CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SEDE SUR
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

De las figuras geométricas a las fórmulas de área. Tensiones entre conocimientos de los alumnos y contenidos curriculares.

Tesis que presenta

Tatiana María Mendoza von der Borch

para obtener el grado de

Doctora en Ciencias

En la especialidad de

Investigaciones Educativas

Director de Tesis

Dr. David Francisco Block Sevilla

Ciudad de México Febrero, 2021

Para la elaboración de esta tesis se contó con el apoyo de una Beca del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

A mi madre, Maren von der Borch,
quien me regala libros maravillosos y me da consejos para hacer una tesis.
La he visto leer como un demonio y tomarse la escritura muy en serio.
Y, sobre todo, hecha en la guerra y en la lucha,
sus problemas de investigación provienen siempre de un profundo compromiso.

A mi abuela, mi nana Lola,
quien usaba las tesis para equilibrar las patas de una cama
y los libros de poemas para hacer la lista de las compras.
Ella me enseñó como nadie que la plática es tan importante como la escritura.

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis salió, atravesada por un temblor, un divorcio, una pandemia, una computadora que funcionaba un día sí y uno no, dos inundaciones que me llenaron los muebles y la cabeza de agua, un papá y una hermana exigentes. También me distraían dos niños preciosos, dos perros dulces y diablos, y unos libros de texto. Los cuatro años imaginé una gran fiesta al final llena de abrazos, para la que ya había empezado a hacer la *playlist*, fiesta que no será. Francamente, me encantaría que se construya un monumento para mí y para todas las mujeres que consiguen trabajar en estas y otras tantas circunstancias. Un monumento gigante, a medio periférico, que atraviese los dos pisos. Disfruté enormemente hacer la tesis, de principio a fin -obviamente con altibajos-, gracias a toda la gente que me acompañó en el camino.

Gracias a la maestra que me permitió entrar a sus clases, muchas veces me invitaba a seguir platicando en los recreos y luego seguíamos hasta por chat. Todo el tiempo me hablaba de sus alumnos, me contaba sus preocupaciones, decisiones e incertezas. En ella conocí, más que nunca, a una maestra de carne y hueso, profundamente implicada con los niños y con las matemáticas. Gracias a los niños, a quienes disfruté tanto que ni quería dejar el trabajo de campo ni quiero terminar la tesis. Esos niños decían “¿pues qué tanto escribe maestra?... miss, ponga ahí que él me está molestando… ¡saluden a la cámara! ¡un saludo para mi mamá!... miss Tatiana, ¡siéntese acá, con nosotros!”. Cada vez que veo los videos encuentro nuevas maneras de sobrevivir, aprender, padecer y ser feliz en la escuela. Al principio yo escribía solamente usando mis lentes, sin implicarme en lo que veía desde afuera, pero poco a poco empecé a preguntarme cada vez más, hasta que se convirtió en una preocupación permanente, si he sabido contar dignamente una historia que la maestra y sus alumnos encarnan todos los días.

Agradezco a mi asesor, David Block Sevilla, por su infinita inteligencia y su habilidad para hacerla crecer en los demás. Con esa típica manera suya de sugerir como de pasadita algo que termina siendo central, me puso frente a los ojos, en un comentario al margen, el interés por mirar a los alumnos “con dificultades”. Muchos de mis datos provienen de su creatividad para transformar una tarea con fuertes debilidades en otra interesante y accesible para los alumnos, gestionable para la maestra, sin mucho aspaviento: simplemente con una hoja cuadriculada. Eso me hizo entender, entre otras cosas, que la necesidad de incorporar nuevos problemas de investigación en didáctica no quita urgencia a sus problemas

originales. La escritura se vuelve mucho más fructífera cuando se tiene un interlocutor que sabe escuchar, ver matices, tomar cualquier idea como asunto a pensar y modificarla de mil maneras. La combinación de autonomía y proximidad me permitió tomar muchas decisiones, definir la consistencia de mi propio trabajo, y también reorientarlo cuando era tiempo, asumiendo tareas que me llevaron por caminos fértiles.

Mi maestra y madrina, Elsie Rockwell, ha sido parte de este trabajo de muy diversas maneras. Ella me invitó cuando era una chamaca a un proyecto que me rebasaba pero que resultó fuente inagotable de aprendizajes, incluso ahora, veinte años después, y que me atrajo hacia la investigación educativa. Me animó a hacer el doctorado, me dio muchos consejos prácticos para hacer una tesis -como partir de *tweets*-, y leyó el borrador con la inteligencia de siempre. Me acercó al trabajo de Kula y a los inagotables estudios sobre interacciones sociales en el aula. Me enseñó que hay que ir a la historia para entender, y que historia puede ser el turno anterior en un fragmento de clase. Sus comentarios sobre la escritura me hacen ver que tengo innumerables cosas por aprender todavía: la consistencia gramatical de las frases, el exceso de comas, la elección de las palabras, y otras que noto que pone en juego, pero son para mí como trucos de magia, indescifrables. En medio de todo eso, además, preguntaba cómo iban los niños, los perros, mis papás, mis hermanas y hasta si tenía platos suficientes en casa. Gracias infinitas por haber estado siempre cerca.

Tuve a tres grandes más en mi comité de doctorado: Patricia Sadovsky, Antonia Candela y Dilma Fregona. Patricia se sentó conmigo a ver fragmentos de video en los que encontrábamos un universo inagotable que nos hizo reunirnos siete tardes en un mes, insistió en no separar las interacciones sociales de las interacciones con la tarea, me ayudó a pensar en cómo dar cuenta del trabajo de la maestra. Toña me enseñó a fijarme en las intervenciones de niños y la maestra como reacción a lo que otros dijeron o hicieron antes, me preguntó dónde están las dificultades para resolver una tarea y, al analizar juntas algunos fragmentos desde la tesis de maestría, me decía frases como “aquí hay un titubeo, y el titubeo indica duda”, que me dejaron con ganas de acercarme a otras perspectivas. Dilma me ayudó a cuidar mi manera de hablar de la forma, espacio y geometría; en las pláticas en Brasil me hizo ver que, en didáctica, hablar matemáticas también es una parte importante de hacer matemáticas; y me ha dejado la tarea de aprender a hablar del *medio* con más fluidez. Las tres contribuyeron a que yo viera algo sobre lo que apenas conseguí avanzar en un capítulo, pero quiero profundizar en mis siguientes producciones: conjugar, en el análisis de la actividad de los alumnos, la casualidad con las elecciones, lo fortuito con las anticipaciones, el desorden con cadenas de reacciones, en suma, resaltar los conocimientos de los alumnos sin dejar de reconocer su volatilidad. Soy muy afortunada de tener la letra a mano, la voz, los gestos y los comentarios en archivo de quienes han sido para mí referencia obligada desde hace mucho tiempo, para ayudarme a pensar y escribir.

Siempre estuve cobijada por un grupo que leía conmigo, el seminario de didáctica de las matemáticas, incluyendo a los que van ahora cada quince días al *Jitsi* y los que ya no están, pero son expertos en dar apoyo en el café o a la distancia: David Block, Ligia Ramírez, Yesenia Castaño, Margarita Ramírez, Laura Reséndiz, María Laguna, Juan José Sosa, Aldo Escamilla, Evelyn Caballero, Alejandra Ávalos, Octavio Macías, Apolo Castañeda, Javier Zariñan, Moisés García, Diana Solares, Ana Laura Barriendos, y Dolores Lozano. Leer juntos es mucho mejor que hacerlo sola, esos textos fueron los que más entendí. Además, hicieron críticas y sugerencias a los borradores de mis capítulos que me ayudaron mucho a mejorarlos. Conocer también sus trabajos me ha ayudado a enriquecer y poner en perspectiva el mío. A partir del seminario conocí también a Cecilia Madero e Ivonne Sandoval, con quienes he aprendido mucho de medición en primaria al trabajar con maestros y hacer libros de texto.

Susana Ayala, Grecia Gálvez, Irma Saiz, Ruth Mercado, Rocío Sepúlveda, Gabriela Naranjo y Paola Arteaga, leyeron en algún momento los avances de algún capítulo y enfatizaron que valía la pena centrarme en los niños, que tenía que ver más matices en mis primeras interpretaciones “tan gringas”, que necesitaba mejorar los registros, y las maravillas que hacen los niños al nombrar.

Evelyn Caballero hizo las grabaciones de video de las clases, y cada vez que salíamos de la escuela platicábamos sobre lo que ambas habíamos mirado. Su entusiasmo por la infinidad de cosas que acabábamos de ver juntas me hacía llegar a casa a poner estrellitas en algunas notas y me hacía sentir que tenía puestos los ojos en algo que valía la pena.

Muchas personas me apoyaron en distintos asuntos prácticos y organizativos. Laura Reséndiz me ayudó con la logística del taller para maestros, me enseñó a usar Transana para hacer los registros, y trajo siempre café a los seminarios. Rosa María Martínez y Ernesto Anell se sentaron conmigo a hacer solicitudes punto por punto, atendían siempre dudas, hacían mil recordatorios. Rosalba Ramírez estuvo muy pendiente en la recta final: contestaba correos a las tres de la mañana, asistió a todos los eventos en línea, preveía antes de cada uno mil detalles para que no hubiera fallas.

Daniela Madrigal hizo las primeras transcripciones de algunos videos. Al trabajar sobre ellas me di cuenta de que las dos oíamos distintas palabras en una frase, que una percibía titubeo donde la otra oía una respuesta segura, una agregaba una pausa donde la otra escuchaba una intervención "de corridito", para una había un silencio y para la otra una elongación. Cuando la maestra decía el nombre de una alumna, una de nosotras ponía una aclaración entre corchetes porque interpretaba que estaba dirigiendo la consigna a ella en particular, y la otra ponía el nombre entre signos de admiración porque sentía que le estaba llamando la atención. Muchas veces sus registros y los míos se complementaban, como cuando una se fijaba en la pieza exacta que estaba mostrando la maestra y la otra veía que al mismo tiempo una niña le señalaba con el dedo algo a su compañera. Todo eso me hizo entender que desde el registro hay interpretación. Extrañé mucho esos intercambios en los fragmentos que me tocó transcribir sola, porque ahí ya no reparaba tanto en la mano mía detrás del dato.

Teresa Martínez y Ana Laura Barriendos resolvieron gran parte del formato, haciéndome ver el taco que me daba al poner una cita con comillas y cursiva o, al contrario, cómo al achicar demasiado las letras me hacía chiquita yo también.

Durante mi estancia de doctorado en Argentina fui muy acogida por Patricia Sadovsky, María Emilia Quaranta, Patricia García, María Mónica Becerril, Elisa Cragnolino, Fernanda Delprato, Nicolás Pérez Cuevas, Dilma Fregona, Erik Lara, Dana Sokolowicz, Jenifer Spindiak, Valeria Buitron, Claudia Broitman, Verónica Grimaldi y Pilar Cobeñas. La calidez con la que fui recibida me hizo saborear las medialunas mientras recogía un nuevo texto por leer, habitar una variedad de casas luminosas mientras recibía valiosos comentarios a mi tesis, conocer una ciudad caminándola de punta a punta mientras descubría maravillosos proyectos de investigación, adorar nuevos sonidos que agrandaron mi español ya de por sí norteño, chilango, académico y fresa, mientras entendía que un problema didáctico es siempre un problema político. Ese encuentro me hizo aprender mucho de didáctica, al tiempo que me acercó a ciudades increíbles de una manera a la vez muy íntima y muy abierta.

No puede faltar el Cubo 43, un grupo inteligente, solidario y risueño. Con Elsie Rockwell, Manuel Rejón, Valeria Rebolledo, Susana Ayala, Teresa Martínez, Julieta Briseño, Elisa Cragnolino, Esther Tapia, Juan Páez, Male Gómez Tagle y Lulú Solares se comen las berenjenas más ricas del mundo, los hijos viajan a Tlaxcala cuando se trabaja con maestros, llega una computadora de regalo el día exacto en el que la viejita se niega a seguir haciendo tesis, se hace y se comenta la mejor selección de noticias por leer, se oyen millones de historias de escuelas y, en lugar de la típica pregunta "¿cómo vas con la tesis?", llega una orden: "¡apúrate, ya quiero leerla!". Los proyectos que hemos hecho y los que estamos por hacer le han dado otra perspectiva a mi tesis.

Agradezco a Tania Carbajal, mi hermana desde que hicimos juntas la maestría, por su manera tan juguetona y práctica de parar en seco los laberintos en los que yo me enfrasco: "tú entra, el doctorado te va a servir mucho, aunque sea para que firmes como *Dra.*".

Mis hijos me enseñaron muchísimo sobre cómo aprenden medición los niños. Siempre sonrío cuando me acuerdo de Sebastián a los cuatro años preguntando a su tía si cuando ella nació existían los dinosaurios, y de María Inés a los dos años, poniendo el flexómetro sobre cualquier objeto y sosteniéndolo en cualquier rango de números, chueco y flojo, pero con toda la seriedad de gestos de un albañil profesional. Viéndolos crecer también he aprendido sobre la infinidad de cosas que ocurren cuando se aprende con otros en la escuela. Gracias por haber disfrutado cuando estaban con mamá y también cuando estaban sin mamá. Gracias por ser mis niños, mis amores siempre.

Moisés García cuidó a los niños muchas tardes antes de salir de casa, y muchos días durante la pandemia. Yo trabajaba tranquila sabiendo que ellos se subían al techo a aventar cosas lejos, encestaban la pelota y jugaban con los perros. Ese tiempo para trabajar me abrió otro para disfrutarlos cuando venían conmigo. Además, en las pláticas nocturnas que iban del gran tema al pequeño detalle, me empecé a fijar en la medición -en particular en la superficie-, me daba vueltas el consejo "si a ti te interesan las interacciones, no te distraigas", y encontraba por fin la lección específica que había estado buscando como loca o el dato bibliográfico que me faltaba. Cuando esas pláticas terminaron, supe que algunos maestros leyeron el artículo que salió de la tesis, y pude ver más videos de los alumnos de esos maestros haciendo las mismas actividades.

Hacer un doctorado con hijos requiere toda una logística que para mí hubiera sido muy difícil orquestar sin la red de mamás y papás con los que mis hijos han crecido. La ayuda que entre todos hemos sabido darnos ha resultado en tardes en sus casas, en la mía o en la calle de bicicletas, perros, gatos, espadas, chorros de agua, películas, calaveras, panqués, maquillaje, peleas, chistes, groserías y carcajadas. Especialmente con Emilienne Limón, Laura Gamboa, Paulina Mendoza, Ana Álvarez, Natalia Tannenbaum, Sandra Trujillo y Alfredo Velázquez, he compartido la manera de ver crecer a nuestros hijos, en particular siendo alumnos. Si a mí el papel de las interacciones sociales en el aprendizaje me interesaba desde antes, ser mamá, y serlo en colectivo, mantuvo vivo ese interés y le dio nuevos matices. Esa cercanía también me ha mostrado ejemplos de primera mano sobre los innumerables conocimientos de medición o espaciales que se asoman cuando los niños se acercan a actividades tan diversas como el diseño textil, la cerámica, o simplemente al habitar la casa, la escuela, la ciudad.

Alma Toledo, mi *peluquera* -como le decimos mis amigas y yo de cariño a las terapeutas-, me ayudó entender que vale la pena sobreponerse a los miles de fantasmas para hacer lo que a una le gusta, para construir y mostrar una voz propia, y para tomar posición. Que sentir orgullo de lo que he logrado hacer es también sentir orgullo de los demás, los múltiples otros que modificaron mi manera de mirar y de contar las cosas. Con ella pude estructurar mi tiempo, asunto fundamental para lograr escribir una tesis que ciertamente es práctico, pero atraviesa la vida afectiva de pies a cabeza. También me ayudó a pasar de una interpretación en términos de malos y pobrecitos a otra llena de aristas. Enriquecer las interpretaciones no solo depende de ir al campo, analizar una y otra vez los datos, hacer más lecturas o recibir comentarios de otros colegas. También supone un trabajo íntimo y difícil en el que ella fue imprescindible.

Mi padre, Alfonso Mendoza, me ha mostrado la importancia vital de empeñarse en aprender. A su lado he visto que, a pesar de los implacables esfuerzos del tiempo y el cuerpo por borrar la memoria, hay aprendizajes que perduran, que se aferran en una lucha contra el olvido. Uno puede no recordar dónde dejó hace cinco minutos la chamarra o el tema de tesis del que la hija ha hablado mil veces, y en cambio tener muy presente la manera de hacer tamales de la mamá hasta el detalle del tipo de hojas de maíz que usaba, y la frase con la que el secretario de educación describió a la SEP en 1921. Ver eso tan de cerca ha convertido para mí la tarea de hacer la tesis en un asunto de supervivencia a largo plazo: si la hice bien, algo retendré hasta el final.

Resumen

En este trabajo intento dar cuenta de una diversidad de tensiones entre los conocimientos implicados en procedimientos puestos en juego por alumnos de primaria, por un lado, y los conocimientos que se espera que aprendan, por el otro. A través de la observación de dieciocho clases de matemáticas de quinto grado de una escuela primaria pública de la Ciudad de México, dedicadas fundamentalmente a la enseñanza de las fórmulas de área, muestro que los alumnos están en posibilidades de estudiar las figuras geométricas, la noción de superficie como magnitud física, la medición de la superficie por conteo de unidades. No obstante, esos conocimientos son abordados con prisa, quedan subordinados al estudio de las fórmulas de área, el contenido que desde la prescripción curricular corresponde a ese grado. Paradójicamente, las propias fórmulas, al no estar ancladas a una problemática amplia vinculada a esos otros conocimientos, se vuelven de difícil acceso para la mayoría de los alumnos. Así, unos conocimientos están presentes en los procedimientos de los alumnos, y otros están en el programa oficial, los libros de texto, los cuadernos, los exámenes, las expectativas de la docente. De esta manera, muestro que la organización curricular de la escuela graduada dificulta la posibilidad de regresar a conocimientos sobre los cuales los alumnos tienen todavía mucho por aprender y están en posibilidades de hacerlo, y en cambio les exige aprendizajes bajo unas condiciones que los vuelven de difícil acceso. Para mostrar esas tensiones analizo la actividad matemática de los alumnos, apoyándome en perspectivas didácticas, fundamentalmente la Teoría de las Situaciones Didácticas, y también en estudios hechos desde perspectivas socioculturales, centrándome en la manera en que se tejen las interacciones de los alumnos con las tareas y con sus pares. Pongo especial atención en la actividad de los alumnos percibidos como “con dificultades”, porque ahí se manifiestan con mayor claridad las distancias entre los conocimientos vinculados a la noción de superficie que están al alcance de los alumnos y el contenido prescrito desde el currículo.

Palabras Clave: figuras geométricas, superficie, fórmulas de área, escuela primaria.

Abstract

In this work, I intend to identify and analyze a diversity of tensions between what elementary students know, as it is displayed in the procedures they use in problem solving, on the one hand, and what they are expected to learn, stated on the national curriculum, on the other. Based on the observations of eighteen fifth grade mathematics lessons on area formulae in a public elementary school in Mexico City, I explain how the study of geometrical figures, the notion of area as a physical magnitude, the area measurement through units, is accessible and desirable for students. Nevertheless, these ideas are visited hastily, as they end up subordinated to the work with the formulae for area, which is the curricular content prescribed for the school year. Paradoxically, the formulae are not supported by those other ideas, concepts and procedures, needed in order to understand what the formulae mean for most students. In this way, I show that certain mathematical ideas are present in students' procedures, while others appear in the official curricula, textbooks, student notebooks, mandatory evaluations and teachers' expectations. I explain how the curricular organization of the graded school makes it difficult to return to important mathematical ideas regarding area, which students still have to understand and are in conditions of doing so, and instead the curricular demands of the learning of formal knowledge under institutional conditions make work on those concepts impossible to organize. For this analysis, I draw on didactical perspectives, fundamentally the Theory of Didactic Situations, and also on studies developed within sociocultural perspectives, focusing on the way in which the interactions that students sustain with the tasks and their peers are interlaced. I also center my attention in the students with 'difficulties', because their activity shows with more clarity the distances between the ideas related to area that are available for students and the mandatory curricular content.

