



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Departamento de Investigaciones Educativas

Tema

Estudio de la percepción geométrica en
estudiantes de preparatoria

Tesis que presenta

Javier Martín Zariñán Sánchez
Lic. Física y Matemáticas

Para obtener del grado de

Maestro en Ciencias con Especialidad en
Investigación Educativa

Directora de Tesis

Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez
Maestra en Ciencias

Febrero 2015

RESUMEN. El presente trabajo de investigación analiza la percepción geométrica que ostentan nueve estudiantes que cursan su primer año de preparatoria en una escuela pública. Dicho análisis está dirigido principalmente a la forma en que los estudiantes resuelven los retos impuestos por cuatro juegos didácticos de corte geométrico, identificando en tales situaciones las tácticas y estrategias que implementan al tratar de resolver el reto planteado por el material. Los resultados mostraron que la percepción geométrica de los estudiantes es heterogénea, con diferencias, en algunos casos significativas, en el dominio de las rotaciones [angulares] y traslaciones de objetos, tanto física como mentalmente. No hay una continuidad de éxito o fracaso en el desempeño del estudiante respecto al uso de su percepción geométrica, debido a su historia personal, conocimientos y actividades (académicas, laborales o familiares) que como individuos han experimentado hasta la fecha.

Esta investigación es una continuación de los trabajos iniciados por la profesora Fuenlabrada en el nivel preescolar y primeros años de la primaria, donde se insiste en la necesidad de que los niños, al utilizar el juego del tangram o los rompecabezas, por ejemplo, desarrollen su percepción geométrica a la vez que interactúan con las propiedades geométricas de las figuras (piezas). Dicha percepción es un insumo importante para el trabajo geométrico.

ABSTRACT. The present research work analyzes the ability of geometric perception that was exhibited by nine students who attend the first grade of a public senior high school. This analysis centers interest on how students approach and solve conflicted situations purposed-built by four didactic geometric games. Attention is focused in identifying the tactics and strategies used by the students when they attempt to reach a solution to solve the challenge. Outcomes showed that the geometric perception of the students is heterogeneous, with differences —significant in some cases— in the handling [angular] rotations and movements of objects. Such outcomes showed too that this event occurs not just when the physical ability is performed, but it also happens in the mental process. It is also important to point out that there is no continuity of success or failure in the performance of the students concerning the use of their geometric perception, due to their personal background, knowledge and personal activities (academic, labor or familiar) that as individuals they have experienced up to date.

This research is a continuation of the works initiated by professor Fuenlabrada in the preschool level and early elementary school, where she insists on the need that children, having used the tangram game or puzzles, for example, develop their own geometric perception when interacting with the properties of geometric figures (pieces). Such perception is an important input for the geometric work.

Dedico este trabajo:

*A mi querida esposa Marcela Cervantes,
que con sus sugerencias, cuidados y besos,
me invitan a iniciar y culminar este y
otros proyectos que son de ambos.*

*A nuestro amado hijo Ismael,
orgullo de nuestras vidas,
y la razón de iniciar esta aventura.*

Con mucho cariño y gratitud

Doy gracias sinceras a las siguientes personas:

A Irma Fuenlabrada Velázquez por aceptar y dirigir este proyecto, compartiéndome así sus conocimientos y gran experiencia didáctica. De igual forma a Bertha Vivanco por su ayuda y apoyo en todo momento.

A mis amigos Lilia, Karla, Isabel de Castilla, Alfredo, Mauricio, Dolores, Héctor V. y Héctor C. por su apoyo directo y ánimo constante. También a mi cuñada Elvia Cervantes por su ayuda siempre oportuna.

A mi familia en general y en especial a mi hermano Jesús Zariñán quien, con su estilo particular, me brindó su ayuda en los inicios de estos estudios.

Finalmente al Departamento de Investigaciones Educativas (DIE-CINVESTAV) que con su gran planta docente me forma en la investigación científico-social, una de las herramientas indispensable para estudiar, entender y modificar nuestro entorno.

Tabla de contenido

Introducción	1
1 Planteamiento general del estudio: metodología y referentes de la investigación	7
1.1. Justificación de la investigación	8
1.2. Preguntas de investigación	11
1.3. Referente teórico	12
1.4. Andamiaje metodológico y referente empírico	15
2 Los materiales didácticos: descripción y resultados generales	21
2.1 Los materiales didácticos	22
2.1.1 Kataminó	22
Descripción del juego y dinámica de la sesión	22
Análisis por nivel de juego (columna)	27
Análisis por estudiante (filas)	29
Conclusiones del Kataminó	31
2.1.2 Mueve uno	32
Descripción del juego y dinámica de la sesión	32
Análisis del Mueve uno	37
Conclusiones del Mueve uno	38
2.1.3 Laberinto (el duelo)	39
Descripción del juego y dinámica de la sesión	39
Análisis del laberinto	41
Conclusiones del laberinto	45
2.1.4 Tangram Avanzado	46
Descripción del juego y dinámica de la sesión	46
Análisis del tangram	48
Conclusiones del tangram	50

3 El concepto de estrategia	51
3.1 Definición de estrategia	52
3.2 Análisis de las tácticas y estrategias utilizadas en cada	58
3.2.1 Juego el Kataminó	58
Análisis de cada reto (columnas)	62
Análisis por estudiante (fila)	63
Observaciones del Kataminó	71
Estrategias en el Kataminó	72
Análisis de la percepción geométrica por estudiante	72
Conclusiones del Kataminó	74
3.2.2 Juego Mueve Uno	75
Análisis por estrategia (columnas)	78
Análisis por estudiante (fila)	79
Conclusiones del Mueve uno	82
3.2.3 Juego del Laberinto	83
Análisis por reto columnas	85
Análisis por estudiante (renglón)	85
Conclusiones del Laberinto	103
3.2.4 Juego del Tangram	104
Análisis por estudiante (fila)	106
Conclusiones del Tangram	113
3.3 Análisis comparativo de los juegos	113
Conclusiones e investigaciones futuras	123
Investigaciones futuras	131
Agradecimientos	132
Referencias bibliográficas	133

Introducción

*La geometría no consiste en describir lo que se ve
sino en establecer lo que «debe» ser visto.*

G. Brousseau

*Llevo obteniendo resultados desde hace tiempo,
pero aún no sé cómo llegué a ellos.*

A Arber¹.

La experiencia docente en el aula es por excelencia el espacio en el que el docente puede observar y detectar situaciones particulares que experimentan sus estudiantes en el momento en que intentan solucionar un problema [geométrico] específico. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los maestros están inmersos en sus actividades administrativas y de enseñanza que estas «pistas», que le permitirían comprender mejor los procesos de aprendizaje de sus alumnos, le pasan desapercibidas. Es decir, no advertimos los modelos que siguen a nuestras acciones cuando las estamos ejecutando. El antropólogo Clyde Kluckhohn lo mostró esto muy bien con su aforismo: «El pez sería la última de las criaturas en descubrir el agua».²

En cambio, cuando el docente observa los procesos que realizan los estudiantes cuando buscan una respuesta al problema planteado, descubre con asombro diversas maneras que ponen en juego para visualizar el problema, que lo llevan a comprender de mejor manera las respuestas de los alumnos o los caminos que siguen para resolverlo.

Existe otro componente, ligado al anterior, que aún no cuenta con una respuesta satisfactoria, y es el relacionado a la valoración de las llamadas habilidades cognoscitivas del individuo. En nuestro caso, estudiamos a la percepción geométrica como una habilidad necesaria para el trabajo con la geometría. Los distintos y numerosos acercamientos al tema de las habilidades cognitivas, desarrollados a lo largo del siglo pasado, encierran dificultades teóricas y metodológicas que, en ocasiones, son insalvables (Waldegg, 1999). Al respecto, mostramos de una manera sencilla, pero no concluyente, los avances y niveles de desarrollo de la percepción geométrica mostrada por un grupo de estudiantes de bachillerato, al trabajar con materiales didácticos que los enfrentaron a percibir diversas formas y, relaciones entre éstas, con el propósito de resolver cuatro juegos planteados con dichos materiales.

¹ Citado por A. Arber en *The Mind and the Eye*, 1954, p. 47

² Citado por Erickson en "La investigación de la enseñanza, II" de Merlin C. Wittrock, (1989:200)

Es necesario comentar que en el nivel medio superior, del que soy docente, y a lo largo de varios semestres, si bien esperaba que los alumnos recordaran los nombres de algunos objetos y figuras geométricas, empecé a notar que las dificultades que tenían para resolver problemas en general y, geométricos en particular, se extendía a la dificultad que mostraban para reconocer patrones y estructuras que subyacen en cada problema y que de alguna forma les permitiría anticiparse al tipo de herramienta geométrica o, en su caso algebraica, que podrían utilizar para empezar a construir una posible solución al reto planteado por el problema. A decir de Polya, «...Las figuras no se reservan al uso exclusivo de los problemas de geometría. Una figura puede ayudar considerablemente en todo tipo de problemas que nada tienen de geométrico (...)»

El indicio más significativo de esta situación ocurrió cuando mis estudiantes, al interactuar específicamente con el juego del tangram clásico de siete piezas, manifestaron dificultades al colocar una pieza en la figura, que requería de una rotación sobre su eje transversal para ponerla en su lugar. Resultó sorprendente para mí que no pudieran hacer dicha rotación para completar la figura y en lugar de intentarlo optaban por cambiar de lugar otras piezas o deshacer lo que llevaban construido de la figura solicitada. En otros casos, el armado estaba mucho de ser lo que exigía el dibujo planteado.

El presente trabajo surge de la inquietud por saber y comprender cómo se manifiesta y cómo funciona la habilidad de percepción geométrica que permite reconocer, discriminar y determinar qué figuras sirven para solucionar cierto tipo de problemas geométricos y cuáles no.

De lo anterior, centramos nuestra investigación específicamente en el estudio de la habilidad de «percepción geométrica», que junto a otras habilidades humanas como la percepción táctil, la háptica³, la auditiva, la visual y la espacial por mencionar algunas, comienzan a manifestarse y a desarrollarse en el individuo desde edades tempranas. En este sentido, los estudios que Fuenlabrada (2005) ha realizado respecto a la percepción geométrica, muestran que esta habilidad puede empezar a desarrollarse y practicarse a través de situaciones didácticas específicas desde el nivel preescolar y los primeros años de la primaria, sin la necesidad de introducir elementos teóricos de geometría básica.

La propuesta que se presenta en esta investigación es llevar a cabo un estudio sobre percepción geométrica en el nivel medio superior, y trabajar específicamente con estudiantes que cursan el primer año de preparatoria que, de manera general y

³ La háptica puede considerarse como el estudio del comportamiento del contacto y las sensaciones.

sistemática, han mostrado conocimientos deficitarios en las prueba iniciales de matemáticas y, en particular, en temas geométricos.

Para la determinación de la muestra, se hizo una invitación abierta a estudiantes del primer año de preparatoria de varios grupos (no necesariamente mis estudiantes), explicándoles que la investigación a realizar consistía en dos sesiones individuales. En la primera, denominada de *indagación*, asistieron inicialmente doce alumnos a quienes se les entrevistó para conocer datos de su vida cotidiana, laboral y académica antes de ingresar al nivel medio superior, a fin de contar con información que pudiera resultar significativa en cuanto al desarrollo de la percepción geométrica que llegaran a mostrar los alumnos en la segunda sesión.

Para la segunda sesión, denominada *lúdica*, asistieron nueve de los doce primeros estudiantes quienes interactuaron (y concluyeron) con los cuatro juegos didácticos. De tal manera que la muestra quedó confirmada por estos nueve alumnos.

Una de las pretensiones de este trabajo es colocar a la percepción geométrica en el debate y en las líneas de investigación en la didáctica de la geometría, porque en la revisión bibliografía llevada a cabo para ubicar el estudio, se encontraron diversas investigaciones, principalmente psicológicas (Granovskaya, 1987), pero no de orden didáctico y mucho menos en el nivel educativo que nos interesa. Siendo así que el objetivo principal del presente trabajo es determinar en qué condiciones se manifiesta la percepción geométrica y cuáles son los componentes y situaciones didácticas que contribuyen de manera positiva en proponer una posible solución a un problema de tipo geométrico con estudiantes del nivel medio superior.

En este trabajo se exponen los resultados obtenidos en las dos sesiones sostenidas con los estudiantes, teniendo como referente principal la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau (2007), en el sentido de preparar el medio didáctico para implementar las dinámicas que permiten manifestar, en situaciones de conflicto, la percepción geométrica de los estudiantes mediante retos intelectuales, sin la pretensión explícita de que éstos propicien algún saber geométrico en particular.

A continuación describimos algunos aspectos del concepto de percepción junto algunos trabajos íntimamente relacionados con nuestra investigación, haciendo una breve descripción de los materiales y del proceso realizado en las dos sesiones con los estudiantes.

El concepto de percepción, dice Vargas tiene varias aristas, dependiendo del área donde se utilice y esto, por supuesto, dificulta tener una definición consensuada. Sin

embargo, Vargas detecta un aspecto biocultural en toda percepción. Por un lado, depende de los estímulos físicos y sensaciones involucradas y, por otro lado, de la selección y organización de dichos estímulos y sensaciones. Por ejemplo, para la psicología, quién ha estudiado a fondo este concepto, define a la percepción como «el proceso cognitivo de la conciencia que consiste en el reconocimiento, interpretación y significación para la elaboración de juicios en torno a las sensaciones obtenidas del ambiente físico y social, en el que intervienen otros procesos psíquicos entre los que se encuentran el aprendizaje, la memoria y la simbolización» (Vargas, 1994:48).

Para la matemática, la percepción es parte de un proceso de adquisición de conocimiento, es individual, y de una importancia que sólo queda determinada por los avances que las estructuras de cada sujeto han elaborado en cada una de las etapas previas. Impacta en los procesos matemáticos en forma determinante, debido a que influye en los procesos de abstracción y reelaboración de estructuras matemáticas. Permite la detección de patrones que conducen a conductas lógicas y definidas, y sostiene las bases de construcción de estructuras previas que son aprendidas y por lo tanto fácilmente identificadas (Lira, 2005).

Con relación al estudio de la habilidad de percepción geométrica, ésta ha sido investigada desde una perspectiva didáctica, principalmente en el nivel preescolar y en los primeros años de primaria, donde se tienen los trabajos realizados por Fuenlabrada (1996), quien propone como definición de percepción geométrica *lo que se adquiere sobre la forma de los objetos en un proceso de ensayo y error, por el cual, el estudiante se da cuenta de algunas características útiles (no detectadas al ver al objeto aislado) que tiene una figura respecto a otra, y que le permite seleccionar dicha figura (y no otra) para usarla al resolver un problema específico*, lo cual está acorde con la interacción del sujeto con los juegos didácticos, cuya manipulación de sus elementos de construcción, las piezas, son parte importante para decidir en qué orden y en qué posición se deben utilizar para resolver un problema específicamente geométrico, ésta autora plantea (1996) que la percepción geométrica es la capacidad de «ver lo que no está en la forma de los objetos y dejar de ver lo que sí está». Pero no hay indicios específicos del estudio de la percepción geométrica en los niveles medio superior o superior. Sin embargo, existen trabajos en el nivel educativo de la secundaria sobre otra habilidad llamada percepción visual [Hassan (2002), Gutiérrez (1991), Verstraelen (2005)], la cual está íntimamente ligada a la percepción geométrica.

Un trabajo interesante y que se acerca a nuestra línea de investigación es el estudio de Araujo (1998), donde la percepción geométrica es considerada la base fundamental para el desarrollo del pensamiento geométrico y por ende el topológico. Esto es, la habilidad de deducir y establecer relaciones entre los objetos, sus propiedades y su enunciación, es decir, de un conjunto de estrategias verbales de localización espacial y complejidad cognitiva en la comunicación referencial.

Otro trabajo de interés es el de Zambrano (2010), referido al modelo de «apercepción geométrica», término relativamente nuevo en la literatura, pero se erige como elemento integrador de procesos de visualización, construcción y discursivos del pensamiento geométrico.

Para la realización del presente trabajo, se determinó utilizar en primera instancia, las investigaciones de Fuenlabrada, como base para la metodología de la investigación. La elección de los materiales didácticos: *el kataminó*, *el Mueve uno*, *el Laberinto (el duelo)* y *el Tangram avanzado*, se basó en el tipo de habilidades geométricas que debían utilizar los estudiantes al interactuar con ellos. Y finalmente, se realizó el registro de los datos empíricos en tablas de doble entrada para ordenar y clasificar los datos obtenidos de cada juego y de cada estudiante, y de esta forma poder llevar a cabo el análisis de éstos.

El trabajo de campo, como ya se mencionó, fue dividido en dos sesiones. Por un lado, una entrevista semiestructurada de 56 preguntas cuya intención principal fue tener un referente personal de cada estudiante que pudiera dar lugar a conjeturas respecto de algún procedimiento o comportamiento que se manifestara a lo largo de la indagatoria. Por el otro, una sesión lúdica donde cada estudiante interactuó, durante dos horas seguidas, con los cuatro juegos didácticos seleccionados, lo que permitió observar y registrar los comportamientos de cada participante en cada juego.

Se generó información relevante de cada estudiante sobre sus habilidades de construcción y, más específicamente, en aspectos geométricos característicos como: rotación angular, traslación, discriminación geométrica, tácticas y estrategias de solución implicados en los juegos seleccionados.

La investigación se organiza en tres capítulos, las conclusiones del trabajo, además de la bibliografía referida y consultada.

El primer capítulo refiere a los aspectos teórico-metodológicos necesarios para iniciar el estudio, haciendo mención, entre otros, de los referentes teóricos y empíricos, las definiciones básicas de percepción, las preguntas de investigación, los objetivos particulares y generales que orientaron la investigación.

El segundo capítulo contiene una descripción de los materiales didácticos que fueron utilizados en la indagatoria, junto a una justificación de su elección, la cual se basó principalmente en las características geométricas de los elementos que lo conforman, así como de las habilidades geométricas que se ponen en juego en el momento de interactuar con ellos. De esta interacción se obtuvieron los primeros resultados, mismos que fueron registrados en cuadros de doble entrada para su análisis.

En el tercer capítulo se realiza un estudio más pormenorizado de los resultados, ya que después de varias revisiones realizadas a los videos, fue necesario adicionar conceptos teóricos, como la definición de «táctica» y del concepto de «estrategia» y cómo éstos dan soporte argumentativo a los comportamientos mostrados por cada estudiante en relación a la percepción geométrica. De igual forma, se presentan los gráficos en los que se observan las tendencias y comportamientos que cada estudiante manifestó en relación a los juegos en su conjunto.

Por último se dan los resultados y conclusiones finales derivadas de este trabajo. De esta forma damos al lector elementos teórico-metodológicos que permiten dar una idea de las dificultades que conlleva investigar y valorar («calificar») habilidades abstractas y difíciles como lo son las percepciones humanas. Así mismo, damos algunas sugerencias para investigaciones posteriores relacionadas con la influencia que la percepción geométrica pueda tener en el ámbito académico, específicamente en la solución de problemas matemáticos de orden geométricos.

Esperamos que este trabajo toque la sensibilidad geométrica del lector para continuar con ésta u otras líneas de investigación que aporten más luz al tema de la percepción geométrica.

1

Planteamiento general del estudio: metodología y referentes de la investigación

*Desde los primeros pasos de su educación el niño
debe experimentar el placer del descubrimiento.*

Alfred North Whitehead

El presente trabajo de investigación tiene su origen en una de las preparatoria públicas del Gobierno del Distrito Federal, donde he trabajado por más de nueve años como profesor de matemáticas, impartiendo los cinco cursos obligatorios de esta materia. Mis observaciones empíricas relacionadas con esta investigación fueron realizadas en todos los niveles, pero se enmarcan principalmente en el primer año de la preparatoria, donde cada año llevo a cabo un necesario trabajo de regularización en matemáticas permeado por el intento de favorecer el pensamiento matemático de los alumnos a la vez de reinstalar conocimientos básicos de aritmética y álgebra; particularmente se revisan los sistemas numéricos, operaciones con números enteros, leyes de signos para operaciones aditivas y multiplicativas, el concepto de incógnita, ecuación de primer grado con una incógnita, operaciones básicas con polinomios, plano euclidiano y ecuación de la recta. Dicha regularización se hace necesaria por el bajo nivel de conocimiento matemático que muestran los estudiantes en los exámenes diagnósticos obligatorios aplicados al ingresar a estas preparatorias.

En mis experiencias en las clases de matemáticas, específicamente en los temas donde se necesitaba usar referentes geométricos, he observado varias dificultad en los alumnos, por ejemplo: reconocer patrones, esquemas, figuras o dibujos; recordar estructuras geométricas y matemáticas en el momento de tener que escribir y dibujar los elementos dados por los problemas; comprender la idea y el significado de una demostración; localizar un punto en el espacio euclidiano; establecer relaciones semánticas entre los datos y, consecuentemente, encontrar una posible solución.

1.1. Justificación de la investigación

Una de las situaciones más recurrentes en los estudiantes de casi de todos los niveles educativos, es la reiterada afirmación de que las matemáticas es una asignatura, si no aburrida, difícil de aprender y además lo que se aprende no tiene una aplicación inmediata, o bien, no tiene sentido estudiar más allá de sus aspectos más básicos: las operaciones elementales y las fórmulas (de área y volumen). La Geometría en general y la Euclidiana en particular, no son la excepción a este sentir de los alumnos frente al conocimiento matemático.

Los contenidos de Geometría en los planes de estudio, hasta antes de la Reforma Educativa de la Primaria de 1993, habían quedado en un segundo plano en la educación básica y los profesores, al final del ciclo escolar, repasaban únicamente algunos temas geométricos. Esto además venía reforzado en la primaria en los Libros de Texto Gratuitos, anteriores a dicha reforma, en los que la última unidad temática correspondía a la Geometría a lo que se adicionaba que los contenidos se proponían de forma ilustrativa, enunciativa, mencionándose las propiedades de los objetos geométricos de manera descriptiva para que fueran memorizados por los alumnos, (Vasco, 1996) citado en Araujo (2009). Pero el descubrimiento de las propiedades a través de la construcción, reproducción y transformación de configuraciones, por mencionar algunos de los nuevos recursos para el estudio de la Geometría, no estaban contemplados por los maestros como recursos para la enseñanza y el aprendizaje geométrico (Ávalos, 1997).

En el currículo de la reforma del '93 (S.E.P., 1995), el estudio de la matemática se organizó en 6 ejes temáticos: los números, sus relaciones y sus operaciones; medición; geometría; tratamiento de la información; predicción y azar; y procesos de cambio. Una vez iniciado el proceso de enseñanza de cualquiera de los ejes, se sigue su desarrollo hasta el sexto grado de primaria y eventualmente se continúa hasta el tercero de secundaria. En geometría, el concepto de volumen se restringe sólo al trabajo con prismas (lo demás se pasó a secundaria). Con respecto a las áreas, se llega solamente a las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulo, en el entendido de que el cálculo del área de otros polígonos se resuelve a partir de la descomposición en las figuras anteriores. Al respecto, cabe anotar que existe un estudio interesante sobre la manera de calcular superficies sin usar fórmulas (Fuenlabrada, 2006), que es una reflexión de cómo la geometría, la medición y los números, sus relaciones y operaciones interactúan en el tercer ciclo de la educación primaria.

La organización por ejes temáticos permite que la enseñanza incorpore de manera estructurada no sólo contenidos matemáticos, sino el desarrollo de ciertas habilidades y destrezas, fundamentalmente para la buena formación matemática. Además se propone un trabajo didáctico de los ejes conceptuales en paralelo y cuando es posible, se plantea un trabajo simultáneo con dos o tres de ellos (S.E.P, 1995).

Además, en los temas de geometría, se proponen actividades de manipulación, observación, dibujo y análisis de formas diversas. A través de la formalización paulatina de las relaciones que el niño percibe y de su representación en el plano, se pretende que estructure y enriquezca su manejo e interpretación del espacio y de las formas (*Ibíd.* 46).

Es interesante destacar que en la primera entrevista indagatoria con los estudiantes, y a la pregunta expresa de si habían utilizado en primaria y/o secundaria algún material didáctico para abordar temas geométricos, la respuesta fue que no.

La Geometría es una de las materias más intuitivas, concretas y ligadas a la realidad que conocemos. Por ello, ofrece numerosas posibilidades para experimentar, mediante materiales adecuados, sus métodos, conceptos, propiedades y problemas (Villarreal, 2011:1).

Sin embargo, y al igual que en otras áreas de conocimiento, la Geometría tiene como requisito indispensable, que el individuo ejerza su habilidad innata de percibir el mundo que lo rodea, la cual desarrolla en su proceso natural de crecimiento y adaptación al espacio, y que es la primera y más importante acción de sincronización entre lo visual y manual. Un ejemplo de cómo se empieza adquirir esta habilidad es cuando un niño pequeño intenta tomar un objeto con su mano. La coordinación del ojo (lo que ve) con su mano (para tomar) atraviesa por un momento clave en el desarrollo de la percepción visual del infante, que tras varios intentos logra tomar el objeto deseado. Poco a poco se van afinando éstas y otras dimensiones perceptuales durante la infancia, como por ejemplo la *percepción espacial* (cuando se camina en una habitación y no se pega con una puerta o una mesa); la *percepción auditiva* (cuando se reconoce los sonidos o la voz y de dónde provienen); la *percepción de la forma y tamaño* (cuando se tiene conocimiento del tamaño de los objetos a su alrededor o de las piezas de un juego). Dichas percepciones se van desarrollando y experimentado en diferentes momentos y contextos, con el medio ambiente que lo rodea, con la interacción con sus pares y en el ambiente familiar, y no requieren en principio de una instrucción formal. Sin embargo, existen estudios (Fuenlabrada, 2005) de que ciertas habilidades perceptuales pueden iniciarse y

desarrollarse sin problemas desde los primeros años en el preescolar y la primaria con un impacto favorable a futuro, en el desarrollo del pensamiento matemático de los niños.

Se admite entonces que el sentido del espacio (Villarroel, 2011:75), y por ende el geométrico, se inicia en las personas mediante la experiencia directa con los objetos del entorno circundante, y en la escuela debería enriquecerse a través de actividades de construcción, dibujo, medida, visualización, comparación, transformación, discusión de ideas, conjetura y comprobación de hipótesis, facilitándose así el acceso a la estructura lógica y modos de demostración de esta disciplina. En este sentido, la geometría juega un papel decisivo como antecedente para el desarrollo de la capacidad deductiva (Glaeser, 1986:142).

En el currículo del bachillerato se tienen al menos cinco cursos de matemáticas, desde las operaciones básicas y el álgebra, pasando por la geometría analítica hasta llegar al estudio del cálculo diferencial e integral de Newton y Leibniz. En estas últimas, subyace particularmente un importante componente geométrico que soporta la sencillez operativa y posibilita resolver problemas complicados, que difícilmente podrían solucionarse con sólo el álgebra y la geometría euclidiana del S. XVII. Entonces, ¿cómo pretender enseñar el cálculo a un estudiante de preparatoria cuando su percepción geométrica no ha sido entrenada adecuadamente? En el mejor de los casos, se logra que los alumnos aprendan a aplicar mecánicamente enormes listas de fórmulas de derivadas e integrales a una función determinada, con el consabido riesgo de no saber interpretar geoméricamente sus procesos y resultados, y lo más triste, no poder apreciar la enorme belleza geométrica que está detrás de todo esto.

Una de las principales disciplinas que se ha encargado del estudio de la percepción ha sido la psicología y, en términos generales, la ha definido como: *el proceso cognitivo de la conciencia que consiste en el reconocimiento, interpretación y significación* (Vargas, M., 1994, 48), más aún, uno de los aspectos que ha sido privilegiado en los estudios tanto psicológicos como filosóficos sobre percepción es el de la elaboración de *juicios*, los cuales se plantean como una de las características básicas de la percepción, juicios que se elaboran en torno a las sensaciones obtenidas del ambiente físico y social, en el que intervienen otros procesos psíquicos entre los que se encuentran el aprendizaje, la memoria y la simbolización, y son utilizados para discernir a cuál de los estímulos se le dará mayor atención.

Los estudios sobre percepción, en la literatura consultada, están básicamente orientados a la percepción visual. Unas investigaciones, vinculan la percepción visual con

las propiedades y relaciones geométricas (Guzmán, 1996) citado en Sánchez (2013), otras establecen relaciones entre la percepción visual de formas geométricas y el mejoramiento académico de los estudiantes en geometría (Hassan, 2002). Por otro lado, en el trabajo doctoral de Sánchez (2013) se estudian las estrategias de solución a problemas geométricos que requieren en menor o mayor medida la memoria visual. Sin embargo, dichas investigaciones no han incursionado en cómo y en qué forma la habilidad de percepción geométrica influye en las estrategias de solución que los estudiantes implementan en el momento mismo de interactuar con juegos didácticos de corte geométrico, donde la manipulación real de las piezas, más no el virtual (como sucede con el software geométrico), junto con el reconocimiento del tamaño y forma de las piezas, forman parte esencial de la solución al reto planteado por el juego.

Estudiar la percepción geométrica tiene una importante implicación, no solo conceptual sino también didáctica, que pudiera explicar y abrir el camino hacia un mejor entendimiento de sus características, y ver su influencia en la comprensión y resolución de situaciones geométricas. De esta forma sería posible diseñar e implementar estrategias que desarrollen adecuadamente la percepción geométrica en los estudiantes a lo largo de su instrucción preparatoria y por ende permitan, ayuden a entender y resolver los problemas matemáticos que enfrentarán.

1.2. Preguntas de investigación

La principal motivación para realizar este estudio, radica en entender y clasificar cuáles son las diversas estrategias que utiliza un grupo de nueve estudiantes de primer año de preparatoria al enfrentarse a un problemática que involucre elementos geométricos, y analizar en qué forma se manifiesta y utilizan su percepción geométrica en la resolución del mismo o, en su caso, qué dificultades tienen para utilizarla.

Se documenta y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Qué estrategias utilizan los estudiantes de bachillerato en la resolución de situaciones problemáticas que implican a la percepción geométrica para resolverlas?
- ¿Cómo se manifiesta la *percepción geométrica* que han desarrollado los estudiantes de bachillerato al resolver situaciones problemáticas que la implican?

A diferencia de los problemas matemáticos que normalmente enfrenta cualquier estudiante en la preparatoria, entenderemos por «situación problemática» aquella donde lo lúdico sea el vehículo que permita la manipulación de los elementos geométricos tanto tangibles (piezas) como intangibles (propiedades geométricas) que subyacen en los retos y reglas de uso que el juego didáctico imponga.

1.3. Referente teórico

Históricamente se empezó a usar el término percepción en fisiología y psicología a principios del siglo XIX para estudiar la magnitud de los estímulos enviados y la magnitud de los estímulos percibidos con nuestros sentidos (vista, tacto, olfato, oído y gusto). De estos estudios surgieron varias líneas de investigación sobre el tema, entre ellas: La percepción visual, la espacial, la olfativa, la táctil, la del equilibrio y, la percepción de la forma (usando la vista y/o el tacto) entre otras.

A la enseñanza de la Geometría se puede acceder por dos grandes vertientes. Una es la lógica-racional, que define a la Geometría como una teoría axiomática que se desarrolla bajo leyes rigurosas de razonamiento deductivo. Este posicionamiento es muy formal y en principio orienta la enseñanza de los estudiantes de las ciencias exactas (matemáticas y físicas principalmente); La otra vertiente apela a la intuición y experimentación y, por tanto, se base en la búsqueda, descubrimiento y comprensión por parte del sujeto que aprende en función de explicarse aspectos del mundo en que vive (Bressan, Bogisic y Crego, 2000).

Sin embargo, para la matemática y en especial para la geometría se requiere de otro tipo de percepción, aquella relacionada con la forma y uso de los objetos, denominada *percepción geométrica*, que se convierte en sí misma en un insumo importante para comprender y resolver problemas matemáticos, en especial los geométricos. Para este trabajo tomaremos la definición de percepción geométrica propuesta por Fuenlabrada (1996): *lo que se adquiere sobre la forma de los objetos en un proceso de ensayo y error por el cual, el estudiante se da cuenta de algunas características útiles (no detectadas al ver al objeto aislado) que tiene una figura respecto a otra, y que le permite seleccionar dicha figura (y no otra) para usarla al resolver un problema específico*. La percepción geométrica implica la observación y visualización de la forma de los objetos, es una habilidad que puede desarrollarse a través de situaciones de enseñanza desde preescolar (Fuenlabrada, 2005).

Con base en lo anterior, podemos decir que la percepción geométrica, como objeto de estudio, es una habilidad que debe desarrollarse con el fin de poder entender y establecer relaciones geométricas entre los objetos y sus propiedades. Estas relaciones pueden ser, de paralelismo, perpendicularidad, ángulos no rectos, simetrías, etc. por mencionar algunas. (Villarroya, 1994).

Enseñar geometría es básicamente enseñar a “razonar bien”, es decir, a razonar demostrativamente; por lo que se requiere de una fuerte intuición y una enorme capacidad de percepción, base fundamental para el desarrollo del pensamiento geométrico y por ende el topológico (Araujo, 2009). El matemático francés Henri Poincaré resumió bien lo anterior en una sola frase: «*La geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal*».

Con esta orientación, y la definición de percepción geométrica, el presente trabajo tiene los elementos necesarios para identificarse como parte de la corriente didáctica denominada *Educación Matemática Realista* (EMR) promovida por la escuela holandesa —del alemán— Hans Freudenthal (1905-1990). En ella se da mayor importancia a las situaciones realistas y concibe a la matemática escolar como un conjunto de actividades progresivas y reflexivas de simbolización, modelación, esquematización y algebrización. De esta manera, el foco de atención en la Educación Matemática no es la Matemática como un sistema cerrado, sino la actividad misma, el proceso de matematización. (Villarroel, 2011)

Un componente importante de apoyo a esta investigación es el hecho de que la EMR tiene como base las siguientes ideas centrales (Bressan, 2005):

- Pensar la matemática como una actividad humana, una matemática para todos
- Aceptar que la comprensión matemática pasa por distintos *niveles* donde los *contextos* y los *modelos* poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinención guiada* en un ambiente de *heterogeneidad* cognitiva.
- Desde el punto de vista curricular, la reinención guiada de la matemática en tanto actividad de matematización requiere de la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda: la *historia de la matemática* y las *invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes*.

Para analizar la percepción geométrica, que con lo anterior se convierte en nuestro objeto de estudio, necesitamos metafóricamente una unidad de “medida”, un elemento que pueda rastrearse en las actuaciones de los estudiantes cuando intentan resolver o resuelven situaciones que implican poner en juego su percepción geométrica; es decir, la unidad de análisis no es el estudiante *per sé*, sino las *estrategias* que utiliza al interactuar con la situación y que le ayudan a plantear una posible solución al reto propuesto por ésta. En relación con el objeto de estudio, Freudenthal (1973: 95, citado por Villarroya, 1994), citando a J. J. Sylvester (s.f.), comenta:

La Geometría sólo puede tener sentido si se explota su relación con el espacio vivenciado. Si el educador elude este deber, desperdicia una ocasión irrecuperable. La Geometría es una de las mejores oportunidades que existen para aprender a matematizar la realidad. Es una ocasión única para hacer descubrimientos. Los descubrimientos realizados por uno mismo, con las propias manos y con los propios ojos, son más convincentes y sorprendentes. Hasta que de alguna forma se puede prescindir de ellas, las figuras espaciales son una guía indispensable para la investigación y el descubrimiento.

Según Hoffer (1981), las habilidades básicas que una buena enseñanza de la Geometría debería ayudar a potenciar son clasificadas en cinco áreas: *visuales, de comunicación, de dibujo y construcción, lógicas o de razonamiento y, de aplicación o transferencia.*

Los postulados de la EMR promueven el uso de materiales didácticos en tanto elementos reales y tangibles dentro de un contexto de juego no ajeno al estudiante, que a su vez permiten, sin ser consciente de ello, el aprendizaje de propiedades geométricas de las figuras vía las piezas del rompecabezas. Sin bien su uso no tiene una intencionalidad didáctica para promover un conocimiento [geométrico] específico, si la tiene en el sentido de atrapar realmente al estudiante en la dinámica de dar solución a un reto *no matemático* y «aparentemente» sencillo. De esta forma el estudiante despliega, sin reservas, sus tácticas y estrategias para alcanzar la meta propuesta, elementos que deseamos estudiar. Así, dos grandes teorías: la TSD de Brousseau y la EMR de Freudenthal, coinciden y ayudan metodológicamente a nuestra investigación.

El concepto de percepción geométrica como tal lo encontré en pocos artículos pero no exactamente con ese título, sino reconociendo algunos de sus elementos ligados a otros términos como percepción visual y espacial (Alsina, 1997:15) o en los artículos de Van Hiele (1990). Sin embargo, existen tres trabajos que vale la pena mencionar: el primero es el trabajo de Oviedo (2009) que toma el término de la percepción geométrica muy apegado al estudio que nos ocupa, desde una mirada a la complejidad que subyace a la percepción y que se ve reflejado en su definición, esto es: “una habilidad de deducir y establecer relaciones entre los objetos, sus propiedades y su enunciación, o sea de un conjunto de estrategias verbales de localización espacial y complejidad cognitiva en la comunicación referencial”. El segundo, es el trabajo del psicólogo ruso Krutetskii (1976) quien estudió las habilidades matemáticas de niños prodigio, donde la percepción es considerada uno de sus componentes, al igual que la generalización, la lógica y el raciocinio, la reducción, la flexibilidad, el pensamiento reversible, el analítico-sintético, la memoria matemática y los conceptos espaciales.

