



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN  
UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

MODELO DE OPTIMIZACIÓN  
COMBINATORIA BASADOS EN  
ENTROPÍA (MOCE) PARA REDES DE  
TRANSPORTE

TESIS PRESENTADA POR BENJAMIN PEREA MEDINA  
PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN  
TRABAJO DIRIGIDO POR DR. SERGIO V. CHAPA VERGARA

Ciudad de México noviembre, 2016



---

# Resumen

A lo largo de la historia, la humanidad ha buscado construir redes de comunicación y de transporte que permitan interconectar ciudades o regiones de manera eficiente y con un bajo costo. Sin embargo, actualmente construir una red de transporte, capaz de determinar que tipo de transporte es mejor para cada elemento en presente en una red de transporte, representa un gran reto, por su complejidad. Por esta razón tomar la decisión de implementar cualquier medio de transporte, resulta difícil y complicado de llevar a cabo, más aún, si a esta decisión le sumamos el impacto que cada transporte tendrá en la red, a lo largo de un periodo de tiempo.

La propuesta que a continuación presentamos, se basa en plantear el problema desde un enfoque integral, que toma en cuenta aspectos como flexibilidad, competitividad y desempeño de cada modelo. Para lograrlo, hemos propuesto un par de modelos de optimización combinatoria basados en entropía (MOCE), para desempeño de corto plazo MOCE-C y para desempeño de largo plazo MOCE-L, basados en entropía, los implementamos con la metaheurística Búsqueda Tabú y los aplicamos en un caso de estudio sobre la Costa Este de los Estados Unidos, los resultados obtenidos se compararon con el modelo de Hub de asignación múltiple, con lo cual logramos demostrar que el modelo MOCE-L, es el más adecuado para el problema de diseñar una red de transporte, ya que presenta ventajas comparativas, en términos de sensibilidad, complejidad y error relativo.



---

# Abstract

Throughout history, mankind has sought to build networks of communication and transport, that allow to interconnect cities or regions efficiently and with a low cost. However, currently build a transport network, capable of determine what type of transport is best for each element present in a transport network, represents a great challenge because of its complexity. For this reason, take the decision to implement any means of transport, it is difficult and complicated to carry out more, if this decision we add the impact that each transport will have on the network, along Of a period of time. The proposal presented below is based on a comprehensive approach, which takes into account aspects such as flexibility, competitiveness and performance of each model. To achieve this, we have proposed a pair of combinatorial optimization models, based on entropy (MODE), MOCE-C for the short term and MOCE-L for the long term. Implemented them with the Tabu Search meta-heuristic and applied them in a case study on the East Coast of the United States, the results obtained were compared with the multiple assignment Hub model, with which we succeeded in demonstrating that the MOCE-L model is the most suitable for the desing of a transport network, since it presents comparative advantages in terms of sensitivity, complexity and relative error.



---

# Agradecimientos

En esta página se agradece a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización de esta tesis de maestría. En particular, quiero agradecer al CONACyT por la beca otorgada. Respecto a la elaboración de esta tesis, quiero agradecer Dr. Segi V. Chapa Vergara por su guía, correcciones y sugerencias. Igualmente, quiero agradecer a lo Dra. Xiaou Li Zhang por sus correcciones y acertados comentarios. Finalmente quiero agradecer a mis abuelos Juan y Elisa por su apoyo incondicional a lo largo de este trabajo.





---

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VI</b>
<b>1. Antecedentes y Motivación</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	2
1.1.1. Optimización combinatoria . . . . .	3
1.1.2. Restricciones . . . . .	4
1.2. Contibuciones . . . . .	5
1.2.1. Contribuciones particulares . . . . .	5
1.3. Descripción de la tesis . . . . .	6
<b>2. Distintos tipos modelos para redes de transporte</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Modelos de transporte . . . . .	10
2.2.1. Modelo de Monge-Kantorovich . . . . .	10
2.2.2. Modelo de Gilbert-Steiner . . . . .	11
2.3. Modelos de optimización logística y selección de rutas óptimas . . . . .	11
2.3.1. Optimización logística . . . . .	12
2.3.2. Selección de rutas óptimas . . . . .	12
2.4. Modelado de redes por medio de simulación . . . . .	13
2.4.1. Simulación . . . . .	13
2.4.2. Modelos estocásticos . . . . .	13

2.5. Teoría de la ubicación . . . . .	14
2.5.1. P-median problem . . . . .	15
2.5.2. Covering location problem . . . . .	16
2.5.3. Hub location problems . . . . .	17
2.5.4. Problemas de ubicación con múltiples criterios . . . . .	18
2.6. Resumen . . . . .	19
<b>3. El modelo de optimización combinatoria basado en entropía (MO-CE)</b>	<b>21</b>
3.1. El concepto de entropía y su significado para el modelo . . . . .	22
3.2. Modelos para redes de transporte . . . . .	25
3.2.1. Modelo de optimización combinatoria basado en entropía de corto plazo (MOCE-C) para redes de transporte . . . . .	25
3.2.2. Modelo de optimización combinatoria basado en entropía de corto plazo (MOCE-L) para redes de transporte . . . . .	30
3.3. Comentarios sobre los modelos . . . . .	34
<b>4. Características y parámetros del modelo MOCE</b>	<b>35</b>
4.1. Parámetros . . . . .	36
4.1.1. Flujo de tránsito . . . . .	36
4.1.2. Parámetros en las restricciones . . . . .	38
4.1.3. Cálculo de probabilidades . . . . .	39
4.2. Características de los modelos MOCE-C y MOCE-L . . . . .	41
4.2.1. Complejidad . . . . .	41
4.2.2. Definición del análisis de sensibilidad . . . . .	43
4.2.3. Comentarios sobre el análisis de sensibilidad . . . . .	49
<b>5. Desarrollo e implementación MOCE</b>	<b>51</b>
5.1. Metaheurísticas . . . . .	51
5.2. Búsqueda Tabú . . . . .	52
5.3. Estabilidad en la aproximación . . . . .	54
<b>6. Caso de estudio</b>	<b>59</b>
6.1. Caso de Estudio . . . . .	60

---

6.2. Experimentos con el modelo MOCE-C . . . . .	61
6.2.1. Parámetros . . . . .	61
6.2.2. Análisis de Sensibilidad al MOCE-C . . . . .	62
6.2.3. Resultados con el MOCE-C . . . . .	64
6.2.4. Análisis de resultados . . . . .	64
6.3. Experimentos con el modelo MOCE-L . . . . .	70
6.3.1. Parámetros . . . . .	70
6.3.2. Análisis de Sensibilidad al MOCE-L . . . . .	71
6.3.3. Resultados con el MOCE-L . . . . .	72
6.3.4. Análisis de Resultados . . . . .	73
6.4. Comparaciones . . . . .	78
6.4.1. Modelo de Hub con asignación múltiple . . . . .	79
6.4.2. Resultados del modelo de Hub con asignación múltiple . . . . .	80
6.4.3. Comparativo entre los modelos MOCE-C, MOCE-L y el mo- delo de Hub . . . . .	82
6.5. Resumen . . . . .	83
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>85</b>
7.1. Trabajo futuro . . . . .	86
<b>Appendices</b>	<b>87</b>
<b>A. Búsqueda Tabú</b>	<b>89</b>
A.0.1. Búsqueda Tabú . . . . .	89
A.0.2. Búsqueda Tabú de Crainic y Gendreu . . . . .	90
A.0.3. Código en lenguaje C . . . . .	91
<b>B. Algoritmo de Sobol</b>	<b>109</b>
B.0.4. Pseudocódigo . . . . .	109
B.0.5. Código en lenguaje C . . . . .	110
<b>C. Matrices de Origen-Destino</b>	<b>123</b>
<b>D. Matriz de distancia</b>	<b>125</b>



---

# Índice de figuras

1.1. Descomposición $\mathbf{M}(Z)$ del espacio de parámetros . . . . .	4
3.1. Diagrama de enfoque integral . . . . .	22
3.2. Descripción gráfica de entropía . . . . .	24
5.1. Algoritmo de Búsqueda Tabú, Crainic y Gendreu [10] . . . . .	55
6.1. Mapa de las ciudades en el estudio . . . . .	60
6.2. Variación del método de Sobol con respecto al tamaño de la muestra MOCE-C . . . . .	63
6.3. Mapa de rutas carreteras MCP . . . . .	65
6.4. Mapa de rutas en tren MCP . . . . .	67
6.5. Mapa de rutas aereas MCP . . . . .	68
6.6. Variación del método de Sobol con respecto al tamaño de la muestra MOCE-L . . . . .	72
6.7. Mapa de rutas carreteras MLP . . . . .	74
6.8. Mapa de rutas en tren MLP . . . . .	75
6.9. Mapa de rutas aereas MLP . . . . .	77



---

# Índice de tablas

2.1. Tabla comparativa entre los distintos modelos; S=Si, N=No . . . . .	19
4.1. Tabla compartiva de métodos de análisis de sensibilidad . . . . .	47
6.1. Parámetros del modelo MOCE-C, parte 1 . . . . .	61
6.2. Parámetros del modelo MOCE-C, parte 2 . . . . .	61
6.3. Variación de primer orden, modelo MOCE-C . . . . .	62
6.4. Variación condicional, modelo MOCE-C . . . . .	63
6.5. Resultados del modelo de corto plazo, parte 1 . . . . .	64
6.6. Resultados del modelo de corto plazo, parte 2 . . . . .	64
6.7. Parámetros del modelo MOCE-L, con $t = 20$ ; parte 1 . . . . .	70
6.8. Parámetros del modelo MOCE-L, con $t = 20$ ; parte 2 . . . . .	70
6.9. Variación de primer orden, modelo MOCE-L . . . . .	71
6.10. Variación condicional, modelo MOCE-L . . . . .	72
6.11. Resultados del modelo de largo plazo, parte 1 . . . . .	73
6.12. Resultados del modelo de largo plazo, parte 2 . . . . .	73
6.13. Resultados del Modelo de Hub . . . . .	81
6.14. Variación de primer orden del modelo de Hub . . . . .	81
6.15. Variación de segundo orden del modelo de Hub . . . . .	81
6.16. Comparación entre modelos . . . . .	82
6.17. Comparación entre modelos . . . . .	82
C.1. Matriz de O-D para el primer año . . . . .	123
C.2. Matriz de O-D para el año número veinte . . . . .	123
D.1. Matriz de Distancias . . . . .	125





---

# Capítulo 1

## Antecedentes y Motivación

A lo largo de la historia, la humanidad ha buscado construir redes de comunicación y de transporte que permitan interconectar ciudades o regiones de manera eficiente y con un bajo costo. Sin embargo, actualmente construir una red de transporte, capaz de determinar que tipo de transporte es mejor para cada elemento en presente en una red de transporte, representa un gran reto, por su complejidad. Por esta razón tomar la decisión de implementar cualquier medio de transporte, resulta difícil y complicado de llevar a cabo, más aún, si a esta decisión le sumamos el impacto que cada transporte tendrá en la red, a lo largo de un periodo de tiempo.

Además el éxito de la red y de cada transporte, se ve determinado por la flexibilidad que la red tenga para adaptarse a las necesidades futuras de los usuarios, con base en el análisis de acontecimientos pasados. Por ello, distintos autores han buscado distintas alternativas que permitan la planificación de estas redes de transporte sin necesidad de invertir grandes sumas de dinero, esfuerzo y tiempo. Entre algunas de estas alternativas podemos encontrar modelos de distintos tipos, como por ejemplo, modelos de transporte, modelos logísticos, modelos de simulación estocástica y modelos de ubicación. Sin embargo, ninguno de estos modelos es flexible a cambios en la demanda de los usuarios, o ante cambios, en el análisis de distintas alternativas de transporte.

Por todo lo anterior, nosotros presentamos en este trabajo, dos modelos para

redes de transporte (MOCE-C y MOCE-L) capaces lidiar con los problemas de flexibilidad y de análisis de distintos tipos de transportes. Para ello, ambos modelos están basados en modelos de optimización combinatoria, con una función de costo basada en el concepto de entropía y tres restricciones que reflejan las necesidades cambiantes de los usuarios. Para analizar la eficacia de nuestros modelos, nos apoyamos en el estudio de dos características, la complejidad del problema y la sensibilidad de los modelos a sus parámetros.

## 1.1. Planteamiento del problema

El problema que nosotros vamos a estudiar, es el de como modelar una red de transporte. Se basa en un modelo de optimización combinatoria, capaz de explicar, simular y resolver el problema de elegir la mejor red de vías de transporte considerando su desempeño, con base en el tipo de transporte usado y cambios en la demanda de los usuarios. Para lograr esto, nuestro enfoque es integral, y se basa en tres aspectos.

**Flexibilidad en el tipo de transporte.** Este aspecto depende de la flexibilidad que cada elemento de la red muestre para atender a las necesidades actuales y futuras de sus usuarios. Esto lo hacemos para garantizar que cada elemento en la red sirva a lo largo de un tiempo mínimo de uso.

**Comparación entre distintos tipos de transportes.** Este aspecto se centra en comparar distintos tipos de transportes. Esto se hace para ofrecer la mejor alternativa de transporte con respecto a las cualidades y capacidades de cada uno.

**Desempeño de la red.** Este aspecto se basa en como interactúan cada uno de los transportes presentes en la red para lograr mejorar el desempeño total de la red. Esto lo hacemos para garantizar el funcionamiento de la red en términos globales con base en sus componentes.

Partiendo de lo anterior, resulta natural pensar en como integrar de forma ade-

cuada estos aspectos en los requerimientos que deberán suministrar los modelos. Para tal efecto, nosotros hemos abordado el problema a partir de lo siguiente.

1. Ambos modelos (MOCE-C y MOCE-L) están basados en el paradigma de optimización combinatoria de tipo 0/1. Estos modelos son adecuados porque el problema es discreto y se puede comparar entre los distintos tipos transportes.
2. Las características que se van a estudiar en cada modelo, son dos, complejidad y sensibilidad. Complejidad, determina el costo computacional y el curso de acción para resolver el modelo. Sensibilidad, determina la variación natural del modelo ante los parámetros.
3. El método de solución, ésta basado en la complejidad. Este consiste en el uso de una metaheurística, Búsqueda Tabú. Como parte de la solución con esta metaheurística se da una prueba numérica de la optimalidad de las soluciones mediante el análisis de la estabilidad de la metaheurística.

De lo anterior se desprende el contexto general de la solución del problema, el tipo de modelo y las restricciones que ambos modelos comparten.

### 1.1.1. Optimización combinatoria

Como se menciona en González [20], un problema de optimización combinatoria se puede definir de la siguiente forma.

*Definición 1.1.1*

$$Z^* = \min\{cost(x) : x \in X\}, \quad (1.1.1)$$

donde  $X \subset \mathbb{R}^n$  es el conjunto de soluciones factibles y el costo, mejor conocido como función de costo o función objetivo, es una función que mapea cada valor de  $x \in X \mapsto \mathbb{R}^+$ .

De la definición 1.1.1 tenemos los siguientes tres tipos de problemas:

1. La ecuación 1.1.1 es llamada de tipo 0/1 si  $X \subseteq \{0, 1\}^n$ .
2. La función de costo es **lineal** si  $cost(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$ .

3. La función de costo es tipo **cuello de botella** si  $cost(x) = \max_{1 \leq i \leq n} c_i \cdot x_i$ .  
Donde las  $c_i$ 's son *coeficientes* de la función objetivo y  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  es el *vector de coeficientes*.

Para cada problema descrito en la definición 1.1.1, uno siempre puede parametrizar la función de costo, donde el costo de cada solución factible depende de un *vector de parámetros*  $\lambda$ :

$$Z(\lambda) = \min\{cost(x, \lambda) : x \in X\}, \quad (1.1.2)$$

donde la ecuación 1.1.2, define una familia infinita de problemas de optimización de la forma 1.1.1, para cada  $\lambda$  fija. La función  $Z(\lambda)$  es conocida como **función de costo óptimo**.

Esta *función de costo óptimo*  $Z$  induce una descomposición  $\mathbf{M}(Z)$  del espacio de parámetros en regiones conexas de tamaño máximo, figura 1.1, tal que en cada región  $\mathbf{A}$ , existe un  $x$  óptimo para cada  $\lambda \in \mathbf{A}$ . La *complejidad combinatoria* de  $\mathbf{M}(Z)$  depende del tamaño de  $\mathbf{M}(Z)$  como función del tamaño de los parámetros de entrada.

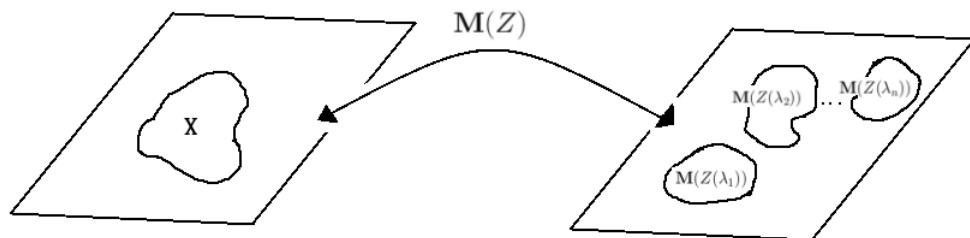


Figura 1.1: Descomposición  $\mathbf{M}(Z)$  del espacio de parámetros

### 1.1.2. Restricciones

Las restricciones que vamos a emplear son tres, **microeconómicas**, **macroeconómicas** y **de tiempo de recorrido**. Tienen como objetivo, integrar al modelo certeza y validez. Sin embargo, su integración en un sólo modelo es compleja porque cada

restricción trata aspectos difíciles de conciliar entre sí.

Por ejemplo, el **aspecto microeconómico** es importante según el informe [12], porque muestra el impacto directo que el proyecto tendría sobre la región en donde se llevará a cabo el proyecto. Además, muestra también el impacto directo en la economía local, el tránsito, la industria, política y sociedad. Sin embargo, la razón principal de usar esto, se debe a que, impacta directamente en el bolsillo del usuario final. Mientras que, el **aspecto macroeconómico** es relevante porque analiza el proyecto desde un punto de vista nacional, con respecto a, un presupuesto asignado y recursos limitados, como se muestra en el informe [12]. También muestra el conflicto entre la asignación de recursos y los beneficios que puede generar una nueva inversión. Además permite establecer cotas superiores para el endeudamiento que puede sufrir un estado.

Finalmente, el **tiempo de recorrido**, es una forma simple de ver el impacto directo que tendrá el proyecto sobre el usuario final, el uso y el tránsito dentro de la región. Además permite comparar de un forma rápida entre distintos tipos de transportes.

## 1.2. Contribuciones

La contribución principal de esta tesis, es la creación de dos nuevos modelos de decisión, capaces de explicar, simular y resolver el problema que surge en torno a elegir la mejor red de vías de transporte considerando su desempeño, con base en el tipo de transporte usado y cambios en la demanda.

### 1.2.1. Contribuciones particulares

Como contribuciones particulares tenemos,

1. Un par de modelos de decisión capaces de simular una red de transporte, considerando su desempeño con base en el tipo de transporte usado y cambios en

la demanda.

2. El análisis de estabilidad y de sensibilidad a la modificación de parámetros para cada modelos.
3. El análisis de un caso de estudio y determinar si ambos modelos funcionan adecuadamente.

### **1.3. Descripción de la tesis**

La tesis esta organizada de la siguiente forma. En el primer capítulo se dan algunas definiciones y nociones fundamentales. Se da una introducción al problema, su planteamiento, motivación y el objetivo de la tesis. Se presenta de forma detallada cada aspecto del problema, como por ejemplo, el modelo y el tipo de restricciones que vamos a emplear.

En el segundo capítulo, se presenta un recuento de los trabajos relacionados. Se presenta una breve descripción de cada uno de ellos y se mencionan algunos de los trabajos más importantes. Se da también un panorama extenso del área y se matiza la importancia de cada uno de sus aspectos. A lo largo de este capítulo se pretende presentar una clasificación clara y precisa de los distintos aspectos del problema. Para concluir, se hace énfasis en la diversidad de formas y temas abarca el problema.

En los capítulos, tercero, cuarto y quinto, se explican en detalle dos modelos, se dan a conocer sus interpretaciones y se aclaran los parámetros necesarios para su funcionamiento. Se da un breve recorrido sobre los datos necesarios para su implementación y mantenimiento. También se detallan sus características y se especifica cada aspecto de las mismas. A través de este capítulo, también se especifica el tipo de análisis de sensibilidad que se va a usar, el algoritmo de búsqueda y se definen las métricas de estabilidad para las soluciones. Además se introducen nuevos conceptos y se verifica la fiabilidad de los datos. Por último se concluye con un análisis de cada resultado.

Por otra parte en el sexto capítulo, se presenta un caso de estudio. En este caso de estudio se especifica, la región y sus características relevantes. Se dan detalles sobre los datos mas relevantes del modelo y se matiza su importancia para el estudio. También se presentan los resultados aportados por cada uno de los modelos. Se comparan ambos resultados, se resaltan sus diferencias y se destacan las similitudes entre los modelos. Al final del capítulo se comparan ambos modelos con un modelos de ecuaciones simultaneas y se explican sus diferencias.

En el septimo capítulo y final, se presentan las conclusiones y trabajo futuro sobre el tema. Al final de las tesis se muestran los apéndices donde podemos encontrar lo siguiente. En el apéndice A, se encuentra el algoritmo y el código de la meta-heurística Búsqueda Tabú. En el apéndice B, se encuentra, el algoritmo de Sobol y su implementación en código, en el apéndice C se encuentran las matrices de origen destino y finalmente en el apéndice D se encuentra la matriz de distancia usada en esta tesis.





---

## Capítulo 2

# Distintos tipos modelos para redes de transporte

### 2.1. Introducción

En las últimas décadas se han desarrollado múltiples investigaciones en torno a como diseñar, construir, mantener, optimizar, y en general, como implementar nuevas y mejores vías de transporte; capaces de atender a una demanda creciente, cambiante y con objetivos diversos. Esta diversidad ha llevado al desarrollo de (en la mayor parte de las ocasiones) un campo de estudio por cada uno de estos objetivos. Desde como optimizar una ruta a través de dos puntos, hasta problemas más complejos, como, desarrollar una red de transporte para múltiples transportes.

Como la diversidad en los enfoques es muy amplia y los objetivos que el problema debe cumplir, también lo son. Nosotros sólo nos enfocaremos en cuatro formas de analizar el problema. En primer lugar tenemos los modelos de transporte, que se enfocan en encontrar la ruta que minimice el trabajo entre dos puntos. En segundo lugar están los modelos logísticos y de selección de rutas óptimas, que se encargan de encontrar el mejor conjunto de rutas para un problema logístico. En tercer lugar tenemos el modelado por medio de simulación, que se basan en modelos estocásticos para el diseño de una red. Finalmente tenemos los modelos de ubicación, que permiten establecer cual es el mejor lugar para colocar una vía de transporte en términos

de una o varias restricciones.

## 2.2. Modelos de transporte

En esta sección vamos a revisar dos de los principales modelos de redes de transporte, estos modelos están divididos en dos tipos, los que son discretos y aquellos que son continuos. En primer lugar vamos a describir el modelo de Monge-Kantorovich y después describiremos el modelo discreto de irrigación de Gilbert-Steiner.

### 2.2.1. Modelo de Monge-Kantorovich

El planteamiento en el trabajo original de Monge [5] consistió en como mover una pila de arena de un lugar a otro con el mínimo esfuerzo posible. En el trabajo posterior de Kantorovich [26] se formalizó lo anterior, y se generalizó a dos medidas  $\mu^+$  y  $\mu^-$  en  $\mathbb{R}^N$  que modelan la oferta y la demanda respectivamente. Un esquema de transporte de  $\mu^+$  sobre  $\mu^-$  es descrito por la dirección que cada elemento de la oferta deben tomar para atender a la demanda. En el planteamiento de Kantorovich, esta información es codificada en una medida positiva  $\pi$  sobre  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  donde,  $\pi(A \times B)$  representa la cantidad de materia que va de  $A$  hacia  $B$ . Esta medida  $\pi$  es conocida como el *plan de transferencia*.

*Definición 2.2.1* El modelo de Monge-Kantorovich, se define de la siguiente forma. Dado un plan de transferencia  $\pi$  y una función de costo  $c : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^+$ . Se le llama costo de transferencia al siguiente funcional.

$$I(\pi) = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} c(x, y) d\pi(x, y). \quad (2.2.1)$$

donde  $c(x, y)$  es una función acotada inferiormente, no negativa y semi-continua que representa de manera informal el costo de transportar una unidad de masa de  $x$  a  $y$ .

Este modelo puede ser interpretado de la siguiente manera: dadas dos medidas positivas  $\mu^+$ ,  $\mu^-$  y con masas iguales, encontrar un plan de transferencia  $\pi$  tal que minimice  $\int_{X \times X} c(x, y) d\pi$ ;  $X \subseteq \mathbb{R}^N$ .

### 2.2.2. Modelo de Gilbert-Steiner

El modelo busca minimizar la longitud total de una red, que debe pasar por un conjunto determinado de puntos. Dicho modelo fue originalmente propuesto por Gilbert [16] para el caso de redes de comunicación. El modelo hace uso de la teoría de grafos para modelar una red, donde cada arista  $e$  es asociada a un flujo y donde la capacidad de flujo es denotada como  $\varphi(e)$ , además se tiene que  $f(\varphi)$  representa el costo por unidad de longitud que tiene transportar un flujo.

*Definición 2.2.2* El modelo es el siguiente:

$$G = \sum_{e \in E(G)} \varphi(e) \mathcal{H}^1|_e, \quad (2.2.2)$$

donde  $G$  representa la gráfica de irrigación,  $E(G)$  representa el conjunto de aristas dirigidas,  $e$  denota el vector unitario en la dirección de  $\varphi(e)$  y  $\mathcal{H}^1$  es la métrica de Hausdorff. Cabe mencionar que esta métrica solo cumple con la función de otorgar una unidad de medida entre los puntos de oferta y los puntos de demanda, englobando todos aquellos puntos muy cercanos en conjuntos compactos de distancia máxima.

Una desventaja de este modelo es que no es útil cuando el espacio de análisis es continuo, por eso en diversos artículos como el de Xia [43] o por ejemplo también en el de Maddalena y Solimini [14], se explora como extender este modelo al caso continuo.

