



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE BIOELECTRÓNICA

Reducción de ruido y artefactos en el electroencefalograma basado
en la técnica de separación ciega de fuentes

Tesis que presenta

Ing. Walther Bruno Meyer Castruita

Para obtener el Grado de

Maestro en ciencias

en la Especialidad de

Ingeniería Eléctrica

Director de la Tesis: Dr. Carlos Alvarado Serrano

Agradecimientos

Primero y ante todo agradezco a mi familia, debido a que son las personas más importantes en mi vida y quienes son la base de mis principios y valores. Son quienes siempre me han motivado, apoyado y por quienes he logrado llegar hasta aquí; no tengo como agradecer sus consejos y palabras que siempre me han levantado y hacer que camine en la dirección adecuada incluso cuando las cosas no parecen ir del todo bien. A mi tía Yolanda Rauda Meyer por impulsarme hacía el éxito en cada momento y alimentarme durante mi estancia en esta ciudad.

Quiero dar las gracias al Dr. Carlos Alvarado Serrano, no sólo por aceptarme como parte de su grupo de trabajo y ser mi mentor y asesor durante esta etapa de estudio sino también por su amistad y sus invaluable consejos. Al ingeniero, y para mí doctor en ingeniería que no requiere título, Ángel Eduardo Llanas Soto, quien gustosamente comparte sus pasiones, su conocimiento y me ha brindado su gran amistad.

Al Dr. Aldo Gustavo Orozco Lugo, por otorgarme parte de su tiempo libre para compartir conmigo su amplio conocimiento respecto al tema tratado durante esta tesis y ayudarme principalmente con la explicación y métodos usados para la evaluación de los algoritmos. A mi hermano Ing. Giovanni Saul Meyer Castruita por su aportación en análisis de algoritmos computacionales.

Finalmente quiero agradecer al CINVESTAV por permitirme ser parte de su programa de estudios y ofrecer todos los servicios necesarios para trabajar cómodamente y a CONACYT por haber sido el organismo que a través de los ciudadanos mexicanos pudo proporcionarme la beca de maestría para comenzar y culminar mis estudios.

Contenido

1. Introducción	8
1.1. Planteamiento del problema	9
1.2. Objetivos	12
1.3. Estructura de la tesis	13
2. Antecedentes	14
2.1. Electroencefalografía	14
2.1.1. Electroencefalograma (EEG)	15
2.1.1.1. Origen del electroencefalograma	15
2.1.1.2. Registro de electroencefalograma y sistema 10-20	17
2.1.1.3. La señal EEG	19
2.1.1.4. Uso clínico del electroencefalograma	21
2.2. Potenciales evocados (EP)	22
2.2.1. Registro de los potenciales evocados	23
2.2.2. Tipos de potenciales evocados	24
2.2.3. Aplicación clínica de los potenciales evocados	27
2.3. Artefactos	28
2.3.1. Fuentes de artefactos	28
2.3.2. Clasificación de artefactos	29
2.3.3. Propiedades de los artefactos	33
2.3.4. Técnicas de reducción de artefactos	33
2.3.4.1. Métodos de regresión lineal	34
2.3.4.2. Método de corrección de electrooculograma (EOG)	35
2.3.4.3. Métodos de filtrado	35

2.3.5.	Separación ciega de fuentes	36
2.3.5.1.	Análisis de componentes principales	38
2.3.5.2.	Análisis de componentes independientes	38
2.3.6.	Métodos de descomposición de fuentes	39
2.3.7.	Ejecuciones automáticas y semiautomáticas	41
2.3.8.	Estadísticas de aplicación de los algoritmos	41
2.4.	Separación ciega de fuentes	43
2.4.1.	Análisis de componentes independientes (ICA)	45
2.4.1.1.	Independencia	47
2.4.1.2.	Ilustración de ICA	47
2.4.1.3.	Restricciones de ICA	49
2.4.1.4.	Ambigüedades de ICA	50
2.4.1.5.	Desarrollo de ICA	51
2.4.1.6.	Aplicaciones de ICA	53
2.4.1.7.	Medidas de no-Gaussianidad	54
2.4.1.8.	FastICA	61
2.4.1.9.	Maximización de la información (InfoMax)	63
2.4.1.10.	Identificación ciega de segundo orden (SOBI)	76
3.	Desarrollo	82
3.1.	Algoritmos de separación ciega de fuentes	83
3.1.1.	FastICA	83
3.1.2.	InfoMax	86
3.1.3.	SOBI	88
3.2.	Métodos cuantitativos de evaluación	88
3.2.1.	Relación señal interferencia-ruido	88
3.2.2.	Error cuadrático medio normalizado	93
3.2.3.	Mínimos cuadrados	94
3.3.	Pruebas preliminares de funcionamiento de los algoritmos	95
3.3.1.	Evaluación cualitativa de separación	95

3.3.2.	Evaluación cuantitativa de separación	96
3.4.	Modelado y simulación de señales biológicas	97
3.4.1.	EEG y EP sintéticos	97
3.4.2.	Señales artefactuales sintéticas	102
3.4.2.1.	EOG	102
3.4.2.2.	ECG	103
3.4.2.3.	EMG	103
4.	Pruebas y resultados	105
4.1.	Gráficas cuantitativas del desempeño de los algoritmos	109
4.1.1.	Resumen de los valores de las gráficas de evaluación cuantitativa	119
4.2.	Pruebas visuales de separación de artefactos	120
4.3.	Separación de artefactos de 2 señales reales	132
4.4.	Discusión	135
4.4.1.	Separación de ECG	135
4.4.2.	Separación de EOG	137
4.4.3.	Separación de EMG	137
4.4.4.	Separación de la mezcla ECG, EOG y EMG	138
4.4.5.	Tiempos de cómputo	139
4.4.6.	Pruebas visuales de separación de artefactos	139
4.4.7.	Separación de señales reales	141
4.5.	Interfaz gráfica de usuario	141
5.	Conclusiones	146
	Referencias	148
	Apéndice A. Código de InfoMax	151
	Apéndice B. Código de SOBI	153

Resumen

El electroencefalograma (EEG) y su respuesta a un estímulo externo o interno llamada potencial relacionado a eventos (ERP), originalmente llamado potencial evocado (EP), son registros no invasivos de alta resolución temporal que miden la actividad eléctrica del cerebro con electrodos colocados sobre el cuero cabelludo. Por su bajo costo, ambos registros son ampliamente utilizados en laboratorios de investigación y en clínica para el diagnóstico de enfermedades neurológicas y psiquiátricas.

Sin embargo, debido a su espectro de frecuencia y su baja amplitud causada por las diversas capas de tejido que cubren el cerebro: duramadre, cráneo y cuero cabelludo; el EEG es fácilmente contaminado por artefactos producidos por fuentes internas (movimientos de la cabeza, actividad muscular y cardiaca, movimientos oculares y parpadeo) y por fuentes externas (interferencia de la línea eléctrica, falso contacto de electrodos y el equipo de registro utilizado).

Diversas técnicas existen para identificar y remover tales interferencias, como filtros adaptativos, descomposición de fuentes usando la *transformada wavelet* y la separación ciega de fuentes. Esta última técnica posee la ventaja de no necesitar un patrón de referencia y ser uno de los métodos más utilizados para remover artefactos en señales EEG, por lo que en esta tesis se presenta el análisis de rendimiento de tres algoritmos inspirados en la separación ciega de fuentes: FastICA, InfoMax y SOBI. Las pruebas de separación de interferencias se realizaron con señales sintéticas para utilizar un modelo de referencia a partir del cual la relación señal a interferencia y ruido (SINR) y el error cuadrático medio normalizado (NMSE) fueron evaluados.

Los resultados muestran que los tres algoritmos separan adecuadamente los artefactos electrocardiográficos (ECG), electrooculográficos (EOG) y electromiográficos (EMG) de una señal EEG sintética con un rechazo de interferencias promedio de 25 dB para FastICA, 22.97 dB para InfoMax y 22.49 dB para SOBI, con un error promedio de -8.40 dB, -10.7 dB y -6.68 dB respectivamente cuando existen 50 dB de relación señal a ruido respecto a los datos observables y solamente la intervención de un artefacto.

Abstract

The electroencephalogram (EEG) and its response to an external or internal stimulus called event related potential (ERP), originally called evoked potential (EP), are high temporal resolution non-invasive records which measure the electrical activity of the brain with electrodes that are placed on the scalp. Because its low cost, both records are widely used in research laboratories and clinic for neurological and psychiatric disease diagnostic.

Nevertheless, due to its frequency spectrum and low amplitude caused the diverse layers which covers the brain: dura mater, cranium and scalp; the EEG is easily contaminated by artifacts produced by internal sources (head movement, muscular and cardiac activity, ocular movements and blinks) and for external sources (electric line interference, missplaced electrodes and the equipment used for record). Diverse techniques exist to identify and remove such interferences, as adaptive filters, source decomposition using *wavelet transform* and blind source separation. The latter one has the advantage of avoid a reference pattern and being one of the most used methods to remove artifacts from EEG signals. Therefore, in this thesis the performance analysis of three algorithms based on blind source separation, FastICA, InfoMax and SOBI, is presented. The tests of interference separation were made using synthetic signals to use a reference model by which the signal to interference and noise ratio (SINR) and normalized mean square error (NMSE) were evaluated.

The results show that the three algorithms separate adequately the ECG, EOG and EMG artifacts off the synthetic EEG signal with a mean interference rejection of 25 dB for FastICA, 22.97 dB for InfoMax and 22.49 dB for SOBI, with a mean error of -8.40 dB, -10.7 dB and -6.68 dB respectively when 50 dB of signal to noise ratio exist respect to the observable data and only one artifact intervention.

Capítulo 1

Introducción

En el análisis tradicional del electroencefalograma (EEG) se emplean técnicas subjetivas de reconocimiento de formas considerando la información a priori del paciente. Se miden la frecuencia, amplitud, morfología y la distribución espacial de las ondas en el cerebro, interpretados en un determinado contexto, y el diagnóstico está basado en la impresión general del trazado, más que en un análisis detallado de las ondas. Hasta el momento, no existe modelo matemático o biológico que sea capaz de explicar la gran diversidad de los patrones de EEG y por tanto, la interpretación de EEG permanece como una disciplina clínica fenomenológica. Hoy en día la interpretación es significativamente facilitada debido al poder computacional existente aunque no está cerca de ser automatizada completamente. Usando un arreglo de procesadores digitales de señales ofrece diferentes propósitos que facilitan el estudio de EEG, e.g., mejora de la relación señal a ruido (SNR), cuantificación de varias características de la señal y extracción de patrones que visualmente no pueden ser obtenidos. Los métodos de procesamiento de señales puede dividirse en dos categorías, métodos desarrollados para el análisis de la actividad cerebral espontánea y los potenciales del cerebro que son generados por varios estímulos [1].

Los potenciales evocados (EP, por sus siglas en inglés) visuales, auditorios y somatosensoriales son comúnmente usados en neurología para localizar y confirmar anomalías sensoriales, para identificar lesiones silenciosas y para monitorear cambios. Los EP son sensibles, confiables y objetivos en cuanto a mediciones del sistema nervioso. Son lo suficientemente sensibles para detectar anomalías cuando los exámenes físicos arrojan resultados normales. Las pruebas hechas son igualmente bastante objetivas, en el hecho de que no pueden ser influenciadas por la falta de cooperación del paciente. Las latencias pueden cuantificarse en dos o tres figuras signi-

ficantes, haciéndolas fácilmente manejables para estudios científicos usando análisis estadísticos paramétricos. Por lo tanto, los EPs han sido muy útiles dentro de la investigación clínica patofisiológica de ciertas enfermedades neurológicas [2].

1.1. Planteamiento del problema

La señal electroencefalográfica o EEG permite conocer el funcionamiento eléctrico del cerebro mediante una técnica no invasiva. Solamente colocando sensores en el cuero cabelludo es posible registrar pequeñas diferencias de potenciales generadas gracias a un grupo de neuronas encontradas en el córtex cerebral.

Hasta 1960, el EEG era la única técnica disponible para neurocientíficos y fisiólogos de estudiar la actividad eléctrica del córtex humano. Sin embargo era inadecuado para cualquier análisis riguroso de las señales eléctricas del cerebro que fuesen de repetitiva representación ante estímulos específicos. Hoy en día, gracias a los avances en tecnología computacional, es posible registrar respuestas relacionadas a estímulos a partir de registros EEG, estas respuestas son denominadas potenciales evocados. Debido a que los EP tienen una baja SNR respecto al EEG, no se detectan directamente en registros rutinarios de EEG.

Típicamente la técnica usada para identificar con mayor facilidad las ondas características de un potencial evocado es el promediado de los canales de EEG que se tengan activos al momento del registro. Desafortunadamente por su espectro en frecuencia y su baja amplitud, el EEG es fácilmente contaminado por artefactos producidos por las señales fisiológicas de otros órganos y tejidos cercanos como son: el corazón por medio del electrocardiograma (ECG), el ojo por medio del electrooculograma (EOG) y los músculos por medio del electromiograma (EMG); también el EEG es afectado por fuentes externas como son: la interferencia de la línea eléctrica, falso contacto de electrodos y el equipo de registro utilizado [3].

Cuando un artefacto se introduce en el EEG puede alterarla a tal grado que los datos de interés no puedan ser reconocidos. Recordando que los registros de potenciales evocados provienen de un promediado de señales EEG, es evidente que si respuestas cerebrales alteradas por interferen-

cias son usadas para descubrir las ondas que caracterizan un potencial evocado, es muy probable que lo que se esté leyendo esté enmascarando los datos de interés, haciendo imposible hacer un diagnóstico fiable desde el punto de vista clínico.

En conclusión, la causa de un mal diagnóstico a partir del análisis de un potencial evocado puede ser una señal EEG con artefactos e interferencias, por lo que si estas fuentes de ruido no existieran sería ideal. Sin embargo este escenario es utópico, por lo que el reto resultante es minimizar lo más posible el grado en que los artefactos afectan a la señal EEG, proveyendo así, datos confiables cuyo post-procesamiento para evidenciar potenciales evocados concluya en un diagnóstico adecuado.

Existen técnicas que se enfocan en eliminar artefactos de señales neurales, e.g., métodos de filtrado adaptativo, descomposición de fuentes y separación ciega de fuentes. Algunas de ellas, como lo es el método de regresión lineal, el método de corrección de EOG y el de filtrado adaptativo se apoyan en el uso del artefacto mismo como referencia para que al ser reconocido por el algoritmo o sistema, éste pueda ser sustraído. Esta manera de reducción es viable, sin embargo requiere de otro sistema de adquisición, como un electrooculógrafo o un electromiógrafo que añadido al sistema EEG puede resultar incómodo para el paciente, además de que en cuestiones económicas puede resultar perjudicial debido a que es necesaria la adquisición de otro sistema, es por eso que para solucionar este problema, estos métodos quedan descartados.

De acuerdo a Urigüen y García (2015), ICA domina con 45 % el campo sobre las otras técnicas para remover artefactos [4], por lo que se puede asumir que los resultados reportados han sido satisfactorios, a tal grado que se siguen haciendo trabajos al respecto siendo así un área dinámica.

La solución propuesta es minimizar los artefactos encontrados en registros EEG reproduciendo algunos algoritmos revisados en esta tesis con el propósito de obtener EP visuales que puedan ser fácilmente estudiados. Dentro de los tipos de técnicas que utilizan ICA se puede observar dominio por parte de la técnica de maximización de la información (InfoMax), identificación ciega de segundo orden (SOBI) y FastICA de manera que se realizará una comparación entre los

resultados de estos algoritmos proveyendo posteriormente un sistema computacional que pueda ser utilizado en registros adquiridos en el laboratorio de procesamiento de señales ofreciendo como resultado final registros de EEG y potenciales evocados que sean fiables y, por lo tanto, puedan ser utilizados para estudios e investigaciones.

1.2. Objetivos

1. Objetivo general.

- Implementar y evaluar algoritmos basados en la técnica de separación ciega de fuentes para la reducción de artefactos en señales electroencefalográficas.

2. Objetivos particulares

- Implementar los algoritmos basados en ICA: FastICA, InfoMax y SOBI en un ambiente computacional.
- Generar una señal EEG sintética y los artefactos ECG, EOG y EMG.
- Implementar los métodos para la evaluación cuantitativa de la calidad de separación de los algoritmos.
- Evaluar la capacidad de los algoritmos para rechazar artefactos sintéticos en una señal EEG sintética.
- Determinar las características adecuadas para el uso práctico de cada algoritmo.
- Probar la separación de manera visual de registros EEG reales.
- Configurar una interfaz gráfica de uso sencillo para separación de señales usando las técnicas de FastICA, InfoMax y SOBI.

1.3. Estructura de la tesis

Esta tesis está compuesta por 5 capítulos; en el primer capítulo se trata la importancia clínica de la señal EEG y de los potenciales evocados contenidos en el mismo registro cerebral, sustentando así y con enfoque práctico la realización de este trabajo. Se exponen los objetivos y el problema específico a resolver.

En el segundo capítulo se mencionan los antecedentes informativos detrás de este trabajo. El capítulo se enfoca en un inicio en el origen, registro y uso clínico del EEG. Posteriormente se definen a los potenciales evocados, los tipos que existen y como se adquieren. Después se mencionan los tipos de artefactos que existen y las técnicas más comúnmente usadas para detectarlos y eliminarlos. Por último se describen los algoritmos propuestos en esta tesis para la reducción de ruido y artefactos basados en la técnica de separación ciega de fuentes: FastICA, InfoMax y SOBI.

El tercer capítulo describe la metodología usada para lograr los objetivos de esta tesis, comenzando por la codificación de los algoritmos de separación ciega de fuentes. Después se describe la generación de las señales sintéticas y finalmente se mencionan las métricas de evaluación y la metodología utilizada.

El cuarto capítulo ofrece las gráficas obtenidas de los resultados fruto de las pruebas hechas a los algoritmos, un análisis de estos datos y el desarrollo de la interfaz gráfica de usuario. El quinto capítulo contiene las conclusiones de este trabajo de tesis. Por último se presentan las referencias utilizadas en esta tesis, y dos apéndices donde se ofrecen los códigos de los algoritmos InfoMax y SOBI.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Electroencefalografía

El descubrimiento de la actividad eléctrica en el cerebro humano se remonta al siglo XIX, cuando Richard Caton describió cualitativamente sus experimentos en cerebros de animales no anestesiados, publicando sus resultados en 1875. Sin embargo, esta actividad fue analizada de una manera sistemática por el psiquiatra alemán Hans Berger, quién en 1924 fue el primero en registrar la actividad eléctrica en el cuero cabelludo humano, y en 1929 publicó sus resultados y llamó al registro electroencefalograma [5, 6].

La electroencefalografía es la técnica que se ocupa de la detección, análisis e interpretación del electroencefalograma (EEG), el cual es un registro de la actividad eléctrica generada por la acción cooperativa de las células piramidales del cerebro, más precisamente, es el curso temporal de potenciales de campo extracelulares generados por su acción sincronizada. El EEG puede ser medido por medio de electrodos colocados sobre el cuero cabelludo o directamente sobre la corteza cerebral, en este caso se le llama electrocorticograma (ECoG). La palabra electroencefalografía proviene del griego *enkephalo* (cerebro) y *graphein* (escribir). Esta técnica distingue dos distintos tipos de EEGs, cuando el registro se genera sin la presencia de algún estímulo entonces se denomina **EEG espontáneo** y a aquel que, al contrario, es generado como una respuesta a un estímulo interno o externo se le llama **potencial relacionado a eventos** (ERP, por sus siglas en inglés), originalmente llamado potencial evocado [5]-[7].

2.1.1. Electroencefalograma (EEG)

2.1.1.1. Origen del electroencefalograma

En el cerebro existen dos tipos de células, las células gliales y las neuronas (figura 2.1). Las neuronas reciben estímulos a través de las dendritas, procesan los estímulos en el soma o cuerpo neuronal y finalmente lo propagan a través del axón a otras neuronas interconectadas (o hacia una fibra muscular en caso de que la neurona sea del tipo motor). La región donde sucede esta comunicación es denominada sinapsis y en ella, el axón de una neurona, denominada neurona presináptica se une a las dendritas de otra neurona, denominada ahora neurona postsináptica. La neurona que genera un potencial de acción (neurona presináptica) transmite el impulso a la neurona siguiente (neurona postsináptica) provocando que la membrana postsináptica sea más susceptible o menos susceptible a la estimulación externa, haciendo más fácil o complicado, para la neurona postsináptica, alcanzar un potencial de acción (Figura 2.2). La actividad de las neuronas se manifiesta generando potenciales de acción llamados potenciales postsinápticos. Esta actividad se describe brevemente a continuación: una célula en reposo, en este caso la neurona, mantiene una diferencia de potencial (del interior de la célula con respecto al exterior) de aproximadamente -80 mV. Cuando la célula es excitada la diferencia de potencial comienza a hacerse más positiva debido a un intercambio iónico entre el medio intracelular y el extracelular; cuando este voltaje supera el denominado umbral o nivel de disparo (-55 mV) la célula se despolariza, alcanzando momentáneamente un voltaje de $+30$ mV para posteriormente regresar a su potencial de reposo [5]-[8].

Los potenciales postsinápticos están relacionados con el fenómeno que ocurre en la denominada membrana postsináptica. Cuando una neurona desencadena un potencial de acción, es secretado un químico llamado mediador o neurotransmisor que causa un cambio en la permeabilidad de la membrana post-sináptica. Como resultado, estos iones que forman parte del mediador atraviesan la membrana y se crea una diferencia de potencial a través de la membrana (Figura 2.2). Si este transmisor es del tipo excitatorio, la negatividad de carga dentro de la neurona disminuye, por lo que la posibilidad de que ésta genere un potencial de acción es más alta debido a que ahora se requiere un estímulo de menor magnitud para alcanzar el umbral. Por el contrario, si el transmi-

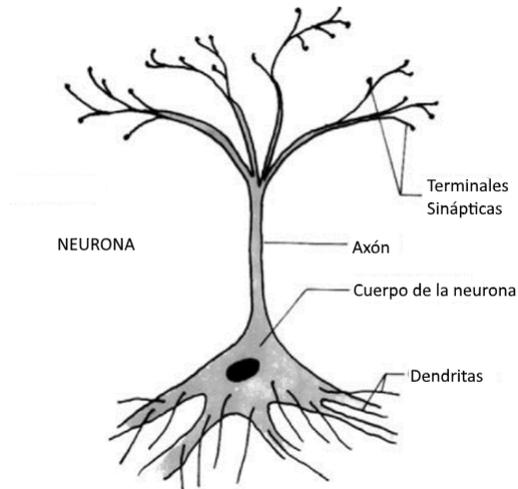


Figura 2.1: Esquema general de una neurona. Figura tomada de [5].

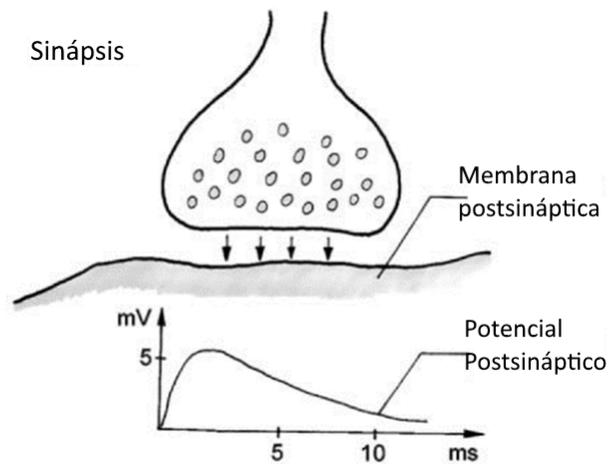


Figura 2.2: Sinapsis y polarización de la membrana post-sináptica. Figura tomada de [5].

sor es de tipo inhibitor, incrementa la negatividad en la membrana postsináptica haciendo más difícil alcanzar el nivel de disparo; debido a lo anterior, la actividad eléctrica de las neuronas genera corrientes a lo largo de la membrana celular en los espacios intra y extracelulares [5].

Existen distintos tipos de neuronas; las neuronas piramidales, encontradas principalmente dentro de las capas del córtex cerebral, cuentan con la característica de estar ordenadas de forma paralela y de ser capaces de sincronizarse a causa de los potenciales postsinápticos. De manera individual, la contribución de los potenciales de acción de una neurona, para efectos de registro superficial, es despreciable. Sin embargo la suma sincronizada de los potenciales postsinápticos generados en las neuronas piramidales y orden de las mismas en el córtex puede ser detectada en el cuero cabelludo, siendo el origen de la señal EEG [5].

2.1.1.2. Registro de electroencefalograma y sistema 10-20

El EEG usualmente es registrado por medio de electrodos colocados en el cuero cabelludo. Los sensores pueden asegurarse por medio de algún adhesivo o estar dentro de una gorra de manera que el contacto y la posición de estos sean exactos. El conocimiento de la posición exacta en la cabeza para cada electrodo es muy importante tanto para la interpretación de un solo registro como para la comparación de resultados. El sistema de posicionamiento de electrodos 10-20 establece la colocación de 19 electrodos EEG más dos electrodos colocados como referencia en los lóbulos de las orejas, relacionados a marcadores anatómicos específicos de manera que entre 10% y 20% de la distancia entre ellos sea utilizado como un intervalo (Figura 2.3) [5].

El EEG, al igual que se adquieren los demás biopotenciales, es una medida de la diferencia de potencial entre dos puntos de interés de un área específica. Dentro de modos de registro EEG, existen dos tipos, el registro unipotencial y el registro bipolar; en el registro unipotencial, también llamado configuración de referencia, la diferencia de potencial se mide en relación a un sólo electrodo (llamado electrodo de referencia) para todas las derivaciones. Este electrodo de referencia es usualmente colocado en el lóbulo de la oreja, nariz, mastoides, barbilla, cuello o centro del cuero cabelludo dado a que no existe algún punto en particular estandarizado para la colocación de éste [5]. En la configuración bipolar, también llamada de montaje, cada

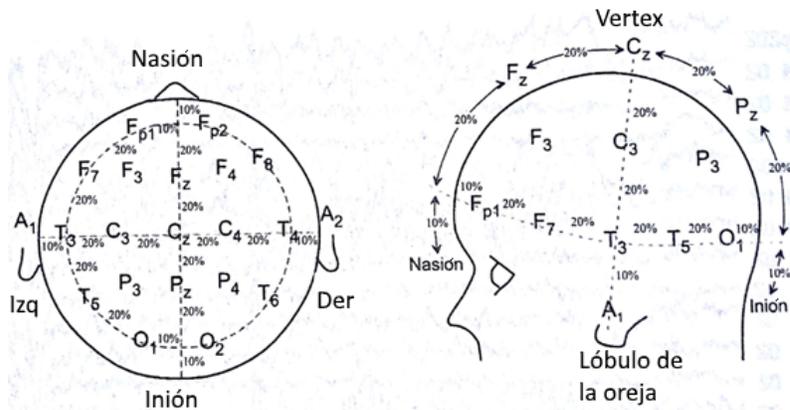


Figura 2.3: Colocación de los electrodos en la cabeza de acuerdo al sistema internacional 10-20. Las letras en conjunto con los números indican la posición específica de cada electrodo. Las letras F, P, C, T, O denotan Frontal, Parietal, Centra, Temporal y Occipital respectivamente. Los números pares indican si la localización es en el lado derecho del sujeto, mientras que los números impares si es del lado izquierdo. El centro puede ser indicado con un “0” o una “z.” Imagen tomada de [1].

canal registra la diferencia de potencial entre dos electrodos particulares en el cuero cabelludo. Los datos registrados como configuración referencial pueden transformarse a cualquier montaje bipolar, por razones de despliegado o posterior procesamiento. El montaje común de referencia promedio puede obtenerse sustrayendo de cada canal la actividad de todas las derivaciones restantes.

El EEG usualmente es digitalizado usando un convertidor analógico a digital con una frecuencia de muestreo que va desde los 100 Hz para EEG espontáneo y varios cientos de Hz para ERP hasta varios kHz para registrar ERPs de campo lejano y de latencia corta. Un diagrama de un sistema de adquisición EEG puede ser observado en la figura 2.4; el amplificador diferencial es el encargado de tomar la señal directamente de la zona de interés (cuero cabelludo en este caso). El filtro pasa bajas evita que frecuencias de alta frecuencia contaminen el EEG. El filtro pasa altas evita que señales de baja frecuencia se introduzcan a la señal EEG y amplificadores proporcionan ganancia a la señal para que su visualización y presentación de manera digital o analógica (osciloscopio o registro en papel) sea posible. Antes de digitalizar la señal, es necesaria una etapa de filtrado que se encargará de evitar que interferencias fuera del ancho de banda de la señal contaminen el registro [5].

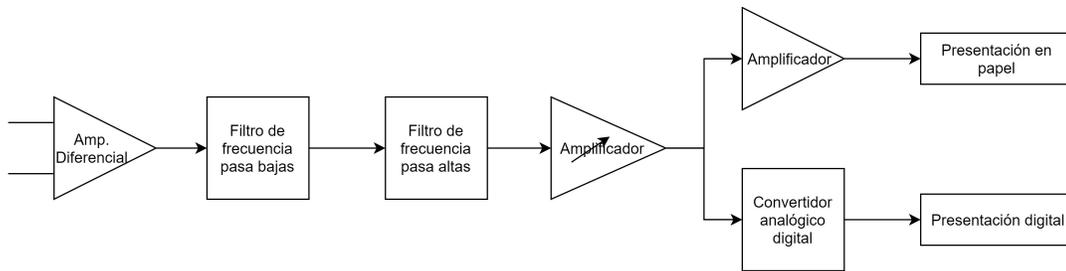


Figura 2.4: Diagrama de bloques de un sistema de adquisición EEG. Imagen tomada de [5].

2.1.1.3. La señal EEG

En registros tomados desde el cuero cabelludo usando electrodos Ag/AgCl la señal EEG tiene una amplitud que varía desde algunos cuantos μV hasta aproximadamente $100 \mu V$ y un ancho de banda de 0.5 Hz a 30-40 Hz [1]. En lo que se refiere a propiedades de la señal, en referencia [9] Klonowski ofrece una interesante explicación acerca de la señal EEG; en su artículo menciona que el cerebro humano no actúa como un sistema completamente **determinístico** porque entonces no sería capaz de inventar algo nuevo, y tampoco actúa de manera completamente **estocástica** puesto que entonces no sería capaz de aprender y repetir exactamente cualquier secuencia de pensamientos. También explica que, en general, las bioseñales son **3N - No-estacionarias, No-lineales y ruidosas (Noisy)**. La no-estacionariedad quiere decir que las características estadísticas de la señal cambian con el tiempo. Los resultados de los experimentos hechos por Cohen y Sances (1977) sugirieron que el EEG puede ser considerado estacionario en épocas de hasta 12 s; en cambio, en el 2005 se reportó que la actividad del cerebro es principalmente no-estacionaria, pero que cuenta con segmentos cuasiestacionarios de 250 ms [9]. Otra característica importante del EEG es la distribución de sus datos, la cual es de tipo Gaussiana [1].

Una de las características más importantes de la actividad cerebral reside en que su frecuencia de trabajo depende del estado mental del individuo a quien se le practique el estudio. Estas ondas de diferente frecuencia forman los denominados ritmos electroencefalográficos; los cuales, debido a su morfología, convencionalmente se clasifican en cinco diferentes bandas de frecuencia; cada banda es característica de algún tipo de actividad y/o estado mental, es decir, una persona “normal” en estado de vigilia presenta un registro EEG diferente al que presentaría en estado de sueño. La interpretación de estas bandas en términos de normal y anormal es relativa y depende

de la edad y estado mental del sujeto. A continuación se describe brevemente cada una de las bandas mencionadas. La frecuencia característica de cada una se resume en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Los ritmos del EEG.

Tipo de ritmo EEG	Rango de frecuencia [Hz]
Δ (delta)	0.5 - 4.0
θ (Teta)	4.0 - 8.0
α (alfa)	8.0 - 13.0
β (beta)	13.0 - 30.0
γ (gama)	> 30.0

Δ Ritmo delta Es encontrado típicamente durante sueño profundo y tiene una larga amplitud. Usualmente no se observa en un adulto normal en vigilia, pero si se presenta en este estado, es indicativo de daño cerebral o enfermedad cerebral.

θ Ritmo teta Ocurre durante somnolencia y en ciertas etapas del sueño. Raramente ocurre en humanos adultos, pero cuando sucede normalmente es durante estrés emocional, periodos de decepción y frustración. En niños es más frecuente y se registra en las regiones parietal y temporal.

α Ritmo alfa Es el más prominente en sujetos normales quienes están relajados y despiertos con los ojos cerrados; la actividad se suprime si los ojos se abren. La amplitud de los ritmos tipo alfa es mayor en regiones frontales y parietales del cuero cabelludo.

β Ritmo beta Este ritmo es rápido y de baja amplitud, asociado con actividad en el córtex. Este ritmo beta puede ser observado en regiones frontales y centrales del cuero cabelludo.

γ Ritmo gama El ritmo gamma está relacionado a un estado activo de procesamiento de información.

La mayoría de los ritmos pueden persistir varios minutos, mientras otros ocurren solamente por algunos segundos, como el ritmo Gamma. Durante los registros es posible ver que un solo tipo de ritmo no está siempre presente, sino que una señal irregular arrítmica puede prevalecer durante largos periodos de tiempo [5, 6, 1].

2.1.1.4. Uso clínico del electroencefalograma

La base científica para el uso de EEG como una herramienta para estudiar la función y disfunción cerebral se reduce a las siguientes cualidades neurobiológicas:

Relación con el metabolismo cerebral Dado que la actividad de las neuronas está ligada directamente al metabolismo cerebral, el EEG puede ser observado como un resultado de la actividad sináptica y actividad celular de las neuronas piramidales, por lo que es un fenómeno que refleja complicadas influencias intracelulares, intraneurales, y neuro-gliales.

Sensibilidad a las causas más comunes de lesión cerebral Las causas más comunes de lesión cerebral son hipoxia e isquemia. Estas enfermedades causan daño severo a las capas corticales tres y cinco y con ello a las neuronas piramidales que allí se encuentran. Esta pérdida o disminución de actividad neuronal se hace evidente en los registros EEG.

Correlación con topografía cerebral El sistema de posicionamiento de electrodos para registro de EEG, por ejemplo 10-20, establece una relación consistente entre la posición de los electrodos y la topografía cerebral presente. Por lo tanto cambios que se presenten en el EEG registrados por estos electrodos de las diferentes áreas del cráneo refleja una relación topográfica con la estructura cerebral y permite hacer inferencias útiles acerca de la localización de alguna enfermedad a partir de las anomalías observadas en el EEG y detectadas en el cuero cabelludo.

Habilidad para detectar disfunciones en etapa reversible El EEG permite predecir una recuperación ante disfunciones cerebrales como isquemia cerebral después de un paro cardiaco. Estudios de varios autores, los cuales pueden encontrarse en referencia [3] aclaran que el EEG permite la habilidad de detectar alguna lesión en etapa reversible y se demuestra que registros de EEG, en diferentes etapas durante recuperación, permite la predicción de si un paciente tendrá un resultado favorable. También, la misma referencia menciona otro estudio que mostró qué parámetros obtenidos de registros EEG pudieran funcionar como indicador para el resultado después de una encefalopatía por asfixia.

Además de lo anterior, el uso del EEG provee tres ventajas principales: (1) es una técnica relativamente barata en términos económicos, (2) es una técnica no invasiva y (3) cuenta con una resolución temporal muy alta [3].

2.2. Potenciales evocados (EP)

Como se mencionó anteriormente, existen dos tipos de EEG, el EEG espontáneo y los ERP; de estos últimos surge un tipo de respuesta que es generada por medio de estímulos externos, éstos son los EP. Los EP ocurren como una respuesta eléctrica del cerebro o del tronco cerebral a diferentes tipos de estimulación del tejido nervioso: estimulación visual, auditiva y somatosensorial son las más usadas. Esta técnica de registro puede proveer información acerca de anomalías en de las vías sensoriales y desórdenes relacionados al lenguaje y habla.

Estos potenciales usualmente se manifiestan como formas de onda transitorias cuya morfología depende del tipo, fuerza del estímulo y la posición de los electrodos en el cuero cabelludo. El estado mental del sujeto, modelado por la atención, vigilia, y expectativa, también alteran la morfología de la onda.

Los potenciales evocados, por sí solos, presentan un rango de amplitud de $0.1 \mu\text{V}$ a $10 \mu\text{V}$ y por lo tanto están escondidos en la actividad EEG presente (la cual tiene una amplitud aproximada de $10 \mu\text{V}$ a $100 \mu\text{V}$) por lo que, en este caso, el EEG es visto como ruido. Afortunadamente, un EP es relativamente sencillo de localizar dado que ocurre después de un intervalo de tiempo relacionado al momento de la presentación del estímulo, mientras que la actividad EEG y ruido no-neural ocurre de una manera más aleatoria [1].

Con un nivel de ruido suficientemente bajo, el retraso de tiempo y la amplitud de cada onda constituyente de un EP se pueden estimar con exactitud e interpretarlas en términos clínicos adecuados. La figura 2.5 muestra distintos tipos del patrón de interés que se obtiene al registrar EP, se puede apreciar que las características son diferentes entre los mismos [1].

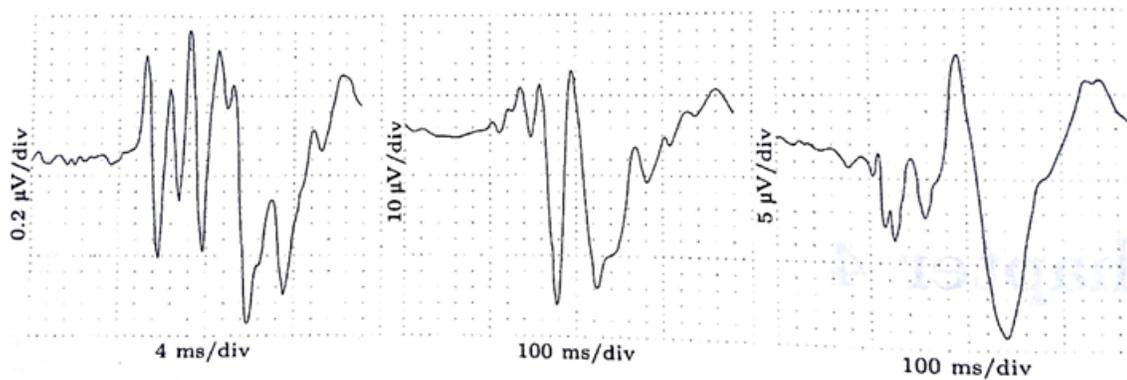


Figura 2.5: Tres distintas morfologías de potenciales evocados. La duración amplitud y forma de onda difieren considerablemente de potencial a potencial. Imagen tomada de [1].

2.2.1. Registro de los potenciales evocados

Los potenciales evocados son considerados como una actividad sincronizada de un grupo de neuronas que se suma a la señal EEG. Así, los potenciales evocados son cambios en la actividad EEG producidos a causa de un estímulo. Son sincronizados con el tiempo de este estímulo y tienen un patrón característico de respuesta que es más o menos reproducible bajo condiciones de experimentación similares.

Cada onda que forme un potencial se nombra e identifica por su polaridad y latencia, por ejemplo, P100 significa una deflexión positiva (la letra P significa que es Positiva) que ocurre 100 ms después del estímulo. Para registrar este estímulo se hace de la misma manera que se registra un EEG. Sin embargo para una mejor visualización de las ondas mencionadas anteriormente un promediado de la respuesta de los electrodos utilizados se lleva a cabo, resultando una señal más limpia como se puede mostrar en la figura 2.6. Individualmente en cada canal es muy difícil identificar las ondas características, pero la respuesta promedio de estos canales deja claramente visible la ubicación de los patrones de interés [3].

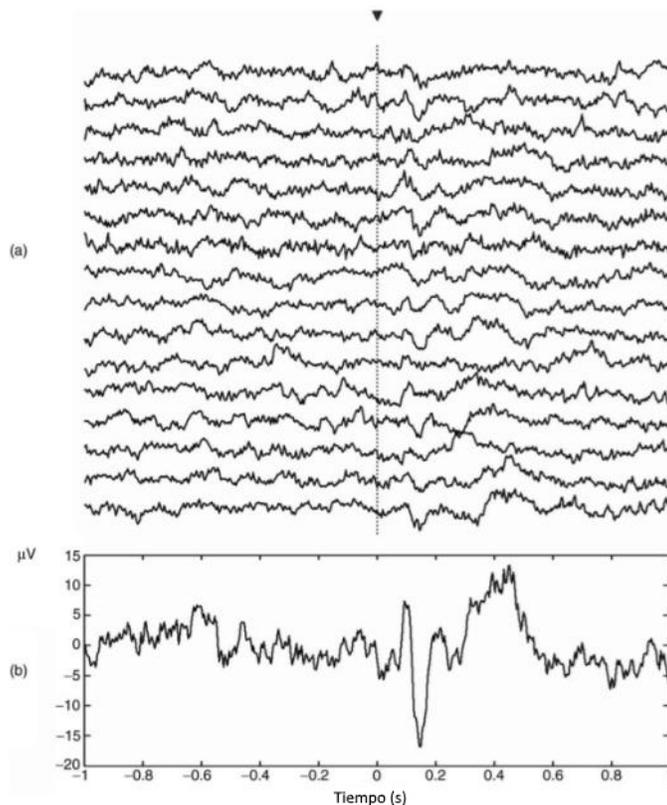


Figura 2.6: (a) Dieciséis canales de un sujeto promedio a un potencial evocado y (b) la respuesta promediada. La línea punteada indica el inicio del estímulo, nótese que en (a) no son fácilmente distinguible las ondas características, sin embargo al promediar la respuesta de los electrodos las ondas buscadas son evidentes. Imagen tomada de [3].

2.2.2. Tipos de potenciales evocados

Los potenciales evocados se clasifican en dos tipos: endógenos y exógenos. Estos últimos se deben gracias a las características físicas del estímulo externo, tal como la intensidad, la duración, frecuencia, etc. Los EP endógenos son causados por procesos internos del cerebro y responden al significado del estímulo [3]. Comúnmente existen tres modalidades de estimulación para desencadenar un potencial evocado: visual, auditivo y somatosensorial.

Potenciales evocados visuales Los potenciales evocados visuales comprenden un ancho de banda desde 1 Hz hasta aproximadamente 300 Hz [1]. Son usualmente resultado de un parpadeo de luz o patrones visuales como cambio de colores en un tablero de ajedrez (Figura 2.7).

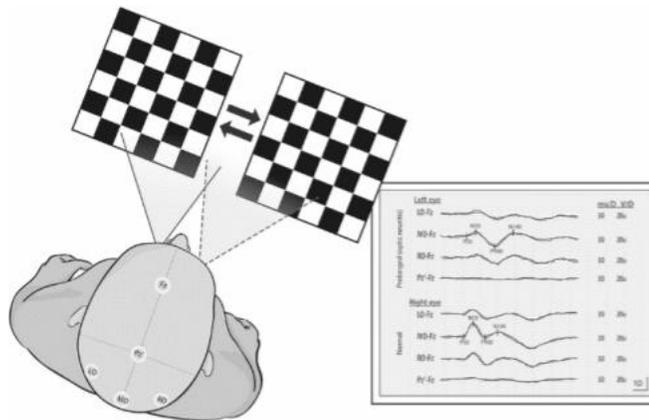


Figura 2.7: Ejemplo de un procedimiento para suscitar potenciales evocados del tipo visuales. En este caso en particular al sujeto se le presenta un tablero de ajedrez cuyo color cambia en determinado momento (Imagen tomada de [10]).