Key words: Geometrical figures, Area, Area formulae, Elementary school.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN: LA SUCESIVA REDEFINICIÓN DE UNA PROBLEMÁTICA

Cuando empecé a hacer las transcripciones de registros de clase para mi tesis de maestría (2006) me saltaba las partes que no mostraban la puesta en marcha de un procedimiento, una discusión colectiva sobre si el 100% corresponde al total o no, en fin, todo lo que no era directamente relativo al porcentaje, el contenido que yo estaba estudiando.

Pero había un fragmento particularmente largo en el que, mientras Claudia, una alumna, participaba en una puesta en común, otros dos estudiantes, Mario y Fabián, sentados en el otro extremo del salón, comentaban entre ellos: “bien inteligente, ¿no?”, “ni siquiera sabe”, “se quiere hacer la inteligente”, “se pasa”, “ni sabe la Claudia, ¿verdá?”. Después de saltarme esas intervenciones varias veces, entendí de golpe que ahí pasaba algo importante, ligado a la manera en que los alumnos incorporan las producciones matemáticas hechas por otros a las propias: el aporte de Claudia podía serles útil porque tenía que ver con un procedimiento más sencillo y fácil de regular que el suyo, pero no lo consideraron porque venía de ella.

Poco a poco empecé a fijarme en que Mario y Fabián, para aceptar producciones de otros, toman en cuenta de quién provienen; Margarita y Montserrat, al no estar seguras de lo que hacen, se esfuerzan por incorporar lo que dicen todos aunque sea contradictorio, pero a partir de ahí logran hacer elaboraciones propias; el grupo tiende a delegar en Guillermo y Josué las puestas en común; una intervención tímida de Gabriela termina generando todo un debate a propósito de dos maneras contradictorias de entender el porcentaje. Además, los procedimientos son valorados de manera diferenciada: un algoritmo, por ser universal, es altamente reconocido, aunque no se entienda y no se domine; en cambio, la estimación se considera íntima e ilegítima, se usa para controlar resultados, pero no se discute públicamente. En resumen, entendí que cuando un alumno está resolviendo una tarea, hay otros que ven, escuchan, hablan, se posicionan, y todo eso modifica la resolución. En otras palabras, los conocimientos que construyen los alumnos en clase están moldeados por las interacciones que sostienen tanto con la tarea como con sus pares respecto a esa tarea.

Unos meses antes, me había encontrado en uno de los cursos de la maestría con una frase que me hizo mucho sentido, en aquel momento, por la experiencia que yo misma estaba viviendo como alumna: “para que un alumno dé una respuesta correcta en clase, la respuesta debe ser «correcta» en su contenido académico y en su forma social" (Mehan en Erickson, 1982). En ese tiempo no pude averiguar mucho más, pero la cita fue una pequeña ventana que se abría en el sentido de que podía valer la pena acercar la perspectiva didáctica que yo estaba utilizando a otras teorías socioculturales para comprender mejor la actividad matemática de los alumnos en el aula. En efecto, yo consideraba lo que hacían y decían los alumnos en términos de su "contenido académico" pero no ponía mucha atención en que ese contenido está en función -además de la tarea- de quién habla o actúa, a quién se dirige, del momento oportuno para intervenir, de la habilidad para tomar turnos, de la manera en que se formula una frase para conseguir que sea escuchada.

Diez años después, me propuse estudiar en el doctorado lo que en la maestría encontré por casualidad: la manera en que los alumnos construyen conocimientos a partir de su interacción con la tarea, con sus pares y con el maestro, utilizando herramientas de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y de teorías socioculturales. Esta primera formulación del problema se fue transformando poco a poco.

Para enfocarla mejor, necesitaba elegir un contenido específico. Estudiarlo desde la didáctica me permitiría identificar, en los puntos vista de los alumnos, elementos originados en características de las tareas. Elegí primero la medición, que me interesaba desde hacía tiempo por la riqueza didáctica que encontraba en la literatura y en mis experiencias de trabajo en formación docente o desarrollo curricular, riqueza seguramente derivada en buena medida del papel crucial que la medición ha tenido en el desarrollo de las civilizaciones (Kula, 1998) y en la construcción de las matemáticas (Encyclopaedia Universalis, 1995).

La medición abarca un espectro de tipos de actividad muy diversos (Brousseau, 2001). Decir que una bolsa de manzanas pesa 5 kilos, que 2.7 kilómetros son 2700 metros, o que el área de un triángulo de 4 centímetros de base y 5 de altura es 10 centímetros cuadrados, es el resultado de un largo camino. Detrás hay numerosas experiencias en las que los niños se sorprenden porque un vaso más ancho que otro puede llenarse con menos agua (Vergnaud et. al., 1983); ponen y quitan manzanas en una báscula hasta que la aguja marque el 1 para saber qué tantas conforman un kilo; dan por hecho que una distancia que mide 12 es mayor que otra de 8, hasta que se dan cuenta que las unidades empleadas son diferentes (Fluckiger y Brun, 2005); se preguntan por qué anticipan distintas medidas para el peso de un vaso de agua, hasta que reparan en que al medir se puede caer un poco de agua, la báscula no está perfectamente calibrada, es decir, que la medida siempre es aproximada, nunca exacta (Brousseau y Brousseau, 1992); construyen maneras de comparar superficies sin tomar medidas (Douady y Perrin-Glorian, 1989); y mucho más.

La medición condensa un amplio trabajo con los objetos que tienen largo, ancho, peso, superficie, etcétera; con las unidades para medirlos, incluyendo el sistema convencional; con los instrumentos de medición que son portadores del conteo de unidades; con los números que resultan de la medición y con las fórmulas que permiten encontrar más rápidamente las medidas. Esta problemática hace que la medición sostenga prácticamente a todas las matemáticas que se estudian en la primaria, y en buena parte también las de secundaria (Brousseau, 2001). Me interesé particularmente en la medición de superficies.

Esto me llevó a formular un problema de investigación más acotado, que tampoco resultó ser el definitivo. Me propuse estudiar las interacciones del alumno con el problema, con los pares y el maestro, específicamente en clases de medición de superficies. Traduje este recorte en un título para la tesis: *Leer el problema mientras se lee a los otros: el estudio de medición de superficies en clases de primaria.*

Tenía que elegir un aspecto específico del amplio tema de medición de superficies. Diversas investigaciones (Brousseau, 2001; Douady y Glorian, 1989) -me detendré más en este punto en el siguiente capítulo- han señalado la importancia de que los alumnos conozcan las magnitudes como una cualidad física, antes de medirlas, es decir, antes de remitirlas a los números. Me interesaba ver en el aula esa enseñanza en el caso de la superficie. En concreto, quería ver cómo los alumnos se las arreglan para saber que una cosa es más grande que otra a partir de procedimientos como el recubrimiento, es decir, cubriendo una figura trazada en papel con otra a partir de recortes.

Pero esto se me escurrió, por varias razones. En primer lugar, tuvo que ver la decisión de observar clases comunes, sin diseñar una ingeniería didáctica. Cuando fui al aula, el programa de estudios oficial vigente no incluía, en ningún grado, al menos en matemáticas, la noción de superficie como magnitud geométrica, separada de los números. Su estudio comenzaba con el uso de unidades en cuarto grado para dar paso a las fórmulas en quinto grado (SEP, 2011a; SEP 2011b; SEP 2011c). Por la misma razón, la comparación directa de superficies tampoco aparecía -y sigue sin aparecer- en los libros de texto, oficiales o particulares. Este es uno de muchos ejemplos que muestran, no solamente en nuestro país y desde hace mucho tiempo, la tendencia a centrar la enseñanza de la medición en el conteo de unidades, la introducción de unidades convencionales con sus conversiones, y las fórmulas (Douady y Perrin-Glorian, 1989; Brousseau, 2001; Chamorro, 2005). Difícilmente iba a encontrar en el salón de clases el estudio de un contenido que de por sí suele ser invisibilizado y, además, si bien tuvo cierta presencia en los libros de texto desde inicios de los setenta hasta la reforma de los noventa, a partir del 2011 está completamente ausente (Mendoza von der Borch, 2017).

Decidí entonces observar clases de quinto grado, cuando más se estudia el área en toda la primaria, a partir de las fórmulas. Aunque el programa no lo señala, la maestra abrió un espacio de dos clases para trabajar comparación directa de superficies, sin medirlas. El propósito era que, utilizando el tangram, los alumnos concluyeran que la superficie de dos plantillas distintas puede compararse a partir de las piezas con que se rellenan. Por ejemplo, si en ambas plantillas caben exactamente las siete piezas, las dos superficies son iguales. No obstante, esta idea resultó muy difícil de poner de relieve y pasó de largo para muchos alumnos. Es una característica muy difícil de ver. Situaciones como las del tangram no pueden ser el primer encuentro con esta noción porque, aunque no hacen todavía intervenir a los números, en la consigna aparece directamente la palabra "superficie", algo que los alumnos todavía no saben bien qué es. Esta es la segunda razón por la que apenas tuve un vistazo a la superficie como una cualidad física, como extensión. Ahora entiendo el cuidado que pone Brousseau (2001) en diseñar consignas que no hablen de superficie cuando se quiere que esta sea puesta de relieve, que sea considerada más importante que otras características de los objetos. Considero incluso que habría que incorporar el origen histórico de la noción, recordar que emerge cuando es objeto de disputa (Kula, 1998). Mi apuesta es que la conciencia de la superficie surge cuando los niños se sienten "apretados" a cierta hora en el camión, con menos -o más- espacio para jugar y moverse en la nueva escuela, cuando viven un despojo de territorio, en pocas palabras, cuando la superficie es fuente de conflicto, cuando incide directamente en actividades que les son relevantes. Yo elegiría comenzar por situaciones que tengan que ver con la distribución desigual del espacio. Pero esa es otra historia.

La tercera razón por la que casi no pude ver la puesta en juego de una idea de la superficie como magnitud es que la actividad a la que recurrimos para ello, a saber, tapizar plantillas con piezas de tangram, resultó en sí misma un reto tan comprensible y desafiante para los alumnos, que acabó acaparando toda su atención y desplazando la comparación de las superficies. Hay otro tipo de conocimientos que yo di por sentados, pero resultaron ser muy problemáticos y consumieron casi todo el tiempo: los espacio-geométricos, las características de las figuras. Así como se insiste en que antes de apurarse para decir que algo mide 5 metros cuadrados hay que entender que eso es una extensión, también es importante que los alumnos conozcan una figura además de pensar en qué tan grande o chica es. Como plantea Brousseau (2001), los objetos, su superficie y los números que las miden definen tres universos distintos. Los alumnos no estaban preocupados por saber si la «casa» es mayor o menor que el «pez», porque estaban interesados en la casa por sí misma. Querían averiguar dónde va el triángulo grande, cuáles piezas sobran, cómo orientar el romboide para que embone bien, por qué con todos los arreglos de piezas que hacían siempre quedaba un "triangulito chiquititititiiiiiito" sin cubrir. Las actividades del tangram ponían en primer plano esos conocimientos, mucho más que a la superficie.

Esos conocimientos que los alumnos pusieron en juego son útiles para resolver después tareas de comparación de superficies. No solo son necesarios para comparar superficies de plantillas hechas con el tangram. Están detrás del procedimiento de recubrimiento que permite comparar superficies de manera directa, y también de la medición por conteo de unidades. Para cubrir una figura con otra es necesario prever qué pedazos cortar y cómo reacomodarlos, eso implica hacer anticipaciones sobre las características de ambas figuras. Para utilizar una unidad de medida también es importante prever de qué manera se puede tapizar aquello que se quiere medir, y ello pasa por la forma global de la unidad y de la figura. El estudio de las figuras y el de la superficie van de la mano (Chamorro, 2005), lo cual es paradójico, porque por un lado se necesitan conocimientos sobre la forma global para anticipar cómo una figura se puede cubrir con otra o se puede transformar a otra de la misma área, y por otro lado es importante que los alumnos entiendan que la superficie de una figura no depende de su forma. Por eso decidí incorporar esos conocimientos espacio-geométricos a la tesis, a pesar de que inicialmente no eran mi centro de atención. Así, además de las fórmulas del área, me propuse analizar algunas de características de las figuras a las que se les calcula el área, conservando la intención de explicar el papel tanto de la tarea como de los pares en la puesta en juego de esos conocimientos.

Esta nueva focalización del problema volvió a cambiar, debido a mi interés cada vez mayor por los alumnos que, a falta de un mejor nombre -explicaré más adelante por qué no me convence- he llamado "con dificultades", y a quienes veo como una caja de resonancia de la articulación entre el papel de las interacciones sociales y las tareas. Esos niños que preocupan a la maestra y a los padres porque, en la carrera por lograr un desempeño predefinido en un tiempo predefinido, quedan hasta atrás. Algunos tienen cierto diagnóstico psiquiátrico, sobre otros ronda la sospecha de la necesidad de ese diagnóstico, otros son percibidos como alumnos “con rezago”. Desde el inicio de la investigación, mi asesor sugirió poner atención en esos niños, generalmente poco visibles en los trabajos didácticos centrados en el funcionamiento de una noción matemática. Al ir al aula, lo primero que me sorprendió es que había muchos, ocho de un total de 34, referidos a mí por la maestra y algunas de sus colegas, algunos niños, padres y miembros de la dirección escolar (los últimos dos en menor medida porque mis encuentros con ellos fueron pocos).

Durante mi presencia en las clases, y después al analizar los datos, entendí que, así como hay conocimientos matemáticos que son poco reconocidos y valorados no solo en el aula sino desde el programa y los libros de texto, los niños que más necesitan tiempo para adquirirlos se van quedando cada vez con menos posibilidades de resolver las tareas que suponen dichos conocimientos. Encontré aquí otra manifestación de la tensión entre lo que los alumnos hacen y lo que se espera que hagan, que tiene un efecto directo sobre los alumnos: es de hecho uno de los factores que termina excluyendo a aquellos “con dificultades” de la actividad matemática en el aula.

El centro de mis preocupaciones, a saber, la doble interacción de los alumnos con la tarea y con los otros, adquirió un sentido más profundo: me interesó estudiarla para poder entender mejor esas tensiones entre los conocimientos desplegados por los alumnos y los contenidos curriculares. Me concentré entonces en las interacciones entre los niños, sobre todo en las que participaba algún alumno con dificultades, que ocurrían generalmente al trabajar en equipos, no tanto en las discusiones grupales. Este es el nuevo giro que di al objeto de investigación.

Poner de relieve esos episodios terminó por hacer que el papel de la maestra quedara en segundo plano. Ella aparece en los fragmentos que analizo en la tesis cuando interviene en algo que me interesa mostrar de los niños o de sus decisiones respecto al currículo. Queda pendiente para mí la necesidad de analizar más a detalle los episodios desde su punto de vista y mostrar cómo se entreteje con los de los alumnos. Pero eso también será otra historia.

Finalmente, también me di cuenta, como advierte Néspor (1994), de que ninguna interacción “cara-a-cara” -y habría que agregar, tampoco las “cara-tarea”- puede entenderse solamente a partir de lo que se ve cuando uno está ahí. En esas interacciones también están presentes personas y cosas que no están físicamente en ese momento. Ofreceré una mirada rápida, y uno poco vertiginosa, de esas personas y cosas a las que me refiero, las que vi específicamente en mis datos. Varios alumnos no podían aplicar las fórmulas del área del círculo y de polígonos regulares que la maestra decidió agregar al programa después de muchas dudas, porque aparecen en un libro de editorial particular que para ella es referencia central. La maestra eligió una pregunta del examen porque la vio en la *Olimpiada del conocimiento,* una evaluación que sus alumnos estaban próximos a enfrentar. La posibilidad de usar tangram para trabajar sobre figuras geométricas y superficie dependía, entre otras cosas, de mecanismos de adquisición y uso de materiales didácticos que rebasaban las decisiones de la maestra e incluso de la escuela. Los alumnos con dificultades tenían menos acceso a materiales como calculadora, tijeras o compás, y esto hacía que se retrasaran en las tareas respecto a sus compañeros. Los alumnos invertían un tiempo considerable en dejar registro de su actividad en el cuaderno, en parte como recurso didáctico para poder volver atrás cuando se necesitara, y en parte también para dar cuentas a los padres de familia. La maestra a veces elegía lecciones que el grupo podía trabajar de manera más o menos autónoma para poder dedicarse más a atender al estudiante con Síndrome Down. Las dificultades para resolver las tareas muchas veces se originaban por debilidades en el diseño de las lecciones, oficiales y particulares. Los contenidos que la maestra percibía que a los alumnos les hacía falta aprender o reforzar estaban muy alejados de los plasmados en libros de texto y evaluaciones, los esperados por padres de familia, colegas o autoridades educativas, y los que la maestra sabía que estaban cerca de estudiar en la secundaria. Todo esto ponía a la maestra en una encrucijada permanente, tenía que elegir entre aquello que se sentía responsable de enseñar y lo que veía que necesitaban sus alumnos.

Esas múltiples relaciones de alumnos y maestra con los libros de texto oficiales y particulares, las actividades disponibles en internet, las evaluaciones, la secundaria, los padres de familia, las autoridades educativas, las políticas de inclusión educativa, se juegan todos los días en clase, e inciden sustancialmente en la configuración de los conocimientos de los alumnos (Chevallard, 1997, Sadovsky, 2019). Trato de dar cuenta de esto en la tesis en la medida que me ha sido posible, aunque falta todavía mucho por analizar respecto a la manera en que se tejen en la vida del aula las interacciones inmediatas y las más lejanas.

Así llegué finalmente a la formulación definitiva del problema de investigación. Me interesa entender las tensiones que se generan por la distancia entre, por un lado, los conocimientos que los alumnos están en posibilidades de construir y necesitan hacerlo -me refiero a ciertas características de las figuras geométricas, la noción de superficie como cualidad física y la medición de áreas por conteo de unidades- pero según el currículo deberían haberlos aprendido en grados anteriores o incluso fuera de la escuela; y por otro, las fórmulas, el contenido curricular prescrito para este grado, inaccesibles para la mayoría de los alumnos en este momento. Para ello, me ha resultado muy útil poner especial atención en la actividad de los alumnos con dificultades, aunque no de manera exclusiva, porque con ellos se ven en vivo y a todo color esas tensiones. La relación entre la interacción con la tarea y con los pares ha quedado subordinada a esta nueva preocupación, pero sigue siendo importante en la medida en que necesito analizar la producción matemática de los alumnos, y dicha producción está sustancialmente mediada tanto por la tarea como por los pares. Sintetizo este problema en una pregunta: ¿qué tensiones hay entre los conocimientos puestos en juego por los alumnos y los que se espera que aprendan? Dado que analizo esto al ver la actividad matemática de los alumnos, traduzco esa primera pregunta en dos más concretas: ¿dónde están las dificultades para resolver las tareas, y dónde las posibilidades de salvarlas?, ¿qué factores orientan la elección y la puesta en marcha de un procedimiento y no de otro? He tratado de resumir el problema de investigación también en un nuevo título: *De las figuras geométricas a las fórmulas de área. Tensiones entre conocimientos de los alumnos y contenidos curriculares.*

En el primer capítulo presento la metodología que utilicé para acercarme al aula, y las herramientas teóricas de las que me he valido para hacer el análisis. Doy cuenta de la manera en que echo mano de investigaciones realizadas en el marco de la didáctica -fundamentalmente la Teoría de las Situaciones Didácticas- y de teorías socioculturales para poder analizar la actividad de los alumnos en torno a las configuraciones de piezas y las fórmulas para calcular áreas. También explico el recorte de la medición de superficies y los conocimientos espacio-geométricos que hice a partir de un ir y venir entre la literatura didáctica y los datos, y que me ha servido para comprender esos datos, para entender lo mejor posible el asunto del que se habla en las clases.