## 2.3. Modelos de optimización logística y selección de rutas óptimas

Continuando con los distintos modelos que existen para representar el problema de nuestra tesis. En esta sección vamos a dar un breve repaso de 2 tipos de modelos muy empleados en las áreas de logística y selección de rutas. Ambos modelos son importantes para nosotros porque presentan similitudes al problema que nosotros intentamos resolver, como por ejemplo el uso de un modelo para poder minimizar el costo de distribución de un producto o servicio.

Entre las principales diferencias que tienen ambos problemas es el objetivo que buscan alcanzar, mientras en los modelos logísticos buscan minimizar costos, los modelos de selección de rutas buscan minimizar la distancia. En ambos casos los modelos pueden ser planteados en un grafo o pueden ser representados de alguna otra forma.

### 2.3.1. Optimización logística

Esté tipo de problemas se caracterizan por emplear distintos tipos de modelos, generalmente buscan satisfacer mas de una restricción y tienen un enfoque global del problema. Uno ejemplo claro de esto, es el artículo de Amaral, Rinaldi y Himpe [2], en este, los autores presentan como abordar los problemas de manejo de tránsito y optimización logística al mismo tiempo. Para lograr esto, ellos integran cuatro factores, el flujo de la demanda, la red de tránsito y sus restricciones, la demanda logística y la estrategia de distribución y almacenaje. Con estos cuatro factores ellos implementan un modelo de minimización en el cual se busca reducir el costo que los factores puedan llegar entre sí.

### 2.3.2. Selección de rutas óptimas

Esté tipo de problemas están basados en la teoría de grafos; donde para un grafo  $G = \langle v, e \rangle$ , las aristas  $e$ , representan las distancias entre los lugares que se desea visitar y los nodos  $v$ , representan los lugares. Este tipo modelos pueden contemplar esencialmente dos problemas distintos.

En el primer tipo, están contenidos aquellos problemas que no tienen restricciones y su único objetivo es encontrar la ruta que minimice la distancia entre distintos puntos. Generalmente estos modelos se resuelven empleando Dijkstra para encontrar el camino de distancia mínima entre dos puntos, un ejemplo de estos modelos es el trabajo de Zhang, Chen y Taoying [44].

En el segundo tipo, están aquellos problemas que tienen restricciones en las rutas y además desean minimizar la distancia. Este tipo de problemas son de mayor

complejidad, se pueden resolver empleando Dijkstra; sin embargo, se le deben hacer múltiples modificaciones para que las soluciones sean las adecuadas, un claro ejemplo de esto es el trabajo de Korkmaz y Krunz [27].

## 2.4. Modelado de redes por medio de simulación

En los modelos de redes a través de simulación podemos encontrar diversos tipos, sin embargo, en los modelos más importantes se emplean procesos estocásticos. Es por esto que en esta sección presentaremos primero que es una simulación, posteriormente que son los modelos estocásticos, para finalizar con algunos trabajos relevantes.

### 2.4.1. Simulación

Una simulación es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos períodos. Una buena simulación contiene los siguientes elementos: definición del sistema, formulación del modelo, colección de datos, implementación del modelo en una computadora, verificación, validación del sistema, experimentación, interpretación y documentación.

Esta técnica es muy utilizada en el diseño de redes porque es capaz de reflejar el comportamiento complejo que puede llegar a tener una red, además permite analizar y entender dicho comportamiento. Uno de los artículos que concentra distintos tipos de simulaciones que existen es el trabajo de Abbou, Ducq y LÁnton [1].

### 2.4.2. Modelos estocásticos

*Definición 2.4.1* Un modelo es estocástico cuando al menos una variable del mismo es tomada como un dato al azar y las relaciones entre variables se toman por

medio de funciones probabilísticas. Sirven por lo general para realizar grandes series de muestreos. Para lograr modelar correctamente un proceso estocástico es necesario comprender numerosos conceptos de probabilidad y estadística. Dentro del conjunto de procesos estocásticos se encuentran, por ejemplo, el tiempo de funcionamiento de una máquina entre avería y avería, su tiempo de reparación y el tiempo que necesita un operador humano para realizar una determinada operación.

Algunos ejemplos que podemos hallar en la literatura son:

- En primera instancia tenemos el trabajo de de Chen, Kin y Lee [8], donde los autores abordan el problema de analizar una red transporte con múltiples objetivos y múltiples restricciones, ellos abordan dicho problema mediante el uso de un proceso estocástico y una simulación.
- En segunda instancia tenemos que mencionar el trabajo de Torquato, Shi, Xu y Freitas [41], en donde los autores abordan el problema de diseñar una red eléctrica residencial mediante el uso de simulación por Monte Carlo.

## 2.5. Teoría de la ubicación

La teoría de la ubicación es un campo rico y fructífero, reuniendo una gran variedad de problemas, como por ejemplo, la ubicación de instalaciones el cual es uno de los problemas más representativos. Estos consisten en determinar la “mejor” ubicación para una o varias instalaciones o equipos con el fin de servir a un conjunto de puntos de demanda. El significado de “mejor” depende de la naturaleza del problema en estudio, es decir, en términos de las limitaciones y los criterios de optimalidad considerados en [17].

La investigación llevada a cabo en esta área ha conducido a la creación de una cantidad considerable de conocimiento, tanto en la teoría y modelado, como por las técnicas de solución. Por estas razones en lo sucesivo nosotros sólo abordaremos algunos de los planteamientos mas relevates y útiles para este trabajo.

### 2.5.1. P-median problem

El **p-median problem**, consiste en colar  $p$  instalaciones para minimizar la demanda media ponderada, entre los puntos de demanda y los puntos de localización de las instalaciones de producción, Hamiki y Maheshwari [22]. Es uno de los problemas clásicos de la teoría de localización, junto a el se pueden incluir los problemas de tipo multicriterio. Este problema se puede definir de la siguiente forma según Hamiki [21].

*Definición 2.5.1* El  $p$ -median problem se define de la siguiente forma.

$$\text{mín} \sum_{i \in J} \sum_{j \in \gamma} d_j \cdot c_{i,j} \cdot \chi_{i,j} \quad (2.5.1)$$

sujeto a las restricciones

$$\sum_{i \in J} \chi_{i,j} = 1 \quad \forall j \in \gamma \quad (2.5.2)$$

$$\sum_{i \in J} y_i = p \quad (2.5.3)$$

$$\chi_{i,j} - y_i \leq 0 \quad \forall i \in J; j \in \gamma \quad (2.5.4)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in J \quad (2.5.5)$$

$$\chi_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \in J; j \in \gamma \quad (2.5.6)$$

donde  $J$  es el conjunto de ubicaciones posibles,  $\gamma$  es el conjunto los nodos de demanda,  $p$  es el número de instalaciones a colocar,  $y_i$  es un indicador de uso del sitio  $i$  y finalmente  $\chi_{i,j}$  es la fracción de la demanda del cliente  $j$  que se suplirá por la instalación  $i$ .

La función objetivo 2.5.1 minimiza el costo total en la demanda ponderada. La restricción 2.5.2 significa que toda la demanda en el sitio  $j$  debe ser cubierta. la restricción 2.5.3 dice que solamente  $p$  instalaciones deben ser colocadas. La restricción 2.5.4 dice que la demanda solo puede ser asignada a las instalaciones abiertas. La restricción 2.5.5 dice que la demanda solo puede ser asignada a las instalaciones abiertas. La restricción 2.5.6. estipula que la variable de colocación sólo debe ser binaria. Finalmente, la restricción 2.5.6 estipula que la asignación no puede ser negativa.

### 2.5.2. Covering location problem

Cuando queremos tomar la decisión de donde colocar una instalación, que sea capaz de proveer un servicio, ocurre frecuentemente que los clientes sólo pueden acceder a el, sí se encuentran a una cierta distancia de la instalación. Los problemas con esta propiedad reciben el nombre de **covering problems** y, cuando esta propiedad es satisfecha, decimos que el cliente ha sido cubierto. La primera mención de estos problemas la podemos encontrar en Berge [7], en su trabajo el estudio el problema de encontrar una cobertura mínima en un grafo e introdujo un teorema que proporciona un algoritmo para encontrar una cobertura mínima. En un trabajo posterior Hakimi [21], estudio el problema de cual es número mínimo de patrullas de policía necesarios para proteger una red de carreteras. Una forma clásica de definir este tipo de problemas es a través del siguiente modelo.

*Definición 2.5.2* El modelo general es el siguiente.

$$\text{mín} \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in J} \sum_{k \in K} g_{jk} w_{jk} \quad (2.5.7)$$

sujeto a las restricciones

$$\sum_{i \in I} y_i \leq p \quad (2.5.8)$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} y_i = b_j + \sum_{k \in K} w_{jk} \quad \forall j \in J \quad (2.5.9)$$

$$y_i \in \{0, 1, \dots, e_i\} \quad \forall i \in I \quad (2.5.10)$$

$$w_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, \forall k \in K \quad (2.5.11)$$

donde  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  es el conjunto de clientes,  $I = \{1, \dots, m\}$  es el conjunto de posibles intalaciones,  $a_{i,j} \in \{0, 1\}$  representa si el punto  $j$  esta cubierto o no,  $f_i \geq 0$  es el costo de abrir el centro  $i$ ,  $b_j \in \mathbb{Z}^+$  representa el número mínimo de instalaciones que se debn abrir,  $p$  es el número máximo de instalaciones que se deben abrir y finalmete  $w_{jk}$  y  $g_{jk}$  son costos fijos dados.



La función objetivo 2.5.7 tiene dos partes, la primer parte se refiere al costo fijo y la segunda parte se refiere al costo variable de matener una istalación. La restricción 2.5.9 limita el número de instalaciones. La segunda restricción 2.5.10 pondera el número de instalaciones abiertas y la demanda que deben atender. La restricción 2.5.11 limita el número de instalaciones que debe haber en un sólo lugar y la restricción 2.5.11 dice que la variable  $w$  es binaria.

### 2.5.3. Hub location problems

Los modelos del tipo **Hub location**, son modelos que se centran en el diseño y planeación de redes de transporte y sistemas de telecomunicaciones. Son una clase muy desfiante de modelos de optimización, que se concentran en el problema decidir donde colocar instalaciones y en el diseño de la red, [31]. Este tipo de problemas los podemos definir de la siguiente forma.

*Definición 2.5.3 Uncapacitated Hub Location Problem with Single Assignments,*

$$\text{mín} \sum_{k \in N} f_k z_{kk} + \sum_{i, k \in N} (\chi O_i + \delta D_i) d_{ik} z_{ik} + \sum_{i, j, k, m \in N} \alpha W_{ij} d_{km} z_{ik} z_{jm} \quad (2.5.12)$$

*sujeto a las restricciones*

$$\sum_{k \in N} z_{ik} = 1 \quad i \in N \quad (2.5.13)$$

$$z_{ik} \leq z_{kk} \quad i, k \in N \quad (2.5.14)$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad i, k \in N \quad (2.5.15)$$

donde para cada pareja  $i, j \in N$ ,  $N$  es el conjunto de flujos entre origenes y destinos,  $W_{ij}$  es el flujo a ser enrrotado a través de la pareja  $(i, j)$ ,  $d_{i,j}$  es la distancia entre la pareja  $(, j)$ ,  $f_k$  es el costo fijo de colocar una instalación,  $\chi O_i$  representa el costo de transferencia del origen  $O_i$ ,  $\delta D_i$  representa el costo de distribución a lo largo de la ruta al destino  $D_i$ ,  $z_{ik}$  representa la variable de ubicación. Con  $O_i = \sum_{j \in N} W_{ij}$  y

$$O_i = \sum_{j \in N} W_{ji}.$$

La primer parte de la función objetivo 2.5.12 el costo total de poner en marcha una instalación, mientras que la segunda y tercer parte, son los costos de acceso y de flujo. La restricción 2.5.14 garantiza que cada nodo de origen-destino sea asignado exactamente a un solo hub. Mientras que la restricción 2.5.15 implica que sólo puedan ser asignados a hubs abiertos. Por último la restricción 2.5.15 limita a la variable a ser binaria. Notese también que la función 2.5.12 contiene un término adicional de costo asociado al flujo interno.

#### 2.5.4. Problemas de ubicación con múltiples criterios

Con mucha frecuencia, la decisión de colocar algo involucra la inversión de grandes cantidades de dinero. Esto obliga a que la decisión sea hecha por un conjunto de personas. En este punto, es deseable que cada persona involucrada elija una función para evaluar la calidad de la nueva localización, pero los pesos asignados a los distintos clientes difieren mucho. Este escenario es recurrente si se necesita una sólo ubicación para diferentes tipos de servicios o bienes. En este sentido el análisis multicriterio ha recibido considerable atención en los artículos de Ehrgott [13] y Nickel [15]. En estos podemos encontrar algunos fundamentos para este tipo de planteamientos y la siguiente definición.

**Definición 2.5.4 Modelo general multicriterio**

$$v - \min_{x \in X \subseteq \mathbb{R}^d} (f^1(x), \dots, f^Q(x)) \quad (2.5.16)$$

donde  $v - \min$  es el vector de optimización y  $f^i$ , para  $i = 1 \dots Q$  son las distintas funciones objetivo.

## 2.6. Resumen

Una vez que hemos establecido los distintos enfoques que podemos tener para abordar el problema como elegir la mejor red de transporte con base en distintos tipos de transporte y cambios en la demanda de los usuarios, es conveniente establecer una breve comparación entre estos. En esta comparación vamos a evaluar los siguientes aspectos.

1. Número de objetivos; uno o varios.
2. Acepta restricciones.
3. Atiende de forma integral o parcial el problema.
4. Es sensible a cambios en los parámetros.

Modelo	Objetivos		Acepta restricciones	Planteamiento		Sensible a parámetros
	Uno	Varios		Integral	Parcial	
<b>Modelos de transporte</b>						
Monge-Kantorovich	S	N	N	N	S	S
Gilbert-Steiner	S	N	N	N	S	S
<b>Optimización/Selección</b>						
Optimización logística	S	S	S	N	S	S
Selección de rutas	S	N	N	N	S	S
<b>Simulación</b>						
Simulación estocástica	S	S	S	S	N	N
<b>Modelos de ubicación</b>						
P-median	S	N	S	N	S	S
Covering location	S	N	S	N	S	S
Hub location	S	N	S	S	N	S
Ubicación multiobjetivo	N	S	S	S	N	S

Tabla 2.1: Tabla comparativa entre los distintos modelos; S=Si, N=No

En la tabla 2.1 podemos observar que no existe un solo modelo capaz de resolver todas las necesidades al mismo tiempo, es decir, no existe un solo modelo que sea flexible, no sensible a los parámetros y además de fácil solución.



---

## Capítulo 3

# El modelo de optimización combinatoria basado en entropía (MOCE)

Presentamos dos modelos nuevos de redes de transporte, basados en optimización combinatoria y el concepto de entropía. A lo largo de este capítulo, trataremos cuales son las características de cada uno y que datos requerimos para evaluar su funcionamiento y desempeño.

El desarrollo y planteamiento de cada modelo (MOCE-C y MOCE-L) se basan en el esquema 3.1.2. En la parte superior del esquema podemos encontrar el enfoque integral, este, se subdivide en tres partes, flexibilidad, comparación y desempeño. La flexibilidad se refiere a la capacidad de MOCE para adaptarse a cambios ante la demanda de los usuarios y al tipo de vía de transporte estudiada. La comparación hace uso de dos características, complejidad y sensibilidad. Ambas características tienen por objeto establecer un marco de estudio para MOCE y facilitar su comparación con otros modelos. Finalmente el desempeño se basa en el estudio de los resultados y en la facilidad para obtenerlos. De esta forma se integra el estudio de MOCE, se compara y se integran sus características en MOCE.

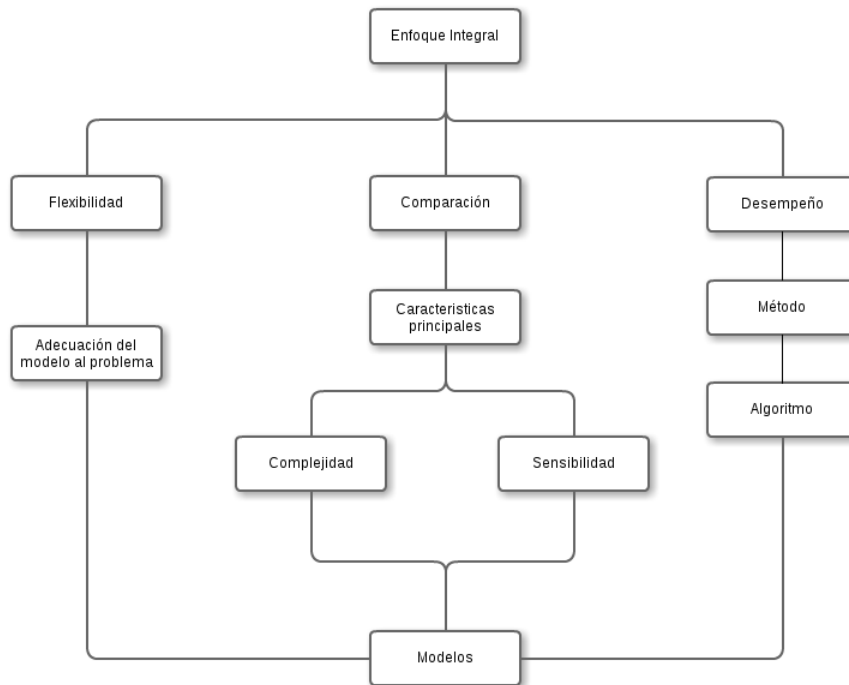


Figura 3.1: Diagrama de enfoque integral

### 3.1. El concepto de entropía y su significado para el modelo

Los modelos para redes de infraestructura que vamos a desarrollar a continuación están basados en el concepto termodinámico de **entropía**. Como parte de la descripción del modelo es importante introducir el concepto, definirlo y explicar en que forma lo vamos a usar.

*Definición 3.1.1* En termodinámica, la **entropía** (simbolizada como  $S$ ) es una magnitud física que para un sistema termodinámico en equilibrio mide el número de microestados compatibles con el macroestado de equilibrio, también se puede decir que mide el grado de organización del sistema, o cual es la razón incremental entre un incremento de energía interna frente a un incremento de temperatura del sistema, Swinburne [40].

La *entropía* función de estado, de carácter extensivo y su valor en un sistema aislado, crece en el transcurso de un proceso que se dé de forma natural. La *entropía* ha sido comunmente interpretada como una medida de desorden que describe lo irreversible de los sistemas termodinámicos. Fue Rudolf Clausius quien le dio nombre y la desarrolló durante la década de 1850 y fue Ludwig Boltzmann quien encontró en 1877 la manera de expresar matemáticamente este concepto, desde el punto de vista de la probabilidad y la mecánica estadística, se puede definir de la siguiente forma

*Definición 3.1.2* La entropía  $S$  de un sistema  $\Omega$ , se define como

$$S = -\kappa_B \sum_i p_i \ln(p_i) \quad (3.1.1)$$

donde  $\kappa_B$  es la constante de Boltzmann y  $p_i$  representa la probabilidad de que el microestado  $i$  –ésimo este ocupado. La ecuación 3.1.1, asume que todos los microestados tienen la misma probabilidad de aparecer.

Una de las interpretaciones mas generales de la *entropía*, es que se le considera una *medida de incertidumbre* de un sistema  $\Omega$ . El *estado de equilibrio* de un sistema maximiza la *entropía*, porque al perder todo rastro de las condiciones iniciales, solo tenemos las variables actuales; maximizar la *entropía* tambien significa, incrementar nuestra ignorancia acerca del sistema. Esto se debe a la incertidumbre obtenida en cualquier método experimental.

Otra forma aceptada de interpretarla, es tomando a la **entropía** como una magnitud física básica que mide tanto la falta de información como la información disponible. También mide la libertad, y esto permite una interpretación coherente de los hechos experimentales. No obstante, asociar la **entropía** y el desorden implica definir el orden como la ausencia de libertad. El desorden o la agitación guardan relación con la temperatura, como se muestra en figura 3.2.

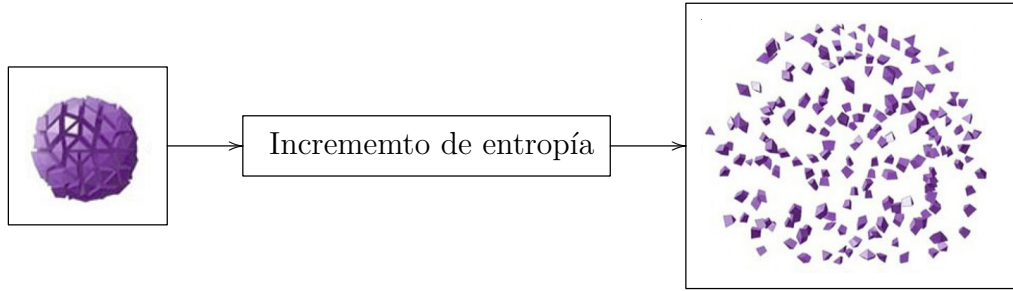


Figura 3.2: Descripción gráfica de entropía

Ahora que hemos presentado algunas ideas sobre el concepto de **entropía**, es necesario decir porque nos va a ser útil. Al ser considerada una *medida de incertidumbre* nos permite tomar a la **entropía** como una medida de desempeño de la red. Esto es, considerando a la red como un sistema que depende de la incertidumbre en el flujo de tránsito que la vía es capaz de transportar. Nos permite estimar cual sería el *punto de equilibrio* entre el flujo de tránsito en la red y la estimación puntual del tránsito local, es decir, a partir de los flujos de tránsito estimados entre las ciudades podemos construir la *entropía* global del sistema. De esta forma, podemos usar la ecuación 3.1.1, como función de costo en el modelo de optimización combinatoria, definido en la ecuación 1.1.1, i.e.  $Cost(p_i) = S = -\kappa_B \sum_i p_i \ln(p_i)$ .

Antes de introducir ambos modelos (MOCE-C y MOCE-L) vamos definir los conceptos que usaremos para cada uno. Estos conceptos son el **conjunto de ciudades**, **la matriz de rutas**, **el conjunto de flujos de tránsito** y **el conjunto de tipos de transportes**.

El **conjunto de ciudades** no es otra cosa que todas las ciudades que vamos estudiar.

*Definición 3.1.3* Se define el conjunto de ciudades  $V$  como:

$$V = \{v_i | v_i \text{ es una ciudad y pertenece a la region de estudio}\} \quad (3.1.2)$$

La **matriz de rutas** es el producto cartesiano del conjunto de ciudades por sí mismo.



*Definición 3.1.4* Se define la matriz de zonas  $R$  como

$$R = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V \forall i \neq j\}, \quad (3.1.3)$$

donde  $V$  es el conjunto definido en 3.1.3.

El **conjunto de flijos de transito**, es el más importante porque nos dice el tránsito estimado por hora que tendrán nuestras vías. Es en base a esto que podemos estimar el desempeño en términos del flujo de tránsito y por ende en como función de la entropía.

*Definición 3.1.5* Se define el conjunto de flujos de tránsito  $G$  como:

$$G = \{g_i \mid g_i \text{ es el flujo de tránsito asociado a cada elemento de } R\} \quad (3.1.4)$$

donde  $R$  es la matriz de rutas, 3.1.4.

Por último el **conjunto de tipos de transporte**, nos permite diferenciar de manera numérica los distintos tipos de transportes.

*Definición 3.1.6* Se define el conjunto de tipos de transportes  $T$  como:

$$T = \{\tau \mid \tau = 1, 2 \text{ o } 3\} \quad (3.1.5)$$

donde para este problema en particular, 1=carretera, 2=tren y 3=aeropuerto.

## 3.2. Modelos para redes de transporte

### 3.2.1. Modelo de optimización combinatoria basado en entropía de corto plazo (MOCE-C) para redes de transporte

El **MOCE-C**, es un modelo que tiene una función de costo (basada en entropía) y tres restricciones. El objetivo principal de este modelo es medir la incertidumbre que cada tipo de transporte enfrenta ante posibles cambios en la demanda de los

usuarios, es decir, MOCE-C mide la capacidad de cada tipo de transporte para absover el efecto de la demanda sobre el uso y costo de la infraestructura que se desea construir. Para ello supone que la demanda actual se mantendrá constante a lo largo del periodo de estudio.

*Definición 3.2.1* Sea  $S : G \mapsto \mathbb{R}$  la función de costo, tal que  $\forall g_i \in G$  y  $\tau \in T$  se define

$$S(g_i, \tau) = - \sum_{i=1}^{\frac{n^2-n}{2}} Pr(g_i|\tau) \ln(Pr(g_i|\tau)), \quad (3.2.1)$$

donde  $g_i$  es el aforo en la vía  $i$  –ésima y  $Pr(g_i|\tau)$  es la probabilidad de colapso de la vía  $i$  –ésima con respecto al tipo de transporte usado.

*Definición 3.2.2* De la definición 3.2.1, obtenemos el **modelo para redes de vías de transporte de corto plazo**.

$$\max_{g_i \in G, \tau \in T} S(g_i, \tau) \quad (3.2.2)$$

sujeto a las restricciones

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} U(g_i, \tau) \geq \alpha \quad (3.2.3)$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} C(g_i, \tau) \leq B_u \quad (3.2.4)$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} t_i(\tau) \leq T_{max} \quad (3.2.5)$$

donde, la ecuación 3.2.2 es la función de costo o desempleo, la ecuación 3.2.3 es la restricción monetaria, la ecuación 3.2.4 es la restricción presupuestal y la ecuación 3.2.5 es la restricción temporal.

Para que este modelo funcione adecuadamente es necesario considerar las siguientes hipótesis.

1. Todas las rutas del punto  $v_i$  al punto  $v_j$  son óptimas  $\forall v_i, v_j \in V$  y  $i \neq j$ , donde  $V$  es el conjunto descrito en la definición 3.1.4.
2.  $\forall r_{i,j}, r_{j,i} \in R, r_{i,j} = r_{j,i}$ , donde  $R$  es el conjunto en la definición 3.1.5.
3. El conjunto  $G$ , de la definición 3.1.5, es fijo.

Las implicaciones que tienen las hipótesis anteriores son.

**La hipótesis número 1.** Restringe el problema, evitando que dentro del mismo problema tengamos un subproblema de elección de ruta mínima. Esto se puede pensar como un tratamiento previo de los datos. Además el problema de elección de la ruta mínima tiene componentes muy distintos al problema que estamos tratando.