Potenciales evocados auditivos Los potenciales evocados auditivos presentan un ancho de banda de 500 Hz a 1.5 kHz usualmente son iniciados por tonos o clicks. De acuerdo a su latencia en la respuesta son subdivididos en latencia temprana, media o tardía [1, 3].

EP de latencia corta comprenden dos aspectos: el primero es el electrococleograma, que refleja la respuesta en los primeros 2.5 ms de la cóclea y el nervio auditivo, y el segundo pertenece a la respuesta del tallo cerebral en los primeros 12 ms después del estímulo y son registrados desde el vertex.

EP de latencia media Eson una serie de ondas positivas y negativas que ocurren entre los 12 y 50 ms después del estímulo. Las aplicaciones clínicas para este tipo de EP auditivos es limitada dado que la localización de las fuentes que lo generan son aún controversiales.

EP de latencia tardía ocurren entre 50 y 200 ms después del estímulo y consiste de cuatro picos etiquetados P50, N100, P150 y N200 de acuerdo a su polaridad y latencia.

Algunos estímulos auditivos pueden suscitar también potenciales con latencias mayores a los 200 ms. sin embargo estas son respuestas en el contexto del estímulo en lugar de representar las características físicas.

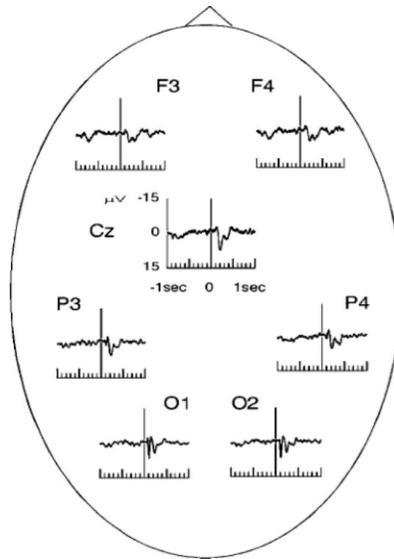


Figura 2.8: Respuesta visual promedio de 10 sujetos sometidos a un cambio de color (blanco/negro) del patrón de las casillas de un tablero de ajedrez (Figura 2.7). Se puede observar una deflexión positiva a los 100 ms (P100) seguida de una negativa a los 200 ms (N200). Estos picos se ven mejor definidos por los electrodos colocados en el área occipital, los cuales son los más cercanos al área visual primaria del cerebro. Imagen tomada de [3].

Potenciales evocados somatosensoriales Los potenciales evocados somatosensoriales tienen su frecuencia de trabajo arriba de los 100 Hz [1]. Son obtenidos aplicando corrientes de corta duración a los nervios periféricos sensoriales y motores y son principalmente usados para identificar lesiones en las vías somatosensoriales [3].

Como ejemplo de la técnica usada para adquirir un registro visual de EPs, se muestra la figura 2.8, que ilustra las ondas registradas en distintas zonas del cuero cabelludo. El método más común para suscitar EPs es usando el denominado *oddball paradigm* (paradigma extraño). Durante esta prueba dos estímulos diferentes se distribuyen pseudo-aleatoriamente en una secuencia, uno de ellos aparece frecuentemente mientras que el otro, siendo un estímulo objetivo, aparece con menor frecuencia y de manera inesperada. Ambos estímulos pueden ser tonos de diferentes frecuencias, figuras de diferentes colores, etc. A los sujetos en estudio se les pide que cuenten el número de objetivos que se presentan durante la sesión o que presionen un botón cada que el estímulo aparezca.

La figura 2.9 muestra un promedio de los potenciales evocados visuales de 10 personas sometidos

das a la prueba de *oddball paradigm*. La figura muestra las respuestas a (a) un objetivo ausente y a (b) un objetivo presente. Puede ser apreciado, durante las pruebas con objetivo presente surge una componente positiva que ocurre entre los 400 ms y 500 ms y que se denomina P300, esta onda puede ser más fácilmente apreciable en los canales correspondientes a los electrodos posicionados en la parte posterior de la cabeza, ya que siendo un EP visual, la respuesta se genera en donde se encuentra la zona visual del cerebro.

Mientras la localización de la onda P300 en el cuero cabelludo es bien conocida, la localización de las fuentes del P300 en el cerebro es aún controversial. Dado que es una tarea dependiente y tiene una latencia relativamente larga es tradicionalmente relacionada a procesos cognitivos tales como reconocimiento, toma de decisiones, atención y memoria.

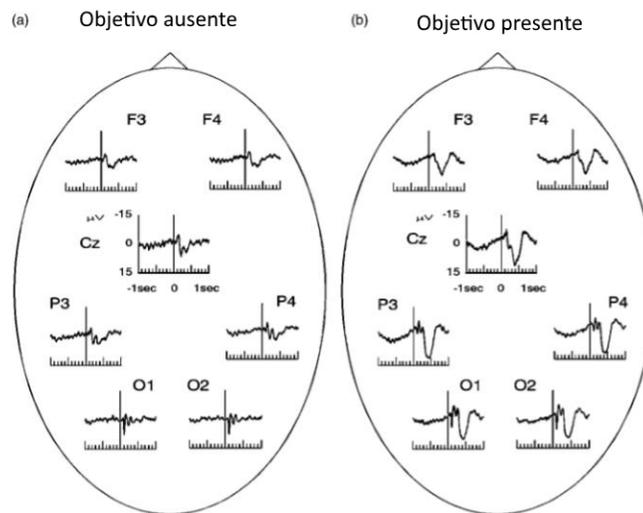


Figura 2.9: (a) Registro de un EP con objetivo ausente y (b) Registro de un EP con objetivo presente. Imagen tomada de [3].

2.2.3. Aplicación clínica de los potenciales evocados

Siendo una respuesta del cerebro a estímulos externos, los EPs tienen importancia clínica para la evaluación de sujetos. Algunos objetivos clínicos de los EP de acuerdo a [2] se mencionan a continuación.

1. Establecer evidencia objetiva de una anomalía cuando señales o síntomas son dudosos.
2. Buscar lesiones clínicas silenciosas.

3. Definir un nivel anatómico de discapacidad a lo largo de una vía.
4. Proporcionar evidencia de una categoría general de una patología.
5. Monitorear cambios objetivos en el estado general del paciente a lo largo de cierto periodo.

2.3. Artefactos

Los artefactos son señales no deseadas que pueden introducir cambios en las medidas y afectar la señal de interés. Desafortunadamente uno de los principales problemas en la adquisición y análisis de EEG es su baja relación/señal ruido, así la señal EEG es muy susceptible a ser contaminada con artefactos debido a varios factores fisiológicos ajenos a la actividad cerebral, como la señal cardíaca o muscular [4, 3]. Durante este apartado se describen los tipos de artefactos que existen y aquellos más comunes durante la adquisición de señales EEG así como su clasificación.

2.3.1. Fuentes de artefactos

Debido a que los artefactos son señales interferentes, entonces su origen debe provenir de una fuente que emana dicha energía; estas fuentes se deben a tres factores principales [11]:

1. **Factores ambientales.** La señal eléctrica de 50/60 Hz puede introducirse además de sus armónicos, interferencia óptica o acústica, acoplamiento electromagnético del planeta, etc.
2. **Factores experimentales.** Como lo pueden ser alteración en la posición del electrodo y el movimiento de los cables de conexión.
3. **Factores fisiológicos.** Interferencias provenientes del cuerpo humano; i.e. EOG, ECG, EMG, BCG (balistocardiograma), etc.

La figura 2.10 muestra un diagrama a bloques de un circuito básico de adquisición de biopotenciales donde se aprecia como se suman algunos artefactos al sistema provocando su posterior visualización.

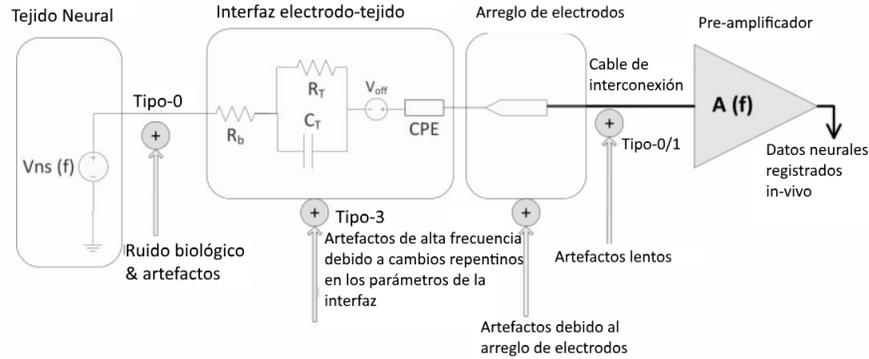


Figura 2.10: Esquema general del origen de los diferentes tipos de artefactos y en qué etapa de la instrumentación se suma cada uno. Imagen tomada de [11].

2.3.2. Clasificación de artefactos

Los artefactos pueden ser clasificados dentro de dos categorías, dependiendo de dónde se presenten al obtener un registro: locales y globales [11].

1. **Artefactos locales.** Son aquellos que aparecen solamente en un solo canal de registro.
2. **Artefactos globales** se presentan en todos los canales y en la misma ventana de tiempo.

Debido a que la señal EEG es el fenómeno de interés para este trabajo, a continuación se mencionan los artefactos más comunes en el campo de la electroencefalografía. Estas interferencias aquí pueden ser del tipo interno y externo en relación al cuerpo humano [11].

1. Internos

- **Artefactos oculares.** El globo ocular actúa como un dipolo eléctrico y por lo tanto cualquier movimiento de éste genera artefactos de larga amplitud (EOG) en los registros de EEG. Artefactos oculares incluyen parpadeo, movimiento vertical y horizontal del ojo y movimientos sacádicos del ojo.
- **Artefactos musculares.** Uno de los más prominentes artefactos fisiológicos proviene de la actividad muscular del sujeto (EMG). Usualmente los artefactos musculares se encuentran en un rango de 20 Hz a 40 Hz y se producen por actividades como masticar, deglutir, tragar, aspirar por la nariz, hablar, contracción del cuero cabelludo, levantar las cejas, etc.

- Artefactos cardiacos. Estos artefactos se deben al campo electromagnético producido por el corazón y es de dos tipos: ECG y pulso cardiaco.
- Artefactos por respiración. Este tipo se origina por el movimiento de algún electrodo a causa del mismo movimiento del cuerpo durante la inhalación y exhalación.
- Artefactos por sudor: Se originan por los cambios en la concentración del electrolito del electrodo debido a la secreción de sudor en el cuero cabelludo.

2. Externos

- Artefactos por movimiento. Causados por movimientos del paciente, especialmente en un sistema de EEG ambulatorio. Estos artefactos usualmente tienen amplitudes extremadamente altas, de modo que puede saturar los registros. Movimiento de cabeza, de cuerpo, de extremidades, temblor, caminar, correr, usar la computadora entre otros, son actividades diarias que causan esta interferencia.
- Artefactos ambientales:
 - Interferencias. Este tipo de artefactos se debe a las interferencias provenientes de dispositivos electrónicos y eléctricos en la cercanía que producen ondas electromagnéticas. También cualquier sonido e interferencia óptica puede ser registrada por los electrodos de interés.
 - Voltajes principales. Uno de los artefactos más comunes cuando se habla de registro de señales biomédicas, el voltaje de línea de 50/60 Hz y sus armónicos.
 - Falso contacto de electrodos: La pérdida del contacto de un electrodo en el cuero cabelludo puede llevar a cambios de impedancia en la interfaz electrodo-piel y resultar en un artefacto prolongado de tipo espiga.
 - Pérdida de un electrodo y movimiento: Al perderse un electrodo se produce un cambio repentino en la interfaz electrodo-piel y como resultado se presenta una onda de alta amplitud y con forma de onda afilada. El movimiento de electrodos ocurre cuando éstos se mueven con respecto al cuero cabelludo y produce deflexiones de alta amplitud, generalmente en rangos bajos de frecuencia, de 1 Hz a 10 Hz.

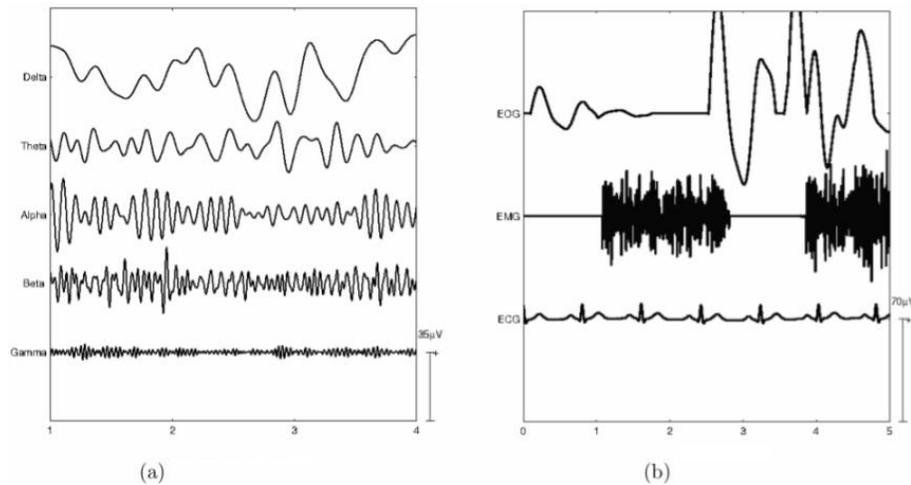


Figura 2.11: Comparación de (a) las ondas objetivo en un registro EEG y (b) los artefactos más característicos en el EEG. Imagen tomada de [11].

La tabla 2.11 muestra los tipos de artefactos.

Debido a las características anteriormente mencionadas, la mayoría de los artefactos son fácilmente distinguibles a la vista. Pues su gran amplitud deforma la señal de interés de una manera inesperada. La figura 2.11 muestra un ejemplo de los artefactos fisiológicos comúnmente encontrados en el EEG y se compara con los cinco ritmos característicos de EEG. Nótese la diferencia de amplitud entre ellos y de que su traslape puede deformar completamente cualquiera de los ritmos EEG.

El EEG es muy susceptible a interferencias aún y cuando en su instrumentación básica se emplea un filtro pasa banda debido a que comparte su ancho de banda con los artefactos, por lo que todas las señales que estén en el rango de 0.5 a 40 Hz serán detectadas y procesadas por el sistema de adquisición presentándolo a la salida. Además, para registrar EP el sistema de EEG debe adquirir frecuencias arriba de 100 Hz por lo que es aún más propenso a tener ruido e interferencias. Para aclarar visualmente este fenómeno, se presenta una gráfica del ancho de banda de los artefactos mostrados en la figura 2.11 y se ilustran en la figura 2.12.

		Fisiológicos/Internos		Extra-fisiológicos/Externos		
Ocular	Cardiaco	Muscular	Otros	Instrumentación	Interferencia	Movimiento
Parpadear Movimiento de ojos sueño REM	EKG	Masticar Deglutir Respirar Contracción del cuero cabelludo	Movimiento de lengua Respirar	Movimiento de electrodo o pérdida de contacto Movimiento de cables Mala conexión a tierra	Electrica Óptico Ondas EM	Movimiento de extremidades, cabeza o del cuerpo Otros movimientos

Tabla 2.2: Tipos más comunes de artefactos en el EEG; EOG, EMG y EEG comparados con los ritmos provenientes del cerebro. Tomada de [4].

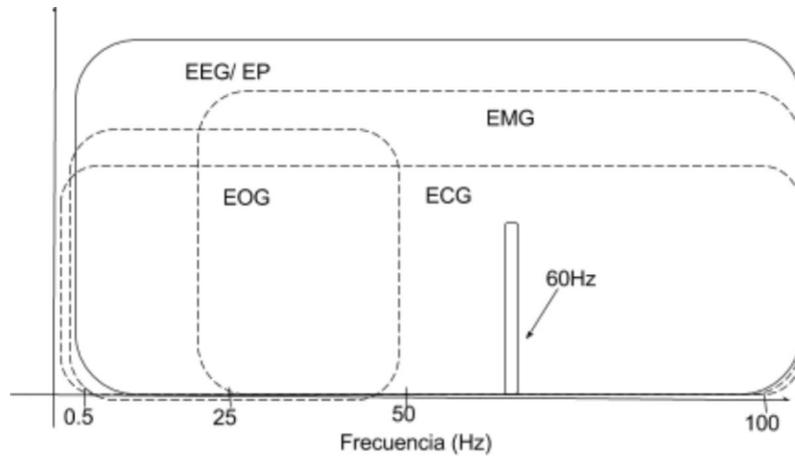


Figura 2.12: Ancho de banda de los artefactos fisiológicos encontrados en la figura 2.11. Nótese que debido al ancho de banda que presentan los EP también los 60 Hz de la línea eléctrica comparten frecuencias con el registro EEG.

2.3.3. Propiedades de los artefactos

Los artefactos tienen dos propiedades que hace que en ocasiones sea posible distinguirlos a simple vista [11], algunas de estas propiedades son:

1. Usualmente son de gran magnitud y/o transiciones abruptas (forman un pico) comparadas con los datos neurales de interés.
2. El rango de frecuencia para un artefacto puede variar de muy baja frecuencia (e.g. artefacto por movimiento) a alta frecuencia (e.g. artefacto por carga residual en electrodos), sugiriendo que el espectro de los artefactos se traslapa con la señal de interés.

2.3.4. Técnicas de reducción de artefactos

La reducción y detección de artefactos es uno de los retos más comunes para aplicaciones de procesamiento de señales EEG. La variedad de los artefactos y su traslape con la señal de interés en dominios temporal y frecuencial (Figura 2.12) dificulta su identificación con técnicas simples de pre-procesamiento de señales. Por lo tanto el uso filtrado simple o umbral de amplitud para remover artefactos comúnmente resulta pobre en desempeño. Muchos intentos se han hecho para desarrollar métodos adecuados para la detección y eliminación de artefactos con la ayuda de los avances que se tienen en técnicas de procesamiento avanzado así como algoritmos

durante los últimos 15 años [11].

Matemáticamente, una aproximación típica para la eliminación de artefactos en el EEG es asumir que la actividad cerebral medida $x(n)$ es la suma de la actividad cerebral $s(n)$ y el ruido $v(n)$, así:

$$x(n) = s(n) + v(n) \quad (2.1)$$

De modo que para obtener la señal de interés, sólo hace falta restarle el ruido a la señal observada. Otro modelo, y el cual es el modelo más ampliamente usado, asume que las señales EEG medidas son una mezcla lineal de formas de ondas eléctricas originadas de múltiples fuentes en el cerebro y los artefactos que se propagan instantáneamente al cuero cabelludo. Es una generalización del modelo básico aditivo (2.1) y proviene de la formulación del problema de EEG que permite calcular la actividad resultante en el cuero cabelludo resultando de la actividad de las fuentes neuronales y fisiológicas. El modelo se describe matemáticamente:

$$X = AS + V \quad (2.2)$$

Donde X es la matriz de datos observados EEG, i.e. Lo que se obtiene a través de los electrodos; A es una matriz de mezcla (*mixing matrix*) desconocida de dimensiones $m \times n$; S es una matriz de fuentes desconocidas cuyo contenido representa ambos fenómenos de interés; las fuentes del cerebro y los artefactos y V es una matriz de ruido gaussiano. A continuación se presenta una rápida revisión por las metodologías más utilizadas para eliminar o reducir artefactos en el EEG [4, 11].

2.3.4.1. Métodos de regresión lineal

Los métodos de regresión asumen que cada canal EEG es la suma de una fuente de señal no ruidosa y una parte de la fuente de artefacto que está disponible en un canal de referencia. Así, el objetivo de la regresión es estimar el valor óptimo para el factor que representa esta fracción de propagación. En regresiones lineales múltiples la señal medida en cada electrodo se ve influenciada por una o más formas de onda de referencias, por ejemplo artefactos oculares horizontales, verticales y radiales. Este tipo de métodos ha sido reemplazado por algoritmos más

sofisticados debido a su necesidad de uno o más canales de referencia, además esta desventaja limita la técnica a que su aplicación se limite a remover principalmente artefactos ECG y EOG.

2.3.4.2. Método de corrección de electrooculograma (EOG)

Método de corrección de EOG: en esta técnica de sustracción se asume que el EEG medido es una combinación lineal de la señal de interés y el artefacto ocular y están basados en una regresión lineal. La regresión calcula la porción de una o varias referencias que están presentes en cada canal particular de EEG. La corrección es luego realizada sustrayendo la porción bajo regresión de la forma de onda EOG de cada canal, resultando en una estimación de mediciones en el cuero cabelludo libres del artefacto.

2.3.4.3. Métodos de filtrado

Los métodos de filtrado simples normalmente no son una opción para remover artefactos de registros EEG, a excepción de artefactos de banda-estrecha, como el ruido de la línea eléctrica (50/60 Hz) que puede ser eliminado mediante un filtro rechaza-banda. Por lo tanto, numerosas técnicas para remover artefactos intentan adaptar los parámetros del filtro para minimizar el error cuadrático medio entre el EEG medido y la señal original deseada.

Filtros adaptativos Asume que la señal y los artefactos no están correlacionados. El filtro genera una señal correlacionada con el artefacto usando una señal de referencia y posteriormente el estimado se sustrae del EEG adquirido (Figura 2.13). La clave para un algoritmo que funcione adecuadamente es la selección del artefacto de referencia y puede ser obtenido de los registros EOG para remover el movimiento de los ojos o parpadeos, o de registros EMG para reducir artefactos musculares.

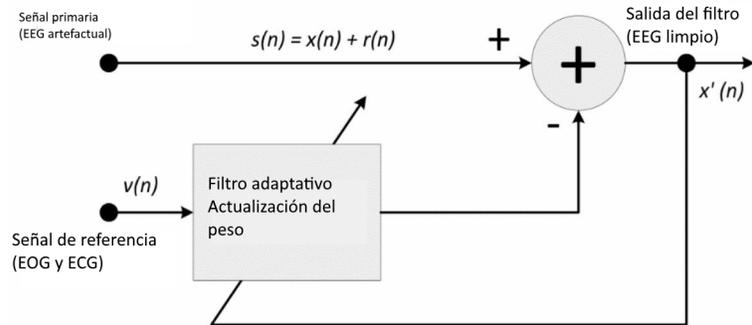


Figura 2.13: Esquema general del funcionamiento de un filtro adaptativo. Imagen tomada de [11].

Filtro de Wiener Este método se basa en la aproximación estadística que produce un filtro lineal e invariante en el tiempo y que minimiza el error cuadrático medio entre la señal deseada y su estimado. Esta minimización se logra usando una estimación de las densidades de potencia espectral de la señal y el artefacto, de manera que no necesita una forma de onda de referencia. La desventaja de esta técnica recae en que se necesita calibración y no puede funcionar en tiempo real.

Filtro de Bayes Es otro tipo de técnica paramétrica basada en un método probabilístico de estimación de un sistema de observaciones ruidosas basado en asumir que el sistema es de tipo Markov. Este filtro primero estima el estado a un determinado tiempo y luego obtiene una retroalimentación en forma de una medida ruidosa, la cual es usada para predecir un nuevo estimado *a priori*. Este tipo de filtro es capaz de trabajar sin señal de referencia y puede operar en tiempo real. Una desventaja del mismo es que no es implementado directamente debido a su complejidad, sin embargo se pueden aproximar a través de un filtro Kalman, además el algoritmo necesita de calibración.

2.3.5. Separación ciega de fuentes

El método de separación ciega de fuentes (BSS, por sus siglas en inglés) está basado en la ecuación (2.2). Este algoritmo estima \mathbf{S} (las señales de interés) a partir de las observaciones \mathbf{X} (señales adquiridas en los canales de salida del sistema de adquisición) sin necesidad de una forma de onda de referencia para la señal deseada o para los artefactos, usando la información que proporcionan todos los electrodos (Figura 2.14). La efectividad de las técnicas de BSS está

sujeta a varias suposiciones, e.g. no correlación, independencia, no-Gaussianidad, propagación instantánea, linealidad, etc. El éxito en este caso críticamente depende de una buena separación de fuentes y correcta identificación de las fuentes como componentes del cerebro o componentes de los artefactos.

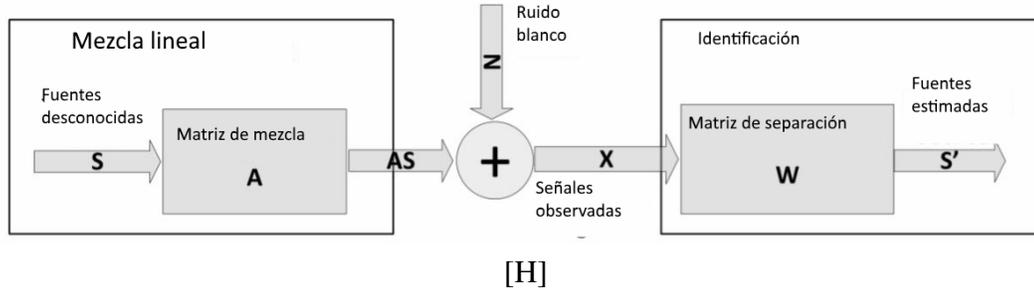


Figura 2.14: Diagrama de bloques de un algoritmo BSS. Imagen tomada de [11].

Como una manera gráfica de entender un proceso de BSS, la figura 2.15 muestra su aplicación en separación de señales EEG. Tenemos cuatro fuentes S_{1-4} , las cuales son las que queremos estimar, pero de acuerdo a la ecuación (2.2) estas fuentes son mezcladas con algunos coeficientes que están contenidos en A ; esto nos proporciona las observaciones X . Una de las restricciones para poder llevar a cabo BSS, es que el número de sensores debe ser igual que el número de fuentes que esperamos obtener, así, se tienen las observaciones X_{1-4} . La separación ciega utiliza herramientas matemáticas y estadísticas para encontrar la matriz de separación W que es esencialmente inversa a A , dejando sólo las fuentes de interés. Dos de las técnicas más comúnmente aplicadas de la BSS se mencionan a continuación.

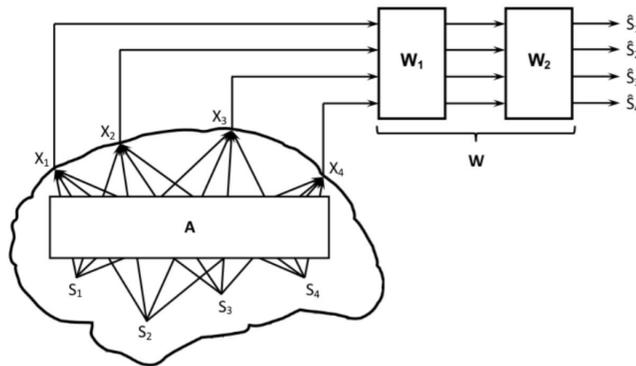


Figura 2.15: Concepto gráfico de BSS. Imagen tomada de [4].

2.3.5.1. Análisis de componentes principales

Abreviada PCA por su nombre inglés, esta técnica usa una transformación ortogonal para convertir las observaciones de variables posiblemente correlacionadas en valores de variables no correlacionadas linealmente llamadas componentes principales, de menor o igual número que las variables originales. La transformación es definida para las componentes principales de tener una varianza lo más grande posible mientras existe ortogonalidad entre ellas. El problema más grande con PCA es que la suposición de ortogonalidad entre la actividad neural y los típicos artefactos fisiológicos generalmente no es cierta, por lo que se ha reportado que PCA no es capaz de separar algunos componentes correspondientes a artefactos de las señales EEG, especialmente cuando tienen amplitudes similares [4].

2.3.5.2. Análisis de componentes independientes

El análisis de componentes independientes (ICA, por sus siglas en inglés) comprende distintas técnicas relacionadas para descomponer o desmezclar señales linealmente mezcladas usando solamente la información registrada en el tiempo, imponiendo independencia estadística de las fuentes. La aplicación de ICA a EEG ha reemplazado, en su mayoría, a otros intentos para eliminar artefactos de estos registros. Como la independencia es una característica que se asume, que es más fuerte que la no correlación y dado que los artefactos y la actividad cerebral son, usualmente, lo suficiente independientes, el éxito de ICA para remover artefactos se argumenta de esta manera, en contraste con PCA. Actualmente en práctica solamente algunos algoritmos ICA son usados para el procesamiento de señales biomédicas, tales como la **identificación ciega de segundo orden (SOBI)**, **maximización de la información (InfoMax)** y **FastICA**. La efectividad de ICA está basada en la independencia estadística de las fuentes y el rango completo de las columnas de la matriz de mezcla A . Incluso si las fuentes no son exactamente independientes, los algoritmos basados en ICA han reportado ser exitosos removiendo artefactos de las señales EEG. La mayor desventaja de ICA está en que el algoritmo no trabaja de manera automática, por lo que requiere de la intervención manual para rechazar componentes independientes que visualmente representan los artefactos. Debido a que ICA está basado en características estadísticas, los resultados no serán tan confiables si la cantidad de datos proveídos al algoritmo

son insuficientes. Lo mejor es usar todos los datos disponibles [4].

Análisis de componentes independientes restringido Técnica también denominada ICA con referencia, incorpora conocimiento previo acerca de la fuente de las señales, haciendo un tipo de separación semi-ciega. Esto se logra imponiendo restricciones temporales o espaciales en el modelo de mezcla de fuentes.

ICA temporalmente restringido El objetivo en este caso es obtener una salida que es estadísticamente independiente de otras fuentes, pero muy cercana a la señal de referencia. Conocimiento previo de la señal puede introducirse al modelo a través de canales de referencia que hagan que la matriz original X sea aumentada por un número de filas iguales a las referencias.

ICA espacialmente restringido La idea aquí es definir un conjunto de restricciones espaciales de la matriz de mezcla A para representar el conocimiento previo de la topografía espacial de algunas proyecciones de la fuente. El algoritmo incorpora una referencia o topografías restringidas, de modo que las proyecciones de la fuente son aproximadamente conocidas, limitando así el grado al cual ciertas columnas de la matriz de mezcla pueden desviarse de dichas proyecciones conocidas. Una ventaja en el uso de cualquier tipo de restricciones para resolver un problema de BSS hace más flexible las consideraciones respecto a propiedades estadísticas, temporales o espectrales de las formas de onda [4].

2.3.6. Métodos de descomposición de fuentes

Alternativamente, el problema de encontrar una matriz libre de artefactos a partir de observaciones puede ser abordado directamente descomponiendo cada canal individual en formas de ondas básicas que representan la señal o el artefacto, removiendo este último eventualmente. Los algoritmos exitosos de este tipo se basan en el hecho de que alguna fuente (señal o artefactos) pueden representarse por una sola unidad de descomposición. Las técnicas más comunes son:

Wavelets La transformada wavelet (WT, por sus siglas en inglés) discreta puede ser calculada filtrando el vector de entrada a través de una serie de filtros pasa-bajas y pasa-altas que proveen coeficientes de aproximación y coeficientes de detalle respectivamente. Quitar el ruido se lleva

a cabo siguiendo tres pasos: primero se descompone la señal en un número de niveles de detalle, después se limitan estos coeficientes y tercero, se reconstruye la señal a partir de la representación filtrada. La eliminación de artefactos basados en wavelet recae en que las fuentes de interés pueden ser descompuestas en una wavelet base, mientras los artefactos no. Esto implica que solamente unos cuantos coeficientes wavelet con alto valor representan la señal y los coeficientes de bajo valor absoluto corresponden a los artefactos [4].

Descomposición en modo empírico Abreviada EMD por sus siglas en inglés, es una técnica unidimensional cuyo objetivo es descomponer la señal en sus funciones básicas denominadas funciones de modo intrínseco (IMFs), las cuales son componentes de media cero de amplitud y frecuencia moduladas más un residuo polinomial de bajo grado y de media no cero. Estos modos tienen una frecuencia instantánea bien definida, que puede ser calculada usando la transformada de Hilbert. La combinación de las frecuencias instantáneas producen una representación tiempo-frecuencia de la señal, conocida como el espectro de Hilbert. Cada IMF es obtenido por un proceso iterativo llamado proceso de cernido, que consiste en identificar los máximos y mínimos locales del residuo, interpolando entre ellos para encontrar los sobrantes superiores e inferiores, calculando el sobrante principal del residuo y sustrayéndolo de este residual. El proceso se repite hasta que se alcanza un criterio de convergencia [4].

Modo no lineal de descomposición Es una herramienta de descomposición adaptativa para análisis de señales en el dominio del tiempo basadas en transformadas wavelet *synchrosqueezed* (SWT). La técnica descompone una señal en sus llamados modos no lineales, que son sus componentes completamente oscilatorias y sus armónicos. El procedimiento de este algoritmo consta de cuatro partes: primero es la extracción de una curva adaptativa (primer armónico) de la SWT, la cual es capaz de proveer una representación tiempo-frecuencia con mejor resolución en frecuencia que una WT. El siguiente paso es la identificación de los posibles armónicos, luego la identificación confiable de los armónicos y finalmente la reconstrucción de los modos no lineales de la SWT, este último paso se logra sumando la SWT de la curva principal y todos sus armónicos verdaderos. Los algoritmos anteriormente mencionados son solamente los más utilizados y son de los cuales parten otro tipo de técnicas, e.g. análisis de correlación canónica o

análisis de componentes morfológicas. Además diversas publicaciones han realizado combinaciones de estos métodos buscando características especiales, por ejemplo, haciendo el algoritmo automático [4].

2.3.7. Ejecuciones automáticas y semiautomáticas

Los algoritmos para remover artefactos pueden clasificarse en automáticos o semiautomáticos, dependiendo de la necesidad de intervención humana. Los métodos semiautomáticos requieren inspección visual de la señal medida o de los componentes obtenidos por el método de eliminación de artefactos, siendo solamente útiles para aplicaciones fuera de línea. Por lo tanto, para ser capaces de ejecutar un algoritmo en una aplicación en línea y evitar introducir subjetividad en el proceso, la ejecución automática es normalmente preferida. Cuando existe una forma de onda como referencia, o una señal prototipo puede ser generada, se puede crear una automatización viable calculando la correlación de ciertas componentes independientes, ya sea con la referencia o combinando características de la señal y correlación. WT y EMD puede ser más fácilmente automatizadas y de una manera común usando umbrales [4].

2.3.8. Estadísticas de aplicación de los algoritmos

Con motivo de ofrecer una perspectiva global acerca del trabajo que se realiza y se ha realizado respecto al problema que se trata en esta tesis, se presenta a continuación un par de estadísticas. La primera de ellas (Figura 2.16) muestra la tendencia de investigación en detección y eliminación de artefactos de EEG desde el año 2000 hasta el 2014 presentadas en Google Scholar [11].

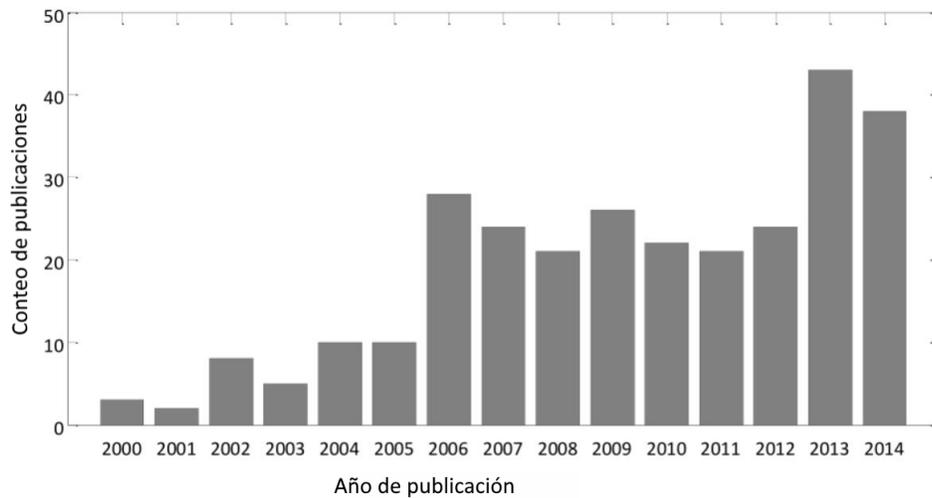


Figura 2.16: Tendencia de investigación en reconocimiento y eliminación de artefactos desde el año 2000 al 2014. Imagen tomada de [11].

El segundo dato estadístico (Figura 2.17) muestra a modo de gráfica de pastel el porcentaje de documentos en línea que reportan el uso de técnicas para remover artefactos. Como fuentes de consulta se utilizaron libros introductorios en procesamiento de señales EEG y posteriormente se hizo uso de “Google” y “Google scholar.” [11].

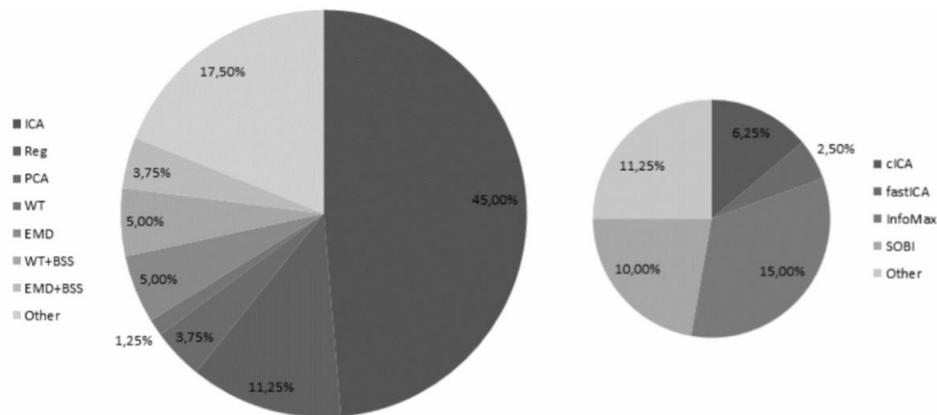


Figura 2.17: Izquierda; porcentaje de uso de técnicas para remover artefactos reportadas en artículos científicos (abril 2015). ICA=45 %, Regresión=11.25 %, PCA=3.75 %, Transformada Wavelet=1.25 %. EMD=5 %, Wavelet+BSS=5 %, EMD+BSS=3.75 % y otros (e.g. multivariate singular spectrum analysis, sparse component analysis)=17.50 %. Derecha; Algoritmos más utilizados que utilizan ICA, divididos del 45 % que abarca esta técnica. ICA restringido=6.25 %, FastICA=2.50 %, InfoMax=15 %, SOBI=10 % y otros (e.g. Jade) 11.25 % [4]. Nótese el dominio de ICA sobre las demás técnicas

2.4. Separación ciega de fuentes

Como se mencionó en la sección 2.3.5, la técnica de separación ciega de fuentes (BSS) consiste en recuperar las fuentes de señales no observables a partir de las mezclas observables. Típicamente, las mezclas observables se obtienen a la salida de un arreglo de sensores, donde cada sensor recibe una combinación diferente de las fuentes originales de las señales. El adjetivo “ciego” viene del hecho de que 1) las señales originales no son observadas y 2), aquí no existe información previa sobre la mezcla. Esta falta de información provoca la fuerte suposición estadística, que es físicamente posible, de independencia entre las fuentes de las señales. Así la debilidad de la falta de información es la fortaleza del modelo BSS. El modelo BSS más simple asume la existencia de n señales independientes, $s_1(t), \dots, s_n(t)$ y las observaciones del mismo número de fuentes, $x_1(t), \dots, x_n(t)$. La ecuación general y más simple, que es la misma ecuación (2.2) cuando el ruido es ignorado, la cual describe este problema es:

$$x(t) = As(t) \quad (2.3)$$

Siendo estas mezclas instantáneas, i.e., $\sum_{j=1}^n a_{ij}s_{ij}(t)$ para cada $i = 1, n$. En (2.3) $s(t) = [s_1(t), \dots, s_n(t)]^T$ es un vector columna $n \times 1$ que contiene las fuentes de las señales, A es una matriz desconocida $n \times n$ que contiene los coeficientes de mezcla, por lo tanto se refiere a ella como “matriz de mezcla” y $x(t)$ son las mezclas observadas. El símbolo T denota transposición.

El objetivo de la técnica BSS es recuperar la fuentes $s(t)$ usando sólo los datos observables x . El modelo puede formularse como el cálculo de una matriz de separación $n \times n$ W cuya salida y :

$$y(t) = Wx(t) \quad (2.4)$$

$$y(t) = WAs(t) \quad (2.5)$$

es un estimado del vector de las señales originales $s(t)$ [12].

Dado que $y(t) \simeq s(t)$ entonces $WA \simeq I$, siendo I la matriz identidad. En la figura 2.18 un simple diagrama a bloques explica la esencia de este método. Como se mencionó, el deber de BSS es

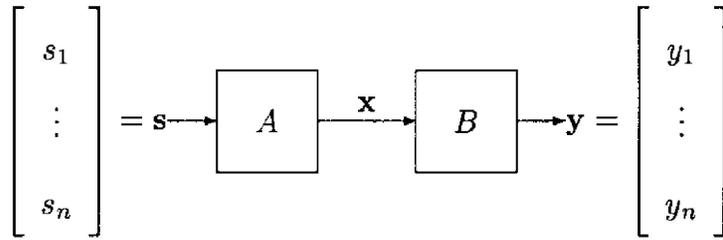


Figura 2.18: El objetivo del método de separación ciega de fuentes es recuperar las fuentes s usando solamente los datos observables x sin ningún previo conocimiento acerca de éste. Por medio de la estimación de una matriz de separación B el proceso puede obtener y , las fuentes originales. Imagen tomada de [12].

estimar una matriz de separación que permitirá "cancelar" los coeficientes de la matriz de mezcla, dejándonos solamente con los datos de interés.

El siguiente escenario es la manera más común en la que la mayoría de los autores explican como funciona el proceso de mezcla. Imaginemos que estamos en una fiesta donde cerca de tres micrófonos se encuentran tres personas conversando y hablando al mismo tiempo. Si estuviéramos grabando la salida de los micrófonos, ¿qué es lo que escucharíamos a la salida de cada uno de ellos? La respuesta puede ser muy obvia, una muy probable irreconocible mezcla de voces. Así es como funciona el proceso de mezcla descrito por la ecuación 2.3; las voces de las personas serían las señales $s(t)$ y la salida de los micrófonos serían $x(t)$. Este escenario es conocido como el problema *cocktail party*. Si quisiéramos saber que están diciendo claramente cada una de las voces que hablan, necesitaríamos separar las señales usando la matriz de separación W de la ecuación (2.5).

Las figuras 2.19, 2.20 y 2.21 muestran como sucede gráficamente el proceso de mezcla, la figura 2.19 son las señales originales de voz de cada sujeto. Mientras hablan, se asume que los micrófonos están registrando una combinación lineal de las voces, como se explica en las ecuaciones (2.3) y (2.4), así obtenemos la figura 2.20. Después de que un algoritmo capaz de recuperar la señales es aplicado, los estimados de las voces originales se recuperan (figura 2.21) [13].

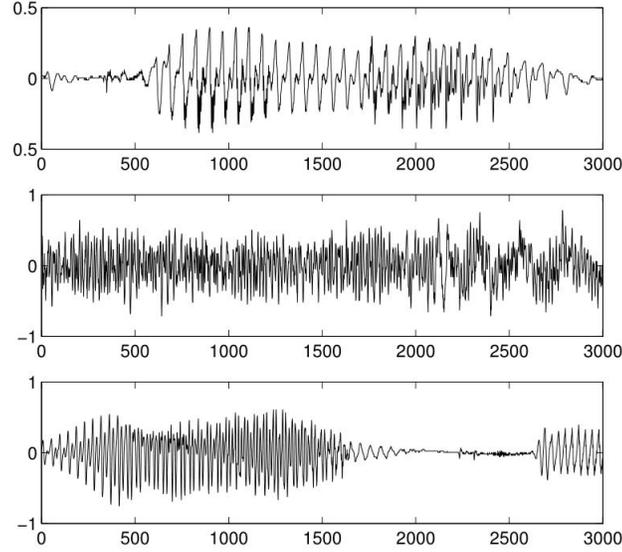


Figura 2.19: Las señales originales de voz que no son observables de las tres personas hablando (relacionado a la ecuación (2.3), estas señales son $s(t) = [s_1(t), s_2(t), s_3(t)]$). Imagen tomada de [13].