En el segundo capítulo describo cómo algunas características de las figuras geométricas cobran relevancia para los alumnos cuando hacen configuraciones con piezas del tangram. Propiedades que a los ojos del adulto parecen muy evidentes, como distinguir entre un triángulo y un pentágono, entre un triángulo grande y uno pequeño, entre un ángulo recto y uno agudo, si una pieza es simétrica o no, o saber que un cuadrado se puede desglosar en dos triángulos, implican en realidad todo un trabajo de los alumnos. Explico cómo se vuelven funcionales de manera muy paulatina, siempre implícita, siempre local. Muestro que no aparecen uno a uno sino conjugados, y no son visibles por estar en las piezas, sino porque se vuelven necesarios para cubrir una plantilla dada de antemano.

Después invierto el foco de atención. Si el segundo capítulo está estructurado a partir de esos conocimientos, y para mostrarlos analizo fragmentos en los que aparecen diferentes alumnos, en el tercero me centro en Angélica, una alumna en situación de fracaso escolar. Analizo su actividad frente a problemas del mismo tipo -el armado de configuraciones-, pero que tienen variaciones importantes. Se trata de problemas que Angélica puede abordar sin saber de antemano cómo resolver. A los que puede acceder, pero también le representan un reto. Además, los resuelve en un equipo donde hay alumnos cuya producción es más reconocida por el grupo. Todo eso hace que su actividad tenga múltiples aristas. Muestro que, si bien ella constantemente tiene que lidiar con ser la última que resuelve, también tiene agencia, en el sentido de que hace anticipaciones sobre el problema y las pone a prueba, sabe cuándo y cómo pedir ayuda, regula las ayudas que recibe, despliega recursos para mantenerse en la resolución de los problemas.

En esos dos capítulos analizo conocimientos que no son objeto intencional de enseñanza pero que los alumnos ponen en juego al resolver problemas. En el siguiente, el cuarto, me centro en el contenido que sí se espera que aprendan y la maestra se sabe responsable de enseñar: las fórmulas para calcular áreas. Muestro que los alumnos despliegan procedimientos para hallar áreas que son muy distintos de esas fórmulas, la riqueza de estos procedimientos, las preguntas que estos abren. La tensión entre lo que ellos hacen y lo que, desde el programa, libros de texto, exámenes, entre otros, se demanda que la maestra enseñe, traza posibilidades muy desiguales de aprendizaje para los alumnos.

En el quinto capítulo analizo un aspecto transversal en las clases, que al inicio no era central para mí, tampoco para la maestra o los alumnos: el uso de vocabulario. Muestro cómo permanentemente se hace presente la coexistencia de los términos utilizados por los alumnos con el vocabulario convencional que se pretende que adquieran. En ese ir y venir también se manifiesta una tensión entre lo que es útil, funcional para los alumnos, y las matemáticas convencionales curriculares.

Finalmente presento las conclusiones. Hago un recuento de la manera en que respondo a las preguntas de investigación, y también de la forma en que me han sido útiles las herramientas teóricas que elegí. Ambos aspectos dejan caminos para seguir explorando.

Con este trabajo espero poner un grano más de arena en el camino abierto por las investigaciones que se esfuerzan por visibilizar y valorar los conocimientos que ponen en juego los alumnos, aun si son implícitos, si no perduran, si no se socializan con el grupo completo. Esto implica un posicionamiento respecto a los alumnos, particularmente un distanciamiento de la comprensión de la actividad de aquellos "con dificultades" a partir de deficiencias personales. También implica un posicionamiento en cuanto a las matemáticas, un intento por reconocer la complejidad de conocimientos que suelen ser subvalorados frente a los números, los cálculos y el álgebra.

CAPÍTULO 1

METODOLOGÍA Y MARCO TEÓRICO

Comienzo este capítulo describiendo cómo hice el trabajo de campo. Después hago un resumen de las herramientas que utilizo para comprender las interacciones en el aula. Finalmente sintetizo el punto de vista sobre las figuras geométricas y la medición de superficies que, en un ir y venir entre la literatura y los datos, me ha parecido más útil para interpretar los segundos.

1.1 La metodología, un híbrido entre observación etnográfica y diseño de investigación

Estaba claro que para estudiar interacciones de niños con otros niños y con tareas académicas vinculadas a un contenido escolar, tenía que ir al aula. Yo había dado clases en universidad, luego en preparatoria, y después había observado algunas en secundaria para mi tesis de maestría, pero elegí esta vez la primaria, porque el estudio de superficies ocurre sobre todo en ese nivel. Más en general, la primaria ha cobrado centralidad para mí porque ahí y en preescolar es donde comienza el estudio de nociones que después se amplían y formalizan. Además, las clases que yo veía indirectamente a través de videograbaciones, escritos y narraciones de los docentes con los que trabajaba, y lo que me contaban mis hijos de su día a día en la escuela, me hacían saber que las formas de interacción social a propósito de las tareas académicas entre los niños se configuran con la misma complejidad que las que yo había visto entre adolescentes y adultos.

Tenía también que decidir si iba a observar clases cotidianas de la maestra o haría una *Ingeniería Didáctica* (Artigue, 1995), que es una metodología típica de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) que comporta un minucioso diseño previo de una secuencia y su aplicación en el aula. Me preguntaba cuál de esas dos metodologías me permitiría acercarme mejor a lo que quería indagar. Me explico. Por un lado, la Teoría de las Situaciones Didácticas, mi principal referente en didáctica, le confiere una fuerte centralidad a la tarea. Yo quería explorar los límites de las tareas cuidadosamente diseñadas desde la investigación. Sentía que si no hacía un diseño que necesariamente implicara a los conocimientos que quería ver como un medio de decisión frente a una problemática (Brousseau, 2007), al analizar las interacciones sociales siempre habría dudas: ¿será que el aporte de un alumno a otro resultó crucial en tal o cual episodio por una debilidad en la tarea? ¿frente a un problema más adecuado, el alumno habría podido resolver por sí mismo? En efecto, cuando presento algunos avances de la tesis, son frecuentes las preguntas que apuntan a la modificación de la tarea para que sea fundamentalmente esa interacción la que haga aprender al alumno: ¿si Angélica hubiera tenido una plantilla con algunas piezas marcadas, habría necesitado la ayuda de Arturo?[1]

Por otro lado, desde la primera presentación del proyecto de investigación recibí comentarios que resaltaban el valor de observar las clases de la maestra, sin un diseño de por medio. Para analizar las interacciones con otros y con la tarea no era necesario diseñar una ingeniería, ambas ocurren en todas las clases. Tampoco era necesario embarcarse en la tremenda tarea de lograr que la maestra construyera una intención sobre unas actividades para los alumnos que ella no había elegido. Esa intención la tendría sobre sus propias decisiones, y se jugaría de manera fundamental en las interacciones que yo quería analizar. Otra razón que me inclinó por aplazar la construcción de una ingeniería es que consideré que, si empezaba por ver clases cotidianas, si me asomaba a la enseñanza tal y como ocurre en la escuela, y si lograba poner todo eso en diálogo con las herramientas teóricas necesarias para hacer un diseño, estaría después en mejores posibilidades de construir y fundamentar una secuencia didáctica. La observación previa me permitiría identificar qué cosas de la práctica es importante recuperar en una secuencia y qué cambios son factibles de gestionar por parte de la maestra. Esta posición de inclinar más la balanza hacia la etnografía, en el sentido de aproximarse a las cosas como son, y de tratar de comprender por qué son así, concuerda con estudios que desde la didáctica apuntan hacia incorporar mucho más al profesor -su conocimiento de los alumnos, sus preocupaciones e intereses- en los trabajos de ingeniería (Perrin-Glorian, 2009).

Mientras elegía, tenía que acercarme a una escuela. Yo conocía maestros, principalmente de Querétaro y Tlaxcala, con los que había trabajado, pero ninguno de una escuela pública de la Ciudad de México, donde quería hacer las observaciones para poder hacer visitas frecuentes. Intenté primero por mi propio pie, tocando la puerta de una escuela un día cualquiera. Ahí hablé con dos maestras, les platiqué el proyecto, parecieron interesadas, quedaron en llamar, y no más. Con mi asesor, pensamos en otra manera de entrar en contacto con varios maestros. Impartí un taller voluntario para docentes de primaria sobre medición de superficies en las instalaciones del

[1] Hablo de un episodio que analizo en el apartado 3.1.1.

Departamento de Investigaciones Educativas. Entre 22 y 35 maestros iban una vez a la semana, dos horas, durante cinco sesiones. De esa forma conocí a bastantes docentes e identifiqué a varios interesados en la asignatura de matemáticas y muy implicados en las actividades del taller. Una es la maestra cuyas clases observé. En los siguientes párrafos hablo de las repercusiones de esta decisión.

Respecto a la disyuntiva entre hacer una etnografía y una ingeniería didáctica, opté por una solución salomónica, sin aquilatar suficientemente lo difícil que sería llevarla a puerto: hacer las dos cosas, primero observar las clases cotidianas de la maestra, y un año después hacer un diseño conjunto entre ella, mi asesor y yo. Esto me permitiría además ir y venir del campo al análisis, del aula a los registros, las lecturas, la escritura y de vuelta al aula con nuevas preguntas y cosas que mirar. Así, después de tanto pensarlo, en un arrebato me subí a mi bicicleta, llegué a la escuela donde trabaja la maestra que había elegido, toqué la puerta, y ahí empezó mi trabajo de campo.

Entre enero y marzo del 2017, observé dieciocho clases que duraban entre una y dos horas. Iba a la escuela cuando la maestra me avisaba que iba a abordar medición de áreas, podían ser dos días seguidos porque le interesaba continuar en una clase lo que había quedado pendiente en la anterior, o pasar doce días entre una clase y otra porque quería trabajar otros temas antes de una evaluación. Yo siempre me sentaba con un solo equipo para tomar notas, uno distinto cada día. Mientras, una colega que me acompañaba grababa en video pasando por distintos equipos, registrando las indicaciones grupales de la maestra y sus anotaciones en el pizarrón. Así, los videos me dan una idea de lo que pasó en cada clase en todo el grupo, mientras mis notas y fotografías me dejan ver el proceso de un solo equipo durante toda la clase. Aclaro desde ahora que, al mostrar episodios a lo largo de la tesis, me refiero a la colega que tomaba video como "la observadora", y hablo en primera persona cuando soy yo la que interviene.

Ciertamente, nuestra presencia afectó la vida en el aula. Los niños se sentían a veces apenados por la cámara o el celular, otras hablaban más rápido y más fuerte, otras hasta me dictaban lo que querían que escribiera. La maestra se acercaba a mí durante la clase para explicarme por qué había decidido esto o aquello, para consultarme sobre una decisión respecto a lo que haría unos minutos después, un par de veces para preguntar si proponía modificaciones a la actividad que había elegido para la siguiente clase, una vez para pedirme que me encargara del grupo mientras salía a atender una petición de la dirección, otra vez para decirme orgullosa que no iba a seguir una recomendación que yo le había dado. A nosotras, la observadora y yo, a veces nos ganaba la prisa por ver interacciones entre alumnos al punto de que las tratábamos de provocar: decíamos "pues a ver fíjate cómo lo está haciendo Juan David, ¿Luis, le puedes ayudar a Danna?, a ver ¿y ustedes qué opinan de lo que están haciendo sus compañeros? Miren, vengan tantito…*".* También nos ganaba la intención de ver ciertos conocimientos específicos. Preguntábamos "¿qué opinan de que esas figuras tan distintas tengan la misma superficie?"*,* cuando los alumnos estaban en otro asunto, el rellenado de plantillas, y no les importaba la superficie. O preguntábamos "¿cómo le hicieron?" (el dato es muy distinto cuando uno registra el proceso de resolución y cuando registra la descripción de los alumnos sobre su resolución). Otras veces, más que pensar en recoger datos para una investigación, nos implicábamos en la clase e interveníamos más bien como si fuéramos una asistente de la maestra, dando ayudas a los alumnos para que lograran resolver. Muchas otras veces guardábamos silencio y observábamos lo que pasaba entre los niños, la maestra y los problemas.

Con frecuencia, la maestra me invitaba a seguir platicando durante el recreo. En ese tiempo ella cuidaba a sus alumnos, estaba permanentemente alerta para reponer los tacos que un alumno se había comido de otro, regular conflictos en los juegos, observar la participación de niñas en el básquetbol, en fin. Al mismo tiempo, otras maestras se acercaban a platicar y todas hablábamos de sus clases. Ahí me contaba de los procedimientos que había identificado, las preocupaciones que tenía respecto a algunos alumnos -me hacía constantes referencias a lo que sabía de sus familias-, las decisiones que iba tomando para las siguientes clases. Finalmente, hasta un año y medio después de terminar las observaciones, seguimos teniendo intercambios por *Whats app* o en su casa cuando la visitaba para otro proyecto en el que participé, en los que platicábamos de sus alumnos, sobre todo cuando yo sentía que me faltaba información para describirlos en la tesis.

Durante el tiempo que observé clases, la maestra y yo pensábamos que el siguiente ciclo diseñaríamos juntas una secuencia didáctica. Eso no sucedió. A ella le tocó enseñar en primer grado, donde no está prescrito ni es recomendable estudiar superficie. Las maestras de quinto grado de la misma escuela estaban dispuestas e interesadas en participar en el diseño, pero el temblor del 2017 acortó significativamente la duración del ciclo escolar y sentían mucha presión para cubrir el programa en un tiempo comprimido. Por otro lado, yo tenía mucho que analizar de las clases que había observado. Me había encontrado con cosas que no esperaba ver y con otras que eran más complejas de lo que había anticipado. Además, los datos eran todavía muy frescos, no los había comprendido lo suficiente para intuir por dónde orientar una ingeniería. Ahora me gustaría tener el tiempo de hacer un diseño conjunto centrado en el primer acercamiento a la superficie como magnitud geométrica, porque he visto hasta qué punto es una característica oculta para los alumnos dentro de los objetos, necesaria para resolver problemas de medición con unidades, transformaciones o fórmulas, dada por sentada en programas y libros de texto.

A final de cuentas, las clases que observé resultaron ser un híbrido entre etnografía y diseño de una secuencia. La maestra recuperó actividades que yo había planteado en el taller, y también decidió, con mucha seguridad, enseñar la fórmula del círculo aun después de saber que a mí no me parecía pertinente. En algunas clases está más mi mano y la de mi asesor, en otras es completamente la suya, en otras una mezcla. Ella definía los tiempos, pero también los alargó en parte por mi presencia ahí.

Me pregunto si desde la didáctica da la impresión de que he observado clases cotidianas, porque no hubo un diseño muy anticipado, una secuencia cuidadosamente articulada para poner en juego una noción muy específica, con manipulación de variables, anticipación de procedimientos y de la gestión docente. Mis intervenciones y las de mi asesor sobre el diseño de los problemas venían desde el taller o bien se hacían sobre la marcha, puntuales, sobre lo que pedía la maestra. Me pregunto también si desde una mirada etnográfica las clases se parecen más a un diseño de investigación, por la mano nuestra que hay en algunas de las tareas.

Ese alebrije no fue anticipado. Yo había contemplado un doble acercamiento no simultáneo, extendido en dos fases temporales. Primero vería clases “naturales”, después haría un diseño clase por clase, problema por problema, variable por variable. Finalmente, las clases que observé se convirtieron en una de las formas de colaboración entre docentes e investigadores en las que yo he participado, que me gustaría analizar en otro trabajo futuro. Para esta tesis, me permitieron ver cosas que no habría podido ver de otra manera. Si la maestra no hubiera recuperado las actividades del taller con el tangram, yo no habría entendido qué tan difíciles pueden ser para los alumnos ciertas características de las figuras que los adultos consideramos evidentes -como la diferencia entre un ángulo agudo y uno recto-, ni qué tan imbricados están con la superficie. Tampoco habría entendido la actividad de una alumna en situación de fracaso escolar cuando está frente a un problema que puede abordar, que le permite identificar si se equivoca, y que resuelve junto a otros niños cuya producción suele ser más reconocida que la suya en el grupo. Por otro lado, si no hubiera observado actividades que provienen de decisiones y recortes de la maestra, no sabría ahora que las cuadrículas son una herramienta fecunda para los alumnos, valorada por la maestra y factible en términos de gestión y confección de materiales. No habría visto tampoco cómo la docente se orienta por una clara intención de llegar hacia las fórmulas, pero se preocupa cada vez que nota que los alumnos no se las apropian. En suma, sin este acercamiento no habría podido definir el objeto de estudio como finalmente lo formulé: el análisis de las tensiones entre los conocimientos que ponen en juego los alumnos y los contenidos curriculares que se espera que aprendan, que se manifiestan en la actividad de todos los alumnos, pero particularmente en la de aquellos en riesgo de fracaso, en clases en las que hacen configuraciones de piezas y abordan las fórmulas de áreas.

Quiero hacer un último comentario sobre la información que dan el video y las notas. Solamente el video permite tener un registro fino de los procesos de resolución y de las interacciones sociales. Es imposible capturar con notas exactamente lo que dicen los niños, a quién o qué voltean a ver, qué pieza toma cada alumno cuando hay cinco juntos con un solo tangram, dónde las ponen, en qué posición, cómo las reacomodan, desde qué lugar está cada uno viendo la plantilla, los tiempos de pausa, el volumen y tono de voz, la postura corporal, la disposición de los materiales, en los tres minutos que dura una resolución. No queda todo eso escrito en la tesis -a pesar de las doce horas que me tomaba rehacer un registro que antes ya había considerado suficientemente bien hecho como para incluirlo en un artículo-, pero se juega en los análisis que hago. Pero el video no es suficiente: es necesario estar ahí, sin la cámara. Yo podía quedarme toda la clase con un solo equipo precisamente porque no tenía la cámara. Ni los alumnos ni yo nos habríamos sentido cómodos fijándola de principio a fin en una sola mesa. Así pude ver, por ejemplo, cómo a Nahomi le toma más de una hora reproducir un romboide, y todo lo que le implica. Además, estar presente en todas las clases me permitió elegir qué fragmentos analizar en la tesis: un recorte del video se vuelve central solamente para quien ha visto mucho más de lo que hay en ese video.

Todas estas decisiones se hacen presentes a lo largo del trabajo: la observación de dieciocho clases de quinto grado, de una escuela pública de la Ciudad de México, elegidas e impartidas por una maestra convocada a partir de un taller de medición, dedicadas principalmente al trabajo con fórmulas para calcular áreas.

1.2 La actividad matemática de los alumnos en clase

Como explico en la introducción, el centro de este trabajo son las tensiones entre los conocimientos que los niños ponen en juego, muchas veces implícitamente, al abordar las tareas matemáticas de la clase, y los conocimientos a los que se espera que accedan a través de esas tareas. Es pensando en eso que analizo la actividad matemática de los alumnos, poniendo especial atención en aquellos con dificultades, cuya participación en clase muestra con más claridad esas tensiones, al amplificarlas.

En este apartado describo las herramientas teóricas de las que me valgo para hacer este análisis, y que provienen de dos vertientes: acercamientos didácticos, fundamentalmente la Teoría de las Situaciones Didácticas; y perspectivas socioculturales. Estudiar la actividad matemática de los alumnos es, en este trabajo, entender cómo se conjugan, durante sus procesos de resolución, las interacciones de ellos con las tareas, con los pares, en cierta medida con la maestra, y también la manera en que se juegan ciertas condiciones institucionales de enseñanza en esas interacciones, tales como los libros de texto o la relación de la primaria con la secundaria. La posibilidad de participar en la clase de matemáticas, el éxito o fracaso en las tareas, depende de cómo se articulan estos tres tipos de interacciones del alumno: con la tarea, con los otros que están presentes en el aula, y con ciertos procesos y actores que no están físicamente en ese momento. Primero explico cómo entiendo esas interacciones, y después presento algunas consideraciones sobre los alumnos con dificultades.