**La hipótesis número 2.** Elimina la redundancia y se reduce el tamaño del problema a la mitad.

**La hipótesis número 3.** Delimita la zona de estudio, evitando el ruido de otras zonas. Esto también ayuda a evitar cambios bruscos en el modelo.

Algunas otras partes importantes en el modelo son, la descripción de las restricciones y la interpretación. En la descripción ya hemos tratado el concepto de *entropía* y aspectos básicos de las definiciones. Sin embargo, hay que hacer énfasis en que esta descripción está incompleta porque no hemos explicado que significan las restricciones ni en que se basan. Además, tampoco hemos dicho que interpretación les podemos dar al modelo.

Las restricciones son tres, *la restricción monetaria*, *la restricción presupuestal* y *la restricción temporal*.

- *La restricción monetaria*, ecuación 3.2.3, la cual se basa en el efecto microeconómico que una vía tendrá sobre la población local. Toma en cuenta el costo de usarla y la ganancia que se obtiene al usarla. Esta acotada inferiormente por el retorno esperado de la inversión  $\alpha$ .

*Definición 3.2.3* La restricción monetaria se define como

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} U(g_i, \tau) = \sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} (Gu(\tau) - Cu(\tau)) \cdot g_i \geq \alpha, \quad (3.2.6)$$

donde  $Gu(\tau)$  es la ganancia unitaria promedio de usar la vía con respecto al tipo de transporte  $\tau$ ,  $Cu(\tau)$  es el costo unitario promedio de usar la vía con respecto al tipo de transporte  $\tau$  y  $\alpha$  es el mínimo retorno de la inversión esperado.

- *La restricción presupuestal*, según la ecuación 3.2.4, la cual se basa en el efecto macroeconómico que la vía tendrá sobre la región. Toma en cuenta la ganancia de implementarla y el costo de inversión que se deberá hacer para que opere adecuadamente. Esta acotada superiormente por el presupuesto asignado a este rubro.

*Definición 3.2.4* La restricción presupuestal se define como

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} C(g_i, \tau) = \sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} CM_i(\tau) \cdot d_i \leq B_u, \quad (3.2.7)$$

donde,  $CM_i(\tau)$  es el costo de mantenimiento promedio con respecto al tipo de transporte empleado  $\tau$ ,  $d_i$  es la distancia que tendrá la vía y  $B_u$  es el máximo presupuesto asignado para mantenimiento.

- *La restricción temporal*, ecuación 3.2.5, se basa en el tiempo empleado para transportarse de un lugar a otro. Toma en cuenta la velocidad promedio por cada tipo de transporte. Está acotada superiormente por el tiempo máximo de transporte.

*Definición 3.2.5* La restricción temporal se define como

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} t_i(\tau) \leq T_{max}, \quad (3.2.8)$$

donde  $t_i$  es el tiempo promedio de traslado con respecto al tipo de transporte  $\tau$  y  $T_{max}$  es el tiempo máximo esperado de traslado por la red.

Para darle sentido a todo lo planteado con anterioridad vamos a establecer cual es la interpretación del modelo y porque. El modelo esta compuesto de una función de costo y tres restricciones que trabajan en conjunto de la siguiente forma. En primer lugar la función de costo de la ecuación 3.2.1, estima la probabilidad de colapso de la red en términos del riesgo de colapso existente en cada vía y también busca reducir este riesgo de colapso globalmente.

En segundo lugar las ecuaciones 3.2.1 y 3.2.6, intentan mediar el impacto micro-económico y el desempeño, es decir, se balancea entre el ingreso esperado que la vía le dejará a sus usuarios y el costo que les generará usarla. Esto se hace para asegura que la vía tenga un impacto positivo y que no termine afectando a sus usuarios. Además, en todo proyecto de esta naturaleza se espera una tasa mínima de retorno con respecto al tipo de vía. Si todo lo anterior no se cumple, la solución del modelo no es óptima.

En tercer lugar las ecuaciones 3.2.1 y 3.2.7, intentan balancear entre el impacto macroeconómico y el desempeño, es decir, hace un balance entre el presupuesto disponible y cual sería la mejor opción para usarlo. Además busca acotar el gasto en términos del presupuesto disponible y maximizar el desempeño con base en el gasto. Esto se hace para lograr un equilibrio a nivel regional y no tanto local.

Por último las ecuaciones 3.2.1 y 3.2.8, buscan reducir los tiempos de traslado, evitando que las vías se vuelvan ineficientes y que causen demoras a los usuarios. Con esta reducción en los tiempos de traslado se busca aumentar la eficiencia y disminuir los costos totales. También se busca generar mejores alternativas en función

del tiempo.

Las tres restricciones en conjunto con el modelo están pensados para atender a las necesidades de forma inmediata, sin embargo, una buena planificación debe ser capaz de estimar el riesgo actual y futuro. Para ello es importante que el modelo tenga la capacidad de medir el riesgo a futuro y ser flexible a los cambios que puedan ocurrir. Por esta razón, en el siguiente modelo nosotros tomamos en cuenta aspectos dinámicos en el riesgo.

### 3.2.2. Modelo de optimización combinatoria basado en entropía de corto plazo (MOCE-L) para redes de transporte

**MOCE-L** al igual que **MOCE-C**, es un modelo con una función de costo (basada en entropía) y tres restricciones. Sin embargo a diferencia de **MOCE-C**, este modelo no asume que la demanda de los usuarios es constante, al contrario es dinámica y cambiante. Con esto el uso y costo de mantenimiento de la infraestructura es cambiante a lo largo del periodo de estudio. Esto ayuda enormemente a predecir con mayor efectividad que tipo de transporte es el más adecuado para atender a una demanda actual y también futura. Reduciendo el costo de la inversión en el largo plazo.

*Definición 3.2.6* Sea  $S : G \mapsto \mathbb{R}$  la función de costo, tal que  $\forall g_i \in G$  y  $\tau \in T$  se define

$$S(g_i, \tau, t) = - \sum_{g_i} Pr(g_i(t)|g(0), \tau) \ln(P(g_i(t)|g(0), \tau)), \quad (3.2.9)$$

donde  $g_i(0)$  es el aforo en la vía  $i$  –ésima,  $g_i(t)$  es el flujo estimado de  $g_i$  al tiempo  $t$  y  $Pr(g_i(t)|g(0), \tau)$  es la probabilidad de colapso de la vía  $i$  –ésima al tiempo  $t$ , sujeto a las condiciones iniciales y al tipo de transporte  $\tau$ .

**Definición 3.2.7** De la definición 3.2.1, obtenemos el **modelo para redes de transporte de largo plazo**.

$$\max_{g_i \in G, \tau \in T} S(g_i, \tau, t) \quad (3.2.10)$$

sujeto a las siguientes restricciones

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} U(g_i, \tau, t) \geq \alpha(t) \quad (3.2.11)$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} C(g_i, \tau, t) \leq B_u(t) \quad (3.2.12)$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} t_i(\tau) \leq T_{max} \quad (3.2.13)$$

donde, 3.2.10 es la función de costo o desempleo futuro, 3.2.11 es la restricción monetaria a valor futuro, 3.2.12 es la restricción presupuestal a valor futuro y 3.2.13 es la restricción temporal.

Para que este modelo funcione adecuadamente es necesario considerar las siguientes hipótesis.

1. Todas las rutas del punto  $v_i$  al punto  $v_j$  son óptimas  $\forall v_i, v_j \in V$  y  $i \neq j$ , donde  $V$  es el conjunto en la definición 3.1.4.
2.  $\forall r_{i,j}, r_{j,i} \in R$ ,  $r_{i,j} = r_{j,i}$ , donde  $R$  es el conjunto en la definición 3.1.5.
3. El conjunto  $G$ , definición 3.2.1, es fijo y  $g_i(t)$  se estima con respecto  $g_i \in G$ .
4. La tasa de depreciación es fija.

Las implicaciones que tienen las hipótesis anteriores son.

**Las hipótesis 1 a 3** cumplen con el mismo objetivo que para el caso de MOCE-C, por esta razón ya no haremos mención de ellas. Sin embargo, **la hipótesis número**

4, establece que la variación en los costos de mantenimiento es constante.

Continuando con el modelo vamos a describir las restricciones y después vamos a describir de que forma vamos a interpretar este modelo. Es importante destacar que este modelo presenta una ventaja importante con respecto al modelo anterior. Esta ventaja se basa en estimar los posibles eventos futuros a través de los eventos actuales, mediante el uso de una probabilidad condicional.

Las restricciones son tres, *la restricción monetaria*, *la restricción presupuestal* y *la restricción temporal*.

- *La restricción monetaria a valor futuro*, ecuación 3.2.11, se basa en el efecto microeconómico que una vía tendrá sobre la población local. Toma en cuenta el costo a futuro de usarla y la ganancia futura que se obtiene al usarla. Deberá estar acotada inferiormente por el retorno esperado futuro de la inversión  $\alpha$ .

*Definición 3.2.8* La restricción monetaria a valor futuro se define como

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} U(g_i, \tau, t) = \sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} (Gu(\tau, t) - Cu(\tau, t)) \cdot g_i(t) \geq \alpha(t), \quad (3.2.14)$$

donde  $Gu(\tau, t)$  es la ganancia futura unitaria promedio de usar la vía con respecto al tipo de transporte  $\tau$ ,  $Cu(\tau, t)$  es el costo futuro unitario promedio de usar la vía con respecto al tipo de transporte  $\tau$  y  $\alpha(t)$  es el mínimo retorno futuro de la inversión esperado.

- *La restricción presupuestal a valor futuro*, ecuación 3.2.12, se basa en el efecto macroeconómico que la vía tendrá sobre la región. Toma en cuenta la ganancia de implementarla y el costo de inversión que se deberá hacer para que opere adecuadamente. Esta acotada superiormente por el presupuesto asignado a este rubro.



**Definición 3.2.9** La restricción presupuestal se define como

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} C(g_i, \tau, t) = \sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} CM_i(\tau, t) \cdot d_i \leq B_u(t), \quad (3.2.15)$$

donde,  $CM_i(\tau, t)$  es el costo a futuro promedio de mantenimiento con respecto al tipo de transporte empleado,  $d_i$  es la distancia que tendrá la vía y  $B_u(t)$  es el máximo presupuesto esperado para mantenimiento.

- La restricción temporal, ecuación 3.2.13, se basa en el tiempo empleado para transportarse de un lugar a otro. Además, toma en cuenta la velocidad promedio por cada tipo de transporte. Esta acotada superiormente por el tiempo máximo de transporte.

**Definición 3.2.10** La restricción temporal se define como

$$\sum_{i=0}^{\frac{n^2-n}{2}} t_i(\tau) \leq T_{max}, \quad (3.2.16)$$

donde  $t_i(\tau)$  es el tiempo promedio de traslado con respecto al tipo de transporte  $\tau$  y  $T_{max}$  es el tiempo máximo esperado de traslado por la red.

Para continuar con lo anterior vamos a establecer cual es la interpretación del modelo y porque. El modelo esta compuesto de una función de costo y tres restricciones que trabajan en conjunto de la siguiente forma. En primer lugar la función de costo de la ecuación 3.2.9, estima la probabilidad de colapso a futuro de la red en términos del riesgo de colapso existente en cada vía y también busca reducir este riesgo de colapso globalmente. Esto se lleva acabo mediante el condicionamiento del riesgo futuro a factores actuales,  $Pr(g_i(t)|g(0), \tau)$ .

En segundo lugar las ecuaciones 3.2.9 y 3.2.14, intentan mediar entre el impacto microeconómico esperado y el desempeño futuro, es decir, se balancea entre el ingreso esperado que la vía le dejará a sus usuarios y el costo que les generará a valor futuro usarla. Esto se hace para asegurar que la vía tenga un impacto positivo y que

no termine afectando a sus usuarios después de un tiempo. Además la tasa mínima de retorno también se actualiza para poder incluir efectos inflacionarios en el cálculo. Si todo lo anterior no se cumple, la solución del modelo no es óptima.

En tercer lugar las ecuaciones 3.2.9 y 3.2.15, son el medio para balancear entre el impacto macroeconómico esperado y el desempeño futuro, es decir, hace un balance entre el presupuesto disponible a futuro y cual sería la mejor opción para usarlo. También busca acotar el gasto en términos del presupuesto disponible, sujeto al efecto de la inflación. Además de maximizar el desempeño en términos del gasto esperado a futuro. Esto se hace para lograr un equilibrio a nivel regional y no tanto local.

Por último las ecuaciones 3.2.9 y 3.2.16, buscan reducir los tiempos de traslado, evitando que las vías se vuelvan ineficientes y que causen demoras a los usuarios. Al reducir los tiempos de traslado buscan aumentar la eficiencia y reducir los costos totales. También busca generar mejores alternativas con base en el tiempo.

### **3.3. Comentarios sobre los modelos**

El uso de la entropía como función de costo tiene dos ventajas. La primera, es volver al modelo mas flexible ante cambios en la demanda, con ello buscamos reducir el riesgo y disminuir la incertidumbre. La segunda se basa en la sensibilidad ante los parámetros, dado que la entropía es inherentemente una función de incertidumbre esto nos ayuda absorber la variación en los parámetros, disminuyendo el error en los resultados. Esto permite garantizar que los resultados propuestos por el modelo no se vean afectados por el cálculo de los parámetros y sólo influya el efecto del tiempo en la toma de la decisión.

---

## Capítulo 4

# Características y parámetros del modelo MOCE

Los modelos MOCE-C y MOCE-L que presentamos en el capítulo 3, están basados en el flujo de tránsito estimado por hora y en los diferentes tipos de transportes que se desean evaluar para crear una nueva vía de transporte, todo con respecto a la demanda actual (MOCE-C) y futura (MOCE-L). La demanda depende del tránsito y del tipo de transporte que se disponga, esta puede ser constante (MOCE-C) o dinámica (MOCE-L). Sin embargo, para lograr esto, el modelo también depende de parámetros externos que necesitan ser calculados.

Dentro de los parámetros que debemos estimar se encuentran, **el flujo de tránsito, los parámetros en las restricciones y el cálculo de la probabilidad**. El **flujo de tránsito** se encuentra asociado a la *matriz de origen-destino* como se muestra en Bocanegra [28]. Los **parámetros en las restricciones** que se encuentran asociados al tipo de vía que se elija para cada tipo de transporte, esto se puede ver con más detalle en el reporte [34]. Finalmente, **el cálculo de la probabilidad** se puede definir a partir de una *distribución conocida* o también se puede usar el *teorema de Bayes*.

Por todo lo anterior, nos concentraremos en distintos métodos que se emplean para estimar los parámetros empleados por los modelos MOCE-C y MOCE-L.

## 4.1. Parámetros

Los modelos MOCE-C y MOCE-L, emplean 3 tipos de parámetros, el flujo de tránsito, los parámetros en las restricciones y el cálculo de la probabilidad.

El flujo de tránsito, esta basado en la matriz de origen-destino, es importante porque a través de esta matriz podemos estimar la demanda de usuarios de la ciudad  $A$  a la ciudad  $B$ , y esto se puede hacer para todas las ciudades que deseemos estudiar. De esta forma establecer el flujo de personas (o vehiculos) que le darán uso a cada una de las vías de transporte, se simplifica.

Los parámetros en las restricciones son importantes porque nos permiten estudiar cada uno de los sistemas de transporte propuestos para cada una de las vías que componen a la red de transporte. De esta forma evaluamos de manera individual cada transporte y en conjunto con los demás.

El cálculo de la probabilidad es importante porque nuestra funcion de costo esta basada en el concepto de entropía que a su vez es un concepto probabilístico. Cabe señalar que a veces la información necesaria para determinar una distribución de probabilidad no esta disponible, por ello buscar alternativas como el teorema de Bayes es importante.

### 4.1.1. Flujo de tránsito

Existen diversas técnicas conocidas para estimar el **flujos de tránsito** que podría tener un sistema de transporte en un área determinada. Se pueden usar modelos de demanda y oferta, encuestas, conteo directo, modelos probabilistas, heurísticas, entre otros. Esto resulta ser útil porque uno puede llegar a tener muchas opciones para resolver el problema. Sin embargo, un problema que existe entre tanta diversidad es que no hay una sola técnica que se recomiende para estimar el tránsito que se tendría en base al tipo de transporte que se implemente. Aunado a esto, no todas las técnicas son adecuadas para todos los transportes, por ejemplo, los modelos de oferta y demanda requieren grandes cantidades de datos estadísticos para funcionar correctamente. Además si la vía es nueva, el error en la predicción es alto.

Es por esto último que el estimar un *flujo de transito* realista y con baja incer-

tidumbre, se puede volver un problema difícil. Para evitarlo, se decidió emplear un método muy utilizado y con bajo riesgo de error. Este método es muy usado por ingenieros civiles, institutos de transporte como el *Instituto Mexicano del Transporte* [29]. El método se basa en **matrices de origen-destino** y a continuación se dan los detalles.

### Matrices de origen-destino

Las **matrices de origen-destino** cuantifican los flujos de tránsito entre distintas zonas de un área considerada de estudio lo cual significa que previamente a su generación dicha área debe estar dividida en zonas homogéneas en términos socio-económicos. Normalmente **las matrices de origen-destino** se obtienen a través de una encuesta que se aplica a una muestra de los usuarios que se desplaza entre las diferentes zonas, definición 3.1.4.

Contar con la información de origen a destino en la forma de matrices de origen-destino es de utilidad en los procesos de planeación de la infraestructura y los servicios de transporte entre las zonas del área de estudio, ya que permite contrastar la demanda entre los sitios de origen y destino (o los flujos estimados) contra la infraestructura y los servicios existentes (o no), permitiendo identificar y definir medidas de mejoramiento.

Como resulta costoso hacer encuestas en un área y también no es práctico. Por lo cual presentamos algunas metodologías para la estimación de matrices de origen-destino, a partir de modelos, además haremos énfasis en aquella que vamos a usar.

Existen dos tipos de métodos de asignación para la estimación de matrices de origen-destino, *la asignación proporcional* y *la asignación no proporcional*. Los *métodos de asignación proporcional* consideran que la proporción de usuarios que escojen cada ruta es independiente del flujo. Las técnicas de *asignación no proporcional* toman explícitamente los efectos del congestionamiento, y por consiguiente, la proporción de usuarios que usan cada ruta. Entre algunos ejemplos de este tipo de métodos destacan el *equilibrio del usuario* y *equilibrio del usuario estocástico*.

Para efectos de nuestro problema nosotros usaremos un método de *asignación proporcional* conocido como *modelo gravitacional*. Este modelo busca estimar el flujo de tránsito entre dos ciudades a través de una asignación proporcional del tránsito, con respecto a la distancia entre ambas ciudades. La función de asignación se define de la siguiente forma.

*Definición 4.1.1* El modelo gravitacional se define como

$$T_{i,j} = \frac{\alpha \cdot P_i \cdot P_j}{d_{i,j}^2}, \quad (4.1.1)$$

donde  $T_{i,j}$  es el número de viajes de la zona  $i$  a la zona  $j$ ,  $P_i$  es la población área urbana  $i$ ,  $P_j$  es la población área urbana  $j$ ,  $d_{i,j}^2$  es la distancia entre las dos zonas y  $\alpha$  es una constante de calibración, para este caso única.

#### 4.1.2. Parámetros en las restricciones

Los parámetros en las restricciones se pueden agrupar en cuatro grupos, **la capacidad de la infraestructura, parámetros microeconómicos, parámetros macroeconómicos y parámetros temporales**. Cada uno de estos grupos está asociado a una restricción. **La capacidad en la infraestructura** está asociada a la **distribución de probabilidad**. Todos estos parámetros son delicados porque hay que tomar en cuenta cada uno de ellos con respecto al tipo de infraestructura.

Además, las diferencias inherentes entre los distintos tipos de transportes dificultan poder homogeneizar los parámetros. También hay que tomar en cuenta, que entre cada tipo de transporte existe una gran variedad de opciones, por ejemplo, una carretera, puede ser rural, de dos vías o ser una autopista. Por último cada tipo de transporte tiene necesidades muy distintas como, por ejemplo, para su construcción, mantenimiento, personal necesario para operarlo, etc. Por esta razón a lo largo de esta sección haremos énfasis en dos aspectos.

1. El primero se basa en estandarizar cada tipo de transporte, es decir, cada tipo

de transporte será estandarizado al promedio de uso.

2. El segundo se basa en la eliminación de estándares que afecten la libre competencia entre los distintos tipos de infraestructura, es decir, solo se tomarán en cuenta las características básicas de cada tipo de transporte.

**La capacidad de la infraestructura** será tomada a partir de tres modelos distintos, uno para cada tipo de transporte. Estos modelos se pueden encontrar con mas detalle en el reporte [30].

- Para las carreteras se usará el modelo estadounidense que considera cuatro tipos de vías básicas, que se diferencian con base a velocidad máxima en condiciones de baja velocidad. Nosotros usaremos la vía de tipo 1 con capacidad de 2,200 usuarios por hora y una velocidad promedio de 80 km/hra.
- Para los trenes se usará el modelo analítico que determina la capacidad promedio de una línea de tren en términos de la separación mínima entre trenes y su separación en la vía. Con esto se determinó que la capacidad máxima promedio fue de 3,375 usuarios por hora y una velocidad promedio de 160 km/hra.
- Para los aeropuertos se usará el modelo basado en la capacidad de la terminal. Este modelo establece la capacidad de vuelos por hora en función del espacio disponible en la terminal. Con base en esto, se determinó que un aeropuerto promedio, tiene una capacidad máxima de 3,750 usuarios por hora y cada avión tiene una velocidad promedio de 900 km/hra.

Además los tres grupos restantes pueden ser obtenidos a partir de estudios estadísticos como los que se muestran en el reporte del Instituto Mexicano del Transporte [42] o el reporte del Departamento de Transporte de California [39].

### 4.1.3. Cálculo de probabilidades

Parte importante en ambos modelos es el cálculo de la **entropía** que se basa en **el cálculo de una probabilidad**. En esta sección vamos a definir tres cosas. Primero, que es una probabilidad, en segundo lugar algunos métodos para calcular la probabilidad de un evento y finalmente ventajas y desventajas de cada método.

**Definición 4.1.2** Dado  $\Omega$  un espacio muestral y  $A$  un álgebra de conjuntos sobre  $\Omega$ , a la aplicación de  $Pr$  a  $A$  sobre el conjunto de los números reales no negativos.

$$Pr : A \Rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \Rightarrow Pr(A)$$

se denomina probabilidad si cumple con los siguientes axiomas (axiomas de Kolmogorov).

$$1.1 \ Pr(B) \geq 0 \ \forall B \in A$$

$$1.2 \ Pr(\Omega) = 1$$

$$1.3 \ B_1, B_2, \dots \in A \text{ y disjuntos dos a dos } Pr(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(B_i)$$

### Métodos de estimación de probabilidades

Para el cálculo de probabilidad existen diversos métodos [36], sin embargo nosotros solo vamos a tomar en cuenta dos. El primero se basa en usar una *distribución de probabilidad* y el segundo se basa en el *teorema de Bayes*.

**Definición 4.1.3** Se define la **función de distribución** de una variable aleatoria  $X$  sobre un espacio  $\Omega$  como  $F_X(x)$  tal que:

$$F_X(x) = Pr(x \leq X) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\};$$

Entre las distribuciones de probabilidad existe una gran variedad, por lo cual nosotros solo nos enfocaremos en usar la **función de distribución uniforme** o  $U(A, B)$ .

**Definición 4.1.4** Sea  $X$  una variable aleatoria con  $X(\Omega) = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Se dice que  $X$  tiene una **distribución uniforme**  $U(a, b)$ , si su función de densidad es,

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \ x \in (a, b) \tag{4.1.2}$$



El otro método que vamos a usar esta basado en probabilidad condicional y tiene como objeto poder estimar la probabilidad de ocurrencia de un evento  $X$  dado un segundo evento  $X'$  este método es el **teorema de Bayes**.

**Teorema 4.1.1** Sea  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ ,  $A_i \in A$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  una partición finita de  $\Omega$ . Suponiendo que se presentará  $S$ , la probabilidad de que proceda del suceso  $A_h \in \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  es,

$$Pr(A_h|S) = \frac{Pr(A_h)Pr(S|A_h)}{\sum_{i=1}^k Pr(A_i)Pr(S|A_i)} \quad (4.1.3)$$

En el siguiente capítulo explicaremos a detalle como vamos a emplear la **distribución uniforme** y el **teorema de Bayes**, mientras tanto veamos algunas características de los modelos.

## 4.2. Características de los modelos MOCE-C y MOCE-L

En el esquema 3.1.2 que se presentó en el capítulo 3, hemos visto que para llevar a cabo nuestra comparación, vamos usar dos características, la complejidad y la sensibilidad. La complejidad computacional del problema permite encontrar estrategias de solución que brinden soluciones adcaudas con costos computacionales relativamente bajos. La sensibilidad es una forma de demostrar que los modelos MOCE-C y MOCE-L, son mejores que otros modelos porque son poco sensibles a sus parámetros, a diferencia de la mayoría de los modelos que se basan en optimización combinatoria.

### 4.2.1. Complejidad

Una vez establecidos los modelos de optimización, es conveniente comenzar a analizar las propiedades computacionales que ambos modelos comparten. Una de estas características, es la *complejidad* del problema para encontrarle soluciones, es decir, dado  $x_0 \in \mathbf{A}$  cuan complicado sería comprobar que  $\forall \lambda \in \mathbf{M}(Z)$ ,  $x_0$  es óptimo. Comprender esto nos resultará útil mas adelante, porque nos permitirá saber cual será la

mejor forma de resolver nuestro problema.

Antes de comenzar con la clasificación de complejidad, primero vamos a definir que es la *O-notación*.

**Definición 4.2.1** Dada  $g(n)$  denotamos  $O(g(n))$  al siguiente conjunto:

$$O(g(n)) = \{f(n) : \exists n_0 \text{ y } c \text{ constantes } \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq f(n) \leq cg(n), \forall n > n_0\}, \quad (4.2.1)$$

donde la ecuación 4.2.1, representa una cota superior para una familia de funciones  $f(n)$ , partiendo de un valor  $n_0$  y una constante  $c$  fija. Esta notación nos resulta útil porque permite establecer la complejidad de un problema a través del máximo número de operaciones que se requieren para dar solución al problema. Partiendo de lo anterior es fácil entender la siguiente clasificación.