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$X = \begin{pmatrix} a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t) + a_{13}s_3(t) \\ a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t) + a_{23}s_3(t) \\ a_{31}s_1(t) + a_{32}s_2(t) + a_{33}s_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

La técnica más usada, y la que es la base de los algoritmos descritos en este trabajo es el análisis de componentes independientes (ICA).

2.4.1. Análisis de componentes independientes (ICA)

El modelo de ICA es un modelo generativo, lo que significa que los datos observados son generados por un proceso de mezcla de componentes (fuentes originales) s_n . Los componentes llamados, por efectos de la técnica, componentes independientes (CI's), son variables latentes, es decir, que no pueden ser directamente observadas. También, los coeficientes de mezcla a_{ij}

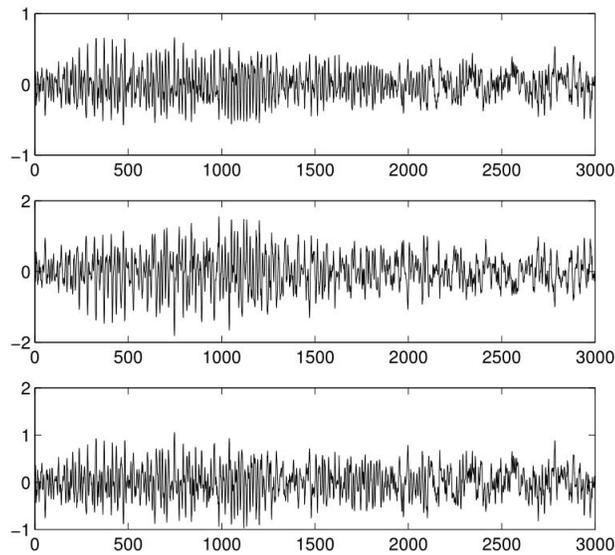


Figura 2.20: Mezcla observable de las señales de la figura 2.19, i.e. $x_n(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$. Imagen tomada de [13].

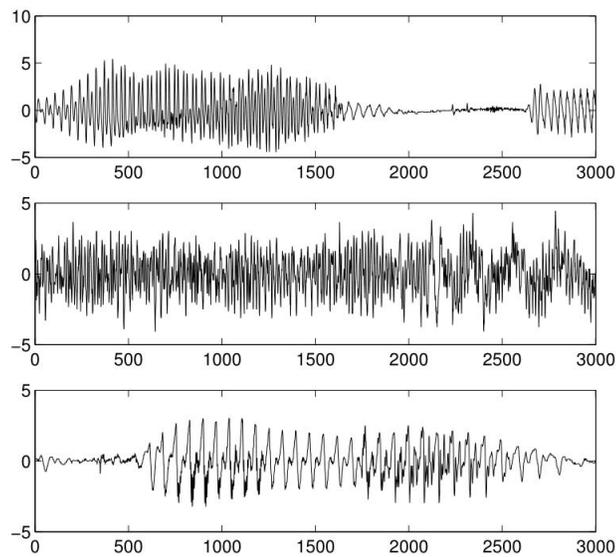


Figura 2.21: Las señales recuperadas después de que BSS se aplica, $y_n(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]$.

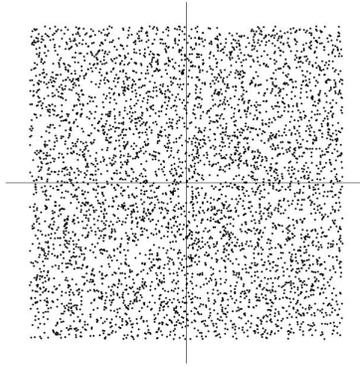


Figura 2.22: La distribución conjunta de las dos variables, s_1, s_2 con distribuciones uniformes Imagen tomada de [14].

se asume que son desconocidos. Justo como el modelo BSS, todo lo que observamos son las variables x_i y los coeficientes de A y los CI's deben estimarse a partir de x_i [13].

2.4.1.1. Independencia

Básicamente dos variables, e.g., y_1 y y_2 son independientes si la información del valor de una de ellas no aporta información acerca del valor de la otra variable y vice versa [14]

2.4.1.2. Ilustración de ICA

Para ilustrar el modelo de ICA asumamos dos variables s_1, s_2 cada una con una distribución uniforme. La densidad conjunta de ellas es entonces uniforme y forma un cuadrado en un plano bi-dimensional, como puede observarse en la figura 2.22. Lo que este cuadro nos está diciendo es que las variables de las componentes son independientes porque, como se explicó antes, usando el valor de cualquiera de estas variables no obtendremos información sobre la otra variable.

Ahora, mezclemos estas dos componentes independientes utilizando una matriz de mezcla A 2×2 para obtener x_1, x_2 . Si graficamos la distribución de las fuentes (figura 2.23), podemos ver que ahora las variables ya nos son independientes; digamos que x_1 , en el eje de las abscisas, toma su valor máximo o mínimo, entonces el valor de x_2 se determina completamente. Entonces, no son independientes.

El objetivo de ICA es estimar la matriz de mezcla usando solamente la información contenida

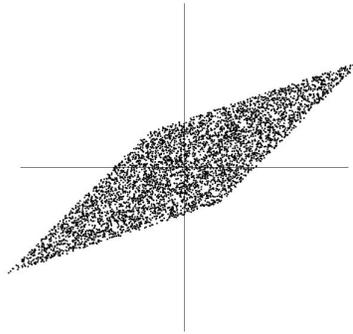


Figura 2.23: La distribución conjunta de las variables mezcladas, x_1, x_2 . Imagen tomada de [14].

en x_1 y x_2 . Lo siguiente al observar la figura 2.23 es que si sabemos que la matriz A deforma o transforma la distribución en forma de cuadro en una de forma de paralelogramo, entonces, usando las direcciones de deformación y distribución de los datos, los coeficientes de la matriz A pueden ser descubiertos y la independencia original de las variables puede ser recuperada y consecutivamente las componentes independientes [14].

Tzzy-Ping presenta una gran explicación sobre los dominios donde el algoritmo de ICA es muy efectivo, éstos son principalmente tres y suceden cuando; (1) el medio de mezcla es lineal y los retardos de propagación son despreciables, (2) el curso temporal de las fuentes es independiente, i.e. los fenómenos de interés no presentan dependencia entre sí y (3), el número de sensores es el mismo que el número de fuentes [15].

En el caso del EEG se asume que los registros multi-canal son mezclas de la actividad del cerebro y las señales artefactuales. Dado que la conducción de volumen, i.e. La transmisión del campo eléctrico a través del tejido con dirección hacia los sensores que hacen las mediciones, se cree que es lineal, la primera suposición está cubierta. La suposición (2) es razonable porque las fuentes de los ojos y músculos y la actividad cardiaca no están determinadas por la actividad del EEG. Finalmente, la suposición (3) es cuestionable porque no sabemos exactamente el número de señales estadísticamente independientes que contribuyen a los registros EEG [15].

2.4.1.3. Restricciones de ICA

Como se mencionó anteriormente, ciertas suposiciones tienen que hacerse para asegurarse de que el modelo básico de ICA funciona;

1. Los componentes independientes se asume que son estadísticamente *independientes*. Se dice que las variables aleatorias, e.g., y_1, y_2, \dots, y_n son estadísticamente independientes si la información del valor de y_i no proporciona algún tipo de información del valor de y_j para $i \neq j$. Técnicamente independencia puede definirse por densidades de probabilidad. Denotando como $p(y_1, y_2, \dots, y_n)$ la función de probabilidad de densidad conjunta (pdf) de y_i y $p_i(y_i)$ la pdf marginal de y_i . Decimos que y_i son independientes si y solo si la pdf conjunta es factorizable de la siguiente manera: $p(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_1(y_1)p_2(y_2)\dots p_n(y_n)$
2. Los componentes independientes deben tener distribuciones *no-gaussianas*. Una restricción fundamental de ICA es que estos componentes independientes deben tener distribuciones no-gaussianas. Asumamos una matriz de mezcla que es ortogonal y las fuentes gaussianas, las mezclas entonces son también gaussianas, decorrelacionadas y de varianza unitaria; su densidad conjunta está dada por:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) \quad (2.8)$$

La cual es la ecuación característica de la curva gaussiana. La distribución resultante se ilustra en la figura 2.24; ésta muestra que la distribución es completamente simétrica. Por lo tanto contiene ninguna información acerca de las direcciones de los coeficientes de la matriz de mezcla A . Por lo tanto A no puede ser estimada. Entonces, puede probarse que las distribución de cualquier transformación ortogonal gaussiana de y_1, y_2 tiene exactamente la misma distribución de x_1, x_2 y que x_1 y x_2 son independientes. En conclusión, la matriz A no es identificable cuando las componentes independientes son gaussianas. [13].

3. La matriz de mezcla desconocida es *cuadrada*. Es decir, el número de componentes independientes es igual al número de mezclas observadas; en palabras más simples, la cantidad de CI's es la misma al número de sensores. También, dado que los componentes estimados

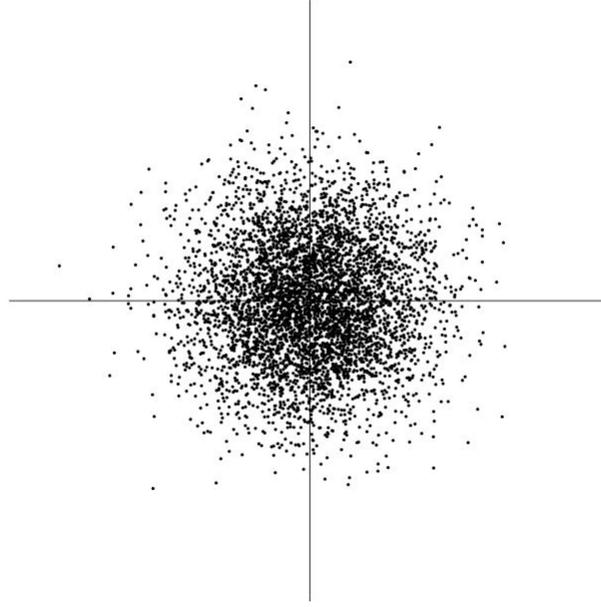


Figura 2.24: Distribución de dos variables independientes gaussianas. Imagen tomada de [14].

son extraídos al computar la inversa de la matriz A ,

$$s(t) = Wx(t) \quad (2.9)$$

$$W = A^{-1} \quad (2.10)$$

entonces también se asume que A es *invertible*.

2.4.1.4. Ambigüedades de ICA

1. La energía (varianzas) de los componentes independientes no puede determinarse. La razón es que ambas s y A siendo desconocidas, cualquier escalar multiplicador en una de las fuentes s_i podría siempre ser cancelado dividiendo la correspondiente columna a_j de A por el mismo escalar, digamos α_i :

$$x = \sum_i \left(\frac{1}{\alpha_i} a_i \right) (s_i \alpha_i) \quad (2.11)$$

Como una consecuencia, las magnitudes de las componentes independientes pueden ser fijadas. Dado que las variables son aleatorias, la manera más natural de realizar esto es

asumir que cada una tiene varianza unitaria $E\{s_i^2\} = 1$. Entonces la matriz A se adaptará en los métodos de solución de ICA para tener en cuenta esta restricción. Eso aún deja la ambigüedad del signo, donde alguna de las componentes puede ser recuperada como una señal invertida. Afortunadamente, esta ambigüedad es insignificante en la mayoría de las aplicaciones.

2. El orden de los componentes independientes no puede ser determinado. La razón de esto es que, nuevamente, siendo s y A desconocidos, el orden de los términos puede ser libremente cambiado y los componentes independientes pueden ser abstraídos sin alguna jerarquía en particular [13].

2.4.1.5. Desarrollo de ICA

Pre-procesamiento de datos Para implementar correctamente el método de ICA un par de etapas de procesamiento deben ser hechas; *centrado* de los datos y *blanqueamiento* de los datos.

Centrado Se asume que las mezclas y los componentes independientes tienen media cero. Esta suposición simplifica en gran medida la teoría y los algoritmos. Si esta suposición no es cierta, entonces un simple paso de procesamiento puede hacerse para mantenerla. Las variables pueden ser centradas simplemente restando la media de sus datos,

$$x = x' - E\{x'\} \quad (2.12)$$

antes de aplicar ICA. Así las componentes independientes obtienen media cero también. Dado que,

$$E\{s\} = A^{-1}E\{x\} \quad (2.13)$$

la matriz de mezcla, por otro lado, permanece igual después de la etapa de centrado, por lo que esto puede hacerse siempre sin afectar la matriz de estimación. Después de que la matriz de mezcla y los componentes independientes son estimados para datos con media cero, la media abstraída puede ser fácilmente reconstruida sumando $A^{-1}E\{x'\}$ a los componentes independientes de media cero [13].

Blanqueo Otro paso de pre-procesamiento que es muy útil, es blanquear las variables observadas. Esto quiere decir que antes de aplicar ICA y después del centrado, las variables x son linealmente transformadas a un nuevo vector \hat{x} , el cual es blanco, i.e., sus componentes están decorrelacionados y sus varianzas son iguales a la unidad,

$$E\{\hat{x}\hat{x}^T\} = I. \quad (2.14)$$

El blanqueo siempre es posible; un método popular para su implementación es usar la descomposición de eigenvalores (EVD por sus siglas en inglés) de la matriz de covarianza $E\{\hat{x}\hat{x}^T\} = EDE^T$ donde E es la matriz ortogonal de eigenvectores de $E\{\hat{x}\hat{x}^T\}$ y D es la matriz diagonal de eigenvalores, $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. $E\{\hat{x}\hat{x}^T\}$ puede ser estimada de una manera estándar a partir de las muestras disponibles de x , i.e., $x(1), \dots, x(T)$. El blanqueo ahora puede implementarse como,

$$\hat{x} = ED^{-1/2}E^T x \quad (2.15)$$

donde la matriz $D^{-1/2}$ es calculada como por una operación elemento por elemento como $D^{-1/2} = \text{diag}(d_1^{-1/2}, \dots, d_n^{-1/2})$. Es fácil comprobar después que $E\{\hat{x}\hat{x}^T\} = I$.

El blanqueo transforma la matriz de mezcla en una nueva, la cual es ortogonal, de la ecuación (mezcla general) y (anterior),

$$\hat{x} = ED^{-1/2}E^T A s = \hat{A} s \quad (2.16)$$

Y ya que \hat{A} es ortogonal,

$$E\{\hat{x}\hat{x}^T\} = \hat{A} E\{s s^T\} \hat{A}^T = \hat{A} \hat{A}^T = I$$

El blanqueo reduce el número de parámetros a ser estimados. En lugar de tener n^2 parámetros de A , solamente se tienen que estimar los de la versión ortogonal.

Una matriz ortogonal contiene $n(n-1)/2$ grados de libertad. En una matriz de dos dimensiones, una transformación ortogonal está determinada solamente por un parámetro; y en dimensiones mayores, la matriz ortogonal solamente contendrá cerca de la mitad del número de parámetros de una matriz arbitraria de las mismas dimensiones. Así, puede decirse que el blanqueo soluciona la mitad del problema de ICA, haciéndolo una herramienta ideal para solucionar la mitad del

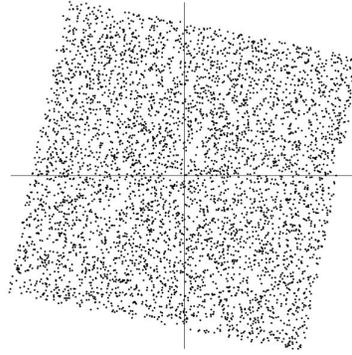


Figura 2.25: Distribución de los datos de dos variables después de que el blanqueo es aplicado, i.e., blanqueo utilizado en la figura 2.22. Imagen tomada de [14].

problema.

Una ilustración gráfica puede verse en la figura 2.25. Aquí el blanqueo fue aplicado a la figura 2.23, y por medio de la comparación la distribución original de las fuentes (figura 2.22), es notorio que está última figura es una rotación de la versión original. Todo lo que queda por hacer es estimar un sólo ángulo que proporcione esa rotación. [14, 16].

2.4.1.6. Aplicaciones de ICA

El éxito de ICA in separación de fuentes ha resultado en un número de prácticas aplicaciones, algunas de estas son:

- Detección de fallo de máquina.
- Monitoréo sísmico.
- Cancelado de reflexión.
- Encontrar factores escondidos en datos financieros.
- Análisis de documentos de texto.
- Radio comunicaciones.
- Procesamiento de señales de audio.
- Procesamiento de imágenes.

- Minería de datos.
- Pronóstico de series de tiempo.
- Detección de defectos en superficies de despliegue de patrones.
- Procesamiento de señales biomédicas [16].

2.4.1.7. Medidas de no-Gaussianidad

Para usar la no-gaussianidad al utilizar ICA, se debe tener una medida cuantitativa que mida esta propiedad de una variable aleatoria, e.g. y . Para simplificar, se asume que y tiene media cero, y varianza igual a la unidad. Los siguientes, son diferentes métodos utilizados para medir de manera numérica la gaussianidad.

Kurtosis La medición clásica para medir la no gaussianidad es la kurtosis o el cumulante de cuarto orden. Para y , su kurtosis se define por:

$$kurt(y) = E\{y^4\} - 3(E\{y^2\})^2. \quad (2.17)$$

Debido a que se asume que y es de varianza unitaria, el lado derecho de la ecuación (2.17) se simplifica a $E\{y^4\} - 3$. Esto muestra que la kurtosis es simplemente una versión normalizada del cuarto momento $E\{y^4\}$. Para una variable gaussiana y , el cuarto momento es igual a $3(E\{y^2\})^2$. Así, la kurtosis es de valor cero para una variable con distribución gaussiana.

Kurtosis puede ser positiva o negativa. Las variables aleatorias que presentan una kurtosis negativa son llamadas “subgaussianas,” (platicúrtica) y aquellas que tienen una kurtosis positiva son “supergaussianas” (leptokúrtica). Ejemplo del comportamiento de estas dos distribuciones se presenta en las figuras 2.26 y 2.27.

Típicamente la no-gaussianidad es medida por el valor absoluto de kurtosis. El cuadrado de kurtosis también puede ser usado e ICA y otras áreas relacionadas han usado ampliamente esta medida. Computacionalmente, la kurtosis puede estimarse simplemente usando el cuarto mo-

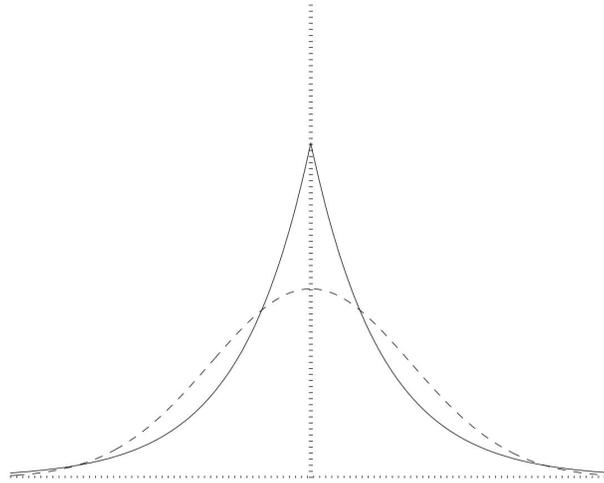


Figura 2.26: Ejemplo de la distribución de una variable con kurtosis positiva comparada con la distribución normal o gaussiana.

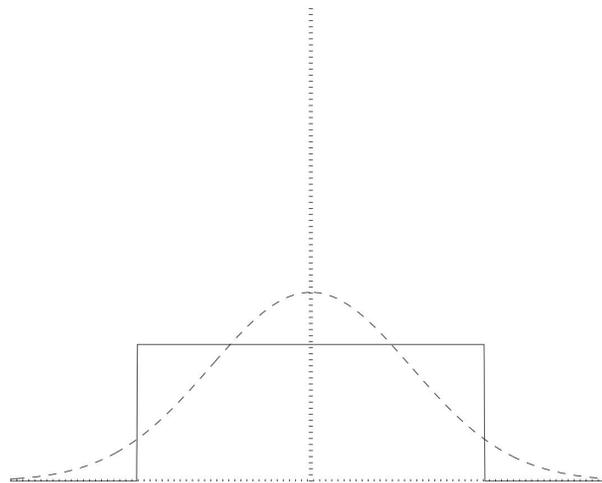


Figura 2.27: Ejemplo de la distribución de una variable con kurtosis negativa comparada con la distribución normal o gaussiana.

mento de los datos. Atacando el problema desde el punto de vista de la ecuación (2.4), en la práctica se inicia a partir de un vector w aleatorio, se calcula la dirección en la cual la kurtosis de la ecuación en cuestión crece (en caso de que la kurtosis sea positiva o decrece en caso de que sea negativa basándose en las muestras que se tienen (x) y usar un método de gradiente alguna de sus extensiones para encontrar un nuevo vector w .

Sin embargo, kurtosis tiene algunos inconvenientes en la práctica, cuando su valor es estimado de alguna muestra. El problema principal es que kurtosis puede ser muy sensible a *outliers*. Su valor puede depender de solamente algunas observaciones en las colas de la distribución, lo cual pueden ser medidas erróneas o irrelevantes [14]

Entropía En 1948, Claude Shannon introdujo el concepto de entropía de la información como una medida de incertidumbre asociada con una variable aleatoria. V. Stone describe la entropía como una “medida de uniformidad de distribución de modo que uniformidad completa equivale a máxima entropía.” Algunos otros nombres que hacen alusión a lo mismo son “sorpresa promedio” o “información promedio [17].”

Información La información asociada con que ocurra un evento A , se define como:

$$I(A) = \ln\left(\frac{1}{pr[A]}\right) = -\ln(pr[A]). \quad (2.18)$$

La base del logaritmo es arbitraria, sin embargo, el logaritmo natural es usado por conveniencia matemática. Por lo tanto, las unidades de información, i.e., las unidades de entropía son “nats.” Si la probabilidad de que un cierto evento A ocurra es alta ($pr[A] \approx 1$), entonces contiene muy poca información:

$$I(A) = -\ln(pr[A]) \approx -\ln(1) \approx 0. \quad (2.19)$$

Contrariamente, si la probabilidad de que ocurra dicho evento es muy baja ($pr[A] \approx 0$), entonces el valor de información que tiene es infinita

$$I(A) = -\ln(pr[A]) \approx -\ln(0) \approx \infty. \quad (2.20)$$

La entropía es información promedio, la cual puede ser obtenida del esperado. El esperado es esencialmente un promedio con peso y está definido como:

$$E\{X\} = \sum_s X(s)pr[s]. \quad (2.21)$$

La entropía H , es entonces:

$$H(A) = E\{I(A)\} = \sum_i I[A_i]pr[A_i] \quad (2.22)$$

donde i representa un aleatorio número de eventos. Para este número aleatorio, la entropía $H(A)$ se obtiene substituyendo la ecuación (2.18) en la ecuación (2.22), lo que resulta en:

$$H(A) = E\{-\ln(pr[A])\} = \sum_i -\ln(pr[A_i])pr[A_i] \quad (2.23)$$

Lo cual puede re-ordenarse de la forma:

$$H(A) = -\sum_i^n pr[A_i]\ln(pr[A_i]). \quad (2.24)$$

La ecuación (2.24) es la definición formal de entropía para un conjunto de eventos.

Ejemplo de dos eventos Cuando se tienen dos posibles salidas ($n = 2$), e.g., sí/no, cara/cruz, 1/0, etc. Las probabilidades de los dos eventos suman uno,

$$pr[A_1] + pr[A_2] = 1 \quad (2.25)$$

Definiendo,

$$pr[A_1] = p \quad \text{and} \quad pr[A_2] = 1 - p. \quad (2.26)$$

Para el ejemplo de dos eventos, la ecuación (2.24) puede expresarse como,

$$H(A) = -(pr[A_1]\ln(pr[A_1]) + pr[A_2]\ln(pr[A_2])) \quad (2.27)$$

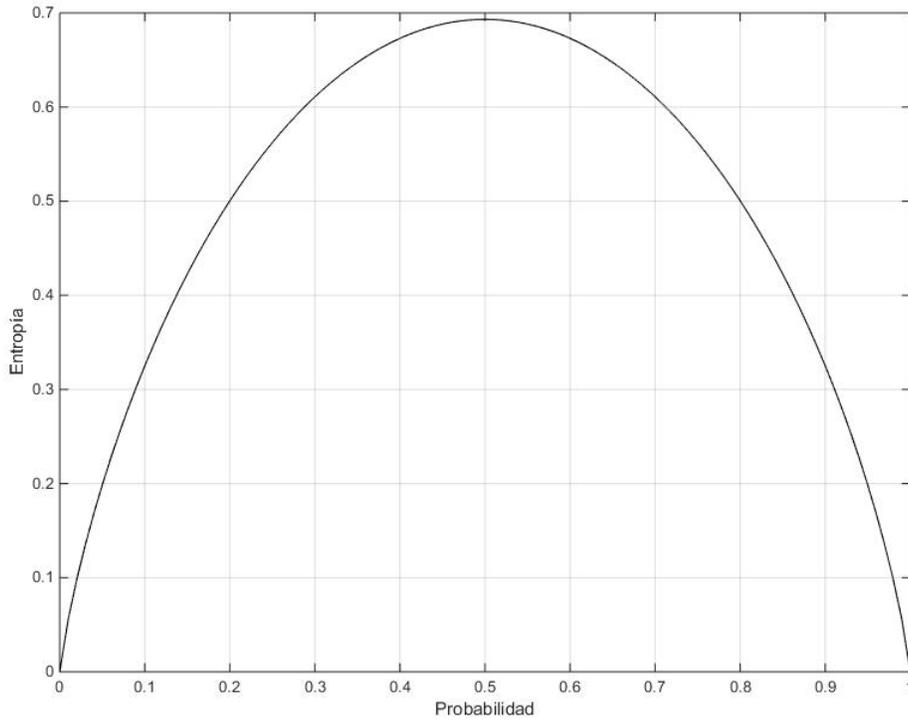


Figura 2.28: Entropía de un ejemplo de dos eventos con igual probabilidad.

y substituyendo la ecuación (2.26) en la ecuación (2.27) queda,

$$H(p) = -p \ln(p) - (1 - p) \ln(1 - p). \quad (2.28)$$

La entropía $H(p)$, donde p toma los valores de probabilidad que oscilan entre cero y uno ($0 < p < 1$), como se muestra en la figura 2.28. Es evidente de la gráfica que el valor máximo de entropía se alcanza cuando $p = 0.5$, lo que, podría ser una moneda simétrica, donde, que se obtenga una cara tiene igual probabilidad que se obtenga una cruz.

La entropía también puede ser expresada como una variable aleatoria continua, en analogía con la ecuación (2.24), mientras el límite $n \rightarrow \infty$. La entropía continua de una variable aleatoria A se define como

$$H(A) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p_A(a) \ln p_A(a) da = E\{-\ln(p_A(A))\}. \quad (2.29)$$

Todos los esperados pueden aproximarse promediando un número razonablemente grande de ensayos. Aplicando esto a la ecuación (2.29), se obtiene

$$H(A) = -\frac{1}{N} \sum_t^N \ln p_A(A^t), \quad (2.30)$$

donde t es una muestra de tiempo y N es el número de muestras de tiempo. Esta definición de entropía es la que es utilizada en InfoMax [17].

Negentropía Otra importante medida de Gaussianidad está dada por la negentropía. La entropía diferencial H es una generalización de la entropía y está definida para una variable discreta aleatoria Y , con densidad $f(y)$, como:

$$H(Y) = - \int f(y) \log f(y) dy \quad (2.31)$$

Un resultado fundamental en teoría de la información es que una variable gaussiana tiene la entropía más grande entre todas las variables aleatorias de igual varianza. Esto significa que la entropía puede ser usada para medir gaussianidad. Para obtener una medida de gaussianidad que es cero para una variable gaussiana y siempre positiva, usualmente se utiliza una versión ligeramente modificada de la entropía diferencial, llamada negentropía. La negetropía J se define,

$$J(Y) = H(Y_{gauss}) - H(Y) \quad (2.32)$$

donde Y_{gauss} es una variable gaussiana aleatoria de la misma matriz de covarianza de Y . Como se mencionó arriba, la negentropía es siempre positiva y cero sí y solamente sí Y posee una distribución gaussiana.

La ventaja de utilizar la negentropía como una medida de gaussianidad es que tiene una teoría estadística bien justificada. El problema con utilizar la negentropía es que es computacionalmente muy compleja. Estimar la negentropía usando la definición (ecuación (2.32)) requeriría estimar la PDF. Por lo tanto, algunas aproximaciones de negetropía son bastante útiles.

Aproximaciones de Negentropía El método clásico de aproximación de negentropía es utilizando momentos de alto orden, por ejemplo,

$$J(y) \approx \frac{1}{12}E\{y^3\}^2 + \frac{1}{48}kurt(y)^2 \quad (2.33)$$

La variable aleatoria y se asume que tiene media cero y varianza unitaria. Sin embargo, la validación de tales aproximaciones puede ser muy limitada. Estas aproximaciones sufren de falta de robustez. Para evitar estos problemas se han desarrollado nuevas aproximaciones, las cuales se basan en el principio de máxima entropía. En general se obtiene la siguiente aproximación:

$$J(y) \approx \sum_{i=1}^p k_i [E\{G_i(y)\} - E\{G_i(v)\}]^2, \quad (2.34)$$

donde k_i es alguna constante positiva y v es una variable gaussiana de media cero y varianza unitaria. La variable y se asume que es de media cero y varianza unitaria, y las funciones G_i son algunas funciones no cuadráticas.

En el caso donde sólo se utiliza una función no cuadrática G la aproximación se vuelve:

$$J(y) \propto [E\{G(y)\} - E\{G(v)\}]^2 \quad (2.35)$$

para prácticamente cualquier función no cuadrática G . Cuando se selecciona $G(y) = y^4$, se obtiene exactamente la ecuación (2.33), i.e., una aproximación basada en kurtosis.

El punto aquí es que escogiendo G sabiamente, se obtiene una aproximación de negentropía que es mejor que (2.33). Particularmente, escogiendo una G que no crece muy rápido, se obtienen estimadores más robustos. Las siguientes elecciones de G han demostrado ser muy útiles:

$$G_1(u) = \frac{1}{a_1} \log \cosh a_1 u, \quad G_2(u) = -\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) \quad (2.36)$$

donde $1 \leq a_1 \leq 2$ es una constante adecuada.

Así se obtienen aproximaciones de negentropía que ofrecen un buen compromiso entre las propiedades de las medidas clásicas dadas por kurtosis y negentropía. Éstas son conceptualmente simples, rápidas de calcular y aun poseen propiedades estadísticas atractivas, especialmente robustez. Por lo tanto, estas funciones deben ser usadas en los métodos de ICA. [14]

2.4.1.8. FastICA

FastICA para una sola unidad El algoritmo FastICA encuentra un vector unitario \mathbf{w} de modo que la proyección $w^T x$ maximice la no-gaussianidad. Aquí esta propiedad está medida por medio de la aproximación de negentropía $J(w^T x)$ que se muestra en (2.35). Como la varianza de $w^T x$ tiene que ser llevada a la unidad, en datos con blanqueo aplicado ésto es equivalente a restringir la norma de \mathbf{w} a ser unitaria.

FastICA está basado en un esquema de iteración de punto fijo para encontrar un máximo de no-gaussianidad de $w^T x$. También puede derivarse de una iteración de Newton aproximativa. Denotando como g la derivada de una función no cuadrática G usada en (2.35), por ejemplo, las derivadas de las funciones en (2.36) son:

$$g_1(u) = \tanh(a_1 u), \quad g_2(u) = u \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) \quad (2.37)$$

donde $1 \leq a_1 \leq 2$ es una constante adecuada, comúnmente usada con valor $a_1 = 1$. La forma básica del algoritmo de FastICA es el siguiente:

1. Escoger un vector de peso \mathbf{w} inicial, e.g., aleatorio.
2. Dejar $\mathbf{w}^+ = E\{\mathbf{x}g(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\} - E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\}\mathbf{w}$
3. Dejar $\mathbf{w} = \mathbf{w}^+ / \|\mathbf{w}^+\|$
4. Si no hay convergencia, regresar al paso 2.

Nótese que la convergencia significa que los actuales y los previos valores de \mathbf{w} señalan en la misma dirección, i.e., su producto punto es (casi) igual a 1.

FastICA para varias unidades El algoritmo de la sección anterior estima sólo uno de los componentes. Para estimar varios componentes, es necesario ejecutar el algoritmo de FastICA usando diferentes unidades con vectores de peso $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$.

Para prevenir que los vectores converjan a el mismo máximo, las salidas $\mathbf{w}_1^T \mathbf{x}, \dots, \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}$ deben ser decorrelacionadas después de cada iteración. A continuación se presentan tres métodos para lograr ésto.

Una simple manera de lograr la decorrelación es el esquema de deflación basado en la decorrelación de Gram-Schmidt. Eso quiere decir que se estiman los componentes uno por uno. Cuando se hayan estimado p componentes independientes, o vectores p $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$, se ejecuta el algoritmo para \mathbf{w}_{p+1} , y después de cada iteración se substraen de \mathbf{w}_{p+1} las “proyecciones” $\mathbf{w}_{p+1}^T \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j$, $j = 1, \dots, p$ de los vectores p previamente estimados, y luego normalizar \mathbf{w}_{p+1} :

$$\begin{aligned}
 1. \quad \mathbf{w}_{p+1} &= \mathbf{w}_{p+1} - \sum_{j=1}^p \mathbf{w}_{p+1}^T \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j \\
 2. \quad \mathbf{w}_{p+1} &= \mathbf{w}_{p+1} / \sqrt{\mathbf{w}_{p+1}^T \mathbf{w}_{p+1}}
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

Sin embargo, en algunas aplicaciones, puede ser deseable utilizar una decorrelación simétrica en la cual no existen vectores “privilegiados,” sobre otros. Esto puede lograrse por un método clásico que involucra raíces cuadradas de matrices,

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1/2} \mathbf{W}
 \tag{2.39}$$

donde \mathbf{W} es la matriz $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)^T$ de vectores, y la raíz cuadrada inversa $(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1/2}$ se obtiene de la descomposición de eigenvalores de $\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}$ como $(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1/2} = \mathbf{F}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{F}^T$. Una alternativa más simple es seguir el algoritmo iterativo que se muestra a continuación,

$$\begin{aligned}
 1. \quad \mathbf{W} &= \mathbf{W} / \sqrt{\|\mathbf{W}\mathbf{W}^T\|} \\
 2. \quad \mathbf{W} &= \frac{3}{2} \mathbf{W} - \frac{1}{2} \mathbf{W}\mathbf{W}^T \mathbf{W}
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

La norma en el paso 1 puede ser casi cualquier norma de matriz ordinaria, e.g., la norma-2 de la suma de filas (o columnas) absoluta más grande (pero no la norma de Frobenius) [14].

2.4.1.9. Maximización de la información (InfoMax)

Este método está explicado en el trabajo de tesis de Jenny Hill de la universidad de Monterey, CA. EU [17]. Y debido a su sencilla explicación matemática tomada de el libro “independent component analysis de V stone” [18] lo expongo de la misma manera y en el mismo orden que ella lo hizo.

InfoMax, es una técnica usada para resolver el problema de ICA, su nombre proviene del inglés *information maximization*. Este método está basado en la teoría de la información que apunta hacía encontrar las fuentes de señales independientes por medio de maximizar la entropía. La estrategia general de InfoMax consiste en ir optimizando la matriz de separación W de la ecuación (2.5). InfoMax sustenta que las señales extraídas son las señales fuentes si éstas son mutuamente independientes. Y aunque la independencia no puede medirse como tal, la entropía sí. Por lo tanto el objetivo de ICA en este escenario es encontrar la matriz W que maximice la entropía de las señales extraídas.

La entropía de la mezcla de señales x es constante, pero el cambio en la entropía puede ser maximizada por medio del mapeo de las señales $y = Wx$ hacía un conjunto alterno de señales $Y = g(y) = g(Wx)$. Este mapeo extiende Y de manera que el cambio en entropía de $x \rightarrow y$ puede maximizarse optimizando la matriz de separación W , y cuando la entropía es maximizada, las señales resultantes son independientes. La figura 2.29 muestra la estrategia de InfoMax.



Figura 2.29: Diagrama a bloques de la estrategia de infomax. Imagen tomada de [17].

Entropía de funciones de probabilidades de densidad de una variable Una expresión simplificada de entropía puede obtenerse al considerar un caso de una variable, donde las señales contienen sólo una variable dependiente. En este caso x es un vector aleatorio y cada elemento de x es una señal diferente muestreada al mismo tiempo t . Así, la entropía de una señal Y es:

$$H(Y) = -\frac{1}{N} \sum_t^N \ln P_Y(Y^t) \quad (2.41)$$

donde $Y = g(y)$, y es una función escalar del tiempo ($y = y(t) = y^t$), y el superíndice t indica el valor escalar de y en el tiempo t . La función $g(y)$ es la función de distribución acumulativa (CDF, por sus siglas en inglés) de la señal deseada y y comúnmente se refiere a ella como el “modelo CDF” de la señal fuente ya que es escogida para extraer un tipo específico de señal fuente.

El caso para una variable se explora modificando la ecuación 2.4, donde suponiendo que se extrae solamente un componente, ésta se reescribe:

$$y = w^T x \quad (2.42)$$

lo cual, siendo una multiplicación de vectores nos deja:

$$y^t = w_{21}x_1^t + w_{22}x_2^t + \dots + w_{2M}x_M^t \quad (2.43)$$

donde y^t es un valor escalar de una muestra de señal a un tiempo t . La transformación de y^t a través del modelo CDF $g(y^t)$ proporciona el valor mapeado de Y , donde Y es una variable aleatoria con un rango que va de cero a uno; i.e.,

$$Y = g(y^t) = g(w_{21}x_1^t + w_{22}x_2^t + \dots + w_{2M}x_M^t) \quad (2.44)$$

De la ecuación 2.41, $P_Y(Y^t)$ es la PDF de la señal mapeada $Y = g(y)$ y se relaciona a la PDF de la señal extraída y , $P_y(y^t)$ como se muestra en la figura 2.30 Así, de la figura 2.30,

$$p_Y(Y^t)\Delta Y = p_y(y^t)\Delta y \quad (2.45)$$

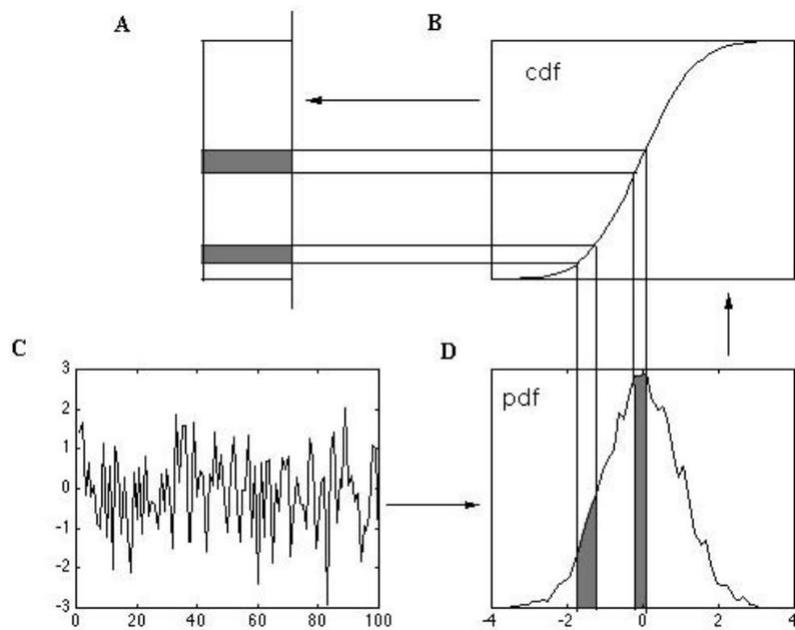


Figura 2.30: Diagrama esquemático de como una distribución uniforme **A** se obtiene si una señal se transforma por su propia CDF. Una señal $y = (y^1, \dots, y^{5000})$ es usada para construir un histograma normalizado (i.e., de área unitaria) **D**, el cual es una aproximación al PDF de la señal p_y . Solamente 100 de 5000 valores de la señal de y se muestran en **C**. Nótese que el rango de valores de la señal en y se refleja en el eje x del histograma en **D**. La integral de p_y deja una aproximación de la CDF g de y , con un rango entre cero y uno (**B**). La señal $Y = g(y)$ (no mostrada) tiene una PDF p_Y con una distribución uniforme, mostrada en **A** rotada 90 grados. La señal Y tiene una distribución uniforme porque cada una de las áreas sombreadas equivalentes $p_Y(Y)\Delta Y$ en **A** debe ser igual a las áreas sombreadas correspondientes $p_y(y)\Delta y$ en **D**. Por lo tanto, ciertos intervalos Δy en el eje x de **D** se comprimen cuando son mapeados por la CDF g a un intervalo correspondiente ΔY en **A**, mientras otros se expanden. Nótese que la cantidad de compresión y expansión de un intervalo centrado en un valor y^f depende de la pendiente (derivada) de la CDF g en y^f . Tomada de [18].

y re-ordenando la ecuación (2.45) se tiene,

$$p_y(Y^t) = p_y(y^t) \frac{\Delta y}{\Delta Y} = \frac{p_y(y^t)}{\frac{\Delta Y}{\Delta y}}. \quad (2.46)$$

Dado que,

$$\frac{\Delta Y}{\Delta y} \rightarrow \frac{dY}{dy}, \Delta y \rightarrow 0 \quad (2.47)$$

La ecuación (2.46) queda como,

$$p_y(Y^t) = \frac{p_y(y^t)}{\frac{dY}{dy}} \quad (2.48)$$

La magnitud del denominador de la ecuación (2.48) se toma en cuenta para funciones crecientes y decrecientes, resultando en

$$p_y(Y^t) = \frac{p_y(y^t)}{\left| \frac{dY}{dy} \right|} \quad (2.49)$$

Dado que $Y = g(y)$ donde $g(y)$ es el CDF modelo de la señal fuente, entonces $\frac{dY}{dy} = g'(y)$, y $g'(y)$ es la PDF de la señal fuente $p_s(y)$. Substituyendo este resultado en la ecuación (2.49) se obtiene

$$p_Y(Y^t) = \frac{p_y(y^t)}{p_s(y^t)} \quad (2.50)$$

Substituyendo ecuación (2.50) en ecuación (2.41), se obtiene una expresión de una variable para entropía en términos de las PDFs de las señales extraídas y fuente:

$$H(Y) = -\frac{1}{N} \sum_t \ln \frac{p_y(y^t)}{p_s(y^t)} \quad (2.51)$$

Para resolver la ecuación (2.51), una expresión para la PDF de la señal extraída es necesaria. Este proceso aplicado al caso de una sola variable funciona como una introducción al caso multivariable.