Sin embargo, la definición de percepción geométrica que más me llamó la atención aparece en los artículos de Fuenlabrada (2005), referidos a trabajos en el nivel de preescolar, donde se estudian secuencias didácticas que posibilitan que los alumnos interactúen con las figuras geométricas, a fin de que vayan descubriendo los usos y funciones de las propiedades básicas de éstas. En dichas secuencias se profundiza el desarrollo de la percepción al pretender que los niños «*vayan viendo figuras ahí donde no están y dejen de ver las que están*» (Fuenlabrada, 2009:22).

1.4. Andamiaje metodológico y referente empírico

Como se mencionó anteriormente, esta investigación fue realizada en una preparatoria del Gobierno del Distrito Federal, con 9 estudiantes del primer año de preparatoria. Si bien mis indagaciones y observaciones empíricas fueron realizadas en varios años y en diferentes cursos de matemáticas (cinco obligatorios y uno optativo), el primer año tiene una importancia especial en el sentido de que es el momento donde se supone los estudiantes llegan con un nivel académico en el que, en principio, deben incursionar en temas más complejos (si no abstractos) que los estudiados en el nivel básico. Sin embargo, las pruebas diagnósticas realizadas al ingresar a la preparatoria revelan que esto no es del todo cierto, ya que en este tipo de escuelas se invierte, al menos un semestre, para “regularizar” a los estudiantes en temas básicos relacionados con la lectura, escritura y la matemática. En esta última es donde he observado una baja o nula

instrucción en geometría y, aún más, una actividad lúdica escasa con material didáctico de corte geométrico como el tangram, el geoplano y el juego de geometría entre otros.

La poca experiencia y conocimiento geométrico que ostentan los estudiantes a este nivel, es idóneo para estudiar las estrategias que puedan poner en juego al enfrentarse a situaciones geométricas específicas fuera de cualquier instrucción formal. No es necesario si conocen los nombres de figuras o propiedades geométricas, sino cómo se las ingenian, cómo le hacen, qué recursos utilizan para tratar de resolver el reto impuesto y qué demanda de su habilidad de percepción geométrica, que es el objeto de este estudio.

Para esta indagatoria, se invitó a nueve estudiantes del primer año de preparatoria (no necesariamente mis alumnos) sin importar género, edad, situación familiar, situación académica o semestre (primer o segundo).

Se realizó una búsqueda, prueba y selección de juegos didácticos cuyas características permitieran retar en diferentes formas y grados de dificultad la percepción geométrica de los estudiantes. Es decir, la percepción geométrica no sólo es reconocer piezas de diversas formas (ya que toda persona puede hacerlo aún sin saber los nombres de éstas), sino qué tiene que ver, entre sus cualidades, que el estudiante tome juicios respecto de lo que ve y lo que toca para comprobar (mental y físicamente) que sólo algunas piezas puede servir al reto planteado. Pero además, los juegos tienen fines geométricos particulares como el uso de la rotación, traslación y reflexión o combinación de ellos, que están detrás de la construcción final, y ahí está la pertinencia de elegir el juego adecuado, ya que un estudiante puede ser muy bueno en resolver un rompecabezas comercial, pero incapaz de formar una figura en un tangram, o incapaz de trasladar, rotar o reflejar piezas en un juego; así mismo requerirá un entrenamiento para reconocer las simetrías en un mosaico, por ejemplo.

Los cuatro juegos se caracterizan por tener piezas geométricas manipulables y en cada uno de ellos se deben construir figuras geométricas específicas; éstos se describen con más detalle en el capítulo siguiente. Los juegos utilizados fueron:

1. **Kataminó.**- Versión moderna de los pentaminós (figuras planas formadas por 5 cuadrados pegados por un lado) que consiste en figuras formadas por cinco cubos pegados por una cara para cubrir un área de cada nivel del juego, parecido a un rompecabezas. Geométricamente favorecen la rotación y la construcción de bloques en diversas formas y tamaños.

2. **Mueve uno.**- Juego que consiste de 90 cartas con figuras planas formadas por 5 palitos. Se forma una figura inicial, y a partir de esta deberá de transformarse a otra figura moviendo sólo un palito. Geométricamente favorecen la rotación, traslación y la reflexión de piezas, así como la discriminación geométrica
3. **Laberinto.**- Juego formado por 15 piezas cuadradas con figuras «I», «T» y «L» donde se deberá formar un camino entre dos extremos definidos por el juego. Las piezas sólo pueden deslizarse horizontal o verticalmente sobre un tablero cuadrado. Geométricamente favorecen la traslación de piezas e imágenes así como la discriminación figuras.
4. **Tangram avanzado.**- Un tangram moderno donde además de formar una figura específica –de color rojo-, se requiere llenar su contorno con pieza de color amarillo sobre un tablero cuadrado. Geométricamente favorece la rotación de piezas y la construcción de un bloque único.

La razón de este material es que reta de forma específica la percepción geométrica de los alumnos, y para resolver las situaciones planteadas es necesario que elaboren un plan de acción, una estrategia a seguir que les permita solucionar el reto. Las piezas se pueden mover, voltear, poner y quitar en función de lo que el estudiante necesite, y es aquí donde se ve cómo entra en acción la percepción geométrica al analizar el número de movimientos, el tiempo empleado, el número de piezas usadas, la forma en que éstas son colocadas, si el alumno reconoce o no patrones, etc. Toda esta información se registra en cuadros de doble entrada, una para cada juego y ordenada por estudiante y reto propuesto.

Para conformar el referente empírico, el proceso indagatorio se realizó en dos partes. En la primera, se hizo una entrevista semiestructurada, con el propósito de explorar los contextos donde los estudiantes han trabajado, estudiado y convivido hasta llegar al primer año de la preparatoria, con el fin de encontrar posibles argumentaciones a los éxitos y/o comportamientos observables en las situaciones que se les plantearon. En la segunda, se llevaron a cabo sesiones individuales en las que cada estudiante se enfrentó a situaciones particulares con cada uno de los cuatro juegos geométricos seleccionados con el objetivo de observar sus comportamientos ante los retos que estos mismos les ofrecieron. Todas las sesiones fueron video-grabadas. Esta última duró

alrededor de dos horas aproximadamente (media hora por juego), dependiendo de las habilidades específicas de cada estudiante.

Lo anterior tiene como sustento teórico los estudios de Ingeniería didáctica de Artigue (2002) y la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (2007). El modelo de Brousseau propone pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de conocimiento (matemático) en el ámbito escolar, pero para que esa producción de conocimiento sea aceptable, se requiere de mecanismos de validación efectivos, basados en las normas de la comunidad matemática. Ahora bien, el conocimiento no emerge del intelecto del estudiante con sólo desearlo, se requiere de un ambiente perfectamente preparado y controlado que motive dicha creación.

Para ello, Brousseau parte de dos tipos de interacciones básicas. Por un lado, la interacción del alumno con una problemática que le ofrezca una resistencia, que le exija un reto intelectual, para propiciar que ponga en juego conocimientos matemáticos no explicitados en la situación. Y, por otra parte, la relación del docente con el estudiante a propósito de la interacción de este último con la problemática matemática propuesta. Estos dos componentes requieren de un “medio” con una intencionalidad didáctica. La interacción del estudiante y este “medio” se describen a través de un concepto llamado *situación adidáctica*, situación donde se modela una actividad (junto con su validación) para producir conocimiento por parte del estudiante, sin mediación aparente del docente. Pero el estudiante no se apropiará del conocimiento (no habrá aprendizaje) si no es capaz de aplicarlo en contextos diferentes a los de su enseñanza sin ayuda alguna o indicación intencional.

La TSD considera a la situación (problemática) como una interacción⁴ y que, para un mismo problema, pueden considerarse diferentes situaciones que dependen del sistema de conocimientos que entra en interacción con él. Así mismo, Brousseau postula que para *todo conocimiento* existe una situación fundamental que de alguna manera representa la problemática que permite la emergencia de dicho conocimiento. Esto significa que el conocimiento en cuestión aparece como la *estrategia* óptima para resolver el problema involucrado (Sadovsky, 2005).

Cabe aclarar, sin embargo que, para esta investigación, las situaciones adidácticas planteadas a los estudiantes, no tienen la pretensión de ser de aprendizaje; es decir, no

⁴ La palabra «interacción» da cuenta de una *ida* y *vuelta* entre el sujeto y el *medio*: frente a un problema el estudiante elige una alternativa entre varias posibles, la pone en práctica con la posibilidad de analizar los resultados de sus acciones reafirmando sus decisiones o rectificándolas.

se espera que propicien el acceso a algún conocimiento (matemático) en particular, en la medida que estas situaciones no son complementadas con otras para promover la evolución de estrategias de solución hacia conocimiento socialmente validado. Más bien, estas situaciones lúdicas son el recurso para que el estudiante nos muestre una habilidad perceptiva innata que queremos estudiar: la percepción geométrica, y la interacción con los juegos didácticos es el mecanismo ideal para que ésta se revele, se manifieste de forma natural sin intervención explícita del docente; al mismo tiempo se intenta retar la percepción geométrica de los estudiantes y con ello se vean comprometidos a buscar una solución, y muestren con esto sus estrategias personales, para así documentarlas y analizarlas posteriormente.

Por su parte la ingeniería didáctica (Artigue, 2002) como metodología de investigación, tiene la característica principal de tener una manera o modo de validación. Dicha validación es interna y basada en la confrontación entre un análisis *a priori*⁵, se comprometen hipótesis sobre las posibles repuestas de los alumnos, y uno *a posteriori* que se apoya en los datos surgidos en la implementación de la actividad con los alumnos. Desde esta perspectiva, por un lado se anticipó y jerarquizó la dificultad que cada uno de los juegos tendría para los estudiantes, además se anticiparon posibles estrategias de solución que los alumnos podrían poner en juego, a fin de valorar la pertinencia de los materiales didácticos elegidos y así garantizar que estos retaran la percepción geométrica de diferentes maneras.

La EMR postula que la matemática tiene que ser real, lo más tangible posible, de tal forma que el estudiante lo perciba con contundencia. El término realista se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan imaginar (ver Van den Brink, 1973; Wijdeveld, 1980) más que la «realidad» o autenticidad de los problemas. Freudenthal comenta: «Prefiero el término “realidad” a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario». En la búsqueda de estos problemas, el *contexto* debe ser considerado como un aspecto intrínseco a los mismos y no un mero ropaje a eliminar. En resumen, se trata de presentar los problemas en un *contextos* más cercana a su vida diaria, de modo que los estudiantes puedan imaginarse las situaciones y, a partir de ahí, utilizar su sentido común y poner en juego los procedimientos de cálculo, las *estrategias*⁶ de solución y los modelos matemáticos que mejor sirvan para organizarlas (Bressan, 2005: 75-76).

⁵ *A priori* significa «independiente de la experiencia».

⁶ El término estrategia será discutido y usado principalmente en el capítulo 3.

De lo anterior, tenemos que Freudenthal, con su escuela matemática realista (EMR), y Brousseau, con su teoría de las situaciones didácticas (TSD), ponen los elementos teórico-metodológicos necesarios para poder incursionar con paso firme en esta investigación particular. Los ideales de cada teoría —consideramos— no se contraponen ni se traslapan entre sí. Particularmente en esta investigación, el estudio de la percepción geométrica se inclina más a la EMR en el entendido de que ésta pudo haberse desarrollado más en la vida cotidiana (educación no didáctica) que lo que podría hacerse en el aula (educación didáctica). Al presentar las dinámicas lúdicas se cuidó que fueran retos donde no se necesitara concepto matemático alguno para resolver los retos propuestos, sino usar su propia experiencia, sus modos particulares de solución, sus estrategias, su intuición y lógica que han desarrollado hasta ahora (el primer año de la preparatoria). Por otro lado la TSD ayuda a planificar la escena, a poner atención en las relaciones del estudiante y el medio (una de las situaciones fundamentales básicas) y que sea un soporte teórico-metodológico para los análisis posteriores que se harán con los datos registrados.

2

Los materiales didácticos: descripción y resultados generales

*Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto,
y pensar lo que nadie más ha pensado.*

Albert Szent-Györgi (1893-1986)

En esta investigación, como ya se mencionó en el capítulo precedente, la habilidad que se quiere estudiar es la percepción geométrica en estudiantes de primer año del nivel medio superior. Para ello, se tiene como base, entre otros, los trabajos de investigación que Fuenlabrada (2005) ha realizado a nivel preescolar, y cuyos resultados han mostrado que hay beneficios importantes al desarrollar la percepción geométrica desde temprana edad.

Puesto que la percepción geométrica es una habilidad que se adquiere y se sugiere empiece a desarrollarse sistemáticamente desde preescolar (Fuenlabrada, 2005), se vio la pertinencia de utilizar materiales didácticos con características geométricas específicas acorde a la definición de percepción geométrica de Fuenlabrada. Tras un análisis de los elementos y las reglas de juego de cada material seleccionado para este estudio (kataminó, mueve uno, laberinto -el duelo- y el tangram avanzado -Shape by Shape⁷-), y la manera particular como entra en juego la percepción geométrica en cada uno de éstos, así como de la experiencia de usarlos y jugarlos personalmente y con algunos alumnos antes de su aplicación experimental, se decidió que estos materiales ayudarían a manifestar las estrategias de primera intención utilizadas por los estudiantes y, con ello observar y analizar su percepción geométrica.

Así mismo, una condición importante, desde la perspectiva de lo que se quiere estudiar, es que estos materiales fueran desconocidos para los estudiantes de la muestra. Lo cual concuerda, como se señaló en el capítulo uno, con uno de los conceptos de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007), en lo que refiere a la interacción entre el sujeto (estudiante) y un medio determinado (juego).

⁷Nombre comercial del juego, de Thinkfun (MR)

A continuación se describen las características de los cuatro juegos didácticos utilizados y las razones (geométricas) por las cuales cada uno fue seleccionado para esta investigación. Los datos se organizan en cuadros de doble entrada para analizar la percepción geométrica mostrada por los estudiantes al interactuar con cada uno de ellos.

Particularmente y en un primer nivel de análisis, de la información obtenida de las sesiones video grabadas con los estudiantes, se registran los intentos realizados y sus respectivos tiempos al resolver las situaciones planteadas con cada uno de los materiales. Mientras que el registro de la entrevista inicial semi-abierta que se hizo a cada alumno, permitió encontrar explicaciones de algunos desempeños atípicos en su actuación con base en sus antecedentes familiares, laborales y académicos.

En el capítulo 3 se incorpora un segundo y más detallado análisis con ayuda del concepto «estrategia», que junto al de «intento» mejora el análisis de la percepción geométrica. Como regla general, a cada juego se le asignan en promedio 30 minutos para terminarlo, contabilizando dos horas aproximadas para la sesión lúdica.

Un observación importante en relación a la actividad lúdica es que al darle el material didáctico a los estudiantes se decidió no interrumpirlos en sus actividad para no desconcentrarlos y/o que no perdieran su secuencia o ritmo. Esto tuvo ciertas implicaciones, por ejemplo: no se pudo registrar el por qué en un momento dado el estudiante decidió mover una pieza en especial y no otra, o qué es lo que veía en realidad. En algunos momentos se tuvo la necesidad de intervenir porque los tiempos, en ciertos niveles de un juego, eran ya exagerados sin ninguna respuesta positiva de parte del estudiante, y porque se corría el riesgo de que el estudiante no quisiera interactuar con los demás materiales por cansancio, tedio o falta de tiempo.

2.1 Los materiales didácticos

2.1.1 El kataminó

Descripción del juego y dinámica de la sesión

El Kataminó es un juego didáctico que tiene su origen en los pentaminós (Juraido, 1983), término acuñado en 1954 por el matemático norteamericano Solomon W. Golomb y publicado en la AMM. El Kataminó es una versión comercial “moderna” que consta de dos partes. Por un lado, se tiene un tablero rectangular de 5 reglones por 12 columnas formando una cuadrícula de 60 cuadrados iguales. Por el otro, un juego de 12 piezas llamadas pentaminós, es decir piezas compuestas de cinco cubos iguales unidos cara a

cara formando 12 formas planas diferentes (las únicas posibles) como líneas, “L”, “T”, “S”, etc. Dichas piezas deben llenar o tapizar la cuadrícula del tablero sin dejar huecos ni superponerse entre ellas (una teselación⁸). El Kataminó tiene 12 niveles o grados de dificultad, y éstos se indican por medio de una barra vertical que se mueve sobre el tablero acotando el espacio a cubrir para cada nivel. El primer nivel está formado por tres columnas (3X5 cuadrados), y dicha superficie debe cubrirse con 3 pentaminós. El 2º nivel tiene cuatro columnas (4X5 cuadrados) y se cubre con 4 pentaminós y así sucesivamente hasta el 12º nivel para el que se utilizan 12 pentaminós. En la figura 2.1 se muestra el tablero y las 12 piezas del kataminó.

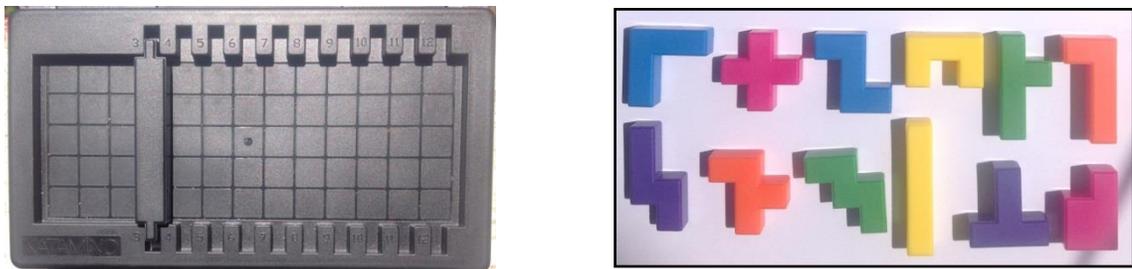


Figura 2.1. El Kataminó

Para la elección del juego, se tomaron en cuenta las siguientes características:

1. Las piezas tienen formas geométricas básicas.
2. Se construyen bloques rectangulares de varios tamaños con ensamblajes sencillos.
3. Las habilidades geométricas a analizar son: la rotación angular y la rotación sobre los ejes verticales y la horizontal de cada pieza, lógica geométrica.
4. Otras habilidades: observación, reflexión y capacidad de armar.
5. Tiene 10 niveles y varios grados de dificultad en la construcción de bloques con diferentes grupos de piezas

Las tres últimas características tienen mayor peso en la elección, ya que están relacionadas con la habilidad de armado y la consecuente manifestación de la percepción geométrica en el reconocimiento y manipulación de las piezas. Elementos a observar y analizar.

⁸ Término tomado de la teoría de mosaicos, el cual se define como una colección de piezas que al ensamblarlas cubren un espacio determinado sin traslaparse ni dejar espacios vacíos.

En este juego, como en los demás, se requiere como herramienta de observación y análisis el concepto de «intento», que a decir del Kataminó se considera como *aquel en donde el estudiante empieza a colocar las piezas hasta que se da cuenta que no tiene sentido seguir colocando otras y deshace la configuración; o bien, cuando cambia el orden de las que ya puso, asimismo se considera como intento cuando sustituye una pieza de las ya colocadas por otra.*

A cada estudiante se le presenta el kataminó y se le explican las reglas del juego, y se establece un tiempo promedio de 30 minutos para poder realizar los primeros cuatro niveles. Hubo alumnos que en ese tiempo o un poco más lograron concluir los cuatro niveles; otros solamente concluyeron los tres primeros.

Es necesario hacer algunas precisiones importantes respecto a la detección y registro de los intentos, base de nuestro análisis. Al iniciar el primer nivel, por tomar un ejemplo, el estudiante tiene tres pentaminós a la mano y un área de 3X5 cuadros que cubrir. Al ser el área un rectángulo y todas las piezas con sus lados rectos, no existe ningún indicador *a priori*, que determine con qué pieza se deba comenzar ni en qué lugar deberá colocarse en el tablero. Así, la selección de la primera pieza y su ubicación en el tablero estará siempre determinada por el azar.

Lo anterior contrasta significativamente con los rompecabezas comerciales de figuras y formas. En la mayoría de ellos tienen un tablero rectangular donde las piezas que van colocadas en los bordes se distinguen de cualquier otra por tener una parte recta, otras con una parte en ángulo recto, además de tener un color y una parte del dibujo que concuerda con algún lugar del borde del rompecabezas.

Se sabe de antemano que este tipo de piezas no pueden ir en otro lado más que en el perímetro o en las esquinas del rompecabezas, y que los niños de preescolar y primaria usan esta táctica para iniciar su armado y, al mismo tiempo, ir conformando su incipiente perfil de estrategias para localizar y colocar las primeras piezas en el tablero del rompecabezas. En el kataminó no existen marcas, dibujos o colores distintivos en los lados del tablero ni en las piezas que determinan la primera acción.

Una vez puesta la primera pieza en el tablero el área se reduce a una forma irregular con ciertos indicadores (los bordes de la primera pieza) en un nuevo perímetro, y que la percepción geométrica del estudiante deberá tomar en cuenta para seleccionar la segunda pieza y el lugar adecuado para colocarla. Esta segunda acción no garantiza que sea la pieza adecuada, por lo que el estudiante debe valorar si la siguiente pieza (la tercera) puede colocarse y en qué forma. Si el estudiante determina que la pieza en

mano tiene la forma del área sobrante, el reto termina y se contabiliza como un intento exitoso. Si el estudiante considera que no es posible seguir colocando la siguiente pieza, porque el área no tiene la forma de la pieza faltante, su acción se contabiliza como un intento fallido. Sin embargo, al fallar, el estudiante tiene otras alternativas: quitar todas las piezas y volver a colocarlas en otro orden, quitar una pieza y reacomodarla o, cambiar una pieza por otra. Todo esto hasta cubrir el área. Cada intento fallido se vuelve a contabilizar. Las figuras 2.2 y 2.3 muestran el primer nivel.

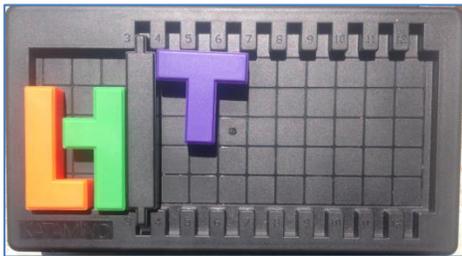


Figura 2.2 Intento fallido

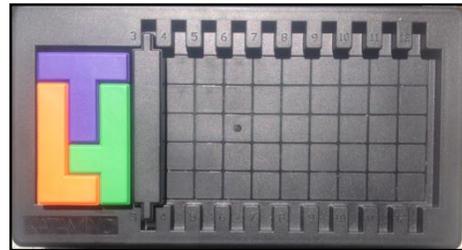


Figura 2.3 Intento exitoso

Observe que la última pieza tipo “T” en la figura 2.1 no es posible acoplarla (intento fallido), mientras en la figura 2.2 una de las piezas es reacomodada (rotación de 180° sobre el eje horizontal) permitiendo que la pieza “T” se acople perfectamente (Intento exitoso).

Cabe señalar que en el Kataminó el acomodo de las piezas en cada nivel no es único, y este hecho da al juego un grado de libertad más para decidir qué pieza y en qué posición hay que colocarla en el área. En cualquier caso, en el proceso entra en acción una habilidad innata que fue estudiada inicialmente por Cooper y Shepar (1985) y, confirmada por Núñez y Aznar (2009), referente a la rotación mental de objetos que imita a la rotación física del mismo. Dicho de otro modo, la rotación mental y física que le hacemos a un objeto es la misma. Esta habilidad es utilizada por los estudiantes cuando colocan una pieza que al no quedar bien o no llena sus expectativas, se quita y se rota físicamente para volver a colocarla.

Sin embargo, antes de rotar físicamente una pieza, primero los hace mentalmente, y como la percepción geométrica de algunos estudiantes no permite confirmar mentalmente si encaja o no la pieza, se recurre a la rotación física para su comprobación. Por otro lado, si el estudiante confirma mentalmente que la pieza no cabe en el área sobrante o se percata de no poder seguir colocando más piezas, esto es un

indicador de tener una habilidad de percepción geométrica mejor desarrollada que aquel que lo hace físicamente.

Cada vez que un estudiante pasa al siguiente nivel, se incorpora un pentaminó más a los anteriores y se mueve la barra vertical de contención una posición más hacia la derecha, incrementando el área en cinco cuadrados más (una columna). De esta forma, para cada nivel, se vuelve a tener la condición inicial del reto anterior: tomar al azar la pieza de inicio y su ubicación.

La dinámica de observar y contabilizar los intentos en los cuatro niveles que se propusieron, junto a su respectivo tiempo de ejecución, se realiza para todos los estudiantes, y cada dato observado se registra en el cuadro 2.1.

No.	Juego: Kataminó			NIVELES							
	Nombre	Tiempo Total	Intentos totales	1		2		3		4	
				Intentos	Tiempo	Intentos	Tiempo	Intentos	Tiempo	intentos	tiempo
2	Ana	36:35	46	2	00:26	17	9:55	3	1:27	24	24:45
9	Araceli*	19:24	49	1	00:03	3	00:49	13	03:31	32	15:01
1	Alma	27:20	57	1	00:09	3	00:48	53	24:47	-	-
6	Jeremías	31:58	67	1	00:17	11	2:11	27	8:03	28	19:22
5	Mauricio	31:10	74	1	00:14	4	1:12	46	18:08	23	8:35
3	Josué	41:35	80	1	00:22	38	14:10	17	10:11	24	16:10
7	Daniel *	33:25	83	1	00:27	33	11:10	11	5:16	38	18:00
4	Diana*	37:47	92	1	00:32	30	9:48	36	15:36	25	11:00
8	Jorge	50:15	183	1	00:12	28	6:27	93	26:40	61	16:13

Cuadro 2.1. Registro del Kataminó

Observe que los registros están ordenados, de menor a mayor, por el número total de intentos, y el asterisco en el nombre del estudiante indica que éste completó satisfactoriamente los cuatro niveles. El resto concluyó bien sólo hasta el tercer nivel.

El cuadro anterior se analiza en dos formas: Por nivel de juego (columnas) y por estudiante (renglón).

Análisis por nivel de juego (columna)

1° nivel (3 pentaminós). Los estudiantes utilizan un intento para armar el bloque con tres piezas, con excepción de Ana que utiliza dos, y todos lo hacen en menos de 31 segundos. Con el mismo número de intentos y el mismo tiempo (promedio) para resolver el reto, se muestra que todos están en las mismas condiciones de uso de su percepción geométrica. No hay margen para analizar diferencias o rasgos significativos que den pie para pensar que la percepción geométrica mostrada fue retada de forma significativa en uno u otro estudiante.

2° nivel (4 pentaminós). Este nivel, a diferencia del anterior muestra un incremento tanto en el número de intentos como en el tiempo de su realización. Al respecto se tiene el cuadro 2.2.

2° Nivel	Intentos	3	3*	4	11*	17	28	30*	33*	38
	Tiempo	00:48	00:49	01:12	02:11	10:45	6:27	09:48	11:10	14:10

Cuadro 2.2

- Al ordenar los registros ascendentemente en relación a los intentos hay una tendencia creciente en éstos como en sus respectivos tiempos.
- Los primeros tres estudiantes resuelven el 2° nivel entre 3 y 4 intentos en 1 minuto en promedio.
- Los siguientes dos lo logran en 11 y 17 intentos en 6.5 minutos en promedio. Aquí se empieza a mostrar que una pieza más, complica el ejercicio, y comienza a manifestarse un conflicto, un reto significativo para algunos estudiantes.
- Los cuatro restantes están entre 28 y 38 intentos (33 en promedio) en una media de 10.8 minutos.
- Todos terminaron exitosamente este nivel

Los tiempos e intentos diferentes muestran que si bien la percepción geométrica se ha manifestado, ésta lo hace de forma diferente. Es decir, independientemente de la velocidad con el que el estudiante mueve las piezas (lo cual repercute en el tiempo), los intentos revelan que existe un conflicto entre la forma del espacio que ven en el tablero con el de las piezas que tienen disponibles. La percepción geométrica mostrada no les ayuda a identificar qué pieza puede ser la más idóneas para dicho espacio, invirtiendo en movimientos (y tiempos) para probar, por ensayo y error, qué piezas usar. Una práctica

común fue tener las piezas en la mano y no darse el tiempo para reflexionar si era o no posible colocarla de forma eficiente.

3° nivel (5 pentaminós). En este nivel, se observa (cuadro 2.3) un incremento más o menos constante en los intentos como de sus tiempos. Sin embargo, una estudiante, Ana, requirió sólo 3 intentos en 1.30 min., lo que la coloca en una situación atípica respecto a sus demás compañeros, los cuales requirieron al menos 11 intentos para resolverlo.

Lo mostrado en este nivel refleja en general que hace falta de más habilidad de percepción geométrica que permita al estudiante identificar algunos patrones de espacio en relación con la forma de las piezas y así determinar con más precisión cuál de éstas pueden o no acoplarse con mayor ventaja, ya sea que se haga mental o físicamente. Aun así, todos los estudiantes resolvieron el reto.

			+2	+4	+10	+11	+10	+8	+40	
			⌒		⌒		⌒		⌒	
3° Nivel	Intentos	3	11*	13*	17	27*	36*	46	53	93
	Tiempo	01:30	05:16	3:31	10:11	08:10	15:36	18:08	24:47	26:40
			⌒		⌒		⌒		⌒	
			+4:55	+6:40	-2:01	+7:26	+2:32	+6:39	+1:53	

Cuadro 2.3

4° nivel (6 pentaminós). Cuatro estudiantes emplearon 24 intentos en promedio, tres emplearon 32 intentos en promedio y uno invirtió 61 intentos; sólo un estudiante no realizó el último reto por excederse del tiempo y verse fastidiado. En cualquier caso, vemos (cuadro 2.4) que en promedio se hicieron 26 movimientos. Tres alumnos terminaron el nivel en el tiempo establecido, indicando con esto, que su percepción geométrica está mejor desarrollada que los demás.

4° Nivel	Intentos	23	24	24	25*	28*	32*	38*	61	Sin realizar
	Tiempos	8:35	16:10	24:45	11:00	19:22	15:01	18:00	16:13	---

Cuadro 2.4

Análisis por estudiante (filas)

El análisis muestra el desempeño individual de cada estudiante en relación a la percepción geométrica, y también será el puente que ayudará a dar una explicación a la forma de actuar y entender las estrategias usadas. El cuadro 2.5 muestra el 2º, 3º y 4º niveles, junto a algunas observaciones sobre estudiante ordenado respecto al número de intentos en el 3º nivel.

	Nombre	Tiempo total	Intentos totales	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Observaciones
				I	T	I	T	I	T	
2	Ana	36:35	46	17	9:55	3	1:27	24	24:45	Ana lo hace muy lento, pensando qué hacer. No termino el 4º nivel
7	Daniel*	33:25	83	33	11:10	11	5:16	38	18:00	Daniel termina todos los niveles. Sin queja. Muestra satisfacción al lograr cada nivel.
9	Araceli*	19:24	49	3	00:49	13	3:31	32	15:01	Araceli hace todo con una mano y deja las piezas en la mesa. Analiza y mueve según su plan. Termina 4º nivel
3	Josué	41:35	80	38	14:10	17	10:11	24	16:10	Luis hace la actividad. No termina el 4º nivel
6	Jeremías	31:58	67	11	2:11	27	8:03	28	19:22	Jeremías hace todo en silencio. Al terminar muestra un cara de satisfacción y de presunción porque sí pudo
4	Diana*	37:47	92	30	9:48	36	15:36	25	11:00	Diana hace una cara de asombro, como si se preguntara ¿es posible llenar el espacio con las fichas? Termina 4º nivel
5	Mauricio	31:10	74	4	1:12	46	18:08	23	8:35	A Mauricio se le pregunta si tiene algún problema ante su inactividad, dice que “es algo complicado”. No termina el 4º Nivel
1	Alma	27:20	57	3	00:48	53	24:47	—	—	Empieza y sólo hace una observación de que es algo difícil en el 3º nivel que no termina. No inicia el 4º nivel.
8	Jorge	50:15	183	28	6:27	93	28:40	61	13:13	Jorge piensa mucho en cada movimiento y trabaja fuera del rectángulo. Lo hace para el 2º nivel pero no le sirve resolver así para los niveles 3º y 4º

Cuadro 2.5. El Kataminó

Alma tiene un comportamiento atípico, ya que el 2º nivel lo resuelve con sólo 3 intentos en menos de un minuto. Sin embargo, en el 3º nivel requiere de 53 intentos en 24 minutos (casi dos intentos por minuto). Recuérdese que un intento puede llevar más tiempo que acomodar sólo una pieza. Alma, no inicia el 4º nivel por excederse más de 30 minutos el tercer reto. Para no perder su interés en seguir participando en la experiencia, se decidió no plantearle el 4º nivel porque faltaba interactuar con tres materiales más.

Ana tiene movimientos más lentos que sus pares al colocar las piezas pero termina bien y rápido el 2º nivel. En el 3º nivel comienza con lentitud viendo las piezas y pensando cómo acomodarlas y en tres intentos logra resolverlo. El 4º nivel lo comienza igual, con lentitud, sin embargo, hace más intentos que en el nivel anterior, se excede en el tiempo (24 min) y muestra una ligera frustración y desesperación, por lo que se decide dar por terminada la sesión –que ya había durado 1:30 min aproximadamente-, y se le proponen los tres juegos que faltaban en otra sesión posterior. Su desempeño es atípico porque baja el tiempo drásticamente en el 3º nivel cuando se “supondría” que aumentaría. No hay un comportamiento claro, que muestre cierto control de la situación por parte de Ana, más bien, parece ser que no logra anticipar una estrategia por lo que si en sus primeros intentos “casualmente” coloca acertadamente algunas piezas, logrando terminar rápidamente, en el 4º nivel triplica el tiempo del 2º.

Daniel y Josué muestran un comportamiento similar al de Ana en el sentido de disminuir los intentos del 3º nivel. Daniel disminuye a 11, que es la tercera parte de sus intentos en relación a los realizados en el 2º nivel; por su parte Josué, resuelve en 17 intentos que son la mitad de los que hizo en el 2º nivel. En ambos estudiantes se observa un aumento en los intentos que hicieron al enfrentar el 4º nivel. Daniel logra terminarlo mientras que Josué no. No se aprecian diferencias respecto las técnicas que usaron, mismas que se analizan más adelante

Jeremías sigue un progreso ascendente desde el 1º nivel al 4º y termina satisfactoriamente en menos tiempo que sus pares. Particularmente, a diferencia de sus compañeros, mueve y acomoda con mayor rapidez las piezas. Aun así cada nivel, significó un mayor reto a su percepción geométrica.

Diana sigue el mismo patrón que Jeremías, es decir sus intentos aumentan frente a cada nivel, lo mismo sucede con el tiempo empleado para resolverlos; sin embargo, a

diferencia de Jeremía, logra terminar termina el 4º nivel. Su expresión es de alegría y asombro ya que comprobó que es posible cubrir el área y más importante aún que ella lo pudo hacer.

Mauricio y Jorge muestran comportamientos equivalentes, pero Jorge dobla los intentos y tiempos en los niveles 3º y 4º, respectivamente. Cabe aclarar que Jorge trabajó en ocasiones fuera del tablero tratando de acomodar las piezas del 2º nivel logrando su objetivo sin la ayuda que representa el espacio marcado por el tablero.

Esta estrategia supone una mayor dificultad que Jorge mismo se autoimpone; al mismo tiempo indicaría un desarrollo mayor de su percepción geométrica si lograra replicar su estrategia en los demás niveles. Sin embargo, no le funciona en el 3º nivel, trabajando dentro del tablero y terminando el reto. En el 4º nivel sale y entra al tablero en pocas ocasiones excediéndose en tiempo, y sin lograr terminarlo exitosamente.

Araceli es la que mostró mayor desarrollo en su percepción geométrica respecto al resto de sus compañeros; en promedio ocupó menos tiempo y los resolvió con menos intentos. Trabaja casi siempre con una mano y deja las piezas muy separadas sobre la mesa para visualizarlas y elegir con mayor certeza la pieza correcta. En general se muestra tranquila y concentrada, excepto en el último reto, donde se desespera un poco, pero se logra concentrar, intenta nuevamente y logra terminarlo.

Conclusiones del Kataminó

Con base en el comportamiento observado de los estudiantes se tiene que, en concordancia con el análisis *a priori*, este juego efectivamente, a partir del 2º nivel, significa un reto a la percepción geométrica de los jóvenes de la muestra. Así mismo, en la medida en que se pudo documentar (intentos/tiempo) el empeño por resolver el reto al que enfrentan, particularmente, los niveles 3º y 4º, se tiene que, desde el punto de vista didáctico, estos niveles del Kataminó posibilitan que los alumnos se comprometan con la tarea planteada, que su percepción geométrica entre en juego independientemente del nivel de desarrollo de cada uno de ellos.

En el 3º nivel se ve un esfuerzo mayor (salvo una excepción) en lograr terminarlo; en cambio, el 4º nivel, parece que rebasó las posibilidades de la percepción geométrica desarrollada por cada uno de los estudiantes de la muestra. Sólo tres se

dieron el tiempo de ver las figuras y tratar de acomodarlas en el área respectiva y concluir exitosamente. Los cinco restantes movían con mayor rapidez las piezas, con la pretensión de resolverlo al “azar”, sin que el movimiento de éstas estuviera mediado por una reflexión sobre la posibilidad de colocar las piezas en el lugar correcto.

2.1.2 Mueve uno

Descripción del juego y dinámica de la sesión

El juego *mueve uno* original costa de dos partes. La primera consiste de 30 cartas con figuras formadas por cinco líneas delgadas. La segunda consiste de cinco palitos iguales de longitud 5 cm. Las reglas del juego son tomar del mazo una carta inicial y construir la figura con los cinco palitos sobre la mesa. Posteriormente se toma una segunda carta del mazo y el participante en turno debe transformar la figura hecha con los cinco palitos a la de la carta elegida moviendo sólo un palito. Aquí no importa si la figura se forme horizontal o verticalmente. Es importante hacer notar que la pieza formada no sea una figura reflejo del dibujo. Si el jugador no puede hacer la transformación o es imposible transformarla, se queda con dicha carta y toma otra del mazo, intentándolo nuevamente. Al reconstruir la figura, la carta en cuestión se regresa al mazo y el turno pasa al siguiente jugador y así sucesivamente. Gana el jugador que se quede sin cartas.