Existen tres clases principales de problemas según Cormen [9], los problemas tipo **P**, problemas tipo **NP** y los problemas de tipo **NPC**:

**Problemas P.** Este tipo de problemas se caracterizan por el número de operaciones que se requiere para resolverlos es polinomial, es decir, están acotados por  $O(n^k)$ , para alguna  $k$  fija. Son considerados los problemas más simples de resolver y como algunos ejemplos podemos encontrar los siguientes problemas: *minimum spanning tree*, *shortest path*, etc.

**Problemas NP.** En este tipo de problemas las soluciones pueden ser verificadas con un número polinomial de operaciones, es decir, resolver el problema requiere un número mayor de operaciones, sin embargo, comprobar que la solución es la correcta se puede llevar a cabo en un tiempo polinomial. Otra característica de este tipo de problemas es que cualquier problema de tipo **P** es también de tipo **NP**,  $P \subseteq NP$ . Un ejemplo clásico es el conocido *3-CNF satisfiability problem*.

**Problemas NPC.** Este tipo de problemas son considerados *intratables*, esto se debe a que no se ha encontrado ningún algoritmo que sea capaz de darles solución en

tiempo polinomial. Además se desconoce si es posible hallar, o no, un algoritmo que compruebe las soluciones en tiempo polinomial. Otra característica importante es que aparecen recurrentemente en *problemas de decisión*, los cuales están estrechamente ligados con *problemas de optimización*. Un ejemplo clásico de este tipo de problemas es el llamado *factory location problem*.

Usando la definición 4.2.1, podemos obtener la complejidad de nuestros modelos en terminos de la  $O$  – notacion. Esto lo hacemos para garantizar el uso de una *meta-heurística* para resolver ambos modelos.

Dado lo anterior procederemos a acotar el espacio de búsqueda de los modelos definidos en 3.2.2 y 3.2.7. Sabemos por la definición 3.1.6 que  $|T|$  es 3. Por otro parte, el número de incognitas en el problema es  $\frac{n(n-1)}{2}$ , donde  $n$  es número de ciudades. Luego entonces el espacio de soluciones es de tamaño  $|T|^{\frac{n(n-1)}{2}}$ . Esto se debe a que para cada vía de infraestructura, tenemos  $|T|$  opciones y además tenemos  $\frac{n(n-1)}{2}$  vías que se deben llenar de forma independiente. Por lo tanto ambos problemas tienen complejidad.

$$O(3^{\frac{n(n-1)}{2}}) < O(3^{n^2}) \quad (4.2.2)$$

puesto que  $\frac{n(n-1)}{2} < n^2$ .

Por lo anterior nuestros modelos tienen complejidad  $O(3^{n^2})$ , es decir, complejidad exponencial, lo cual los hace problemas de tipo **NPC**.

#### 4.2.2. Definición del análisis de sensibilidad

Otro aspecto importante en el estudio de las propiedades de nuestros modelos, es el **análisis de sensibilidad**. Como se menciona en Saltelli y Tarantola [37], este se caracteriza por tener dos objetivos principalmente. El primero consiste en establecer cual de los factores de incetidumbre afecta en mayor medida los resultados del modelo. El segundo, establece que ocurre con los demás factores si se elimina el factor con mayor variabilidad. Para poder analizar ambos aspectos es importante poder

establecer los distintos tipos de análisis de sensibilidad que existen y como funcionan.

El **análisis local** es sin duda de gran importancia para una clase muy extensa de problemas. Estos problemas tienen la particularidad de poder ser analizados como problemas *inversos*, por ejemplo en Rabitz [33], se desea determinar los parámetros de magnitudes físicas que se obtienen mediante experimentación y observación, para después poder emplearlos como parámetros de un modelo. Aunque pudiera parecer que este tipo de análisis solo es necesario para modelos físicos, esto no es así.

El problema de ajustar parámetros, aunque es diferente para usuarios de distintas áreas, como análisis de riego, toma de decisiones, en aplicaciones ambientales, análisis de cumplimiento, evaluación de impacto, etc, es igualmente importante. Es por esto que comprobar el grado de variación de las soluciones con respecto a los valores de entrada, que a su vez, también son afectados por los parámetros establecidos en el modelo, resulta útil para saber si las soluciones son adecuadas o no. Una manera simple de analizar este tipo de problemas, sería emplear una expansión de Taylor [3], sin embargo, en muchos otros casos es recomendable usar Métodos de Monte Carlo junto con estrategias de muestreo, como se muestra en Helton [24]. En este sentido el análisis de sensibilidad es el encargado de determinar cuales son los parámetros que requieren de mejor estimación y de también de identificar cuales son los puntos débiles en su obtención.

La forma en que el **análisis de sensibilidad** es generalmente llevado a cabo, es mediante el uso de técnicas de regresión, tales como la *regresión estandar de coeficientes (SRC) por sus siglas en inglés o first order realibility method (FORM)*. Donde, por ejemplo el análisis SRC se lleva a cabo al alimentar el algoritmo de regresión con entradas y salidas del modelo. Después el algoritmo de regresión regresa un meta-algoritmo de regresión, donde el resultado  $Y$  es expresado como una combinación lineal de las entradas. Una de las ventajas principales de este algoritmo es que estudia completamente el espacio de definición de cada factor. Otra ventaja es para cada *efecto por factor*, se tiene un promedio de los efectos que este causa en los demás factores.

Un método general para llevar a cabo un **análisis de sensibilidad local** en un modelo, independientemente del método que se quiera usar, es el siguiente [37]:

1. **Establecer** cuales son los objetivos de nuestro **análisis de sensibilidad** y en consecuencia definir la forma de la función que pueda darle solución a nuestras preguntas (recuerde que esto se puede hacer con una meta-función en lugar de la función del modelo).
2. **Decidir** que factores de entrada serán incluidos en el estudio. Es este punto se puede definir factores determinantes, que permitan hacer un muestreo a lo largo del estudio. También se pueden definir parámetros característicos que sean definidos en el análisis.
3. **Escojer** una función de distribución para cada uno de los factores a estudiar. Esto puede hacerse de las siguientes formas:
  - i. Tomada de la literatura;
  - ii. Ajustando los datos a una distribución;
  - iii. Basados en la opinión de un experto;
  - iv. Tomada de una distribución normal truncada, esto para evitar outliers en la muestra;
  - v. Tomar información importante en el modelo y darle mayor peso.
  - vi. Definir una estructura de correlación entre los distintos parámetros.
4. **Elegir** el mejor **análisis de sensibilidad** basados en lo siguiente:
  - i. Debe estar basado en las preguntas que se estén haciendo. Ya que se pueden encontrar inconsistencias, entonces es necesario encontrar un método que sea cuantitativo con respecto a las preguntas que se estén haciendo.
  - ii. El número de evaluaciones del modelo que se pueden llevar a cabo. Esto es por que en algunos casos el evaluar el modelo resulta costoso.
  - iii. La presencia de correlación entre los distintos factores de entrada.

5. **Generar** una muestra de entrada. Esta muestra tiene la forma de  $N$  cadenas de factores en donde se ha evaluado el modelo. La muestra es generada de acuerdo al **método de análisis de sensibilidad** elegido.
6. **Evaluar** en el modelo la muestra generada y guardar los resultados como una cadena con  $N$  valores como se especifica en (1).
7. **Analizar** los resultados obtenidos y si es posible vuelva a reproducir el análisis.

Aunado a lo anterior, es importante que el análisis que se va a emplear cumpla con las siguientes propiedades.

1. Debe tener la capacidad de hacer frente a la escala y forma de los factores. Debe tomar en cuenta la influencia de las entradas, el efecto de la escala de variación y la forma de la distribución de probabilidad.
2. Debe ser un método global que sea capaz de lidiar con el efecto de los factores al variar, mientras un factor se mantiene fijo.
3. Tiene que ser independiente al modelo. Sin importar si el modelo es aditivo, lineal, etc.
4. Debe ser capaz de tratar grupos de factores como si fueran un solo factor.

Como parte importante, presentamos en la tabla 4.1, un breve comparativo entre los distintos métodos. En ella se establecen algunas propiedades importantes de cada método, sus ventajas y desventajas.

### Métodos basados en la descomposición de la varianza

Algunos de los métodos más comunes para hacer un *análisis de sensibilidad* son los **métodos basados en la descomposición de la varianza**. A continuación vamos a describir brevemente algunos ajustes necesarios en el modelo y al final vamos a explicar el método de análisis ortogonal, el cual vamos a usar más adelante para

	Propiedad 1	Propiedad 2	Propiedad 3	Propiedad 4
Método	Escala y Forma	Promedio	Independencia del Modelo	Agrupación factores
Método Local	N	N	N	S
SRC	S	S	N	N
Morris	N/S	S	S	S
Métodos basados en la variación	S	S	S	S
Monte Carlo	S	S	S	N

Tabla 4.1: Tabla comparativa de métodos de análisis de sensibilidad

determinar la sensibilidad de nuestro modelo.

Dentro de los ajustes que se deben hacer se encuentran

1. *Factor Priorization Setting*. En el hacemos un apuesta sobre que factor se debe fijar para obtener mayor reducción en la variabilidad.
2. *Factor Fixing Setting*. En el tratamos de ver que factores o grupos de factores no influyen en la variación.
3. *Variance Cutting Setting*. En el debemos buscar cual es el conjunto mínimo de factores que debemos fijar para garantizar una reducción consistente en la variación de los resultados.
4. *Factor Mapping Setting*. En el se buscan los factores que reducen la variación sobre una región.

Finalmente el análisis de descomposición de la varianza que vamos a usar en la presente tesis es el análisis de Sobol [38], el cual es válido para el caso ortogonal. Este análisis esta basado en la siguiente descomposición.

$$V(Y) = \sum_i V_i + \sum_i \sum_{j>i} V_{ij} + \dots + V_{123\dots k}, \quad (4.2.3)$$

donde  $V_i = V(E(Y|X_i))$ ,  $V_{ij} = V(E(Y|X_i, X_j)) - V_i - V_j$ , así sucesivamente. La *descomposición de Sobol* esta basada en la descomposición de la función  $Y = f(X)$ , en términos de sus variables.

$$f_0 = \sum_i f_i + \sum_i \sum_{j>i} f_{ij} + \dots + f_{12\dots k}, \quad (4.2.4)$$

donde  $f_i = f(X_i)$ ,  $f_{ij} = f(X_i, X_j)$ , así sucesivamente. La forma en que nosotros vamos a establecer la variación en cada variable fue introducido por Homma y Saltelli [25], el cual esta constituido por dos aspectos.

- En primer lugar se encuentran los *efectos de primer orden o intercciones*,  $S_{j's}$ . estos miden la interacción de las variables entre si y se basan en la ecuación 4.2.3. Por ejemplo, el efecto que causan dos factores ortogonales  $X_i$  y  $X_j$  en la salida de  $Y$  puede ser medido de la siguiente forma:

$$V_{ir} = V(E(Y|X_i, X_r)) - V(E(Y|X_i)) - V(E(Y|X_r)), \quad (4.2.5)$$

en la ecuación 4.2.5,  $V(E(Y|X_i, X_r))$  mide el efecto de la pareja  $(X_i, X_r)$  sobre  $Y$ . En  $V(E(Y|X_i, X_r))$  es evaluado el promedio de efectos que causan las variables  $X_i$  y  $X_r$  sobre el resultado, que a su vez esta sujeto a que las variables  $X_i$  y  $X_r$  estén cambiando sobre todos los posibles valores que pueden tomar. Luego entonces

$$S_j = \frac{V_j}{V(Y)}, \quad (4.2.6)$$

donde  $\sum_i S_i = 1$ .

- En segundo lugar se encuentran los *efectos totales* o  $ST_{j's}$ , que analizan la parte no aditiva del modelo y se definen a partir de la siguiente ecuación

$$ST_i = \frac{V(Y) - V(E(Y|X_{-i}))}{V(Y)} = \frac{E(V(Y|X_{-i}))}{V(Y)}, \quad (4.2.7)$$



donde  $X_{-j}$  representa la contribución total la variable  $X_j$  sujeta a todas las demás variables. Por ejemplo, supongamos que  $K = 3$  entonces el efecto total de la variable número 1 es  $ST_1 = S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123}$ .

En las ecuaciones 4.2.5 y 4.2.7, la variación en los resultados  $V(Y)$ , siempre puede ser condicionada con respecto a  $X_j$  o  $X_{-j}$ , no importando si las variables son ortogonales o no:

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(E(Y|X_j)) + E(V(Y|X_j)) \\ V(Y) &= V(E(Y|X_{-j})) + E(V(Y|X_{-j})), \end{aligned}$$

dividiendo por  $V(Y)$  en ambos lados, en ambas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{V(E(Y|X_j))}{V(Y)} + \frac{E(V(Y|X_j))}{V(Y)} \\ 1 &= \frac{V(E(Y|X_{-j}))}{V(Y)} + \frac{E(V(Y|X_{-j}))}{V(Y)}, \end{aligned}$$

donde del primer termino de la primera descomposición podemos obtener  $S_j$ , mientras que del segundo termino de la segunda descomposición podemos obtener  $ST_j$ .

### 4.2.3. Comentarios sobre el análisis de sensibilidad

Como hemos visto, el **análisis de sensibilidad** está estrechamente ligado a los parámetros y a la variabilidad que el modelo puede llegar a tener con respecto a estos. Por ello incluir este análisis de variación (o sensibilidad) no se hará aquí. Lo que si haremos es explicar porque resulta útil hacerlo y como lo vamos a usar.

El **análisis de sensibilidad** tiene como objetivo identificar que factores son los que causan variación dentro del modelo, estos factores pueden estar ligados a los parámetros o en el caso de nuestros modelos a las restricciones. Otro uso que también se le da a este tipo de análisis es identificar los factores que afectan en mayor medida al modelo y de esta manera evitar la variabilidad descontrolada del modelo. Además,

nos permite encontrar cual es la variación media que el modelo tiene, esto nos ayuda a entender los grados de libertad que el modelo tendrá con respecto a los parámetros.

Su uso, no solo queda restringido a entender la variación desde distintos enfoques, también se puede usar para mejorar los métodos de obtención de los parámetros. Ayudándonos a asegurar, que estos tengan una buena confiabilidad estadística, sobretodo cuando no hemos sido nosotros quienes los han generado. Es en este sentido que su utilidad se vuelve relevante para nosotros, ya que muchos de los parámetros han sido estimados a partir de informes y reportes en los cuales no tenemos ingerencia. Por estas razones en el siguiente capítulo nos será más útil hacer este análisis que ahora.

---

## Capítulo 5

# Desarrollo e implementación MOCE

En los dos capítulos anteriores hemos desarrollado ambos modelos y también hemos abordado características de ambos modelos, como complejidad y sensibilidad. Sin embargo, para poder garantizar que los resultados presentados en el capítulo 6 sean los deseados, es necesario tocar un último aspecto, la implementación del problema.

Con base en la complejidad teórica del problema se decidió tomar como rumbo de acción el uso de un metaheurística, ya que nos permite dar solución a los modelos MOCE-C y MOCE-L, de forma rápida, efectiva y consistente. Es en este sentido, que en el presente capítulo nosotros nos enfocaremos a desarrollar el algoritmo de búsqueda de soluciones o la metaheurística mejor conocida como Búsqueda Tabú.

### 5.1. Metaheurísticas

Una vez que hemos establecido el tipo de problema que vamos a abordar, el modelo combinatorio, sus restricciones y sus propiedades. Es necesario establecer la forma en que lo vamos a resolver. Para ello nos vamos a apoyar de la complejidad del modelo, la cual es de tipo **NPC**. Con base en lo anteriores, se recomienda abordar el problema de optimización a través de una **metaheurística**, como se sugiere en Burke y Kendall [6].

Una **heurística** es un método que busca buenas soluciones (localmente) a un costo computacionalmente razonable sin la capacidad de garantizar optimalidad y posiblemente tampoco soluciones factibles. Desafortunadamente, tampoco es posible establecer cuán cerca se encuentran las soluciones de la heurística con respecto al óptimo global, [35].

Por otra parte, una **metaheurística**, es una estrategia maestra que guía y modifica otras heurísticas para producir soluciones más allá de las que normalmente se generan, en busca de un óptimo local. Las heurísticas guiadas por esta meta-estrategia pueden ser buenas productoras de soluciones o también pueden solamente encontrar una manera de transformar soluciones en otras, mediante una serie de reglas de producción, [18].

El estudio y desarrollo de las **metaheurísticas** ha sido un área de investigación muy importante para las metodologías de búsqueda. Es común encontrar en la literatura referencias a distintos tipos de ellas, como por ejemplo, Recosido Simulado, Búsqueda Tabú, Algoritmos Genéticos, Métodos de Colonia de Hormigas, entre otros. Sin embargo, el camino para llegar al uso particular de la Búsqueda Tabú fue largo y requirió de múltiples experimentos. Dentro estos experimentos se usaron algoritmos genéticos, recocido simulado y un hill climber, pero en ningún caso, los resultados pudieron ser mejores que los hallados por la Búsqueda Tabú. Aunque existen diversos tipos de Búsquedas Tabú, nosotros nos inclinamos por el uso particular de la que ahora presentamos, por el trabajo de O’Kelly [31] y también porque los resultados fueron muy buenos.

## 5.2. Búsqueda Tabú

En 1986 Fred Glover propuso una nueva *metaheurística*, a la que llamo *Búsqueda Tabú*. Es un método que permite a un método de ascenso llegar al óptimo. De hecho, muchos aspectos del primer método de Búsqueda Tabú, y algunos elementos de su posterior elaboración se pueden encontrar en Glover [19], tales como la memoria de

corto plazo que impide movimientos de regreso a estados anteriores y la memoria de largo plazo que ayuda a reforzar aspectos importantes de las buenas soluciones. La idea básica de la *Búsqueda Tabú* es llevar la búsqueda a cualquier lugar donde sea posible encontrar un óptimo local sin permitir movimientos que no mejoren la solución hallada, el regreso cíclico a soluciones ya visitadas es impedido por el uso de una memoria, llamada lista tabú, que guarda un historial reciente de búsqueda. La idea principal es explotar la información para guiar la búsqueda hacia regiones más prometedoras.

Como se mencionó anteriormente el método de *Búsqueda Tabú*, busca extender los métodos de ascenso. De hecho, un *Búsqueda Tabú* no es más que un método de ascenso con una memoria de corto plazo. Debido a esto, dos de los componentes principales de la *Búsqueda Tabú* son la definición del espacio de búsqueda y la estructura del vecindario.

El espacio de búsqueda es simplemente el espacio donde se encuentran todas las soluciones factibles. Estrechamente ligado al espacio de búsqueda se encuentra la estructura del vecindario. Donde, en cada iteración de la *Búsqueda Tabú*, es aplicada una transformación a la solución actual  $S$ , definiendo un conjunto de posibles soluciones en el espacio de búsqueda  $N(S)$ . Formalmente  $N(S)$  es un subconjunto de  $S$ .

Otro aspecto importante de la *Búsqueda Tabú* son los tabús. Los tabús son usados para prevenir movimientos cíclicos y evitar regresar a soluciones anteriores. La clave de esto, es que cuando esta situación se da, algo necesita hacerse para evitar que las soluciones regresen de donde vinieron. Esto se logra haciendo que ciertas acciones sean consideradas tabú. Esto puede significar no permitir que la búsqueda regrese a soluciones ya visitadas y no permitir que los movimientos sean reversibles.

Como se ha mencionado en los párrafos anteriores, por el tipo de problema que estamos estudiando. Vamos a emplear una variante de la **Búsqueda Tabú** que se puede encontrar en Crainic y Gendreau [10] y que se usa en el trabajo de O'Kelly [31]. Presenta las siguientes características.

- i. El espacio de búsqueda puede ser fácilmente adaptable a la codificación necesaria.
- ii. La estructura del vecindario no es fija, es decir, el número de vecinos es variable. Para cada variable se presentan dos tipos de movimientos, *Add* y *Dropp* y por último, se emplea un movimiento de *Swap*.
  - Add. Es un movimiento incremental en el tipo de variable.
  - Dropp. Es un movimiento decremental en el tipo de variable.
  - Swap. Es un movimiento de intercambio entre dos variables.
- iii. La estrategia de búsqueda está enfocada en dos aspectos. El primero en encontrar el número óptimo de carreteras, trenes y aeropuertos y el segundo en encontrar su ubicación.
- iv. Cuenta además con un método de intensificación que permite explotar de forma intensiva las mejores soluciones. Esto se hace para garantizar que las soluciones no se queden en un óptimo local.

En la figura 5.1 se presenta el diagrama del algoritmo descrito en la parte superior. Todos los detalles de programación del mismo se encuentran en el **Apéndice A**.

### 5.3. Estabilidad en la aproximación

Finalmente, como no existe una prueba matemática que respalde la *intratabilidad* de los **problemas de tipo NPC** y tampoco existe una forma de asegurar que las soluciones que obtenemos a través de cualquier algoritmo sean óptimas. Es necesario, al menos, establecer la eficiencia con la que el algoritmo se aproxima a la solución óptima. Para esto nos vamos a auxiliar del concepto de **estabilidad en la aproximación**, que establece Hromkovi en [4]. Este concepto resulta útil, porque adicionar parámetros externos en los algoritmos de búsqueda nos ayuda a disminuir la dificultad del problema.

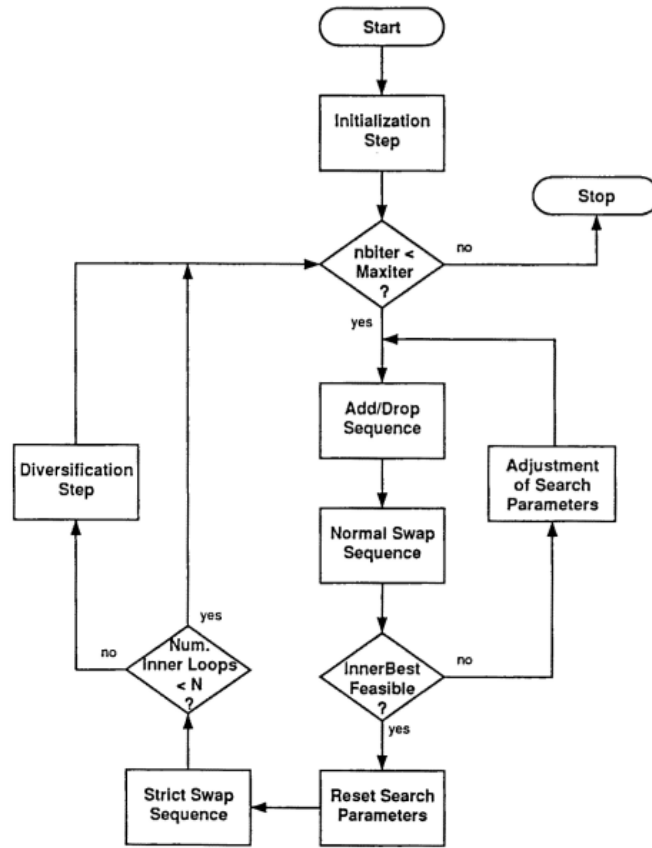


Figura 5.1: Algoritmo de Búsqueda Tabú, Crainic y Gendreau [10]

**Definición 5.3.1** Un **problema de optimización**  $U$  está compuesto por la 7-tupla  $U = (\Sigma_I, \Sigma_O, L, L_I, \mu, cost, goal)$ , donde

- i.  $\Sigma_I$  es un alfabeto, llamado el **alfabeto de entrada**,
- ii.  $\Sigma_O$  es un alfabeto, llamado el **alfabeto de salida**,
- iii.  $L \subseteq \Sigma_I^*$  es un lenguaje sobre  $\Sigma_I$  llamado **lenguaje de las entradas consistentes**,
- iv.  $L_I \subseteq L$  es un lenguaje sobre  $\Sigma_I$  llamado **lenguaje de las entradas actuales**,

v.  $\mu$  es una función  $\mu : L \rightarrow K^{\Sigma_O^*}$ . Donde se tratan las siguientes condiciones definidas como,  $K$  es el conjunto de Klein,  $\Sigma_O^*$  es la **cerradura del alfabeto de salida**,  $\forall x \in L$ ,  $\mu(x)$  es llamado el **conjunto de soluciones factibles** para una entrada  $x$ .

vi.  $cost$ , es la función de costo.

vii.  $goal \in \{\text{mínimo}, \text{máximo}\}$ .

$\forall x \in L$  definimos

$$Out(x) = \{y \in \mu(x) \mid cost(y) = goal\{cost(z) \mid z \in \mu(x)\}\} \quad (5.3.1)$$

y

$$Opt(x) = cost(y) \text{ para algún } y \in Out(x) \quad (5.3.2)$$

**Definición 5.3.2** Sea  $U = (\Sigma_I, \Sigma_O, L, L_I, \mu, cost, goal)$  un problema de optimización. Decimos que un algoritmo  $A$  es un **algoritmo consistente para  $U$**  si,  $\forall x \in L_I, A$  calcula un resultado  $A(x) \in \mu(x)$ . Decimos que  **$A$  resuelve a  $U$**  si,  $\forall x \in L_I, A$  calcula un resultado de  $A(x)$  hacia  $Out(x)$ .

**Definición 5.3.3** La complejidad de  $A$  se define como

$$Time_A(n) = \text{máx}\{Time_A(x) \mid x \in L \cap \Sigma_I^n\} \quad (5.3.3)$$

donde  $Time_A(n)$  es el tiempo que tarda en calcular  $A$  a  $x$ .

A continuación, daremos la definición de **error relativo** y **radio de aproximación**. Con estas, podremos estimar la precisión del algoritmo a partir de la mejor solución encontrada. Esto posibilita, definir una vecindad con centro en la mejor solución y con un radio del tamaño del error relativo.