1.2.1 Las interacciones de los alumnos con las tareas

Para explicar la centralidad de las tareas en la Teoría de las Situaciones Didácticas, haré primero un rodeo, espero que corto. Esa teoría nace en diálogo con algunas ramas de la psicología que mostraron “la importancia de la tendencia natural de los sujetos para adaptarse a su medio” (Brousseau, 2000a, p. 7). Dos corrientes fueron importantes en este planteamiento: la piagetiana, que se ocupaba del papel de la experiencia con el mundo físico en el desarrollo infantil; y la vygotskiana, que estudiaba el papel del medio sociocultural en el aprendizaje. Esta posición implicó un giro importante respecto a caracterizaciones tanto empiristas como aprioristas del conocimiento, vigentes en ese momento: el conocimiento no es un reflejo de una realidad exterior al sujeto, y tampoco es la proyección de estructuras preexistentes del sujeto en esa realidad. Es una interacción entre realidad y sujeto. Brousseau asume esta caracterización del aprendizaje por adaptación a un medio natural y social:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986, p. 43).

En el origen de la teoría brousseauniana hay también un cambio de foco respecto a las corrientes piagetiana y vygostkiana: en la interacción del sujeto con el medio, no se centra en problematizar al sujeto, sino al medio. Brousseau reconoce la habilidad de los estudios hechos desde la psicología cognitiva para diseñar dispositivos experimentales, pero plantea también una preocupación:

> (estos dispositivos) ponen en evidencia la originalidad del pensamiento matemático de los niños (…). Sin embargo, me daba cuenta de que no se hacía ningún esfuerzo por analizar los dispositivos mismos y por hacer explícita la relación entre éstos y la noción matemática cuya adquisición era estudiada. Asimismo, cuando Piaget utilizaba los axiomas de Peano para identificar EL desarrollo de EL conocimiento de EL número en EL niño, estos singulares me parecían apuestas interesantes pero arriesgadas, más que evidencias. Yo podía producir "definiciones" de números naturales, matemáticamente equivalentes a los axiomas de Peano, pero de complejidades cognitivas muy diversas. La equivalencia matemática no tiene como consecuencia la equivalencia cognitiva (Brousseau, 2000, p. 9).

Brousseau construye una teoría que permite pluralizar el número, o cualquier otro saber matemático, y con eso los otros singulares también se pluralizan. En este sentido, extiende los trabajos situados en la teoría piagetiana, al estudiar los propios dispositivos y sus relaciones con determinado conocimiento matemático (Brousseau, 2000): "¿en qué condiciones puede propiciarse que un sujeto tenga la necesidad de un conocimiento determinado para tomar ciertas decisiones?, y ¿cómo explicar de antemano la razón por la cual lo haría?" (Brousseau, 2000, p. 10).

Estas preguntas dan concreción a la problemática que originó la teoría y que orientó numerosos trabajos. Así, no es que las matemáticas se encarguen de proveer el contenido, la psicología cognitiva de comprender su aprendizaje en términos de desarrollo, y la pedagogía de diseñar actividades para estudiar el aprendizaje en la escuela. Todo ese proceso se convierte en objeto de estudio didáctico. En suma, la teoría se centró en problematizar el conocimiento matemático escolar, caracterizándolo a partir de su funcionalidad, es decir, a partir de las situaciones que permite resolver (Sensevy, 2011). El medio es entonces un "sistema autónomo, antagonista del sujeto, y es de aquél del que conviene hacer un modelo" (Brousseau, 2000, p. 10).

Aquí me hace falta detenerme un poco. La teoría se propone estudiar el medio, y el medio es todo aquello con lo que el alumno interactúa en su proceso de aprender determinada noción, pero eso con lo que el alumno interactúa es infinitamente amplio. Ahí están las tareas que se pide resolver al alumno, los pares, el docente, los objetos materiales y, aunque no estén físicamente presentes, también están los padres de familia, la secundaria, los colegas del docente a cargo del grupo, los mecanismos de evaluación, las políticas de inclusión educativa, los directivos escolares, la iniciativa privada en materia educativa. Entonces, ¿qué de todo ese universo es problematizado en la teoría?

En el origen de la teoría están las tareas, los dispositivos, o más ampliamente, las situaciones didácticas, en las cuales es central la serie de problemas diseñados para hacer transitar a los alumnos un proceso que derive en el aprendizaje de cierta noción matemática que no ha sido enseñada previamente, o de ciertos aspectos de esa noción:

> En el aula, se trataría de organizar un medio que resista a la interpretación inmediata del alumno y que lo lleve a actuar, formular lenguajes y conceptos, cuestionar la validez de lo que produce, etc. Los conocimientos se manifiestan esencialmente como instrumentos de control, de regulación de esas situaciones (…) una parte del medio (…) es la colección de objetos, problemas, textos, en suma, los recursos que provee el profesor (…) además, en la noción de *medio* se incluye el cuestionamiento del objeto matemático a enseñar; se lo recorta y vincula con otros saberes, se elabora la consigna con la cual se planteará la actividad en la clase que explicitará de alguna manera las responsabilidades de alumnos y docente con respecto al objeto de estudio; se organiza la clase y se administra el tiempo en función de lo que es posible producir en torno a ese objeto de estudio; se favorecen ciertas interacciones de los alumnos en búsqueda de ciertos procesos de aprendizaje, etc. (Fregona y Orús Báguena, 2011, p. 18-21)

Un concepto que expresa la relación entre los problemas y un conocimiento matemático, es decir, el aprendizaje de ese conocimiento a través de la interacción con un medio antagónico, es el de situación adidáctica. Para Brousseau, cualquier conocimiento puede ser caracterizado a partir de situaciones "que de alguna manera recrean las condiciones que permitieron la emergencia de dicho conocimiento" (Fregona y Orús Báguena, 2011, p. 24). Una situación adidáctica específica de un conocimiento matemático tiene varias características. De entrada, se puede comunicar al alumno sin hablar de ese conocimiento cuyo aprendizaje se buscar propiciar, es decir, el alumno puede entender la consigna y abordarla, sin disponer previamente de ese conocimiento. Pero, al ir resolviendo, al enfrentar experiencias similares con ciertas variaciones cuidadas por el maestro[2], el alumno transita un proceso en el que las primeras estrategias básicas o

[2] En una situación adidáctica hay una serie de *variables didácticas,* condiciones que el docente puede manipular y que, al hacerlo, va cambiando el conocimiento necesario para poder resolver (Fregona y Orús, 2011).

azarosas devienen en otras que sí ponen en juego al conocimiento en cuestión, en suma, ese conocimiento se aprende justamente al ir resolviendo. Este cambio de procedimientos que no implican el conocimiento a procedimientos que sí lo implican, no se da por una indicación del profesor, sino por características de la situación que hacen que las primeras estrategias espontáneas fracasen y que el alumno necesite reformularlas. Esto implica que la propia situación ofrece al alumno una manera de validar empíricamente sus anticipaciones, es decir, de averiguar si lo que acaba de hacer funciona o no (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998, 214-215). En este sentido, la situación regresa información al alumno, que en algunos textos se llama “retroacciones del medio”.

Quiero aclarar por qué describo las situaciones adidácticas si yo no hice un diseño con esas características, es decir, si en las clases que observé no se abordaron situaciones de este tipo. En dos capítulos analizo la actividad matemática de los alumnos cuando tapizan el interior de una plantilla con piezas del tangram. Ahí, poco a poco se van volviendo relevantes algunas características de las figuras geométricas que la maestra no tiene que explicar antes para que los alumnos puedan hacer las configuraciones. Aunque la experiencia no llega a ser suficiente como para traducir esas características en conocimientos estables, sí comienzan a ponerse en juego a un nivel muy implícito y local. Además, los niños pueden identificar si su arreglo tiene un error cuando quedan huecos, las piezas exceden el borde de la plantilla, o hay piezas que no caben en el espacio que falta por cubrir. Es decir, la situación del tangram tiene algunos rasgos de las situaciones adidácticas. Lo que no tiene, es un manejo de variables didácticas que permita transitar paulatinamente de procedimientos principalmente regidos por el azar a procedimientos claramente orientados por las características de las figuras. En suma, así como la vi en el aula no es una situación adidáctica, pero tiene algunas similitudes que inciden en la actividad de los alumnos.

En otro capítulo, en el que analizo las fórmulas de área, hay tareas que difieren mucho entre sí. Tener una hoja cuadriculada abre la posibilidad de calcular áreas por conteo de unidades o transformando las figuras a un rectángulo de la misma superficie. Aunque no siempre haya cambios de procedimiento, aunque esos cambios sean a veces demasiado drásticos, aunque no se llegue a una estrategia “óptima”, esos problemas son accesibles para la mayoría de los alumnos, y son completamente distintos de otros donde la figura está trazada en hoja blanca con medidas hipotéticas, que solo pueden abordarse con la fórmula. En estos últimos problemas hay, para muchos alumnos, un abismo difícil de sortear: antes de plantearlos, la maestra se asegura de explicar las fórmulas, a veces intenta inferirlas junto con ellos, por eso se supone que podrían abordarlos; pero muchos alumnos no han atendido esas explicaciones por estar ocupados con tareas anteriores, o bien, no las han entendido, es decir, no disponen de las fórmulas ¿cómo se las arreglan en esas condiciones? Lo que quiero decir es que, si bien no desarrollé una ingeniería didáctica, la noción de situación adidáctica me sirve para pensar cómo influyen en la actividad matemática de los alumnos algunas características de las tareas, como la posibilidad de abordar un problema sin saber de antemano cómo se resuelve, la validación a partir del propio problema o, al contrario, lo que ocurre cuando para resolver un problema es necesario contar de antemano con algunos conocimientos que los alumnos no tienen. Resumiendo, ninguna de las situaciones que analizo es adidáctica, pero algunas tareas tienen ciertos rasgos de un “medio antagonista”, otras no tienen ninguno, y me ha resultado valioso tratar de comprender el efecto de ambas cosas en las resoluciones de los alumnos.

Aclaro también que cuando hablo de “acciones” de los alumnos, no me refiero a su participación en situaciones adidácticas, pues, como ya he explicado, no vi estas situaciones en las clases. Me refiero a la acción de los alumnos en un sentido más coloquial, como lo hace Battista (2007, en Marchand, 2020). Hablo de una acción cuando los alumnos hacen una cuenta, ponen piezas, recortan una figura, dibujan un romboide, ponen en marcha una fórmula, se levantan para observar lo que acaba de hacer alguien más.

Por supuesto, al resolver las tareas están también los pares. Lo que ellos dicen o hacen es parte del medio organizado por el maestro, si los problemas que plantea están pensados para resolverse en colectivo; e incluso por la institución escolar, que hace que los alumnos estén en un mismo espacio estudiando un asunto matemático. Ahora explico cómo doy cuenta de ellas.

1.2.2 Las interacciones sociales a propósito de las tareas

Son las segundas formas de interacción entre pares que menciono en el último párrafo de la sección anterior las que me interesa analizar: aquellas que no están contempladas desde el diseño del problema, sino que ocurren simplemente porque los alumnos están juntos. Que las producciones de los pares estén en el medio organizado por la escuela para los alumnos, no quiere decir que sean parte del medio específico de cada alumno, pues, como plantean Fregona y Orús Báguena (2011), no hay un medio sino “medios”, en plural: los alumnos no cuentan con los mismos conocimientos y no interactúan con las mismas cosas. Es decir, que esas producciones estén disponibles para interactuar con ellas, no quiere decir que esa interacción suceda: uno puede decir algo que viene muy a cuento del problema sin interpelar a sus pares, o al revés, una intervención poco pertinente puede ser recibida por provenir de alguien en quien se confía. Las maneras en que se orquestan las producciones de los distintos alumnos son infinitamente diversas. A mí me interesa entender cuándo sí sucede que la producción de un alumno se integra al medio de otro, y cuándo no, y cómo ocurre eso, durante las resoluciones de las tareas que observé. Es decir, cómo se orquestan las participaciones de los distintos alumnos cuando están frente a tareas que no han sido diseñadas para hacer necesario el intercambio entre pares, que es el caso más común.

La alineación de las producciones de unos con las de otros depende, por un lado, de su relación en términos del contenido y la tarea y, por otro lado, de la vida social del grupo. Varios estudios socioculturales enfatizan la importancia de esa coordinación. Mehan (1979, en Erickson, 1982) destaca que “para que un estudiante dé una respuesta correcta en una clase, la respuesta debe ser «correcta» tanto en su contenido académico como en su forma social” (p. 156). Erickson (1982), hace ya casi cuatro décadas, puntualizó la necesidad de articular mejor el aspecto social y académico de la clase:

> …los investigadores orientados por la sociolingüística han estudiado principalmente la estructura de participación social de las clases, mientras que los investigadores de currículo y psicólogos cognitivos se han preocupado fundamentalmente por la estructura de la tarea académica de las clases. Es necesario considerar ambos aspectos de la organización como mutuamente constitutivos (p. 156).

Esta articulación es fundamental si se quiere estudiar el aprendizaje y la enseñanza en las clases, que son “encuentros” en los que se habla de un tema específico. Rockwell y Gálvez (1982), en lugar de usar el rígido término “estructura”, hablan de la coordinación de la “lógica” de participación y la del contenido. En mi trabajo uso “lógica”, salvo cuando hablo directamente de algún planteamiento de Erickson.

Erickson (1982) describe las clases como encuentros -término que recupera de Goffman-, es decir, ocasiones en que la acción se articula con lo que hacen los otros, se orienta a partir de las acciones de los otros. Lo que ocurre fuera de la escena inmediata influye en los encuentros, pero estos también tienen en cierta medida una vida propia. La acción en esos encuentros es, al menos en parte, una producción local. Por ello, participar en la clase requiere conocer el discurso y su organización social, estar familiarizado con la lógica de distribución de derechos y obligaciones relativos a la interacción social de los distintos miembros del grupo. Es decir, es necesario echar mano de conocimientos sobre la "estructura de participación social"*.* Además, dado que las clases son un encuentro en el que se habla de un tema específico, participar en ellas requiere también saber sobre la materia, su organización lógica y su distribución temporal. Es decir, tener conocimientos sobre la "estructura de la tarea académica*".* Un primer aspecto en el que se entretejen las dos estructuras tiene que ver con que la organización del discurso depende del asunto del que se habla, es decir, la manera de estructurar la participación está estrechamente vinculada a la naturaleza de la tarea y del contenido.

Hay una noción de la didáctica que, me parece, complementa la idea de la coordinación de las dos lógicas al ir en sentido inverso, es decir, al poner de relieve que el asunto del que se habla también se moldea a través de la organización del discurso. Me refiero al contrato didáctico. La clase funciona como si existiera una serie de expectativas entre alumnos y maestro respecto a lo que cada uno puede y le corresponde hacer en relación con cierto conocimiento. Es decir, esa organización social del discurso, que Erickson llama "estructura de participación social", también le da forma al contenido. Durante el proceso de estudio se construyen interpretaciones sobre lo que es válido y lo que no, algunas veces explícitas y justificadas, pero la mayoría implícitas y naturalizadas, que regulan el funcionamiento de un conocimiento específico en clase. Por ejemplo, el tránsito de la aritmética al álgebra supone un contacto con la noción de variable, y esto a su vez puede implicar una ruptura con un sobreentendido de los alumnos, según el cual, al producir una respuesta, "no se vale dar números al azar", es decir, atribuir cualquier valor a una variable independiente (Sadovsky, 2005)[3].

Para mí, la riqueza del concepto de contrato didáctico radica en su foco en el contenido y la situación didáctica. Esto permite ver, por ejemplo, si al plantear una consigna el maestro también comunica implícitamente el modo de resolución que espera. Por eso me ha sido útil, pero he dejado de pensar en un alumno genérico: no es que los alumnos, por un lado, y el maestro, por el otro, vayan negociando derechos y obligaciones respecto al contenido. Esas negociaciones también se dan entre pares. Aun cuando desde la teoría se sabe que el contrato cambia, me da la impresión de ser asumido durante el tiempo que funciona como un conjunto coherente de reglas, compartido de manera homogénea por los alumnos. Eso no contribuye a analizar las posibilidades diferenciadas que una misma clase ofrece a los distintos alumnos: las

---

[3] Una noción cercana a la de contrato didáctico, acuñada desde otra línea de investigación, es la de *normas sociomatemáticas* (Yackel, Cobb, 1996; Voigt, 1995).

reglas del contrato no son compartidas por todos, y cuando lo son, no se adhieren a ellas de la misma manera. Al contario, los alumnos interpretan y se posicionan frente a esas normas de diversas formas, en la clase circulan supuestos incluso contradictorios, y hay intercambios respecto a esas distintas interpretaciones. Vale la pena pensar el carácter diversificado con el que los estudiantes asumen el contrato didáctico[4].

La conjugación de las dos lógicas, del contenido y de participación social, se da permanentemente, de múltiples maneras, y no siempre es fácil de ver. Para conseguirlo me he valido de nociones y estudios que se fijan en aspectos muy particulares de esa amplia manera de entender los encuentros entre alumnos en clase. Ya he explicado la de contrato didáctico, continúo ahora con dos más[5].

Erickson (1982) ve la coordinación de la estructura de la participación social con la estructura de la tarea académica como una articulación entre dos tiempos distintos: kairos y kronos. Si la clase, como cualquier otro tipo de relaciones cara-a-cara, es colectiva y localmente producida, los participantes necesitan un sistema de señales -explícitas, elípticas o implícitas- a través del cual pueden hacerse saber mutuamente lo que ocurre momento a momento en relación con la tarea, y también ubicar cierto momento en la secuencia más larga de la clase como, por ejemplo, identificar que el punto clímax de la instrucción -la "frase clave" (*punch line*)- ha llegado. Estos indicios "se manifiestan en muchos niveles de organización del habla y del comportamiento no verbal, en la sintaxis, en el vocabulario, en el registro estilístico del habla, en la prosodia, en el movimiento corporal, en la mirada, en las posturas y en la distancia interpersonal" (Erickson, 1982, p. 159). Esas claves o señales (*contextualization cues*) permiten definir los dos tiempos distintos que menciono al inicio del párrafo. Uno es el kairos, el tiempo en la experiencia. Se trata del tiempo apropiado, correcto, estratégico; la percepción del

---

[4] Creo que hay dos procesos inversos a partir de los cuales tanto desde teorías socioculturales como desde teorías didácticas se ha puesto de relieve que la lógica de la tarea y de la participación social en clase son mutuamente constitutivas. Desde aproximaciones socioculturales se parte de considerar la clase como un encuentro, por ello es fundamental entender lo que se construye en la participación social, asunto en el que se han centrado muchos trabajos. Erickson puntualiza que, dado que en ese encuentro se habla de un tema muy específico, también es central la lógica de ese contenido. La didáctica en cambio, específicamente la teoría de las situaciones didácticas, surge como una teoría que toma la tarea como un asunto central. Y poco a poco se ha puntualizado que, dado que la resolución de la tarea ocurre en la clase, donde hay muchos participantes que actúan a partir de otros, es fundamental incorporar también la lógica de esa participación.

[5] He seleccionado los más presentes en la tesis, pero son numerosos los trabajos que muestran el trabajo de alumnos y maestro para mantener funcionando la organización social y académica de la clase, o más en general, de los encuentros. Por ejemplo, O'Connor y Michaels (1996) muestran un recurso discursivo generalmente desplegado por el docente, pero a veces también por los alumnos, el *revoicing,* para vincular las participaciones de los alumnos a las de sus pares, relanzar al grupo participaciones que podrían pasar desapercibidas, poner de relieve oposiciones entre puntos de vista, asociar una hipótesis al alumno que la propone.

tiempo como largo o corto, el que permite gestionar un momento oportuno, tomar un momento para intervenir, lograr un efecto de reducir o estirar una duración, el tiempo que puede suceder en simultaneidad. Por ejemplo, Erickson (1996) identifica a niños que llama "caza-turnos" (*turnsharks*), muy hábiles para atrapar turnos asignados por la maestra a otros alumnos. El otro tiempo es kronos*,* el medible, literal, el tiempo de reloj[6]. Así, las señales permiten definir qué se puede decir en qué momento, anticipar el punto en el tiempo real en el que se puede posicionar una formulación siguiendo el ritmo de la clase. En la interacción cara-a-cara, si los participantes coordinan sus acciones, si las acciones de uno dan cuenta de las de otro, si hay simultaneidad y secuencialidad, es porque dichos participantes tienen en consideración tanto el tiempo estratégico como el de reloj. Es decir, la coordinación de ambos tiempos es fundamental para la organización de la interacción cara-a-cara. Las posibilidades de predecir el kairos y kronos definen las oportunidades para intervenir en la clase. Por ello es importante analizar no solo las interacciones puntuales sino también el ritmo de la clase, las posibilidades de acompasarse unos con otros, de coordinar sus acciones.