El juego que se presentó a los alumnos es una variante del original (Figura 2.4). Se unieron tres juegos de cartas del *mueve uno* formándose un mazo de 90 cartas, agrupadas en 30 grupos de tres cartas cada uno. Cada evento o grupo está numerado del 1 al 30 y cada carta en un evento se numeró del 1 al 3. Se elige una carta inicial, marcada como cero, para iniciar el juego.

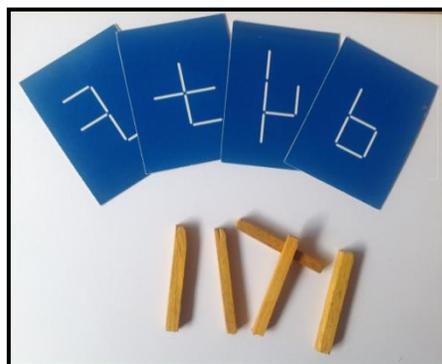


Figura 2.4. Mueve uno y sus elementos

Para la elección del juego, se tomaron en cuenta las siguientes características:

1. Usa cinco palitos de 5.5 cm de largo y .5 cm de ancho.
2. Se tienen 30 figuras diferentes en 90 tarjetas.
3. Se construyen figuras sencillas usando los cinco palitos.
4. La habilidad geométrica a analizar es exclusivamente el uso de la rotación angular de una figura hecha con palitos⁹, además la habilidad de comparar y confirmar si la nueva construcción es idéntica o no con la figura de la tarjeta¹⁰. En menor medida se usa también la traslación.

La actividad inicia pidiendo al estudiante que reproduzca con los cinco palitos la figura de la primera carta o carta cero (Figura 2.5). En seguida se le presenta el primer evento de tres cartas (figuras diferentes), y se le pide que construya una de ellas moviendo sólo un palito. En el primer evento pueden formarse las tres figuras (Figura 2.6). Sin embargo, en los subsecuentes eventos pueden hacerse una, dos o las tres figuras. Las cartas —para control del entrevistador—, están numeradas de izquierda a derecha como 1, 2 y 3 en cada evento, con el fin de poder documentar qué carta selecciona el estudiante; sin embargo, a tres estudiantes se les cambió, involuntariamente, el orden de dos de las tres cartas a 2, 1 y 3 en los 30 eventos presentados, pero esto no resultó significativo en el análisis.

⁹ Habilidad llamada «conservación geométrica», que reconoce que las características geométricas no cambian al rotar una figura

¹⁰ Habilidad llamada «discriminación visual» la cual permite comparar visualmente varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.

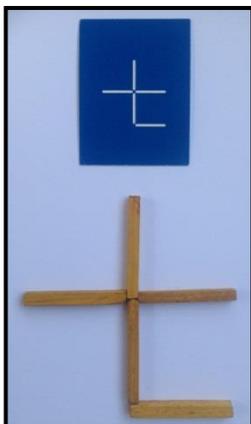


Figura 2.5
El inicio

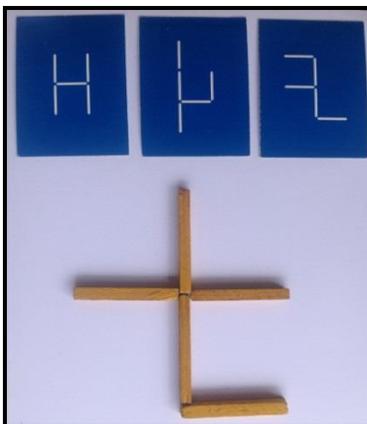


Figura 2.6
Primer evento. Transformar la figura a alguna de las mostradas

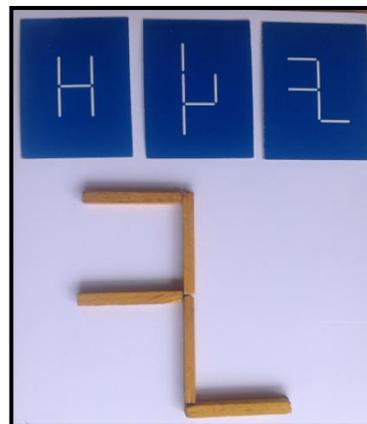


Figura 2.7
Elección de la 3ra carta como solución, la más común

Una vez creada la figura del primer evento (Figura 2.6), se retiran las cartas y se presenta el segundo evento con tres nuevas figuras. El estudiante construye la figura, se retiran las cartas y se le presenta el tercer evento y así sucesivamente hasta el evento 30. Por cada evento se registra el número del evento y el número de la carta con la figura elegida, así como el número de intentos realizados hasta formarla. *Por intento se entiende el reacomodo de un palito o el movimiento de rotación angular (en su caso) de un cuarto de vuelta de una carta.*

En esta dinámica se presentaron cuatro escenarios: el primero, cuando el estudiante solamente mueve un palito formando exitosamente la figura elegida. Segundo, el estudiante mueve un palito sin éxito y lo regresa a su lugar, lo reacomoda o vuelve a intentarlo con éxito con otro palito. Tercero, el estudiante rota al menos una carta para tratar de empatar su figura con la de la carta y saber qué palito mover. Cuarto, el estudiante selecciona una carta pero rota su cabeza en lugar de rotar físicamente la carta. En todos los casos se contabilizan cuántos palitos se movieron y cuántos cuartos de vuelta se realizaron por parte del estudiante antes de formar con éxito la figura.

Cabe mencionar que la mayoría de las veces los estudiantes transformaron la figura con el sólo movimiento de un palito, pero hubo un par de estudiantes que se tardaron mucho tiempo en resolver un evento específico, moviendo varias veces tanto las cartas como los palitos.

De las consideraciones descritas anteriormente, los resultados se registraron en el cuadro 2.7, con nueve renglones (alumnos) y treinta columnas (eventos). En cada celda

de una columna, se registra un par de números: el número de la carta con la figura seleccionada (1, 2 o 3) y el número de intentos realizados para formar la figura, ambos separados por un guion. Por ejemplo: 2-5 indica que se construyó la figura de la carta 2 y se realizaron 5 intentos para lograrlo.

El cuadro 2.6 muestra los 30 eventos (columnas) con la carta seleccionada y los intentos realizados por cada estudiante.

No.	JUEGO: MUEVE UNO		EVENTOS																														
	Nombre	Orden	Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	Alma	1-3-2	1:04:38	1-1	3-1	3-48	3-3	1-1	1-1	1-1	1-3	2-10	1-1	2-1	2-1	2-21	2-3	1-2	1-3	1-1	1-3	1-1	3-8	1-3	1-4	1-4	1-4	1-2	1-2	2-7	2-5	2-2	2-2
2	Ana	1-2-3	18:25	1-1	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1	2-2	2-5	1-2	2-2	2-2	2-1	2-3	2-3	1-3	1-1	1-1	1-1	1-1	1-3	1-1	1-1	3-1	3-2	3-1	3-3	1-3	2-1	2-2	3-1
3	Josué	1-2-3	22:56	1-1	3-1	3-19	1-2	1-2	1-2	2-6	2-5	1-4	1-3	1-1	1-3	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	2-1	2-1	2-1	2-3	2-1	2-3	2-5	2-6	3-7	2-11	2-10	2-1
4	Mauricio	1-2-3	13:10	1-3	1-3	2-4	2-6	2-2	2-2	2-7	2-4	1-2	1-1	2-8	2-12	2-1	2-1	2-2	2-1	2-8	2-1	1-1	2-2	1-9	1-9	3-1	3-3	3-1	3-2	3-4	3-4	1-1	1-1
5	Jorge	1-2-3	13:26	1-1	1-1	1-1	1-3	1-1	1-1	1-1	1-3	1-1	1-1	2-3	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	1-1	1-1	1-1	1-1	3-1	3-1	3-1	3-3	3-1	2-1	2-1	3-1
6	Araceli*	1-2-3	15:55	1-1	2-1	2-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	2-2	1-2	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-2	1-1	2-1	3-1	2-1	1-1	1-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
7	Diana*	2-1-3	24:40	1-1	1-5	2-1	2-4	2-28	2-4	2-2	2-5	2-2	1-4	2-2	2-4	2-3	2-3	2-2	2-2	2-23	2-1	2-3	2-3	2-3	2-8	2-3	2-1	2-3	2-35	2-2	2-1	2-2	3-1
8	Jeremías*	2-1-3	17:04	3-1	2-1	2-2	3-1	2-1	2-1	2-1	2-1	3-1	3-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1
9	Daniel*	2-1-3	13:40	3-1	2-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-2	1-1	3-1	3-1	2-1	2-1	2-1	2-2	2-1	2-1	2-1	2-1	3-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1

Cuadro 2.6. Mueve uno. Registro de carta-intentos por evento

Análisis del Mueve uno

En el registro de resultados, los estudiantes Jorge, Jeremías y Daniel, de los 30 eventos que resolvieron, en uno o dos necesitaron mover físicamente una carta. Además, hubo por parte de Jorge y Araceli tres y cinco movimientos de cabeza respectivamente (en vez del movimiento físico de la carta) para empatar la figura con su construcción. Tanto el movimiento de un cuarto de vuelta de una carta como el movimiento de cabeza se contabilizan como un intento.

En términos generales Araceli, Jorge, Jeremías y Daniel les fue suficiente su percepción geométrica para resolver con facilidad los 30 retos, mismos que son respaldados por los tiempos invertidos en el juego, que en promedio fue de 14.3 minutos, es decir resolvieron 2 figuras por minuto. Cualquier otro movimiento fue realizado de forma mental (rotación angular de la figura). No se sabe si la rotación mental fue de la carta o de la figura hecha con palitos. En cualquier caso, lo que se muestra es una mejor habilidad rotacional en la transformación de las figuras. En principio, una buena percepción geométrica.

Hubo estudiantes que se tardaron mucho en un evento en particular. Hacia el inicio de la experiencia, no movían cartas ni tampoco intentaban mover algún palito, mostraban cierto desconcierto, como si quisieran resolverlo mentalmente antes de hacer algún movimiento, quizá creían que no estaba “permitido” mover las tarjetas. En esos casos se les sugirió que seleccionaran una tarjeta y la compararan con la figura de palitos y vieran en qué se parecían. Si no veían el parecido se les sugería que le dieran un cuarto de vuelta más y volvieran a comparar las figuras, y así sucesivamente. Si dicha carta no tenía ningún parecido, tomaban otra carta haciendo el mismo procedimiento. Con estas nuevas sugerencias, y en los eventos que lo ameritaba, pudieron formar las figuras de los eventos restantes.

Alma, Josué y Diana, por su manera de proceder respecto al resto de sus compañeros, destacan por el tiempo que emplearon y la cantidad de movimientos que realizaron con la intención de visualizar qué palito debían mover para formar la figura. Alma invirtió una hora en terminar la serie de 30 eventos. En particular en el 3º evento realizó 48 movimientos con un tiempo aproximado de 30 minutos. Después de algunas indicaciones de cómo rotar cada carta y compararla con la figura, logró armar la figura en cuestión y prosiguió hasta llegar al 13º evento, donde invirtió 21 movimientos con 8 min para logra armarla y, de ahí hasta el 30º evento donde ya no requirió de más apoyo por

parte del entrevistador ni utilizó mucho tiempo. Josué, por su parte, en el 3º evento invirtió 19 movimientos, y Diana en el 5º y 26º evento realizó 28 y 35 movimientos respectivamente.

Conclusiones del Mueve uno

La percepción geométrica de los alumnos mostrada en este juego, que implica la transformación de figuras, evidencia con mayor claridad, en relación a las situaciones propiciadas por los otros materiales, el uso de la rotación angular mental como estrategia para resolver en menos tiempo y con menos movimientos cada evento. Cooper (1985) demostró que ambos movimientos están emparejados en un desarrollo incipiente de la percepción geométrica, es decir que las rotaciones mentales de los objetos empatan con los movimientos que se harían manualmente.

Esto indica, por un lado, que el intelecto trabaja más al ver, rotar y transformar una figura en la mente, que hacerla manualmente. Por otro lado, cuando estos movimientos mentales “aparecen” más que los manuales indican, en principio, una mayor habilidad en la percepción geométrica. Hay más eventos que se resolvieron con un sólo movimiento 159 de 240 (más de la mitad), lo cual es un indicador que este juego en relación a los otros retó la percepción de los alumnos en menor medida, dado que los estudiantes no necesitaron en más de la mitad de las situaciones observadas, de verificar con la rotación física la anticipación que les provee la rotación mental que pueden realizar.

2.1.3 Laberinto (el duelo)

Descripción del juego y dinámica de la sesión

Laberinto, el duelo¹¹, es un juego cuyo objetivo principal es formar un camino entre dos puntos previamente definidos. El juego consta de tres partes: primero, un tablero cuadrado donde cada lado tiene dibujado cuatro figuras diferentes (16 en total); segundo, conjunto de 15 fichas también cuadradas que pueden cubrir el tablero completo excepto en un cuadrado y, tercero, un conjunto de 16 cartas con los mismos dibujos que se encuentran en los lados del tablero del juego (un libro, un diamante, una daga, etc.) y, dos figuritas (magos) utilizados para indicar el inicio y final del camino.

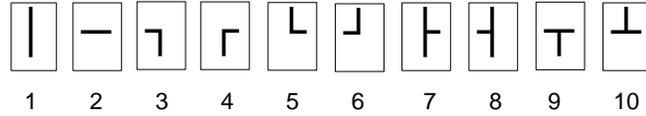
Cada ficha tiene dibujado en la superficie las partes de un camino: cinco en forma de “I”, cinco en forma de “L” y cinco en forma de “T”. Las piezas sólo pueden deslizarse horizontal o verticalmente en el interior del tablero –movimientos de traslación-, no se pueden girar ni quitar; La figura 2.8 muestra la configuración inicial del juego y sus elementos (reto 1).



Figura 2.8. Laberinto.

¹¹ Labyrinth, the duel, es marca registrada de Ravensburger.

Las fichas tipo “L” y “T” tienen, cada una, cuatro posiciones diferentes en el tablero, mientras que las fichas lineales tipo “I” solamente tienen dos posiciones (horizontal y vertical), mismas que se presentan en el siguiente diagrama:



Para las sesiones experimentales, a todos los estudiantes se les presenta el tablero con las fichas organizadas de la misma manera como se sugiere en el juego. En las sesiones no hubo necesidad de usar las cartas, en vez de eso se definieron cuatro eventos con extremos específicos: 1) Libro-Bastón, 2) Diamante-Moneda, 3) Tesoro-Copa y 4) Espada-Candelabro. El primer y tercer reto son caminos largos, en lados paralelos del tablero, y el segundo y cuarto retos son caminos cortos, en lados adyacentes. Se colocan los “magos” en dos diferentes imágenes y el jugador deberá mover (deslizar) las fichas para construir un camino que permita comunicar a ambos magos.

Para la elección del juego, se tomaron en cuenta las siguientes características:

1. Se usa la forma del dibujo en lugar de la forma de la pieza.
2. Hay variedad de opciones para construir un camino
3. La habilidad geométrica a analizar es el uso exclusivo de la traslación horizontal y vertical de las piezas.
4. La habilidad de intercambiar piezas contiguas con el menor número de movimientos.

Se contabiliza los movimientos de cada ficha, el número de intentos para armar un camino y el tiempo transcurrido para cada situación. Para el laberinto se define como *intento al camino construido donde a partir de cierto momento es imposible seguir poniendo las fichas adecuadas para terminarlo, y por tanto se tiene que reordenar el camino o rehacerlo completamente.*

El cuadro 2.7 muestra en cada reto: el total de movimientos, el número de intentos realizados y el tiempo invertido.

Juego: Laberinto		Retos											
Nombre	Tiempo Total	1			2			3			4		
		Mov	Intentos	Tiempo	Mov.	Intentos	Tiempo	Mov.	Intentos	Tiempo	Mov.	Intentos	Tiempo
Alma	27:20	300	10	13:28	36	2	1:27	330	9	12:18	54	4	1:24
Ana	8:09	66	5	02:01	18	1	00:19	125	4	3:05	39	2	35:16
Josué	19:09	292	17	11:01	5	1	00:15	125	10	6:10	40	4	2:17
Diana	10:50	104	5	02:50	22	2	1:42	195	9	4:23	94	6	2:32
Marcos	21:00	287	16	06:10	151	8	3:01	82	6	1:51	19	1	18:05
Jeremías	11:20	382	12	08:47	20	1	00:28	54	1	00:53	29	2	00:28
Daniel	11:09	320	10	07:43	21	1	00:20	80	4	02:14	2	1	00:10
Jorge	9:40	15	1	00:33	25	1	00:30	218	6	07:49	75	2	01:11
Araceli	7:43	67	2	01:01	6	1	00:08	243	6	03:18	126	4	2:01

Cuadro 2.7. Registro del laberinto

Análisis del laberinto

Analizado por tipo de reto (columnas), vemos que las columnas con más movimiento y mayor tiempo son donde hay que hacer un camino más largo (lados paralelos del tablero). En contra parte, hay menos movimiento y menos tiempo cuando el camino se hace en los lados adyacentes al tablero.

Cabe mencionar que del 1º reto al 2º el jugador tiene una cierta «ventaja» porque al terminar el 1º reto, puede aprovechar el nuevo acomodo de las piezas para crear el camino del 2º reto (no comienza desde el arreglo original); al terminar éste, se puede aprovechar la distribución de las piezas para construir el tercer camino y así hasta el cuarto. Desde luego, en función de la percepción geométrica de los estudiantes pueden o no aprovechar estas ventajas. Esto puede también explicar por qué los tiempos son bajos en las columnas 2 y 4; la mayoría de los estudiantes aprovecharon la distribución anterior, moviendo sólo algunas fichas, para armar el camino entre ambos extremos.

La percepción geométrica de cada jugador es puesta en escena cuando vislumbra una posible solución, no necesariamente el camino más corto, donde se debe de localizar las piezas adecuadas y moverlas al lugar correcto. No se ve una estrategia básica porque la pieza que el jugador ve puede ser la más cercana o no, y eso alarga o acorta los

movimientos. Aquí, al igual que el juego del kataminó, hay un componente mecánico importante puesto que los mayores movimientos son también apoyados por la velocidad del jugador al mover las piezas. Se notó en algunos jugadores movimientos rápidos para una pieza que aparentemente sirvieron de poco. Los cuadros del 2.8 al 2.11 están ordenados por el número de movimientos (3° columna) en los retos.

Caminos largo

Alumno	Tiempo total	Mov.	Intentos	Tiempo reto
Jorge	09:40	15	1	00:33
Ana	08:09	66	4	02:01
Araceli	07:43	67	2	01:01
Diana	10:50	104	5	02:50
Marcos	21:00	287	16	06:10
Josué	19:09	292	17	11:01
Alma	27:20	300	10	13:28
Daniel	11:09	320	10	07:43
Jeremías	11:20	382	12	08:47

Cuadro 2.8. Reto 1

Alumno	Tiempo total	Mov.	Intentos	Tiempo reto
Jeremías	11:20	54	1	00:53
Daniel	11:09	80	4	02:14
Marcos	21:00	82	6	01:51
Ana	08:09	125	4	03:05
Josué	19:09	125	10	06:10
Diana	10:50	195	9	04:23
Jorge	09:40	218	6	07:49
Araceli	07:43	243	6	03:18
Alma	27:20	330	9	12:18

Cuadro 2.9. Reto 3

Caminos cortos

Alumno	Tiempo total	Mov.	Intentos	Tiempo reto
Josué	19:09	5	1	00:15
Araceli	07:43	6	1	00:08
Ana	08:09	18	1	00:19
Jeremías	11:20	19	1	00:28
Daniel	11:09	21	1	00:20
Diana	10:50	22	2	01:42
Jorge	09:40	25	1	00:30
Alma	27:20	36	2	01:27
Marcos	21:00	151	8	03:01

Cuadro 2.10. Reto 2

Alumno	Tiempo total	Mov.	Intentos	Tiempo reto
Daniel	11:09	2	1	00:10
Marcos	21:00	19	1	18:05
Jeremías	11:20	29	2	00:28
Ana	08:09	39	2	35:16:00
Josué	19:09	40	4	02:17
Alma	27:20	54	4	01:24
Jorge	09:40	75	1	01:11
Diana	10:50	94	6	02:32
Araceli	07:43	126	4	02:01

Cuadro 2.11. Reto 4

Se observa que David y Jeremías son de movimientos rápidos, y que en el primer reto fueron los últimos con más movimientos, pero en los subsecuentes retos están en los primeros lugares con menor número de movimientos. Da la impresión que aprendieron rápido la dinámica y la aprovecharon. Otra alumna destacada es Ana (con pocos movimientos en los 4 retos) que se mantiene en los primeros 4 lugares en cada reto, con sus característicos movimientos lentos (su ritmo). Cabe hacer notar que en el 3º reto Ana había construido el camino que unía a las dos figuras pero no se dio cuenta de ello y lo deshizo, tenía en mente otro camino por hacer, por lo que no pudo visualizar que ya lo había logrado. Movi6 otras piezas y termin6 construyendo el camino anterior. En el 4º reto nuevamente construye el camino en el primer intento pero una vez m6s, ¿no se da cuenta de ello!; mueve dos piezas y vuelve a construir el camino y no logra verlo de nuevo. Sigue moviendo piezas encima de este camino queriendo conseguir algunas piezas para el plan que tiene en mente. Sin embargo, en un movimiento de piezas quita un conector frente a una figura y lo intercambia por otro y ah6 se da cuenta que ha construido el camino que une a los dos magos.

Esto comportamiento muestra que el estudiante no logra deshacerse de la configuraci6n general de las piezas en su conjunto y deja de ver las piezas de manera local. Entre tanto movimiento y tantas maneras de mover piezas su percepci6n geom6trica se pierde entre ellas. La percepci6n geom6trica tiene su eficacia, por un lado, en la detecci6n de detalles «locales», y por otro, en que estas pequeñas construcciones ayudan a construir (y ver) la configuraci6n general. Es un paso de lo particular a lo general y viceversa, similar a ver el fondo y la forma de un dibujo.

Diana tiene movimientos lentos y se da pausas cortas para analizar lo que tiene enfrente. Sin embargo, en el cuarto reto tiene dos ocasiones de completar el camino corto moviendo una ficha, pero no lo ve, su mirada est6 arriba tratando de mover otras piezas. Despu6s de varios intentos, coloca el conector adecuado y construye el camino.

Marcos inicia aprovechando las ventajas de arreglo original, y va colocando las piezas que va necesitando segun la trayectoria. Cuando le falta una o dos piezas para terminar, las localizan en el tablero y las trae hasta el lugar requerido, aun cuando esto le cause un desajuste de su camino original que no pierde de “vista”. Adem6s, en ocasiones, no se da cuenta de las piezas m6s cercanas que tambi6n pueden servir a su prop6sito.

Daniel inicia moviendo unas fichas pero se entretiene bastante en darle vuelta varias veces a cuatro fichas sin ningun beneficio. Cambia de estrategia y empieza a

mover otras piezas para formar uno de los caminos más largos de 8 piezas. En el 3º reto repite otro camino largo de 7 piezas. Los retos 2º y 3º los hace relativamente rápidos con dos y un movimiento respectivamente.

Jorge inicia el primer reto y rápidamente logra completarlo con un solo intento; repite la hazaña en el segundo reto. Sin embargo, en el 3º reto tarda más tiempo e invierte seis intentos de caminos largos hasta hacer el camino correcto; en el proceso hubo dos ocasiones donde logró construir el camino, pero sus característicos movimientos rápidos, junto a la pérdida de la percepción local sobre lo global le impiden darse cuenta de ello. La Figura 2.9 muestra una secuencia de esta acción.



a) A dos movimientos de crear el camino. Desplazar el camino "T" a su izquierda y bajar el camino horizontal.

b) ¡Crea el camino entre las dos figuras pero no lo ve! Sigue moviendo

c) Deshace el camino al mover la pieza "camino horizontal" hacia arriba y la pieza "T" a su izquierda y construye otro camino

Figura 2.9

Alma inicia sus movimientos de piezas de forma lenta, pausados, mirando qué conviene mover. En el 3º reto invierte muchos movimientos donde estuvo a una pieza de completar un camino pero no pudo verlo y deshizo su trayectoria a otra muy diferente y más corta. Sus intentos fueron largos hasta que es acorralada por sus propios acomodados, donde a veces la pieza necesaria estaba muy lejos de donde era requerida.

Araceli tiene movimientos no tan rápidos y usa las dos manos para mover las piezas, lo que la ayuda a terminar el primer reto sin mucha dificultad en un tiempo record. En el segundo reto sólo mueve seis piezas y termina el camino. Para el tercer reto logra un camino donde éste termina en la figura contigua a la marcada. Observando la configuración a detalle, la pieza adecuada para terminar el camino está a dos cuadros de ésta, que con dos movimientos hubieran bastado para terminado el reto. Sin embargo, ella no lo ve y mueve otras piezas reconstruyendo medio camino, aumentando los movimientos y tiempos. El último reto lo hace con movimientos más rápidos y fuertes al

grado de voltear o sacar del tablero algunas piezas. Realiza algunos movimientos intermedios sin beneficio, pero logra armar un camino corto.

Conclusiones del laberinto

El laberinto reta a la percepción geométrica del jugador, desde la perspectiva de los movimientos de traslación de las piezas. No se ve, en principio, una estrategia definida más que tratar de mover una pieza al lugar deseado con el riesgo de deshacer lo ya logrado, y en una suerte de acomodo, lograr crear el camino entre los dos magos. Se observa, sin embargo, que la traslación física de las piezas *per sé* no es lo importante del análisis, sino que, y con base en las figuras sobre cada piezas, el estudiante muestre habilidades de localización de figuras y que las traslade primero mentalmente (conservación geométrica) y las coloque en el lugar necesario, comprobando que es la pieza indicada, para después trasladarla físicamente. En ese traslado físico entran en acción las estrategias para mover las piezas: traslaciones lineales, movimiento circular de piezas sobre el tablero, sustituir una pieza por otra sin cambiar la configuración local y, principalmente, no perder de vista toda la configuración global del camino en construcción.

Es pertinente señalar lo que tienen en común los juegos mueve uno y el laberinto, que tienen movimientos dispares: rotación angular y traslación, respectivamente. Sin embargo, en ambos juegos se requiere la habilidad de conservación geométrica de figuras para comprobar que el movimiento físico realizado por una o varias piezas fueron los indicados en un determinado momento y para un fin específico del reto. Es decir, para el mueve uno, ¿la figura creada es idéntica a la figura de la tarjeta, salvo orientaciones?; para el laberinto, ¿la pieza localizada es la indicada para continuar o terminar el camino antes de moverla? Las respuestas a ambas preguntas es afirmativa en el sentido de que ambos juegos comparten, como herramienta indispensable, la habilidad de conservación geométrica para interactuar de forma exitosa con los elementos de los dos juegos.

2.1.4 Tangram Avanzado

Descripción del juego y dinámica de la sesión

El Tangram tradicional (Wikipedia) es un juego chino muy antiguo llamado “Chi Chiao Pan” que significa “Juego de los siete elementos” o “tabla de la sabiduría”. El juego tiene siete piezas o "tans" que consiste en: dos triángulos rectángulos iguales, dos triángulos rectángulos más pequeños, dos cuadrados: uno grande y otro más pequeño y, un romboide. Todos juntos ensamblados forman un cuadrado mayor. El objetivo del juego es usar todas las piezas para construir diferentes figuras: números, animales, personajes, etc. Hoy en día, el tangram ha tenido tanto éxito en las escuelas de educación básica que se usa como juego de entretenimiento, en psicología, en educación física, en diseño, en filosofía y particularmente en pedagogía. En el ámbito de la enseñanza de la matemática, el tangram se emplea para desarrollar la percepción geométrica en niños de preescolar y en los primeros grados de primaria, introduciendo de forma lúdica conceptos y relaciones básicas de geometría plana.

El tangram utilizado en las sesiones con los estudiantes de la muestra es una versión comercial llamada Shape by Shape¹², donde se forma una figura roja particular en el centro del tablero (6 piezas) además del espacio amarillo que lo rodea (8 piezas); todo esto dentro de un tablero cuadrangular, figura 2.10.

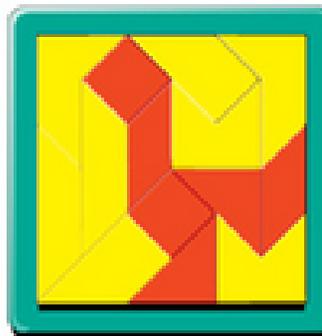


Figura 2.10. Tangram avanzado

¹² Shape by Shape es marca registrada de Think Fun Inc.

Para la elección del juego, se tomaron en cuenta las siguientes características:

1. Usa piezas con diversas formas geométricas (triángulos, cuadrados, rombos, etc.).
2. Se construyen dos cuerpos sólidos: Una figura roja específica y su contorno amarillo. Ambos conformando un solo esquema.
3. La habilidad geométrica a analizar es la rotación angular y la rotación sobre el eje vertical y horizontal de cada pieza, además del reconocimiento visual de figuras específicas dentro de la configuración.

Observe que estos requisitos son similares al del Kataminó, sin embargo, los bloques a construir en ambos juegos distan de ser parecidos. Por un lado, en el Kataminó se construyen rectángulos de dimensiones diferentes según el nivel en el que se encuentre, sin otra característica adicional que embonar sin dejar huecos. Esto da facilidad a las piezas de poder colocarse en diferentes configuraciones para la misma área. En cambio, en el Tangram se construye sólo un cuadrado, pero la dificultad radica en colocar las piezas de tal forma que se arme una figura roja muy específica inmersa en un fondo amarillo dentro de un tablero cuadrado, donde cada pieza tiene un lugar único, no pueden ir en cualquier lugar ni intercambiarse entre ellas. Sólo existe una configuración para el armado.

Para la sesión, a cada alumno se le da el tablero y las piezas desordenadas además de una tarjeta con la figura a armar¹³. Se le pide al alumno que use todas las piezas para hacer la figura de la tarjeta (Figura 2.11).

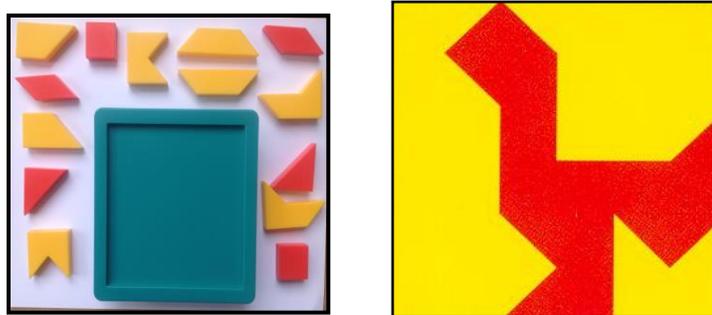


Figura 2.11. Tangram: tablero, piezas y figura (gallo) a formar

¹³ A los alumnos se les preguntó qué figura veían en la tarjeta, todos contestaron: «pollo», «pollito», «gallo» y «no sé».

Análisis del tangram

Se contabilizan los intentos desde que coloca la primera pieza en el tablero. Por *intento se entiende el acomodo de las piezas hasta que éstas ya no pueden acomodarse, y se tiene que cambiar parcial o totalmente a otro acomodo, intercambiando o reemplazando una o más piezas.* La información de los tiempos e intentos conformó el cuadro 2.12. El asterisco en el nombre indica que el alumno armó la figura correctamente.

Juego del Tangram avanzado				
No.	Nombre	Movimientos	Tiempo mm:ss	Observaciones
1	Alma	300	28:11	Sus armados eran más cercanos a la figura propuesta pero el tiempo fue muy largo.
2	Ana	66	14:35	Manifiesta cansancio se desesperó y ya no quiso seguir. Sus movimientos son lentos y sus construcciones poco acertadas.
3	Josué	292	28:21	Sus intentos parecían cercanos a la solución pero el tiempo se extendió demasiado.
4	Diana	378	17:48	Sus intentos no mostraron coherencia o semejanza con la forma propuesta. Tarda mucho en armar algo coherente.
5	Marcos	287	29:47	Le llevó mucho tiempo acercarse a la figura propuesta. Y aun así no logra armar más que la cabeza y cuello del gallo.
6	Jeremías*	382	23:11	Inicia formado el gallo rojo sin piezas amarillas. Se detiene a mirar la tarjeta con cuidado. En el minuto 19 arma el gallo completo junto a varias piezas amarillas de la cabeza. Cuatro minutos después termina de armar el contorno amarillo.
7	Daniel*	320	34:32	Inicia formado el gallo y lo amarillo por igual. El gallo aun sin forma, Sólo una vez intentó armar sólo lo amarillo sin éxito. Conforme experimenta, la cabeza y cuello del gallo están definidos, le cuesta mucho el cuerpo. Avanza formado ambos colores. Termina lo amarillo y con dos piezas rojas (la cola) termina el gallo.
8	Joel	248	39:44	Empieza a formar sólo la figura roja, al no lograrlo en el tablero, saca las piezas de éste (en dos ocasiones) y vuelve a intentarlo (característico de Joel) Regresa al tablero y logra acercarse a la figura roja pero nunca la construye correctamente (solo cabeza, cuello y pata). Pasa a formar el contorno amarillo sin lograrlo y luego cambia a la roja sin éxito
9	Araceli*	225	32:53	Inicia muy tranquila y hace varios intentos hasta lograr formar la figura roja al minuto 24:18. Tarda 8 y medio minutos en acomodar el contorno. Termina muy satisfecha.

Cuadro 2.12. Registro de observaciones de los estudiantes en el Tangram

Una habilidad necesaria para armar la figura propuesta es la percepción visual del estudiante, en el sentido de identificar bien la figura roja en medio del contorno amarillo, independientemente del nombre que algunos le dieron. Este juego utiliza, por un lado piezas geométricas de lados rectos, algunas conocidas como el cuadrado, triángulo rectángulo y trapecios alargados, junto a otras piezas irregulares. Por otro un tablero cuadrado.

Para iniciar el armado no existen marcas de color, figura, dibujo o contorno específico por donde comenzar, a diferencia de los rompecabezas comerciales de figuras y formas que comentamos anteriormente. Sin embargo, la figura del gallo rojo es un referente —el único— para iniciar, incluyendo su posición en el tablero. Esta «marca» es la primera que la percepción geométrica de un estudiante podría detectar en un primer análisis. Sin embargo, para saber qué están viendo los estudiantes, analizamos las estrategias utilizadas en la construcción de este tangram (ver capítulo tres), y que fueron básicamente tres: Iniciar por la figura roja, por el contorno amarillo y luego roja o, armar ambos a la par.

A pesar de identificar las estrategias utilizadas, observamos que algunos estudiantes saltan de una a otra sin tener resultados claros, y esto, suponemos, es porque «miran» sólo dos colores en el tablero pero no «ven» una figura definida, y esto se deduce al ver sus construcciones en determinados momentos de la sesión con el tangram (Figura 2.12).

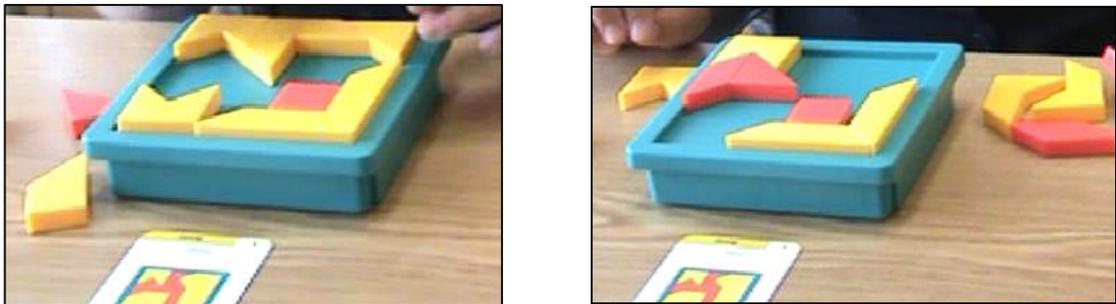


Figura 2.12

En cambio, los estudiantes que arman perfectamente la figura propuesta, también usan las estrategias mencionadas con la diferencia de que tienen claro dónde está y qué forma tiene la figura roja. Es decir, se hace uso de una componente visual importante identificada por «percepción visual», habilidad que permite identificar la figura roja y usarla

como punto de referencia —la marca distintiva de inicio— para colocar las piezas amarillas del contorno (Figura 2.13). Esto confirma al mismo tiempo lo que Fuenlabrada señala respecto de la característica de la percepción geométrica: “la capacidad de ver figuras ahí donde no están y dejar de ver las que están”.



Arma gallo y el contorno a la par



Arma el gallo y luego el contorno

Figura 2.13

Conclusiones del tangram

El tangram evidencia de una mejor manera que las habilidades perceptuales no actúan de manera aislada y que en virtud de la situación particular de que se trate, entran en acción una o varias percepciones en menor o mayor medida, evidenciando en el estudiante, por un lado, las habilidades mejor desarrolladas y, por el otro, las que se requieren desarrollar más. En este sentido la habilidad visual fue importante porque el estudiante requería identificar una figura roja, y no sólo dos colores.

Este conocimiento no puede identificarse en el estudiante con un solo material ni en una sola exhibición, sino a lo largo de varias sesiones registrando sus avances paulatinos y retándolo constantemente con más variedad de juegos donde exija utilizar la selección y clasificación de objetos.