*Definición 5.3.4* Sea  $U = (\Sigma_I, \Sigma_O, L, L_I, \mu, cost, goal)$ , un problema de optimización, y sea  $A$  un algoritmo consistente para  $U$ .  $\forall x \in L_I$ , el **error relativo**  $\varepsilon_A(x)$  está definido como

$$\varepsilon_A(x) = \frac{|cost(A(x)) - Opt(x)|}{Opt(x)} \quad (5.3.4)$$

Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , definimos el **error relativo de  $A$**  como,

$$\varepsilon_A(n) = \max\{\varepsilon_A(x) \mid x \in L \cap \Sigma_I^n\} \quad (5.3.5)$$

*Definición 5.3.5*  $\forall x \in L_I$ , el **radio de aproximación**  $R_A(x)$  se define

$$R_A(x) = \max\left\{\frac{cost(A(x))}{Opt(x)}, \frac{Opt(x)}{cost(A(x))}\right\} = 1 + \varepsilon_A(x) \quad (5.3.6)$$

Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , definimos el **radio de aproximación de  $A$**  como

$$R_A(n) = \max\{R_A(x) \mid x \in L_I \cap \Sigma_I^n\} \quad (5.3.7)$$

Con base en las definiciones 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4 y 5.3.5, podemos establecer una forma de medir la convergencia de nuestro algoritmo, Búsqueda Tabú, y con esto poder analizar que tan buenas son nuestras soluciones. Para así garantizar de alguna forma la óptimalidad de las mismas.



---

# Capítulo 6

## Caso de estudio

En éste capítulo se presenta un caso de estudio basado en la Costa Este de Estados Unidos. En este caso aplicaremos ambos modelos, estudiaremos los resultados de cada modelo, haremos el respectivo análisis de sensibilidad para cada modelo, los compararemos entre si y finalmente compararemos ambos modelos con el modelo de Hub de asignación múltiple.

El caso de estudio toma en cuenta a diez ciudades del estado de California. Éste Estado y sus diez ciudades fueron elegidas porque presentan similitudes con la zona centro de México. Entre las similitudes que presentan, destacan, el número de habitantes, la actividad económica y las necesidades de transporte. Otra razón es el presupuesto que asigna el Estado de California a mantenimiento y desarrollo de las vías de transporte, es equivalente al que asigna la zona centro de México en conjunto. Además la cantidad de información disponible para poder estimar los parámetros de ambos modelos es suficiente.

Esta zona resulta ser importante porque comparte similitudes con la zona centro de México. La zona centro de México esta conformada por el Estado de México, Querétaro, Puebla, Hidalgo, Morelos y la Ciudad de México. Dentro de algunos aspectos importantes que comparten ambas zonas estan, el tipo de actividades económicas, la importancia a nivel nacional y el tipo de población.

## 6.1. Caso de Estudio

El estudio se llevó a cabo en diez ciudades del Estado de California. Estas ciudades son Los Ángeles, San Diego, San José, Long Beach, Fresno, Sacramento, Oakland, Santa Ana y Anaheim, como se muestran en la figura 6.1. Fueron elegidas por ser las más grandes y pobladas. En conjunto tienen una población total de 9,975,379 habitantes, que equivale del 25 % del total de la población del estado.

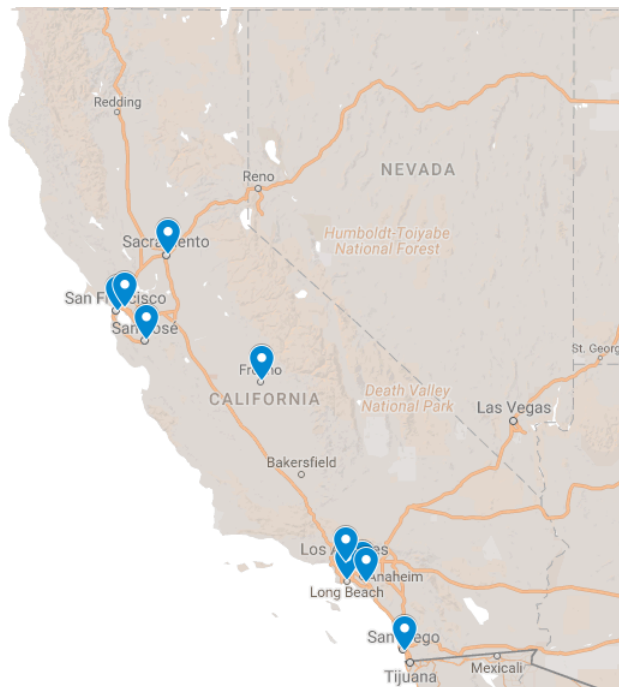


Figura 6.1: Mapa de las ciudades en el estudio

Además el estado concentra algunas de las industrias más importantes de Estados Unidos, como son de alta tecnología, aeroespacial, agroindustria, de entretenimiento y turismo. Esto hace que el estado sea el número uno en la generación de riqueza, generando un producto interno bruto de \$2,422,033 millones de dólares al año. También cuenta con una de las poblaciones urbanas con mayor movilidad en Estados Unidos. Con base en lo anterior el estado y sus diez ciudades fueron elegidas para probar ambos modelos.

## 6.2. Experimentos con el modelo MOCE-C

Usaremos el modelo 3.2.2 para decidir cual es la mejor manera de interconectar estas ciudades a través de distintos tipo de transportes por un periodo de un año. Estimando los parámetros a partir de los reportes del Departamento de Transporte de California [39], de la ACRP [32] y de la Federal Rail Road Administration [11]. Después analizaremos la variación del modelo por medio del método de Sobol, descrito en la sección 4.2.2. Posteriormente mediante la metaheurística de **Búsqueda Tabú** 5.2, vamos a resolver el modelo y con base en las definiciones 5.3.4 y 5.3.5 estimaremos la precisión en la solución. Finalmente presentamos un breve análisis de los resultados.

### 6.2.1. Parámetros

Los parámetros del modelo 3.2.2,  $G_u(\tau)$ ,  $C_u(\tau)$ ,  $\alpha$ ,  $CM_i(\tau)$  y  $B_u$  están medidos en millones de dolares. Mientras que  $g_i$  mide el tránsito por hora,  $d_i$  esta medido en millas,  $t_i(\tau)$  esta medido en millas por hora y  $T_{max}$  esta dado en horas. Los valores se muestran en las tablas 6.1 y 6.2. Con una confiabilidad en los parámetros del 90%.

Tabla 6.1: Parámetros del modelo MOCE-C, parte 1

Tipo de Transporte	$G_u(\tau)$	$C_u(\tau)$	$g_i$	$\alpha$
Carretera	.0006	.00007	Apéndice C	18
Tren	.0006	.0001175	Apéndice C	18
Aeropuerto	.0006	.000355	Apéndice C	18
Tipo de estimador	R.L.	R.L	Matriz OD	Promedio

Tabla 6.2: Parámetros del modelo MOCE-C, parte 2

Tipo de Transporte	$CM_i(\tau)$	$d_i$	$B_u$	$t_i(\tau)$	$T_{max}$
Carretera	.2123	Apéndice D	3600	43	260
Tren	.2	Apéndice D	3600	139	260
Aeropuerto	16.4	Apéndice D	3600	560	260
Tipo de estimador	R.L	Mapa	Promedio	Promedio	Promedio

La función de probabilidad  $Pr(g_i|\tau)$  se estimó mediante la siguiente distribución uniforme.

$$P(g_i, \tau) = \begin{cases} \frac{g_i}{g_{max}(\tau)} & \text{Si } 0 \leq g_i < g_{max}(\tau) \\ 0 & \text{Si } g_i \geq g_{max}(\tau) \end{cases}$$

donde  $g_i$  es el flujo de tránsito por hora en la vía  $i$  y  $g_{max}(\tau)$  es el flujo máximo de tránsito permitido por hora en la vía  $i$  con respecto al tipo de transporte  $\tau$ .

### 6.2.2. Análisis de Sensibilidad al MOCE-C

El análisis de sensibilidad está dividido en dos partes, la **variación de primer orden** y la **variación condicional o de segundo orden**.

#### Variación de primer orden

En el **análisis de la variación de primer orden** se tomó un rango en los parámetros de  $(-10\%, +10\%)$  y una muestra con 35,000 evaluaciones del modelo, figura 6.2. Los resultados se muestran en la tabla 6.3.

Restricción	$S_{R1}$	$S_{R2}$	$S_{R3}$
	<b>35.35 %</b>	<b>15.75 %</b>	<b>24.61 %</b>

Tabla 6.3: Variación de primer orden, modelo MOCE-C

Con un promedio en las evaluaciones de 40.37 puntos y una variación de 2.65 puntos. El 36 % de la variación se debe a la restricción monetaria ( $S_{R1}$ ), el 16 % a la restricción presupuestal ( $S_{R2}$ ) y el 25 % se debe a la restricción temporal ( $S_{R3}$ ). Esto nos dice que los parámetros que más afectan en la variación son los de la restricción monetaria. Lo cual indica que el modelo es más sensible a cambios en el gasto de los usuarios, que a cambios en el gasto del gobierno. Además la que la restricción temporal es la segunda más importante, esto nos dice que el tiempo si es un factor determinante para estimar el transporte más adecuado.

### Variación de segundo orden

Para el análisis de la variación de segundo orden o variación condicional se tomó un rango en los parámetros de  $(-10\%, +10\%)$  y una muestra con 35,000 evaluaciones del modelo, figura 6.2. Los resultados se muestran en la tabla 6.4.

Restricción	$S_{TR1}$	$S_{TR2}$	$S_{TR3}$
	<b>43.01 %</b>	<b>32.38 %</b>	<b>48.89 %</b>

Tabla 6.4: Variación condicional, modelo MOCE-C

Al igual que en el caso anterior el análisis tuvo un promedio en las evaluaciones de 40,37 puntos y una variación de 2,65 puntos. De esta variación el 43% se debe a la interacción de la restricción monetaria ( $S_{TR1}$ ), 32% a la interacción de la restricción presupuestal ( $S_{TR2}$ ) y 49% a la interacción de la restricción temporal. Esto nos muestra que la restricción que mayor interacción e influencia es la restricción temporal, afectando casi el 50% de la variación.

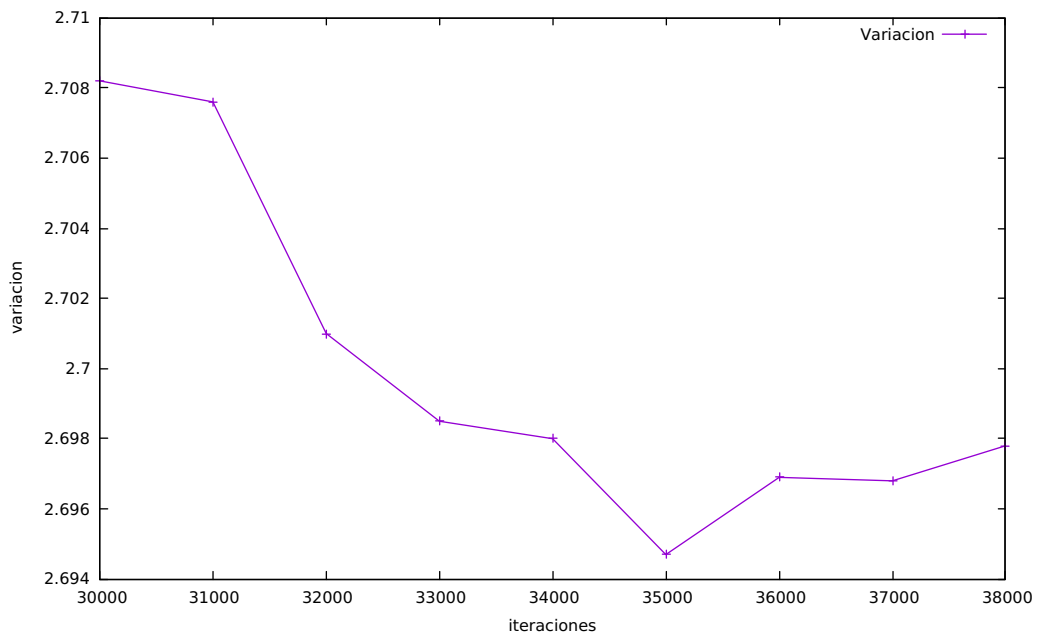


Figura 6.2: Variación del método de Sobol con respecto al tamaño de la muestra MOCE-C

### 6.2.3. Resultados con el MOCE-C

Los resultados que se muestran en las tablas 6.5 y 6.6 estan codificados de la siguiente forma: 1 para una carretera, 2 para una línea de tren y 3 para un aeropuerto. En las columnas de cada tabla se muestran las ciudades de origen, mientras que en las filas se muestran las ciudades de destino.

Tabla 6.5: Resultados del modelo de corto plazo, parte 1

	Los Angeles	San Diego	San José	San Francisco	Long Beach
Los Angeles	0	1	2	3	2
San Diego	1	0	1	3	1
San José	2	1	0	1	2
San Francisco	3	3	1	0	3
Long Beach	2	1	2	3	0
Fresno	2	2	2	1	1
Sacramento	3	3	2	1	2
Oakland	2	3	1	1	3
Santa Ana	2	1	3	3	1
Anaheim	2	2	2	2	1

Tabla 6.6: Resultados del modelo de corto plazo, parte 2

	Fresno	Sacramento	Oakland	Santa Ana	Anaheim
Los Angeles	2	3	2	2	2
San Diego	2	3	3	1	2
San José	2	2	1	3	2
San Francisco	1	1	1	3	2
Long Beach	1	2	3	1	1
Fresno	0	2	1	1	1
Sacramento	2	0	1	3	3
Oakland	1	1	0	3	3
Santa Ana	1	3	3	0	2
Anaheim	1	3	3	2	0

### 6.2.4. Análisis de resultados

El análisis e interpretación de los resultados esta dividido en tres secciones. Una para cada tipo de transporte y características particulares de cada uno.



## Carreteras

En los resultados de las tablas 6.5 y 6.6 podemos observar 32 rutas donde se emplean carreteras, figura 6.3. La distancia promedio por ruta es de 138,47 *km*, la cual resulta ser la menor entre los tres tipos de transportes. Este resultado lo podemos atribuir a varios factores, entre los cuales podemos destacar los siguientes.

Una carretera como sistema de transporte resulta eficiente en tramos cortos de viaje o menores a 150km. Esto se debe principalmente a la autonomía del vehículo, la capacidad de carga, el costo de transporte y el tiempo de traslado. Además es un sistema de transporte con bajo costo de mantenimiento y bajo costo de inversión inicial. Esto se debe a que no requiere de operarios o de elementos especiales en su implementación. También es versátil en el tipo de vehículos que lo pueden transitar. Esto permite que distintos tipos de vehículos lo transiten sin requerir adaptaciones adicionales.

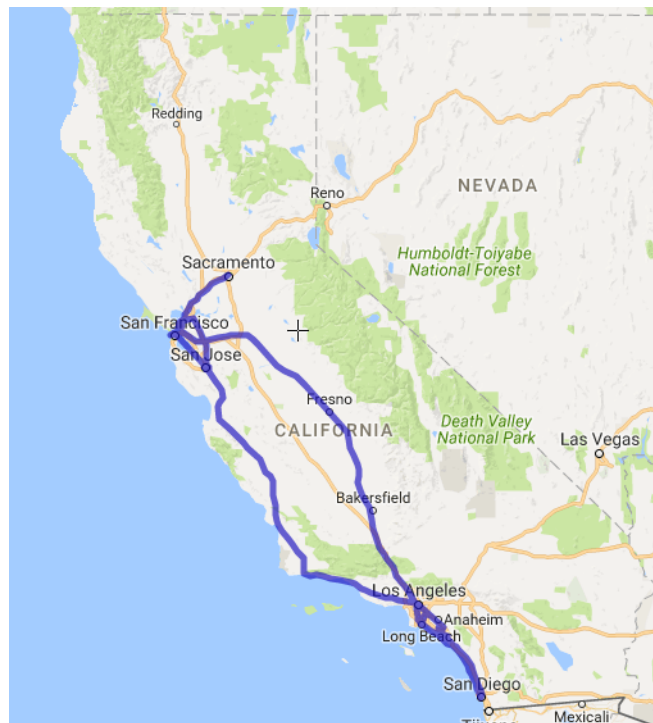


Figura 6.3: Mapa de rutas carreteras MCP

Sin embargo su uso en grandes distancias afecta su rendimiento, eficiencia y capacidad de carga. Esto se debe principalmente a la cantidad de vehículos que se requerirán para poder desplazar carga o un grupo de personas a través de grandes distancias. Causando un alto índice de tránsito afectando directamente en la ganancia total de los usuarios, debido al aumento en el tiempo de traslado. Visto en términos del modelo, afecta la eficiencia total de la red y disminuye su desempeño. Por estas razones usar este transporte en distancias medias y largas, no resulta ser útil para el modelo. Todo lo anterior permite explicar porque resulta útil una carretera en distancias cortas y porque no lo hace en distancias largas o mayores a 300 km.

### **Líneas de Tren**

Para las líneas de tren podemos encontrar en los resultados 32 rutas, con una distancia promedio de 215,16 *km*, con lo cual sitúa a este transporte en el segundo lugar con mayor distancia promedio por ruta, figura 6.4. A partir de esto podemos caracterizar el uso de este transporte en distancias medias (entre 150 y 300 km) y dar algunas razones de su uso.

En primer lugar una línea de tren es eficiente, y confiable en distancias medias, porque cuenta con una alta capacidad de carga y es en promedio más veloz que un vehículo terrestre. Esto le ayuda a reducir el costo de transporte y el tiempo de traslado entre dos ciudades. En segundo es un transporte confinado, lo que significa, que está restringido en su movilidad y aforo. Ello garantiza que el itinerario de viaje pueda ser estimado con mayor precisión. Finalmente es un transporte con bajo costo de mantenimiento, con lo cual mantiene una relación beneficio-costos bastante alta.

Además, su uso en grandes distancias no es recomendable si el tiempo es un factor determinante, ya que el tipo de carga, orografía del terreno y estado de las vías, influyen en la velocidad promedio. Dejando así a este tipo de transporte descartado si tenemos una restricción en el tiempo. Esto lo podemos ver con mayor claridad en la tercera restricción del modelo. A pesar de tener grandes ventajas con respecto a los otros tipos de transportes, podemos decir que este transporte no es adecuado si

se busca tener un menor tiempo de traslado en distancias largas.

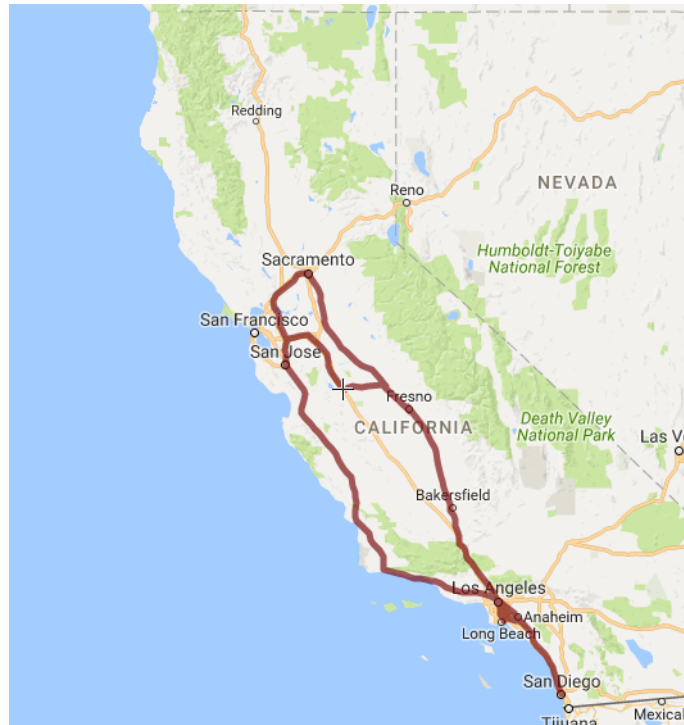


Figura 6.4: Mapa de rutas en tren MCP

Comparandolo en distancias cortas contra carreteras es realmente competitivo, sin embargo, su costo es mas elevado y el beneficio que ofrece es el mismo que las carreteras ofrecen. Es por esta razón y las anteriores que su uso queda limitado por el tiempo y el costo en el traslado.

### Aeropuertos

En último lugar podemos ver que 26 rutas cuentan con aeropuertos como sistema de transporte primario, figura 6.5. Estas rutas cuentan con una distancia promedio de 421,30 *km*, lo cual situa a este medio de transporte como el transporte con mayor distancia entre sus terminales. Esto se puede explicar en parte por las siguientes razones.

Un aeropuerto como sistema de transporte es veloz, eficiente y con un gran capacidad de carga. Lo cual le permite competir con los demás sistemas de transporte, porque reduce los tiempos de traslado entre dos ciudades con gran distancia entre ellas. Además, al reducir los tiempos ayuda a disminuir el costo de los usuarios y por ende volverlo competitivo en grandes distancias (mayores a los 300 km).

Sin embargo, es un transporte cuya relación precio beneficio es baja. Esto se debe principalmente a que los costos en las tarifas son variables y estan sujetos a la demanda del mercado. Por otra parte, es un transporte que requiere de infraestructura especializada para poder operar, lo cual encarece su costo de mantenimiento y operación. Además es un transporte que requiere de un alto grado de especialización para poder operar con eficiencia. Todo esto en conjunto, hace que este sistema de transporte solo sea recomendado si el tiempo es una prioridad. Lo cual en el caso de nuestro modelo se ve claramente en la tercer restricción.

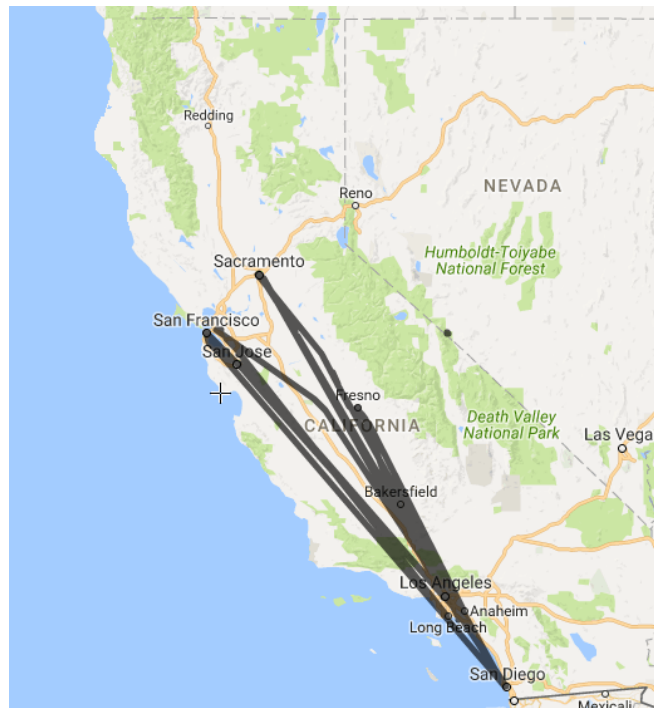


Figura 6.5: Mapa de rutas aéreas MCP

Comparando este transporte contra los dos anteriores, resulta evidente que su mas grande ventaja es la velocidad, porque esto reduce el tiempo. Sin embargo su uso, implementación y mantenimiento son muy costosos, lo cual limita su efectividad a casos donde el costo de usarlo, transportarse y mantenerlo es moderado con respecto al beneficio de usarlo y esto ocurre cuando la distancia es grande o el flujo de tránsito es bajo.

En resumen, todos los transportes en el modelo de corto plazo se ven afectados en mayor medida por dos de las restricciones, la restricción temporal y la restricción monetaria. Esto también se puede ver en el análisis de sensibilidad, donde ambas restricciones son las que mas afectan la variación del modelo. Como resultado de ello, los resultados se sesgan hacia redes que cumplan con estas restricciones. Contrario a lo que uno pudiera pensar la restricción presupuestal no es determinante en un periodo corto de tiempo.

### Precisión en los resultados

Para evaluar la precisión de los resultados provistos por la metaheurística *Búsqueda Tabú* se usaron dos métricas, el error relativo 5.3.4 y el radio de convergencia 5.3.5. El **error relativo** mide el error entre las soluciones y el óptimo (o mejor valor encontrado). Mientras que el **radio de convergencia** determina el vecindario maximal para el cual la solución es óptima. Para llevar acabo este análisis se tomó una muestra de 100 evaluaciones de la metaheurística y los resultados fueron.

- **Error Relativo**= 0,0388375 puntos
- **Radio de Convergencia**= 1,20538 puntos

Con base en el **error relativo** podemos afirmar que los resultados esperados y el mejor valor encontrado no tienen una amplia variación. Con respecto al **radio de convergencia** podemos decir que es amplio y nos permite abarcar una amplia gama de soluciones. Todo esto en conjunto nos permite concluir que el resultado otorgado por la metaheurística es un óptimo local.

### 6.3. Experimentos con el modelo MOCE-L

Como parte del estudio también emplearemos el modelo 3.2.7, para decidir cual es la mejor manera de interconectar estas ciudades a través de diversos transportes. El periodo de estudio es de 20 años y los parámetros están estimados apartir de los reportes del Departamento de Transporte de California [39], de la ACRP [32] y de la Federal Rail Road Administration [11]. El análisis, sigue el mismo esquema que se siguió en la sección anterior.

#### 6.3.1. Parámetros

Los parámetros del modelo 3.2.2,  $G_u(\tau, t)$ ,  $C_u(\tau, t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $CM_i(\tau, t)$  y  $B_u(t)$  están medidos en millones de dolares. Mientras que  $g_i(t)$  esta medido en tránsito por hora,  $d_i$  esta medido en millas,  $t_i(\tau)$  esta medido en millas por hora y  $T_{max}$  esta dado en horas. Los valores se muestran en las tablas 6.7 y 6.8. Los parámetros tienen una confiabilidad del 90%.

Tabla 6.7: Parámetros del modelo MOCE-L, con  $t = 20$ ; parte 1

Tipo de Transporte	$G_u(\tau, t)$	$C_u(\tau, t)$	$g_i(t)$	$\alpha(t)$
Carretera	.000757	.000088	Apéndice C	20.91
Tren	.000757	.000148	Apéndice C	20.91
Aeropuerto	.000757	.000450	Apéndice C	20.91
Tipo de estimador	R.L.	R.L.	Matriz OD	Promedio

Tabla 6.8: Parámetros del modelo MOCE-L, con  $t = 20$ ; parte 2

Tipo de Transporte	$CM_i(\tau, t)$	$d_i$	$B_u(t)$	$t_i(\tau)$	$T_{max}$
Carretera	.2678	Apéndice D	4542	43	260
Tren	.2523	Apéndice D	4542	139	260
Aeropuerto	20.394	Apéndice D	4542	560	260
Tipo de estimador	R.L.	Mapa	Promedio	Promedio	Promedio

Para calcular la probabilidad  $Pr(g_i(t)|g(0), \tau)$ , usaremos el teorema de Bayes 4.1.1 de la siguiente forma.

$$Pr(g_i(t)|g(0), \tau) = \frac{Pr(g(0)|g(t, \tau)) \cdot Pr(g_i(t)|\tau)}{Pr(g(0)|\tau)} \quad (6.3.1)$$

donde  $Pr(g(0)|g(t, \tau))$ ,  $Pr(g_i(t)|\tau)$  y  $Pr(g(0)|\tau)$  tienen distribuciones uniformes conforme a la ecuación 6.2.1.