Otro concepto de la didáctica, que tiene que ver con un aspecto puntual pero nodal en el establecimiento de la lógica de participación social, muy vinculada a la tarea, es la devolución. Esta noción se centra en la posibilidad de que el alumno se adentre en la clase, en la resolución de las tareas. He explicado que, para Brousseau, el aprendizaje supone la interacción del alumno con un medio "adidáctico", similar a un "medio «externo» a la enseñanza misma, (…) desprovisto de intenciones y presupuestos didácticos" (Brousseau, 2007, p. 86), de manera que el saber emerja a partir de sus decisiones[7]. Pero esa interacción no se da espontáneamente, requiere un trabajo del maestro para que el alumno acepte explorar con sus propios recursos un problema que él no ha elegido y que no sabe si lo hará aprender algo:

> La *devolución* es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia (Brousseau, 2007: 87).

La "devolución de una situación adidáctica" implica un esfuerzo porque el alumno se implique en los problemas que le plantea el maestro, y también que lo haga desplegando

---

[6] Sensevy (2011) habla de *cronogénesis* y *tiempo cronométrico.* Me queda pendiente la tarea de pensar juntas las distinciones respecto al tiempo en clase que hacen los dos autores.

[7] Esta no es la única condición para el aprendizaje en un aula, por parte de un grupo, de un saber socialmente reconocido como tal. Los conocimientos que van emergiendo a partir de una problemática son locales, muchas veces implícitos, no necesariamente se nombran. Acercarlos a un saber del que todos puedan hablar y que sea reconocido como tal por la institución escolar, es otra parte del trabajo de enseñanza.

sus propios procedimientos, es decir, que se involucre en una actividad lo más autónoma posible, despegada de lo que el maestro espera que haga o diga, en suma, que se centre en la interacción con la situación. La devolución se logra si, además, el alumno asume una responsabilidad sobre la respuesta que ha obtenido.

Quiero explicar cómo uso esta noción para hablar de la actividad de los alumnos frente a problemas que no son situaciones adidácticas. La devolución, como la plantea Brousseau, se logra si pasan tres cosas: el alumno se involucra en la actividad propuesta por el maestro, lo hace desplegando sus propios recursos, y se responsabiliza de su respuesta. Algunos de los problemas que analizo en la tesis, si bien no son situaciones adidácticas, abren la posibilidad de que se den esas tres condiciones. Me refiero a las configuraciones de piezas con el tangram, obtener áreas de figuras trazadas en hoja cuadriculada, o bien copiar esas figuras en otra cuadrícula. Por eso, en esos casos, me animo a hablar de devolución de un problema, no de una situación adidáctica. Es decir, en esos problemas también es necesario que el alumno decida implicarse en un proceso de estudio de un tema que no ha elegido de una manera que no ha elegido, y hay posibilidades de que lo haga poniendo en juego anticipaciones propias, sin necesitar sistemáticamente una validación o ayudas del maestro o de los pares. Hay una diferencia entre un alumno que no toma el lápiz ni la hoja de trabajo, uno que los toma siguiendo los pasos de un algoritmo previamente aprendido, y otro que explora por cuenta propia distintas maneras de contar cuadritos, aunque se equivoque. Me interesa analizar las condiciones bajo las cuales esa tercera forma de participación en la clase sucede o, por el contrario, encuentra trabas. Esto me ayuda a entender la desigualdad de posibilidades de acceder a ciertos conocimientos que una misma clase abre para los alumnos.

Aclaro que, más que pensar en el esfuerzo de la docente por devolver un problema a sus alumnos, me fijo en el trabajo del propio alumno por asumir un problema como suyo, y en cómo intervienen los pares en ese asunto. Empecé describiendo la noción de devolución partiendo de que la interacción entre un alumno y un problema no ocurre espontáneamente. Brousseau argumenta que por eso es necesario un esfuerzo del adulto para hacer que suceda; yo he me fijado en el esfuerzo del niño, y en cómo intervienen ahí los pares. Esta agencia de los alumnos es destacada por Erickson (1996), quien argumenta que, si los alumnos no “van por” la zona de desarrollo próximo, esa zona no sucede.

En la articulación de kairos y kronos hay ciertas pautas compartidas de interpretación y actuación en las que se puede inferir cierta estructura de la participación y de la tarea. No obstante, las clases se caracterizan también por su naturaleza fortuita, porque los estudiantes son aprendices y el error es constitutivo de cualquier proceso de aprendizaje, así que las dudas y errores de los alumnos y las respuestas adaptativas de los maestros son la razón de ser de la clase. De aquí se deriva una paradoja: los errores son esenciales para el aprendizaje, pero también provocan frecuentemente rupturas en el flujo social y académico de la clase, necesario para que dicha clase funcione. Esos errores pueden tener que ver con la tarea, como cuando un alumno usa un procedimiento que no es adecuado para ese problema; o bien con la participación social, como cuando el alumno da la respuesta a todo el grupo demasiado pronto, cortando el proceso de búsqueda de los demás. En este segundo ejemplo, el error en la estructura de participación produce una ruptura en la estructura de la tarea: ambos tipos de errores pueden afectar a cualquiera de las dos estructuras. Así, las clases “se caracterizan por la presencia de frecuentes deslices cognitivos y de interacción y, por lo mismo, de frecuentes acciones de recomposición” (Erickson, 1982, p. 161).

En la noción de contrato didáctico también se consideran fundamentales estas rupturas. De hecho, en ellas reside el aprendizaje (Brousseau, 2007). El juego de expectativas entre alumnos y maestro se va construyendo en las situaciones particulares a través de las cuales se organiza el proceso de estudio, es decir, esas expectativas están muy ligadas al conocimiento específico en cuestión. Aprender un conocimiento nuevo muchas veces implica una reconfiguración de conocimientos anteriores, lo cual también afecta a las interpretaciones respecto a su funcionamiento. El contrato está entonces sujeto a continuas fracturas y negociaciones.

Hay distintas maneras de pensar en esas restauraciones. Yo he encontrado tres: reparar a partir del conocimiento, de la participación social, o de ambas. Empiezo por la primera. Brousseau (2007) plantea que solamente hay aprendizaje si el contrato se restaura a partir del conocimiento. Es en la tarea donde resulta que un conocimiento que antes funcionaba ya no es pertinente. Y es a través de una mayor exploración de la misma tarea, de una modificación de la tarea, o del planteamiento de tareas nuevas, que emerge el nuevo conocimiento. Eso ocurre en colectivo, es decir, en diálogo con los pares y el maestro, pero ese diálogo es a propósito de la tarea. En el ejemplo del tránsito aritmética-álgebra que comenté antes, es la idea de variable independiente la que habilita la posibilidad de dar números al azar.

Sigo ahora con estudios que hablan de reparaciones al funcionamiento de la clase a partir de la participación social. Poveda (2005) se fija en el contexto de interacción. Señala que la actividad en el aula implica un despliegue público de conocimientos por parte de los alumnos que puede afectar su imagen social (*face*). Cuando surgen errores al resolver un problema y esos errores son visibles para los demás, la situación puede deteriorar esa imagen (puede devenir en una *face threatening situation*). Frente a ello, los participantes tienen un repertorio de recursos interaccionales que pueden mitigar o agravar la naturaleza de los intercambios, uno de los cuales es reorientar el curso de la interacción a través de giros (*contextualization moves*)[8] que permiten, por ejemplo, hacer derivar un momento de tensión en uno humorístico, improvisando en la inmediatez. La posibilidad de sostener la actividad académica de los alumnos, en particular, de señalar públicamente los errores y elaborar sobre ellos en las discusiones grupales, pasa por esa modulación del contexto de interacción. Poveda no asegura aprendizajes, más bien analiza formas de reestablecer un funcionamiento de la clase que ofrezca condiciones de aprendizaje.

Paradise (1991) no habla directamente de esas fracturas y recomposiciones en la clase, pero me parece que su trabajo sobre la observación se puede pensar en relación con ellas. La autora analiza la observación como “la estrategia preferida en la organización del aprendizaje” (Paradise, 1991, p.73) en aulas cuyos alumnos son indígenas mazahuas, estrategia muy distinta del aprendizaje cognitivo y verbal en el que se centra la escuela. Ella parte de mirar qué ocurre en esas aulas cuando un alumno no entiende, lo que yo interpreto como una ruptura en la lógica del contenido. Ese niño no hace preguntas, sino que se queda quieto, sentado, mirando a los demás, al pizarrón y los cuadernos. Otro niño que sabe se acerca y le resuelve el problema, sin que el primero se lo pida y sin dar explicaciones: quien recibe la ayuda es el responsable de extraer la información que le hace falta para poder resolver después. Así, su “comprensión depende mucho de su capacidad de observación” (Paradise, 1991, p. 81). Esa observación no es pasiva, no es para deslindarse de la responsabilidad sobre la tarea, sino al contrario, es una manera de lograr autonomía: se observa para poder hacerlo solo después. La observación no es una reacción espontánea de algún niño, ni es sorpresiva para nadie, es decir, no es una ruptura en la lógica de participación: se trata de una orientación del aprendizaje fuertemente arraigada en la experiencia fuera de la escuela. Esta observación habla de conocimientos culturales como la iniciativa y la autodeterminación, que no atañen al contenido sino a las interacciones sociales, pero

---

[8] Estos conceptos provienen de Goffman y Gumperz, pioneros en los estudios de las interacciones y la sociolingüística.

que inciden precisamente en lo que ocurre con esos contenidos. Es una forma de participación social históricamente construida a través de la cual los niños aprenden a resolver rupturas en términos de la tarea.

En el tercer punto de vista está Erickson (1982), quien plantea que las restauraciones pueden provenir de ambos flancos, es decir, tanto de variaciones en la estructura de la tarea como en la de participación social. El maestro puede, por ejemplo, modificar la tarea, cambiarla por otra que los alumnos sí puedan resolver. O bien, puede alargar el tiempo de espera para que algunos terminen. Me parece que Candela (1995) mira en una dirección similar. La autora se interesa por analizar lo que ocurre en situaciones de conflicto entre alumnos y docente en términos de conocimientos, es decir, cuando aquello que la maestra indica o pone de relieve respecto a determinada noción que es objeto de estudio en la clase, contradice lo que miran los alumnos. Señala que cuando los alumnos no se dejan guiar por la maestra, no dan la respuesta que ella espera, es porque esa respuesta se opone a la manera en que ellos miran cierto fenómeno: esa contradicción ocasiona que los alumnos rompan la lógica de interacción o modifiquen el flujo de ideas en la clase. La contradicción entre la conclusión a la que se espera que los alumnos lleguen en cierta actividad en el aula y las ideas que realmente ponen en juego origina la aparición de cuestionamientos, preguntas, dudas, puntos de vista distintos por parte de los niños, es decir, una explicitación y reformulación de sus conocimientos que no surgiría sin ese conflicto. Así, la recomposición se da a través de una reconfiguración del contenido, que la autora no plantea como una condición para el aprendizaje[9]. Esa reformulación del contenido también proviene de la lógica de participación. La necesidad de convencer a otros, que miran un conocimiento de una manera opuesta a la propia, obliga a los alumnos a establecer mecanismos de “negociación, resistencia y negociación” (Candela, 2001, p. 140), es decir, a desarrollar y desplegar recursos discursivos para tratar de conseguir turnos, para posicionar sus maneras de ver. Así, el conflicto no solo origina que un conocimiento se ponga en palabras o se reconfigure, sino también que los alumnos busquen cómo poner sobre la mesa sus argumentos, hacerse escuchar, interpelar al otro.

[9] Los argumentos de Brousseau y Candela tienen en común la restauración del equilibrio mediante el conocimiento. También se distinguen en al menos dos cosas. Una es que Candela no hace énfasis en la mediación de la tarea en esa reconfiguración, sino en el diálogo entre alumnos y docente, aunque es la tarea la que da origen a ese intercambio. Otra es que Candela (1995) incluye situaciones en las que los alumnos pueden saber algo que el maestro no sabe, mientras que la Brousseau estudia las condiciones en las que los alumnos producen un conocimiento nuevo.

Para mí, entender dónde están las posibilidades de resarcir esos desequilibrios, y cómo se vinculan esas reparaciones con el aprendizaje, es una pregunta que sigue abierta. Erickson (1982) destaca que las sucesivas rupturas y reparaciones en ambas estructuras no son distorsiones. Al contrario, son un componente tan orgánico a la clase como esas mismas estructuras, una adaptación a la inmediatez. En esos momentos de contingencia, lo que hace falta no es una predicción de lo que viene en un plan social y académico ya estructurado, sino lo contrario: se necesita que tanto maestro como alumnos tengan capacidad de improvisar. Es justamente esa conjugación de pautas compartidas y predecibles con momentos fortuitos de ruptura y reparación, lo que permite a la clase realizarse como improvisación[10]. Poveda (2005) agrega que esas respuestas inmediatas son posibles por la historia compartida del grupo. Y me parece que la condición de Brousseau (2007), de restaurar a partir del conocimiento, muchas veces implica no solo una respuesta inmediata sino una reorientación del curso de las clases futuras.

Finalmente, quiero aclarar que en este apartado he hablado sobre todo de las relaciones entre pares, para destacarlas, porque son las que más observo en la tesis, pero es en este mismo marco que entiendo la participación de la maestra. De hecho, he tenido que deslizar hacia los alumnos algunas nociones originalmente pensadas para estudiar las interacciones entre el maestro y los alumnos, para integrar también las interacciones entre pares y mirar su heterogeneidad.

1.2.3 Los alumnos que van detrás

Maestros, padres de familia, autoridades educativas, investigadores, los propios niños, todos, nos preocupamos por los alumnos que van detrás. Los que resuelven más lentamente que el resto de sus compañeros, muchas veces no pueden abordar los problemas que se les plantean, con frecuencia se equivocan. Alumnos para los que muchos conocimientos, tal y como se reconstruyen ahora en la escuela, no son estudiables[11] todavía. Si el fracaso escolar se refiere a los niños, adolescentes y jóvenes

[10] Erickson destaca el valor de la improvisación en clase como algo positivo, la compara con la manera en que se orquesta una pieza de jazz. En ese género musical hay una cierta pauta, pero no están definidas de antemano todas las intervenciones de cada músico. La habilidad para tocar reside en conocer esas pautas generales, y también en encontrar el momento y la manera de intervenir espontáneamente. Erickson incluso hace sus registros de clase con apoyo de la escritura musical, la cual le permite analizar el ritmo de la clase.

[11] Chevallard, Bosch y Gascón (1998) plantean que "para entender los hechos didácticos que pueden observarse en una clase de matemáticas, es preciso interrogarse sobre la estudiabilidad de la cuestión matemática" (p. 195). Una cuestión es estudiable para un grupo específico de alumnos si es posible diseñar situaciones didácticas que permitan a esos alumnos adentrarse en tal cuestión. Destacan que en ocasiones

que ingresan a la escuela, pero no permanecen en ella, o que sí permanecen, pero "no aprenden en los ritmos y de las formas que espera la escuela[12]" (Terigi, 2009, p. 25), entonces los niños que describo están en esa situación.

Estos alumnos son poco visibles en muchas investigaciones en didáctica. La preocupación central de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986), al menos en el inicio, es de carácter epistemológico: se trata de comprender el conocimiento a partir de las situaciones que permite resolver, y es en esa medida que se estudian los alumnos. Numerosos trabajos inscritos en esa teoría permiten entender, por ejemplo, la diversidad de significados que puede cobrar una misma noción a partir de la diversidad de situaciones didácticas en las que está implicada, las formas en que estos significados se vinculan, las características de una situación que se pueden modificar para promover cambios en los procedimientos de resolución, la manera en que un conocimiento se erige en obstáculo para otro.

Estudios de este tipo siguen siendo fundamentales en didáctica: tenemos mucho que aprender todavía sobre las condiciones que hacen que un conocimiento sea utilizado por los alumnos, o más ampliamente, se vuelva necesario para tomar decisiones (Brousseau, 2007). Pero hay cada vez más estudios didácticos que a esta preocupación agregan otra, la de dar cuenta no solo de las producciones sino también del productor. Es decir, que enfatizan la necesidad de problematizar tanto al alumno como al medio en la relación entre ambos. Una de las inquietudes de estos trabajos tiene que ver con los estudiantes con dificultades. El mismo Brousseau, y Warfield (1999), convierten este problema en un asunto didáctico. Al intentar ayudar a Gaël, un niño con "dificultades electivas", Brousseau descarta la vía del apoyo psicológico, elige centrar la atención en la relación de Gaël con el conocimiento y hacer intervenciones didácticas para modificar esa relación. A partir de esa experiencia, los autores analizan la manera en que las producciones matemáticas de Gaël están mediadas por las expectativas que supone que la maestra tiene respecto a sus resoluciones, y surge la noción teórica de contrato didáctico. Perrin-Glorian (1994) trata de entender qué pasa con los niños que no logran

la cuestión queda fuera del alcance del grupo durante cierto tiempo. En el caso específico de este estudio, hay varios alumnos que, por tener todavía mucho que construir respecto a las figuras geométricas, por no estar suficientemente familiarizados todavía con la magnitud superficie, por haber tenido poca experiencia midiéndola con unidades, difícilmente pueden estudiar las fórmulas para calcular superficies, conocimiento que se privilegia en las clases que observé.

[12] La autora señala que cada nuevo esfuerzo del estado por ofrecer escolarización a poblaciones más amplias produce nuevos contingentes de estos alumnos, o bien alumnos que no ingresan, o que aun aprendiendo en el ritmo y forma que espera la escuela, los contenidos que aprenden no les resultan relevantes.

acceder a los conocimientos implicados en las situaciones diseñadas en su ingeniería didáctica. Su análisis la lleva a enriquecer la teoría, en particular las nociones de institucionalización y devolución. Sensevy, Turco, Stallaerts y Le Tiec (2002) estudian la acción de un maestro que concibe la heterogeneidad de los alumnos como un motor de aprendizajes. No solo se preguntan cuáles son los conocimientos que intervienen en la secuencia didáctica que elige ese maestro, sino también si esa secuencia y su gestión permiten realmente que todos los alumnos, incluyendo los que se sienten "menos cómodos" en el aula, adquieran esos conocimientos. Muestran cómo el maestro logra hacer una gestión del medio, el tiempo didáctico y el lugar que ocupan los alumnos asegurando la calidad de los saberes construidos en sus clases. Broitman, Cobeñas, Escobar y Grimaldi (2018) analizan la actividad matemática de alumnos con discapacidad en escuelas primarias comunes urbanas, escuelas rurales multigrado y escuelas primarias especiales. Señalan que el estudio de la educación inclusiva desde la didáctica de las matemáticas es un campo en construcción.