3

EL CONCEPTO DE ESTRATEGIA

El pensamiento no es sólo conocimiento / detección de las constancias, regularidades, "leyes", presentes y en acción en la naturaleza. Es también estrategia, y como toda estrategia no sólo debe utilizar al máximo su conocimiento del orden, sino también afrontar la incertidumbre, el alea, es decir, las zonas de indeterminación y de impredecibilidad que encuentra en lo real.

Edgar Morin

La investigación y el análisis presentado en este trabajo hace uso de los recursos lúdicos como herramienta principal para poder interactuar con los estudiantes de la muestra, y al mismo tiempo sirva para mostrar las características, propiedades y estrategias relacionadas con el uso de la habilidad de percepción geométrica con que cuentan los estudiantes de la muestra; elementos que pueden ser detectados y observados de forma más eficiente en interacción directa con un medio (lúdico) propicio.

El trabajo que realizamos en esta etapa fue observar detenidamente los tiempos de ejecución, comportamientos y movimientos que realizaba cada estudiante de la muestra al estar frente a una situación didáctica de conflicto. Pero también el identificar las diversas estrategias que cada estudiante implementaba en su afán por encontrar una respuesta a un reto particularmente geométrico

Nuestro interés principal es estudiar y describir la habilidad de percepción geométrica que muestran los estudiantes en su primer año de la preparatoria. Para ello, fue necesario utilizar algunos juegos didácticos particulares que consideramos podrían ayudarnos en la indagatoria. Con base en las TSD de Brousseau, no sólo nos interesaba que los estudiantes resolvieran el reto propuesto, sino también descubrir cómo lograban resolverlo, qué conocimientos previos entraban en acción y qué caminos y medios elegían para ello; pero principalmente, qué estrategias implementaban al momento de resolver el reto planteado. En este sentido, el concepto de *estrategia* cobra un papel importante para ayudarnos a explicar con más detalle todo lo relacionado a la habilidad de percepción geométrica.

3.1 Definición de estrategia

Para comenzar, es importante saber que la palabra *estrategia* deriva del latín *strategia*, que a su vez procede de dos términos griegos: *stratos* («ejército») y *agein* («conductor», «guía»). Por lo tanto, el significado primario de estrategia es el *arte de dirigir las operaciones militares*. Más específicamente, la forma en que se planifican, organizan, orientan los diversos combates para conseguir el objetivo fijado: ganar la guerra contra determinados adversarios. En otro ámbito, el concepto también se utiliza para referirse al *plan ideado para dirigir un asunto* y para designar al conjunto de reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento. En otras palabras, *una estrategia es el proceso seleccionado a través del cual se prevé alcanzar un cierto estado futuro* (Wikipedia).

Esta definición puede considerarse válida y útil en términos generales, y puede aplicarse a casi cualquier contexto. Sin embargo, se empiezan a tener problemas de definición y argumentación en el terreno de la investigación psicopedagógica, cuando se requiere especificar y explicar con más detalle situaciones de aprendizaje cognitivo particulares. Por ejemplo: ¿qué circunstancias orillaron a un estudiante para que tomara una estrategia específica y no otra en la solución de un problema (geométrico) planteado?

A pesar de esta primera definición etimológica, una de las primeras áreas que incursionó en el estudio específico de las estrategias fue la Psicología, de donde han surgido algunas investigaciones al respecto; primero en el seno asociacionista de las teorías conductistas y más recientemente en el área del procesamiento de información. Sin embargo, y a pesar de varias investigaciones al respecto, aún no parece existir un acuerdo claro en la definición misma del concepto de estrategia.

Montanero (2001) se ha dado a la tarea de incursionar en una revisión de las dificultades existentes en la diversidad de usos y definiciones que tiene el concepto de estrategia en el ámbito de la psicología cognitiva, en general, y de la psicología educativa en particular, como inicio para abordar el tema de la instrucción de las estrategias de aprendizaje en el aula. En su revisión teórica encuentra algunos vocablos, no siempre conciliables, que se han ido generando en el tiempo: «proceso», «método», «táctica», «procedimiento», «heurístico», «regla», «destreza», «algoritmo», «técnica», «habilidad», «operación», «estilo»; términos que convergen, se solapan y a menudo se intercambian en la literatura especializada. La confusión terminológica en torno a este nuevo vocabulario no es nueva y, en algunos casos, se refiere a ella con cierta resignación ante la dificultad de alcanzar cualquier consenso.

De las principales definiciones de estrategias, Montanero retoma al menos dos acepciones fundamentales. Por un lado, las estrategias constituyen, entre otras cosas: «secuencias de actividades» mentales dirigidas a un «propósito» de aprendizaje; «secuencias de procedimientos elegidas con el propósito de adquirir, almacenar o utilizar información» o «secuencia de procedimientos aplicables para lograr aprender». Por otro lado, ese carácter propositivo e intencional dota a las estrategias de algo más que un producto del comportamiento metacognitivo: logra hacer una distinción sutil de otras secuencias de operaciones mentales en el particular *modo de actuar*, que se refleja en la «utilización óptima de una serie de acciones para conseguir una meta» con base en una toma de decisiones en condiciones específicas, que implican un determinado nivel de representación mental.

Por lo anterior, y para enfrentar la ausencia de una definición formal sobre el término estrategia, Montanero identifica dos acepciones que le ayudan a caracterizar y a entender mejor los posibles significados y aplicaciones del término en el contexto de la enseñanza: El aspecto *sustantivo* y *adjetivo* del concepto de estrategia.

En su indagatoria parece haber encontrado una relación entre el concepto de estrategia con la «serialidad» del pensamiento, al igual que con su capacidad de autorregulación más o menos consiente. Esto lo lleva a una primera caracterización de estrategia no sólo por la representación detallada de una secuencia de acciones, sino también por la particular *cualidad* de dichas acciones. Es decir, piensa en una consideración «sustantiva» de la estrategia como un conjunto de operaciones ordenadas más o menos flexibles frente a una consideración «adjetiva», que son inherentes a determinadas formas de actuar. Es decir entre el término clásico de «estrategia» y el «comportamiento estratégico».

Como complemento a estas dos acepciones, una estrategia debe considerar, como características básicas, los siguientes aspectos: *serialidad*, *interactividad* y *funcionalidad*.

Primero, la estrategia cognitiva está íntimamente asociada a lo procedimental, lo cual caracteriza su naturaleza *serial* y *secuencial*. Con esto se tiene que una *estrategia* es en sí un tipo especial de procedimiento (vista como una primera acepción sustantiva del término) el cual puede ejecutarse de forma «mecánica» o conectando algunas acciones con otras de modo arbitrario o, de forma regulada, adaptándolas a las *condiciones*

particulares de la tarea en cada momento del proceso. Esto último, dice Montanero, constituye la característica esencial del procedimiento estratégico.

Segundo, la *interactividad* en la estrategia supone *tomar una serie de decisiones* en pleno proceso o acción en condiciones específicas, elemento considerado el núcleo de la «acepción adjetiva» del concepto de estrategia. Sin embargo, es riesgoso aún separar el concepto de procedimiento y el de estrategia. En este sentido, Montanero comenta que la «condicionalidad» de la estrategia no puede desligarse de su naturaleza procedimental, ya que ésta puede desarrollarse de forma estereotipada o con un sentido interactivo y recursivo. La interactividad implica tanto un conocimiento *declarativo* como *condicional*, que posibilite una planificación del objetivo como del modo de alcanzarlo en función de factores internos y externo a la propia tarea.

En relación a esta interactividad comentada, las estrategias tienen una importante función de *mediación y regulación de los procesos cognitivos*. Al actuar de esta forma definen el funcionamiento de los diferentes procesos cognitivos y de aprendizaje, razón por la cual los intentos de clasificar sustantivamente las estrategias ha partido de taxonomías sobre los diferentes procesos, como el criterio básico de acotar la sustancia cognitiva de dichas estrategias. Montanero señala que todo intento por clasificar estrategias (desde el enfoque «adjetivo»), debe de considerar algunos aspectos que pueden delimitar la frontera «adjetiva de lo estratégico». Dichos aspectos son los *grados de libertad* que afectan el margen de decisión que ofrece la tarea, el *nivel de profundidad* y, la *generalidad y especificidad*.

Los *grados de libertad* es una característica estratégica referida al margen de decisión que ofrezca una tarea, a mayor margen de decisión más necesario será tener una o más estrategias. En otras palabras, más rentable resultará la planificación de estrategias cuantas más vías posibles de solución tenga un problema.

La *profundidad* está en función del objetivo y del nivel de procesamiento de las operaciones mentales en la situación planteada. Es decir, un objetivo puede requerir diferentes grados de profundidad dependiendo del nivel de procesamiento que se desee alcanzar. Criticar un texto demandaría estrategias de procesamiento muy diferentes a las que se usarían para tratar de memorizarlo (Montanero, 2001:354).

La *especialización* hace referencia a que cuanto más específico sea el contexto de aplicación de un procedimiento, mayor posibilidades tendrá de especializarse, de automatizarse y de «tecnificarse» en el dominio de herramientas instrumentales. La

dimensión de generalidad o especialización estratégica nos permite, a su vez, establecer dos grupos de estrategias cognitivas íntimamente relacionados:

1. *Estrategias básicas*, constituidas por un conjunto de acciones mentales de adquisición y transformación mental de la información, susceptibles de aplicarse a cualquier tarea cuyo objeto sea optimizar la capacidad de atención, representación, categorización, razonamiento o el control metacognitivo del sujeto.
2. *Estrategias específicas*, que, aun compartiendo los mismos objetivos y acciones cognitivas de las anteriores, poseen un mayor grado de especialización respecto a los conocimientos previos de los que se vale, así como de los contenidos y tareas concretas sobre los que se aplica. No se trata de procedimientos esencialmente distintos, sino de diferentes niveles de análisis de las operaciones mentales que se realizan en función de la especialización de la tarea. La máxima especialización se adquiriría al desarrollar un aprendizaje técnico donde se incorporan y automatizan habilidades e instrumentos con objetivos más específicos.

Resumiendo, cada uno de estos tres criterios, nos permiten clasificar *ad hoc* un procedimiento estratégico, desde el punto de vista de las posibilidades de solución de la tarea, de los objetivos del sujeto o del nivel de aprendizaje de las operaciones mentales implicadas. Un procedimiento con alto grado de participación de estos tres criterios a la vez, será considerado típicamente más estratégicos que otros, y más posibilidades se tendrá de encontrar una posible solución a la tarea en cuestión.

La naturaleza multidimensional de «lo estratégico», desde una acepción adjetiva, recae en que la naturaleza estratégica de un procedimiento no depende sólo de la secuencia de acciones que la componen, ni de sus características internas o apriorísticas; depende también del contexto y su aplicación a una tarea determinada. Por ejemplo y, muy particularmente en el ámbito de la instrucción, esta afirmación sufre un cambio en el concepto de estrategia que incide más en la importancia de «especificar» si el sujeto está ejecutando un procedimiento determinado de una manera más o menos “estratégica”, que en dirimir si lo que hace el sujeto es o no una estrategia *per sé*.

Con lo anterior, podemos pensar que la falta o poca participación de alguno de los criterios ya citados: *grados de libertad*, *nivel de profundidad* y la *generalidad* y *especificidad*, en el momento de solucionar algún problema, se convierten en preconcepciones o sesgos sobre la enseñanza de estrategias que pueden clasificarse

como distorsiones que afectan la acepción sustantiva o adjetiva de la estrategia. Una de estas preconcepciones «sustantivistas» está vinculada a la falta de grados de libertad en los procedimientos estratégicos, y es el caso extremo de algunos docentes que reducen la aplicación de una estrategia determinada a un mero «truco» o a la «aplicación de una receta» que marca una secuencia de acciones que llevan mecánicamente a un fin.

Esta algoritmización, focalizada en la enseñanza de secuencias de acciones, deja de lado la práctica en la toma de decisiones por parte del estudiante que caracteriza la regulación estratégica. Buena parte del fracaso en la enseñanza de técnicas de estudio de textos o en la resolución de problemas matemáticos o físicos, tiene su origen en esta interpretación, la cual se manifiesta cuando a un problema ya “resuelto” en clase se le cambian algunas de sus variables o condiciones fundamentales, y al solicitarle al estudiante que lo “resuelva”, éste no sabe qué decisión o acción tomar, lo que hace fracasar la actividad.

Al respecto, cabe recordar que Brousseau lanza una crítica en el sentido de que el estudiante está ausente en todo el proceso de ejecución. Éste solamente está esperando que se le enseñe, que el profesor haga evidente todos los conceptos, las definiciones, los algoritmos para resolver problemas etc. No existe para el estudiante una significación conceptual del problema ni del proceso¹⁴. La parte heurística y las intenciones del profesor son una amalgama que no se pueden separar (Barrantes, 2006).

Quizás quepa aquí la reflexión de Fiol (2004, 172), citado en Sánchez (2013), de que «vivimos en una cultura que antepone los productos a los procesos¹⁵». En nuestra cultura intentamos controlar casi todo: comida, tiempo, trabajo..., y posiblemente sea esta la razón de que en clases de matemáticas trabajamos casi siempre con problemas ya resueltos con el objetivo de controlar casi todas las estrategias y procedimientos de resolución que aparezcan. Olvidamos que la creatividad no se puede controlar; si inhibimos el pensamiento creativo así también la posibilidad de crear e innovar resoluciones que pueden llegar a sorprendernos.

En relación al término algoritmo¹⁶, Eduardo Zarate (2000, 17) define como algoritmo «al procedimiento que, estructurado bajo ciertas reglas preestablecidas, nos

¹⁴ Esto tiene relación con el efecto «Topaze» y el efecto «Jordain» que experimenta un docente en clase respecto a la respuesta y comportamiento de los estudiantes frente a un problema.

¹⁵ Entenderemos que los *productos* son aprender el algoritmo *per sé*, más que entender su significación.

¹⁶ Quizá del lat. tardío **algobarismus*, y este abrev. del ár. clás. *ḥisābu lġubār* 'cálculo mediante cifras arábicas' (RAE)

lleva, paso a paso, de manera un tanto mecánica, a la solución de un problema». En aritmética podemos hablar de un algoritmo para cada operación. En álgebra, se tiene el algoritmo de la división de polinomios. En computación, donde existen una gran variedad de lenguajes de programación, se deben crear una enorme cantidad de algoritmos para realizar tareas muy específicas.

En este sentido pensamos que una estrategia para resolver un problema se convierte en algoritmo cuando en el proceso de ejecución no se tomará ninguna decisión en el camino fuera de las ya consideradas. Es decir, en el algoritmo se programan todas las decisiones necesarias que aseguren una respuesta satisfactoria al problema, independientemente del valor de las variables involucradas. Es aquí donde los grados de libertad están ya especificados y acotados, y la mediación y regulación no tienen razón de ser.

Hacemos mención que uno de los elementos intrínsecos de una estrategia es el término «*táctica*», el cual se define como «*las acciones que se ejecutan concretamente para llevar a cabo el o los procedimientos de acuerdo al plan estratégico*¹⁷». Las tácticas identifican y definen a la vez a una estrategia. Un ejemplo está en el ajedrez, donde el enroque (los movimientos del rey y la torre en una sola jugada) se identifica como una táctica de defensa. Otro ejemplo está en la milicia, donde acciones en conjunto como cortar el agua y las comunicaciones contrarias es la táctica que identifica a la estrategia del cerco.

Por último, y para el resto del trabajo de investigación, tomaremos como definición de estrategia la de Montanero (2001, 347) «*la utilización óptima de una serie de acciones que conducen a la consecución de una meta, gracias a una toma de decisiones en condiciones específicas, que implican un determinado nivel de representación mental*».

¹⁷ Estrategia y táctica. Cuaderno N° 11 de la segunda serie de Cuadernos de Educación Popular: ¿Cómo luchar por el socialismo?, realizado por Marta Harnecker con la colaboración de Gabriela Uribe, durante el gobierno de la Unidad Popular en Chile. Publicado en: Chile, Editora Nacional Quimantú, 1973.

3.2 Análisis de las tácticas y estrategias utilizadas en cada juego

En esta sección mostraremos las estrategias identificadas y concebidas por cada estudiante al interactuar con cada uno de los cuatro juegos propuestos, con el fin de analizar y caracterizar la habilidad de percepción geométrica a la luz de la definición de estrategia y sus acepciones. Definimos el *perfil de tácticas*¹⁸ como el conjunto de tácticas que cada jugador utilizó al interactuar en cada uno de los juegos propuestos.

A continuación se mostrarán los análisis realizados en cada juego para cada estudiante cuyas explicaciones se apoyarán en términos de las estrategias para estudiar la habilidad de percepción geométrica.

3.2.1 Juego el Kataminó.

Los datos obtenidos en el Kataminó se muestran en el cuadro 3.1 donde se registra el nombre del estudiante, los retos aplicados y una observación general del comportamiento del estudiante. Al final del cuadro se muestran las distintas tácticas identificadas en cada participante (fila). En cada reto (columna) se anotan las estrategias (identificadas por un paréntesis) donde se indican las tácticas utilizadas y el orden en que se ejecutaron durante la realización del reto. Esto ayudará al análisis del tipo de estrategias y su relación con la percepción geométrica.

El asterisco (*) en el nombre del jugador indica que terminó satisfactoriamente los cuatro retos planteados. El resto sólo completó los tres primeros.

¹⁸ Término tomado de la “teoría de juegos”

KATAMINÓ						
No.	Estudiante	Reto_1 3 Piezas	Reto_2 4 Piezas	Reto_3 5 Piezas	Reto_4 6 Piezas	Observaciones
1	Alma	(1,3)	(1,6,4)	(1,6,7,5,4,3)	-	Consumió los 30 min. en el 3° reto. No inicia el 4° nivel. Repite constantemente la táctica 7, e intenta colocar piezas en lugares pequeños. Su percepción geométrica no le ayuda a decidir qué pieza puede acoplarse convenientemente.
2	Ana	(1,3)	(1,3,2,3)	(1,3)	(1,3)	Movimientos lentos. Analiza mentalmente qué pieza seleccionar. Sólo coloca cuando no está segura de ajustar la pieza.
3	Araceli*	(1,3)	(1,3)	(1,3)	(1,3,5)	Coloca piezas sobre la mesa y de ahí selecciona. Usa sólo una mano.
4	Daniel*	(1,3)	(1,3)	(1,3)	(1,3)	Analiza pieza y espacio. Se concentra en el espacio y ve que pieza puede colocar. Le gusta reacomodar más que quitar y poner.
5	Diana*	(1,3)	(1,3)	(1,5,3)	(1,3),(4,3)	Hay asombro al terminar un reto. Ve el tablero y mantiene las piezas en las manos sin verlas. No analiza qué pieza poner porque las toma al azar de su mano
6	Jeremías	(1,3)	(1,3)	(1,3)	(1,3)	Pone y quita piezas muy rápido. Se detiene a veces y analiza que colocar y dónde. Repite varias veces la estrategia 3 desde el inicio
7	Jorge	(1,3)	(2,3,2,3,2)	(2,1,3)	(1,3,2,3)	Termina el 2° nivel fuera del tablero. El 3° dentro. Es pausado pero analiza algunas piezas y su posible lugar. Tiende a salirse del tablero muy seguido
8	Josué	(2,3)	(2,4,3)	(1,3)	(1,3)	Dispone las piezas a un lado y otro del tablero, y no se ve que analice las piezas sueltas antes de usarlas; las toma sin un análisis previo y las va colocando en el tablero.
9	Marcos	(2,3)	(2,3)	(2,4,3,4,2,3)	(1,3)	Marcos es pausado y quita y pone piezas preocupado porque ensamblen, pero no le preocupa que tipo de pieza tiene en mano respecto al espacio a llenar
Tácticas						
Táctica_1	Acopla los pentaminós dentro del tablero					
Táctica_2	Acopla los pentaminós fuera del tablero					
Táctica_3	Coloca una pieza y añade piezas para completar el ensamble					
Táctica_4	Coloca dos piezas juntas a la vez y añade piezas formando bloques uniformes					
Táctica_5	Coloca piezas en forma inclinada y añade más					
Táctica_6	Coloca dos piezas separadas y llena el espacio formando bloques uniformes					
Táctica_7	Coloca piezas dejando uno o dos cuadrados vacíos					

Cuadro 3.1

3 El concepto de estrategia 60

En la muestra se observan al menos siete diferentes tácticas. Cada una de ellas, combinadas, forma una estrategia. Por ejemplo (1,3) significará una estrategia compuesta por las tácticas 1 y 3. Cada estudiante ha mostrado un *perfil de estrategias* personal para cada reto, y al mismo tiempo una para todo el juego. El combinar un perfil de estrategias, el número de intentos, los tiempos invertidos en cada reto y la definición de percepción geométrica, podemos deducir, en un primer análisis, cómo se manifestó la percepción geométrica en cada estudiante y cómo fue utilizada. En un segundo análisis podemos ver para cada alumno qué juego le requirió más de su habilidad de percepción geométrica en relación a las exigencias geométricas particulares de cada juego. Para ello se diseñó el siguiente cuadro 3.2 con las variables: Intentos, tiempo y perfil de estrategia, para un análisis comparativo por estudiante y por reto.

3 El concepto de estrategia 61

JUEGO DE KATAMINÓ														
No.	Nombre	Tiempo Total	Reto 1			Reto 2			Reto 3			Reto 4		
			Intentos	Tiempo	Perfil de Estrategia	Intentos	Tiempo	Perfil de Estrategia	Intentos	Tiempo	Perfil de Estrategia	Intentos	Tiempo	Perfil de Estrategia
1	Alma	26:20	1	00:09	1,3	3	00:48	1,4	53	24:47	1,4,5,4	-	-	-
2	Ana	37:50	2	00:26	1,3	17	9:55	1,3,2,3	3	1:27	1,4	24	24:45	1,3
3	Araceli*	20:08	1	00:03	1,3	3	00:49	1,3	15	03:31	1,3	32	15:01	1,3,5
4	Daniel*	34:00	1	00:27	1,3	33	11:10	1,3	11	5:16	1,3	38	18:00	1,3
5	Diana*	37:15	1	00:32	1,3	30	9:48	1,3	36	15:36	1,5,3	25	11:00	1,3,4,3
6	Jeremías	32:01	1	00:17	1,3	11	2:11	1,3	27	8:03	1,3	28	19:22	1,3
7	Jorge	50:23	1	00:12	1,3	28	6:27	2,3,2,3,2	93	26:40	2,1,3	61	16:13	1,3,2,3
8	Josué	41:35	1	00:22	2,3	38	14:10	2,4,3	17	10:11	1,3	24	16:10	1,3
9	Marcos	27:41	1	00:14	2,3	4	1:12	2,3	46	18:08	2,4,3,4,2,3	23	8:35	1,3

Cuadro 3.2

Observaciones:

- 1.- La columna «Tiempo total» se refiere al tiempo transcurrido desde que toma la primera pieza hasta que deja el juego.
- 2.- Los asteriscos en los nombres indica que terminaron bien los cuatro retos.
- 3.- La suma de los tiempos de las columnas «Tiempo» en cada reto no corresponderán al Tiempo total.
- 4.- En el perfil de tácticas se muestra con qué táctica inicio (primer número), los cambios de táctica que hizo y con cuál terminó.

Análisis de cada reto (columnas)

Para todos los participantes de la muestra el primer reto (tres piezas) se concluyó de manera inmediata invirtiendo sólo 30 seg y utilizando una estrategia, la (1,3). Concluimos con esto que la percepción geométrica aplicada a la forma de las piezas ayudó a encontrar de forma inmediata la configuración correcta para el espacio disponible. Esta homogeneidad en tiempos y modos de actuar no permite analizar aspectos intrínsecos de la percepción geométrica, que sí resaltarían, por el contrario, en su heterogeneidad. De este modo, el primer nivel no resultó un reto para el estudiante ni tampoco para su percepción geométrica, ya que las habilidades exigidas por el juego (ver pág. 23) no se manifestaron

Según Montanero (2003, 4), el nivel de procesamiento de las operaciones mentales, la profundidad, es bajo, en donde existen sólo dos formas de colocar las tres piezas, los grados de libertad. Esta simplicidad imposibilita una tecnificación de la estrategia utilizada.

En el segundo reto (cuatro piezas) seis miembros de la muestra usan sólo una estrategia de forma repetitiva, es decir inician dentro del tablero (táctica 1) y colocan una pieza a la vez hasta llenar el tablero (táctica 3). Dicha estrategia es la más inmediata o «lógica» para todos. Una variante de esta estrategia es hacer el armado fuera del tablero (táctica 2). Esto es significativo ya que al salirse del tablero le exige a la percepción geométrica del estudiante estar más atento a dos aspectos de la actividad: el acoplamiento de las piezas y la forma que debe ocupar dicho ensamble. En este sentido Jorge fue el único que inicia y termina los retos 1 y 2 fuera del tablero. Marcos también la aplica ocasionalmente pero sin éxito algún reto.

En este nivel existen 4 formas distintas de seleccionar (al azar) la primera pieza, y aproximadamente 32 maneras diferentes de colocarla en el tablero; en ese momento no hay manera de elegir una pieza o su posición, que refleje una ventaja competitiva. Para el segundo movimiento existen 3 formas distintas de seleccionar la segunda pieza, pero dependiendo del contorno y del espacio sobrante, se requerirá de una “pequeña” reflexión —que pocos hicieron— para que la percepción geométrica (y no el azar) intervenga y trabaje en el armado del bloque. En este punto se reducen el espacio, las piezas y por supuesto los grados de libertad y la profundidad, ya que en este último el objetivo de armar el bloque está más cerca, pero sin certeza, conforme se colocan más fichas.

El tercer reto utiliza cinco piezas y como consecuencia es un reto más complejo; esto concuerda con lo que Montanero (2001) explica, que al haber más grados de libertad, es necesario (o pueden) incorporarse más estrategias al perfil de estrategias particular. En este caso, se modifica la táctica 3 y se inicia con dos piezas (táctica 4); se incursiona en colocar piezas inclinadas (táctica 5) y también el intentar (Jorge) construir el ensamble fuera del tablero (táctica 2). Sólo un estudiante no logró terminar este reto por excederse en el tiempo asignado, por ello no inicia el siguiente nivel.

El reto cuatro tiene una sexta pieza más por ensamblar, lo que supone en principio una complejidad mayor. Esto se comprueba al haber seis estudiantes que no lo pudieron concluir satisfactoriamente. Sin embargo, tres de ellos usan sólo las tácticas 1 y 3, suficientes para trabajar y terminar los retos planteados. Al respecto dice Brousseau (2007:21): «en general, una estrategia se adopta rechazando intuitivamente o racionalmente una estrategia anterior. Una estrategia nueva se somete a la experiencia y puede ser rechazada o aceptada según la apreciación que tenga el estudiante de su eficacia». Esto nos hace suponer que una estrategia a seguir fue hacer un uso eficiente de la estrategia (1,3) hasta agotarla, evitando incursionar en otras diferentes. Lo anterior, afirmamos, es una muestra palpable de una mejor habilidad en el uso de la percepción geométrica al usar una sola estrategia.

Análisis por estudiante (fila)

Damos algunas aclaraciones respecto algunos términos usados en el Kataminó.

- Llamaremos un *acoplamiento* a aquel donde las piezas se colocan juntas, una tras otra, sin espacios vacíos entre ellos, formando un bloque.
- Llamaremos *intento ideal* a aquel donde se logran acoplar N piezas en el tablero en exactamente N acoplamientos (sin reacomodos). Es decir, acoplar una pieza a la vez en el orden correcto, sin reacomodos, hasta agotar todas las piezas.
- Consideramos que la táctica *ensayo y error* no está compuesta de movimientos puramente al zar, sino con ciertas cualidades reflexivas que requieren más tiempo al probar todas las opciones posibles.

Alma y el kataminó

Nivel_1 (3 piezas). Alma inicia colocando bien dos de las tres piezas. Sin embargo, en una acción inconsciente el entrevistador proporcionó una pieza equivocada. Esto descuido involuntario ayudó a detectar un evento interesante: Alma intentó poner la tercera pieza (la errónea) en el espacio disponible sin que se percatara de que éste y la pieza en su mano eran incompatibles, y aun así insistía en tratar de colocarla. Al darse cuenta el entrevistador — de que la pieza no correspondía a la situación planteada—, le cambió la pieza y con ésta llena el espacio vacío.

Nivel_2 (4 piezas)

1°_Intento.- Coloca 3 piezas acopladas pero al querer poner la cuarta, insiste en tratar de acoplarla, dándole vuelta a la pieza de varias maneras sin éxito.

2°_Intento.- Vuelve a acoplar dos piezas e intenta poner la tercera sin éxito.

3°_Intento.- Inicia colocando dos piezas acopladas, añade la tercera correctamente y queda un espacio con la forma de la última pieza, reconoce la correspondencia entre el espacio disponible y la forma de las piezas sobrante, y la coloca en el tablero (Intento ideal).

Nivel_3 (5 piezas). Alma realiza 53 intentos en 27 minutos sin lograr acoplar correctamente las cinco piezas. Se observa que en todos sus intentos coloca las piezas sin percatarse de que quedan espacios pequeños (de uno o dos cuadrados) imposibles de llenar con las piezas del pentaminó: no obstante sigue colocando piezas tratando de acoplarlas. Otro evento destacable es que en el minuto 7:30, empieza a formar bloques uniformes en posición inclinada, es decir, el pentaminó no concuerda con los cuadrados del tablero. Su percepción geométrica no le ayuda a darse cuenta de estos hechos y por ello pone piezas al azar, sin un orden

Nivel_4 (6 piezas).- No inicia este nivel debido a que el tiempo para este juego se ha excedido de 30 min., además se le nota desalentada por no haber logrado resolver el nivel anterior.

Ana y el kataminó

1° Nivel (3 piezas). Ana comienza colocando una pieza en el tablero, pone la segunda en una posición incorrecta (la pieza se sale del tablero) y la reacomoda correctamente, y la tercer la acopla bien y terminando el nivel.

2° Nivel (4 piezas). Se observa una actitud cuidadosa al colocar cada pieza, evita crear espacios vacíos y reacomoda las piezas en otra posición cuando no entra en el espacio disponible. En cada intento fallido no coloca físicamente la última pieza sobre el tablero porque su percepción geométrica le permite darse cuenta de que no es posible, entonces inicia un nuevo intento.

En el minuto ocho, cambia de táctica tratando de acoplar las piezas fuera del tablero, forma bloques uniformes. Ante esto, le pido que trate de hacer su armado dentro del tablero, rompiendo con la condición asumida de dejar que los estudiantes tomaran las decisiones que creyeran convenientes. No se volvió a repetir este tipo de intervenciones con los demás entrevistados.

Se observa un tiempo corto de reflexión para decidir qué pieza colocar. Esto la lleva a que pueda terminar el armado en el minuto 11:43 con 17 intentos.

3° nivel (5 piezas). Inicia con una pieza al azar, la segunda la coloca pegada sólo por un cuadrado, dejando un gran espacio entre ellas. Empieza a llenar el centro sin éxito. Saca todas las piezas y vuelve a empezar colocando una pieza al azar, la segunda acoplada a la anterior, pone la tercera y la cuarta sin más intentos físicos formado un espacio en forma de escalera, la misma que se corresponde a la forma de la quinta piezas. Termina el nivel. Resuelve en 2 minutos con tres intentos.

4° nivel (6 piezas). Forma un bloque de tres piezas fuera del tablero para después trasladarlo a éste, coloca más piezas para llenar el tablero. Casi en todos sus intentos quita todas las piezas y vuelve a comenzar con una nueva o repetida pieza, procurando armar bloques uniformes sin dejar huecos imposibles de llenar. Cuando aparecen espacios pequeños reacomoda las piezas y vuelve a intentarlo. Sin embargo, el tiempo se le agota y se muestra molesta por no poder armar el bloque adecuado, el entrevistador interrumpe el juego y da por terminada la actividad con el pentaminó.

Diana y el kataminó

1° Nivel (3 piezas). Cuando el entrevistador le dice en que consiste el juego y le da las tres piezas, hace una expresión un asombro, como si no creyera que pudiera hacerse. Coloca pieza por pieza sin problemas (intento ideal).

2° Nivel (4 piezas). Diana toma las piezas y las mantiene en la mano. No analiza previamente la forma de la pieza y mucho menos si existe la posibilidad de ensamblarla correctamente, porque cada vez toma una pieza de sus manos y sin verla trata de colocarla en el tablero, si logra ensamblarla toma otra pieza de sus manos y trata de colocarla. Cuando se da cuenta que el ensamblaje no permite llenar el espacio del tablero, quita todas las piezas y vuelve a intentarlo sin mirar las piezas que sostiene en sus manos.

En el minuto 3:40 pone una pieza pequeña justo en el centro y trata de poner otras a su alrededor sin éxito. En el minuto 4:50 tiene dos piezas acopladas y solo faltan dos que con un pequeño giro de una de ellas quedarían en su lugar, pero su percepción geométrica no le ayuda a verlo y deshace todo el bloque.

En el minuto 4:40 coloca tres piezas quedando el espacio de un cuadrado, ella misma dice: “quedaría un hueco”, y reacomoda la pieza en cuestión.

En el minuto 6 expresa: “no deben quedar huecos o piezas sueltas”, y en el minuto 7 vuelve a comentar: “Sí se tiene que poder, ¿verdad?” dudando ante sus intentos fallidos.

En el minuto 9:35 repite la técnica de la pieza en el centro sin éxito.

En el minuto 10:40 toma un respiro y vuelve a intentarlo, colocando cada pieza en el lugar correcto sin ensayos, uno a la vez hasta lograrlo (intento ideal). Su armado difiere al de sus compañeros en que ella ubica las piezas en otro orden en el tablero. Se sorprende por haberlo logrado y manifiesta gusto por ello.

Su técnica de tener todas las piezas en la mano, anula la percepción de la forma de las piezas respecto del espacio disponible, es decir, una vez tomada una pieza ve si puede colocarla y si no cambia de pieza (sin verla). Arma el bloque por ensayo y error.

3° Nivel (5 piezas). Inicia sus armados como antes, y prosigue hasta que en el minuto 26:30 comienza un intento, colocando cada pieza una a la vez y logra llenar el espacio. Vuelve a sorprenderse de su éxito.

4° Nivel (6 piezas). Inicia colocando una pieza y añade otras para formar bloques uniformes tratando de no dejar espacios pequeños. Sin embargo, en el minuto 31:40 coloca una pieza (la escalera) de manera inclinada y pegada a un borde del tablero, parece no percibir la ubicación errónea de la pieza (los pentaminós no tienen formas triangulares), y añade dos piezas más. Quita todo y hace otro intento. En este nivel deja unas piezas en la mesa y otras las mantiene en la mano. En el minuto 38:15 logra ensamblar todas las piezas.

Josué y el kataminó

1° Nivel (3 piezas). Toma dos piezas y las ensambla fuera del tablero, las traslada a éste colocando ahí la tercera pieza.

2° Nivel (4 piezas). Inicia tomando dos y tres piezas tratando de armar el bloque fuera del tablero, al no lograrlo, las coloca en el tablero quedando a vista el espacio que falta por cubrir.. En el minuto 7 toma una pieza y cuenta con el dedo cuantos cuadritos lo forman. Pone todas las piezas en la mesa y de ahí selecciona la pieza a colocar. En el minuto 16:10 coloca una pieza a la vez y termina logrando un intento ideal.

3° Nivel (5 piezas). Se observa que al poner algunas piezas se desespera muy rápidamente porque no intenta reacomodarlas para ver si esto le sirve para llenar el espacio, tampoco intenta acomodar algunas de las piezas restantes y opta mejor por deshacer lo hecho y comenzar nuevamente. Se muestra poco reflexivo sobre la relación entre el espacio disponible y la forma de las piezas, pareciera que su éxito depende del buen “tino” que tenga al seleccionar las primeras piezas. En el minuto 26:35 coloca cada pieza una a la vez logrando llenar el espacio (intento ideal)

4° Nivel (6 piezas). Tiene el mismo comportamiento que en los niveles anteriores. Sin embargo, al minuto 43 el entrevistador da por terminado el juego con el kataminó.

Marcos y el kataminó

1° Nivel (3 piezas). Toma las tres piezas y arma el bloque fuera del tablero para después trasladarlo a éste.

2° Nivel (4 piezas). Toma las 4 piezas e intenta armar el bloque en la mesa sin éxito, aun así traslada las piezas al tablero, y reacomoda algunas de ellas. Después quita tres piezas y las vuelve a reacomodar de tal forma que en el minuto 2:31 logra armar el bloque (tardó 1:30 minutos). Su construcción es igual a la de sus compañeros excepto con una rotación de 90°.

3° Nivel (5 piezas). En este nivel toma todas las piezas en la mano y de ahí las selecciona. Esta técnica le hace perder la percepción de la forma de la pieza respecto al espacio por cubrir. En el minuto 10:35 saca las piezas del tablero e intenta armar el bloque sobre la mesa sin éxito, y nuevamente regresa al tablero. En el minuto 16 una vez más saca las piezas del tablero pero no logra armar el bloque. Regresa al tablero, y en el minuto 20 logra armar el bloque reacomodando las dos piezas faltantes.

4° Nivel (6 piezas). Marcos sigue las mismas tácticas hechas anteriormente. Coloca y reacomoda varias veces en un mismo intento para ver que pieza queda mejor. Al igual que Josué, también cuenta por cuántos cuadros está formado un pentaminó. En algunas ocasiones coloca las piezas quedándole espacios de un cuadrado que rápidamente corrige. Cada pieza que quita la deja en su mano y vuelve a colocarla sin un análisis previo de su forma. El tiempo se acaba y se da por terminado el juego del Kataminó.

Daniel y el kataminó

1° Nivel (3 piezas). Toma una pieza y la coloca en el tablero, luego la voltea. Toma la segunda pieza, la acopla y la tercera entra de manera inmediata.