### 6.3.2. Análisis de Sensibilidad al MOCE-L

El análisis de sensibilidad está dividido en dos partes, la **variación de primer orden** y la **variación condicional o de segundo orden**.

#### Variación de primer orden

En el **análisis de la variación de primer orden** se tomó un rango en los parámetros de  $(-10\%, +10\%)$  y una muestra con 26,000 evaluaciones del modelo, figura 6.6. Los resultados se muestran en la tabla 6.3.

Restricción	$S_{R1}$	$S_{R2}$	$S_{R3}$
	22.14 %	22.01 %	20 %

Tabla 6.9: Variación de primer orden, modelo MOCE-L

Con un promedio en las evaluaciones de 68,53 puntos y una variación de ,4076 puntos. El 22 % de la variación se debe a la restricción monetaria ( $S_{R1}$ ), el 22 % a la restricción presupuestal ( $S_{R2}$ ) y el 20 % se debe a la restricción temporal ( $S_{R3}$ ). Esto nos dice que los parámetros que más afectan en la variación son los de la restricción monetaria y la restricción presupuestal. Lo cual indica que el modelo es sensible a cambios en el gasto de los usuarios y a cambios en el gasto del gobierno. Además las tres variaciones son muy similares, lo cual nos dice que en el largo plazo las tres restricciones juegan un papel igual de importante.

#### Variación de segundo orden

Para el **análisis de la variación de segundo orden o variación condicional** se tomó un rango en los parámetros de  $(-10\%, +10\%)$  y una muestra con 26,000 evaluaciones del modelo, figura 6.6. Los resultados se muestran en la tabla 6.4.

Al igual que en el caso anterior el análisis tuvo un promedio en las evaluaciones de 68,53 puntos y una variación de ,4076 puntos. De esta variación el 35 % se debe

Restricción	$S_{TR1}$	$S_{TR2}$	$S_{TR3}$
	<b>35.20%</b>	<b>35.30%</b>	<b>43.74%</b>

Tabla 6.10: Variación condicional, modelo MOCE-L

a la interacción de la restricción monetaria ( $S_{TR1}$ ), 35% a la interacción de la restricción presupuestal ( $S_{TR2}$ ) y 44% a la interacción de la restricción temporal. Esto nos muestra que la restricción que mayor interacción e influencia es la restricción temporal, afectando casi el 45% de la variación total del modelo.

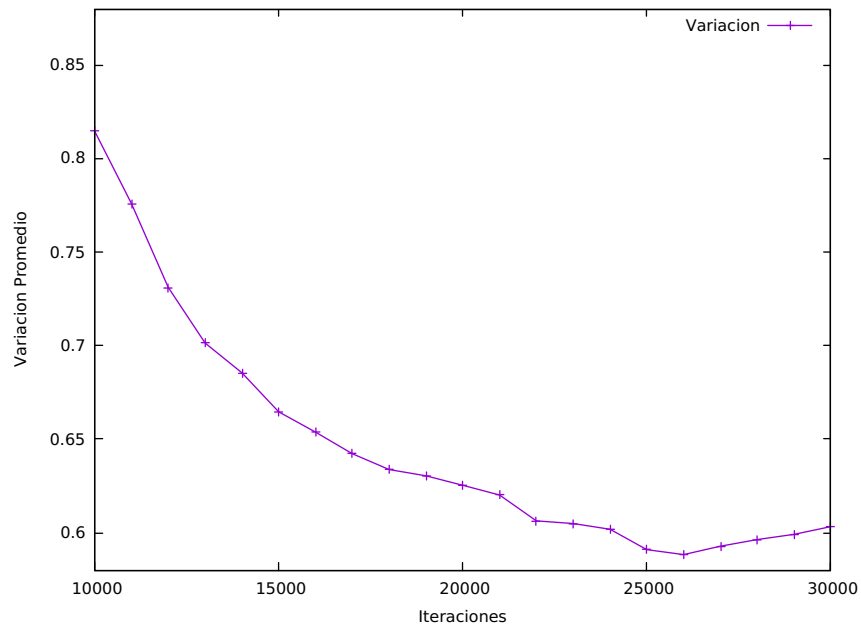


Figura 6.6: Variación del método de Sobol con respecto al tamaño de la muestra MOCE-L

### 6.3.3. Resultados con el MOCE-L

Los resultados se muestran en las tablas 6.11 y 6.12, están codificados de la misma forma que en el caso anterior. En las columnas de cada tabla se muestran las ciudades de origen, mientras que en las filas se muestran las ciudades de destino.



Tabla 6.11: Resultados del modelo de largo plazo, parte 1

	Los Angeles	San Diego	San José	San Francisco	Long Beach
Los Angeles	0	1	1	1	2
San Diego	1	0	3	2	1
San José	1	3	0	1	3
San Francisco	1	2	1	0	1
Long Beach	2	1	3	1	0
Fresno	1	2	3	1	1
Sacramento	2	2	1	1	2
Oakland	1	2	1	1	3
Santa Ana	1	1	3	3	2
Anaheim	2	1	3	1	1

Tabla 6.12: Resultados del modelo de largo plazo, parte 2

	Fresno	Sacramento	Oakland	Santa Ana	Anaheim
Los Angeles	1	2	1	1	2
San Diego	2	2	2	1	1
San Jose	3	1	1	3	3
San Francisco	1	1	1	3	1
Long Beach	1	2	3	2	1
Fresno	0	3	2	2	3
Sacramento	3	0	1	2	1
Oakland	2	1	0	3	3
Santa Ana	2	2	3	0	1
Anaheim	3	1	3	1	0

### 6.3.4. Análisis de Resultados

El análisis e interpretación de los resultados está dividido en tres secciones. Una para cada tipo de transporte y características particulares de cada uno.

#### Carreteras

En los resultados de las tablas 6.11 y 6.12 podemos observar 44 rutas donde se emplean carreteras, figura 6.7. La distancia promedio por ruta es de 175,47 *km*, la cual resulta ser la menor entre los tres tipos de transportes. Por otro lado el flujo tránsito promedio por ruta es 1262,10 pasajeros por minuto. Es en estos dos factores que nos vamos a centrar en nuestro análisis.

Como mencionamos en la sección anterior construir y mantener una carretera resulta ser mas barato que cualquiera de los otros tipos de transporte. Aunado a esto, este transporte es flexible para distancias cortas con un alto flujo de tránsito en ellas. Debido a que los flujos de tránsito son altos, la distancia es relativamente corta y si no se desea invertir gran cantidad de dinero en infraestructura, esto provoca el incremento en el número de rutas con este medio de transporte. Además, en términos generales esto disminuye el costo total de mantenimiento, inversión y tiempo.

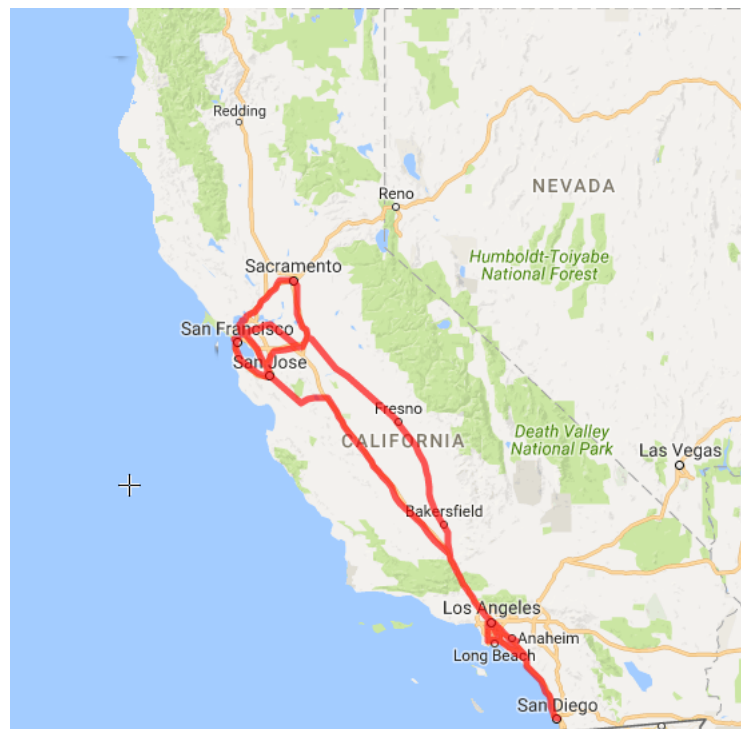


Figura 6.7: Mapa de rutas carreteras MLP

Todo lo anterior es un reflejo directo de la interacción que tienen las restricciones entre si, ya que como podemos ver en el análisis de sensibilidad, el factor que mayor variación total causa es el tiempo, sin embargo, la restricción monetaria y presupuestal también influyen en el resultado final.

## Líneas de Tren

Para las líneas de tren podemos encontrar en los resultados 24 rutas, con una distancia promedio de 295,73 km, figura 6.8 y cuenta además con un flujo promedio de 1759,4 personas por minuto. Todo esto sitúa a este transporte en el segundo lugar en distancia promedio y el primer lugar en flujo de personas. A partir de esto podemos caracterizar el uso de este transporte en distancias medias (entre 200 y 300 km), con flujos altos de tránsito y con ello dar algunas razones de su uso.

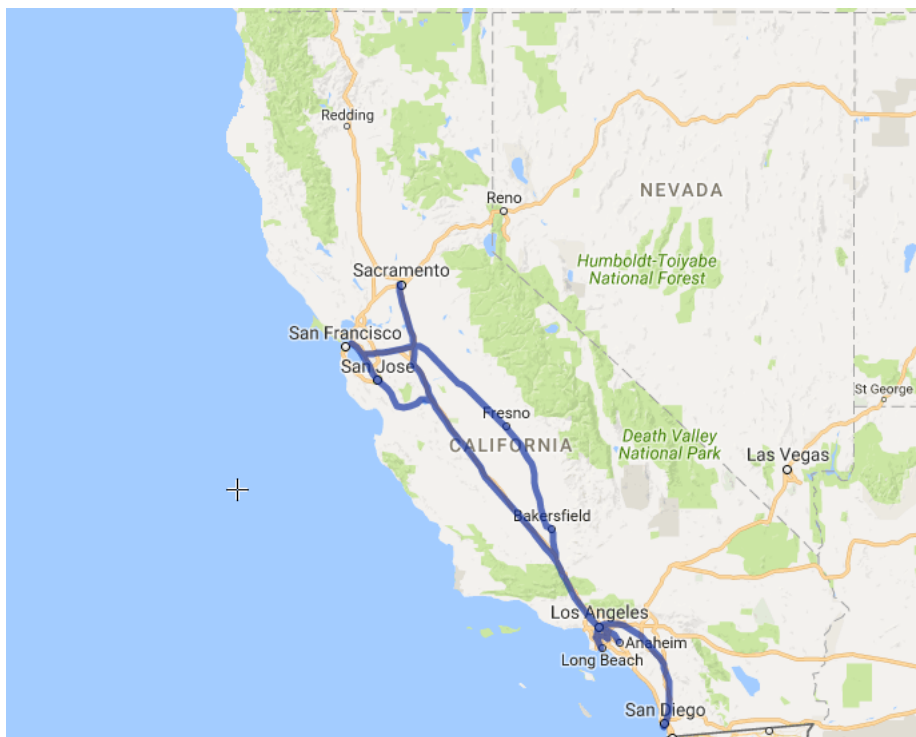


Figura 6.8: Mapa de rutas en tren MLP

A diferencia de la sección anterior el uso de este transporte vio reducido, esto lo podemos atribuir no solo a la distancia, si no también al flujo de tránsito. Ambos factores interactúan dejando ver que este transporte es el más adecuado si lo que requerimos es mover un alto flujo de personas a una distancia media. Esto se debe principalmente a que el transporte está diseñado para altos flujos de carga con un buen rendimiento en distancias medias y altas.

Otro factor que podemos ver es el tiempo, el cual ya no determina en su totalidad la eficiencia de la red. Ahora el tiempo interactúa con el costo de mantenimiento y el costo de usar la vía. En conjunto estos tres factores determinan que en distancias media, con flujos altos de tránsito y con una restricción de tiempo el mejor transporte resulta ser el tren.

Por último otros factores que hay que destacar son el costo mantenimiento, inversión y operación. Los cuales en su totalidad no son elevados y en consecuencia la relación entre costo y beneficio se puede mantener constante bajo condiciones adecuadas de operación. Todo esto permite que este transporte sea el ideal para los flujos de tránsito que estamos observando. Además al ser un transporte confinado permite mantener una buena relación entre tiempo y distancia.

### **Aeropuertos**

En último lugar podemos ver que 22 rutas cuentan con aeropuertos como sistema de transporte primario, figura 6.9. Estas rutas cuentan con una distancia promedio de 341 *km*, lo cual sitúa a este medio de transporte como el transporte con mayor distancia entre sus terminales. Además cuenta con el flujo de pasajeros más bajo con 16 pasajeros por minuto. Esto se puede explicar en parte por las siguientes razones.

Un aeropuerto como sistema de transporte es veloz, eficiente y con una gran capacidad de carga. Lo cual le permite competir con los demás sistemas de transporte, porque reduce los tiempos de traslado entre dos ciudades con gran distancia entre ellas. Además al reducir los tiempos ayuda a disminuir el costo de los usuarios y por ende volverlo competitivo en grandes distancias.

Sin embargo, es un transporte con una relación entre el costo y el beneficio, bastante baja. Esto se debe principalmente a que los costos en las tarifas son variables y están sujetos a la demanda del mercado. Por otra parte, es un transporte que requiere de infraestructura especializada para poder operar, lo cual encarece su costo de mantenimiento y operación. Además es un transporte que requiere de un alto grado

de especialización para poder operar con eficiencia. Todo esto en conjunto, hace que este sistema de transporte solo sea recomendado si el tiempo es una prioridad. Lo cual en el caso de nuestro modelo se ve claramente en la tercer restricción.

Comparando este transporte contra los dos anteriores, resulta evidente que su más grande ventaja es la velocidad, porque esto reduce el tiempo de traslado. Sin embargo su uso, implementación y mantenimiento son costosos, lo cual limita su efectividad a casos donde el costo de usarlo, transportarse y mantenerlo es moderado con respecto al beneficio de usarlo y esto ocurre cuando la distancia es grande.

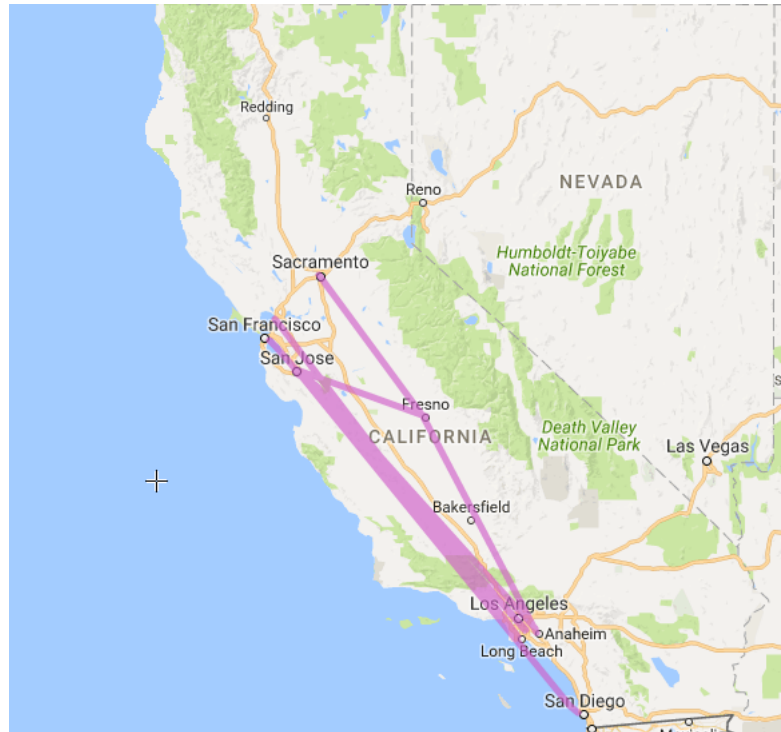


Figura 6.9: Mapa de rutas aéreas MLP

En resumen, todos los transportes en el modelo de largo plazo se ven afectados por la interacción de las tres restricciones con el flujo de tránsito en cada ruta, por ejemplo, esto lo podemos observar en la interacción que se da entre el flujo de tránsito y el tiempo. Además, podemos observar en los componentes de la variación total que los resultados ya no están afectados principalmente por una sola restricción sino

por la interacción de las tres en conjunto, es decir, en el largo plazo no es un factor el que puede determinar el cambio en los resultados si no la interacción total de ese cambio con los demás factores.

### Precisión

Para evaluar la precisión se usaron dos métricas, el error relativo 5.3.4 y el radio de convergencia 5.3.5. Para llevar a cabo este análisis se tomó una muestra de 100 evaluaciones de la metaheurística y los resultados fueron.

- **Error Relativo= 0,0536118 puntos**
- **Radio de Convergencia= 1,26432 puntos**

Con base en el **error relativo** podemos afirmar que los resultados esperados y el mejor valor encontrado no tienen una amplia variación. Con respecto al **radio de convergencia** podemos decir que es amplio y nos permite abarcar una amplia gama de soluciones. Todo esto en conjunto nos permite concluir que el resultado otorgado por la metaheurística es un óptimo local.

## 6.4. Comparaciones

Los modelos de ubicación del tipo **Hub**, son modelos que se centran en el diseño y planeación de redes de transporte y sistemas de telecomunicaciones. Son una clase muy desafiante de modelos de optimización combinatoria, que se concentran en el problema decidir donde colocar instalaciones y en el diseño de la red.

Tanto las redes de transportes, redes de telecomunicaciones y redes de computadoras frecuentemente usan **arquitecturas de Hub** para rutear eficientemente flujos entre distintos orígenes y destinos. Su característica principal radica en el uso de puntos de transbordo, consolidación o de clasificación, llamados **instalaciones de Hub**, para conectar un gran número de orígenes/destinos (O / D) mediante el uso de pares con un pequeño número de enlaces. Los flujos que tienen el mismo origen y diferentes destinos se consolidan, cuando se utilizan los *hubs* para después combinarse con

otros flujos que tienen diferentes orígenes, pero el mismo destino. Esto ayuda a reducir costos de instalación, centralizar el manejo y clasificación de las operaciones, logrando de esta manera economías de escala en los costos de enrutamiento a través de la consolidación de los flujos. Hablando en general este tipo de modelos, pasan por la localización del eje y de las instalaciones de el diseño de **redes de Hub** a fin de optimizar un (basado en los servicios o) objetivo basado en los costos.

Los modelos de este tipo constituyen una clase desafiante en los problemas de tip **NP-hard**, lo que implica la ubicación conjunta y las decisiones para el diseño de la red. Su principal dificultad se deriva de la inherente interrelación entre dos niveles en el proceso de decisión. El primer nivel considera la selección de un conjunto de nodos para localizar **instalaciones de Hub**, mientras que el segundo nivel se encarga de el diseño del núcleo de la red, mediante la selección de los enlaces para conectar orígenes, destinos y centros, así como el encaminamiento de los flujos a través de la red.

### 6.4.1. Modelo de Hub con asignación múltiple

Dado un **problema de localización de tipo Hub con múltiples asignaciones**, es decir, los nodos de O/D se pueden conectar a más de una instalación o nodo central, esta propiedad nos permite aprovechar las propiedades de la estructura de rutas de O/D para obtener formulaciones basadas en rutas con menos variables que las que deben tener los modelos de asignación individual, Hamacher [23]. A continuación presentamos el **modelo de Hub con asignación múltiple**.

*Definición 6.4.1* Sea  $F_{ije} \forall e = (k, m) \in E$  y  $i, j \in N$  para  $F_{ije} = \min\{F_{ijkm}, F_{ijmk}\}$ . también se definen las varibes binarias  $Z_i \ i \in N$ .

$$\min \sum_{k \in N} f_k Z_k + \sum_{i, j \in N} \sum_{e \in E} F_{ije} \chi_{ije} \quad (6.4.1)$$

*suejto a las siguientes restricciones*

$$\sum_{e \in E} \chi_{ije} = 1 \quad i, j \in N \quad (6.4.2)$$

$$\sum_{e \in E: k \in e} \chi \leq z_k \quad i, j, k \in N \quad (6.4.3)$$

$$\chi_{ije} \geq 0 \quad i, j, k \in N \quad (6.4.4)$$

$$Z_i \in \{0, 1\} \quad i \in N \quad (6.4.5)$$

donde, la ecuación 6.4.2 garantiza que exista un único camino que conecte a un destino y su origen. La ecuación 6.4.3 evita los enrutamientos innecesarios a través de nodos que no sean de hub. Mientras que las ecuaciones 6.4.4 y 6.4.5 son variables de flujo.

## 6.4.2. Resultados del modelo de Hub con asignación múltiple

Los parámetros se estimaron a partir de los reportes del Departamento de Transporte de California [39], de la ACRP [32] y de la Federal Rail Road Administration [11] y se empleó la matriz C.1 en el **apéndice C** como matriz de origen y destino.

Antes de mostrar los resultados hay que mencionar algunas cosas. En primer lugar el modelo está pensado para ser un modelo binario, es decir, se tuvo que modificar el modelo para que la variable  $Z_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . En segundo lugar se usó la metaheurística de **Búsqueda Tabú** [10], para resolver el modelo. Por último, las restricciones no fueron modificadas de ninguna forma, ya que el modelo busca hacer eficiente el enrutamiento del tránsito, lo cual también buscan nuestros modelos.

En la tabla 6.13, podemos observar que 28 rutas con carreteras, 22 rutas con líneas de tren, 16 con aeropuertos y 24 rutas con ningún tipo de transporte. Otra cosa que podemos observar es que no existe un patrón que relacione los distintos transportes entre sí.



Ciudad	Los Angeles	San Diego	San Jos	San Francisco	Long Beach	Fresno	Sacramento	Oakland	Santa Ana	Anaheim
Los Angeles	0	1	2	0	1	1	0	3	1	1
San Diego	1	0	3	3	1	0	3	3	2	2
San Jos	2	3	0	1	0	2	1	2	2	2
San Francisco	0	3	1	0	3	1	0	2	0	2
Long Beach	1	1	0	3	0	2	0	1	1	0
Fresno	1	0	2	1	2	0	1	0	0	1
Sacramento	0	3	1	0	0	1	0	1	0	3
Oakland	3	3	2	2	1	0	1	0	3	0
Santa Ana	1	2	2	0	1	0	0	3	0	2
Anaheim	1	2	2	2	0	1	3	0	2	0

Tabla 6.13: Resultados del Modelo de Hub

### Análisis de sensibilidad del modelo de Hub

El análisis de sensibilidad esta dividido en dos partes, la **variación de primer orden** y la **variación condicional o de segundo orden**.

#### Variación de primer orden

En el **análisis de la variación de primer orden** se tomó un rango en los parámetros de  $(-10\%, +10\%)$  y una muestra con 35,000 evaluaciones del modelo. Los resultados se muestran en la tabla 6.14.

Restricción	$S_{R1}$	$S_{R2}$
	28.3 %	35.4 %

Tabla 6.14: Variación de primer orden del modelo de Hub

Con un promedio en las evaluaciones de 79,53 puntos y una variación de 4,86 puntos. El 28 % de la variación se debe a la restricción uno ( $S_{R1}$ ) y el 35 % a la restricción dos ( $S_{R2}$ ).

#### Variación de segundo orden

Para el **análisis de la variación de segundo orden o variación condicional** se tomó un rango en los parámetros de  $(-10\%, +10\%)$  y una muestra con 35,000 evaluaciones del modelo. Los resultados se muestran en la tabla 6.15.

Restricción	$S_{TR1}$	$S_{TR2}$
	43.2 %	53.8 %

Tabla 6.15: Variación de segundo orden del modelo de Hub

### Precisión en los resultados

Para evaluar la precisión de los resultados provistos por la metaheurística *Búsqueda Tabú* se usaron dos métricas, el error relativo 5.3.4 y el radio de convergencia 5.3.5. Para llevar a cabo este análisis se tomó una muestra de 100 evaluaciones de la metaheurística y los resultados fueron.

- **Error Relativo= 0,05508652 puntos**
- **Radio de Convergencia= 1,2094 puntos**

### 6.4.3. Comparativo entre los modelos MOCE-C, MOCE-L y el modelo de Hub

En las tablas 6.16 y 6.17 vamos a comparar nuestros modelos MOCE-C(3.2.2) y MOCE-L (3.2.7) con el modelo de Hub. Analizaremos cinco aspectos, la complejidad del modelo, la variación de primer orden, la variación de segundo orden, el error relativo y el radio de convergencia.

Modelo	Complejidad	Variación de primer orden			Variación de segundo orden		
		$S_{R1}$	$S_{R2}$	$S_{R3}$	$S_{TR1}$	$S_{TR2}$	$S_{TR3}$
Modelo de Hub	NP-Hard	28.3 %	35.4 %	0.0	43.2 %	53.8 %	0.0 %
MOCE-C	NP-Completo	35.35 %	15.75 %	24.61	43.01 %	32.38 %	48.89 %
MOCE-L	NP-Completo	22.14 %	22.01 %	20	35.20 %	35.3 %	43.74 %

Tabla 6.16: Comparación entre modelos

Modelos	Error relativo	Radio de convergencia
Modelo de Hub	.05508	1.2094
MOCE-C	.03883	1.2053
MOCE-L	.05361	1.2643

Tabla 6.17: Comparación entre modelos

Estos 5 aspectos fueron elegidos porque permiten evaluar los tres modelos de forma objetiva y sin necesidad de establecer una métrica específica. Todo en conjunto, nos permite afirmar que el modelo MOCE-L (3.2.7) es el más adecuado para usar,

si lo que buscamos es atender a un problema como el planteado al principio de este capítulo. Ya que presenta menor complejidad, menor variación ante los parámetros, un error relativo aceptable y un mayor radio de convergencia.