Entropía de funciones de probabilidades de densidad multivariable El modelo de una sola variable puede extenderse a un caso general en el cual existen más de una variable aleatoria. La entropía H es igual a

$$H(A) = E\{-\ln(p_A(a))\} \quad (2.52)$$

Esto puede ser representado en notación de vector para múltiples variables, donde $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ y $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$. La expresión resultante para entropía de múltiples variables es

$$H(\mathbf{A}) = E\{-\ln(p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}))\} \quad (2.53)$$

donde $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ es la PDF multivariable de un vector aleatorio A . Si cada a_i es independiente e idénticamente distribuida, entonces

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) = p_A(a_1)p_A(a_2)\dots p_A(a_M) = \prod_{i=1}^M P_A(a_i) \quad (2.54)$$

En logaritmo natural de PDFs multivariables es

$$\ln(p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})) = \ln\left(\prod_{i=1}^M P_A(a_i)\right) = \ln(p_A(a_1)p_A(a_2)\dots p_A(a_M)) \quad (2.55)$$

Usando propiedades de los logaritmos,

$$\ln(p_A(a_1)p_A(a_2)\dots p_A(a_M)) = \ln(p_A(a_1)) + \ln(p_A(a_2)) + \dots + \ln(p_A(a_M)) \quad (2.56)$$

La ecuación (2.56) puede re-escribirse como

$$\sum_{i=1}^M \ln(p_A(a_i)). \quad (2.57)$$

Substituyendo la ecuación (2.57) en ecuación (2.53), se obtiene la expresión para entropía

$$H(\mathbf{A}) = E\left\{-\sum_{i=1}^M \ln(p_A(a_i))\right\} \quad (2.58)$$

El esperado puede estimarse tomando el promedio, el cual deja la expresión

$$H(\mathbf{A}) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^N \ln(p_A(a_i)) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln(p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}^t)) \quad (2.59)$$

Si la ecuación (2.59) se aplica a una señal \mathbf{Y} mapeada transformada del modelo CDF $\mathbf{Y} = g(\mathbf{y} = g(\mathbf{W}\mathbf{x}))$, la expresión multivariable para entropía de señales \mathbf{Y} se convierte en

$$H(\mathbf{Y}) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln(p_Y(\mathbf{Y}^t)) \quad (2.60)$$

La cual es la forma multivariable de la expresión univariable en la ecuación (2.41). Igual que en el caso univariable, una expresión es necesaria para la PDF conjunta $p_Y(\mathbf{Y}^t)$ y es obtenida adaptando la ecuación (2.49) para el caso multivariable, resultando en

$$p_Y(\mathbf{Y}) = \frac{p_y(\mathbf{y})}{\left| \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{y}} \right|} \quad (2.61)$$

El denominador de la ecuación (2.61) es Jacobiano. Siguiendo la lógica en el caso de una variable, dado que $\mathbf{Y} = g(\mathbf{y})$, donde $g(\mathbf{y})$ es el modelo CDF de las señales fuente, entonces $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{y}}$ es el PDF $g'(\mathbf{y})$ de las señales fuente, que también puede ser expresado como $p_s(\mathbf{y})$. La ecuación (2.61) puede re-escribirse como

$$p_Y(\mathbf{Y}) = \frac{p_y(\mathbf{y})}{p_s(\mathbf{y})} \quad (2.62)$$

La substitución de la ecuación (2.62) en la ecuación (2.60) resulta en una expresión multivariable para entropía en términos de la señales extraídas $p_y(\mathbf{y})$ y la señales fuentes $p_s(\mathbf{y})$:

$$H(\mathbf{Y}) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln \left(\frac{p_y(\mathbf{y}^t)}{p_s(\mathbf{y}^t)} \right) \quad (2.63)$$

De igual manera que en la expresión de entropía para una variable (ecuación (2.51)), esta expresión multivariable requiere una expresión para la PDF de la señal extraída $p_y(\mathbf{y})$. Para obtener tal expresión, la relación de la ecuación (2.61), la cual es verdad para cualquier función invertible, se toma en cuenta. La PDF $p_y(\mathbf{y})$ de la señal extraída $\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ puede expresarse como

$$p_y(\mathbf{y}) = \frac{p_X(\mathbf{X})}{\left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{X}} \right|} \quad (2.64)$$

E igual que en la ecuación (2.61), el denominador de la ecuación (2.64) es Jacobiano.

El Jacobiano El jacobiano J es un valor escalar el cual es el determinante de una matriz Jacobiana \mathbf{J} $M \times M$ de derivadas parciales. Si $M = 2$, entonces

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Dado que el Jacobiano J es el determinante de la matriz \mathbf{J}

$$J = |\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \quad (2.66)$$

El Jacobiano y la matriz de separación Un ejemplo con $M = 2$ es usado para ilustrar la relación entre la matriz Jacobiana \mathbf{J} y la matriz de separación \mathbf{W} .

Dado que $\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$, se tiene:

$$y_1 = w_{11}x_1 + w_{12}x_2 \quad (2.67)$$

y

$$y_2 = w_{21}x_1 + w_{22}x_2 \quad (2.68)$$

donde,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

De la ecuación (2.65), la matriz Jacobiana requiere expresiones para $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$. Las primeras dos derivadas parciales se obtienen de la ecuación (2.67), mientras que las últimas dos se obtienen de la ecuación (2.68):

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = w_{11} \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = w_{12} \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = w_{21} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = w_{22} \quad (2.73)$$

Substitución de las ecuaciones (2.70)-(2.73) dentro de la matriz Jacobiana en la ecuación (2.65) y dado que este resultado sería idéntico a la expresión para \mathbf{W} usada en la ecuación (2.69):

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{W} \quad (2.74)$$

El determinante de \mathbf{J} es entonces el determinante de \mathbf{W} ,

$$J = |\mathbf{J}| = |\mathbf{W}| \quad (2.75)$$

La expresión multivariable para entropía en la ecuación (2.63) requiere una expresión para $p_y(\mathbf{y})$, donde $p_y(\mathbf{y}) = p_x(\mathbf{X})/|\partial\mathbf{y}/\partial\mathbf{x}|$ como se muestra en la ecuación (2.64). Como $|\partial\mathbf{y}/\partial\mathbf{x}|$ es el Jacobiano, de la ecuación (2.75)

$$\left| \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}} \right| = J = |\mathbf{W}| \quad (2.76)$$

y el PDF de la señal extraída puede re-escribirse como:

$$p_y(\mathbf{y}) = \frac{p_x(\mathbf{x})}{|\mathbf{W}|} \quad (2.77)$$

Este resultado lleva a la expresión de entropía usada por el algoritmo de InfoMax.

Expresión de InfoMax para entropía Substituyendo la expresión para las PDF de las señales extraídas encontrada en la ecuación (2.77) en la expresión para entropía de la ecuación (2.63), se obtiene

$$H(Y) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln\left(\frac{p_x(\mathbf{x}^t)}{|\mathbf{W}|p_s(\mathbf{y}^t)}\right) \quad (2.78)$$

Usando las propiedades de los logaritmos:

$$H(Y) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\ln p_X(\mathbf{X}^t) - \ln|\mathbf{W}| - \ln p_s(\mathbf{y}^t)) \quad (2.79)$$

Distribuyendo las sumatorias:

$$H(Y) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln p_X(\mathbf{X}^t) + \sum_{t=1}^N p_s(\mathbf{y}^t) + \ln|\mathbf{W}| \quad (2.80)$$

Cuando la primera parte de la ecuación (2.80) se compara con la expresión de entropía en la ecuación (2.60), se reconoce como la entropía de \mathbf{X} :

$$H(\mathbf{X}) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln p_X(\mathbf{X}^t) \quad (2.81)$$

Y la ecuación (2.80) puede ser ahora reescrita como

$$H(\mathbf{Y}) = H(\mathbf{X}) + \sum_{t=1}^N \ln p_s(\mathbf{y}^t) + \ln |\mathbf{W}| \quad (2.82)$$

Dado que la matriz \mathbf{W} que maximiza la entropía $H(\mathbf{Y})$ no afecta la entropía $H(\mathbf{X})$, $H(\mathbf{X})$ puede ser ignorado, lo cual significa que la matriz de separación que maximiza la ecuación (2.82) también maximiza:

$$h(\mathbf{Y}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln p_s(\mathbf{y}^t) + \ln |\mathbf{W}| \quad (2.83)$$

La ecuación (2.83) puede modificarse ignorando el orden de las señales M , lo que resulta en

$$h(\mathbf{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^N \ln p_s(y_i^t) + \ln |\mathbf{W}| \quad (2.84)$$

La \mathbf{W} que maximiza la ecuación (2.84) maximiza la entropía en \mathbf{Y} lo que implica que las filas de \mathbf{Y} son independientes. Dado que \mathbf{y} es la inversa de \mathbf{Y} , esto quiere decir que las columnas de \mathbf{y} son independientes, lo que a su vez significa que \mathbf{W} es la matriz de separación que entrega las señales originales.

Gradiente Ascendente La ecuación (2.84) ofrece la entropía de las señales transformadas \mathbf{Y} dentro de una constante. El objetivo de InfoMax es encontrar una matriz de separación \mathbf{W} que maximice la entropía de \mathbf{Y} , o equivalentemente maximice $h(\mathbf{Y})$ donde $\mathbf{Y} = g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{W}\mathbf{x})$. El gradiente ascendente es el método utilizado para optimizar la matriz de separación \mathbf{W} . Este proceso es un método iterativo que “toma un paso” en la dirección de gradiente máximo hasta alcanzar un máximo local.

La ecuación (2.84) se reescribe tomando el valor esperado sobre el tiempo en lugar de asumir

que todos los pasos de tiempo son independientes,

$$h(\mathbf{Y}) = E\left\{\sum_{i=1}^M \ln p_s(\mathbf{y}_i)\right\} + \ln|\mathbf{W}|. \quad (2.85)$$

El gradiente se encuentra tomando la derivada parcial de h con respecto a \mathbf{W} , $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{W}}$, y con propósito de simplificación, el gradiente es primero encontrado con respecto a un elemento de \mathbf{W} , $\frac{\partial h}{\partial W_{ij}}$, y es expandido a cada elemento. Por lo tanto,

$$\frac{\partial h}{\partial W_{ij}} = E\left\{\sum_{i=1}^M \frac{\partial \ln g'(y_i)}{\partial W_{ij}}\right\} + \frac{\partial \ln|\mathbf{W}|}{\partial W_{ij}} \quad (2.86)$$

la simplificación de esta derivada parcial se lleva a cabo en dos partes.

Primer término de la ecuación (2.86) Para simplificar la ecuación (2.86), se examina la derivada parcial:

$$\frac{\partial \ln g'(y_i)}{\partial W_{ij}} \quad (2.87)$$

dejando que

$$u = g'(y_i). \quad (2.88)$$

La ecuación (2.87) puede expresarse

$$\frac{\partial \ln u}{\partial W_{ij}} \quad (2.89)$$

Usando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \ln u}{\partial W_{ij}} = \frac{1}{u} u'. \quad (2.90)$$

La ecuación (2.88) ofrece una expresión para u , y la derivada de u es

$$u' = \frac{\partial u}{\partial W_{ij}} = \frac{\partial g'(y_i)}{\partial W_{ij}} \quad (2.91)$$

Reemplazando la expresión en la ecuación (2.90) con las ecuaciones (2.88) y (2.91), se obtiene

$$\frac{\partial \ln u}{\partial W_{ij}} = \frac{1}{g'(y_i)} \frac{\partial g'(y_i)}{\partial W_{ij}} \quad (2.92)$$

La expresión $\partial g'(y_i)/\partial W_{ij}$ en la ecuación (2.92) puede ser simplificada usando la regla de la cadena y la notación de Leibniz,

$$\frac{\partial g}{\partial W} = \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial W}. \quad (2.93)$$

De la ecuación (2.93),

$$\frac{\partial g'(y_i)}{\partial W_{ij}} = \frac{\partial g'(y_i)}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial W_{ij}}. \quad (2.94)$$

Y la ecuación (2.94) se simplifica,

$$\frac{\partial g'(y_i)}{\partial W_{ij}} = g''(y_i) \frac{\partial y_i}{\partial W_{ij}}. \quad (2.95)$$

La expresión $\partial y_i/\partial W_{ij}$ es un elemento de la mezcla x . Generalizando las ecuaciones (2.67) y (2.68) con esta expresión se obtiene,

$$\frac{\partial y_i}{\partial W_{ij}} = x_i \quad (2.96)$$

Substituyendo la ecuación (2.96) en la ecuación (2.95),

$$\frac{\partial g'(y_i)}{\partial W_{ij}} = g''(y_i)x_j. \quad (2.97)$$

Ahora, substituyendo la ecuación (2.97) en (2.92),

$$\frac{\partial \ln u}{\partial W_{ij}} = \frac{1}{g'(y_i)} g''(y_i)x_j. \quad (2.98)$$

La ecuación (2.98) puede reemplazar la expresión $\partial \ln g'(y_i)/\partial W_{ij}$ en el esperado en la ecuación (2.86), lo que resulta en

$$\frac{\partial h}{\partial W_{ij}} = E\left\{ \sum_{i=1}^M \frac{g''(y_i)}{g'(y_i)x_j} \right\} + \frac{\partial \ln |\mathbf{E}|}{\partial \ln W_{ij}} \quad (2.99)$$

Ahora $g''(y_i)/g'(y_i)$ puede simplificarse por conveniencia. Se define

$$\psi(y_i) = \frac{g''(y_i)}{g'(y_i)} \quad (2.100)$$

y la ecuación (2.99) puede expresarse como

$$\frac{\partial h}{\partial W_{ij}} = E\left\{\sum_{i=1}^M \psi(y_i)x_j\right\} + \frac{\partial \ln|\mathbf{W}|}{\partial \ln W_{ij}}. \quad (2.101)$$

La ecuación (2.101) representa la derivada parcial de entropía de la ecuación (2.86) con el primer término completamente simplificado.

El segundo término de la ecuación (2.86) Para simplificar el segundo término de la ecuación (2.86), se utiliza un ejemplo para mostrar que

$$\frac{\partial \ln|\mathbf{W}|}{\partial E_{ij}} = [\mathbf{W}^{-T}]_{ij} \quad (2.102)$$

donde $[\mathbf{W}^{-T}]_{ij}$ es un elemento de la inversa de la matriz de separación transpuesta:

$$\mathbf{W}^{-T} = [\mathbf{W}^T]^{-1} \quad (2.103)$$

Cuando $M = 2$, la matriz de separación e

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

La transpuesta \mathbf{W}^T es

$$\mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

Y el determinante de la matriz de separación $|\mathbf{W}|$ es igual a el determinante de la matriz de separación transpuesta $|\mathbf{W}^T|$:

$$|\mathbf{W}| = w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12} = |\mathbf{W}^T|. \quad (2.106)$$

Cuando $i = j = 1$,

$$\frac{\partial \ln|\mathbf{W}|}{\partial \ln W_{11}} = \frac{\partial \ln(w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12})}{w_{11}} = \frac{w_{22}}{w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}} = \frac{w_{22}}{|\mathbf{W}|} \quad (2.107)$$

La transpuesta inversa \mathbf{W}^{-T} , usando la ecuación (2.105) en la ecuación (2.103), es

$$\mathbf{W}^T = [\mathbf{W}^T]^{-1} = \frac{1}{w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}} \begin{pmatrix} w_{22} & -w_{12} \\ -w_{21} & w_{11} \end{pmatrix} = \frac{w_{22}}{w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}} = \frac{w_{22}}{|\mathbf{W}|}. \quad (2.108)$$

Los métodos en las ecuaciones (2.107) y (2.108) llevan al mismo resultado, como es el caso para todos los valores i y j .

el gradiente de entropía La ecuación (2.102) puede ser substituida en la expresión para el gradiente de entropía en la ecuación (2.101), lo que resulta en

$$\frac{\partial h}{\partial W_{ij}} = E\left\{\sum_{i=1}^M \psi(y_i)x_j\right\} + [\mathbf{W}^{-T}]_{ij}. \quad (2.109)$$

Cuando esta expresión se expande a todos los elementos de la matriz de separación \mathbf{W} , ofrece una expresión completa para el gradiente de entropía ∇h , donde el gradiente de un escalar con respecto a una matriz se define como

$$\nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial W_{11}} & \frac{\partial h}{\partial W_{12}} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial W_{1M}} \\ \frac{\partial h}{\partial W_{21}} & \frac{\partial h}{\partial W_{22}} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial W_{2M}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial h}{\partial W_{M1}} & \frac{\partial h}{\partial W_{M2}} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial W_{MM}} \end{pmatrix}. \quad (2.110)$$

El gradiente de entropía ∇h para todos los elementos de la matriz de separación \mathbf{W} es entonces

$$\nabla h = \mathbf{W}^{-T} + E\{\psi((y)\mathbf{x}^T)\}. \quad (2.111)$$

Y asumiendo que las señales son ergódicas, el esperado puede nuevamente ser mitigado, lo que resulta en

$$\nabla h = \mathbf{W}^{-T} + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi(\mathbf{y}^t) [\mathbf{X}^t]^T. \quad (2.112)$$

Algoritmo de gradiente Ascendente para Infomax La matriz de separación óptima \mathbf{W} es encontrada maximizando la entropía; es decir, siguiendo iterativamente el gradiente ∇h hasta

que un máximo local sea alcanzado. Esto es logrado con el siguiente algoritmo:

$$\mathbf{W}_{new} = \mathbf{W}_{old} + \eta \nabla h \quad (2.113)$$

Donde η es una constante pequeña. Insertando la expresión para ∇h de la ecuación (2.112) en la ecuación (2.113), se obtiene la expresión que optimiza la matriz de separación \mathbf{W} para maximizar la entropía.

$$\mathbf{W}_{new} = \mathbf{W}_{old} + \eta \left(\mathbf{W}^{-T} + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi(\mathbf{y}^t) [\mathbf{X}^t]^T \right) \quad (2.114)$$

La ecuación (2.114) es la forma general del algoritmo de InfoMax usando gradiente ascendente para optimizar la matriz de separación \mathbf{W} . Es importante notar que el gradiente ascendente solamente encuentra un máximo local, el cual no es necesariamente el máximo global. Esto puede mitigarse corriendo el algoritmo varias veces iniciando de diferentes puntos [17].

2.4.1.10. Identificación ciega de segundo orden (SOBI)

Si las señales fuentes están correlacionadas, la identificación ciega es posible basada en matrices de correlación espacial; estas matrices muestran una simple estructura que permite una simple identificación ciega basada en la eigen-descomposición.

SOBI (*second order blind identification*) está basada en la diagonalización conjunta de un conjunto de matrices de correlación.

Modificando las variables de la ecuación (2.2) para empatar a aquellas usadas por Belochrani, Abed, et al. En su trabajo de 1993 [19], tenemos:

$$x(t) = y(t) + n(t) = As(t) + n(t) \quad (2.115)$$

donde $s(t)$ es un vector complejo m cuya p -ésima componente, denotada $s_p(t)$ es la señal emitida por la p -ésima fuente. La matriz compleja A de dimensiones $n \times m$ se asume que tiene rango completo pero es desconocida. Las señales fuente son procesos estacionarios de segundo orden

mutuamente decorrelacionados. Se nota por

$$E(s_i(t)s_j^*(t')) = \rho_i(t-t')\delta_{ij} \quad \forall t, t' \quad (2.116)$$

EL ruido aditivo $n(t)$ se asume ser espacialmente y temporalmente decorrelacionado con las señales fuente. Bajo estas suposiciones, las matrices de correlación toman una estructura simple:

$$R(t) \doteq E(x(t+\tau)x^*(t)) = AS(\tau)A^H + \delta(\tau)\sigma I \quad (2.117)$$

donde $S(\tau) \doteq E(s(t+\tau)s^*(t))$ es la matriz de correlación de las señales fuentes; en (2.116), es una matriz diagonal con entradas $\rho_i(\tau)$. En (2.117), un vector es transconjugado por el superíndice $*$ y una matriz con el superíndice H .

Si se utiliza el proceso de blanqueo, descrito en la sección de pre-procesamiento para ICA y a la matriz que efectúa este blanqueo se denota con W , la matriz de blanqueamiento verifica, por definición,

$$I = W((W_y(t))(W_y(t))^*) = WAS(0)A^H W^H = (WA)(WA)^H \quad (2.118)$$

Así WA es una matriz unitaria $m \times m$. Lo siguiente es que para matriz de blanqueo W existe una matriz unitaria U de dimensiones $m \times m$ tal que,

$$WA = U \quad \text{or} \quad A = W^\sharp U \quad (2.119)$$

donde el superíndice \sharp denota la pseudoinversa.

Debido a que $AS(0)A^H = R(0) - \sigma I$, la ecuación (2.118) muestra que la matriz de blanqueo W puede determinarse a partir del arreglo de covarianza salida $R(0)$.

Un principio de identificación de segundo orden Dejando que W denote una matriz de blanqueo y considerar las matrices de correlación blanqueadas $R(\tau)$ definidas como,

$$\forall \tau \neq 0 \quad \hat{R}(\tau) = WR(\tau)W^H. \quad (2.120)$$

Estas matrices complejas no son más que las matrices de correlación del proceso de blanqueo $Wx(t)$. Usando (2.117) y (2.119), se obtiene la siguiente relación clave:

$$\forall \tau \neq 0 \quad \hat{R}(\tau) = US(\tau)U^H. \quad (2.121)$$

Dado que U es unitario y $S(\tau)$ es diagonal, ésto quiere decir que cualquier matriz de correlación blanqueada es diagonalizada por la transformada unitaria U .

Un simple principio de indentificación ciega es entonces la diagonalización de matrices de correlación blanqueadas. La diagonalización de algunas $R(\tau)$ provee parámetros relevantes si tiene distintos eigenvalores.

Existe una indeterminación en el caso de eigenvalores degenerados. No parece posible determinar con conocimiento previo algunos retrasos de valor τ tales que los eigenvalores de $R(\tau)$ sean distintos. La situación se vuelve más favorable si se considera la diagonalización simultánea de un conjunto de p matrices de correlación blanqueadas $\{R(\tau_i) | i = 1, \dots, p\}$. Este conjunto es diagonalizado simultáneamente por U . Esta matriz U es esencialmente única si y solo si para cualquier par (ij) de fuentes, existe al menos un retraso de tiempo τ_i en (τ_1, \dots, τ_p) tal que $\rho_i(\tau_i) \neq \rho_j(\tau_i)$.

Diagonalización conjunta La diagonalización conjunta exacta de matrices arbitrarias es, en general, imposible. Aquí se define una diagonalización conjunta para un conjunto de matrices arbitrarias. La diagonalización de una sola matriz hermitiana $n \times n$ puede entenderse como la minimización bajo la transformada unitaria la suma del módulo cuadrado de todos los términos fuera de la diagonal. Esto es equivalente a minimizar el criterio:

$$C(M, V) \doteq - \sum_i |v_i^* M v_i|^2 \quad (2.122)$$

sobre un conjunto de matrices unitarias $V = [v_1, \dots, v_n]$. Naturalmente se define la aproximación de diagonalización de un conjunto $M = \{M_k | k = 1..K\}$ de K matrices $n \times n$ arbitrarias como la

minimización del criterio:

$$C(V) \doteq -\sum_k C(M_k, V) = -\sum_{ki} |v_i^* M_k v_i|^2 \quad (2.123)$$

bajo la misma restricción unitaria. La ecuación (2.123) se aplica a cualquier conjunto de matrices cuadradas arbitrarias.

Algoritmo de SOBI Primeramente se se forma la muestra de covarianza $\hat{R}(0)$ de las T muestras y se diagonaliza,

$$\hat{R}(0) = L\Delta L^H \quad (2.124)$$

donde $L = [l_1, \dots, l_n]$ y $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con $\lambda_i \geq \lambda_j$ para $i > j$. Un estimado $\hat{\sigma}$ de el ruido se forma promediando los $n - m$ eigenvalores más pequeños en Δ . Una matriz de blanqueo $\hat{W}_x(t)$ se calcula como:

$$\hat{W} = \Delta' L', \quad (2.125)$$

donde $\Delta' = \text{diag}((\lambda_1 - \hat{\sigma})^{-\frac{1}{2}}, \dots, (\lambda_m - \hat{\sigma})^{-\frac{1}{2}})$ y $L' = [l_1, \dots, l_m]$. El conjunto de datos es blanqueado, entonces, como $\hat{W}_x(t)$, el cual permite formar, en m dimensiones las muestras de estimados $\hat{R}(\tau)$ de las matrices de correlación blanqueadas para $\tau \in \{\tau_j | j = 1, \dots, p\}$, un conjunto fijo de retrasos de tiempo. Una matriz unitaria U se obtiene posteriormente en la diagonalización conjunta (descrito en el siguiente apartado) del conjunto $\{\hat{R}(\tau_j) | j = 1, \dots, p\}$. Las señales fuente son estimadas a partir de $\hat{s} = \hat{U}^H \hat{W}_x(t)$

Un algoritmo de aproximación de diagonalización conjunta El método propuesto por Belouchrani, et al [19]. Para efectuar un aproximado de la diagonalización conjunta de matrices consiste en minimizar el criterio de diagonalización (ecuación (2.123)) por medio de rotaciones de Givens sucesivas, lo cual lleva a resolver el problema para K matrices de 2×2 :

$$H(k) = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \quad (2.126)$$

para $k = 1, \dots, K$. Una matriz unitaria V se busca de modo tal que $H'_k = (V^H H)kV$ ($k = 1, \dots, K$) minimice el criterio (2.123). La transformación unitaria V se parametriza por las rotaciones de Givens complejas:

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta & \exp^{j\phi} \sin \theta \\ -\exp^{-j\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.127)$$

Denotando a'_k, b'_k, c'_k y d'_k los coeficientes de H'_k ; la optimización de (2.123) significa encontrar θ y ϕ tales que $\sum_k |a'_k|^2 + |d'_k|^2$ sea máximo. Notece que $2(|a'_k|^2 + |d'_k|^2) = |a'_k - d'_k|^2 + |a'_k + d'_k|^2$ y que el rastro $a'_k + d'_k$ no varía en una transformación unitaria, la optimización del criterio (2.123) es equivalente en cada rotación de Givens a la maximización de Q :

$$Q \doteq \sum_k |a'_k - d'_k|^2 \quad (2.128)$$

Aquí

$$a'_k - d'_k = (a_k - d_k) \cos 2\theta - (b_k + c_k) \sin 2\theta \cos \phi - j(c_k - b_k) \sin 2\theta \sin \phi \quad (2.129)$$

Para $k = 1, \dots, K$. Entonces, definiendo los vectores

$$u^T \doteq [a'_1 - d'_1, \dots, a'_K - d'_K] \quad (2.130)$$

$$v^T \doteq [\cos 2\theta, -\sin 2\theta \cos \phi, -\sin 2\theta \sin \phi] \quad (2.131)$$

$$g_k^T \doteq [a_k - d_k, b_k + c_k, j(c_k - b_k)] \quad (2.132)$$

Las ecuaciones K (2.129) pueden escribirse en la forma $u = G_v$ donde $G^T \doteq [g_1, \dots, g_K]$ de manera que Q ,

$$Q = u^H u = v^T G^H G v = v^T \text{Real}(G^H G) v \quad (2.133)$$

donde $G^H G$ siendo hermitiana por construcción, su parte imaginaria es anti-simétrica, por lo que no contribuye a la forma cuadrática de arriba. El último paso es reconocer que la parametrización particular (2.131) de v es equivalente a la condición $v^T v = 1$. Maximizando una forma cuadrática bajo la restricción de norma unitaria de su argumento se obtiene clásicamente tomando a v como

el eigenvector de $\Re(G^H G)$ asociado con el eigenvalor más grande. [19]

Capítulo 3

Desarrollo

Durante este capítulo se explica la metodología seguida para conseguir los objetivos de esta tesis. Desglosando de manera general, lo primero que se buscó fue el desarrollo de los algoritmos de separación ciega de fuentes, ya sea siguiendo las instrucciones ofrecidas en los artículos de los autores que desarrollaron el método, u obteniéndolos ya codificados por algunos autores que han trabajado con ellos.

Una vez conseguidos los programas se procedió a revisar que cumplieran su trabajo de separación de manera visual. Confirmando esto se buscó la mejor manera de cuantificar la separación, lo que llevó a la implementación de dos métricas de calidad de separación; la relación señal a interferencia y ruido (*Signal to interference and noise ratio*. **SINR**) y el error cuadrático medio normalizado (*Normalized mean square error*. **NMSE**).

Con efectos de tener un método que sea capaz de ofrecer una separación de calidad superior a la lograda por separación ciega de fuentes y que funcione como referencia, se implementó un método que utiliza la técnica de **mínimos cuadrados**, obteniendo así la mejor separación que puede ser lograda usando una señal como referencia.

Con estos parámetros establecidos se obtuvieron señales electroencefalográficas libres de artefactos, así como los artefactos mismos, por lo que se decidió modelar estas señales. Así, con los algoritmos listos para usarse y las señales de interés en la base de datos se procedió a hacer las evaluaciones correspondientes variando parámetros que pueden ser de importancia cuando se adquieren señales fisiológicas.

3.1. Algoritmos de separación ciega de fuentes

La implementación de los algoritmos fue realizada con el software MATLAB[®]. En este apartado se muestran los diagramas de flujo de los programas así como la complejidad computacional que éstos presentan. Para la evaluación de estos programas este último parámetro es útil dado que los algoritmos son programas computacionales que realizan principalmente operaciones matemáticas; el análisis de complejidad computacional permite medir qué tan rápido un programa realizará estas operaciones sin que el tipo de procesador, capacidad de memoria o arquitectura de la computadora en general afecte el cálculo, como sucede con el tiempo de cómputo. De manera simplificada, un algoritmo es más complejo computacionalmente entre más ciclos tenga dentro de sí, e.g., un código sin ningún tipo de ciclo, se dice que es de tipo constante, denotándose como un algoritmo $O(1)$, si el programa cuenta con un ciclo *for* tendrá una complejidad de $O(N)$; si tiene un ciclo, dentro de otro ciclo, éste será $O(N^2)$, si tiene un ciclo dentro de un ciclo dentro de un ciclo, entonces será $O(N^3)$ y así sucesivamente [21]. Este tipo de notación es llamado *Big-O* e indica el comportamiento del programa a la cantidad de datos que se ingresen al algoritmo, i.e., el crecimiento de programa $O(1)$, en cuestiones de complejidad no presenta un reto, pues al ser una constante, entre más datos se ingresen la complejidad es la misma. Con programas $O(N^2)$ y $O(N^3)$ el comportamiento es parabólico y cúbico respectivamente, lo que significa que más complejo es un programa $O(N^3)$ porque tiende a crecer más rápido que una función cuadrática. Para el lector interesado puede revisar la página web [21] donde el autor explica de manera simple la función de este análisis y como puede ser calculado a detalle.

3.1.1. FastICA

El algoritmo de FastICA fue codificado a partir de las referencias [14] y [13]. El algoritmo presentado por Hyvärinen se encuentra en ambos documentos y se expuso en la sección de antecedentes. Además aquí se hace mención nuevamente del mismo:

1. Escoger un vector de peso \mathbf{w} inicial, e.g., aleatorio.
2. Dejar $\mathbf{w}^+ = E\{\mathbf{x}g(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\} - E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\}\mathbf{w}$
3. Dejar $\mathbf{w} = \mathbf{w}^+ / \|\mathbf{w}^+\|$

4. Si no hay convergencia, regresar al paso 2.

Recordar que las funciones g pueden ser escogidas de entre:

$$g(y) = \tanh(\alpha_1 y) \quad (3.1)$$

$$g(y) = y \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \quad (3.2)$$

$$g(y) = y^3 \quad (3.3)$$

y g' es las derivadas de las ecuaciones anteriores:

$$g'(y) = \alpha_1 (1 - \tanh^2(\alpha_1 y)) \quad (3.4)$$

$$g'(y) = (1 - y^2) \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \quad (3.5)$$

$$g'(y) = 3y^2 \quad (3.6)$$

Para el caso de que se tenga más de una componente a recuperar, puede escogerse entre usar la decorrelación de Gram-Schmidt, donde se estima un componente, posteriormente se aplica la decorrelación y luego se estima otra componente. Para no dar ventaja a algún estimado, se puede utilizar la ortogonalización simétrica, donde los componentes se estiman al mismo tiempo, en este caso el algoritmo se ejecuta para cada fila de la matriz W y posteriormente se utiliza la siguiente forma de decorrelación:

$$\begin{aligned} 1. \mathbf{W} &= \mathbf{W} / \sqrt{\|\mathbf{W}\mathbf{W}^T\|} \\ 2. \mathbf{W} &= \frac{3}{2}\mathbf{W} - \frac{1}{2}\mathbf{W}\mathbf{W}^T\mathbf{W} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ésto se repite hasta que exista convergencia. El diagrama de flujo se presenta en la figura 3.1 como medio visual para mejor interpretación del algoritmo. El algoritmo fue codificado de manera que la elección de los diferentes tipos de funciones sea sencilla. A continuación se muestra el resultado final del código de FastICA.

Inicialmente, como se menciona en el documento de Hyvärinen [14], el pre-procesamiento consiste en blanquear los datos. El siguiente código realiza esta tarea:

```
[m,long]=size(x);%obtener dimensiones de la mezcla
```

```

prome=mean(x,2);%centrar los datos
x=bsxfun(@minus,x,prome);
covax=cov(x');
[evectores,evalores]=eig(covax);%usar eigendescomposicion
evalores=diag(evalores);
D=diag(1./sqrt(evalores));
E=evectores;
z=E*D*E'*x;%blanqueo de datos
Dw=E*D*E';%matriz de blanqueo

```

Una vez que las señales están decorrelacionadas, es posible aplicar el algoritmo de FastICA:

```

w=rand(m,m);%Inicializando W
w1=w;
err=1e-10; %Error de convergencia
er=1e10;
w0=[];
k=0;
maxits=1000; %Numero maximo de iteraciones
W=zeros(m,m);
a1=1;
funege=3;
for i=1:m
    w=w1(i,:);%seleccionando para recuperar primera componente
    w=w./sqrt(sum(w.^2,2));
    er=1e10;%error inicial
    while(er>err) && (k<maxits)
        w0=w;
        wtz=w*z;
        %Para seleccionar el tipo de funciones
        if funege==1
            g=tanh(wtz);
            gp=a1*(1-(tanh(a1*wtz)).^2);
        elseif funege==2
            g=wtz.*exp(-wtz.^2/2);
            gp=(1-wtz.^2).*exp((-wtz.^2)/2);
        elseif funege==3
            g=wtz.^3;
            gp=3*(wtz.^2);
        end
        uno=z*g'/long;
        dos=mean(gp)*w;
        w=uno'-dos;
        k=k+1;
        if i > 1 %Aplicando ortogonalizacion de Gram-Schmidt
            for n=1:m-1

```

```

        B=W(n, :);
        w=w-(w*B')*B;
        end
    end
    w=w/sqrt(sum(w.^2,2));
    er=1-w*w0';
end
W(i,:)=w; %Guardar la primera componente estimada
end
y=W*z; %Recuperando las fuentes

```

Como es posible observar, el código escrito cuenta con un ciclo *while* dentro de un ciclo *for* lo que significa que la complejidad computacional, de acuerdo a la notación *Big-O* es $O(N^2)$.

3.1.2. InfoMax

Este algoritmo fue implementado por J. Hill con el objetivo de separar mezcla de señales de comunicación polares NRZ (*non-return to zero*) [17]. El método de InfoMax para la separación de señales tiene la peculiaridad de utilizar un gradiente de información cuyo parámetro de variación está determinado por una variable, en este caso w , de modo que una w óptima será aquella que ofrezca el máximo valor de información que puede proporcionar el gradiente. La técnica que busca esa w ideal es denominada gradiente ascendente, como se mencionó anteriormente. Debido a que el mayor valor de entropía recae en el máximo absoluto del gradiente, cuando se busca este máximo valor es posible que w encuentre sólo uno local de la superficie, entregando un dato que aparentemente es el mejor, cuando existe otro de mejores características que está en el máximo global. Este problema conlleva a una alta probabilidad de error, por lo que debe haber una selección del tamaño de “pasos” que debe seguir W . La autora de [17] modificó el programa de gradiente ascendente, moviendo automáticamente estos tamaños de paso de modo que existan diferentes valores de entropía encontrados por el algoritmo a diferentes iteraciones, abarcando así una mayor posibilidad de encontrar ese valor máximo de información, evitando la selección adecuada y aleatoria de un valor de búsqueda.

En el anexo de su trabajo de tesis, Hill publica el algoritmo desarrollado, el cual, a su vez, es una modificación del código encontrado en [18]. Debido a las características ofrecidas por esta versión de InfoMax mejorada, el código fue tomado para ser implementado en este traba-

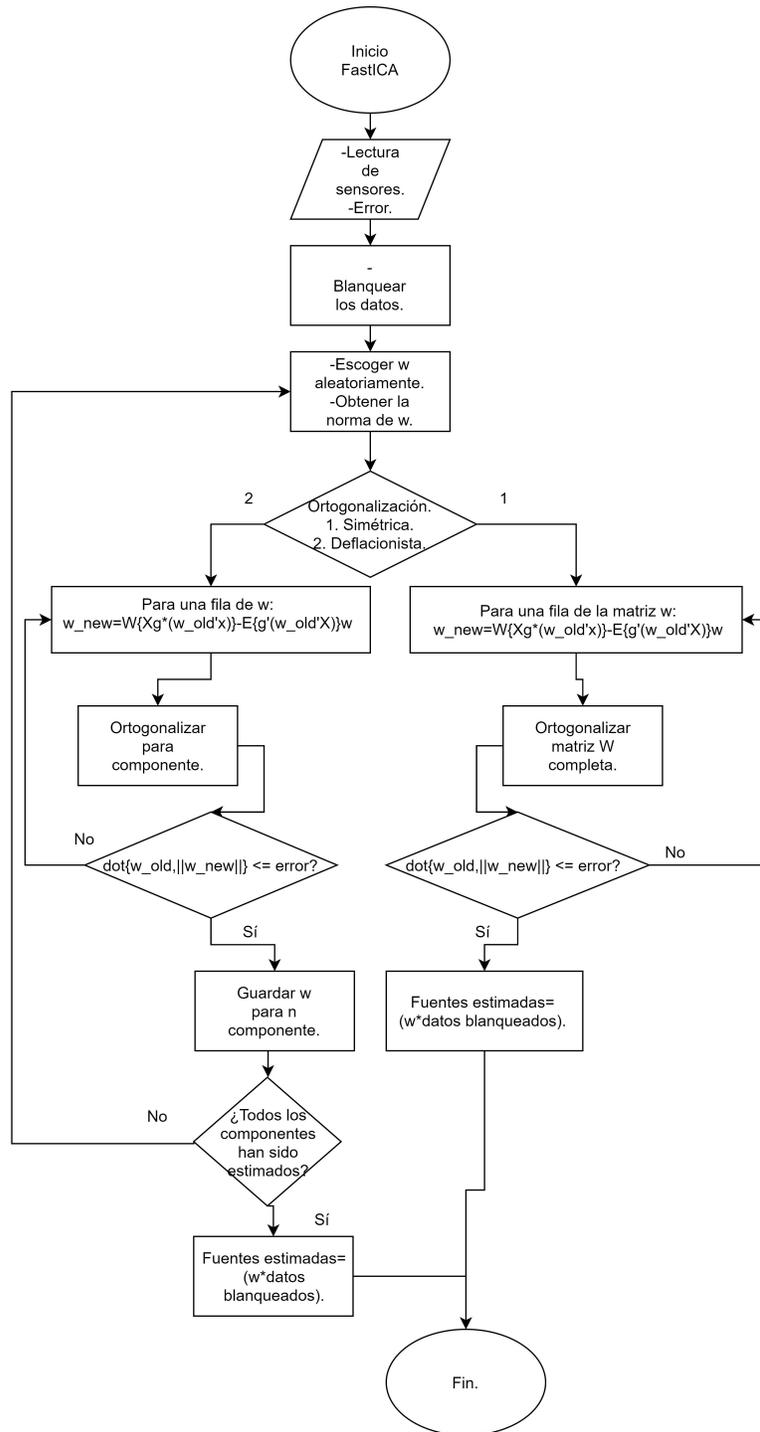


Figura 3.1: Diagrama de flujo del algoritmo FastICA.

jo. El algoritmo puede ser encontrado en el apéndice de esta tesis. El diagrama de flujo para InfoMax se muestra en la figura 3.2. Con respecto a su complejidad computacional, podemos observar que se trata de un programa $O(N^2)$ debido a que existe un ciclo *for* dentro de otro ciclo *for*.

3.1.3. SOBI

El algoritmo de SOBI, está disponible en la web como programa de distribución libre [20]. El encabezado del archivo hace suponer que está codificado por los mismos autores que desarrollaron la técnica de identificación ciega de segundo orden (SOBI) [19]. Dicho esto, el código fue usado para evaluación durante este trabajo y se muestra en el apéndice B, donde se puede apreciar que existen dos ciclos *for*, uno dentro del otro, haciendo la complejidad de este código $O(N^2)$. El diagrama de flujo de SOBI se muestra en la figura 3.3.

3.2. Métodos cuantitativos de evaluación

La evaluación visual del desempeño de los algoritmos como se realizó anteriormente no ofrece una manera cuantitativa de expresar cuánto artefacto fue removido, por lo que es necesaria la implementación de algunas maneras de ofrecer numéricamente este dato.

3.2.1. Relación señal interferencia-ruido

La relación señal a interferencia-ruido, abreviada SINR por su nombre en inglés; nos proporciona, en Decibeles, la calidad de una señal cuando ésta tiene señales interferentes y ruido. Está definida normalmente por:

$$10\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_I + P_n}\right) \quad (3.8)$$

donde P_s es la potencia de la señal, P_I es la potencia de la interferencia y P_n es la potencia del ruido.

Para evaluar la SINR de nuestro algoritmo, primero tenemos que recurrir al modelo matemático

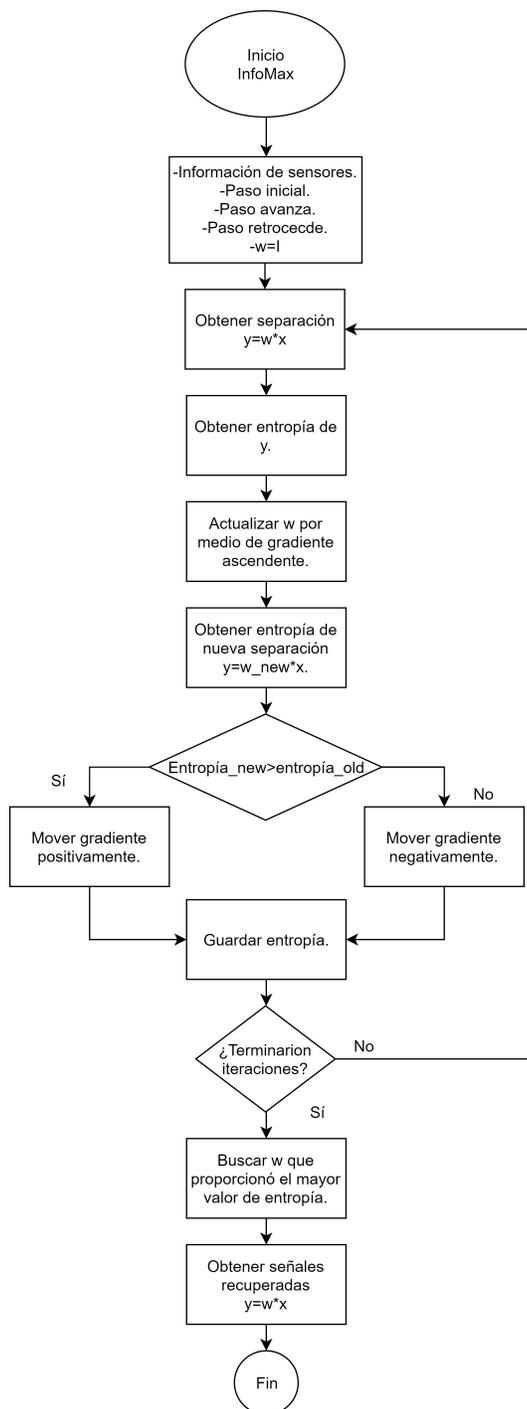


Figura 3.2: Diagrama de flujo del algoritmo InfoMax.