También quiero estudiar la actividad de estos alumnos porque ahí es donde mejor se ve que la interacción con los otros y la interacción con el problema influyen sustancialmente una en la otra. En los fragmentos de video que más me llaman la atención generalmente hay al menos uno de estos alumnos. Cuando Leonardo levanta la mano para decir algo al grupo me importa particularmente lo que tiene para decir porque es un alumno a veces adormilado por sus medicamentos. Ver a Ian -siempre escondido en el gorro de su sudadera- muy implicado en un problema de calcular áreas con un geoplano contrasta con verlo literalmente dormido en un momento en que el problema es de cálculo de áreas con la fórmula. Nahomi tiende a pedir a sus compañeros ayudas que generalmente no recibe, en cambio ella suele hacerse cargo de las tareas de Víctor, el niño con Síndrome Down. Miranda elige qué problemas abordar y cuáles no, y cuando lo hace los transforma, agrega nuevas preguntas, aunque no siga lo que hacen los demás ni las puestas en común. Cuando no puede con un problema, hace más bromas, platica más, se levanta, juega. Axel se aburre en una clase y no hace las tareas, pero en otra se implica en una resolución de intensa cooperación con su compañero. En todos estos ejemplos se vuelven muy visibles tanto el papel de la tarea como el de las interacciones sociales en la actividad de los alumnos. Como dice Naranjo (2009), "voltear también a mirar a los alumnos que supuestamente son "pasivos", permite dar cuenta de la riqueza de formas más sutiles que adopta su participación y, con ello, a contribuir al entendimiento de la vida social del aula" (p.4).

Finalmente, es en la actividad de estos alumnos donde se ven con mayor claridad las contradicciones de un sistema educativo que por un lado promueve la inclusión y por otro la obstaculiza. En el grupo donde hice el trabajo de campo había ocho niños (de un total de 34) con diagnósticos que ponían el acento sobre diversas condiciones neurológicas -Síndrome Down, Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad, etcétera-, o que eran percibidos como alumnos con rezago. Todo el personal de la escuela tiene identificados a estos niños: las maestras saben de la niña de primer grado a quien sus familiares "hicieron pasar por loca", es decir, consiguieron canalizarla a otra escuela de educación especial que ella no necesitaba, para evitar que desde la escuela se denunciara el maltrato familiar que percibían; todas conocen a Víctor, el niño con Síndrome Down, y reconocen el empeño que pone su madre en sus cuidados; todas saben que Angélica abandonó la escuela unos meses antes de terminar sexto grado. Las maestras cuentan que están al tanto de estos alumnos, aunque sean de otros grupos, porque "algún día les pueden tocar". Ellas se refieren a cada uno de estos niños por su nombre, no por su diagnóstico. En el salón, a veces la maestra pide que ellos se sienten juntos, otras veces les asigna distintas mesas integrándolos con el grupo completo.

Como han señalado numerosos trabajos, este es un problema cada vez mayor en diversos países, incluyendo México: todas las aulas tienen al menos uno de estos niños. Muchos estudios, desde muy distintas perspectivas, coinciden en cuestionar la explicación de las dificultades a partir de una deficiencia personal del alumno. Peter y Besley (2014, en Naranjo Flores, 2019), explican que el fracaso escolar es una de las múltiples y brutales formas de exclusión social que históricamente se han configurado como respuesta hacia "la diversidad de razas, clases sociales, etnicidad, religión, género y habilidad" (p. 211). McDermott (2001) explica cómo se configura esa última forma de exclusión social, la relativa a la habilidad, en la escuela. El autor sigue de cerca a niños diagnosticados con alguna discapacidad de aprendizaje en sus aulas, y señala que un sistema educativo que pone en primer lugar el ritmo de aprendizaje genera una degradación constante de los que van hasta atrás[13]. Esa degradación es la que produce el fracaso escolar. Argumenta que todos -alumnos, maestros, directores, padres de

[13] El ritmo de aprendizaje se ha mostrado como central en diversos contextos y niveles educativos. Néspor (1994) muestra que, para estudiantes de física en una universidad de Estados Unidos, ir al día es tan importante que los alumnos dejan de hacer otras actividades como tocar el violín, dedican días y noches al estudio, pasan mucho tiempo en los edificios de la escuela, y atienden todas sus clases, porque "cualquier atraso casi siempre daba como resultado el fracaso" (p. 53). De hecho, los grupos de alumnos se van reduciendo drásticamente a lo largo del semestre, sobre todo en el primer año.

familia, diseñadores de políticas, funcionarios públicos- se posicionan de alguna manera frente a la discapacidad y entre todos construyen momentos para su aparición pública como explicativa de cualquier cosa que hagan o dejen de hacer esos alumnos. Dicha discapacidad es una etiqueta política a partir de la cual se despliegan las contradicciones del sistema educativo.

Terigi (2009) explica con mayor claridad esas contradicciones. La autora muestra que la escuela, tal y como está estructurada, tiene ciertas características que hacen que no todos puedan acceder o permanecer en ella: "la simultaneidad, presencialidad, un cronosistema que fija regímenes de tiempo escolar, la descontextualización de las experiencias de aprendizaje, la heteronomía de quienes se incorporan en calidad de alumnos, etc." (p. 24) Esta manera de organizar la escuela excluye a muchos alumnos e incluso a poblaciones enteras que se califican como "poblaciones en riesgo": adultos no alfabetizados; adolescentes y jóvenes en conflicto con la ley, violentos en la escuela, en situación de adicción, embarazadas o madres; niños migrantes, multi-repitentes, desatentos, que trabajan, cuya lengua materna es distinta al español, que padecen abuso y violencia familiar; alumnos que no logran aprender los contenidos esperados en los tiempos esperados. Muchas de estas poblaciones simplemente no pueden, por ejemplo, asistir todos los días a la escuela. Paradójicamente, la escuela también ha puesto en marcha numerosos intentos por incorporar alumnos masivamente. Es decir, la escuela convoca a un número cada vez mayor de alumnos, pero les exige ciertas condiciones y hace derivar en fracaso escolar a quienes no están en posibilidades de cumplirlas. En este sentido, la escuela produce -a su pesar- el fracaso escolar a partir de una contradicción de origen, recibe alumnos para luego expulsarlos. Pero lejos de interpretar ese fracaso a partir de sus propias contradicciones, el sistema educativo lo ha entendido como una deficiencia personal de los niños y ha terminado por caracterizar el fracaso masivo como "una suma de fracasos individuales, un efecto agregado de los "déficits", "retardos madurativos", "retrasos intelectuales", "dificultades de aprendizaje" etc. que portan individualmente los alumnos" (p. 31) o incluso poblaciones. Terigi muestra cómo en esta explicación ciertas ramas de la psicología, la "psicología de las pruebas" (p.31) caracterizadas por aislar al sujeto que aprende del contexto en el que aprende, han jugado un papel estratégico al ofrecer una explicación científica al modelo patológico individual[14]. Broitman, Cobeñas, Escobar y Grimaldi (2018), identifican que

[14] La manera de entender a los alumnos con rezago, dificultades o discapacidad como niños cuyas posibilidades de aprendizaje son muy limitadas es similar a la forma de mirar a todos los niños, al menos en

esta centración “en el proceso individual del alumno con discapacidad sin contemplar las interacciones con sus compañeros/as con o sin discapacidad” (p. 2) se percibe también con frecuencia en trabajos que analizan las clases de matemáticas a las que asisten estos alumnos.

Los autores que he mencionado ayudan a cuestionar la explicación del fracaso escolar a partir de una deficiencia personal del alumno, así como a las políticas educativas que generan y se derivan de esa explicación, y al papel que ciertas ramas de la psicología han jugado ofreciendo una legitimación científica a esas políticas. Sin negar que algunos alumnos pueden tener una condición biológica específica que los hace aprender más lentamente que los demás, el problema fundamental es la manera en que está estructurada la escuela en general, y en que se organiza la enseñanza de los contenidos -también en todas las esferas del sistema educativo-, en particular.

Si tuviera que resumir en dos líneas por qué me interesa observar en este trabajo a los alumnos con dificultades, diría que en su actividad es donde se ve con más claridad la lejanía entre los conocimientos que a los alumnos -me refiero a todos los del grupo- les interesan y ponen en juego; y aquellos contenidos curriculares que se espera que aprendan, en particular, los múltiples conocimientos que las fórmulas condensan y que a todo el grupo le vendría bien revisitar. Es decir, quiero ver más de cerca las relaciones entre el discurso “cotidiano” y el “científico” (*everyday and scientific discourse*) que, para Ferrari, McNair y O’Connor (2004, en Gutiérrez, Sengupta-Irving y Dieckmann, 2010), cuando se distinguen de manera binaria, explican el fracaso escolar. O bien, en términos de Chevallard (2019), quiero entender cómo el paradigma “de visita de las obras”, bajo el cual se hace diseño curricular designando un “repertorio de monumentos” por visitar, termina por recaer en los alumnos.

Quiero por último detenerme un poco en el nombre que utilizo para referirme a estos niños: alumnos con dificultades. Los cuatro años estuve buscando un término que yo pudiera escribir mil veces sintiéndome satisfecha, y no lo conseguí. No todos ellos tienen la etiqueta de una “discapacidad de aprendizaje” (McDermott, 2001): algunos sí, sobre otros recae la sospecha, otros están bajo medicación más bien por su manera de relacionarse con los demás, otros simplemente no hacen las tareas. Tampoco son alumnos “débiles” (Perrin-Glorian, 1994): Angélica despliega muchos recursos para

Europa, hasta mediados del siglo XVIII, cuando surge el concepto de «infancia». Antes de eso, el período de vida que hoy llamamos infancia era concebido como una etapa impura, torcida, mal formada, carente de sentido moral, igual a la de un animal sin socializar. El valor de esa etapa estaba dado fundamentalmente por la posibilidad de llegar a convertirse en adulto (Imaz, 2010).

resolver, para ganar espacio, para conseguir turnos. No son los alumnos “menos cómodos” en clase (Sensevy, Turco, Stallaerts y Le Tiec, 2002): Miranda se ve muy cómoda, juguetona y risueña hasta cuando decide no hacer las tareas y ponerse a platicar de otra cosa. Buscando en las maneras de referirse a estos niños dentro de la escuela tampoco tuve suerte. Las maestras -o desde la dirección-, se refieren a cada uno por su nombre, porque como dije antes, todas los conocen, aunque no sean de su grupo. Los alumnos me dicen a mí que “él tiene problemas”, pero entre ellos también los evocan por su nombre: te apuesto que Nahomi va a hacer esto, ya viste que Leonardo hizo lo otro. Entendí que ninguna manera de nombrarlos va a ser pertinente porque lo único que tienen en común es el riesgo de fracaso escolar. Cualquier término que los designe solamente a ellos hace recaer el fracaso solamente en ellos, perdiendo de vista que el fracaso es relacional. Pero, al escribir para quien no ha estado en esa escuela, necesito un nombre porque no puedo hablar de esos niños sin hablar de los otros. Terminé por elegir un mal nombre, porque no encontré uno adecuado.

Aunque estos alumnos aparecen desde el segundo capítulo, analizo su actividad fundamentalmente en el tercero y cuarto. Uno centrándome en la diversidad de maneras, muchas veces sutiles, de participación de una alumna específica, cuando resuelve un problema que puede abordar y lo hace con pares que no tienen la etiqueta de la dificultad. En el otro analizo las formas en que estos alumnos van quedando fuera del estudio de las fórmulas para calcular áreas. En cada fragmento aclaro si interviene un alumno con dificultades.

En este apartado me dediqué a explicitar cómo entiendo la actividad matemática de los alumnos en el aula. En el siguiente, describo cómo entiendo los contenidos que son objeto de estudio en las clases que observé.

1.3 Las figuras, su superficie y su área

Empiezo por hacer un comentario general sobre la medición de magnitudes. En todas las fotografías de la imagen 1 aparece un instrumento de medición. Un dibujo de Rini Templeton retrata el uso cotidiano de básculas en mercados y tiendas locales. El vidrio trasero de un camión muestra a la Santa Muerte resguardando con sabiduría un reloj de arena que simboliza el tiempo de vida de las personas. En el resto de las imágenes hay representaciones de la justicia, ejercida o quebrantada de muy distintas maneras: una denuncia de corrupción sindical, la declaración de una constitución por Benito Juárez, la voluntad de la justicia divina y el balance entre el castigo y la culpa atribuidos a la Santa

Muerte, la participación de la policía y el estado en la violencia feminicida, un restaurante que equilibra la calidad de la comida y los precios, el héroe de una serie de televisión tan hábil para resolver casos jurídicos que “no necesitas un abogado, lo necesitas a él”, la prevención al delito cara a cara y puño a puño proclamada como más efectiva que la Suprema Corte, y La Justicia personificada en un signo zodiacal pintado por Xul Solar. Todos ellos unidos por una balanza de platillos en equilibrio.

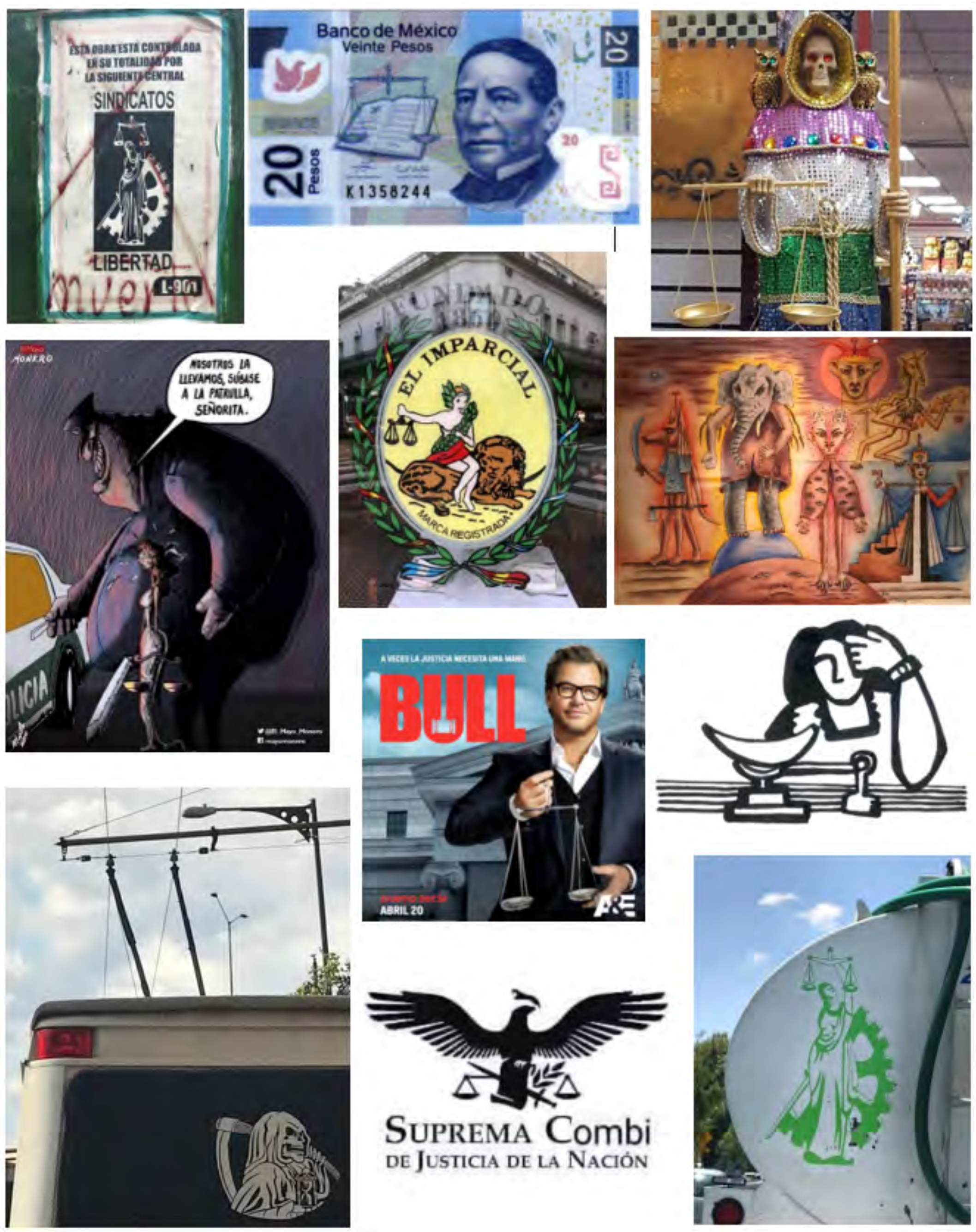


Imagen 1

Esa balanza es símbolo de justicia porque la medición está íntimamente ligada a la vida social. La justicia -sindical, constitucional, comercial, estatal, ciudadana, divina- no está garantizada sin balanzas bien calibradas y utilizadas. El equilibrio de los platillos sostenidos por alguien justo, imparcial, es un ideal jamás alcanzado en una historia milenaria en la que hay que tener mañas para negociar el precio por kilo, se calibran las básculas según la circunstancia, se pone paja entre el trigo o se moja para hacer variar su peso, se pide el recipiente colmado para comprar grano y se da rasado al venderlo, se promueve el cambio de la medición por capacidad a la medición por peso para restringir el acceso a instrumentos y patrones (Kula, 1998). Todas las actividades ligadas a la medición están atravesadas por largas historias de conflicto. Por poner solo un ejemplo, relativo al proceso de instauración del sistema métrico decimal que utilizamos ahora:

> La aplicación del sistema métrico, sistema de medidas uniformes, inmutables y convencionales, no era posible sin la previa supresión del feudalismo, sin la abolición del latifundio, sin la supresión de los tributos campesinos, sin la quema previa de todos los papeles con las obligaciones campesinas hacia el señor, sin la creación (…) de un museo de medidas latifundistas falsas (Kula, 1998, 455).

Así como tiene un papel central en la vida de las sociedades, la medición también lo ha tenido en el desarrollo de las matemáticas como disciplina científica. Numerosos objetos matemáticos han surgido a partir de problemas de medición (Encyclopaedia Universalis, 1995). Mostraré brevemente el caso del sistema numérico tal y como se conoce ahora en la disciplina[15]. Una limitación del sistema de números naturales surge cuando se trata de medir magnitudes continuas con un conjunto discreto de números: ¿Cómo medir una longitud de 3.45 metros si el número 3.45 no existe, y el sistema numérico solo permite encuadrar esa medida entre 3 metros y 4 metros[16]? Una solución, encontrada por matemáticos griegos como Euclides, está en las razones -la relación entre esa longitud y 1 es la misma que hay entre 345 y 100 o, como solía decirse, "*x* es a 1 como 345 es a 100" - que no tienen todavía el estatuto de números, no se opera con ellos como se hace con los naturales, son parejas de números, relaciones entre números. A partir de las razones –que muchos siglos después derivaron en las fracciones y decimales, reconocidos y manipulados como números-, surge la cuestión teórica de determinar si, una vez elegida una unidad, cualquier longitud puede medirse con ella. La demostración

[15] Los números reales son producto de un largo trayecto histórico que ha tenido que ver también con el desarrollo de la teoría de conjuntos, la topología, la lógica y el álgebra. Lo que me interesa destacar es que algunos problemas de medición han sido clave para la construcción de dichos números.

[16] Este problema también lo enfrentan los niños que solo conocen los números naturales y están por aprender razones, fracciones o decimales (Comin, 2002).

de que la medida de la diagonal de un cuadrado tomando el lado de ese cuadrado como unidad no puede expresarse como un cociente de dos números naturales constituyó una fuerte crisis, “porque establecía a través de un razonamiento demostrativo, una incoherencia al sentido común” (Encyclopaedia Universalis, 1995). Esta crisis dio origen a los números llamados irracionales. Resumiendo, una serie de problemas de medición de longitudes llevó a extender el conjunto de números naturales a las razones, las fracciones, los decimales y los irracionales.

La medición también es germinal para gran parte de las matemáticas escolares: el número cuantifica magnitudes (Brousseau, 1981, 2001), la proporcionalidad, probabilidad y porcentaje estudian relaciones entre dos magnitudes (Block, 2001; Comin, 2002), las funciones provienen de las relaciones entre magnitudes (Comin, 2002), hay un vínculo estrecho entre la forma de figuras o cuerpos y su área o volumen (Douady y Perrin-Glorian, 1989).