## 6.5. Resumen

1. Como pudimos ver que el modelo 3.2.7 es el más adecuado para este tipo de problemas. Porque maneja los aspectos más importantes del problema de forma simple, fácil de comprender y con una buena precisión. Esto le permite obtener buenos resultados con información escasa y con baja confiabilidad.
2. El periodo de estudio es un factor determinante en el tipo de soluciones que obtenemos. Porque puede llegar a generar, gran variación en los resultados y determinar el desempeño futuro de la red. Esto lo podemos ver claramente con los resultados, donde se observa que el periodo de estudio afecta en el flujo de tránsito, que a su vez, afecta el desempeño de la red, e interviene con los tiempos de traslado, los costos en los usuarios y el costo en el mantenimiento. Por estas razones podemos afirmar que el periodo de estudio es sumamente importante y siempre debe ser considerado.
3. La complejidad del problema, la cual tienen repercusión directa en el cómputo del modelo. Además, dificulta encontrar soluciones óptimas para el tipo de modelos que estamos estudiando. Por estas razones es sumamente importante tomar en cuenta este aspecto
4. La sensibilidad del modelo a los parámetros. Hacer un buen análisis de sensibilidad es de vital importancia para garantizar que la variación en los parámetros no afecte significativamente en las soluciones obtenidas. Con esto buscamos reducir la incertidumbre en las soluciones y ofrecer un mejor desempeño en el modelo.
5. El número de sistemas de transporte en competencia ayuda al momento de tomar la mejor decisión. Sin embargo, esto aumenta la complejidad del modelo

y puede llegar a causar que el modelo no se desempeñe adecuadamente.

6. Finalmente, hay que mencionar que en un periodo largo de tiempo (mayor a 20 años). Las interacciones que se dan entre las distintas restricciones, pueden llegar a ser sumamente complejas e incluso caóticas. Sin embargo, esto nos puede ayudar a entender y dirigir nuestros esfuerzos para encontrar una red con una mayor flexibilidad y desempeño.

---

# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajo futuro

Al principio de esta tesis, nosotros planteamos tres contribuciones sobre esta tesis. Desarrollar un par de modelos, analizar su complejidad y sensibilidad para ambos, y finalmente, estudiar un caso de estudio.

1. Desarrollo de los modelos. Con base en los resultados obtenidos en el **capítulo 6** podemos concluir que ambos modelos cumplieron con los objetivos de simular el desempeño de la red, con distintos tipos de transportes y con cambios en la demanda. Sin embargo cabe mencionar, que este ambos modelos no abarcan en su totalidad el problema, ya que no son capaces de tomar en cuenta múltiples objetivos.
2. Análisis de sensibilidad y complejidad. Sobre este tema podemos concluir que todos los objetivos fueron cumplidos y que además se superaron las expectativas. Por esta razón su uso queda completamente justificado y se recomienda usarlo en futuras ocasiones.
3. Caso de estudio. Con base en el **capítulo 6** podemos determinar lo siguiente.
  - Ambos modelos cumplen con las expectativas, los resultados esperados son adecuados y fáciles de entender.
  - Falto desarrollar una métrica que permita determinar cual es el mejor modelo sujeto a las condiciones actuales.

## **7.1. Trabajo futuro**

Para concluir, algunos de los aspectos sobre los cuales podemos continuar trabajando son los siguientes.

1. Incrementar el número de objetivos en ambos modelos, ya que sólo hemos tomado el desempeño de la red como objetivo principal. De esta forma podríamos obtener un modelo multiobjetivo capaz de lidiar con los distintos aspectos que se encuentran en este tipo de problemas de decisión.
2. Incluir en los modelos actuales aspectos geográficos, como por ejemplo, la orografía, demografía, tipo de industria, etc. Esto con la finalidad de dotar al modelo con la capacidad de tomar decisiones en términos no solo del costo, la inversión y el tiempo. Si no también en términos de restricciones geográficas y su interacción con los flujos de tránsito y localización.
3. Desarrollar un modelo de flujo de tránsito capaz de lidiar con los aspectos cambiantes de la demanda. Esto para substituir a las matrices de origen-destino, ya que su cálculo o estimación puede llegar a ser muy costoso, tanto en términos computacionales, como financieros.
4. Mejorar los métodos de estimación de los parámetros en los modelos. Esto principalmente, porque variaciones muy altas en ellos provocan cambios significativos en los resultados finales.
5. Desarrollar una base de datos confiable, para la correcta estimación de los parámetros del modelo.
6. Analizar el efecto de la topología de las soluciones como factor determinante para encontrar o no buenas soluciones.

---

# Appendices





---

# Apéndice A

## Búsqueda Tabú

En el presente apéndice se muestra el pseudocódigo de la metaheurística **Búsqueda Tabú**, así como el pseudocódigo de la **modificación de Crainic y Gendreau [10]** y finalmente la implementación en **lenguaje C**.

### A.0.1. Búsqueda Tabú

```
1: procedure TABU( $S_0$ ) ▷ solución inicial
2:    $S \leftarrow S_0$ 
3:    $f^* \leftarrow f(S_0)$ 
4:    $S^* \leftarrow S_0$ 
5:    $T \leftarrow \emptyset$ 
6:   while no se cumpla el criterio de terminación do ▷ número de iteraciones,
   precisión,etc
7:     Seleccione  $S$  in arg  $\min_{S' \in N(S)} [f(S')]$ 
8:     if  $f(S) < f^*$  then
9:        $f^* \leftarrow f(S)$ 
10:       $S^* \leftarrow S$ 
11:    end if
12:    Guarde el tabu del movimiento en  $T$  ▷ Borre el tabu mas viejo
13:  end while
14: end procedure
```

**A.0.2. Búsqueda Tabú de Crainic y Gendreu**

```
1: procedure TABUCG( $S_0$ )                                     ▷ solución inicial
2:   Inicializar Variables
3:   while  $nbiter < Maxiter$  do                               ▷ Criterio de Iteración
4:     Add Drop
5:     Normal Swap
6:     if InnerBest Feasible then
7:       Reset Search Parameters
8:       Strict Swap Secuence
9:       if  $innerloop < N$  then
10:        Cotinue
11:      else
12:        Diversification Step
13:      end if
14:    else
15:      Adjustment of Search Parameters
16:    end if
17:  end while
18: end procedure
```

### A.0.3. Código en lenguaje C

```
using namespace std;

/*Generamos una estructura para el mejor elemento*/

struct best{

    int *Values;
    double Fvalue;
    int stamp;
};

/*Es un estructura para poder definir los tabus en la parte 1*/
struct Tabu1 {
    int* list; //Valores que se almacenaran en las listas tabu
    int* Mov; //Aqui guardamos los movimientos
    int* cambios; //Aqui guardamos los cambios
    int num;
    int stamp_; //Cuenta el numero de iteraciones y es 0 hasta que el
                primer optimo es encontrado
};

/*Es un estructura para poder definir los tabus del swap*/
struct Tabu2 {
    int* intercambios; //Aqui guardamos los cambios
    int* list;
    int* values;
    int stamp_; //Cuenta el numero de iteraciones y es 0 hasta que el
                primer optimo es encontrado
};

class TabuEngine{
public:
    //Constructor
    TabuEngine(int imax, int max, long r1){
```

```

        genMax=max;
        gen_imax=imax;
        ran=(long) r1;
    }
    //Metdos internos
    double Start();
    void LecturaDatos();
    int *Aleatorio(int);
    void InicializarMem(int);
    void InicialP();
    void CicloInterno(int,int *);
    void Neighbor(int , int *,float , float);
    void Swap(int ,float);
    void Diversificacion(int);
    void Estadisticas(int );
    void AumentaP();
    int Buscar1(int , int);
    bool Buscar2(int , int);
    void Imprimir(int *, int , int);
    double Fun(int , int*);

```

```
private:
```

```

    int genMax; //Maximo ciclo externo
    int gen_imax; //Maximo ciclo interno
    int gen_inter; // es un entero para medir el ciclo interno de
        busqueda tabu
    int gen; //Variable del ciclo externo;
    bool best_ind; //Indicador de si se encontro el mejor o no
    long ran; //semilla de los aleatorios
    struct Tabu1 *tabu_list1; //Lista tabu add/drop
    struct Tabu2 *tabu_list2; //Lista tabu swap
    struct best bestfit; //Mejor elemento
    float p0; // Ciclo add/drop
    float p01; // Ciclo add/ drop
    float p1; // ciclo swap
    int *intenso; //Auxiliar del intensificador
    int N; //Auxiliar para la funcion

```

```
double fun;
double Pi;
double R1;
double R2;
double R3;

double CCmax; //Capacidad Maxima Carreteras
double CTmax; //Capacidad Maxima trenes
double CAmx; //Capacidad maxima aeropuertos

float GuC, CuC; //Ganancia y costo promedio Carreteras
float GuT, CuT; //Ganancia y costo promedio trenes
float GuA, CuA; //Ganancia y costo promedio Aeropuertos
float Gmin; //Ganancia minima que debe representar la red

float CMC, CinvC; // costos de Mantenimiento por carreteras
                por km
float CMT, CinvT; //Costo de matenimiento promedio de un tren
                por kilometro y costo de la inversion
float CMA, CinvA; //Costo de Matenimiento Promedio de un
                areropuerto y deinversion
float Pres; //Presupuesto disponible

float Tmax; //tiempo maximo de transporte
float VCmax; //Vel max en millas/hora por carretera
float VTmax;
float VAmx; //Velocidades maximas de los transportes

Datos D1;
const char *Arch1, *Arch2, *Arch3;
float *Dat1, *Ciudades, *Dat2,*Distancia,*Di;

};

/*COMENZAMOS A DEFINIR TODOS LOS METODOS*/
```

```
double TabuEngine::Start() {  
  
    int *ent;  
    int i, q, n2;  
  
    LecturaDatos();  
  
    N=D1.Getn();  
    n2=(N*(N-1))/2;  
    ent=Aleatorio(n2); //Generamos la primer solucion de forma aleatoria  
  
    InicializarMem (n2); //inicializamos la memoria  
  
    for (i=0;i<n2;i++){  
        intenso[i]=ent[i];  
        bestfit.Values[i]=ent[i];  
    }  
    bestfit.Fvalue=Fun(N, ent);  
    bestfit.stamp=0;  
  
    for (gen=0;gen<genMax;gen++){  
  
        InicialP ();  
  
        CicloInterno(n2,intenso); //Ciclo swap y de vecindario  
  
        Diversificacion(n2); //Ciclo diversificacion  
  
        Liberar ();  
    }  
  
    cout<<"La_solucion_final_es_\n";  
    for (i=0;i<n2;i++) cout<<bestfit.Values[i]<<" ";  
    cout<<"\n";  
  
    Fun2(N, bestfit.Values);  
    Liberar2 ();  
    return bestfit.Fvalue;  
}
```

```
/*Lectura de Datos*/
void TabuEngine::LecturaDatos() {

    /*COMIENZA LA LECTURA DE LOS DATOS*/
    Arch1="Data/Flujo1.dat";
    Arch2="Data/arreglo.dat";
    Arch3="Data/Distancia.dat";

    Dat1=D1.Lectura(Arch1,0);
    Ciudades=D1.Lectura(Arch2,1);
    Distancia=D1.Lectura(Arch3,0);
    Dat2=D1.Reduccion(Dat1,Ciudades);
    Di=D1.Reduccion(Distancia,Ciudades);
}

/*Funcion para generar las soluciones iniciales*/
int *TabuEngine::Aleatorio( int n){

    int i;
    int *valores;

    srand(time(NULL));
    valores= (int*) calloc(n, sizeof(int));

    for(i = 0; i < n; i++){
        valores[i]= 1 + rand() % 3;
    }
    return valores;
    free(valores);
}

/* Inicializamos las listas*/
void TabuEngine::InicializarMem (int n){
    int i;
    unsigned sise ,sise2;
    sise=gen_imax*sizeof(struct Tabu1);
    sise2=gen_imax*sizeof(struct Tabu2);
}
```

```
    tabu_list1=(struct Tabu1*)malloc(sise);
    tabu_list2=(struct Tabu2*)malloc(sise2);
    bestfit.Values=(int*)calloc(n, sizeof(int));
    intenso=(int*)calloc(n, sizeof(int));
}

/*Iniciamos los valores de probabilidad*/
void TabuEngine::InicialP(){
    p0=.2;
    p01=.2;
    p1=.5;
}

/*Funcion del ciclo interno*/
void TabuEngine::CicloInterno(int n, int* ent){
    int i,j,aux;
    gen_inter=0;
    best_ind=false;
    while(gen_inter<gen_imax){

        Neighbor(n, ent, p0, p01);
        Swap(n,p1);
        Estadisticas(n);

        if(best_ind){
            break;
        }else{
            AumentaP();
        }
        gen_inter++;
    }
}

/*Funcion del Vecindario*/
void TabuEngine::Neighbor(int n, int *inicial, float p0, float p01){

    /*Lista de las variables internas*/
    int* lista;
    int i,j,k,r,s;
```



```
int aux;
int *movimientos,*camb;
int stamp;
float p,p1;
int indicador;

/*Generamos el tama\~n{o} del vecindario*/
aux=1+rand()%n;

/*Esto lo hacemos para poder tener tama\~n{os} de vecindario de
distintos tama\~n{os}*/
while(aux<2 || aux==n ){
    aux=1+rand()%n;
}

/*Comenzamos con el vecindario*/
movimientos=(int*)calloc(aux,sizeof(int));
lista=(int*)calloc(aux*n,sizeof(int));
camb=(int*)calloc(aux,sizeof(int));

/*Inicia el proceso de elegir a los elementos del vecindario*/
i=0;
p=ran2(&ran);
stamp=0;

while(i<aux){
    j=0;
    while(j<n){
        lista[j+i*n]=inicial[j];
        p=ran2(&ran);
        if(p>p0 && j>stamp) break;
        j++;
    }//fin while interno

    if(gen_inter==0){
        if(j==n){
            stamp=(stamp+1)%n;
        }else{
            stamp=j;
        }
    }
}
```

```
    }//end if interno

    movimientos [ i]=stamp;

    if (stamp<n){
        p1=ran2(&ran);
        if (p1 > p01){
            lista [stamp+i*n]=inicial [stamp]%3+1;
            k=stamp+1;
            camb [ i]=1;
        }else{
            switch ( inicial [stamp]) {
                case 1:
                    lista [stamp+i*n]=3;
                    camb [ i]=-1;
                    k=stamp+1;
                case 2:
                    lista [stamp+i*n]=1;
                    camb [ i]=-1;
                    k=stamp+1;
                case 3:
                    lista [stamp+i*n]=2;
                    camb [ i]=-1;
                    k=stamp+1;
            }
        }
    }//end if

        for (k;k<n;+k++){
            lista [k+i*n]=inicial [k];
        }//end for
    }//end if
}else{

    if (j==n){
        stamp=(stamp+1)%n;
    }else{
        stamp=j;
    }//end if interno
}
```

```
movimientos [ i]=stamp;

/*Aqui empieza la lista tabu*/
if (stamp<n){

    p1=ran2(&ran);
    if (p1 > p01){
        indicador=Buscar1 (stamp,1);

        switch (indicador){
            case 0:
                lista [stamp+i*n]=inicial [
                    stamp]%3+1;

                k=stamp+1;
                camb [ i]=1;

            case 1:
                switch ( inicial [stamp]) {
                    case 1:
                        lista [stamp+i*n]=3;
                        camb [ i]=-1;
                        k=stamp+1;
                    case 2:
                        lista [stamp+i*n]=1;
                        camb [ i]=-1;
                        k=stamp+1;
                    case 3:
                        lista [stamp+i*n]=2;
                        camb [ i]=-1;
                        k=stamp+1;

                }

            case 2: //aqui hay un error

                if (inicial [stamp]==2){
                    lista [stamp+i*n]=1;
                    k=stamp+1;
```

```
        camb[i]=1;
    }else{
        lista [stamp+i*n]=
            inicial [stamp]%3+2;
        k=stamp+1;
        camb[i]=1;
    }
}
}else{
    indicador=Buscar1 (stamp, -1);

    switch(indicador){
        case 0:
            switch(inicial [stamp]) {
                case 1:
                    lista [stamp+i*n]=3;
                    camb [ i ]=-1;
                    k=stamp+1;
                case 2:
                    lista [stamp+i*n]=1;
                    camb [ i ]=-1;
                    k=stamp+1;
                case 3:
                    lista [stamp+i*n]=2;
                    camb [ i ]=-1;
                    k=stamp+1;
            }

        case 1:
            lista [stamp+i*n]=inicial [
                stamp]%3+1;
            camb [ i ]=+1;
            k=stamp+1;

        case 2:
            switch(inicial [stamp]) {
                case 1:
                    lista [stamp+i*n]=2;
                    camb [ i ]=-1;
```

```

        k=stamp+1;
    case 2:
        lista [stamp+i*n]=3;
        camb [ i ]=-1;
        k=stamp+1;
    case 3:
        lista [stamp+i*n]=1;
        camb [ i ]=-1;
        k=stamp+1;
    }

    }

} //end if

for (k;k<n;k++){
    lista [k+i*n]=inicial [k];
} //end for

} //end if
} //end if
i++;
} //end while externo
/*Memoria*/

tabu_list1 [gen_inter]. list=(int*) calloc (aux*n, sizeof(int));

/*Guardamos en la estructuras tabu*/
for (i=0;i<n*aux;i++) tabu_list1 [gen_inter]. list [i]=lista [i];

tabu_list1 [gen_inter]. Mov=movimientos;
tabu_list1 [gen_inter]. cambios=camb;
tabu_list1 [gen_inter]. num=aux;
tabu_list1 [gen_inter]. stamp=gen_inter;

free (lista);
free (movimientos);
free (camb);

```

```
}//lista}

/*Swap para la funcion*/
void TabuEngine::Swap(int n, float p0){

    int i,j;
    int r1,r2;
    float p;
    int aux,aux2;
    bool indicador;
    int *val, *movimientos, *lista;

    aux2=tabu_list1[gen_inter].num;

    /*Resevamo memoria*/

    movimientos=(int*)calloc(aux2, sizeof(int));
    lista=(int*)calloc(aux2*2, sizeof(int));
    val=(int*)calloc(n*aux2, sizeof(int));

    for(i=0;i<n*aux2;i++)val[i]=tabu_list1[gen_inter].list[i];

    /*Inicia el while de la generacion 0*/
    i=0;
    j=0;
    while(i<aux2 && gen_inter==0){

        r1=(rand()%n);
        r2=(rand()%n);

        while(r1==r2){
            r2=(rand()%n);
        }//end while 2

        p=ran2(&ran);

        if(p>p0){
            aux=val[r1+i*n];
            val[r1+i*n]=val[r2+i*n];
```

```
        val[r2+i*n]=aux;
        movimientos[i]=1;

        }//end if 1
    /*Listas de cambios*/
    lista[j]=r1;
    lista[j+1]=r2;

    i++;
    j+=2;
} //end while externo 1

/*Inicial while generaciones superiores*/
while(i<aux2 && gen_inter!=0){
    r1=(rand() %n);
    r2=(rand() %n);

    while(r1==r2){
        r2=(rand() %n);
    } //end while 2
    p=ran2(&ran);

    if(p>p0){

        indicador=Buscar2(r1, r2);

        while(indicador){
            r2=(rand() %n);
            indicador=Buscar2(r1, r2);

        }
        aux=val[r1+i*n];
        val[r1+i*n]=val[r2+i*n];
        val[r2+i*n]=aux;
        movimientos[i]=1;
    } //end if 1

    lista[j]=r1;
    lista[j+1]=r2;
```

```
        i++;
        j+=2;

} // end while externo 2

/*Memoria*/
tabu_list2[gen_inter].values=(int*)calloc(n*aux2,sizeof(int));

for(i=0;i<n*aux2;i++) tabu_list2[gen_inter].values[i]=val[i];

tabu_list2[gen_inter].intercambios=movimientos;
tabu_list2[gen_inter].list=lista;
tabu_list2[gen_inter].stamp_=gen_inter;

free(val);
free(lista);
free(movimientos);
}

/* Diversificaci n */
void TabuEngine::Diversificacion(int n){

    int aux,aux2,r1,r2;
    int i,j;
    aux=rand()%n;
    j=0;

    while(j<aux){
        r1=rand()%n;
        r2=rand()%n;
        aux2=intenso[r1];
        intenso[r1]=intenso[r2];
        intenso[r2]=aux2;

        j++;
    }
}
```



```
/* Estadísticas para conocer el mejor valor */
void TabuEngine::Estadisticas(int n){

    int val;
    int i, j;
    int *sol;
    double aux;

    val=tabu_list1[gen_inter].num; //numero de vecinos en la
        generacion estudiada
    sol=(int*)calloc(n*val, sizeof(int)); //para tener todos los
        vecinos en un solo arreglo
    for(i=0; i<val; i++){
        for(j=0; j<n; j++){
            sol[j]=tabu_list2[gen_inter].values[j+i*n];
        }
        aux=Fun(N, sol);
        if(bestfit.Fvalue>aux){
            for(j=0; j<n; j++){
                bestfit.Values[j]=sol[j];
            }
            bestfit.Fvalue=aux;
            bestfit.stamp=gen;
            best_ind=true;
        }
    }
    free(sol);
}

/* Para aumentar los valores de P */
void TabuEngine::AumentaP(){
    p0+=.08;
    p01+=.08;
    p1+=.5;
}
```

```
/*Para buscar un objeto pero en el neighbor*/
int TabuEngine::Buscar1(int bus, int cam ){

    int ind=0;
    int i ,n;
    int *x,*y;

    x=tabu_list1 [gen_inter -1].Mov;
    y=tabu_list1 [gen_inter -1].cambios;
    n=tabu_list1 [gen_inter -1].num;
    for (i=0;i<n;i++){

        if(x[i]==bus && y[i]!= cam) ind=1; //Es ver si hay un proceso
            reversible
        if(x[i]==bus && y[i] ==cam) ind=2; //Ya lo hice

    }
    return ind;
}

/*Buscar un objeto para el swap*/
bool TabuEngine::Buscar2(int bus1 , int bus2){

    bool ind=false ;
    int n,i ,j ;
    int *x,*y;

    x=tabu_list2 [gen_inter -1].list ;
    y=tabu_list2 [gen_inter -1].intercambios ;
    n=tabu_list1 [gen_inter -1].num;
    j=0;
    for (i=0;i<n;i++){

        if(x[j]==bus1 && x[j+1]==bus2 && y[i]==1) ind=true ;
        j+=2;
    }
    return ind;
}
```

```

/*Funcion para imprimir cosas simples*/
void TabuEngine::Imprimir(int *datos, int eval, int n){

    int i, j;

    for(i=0; i<eval; i++){
        cout<<" El_vecino_"<<i<<"_es_" ;
        for(j=0; j<n; j++){
            cout<<datos[j+i*n];
        }
        cout<<"\n" ;
    }
}

/*Funcion de Prueba*/
double TabuEngine::Fun(int num, int*sol){

    int i, j, n, k, h, k2;
    float aux;
    double apt, a, b, c;

    fun=0.0;
    Pi=0.0;
    R1=0.0;
    R2=0.0;
    R3=0.0;
    apt=0.0;

    n=num;
    k=n;
    k2=0;
    for(i=0; i<n; i++){
        h=0;
        for(j=i+1; j<n; j++){
            //cout<<sol[h+k2]<<" ";
            if(sol[h+k2]==1){
                //este son autopistas
                Pi = Dat2[j+i*n]/CCmax;
            }
        }
    }
}

```

```

        R1+= 2*((GuC-CuC)*Dat2[j+i*n]);
        R2+= 2*((CMC)*Di[j+i*n]); //+CinvC);
        R3+= 2*(Di[j+i*n]/VCmax);
    } else if(sol[h+k2]==2){
        //este son trenes
        Pi = Dat2[j+i*n]/CTmax;
        R1+= 2*((GuT-CuT)*Dat2[j+i*n]);
        R2+= 2*((CMT)*Di[j+i*num]); //+CinvT);
        R3+= 2*(Di[j+i*n]/VTmax);

    } else if(sol[h+k2]==3){
        //este son aeropuerto
        Pi = Dat2[j+i*n]/CAmax;
        R1+= 2*((GuA-CuA)*Dat2[j+i*n]);
        R2+= 2*((CMA)); //+CinvA);
        R3+= 2*(Di[j+i*n]/VAmix);
    } else{
        cout<<" Existe un error\n";
    }
    if(Pi>1) Pi=1;
    fun+=2*(Pi*log(Pi));
    h++;
}
k--;
k2=k2+k;
}

R1=(Gmin-R1);
R2=(R2-Pres);
R3=(R3-Tmax);
a=fmax(0,R1);
b=fmax(0,R2);
c=fmax(0,R3);
apt=(fun+(1/(Pres))*(1000*(a*a)+b*b+c*c))+10;
return apt;
}
}

```

---

# Apéndice B

## Algoritmo de Sobol

En este apéndice presentamos el **algoritmo de sobol** y su respectiva implementacion en **lenguaje C**.

### B.0.4. Pseudocódigo

1. Generar dos matices aleatoriamente,  $M_1$  y  $M_2$  con  $m \times k$  elementos, donde  $m$  es el tamaño de la muestra y  $k$  es el número de parametros.
2. Seleccionar una como la matriz pivote y calcular  $E(M_i)$  y  $V(M_i)$ .
3. Generar una secuencia de matrices  $M_{i's}$  tales que cada filia de la matriz pivote sea intercambiada en las filas de la segunda matriz.
4. Multiplicar cada columna de la matriz generada en pazo anterior por cada columna de la matriz pivote.
5. Calcular  $U_i$  y  $U_{it}$ .
6. Continuar hasta hacerlo para todos los parametros.

