi_1(K_{m,n}) = n + m - k \quad \text{si } k \text{ es impar}$$

$$n + m - |C_{\min}| - (k - 1) \leq \chi_1(K_{m,n}) \leq n + m - k \quad \text{si } k \text{ es par}$$

■ Índice acromático

- Gráficas alternantes:

$$\alpha_1(K_{n,n}) = \frac{n^2+n}{2} \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

$$\frac{n^2}{2} \leq \alpha_1(K_{n,n}) \leq \frac{n^2+n}{2} \quad \text{si } n \text{ es par}$$

- Gráficas generales con *thrackle* maximal t (pseudoacromático):

$$\psi_1(\mathbf{K}_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{t+nm}{2} \right\rfloor$$

- Gráficas generales (pseudoacromático):

$$\psi_1(\mathbf{K}_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{nm+n+m}{2} \right\rfloor$$

- Cota superior para el índice geométrico:

$$\alpha_g(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{n(m+1)}{2} \right\rfloor$$

■ **Índice de Grundy**

- Gráficas separables (coloraciones completas):

$$\psi_1(\mathbf{K}_{m,n}) = \alpha_1(\mathbf{K}_{m,n}) = \tau_1(\mathbf{K}_{m,n}) = \Gamma_1(\mathbf{K}_{m,n}) = \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1$$

- Gráficas alternantes:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \tau_1(\mathbf{K}_{n,n}) \leq \frac{(n+1) + \sqrt{1+n^2 \left(\frac{2n^2+6n+5}{3} \right)}}{2}$$

- Cota superior para el índice geométrico:

$$\tau_g(K_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$$

■ **Resultados complementarios para gráficas convexas**

- Tamaño del *thrackle* maximal:

$$|Tr(\mathbf{K}_{m,n})| = n + m - k \quad \text{si } k \text{ es impar}$$

$$|Tr(\mathbf{K}_{m,n})| = n + m - |C_{min}| - (k - 1) \quad \text{si } k \text{ es par}$$

- Incidencias por aristas:

$$cr_e(\mathbf{K}_{m,n}) = \binom{m}{2} \left[\sum_{i=1}^k \binom{b_i}{2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k b_i b_j \left[\binom{\sum_{s=i}^{j-1} r_s}{2} + \binom{m - \sum_{s=i}^{j-1} r_s}{2} \right]$$

- Incidencias por vértices:

$$cr_v(\mathbf{K}_{m,n}) = \frac{nm}{2}(n + m - 2)$$

Bibliografía

- [1] Oswin Aichholzer, Gabriela Araujo, Natalia García, Thomas Hackl, Dolores Lara, Christian Rubio, and Jorge Urrutia. Geometric achromatic and pseudoachromatic indices. *Graphs and Combinatorics*, pages 1–21, 2015.
- [2] Gabriela Araujo, Adrian Dumitrescu, Ferran Hurtado, Marc Noy, and Jorge Urrutia. On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Computational Geometry*, 32(1):59–69, 2005.
- [3] Gabriela Araujo, Juan José Montellano-Ballesteros, Christian Rubio-Montiel, and Ricardo Strausz. On the pseudoachromatic index of the complete graph ii. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 20(1):17–28, 2014.
- [4] Boris Aronov, Paul Erdős, Wayne Goddard, Daniel J. Kleitman, Michael Klugerman, János Pach, and Leonard J. Schulman. Crossing families. *Combinatorica*, 14(2):127–134, 1994.
- [5] Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic graph theory*. CRC press, 2008.
- [6] Thomas H Cormen, Charles E Leiserson, Ronald L Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to algorithms third edition*. MIT Press, 2009.
- [7] Hubert De Fraysseix, János Pach, and Richard Pollack. How to draw a planar graph on a grid. *Combinatorica*, 10(1):41–51, 1990.
- [8] Reinhard Diestel. *Graph theory*. Grad. Texts in Math. Springer, 2005.
- [9] Vladimir Estivill-Castro. *Una introducción a la geometría computacional a través de los teoremas de la galería de arte*, volume 10. Sociedad Matemática Mexicana, 1994.

-
- [10] Ruy Fabila-Monroy and David R Wood. The chromatic number of the convex segment disjointness graph. In *Computational Geometry*, pages 79–84. Springer, 2012.
 - [11] Ruy Fabila-Monroy and David R Wood. Colouring the triangles determined by a point set. *Journal of Computational Geometry*, 3:86–101, 2012.
 - [12] Chris Godsil and Gordon F Royle. *Algebraic graph theory*, volume 207. Springer Science & Business Media, 2013.
 - [13] Frédéric Havet and Leonardo Sampaio. On the Grundy number of a graph. *Parameterized and exact computation*, pages 170–179, 2010.
 - [14] Atsushi Kaneko and Mikio Kano. Discrete geometry on red and blue points in the plane -a survey-. In *Discrete and computational geometry*, pages 551–570. Springer, 2003.
 - [15] Jan Kára, Attila Pór, and David R Wood. On the chromatic number of the visibility graph of a set of points in the plane. *Discrete & Computational Geometry*, 34(3):497–506, 2005.
 - [16] László Lovász, János Pach, and Mario Szegedy. On Conway’s thrackle conjecture. *Discrete & Computational Geometry*, 18(4):369–376, 1997.
 - [17] Constantino Matías-Salvador. Índice cromático para gráficas geométricas completas. Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN, 2015.
 - [18] Joseph o’Rourke. *Computational geometry in C*. Cambridge university press, 1998.
 - [19] János Pach. Geometric graph theory. Technical report, Cambridge University Press, 1999.
 - [20] János Pach and Ethan Sterling. Conway’s conjecture for monotone thrackles. *The American Mathematical Monthly*, 118(6):544–548, 2011.
 - [21] Franco P Preparata and Michael Shamos. Computational geometry: an introduction. 2012.
 - [22] David R Wood. A Simple Proof of the Fary-Wagner Theorem. *eprint arXiv:cs/0505047*, may 2005.