2° Nivel (4 piezas). Inicia viendo las piezas en la mesa y selecciona al azar una de ellas. De forma pausada va colocando y reacomodando cada ficha. Se le nota un análisis de las piezas y del espacio, aunque sus intentos sean fallidos. Sus armados, en ocasiones, dejan espacios de un cuadrado que deshace hasta que ve que no puede colocar la última pieza. Interpretamos que la percepción geométrica no le ayuda a anticiparse de que es

imposible seguir al producirse un espacio de un cuadrado. Aun así, en el minuto 12 termina su bloque.

3° Nivel (5 piezas). Inicia colocando dos piezas separadas en el tablero e intenta llenar el espacio. Reacomoda y junta las piezas y se mantiene así en todos sus intentos. En el minuto 17:15 inicia un nuevo intento y pone las primeras piezas y las va reacomodando cuidadosamente (analizando las piezas y el espacio) hasta que termina el bloque. Tarda 5 minutos aproximadamente.

4° Nivel (6 piezas). Este nivel comienza como el anterior, coloca una ficha y sigue poniendo otras piezas. Cuida de no tener espacios pequeños vacíos y practica el poner y reacomodar piezas constantemente. En el minuto 33 se le comenta que tiene 5 minutos más para que termine el juego. Al minuto 34:53 logra hacer el bloque. Es el segundo de 6 entrevistados en lograr armar este nivel.

Jeremías y el kataminó

1° Nivel (3 piezas). Después de indicarle las reglas del juego, toma unos segundos para observar las piezas en la mesa. Inmediatamente toma una y la coloca, luego la voltea. Toma la segunda pieza, la acopla y la tercera la pone inmediatamente.

2° Nivel (4 piezas). Coloca las primeras piezas. Pone y reacomoda. Las piezas las tiene en la mano pero a diferencia de Diana, las analiza minuciosamente (dándole vueltas) para decidir cuál puede colocar. En el minuto 3:42 logra armar el bloque solicitado. Se observa que evita los espacios vacíos.

3° Nivel (5 piezas). Inicia con una pieza y coloca las demás tratando de armar un bloque. Las piezas las mantiene en sus manos. Sin embargo, puede analizarlas en relación al espacio disponible de manera más cuidadosa que sus compañeros que también las sostenían en sus manos. Este proceso sigue hasta el minuto 13:50 cuando logra armar el bloque.

4° Nivel (6 piezas). Jeremías sigue con las mismas tácticas de construcción de pequeños bloques pero no le alcanza el tiempo para terminar este nivel.

Jorge y el kataminó

1° Nivel (3 piezas). Jorge toma las piezas que están en la mesa y logra armar el bloque que llena el espacio en el tablero.

2° Nivel (4 piezas). Toma con una mano las piezas y empieza por acoplarlas fuera del tablero. Después toma las piezas y las pone en el tablero. Tres o cuatro movimientos más y se sale del tablero e intenta hacer el bloque y vuelve a regresar al tablero. Intenta otros movimientos y vuelve a salirse del tablero. Realiza algunos acomodados más y logra armar un bloque. Su percepción geométrica le dice que es el ensamble correcto e inmediatamente traslada el bloque al tablero corroborando su hipótesis.

3° Nivel (5 piezas). Continúa con su estrategia de intentar armar el bloque fuera del tablero, acoplando y reacomodando piezas. Logra formar algunos rectángulos uniformes con 4 piezas. Se ve que analiza la forma de las piezas para reacomodarlas, pero le queda un cuadrado sin llenar o un cuadrado fuera (como chipote). Al minuto 31:40 regresa al tablero después de estar 24 minutos fuera del éste. Tres minutos después (34:20) llena el recuadro.

4° Nivel (6 piezas). Inicia sus ensambles dentro del tablero colocando sus piezas frente a él. Sale temporalmente del tablero y regresa nuevamente. Dos o tres intentos más y vuelve a salirse del tablero. Logra formar bloques uniformes con un cuadrado fuera. Algo interesante es que las piezas las maneja en el plano, es decir, no las rota, simplemente las arrastra con un dedo e intenta acoplarlas. Al regresar al tablero tiene forzosamente que tomar una pieza y ya en sus manos las rotar y las reacomoda. Se le acaba el tiempo y no logra completar el bloque. Sin embargo, comenta que “se quedó picado” con el juego.

Araceli y el kataminó

1° Nivel (3 piezas). Toma una pieza a la vez y en un intento ideal llena el espacio.

2° Nivel (4 piezas). Al empezar a acoplar las primeras tres piezas, se da cuenta de que quedan espacios de un cuadrado, y dice: “No queda, creo que es al revés”. En el siguiente intento falla, y en un segundo de reflexión reacomoda una pieza, la “T”, quedando lugar para la cuarta ficha. Tarda menos de un minuto.

3° Nivel (5 piezas). Inicia colocando unas piezas y se da el tiempo para analizar lo construido y reacomodar algunas piezas. En el minuto 5 comienza un intento, en 5 movimientos —y sin reacomodos— acopla las 5 piezas para formar el bloque.

4 Nivel (6 piezas). Inicia sacando una pieza del bloque anterior y reacomoda la nueva pieza. Al fallar, saca tres piezas y vuelve a acomodarlas. Al fallar, saca todas las piezas e inicia con una nueva pieza y sigue acoplando otras. Falla y vuelve a repetir el mismo procedimiento. Cuando construye un bloque y falla (9:27), hace algo distinto, toma una de las piezas faltantes y la coloca encima del bloque como viendo qué piezas puede sustituir o que otro espacio puede llenar. Sigue con los mismos movimientos y reacomodos de tal forma que no queden huecos, cuando ocurren, inmediatamente los cambia. En el minuto 19 inicia el último intento, coloca cinco piezas, al ver que no puede acoplar la sexta, reflexiona un poco y reacomoda las dos últimas, y la sexta pieza entra sin problemas. Tarda 15 minutos en completar el bloque.

Observaciones del Kataminó

Una constante en todos los estudiantes es la inercia de colocar inicialmente algunas piezas en forma vertical. Piezas como la “L” o la “T” son colocadas tal como se escriben. Les toma un corto tiempo para ubicarlas en forma horizontal.

Todos los integrantes de la muestra lograron armar el primer nivel con intentos ideales. Algunos estudiantes lograron terminar el nivel 2 con intentos ideales. En los niveles 3 y 4, al haber más piezas, el intento ideal aparece cuando el estudiante analiza cómo acomodar correctamente las últimas 2 o 3 piezas antes de ponerlas.

Jorge es el único que logra completar dos niveles con la táctica de acoplar las piezas fuera del tablero, lo que le confiere una ventaja perceptiva respecto a sus compañeros. Sin embargo, una desventaja con esta táctica es que, en ocasiones, no hace movimientos de rotación de las piezas en tercera dimensión, sólo las traslada (arrastra). Estas rotaciones sólo las logra hacer cuando trabaja en el tablero, donde debe tomar las piezas con los dedos y ahí rotarlas a su gusto.

Estrategias en el Kataminó

- 1.- La estrategia usada por cada estudiante en cada nuevo intento fue acoplar las piezas lo mejor posible pegadas a un borde del tablero de tal forma que pudieran añadirse más pentaminós en función de los nuevos bordes que formaban las piezas anteriores, con la precaución de no dejar huecos en el interior del ensamble o en algún borde del tablero. Hubo dos variantes: la primera era colocar dos piezas separadas y llenar el centro; otra colocar piezas al centro y llenar el contorno (Josué)
- 2.- Una de las estrategias observadas, fue que para llegar a su objetivo, era necesario tener las piezas en la mesa y observar su forma para seleccionar la pieza más adecuada en función del espacio disponible en el tablero. Esta estrategia fue observada en Araceli, y en algunas ocasiones en Jorge y Daniel.
- 3.- Una estrategia más y que se observó en la mayoría de los estudiantes (sólo en ciertos momentos), fue colocar las piezas al azar, sin reflexionar si la forma del espacio disponible en el tablero eran los adecuados a la pieza que tenía en mano (que no veían). Alma es un ejemplo que ilustra esta manera de proceder.
- 4.- Notamos que existe otro tipo de estrategia localizada en un nivel superior a las anteriores, y que se observó en los que terminaron el cuarto reto, y es el de usar sólo la estrategia (1,3), con los reacomodos pertinentes, al grado de alcanzar un manejo óptimo (la especialización de Montanero) en todos los niveles del juego. Esto muestra que la percepción geométrica ayuda significativamente no sólo a la resolución de una situación sino al buen manejo de las tácticas y por ende de las estrategias.

Análisis de la percepción geométrica por estudiante.

Para hacer un balance del desempeño de cada estudiante respecto a su percepción geométrica mostrada en el juego Kataminó, se toman en cuenta las habilidades geométricas que exige el juego (capítulo 2, pág. 23), así como los resultados obtenidos en tiempo empleado para resolver, número de intentos y las observaciones de del comportamiento general de los estudiantes en cada nivel del juego.

No se tiene definida aun una «escala métrica» para medir la percepción geométrica. La razón de esto estriba en que hay muchas variables en juego que dificulta la objetividad de dicha medición. Por lo que se decidió analizar los datos y colocar a los estudiantes en un “orden” de desempeño, desde el más bajo al más alto pasando por niveles intermedios. Con esto no se puede decir que tan separados están unos de otros,

pero sí quién está atrás o delante de cada uno de ellos en el juego del Kataminó. Este orden puede cambiar para otro juego didáctico porque las habilidades geométricas requeridas son otras, y por ende la percepción geométrica de un estudiante que presumiblemente pueda ser baja en un juego, puede mantenerse o mejorar en otro.

De las consideraciones anteriores se puede señalar el siguiente orden de menor a mayor de los desempeños observados en los estudiantes de la muestra en el juego del kataminó.

- 1.- Alma tiene un bajo desempeño respecto a todos sus compañeros. Por varias razones, entre ellas: se tardó aproximadamente 30 minutos en un nivel, no realizó el cuarto nivel, en su estrategia para armar deja espacios que no se pueden llenar con las piezas disponibles y no obstante insiste en ponerlas donde es imposible que quepan, mostrando así falta de percepción geométrica.
- 2.- Josué tiene la característica de que al concluir un intento fallido, opta por quitar todas las piezas y volver a comenzar desde cero, esto hace que invierta mucho tiempo, pero lo más importante es que no se ve que reflexione para el reacomodo de las piezas. No completa el 4° nivel.
- 3.- Marcos tiene un comportamiento similar al de Josué con la salvedad de que en cada intento reacomoda las piezas, dentro y fuera del tablero. Esto, muestra un cierto manejo de la percepción geométrica porque tratar de hacer el menor número de movimientos; sin embargo una desventaja que tienen su manera de proceder es toma las piezas en la mano y no las observa. No completa el 4° nivel.
- 4.- Ana tiene movimientos lentos pero reflexivos, nota que no coloca las pieza porque sabe que es imposible ponerlas. Esto es una muestra del buen uso de su percepción geométrica en la construcción, además de que reduce tiempos de ejecución. No completa el 4° nivel.
- 5.- Jeremías tiene un comportamiento muy similar al de Ana, pero con movimientos más rápidos en las piezas. No completa el 4° nivel.
- 6.- Jorge tiene un comportamiento diferente a sus pares porque fue el único en trabajar la mayor parte del tiempo fuera del tablero, completando de este modo los dos primeros niveles. Esto le exige más concentración en el armado de los bloques. No completa el 4° nivel.

- 7.- Diana duda de que las piezas puedan ensamblarse para cubrir el espacio del tablero y aun así logra armar los cuatro niveles. Al igual que Marcos toma las piezas en la mano sin observar su forma lo que resta eficacia, pero se considera que tuvo un mejor desempeño que los compañeros, mencionados anteriormente, porque ella sí completó el 4° Nivel.
- 8.- La actuación de Daniel es interesante en el sentido de que en el primer nivel comienza con un ritmo lento, muy pausado, pero al pasar de un nivel a otro va adquiriendo más velocidad, más habilidad en el manejo de las piezas, como si esa lentitud del principio fuera los primeros aprendizajes de tácticas que puede aplicar en los niveles subsecuentes. No deshace todo en cada intento sino que reacomoda sus piezas, analiza su forma y ve en qué otro lugar puede colocarla o en qué otra posición. Esto último muestra una percepción geométrica en acción, que correlaciona la forma de las piezas con los posibles espacios que pueden formarse en el tablero
- 9.- Araceli tiene un buen desempeño, rápido, pocos movimientos, reflexión en cada intento y en cada nivel, logrando en menos tiempo completar los 4 niveles. Pone las piezas sobre la mesa lo cual facilita su selección, reacomoda piezas constantemente para logra armar el bloque deseado.

Conclusiones del Kataminó

El kataminó, como juego, retó de forma importante a los nueve integrantes de la muestra, al grado de que sólo tres de ellos pudieron resolver los cuatro retos propuestos. Les exigió tiempo, paciencia y estrategia en sus propios desempeños. Sin embargo y, particularmente en el cuarto reto, al elevarse el grado de dificultad con una pieza más, se esperaba también que los tiempos subieran, pero en un estudiante los tiempos de ejecución se reducen, con la característica adicional de resolver el reto.

Naturalmente hubo tiempos excesivos que dieron pie a pensar que el tiempo no fue el suficiente para que el estudiante pudiera coordinar bien sus movimientos y sus estrategias para lograr sus objetivos. Por lo que nos inclinamos a pensar que la percepción geométrica debe de ejercitarse aún más para logra una discriminación y aprendizaje de movimientos y acciones más eficientes y útiles al resolver el reto planteado. Sin embargo, en los tiempos cortos y con éxito, se tiene una disyuntiva: ¿Jugó más la percepción geométrica en la elección (consciente o no) de las piezas, ensambles y estrategias utilizadas en el reto, o pesó más el azar al crear un situación atípica donde la

posición de una pieza ayudó definitivamente en la resolución del reto? Una manera de responder a esto es viendo no sólo el comportamiento local de un nivel, sino observar el comportamiento global a lo largo de los diferentes niveles que el juego impone. Si existe un patrón constante en el comportamiento, habrá una mayor probabilidad de que la percepción geométrica jugara un papel importante en la solución de una situación más que los movimientos al azar.

Toda la muestra, en promedio utilizó, al menos una vez, una estrategia: lograr ensambles de tal forma que se evite crear huecos imposibles de llenar, es decir, construir bloques uniformes. Dicha estrategia tiene como tácticas construir el ensamble dentro del tablero y añadir una pieza a la vez y/o reacomodándolas. Esta sería la estrategia básica dentro del perfil de estrategias de cada participante.

3.2.2 Juego Mueve Uno

Este juego, más que los otros, parece a nuestro juicio el más sencillo y el que ofreció menos obstáculos a los estudiantes de la muestra. Todos terminaron los treinta retos planteados, con tiempos en general cortos, algunos muy cortos, y solo en un caso resultó ser muy largo.

A cada estudiante se le mostraron 30 eventos, cada uno de estos compuesto por tres cartas, cada una con una figura diferente dibujada con cinco líneas (palitos). Había que transformar la figura inicial a uno de los dibujos del primer evento reacomodando sólo un palito (Figuras 2.4, 2.5 y 2.6). Una vez hecha la primera transformación se mostraba el segundo evento donde había que volver a transformar la nueva figura a uno de los tres nuevos dibujos, y así sucesivamente hasta terminar los 30 eventos. Al terminar el juego cada estudiante realizaba 30 transformaciones.

En este juego entran en acción dos habilidades. La primera es la traslación y rotación angular de figuras de manera mental¹⁹ con el objetivo de empatar o empalmar dos figuras. La segunda el uso de la discriminación visual, habilidad que permite distinguir similitudes y diferencias entre objetos, dibujos o imágenes mentales entre sí.

Las acciones que observamos en los estudiantes fueron: ver la figura hecha con los palitos y compararla varias veces con los dibujos de las cartas, una figura a la vez²⁰.

¹⁹ Apoyado en los resultados de rotación de objetos de Cooper & Shepard.

²⁰ Esta dirección se determinó al observar los movimientos oculares de los estudiantes en el momento de comparar las figuras.

En dicha acción se realizaba el “empalme visual” de figuras seguida de una discriminación visual, lo que les permitía o no identificar las partes en las figuras que no concordaban. Con base en esto, tomaban la decisión de cuál palito mover y lo reacomodaban. Esto es semejante a lo que se hace al poner manualmente dos dibujos empalmados a contra luz y corroborar la igualdad o no de ellos viendo en qué partes concuerdan y en cuáles no.

Se observó que los estudiantes, para transformar las figuras, utilizaron como única estrategia comparar dos figuras en cada momento, ya sea mental o físicamente para después discriminarlas visualmente. La percepción geométrica engloba ambas actividades en el entendido de que se requiere de una habilidad geométrica de manipulación para realizar la traslación mental de la pieza en el lugar y orientación requerida para después hacer la discriminación y saber cuál de los modelos se puede reproducir. Las tácticas usadas para dicha comparación se describen a continuación, cabe aclarar que los únicos movimientos involucrados fueron girar las cartas (física o mentalmente) y mover los palitos. El orden de aparición del estudiante refleja su desempeño de menos a más.

La discriminación visual es una habilidad viso-perceptiva que permite detectar, diferenciar y seleccionar estímulos visuales, basándose en los atributos que les caracterizan. Además, contribuye a la segmentación de la figura-fondo, las relaciones viso-espaciales, el cierre visual, la memoria y la lógica visual. De esta manera, la persona puede manipular objetos y estímulos visuales de su entorno natural.

En el cuadro 3.3 se muestran las siete tácticas mostradas por los estudiantes de la muestra.

MUEVE UNO							
No.	Estudiante	Uso de estrategias					
		1	2	3	4	5	6
1	Alma	x	x	x	x	x	x(3)
2	Ana	x	x	x		x	x(4)
3	Araceli	x	x			x	x(3)
4	Josué	x	x	x		x	x(2)
5	Daniel	x				x	
6	Diana	x	x	x	x	x	x(3)
7	Jeremías	x	x			x	x(3)
8	Jorge	x				x	x(4)
9	Marcos	x	x	x	x	x	x(8)
Perfil de tácticas							
Táctica_1	Sin mover la carta arma la figura reacomodando un palito.						
Táctica_2	Mueve la carta sólo uno o dos cuarto de vuelta para armar la figura.						
Táctica_3	Mueve la carta tres o más cuartos de vuelta para armar la figura.						
Táctica_4	Mueve la carta al lado de la figura para ver que sí son idénticas. (Táctica)						
Táctica_5	Mueve uno o más palitos sin éxito.						
Táctica_6	Inclina la cabeza simulando el movimiento de un cuarto de vuelta de una carta						
Táctica_7	Cuenta línea (palito) por línea (palito) para ver la concordancia entre las figuras.						

Cuadro 3.3

Nota

La marca $x(n)$, con “n” un número natural, indica el número de veces que los estudiantes inclinaron la cabeza para empatar ambas figuras.

Análisis por estrategia (columna)

Todos los estudiantes al menos en una ocasión realizan un evento fácilmente; es decir, al ver la figura y los tres dibujos, identifican inmediatamente la figura y qué palito deben reacomodar para hacer la transformación.

Siete de los estudiantes utilizaron la táctica 2 de rotar una de las cartas (y en ocasiones las tres) uno o dos cuartos de vuelta para detectar la diferencia. Esto muestra que la percepción geométrica requirió como recurso de apoyo un empate físico de la carta versus la figura, una ligera modificación a la Estrategia 1. Una variante más se detectó en los estudiantes Jorge y Araceli, donde no movieron la carta físicamente si no que inclinaron ligeramente su cabeza para empatar figura y dibujo. Tal acción (táctica) la consideramos y contabilizamos igual que mover la carta físicamente un cuarto de vuelta.

Cinco estudiantes recurrieron a la táctica 3 de rotar al menos una carta desde una media vuelta hasta la vuelta completa una o varias veces, mostrando con esto que su percepción geométrica no ayudaba a empatar, en el corto tiempo, figura y dibujo incluso en la misma orientación. Esto sugiere que las habilidades mentales de traslación y rotación angular de objetos, necesarios para la discriminación geométrica, requieren de una mayor estimulación.

Tres de los estudiantes utilizaron la táctica 4, es decir, empatar (trasladar y rotar) físicamente la carta junto a la figura para asegurarse de que las dos figuras fueran idénticas no sólo en la forma sino además en su orientación. Esto muestra que se requieren apoyos extras para ayudar a la percepción geométrica a decidir qué pieza hay que reacomodar de tal suerte que empate a uno de los dibujos.

En al menos un evento los estudiantes utilizaron la táctica 6, pensando que con ella armaban la figura. En tal situación los mismos estudiantes se dieron cuenta del error y en otros el entrevistador tuvo que advertirles que la figura formada no correspondía a la figura seleccionada, ya que en ocasiones habían formado la imagen espejo del dibujo elegido.

Ocho estudiantes movieron la cabeza en vez de rotar la carta un cuarto de vuelta. Sólo Daniel no utilizó esta táctica.

Por último Marcos tuvo un comportamiento notable. Es el único que usa la táctica 7, es decir, cuenta manualmente los palitos del dibujo con respecto a la figura, dándole una mayor ventaja que sus pares.

Análisis por estudiante (fila)

Alma y el mueve uno

Alma resuelve los 2 primeros eventos, en el tercero se tarda 30 minutos en concluir la transformación, donde mueve 10 veces los palitos, rota varias veces las 3 cartas, y aun colocando la única carta correcta al lado de la figura en la misma orientación, no logra ver que son iguales.

El entrevistador le dio algunas indicaciones que le permitieran darse cuenta de la similitud. Por ejemplo: el entrevistador dice: selecciona una carta y ponla a lado de la figura, ¿qué vez de concordancia? Ella contesta: “no hay concordancia”. El entrevistador comenta: róta la un cuarto de vuelta y vuelve a revisar la concordancia. Ella contesta: “no la hay”. Al terminar con dicha carta, el entrevistador toma otra carta y la invita hacer lo mismo, hasta que logra encontrar la similitud. Esto fue necesario porque se estaba tomando más tiempo del que se había programado.

En uno de los eventos mueve un palito sin poder decir qué carta estaba mirando, regresa a la posición anterior.

En otro evento pone la carta correcta a lado de la figura y decide mover otro palito.

Conforme avanza el juego, se muestra un poco más hábil, tardándose menos en algunos eventos.

Alma tuvo un bajo desempeño en este juego, su percepción geométrica no le ayuda para comparar la figura con los dibujos y por tanto tiene dificultad para discriminarlos.

Diana y el mueve uno

Después de indicarle la regla del juego, realiza bien los primeros eventos, sin embargo, en el quinto se tarda mucho, mueve varias veces las cartas y no logra detectar qué palito mover, incluso levanta la única carta correcta y se le queda viendo unos segundos. Ella pregunta: ¿puedo mover cualquier palito?, el entrevistador contesta: si, el que tu gustes pero la figura debe ser exactamente igual. Unos minutos después, vuelve a preguntar:

¿cuántas veces puedo mover los palitos?, el entrevistador responde: tú tomas un palito y lo colocas en otra posición de tal forma que la figura sea igual a una de las tres. El entrevistador prosigue: analiza una carta, la que tú quieras. Ella tiene la carta correcta, y dice: ésta podría ser pero no queda”. El entrevistador le dice ¿por qué?, se queda callada, y el entrevistador le pregunta: ¿qué es lo que tienen en común, en que se parecen?, ella responde: en la posición. El entrevistador pregunta: ¿en qué más?, en la posición y un palito hacia acá. El entrevistador sugiere: quita un palito, ahora ¿en que se parecen? Ella se queda pensando y responde: en la misma posición. El entrevistador nota que la figura de palitos y las tres cartas están muy juntas y mueve las cartas hacia arriba dejando más espacio, en ese momento ella coloca el quinto palito en la posición correcta, sorprendiéndose por lo fácil era la solución.

En otros eventos mueva la cabeza varias veces para checar si son iguales las figuras.

Diana tiene un desempeño muy semejante al de Alma, también se toma tiempos largos para resolver un evento. Su percepción geométrica no le ayuda aún en situaciones de discriminación, ya que la comparación debe hacerla después de rotar la carta manualmente.

Ana y el mueve uno

Ana tiene un mejor desempeño que Alma. Sin embargo, en algunos eventos tuvo la necesidad de mover las cartas, inclinar la cabeza y, en el penúltimo evento, requerir ayuda porque no podía decidir qué figura armar. El entrevistador le sugirió seleccionar una carta al azar y compararla con la figura. Al darle la vuelta detectó la diferencia y terminó el evento.

Otro detalle interesante fue que en varios eventos movía primero un palito correctamente y luego movía la carta confirmando su respuesta.

Josué y el mueve uno

Josué inicia bien los primeros dos eventos, pero en el tercero se tardar más tiempo porque no sabía (y el entrevistador no lo especificó) que podía mover las tarjetas. En ese momento, toma la primera carta y le da vueltas, toma la segunda y vuelve a rotarla sin éxito, al tomar la tercera en su segunda rotación se da cuenta de qué palito tiene que reacomodar. En los subsecuentes eventos sigue con las mismas tácticas y logra de forma rápida hacer todos los eventos con algunos minutos de reflexión en algunos de éstos.

El desempeño de Josué es mucho mejor que el de Alma, Ana y Diana mostrando en este juego que sus habilidades de percepción geométrica relacionadas con la traslación, rotación y discriminación le ayudan significativamente en la solución de cada evento.

Jeremías y el mueve uno

Se le explican las reglas del juego e inicia bien los dos primeros eventos. En el tercero se tarda un poco y mueve un palito, pero el entrevistador le pregunta si son idénticas, él se da cuenta que no es así y regresa el palito, pero tarda un poco más de tiempo en volver a mover el palito de forma correcta (sin rotar ninguna carta). En un evento posterior realiza una construcción espejo, donde el entrevistador le pregunta si es igual, el rota la carta dos veces un cuarto de vuelta y se da cuenta que no es igual.

Jesús tiene un buen desempeño al igual que Daniel. Sin embargo, él requiere de hacer algunas rotaciones de cartas para verificar la forma y orientación de sus transformaciones. Su percepción geométrica le ayuda en la mayoría de los casos excepto en un par de ocasiones donde las construcciones espejos (reflexiones) lo engañan por un momento.

Marcos y el mueve uno

Una vez explicadas las reglas del juego, Marcos comienza moviendo el primer palito transformado la figura inicial al de la primera carta pero la figura obtenida está rotada 180° respecto al dibujo. Sin embargo, regresa a su lugar el palito utilizado y selecciona otro palito haciendo la misma figura pero ahora ésta está en la misma orientación que el de la carta. Sigue sus transformaciones rotando alguna de las cartas. Sin embargo en éstos y en los siguientes eventos se nota una táctica nueva: Al hacer una transformación cuenta los palitos con sus dedos e incluso hace algunos ademanes mostrando que sigue la forma y orientación de la figura, de esta manera se da cuenta si el dibujo es similar a uno de las cartas.

Marcos muestra una percepción geométrica que le permite darse cuenta de la semejanza contando los componentes que forman a las figuras y siguiendo el “recorrido” de las mismas. Un recurso que sólo él utiliza.

Araceli y el mueve uno

Después de explicarle las reglas comienza sus transformaciones sucesivas sin ningún contratiempo. En su actuación realiza una reflexión (una figura espejo), rota físicamente una vez una carta, pero hace varios movimientos con la cabeza simulando una rotación de un cuarto de vuelta. Mueve sólo una vez un palito erróneamente y ella misma se corrige.

Jorge y el mueve uno

Se le explican las reglas y comienza sus transformaciones. Jorge no realiza ninguna rotación física de las cartas pero si hace varios movimientos de cabeza que equivalen a una rotación de un cuarto de vuelta. Tiene sólo dos movimientos de palitos erróneos que corrige al hacerle la observación.

La percepción geométrica ayuda sin problemas a las transformaciones que Jorge hace con los palitos, que se equipara al de Daniel.

Daniel y el mueve uno

A Daniel se le explican las reglas del juego y comienza bien los dos primeros eventos. En el tercero toma un momento de reflexión y logra armar la figura sin mover ninguna carta. Es de mencionar que sus antecesores invirtieron mucho tiempo y movimientos en este evento.

Daniel inicia un evento con una construcción en espejo, el entrevistador le indica que no es la figura seleccionada. Tarda un poco más de tiempo y al fin lo logra, dibujando una sonrisa por la sencillez del movimiento requerido.

Se observa que nunca rota una carta y sólo hace dos movimientos de cabeza para hacer el empate de las figuras. Su percepción geométrica le ayuda rápidamente a realizar las tareas referentes a la rotación, traslación y discriminación de figuras en corto tiempo.

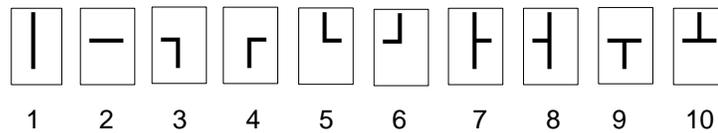
Conclusiones del Mueve uno

El Juego Mueve uno fue resuelto por todos los estudiantes, con la excepción de Alma, quien requirió de ayuda del entrevistador para darse cuenta de qué movimientos había que hacer. Del mismo modo, hubo varias advertencias cuando algunos estudiantes armaban una figura en espejo. Sin embargo, dicho juego indica en términos generales

que hay un manejo aceptable de las habilidades de traslación y rotación de objetos al igual que las habilidades de discriminación geométrica. Esto nos muestra que el juego en general no ofreció grandes dificultades para los estudiantes de la muestra y que las diversas tácticas mostradas son indicios de la falta de desarrollo en aspectos como catalogar y seleccionar objetos semejantes.

3.2.3 Juego del Laberinto

El Laberinto es un juego que consiste en un tablero dividido en 16 cuadrados iguales junto a 15 piezas cuadradas que lo cubren, exceptuando un espacio que sirve para poder moverlas. Cada pieza tiene dibujado partes de un camino. Es decir, líneas horizontales y verticales, codos o “L” en cuatro posiciones y caminos en forma de “T” también en cuatro posiciones. Estas piezas se representan y numeran de la siguiente forma:



De estas piezas se repiten tres del tipo 1, dos del tipo 2, dos del tipo 3 y dos del tipo 10 dando un total de 15 piezas. El objetivo del juego consiste en usar estas piezas para construir, a partir de una configuración inicial, un camino continuo entre dos puntos laterales del tablero previamente seleccionados, sin importar cuántas piezas se utilicen (Figura 3.1).

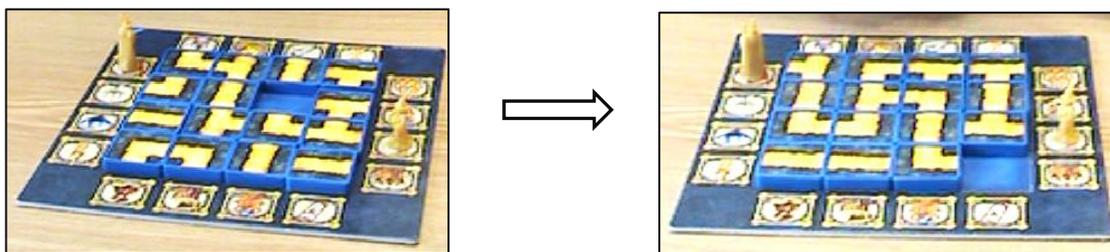
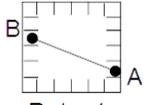
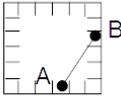
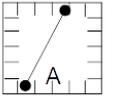
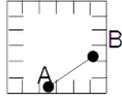


Figura 3.1

Las piezas deben desplazarse en el tablero únicamente de manera horizontal o vertical, y no pueden sacarse del tablero para rotarse ni trasladarse a otra posición. Como no hay límite en el número de piezas utilizadas para construir un camino, aumenta el número de posibilidades diferentes para construir uno. Esto coincide con lo que

Montanero (2001) llama los grados de libertad que impone el juego y como consecuencia la necesidad de incorporar una o varias tácticas para construir un camino.

El cuadro 3.4 muestra las tácticas utilizadas por cada participante y las estrategias que de éstas se generan.

LABERINTO					
No.	Estudiante	 Reto_1 Camino largo	 Reto_2 Camino corto	 Reto_3 Camino largo	 Reto_4 Camino corto
1	Alma	1,1,3,1,1	1	1	1
2	Ana	3	1,3	1	1
3	Araceli	3	1	4	1
4	Josué	1,1,5	1	1	1
5	Daniel	1,3	1	1	1
6	Diana	1	1	1	1
7	Jeremías	1,3,1	1	3	1
8	Jorge	1	1	1	1
9	Marcos	1	1,1	1	1
Perfil de tácticas					
Táctica_1	Inicia desde un extremo y sin interrupción llega al otro extremo con éxito				
Táctica_2	Inicia desde un extremo sin éxito. Cambia e Inicia un nuevo camino desde el otro extremo modificando al primero y termina con éxito.				
Táctica_3	Inicia un camino desde un extremo, construye otro camino desde el otro extremo y une ambos caminos en su «centro».				
Táctica_4	Coloca la pieza de inicio y agrupa las piezas horizontales en una línea superior y las verticales abajo de ésta. Construye su camino tomando las piezas previamente agrupadas en la parte superior				
Táctica_5	Coloca piezas desde el centro formando un camino hacia los puntos				

Cuadro 3.4

Análisis por reto (columna)

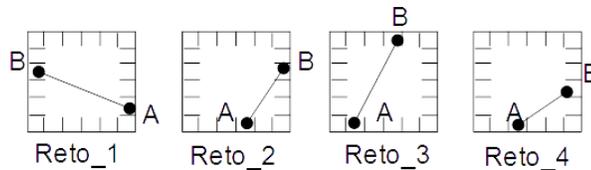
Los caminos cortos 2 y 4 tienen como táctica principal la 1, teniendo dos variaciones: el uso de la táctica 2 y 3 en un par de ocasiones. Sin embargo, en los caminos largos, se observa que hay un mayor uso de la estrategia 3, una de la 4, y una vez la estrategia 5. Ésta última la consideramos la más eficiente en el sentido de que agrupar primero las piezas antes de seleccionarlas y colocarlas en donde se requiera, esto tiene como ventaja apartar dos espacios, el de las fichas y el del camino a construir; también el no deshacer el camino construido para sacar una pieza requerida desde un lugar más alejado o atrapada detrás del camino a construir.

Análisis por Estudiantes (renglón)

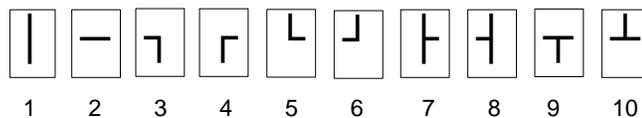
Como referente para el análisis se muestran gráficamente los cuatro diagramas con los puntos que hay que unir con los caminos construidos por cada participante, así como las piezas con las partes del camino. A cada estudiante se le presenta la misma configuración de inicio.

Una observación más. Las descripciones del movimiento y colocación de las piezas están descritas desde la posición del jugador y no del entrevistador que está frente a éste viendo el tablero al revés.

Alma y el laberinto



Tipo de piezas utilizadas



Reto_1.- Alma inicia moviendo una ficha y se da cuenta que ha construido un camino de 4 piezas de longitud en forma vertical desde el punto B. Le faltan 2 piezas para terminar y las que necesita, están una arriba y la otra abajo de su camino, “atrapadas”. Su atención se centra en las piezas inferiores y no alza la vista a las que tiene arriba. Sigue moviendo piezas y logra hacer un 2º camino al que sólo le falta la última pieza que debe ser una

línea horizontal, y en su lugar tiene una tipo 5 o “codo”. La pieza faltante está arriba y la empieza a mover, pero en esa dinámica se construye, en la parte superior, un 3° camino horizontal que decide seguir. Mueve sus piezas y logra construir un camino desde el punto A hasta el B pero le falta una “L” para unirlos.



Esta pieza está a un lado pero no sabe cómo moverla sin destruir uno de los caminos. Mueve algunas piezas y destruye ambos caminos, por lo que vuelve a construir un 4° camino con origen en B muy diferente a los anteriores. Intenta acomodar las piezas útiles y vuelve a destruir el 4° camino. Utilizando las primeras piezas del camino anterior inicia su 5° camino, acomoda otras piezas y observa que necesita dos piezas para terminar. Se nota que quiere bajar una pieza que está a dos niveles arriba y en dicho intento coloca dos piezas que terminan el camino, pero ¡no se da cuenta! Al estar moviendo las piezas que originalmente estaba buscando observa que ya estaba construido el camino, terminado el primer reto, (camino de 6 piezas).

Alma crea cinco caminos: 4 con la táctica 1 y uno con la táctica 3, éstos sin éxitos. Para el último camino usa la táctica 1 con éxito.

Reto_2.- Con la configuración anterior inicia su camino desde B colocando las primeras 2 piezas. Busca la tercera y la coloca pero para ubicar la cuarta pieza le estorba una. Hace dos movimientos circulares y logra colocar la cuarta piezas, (camino de 4 piezas).

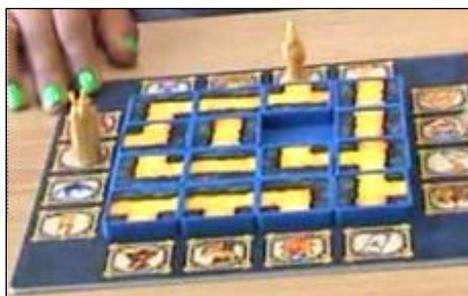


Reto_3.- En este reto se nota que tiene problemas al tratar de colocar las últimas piezas. Se observa nuevamente la dificultad que tiene para intercambiar la posición de dos piezas y en su intento deshace parte del camino hecho o todo. En uno de los intentos sólo tenía que trasladar tres piezas alrededor del final del camino para terminarlo, pero no lo notó. Esto hace pensar que su idea en mente no le permite ver las oportunidades que se le presentan durante el proceso de construcción.