Brousseau (2000b, 2001) distingue tres entornos o *universos* de la medida, en el sentido de que cada uno aglutina actividades de distinto tipo: los objetos, las magnitudes y los números. Muestra la diferencia a partir de un ejemplo. Cuando se dice que un pájaro tiene dos metros de envergadura[17], están en juego elementos de los tres universos: el pájaro, la envergadura y los dos metros. El pájaro puede ser analizado desde muchos puntos de vista, por ejemplo, como parte de un estudio sobre diversidad biológica o sobre el impacto ambiental de un proyecto de desarrollo. En esa problemática, la envergadura puede revelarse como un dato relevante. Es decir, la envergadura no está en el pájaro, se construye como un indicador aproximado del tamaño. Lo mismo pasa con cualquier magnitud, no es el objeto ni está en él, es un criterio que se utiliza para entender algo de los objetos, en particular cuando es importante compararlos u ordenarlos. Finalmente, uno puede saber si la envergadura de un pájaro es mayor a otra por la vista, poniéndolos cerca, o bien tomando la medida. Es decir, los objetos se pueden comparar de acuerdo con cierta magnitud de manera directa, o haciendo intervenir los números.

A continuación, describo la mirada que me ha sido útil respecto a esos tres ámbitos para la superficie: las figuras, la magnitud superficie como característica física, y su medición con unidades, por transformaciones o con fórmulas que remite la magnitud a los números.

[17] La distancia entre las dos puntas de las alas cuando están completamente extendidas.

1.3.1 Las figuras, además de su superficie

Es fácil pensar que ciertas propiedades de las figuras geométricas se pueden aprender rápidamente. Que un triángulo tiene tres lados, es más grande que otro, es igual a otro, tiene un lado más grande que los otros dos o un ángulo recto, parecen características tan simples, tan claramente visibles en la figura, que basta con mostrarlas a los alumnos para que se las apropien.

Diversos trabajos han señalado que esto ocurre con frecuencia en la enseñanza de la geometría. Fregona (1995) caracteriza las prácticas ostensivas como aquellas en las que el maestro muestra un objeto a sus alumnos, suponiendo que ellos verán en ese objeto lo mismo que él mira, y entonces no es necesario un trabajo para hacerlos ver. Es decir, que esas prácticas se definen por "la ilusión de la evidencia" (p. 99). Por el contrario, cuando un maestro busca hacer ver, es porque reconoce que hay una diferencia entre las interacciones que él tiene con el objeto y las que tienen los alumnos, que es importante enseñar a "leer" una figura.

Vecino Rubio (2003) muestra que la enseñanza por ostensión proviene en cierta medida de los libros de texto, en los cuales frecuentemente las figuras están dibujadas y por lo tanto el alumno no las puede manipular; aparecen una por una y entonces difícilmente el alumno puede comparar sus características; y esas características son mostradas con explicaciones, dibujos, flechas que señalan un segmento importante, no emergen a partir de un problema que las haga funcionales.

Algunos estudios hechos desde la Teoría de las Situaciones Didácticas y desde la cognición han mostrado que "ver" en geometría supone un proceso de aprendizaje que dura varios años, y que implica cambios importantes en la mirada sobre las figuras. Duval y Godin (2005) explican que los alumnos tienden a percibir las figuras como una mancha en un papel, es decir, como una superficie delimitada por un contorno. Pero el pensamiento geométrico implica trabajar principalmente sobre las componentes lineales de las figuras: rectas paralelas, perpendiculares, alturas de triángulos, diagonales de rombos, bases de trapecios. Un ejemplo es la definición de triángulo -una superficie bidimensional- como una figura de tres lados -segmentos unidimensionales-, agrupando formas muy diversas en una misma categoría. En este sentido, se requiere transitar hacia la unidimensionalidad de las figuras, verlas como haces de líneas. Gestionar este cambio de mirada en los alumnos implica una elección cuidadosa de tipos de problemas, figuras geométricas e instrumentos.

Hasta ahora he hablado de la enseñanza de la geometría -o más específicamente, de las figuras geométricas-, pero ella está muy entretejida con el espacio plano, el de dos dimensiones. Los conocimientos espaciales son aquellos vinculados a la experiencia con el mundo físico en el cual se realizan acciones, comunicaciones y validaciones. Algunos tienen que ver con la posición relativa, desplazamientos, cambios de puntos de vista, representaciones de un edificio o una ciudad. Los conocimientos geométricos tienden más bien hacia la organización a partir de axiomas y teoremas para estudiar objetos que no son físicos sino conceptuales. Al usar herramientas de la geometría para controlar las relaciones sensoriales con el espacio -sobre todo para construir maneras de resolver problemas del espacio que rebasen el problema inmediato, utilizables en otros del mismo tipo, y validar esas resoluciones en el espacio-, surge una tercera vertiente de conocimientos, los espacio-geométricos (Salin, 2004). Un mismo objeto puede entonces ser percibido de maneras muy distintas en los tres ámbitos. Por ejemplo, si para reproducir un paralelogramo se toman las medidas de los lados con una regla y se ajusta la inclinación de un lado por ensayo y error, o calcando, es decir, sin medir los ángulos, está en juego una interpretación espacial. En cambio, en el ámbito espacio-geométrico, echando mano de manera implícita de ciertas propiedades geométricas, se puede dar la medida de dos lados contiguos y el ángulo comprendido entre ellos, o bien la medida de dos lados y la diagonal. En los dos casos, se sabe si la tarea está bien hecha al superponer la figura original a la reproducción: la validación se hace en el espacio. Finalmente, en geometría, el problema se formula de otro modo, ahí se pide, por ejemplo, mostrar que un paralelogramo queda determinado por dos lados contiguos y el ángulo comprendido entre ellos, o por dos lados y una diagonal. Su resolución implica usar propiedades de ángulos y lados que se conservan cuando dos rectas paralelas son cortadas por otra. En este caso no importan las medidas específicas de lados o ángulos, en cambio la congruencia de ángulos y el paralelismo figuran en primer plano.

Los conocimientos que analizo en la tesis con relación al tangram -es decir, cuando los alumnos toman las piezas y buscan maneras de conjugarlas para cubrir un contorno dado- son espaciales y, debido a que las piezas representan figuras, entran poco a poco conocimientos espacio-geométricos[18]. En las tareas de fórmulas, a veces

[18] Marchand (2020) también ubica como conocimientos espaciales los que se originan a partir de algunas actividades con tangram. En su estudio pide a los alumnos reproducir una configuración que acaban de ver sin tenerla ya presente, lo que implica el paso por una imagen mental de la configuración.

se pide previamente trazar la figura cuya área después calcularán. Lo hacen con frecuencia por ensayo y error considerando las medidas de los lados, y en el proceso comienzan a cobrar relevancia ciertas propiedades de las figuras, como tener dos pares de lados paralelos en el caso del romboide. Por eso ubico también estos conocimientos entre los espaciales y espacio-geométricos. Finalmente, el uso de fórmulas para calcular áreas requiere ver bases, alturas y diagonales, es decir, avanzar hacia la deconstrucción dimensional que describo en la página anterior.

El espacio suele subestimarse en la escuela, se subordina frente a la geometría (Marchand, 2020). Se asume que los alumnos comprenden el espacio por sus múltiples relaciones con él fuera de la escuela, y no se toma como objeto de estudio. Pareciera que solamente hace falta adquirir un vocabulario más académico para nombrar cosas que ya saben (Saiz, 2003). Restar importancia al estudio del espacio tiene como consecuencia un debilitamiento de las relaciones entre espacio y geometría. Los conocimientos geométricos, tal y como se conocen ahora, nacieron del estudio del espacio, pero se han alejado tanto de ese origen que ya no figuran en los problemas de los que se hace cargo la geometría, y se han desvanecido también en la enseñanza. Esos conocimientos espaciales no son ahora interesantes para la geometría, pero fueron imprescindibles en su génesis, y lo son también para su aprendizaje. La geometría, a su vez, provee de herramientas para modelar el espacio y resolver problemas que surgen de él. Así, ambos se nutren mutuamente (Salin, 2004). La relación entre espacio y geometría parece ser parte de una *cadena trófica:*

> Una *cadena trófica* es una suerte de cadena alimenticia para los objetos de enseñanza (…) que se crea cuando [una obra matemática] «se nutre de otra» y paradójicamente «la hace existir» en la institución que le sirve de hábitat” (Chevallard, 2007, en Chambris, 2010, p. 321). “Así, para un objeto de enseñanza, el hecho de ser útil a otros, de estar en una cadena, de ser comido por otros es un buen medio de existir (Chambris, 2010, p. 321).

Los argumentos que he mostrado sugieren que la *razón de ser* del espacio satisface una necesidad trófica de la geometría. Si el espacio desaparece, se ve amenazada la supervivencia de la geometría.

Los conocimientos espaciales y espacio-geométricos que estudio en este trabajo son necesarios para estudiar después la superficie. Como explico en la introducción, las figuras y su área están ligados profundamente. La comparación directa de superficies, el conteo de unidades, las transformaciones y el uso de fórmulas necesariamente implica poner en juego características de las figuras geométricas.

Quiero por último hacer una aclaración sobre dos términos que uso a lo largo de la tesis: figura y forma. Un tipo de objetos cuya superficie se compara, se ordena o se calcula al trabajar en el microespacio, son las figuras geométricas. Y estas se desdoblan en varios tipos. Perrin-Glorian (1999) distingue la figura material y la simbólica: una cosa es una pieza tangible de un rompecabezas, hecha de madera, de color azul, con cierto grosor, la pieza concreta de tres lados que el alumno puede manipular; y otra es el triángulo conceptual, abstracto, inmaterial, la propiedad de tener tres lados. Fregona y Orús Báguena (2011) ven más matices, hablan de cinco *dominios de declaración sobre las figuras* (p.87), que entiendo de esta manera: La *figura material* es la misma que describe Perrin-Glorian, el dibujo en papel que alumnos y maestro pueden recortar, plegar, etcétera. La *figura representación mental* es lo que el alumno ve en la figura material, aquello que orienta sus decisiones. Él puede estar manipulando un triángulo obtusángulo material, sin considerarlo todavía como un triángulo hecho y derecho, sino como algo que se le acerca, que tiene "más o menos la forma de un triángulo" (p. 87). La *figura devuelta* "al alumno por la situación es aquella con la cual el alumno trata cuando quiere resolver un problema" (p. 87). Por ejemplo, al hacer una descripción de un romboide trazado en papel (una figura material) para que un compañero que no lo ha visto pueda hacer uno igual, el alumno no solo toma en cuenta lo que él mismo ve en ese romboide, es decir, la figura representación mental, sino también lo que anticipa que el otro verá en el mensaje. Así, "establece una nueva relación con el objeto que se distingue de las anteriores" (p. 88). Al considerar la relación del profesor con las figuras, se pueden entrever dos dominios más. Uno es la *figura ideal*, el objeto de enseñanza. Esa figura contiene las propiedades que el maestro conoce, de las cuales selecciona las que quiere enseñar a sus alumnos. Así, el maestro puede considerar al rombo como una figura en la cual sus alumnos pronto sabrán reconocer y poner de relieve las diagonales para calcular el área. El otro dominio es la *figura didáctica*, la manera que encuentra el maestro para destacar las propiedades que le interesan. Por ejemplo, cuando marca las diagonales del rombo en color rojo, explica e ilustra con un dibujo cómo esas diagonales separan al rombo en cuatro trozos que al reacomodarse forman un rectángulo.
Evidentemente, estos desdoblamientos valen tanto para la "figura" genérica como para cualquier tipo específico de figura: hay triángulos materiales, rombos devueltos, trapecios ideales.

Es importante tener en cuenta estas distinciones, que a veces son incluso fundamentales. Más adelante voy a mostrar el trabajo que cuesta pasar de *un* triángulo, específico, concreto, que se tiene enfrente trazado a lápiz, cuya área se puede encontrar contando cuadritos completos y reuniendo los trozos para que formen nuevos cuadritos, para lo cual no importa que tenga tres lados; a pensar en *el* triángulo, y expresar su área mediante una relación entre sus componentes lineales, sin importar cuántos trozos de cuadritos tiene porque estos pueden variar muchísimo, solamente a partir de la propiedad de tener tres lados.

Reconociendo esta diferencia, intenté aclarar en el texto de qué tipo de figura se trataba cada vez, pero no conseguí encontrar una manera breve y clara de hacerlo: al agregar más adjetivos a registros e interpretaciones de por sí ya densos, estos se volvían a veces más difíciles de leer. Por eso, opté por elegir la misma solución de Perrin-Glorian (1999): abusar del lenguaje llamándole a todo "figura", a todo "triángulo", confiando en que el contexto permita resolver la ambigüedad. Un caso en el que sí hago diferenciación es el siguiente: a las figuras materiales en las actividades del tangram les llamo "piezas" o "plantillas". Pero cuando quiero especificar qué pieza es, vuelvo a amalgamar: le digo "triángulo" a la pieza naranja y "triángulo" al objeto al que se le puede aplicar la fórmula "base por altura sobre dos". En los casos específicos en los que me interesa poner de relieve algún desdoblamiento de la figura, como los que evoco en el párrafo anterior, me detengo un poco más para explicitar esas diferencias.

Respecto al término "forma", sí hago una distinción. Cuando digo que dos figuras tienen la misma "forma" me refiero a que son semejantes en el sentido matemático, es decir, a que una podría ser una reproducción a escala de la otra, a que ambas tienen ángulos iguales y lados proporcionales. En cambio, con "forma global" me refiero a un uso más coloquial del término, como lo hace Marchand (2020): si dos figuras son similares para los alumnos porque ambas tienen una región inferior grande y ovalada, una encima de ella muy angosta y alta, y finalmente algo que parece una cabeza y un pico, digo que tienen la misma "forma global".

1.3.2 La superficie, además de su medida

Desde la Alta Edad Media, que comienza en el siglo V, hasta la introducción del sistema métrico en el siglo XVIII, las superficies agrarias se medían principalmente de tres maneras en Europa: por el tiempo de trabajo humano, la cantidad de grano sembrado y las necesidades de autoconsumo y reproducción. Importaba, por ejemplo, tener un terreno que dos bueyes pudieran arar en un día, que fuera fértil para producir un *korzec*[19] y 24 cántaros, o que permitiera asegurar la reproducción de los animales de tracción. El valor de una propiedad estaba dado por su funcionalidad, no por su extensión. El cambio hacia la medición de la tierra por la cantidad de superficie fue largo. Dos factores que pusieron de relieve la superficie fueron la densidad poblacional y el cobro de tributos[20] (Kula, 1998). La superficie es entonces un objeto matemático, social y político, desde su origen, emerge como objeto de disputa. Su construcción, que implica dejar de lado la relación del hombre con la tierra y seleccionar una cualidad abstracta de los objetos, supone "un escalón muy importante en el desarrollo de una civilización, ya que prueba la realización por parte de la humanidad de un trabajo mental arduo y difícil" (Kula, 1998, p. 92).

Ese considerable trabajo que supone comprender la superficie o cualquier otra magnitud, se ve también en experiencias de menores trabajadores y adultos fuera de la escuela. Inés, una niña de diez años, que desde antes de aprender a caminar acompañaba y luego ayudaba a su mamá a pepenar cartón para transportarlo en un carrito de madera y venderlo, es muy hábil para estimar visualmente el peso de cantidades de cartón. Por ejemplo, rápidamente identifica que los trabajadores de un Office Depot se equivocaron al prever que tenían "fácil como 80 kilos" para regalarles: "¿no que como ochenta? Eso son como sesenta (kilos) o menos" (Padilla, 2015). Si Inés puede corregir por veinte kilos la información de trabajadores mucho mayores que ella, es porque ha tenido durante años una relación directa y vital con el peso, no de cualquier objeto, sino específicamente del cartón. De ese peso depende el ingreso de su familia, ese peso es el que su madre tiene que cargar en el carrito. La imprecisa anticipación de los empleados del Office Depot, y el hecho de que Inés dedica tiempo a entrenar a su hermano menor para que aprenda a estimar preguntándole como cuánto pesa una cantidad de periódico y corrigiéndolo (él estima que son cinco kilos, ella le dice que es menos, como dos kilos) muestran que la medida del peso no es fácil de estimar. Para aproximar la medida sin medir con instrumentos, Inés y su madre toman en consideración la manera de formar y atar la paca, el tipo de cartón –si es "bofo" o no- y las dimensiones del carrito en que lo transportan[21].

---

[19] Un *korzec* es un recipiente que se utilizaba en algunas regiones de Polonia como unidad de medida de granos.
[20] El tributo era constante. Por eso, lograr aumentar la arada, o si el señor la conseguía reducir, implicaba modificar el porcentaje de ingreso que representaba el tributo.
[21] No pueden medirlo porque no tienen acceso a una báscula, pero necesitan tener una idea del peso para saber si les pagan lo que corresponde. Otros ejemplos de la compleja relación de niños y adultos con las

En la escuela, la escasa o incluso nula experiencia con las magnitudes antes del trabajo con las medidas, da la impresión de que se asume que todos los niños tienen la experiencia de Inés, no solo con el peso del cartón sino con el peso genérico. Que pueden verlo como una característica común entre una pepita de oro, un carrito lleno de cartón y el cemento que contiene un compresor. Que aíslan ese rasgo de otras propiedades de los objetos, es decir, que perciben el peso solamente al cargar, sin considerar, por ejemplo, el volumen de las pacas y del carrito ni el tipo de cartón. Que no solo conocen el peso sino también la longitud, capacidad, tiempo, superficie y volumen. Y que esos conocimientos se pueden dar por construidos, como los primeros ladrillos sobre los cuales se va a edificar gran parte de la matemática escolar (Chamorro, 2005; Brousseau, 2001).

Volviendo a la superficie en la escuela, se ha mostrado que su percepción como magnitud geométrica, sin medirla para asignarle un número, es central incluso para poder regular lo que se hace con esos números. Se han diseñado secuencias didácticas para comparar superficies -una de las principales tareas que involucran esa magnitud, porque es una característica relacional, más que intrínseca a un solo objeto- sin pasar por los números: dos figuras tienen la misma superficie cuando una se puede cubrir con la otra sin dejar huecos ni encimar o tirar pedazos, cuando ambas pueden cubrirse con las mismas piezas, o cuando al realizarlas en un mismo material del mismo grosor, pesan igual. Nunca resulta una tarea sencilla. Los alumnos tienden a considerar la forma global mucho más que la superficie. Aseguran que una región extendida, con muchos agujeros, es mayor que una compacta. Cuando se les pide modificar una figura dada para construir otra que tenga menor área y mayor perímetro, dibujan una dentro de la original lo más parecida posible, buscan cambiar el tamaño conservando la forma global (Douady y Perrin-Glorian, 1989). Ante la consigna de escribir un mensaje para que otro pueda construir una figura de la misma superficie que la propia, los alumnos comunican la forma global o incluso la forma (Chamorro, 2005). Para construir una nueva figura partiendo de un cuadrado y conservando su superficie, no les incomoda dejar huecos o tirar trozos, sino cuidar la forma global del nuevo diseño.

La enseñanza de la superficie como magnitud física sin medirla es entonces central, y se juega en otras tareas, cuando los alumnos miden áreas con unidades o fórmulas. No obstante, suele estar poco presente en programas, libros de texto y aulas,

---

magnitudes se pueden encontrar en Solares (2012) sobre longitud y peso, De Agüero (2006) sobre superficie, Padilla (2015) sobre capacidad.

desde hace largo tiempo. Brousseau (2001) cita la única mención a la superficie que encontró al revisar libros de texto hechos en Francia en el siglo XX, un intento fugaz por hablar de ella antes de medirla: “Mientras la cerca de este parque se remite al perímetro, el césped en el que pastan las vacas representa la superficie” (p. 27). La magnitud se subordina al número, a la medida, como le sucede al espacio frente a la geometría. El autor explica que esto es el resultado de varios fenómenos. La evolución de los instrumentos de medición ahorra el trabajo de “identificación, comparación, reporte de unidades e incluso de contacto con la materia objeto de medida” (p. 41): a la persona le llega el número, por ejemplo, el que arroja una báscula digital, pero para interpretarlo necesita tener experiencias previas con el peso. Las magnitudes fueron centrales para el desarrollo de las matemáticas, pero estas últimas se alejaron de ese origen para quedarse con el número y esta reorganización se ha trasladado a la primaria (en cambio, la física se quedó con las magnitudes, pero comienza a estudiarse en la secundaria). La función cada vez mayor de la primaria como propedéutica para la secundaria “ha hecho estallar la cultura matemática elemental clásica” (op. cit. p. 30), en particular, ha desvanecido el estudio de las magnitudes en aras de promover un álgebra temprana, contenido central en el siguiente nivel. La instauración del sistema métrico decimal, tan similar al sistema decimal de numeración, ha contribuido a que las magnitudes se enseñen a partir de las unidades con que se miden y que las medidas se traten igual que los números abstractos (Chamorro, 2005). Así, si bien en México hay desde la reforma de 1993 un esfuerzo por darle mayor visibilidad a la construcción de las magnitudes físicas como contenido matemático, todavía figuran poco (Mendoza von der Borch, 2017). En muchas lecciones que apuntan al número aparecen los metros cuadrados, los kilos o los centímetros, pero hay poca preocupación porque los alumnos sepan qué tan extensos, pesados o largos son.