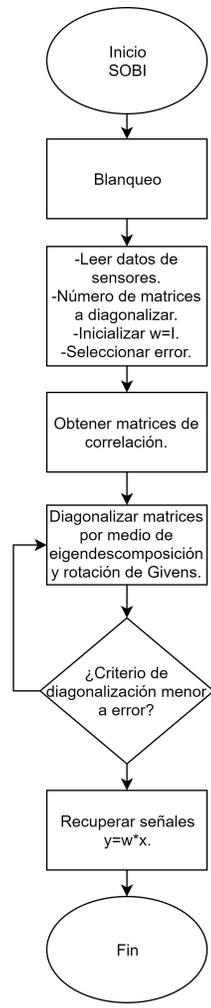


Figura 3.3: Diagrama de flujo del algoritmo SOBI.

original de separación ciega de fuentes,

$$x(t) = As(t) + n(t). \quad (3.9)$$

Posteriormente, recordando que los métodos que resuelven el problema de separación ciega de fuentes encuentran una matriz de separación W que es inversa a la matriz de mezcla A (2.5), por lo tanto, $WA = I$. Aplicando este principio anterior tenemos el siguiente procedimiento de recuperación:

$$\begin{aligned} y(t) &= Wx. \\ y(t) &= WAs(t) + Wn(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por lo tanto, ejemplificando con la recuperación de dos fuentes,

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11}a_{11} + w_{12}a_{21} & w_{11}a_{12} + w_{12}a_{22} \\ w_{21}a_{11} + w_{22}a_{21} & w_{21}a_{12} + w_{22}a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11}n_1 + w_{12}n_2 \\ w_{21}n_1 + w_{22}n_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11}n_1 + w_{12}n_2 \\ w_{21}n_1 + w_{22}n_2 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1s_1(t) + 0s_2(t) \\ 0s_1(t) + 1s_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11}n_1 + w_{12}n_2 \\ w_{21}n_1 + w_{22}n_2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11}n_1 + w_{12}n_2 \\ w_{21}n_1 + w_{22}n_2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Por supuesto, las ecuaciones presentadas en (3.11) a (3.15) asumen que la recuperación de las fuentes ha sido 100% exitosa, dejando una matriz WA igual a la matriz identidad (ecuaciones

(3.12)-(3.13)). El factor en tal caso que deteriorará la calidad de la señal es el ruido gaussiano (n) que se suma al modelo.

En la práctica, obtener una matriz de separación que sea perfecta o cuasi-perfecta puede lograrse usando una referencia y por medio de la técnica de mínimos cuadrados y de la cual se hablará más adelante. Por el momento, con técnicas como la separación ciega de fuentes, es posible obtener una matriz de separación que ofrezca una buena calidad de separación, y esa calidad puede medirse usando la ecuación (3.8).

La raíz de la evaluación para la relación señal interferencia-ruido se encuentra en las ecuaciones (3.13) y (3.14). Cuando no se obtiene una matriz WA identidad, entonces existirán alguna diferencia entre ésta y la ideal (identidad), de manera que, observando la primera matriz de la segunda parte de la ecuación (3.14) es obvio que s_1 es la señal recuperada puesto que está multiplicada por un factor unitario; aquí s_2 es multiplicada por un factor 0, quedando cancelado como interferencia de s_1 , pero en casos reales normalmente no es así, sino que habrá algún número diferente de 0, y por más pequeño que éste sea, significa que ahora hay una porción del mismo en s_1 gracias a la suma.

Aquí, es posible incluir dos variables que serán los factores de la potencia y la interferencia para obtener el SIR (relación señal-interferencia porque no estamos incluyendo el ruido aún) de la recuperación de la primera componente, i.e., primera fila de las matrices, y_1 ,

$$\begin{aligned} g_1 &= w_{11}a_{11} + w_{12}a_{21} \\ g_2 &= w_{11}a_{12} + w_{12}a_{22} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Con estas variables, el SIR está definido como,

$$\text{SIR} = 10 * \log_{10}\left(\frac{P_s}{P_I}\right) = 10 * \log_{10}\left(\frac{g_1^2 E\{s_1(t)^2\}}{g_2^2 E\{s_2(t)^2\}}\right) \tag{3.17}$$

donde $E\{s_i(t)^2\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i^2$. Hasta este punto lo único que falta evaluar es la potencia del ruido, que es tomada de la segunda matriz de la segunda parte de la ecuación (3.15). Claramente se

observa que es una sumatoria de los ruidos de las señales presentes multiplicados por un factor, determinado por la matriz de separación. La potencia del ruido se define de la misma manera, como $P_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i^2$. Finalmente, este valor se suma a P_I obteniendo así la SINR de la señal recuperada [22]. Los algoritmos FastICA y SOBI, cuentan con el pre-procesamiento de blanqueo antes de comenzar la separación como tal; ésto quiere decir que la matriz de separación W es estimada a partir de datos “blancos” que se obtienen cuando una matriz de blanqueo, que se obtiene a través de la eigendescomposición, es multiplicada por la mezcla x . Por lo tanto, la matriz de mezcla también sufre el efecto de la matriz de blanqueo, por lo que la propiedad $WA = I$ no se cumple; para que esto continúe siendo verdad, la matriz de mezcla A debe ser multiplicada por la matriz de blanqueo. Denotando la matriz de blanqueo como B , se tiene que:

$$WBA = I, \quad (3.18)$$

pudiendo de esta manera determinar la relación señal a interferencia y ruido adecuadamente.

3.2.2. Error cuadrático medio normalizado

Abreviado NMSE por su nombre en inglés (Normalized mean square error), este parámetro de medición nos dirá que tan lejos está la señal recuperada de la señal original mediante una resta de las mismas. Idealmente, en el caso de que sean completamente iguales, el valor resultante será 0. Este valor de evaluación es sugerido en la referencia [23] y está definido como:

$$\text{NMSE} = 10 \log_{10} \left(E \left\{ \frac{\sum_{j=1}^N |\hat{x}_{i,j}^{(s)} - x_{i,j}^{(s)}|^2}{\sum_{j=1}^N |x_{i,j}^{(s)}|^2} \right\} \right) [\text{dB}] \quad (3.19)$$

donde $\hat{x}^{(s)}$ es la señal recuperada y $x^{(s)}$ es la señal original. El estimado existe en la ecuación para que se haga un promedio de los resultados cuando exista más de una evaluación [23].

Para la evaluación de esta métrica, existe un problema que proviene directamente del método de separación; la ambigüedad de energía/varianza (sección 2.4.1.4). Debido a que el algoritmo no puede determinar la energía original de las componentes, el resultado que entrega puede ser una señal de un orden mucho menor (o mayor) de magnitud comparado con la fuente original.

Debido a ésto la ecuación (3.19) puede no ser adaptada, pues aunque las fuentes sean iguales en forma de onda, el error puede ser mucho mayor que 0. Para poder aplicar esta medición a las separaciones, se propuso la normalización por energía de los fenómenos, de manera que si las señales son de misma forma de onda, su energía sea la misma haciendo que la resta entre original y estimado sea posiblemente 0. La normalización por energía se efectúa por medio de la siguiente operación para una señal $s(k)$:

$$E_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s(k)^2 \quad (3.20)$$

Posteriormente, la normalización para la misma señal $s(k)$ es:

$$s_n(k) = \frac{s(k)}{E_s}. \quad (3.21)$$

Esta operación se realiza para la señal original y el componente obtenido. Ahora la medición para el NMSE es posible aún y cuando la ambigüedad de escala existe.

3.2.3. Mínimos cuadrados

Éste es el modelo recuperador de señales de excelencia, utiliza la señal de referencia a la entrada del sistema y la mezcla, para deducir las componentes inversas de la matriz de mezcla,

$$W = x^* s \quad (3.22)$$

donde x^* es la pseudoinversa de los observables y s son las señales originales. Ésto entrega una matriz de separación prácticamente ideal que puede ser usada como una referencia para el desempeño de las salidas de un separador ciego y cualquier otro sistema cuya tarea sea la de separar fuentes.

3.3. Pruebas preliminares de funcionamiento de los algoritmos

3.3.1. Evaluación cualitativa de separación

La prueba que se realizó para saber si los algoritmos separan adecuadamente una mezcla de señales, fue de modo visual, solamente cerciorándose que la separación se llevó a cabo al observar las componentes de salida. Se utilizó una señal senoidal de 1 Hz de frecuencia y una señal cuadrada de 10 Hz de frecuencia como fuentes. A continuación se muestran las etapas de este proceso (figuras 3.4a-3.6b).

Para obtener la figura 3.4b una matriz de mezcla A cuadrada de 2×2 fue generada aleatoriamente y se multiplicó por la información original (3.4a), i.e., s_1 y s_2 (ecuación (3.9)). En esta ocasión el ruido no formó parte del modelo porque el resultado esperado es que los algoritmos ofrezcan una separación sin ningún obstáculo presente.

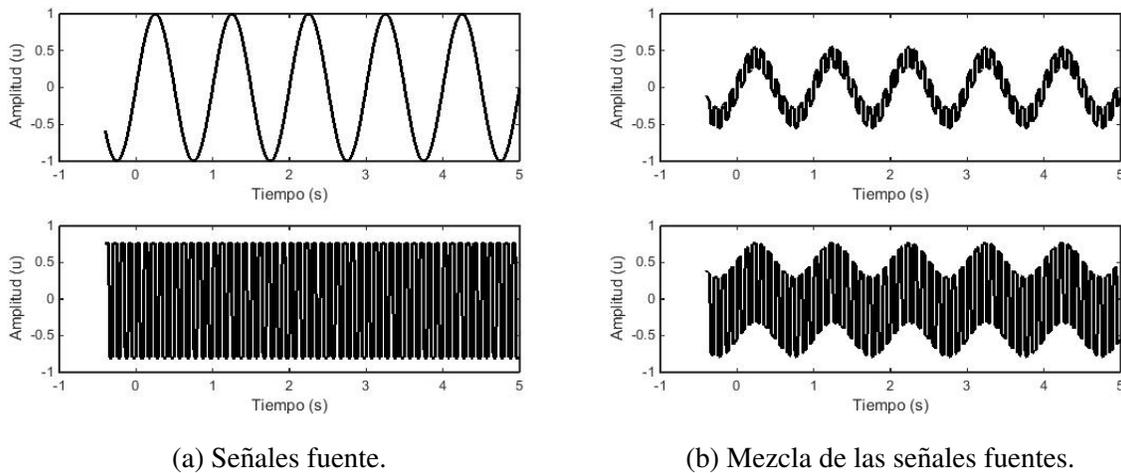
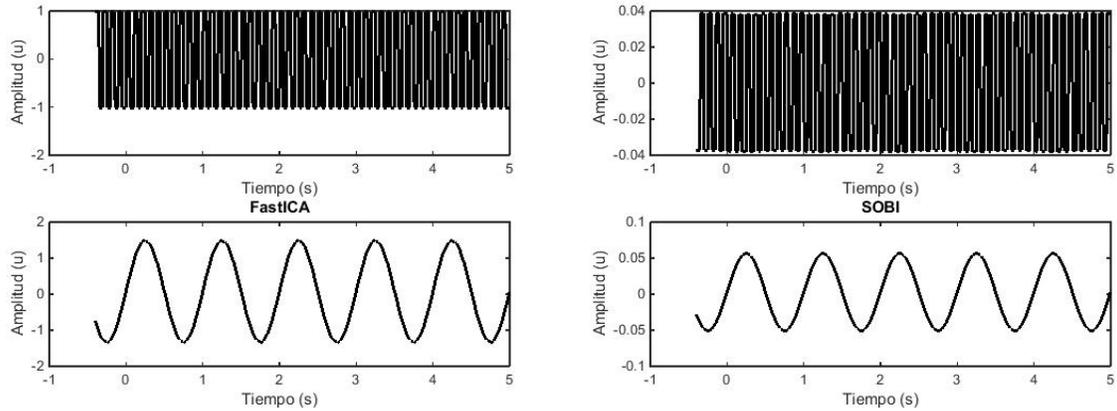


Figura 3.4: (a) señales originales. Arriba, señal senoidal de 1 Hz. Abajo, señal cuadrada de 10 Hz. Y (b) su mezcla para la prueba visual de separación de los algoritmos.



(a) Componentes obtenidas por el algoritmo FastICA (exp).

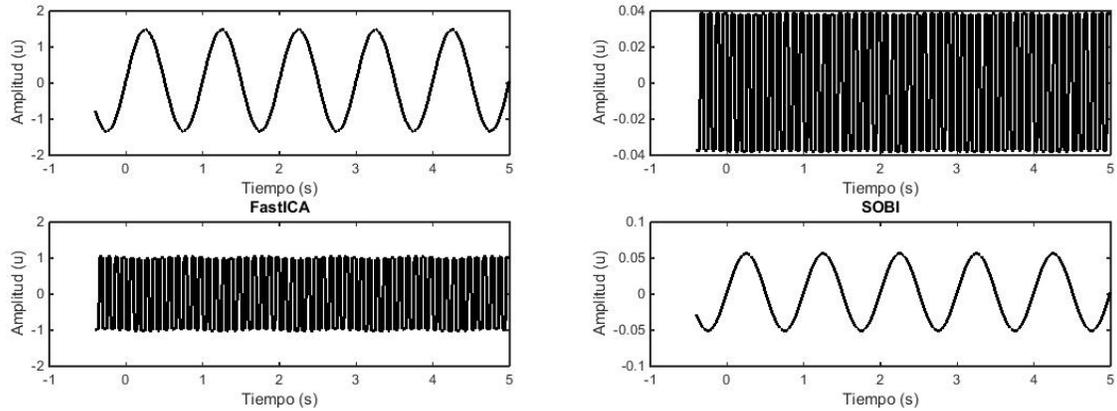
(b) Componentes obtenidas por el algoritmo SOBI.

Figura 3.5: Separaciones obtenidas por los algoritmos FastICA y SOBI de las mezclas de dos señales. Es posible notar la ambigüedad de escala de los algoritmos, debido a que las componentes entregadas no corresponden a las amplitudes de las señales originales.

De las figuras 3.6a y 3.6b, visualmente es posible concluir que la separación fue posible. En [17], el código de InfoMax se demostró que funcionaba adecuadamente separando señales de naturaleza super-gaussiana como lo son señales de audio ; las señales utilizadas aquí no poseen dicha naturaleza por lo que solamente FastICA y SOBI fueron probados.

3.3.2. Evaluación cuantitativa de separación

La separación de las fuentes mostradas en las figuras 3.4a se realizó nuevamente utilizando los métodos de evaluación cuantitativos descritos en la sección anterior.



(a) Métricas cuantitativas del algoritmo FastICA con función exponencial y su comparación con el método de mínimos cuadrados. FastICA: SINR=40.04 dB, NMSE=-22 dB. Mínimos cuadrados: SINR=294.40 dB, NMSE= -294.09 dB.

(b) Métricas cuantitativas del algoritmo SOBI y su comparación con el método de mínimos cuadrados. SOBI: SINR=53.04 dB, NMSE=-22.47 dB. Mínimos cuadrados: SINR=285.36 dB, NMSE=-285.13 dB.

Figura 3.6: Métricas cuantificadas de la separación de las fuentes (figure 3.4a) contenidas en la mezcla de la figura 3.4b y su correspondiente separación.

3.4. Modelado y simulación de señales biológicas

3.4.1. EEG y EP sintéticos

La principal razón que nos llevó a crear una señal EEG sintética para la evaluación de separación, la principal fue que los registros disponibles en nuestra base de datos contenían artefactos, siendo el movimiento de baja frecuencia uno de los más predominantes. Además, si estamos buscando detectar artefactos traslapados en una señal, un registro completamente limpio, que funcione como patrón de referencia es necesario. Además, una las técnicas y áreas de trabajo más utilizadas dentro del laboratorio 16 de la sección de bioelectrónica es el estudio de los potenciales evocados. Los EP, a lo largo de su estudio, se ha mencionado que pueden ser vistos como un cambio en la actividad de las neuronas al ser excitadas por un estímulo o como una respuesta ajena a las neuronas que forman la actividad electroencefalográfica [24]. De cualquier modo, las características de una señal de potencial evocado es diferente a las características de un EEG espontáneo, a tal grado que para descubrir un potencial evocado “escondido” dentro de la actividad neural, se realiza un promedio de los canales de adquisición. Lo anterior descubre

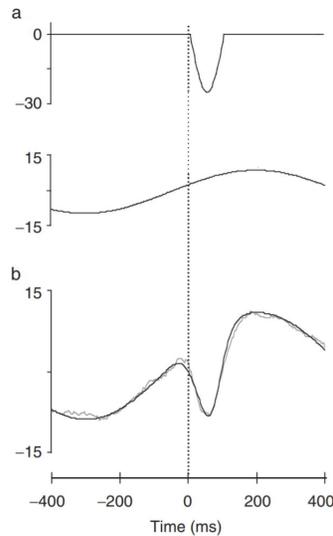


Figura 3.7: Dos ondas de baja frecuencia son sumadas para simular un ERP, tomada de [24].

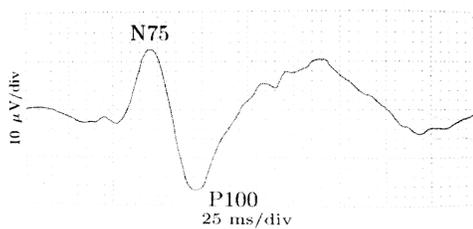
la posibilidad de que si un artefacto está localizado en la misma ventana de tiempo en la que se encuentra un potencial evocado, la aplicación de la técnica de componentes independientes podría extraer tal información de los registros. Dicho esto, un registro EEG con un potencial evocado con actividad EEG es útil para la evaluación de la separación realizada por los algoritmos. En este apartado se menciona la metodología seguida para obtener una señal EEG sintética con actividad de potencial evocado visual en ella .

En la referencia [24] una señal EEG con un ERP fue simulada sumando dos ondas diferentes, la primera fue medio ciclo de una senoide de 5 Hz y la segunda un ciclo completo de una senoide de 1 Hz, con una amplitud media de $20 \mu\text{V}$, este proceso se muestra en la figura 3.7. Nótese que el tiempo va desde -400 ms hasta 400 ms, esto es porque el tiempo 0 típicamente se considera como aquel cuando se inició el estímulo. Después, el denominado “ruido EEG” decorrelacionado fue sumado, este ruido fue modelado sumando 50 sinusoides de frecuencias que variaban aleatoriamente en un rango de 0.1 Hz y 125 Hz con un voltaje de amplitud similar al del ERP.

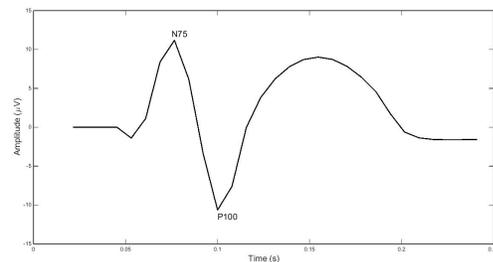
El artículo [24] fue utilizado como base para la generación del fenómeno EEG de interés, mas unos cambios fueron hechos; primeramente, se definió la frecuencia de muestreo de las señales, que fue de 128 Hz, cumpliendo así con la frecuencia de muestreo que ofrece el equipo de regis-

tro EEG EMOTIV. El tipo de potencial evocado evocado mostrado en el artículo fue cambiado a uno de tipo visual, así que para simular la forma de onda de una respuesta de este tipo, se utilizó el método mostrado en la referencia [1] como se muestra en la figura 3.8a. Las características de esta respuesta es que está compuesta de una senoide completa cuyo máximo está, como está en 75 ms y su mínimo en 100 ms con una amplitud cercana a los $12 \mu\text{V}$; la segunda onda, que es claramente de menor frecuencia, está formada por medio ciclo de una senoide cuyo máximo está cercano a los $10 \mu\text{V}$ entre 160 ms y 175 ms, con una duración de 225 ms.

Las ondas simuladas pueden ser vistas en la figura 3.8b, la frecuencia de los picos relevantes fueron de 18 Hz y 5 Hz para lograr que estos se sincronizaran con el tiempo al cual deben presentarse y de donde toman su nombre, i.e., N75 y P100. Para la primer componente el máximo voltaje fue de $11.18 \mu\text{V}$ y $-10.64 \mu\text{V}$. De la segunda componente el máximo fue de $9.01 \mu\text{V}$ y el final de la respuesta a los 213 ms, lo cual confirma que el fenómeno simulado es básicamente el mismo que el que se presenta en la figura 3.8a. Para evitar que esté proceso introdujera altas frecuencias por causa de las señales truncadas un filtro pasa-banda se implementó usando 0.5 Hz y 20 Hz como frecuencias de corte.



(a) Ejemplo de potencial evocado del tipo visual, tomado de [1].



(b) Potencial evocado de tipo visual resultante de la implementación de la figura 3.8a.

Figura 3.8: Comparación de la onda de potencial evocado presentada como ejemplo en [1] (a) y la onda de potencial evocado simulada (b).

El ruido EEG fue modelado con el promedio de 50 sinusoides también, pero en este caso, la frecuencia no fue completamente aleatoria, sino que el 50% de las frecuencias fue elegido a

ser de entre 9 Hz y 10 Hz, frecuencias que corresponden al ritmo alfa (ver tabla 2.1), imitando así ruido EEG de tipo alfa. El porcentaje restante sí fue completamente aleatorio, pero cuyas frecuencias se movieron entre 0.5 Hz y 40 Hz, de acuerdo a las frecuencias de trabajo del EEG [6]. Cuatro de estas señales fueron promediadas para detectar el potencial evocado, el resultado EEG sintético y el promedio se muestran en la figura 3.9.

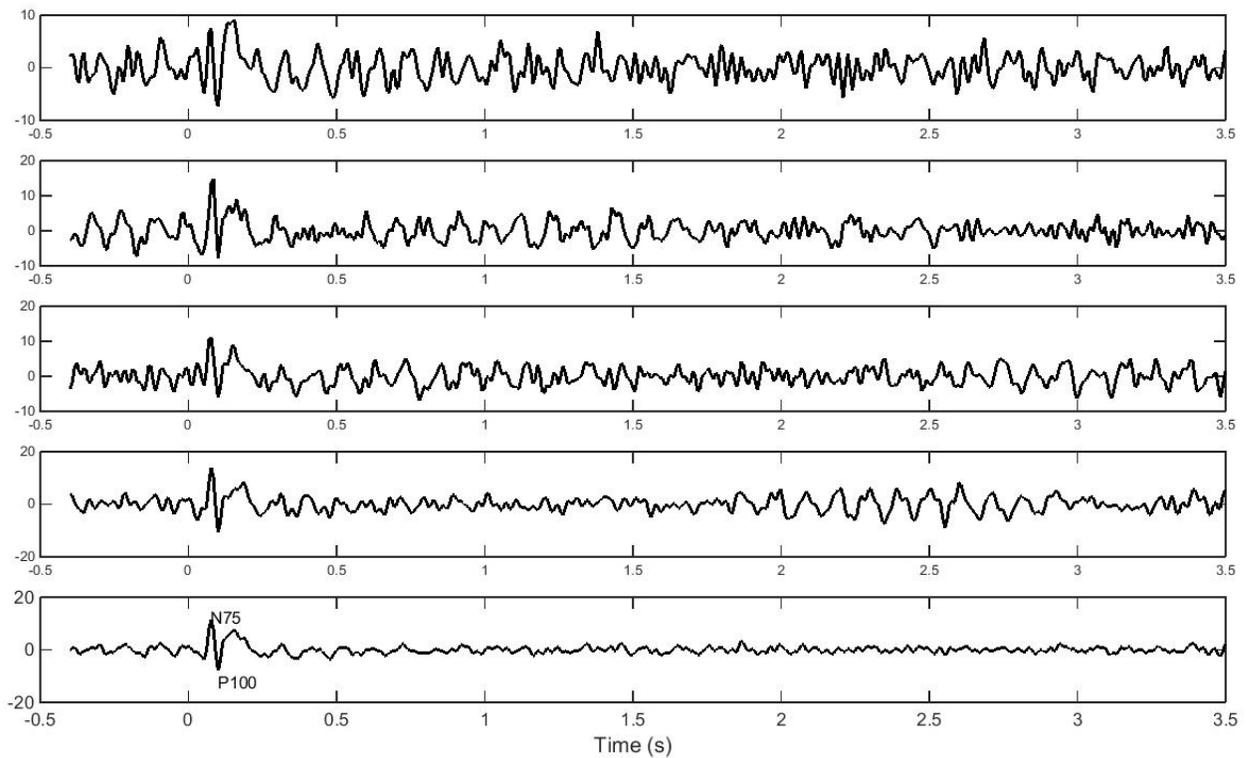


Figura 3.9: Registro de 3.5 s del EEG sintético limpio con dominante ritmo alfa como ruido y un potencial evocado tipo visual dentro del primer medio segundo. La gráfica inferior muestra el promedio de las 4 señales para hacer el ERP más visible y comprobar que el mismo está escondido bajo el ritmo alfa que actúa como ruido.

Para corroborar visualmente que la señal codificada presenta parecido a una señal EEG real, se comparó con una señal de ritmo alfa tomada de [1], ésto se muestra en la figura 3.10, nótese que ruido gaussiano es agregado a la onda sintética. También, la transformada de Fourier de los tres primeros segundos de la señal se analizó para determinar que la mayoría del contenido

espectral estaba entre 9 Hz y 10 hz (figura 3.11).

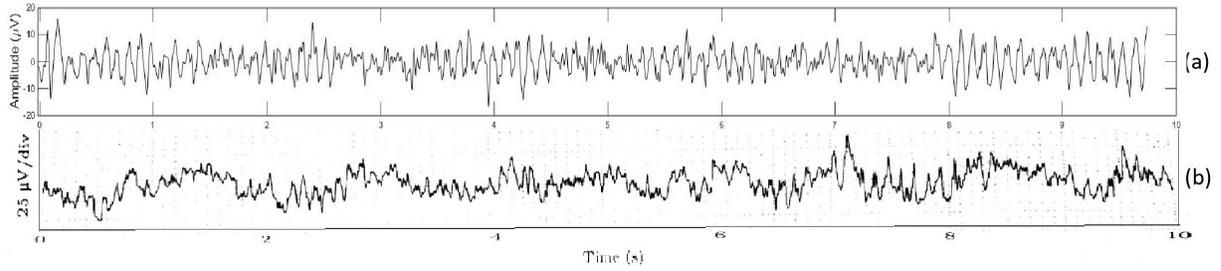


Figura 3.10: Comparativa entre (a), EEG sintético con ruido gaussiano agregado intentando imitar un registro real y (b), registro EEG real con actividad alfa, de referencia [1].

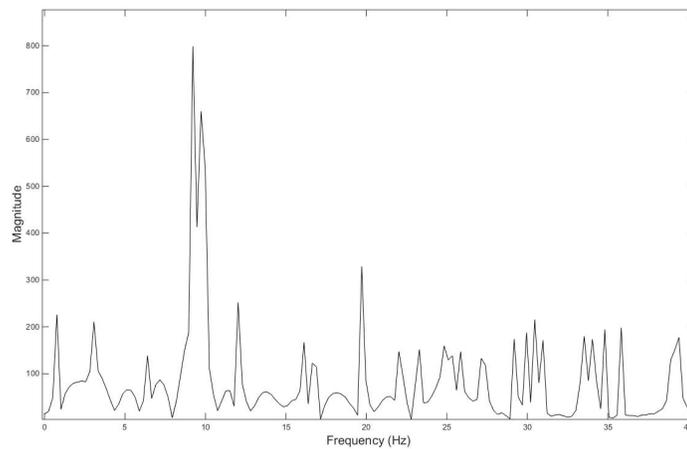


Figura 3.11: Poder espectral de los primeros 3 segundos de la señal de EEG sintética mostrando frecuencias predominantes entre 9 Hz y 10 Hz que corresponden a actividad de tipo alfa.

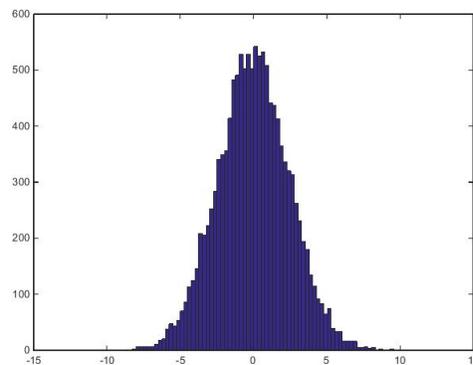


Figura 3.12: Histograma de la señal EEG sintética. Kurtosis=3.1636.

3.4.2. Señales artefactuales sintéticas

3.4.2.1. EOG

La señal que imita los potenciales creados por el ojo, denominada electrooculograma (EOG), fue generada de la misma manera en que se describe en la referencia [23]. La referencia dice que una señal de esta naturaleza se se simula con ruido gaussiano filtrado entre las frecuencias de 1 Hz y 3 Hz. EL resultado final se muestra en la figura 3.13. Además, debido a que para BSS la distribución de los datos es importante, el histograma del registro EOG se presenta en la figura 3.14, en la descripción de la figura su valor de kurtosis es agregado, valorando la similitud a una distribución gaussiana (kurtosis=3.00).

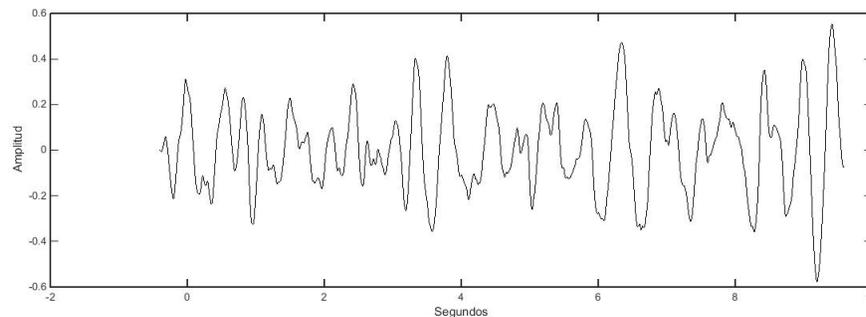


Figura 3.13: Registro de 19 s de la señal EOG sintética generada.

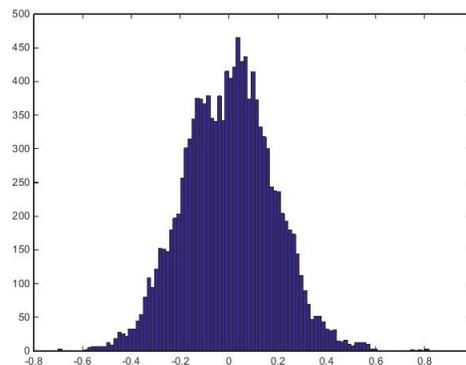


Figura 3.14: Histograma de la señal EOG sintética. Kurtosis=3.1838.

3.4.2.2. ECG

La señal electrocardiográfica (ECG) fue generada de un programa escrito en MATLAB[®] escrito por P. McSharry y G. Clifford, este programa es específico para generación de ECG sintético de nombre *ecgsyn.m* se encuentra como de libre distribución y está disponible en la referencia [25]. La figura 3.15 muestra también 20 s de un registro generado con este programa y el histograma se aprecia en la figura 3.16.

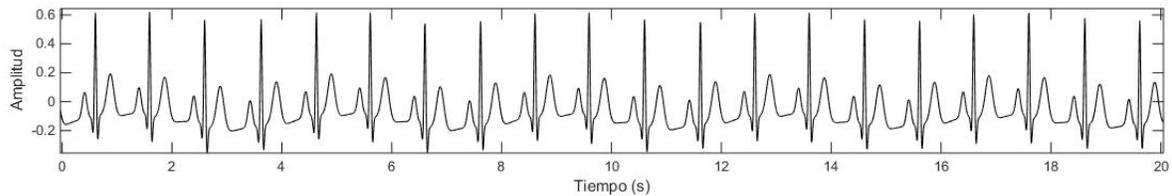


Figura 3.15: 20 s de una señal ECG generada por el programa *ecgsyn.m*.

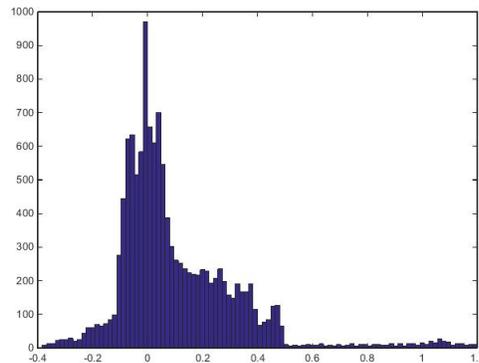


Figura 3.16: Histograma de la señal ECG sintética. Kurtosis=8.07.

3.4.2.3. EMG

De acuerdo a la referencia [6] la señal electromiográfica (EMG) tiene un rango en frecuencias de entre 20 Hz y 500 Hz. Para poder representar 500 Hz es necesaria una frecuencia de muestreo mayor a 1 kHz de acuerdo del teorema de muestreo de Nyquist. Sin embargo, debido a que la frecuencia de muestreo utilizada en este trabajo es de 128 Hz, entonces la máxima frecuencia que se puede representar es 64 Hz. Debido a lo anterior, una señal mioeléctrica alcanzaría una frecuencia máxima de 64 Hz. El EMG fue, entonces, generado usando ruido aleatorio, y al igual

que el EOG fue filtrado entre las frecuencias de 20 Hz y 64 Hz. La figura 3.17 muestra 20 s del resultado con su histograma en la figura 3.18.

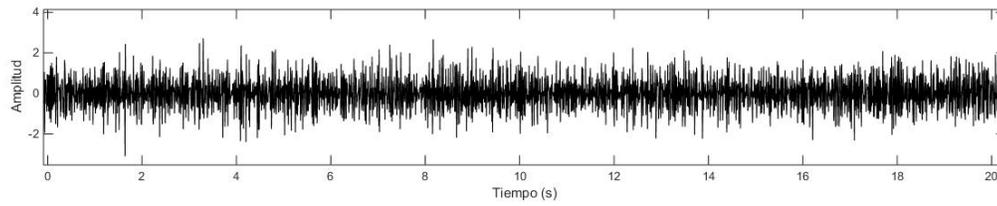


Figura 3.17: 20 segundos de una señal electromiografica sintética.

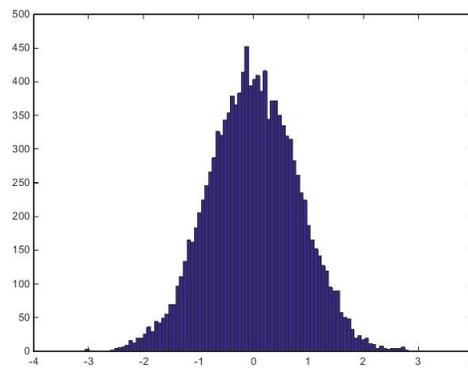


Figura 3.18: Histograma de la señal EMG sintética. Kurtosis=3.03.

Capítulo 4

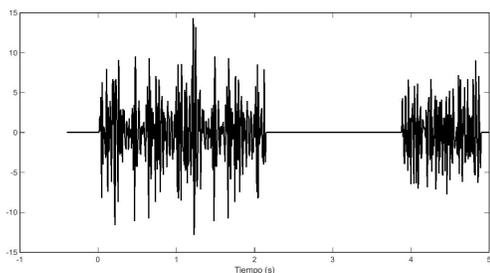
Pruebas y resultados

Una vez que se realizaron las pruebas preliminares de funcionamiento de los algoritmos y la definición de sus métricas de evaluación, además del modelado y simulación de las señales biológicas sintéticas, se procedió a realizar las pruebas de separación. La mezcla de los artefactos y la señal EEG se hizo de la misma manera en la que se probaron los algoritmos con la señal senoidal y la señal cuadrada, sin embargo, un problema surge al visualizar las señales artefactuales codificadas en la sección anterior que conllevó a realizar unos cambios antes de generar la mezcla. Si la mezcla de las señales fuente se realiza de la misma manera en la que se hizo con las señales periódicas y debido a que su histograma muestra que el EEG, EOG y EMG poseen una distribución gaussiana, los métodos de ICA no podrían separarlas (ver sección 2.4.1.3).

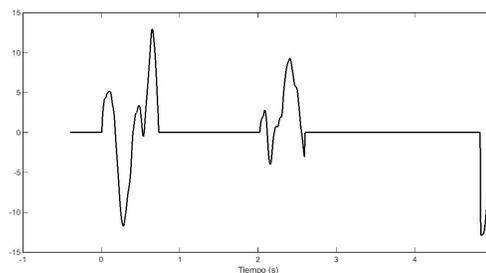
La naturaleza de generación de estas señales en la práctica, a diferencia de la actividad cardíaca, la señal muscular y la ocular no son periódicas, sino que pueden ser controladas a voluntad, por lo tanto es conveniente usar solamente algunos segmentos de artefacto para formar la mezcla. Ésto ofrece tres ventajas, la primera, es que la mezcla obtenida será lo más parecida a un caso de mezcla real; segundo, las distribuciones de EOG y EMG pasan de ser Gaussianas a ser supergaussianas, ofreciendo la posibilidad de que puedan ser separadas por ICA y tercero, dado que InfoMax está codificado para separar señales supergaussianas, esto ofrece una ayuda al algoritmo y facilita el hecho de que su PDF modelo no tendrá que ser cambiado.

Para lograr lo anterior, de las señales artefactuales completas, se seleccionó aleatoriamente alguna muestra, a partir de esta muestra se seleccionó la cantidad de datos correspondientes a una duración de entre $200 \mu\text{s}$ y 1 s. Posteriormente, esta porción se insertaba en tres diferentes tiem-

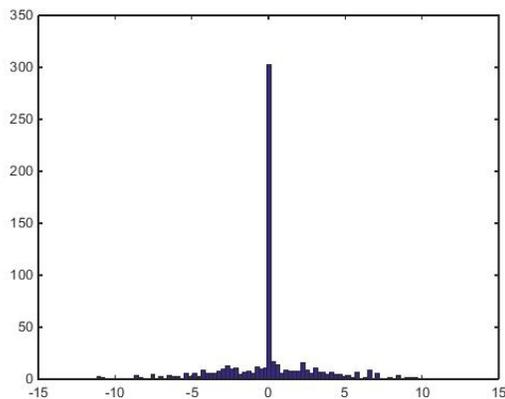
pos de una señal de ceros; el primer segmento fue durante los primeros 100 ms, posteriormente dentro del primer segundo y la mitad de señal y finalmente en la última mitad de señal. Así pues, la actividad artefactual de las señales EMG y EOG quedó como se muestra en las figuras 4.1a y 4.1b respectivamente.



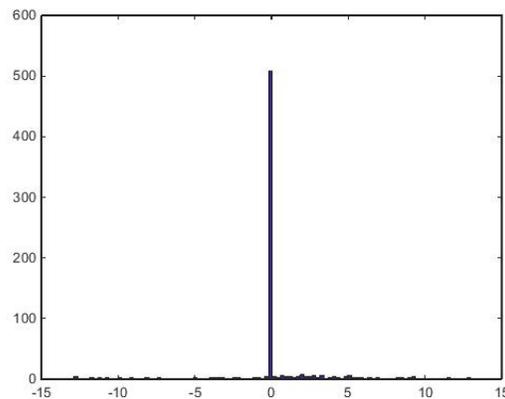
(a) Señal artefactual EMG a ser mezclada.



(b) Señal artefactual EOG a ser mezclada.



(c) Histograma del artefacto EMG a ser mezclado. Kurtosis=5.6416



(d) Histograma del artefacto EOG a ser mezclado. Kurtosis=9.3045

Figura 4.1: Ejemplo de las señales artefactuales EMG y EOG utilizadas para las pruebas de los sistemas y su pdf tipo super-gaussiana.

La respuesta resultante de los artefactos simula, que éstos fueron generados por el usuario de quien se adquiere el registro EEG. El tiempo más importante en donde se insertó una porción del artefacto fue dentro de los primeros 100 ms, pues después de efectuar la mezcla de señales la interferencia se vio reflejada donde está el potencial evocado.

La evaluación para la separación se dividió en tres fases, en la primera fase, un diferente número de datos fue usado con el fin de encontrar una longitud de registro mínima con la que la separación ciega de fuentes fuera exitosa para cada algoritmo. Los cambios de datos fueron: 12, 64,

128, 640, 1280, 2560, 3840, 6400, 8960, 11520 y 12800 datos, correspondiendo con 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 20, 30, 50, 70, 90 y 100 s de registros.

En la referencia [23] se propone cambiar la relación señal a artefacto a la entrada, dejando así mezclas donde debido a la diferencia en amplitud, visualmente una fuente es más prominente que otra como se muestra en las figura 4.2. Aquí, vemos la mezcla de las señales EOG y EEG cuando la señal EOG posee una energía 20 dB mayor al EEG (figura 4.2a), cuando su energía es la misma (figura 4.2b) y cuando el EEG es mayor por 20 dB (figura 4.2c).