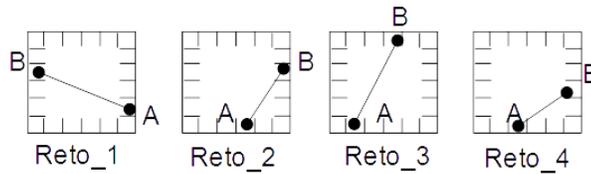


Reto_4.- Coloca las dos primeras piezas en el punto B y al hacer dos movimientos coloca la tercera pieza; luego cambia de opinión y reemplaza la primera pieza, una de las piezas que puede utilizar (línea en posición vertical) la localiza en la parte superior del tablero, la baja y en dicho movimiento coloca debajo de ésta otra pieza que puede terminar el camino, sin embargo, no la ve y baja la piezas hasta el sitio que había identificado, haciendo más movimientos.

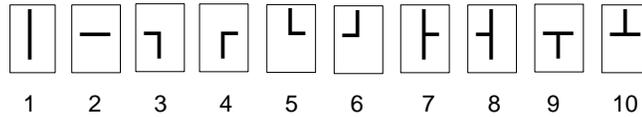
Alma tiene como estrategia iniciar en un extremo y terminar en el otro, pero al faltarle 1 o 2 piezas se da cuenta que éstas no están fácilmente disponibles, están alejadas entre sí en el tablero, por lo que debe reacomodar sus piezas deshaciendo lo ya construido, obligándola así a construir un nuevo camino. Se le dificulta el traslado de una pieza en una trayectoria circular, así como intercambiar de lugar dos piezas contiguas con ligeros movimientos. No prevé que algunas piezas pueden estar alejadas y construye con las piezas que están en ese momento cerca del camino sin importar que sirvan.



Ana y el laberinto



Tipo de piezas utilizadas



Reto_1.- Mueve una pieza junto al lado B y construye un camino tipo 3 con cuatro piezas. Sigue moviendo otras piezas pero del lado del punto A y logra construir otro camino hacia arriba de A. los extremos de éstos están muy separados y se ve que podrían unirse en el centro con dos caminos que tuvieran líneas horizontales (tipo 2, 9 o 10). Decide cambiar el primer camino desde B y logra construir un camino con 6 piezas pero el conector final hacia A (una pieza tipo 5 o 7) pero está a una pieza de distancia. Sigue moviendo y coloca las últimas piezas iniciando desde A y une los caminos por el centro, (seis piezas y 3.5 min).



Reto_2.- Inicia en el punto B porque hay una pieza tipo 4 iniciando el camino hacia abajo, conecta una de tipo 7 y otra del tipo 9. Sólo falta el último conector que está a tres piezas a su izquierda. Mueve las piezas haciendo el camino para colocar dicho conector y termina el reto (4 piezas, 18 seg.)



Reto_3.- Empieza a formar su camino iniciando por el extremo superior, el punto B, después de varios movimientos logra armar un camino uniendo al punto A en la parte inferior (al minuto y medio de iniciar) pero que ¡no ve!, porque sigue moviendo las piezas en la parte superior mentalmente visualizando un camino que su percepción geométrica está ocupada en construir, dejando de lado la percepción global del tablero y de lo que está haciendo.



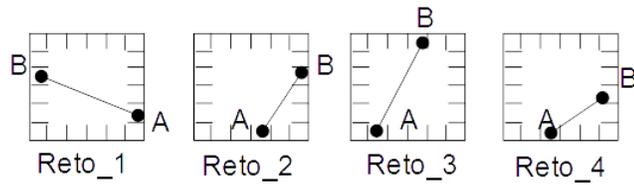
Deshace este camino y mueve varias veces algunas piezas, después vuelve a construir el camino que no pudo ver y al querer mover una pieza, se da cuenta que ya unió ambos puntos, terminado el reto, (6 piezas en 3 minutos).

Reto_4.- Inicia por el punto B y mueve 5 piezas construyendo un camino, que nuevamente no ve, no baja la mirada, la tiene en el centro del tablero.

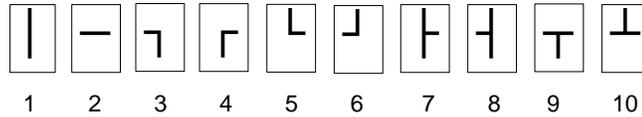


Sigue moviendo otras piezas quitando la que está en frente del punto A y vuelve a construir el mismo camino pero la pieza final cambiada y nuevamente ¡no logra verlo! Se nota que su mirada está arriba del tablero. Sigue moviendo piezas y reconstruye el primer camino que armó y ahí es donde se da cuenta que terminó el reto. (4 piezas, 1.5 min.). Ana toma su tiempo para analizar sus movimientos, se nota su análisis antes de mover. Traslada con soltura las piezas [mejor que Alma] pero a veces no logra ver el tablero completo, está concentrada en su primera idea de un camino y pierde la visión global del tablero.

Diana y el laberinto



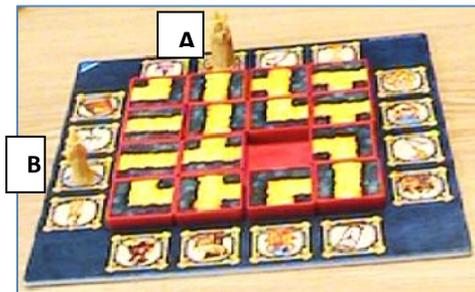
Tipo de piezas utilizadas



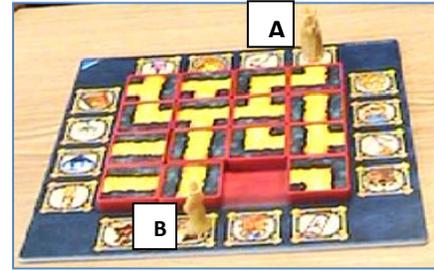
Reto_1.- Diana comienza moviendo una de las fichas iniciando un camino desde el punto B, sigue poniendo piezas pero queda atrapada, sin poder moverse, cuando le faltan dos piezas del tipo 2 para terminarlo. Ve hacia arriba e identifica las piezas que necesita, pero para moverlas debe deshacer parte de lo que lleva construido, por lo que cambia la pieza de inicio en B. Traslada desde una esquina la pieza requerida y al terminar comenta: “listo”, inmediatamente dice “ah no, no entra aquí” (refiriéndose a la pieza inicial). La pieza requerida está arriba y la traslada dándole vuelta por la derecha (en vez de bajarla) colocándola en su lugar.



Reto_2.- Su configuración le sugiere poner, como pieza inicial en el punto B, un camino horizontal del tipo 2, al hacerlo ve que están unidas dos líneas verticales del tipo 1 dirigidas hacia el punto A. Las baja y sólo falta colocar un conector del tipo 3, 8 o 9 que una el camino horizontal de B con los caminos verticales de A. Muy cerca del camino —a dos posiciones— está una pieza, un conector, del tipo 9 que necesita; hace tres movimientos para despejar el camino y coloca dicho conector terminando el camino. Se queda pensando unos instantes revisando el tablero hasta que dice “listo” y con su dedo recorre el camino, 4 piezas, para confirmarlo.



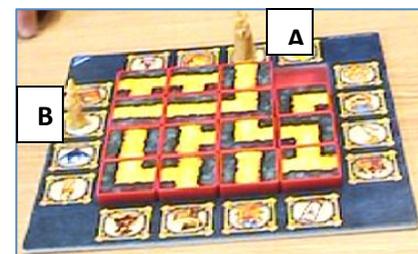
Reto_3.- Inicia el camino desde punto B hacia abajo con un “T” del tipo 7 y dos verticales tipo 1 y una “T” del tipo 8, formando una vertical que divide al tablero en dos partes. Sigue moviendo y su camino cambia de dirección con 4 piezas. Con su dedo recorre las piezas verificando que es continuo. Le faltan dos piezas para terminar. Sigue moviendo y construye un camino con dos piezas verticales (tipo 1) desde B y dos piezas tipo 10 desde A, pero está mal el conector que uniría a estos dos caminos, y dice: “listo”; el entrevistador pregunta: ¿cómo?, y dice: “pensé que iba a quedar así (indicando con su dedo un camino horizontal), pero no”. En este punto la percepción geométrica global del tablero está fuera de foco, es decir, sólo ve dos piezas tipo 1. La configuración del tablero se ve muy revuelto y tarda unos segundos en decidir qué debe mover.



Con los dos caminos verticales tipo 1 iniciales desde B logra hacer un camino donde le faltan dos piezas horizontales (tipo 2) que tiene arriba. Comienza una serie de movimientos circulares con dos columnas de piezas que van desde abajo hacia arriba dos veces sin poder colocar alguna, no logra identificarlas por la rapidez de sus movimientos. Al parar comenta “ya me tardé en éste”. Se da cuenta que no logra nada y deshace todo el camino y vuelve armar otro iniciando desde abajo, del punto A, y terminando con los dos caminos verticales iniciales del tipo 1 hacia B, y en unos segundos termina un camino de seis piezas.

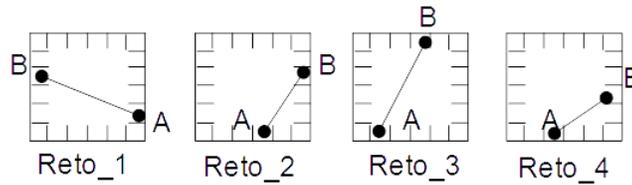
Reto_4.- En este reto empieza a colocar una pieza “T” del tipo 8 y dos piezas iguales y unidas tipo 10, con esto sólo falta colocar una pieza que una al punto B, pero no lo ve y sigue moviendo piezas de arriba. Esto indica que su percepción geométrica está ocupada en otra opción, y pierde de vista lo que arma en sus movimientos.

Sigue moviendo y construye un camino horizontal saliendo de B usando una piezas tipo 2 junto a una pieza tipo 9, con este camino le faltarían dos piezas para unirse con el punto A. Sigue moviendo sin una táctica específica y desconecta al punto B perdiendo los dos inicios del camino que tenía al principio.

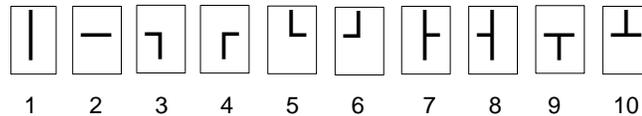


Quedando con un tablero «desordenado» para el entrevistador. Se queda pensando un momento y vuelve a construir un camino horizontal desde B usando dos piezas iguales tipo 2, y mueve un codo tipo 4 y un camino vertical tipo 1, completando un camino de cuatro piezas.

Josué y el laberinto



Tipo de piezas



utilizadas

Reto_1.- Empieza a mover piezas formando un camino con varias curvas desde el punto B hacia el punto A, pero la última pieza no conecta. La pieza adecuada está en la parte inferior del tablero pero no la ve. deshace el camino y vuelve a empezar, pero ahora inicia desde el punto A, faltándole la pieza final para conectar a B, que está a un lado pero no ve como intercambiarlas sin deshacer lo construido, al intentarlo deshace parte del camino hecho. En este punto no se ven movimientos tácticos porque se tarda varios minutos en reacomodar piezas donde se logran ver caminos de dos y tres piezas que después deshace. Logra armar un camino de cinco piezas desde B hacia A pero le faltan exactamente las dos piezas de cada extremo.

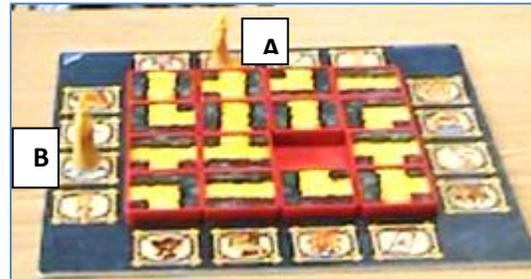
En su intento por poner un conector en A, una pieza tipo 5 o 7, hace movimientos de piezas y coloca una pieza tipo 4 (una reflexión horizontal del tipo 5), dándose cuenta en ese momento que no le sirve. Esto muestra que no se tiene la



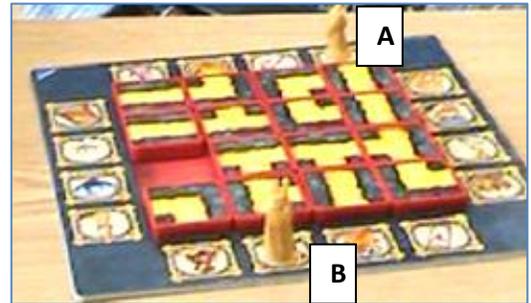
habilidad de trasladar ni rotar mentalmente una pieza para ver si es o no la correcta, ¡tiene que corroborarlo físicamente! Este error lo repite dos veces en este reto.

Después de lo anterior tiene la idea de colocar un conector en A del tipo 7, en su tarea mueve algunas piezas para acercarla y al mismo tiempo coloca sin problemas el conector tipo 10 en B. Hace un movimiento circular con tres piezas y coloca el último conector (tipo 7) en A, terminando el camino de seis piezas.

Reto_2.- Este reto lo completa en segundos ya que las piezas colocadas anteriormente están dispuestas de tal forma que sólo necesitó 5 movimientos para armar el camino en escuadra desde A hasta B. Él mismo se ríe de lo fácil que resultó hacerlo.

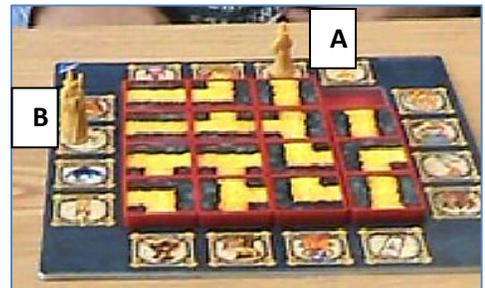


Reto_3.- Inicia moviendo piezas pero tarda varios minutos en poder colocar el primer conector (tipo 8) en frente del punto B. Sigue con sus movimientos pero se nota una tardanza en sólo poder intercambiar de lugar dos piezas juntas. En esos momentos su percepción geométrica no le ayuda a darse cuenta de cómo debe hacerlo, cómo hay que moverlas.

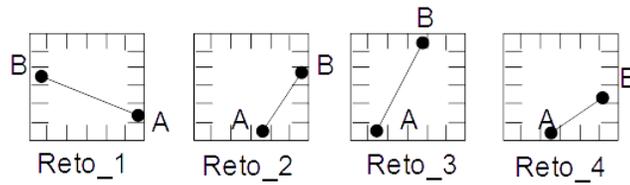


En sus movimientos logra armar, desde A, un camino de tres piezas con dos trayectos verticales (tipo 1) y otro tipo 7. Después se da cuenta que necesita dos piezas para unirla con la que ya existe en B, éstas piezas (dos del tipo 10) las une y automáticamente arma el camino de seis piezas.

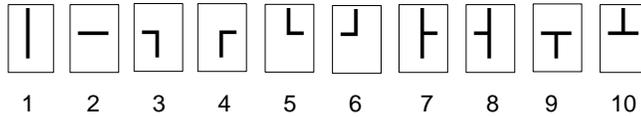
Reto_4.- Este reto ya tiene dos piezas unidas (tipo 1 y 9) frente al punto B coloca otra tipo 7 y le falta un conector con un camino vertical. Realiza movimientos circulares con tres piezas ordenándolas y conectando así al punto A.



Daniel y el laberinto



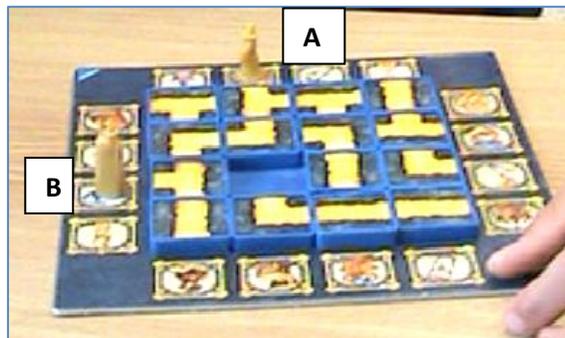
Tipo de piezas utilizadas



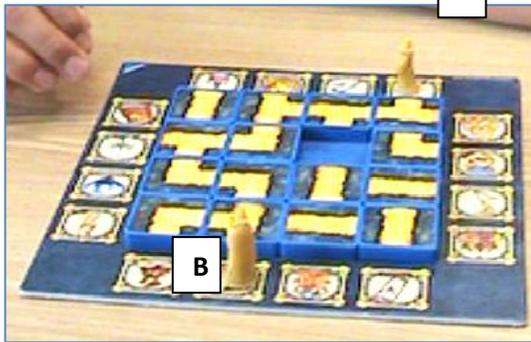
Reto_1.- Daniel comienza con precaución moviendo, inicialmente, 5 piezas y formando así dos caminos verticales paralelos desde B. Después mueve piezas sin ser, en principio, una continuación de lo ya construido. Se entretiene mucho moviendo cuatro fichas en círculo en la otra mitad del tablero sin un aparente beneficio más que —pensamos— en un análisis de cómo pueden moverse las piezas. Mueve sólo la mitad de las piezas, de la otra mitad (donde están los caminos verticales y paralelos) no mueve pieza alguna, como si no quisiera deshacerlos. Sigue moviendo y pasa la línea media vertical del tablero y desbarata uno de los caminos verticales. Empieza a acomodar las piezas desde A de tal modo que logra hacer un camino muy largo, de 10 piezas, que lo conecta con el otro camino vertical ya construido desde B. Es el camino más largo construido.



Reto_2.- Inicia recorriendo toda una hilera sobre el perímetro para colocar un conector tipo 7 frente al punto B, después une a éste dos codos tipo 3 y 4, cuya dirección baja al punto A. Sólo mueve un camino tipo 8 uniendo al punto A. Tarda 30 segundos.



Reto_3.- Empieza a mover las piezas del perímetro hacia su izquierda hasta colocar un conector tipo 9 frente al punto A. Esto le permite ver algunas piezas juntas formando

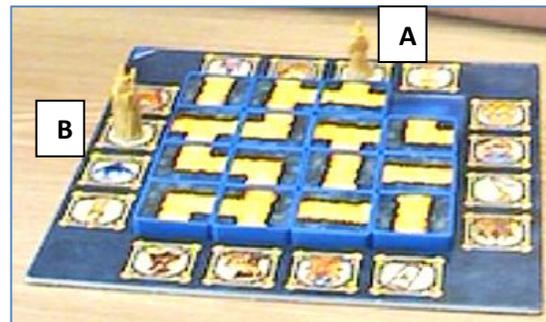


un camino que sube al punto B. Sin embargo, la última pieza es incorrecta y la que le sirve está al lado de ésta. Pero se nota en Daniel que no quiere deshacer el camino. Se arriesga moviendo dos piezas intermedias pero modifica su camino añadiendo una curva. Hace las conexiones de tal forma que el último conector del tipo 7

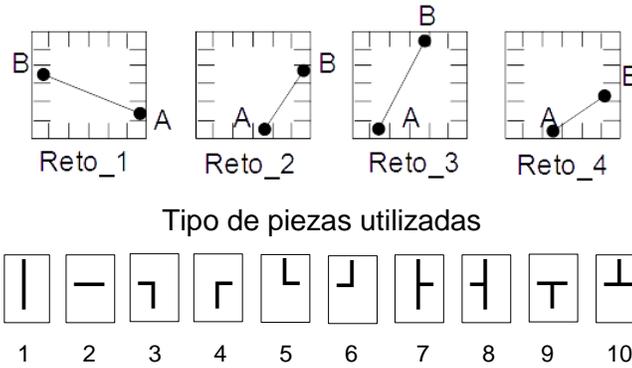
está frente al punto B, terminando el reto. Usa 8 piezas y tarda 2 minutos.

Reto_4.- Ve los dos puntos y del reto anterior ya está construido parte de un camino de B hacia A, excepto por la última pieza. La quita y recorre una pieza de al lado y el reto termina 10 segundos.

La percepción geométrica de Daniel le permite distinguir rápidamente las 2 o 3 piezas que forman un camino. La táctica que usa es la 1, iniciando en un punto y terminando en otro. Suponemos que los 9 minutos del reto 1 le ayudaron a darse cuenta del tipo de movimientos que podían hacerse. Dicho aprendizaje lo utiliza en sus construcciones posteriores. En los retos del 2 al 4, el acomodo de piezas anterior hace su trabajo más simple y rápido. Pero detectarlo fue tarea de la percepción geométrica.



Jeremías y el laberinto



Para iniciar le pido que coloque las piezas y en un minuto las acomoda.

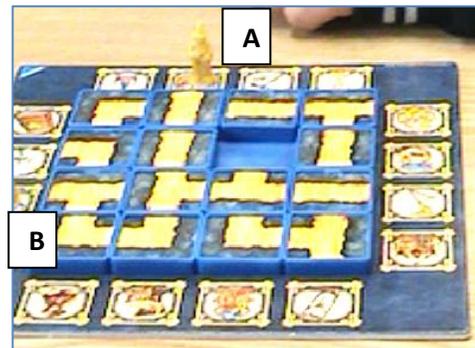
Reto_1.- Jeremías empieza a mover las piezas muy rápido, tanto que se le salen un poco del tablero. Después de hacer varios movimientos, hace una pregunta interesante: ¿el camino tiene que llevar todas las piezas?, el entrevistador responde: sólo se requiere un camino que conecte a los dos puntos.

Empieza a colocar piezas desde el punto B pero le quedan encerradas algunas que necesita. Se queda pensando un rato y cambia de dirección y ahora inicia un camino desde el punto A. Se ve que tiene dificultades para intercambiar dos piezas contiguas. Al no tener éxito inicia otro camino desde B pero no puede unir ambos caminos en su punto medio, lo que le obliga a deshacer el de la derecha.

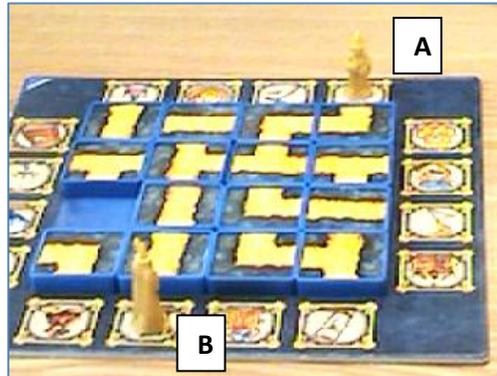


Vuelve hacer otros movimientos y logra unir desde la mitad del tablero hacia el punto B. Usa 6 piezas y tarda 10 minutos.

Reto_2.- Ya de inicio, con la configuración del camino anterior, el punto B tiene ya construido un camino de cuatro piezas, sólo hay que acomodar dos caminos verticales (Tipo 1) más para comunicar al punto A. Sin embargo, se nota un poco la dificultad al intercambiar de lugar dos piezas contiguas, pero logra hacerlo en 30 seg.

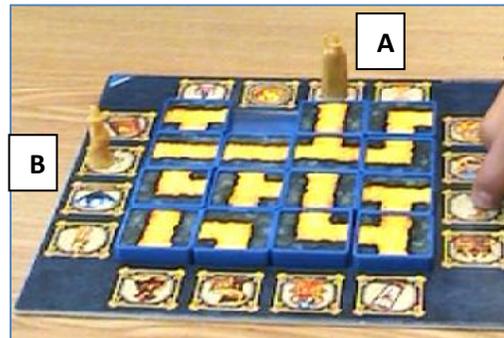


Reto_3.- Los puntos están verticalmente opuestos. Inicia desde el punto A y alinea tres piezas, luego cambia de táctica y empiezas a construir otro camino usando las tres piezas a la mano desde el punto B y logra unirlos en el centro usando 6 piezas y tardando 55 segundos.

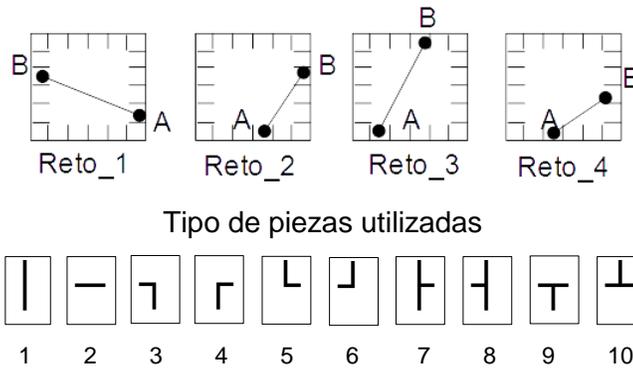


Reto_4.- Este reto lo termina en 18 movimientos en 30 segundos. No tiene nada construido así que vislumbra un camino horizontal y uno vertical unidos por ángulo recto (piezas tipo 4, 7 o 10). Acomoda dos caminos verticales (tipo 2) desde el punto B, añade un codo y luego pone un camino vertical tipo 1 hacia el punto A concluyendo el reto.

Jeremías tiene un comportamiento similar al de Daniel, tardándose igualmente en hacer el primer reto, como si trataran de conocerlo. Luego, en los subsecuentes retos reducen los tiempos a 1 o 2 minutos, incluso a segundos. Jeremías es más rápido en sus movimientos que Daniel, pero pierde un poco de concentración, sólo un poco, al tratar de acomodar sus piezas, dándole más vueltas a las piezas de las necesarias.



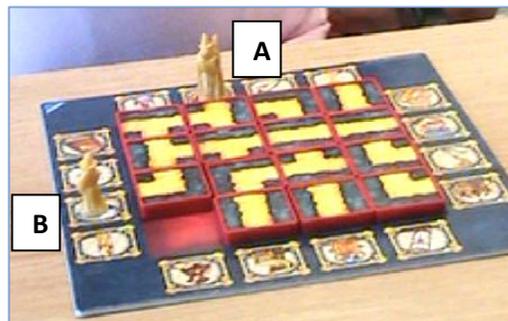
Marcos y el laberinto



Reto_1.- Marcos inicia un camino de 5 piezas desde el punto B hacia el A, pero la última pieza no concuerda y no puede mover ninguna otra ya que el espacio vacío que sirve para mover está detrás del propio camino. Se detiene unos instantes y empieza a mover las filas del perímetro dando dos vueltas hasta que pone un conector horizontal tipo 1 frente al punto A, cosa innecesaria ya que la misma pieza estaba a dos posiciones del punto. Al parecer no se percata que hay dos piezas iguales de cada figura. Además, da a entender que no quiere mover las piezas del centro. Vuelve hacer otro camino de B hasta A pero la última piezas no concuerda y no puede mover piezas cerca del final. Deshace parte del camino y sigue moviendo piezas identificando las correctas para un camino de 6 piezas. Tarda 7.5 minutos.

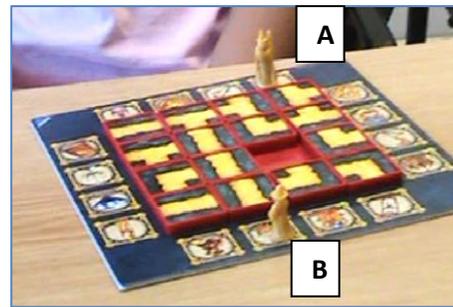


Reto_2.- Aprovechando dos piezas (tipo 7 y 8) que ya están unidas y alineadas hacia arriba frente al punto A, intenta poner las dos que faltan (caminos horizontales) para llegar al punto B, pero éstas no están cerca, así que sigue moviendo e inicia otro camino desde B con un pieza tipo 9, pero descubre que abajo desde A ya están puestas dos piezas dirigidas hacia B sobre el perímetro y decide continuarlo faltándole dos piezas para conectar a B. Le falta un codo, una pieza tipo 4 para conectar B y la localiza en la esquina opuesta del tablero, así que la trae por todo



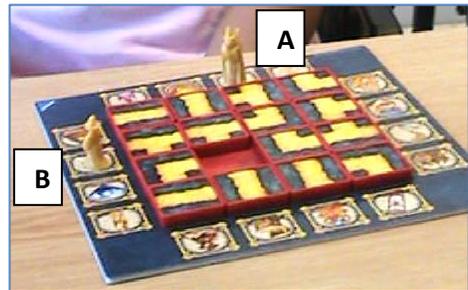
el perímetro. Faltando tres lugares la baja antes de tiempo, y al colocarla ve que ha deshecho el camino, obligándolo a comenzar otro. Vuelve a iniciar desde B y hace un camino con una esquina en dirección opuesta a A, dando a entender que sus movimientos no siguen una táctica. Para un camino corto mueve muchas piezas y en ocasiones sin beneficio o en lugares alejados de los puntos. Finalmente coloca tres piezas desde A sobre la periferia hacia B y baja un conector tipo 4 que une el punto B.

Reto_3.- Marcos aprovecha un camino de 3 piezas desde el punto B, añade una cuarta pieza y en dichos movimientos coloca un camino vertical (tipo 1) en A faltándole sólo un conector con esquina (tipo 6 u 8). En su búsqueda de esta pieza deshace todo el camino, volviendo a empezar. Inicia desde A (parte inferior) un camino con tres vueltas o esquinas y logra colocar cuatro piezas más una del tipo 10 y las tres del tipo 1 contiguas que van directo hacia el punto superior B, terminado el reto. Usa 8 piezas, igual que Daniel.

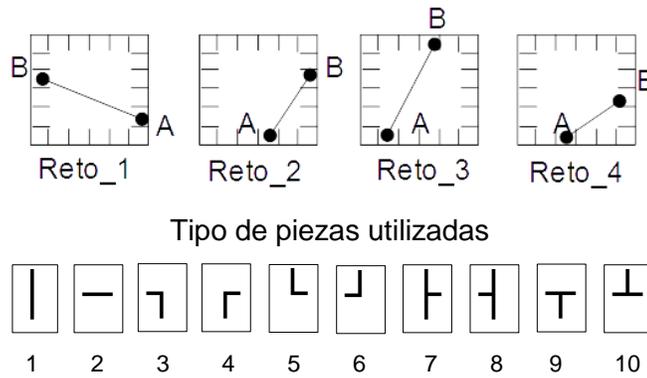


Reto_4.- Empieza a colocar dos piezas iguales horizontalmente desde B (del tipo 10). Coloca un codo (tipo 4) y le falta el último conector hacia A, que sería una pieza tipo 1, 7 u 8. Localiza la pieza tipo 7 y la acomoda sin muchos problemas conectando al punto A completando el camino con cuatro piezas.

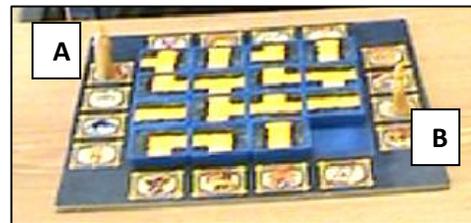
Marcos tiene dificultad para organizar las piezas. No puede intercambiar dos piezas contiguas por temor a deshacer su centro, donde hay una parte del camino, por eso mueve mucho las piezas del perímetro. De igual forma, sabe qué pieza requiere para continuar o concluir, pero selecciona las más alejadas y no se percata de otras de piezas más cerca. No es fiel a sus planes ya que cambia de parecer al identificar otro camino que no era el que había planeado. Esto último se pudo identificar en dos ocasiones donde su camino se dirigía hacia otra posición y tenía que volver a empezar.



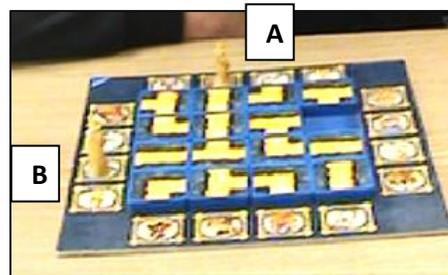
Jorge y el laberinto



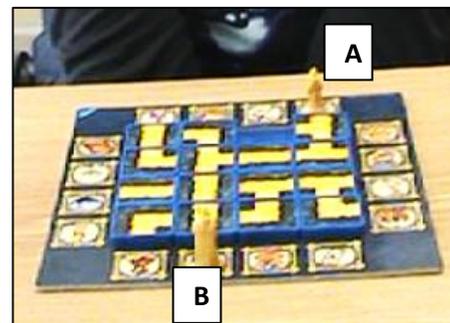
Reto_1.- Jorge comienza por el punto A (a diferencia de sus predecesores) y en 15 movimientos va construyendo un camino hasta B. No reacomoda las ya puestas, sólo ensambla, tardándose 25 seg. Se nota que son los mínimos movimientos posibles ya que sólo coloca 6 piezas a su paso.



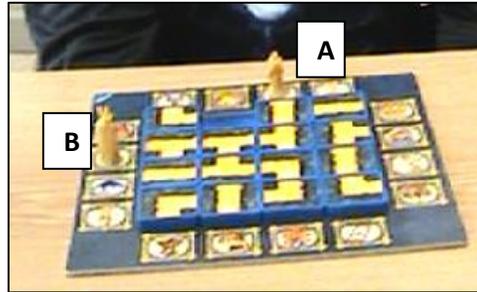
Reto_2.- Jorge inicia desde el punto B y construye el camino pieza por pieza sólo con aquellas que están en su camino. Usa 4 piezas y tarda 20 seg.



Reto_3.- Jorge inicia en el Punto B un camino vertical hasta la base, pero se entretiene en poner las dos últimas piezas, un camino horizontal (tipo 2, 9 o 10) y una codo (tipo 6 u 8), pero en sus movimientos circulares construye el camino, ¡y no se da cuenta! Sigue arrastrando piezas. Se detiene un instante y coloca otra configuración hacia A, logrando hacer la conexión. Utiliza únicamente 6 piezas.

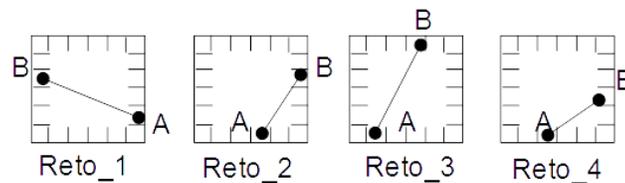


Reto_4.- Jorge Inicia su camino en B de forma horizontal con dos piezas iguales tipo 10 e intenta bajar hacia A. Tiene dos piezas contiguas que conectarían A pero no las ve, en cambio localiza otro conector pero está en la parte superior del tablero y hace todos los movimientos para bajarla. Al hacerlo no tiene a

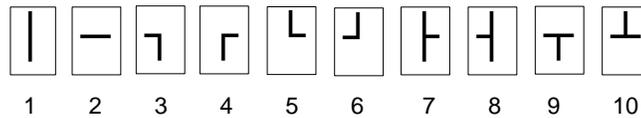


la mano el último conector hacia A y vuelve a dar vueltas a otras piezas y finalmente coloca la pieza faltante (tipo 1) concluyendo el camino.

Araceli y el laberinto



Tipo de piezas utilizadas

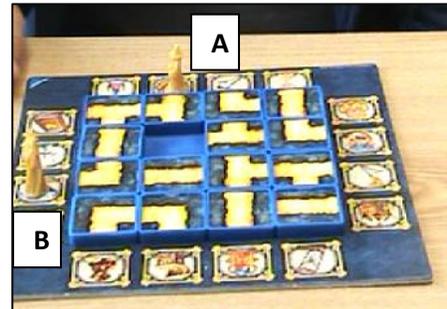


Reto_1.- Inicia desplazado las dos piezas frente a B formándose un camino en escuadra a una pieza de A, y anuncia ¡ya está!, inmediatamente corrige: ¡ay no, miento! Le faltan 2 pieza (tipo 8 y 2) para terminar, pero no se da cuenta, en vez de eso, mueve las piezas de las dos líneas horizontales inferiores del talero pero cerca de A, deshaciendo el camino. Sigue moviendo piezas tratando de terminar el camino de B a A, en dicha dinámica coloca dos piezas en A y tres piezas en B, sólo falta unirlos en el centro. Algo interesante es que desde B continua el camino horizontal con tres piezas y quiere seguir hacia abajo con dos pieza con caminos verticales (tipo 1, 7 u 8), pero sólo

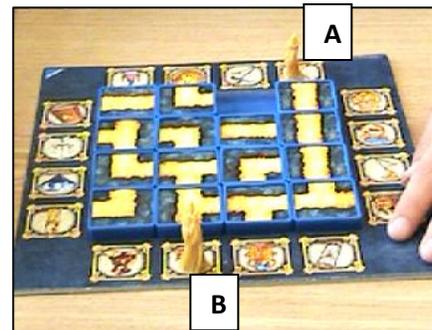


reacomoda las 6 piezas debajo del camino horizontal. Las piezas arriba del camino nunca las toca, lo que muestra que observa que sólo esas son suficientes. Termina colocando las tres piezas conectando al punto A.

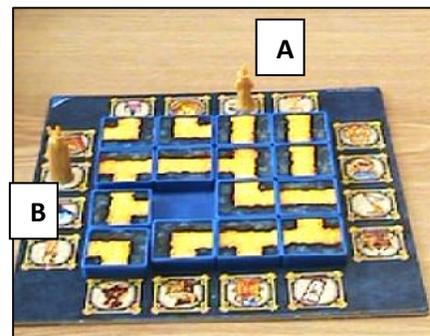
Reto_2.- Araceli con 6 movimientos hace un camino de cuatro piezas pegado a la periferia del tablero iniciando en A y terminando en B. Ya dos piezas están colocadas, solo reacomoda dos: un camino vertical del tipo 1 y una L (o codo) del tipo 4 conectado a B.



Reto_3.- Araceli mueve sus piezas para construir un camino desde el punto B. Pareciera que no construye nada pero después de un rato se observa que su táctica es agrupar las piezas horizontales, verticales y piezas con esquinas o codos en la parte superior del tablero para después bajarlas y colocarlas en el camino que tiene en mente. Construye un camino pegado al perímetro, pero en acomodar las dos últimas piezas se tarda dándole vueltas a cuatro piezas, cuando sólo tenía que bajar dos enfrente del punto A. La rapidez con que mueve las piezas la distrae de estas posibilidades. Unos movimientos más y coloca los dos caminos verticales (tipo 1) conectando al punto A. Utiliza 6 piezas.