### B.0.5. Código en lenguaje C

```
#define semilla 14567891
using namespace std;

class AnalisisSen{
public:
    //Constructor
    AnalisisSen(float *inf, float *sup, int n, int var){
        lim_inf=inf;
        lim_sup=sup;
        iter=n;
        Variable=var;
    }

    //Metdos internos
    void Start();
        void SetMemory(int, int);
        void SetParams(int, int, int);
        void Set_Aj(int, int, int);
    void Intercambio(int, int, int, int, int);
    void Analisis_Sobol(int, int);

private:
    /* Variables*/
    float *lim_inf;
    float *lim_sup;
    int iter;
    int Variable;
    char var[10]; //veremos para que nos puede llegar a servir
    double *err;
    double erm;
    double prom;
    double exact;
    double *rfun;
    int fevals;
    /*Parametros Random*/
    ran3T ran;
    ran3T *ran2;
```

```

    /*Parametros de control*/
    float *r1,*r2,*r3;
    /*Parametros*/
    float Ey, Vy; //Son la Esperanza y la variacion del sistema
    /* Matrices PARA SENSIBILIDAD*/
    float *M1,*M2; //Son las matrices de la muestra
    double *A; //Matriz dnde vamos a guardar todas las funciones
        evaluadas
    double *S; //Es la matriz de resultados
    double *A2;
};

/*START*/
void AnalisisSen::Start() {

    ran.idum= (long)-semilla;
    ran2=&ran;
    createRan3T(ran2);

    cout<<" Inicia el analisis de sensibilidad\n";

    if(Variable==1){
        cout<<" Analisis para la restriccion 1\n";
        SetParams(iter,6,1);
        Set_Aj(iter,6,1);
        Analisis_Sobol(iter,6);
        Impresion2(6);
        //Guardar2();
        Liberar();
    }

    if(Variable==2){
        cout<<" Analisis para la restriccion 2\n";
        SetParams(iter,7,2);
        Set_Aj(iter,7,2);
        Analisis_Sobol(iter,7);
        Impresion2(7);
        //Guardar2();
    }
}

```

```
        Liberar ();

    }

    if (Variable==3){
        cout<<" Analisis_para_la_restriccion_3\n";
        SetParams(iter ,4,3);
        Set_Aj(iter ,4,3);
        Analisis_Sobol(iter ,4);
        Impresion2(4);
        //Guardar2();
        Liberar ();

    }

    if (Variable==4){
        cout<<" Analisis_para_la_restriccion_4\n";
        SetParams(iter ,3,4);
        Set_Aj(iter ,3,4);
        Analisis_Sobol(iter ,3);
        Impresion2(3);
        //Guardar2();
        Liberar ();

    }

    if (Variable==0){
        cout<<" Iniciamos_el_analisis_Normal\n";
        Analisis_Normal ();
        Impresion ();

    }

    if (Variable==5){
        cout<<" Lo_que_usted_solicito_no_existe\n";
    }

}
```



```

/*Fijamos la memoria*/
void AnalisisSen::SetMemory(int muestra, int params){

    int size1, size2, size3;

    //nota 2*params+2 es el numero de vectores independientes para
    size1=muestra*params;
    size2=muestra*(2*params+2); //Esto nos regresa el numero de
        evaluaciones de la funcion
    size3=(2*params+2)*(2*params+2);

    /*Matrices Aleatorias*/
    M1 = (float*) calloc(size1, sizeof(float));
    M2 = (float*) calloc(size1, sizeof(float));

    /*Variable auxiliar*/
    A2 = (double*) calloc(muestra, sizeof(double));

    /*FIJAMOS LAS MATRICES AUXILIARES*/
    A = (double*) calloc(size2, sizeof(double)); //evaluaciones de
        fun
    S = (double*) calloc(size3, sizeof(double)); //sencibilidades
    /*Auxiliar*/
    rfun=(double*) calloc(3, sizeof(double));
    r1=(float*) calloc(6, sizeof(float));
    r2=(float*) calloc(7, sizeof(float));
    r3=(float*) calloc(4, sizeof(float));

    rfun[0]=2200.00, rfun[1]=3375.00, rfun[2]=3750.00;
    r1[0]=0.0006, r1[1]=0.00007, r1[2]=0.0006, r1[3]=0.0001175, r1
        [4]=0.0006, r1[5]=0.000357;
    r2[0]=.2123, r2[1]=2.5, r2[2]=.2, r2[3]=2.14, r2[4]=16.40, r2
        [5]=60.00, r2[6]=3600.00;
    r3[0]=264, r3[1]=43.00, r3[2]=139.00, r3[3]=560.00;
    Ey=0;
    Vy=0;
}

```

```

/*Inicializamos parametros 1*/
void AnalisisSen::SetParams(int muestra, int params, int ind){ //K
    representa el grado de las soluciones

    int i,j;
    float *aux,*aux2;

    /*fEngine*/
    FunFx f;
    fevals=0;

    /*Auxiliares para calculo*/
    aux = (float*) calloc(params, sizeof(float) );
    aux2 = (float*) calloc(params, sizeof(float) );

    SetMemory(muestra, params);

    f.SetFun(rfun);
    f.SetR1(r1);
    f.SetR2(r2);
    f.SetR3(r3);
    //cout<<"PASA P1 " << endl;

    /*Aqui solo estamos inicializando las variables y su muestra*/
    /*params = columnas y muestra = filas*/
    for( i=0; i < muestra; i++){

        for( j=0; j < params; j++){

            aux[j] = (ran3th(ran2)*(lim_sup[j]-lim_inf[j]))
                + lim_inf[j]; //me muevo sobre filas
            M1[j+i*params]=aux[j];
            aux2[j] = (ran3th(ran2)*(lim_sup[j]-lim_inf[j])
                ) + lim_inf[j];
            M2[j+i*params]=aux2[j];

        }
        /*AQUI FIJAMOS LOS PARAMETROS aux1*/
        if(ind==1){

```

```

        f . SetR1 ( aux ) ;

    } else if ( ind == 2 ) {
        f . SetR2 ( aux ) ;

    } else if ( ind == 3 ) {
        f . SetR3 ( aux ) ;

    } else if ( ind == 4 ) {
        r1 [ 0 ] = aux [ 0 ] , r1 [ 1 ] = 0.00007 , r1 [ 2 ] = aux [ 0 ] , r1
            [ 3 ] = 0.0001175 , r1 [ 4 ] = aux [ 0 ] , r1 [ 5 ] = 0.000357 ;
        r2 [ 0 ] = .2123 , r2 [ 1 ] = 2.5 , r2 [ 2 ] = .2 , r2 [ 3 ] = 2.14 , r2
            [ 4 ] = 16.40 , r2 [ 5 ] = 60.00 , r2 [ 6 ] = aux [ 1 ] ;
        r3 [ 0 ] = 264 , r3 [ 1 ] = 43.00 , r3 [ 2 ] = 139.00 , r3 [ 3 ] = aux
            [ 2 ] ;
        f . SetR3 ( r1 ) ;
        f . SetR2 ( r2 ) ;
        f . SetR3 ( r3 ) ;

    } else {
        cout << "HUBO UN ERROR POR FAVOR VERIFIQUE\n" ;
        break ;
    }
    A [ i + ( muestra * ( 2 * params + 1 ) ) ] = f . Start ( ) ; // fijamos el
        ultimo y me muevo sobre columna de resultados
    fevals ++ ;
    /* AQUI FIJAMOS LOS PARAMETROS aux2 */
    if ( ind == 1 ) {
        f . SetR1 ( aux2 ) ;

    } else if ( ind == 2 ) {
        f . SetR2 ( aux2 ) ;

    } else if ( ind == 3 ) {
        f . SetR3 ( aux2 ) ;

    } else if ( ind == 4 ) {
        r1 [ 0 ] = aux [ 0 ] , r1 [ 1 ] = 0.00007 , r1 [ 2 ] = aux [ 0 ] , r1
            [ 3 ] = 0.0001175 , r1 [ 4 ] = aux [ 0 ] , r1 [ 5 ] = 0.000357 ;

```

```

        r2[0]=.2123 , r2[1]=2.5 , r2[2]=.2 , r2[3]=2.14 , r2
            [4]=16.40 , r2[5]=60.00 , r2[6]=aux[1];
        r3[0]=264 , r3[1]=43.00 , r3[2]=139.00 , r3[3]=aux
            [2];
        f.SetR3(r1);
        f.SetR2(r2);
        f.SetR3(r3);

    }else{
        cout<<"HUBO UN ERROR PORFAVOR VERIFIQUE\n";
        break;
    }
    A[i]=f.Start();
    fevals++;
    Ey+=A[i]; //fijamos el primero
}

Ey/=muestra; //Esperanza de la muestra;

for(i=0; i < muestra ; i++){

    Vy+= (A[i]*A[i])-(Ey*Ey);

}

Vy/=(muestra-1); //Varianza de la muestra
free(aux);
free(aux2);
}

/* Calculo de las Aj*/
void AnalisisSen::Set_Aj(int filas , int col ,int ind){

    int i , j , k , aux;
    /*FIJAMOS LOS VALORES DE ENMEDIO*/
    aux=2*col+1;
    k=0;

```

```

    for (i=1; i<aux; i++){ /*AQUI NOS DEPLAZAMOS SOBRE LAS COLUMNAS
        */

        if (i<=col){
            Intercambio ( filas , col , i -1,0,ind );
        }else{
            Intercambio ( filas , col , k,1 ,ind );
            k++;
        }

        for (j=0; j<filas; j++) {
            A[j+i*filas]=A2[j];
        }
    }
    //free (A2);
}

/*INTERCAMBIO DE COLUMNAS*/
void AnalisisSen::Intercambio (int fil , int col , int num,int ind ,int
ind2 ){

    int i , j;
    float *aux;
    /*fEngine*/
    FunFx f;
    f.SetFun(rfun);
    f.SetR1(r1);
    f.SetR2(r2);
    f.SetR3(r3);

    aux = (float*) calloc ( col , sizeof(float) );

    if (ind==0){
        for (i=0; i<fil; i++){

            for (j=0; j < col; j++){

```

```

        if(num==j){
            aux[j]=M1[j+i*col];
        }else{
            aux[j]=M2[j+i*col];
        }
    }

    /*AQUI FIJAMOS LOS PARAMETROS aux1*/
    if(ind2==1){
        f.SetR1(aux);

    }else if(ind2==2){
        f.SetR2(aux);

    }else if(ind2==3){
        f.SetR3(aux);

    }else if(ind2==4){

        r1[0]=aux[0], r1[1]=0.00007, r1[2]=aux
            [0], r1[3]=0.0001175, r1[4]=aux[0], r1
            [5]=0.000357;
        r2[0]=.2123, r2[1]=2.5, r2[2]=.2, r2
            [3]=2.14, r2[4]=16.40, r2[5]=60.00, r2
            [6]=aux[1];
        r3[0]=264, r3[1]=43.00, r3[2]=139.00, r3
            [3]=aux[2];
        f.SetR3(r1);
        f.SetR2(r2);
        f.SetR3(r3);

    }else{
        cout<<"HUBO UN ERROR PORFAVOR VERIFIQUE
            _EN PARTE 2\n";
        break;
    }

    A2[i]=f.Start();

```

```

        fevals++;
    }
} else {

    for (i=0; i<fil; i++){
        for (j=0; j < col; j++){
            if (num==j) {
                aux[j]=M2[j+i*col];
            } else {
                aux[j]=M1[j+i*col];
            }
        }
        /*AQUI FIJAMOS LOS PARAMETROS aux1*/
        if (ind2==1){
            f.SetR1(aux);

        } else if (ind2==2){
            f.SetR2(aux);

        } else if (ind2==3){
            f.SetR3(aux);

        } else if (ind2==4){
            r1[0]=aux[0], r1[1]=0.00007, r1[2]=aux
                [0], r1[3]=0.0001175, r1[4]=aux[0], r1
                [5]=0.000357;
            r2[0]=.2123, r2[1]=2.5, r2[2]=.2, r2
                [3]=2.14, r2[4]=16.40, r2[5]=60.00, r2
                [6]=aux[1];
            r3[0]=264, r3[1]=43.00, r3[2]=139.00, r3
                [3]=aux[2];
            f.SetR3(r1);
            f.SetR2(r2);
            f.SetR3(r3);
        } else {
            cout<<"HUBO UN ERROR PORFAVOR VERIFIQUE
                _EN PARTE 3\n";
            break;
        }
    }
}

```

```

        A2[i]=f.Start();
        fevals++;
    }

}
free(aux);
}

/*ANALISIS SOBOL para sensibilidad de parametros*/
void AnalisisSen:: Analisis_Sobol(int muestra, int params){

    int i, j, k, aux2;
    double Uj=0.0;
    int size2;
    double *A2;

    size2=muestra*(2*params+2);
    A2 = (double*) calloc(size2, sizeof(double));
    for(i=0; i<size2; i++){
        A2[i]=A[i];
    }

    /*Viene el analisis Sobol*/
    aux2=2*params+2;

    for( i=0; i<aux2; i++){

        Uj=0.0;

        for(k=0; k<muestra; k++) {
            Uj+=A2[k+i*muestra]*A[k];
        }
        Uj=Uj/(muestra-1);
        Uj=Uj-(Ey*Ey);

        if( i<=params && i>0){ //Bien primer columna

            S[(aux2)*i]=1-(Uj/Vy);

```



```
    }else if( i>params && i<aux2-1){//Bien primer  
        columna  
        S[(aux2)*i]=(Uj/Vy);  
    }else if( i==0) {  
        S[(aux2)*i]=Uj;  
    }else{  
        S[aux2*i]=0.0;  
    }  
    }  
    free(A2);  
}}
```



# Apéndice C

## Matrices de Origen-Destino

En este apéndice se muestran las matrices de origen destino usadas en ambos modelos. En la tabla C.1 se muestra la matriz de origen-destino para el primer año y en la tabla C.2 se muestra la matriz de origen-destino para el año número veinte.

Ciudad	Los Angeles	San Diego	San José	San Francisco	Long Beach	Fresno	Sacramento	Oakland	Santa Ana	Anaheim
Los Angeles	0.00	713.92	63.99	42.91	6610.34	75.62	24.07	23.59	2654.84	3992.19
San Diego	713.92	0.00	14.28	10.14	123.12	12.93	5.70	5.49	141.36	118.59
San José	63.99	14.28	0.00	569.47	8.64	47.18	72.82	576.20	5.91	6.00
San Francisco	42.91	10.14	569.47	0.00	5.87	25.75	114.80	5336.76	4.02	4.08
Long Beach	6610.34	123.12	8.64	5.87	0.00	9.56	3.28	3.20	924.89	660.11
Fresno	75.62	12.93	47.18	25.75	9.56	0.00	17.64	14.17	6.36	6.55
Sacramento	24.07	5.70	72.82	114.80	3.28	17.64	0.00	69.74	2.26	2.28
Oakland	23.59	5.49	576.20	5336.76	3.20	14.17	69.74	0.00	2.17	2.20
Santa Ana	2654.84	141.36	5.91	4.02	924.89	6.36	2.26	2.17	0.00	5739.68
Anaheim	3992.19	118.59	6.00	4.08	660.11	6.55	2.28	2.20	5739.68	0.00

Tabla C.1: Matriz de O-D para el primer año

Ciudad	Los Angeles	San Diego	San José	San Francisco	Long Beach	Fresno	Sacramento	Oakland	Santa Ana	Anaheim
Los Angeles	0.00	1320.46	118.36	79.37	12226.48	139.86	44.51	43.64	4910.39	7383.96
San Diego	1320.46	0.00	21.13	15.01	182.18	19.14	8.44	8.13	209.17	175.48
San José	118.36	21.13	0.00	842.64	12.78	69.81	107.74	852.60	8.75	8.88
San Francisco	79.37	15.01	842.64	0.00	9.83	43.14	192.35	8941.87	6.73	6.84
Long Beach	12226.48	182.18	12.78	9.83	0.00	14.14	4.85	4.73	1368.54	976.75
Fresno	139.86	19.14	69.81	43.14	14.14	0.00	26.10	20.97	9.40	9.69
Sacramento	44.51	8.44	107.74	192.35	4.85	26.10	0.00	103.26	3.34	3.38
Oakland	43.64	8.13	852.60	8941.87	4.73	20.97	103.26	0.00	3.20	3.26
Santa Ana	4910.39	209.17	8.75	6.73	1368.54	9.40	3.34	3.20	0.00	13002.70
Anaheim	7383.96	175.48	8.88	6.84	976.75	9.69	3.38	3.26	8492.89	0.00

Tabla C.2: Matriz de O-D para el año número veinte



---

# Apéndice D

## Matriz de distancia

En este apéndice presentamos la matriz de distancia en millas, D.1.

Ciudad	Los Angeles	San Diego	San Jos	San Francisco	Long Beach	Fresno	Sacramento	Oakland	Santa Ana	Anaheim
Los Angeles	0	120	341	383	24.2	220	385	371	32.3	26.1
San Diego	120	0	460	502	113	339	504	490	89.2	96.5
San Jos	341	460	0	57	363	151	120	40.7	371	365
San Francisco	383	502	57	0	405	188	87.9	12.3	414	407
Long Beach	24.2	113	363	405	0	242	408	394	21.4	25.1
Fresno	220	339	151	188	242	0	171	182	251	245
Sacramento	385	504	120	87.9	408	171	0	81	416	410
Oakland	371	490	40.7	12.3	394	182	81	0	405	398
Santa Ana	32.3	89.2	371	414	21.4	251	416	405	0	7.2
Anaheim	26.1	96.5	365	407	25.1	245	410	398	7.2	0

Tabla D.1: Matriz de Distancias



---

# Bibliografía

- [1] R. Abbou, Y. Ducq, y A. LÁnton. Modelling, simulation and optimization of transport systems. En *Industrial Engineering and Systems Management (IESM), 2015 International Conference on*, págs. 646–648. 2015.
- [2] R. R. Amaral, E. H. Aghezzaf, M. Rinaldi, W. Himpe, P. Vansteenwegen, y C. Tampre. An integrated perspective on traffic management and logistic optimization. En *2015 IEEE 18th International Conference on Intelligent Transportation Systems*, págs. 2166–2171. 2015.
- [3] Tom I N Apostol. *Calculus, Volume 1, One-variable calculus, with an introduction to linear algebra*,. Wiley, Massachusetts, 1967.
- [4] Hans-Joachim Boeckenhauer y Juraj Hromkovic. Stability of approximation algorithms or parameterization of the approximation ratio. En *Proceedings of the 9th International Symposium on Operational Research in Slovenia*, págs. 23–28. 2007.
- [5] Vladimir I. Bogachev y Aleksandr V. Kolesnikov. The Monge-Kantorovich problem: achievements, connections, and perspectives. *Russian Mathematical Surveys*, 67(5):785–890, 2012.
- [6] Edmund K. Burke y Graham Kendall. *Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques*. Springer, Scotland, U.K., 2005.
- [7] Berge C. Two theorems in graph theory. *Proc Natl Acad Sci USA*, 43(3):842–844, 1957.

- 
- [8] Anthony Chen, Juyoung Kim, Seungjae Lee, y Youngchan Kim. Stochastic multi-objective models for network design problem. *Expert Systems with Applications*, 37(2):1608–1619, 2010.
- [9] Thomas H Cormen, Charles E Leiserson, Ronald L Rivest, y Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, Second Edition*, tomo 2nd. 2001.
- [10] Teodor Gabriel Crainic, Michel Gendreau, y Judith M. Farvolden. A Simplex-Based Tabu Search Method for Capacitated Network Design. *INFORMS Journal on Computing*, 12(3):223–236, 2000.
- [11] Laurence E. Daniels. Track maintenance costs on rail transit properties. Inf. téc., Transportation Research Board, 2008.
- [12] Dirección General de Planeación. *Principales Estadísticas del Sector Comunicaciones y Transportes*. Secretaria de Comunicaciones y Transportes, Gobierno de México, 2012.
- [13] Matthias Ehrgott. Multicriteria Optimization. En *Multicriteria Optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. ISBN 3-540-21398-8. doi:10.1007/3-540-27659-9.
- [14] S. Solimini F. Maddalena y J.-M. Morel. A variational model of irrigation patterns. *Interfaces and Free Boundaries*, 4(05):391–416, 2003.
- [15] José Figueira, Salvatore Greco, Matthias Ehrgott, y M Ehrgott. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, tomo 78. 2005.
- [16] E. N. Gilbert. Minimum Cost Communication Networks. *Bell System Technical Journal*, 46(9):2209–2227, 1967.
- [17] Stefan Nickel Gilbert Laporte y Francisco Saldanha da Gama. *Location Science*. Springer International Publishing, 2015.
- [18] F Glover y M Laguna. Tabu Search. *Journal of computational biology a journal of computational molecular cell biology*, 16(12):1689–703, 1997.



- 
- [19] Fred Glover. Heuristics for Integer Programming Using Surrogate Constraints. *Decision Sciences*, 8(1):156–166, 1977.
- [20] T.F. Gonzalez. *Handbook of approximation algorithms and metaheuristics*, tomo 53. Chapman and Hall/CRC, 2007.
- [21] S. L. Hakimi. Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems. *Operations Research*, 13(3):462–475, 1965.
- [22] S. L. Hakimi y S. N. Maheshwari. Optimum Locations of Centers in Networks. *Operations Research*, 20(5):967–973, 1972.
- [23] Horst W. Hamacher, Martine Labbé, Stefan Nickel, y Tim Sonneborn. Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems. En *Discrete Applied Mathematics*, tomo 145, págs. 104–116. 2004.
- [24] J C Helton. Uncertainty and sensitivity analysis techniques for use in performance assessment for radioactive waste disposal. *Reliability Engineering and System Safety*, 42(2-3):327–367, 1993.
- [25] Toshimitsu Homma y Andrea Saltelli. Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models. *Reliability Engineering & System Safety*, 52(1):1–17, 1996.
- [26] L. Kantorovich. On the transfer of masses. *Dokl. Acad. Nauk. USSR*, (37):7–8, 1942. ISSN 0036-0279.
- [27] T. Korkmaz y M. Krunz. Multi-constrained optimal path selection. *Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No.01CH37213)*, 2:1–10, 2001.
- [28] H. L. Bocanegra Lopez. *Estimación de una Matriz de Origen-Destino a partir de Aforos Vehiculares*. Proyecto Fin de Carrera, Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Civil.

- 
- [29] José Luis Gutiérrez Hernández y Emilio Abarca Pérez Marco Luis Dorado Pineda, Alberto Mendoza Díaz. Matrices origen-destino (o-d) múltiprodueto para el autotransporte nacional de carga. Inf. Téc. 409, Instituto Mexicano del Transporte, SCT, 2014.
- [30] Gustavo Nombela. Evaluación económica de proyectos de transporte. Inf. téc., CEDEX, Centro de estudios y Experimentación de Obras Públicas, 2009.
- [31] M. E. O’Kelly. The Location of Interacting Hub Facilities. *Transportation Science*, 20(2):92–106, 1986.
- [32] D. C. Ploeger y R. B. Chapman. Preventive maintenance at general aviation airports. Inf. Téc. 138, Federal Aviation Administration, 2015.
- [33] H Rabitz. Systems analysis at the molecular scale. *Science*, 246(4927):221–6, 1989.
- [34] Dan Chatman Lisa Schweitzer Randall Crane, Abel Valenzuela y Peter J. Wong. California travel trends and demographic study. Inf. téc., Institute of Transportation Studies and University of California, Los Angeles, 2012.
- [35] Cr Reeves. Modern heuristic techniques. *Modern heuristic search methods*, 1996.
- [36] Sheldon Ross. *Introduction to Probability Models*. ELSEIVER, 2014.
- [37] Andrea Saltelli, Marco Ratto, Stefano Tarantola, y Francesca Campolongo. *Sensitivity analysis practice: A guide to scientific models*, tomo 91. 2006.
- [38] I.M. Sobol’. Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models. En *Mathematical Modeling and Computational experiment*, tomo 1, págs. 407–414. 1993.
- [39] Leo Mahserelli Brian Weber Susan Massey, Bob Moore y Ron Jones. State of the pavement report. Inf. téc., California Department of Transportation, Division of Maintenance, 2013.
- [40] James Swinburne. *Entropy: Or, Thermodynamics From an Engineer’s Standpoint, and the Reversibility of Thermodynamics*. Cornell University Library.

- 
- [41] Ricardo Torquato, Qingxin Shi, Wilsun Xu, y Walimir Freitas. A Monte Carlo simulation platform for studying low voltage residential networks. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 5(6):2766–2776, 2014.
- [42] Salvador Hernández García y Silvia Blancas Ramírez Vctor Manuel Islas Rivera. El transporte en la región centro de mxico. Inf. Téc. 232, Instituto Mexicano del Transporte, SCT, 2004.
- [43] Qinglan Xia. Optimal paths related to transport problems. *Communications in Contemporary Mathematics*, 5(02):251–279, 2003.
- [44] X. Zhang, Y. Chen, y T. Li. Optimization of logistics route based on dijks-tra. En *Software Engineering and Service Science (ICSESS), 2015 6th IEEE International Conference on*, págs. 313–316. 2015.



---

# Glosario

$B_u$  Presupuesto máximo asignado a mantenimiento. 57

$B_u(t)$  Presupuesto máximo esperado para mantenimiento. 66

$CM_i(\tau)$  Costo de mantenimiento de la ruta  $i$  con respecto al tipo de transporte  $\tau$ .  
57

$CM_i(\tau, t)$  Costo promedio de mantenimiento a futuro, de la ruta  $i$  con respecto al  
tipo de transporte  $\tau$ . 66

$Cu(\tau)$  Costo unitario promedio con respecto al tipo de transporte  $\tau$ . 57

$Cu(\tau, t)$  Costo promedio a futuro con respecto al tipo de transporte  $\tau$  y al tiempo  
 $t$ . 66

$Gu(\tau)$  Ganacia unitaria promedio con respecto al tipo de transporte  $\tau$ . 57

$Gu(\tau, t)$  Ganacia promedio a futuro con respecto al tipo de transporte  $\tau$  y al tiempo  
 $t$ . 66

$T_{max}$  Tiempo máximo de recorrido a través de la red. 57, 66

$\alpha$  Monto mínimo esperado en el retorno de la inversión. 57

$\alpha(t)$  Monto mínimo esperado a futuro en el retorno de la inversión. 66

$d_i$  Distancia promedio con respecto a la vía  $i$ . 57, 66

$t_i(\tau)$  Tiempo promedio de traslado por tipo de transporte. 57, 66