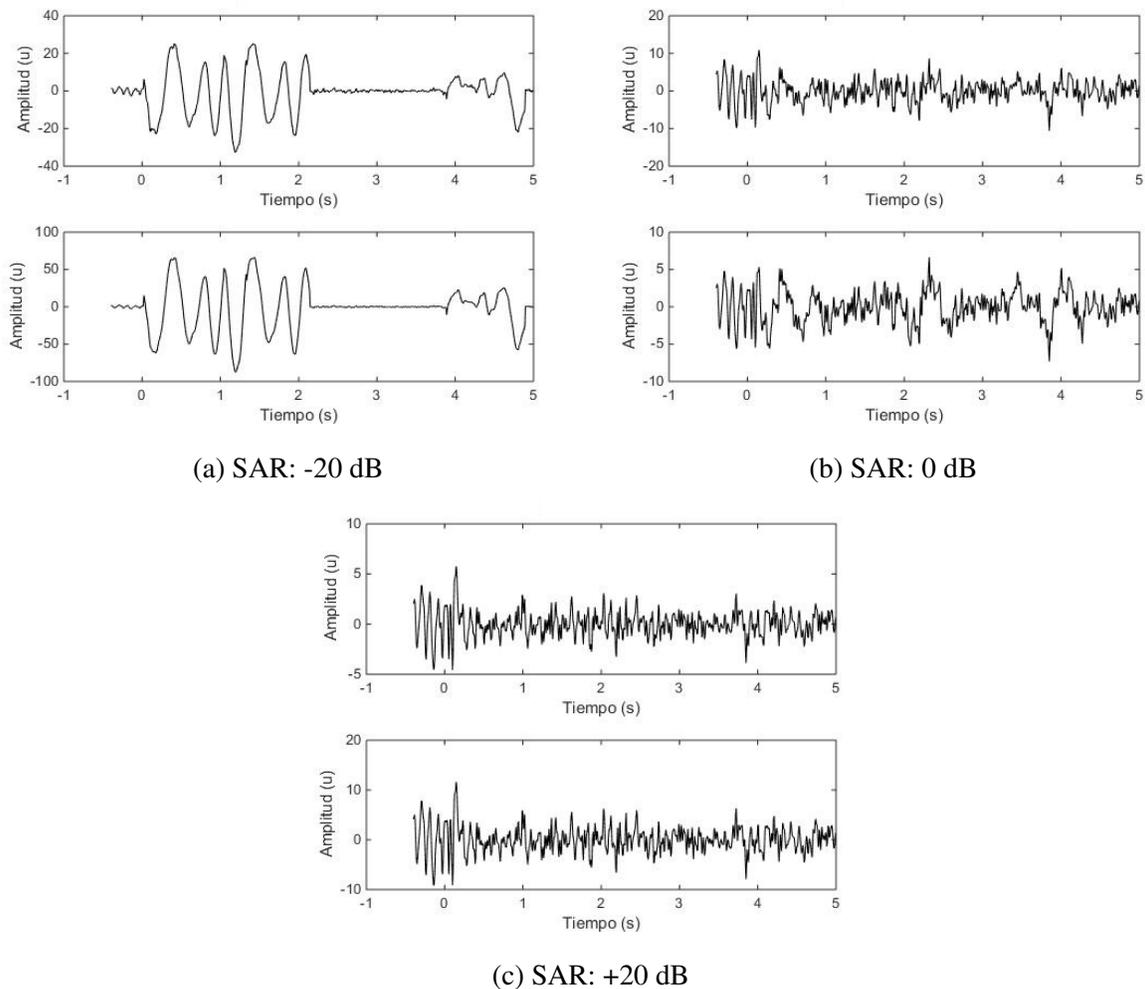
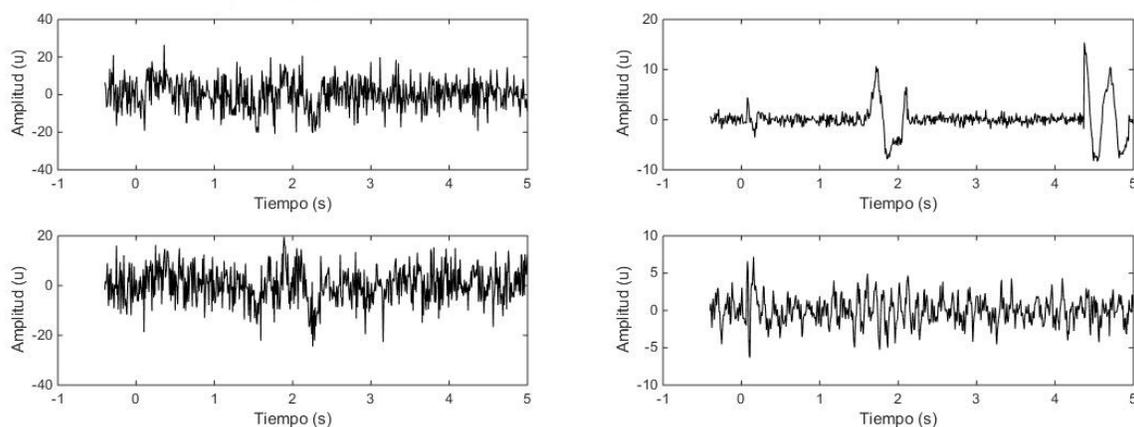


Figura 4.2: Ejemplos mezcla de señales EEG y EOG con diferente relación señal a artefacto. Las dos gráficas de cada inciso indican lo observable en cada canal de adquisición.

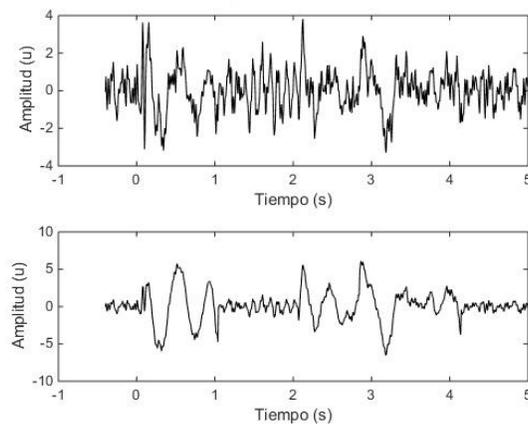
El último parámetro que fue variado fue la relación señal a ruido con un SAR de 0dB, en este caso, el ruido fue sumado a las mezclas para cumplir con el modelo de mezcla que asume

BSS, i.e., ecuación (3.9). Los cambios hechos para evaluar la relación señal a ruido fueron los siguientes: -20 dB, -10 dB, -5 dB, 0 dB, 5 dB, 10 dB, 20 dB, 50 dB, 100 dB, 300 dB y 500 dB. Los ejemplos de la mezcla resultado con la cual trabajan los algoritmos se muestran en las figura 4.3. En las ilustraciones se observa la presencia de ruido para cada mezcla EOG y EEG. Cuando se tienen -20 dB de SNR se pierde completamente la información original, ésto se acentúa en la figura 4.3a, donde incluso el EP es indistinguible. Cuando agregamos un SNR positivo de 20 dB, observamos que aunque la señal es “ruidosa,” la información es fácilmente detectable (figura 4.3b) y evidentemente un aumento de 80 dB al caso anterior deja una mezcla cuasi libre de ruido (figura 4.3c).



(a) SNR: -20 dB

(b) SNR: +20 dB



(c) SNR: +100 dB

Figura 4.3: Ejemplos de mezcla de señales EEG y EOG con diferente relación señal a ruido respecto al EEG. Las dos gráficas de cada inciso indican lo observable en cada canal de adquisición.

Además de evaluar la SINR y el NMSE también se evaluó el tiempo computacional de los

algoritmos. Para otorgar la misma importancia a los artefactos, el mismo tipo de pruebas se aplica a la señal EEG mezclada con ECG, con EOG y con EMG de manera independiente. Todas las fuentes que participaron pueden observarse en la figura 4.4. Cabe mencionar que para observar fácilmente si el potencial evocado se conservó en el registro EEG, éste fue aumentado en amplitud y puede observarse dentro del primer medio segundo en la figura recién mencionada.

La aplicación de los métodos de ICA a señales electrocardiográficas está justificada por [15], donde Tzzy-Ping explica que ICA es altamente efectivo en dominios donde (1) el medio de mezcla es lineal y los retardos de propagación son despreciables, (2) el curso temporal es independiente y (3) el número de sensores es el mismo que el número de fuentes. Dado que el volumen de conducción en el cerebro se dice ser lineal e instantáneo la primera suposición se satisface. La suposición (2) se dice ser razonable porque las fuentes del ojo y musculares, así como la línea eléctrica y la señal cardíaca no están determinadas por la actividad de las fuentes EEG. Finalmente la suposición (3) es cuestionable puesto que no se sabe la cantidad de señales estadísticamente independientes que contribuyen a los registros EEG [15]

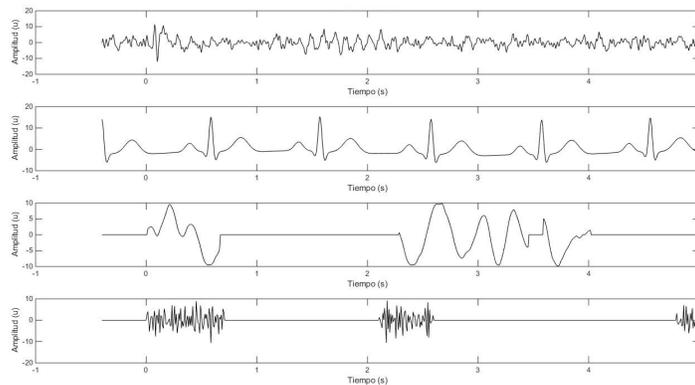


Figura 4.4: Señales biológicas simuladas a separar. De arriba hacia abajo: señal EEG, señal ECG, señal EOG y señal EMG.

4.1. Gráficas cuantitativas del desempeño de los algoritmos

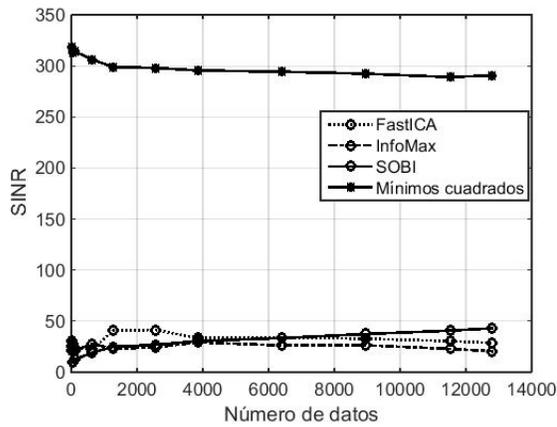
La manera de evaluación para cada algoritmo consistió de 100 iteraciones para cada uno, para cada cambio hecho. Con base en pruebas rápidas de los mismos algoritmos se encontró que de todas las variaciones de FastICA, i.e., deflacionista, simétrica con funciones tangencial-

hiperbólica, exponencial y cúbica. La combinación deflacionista con función cúbica fue la que mejores resultados obtuvo en la separación de las señales sintéticas, por lo tanto, es la configuración para FastICA que se evalúa aquí. El promedio de estas iteraciones fue el valor presentado en las gráficas usadas para evaluación que se muestran más adelante. Con estas 100 evaluaciones se ofrece la certeza de que por cada 100 pruebas la calidad del comportamiento de los algoritmos tenderá al promedio de éstas.

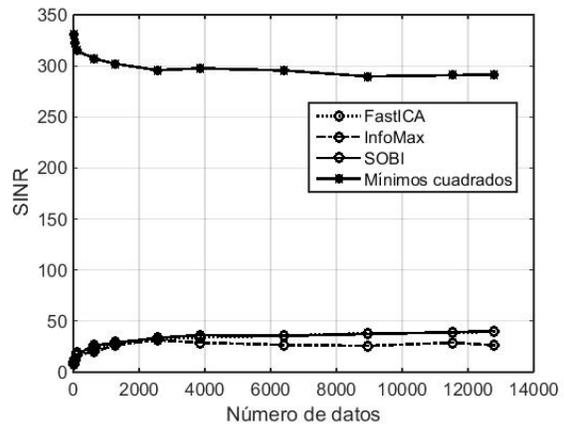
Uno de los problemas que puede encontrarse en los métodos de separación de fuentes es la identificación de los componentes; pues es necesario determinar qué componente corresponde a la actividad cerebral para poder realizar una evaluación verdadera. En el caso de la estimación del SINR, conocer cual componente corresponde a EEG nos permite conocer cual fila de la matriz de separación W es responsable de su recuperación y así usar las fórmulas adecuadas para calcular la relación señal a interferencia y ruido. La misma adversidad se presenta para restar la señal recuperada de la señal de interés en el caso de evaluar el NMSE, pues el efectuar la resta del artefacto recuperado de la señal EEG ocasionará un error muy grande.

En el caso de este trabajo la correlación fue utilizada como método de identificación; de manera que cuando se obtuvieron los componentes éstos eran correlacionados con las fuentes, así aquel componente que tuviera mayor correlación con la señal EEG correspondía al EEG recuperado. Esta simple técnica permitió evitar la identificación manual de los componentes automatizando la identificación.

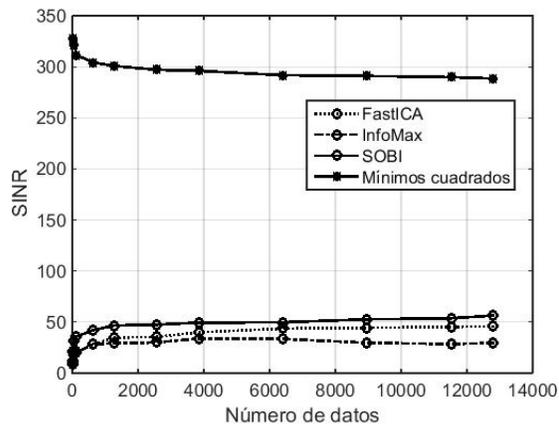
A continuación se muestran las gráficas de las evaluaciones divididas por variable evaluada, i.e., las gráficas del desempeño para SINR, para NMSE y el tiempo computacional para variación de datos, de SAR y de SNR (figuras 4.5-4.13). Dentro de éstas figuras, el inciso (a) representa la evaluación para el artefacto ECG, el inciso (b) para EOG, el inciso (c) para EMG y finalmente, el inciso (d) ofrece resultados cuando los tres artefactos fueron incluidos en la mezcla.



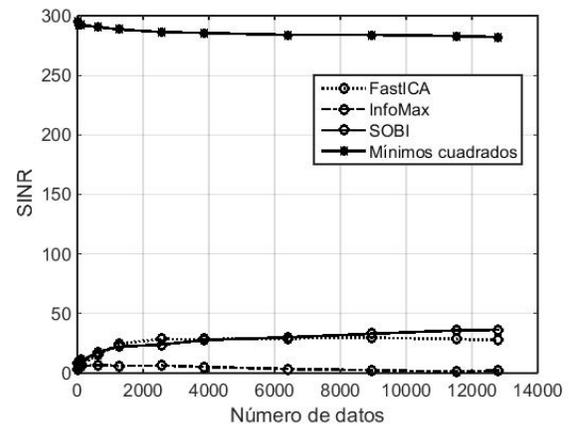
(a) ECG: FastICA=41.54 dB, InfoMax=42.99 dB, SOBI=42.99 dB



(b) EOG: FastICA=39.83 dB, InfoMax=31.35 dB, SOBI=40.47 dB

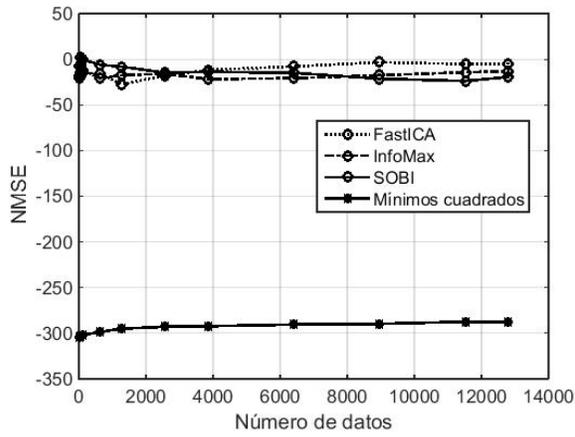


(c) EMG: FastICA=45.83 dB, InfoMax=33.94 dB, SOBI=56.42 dB

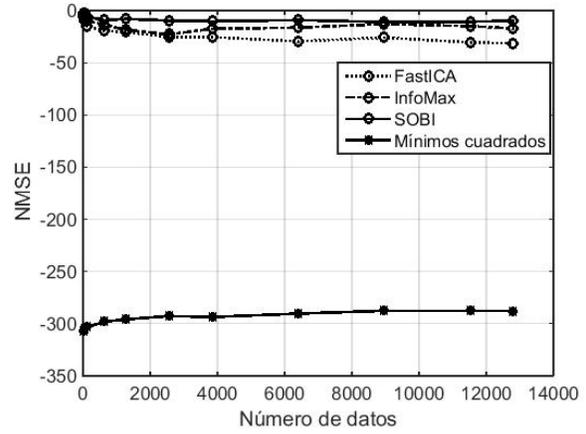


(d) Tres artefactos: FastICA=29.74 dB, InfoMax=6.41 dB, SOBI=36.45 dB

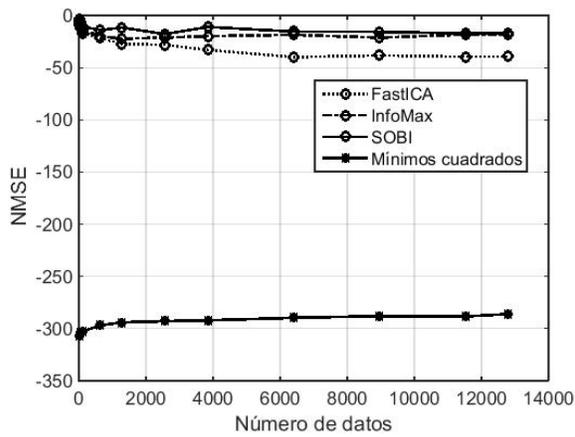
Figura 4.5: SINR al variar la cantidad de datos de la separación. En la descripción se presenta la mejor relación lograda.



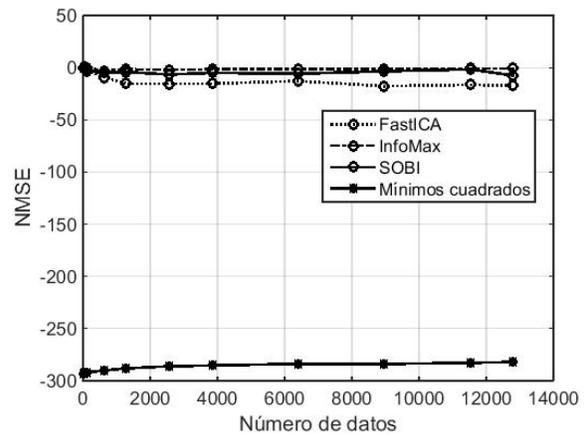
(a) ECG: FastICA=-39.95 dB, InfoMax=-22.28 dB, SOBI=-17.95 dB



(b) EOG: FastICA=-31.43 dB, InfoMax=-22.77 dB, SOBI=-10.97 dB

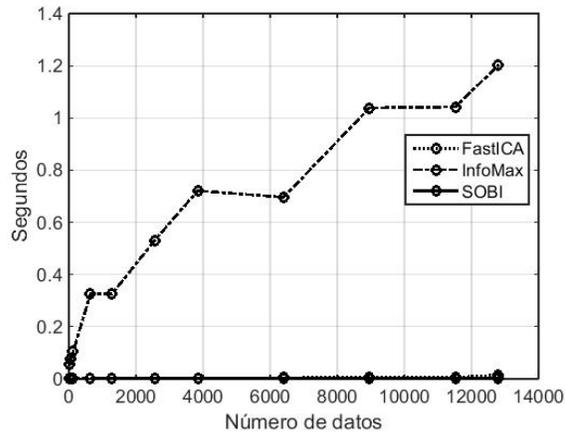


(c) EMG: FastICA=-39.95 dB, InfoMax=-21.25 dB, SOBI=-17.3 dB

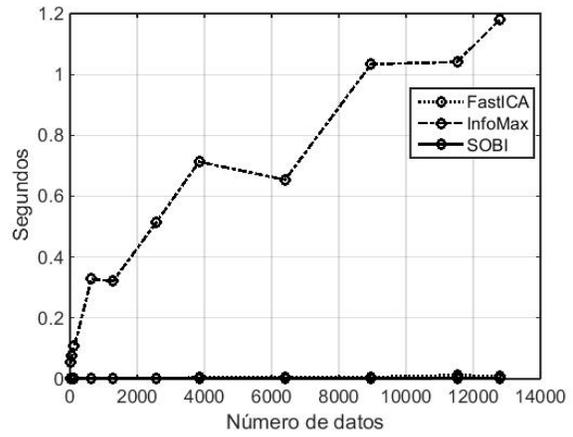


(d) Tres artefactos: FastICA=-21.33 dB, InfoMax=-4.03 dB, SOBI=-12.41 dB

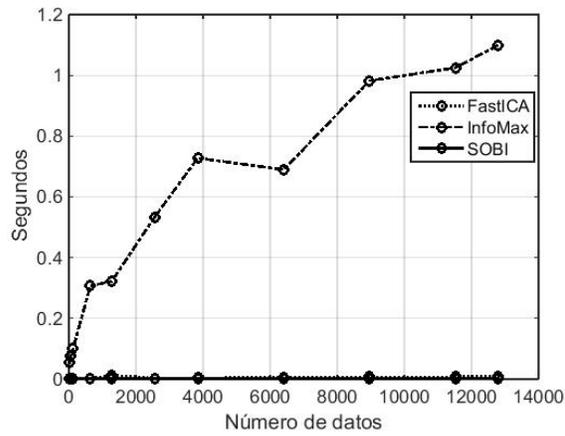
Figura 4.6: NMSE al variar la cantidad de datos de la separación. En la descripción se presenta el mejor error logrado.



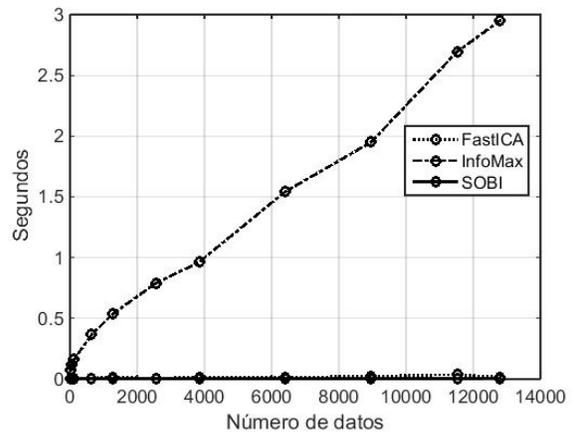
(a) Separación de ECG.



(b) Separación de EOG.

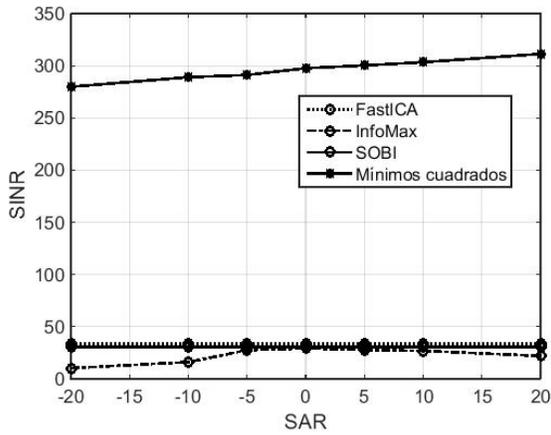


(c) Separación de EMG.

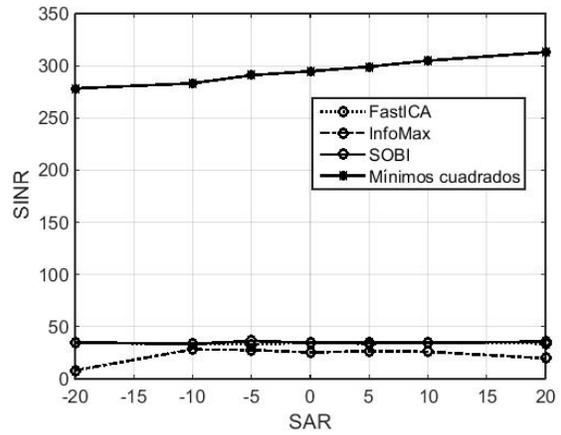


(d) Separación de los tres artefactos.

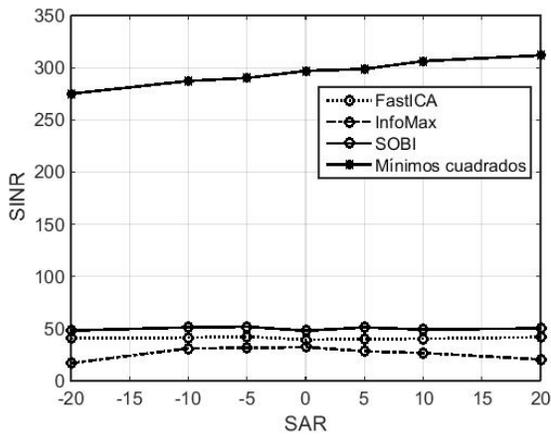
Figura 4.7: Tiempo de cómputo de la separación de señales artefactuales al variar la cantidad de datos.



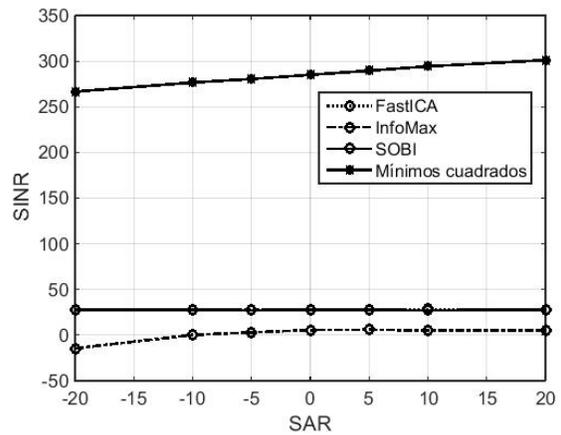
(a) ECG: FastICA=33.51 dB, InfoMax=29.34 dB, SOBI=30.51 dB.



(b) EOG: FastICA=35.23 dB, InfoMax=28.31 dB, SOBI=36.41 dB.

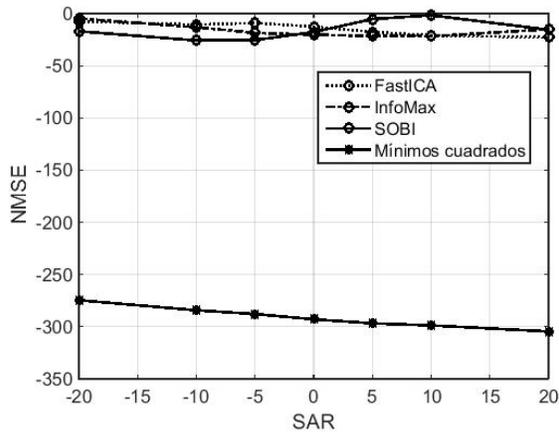


(c) EMG: FastICA=42.38 dB, InfoMax=32.31 dB, SOBI=51.88 dB.

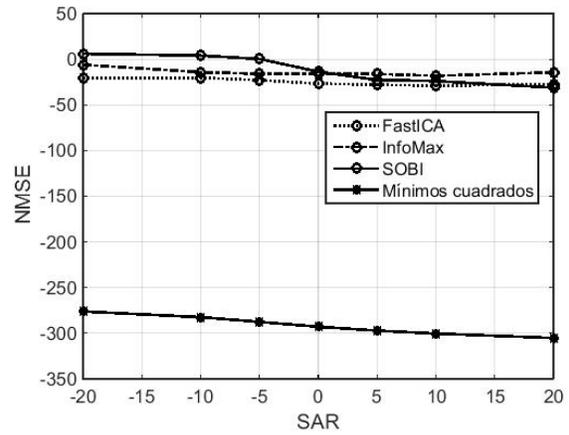


(d) Tres artefactos: FastICA=28.41 dB, InfoMax=6.03 dB, SOBI=27.78 dB.

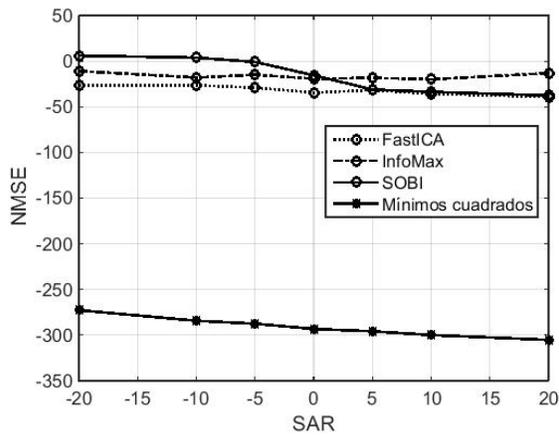
Figura 4.8: SINR al variar la SAR de la mezcla. En la descripción se presenta la mejor relación lograda.



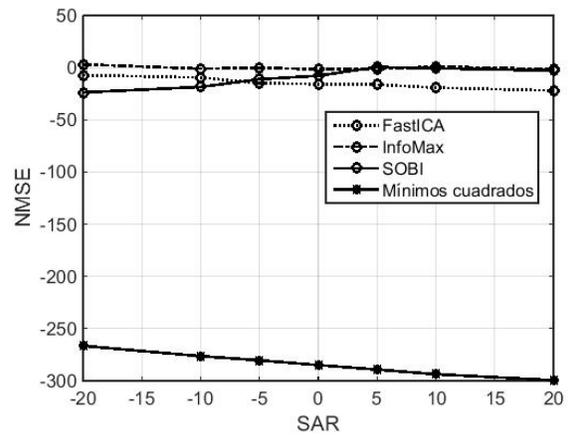
(a) ECG: FastICA=-22.82 dB, InfoMax=-21.68 dB, SOBI=-25.76 dB



(b) EOG: FastICA=-29 dB, InfoMax=-18.11 dB, SOBI=-31.15 dB

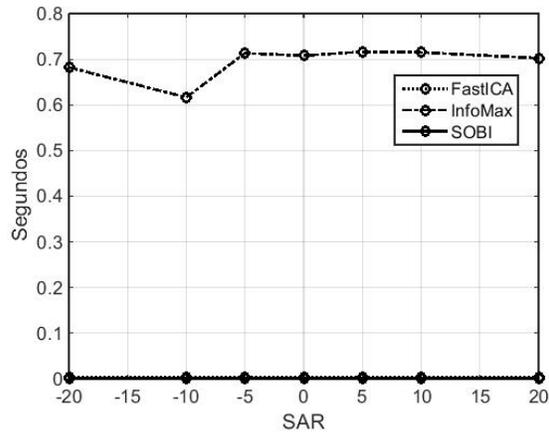


(c) EMG: FastICA=-39.13 dB, InfoMax=-19.97 dB, SOBI=-37.62 dB

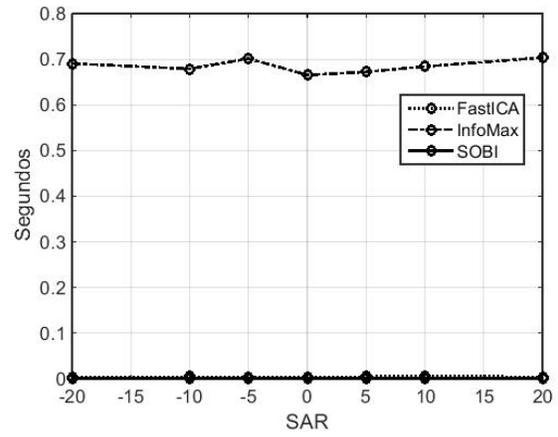


(d) Tres artefactos: FastICA=-21.98 dB, InfoMax=-1.63 dB, SOBI=-23.78 dB

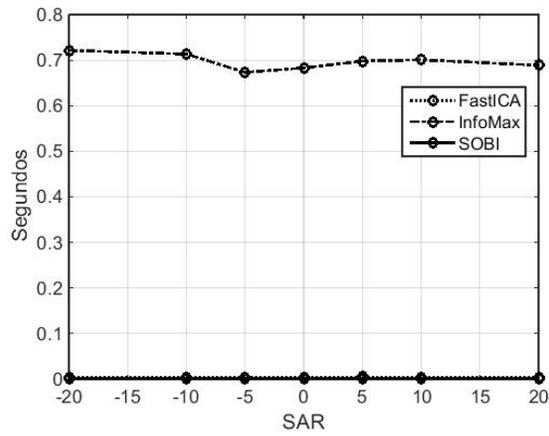
Figura 4.9: NMSE al variar la SAR de la mezcla. En la descripción se presenta la mejor relación lograda.



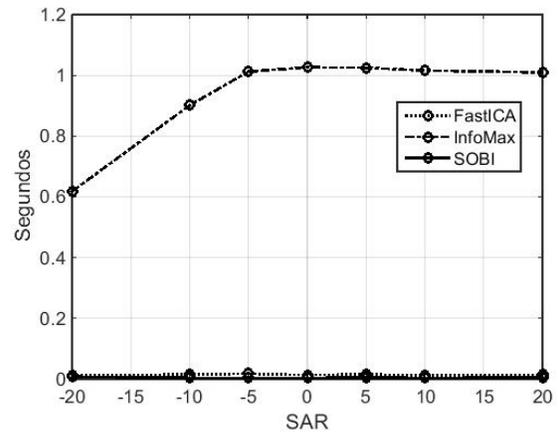
(a) Separación de ECG.



(b) Separación de EOG.

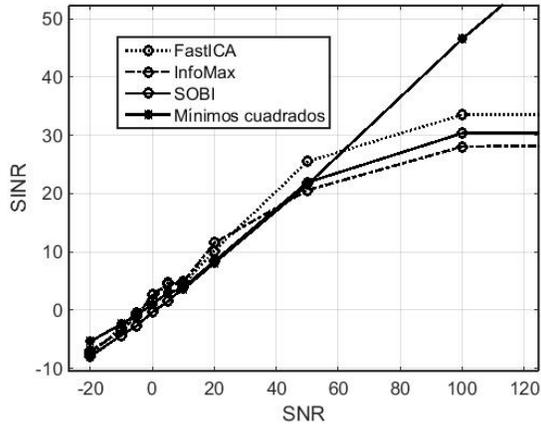


(c) Separación de EMG.

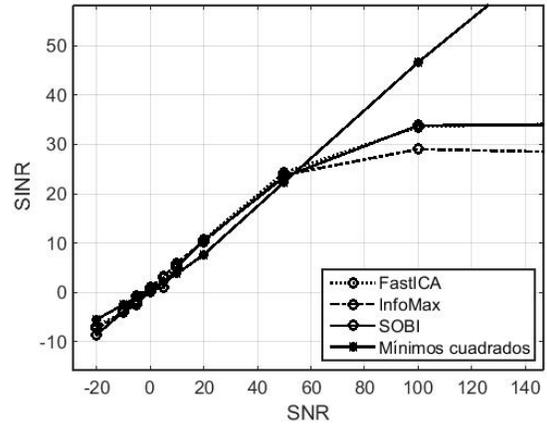


(d) Separación de los tres artefactos.

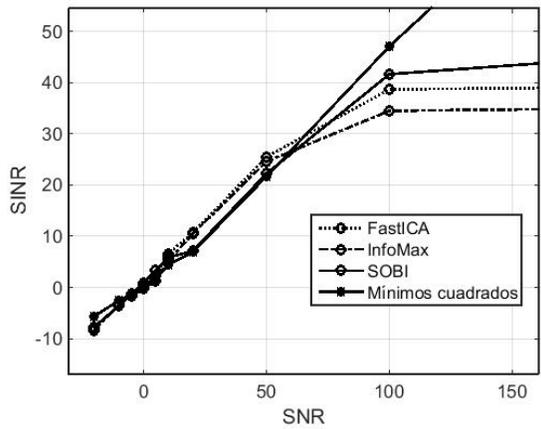
Figura 4.10: Tiempo de cómputo de la separación de señales artefactuales al variar la SAR de la mezcla.



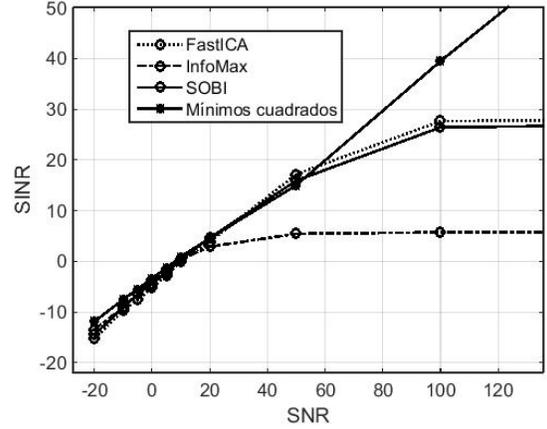
(a) ECG: FastICA=25.47 dB, InfoMax=20.57 dB, SOBI=21.89 dB, Mínimos=21.5 dB.



(b) EOG: FastICA=24.29 dB, InfoMax=23.76 dB, SOBI=22.33 dB, Mínimos=22.33 dB.

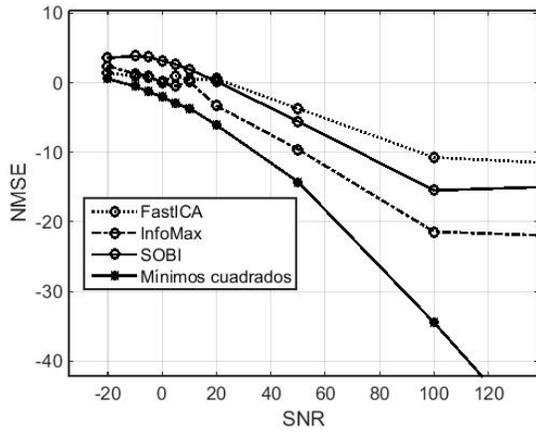


(c) EMG: FastICA=25.5 dB, InfoMax=24.59 dB, SOBI=22.22 dB, Mínimos=21.68 dB.

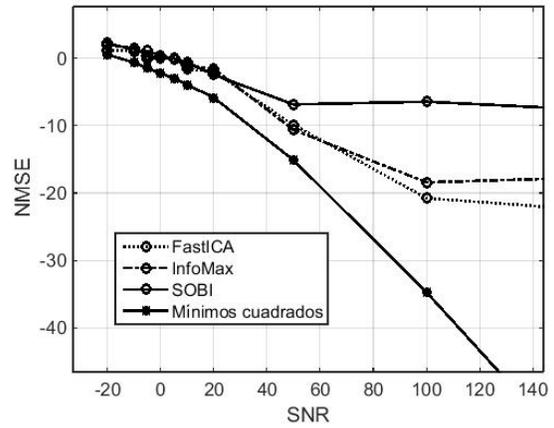


(d) Tres artefactos: FastICA=17.17 dB, InfoMax=5.44 dB, SOBI=15.93 dB, Mínimos=15.02 dB.

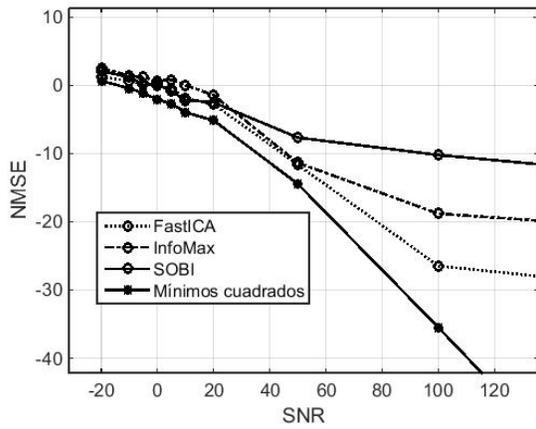
Figura 4.11: SINR al variar la SNR de la mezcla hasta 100 dB. En la descripción se muestra el mejor valor de calidad logrado.



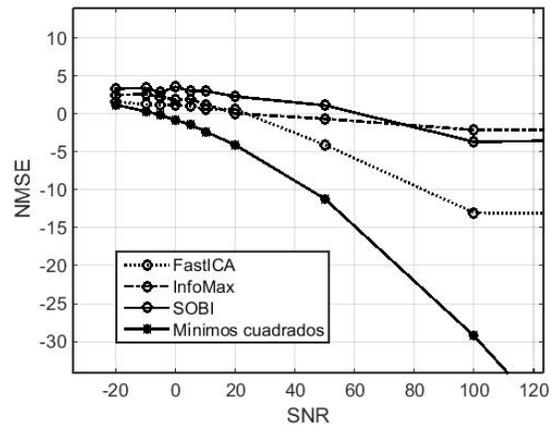
(a) ECG: FastICA=-3.70 dB, InfoMax=-9.56 dB, SOBI=-5.53, Mínimos=-14.24 dB.



(b) EOG: FastICA=-9.86 dB, InfoMax=-10.61 dB, SOBI=-6.93 dB, Mínimos=-15.11 dB.

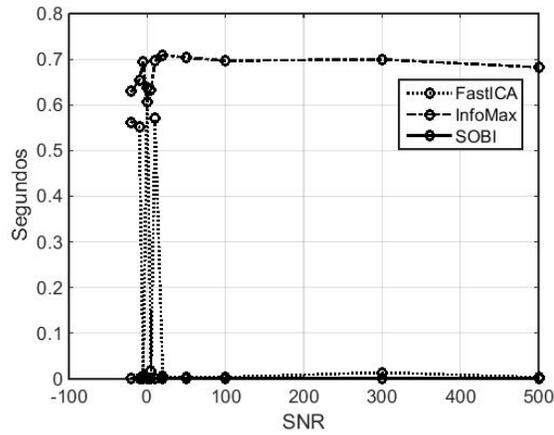


(c) EMG: FastICA=-11.66 dB, InfoMax=-11.39 dB, SOBI=-7.68 dB, Mínimos=-14.48 dB.

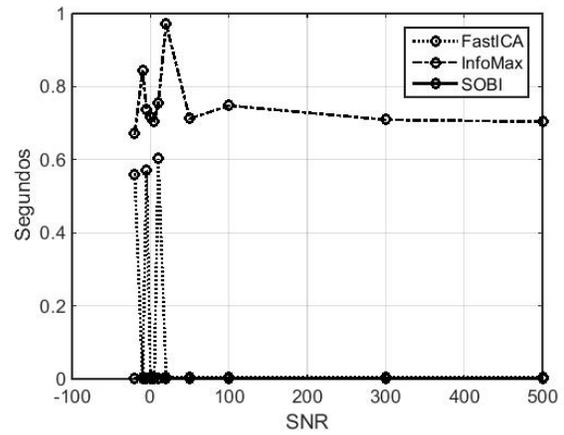


(d) Tres artefactos: FastICA=-4.05 dB, InfoMax=-0.06 dB, SOBI=1.13 dB, Mínimos=-11.18 dB.

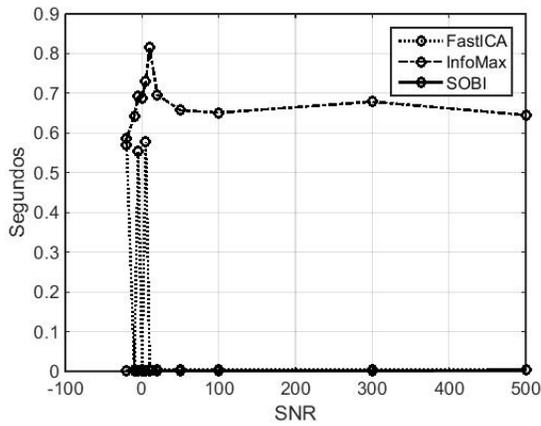
Figura 4.12: NMSE al variar la SNR de la mezcla hasta 100 dB. En la descripción se muestra el mejor valor de calidad logrado.



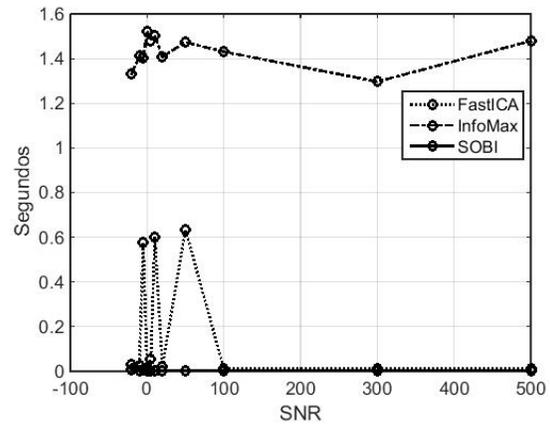
(a) Separación de ECG.



(b) Separación de EOG.



(c) Separación de EMG.



(d) Separación de los tres artefactos.

Figura 4.13: Tiempo de cómputo de la separación de señales artefactuales al variar la SNR de entrada.

4.1.1. Resumen de los valores de las gráficas de evaluación cuantitativa

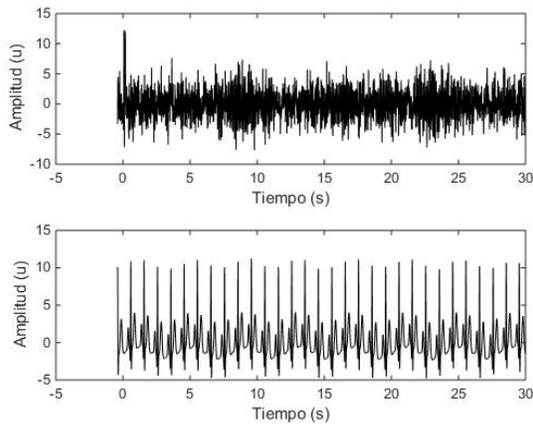
La tabla 4.1 muestra de manera resumida los resultados máximos obtenidos en cada evaluación, ofreciendo un límite de máximo desempeño para cada método, con excepción de la variación de SNR, donde físicamente las mezclas contaminadas afectan la calidad de separación; en este caso se presenta el valor logrado a 50 dB de SNR. Además se añade el promedio de separación para cada algoritmo.