Reto_4.- En sus primeros movimientos coloca un conector horizontal (tipo 2) en el punto B, y empieza a colocar piezas desde el punto A. Pero empieza hacer movimientos rápidos ocasionando que algunas piezas se salgan del tablero perdiendo concentración y a la vez la percepción de la forma del dibujo de las piezas movidas. Esto se nota porque coloca algunas que no concuerdan con el camino, y además arrastra en círculo 4 piezas sin beneficio aparente.



Al parecer quiere usar sólo las piezas que están en la esquina del tablero donde están los puntos, pero ahí no hay piezas con caminos horizontales (sólo necesita una). Después de mover piezas por unos instantes ve hacia arriba y empieza a bajar algunas piezas, principalmente piezas con caminos horizontales. Al bajarla la acomoda junto a una L del tipo 4 (el codo) y termina el camino desde A hasta B.

Conclusiones del laberinto

Los cuatro retos presentados en el Laberinto fueron realizados por los nueve participantes en promedio media hora, lo que podría suponerse que no hubo una verdadera dificultad en su ejecución. Sin embargo, en el desempeño particular de cada participante se observan situaciones donde se logra distinguir un uso eficiente o no de la percepción geométrica al enfrentarse a situaciones muy particulares, como por ejemplo, el intercambiar de lugar dos piezas contiguas.

A continuación presentamos una lista, en orden creciente, que a nuestra consideración muestra cómo se manifestó la percepción geométrica en cada estudiante, al igual que la forma en que ésta participó en la construcción de los posibles caminos en cada reto.

1.- Alma tiene dificultades en ordenar sus piezas al igual que seguir un plan estratégico, cambia de tácticas sin darse cuenta, sigue el camino de las piezas conforme se van articulando, esperando que esto la lleve al otro extremo. La percepción geométrica está localizada sólo en las piezas que está colocando más no en el tablero.

2.- Ana tiene movimientos lentos, al igual que lo hizo en el Kataminó. Ella logra hacer caminos pero no se da cuenta de ello por estar absorta en construir lo que tiene en mente. Su percepción geométrica está entretenida en construir lo que ella quiere, perdiendo de vista el tablero completo.

3.- Diana tiene un desempeño mejor al de Alma, tiene un mejor movimiento de las piezas y muestra un poco más de atención. Sin embargo, tiene las mismas dificultades al trasladar piezas de un lugar a otro. Su percepción geométrica no verifica en ocasiones si una ficha está o no bien puesta, y teme en ocasiones deshacer parte del camino para colocar otras piezas

4.- Josué inicia con precaución y tiene un comportamiento local, es decir, va colocando sus piezas conforme a lo que tiene al lado. Su percepción está localizada al final del camino, y no percibe las piezas contiguas. Deshace los caminos hechos en vez de

arreglar un par de piezas. Logra ver al final acomodos convenientes que aprovecha al final de cada reto.

5.- Marcos tiene la característica que la localizar una pieza empieza a trasladarla sin darse cuenta que hay otra igual más cerca. No tiene la precaución de ver el tablero completo y revisar. Sin embargo, maneja las piezas con más soltura incluso en los intercambios.

6.- Jeremías tiene movimientos rápidos en todos los retos. Es el único que pregunta si hay que usar todas las piezas (algo muy restrictivo). En el primer evento, tarda en entender cómo mover piezas y la lógica de juego, algo estratégico.

7.- Daniel tiene un mejor desempeño, que Jeremías. Al igual que éste, también tarda mucho en el primer reto, pero lo compensa en los subsiguientes al hacer caminos cortos y rápidos. Es el único que hace dos caminos largos de 10 y 8 piezas.

8.- Araceli tiene movimientos no tan rápidos pero se nota más seguridad y logra hacer caminos con pocos movimientos. Se retrasa en algunas partes pero logra salir sin complicaciones. Detecta una rápida salida en caminos cortos.

9.- Jorge al igual que Araceli, no tiene movimientos rápidos, pero logra hacer sus caminos con mayor rapidez, soltura y con pocos movimientos, fue el único que hizo el reto 1 en el menor tiempo (25 seg.), comparado con el de sus compañeros que tardaron hasta 10 minutos.

3.2.4 Tangram Avanzado

El tangram es un juego muy popular en los ámbitos escolares principalmente en la educación básica. Sin embargo, su uso se ha limitado básicamente a la construcción de las figuras preestablecidas sin que haya de por medio una actividad didáctica dirigida que ayude al estudiante a descubrir la propiedades geométricas de las figuras junto a la construcción de un pensamiento geométrico básico.

El objetivo del juego es construir, con cuadriláteros, pentágonos irregulares y triángulos, 14 piezas en total, una figura específica: un gallo de color rojo (6 piezas), en medio de un fondo amarillo (8 piezas) y enmarcado en un tablero cuadrado verde.



El cuadro 3.5 muestra los conteos respecto a los movimientos realizados, los tiempos invertidos, los intentos hechos y las tácticas aplicadas en la resolución de este reto. El número en negrita indica en que táctica logra armar el gallo

TANGRAM					Observaciones
No	Nombre	Figura: Un Gallo			
		Movi- mientos	Tiempo mm:ss	Perfil de estrategia	
1	Alma	300	28:11	2,1,2,1, 2 ,1	Para ella la figura roja es un muñeco. Sus armados eran irregulares al principio pero logra armar a la figura roja (en 2), pero no así lo amarillo, por falta de tiempo.
2	Ana	66	14:35	2,1,2,1,2,1	Manifestó que se cansó o se desesperó y ya no quiso seguir. Sus movimientos fueron lentos. No armó la figura roja.
3	Josué	292	28:21	3,1,2,3	Al principio forma una figura roja muy alejada del original Se acerca después de muchos intentos y sólo en parte.
4	Diana	378	17:48	3	Sus armados no mostraron semejanza con la forma propuesta. Pone y quita al azar sin ver la figura deseada. Aun viendo cómo se arma, se tarda en construir la figura.
5	Marcos	287	29:50	3,2,1,3,2,3,2	Se llevó mucho tiempo. Sólo construye parte de la figura roja, y muy poco de la amarilla.
6	Jeremías*	382	23:11	2,1,2,1, 2 ,1	Intenta formar la figura roja en varias ocasiones con formas raras pero lo logra. Después formar el relleno al grado de deshacer todo; al final lo logra.
7	Daniel*	320	34:32	3,2,1,3,1,2, 3 ,2	Inicia formando la figura y contorno, Privilegiando el relleno con algunas piezas rojas bien puestas. En 3 arma la figura roja.
8	Jorge	248	39:33	1,2,1,2,4,3,4,3	No logra ver que la figura roja está mal formada en una de sus partes. Intenta formarla fuera del tablero, sin lograrlo.
9	Araceli*	225	33.06	3,2,1,3,2,1, 2 ,1	Araceli ve un pollito en la figura roja. Coloca piezas amarillas y rojas, después cambia a rojas y luego amarillas. En 2 arma la figura roja y después termina la amarilla
Táctica_1		Formar primero el contorno amarillo y después la figura roja			
Táctica_2		Formar la figura roja y después el contorno amarillo			
Táctica_3		Formar la figura roja y el contorno amarillo alternadamente			
Táctica_4		Formar la figura roja fuera del tablero verde			

Cuadro 3.5

Análisis por estudiante (fila)

De los datos anteriores obtuvimos las descripciones siguientes, de forma ascendente, sobre el comportamiento e influencia de la percepción geométrica de cada estudiante en la construcción del reto impuesto en el Tangram.

Diana y el tangram

Se le explica a Diana lo que debe hacer con cada color de las piezas. El entrevistador le pregunta: *¿qué ves en la figura?*, ella contesta: *“un pollo”*, aunque según el juego se trata de un “gallo”.

Diana comienza por querer armar las patas del gallo, y coloca piezas amarillas a su alrededor. Después comienza a poner piezas amarillas en la parte superior del tablero sin espacio para la cabeza y cuello del gallo. Esto es un indicador de que su percepción no le permite controlar en sus acciones la forma del gallo (o pollo). La imagen la interpreta de otra forma, no distingue los ángulos (salidas, entradas y picos del gallo). Después pregunta: *¿se deben usar todas las fichas?*, el entrevistador contesta: *si, todas*. Unos instantes después quita todas las piezas e intenta armar sólo el gallo, pero no forma ni siquiera la cabeza y el cuello (las piezas más fáciles del gallo) y además sigue poniendo a su alrededor pieza amarillas. Vuelve a la táctica de colocar primero las amarillas pero las coloca en el espacio donde va la cabeza sin darse cuenta de ello y debajo de éstas coloca piezas rojas. Sus construcciones son indefinidas.

El entrevistador le pregunta: *has jugado antes este juego*, ella responde: *“he jugado de otro tipo, parecido, pero con otras piezas, pero este no”*. Unos instantes después comenta *¿deben usarse todas las fichas, verdad? Sí*, dice el entrevistador. En este momento hay tantas amarillas en el tablero que hay poco espacio para poner más de tres rojas juntas. En esos momentos pregunta: *“¿queda muy apretadito?”*, el entrevistador contesta: *“no, debe haber un pequeño juego, para que puedas quitar y poner una ficha”*. En estos momentos tiene todas las fichas amarillas puestas y tres rojas. No se ve que esté intentando reproducir la figura sino sólo acoplar las piezas. Al ver mucho desorden, el entrevistador le comenta: *“pon atención a la figura (al gallo)”*. Inclina la cabeza como queriendo ver alguna concordancia.

En este momento hay una pieza amarilla arriba de la cabeza (un cuadrado), y el entrevistador le pregunta si la posición del cuadrado rojo (la cabeza) es la correcta. Ella contesta que sí. Realmente no logra distinguir que piezas están ni en qué posición.

Con este comportamiento, el entrevistador le pide que deje el juego y le muestra la solución del reto que está detrás de la carta. Aun viendo la solución ella no logra identificar ni la pieza ni la posición de la cabeza ni del cuello.

Diana muestra en su ejecución que su percepción geométrica de la forma no le ayuda de ninguna manera a detectar figuras, posición y dimensiones de las piezas. Ella necesita por ejemplo, que su percepción geométrica se desarrolle en clasificación de figuras de diversas formas y tamaños.

Marcos y el tangram

Inicia colocando piezas amarillas en la parte inferior del tablero, tratando de dejar la silueta de las patas del gallo, y de ahí hacia arriba. En ese momento el entrevistador le pregunta si ya había jugado antes este juego o algún otro semejante, contesta con la cabeza que no. Empieza armar bien la cabeza y el cuello y coloca algunas piezas amarillas en el lugar correcto, pero tarda mucho en querer formar el cuerpo del gallo. Hace y deshace la parte baja de la construcción y en el minuto 10 quita todas las piezas y vuelve a empezar, comenzado por la parte inferior del gallo. Logra una figura roja con cabeza, cuello y patas, pero le falta el cuerpo y la cola. Vuelve a quitar parte de las piezas y comienza con otra configuración dejando la cabeza y el cuello, pero no logra más que formar una figura incompleta con muy poca semejanza con el dibujo.

En sus ojos se ve que está continuamente comparando dibujo y figura, pero su percepción geométrica no le ayuda a distinguir la forma del dibujo respecto a su construcción, la cual es muy diferente. Después de varios intentos sin lograr armar algo semejante al dibujo plateado, se le invita, en el minuto 30, a terminar el juego y se le muestra la solución al reto. Tarda 2 minutos en armar la figura completa no sin quitar y poner algunas piezas en lugares equivocados. Marcos dice que la figura es un gallo, cuando el entrevistador le pregunta qué figura forman las piezas rojas.

Marcos usa la táctica de armar primero sólo la parte amarilla (la silueta del gallo) y después cambia para armar ambas partes simultáneamente, y en esta táctica es donde se queda todo el tiempo. En ocasiones no quita las piezas del tablero y quiere seguir armando el gallo, esto lo distrae y no lo deja trabajar

Alma y el tangram

Alma inicia tratando de formar la parte superior de la figura roja (el gallo). El entrevistador pregunta: *¿qué crees que sea la figura roja, a qué se parece?* Ella se queda pensada un momento y contesta: *¿un muñeco?, esta es su cabeza y estos sus pies.*

Alma coloca la cabeza y cuello, pero el cuerpo tiene formas muy diversas, que no concuerdan con la figura, aunque trata de poner las piezas con cuidado. EL entrevistador le pregunta si ha jugado antes este juego y ella contesta que no. Sigue intentado formar la figura al terminar de poner todas las piezas rojas, cambia de opinión y las quita completamente y empieza a formar el contorno amarillo. Pone algunas piezas amarillas tratando de que coincidan algunas formas pero no tiene éxito, volviendo a quitar todas la piezas y regresa solo con las piezas rojas, pero la figura no tiene la forma esperada, resulta muy diferente. Quita algunas piezas y sólo deja dos bien puestas: la cabeza y el cuello del gallo.

La percepción geométrica de Alma no le permite empatar la forma del dibujo con el de su construcción. Las esquinas, entradas y pico del dibujo no las percibe. Su figura sigue teniendo una forma extraña. Después de media hora intenta combinar piezas de ambos colores, en ese instante coloca piezas amarillas en la parte superior del tablero y logra armar parcialmente bien el gallo, excepto por dos piezas mal puestas en el cuerpo. Ella piensa que ya armó el gallo y se enfrasca en colocar las piezas amarillas (el contorno). Logra acoplar la mayoría de las piezas amarillas alrededor de la cabeza y cuello del gallo, pero no están en el lugar correcto. Se da cuenta de ello porque las piezas faltantes no se acoplan en el espacio sobrante. Así vuelve a quitar todas las piezas amarillas e intenta acoplarlas en otro orden.

En algunas ocasiones coloca una pieza en un espacio y le da vueltas a ver si se acopla, en otro espacio, coloca una pieza acoplada en un lado pero con huecos pequeños que no pueden llenarse con ninguna pieza y ella no se da cuenta de ello, y sigue colocando piezas en otra parte. Después de 35 minutos el entrevistador le pide que pare y le muestra la solución del Tangram (en el reverso de la tarjeta). Se tarda 4 minutos en armar bien el Tangram, no logra empatar la forma de las piezas con las del dibujo.

La táctica de Alma fue de inicio armar el gallo y luego el contorno. Después intenta el contorno pero solamente se ocupa de ir acoplando las piezas. Por último combina piezas rojas y amarillas y logra formar el gallo, con ayuda de las piezas amarillas.

Ana y el tangram

Inicia colocando bien la cabeza y cuello del gallo, pero el cuerpo y patas no se parecen al dibujo. A los 5 minutos el entrevistador le pregunta si ya ha jugado antes con esta configuración del Tangram o alguna parecida, ella responde que *no*. *¿Ni en primaria o secundaria?*, vuelve a decir que *no*. Después quita las partes del cuerpo del gallo y empieza a colocar las piezas amarillas junto a la cabeza, pone bien algunas piezas amarillas cercanas al cuello y pecho de gallo, pero las quita e intenta situar otras del otro lado de éste. Tiene dificultad para armar la cola del gallo, después de algunos intentos, quita las piezas rojas y prueba poner sólo las amarillas. Después combina con las rojas pero el gallo aún no tiene forma. En ese momento, comenta: *ya me cansé*, realmente se le nota cierto hastío, después de dos horas de juego. Al final no logra formar el gallo completamente y termina el reto.

En general Ana tuvo como táctica formar, en principio, la figura del el gallo rojo pero su percepción no le ayuda en esa dirección, cambia de táctica y pasa a formar el contorno amarillo, pero son muchas piezas y no logra acoplarlas bien, regresando a formar la figura roja en combinación con las amarillas.

Una manera de enseñarle a Ana que si se podía formar el gallo y su contorno fue que el entrevistador le enseñara la solución del reto detrás de la tarjeta. Ana elige primero construir (copiar) la solución del contorno amarillo que implícitamente conlleva la construcción simultánea de la silueta del gallo.

Josué y el tangram

Josué reconoce que la figura roja es un gallo e inicia por tratar de formar la cola poniendo dos piezas amarillas y luego una o dos rojas. Sin embargo, pierde la noción de espacio y forma porque coloca un cuadrado como la cabeza y la encierra en piezas amarillas. En 10 minutos no logra formar nada coherente, ni siquiera la cabeza y el cuello. Sólo en una ocasión construyó un cuerpo para el gallo, pero resultó ser muy grueso. Asimismo, la parte que está debajo de la cola del gallo la construye con dos piezas muy grandes, dejando poco espacio para colocar y ensamblar otras que van en esa parte. Esto muestra que su percepción geométrica de la forma y sus dimensiones no le ayuda en la construcción solicitada. Después de 20 minutos coloca bien la cabeza y cuello y la parte del contorno amarillo a la derecha del gallo, para después deshacerla y comenzar de nuevo. Al minuto 28, no ha formado más que la cabeza y el cuello.

En general Josué inicia con la táctica de armar la parte amarilla de la cola, pero empieza con dos piezas equivocadas, que son muy grandes, causándole problemas de dimensiones a la hora de construir el gallo rojo. Su percepción geométrica para visualizar la coexistencia de dos figuras complementarias requiere de mayor desarrollo para posibilitar que pueda identificar la forma, posición y dimensiones de las figuras.

Se le invita a que termine, mostrándole la solución del reto. Aun así se tarda 4 minutos en armar la figura, teniendo problemas en la construcción de la cola del gallo.

Jorge y el tangram

Se le muestra a Jorge la figura y a la pregunta de qué tipo de figura se muestra, él contesta que es un gallo.

Su primera intención fue poner las piezas amarillas y después las rojas para armar el gallo, después abandona la construcción con esta táctica. Entonces, quita todas las amarillas y se concentra en formar el gallo. Arma uno pero las piezas del cuerpo no están bien colocadas. Después saca las piezas del tablero y trata de armar el gallo afuera de éste. Se da cuenta que la cola no le queda e intenta nuevamente deshaciendo toda la figura. En seguida de varios intentos pregunta: *¿todas las piezas entran?*, el entrevistador responde: *todas entran*. En ese momento Jorge regresa al tablero y arma la parte superior de la figura roja y algunas piezas amarillas y va construyendo hacia abajo.

Logra armar un gallo y parte de su contorno pero las piezas sobrantes no puede colocarlas. Le falta colocar bien las piezas de la cola del gallo. Reflexiona unos instantes y vuelve a intentar armar la cola. Se le queda viendo a la figura tratando de empatarla con lo que está construyendo. En un momento tiene la idea de tomar dos piezas y colocarlas al lado del dibujo para comprobar que sí son las piezas adecuadas.

En el minuto 17 le falta colocar sólo una pieza, un triángulo, para formar bien el gallo, pero no ve el espacio de éste en su armado, y no hace físicamente nada por colocarlo y verificar su ensamble. Aquí la percepción geométrica no contribuye para empatar espacio disponible y figura. Decide quitar las piezas, se desespera un poco y saca las piezas rojas del tablero y quiere armar el gallo fuera del tablero. Lleva 30 minutos, se estira y bosteza para relajarse un poco. Sigue intentando y coloca la mayoría de las piezas amarilla con pequeños espacios que no pueden llenarse con ninguna pieza.

En el minuto 40 se le pide que interrumpa y se le proporciona la solución. Se le

presenta por separado la construcción roja y la amarilla, construye primero la amarilla y después la roja.

Daniel y el tangram

Daniel comienza por poner bien la cabeza y cuello del gallo además de dos piezas amarillas frente a la figura roja, pero el cuerpo del gallo está mal hecho, no hay una correspondencia clara entre lo que está construyendo y el modelo. Después de varios intentos con las piezas rojas, las saca e prueba sólo colocar las amarillas. Un minuto después vuelve a colocar las fichas rojas junto a las amarillas. Le cuesta mucho trabajo armar únicamente el cuerpo del gallo, y en ese momento coloca bien algunas piezas amarillas a un lado al gallo dándole una silueta que le permite darle forma al gallo rojo. Aún le falta el cuerpo y la cola. A los 27 minutos desbarata parte del gallo y vuelve a empezar casi de cero. Construye bien la parte superior y la parte inferior pero le cuesta trabajo la cola del gallo, donde usa las mismas piezas que ya había usado pero en diferente posición. Al minuto 35 concluye exitosamente la figura completa y el contorno. Es el primero que lo hace.

Daniel tiene como táctica inicial construir a la par la parte roja (cabeza) y la amarilla a un lado de ésta, pero tarda en formar el gallo, que logra con ayuda de partes del contorno amarillo. Observa que una clave de esta construcción son unas piezas amarillas que determina la forma de la base del gallo, pero siempre las ponía en otra posición sin darse cuenta que había una ranura, un pequeño espacio que no ensamblaba correctamente. Cuando logra ponerla en la posición correcta, la base del gallo se forma y de ahí continúa con lo demás.

Jeremías y el tangram

Jeremías comienza a formar la cola del gallo, tras varios intentos fallidos, decide construir la cabeza y el cuello y tratar de unir ambas construcciones, pero no encuentra la manera de hacerlo. A los tres minutos pregunta si las figuras rojas tienen que formar la figura roja (¿?), el entrevistador le contesta que sí, y prosigue con su construcción. En el minuto 5 está a punto de terminar de construir el gallo, pero no logra acoplar bien las dos piezas de la cola. Él cree que está mal y quita las piezas y pone otras, desbaratando la configuración original. Volviendo a empezar desde cero. Al minuto 11 logra armar correctamente el gallo y la parte amarilla de un costado, sólo le falta el otro. Observa que

las piezas amarillas ya puestas no están en posición correcta y quita algunas piezas amarillas, al reacomodarlas, unas ensamblan sin problemas después de un par de ensayos. Este es el segundo estudiante que logra armar correctamente la figura completa.

La táctica de Jeremías es primero armar la figura roja, pero no logra acoplar bien algunas piezas. Después, intenta construir la parte amarilla sin éxito y después montar ambas partes simultáneamente y en este proceso centra toda su actividad hasta lograr construir primero la parte amarilla para después completar la roja.

Araceli y el tangram

Se le pregunta a Araceli a qué se parece la figura roja, y ella responde a un pollito.

Inicia colocando una pieza amarilla justo la que va enfrente de la cabeza, coloca el cuello y las piezas amarillas frente a éste. Intenta construir el cuerpo del gallo pero no lo logra, lo quita y vuelve a intentarlo. Prueba con algunas piezas amarillas colocándolas sobre la mesa para visualizar si la configuración concuerda con el espacio, no la pone sobre el tablero. Al minuto 6 coloca bien el pecho y las patas del gallo, pero no puede construir el cuerpo y la cola, así que lo deshace y vuelve a intentarlo. Se nota algo interesante: coloca una pieza y la rota angularmente en el plano pero no sobre un eje. En el minuto 16 quita todas las piezas e intenta solamente con las piezas amarillas, tratando de armar la silueta del gallo. No lo logra.

En el minuto 21 arma un gallo pero el pecho tiene un pico, se aleja de la escena y compara figura y dibujo y lo deshace. En el minuto 23 coloca bien las dos piezas del cuerpo y la cola, de ahí reconoce la pieza del pecho (un cuadrado), restando por armar la base del gallo (las patas) que es inmediata por faltar una pieza roja. De esta forma consigue construir bien el gallo. Los próximos minutos se dedica a probar varias arreglos para el contorno. Al minuto 27 consigue poner bien la parte amarilla de un lado del gallo, le falta la otra. Hace varios cambios de piezas desde el lado izquierdo y derecho del gallo, y al fin deja la parte derecha bien y solo le resta acomodar tres piezas del lado izquierdo de la cabeza del gallo. Acopla una pieza que abarca la parte derecha del gallo a la altura de la cabeza y rápidamente se da cuenta que las dos piezas amarillas restantes embonan sin problema, terminando el reto. Concluye en 33 minutos.

En Araceli, se nota que su percepción geométrica la ayuda a visualizar la concordancia entre la forma de las piezas con el espacio disponible. Hace ensayos sobre

la posibilidad de colocar una pieza en algún lugar sin acoplarla y se da cuenta que puede o no ponerla (esto la hace dos o tres veces). Es la tercera estudiante que puede armar la figura completa, además lo hace en menos tiempo que el empleado por sus compañeros.

Conclusiones del tangram

El Tangram tiene la dificultad, a diferencia de los otros juegos, que las piezas no pueden colocarse más que en una sola posición, tienen un lugar específico en la configuración del reto; este hecho reduce los grados de libertad que Montanero (2001) comenta haciendo que las tácticas se reduzcan básicamente a tres. Ante pocas opciones, el recurso necesario para abordar un reto semejante es el uso de la percepción geométrica para poder ver las piezas sueltas en forma, tamaño y orientación en el dibujo establecido. Es aquí donde se aplica verdaderamente lo dicho por Fuenlabrada: “ver figuras ahí donde no están y dejar de ver las que sí están”. El que sólo tres estudiantes de la muestra hayan logrado completar el reto, confirma el hecho de que el resto de los participantes no han tenido un entrenamiento en esta dirección. Sin embargo, no es suficiente haber terminado el reto para decir que la percepción geométrica está bien entrenada, sino que ésta hubiera ayudado a reducir en al menos la mitad del tiempo invertido (35 minutos en promedio) dicha resolución.

3.3 Análisis comparativos de los juegos

Los juegos propuestos tiene la intención de poner en conflicto la habilidad de percepción geométrica de los estudiantes de la muestra. Según la definición de percepción geométrica asumida en este estudio, es necesario que los alumnos analicen la forma de las piezas y el lugar donde necesitan colocarlas, en función del problema que vayan a resolver. Ahora bien, no cualquier juego [didáctico] tiene las características deseadas para que el alumno muestre esta habilidad. Fue necesario explorar qué juegos eran adecuados para la investigación. Al final, se eligieron cuatro juegos, que si bien pueden jugarse en equipos, también es posible enfrentarlos individualmente, por lo que en la entrevista lúdica los estudiantes los resolvieron sin la participación de otro compañero.

No es interés de la investigación comparar qué juego es mejor que otro en relación a la percepción geométrica inherente a cada uno de ellos, porque esto

depende, por ejemplo, de la edad de los jugadores, el desarrollo de su percepción en el momento en que lo juegan, de experiencias acumuladas con un juego en particular o con otros equivalentes. Más bien interesa mostrar y analizar qué ventajas y resultados se obtuvieron al aplicarlos y tener un indicio de las diferentes maneras en que la percepción geométrica puede manifestarse. Del mismo modo tampoco buscábamos encontrar quién de los participantes es mejor que otro, sino en qué situación la percepción geométrica se manifiesta o no y por qué.

El modo de mostrar el análisis de los juegos junto con sus características fue comparando la forma de las piezas y el espacio disponible donde debían colocarse. El primer juego para analizar es el Mueve uno. Recordemos que éste se juega con cinco palitos de 5.5 cm de largo por 7 mm de ancho y un área de juego máxima de 121 cm^2 (figura 3.1) donde sólo se usaron algunas líneas periféricas y algunas internas sin relleno.



Figura 3.1

Todos los participantes lograron terminar los 30 retos propuestos con diferencias en los tiempos de ejecución. Lo anterior muestra que el juego “Mueve uno” en relación a los otros tres, ofreció la menor exigencia a la habilidad de percepción geométrica de los participantes a quienes les bastaba rotar un cuarto o media vuelta la figura de la tarjeta para compararla con la producción construida y con ello tener la certeza del acierto. Y esto se debe, en principio, a que la figura propuesta se construye con líneas delgadas en una distribución abierta con espacios internos, no compacta, lo que disminuyó la complejidad del reto ya que los participantes lograron distinguir «rápidamente» qué pieza (palito) debían mover para colocarla en otra posición.

Mientras que el juego Kataminó tiene, por un lado, piezas distintas con área de 5 cm^2 , cada una de éstas está formada con cinco cuadrados de área 1 cm^2 . Por otro lado, las áreas de juego para acomodarlas son: primer reto 15 cm^2 con tres piezas; segundo reto 20 cm^2 con cuatro piezas; tercer reto 25 cm^2 con cinco piezas y el cuarto reto 30 cm^2 con seis piezas. Cada área debe rellenarse sin dejar huecos, es

decir, formar un bloque rectangular compacto, en contraste con el juego Mueve uno donde si hay huecos. Esta característica eleva el grado de dificultad y reta más a la percepción geométrica ya que todas las piezas tienen lados rectos, con diferencia de color y forma de la pieza y cuya única restricción es el área específicamente delimitada. La estrategia más usada fue conformar pequeños bloques uniformes sin huecos e ir creciéndolos por sus lados, cambiando piezas y reacomodándolas hasta lograr la combinación deseada. Los tiempos de construcción son mayores debido los intentos que se realizan.

A diferencia con el juego Mueve uno, en el Kataminó las piezas se ensanchan y los espacios se cierran, disminuyendo el margen de maniobra de las piezas y del jugador, ya que no hay indicios que ayuden a determinar qué tipo de pieza hay que poner primero (lo que sí hay en el Mueve uno), orillando al jugador en el primer movimiento a colocar cualquier pieza, que según Montanero (2001), en ese momento el jugador tiene N grados de libertad; en el segundo movimiento $N-1$ grados de libertad, etc. Aquí el reto a la percepción geométrica de los estudiantes de la muestra es mayor que en el juego Mueve uno, ya que en cada acción deben determinar qué pieza cabe en el espacio o qué pieza tiene la forma necesaria para cubrir ese espacio. De esta forma el efecto del azar del inicio va disminuyendo considerablemente al avanzar en la construcción del bloque.

Cabe mencionar que al inicio de cualquier nivel los grados de libertad se pueden calcular de la siguiente manera:

$$N = (\# \text{ piezas}) * (\# \text{ orientaciones posibles } \leq 4) * (\# \text{ posiciones posibles en el tablero})$$

Se muestra en la figura 3.2 el tablero y algunas piezas que deben usarse para cubrir el rectángulo inicial.

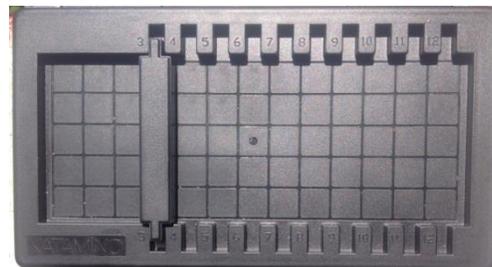


Figura 3.2

En el juego del Laberinto, se tienen 15 piezas cuadradas de la misma dimensión, colocadas en un tablero cuadrangular dividido en 16 cuadrados (Figura 3.3). Aquí la habilidad de percepción geométrica no se basa en utilizar la forma de la pieza sino la forma del dibujo que aparece en la pieza, misma que debe usarse para construir un camino entre dos puntos dados de antemano. En cada reto propuesto (cuatro en total) no hay un límite de piezas a usar para formar un camino, por lo que la longitud de éste es variable y no necesariamente es el más corto. El margen de maniobra es alto ya que cada pieza puede moverse en horizontal o verticalmente y la figura tipo “I” aparece en dos posiciones, mientras que las tipo “L” y “T” tienen cuatro posiciones cada una. Esto eleva considerablemente los grados de libertad al momento de colocar cada pieza.



Figura 3.3

En este juego, también se construye un bloque de piezas compacto, es decir sin huecos internos, excepto uno. Las primeras estrategias usadas por los estudiantes para construir el camino fue hacer una línea recta pero ante la imposibilidad de formarlo, se modificó la estrategia cambiando la forma del camino, que en función de su percepción, disminuía o facilitaba la construcción. El Laberinto, en comparación con el juego Kataminó, la dificultad fue menor en el sentido de que el primero tiene todas las piezas puestas y a la vista, teniendo un panorama completo de por dónde se puede armar el camino. En el Kataminó no se tiene esta ventaja, el estudiante debe incorporarla como estrategia de ayuda o control de su construcción.

Por último, el Tangram avanzado, es un juego donde se proporciona de antemano una tarjeta con una figura roja (un gallo) inmersa en un plano amarillo sobre un tablero cuadrado. Hay 5 piezas rojas y 8 amarillas y hay que construir un bloque sólido con 13

piezas de formas geométricas diferentes y lados rectos sobre el tablero cuadrado. En la figura 4 se muestra la tarjeta y proceso de construcción de la figura

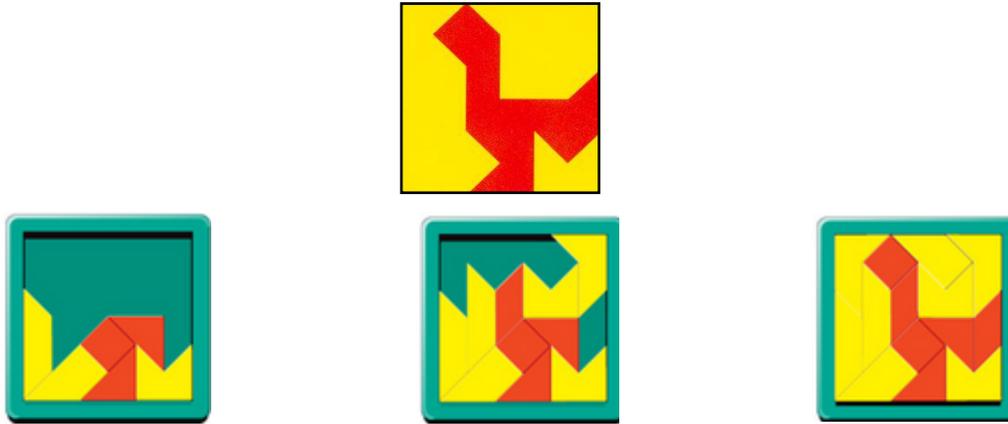


Figura 3.4

Este juego exigió de los estudiantes más concentración y tiempo al igual que una mayor habilidad en la percepción geométrica. Las estrategias estuvieron dirigidas primero hacia la construcción de la figura roja y después su contorno amarillo. Sólo un tercio de los estudiantes lograron terminarlo en tiempo y forma. La primera dificultad estuvo en que el participante percibiera el acomodo de las piezas que forman el gallo rojo para después, con base en éste, construir el contorno amarillo. Esta fue la estrategia más usada en el juego, sin embargo, particularmente se observó que la figura roja para unos alumnos era un “gallo rojo” mientras que para otros no tenía una forma “clara”, se trataba solamente de una “mancha roja.

Todos los alumnos lograron formar las partes delgadas del gallo, pero para formar el cuerpo de éste, no todos pudieron detectar qué piezas y qué distribución era la adecuada. De esto podemos concluir que los estudiantes que armaron la figura completa, parte de su éxito se basó en que pudieron identificar y formar el gallo completo y usarlo como guía para armar el contorno amarillo. Aun así, el contorno amarillo tenía su dificultad ya que son varias piezas con diversas formas y sin guías extras (marcas o contorno) en relación al gallo rojo. Al iniciar la construcción del contorno del gallo rojo, las piezas podían ensamblarse bien pero conforme avanzaba la construcción las piezas restantes no tenían espacio para ser colocadas, por lo que era necesario mover de lugar algunas de las piezas colocadas hasta lograr la configuración deseada, ¡que es única!

La comparación entre los juegos permite darse una idea de cómo la habilidad de percepción geométrica del estudiante debe estar más desarrollada si la cantidad de posibilidades de movimiento de las piezas aumenta, si hay más diversidad en la forma de las piezas, si hay mayor número de éstas, en lo compacto del bloque a construir y las dimensiones de éste. Es de entenderse que existen juegos de dimensiones pequeñas (un cuadrilátero con muchas piezas y el tipo de reglas a usarse o, al revés), que pueden requerir una habilidad en la percepción geométrica más desarrollada al grado de manejar figuras más complejas en forma y acoplamiento. En la figura 3.5 se muestra, a nuestro juicio, el nivel de reto a la percepción de los estudiantes en relación a los juegos que se les plantearon.

Juego	Mueve uno	Kataminó	Laberinto	Tangram
Piezas				
Percepción Geométrica	Baja	Media	Media	Alta

Figura 3.5

El cuadro 3.6 se muestra el desempeño de las habilidades geométricas básicas de cada uno de los estudiantes y en general, cómo está desarrollada su percepción geométrica.

No.	Nombre	Kataminó				Mueve uno 30 figuras	Laberinto				Tangram
		1	2	3	4		1	2	3	4	1
1	Alma	→				→	→				
2	Ana	→				→	→				
3	Araceli	→				→	→				→
4	Josué	→				→	→				
5	Daniel	→				→	→				→
6	Diana	→				→	→				
7	Jeremías	→				→	→				→
8	Jorge	→				→	→				
9	Marcos	→				→	→				
Dificultad		Media				Baja	Baja				Alta
Habilidad geométrica usada		Rotación angular, horizontal y vertical. Armar bloques sólidos				Traslación y rotación angular	Traslación horizontal y vertical. Movimiento circular				Rotación angular, trasversal.

Cuadro 3.6

De lo anterior, podemos resumir que el 100% de los alumnos lograron terminar el Mueve uno y el Laberinto con grados de dificultad baja y media respectivamente; de los nueve estudiantes Araceli, Daniel y Diana (el 30%) terminaron satisfactoriamente los cuatro retos del Kataminó, con un grado de dificultad media. Finalmente dos de los estudiantes anteriores Araceli y Daniel más Jeremías (el 30%) terminaron el reto del Tangram avanzado, que es el de mayor grado de dificultad.