Tabla 4.1: Resumen de los valores máximos de desempeño logrados por los algoritmos, en decibeles (dB), en las diferentes áreas de evaluación.

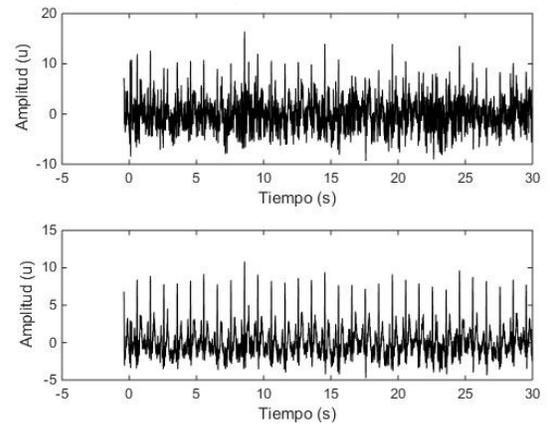
		ECG		EOG		EMG		3 artefactos		Promedio	
Algoritmo		SINR	NMSE								
Datos	FastICA	41.52	-39.95	39.83	-31.43	45.83	-39.95	29.74	-17.71	42.39	-37.11
	InfoMax	29.24	-22.28	31.35	-22.77	33.94	-21.25	6.41	-2.99	31.84	-22.10
	SOBI	42.99	-17.95	40.47	-10.97	56.42	-17.3	36.45	-7.61	46.61	-15.40
SAR	FastICA	33.51	-22.82	35.23	-29	42.38	-39.13	28.41	-21.98	37.04	-30.31
	InfoMax	29.34	-21.68	28.31	-18.11	32.31	-19.97	6.03	-1.63	29.92	-19.92
	SOBI	30.51	-25.76	36.41	-31.15	51.88	-37.62	27.78	-23.78	39.60	-31.52
SNR	FastICA	25.47	-3.70	24.29	-9.86	25.5	-11.66	17.17	-4.05	25.08	-8.40
	InfoMax	20.57	-9.56	23.76	-10.61	24.59	-11.39	5.44	-0.6	22.97	-10.70
	SOBI	21.89	-5.53	23.37	-6.83	22.22	-7.68	15.93	1.13	22.49	-6.68
	Mínimos	21.5	-14.24	22.33	-15.11	21.68	-14.48	15.02	-11.18	22.49	-14.61

4.2. Pruebas visuales de separación de artefactos

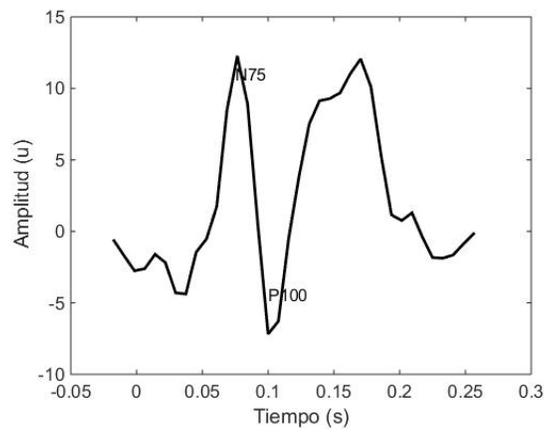
En esta sección se presentan las componentes obtenidas por cada algoritmo al separar las señales fuentes. La longitud de datos fue de 3840 con una SAR de 0 dB y una SNR de 50 dB. Estos parámetros fueron seleccionados analizando las gráficas anteriores, más información al respecto puede encontrarse en la sección de discusión. La matriz de mezcla A en este caso fue la misma para todos los códigos, usando una sola iteración corroborando así que son fiables para ser usados en la práctica. Las señales correspondientes a estos resultados se muestran desde la figura 4.14 hasta la figura 4.25. El orden se aprecia de la siguiente manera, la figura 4.14 muestra las fuentes, la mezcla de las fuentes y un acercamiento al potencial evocado cuando el artefacto que interviene es la señal cardíaca; la figura 4.15 muestra la separación lograda por FastICA, InfoMax y SOBI, además de mostrar los componentes recuperados por el método de mínimos cuadrados. Finalmente un acercamiento a los primeros 300 ms de los registros recuperados de cada algoritmos es hecho, con el objetivo de definir visualmente si el potencial evocado pudo ser recuperado después de la contaminación y observar si permaneció intacto o sufrió algún cambio significativo. La misma metodología se aplicó a las pruebas con señales EOG (figura 4.17), EMG (figura 4.20) y al conjunto de todos los artefactos (figura 4.23).



(a) Fuentes originales; EEG y ECG.

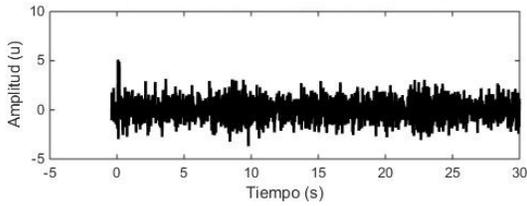
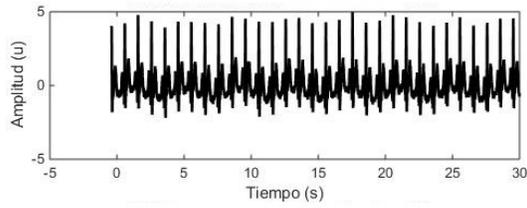


(b) Mezcla de fuentes EEG y ECG.

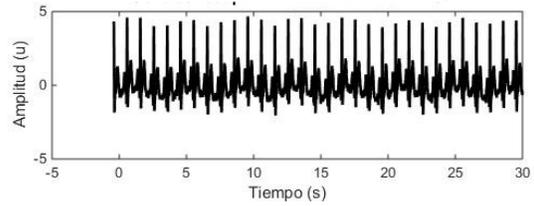
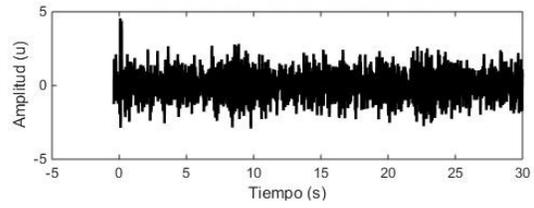


(c) Sección donde se encuentra el potencial evocado.

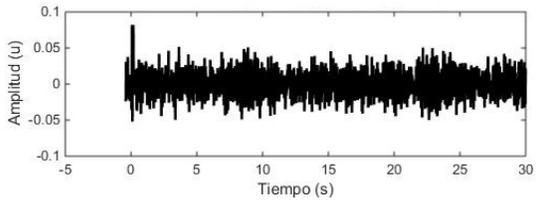
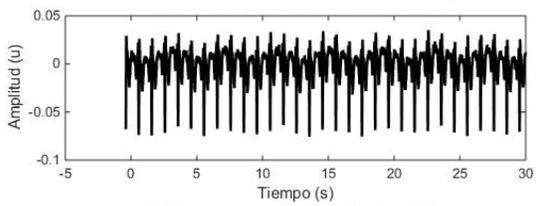
Figura 4.14: (a) señales originales EEG y ECG, (b) mezcla y (c) potencial evocado a ser recuperado por los algoritmos.



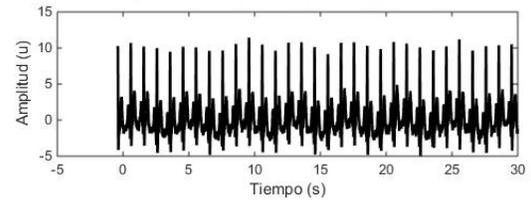
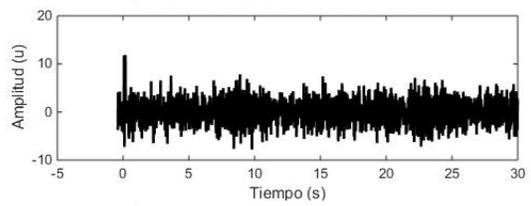
(a) FastICA. SINR=20.97 dB, NMSE=-5.98 dB.



(b) InfoMax. SINR=20.14 dB, NMSE=-15.10 dB.

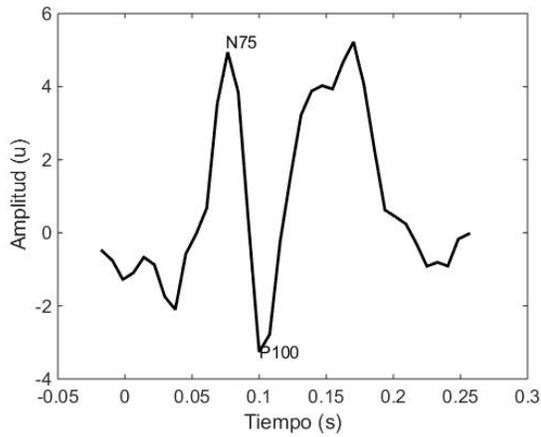


(c) SOBI. SINR=23.14 dB, NMSE=-15.53 dB.

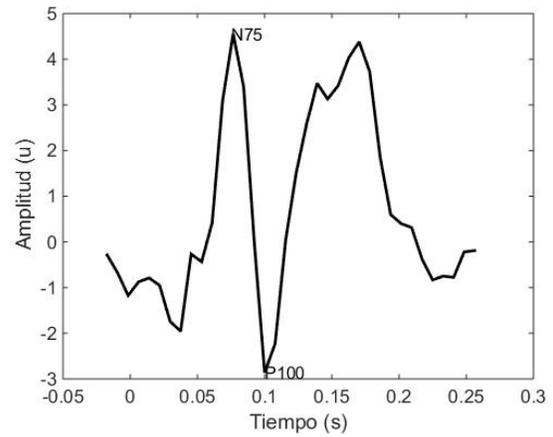


(d) Mínimos cuadrados. SINR=23.27 dB, NMSE=-15.61 dB.

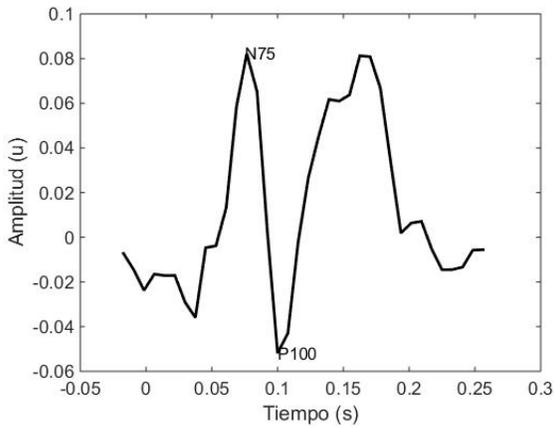
Figura 4.15: Separación de señales EEG-ECG efectuadas por los tres algoritmos, (a) FastICA, (b) InfoMax, (c) SOBI y (d) mínimos cuadrados como referencia.



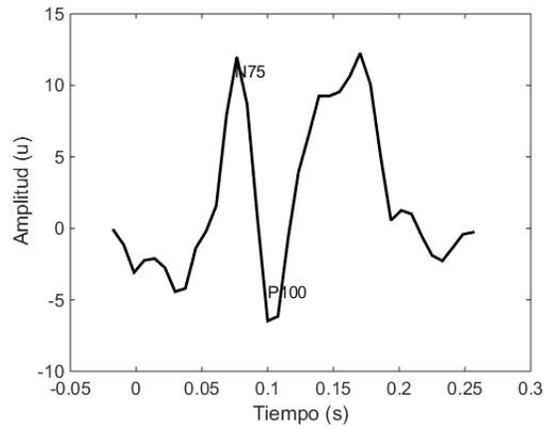
(a) Separación de FastICA.



(b) Separación de InfoMax.

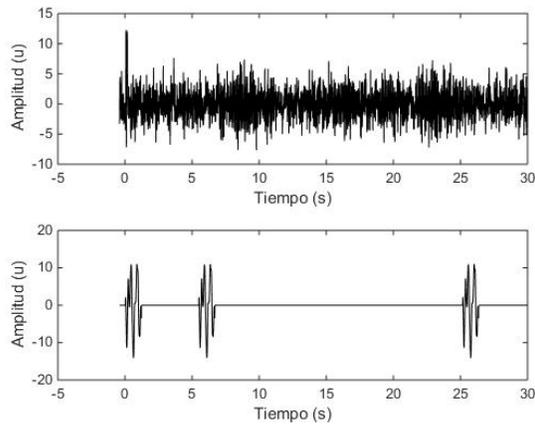


(c) Separación de SOBI.

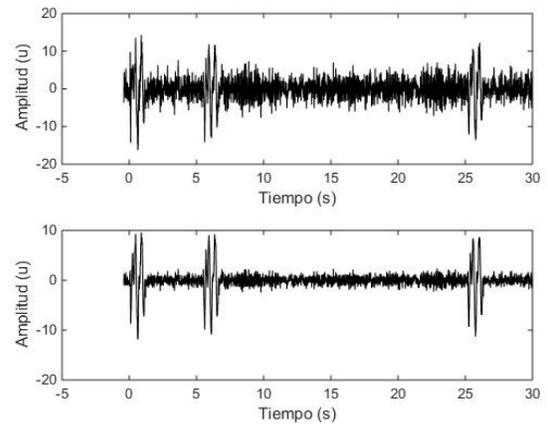


(d) Separación de mínimos cuadrados.

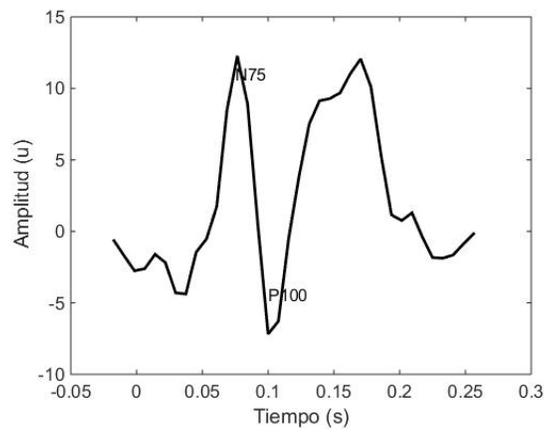
Figura 4.16: Sección de potencial evocado resultante de la separación de señales EEG-ECG efectuadas por los tres algoritmos y mínimos cuadrados como referencia.



(a) Fuentes originales; EEG y EOG.

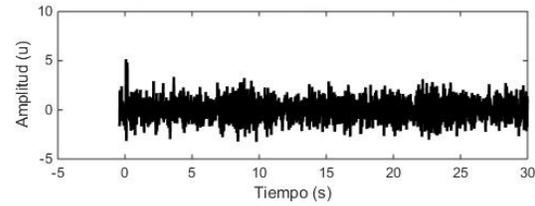
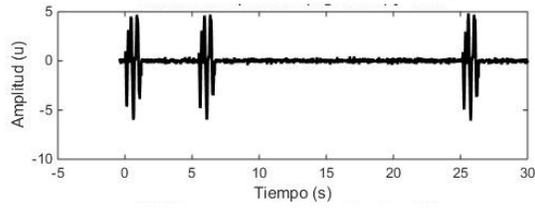


(b) Mezcla de fuentes EEG y EOG.

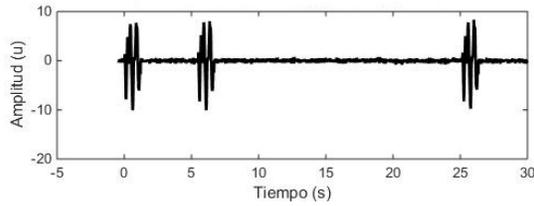
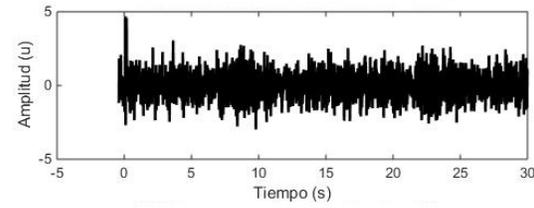


(c) Sección donde se encuentra el potencial evocado.

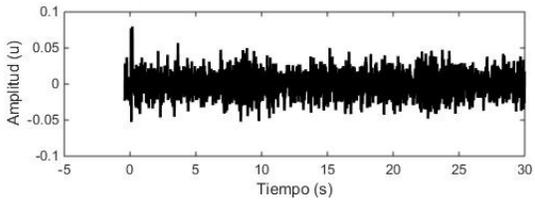
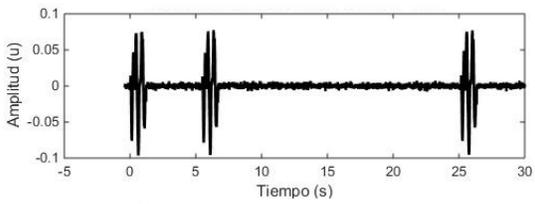
Figura 4.17: (a) señales originales EEG y EOG, (b) mezcla y (c) potencial evocado a ser recuperado por los algoritmos.



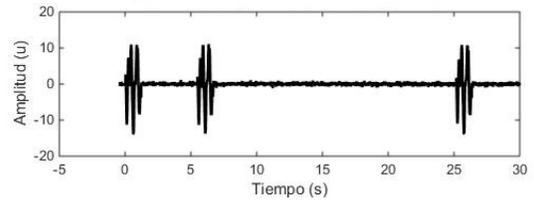
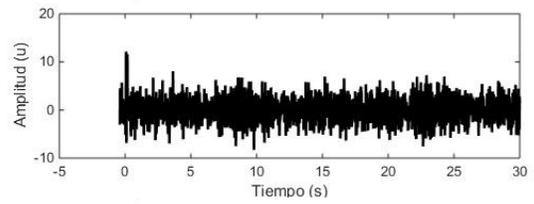
(a) FastICA. SINR=19.91 dB, NMSE=-9.98 dB.



(b) InfoMax. SINR=21.30 dB, NMSE=-15.25 dB.

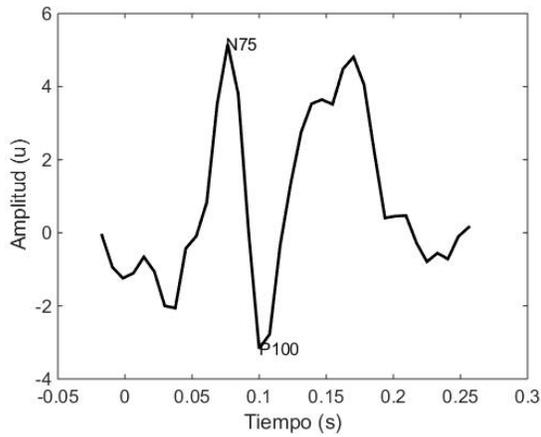


(c) SOBI. SINR=19.13 dB, NMSE=-14.65 dB.

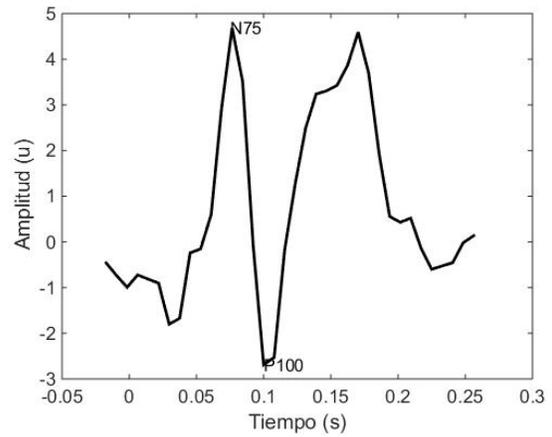


(d) Mínimos cuadrados. SINR=23.75 dB, NMSE=-15.47 dB.

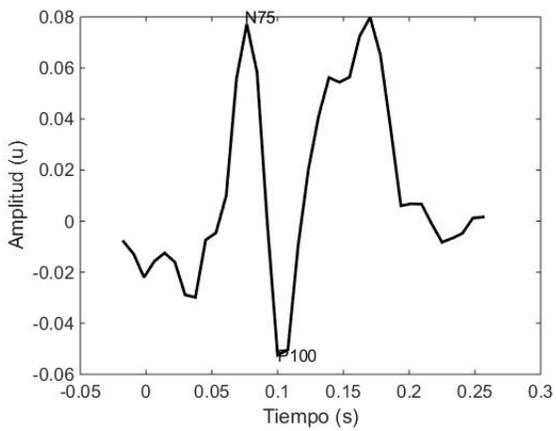
Figura 4.18: Separación de señales EEG-EOG efectuadas por los tres algoritmos, (a) FastICA, (b) InfoMax, (c) SOBI y (d) mínimos cuadrados como referencia.



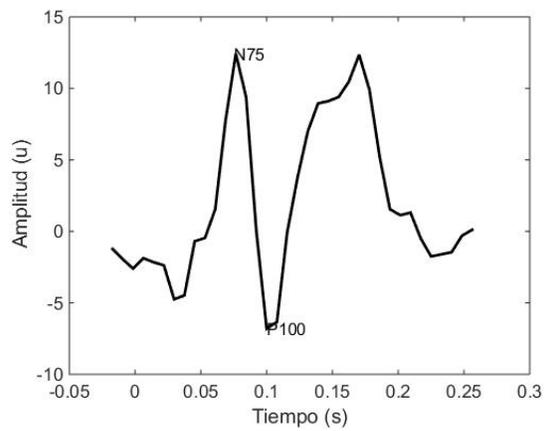
(a) Separación de FastICA.



(b) Separación de InfoMax.

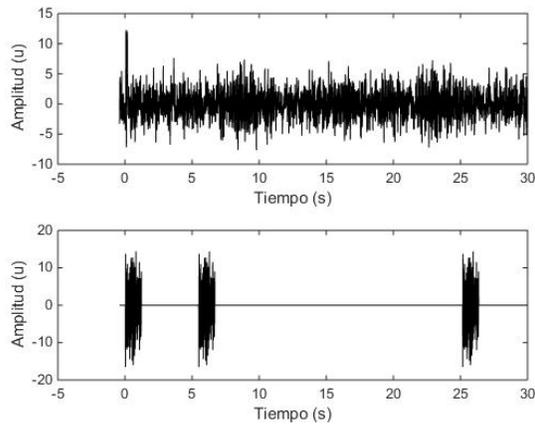


(c) Separación de SOBI.

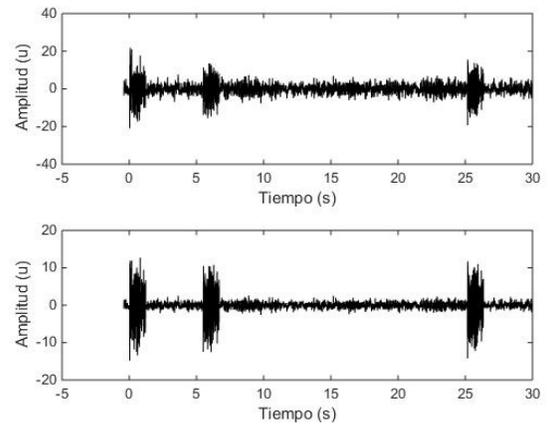


(d) Separación de mínimos cuadrados.

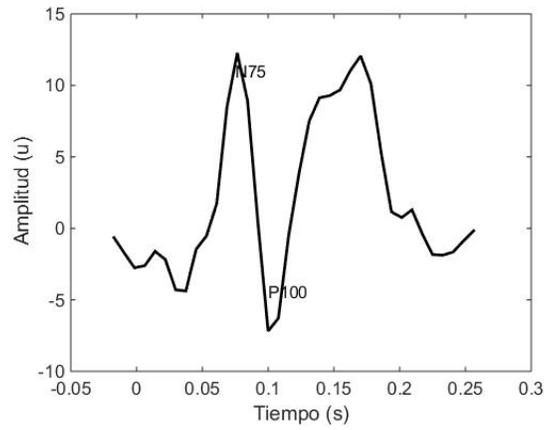
Figura 4.19: Sección de potencial evocado resultante de la separación de señales EEG-EOG efectuadas por los tres algoritmos y mínimos cuadrados como referencia.



(a) Fuentes originales; EEG y EMG.

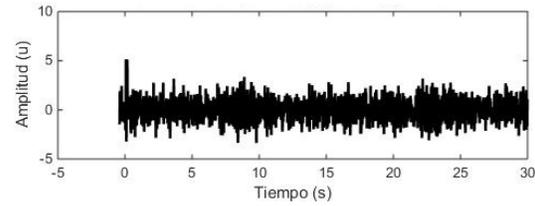
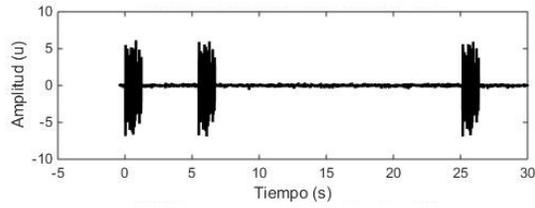


(b) Mezcla de fuentes EEG y EMG.

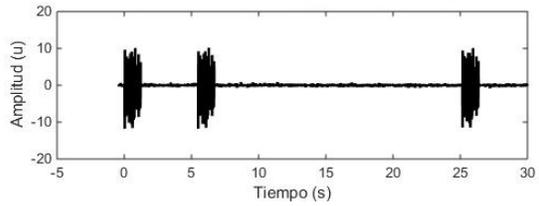
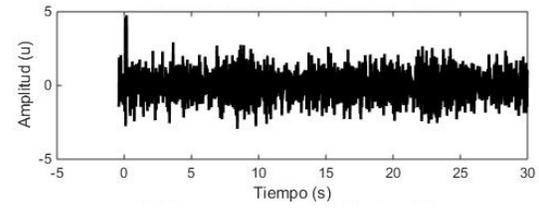


(c) Sección donde se encuentra el potencial evocado.

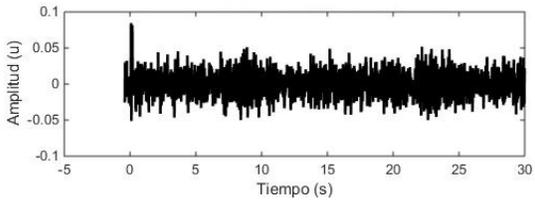
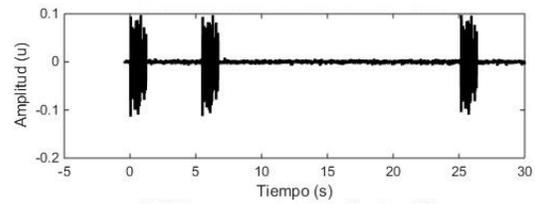
Figura 4.20: (a) señales originales EEG y EMG, (b) mezcla y (c) potencial evocado a ser recuperado por los algoritmos.



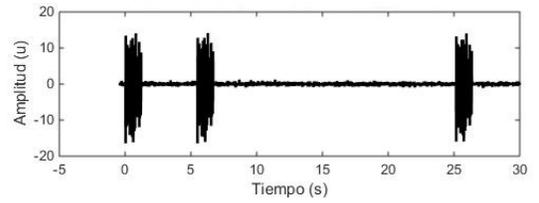
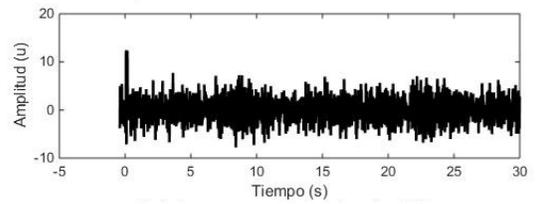
(a) FastICA. SINR=22.85 dB, NMSE=-15.09 dB.



(b) InfoMax. SINR=23.39 dB, NMSE=-15.59 dB.

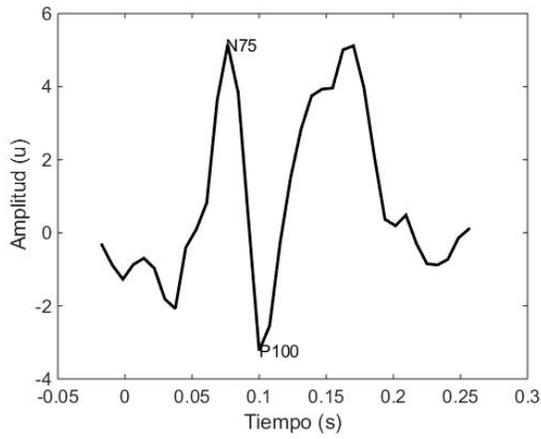


(c) SOBI. SINR=23.40 dB, NMSE=-14.90 dB.

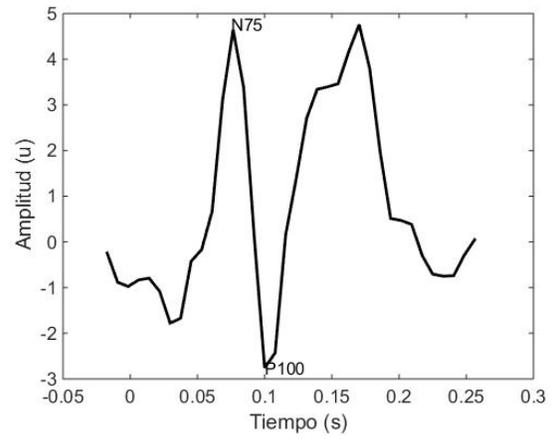


(d) Mínimos cuadrados. SINR=23.02 dB, NMSE=-15.67 dB.

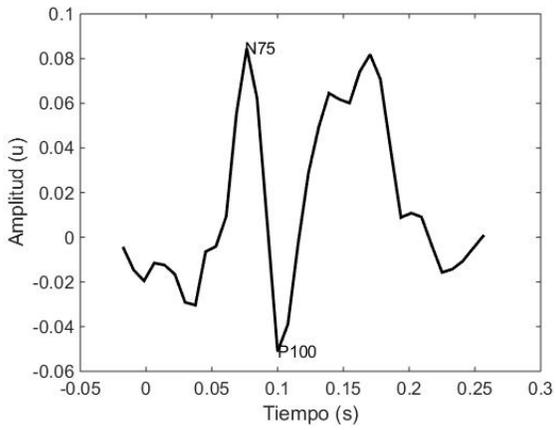
Figura 4.21: Separación de señales EEG-EMG efectuadas por los tres algoritmos, (a) FastICA, (b) InfoMax, (c) SOBI y (d) mínimos cuadrados como referencia.



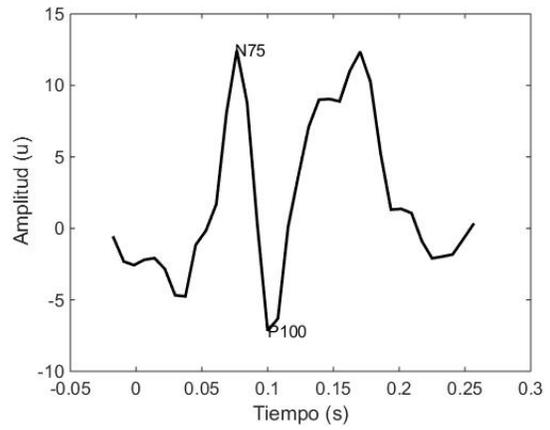
(a) Separación de FastICA.



(b) Separación de InfoMax.

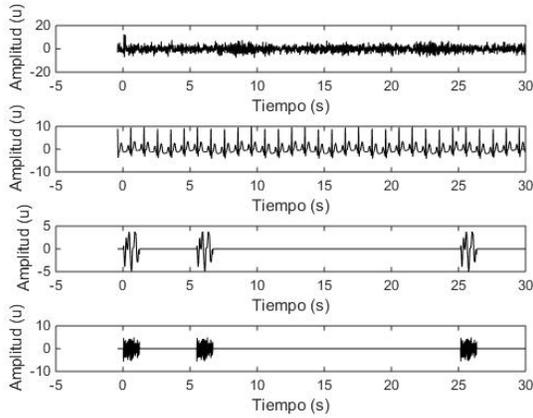


(c) Separación de SOBI.

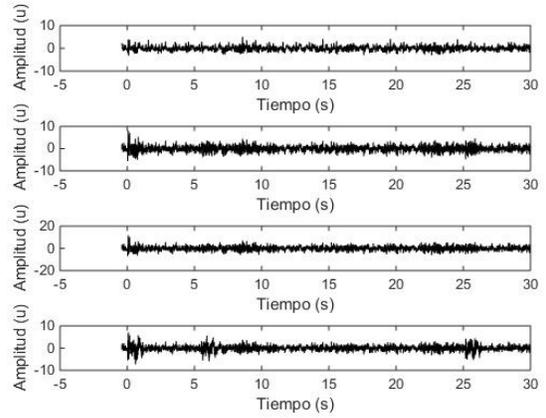


(d) Separación de mínimos cuadrados.

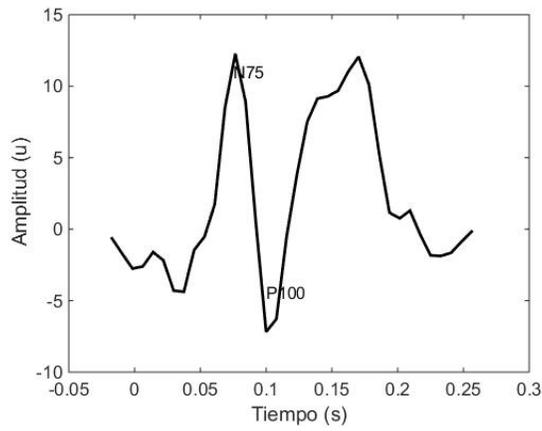
Figura 4.22: Sección de potencial evocado resultante de la separación de señales EEG-ECG efectuadas por los tres algoritmos y mínimos cuadrados como referencia.



(a) Fuentes originales; EEG, ECG, EOG y EMG.

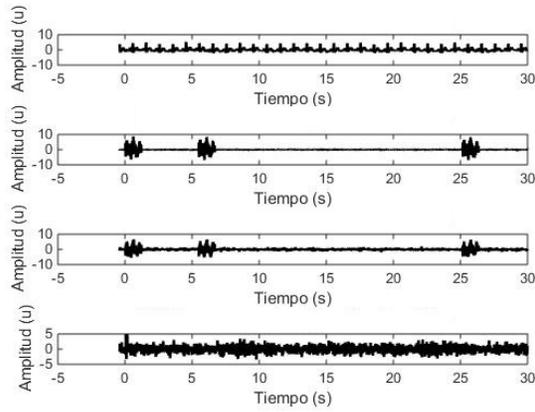


(b) Mezcla de fuentes EEG, ECG, EOG y EMG.

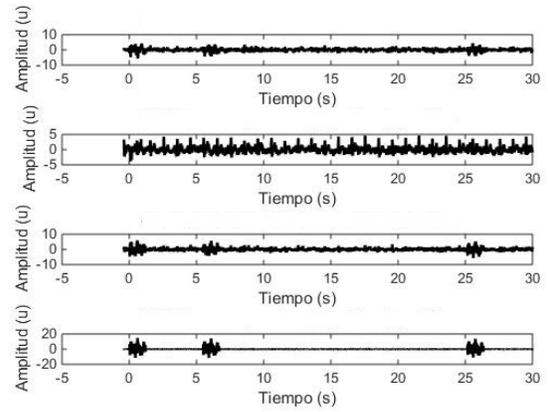


(c) Sección donde se encuentra el potencial evocado.

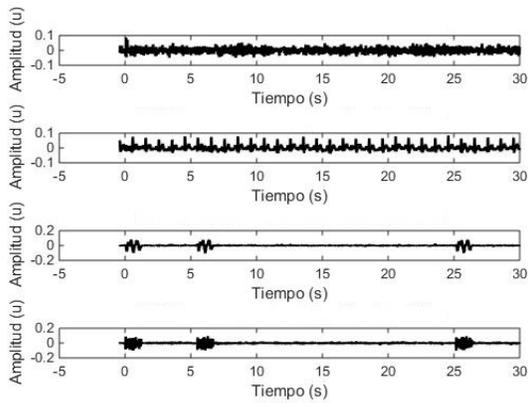
Figura 4.23: (a) señales originales EEG, ECG, EOG y EMG (b) mezcla y (c) potencial evocado a ser recuperado por los algoritmos.



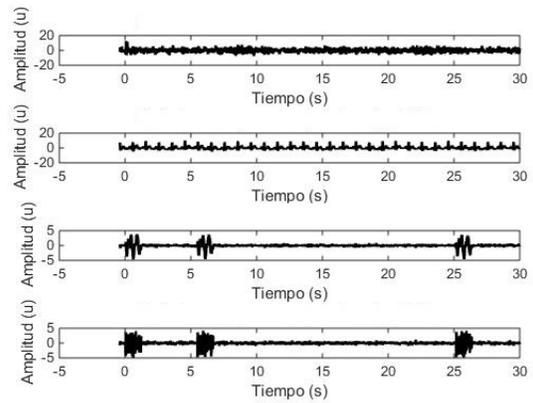
(a) FastICA. SINR=19.02 dB, NMSE=-12.01 dB.



(b) InfoMax. SINR=-1.71 dB, NMSE=-0.45 dB.

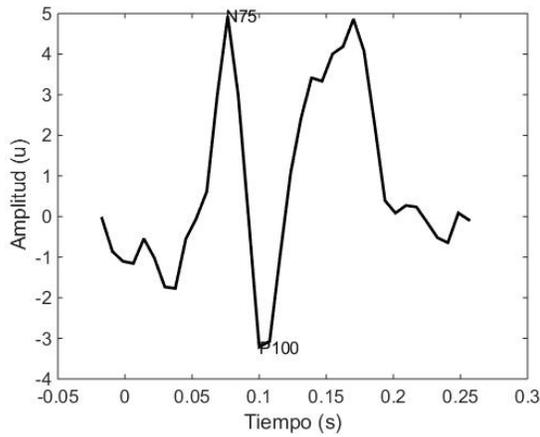


(c) SOBI. SINR=17.55 dB, NMSE=5.95 dB.

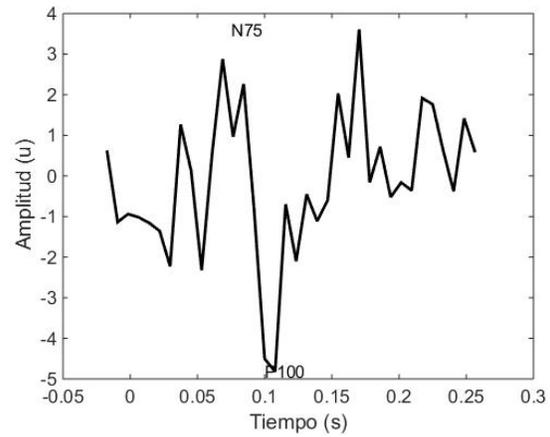


(d) Mínimos cuadrados. SINR=18.74 dB, NMSE=-14.90 dB.

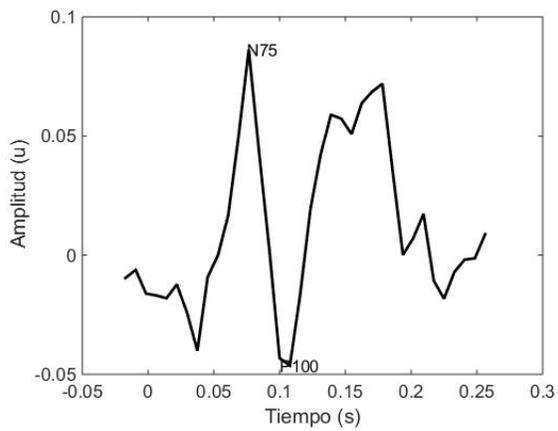
Figura 4.24: Separación de señales EEG-ECG-EOG-EMG efectuadas, (a) FastICA, (b) InfoMax, (c) SOBI y (d) mínimos cuadrados como referencia. Nótese como los componentes 1 y 3 de InfoMax visualmente contienen el mismo artefacto.



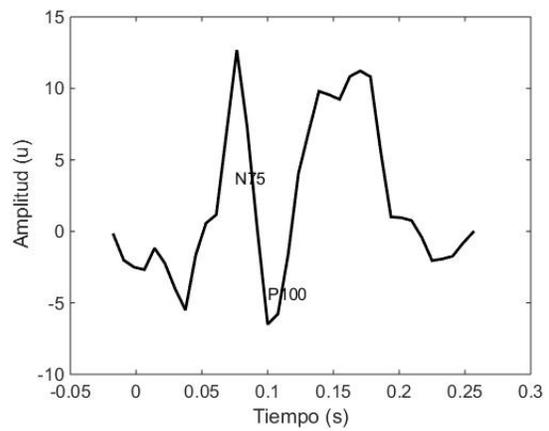
(a) Separación de FastICA.



(b) Separación de InfoMax.



(c) Separación de SOBI.



(d) Separación de mínimos cuadrados.

Figura 4.25: Sección de potencial evocado resultante de la separación de señales EEG-ECG-EOG-EMG efectuadas por los tres algoritmos y mínimos cuadrados como referencia.

4.3. Separación de artefactos de 2 señales reales

Finalmente el algoritmos fueron evaluados en 2 señales reales EEG encontradas en *physio-net.org* [26]. Estas señales fueron obtenidas en el *Children's Hospital Boston*, y consisten de registros EEG de pacientes pediátricos con convulsiones intratables [26]. Los 2 registros seleccionados fueron de los electrodos FP1-F7 de protocolo sistema 10-20, de acuerdo a la hoja de información de la base de datos, y limitados a tener una longitud de 4000 muestras; representando un tiempo de grabación aproximado de 15 segundos (frecuencia de muestreo de 256 Hz) (figura 4.26). Debido a ser electrodos frontales, éstos son susceptibles de captar señales EOG. Los datos de la figura 4.26 presentan algunos “picos” que estimamos pueden deberse a ésta

actividad. Los algoritmos desarrollados fueron alimentados con estos registros y la separación efectuada por FastICA, InfoMax y SOBI se muestra en las figuras 4.27, 4.28 y 4.29 respectivamente.

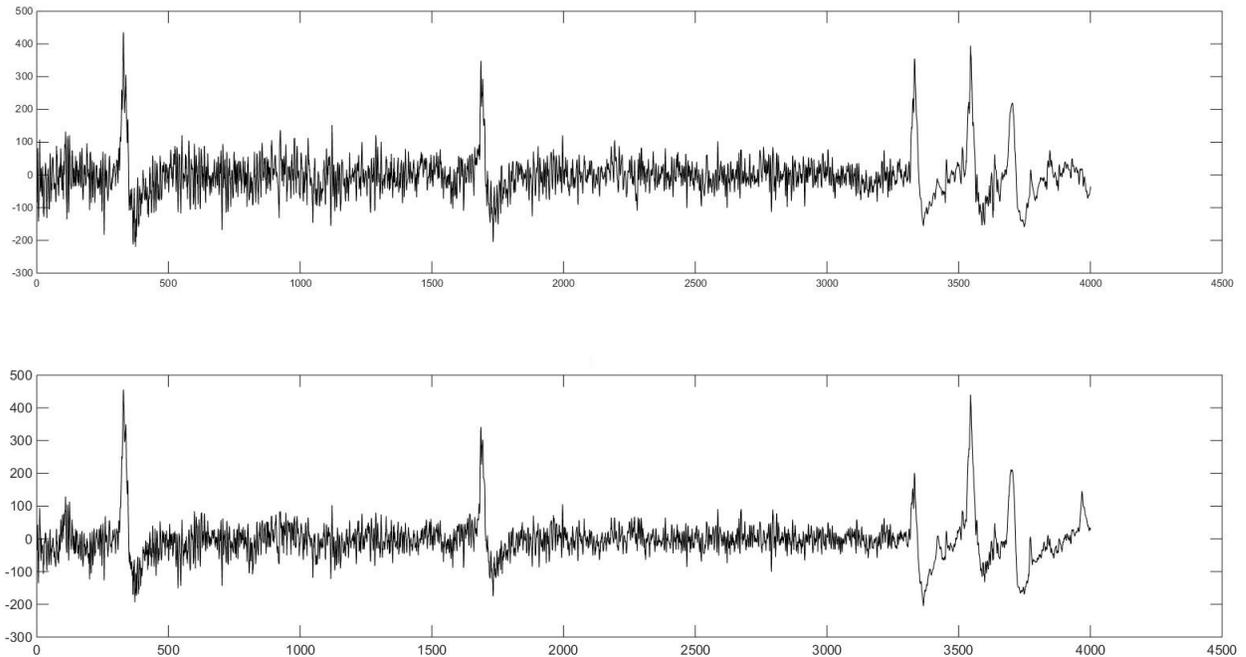


Figura 4.26: 2 señales EEG pertenecientes a electrodos FP1-F7. Probable actividad EOG en muestra 300, 1700 y 3350.

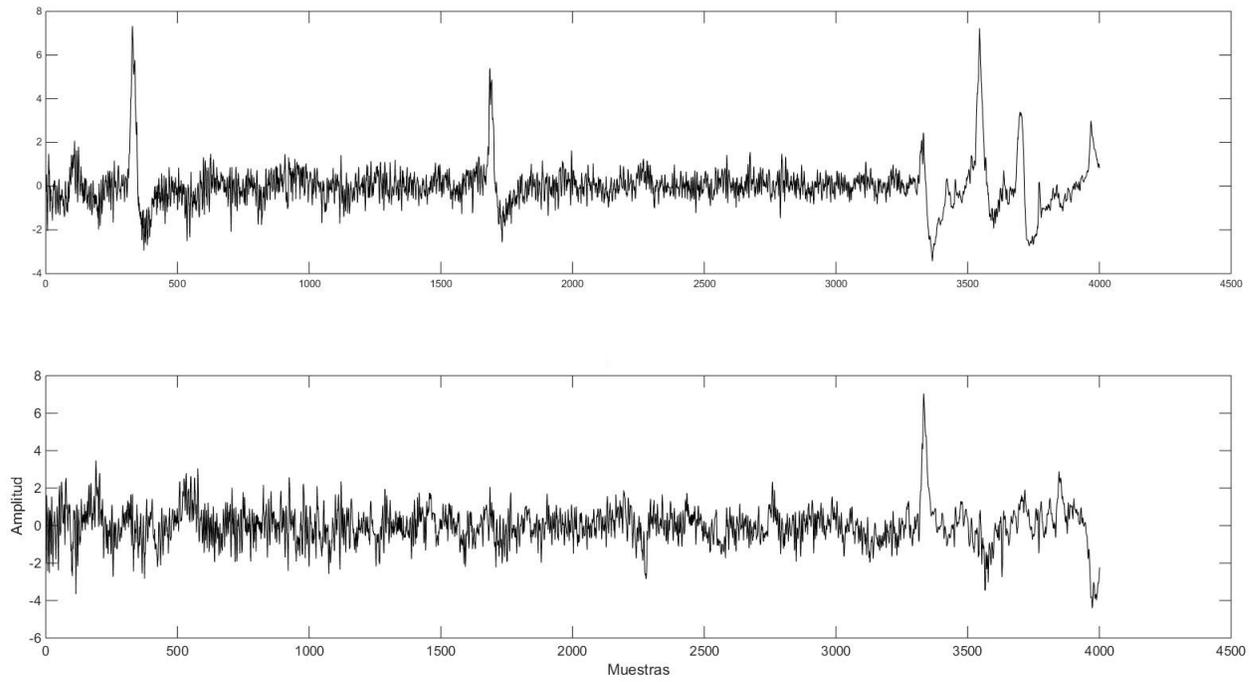


Figura 4.27: Componentes obtenidas por FastICA.

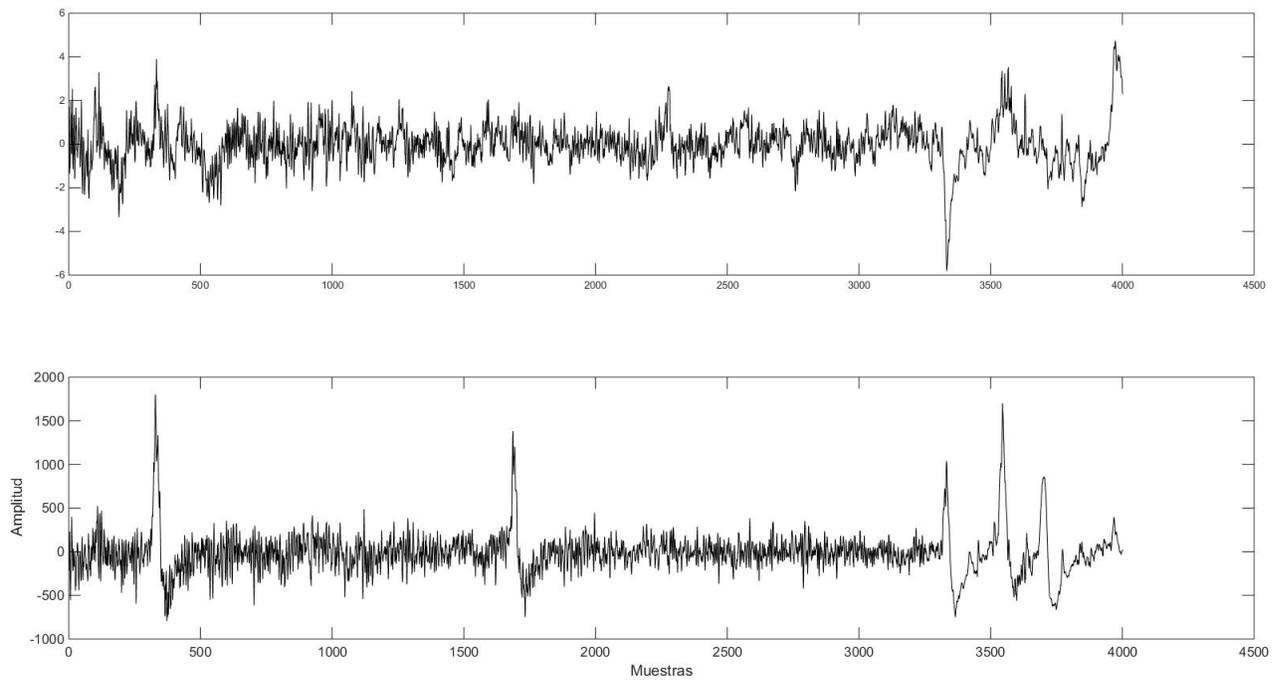


Figura 4.28: Componentes obtenidas por InfoMax.

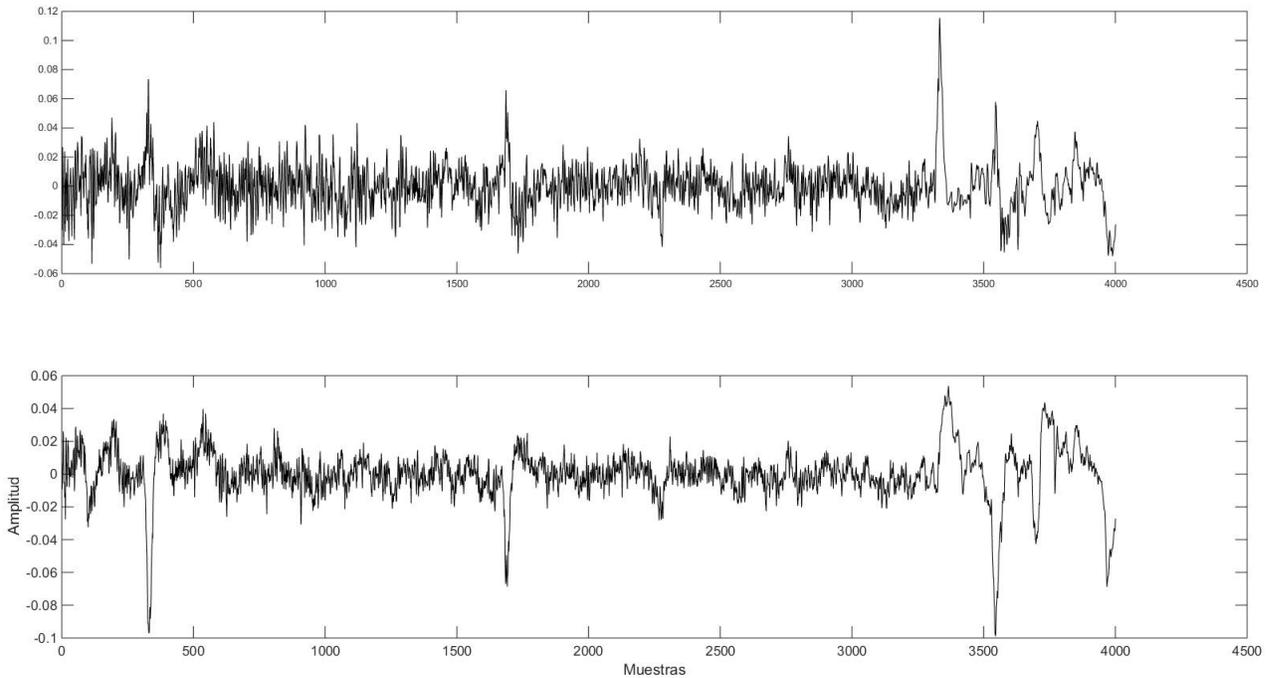


Figura 4.29: Componentes obtenidas por SOBI.

4.4. Discusión

Los registros EEG adquiridos en práctica pueden contener desde un artefacto hasta un número desconocido de artefactos; en muchas ocasiones es fácil identificar el tipo de artefacto presente, pues la forma de onda característica de la interferencia es plenamente conocida, como lo que sucede con los artefactos tratados en esta tesis. Dicho esto será útil saber la herramienta que nos ofrezca mejores resultados de separación dependiendo del fenómeno interferente que se tenga identificado. Por lo tanto el análisis de los datos que se muestra a continuación fue hecho con base en los artefactos a separar.

4.4.1. Separación de ECG

Iniciando con la separación de señales **electrocardiográficas** cuando el número de datos de entrada aumenta, es posible observar que SOBI es quien alcanza la mejor separación aumentando proporcionalmente con los datos y alcanzando su máxima SINR usando todos los datos (42

dB), pero solamente con 1 dB de diferencia con respecto a FastICA que alcanza los 43 dB pero con sólo 1500-2300 datos, sin embargo la SINR de FastICA decrece hasta en un 50% cuando todos los datos son usados. InfoMax alcanza su mejor separación (30 dB respecto a la SINR) en 30 s de datos y posteriormente disminuye (figura 4.5a). En las gráficas de NMSE (figura 4.6a), vemos que el error de SOBI disminuye conforme aumentan los datos mientras el de FastICA aumenta, ésto muestra una relación inversa de estos algoritmos respecto a la SINR. El menor error lo ofrece FastICA usando igualmente los 1500 datos. Infomax muestra la misma tendencia inversa que ofreció al evaluar la SINR.

Cuando la SAR en la mezcla se varía, usando 3840 datos, SOBI y FastICA demuestran una separación constante sin importar qué señal fuente ofrezca mayor energía siendo FastICA solamente 3 dB mayor (33 dB). Por su parte, InfoMax tiene una menor SINR cuando la energía de la señales fuente es igual, alcanzando básicamente la magnitud de rechazo de artefactos y ruido que SOBI y FastICA de 30 dB (figura 4.8a). El NMSE de SOBI muestra un interesante comportamiento, pues aún y cuando se mantuvo constante a la SINR, ahora muestra un error mucho menor (llegando a -25 dB) cuando el artefacto es registrado con mayor energía que la señal EEG (respecto a los -4 dB de error con 10 dB de SAR) (figura 4.9a). El error de InfoMax tiene una tendencia parecida a la pauta que enseñó en la evaluación del SINR. FastICA por su parte mejora su error hasta -23 dB con la energía mayor de la señal de interés (figura 4.6a).

La evaluación cuando existe una variación de la SNR fue hecha con base en lo que se considera una separación adecuada; para [27] una SAR que indica una buena calidad de separación es de 16 dB, usando este valor como referencia se observaron a detalle las gráficas que varían la SNR y se dió especial atención a los valores que fueran iguales a 16 dB o mayores; para la separación de ECG estos valores ocurren con una SNR mayor a 40 dB, donde puede apreciarse que FastICA logró un mejor rechazo de artefactos y ruido con 25 dB a 50 dB de SNR, siendo incluso mayor que la separación por mínimos cuadrados (figura 4.11a). SOBI e InfoMax lograron la misma separación que mínimos cuadrados, con 21 dB. Las gráficas del error (figura 4.12a) muestran una marcada diferencia entre los errores de la separación de los algoritmos, aquí es posible observar la superioridad del método de mínimos cuadrados. Una interesante observación

es que InfoMax tiene el error más pequeño con -14 dB, seguido por SOBI (-10 dB) y finalmente FastICA con -4 dB (figura 4.12a).

4.4.2. Separación de EOG

En la separación de **EOG**, FastICA y SOBI mostraron el mismo éxito en su rechazo de interferencias con 40 dB, InfoMax quedó 10 dB por debajo, sin embargo, los 3 algoritmos rechazaron con la misma intensidad cuando se usaron 2600 datos (figura 4.5b). El menor error nuevamente es logrado por FastICA con -31 dB, SOBI en contraste con su rechazo de artefactos obtuvo un error más grande, alcanzando, de manera constante sin importar la cantidad de datos -10 dB e InfoMax obtuvo -22 dB cini erir mínimo con 2300 datos (figura 4.6a).

La variación de la SAR, al igual que como sucedió con la separación de ECG, fue constante y de 35 dB de SINR para SOBI y FastICA, nuevamente InfoMax encuentra bajo rechazo con una SAR muy positiva (+20 dB) o muy negativa (-20 dB) (figura 4.8b). En la evaluación del error SOBI se desempeñó como lo hizo anteriormente, pero esta vez de manera inversa, dejando un error mínimo cuando el artefacto presenta más energía que la señal EEG. FastICA mantuvo su error constante en -30 dB al igual que InfoMax, sólo que éste con un valor más alto de -18 dB (figura 4.9b).

En los 50 dB de SNR esencialmente los tres algoritmos, incluyendo mínimos cuadrados, tuvieron el mismo rechazo a interferencia de 23 dB (figura 4.11b); lo cual difiere del error mínimo, donde en 50 dB de SNR SOBI deja el mayor error con -7 dB, seguido de FastICA e InfoMax con -9 dB y -10 dB respectivamente y finalmente mínimos cuadrados presentó -15 dB (figura 4.12b).

4.4.3. Separación de EMG

En la separación de **EMG** y variación de datos, SOBI en todo momento es superior por 11 dB (figura 4.5c), contrario a lo que sucede con la medición del error, donde el método de diagonalización de matrices deja el máximo error comparado con los demás algoritmos, de -17 dB; seguido de cerca por InfoMax (figura 4.6c). FastICA por su parte tiene el mínimo error

de salida con -40 dB donde este último algoritmo disminuye la diferencia de señal original y recuperada conforme aumenta los datos siendo 6500 el número de éstos donde alcanza su error mínimo (figura 4.6c). En lo que respecta a la variación de la SAR, SOBI mantuvo constante el mejor rechazo a interferencias y ruido con 51 dB, 9 dB abajo quedó FastICA y con un SAR de 0 dB, InfoMax rechaza con un valor de 32 dB (figura 4.8c). En el error SOBI continua mejorando con el aumento del SAR, FastICA ofrece el mínimo error de -39 dB durante todos los valores de SAR de igual manera que lo hace InfoMax con -19 dB (figura 4.9c). Cuando se usa la SNR como variable, en 50 dB existe la observación de que FastICA e InfoMax efectúan la mayor razón señal a interferencia con 3 dB sobre SOBI y mínimos cuadrados (figura 4.11c). Lo anterior sigue cierto para InfoMax que deja el menor error de -10 dB, pero FastICA sólo logra -3 dB cuando SOBI queda en medio con -6 dB (figura 4.12c).

4.4.4. Separación de la mezcla ECG, EOG y EMG

La prueba de separación de las **3 señales artefactuales** ofrece un comportamiento parecido y muy cercano en valores para SOBI y FastICA, donde al igual que en la separación de ECG, FastICA obtiene su mejor resultado y el de SOBI aumenta con el número de datos. InfoMax queda muy abajo en su calidad de desempeño, pues solamente logra 6 dB de SINR decreciendo conforme los datos aumentan (figura 4.5d). En el error FastICA ofrece una mejor calidad de separación (-22 dB), siendo 10 dB mejor que SOBI y 18 dB mejor que InfoMax (figura 4.5d). En la variación del SAR, al igual que en la separación de EOG y ECG, FastICA y SOBI obtuvieron los mismos resultados, de 28 dB de SINR, mientras InfoMax incluso presentó un rechazo negativo (figura 4.8d). El error de SOBI vuelve a mostrar sensibilidad ante el cambio de energía de señales, mejorando conforme la SAR aumenta. FastICA se mantiene constante pero aumentando ligeramente con la SAR hasta alcanzar un mínimo de -21 dB. InfoMax sólo pudo lograr -1.63 dB de error (figura 4.9d).

En la figura 4.11d, FastICA muestra la mejor separación en 50 dB de SNR con 17 dB y justo debajo están SOBI y mínimos cuadrados con 15 dB, InfoMax nuevamente quedó con 5.44 dB máximos. El error mínimo quedó en manos de FastICA que efectuó, a 50 dB de SNR solamente -4 dB, 7 dB más que mínimos cuadrados, mientras SOBI mostró un error incluso positivo de

1.13 dB e InfoMax quedó en 0 (figura 4.12d).

4.4.5. Tiempos de cómputo

Los tiempos de cómputo de los algoritmos fueron en general los mismos para cada prueba; InfoMax tarda hasta 1 s para realizar la recuperación de las señales cuando se ingresan los 12800 datos y este tiempo se duplica si la cantidad de señales se duplica también. Con 3840 datos le toma en promedio 0.7 s. SOBI es el código más rápido computacionalmente con un promedio de recuperación de componentes de 0.0015 s cuando solamente existen dos señales. FastICA aunque es más lento que SOBI es hasta 140 veces más rápido que InfoMax con 0.005 segundos. Una observación importante es que FastICA aumenta el tiempo computacional cuando la SNR es muy baja, llegando a tardar 0.6 s, probablemente debido a que siendo el ruido aleatorio, el algoritmo no encuentra los vectores correspondientes que logren la convergencia adecuada y necesita más iteraciones.

4.4.6. Pruebas visuales de separación de artefactos

Las pruebas visuales hechas desde la figura 4.14 hasta la figura 4.22 demuestra que la separación de los algoritmos en las condiciones de 30 s de datos (3840 datos), con un SNR de 50 dB y un SAR de 0 dB, efectúa una separación cercana a los 20 dB de SINR (figuras 4.11a, 4.11b y 4.11c) para todos los algoritmos, incluso mínimos cuadrados. En cuanto al NMSE, FastICA logra solamente -5 dB cuando se separa ECG y -9 dB cuando separa EOG, siendo el mayor error de los algoritmos. Visualmente, aunque las imágenes son pequeñas una notable mejoría se aprecia en cada separación hecha por los algoritmos para los artefactos de manera individual. La separación que más reto impone es aquella que mezcla a los tres artefactos, y como puede apreciarse en la figuras 4.24, InfoMax no fue capaz de recuperar la señal EEG sino que sus componentes 1 y 4 básicamente son la misma actividad. Suponiendo que la señal EEG es el componente 1, con ésto se asume que la señal contiene aún artefactos.

El potencial evocado recuperado en las figuras 4.16, 4.19 y 4.22 fue adecuadamente reconstruido con ligeras modificaciones que aunque no es completamente igual al evocado de referencia, la información se mantiene dando especial importancia al tiempo donde ocurre cada onda que

le compone. En 4.25 como consecuencia de una separación de -1.71 dB de SINR el potencial evocado obtenido por InfoMax (figura 4.25b) se perdió completamente.

Al analizar los datos anteriores, y dando importancia a la separación de los artefactos individualmente se puede asumir que todos los algoritmos son capaces de separar artefactos traslapados individualmente en señales EEG, sin embargo cuando existe más de una señal artefactual InfoMax no logra una adecuada separación, la suposición de esto es debido a que InfoMax está configurado para separar señales de distribución supergaussiana, cuando lo hace para dos señales recupera aquella que presenta tal distribución y la señal EEG es la resultante. Con cuatro señales es posible que los datos originales EEG sean confundidos con los demás fenómenos. Aun así InfoMax parece trabajar adecuadamente cuando existe una SNR de 50 dB, pues aunque queda hasta 5 dB por debajo de FastICA el error que ofrece es menor, la desventaja para InfoMax en tal caso es el tiempo de cómputo que le toma para obtener las componentes deseadas.

Aunque respecto a su SINR, el algoritmo SOBI no es susceptible a los cambios de SAR, sí lo es respecto al error mínimo alcanzado, debido a que al separar la señal ECG su error aumenta conforme el SAR aumenta, y lo contrario sucede cuando la señal no es periódica como lo fue en el caso de las mezclas con EOG y EMG. Esta pauta se repite cuando los tres artefactos toman lugar en la mezcla, dejando la suposición de que es efecto de la señal ECG y por lo tanto de las señales periódicas. Respecto al SAR InfoMax también ofrece un patrón peculiar cuando se evalúa su SINR y es que cuando el SAR se encuentra en los extremos (-20 dB y +20 dB) existe una caída del valor como puede observarse en las figuras 4.8a, 4.8b y 4.8c.

Mínimos cuadrados es un algoritmo que en esta tesis es usado como referencia por su desempeño, sin embargo, cuando las señales ofrecen una SNR de 50 dB, éste ofrece una calidad igual a los demás algoritmos lo cual se puede observar en las pruebas visuales de separación. La suposición de esto es que el ruido gaussiano es reducido en la misma magnitud que lo hacen los algoritmos, pues al existir muchos valores ajenos a la señal la recuperación óptima no puede ser alcanzada, sin embargo con un SNR mayor a 50 dB el potencial de mínimos cuadrados es evidente, logrando separaciones de hasta 300 dB de SINR y -300 dB de NMSE como puede

verse en las evaluaciones que ignoran el ruido.

SOBI es el algoritmo que mejor SINR logra, sin embargo, para que ésto se cumpla, debe de utilizar la mayor cantidad de datos posible, pues se observó que su desempeño crece proporcionalmente. FastICA aunque no alcanza la mejor SINR, puede realizar exitosas separaciones con un promedio de 2000 datos y ofrece los mejores valores de SINR en presencia de ruido como puede mostrarse en la tabla 4.1 en la columna de SNR incluso cuando existen tres artefactos.

4.4.7. Separación de señales reales

Las separación de las señales reales sólo puede ser evaluada de manera cualitativa, pues al no poder conocer con certeza la señal del cerebro a registrar y no contar con una referencia de señal artefactual solamente es posible estimar de manera visual qué componentes son las de interés y las interferentes. Las figuras 4.27 y 4.28 muestran las componentes obtenidas por FastICA e InfoMax. Las oscilaciones artefactuales al inicio de los registros son más prominentes en los resultados entregados por InfoMax, mientras que FastICA logró atenuarlas en mayor grado; así, para FastICA la componente EEG se estima que es la número 2 mientras que para InfoMax es la número 1. Los picos pertenecientes a actividad EOG han quedado fuera en las muestras 300 y 1700; sin embargo, en la muestra 3350 sigue existiendo una alteración que parece ser de naturaleza artefactual. SOBI, a diferencia de las evaluaciones con señales sintéticas pasó a ser el algoritmo que menor calidad de separación ofreció (figura 4.29), pues los picos de EOG, aunque atenuados, continúan ahí. Queda la posibilidad de que si se aumenta la cantidad de muestras, SOBI obtenga un mejor desempeño, pues como se vio previamente, conforme aumenta el número de datos SOBI entrega mejores resultados.

4.5. Interfaz gráfica de usuario

La interfaz gráfica fue configurada utilizando el módulo GUI (graphical user interface) de MATLAB[®]. Los códigos implementados fueron llamados como bloques dentro del mismo programa.

La figura 4.30 muestra el panel mostrado al correr el programa. El botón en la parte superior es el encargado de mostrar el explorador de Windows[®] donde es usuario tiene la posibilidad de localizar el archivo que contiene la información a ser procesada. Justo debajo existen dos menús desplegables; en el primero se selecciona el tipo de algoritmo ICA a utilizar en los datos, i.e. FastICA, InfoMax o SOBI (figura 4.31). El menú siguiente despliega las funciones que puede utilizar FastICA (figura 4.32).

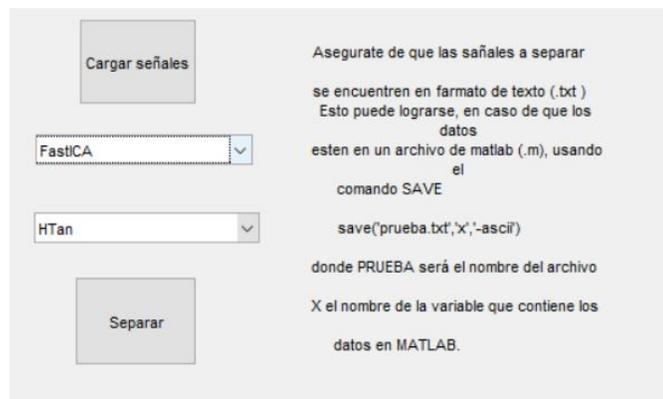


Figura 4.30: Panel principal de la interfaz gráfica.

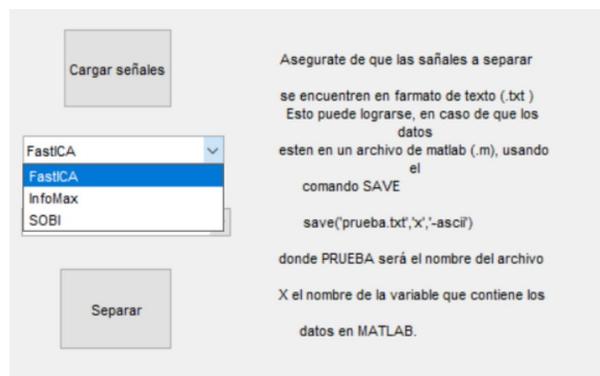


Figura 4.31: Botón de selección que muestra el tipo de algoritmo ICA a utilizar.

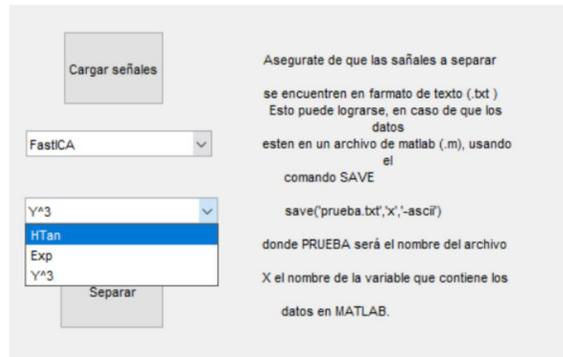


Figura 4.32: Botón de selección que muestra el tipo de función que utilizará el algoritmo FastICA.

Una vez seleccionados los parámetros con los que trabajará la interfaz, el botón de separar se encargará de tomar las señales observadas, que aparecen como una figura nueva justo después de seleccionar los datos de interés (figura 4.33), y aplicando el algoritmo de elección del usuario presentará las componentes independientes obtenidas en una nueva ventana (figura 4.34).

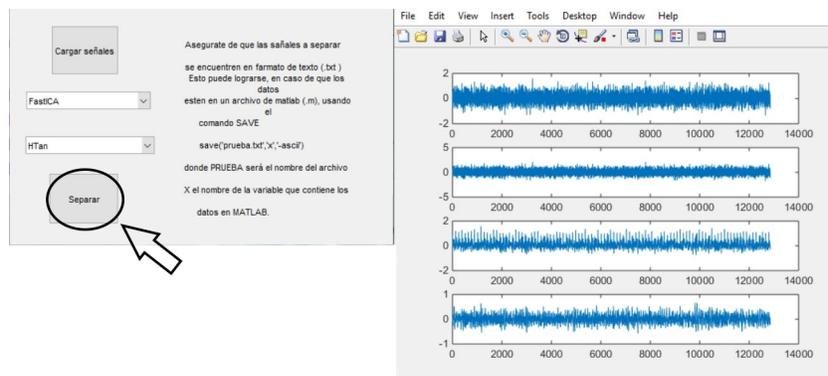


Figura 4.33: Botón encargado de aplicar el algoritmo ICA a los datos seleccionados. En la parte derecha de la imagen es posible apreciar las señales observaciones cargadas por el usuario.

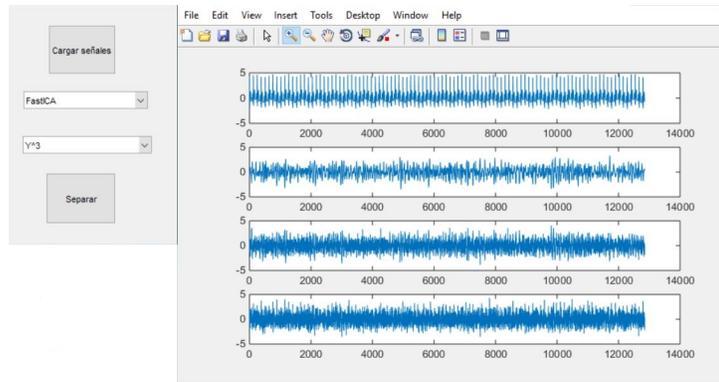


Figura 4.34: Resultado arrojado por el programa. Es posible observar que las componentes independientes fueron obtenidas por el algoritmo siendo fácilmente reconocible la primera componente perteneciente a ECG.

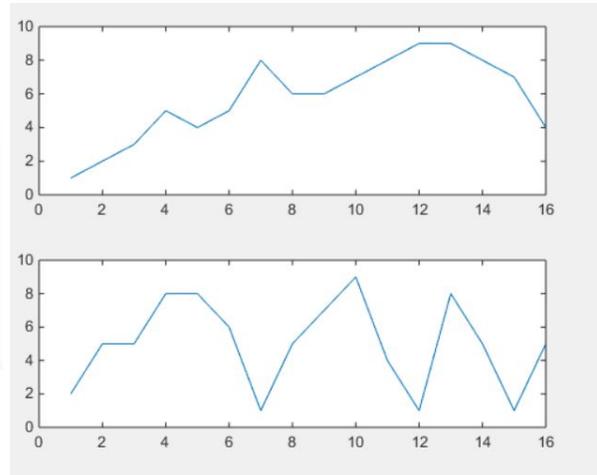
Debido a la variedad de hardware y software existente en el mercado para la adquisición de señales EEG (o de otra naturaleza) es necesario estandarizar el formato de los datos seleccionados; por lo que la interfaz desarrollada en esta tesis leerá datos contenidos en un archivo .txt, donde las observaciones se contengan en diferente línea de texto. Por ejemplo, si los datos de la figura 4.35a son introducidos al programa, se obtienen la gráficas de la figura 4.35b. Si los datos se obtienen en el mismo ambiente de MATLAB[®], usando la función *save* es posible pasar los datos a un formato .txt.

```

File Edit Format View Help
1 2 3 5 4 5 8 6 6 7 8 9 9 8 7 4
2 5 5 8 8 6 1 5 7 9 4 1 8 5 1 5

```

(a) Señales fuente.



(b) Mezcla de las señales fuentes.

Figura 4.35: (a) dos señales de 16 datos cada una en formato .txt y (b) la gráfica de estos datos. Esta figura tiene la intención de mostrar como debe ser el orden de los datos en el archivo .txt para cargar correctamente las observaciones obtenidas.

Capítulo 5

Conclusiones

Los algoritmos FastICA, InfoMax y SOBI fueron codificados y probados exitosamente. Cuatro métricas fueron usadas para evaluar su desempeño ante la separación de tres tipos de artefactos; de manera cuantitativa la relación señal a interferencia y ruido (SINR), el error cuadrático medio normalizado (NMSE) y el tiempo de cómputo de cada uno. Cualitativamente el criterio fue de tipo visual. Las evaluaciones realizadas fueron en función de tres parámetros, el número de datos de entrada, la SAR en la mezcla y la SNR de la misma.

Los resultados obtenidos indican que el algoritmo más rápido computacionalmente es SOBI y que además es el algoritmo que mejor separación puede ofrecer con respecto a su SINR, sin embargo esto sucede solamente con la mayor cantidad de datos que puedan ser ingresados. Por otra parte el error ofrecido no es el más adecuado. InfoMax es inferior que SOBI en cuanto a su SINR, pero ligeramente superior en el error logrado. Este algoritmo trabaja adecuadamente en ambientes ruidosos, pero su tiempo de cómputo es muy elevado comparado con SOBI y FastICA, además no es capaz de separar una señal EEG contaminada con 3 artefactos.

FastICA es un algoritmo en promedio 6 veces más lento que SOBI, sin embargo puede alcanzar una adecuada recuperación de componentes con solamente 2000 datos, lo cual se ve igualmente reflejado en el error mínimo logrado. De acuerdo a la tabla 4.1 su recuperación de actividad es muy cercana a la lograda por SOBI con 3840 datos y es el que mejor SINR y NMSE obtuvo al separar 3 artefactos.

En la práctica si se quiere una separación óptima en términos de rechazo de interferencias y

ruido SOBI es el mejor algoritmo, sin embargo debe utilizarse una mayor cantidad de datos. Teóricamente FastICA puede ser usado en todas las aplicaciones de separación que involucre la interferencia de las señales ECG, EMG y EOG, siendo capaz de trabajar con una cantidad mínima de datos ofreciendo una separación adecuada en términos de SINR y de NMSE. InfoMax debe preferirse en condiciones ruidosas, sin embargo hay que tomar en cuenta que su tiempo computacional es elevado y que solamente puede ser usado para separar un solo artefacto.

Finalmente, una interfaz gráfica fue implementada en el ambiente de MATLAB[®] con el propósito de proporcionar una herramienta práctica de separación de fenómenos artefactuales de información electroencefalográfica al laboratorio de procesamiento de señales.

Referencias

- [1] Sornmo Leif and P. Laguna, *Bioelectrical signal processing in cardiac and neurological applications*. Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2005.
- [2] M. R. Nuwer, "Fundamentals of evoked potentials and common clinical applications today", *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.*, vol. 106, pp. 142-148, October 3, 1997.
- [3] D. Sherman, D. Walterspacher, "Electroencephalography," in *Encyclopedia of Medical Devices and Instrumentation*, J.G. Webster, Ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006, pp. 62-83.
- [4] J. A. Urigen y B. Garcia-Zapirain, "EEG artifact removal, state of the art and guidelines", *J. Neural Eng.*, vol. 12, núm. 3, p. 031001, 2015.
- [5] K. Blinowska, P. Durka, "Electroencephalography (EEG)" en *Wiley, Encyclopedia of Biomedical Engineering*, M. Akay, Hoboken, NJ: Wiley-Interscience, 2006, pp. 1341-1355.
- [6] Webster, John G., and John W. Clark. *Medical Instrumentation: Application and Design*. New York: Wiley, 1998.
- [7] S. J. Luck, "An introduction to Event-Related Potentials and Their Neural Origins" en *An introduction to Event-Related Potential Technique*, MIT Press, 2005, pp. 1-50.
- [8] G. J. Tortora and B. Derrickson, *Principles of anatomy and physiology*. Danvers, MA: Wiley, 2014.
- [9] W. Klonowski, "Everything you wanted to ask about EEG but were afraid to get the right answer," *Nonlinear bio. Phys. Biomed Central*, vol. 3, no. 2, May, 2009.

- [10] Evoked potential tests in clinical diagnosis, Tidsskrift for Den norske legeforening. [En línea]. Disponible: <http://tidsskriftet.no/2013/05/evoked-potential-tests-clinical-diagnosis>. [Consultado: 27-Nov-2016].
- [11] M. K. Islam, "Artifact Characterization, Detection and Removal from Neural Signals", Ph.D. dissertation, Dpt. of Elec. and Comp. Eng., National Univ of Singapore, Singapore, 2015.
- [12] J. F. Cardoso, "Blind Signal Separation: Statistical principles," *Proc. of the IEEE.*, vol. 86 no. 10, pp. 2009-2025, Oct. 1998.
- [13] A. Hyvarinen, J. Karhunen, and E. Oja, Independent component analysis. New York: J. Wiley, 2001.
- [14] A. Hyvärinen, "Independent Component Analysis: Algorithms and Applications," *Neural Networks*, Vol. 13, N.4-5, pp. 411-430, 2000.
- [15] T.P. Jung, S. Makeig, *et al.* "Removing electroencephalographic artifacts by blind source separation." *Pysch*, vol. 37. pp. 163-178, 2000.
- [16] G. R. Naik. "Introduction: Independent Component Analysis," *INTECH*.
- [17] J. H. Garvey, "Independent component analysis by entropy maximization (infomax)," Tesis M.S. Ing. Elec., U.S. Navy, Mon. Cal. 2007.
- [18] J. V. Stone, *Independent component analysis: A Tutorial introduction*, MIT press, 2004.
- [19] A. Belouchrani, *et al.* "Second order blind separation of temporally correlated sources 1993," Télécom, Paris, 1993.
- [20] A. Belouchrani, A. Cichocki, (2014), *Second Order Blind Identification*. [En línea]. Disponible: <https://github.com/NBT-Analytics/EEGLABSVN/blob/master/functions/sigprocfunc/sobi.m>.
- [21] "Dionysis" (2012), *A gentle introduction to algorithm complexity analysis*, [En línea]. Disponible en: discrete.org/complexiy.

- [22] A. Orozco, D. C. McLernon. "Blind signal separation for SDMA based on periodically time varying modulation." Leeds University, U.K. 1997.
- [23] J. A. Urigüen, "Electroencephalogram Artifact Removal Validation," *Jour. of med. and Hea. Inf.*, vol. 7, no. 1, pp. 1-10, Feb. 2017.
- [24] N. Yeung, R. Bogacz, et.al. "Detection of synchronized oscillations in the electroencephalogram: An evaluation of methods," *Psychophysiology*, Vol.41, pp.822-832, 2004.
- [25] P. McSharry, G. Clifford (2003, marzo). *ecgsyn.m* [En línea]. Disponible en: <https://physionet.org/physiotools/ecgsyn/Matlab/ecgsyn.m>
- [26] Ali Shoeb, *et al.* (2009, Septiembre) *CHB-MIT Scalp EEG Database* [En línea]. Disponible en: <https://www.physionet.org/pn6/chbmit/>.
- [27] A. Cichocki, *et al.* (2007, Marzo, 28) *ICALAB for signal processing*. [En línea]. Disponible en: <http://www.bsp.brain.riken.jp/ICALAB/ICALABSignalProc/>.

Apéndice A. Código de InfoMax

```
function [y,W,x,Dw,reloj,hs]=infomaxjh(x)
[m,N]=size(x);
maxiter = 100; %numero maximo de iteraciones
eta = .1;%paso inicial para gradiente ascendente
alpha = 1.2;% paso de incremento para gradiente ascendente
beta = 0.1;% paso de decremento para gradiente ascendente
gradasiter = 5;% Enter # of times to repeat Gradient Ascent
for j = 1:gradasiter;
    if j == 1
        W = eye(M);%inicializar matriz w a identidad
    else
        W = 2 * j * rand(M); %seleccionar incrementos para W aleatoriamente=
    end
    x=x'; %vectores fila, omitiendo este comando el algoritmo trabaja con vectores columna
    gaus=0;%seleccionar la cdf modelo
    hs = zeros(maxiter,1); gs = zeros(maxiter,1); etas = zeros(maxiter,1);
    for iter = 1:maxiter
        y = x * W;
        if gaus==1
            Y = 1./(1+exp(-y));
            pdf = -exp(-y)./((1+exp(-y)).^2);
            dpdf = (-2*exp(-y)./((1+exp(-y)).^3))-(exp(-y)./((1+exp(-y)).^2));
        elseif gaus==0
            Y = tanh(y);
            pdf = (1 - tanh(y).^2);
            dpdf = -2 * tanh(y) + 2 * tanh(y).^3;
        end
        psi = (dpdf)./ (eps + pdf);
        detW = abs(det(W));
        % calcular la entropia para la iteracion actual
        h = (1 / N) * sum(sum(log(eps + pdf))) + log(detW);
        if iter > 1
            if h > hs(iter - 1) %si incrementa la entropia
                eta = alpha * etas(iter - 1);
            else % si decrementa la entropia
                W = Wold;
            end
        end
    end
end
```

```

eta = beta * etas(iter - 1);
y = x * W;
if gaus==1
    Y = 1./(1+exp(-y));
    pdf = -exp(-y)./((1+exp(-y)).^2);
    dpdf = (-2*exp(-y)./((1+exp(-y)).^3))-(exp(-y)./((1+exp(-y)).^2));
elseif gaus==0
    Y = tanh(y);
    pdf = (1 - tanh(y).^2);
    dpdf = -2 * tanh(y) + 2 * tanh(y).^3;
end
detW = abs(det(W));
h = (1/N)*sum(sum(log(eps+pdf))) + log(detW);
psi = (dpdf)./(eps+pdf);
end
else
h = h;
end
grad = inv(W') + (1 / N) * (x' * psi);
W = W + eta * grad;
%Registrar h, grad, eta, W
hs(iter) = h; grads(iter) = norm(grad(:)); etas(iter) = eta; Wold = W;
end
%salidas y, hs, grads, etas
y = y; hs = hs; grads = grads; etas = etas; W = W-eta*grad;

```

Apéndice B. Código de SOBI

```
[m,N]=size(X);
if nargin==1,
    n=m;
    p=4; % numero de matrices de correlacion para diagonalizar
    end;
if nargin==2,
    p=4 ; % numero de matrices de correlacion para diagonalizar
    end;
pm=p*m;
X=X-kron(mean(X')',ones(1,N)); % media cero
[UU,S,VV]=svd(X',0);
Q= pinv(S)*VV';
X=Q*X;
%Estimacion de las matrices de correlacion
k=1;for u=1:m:pm, k=k+1; Rxp=X(:,k:N)*X(:,1:N-k+1)'/(N-k+1);
    M(:,u:u+m-1)=norm(Rxp,'fro')*Rxp; end;
%diagonalizacion
epsil=1/sqrt(N)/100; encore=1; V=eye(m);
while encore, encore=0;
    for p=1:m-1,
        for q=p+1:m,
            % rotaciones de givens
            g=[ M(p,p:m:pm)-M(q,q:m:pm) ;
                M(p,q:m:pm)+M(q,p:m:pm) ;
                i*(M(q,p:m:pm)-M(p,q:m:pm)) ];
            [vcp,D] = eig(real(g*g')); [la,K]=sort(diag(D));
            angles=vcp(:,K(3));angles=sign(angles(1))*angles;
            c=sqrt(0.5+angles(1)/2);
            sr=0.5*(angles(2)-j*angles(3))/c; sc=conj(sr);
            oui = abs(sr)>epsil ;
            encore=encore | oui ;
            if oui ,
                colp=M(:,p:m:pm);colq=M(:,q:m:pm);
                M(:,p:m:pm)=c*colp+sr*colq;M(:,q:m:pm)=c*colq-sc*colp;
                rowp=M(p,:);rowq=M(q,:);
                M(p,:)=c*rowp+sc*rowq;M(q,:)=c*rowq-sr*rowp;
```

```

    temp=V(:,p);
    V(:,p)=c*V(:,p)+sr*V(:,q);V(:,q)=c*V(:,q)-sc*temp;
end
end
end
end
%estimacion de la matriz de mezcla y las senales fuentes
Hf=pinv(Q)*V; %matriz de mezcla
Sf=V'*X; %fuentes estimadas
H = Hf(:,1:n);
S = Sf(1:n,:);

```