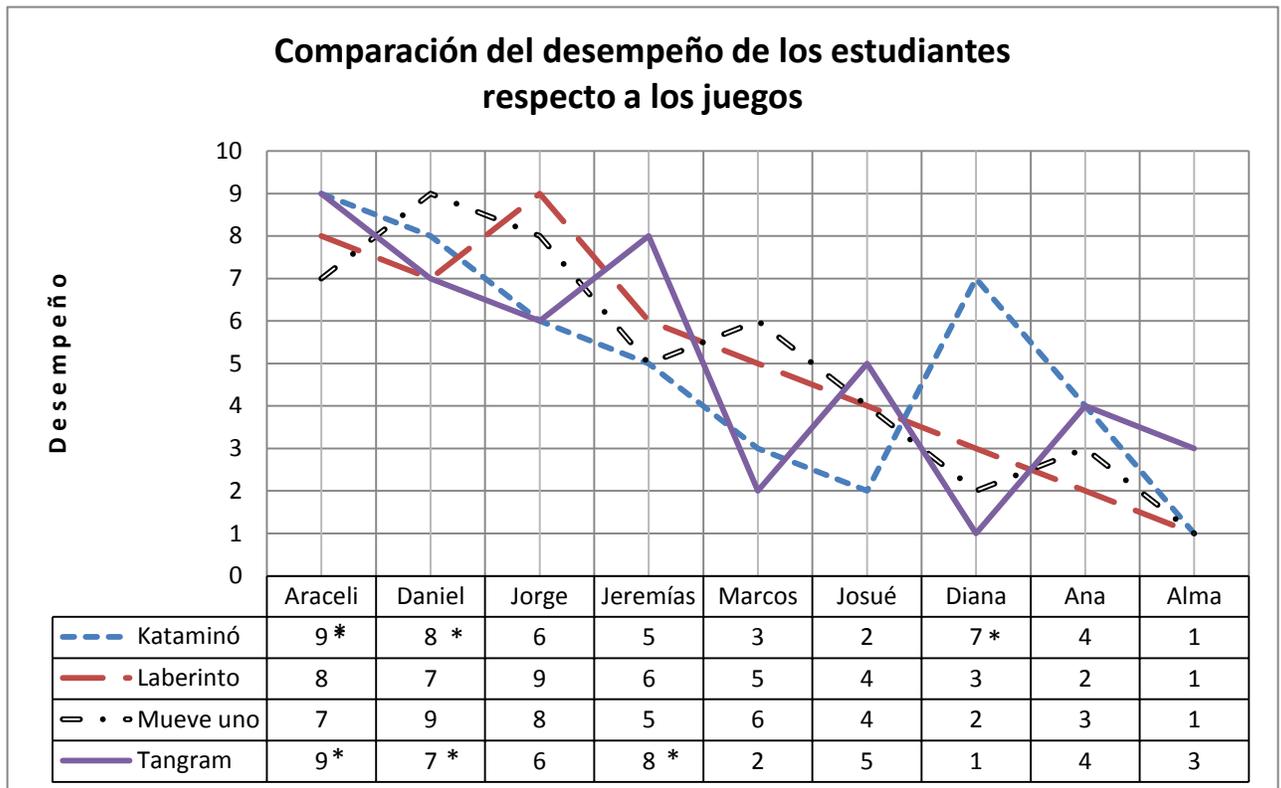
Otra forma de analizar estos datos es comparar el desempeño de cada estudiante respecto a lo que hizo en cada juego. Para ello, en cada juego enlistamos a los estudiantes en el orden en que quedaron respecto a su desempeño en el juego, asignándoles un número²¹ desde el más alto desempeño (9) al más bajo (1). Finalmente

²¹ Cabe aclarar que dicho orden tiene un grado de subjetividad, en función de los parámetros que utilizamos para el ordenamiento de menor a mayor.

los alumnos se ordenaron en función de la puntuación acumulada por cada uno de ellos en todos juegos. De esta forma, el cuadro 3.7 genera la gráfica 3.1.

	Kataminó	Laberinto	Mueve uno	Tangram	Acumulado
Araceli	9	8	7	9	33
Daniel	8	7	9	7	31
Jorge	6	9	8	6	29
Jesús	5	6	5	8	24
Marcos	3	5	6	2	16
Josué	2	4	4	5	15
Diana	7	3	2	1	13
Ana	4	2	3	4	13
Alma	1	1	1	3	6

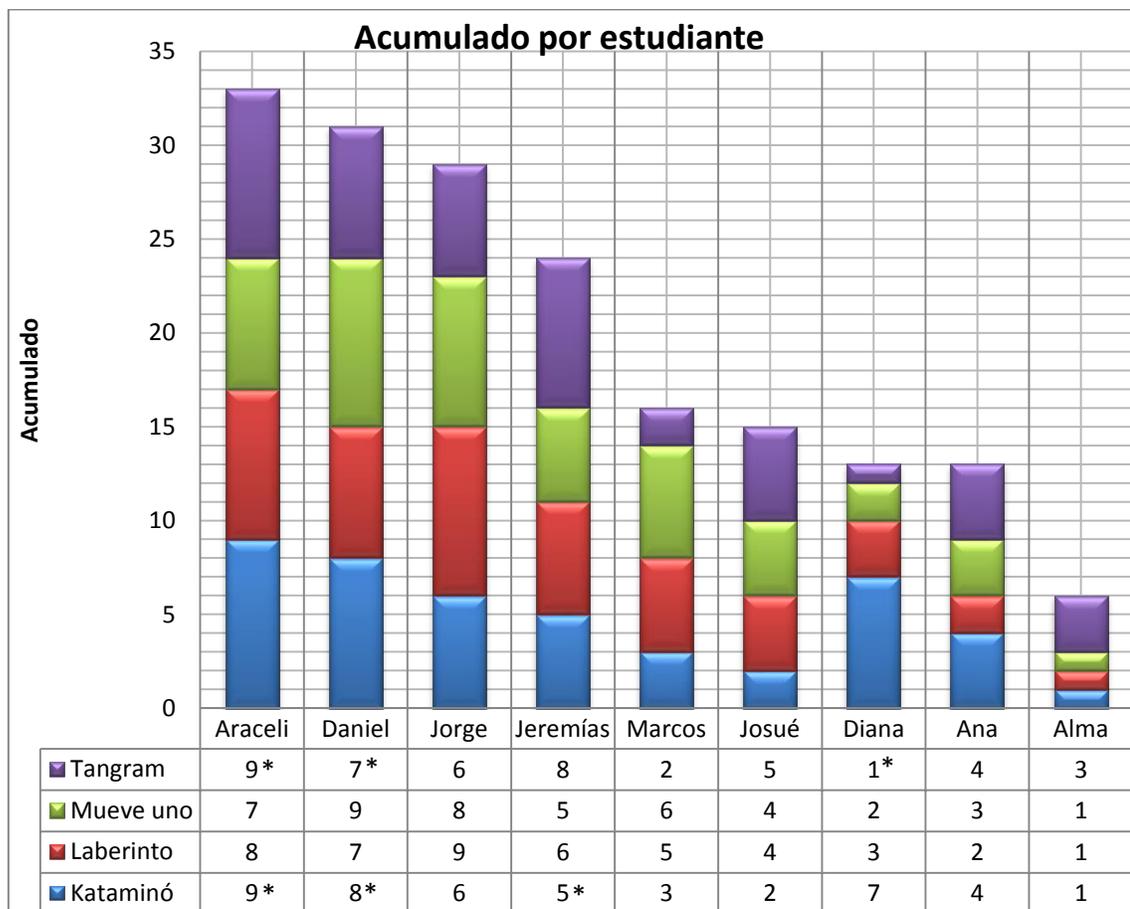
Cuadro 3.7



Gráfica 3.1

- El asterísco en la línea del Kataminó indica que el estudiante terminó bien los cuatro retos planteados; el resto sólo terminó hasta el tercer reto.
- El asterísco en la línea del Tangram indica que el estudiante armó el reto completo (figura y contorno amarillo); el resto armó algunas partes del gallo y contorno.
- Se observa, con los picos, los comportamientos atípicos de algunos estudiantes.

Esta distribución muestra las tendencias de cada estudiante y sus vaivenes en cada juego, mostrando que ciertas acciones y condiciones son apoyadas por la percepción geométrica de forma importante y en otras no tanto. La percepción geométrica no se puede generalizar por los resultados de uno o dos juegos, sino que ésta se va construyendo sobre la base de las experiencias y ejercicios [didácticos] realizados en la escuela así como en actividades [no didácticas] de la vida cotidiana (casa, trabajo y experiencias en general).



Gráfica 3.2

En la gráfica 3.2, se observa con más precisión cómo impactó cada juego en el desempeño general del estudiante. Dos ejemplos importantes son Alma y Araceli, posiciones diametralmente opuestas, donde puede inferirse, con ciertas reservas, que al menos con estos cuatro juegos, Araceli tiene un apoyo y uso más importante de la percepción geométrica que Alma.

También se muestra que hay diferencias en las habilidades geométricas de cada alumno, y que un sólo juego no puede aportar la suficiente evidencia que muestre una «alta» o «baja» habilidad en la percepción geométrica, por el hecho de que cada juego o actividad está limitado, por un lado a ciertas piezas, formas, reglas, espacio y tiempo. Por el otro, a las propiedades geométricas inherentes a la forma y distribución de las piezas en acción, junto con las reglas del juego.

La habilidad de percepción geométrica requiere de una abanico de experiencias y actividades didácticas diversas, amplias, en ocasiones didácticamente dirigidas, muy coordinadas con las propiedades geométricas que se desearía que un estudiante conociera desde su educación básica y llegara a madurarlas por lo menos hasta la educación media superior o superior.

Conclusiones e investigaciones futuras

*"Nature likes to be looked at with
geometer's eyes and brains"*

Richard Feynman (1918-1988)

En la investigación de este trabajo de tesis, se estudia una de las percepciones naturales que el ser humano posee y usa desde que empieza a interactuar con el mundo que lo rodea. Por ejemplo, un niño al caminar por una habitación, utiliza la percepción espacial para no chocar con los muebles; al coger un objeto, hace uso de la percepción de la forma para saber sus dimensiones; al estar con otras personas desarrolla una percepción social de su entorno. De entre ellas, una de las percepciones que por su influencia y uso en el área de las matemáticas nos interesó estudiar fue la *percepción geométrica* en el campo de la geometría, la cual está presente en coordinación con las demás percepciones humanas, en contextos donde se requiere resolver problemas geométricos. Por ejemplo, en oficios (carpintería, herrería y albañilería), en ciencias (matemáticas, física, arquitectura e ingeniería) y en las artes (pintura, dibujo y diseño).

El objetivo de la investigación, cuyas conclusiones exponemos a continuación, fue indagar cómo se manifiesta la percepción geométrica en un grupo de estudiantes del primer año de preparatoria al momento de resolver un reto geométrico. Para ello fue necesario analizar la pertinencia de un conjunto de materiales didácticos que permitieran plantear situaciones problemáticas que en su resolución pusieran en juego el uso de transformaciones geométrica. Estas condiciones sirvieron para que se manifestaran las habilidades de percepción geométrica de los alumnos de la muestra a través de las tácticas y estrategias que utilizaron explícitamente en sus intentos por resolver los retos que cada material les imponía.

A continuación enumeramos varias conclusiones y reflexiones de los análisis realizados a los videos y datos empíricos obtenidos. De igual forma se establecen interrogantes que darían lugar a otras investigaciones encaminadas al uso de la percepción geométrica específicamente en la resolución de problemas matemáticos, especialmente aquellos que implican a conocimientos geométricos.

- El concepto de percepción

Iniciamos con el concepto de percepción y lo que éste nos significó para nuestra investigación. Se encontró en la literatura una diversidad de definiciones como enfoques particulares existen. Así por ejemplo tenemos desde los filósofos griegos, pasando por el arte, la psicología, la biología hasta llegar a las ciencias sociales. Sin embargo, nos interesaron en principio las definiciones que relacionaban el concepto de percepción con el conocimiento. Por ejemplo, para Forgas y Melamed (1999:11) citado en (Lira, 1999:3) la percepción es un proceso mediante el cual un organismo recibe o extrae información, y cuando se realizan diferentes tareas perceptivas, se ponen también en marcha distintas estructuras cognoscitivas que se ocupan de la extracción del conocimiento.

Si bien las dinámicas propuestas no tenían la intención de enseñar algún conocimiento geométrico en particular, sí se llegó a adquirir otro tipo de conocimiento derivado de la experiencia de interactuar con el material didáctico, particularmente cuando el estudiante implementaba sus primeras tácticas al abordar el reto planteado, y en la dinámica del ensayo y error el estudiante se daba cuenta qué tácticas de las experimentadas le servían y cuáles no. Estos aprendizajes se identificaron, en principio, cuando el alumno empieza a ocupar menos tiempo en la resolución de tareas análogas, disminuye el número de intentos, mejora la habilidad en el manejo de las piezas y va afinando el acomodo de las piezas, por mencionar algunos.

- La percepción geométrica.

Surgida de una construcción semántica entre el concepto de percepción y la geometría, la percepción geométrica logra identificarse con una habilidad humana que aún no logra una conceptualización consensuada en los ámbitos académicos. Cabe hacer mención que al trabajar con habilidades humanas, Krutetskii (1976: xiii) destaca que éstas se forman y se desarrollan en la vida, durante la actividad, la instrucción y el entrenamiento, definiendo a las habilidades como las características personales que capacitan a conducir una tarea bien y rápidamente. En contraste con un hábito o destreza característico de la actividad de alguien.

Considerada así, como una habilidad, la percepción geométrica se coloca como una de las primeras habilidades que puede y requiere desarrollarse en el individuo a temprana edad, en principio, de manera no formal, empírica; pero después, en el nivel

preescolar, de manera más intencionada, dirigida, didáctica, requisito indispensable para interactuar exitosamente con el medio ambiente que lo rodea y, principalmente para incursionar, de manera lúdica, en el ámbito de la abstracción y en la resolución de problemas geométricos básicos.

En esta investigación se aisló, en la medida de lo posible, la habilidad de percepción geométrica de otras habilidades, que de igual forma están íntimamente relacionadas con el concepto teórico de percepción, tales como: la percepción visual, la espacial, la auditiva, la de forma, la táctil, la kinestésica, la háptica y la percepción social, entre otras. Estas habilidades no actúan aisladamente ni tampoco todas a la vez, sino que se conjugan algunas de éstas —con un cierto grado de participación— dependiendo del individuo, su historia, sus conocimientos, inclinaciones y experiencias, y de la actividad que esté realizando en un momento dado.

En la revisión bibliográfica, el término *percepción geométrica* fue localizado en tres investigaciones relevantes.

- En el trabajo de Oviedo (2009) el término de percepción geométrica es análogo al que se utilizó en esta tesis, pero desde una mirada a la complejidad que subyace a la percepción y que se ve reflejado en su definición: “una habilidad de deducir y establecer relaciones entre los objetos, sus propiedades y su enunciación, o sea de un conjunto de estrategias verbales de localización espacial y complejidad cognitiva en la comunicación referencial”.
- El psicólogo ruso Krutetskii (1976:233) por su parte, estudia las habilidades matemáticas de niños prodigio, e identifica una habilidad que llama *formalización de la percepción*, que habilita al sujeto para comprender la estructura de un problema en el ámbito del conocimiento matemático. Es decir, esta habilidad, a decir de Krutetskii, le da al sujeto la posibilidad de separar la forma de los contenidos y, a su vez, le permite abstraer desde lo concreto tanto relaciones numéricas como formas espaciales.
- Los trabajos de Fuenlabrada (2005), se sitúan en el estudio de las condiciones didácticas que posibilitaban que los niños pequeños empiecen a desarrollar su percepción geométrica a través de la interacción con las figuras geométricas a fin de posibilitar que vayan descubriendo los usos y funciones de las propiedades

básicas de éstas como un antecedente importante para su ulterior estudio formal.

Después de contrastarlas con el marco teórico y las preguntas de investigación, se decidió utilizar la definición que Fuenlabrada propone, donde establece que la percepción geométrica se sitúa en desarrollar en el sujeto su capacidad para «mirar formas que no están y dejar de mirar formas que sí están». El recurso didáctico principal está sustentado en la manipulación de elementos geométricos tangibles (piezas de rompecabezas) que, aparte de ser vistos (percepción visual) y tocados (percepción kinestésica) por el individuo, es necesario que éste lleve a cabo una serie de decisiones y estrategias que le ayudan a descubrir cuál de los elementos a la vista hay que seleccionar, cómo hay que manipularlo, y dónde es el lugar adecuado para obtener el resultado deseado en el esquema de solución diseñado y construido por el individuo. Lo anterior estuvo en sintonía con las dinámicas lúdicas que se efectuaron con la población muestra y que consistieron en la manipulación (de piezas) de material didáctico de corte geométrico.

Al enfocarnos precisamente en la percepción geométrica, necesitábamos apoyarnos en el marco teórico y poder así contestar las preguntas de investigación que nos habíamos planteado. En este sentido, nos interesaba saber, en primer lugar, qué estrategias utilizan los estudiantes de bachillerato en la resolución de situaciones problemáticas que implican a la percepción geométrica para resolverlas. Al respecto encontramos que en general, las estrategias implementadas eran una o dos muy parecidas para cada juego, sin embargo, había más variedad en las tácticas que las conformaban. Por ejemplo, hubo estudiantes que utilizaron alternadamente sólo dos tácticas en todos los retos de un juego y con buenos resultados, pero también hubo quienes utilizaron hasta 4 o cinco tácticas sin llegar a resolver el reto propuesto. Del mismo modo, los desempeños mostrados por los estudiantes no fueron constantes ni lineales, es decir, un «buen» o «mal» desempeño en un juego en particular no se reproducía en los mismos términos en los demás retos o juegos. Prueba de ello fueron los comportamientos atípicos que algunos estudiantes observaron en la sesión lúdica. Diana, por ejemplo, logra armar los cuatro retos del kataminó, pero ni siquiera le es posible armar una figura razonablemente cercana a la solicitada en el tangram. Del mismo modo Jorge tiene un excelente desempeño en el laberinto con los tiempos de ejecución más bajos pero no logra armar el tangram como tampoco el último reto del kataminó.

En segundo lugar, nos interesaba indagar también cómo se manifestaba la *percepción geométrica* desarrollada por los alumnos al resolver situaciones problemáticas que la implican. A este respecto los datos registrados muestran que en general los estudiantes de la muestra, antes de llegar al bachillerato, han tenido pocas oportunidades en su tránsito por la escuela de resolver situaciones relacionadas con la geometría, ni siquiera con sus elementos más básicos, contando solamente con la experiencia diaria de la ubicación espacial, y algunas incursiones esporádicas a algunos juegos didácticos como rompecabezas comerciales; en contraste, han tenido más experiencias con situaciones de conteo (pagar y dar cambio, contar objetos, pesar cosas, reparto) que hacían o hacen con frecuencia en sus negocios y comercios. Pero al enfrentarse a un problema geométrico lo poco o mucho adquirido hasta este momento fue lo que pudieron utilizar, implementar o improvisar para resolver los problemas planteados en la sesión lúdica de la investigación que nos ocupa. Unos con buen éxito (tres estudiantes) y el resto con mediano y bajo éxito.

Lo anterior nos dio elementos para pensar que la percepción geométrica es una construcción del individuo que se va conformando y perfeccionando en función de la diversidad de experiencias geométricas a las que esté expuesto junto a los elementos y propiedades geométricas que demanda cada una de ellas. Tener una buena percepción geométrica no garantiza *per sé* que ésta ayude a resolver cualquier problema [geométrico] que se le presente al estudiante, pero entrenar y desarrollar la percepción geométrica en la educación básica, le permitirá abordar, en el nivel medio superior, los problemas geométricos con más anticipaciones sobre lo que es posible hacer y también confianza para experimentar con mayor libertad estrategias y tácticas para resolver nuevas problemáticas de orden geométrico y así seguir avanzando en el conocimiento de la geometría. Este comentario se hace con base en la actitud de reserva y desconcierto que mostraron la mayoría de los estudiantes de la muestra, frente a los juegos que se les plantearon

De esta indagatoria junto a nuestras preguntas de investigación se derivaron otras preguntas más: ¿cómo es que la percepción geométrica se puede manifestar?, ¿qué es lo que la dispara o acciona? Una figura geométrica por sí misma no es suficiente para desplegar la percepción geométrica, esta habilidad se desarrolla y se manifiesta cuando existe una situación de conflicto, un problema o reto que ponga en juego la necesidad de usar las propiedades geométricas de una figura en relación con otras para encontrar una

solución. Desgraciadamente todavía muchos docentes enseñan las figuras geométricas una por una, de manera aislada, esto limita considerablemente la posibilidad de desarrollar la percepción geométrica de los alumnos, para ello es necesario que varias figuras estén presentes y sea necesario interactuar con ellas con un propósito específico, determinado por una situación problemática.

¿La percepción geométrica es determinante para mejorar el desempeño académico de los estudiantes en el ámbito de la geometría? Contestar esta pregunta requiere de más tiempo que el que se tuvo para llevar a cabo este trabajo de tesis, y también se requiere de realizar diversos estudios didácticos con alumnos de educación básica para valorar su efecto en el aprendizaje de la geometría con los estudiantes del nivel medio superior para así, poder proporcionar una respuesta más sustentada que las observaciones proporcionadas por el estudio que se reporta en este trabajo.

- Los materiales didácticos.

El análisis de los materiales didácticos utilizados en esta indagatoria: el Kataminó, el Mueve uno, el Laberinto y el Tangram avanzado, mostró que su elección fue pertinente a los propósitos de la investigación. Se encuentra que cada uno permitió retar el intelecto de cada jugador en diversos aspectos geométricos. Así por ejemplo, el Kataminó, con 4 retos evidenció habilidades de rotación angular y transversal de cada pieza, así como la traslación de éstas. El Mueve uno, con 30 retos, demandó la traslación y rotación angular de figuras completas para determinar que pieza (palito) había que mover, así como la discriminación de piezas. El Laberinto, con 4 retos, puso en juego la traslación de piezas; así como, la observación no de la forma de la pieza (todos son cuadrados) sino del dibujo inscrito en ella. Por último, el Tangram, con un sólo reto, requirió de la discriminación de figuras así como la rotación angular y la rotación sobre el eje transversal de cada pieza, lo que resultó de mayor complejidad para la percepción geométrica de los estudiantes y consecuentemente el que menos participantes pudieron resolver.

- EL análisis de los datos

Para el análisis de los datos, fue necesario incorporar elementos que pudiéramos utilizar como parámetros para realizar una «medición» de la percepción geométrica de los estudiantes de la muestra. Esta medición no pretende ser absoluta, sino más bien indicativa del desempeño de la percepción geométrica de cada participante.

Una manera de medir el avance en una actividad es con el número total de movimientos que realiza el estudiante. Se piensa que si se realizan menos movimientos se será más hábil. Sin embargo, al tener en un solo número el total de movimientos realizados, se ocultaba información de cómo y con qué frecuencia se intentaba resolver el reto, así los movimientos los agrupamos en intentos. Un intento es un conjunto de movimientos de piezas con el objetivo de solucionar un reto geométrico. Al no lograrlo se vuelve a intentar deshaciendo la configuración o reconfigurando lo que se tenía armado.

El número de intentos muestra cuántas veces el estudiante abordaba el problema con un nuevo arreglo o idea, con otro enfoque. Del mismo modo tenemos las *tácticas*, un conjunto de movimientos de piezas, similares al intento, con la particularidad de observar la forma o modo en que son movidas las piezas con la misma intencionalidad de resolver el reto planteado. Un conjunto de tácticas conforman una estrategia de solución. Por último tenemos el *tiempo* invertido en la solución del problema. Sin embargo, éste no puede tomarse como un parámetro absoluto que indique que el estudiante ha desarrollado una mayor o menor percepción geométrica que sus compañeros, debido a que hubo estudiantes, como Ana, que resolvieron el reto moviendo sus piezas de forma lenta con cierto nivel de éxito, y otros, como Jeremías, que las movían muy rápido sin resolver el reto. Nuestra investigación no mide la velocidad de resolución de un problema, sino la forma, el proceso y las herramientas para resolverlo. Así que el tiempo es sólo un auxiliar indicativo.

La información obtenida al observar los videos fue registrada, en principio, en cuatro cuadros de doble entrada, una por cada juego, donde se clasificaron y ordenaron todos los datos referentes al tipo de reto, tiempos de ejecución, movimientos de piezas, intentos realizados y tácticas de resolución que cada participante mostró al interactuar con cada juego.

Respecto a la “clasificación” ésta se logró determinar considerando no sólo si un estudiante resolvía o no el reto, sino también el número de intentos realizados, el tiempo invertido y el tipo de tácticas aplicadas. Esto permitió construir una lista ascendente ubicando a cada participante en el lugar correspondiente a su desempeño en cada juego en relación con el desempeño mostrado por los otros estudiantes de la muestra.

La clasificación dio lugar a la conformación de tres grupos. El primero compuesto por tres estudiantes que resolvieron todos los retos planteados con buenos promedios de ejecución (intentos y tiempos). Del lado opuesto están dos estudiantes quienes

resolvieron los retos con tiempos largos y más intentos. Y el grupo intermedio quienes tienen un desempeño «regular» en la mayoría de sus intervenciones. Esta clasificación no es del todo estricta ya que observamos que hubo estudiantes buenos en un juego y regulares en otros, es decir, la percepción geométrica en un estudiante no puede considerarse absolutamente buena o mala, está en función de la tarea particular que enfrenta; aun así se pretendería en el proceso de formación del pensamiento geométrico de los estudiantes que dicha habilidad fuera razonablemente buena y no sistemáticamente limitada como apoyo en la resolución de situaciones problemáticas..

De estos datos se pudieron obtener dos gráficas donde se observa con más detalle los casos donde el desempeño fue bueno y aquellos donde fue todo lo contrario. Otra de las gráficas muestra la manera en cómo los juegos impactaron la percepción geométrica de cada estudiante, es decir, se acumularon los desempeños de cada uno y con ello se muestra en qué medida un juego específico influyó en cada participante.

En dichas gráficas se pueden apreciar mejor los desempeños atípicos que mostraron algunos miembros de la muestra, es decir desempeños no esperados por un estudiante cuando sus antecedentes indicaban una constante en sus éxitos o fracasos. Esto confirma una vez más que la percepción geométrica de cada miembro no es uniforme ni absoluta, sino que hay altibajos, construcciones nuevas que dependen del tipo de reto, del tipo de material, de los conocimientos y habilidades geométricas requeridas y de los antecedentes particulares del participante, que le permiten dar una posible solución a un reto.

Respecto de los materiales didácticos diremos que el Kataminó, el Laberinto, el Mueve uno y el Tangram avanzado fueron seleccionados por tener ciertas características, entre ellas: Que utilizaran piezas geométricas de fácil uso, reglas de juego sencillas, que pudiera ser jugado al menos por un sólo jugador y, que hiciera uso de propiedades geométricas como rotación, traslación, reflexión y simetría. De éstos el Tangram avanzado fue seleccionado por ser un juego conocido, donde los trabajos de Fuenlabrada (2005) han insistido en la necesidad de usarlo desde preescolar y los primeros años de la educación primaria para que los alumnos pongan en juego y desarrollen su percepción geométrica trabajando con figuras y cuerpos, que a la postre impactan el desarrollo intelectual no solamente en matemáticas. Así mismo se desarrollan, por ejemplo: la autoestima, el concepto de espacio, la ubicación espacial de los objetos (adelante, atrás,

arriba y abajo), la motricidad (manejo de las piezas) y la percepción de la forma (cuadrado, triángulo, rectángulo, romboide).

La pretensión de esta investigación es mostrar cómo la percepción geométrica está presente en la solución de cualquier situación de conflicto donde estén involucrados aspectos como: el espacio, el orden, la clasificación y el acomodo de objetos, la discriminación geométrica de objetos (piezas) y donde se tenga la necesidad de usar una serie de tácticas y estratégicas que le permiten al individuo usar todo lo anterior para la resolución de un reto, de un problema, que lo colocaría definitivamente en una mayor ventaja competitiva.

La percepción geométrica es una habilidad que antecede al conocimiento geométrico y en el proceso de adquisición ésta se amplía y se enriquece. Esto conlleva la ventaja, por sobre el desarrollo de otras habilidades, que puede empezar a desarrollarse sin conocimientos previos de propiedades geométricas básicas, ni de los nombres de los objetos geométricos en cuestión; contrario al de la habilidad de cálculo mental, por ejemplo, el cual requiere como insumo indispensable, el conocimiento del conteo y el descubrimiento de algunas relaciones aditivas y/o multiplicativas. La percepción geométrica puede desarrollarse intencionalmente desde edades tempranas de manera constante junto a la capacidad del individuo para adaptarse al medio ambiente que lo rodea, apela a la intuición y al razonamiento lógico desde que va teniendo conciencia de dónde está y qué hay a su alrededor, y se manifiesta como un recurso del sujeto para el razonamiento abstracto indispensable en el nivel medio superior y superior.

Investigaciones futuras

El estudio de la percepción geométrica que hemos presentado es solo el comienzo de un estudio más amplio y complejo en el sentido de ver qué relaciones e influencias tiene la percepción geométrica con otras áreas del conocimiento, en especial, con la matemática y su relación con el desempeño académico de los estudiantes. Fuenlabrada (2005) ya ha empezado este trabajo en los niveles educativos de preescolar y primaria, pero no se encontraron estudios al nivel de secundaria o de preparatoria. Sin embargo, existe trabajo sobre la percepción visual de figuras geométricas a nivel secundario (Hassan, 2002), Por otro lado, Artigue (2003) tiene la mirada puesta en la investigación educativa relacionada con la matemática en los niveles superiores, específicamente en la enseñanza de los principios del cálculo, donde, según mi experiencia docente en esta

área, suponemos que la percepción geométrica debería estar lo mejor entrenada posible para facilitar el estudio de esta rama de la matemática.

Agradecimientos

Doy las gracias a los nueve estudiantes que amablemente aceptaron participar en esta indagatoria, invirtiendo su tiempo y esfuerzo en las dos y a veces tres sesiones necesarias para esta investigación, algunas hasta de dos horas seguidas. De lo anterior se obtuvieron aproximadamente 21 horas de video-grabaciones, las cuales fueron revisadas varias veces para contabilizar tiempos, movimientos e intentos, así como detectar las diversas tácticas, estrategias y situaciones atípicas que entre otros datos dieron cuerpo al presente reporte.

Referencias bibliográficas

- Araujo Oviedo, Enrique. (2009) Relaciones espaciales y percepción. En <http://enriquearaujoviedo.files.wordpress.com/2009/06/analisis-del-test-de-percepcion-v2.pdf>.
- Artigue, Michèle (2002) Ingeniería didáctica: ¿Cuál es su papel en la investigación didáctica de hoy? UFR de Mathématiques, Université Paris 7 . Título original: Ingénierie didactique: que rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? En Les dossiers des Sciences de l'Education. Didactique des disciplines scientifiques et technologiques: concepts et méthodes. Revue Internationale des Sciences de l'Education. Presses Universitaires du Mirail. N ° 8, 2002.
- Artigue, Michèle (2003) ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 pp. 117
- Ávalos Rogel, Alejandra (1997) "Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización" Tesis de maestría para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Investigaciones Educativas. Directora de Tesis M. en C. Irma Fuenlabrada, Codirección Dra. Guillermina Waldegg. DIE-Cinvestav, marzo 20, 1997.
- Barrantes, Hugo (2006) Obstáculos epistemológicos, CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, Año 1, Número 2
- Bayo Margalef, José (1987) Percepción, Desarrollo cognitivo y artes visuales. Ed. Anthropos.
- Block, David, Moscoso, Antonio, Ramírez, Margarita, Solares, Diana. (2007) La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria Revista Mexicana de Investigación Educativa [en línea] 2007, 12 (abril-junio): [Fecha de consulta: 13 de febrero de 2014] Disponible en:<<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14003313>> ISSN 1405-6666
- Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2000). Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar. Buenos Aires, Novedades Educativas
- Bressan, Ana (2005) "Los principios de la educación matemática realista"; en Aliaga, H; Bressan, A. y Sadovsky, P.; Reflexiones teóricas para la educación matemática; Buenos Aires, Libros del Zorzal 2005; pp. 69-98
- Brousseau Guy (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal, Argentina (traducción Dilma Fregona).

- Cooper & Shepar (1985) "Rotación mental de objetos", en *Investigación y Ciencia*, Febrero N° 101, pp. 70-77
- Fuenlabrada, Irma, (1996) "El conocimiento del espacio y el de la geometría, ¿qué y cómo se enseña?", *Las matemáticas en la escuela, BÁSICA, revista de la escuela y del maestro*, Año III julio-agosto de 1996 (11):61-68.
- Fuenlabrada, Irma, Leove Ortega y Ruth Valencia (1996), "La geometría en los libros de texto de Matemáticas del primer ciclo de primaria", en G. Waldegg y D. Block (coords.), *Estudios en Didáctica*, México, Grupo Editorial Iberoamérica
- Fuenlabrada, Irma, (2005), ¿Cómo desarrollar el pensamiento matemático en los niños de preescolar? La importancia de la presentación de una actividad. En SEP (2005), *Curso de Formación y Actualización Profesional para el Personal Docente de Educación Preescolar*. México, SEP-Subsecretaría de Educación Básica, Dirección General de Desarrollo Curricular, vol. 1 pp. 279-296.
- Fuenlabrada, Irma (2005b). El programa de educación preescolar 2004: una nueva visión sobre las matemáticas en el jardín de niños, Coord. Eva Moreno Sánchez en Curso de formación y actualización profesional para el personal docente de educación preescolar. Subsecretaria de Educación Básica, dirección general de desarrollo curricular
- Fuenlabrada, Irma, (2006), ¿Sólo con fórmulas se puede calcular la superficie?, Documento 60, DIE-Cinvestav-Sede Sur. México.
- Granovskaya, Bereznaya, Grigorieva (1987) *Perception of form & forms of perception*. Lawrence Erlbaum Associates publishers. Hillsdale, New Jersey
- Gutiérrez, Angel (1991), *Procesos y habilidades en percepción visual*. Memorias del 3er congreso internacional sobre investigación en educación matemática, Valencia, España.
- Hadamard, Jacques (1949) *An essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton University Press.
- Hassan, A. A. (2002) Relationship between visual perception of geometric shapes and achievement of students in junior secondary school, *Ilorin Journal of Education*, 21. Available on:[<http://unilorin.edu.ng/journals/education/ije/dec2002>]
- Herrero Martín, Javier, Pinedo del Campo, Juan Ignacio (2005). *Pensamiento Estratégico, Teoría de Juegos y Comportamiento Humano*. Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación [en línea] 2005, (): [Fecha de consulta: 28 de abril de 2014] Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=77100604> ISSN 1579-3141
- Krutetskii, Vladimir A. (1976) *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren* (1968, Russian edition; 1976, English translation) The University of Chicago press.
- Lira F. J. (2004), *Percepción y matemática*, vol III. Anuario de Investigación, Departamento de Educación y Comunicación, UAM-Xochimilco, México, pp. 671-687
- Montanero, Manuel y León, José A. (2001) Aceptaciones "sustantivas" y "Adjetivas" del concepto de estrategia. *Estudios de psicología: Studies in Psychology*, 22(3), Págs. 345-356. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1174/021093901753581385>

- Montanero, Manuel y León, José A. (2003) El concepto de estrategia: Dificultades de definición e implicaciones psicopedagógicas. Consultado en Febrero de 2014. Disponible en:
<http://www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Montanero_Fernandez_y_Leon.htm>
- Muria, Villa , Irene. La enseñanza de las estrategias de aprendizaje y las habilidades metacognitivas. Perfiles Educativos [en línea] 1994, (julio-sept): [Fecha de consulta: 6 de septiembre de 2014] Disponible en:
<<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13206508>> ISSN 0185-2698
- Núñez-Peña, M. I. y Aznar-Casanova, J. A. (2009) Rotación mental: Cómo la mente rota las imágenes hasta colocarlas en su posición normal. *Ciencia Cognitiva: Revista Electrónica de Divulgación*, 3:2, 58-61.
- Peacock, James (2001). La lente antropológica. Luz fuerte, enfoque suave. Alianza editorial. Pág. 33
- Roberts Fred, Suppes Patrik (1967) Some problems in the geometry of visual perception. *Synthese* 17, 173-20, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-ttolland
- S.E.P. (1995). *Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica. Primaria*. México: 1993.
- Sadovsky, Patricia (2005) “La teorías de las situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática”; en Aliaga, H; Bressan, A. y Sadovsky, P.; Reflexiones teóricas para la educación matemática; Buenos Aires, Libros del Zorzal 2005; pp. 30-33
- Sánchez López, Fco. (2013). Estrategias de resolución geométrica por Insight. Un estudio exploratorio. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. España. Disponible en: <http://www.tdx.cat/handle/10803/117267>
- Schuster, Graciela (SA) Problemas de la percepción, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras. Introducción al lenguaje de las artes plásticas. Tomado el 15/07/14 de : < <http://es.scribd.com/doc/45679316/Problemas-de-La-Percepcion> >
- Van Hiele, Pierre Marie (1990) El problema de la comprensión, en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis doctoral.
- Vargas Melgarejo, Luz María. (1994) Sobre el concepto de percepción, *Alteridades*, vol. 4, núm. 8, 1994, pp. 47-53, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, México. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=74711353004>
- Vasco, Montoya Eloísa (1996). Maestros, alumnos y saberes. Investigación y docencia en el aula. Colección Mesa redonda. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá, Colombia
- Verstraelen, Leopold (2005) A geometrical description of the visual perception, *Kragujevac J. Math.* 28 (2005) 7-17.

- Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011) Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria, *Números*. Volumen 78, noviembre de 2011, páginas 73–94
- Villarroya, B. Florencio (1994) El empleo de materiales en la enseñanza de la geometría. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, No. 21, Sepbre/Decbre, 1994, pp.95-104. Recuperado el 15 de enero de 2013, de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117840>.
- Waldegg G., Agüero M. (1999) Habilidades cognoscitivas y esquemas de razonamiento en estudiantes universitarios. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* julio-diciembre 1999, vol. 4, núm. 8, pp.203-244, México.
- Zárate, Eduardo Salas (2000) *Aprende matemáticas jugando*, Universidad Pedagógica Nacional, México.