Douady y Perrin-Glorian (1989), en un estudio pionero sobre la superficie en didáctica, argumentan que si se identifica demasiado temprano a la superficie de cada figura con un número (como 5 metros cuadrados), se corre el riesgo de favorecer que los alumnos fusionen área con perímetro, una tendencia muy frecuente y persistente. Esto sucede por dos razones. Por un lado, se utilizan los mismos números para medir magnitudes muy distintas, superficie y longitud. La representación escrita de las unidades convencionales, privilegiadas en la enseñanza, es decir, los ostensivos con los que se designan, son también similares -cm, cm^2-, y esas unidades funcionan con reglas muy parecidas de conversión porque en ambas se divide o multiplica por potencias de diez. Las dos cosas contribuyen a amalgamar las magnitudes que esas unidades miden (Chamorro, 2005). Por otro lado, las fórmulas de área son relaciones entre medidas de longitudes -bases, altura, diagonales- que arrojan una medida de superficie, es decir, vinculan las dos magnitudes. Si todo esto sucede cuando longitud y superficie no se distinguen todavía con claridad, los alumnos tienden a fusionarlas. Para que una medida tenga sentido para los alumnos, es importante que ellos conozcan aquello que cuantifica (Douady y Perrin-Glorian, 1989), así como en ciencias naturales, antes de matematizar, es importante concebir físicamente el fenómeno[22].

En las clases que analizo en el capítulo cuatro se ven efectos del largo proceso que ha derivado en una frágil visibilidad de las magnitudes como objeto de enseñanza y, en cambio, una atención prioritaria en los números que resultan de medirlas.

1.3.3 La medición con unidades, además de las fórmulas

Un matemático no se pregunta para qué sirven los números en la medición. Desde el punto de vista de la organización actual del "saber sabio", medir no es otra cosa que comparar objetos con un patrón. Medir es obtener una medida, un número. Desde la didáctica, la pregunta es obligada. Si los alumnos conocen la superficie como una característica física y pueden compararlas directamente, cubriendo una con la otra al cortar y reacomodar trozos, ¿qué hace necesario tener que medir con unidades, sacar un pie del ámbito geométrico para llevarlo al numérico? (Brousseau, 2001).

La comparación directa se vuelve poco práctica en muchos casos, cuando las formas de las dos figuras son muy distintas. Se requieren muchos cortes, los pedazos salen demasiado pequeños, se pierden, se enciman, es difícil no dejar huecos. Además, a veces es necesario comparar u ordenar superficies de objetos que no pueden recortarse, como dos mesas que están alejadas entre sí, o dos figuras representadas en una hoja de libro. En esos casos se pueden usar *intermediarios*, como piezas del tangram con las que se tapiza una figura y la otra del libro. Al comparar las piezas utilizadas en ambas se puede saber cuál superficie es mayor. O bien, se puede fijar un solo intermediario, un *patrón o unidad*, como una hoja de periódico, que se lleva a una y otra mesa, para ver cuántas veces cabe en cada una: el número es un recurso para comparar y ordenar cantidades de magnitud.

[22] Antonia Candela, conversación personal.

Las medidas conservan el orden de objetos desde el punto de vista de una magnitud. Una vez que se asignan números, alguien puede saber cuál es mayor, aunque los objetos estén desordenados, sin tener que hacer las comparaciones físicamente. Por eso una persona que no conoce dos terrenos sabe cuál es más grande si sabe cuántas hectáreas miden. Las medidas también permiten integrar un nuevo objeto en un conjunto que ya está ordenado, usando precisamente el orden de los números, es decir, ubicando entre cuáles dos medidas va la nueva. El sentido del número está dado entonces porque simplifica las manipulaciones del recubrimiento -los múltiples cortes y reacomodos-, posibilita resolver cuando la comparación directa encuentra un límite y también expresar y conservar el orden (Brousseau, 2001). La identificación demasiado temprana de objetos con números tiene el doble efecto de suprimir la interpretación de la superficie como cualidad física y de perder el sentido del número.

El universo de las unidades es extenso. Está el asunto de la elección de la unidad en función del objeto a medir: un triángulo para una figura puntiaguda, un cuadrado para una con puros ángulos rectos, el kilómetro cuadrado para una extensión agraria, el metro cuadrado para una casa. La consideración de la forma global y el tamaño de la unidad en función del objeto crea un nuevo problema, el de cómo comparar las medidas de distintas cosas que se han medido con distintas unidades, o bien las medidas para un mismo objeto obtenidas por diferentes niños que eligieron unidades diferentes. Esto tiene dos salidas. Una es fijar la unidad para todos los objetos y todos los alumnos: es el caso del sistema legal. La otra es hacer conversiones de unidades (Douady y Perrin-Glorian, 1989; Perrin-Glorian,1999; Chamorro, 2005). La medición puede hacerse poniendo físicamente las unidades, una tras otra, cuidando de no traslaparlas ni dejar huecos, como sucede con el recubrimiento. O bien, se pueden usar reticulados como una hoja cuadriculada, que es portadora de esa iteración de unidades[23]. Mucho de esto tiene un paralelo histórico. Kula (1998) dedica más de trescientas páginas a explicar largos procesos ligados a la diversidad de unidades, su estabilidad y unificación en Polonia y Francia.

[23] Hay tres problemáticas más que se cruzan con el universo de las unidades. Las relaciones entre área y perímetro, por ejemplo, en el problema de construir una figura con mayor área y menor perímetro que otra dada. La medición en el microespacio de la hoja de papel con unidades como el centímetro cuadrado, en el mesoespacio del aula con metros cuadrados y en el macroespacio de una ciudad en kilómetros cuadrados. Finalmente, el análisis de la variación del área al hacer ampliaciones o reducciones de figuras. Todo esto está demasiado alejado de lo que yo observé en las clases.

1.3.4 La medición por transformaciones, además de las fórmulas

Al medir con unidades surge permanentemente el problema de la inexactitud. Una vez elegida una unidad, no cabe un número entero de veces en la mayoría de las figuras. Esto se puede abordar de tres maneras. Una es extender las medidas, de los naturales a las fracciones o decimales. Otra es hacer encuadramientos, es decir, enmarcar la medida entre dos números naturales, establecer que una figura mide más de los 15 cuadritos que caben completos dentro de la figura y menos de los 22 que la tocan. La unidad se puede reducir en tamaño una y otra vez para aproximar la medida tanto como se quiera. La tercera solución, válida solamente para polígonos -es decir, no para figuras con bordes curvos-, consiste en volver al marco geométrico: transformar la figura que se quiere medir a otra cuya área sí se puede calcular (Douady y Perrin-Glorian, 1989; Perrin-Glorian, 1999).

En este apartado me centro en esas transformaciones. Contar el número de cuadritos en el rombo de la imagen 2 se vuelve largo y fuente de errores. Sobran muchos trozos que cuesta reunir para formar cuadros completos. De hecho, hay otras figuras en las que el conteo ni siquiera es posible. Un cambio de estrategia, drástico pero también muy útil, consiste en transformar el rombo a un rectángulo equivalente en área. Las imágenes 3 y 4 muestran dos maneras posibles, cuya ventaja es que el área del rectángulo se puede calcular más fácilmente, ya sea contando los cuadritos que ahora sí son enteros, o porque se conoce su fórmula (en parte por eso en los programas oficiales se suele prescribir enseñar primero la fórmula del área del rectángulo, después las otras).

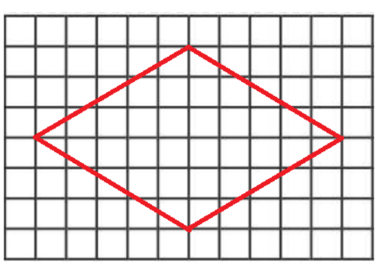


Imagen 2

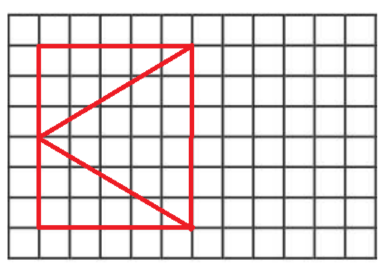


Imagen 3

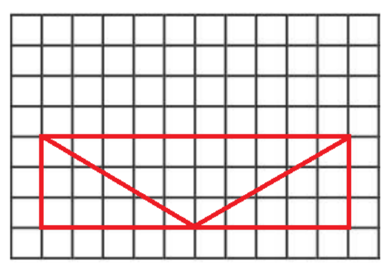


Imagen 4

Estas transformaciones a un rectángulo equivalente en área se pueden hacer con triángulos, rombos, paralelogramos y trapecios. El resto de los polígonos se puede triangular para obtener el área total con una suma.

Las transformaciones funcionalizan la altura de las figuras, necesaria para las fórmulas. Lo muestro a partir de un ejemplo en el que aparece un triángulo obtusángulo, uno de los más difíciles, pues una de las alturas queda fuera. El triángulo de la imagen 5 puede convertirse a un rectángulo de al menos tres maneras distintas. Las imágenes 6 y 7 muestran dos formas de cortar trozos del triángulo y reacomodarlos para formar un rectángulo (que está relleno de gris). La imagen 8 representa movimientos más complicados. El triángulo se duplica para formar un romboide, el cual se puede transformar a rectángulo. Así se obtiene un primer rectángulo equivalente al romboide, y luego hay que reducirlo a la mitad para que sea equivalente al triángulo[24].

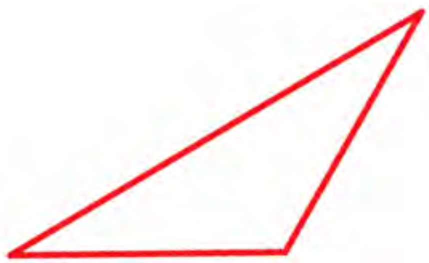


Imagen 5

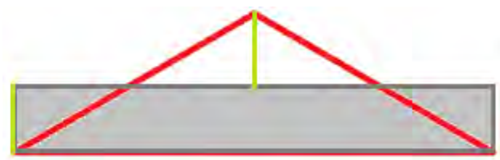


Imagen 6


Imagen 7

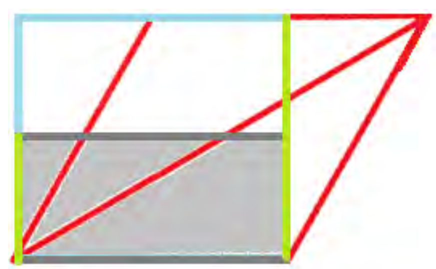


Imagen 8

La altura comienza a emerger aquí: es un segmento crucial para hacer las transformaciones. Es el segmento por donde se hace el corte, o bien, es la altura del nuevo rectángulo (ambos marcados de verde en las imágenes). Es, para los alumnos que ponen en juego estos procedimientos, un segmento unidimensional que aparece al manipular figuras bidimensionales. Por eso tiene que ver con la deconstrucción dimensional, en el sentido que plantean Duval y Godin (2005), que ya he descrito. La altura es central en las fórmulas y aparece en ellas explícitamente, la fórmula es

[24] Esta transformación es adaptación de otras muy similares que se proponen en los trabajos de Perrin-Glorian (1999) y Chamorro (2005). En el primero, una vez obtenido el romboide, se inscribe en un trapecio rectángulo, que se desagrega en un rectángulo y un triángulo rectángulo. También se puede inscribir el triángulo de la imagen 5 en un rectángulo, y al área de ese rectángulo restarle las de los dos triángulos rectángulos sobrantes. Así, los tres ejemplos que he mostrado en las imágenes 6-8 son algunos de varios posibles.

precisamente una relación de la altura con otras medidas[25]. Pero los alumnos no ven de entrada la altura en las figuras. Considerarla implica dejar de mirar la figura como una mancha en un papel y verla como un haz de segmentos, reparar en un segmento que de entrada no está, porque no es un lado. Perrin-Glorian y Godin (2018) ejemplifican el trabajo que supone la consideración de la altura a partir de un problema en el que aparece una fotografía de la pirámide del Louvre. Los alumnos hacen un esquema que reúne los datos, y es precisamente al colocar la altura en el esquema que este deja de representar la pirámide, es decir un objeto material, y se convierte en uno geométrico. Poner la altura no es solo trazar un segmento: indica un trabajo de conceptualización geométrica. En la imagen 8, la altura solo se ve cuando se anticipa que el triángulo se puede transformar a un rectángulo después de duplicarlo para formar un romboide. La altura no está en el triángulo, es un segmento que se construye.

Para que los alumnos adquieran un dominio amplio y flexible de las transformaciones, necesitan tener experiencias con figuras que puedan moverse. En muchos libros de texto es común que las figuras aparezcan fijas en una hoja de papel, y además en una posición prototípica (Marchand, 2020): el triángulo de este ejemplo no aparecería como muestra la imagen 5, sino la imagen 6, con el lado más largo horizontal debajo de los otros, dando por sentado que esa es la única base. De esta manera, prever los cortes y reacomodos de las transformaciones representadas en las imágenes 6 y 7 no pasaría por la necesidad de girar el triángulo, considerarlo desde distintas perspectivas, contemplar que cualquier lado puede tomarse como base. Además, las transformaciones de la imagen 8 ni siquiera serían una opción[26]. Perrin-Glorian (1999) plantea que los alumnos solo se convencen de la fórmula del triángulo cuando han visto que el resultado es el mismo para las tres alturas posibles, incluyendo aquella que queda fuera del triángulo. Así, de acuerdo con la autora, aunque ese último caso sea el más difícil, y sea posible evitarlo dado que hay otras maneras de resolver, no es conveniente excluirlo del proceso de estudio.

Más en general, Douady y Perrin-Glorian (1989) encuentran que las transformaciones como las que represento en las imágenes 2-8 se entrecruzan con una

[25] En el caso del rombo no aparece la altura sino las diagonales, pero lo que pasa con ellas es lo mismo que con la altura.

[26] Las transformaciones funcionan gracias a ciertas propiedades que no necesariamente se explicitan. Por ejemplo, en la imagen 6, los alumnos pueden prever por control visual que los dos pequeños triángulos en blanco son iguales a los grises. Eso es cierto porque el rectángulo tiene dos pares de lados paralelos, y porque uno de ellos, el que es paralelo a la base del triángulo, corta a los dos lados inclinados en los puntos medios.

dialéctica entre un punto de vista estático y uno dinámico dentro de la manera geométrica de ver las figuras. Los alumnos necesitan explorar, por ejemplo, cómo cambian el área y el perímetro cuando un rectángulo "se achata" progresivamente, generando una familia de paralelogramos hasta llegar, en el límite, a un segmento[27]. Ese trabajo contribuye a conceptualizar la superficie y disociarla de la longitud.

Dado que el estudio de unidades ocurre en cuarto grado, lo que yo vi en las clases respecto a ellas es algo de esta última problemática de las transformaciones, que deriva en las fórmulas, como explico en el siguiente apartado.

1.3.5 La medición con fórmulas

Los triángulos de color azul, amarillo, lila y verde de la imagen 9 tienen la misma área, porque son equivalentes a la mitad del mismo rectángulo[28]:

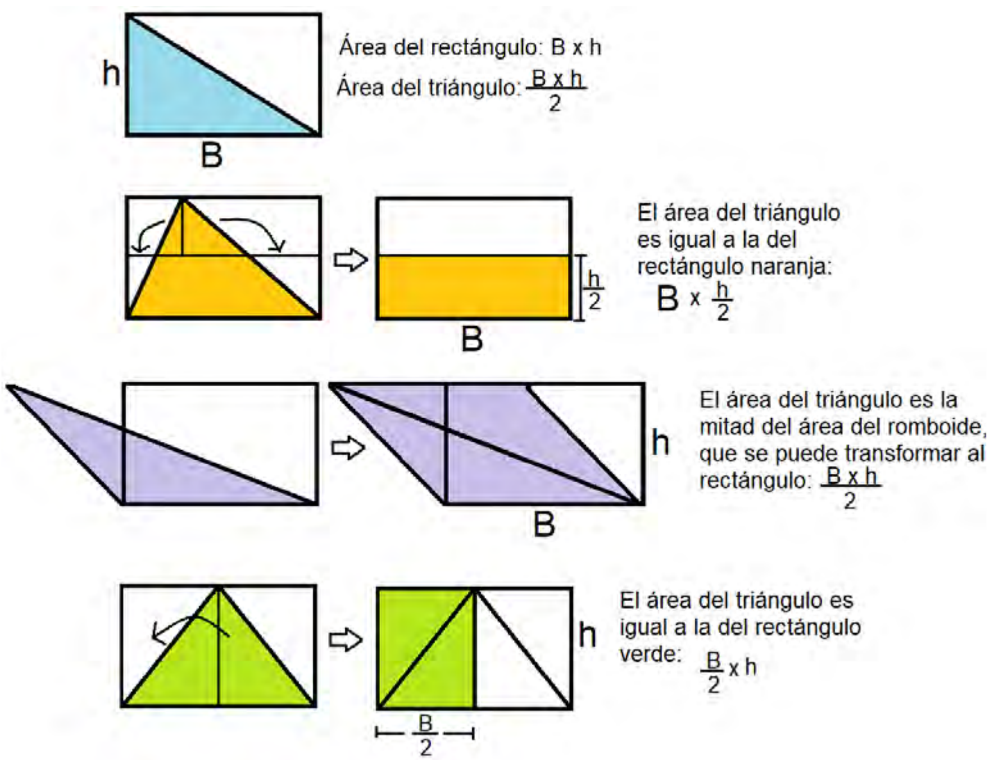


Imagen 9

[27] Los niños consideran al paralelogramo como un "rectángulo aplastado", y asumen que en esa deformación de la figura se conserva tanto la superficie como el perímetro. Hacer esa deformación de manera continua para generar no solo un paralelogramo sino toda una familia, ayuda a reconfigurar esas hipótesis.

[28] Como explico en el apartado anterior, hay muchas maneras posibles de obtener el área de un triángulo a a partir de un rectángulo. La azul es la que aparece con más frecuencia en los libros de texto escolares, oficiales de distintas épocas y también de editoriales particulares. A partir de ella suele presentarse la fórmula para todos los triángulos. En algunas propuestas, como la oficial de los años noventa (SEP, 2000), aparecen ejemplos parecidos al de los triángulos amarillo y verde, sin proponer todavía la fórmula, más bien con apoyo de hoja cuadriculada. Finalmente, el ejemplo del triángulo lila aparece en Chamorro (2005).

Esas transformaciones geométricas pueden traducirse a expresiones algebraicas. Así, una fórmula, como *base por altura sobre dos,* resume en una sola frase una multiplicidad de manipulaciones con triángulos muy distintos, cuya relación con el rectángulo es diversa, y que dan lugar también a diferentes expresiones algebraicas. Una vez que se tiene una fórmula, ya no es necesario pensar qué trozos cortar y cómo reacomodarlos, o si es mejor duplicar el triángulo para construir una figura anticipando que esta se puede a su vez convertir a rectángulo. La fórmula engloba todas las particularidades de todos los triángulos. Ya “solo” es necesario medir una base, la altura correspondiente, y operar con ellas. En ese sentido, la fórmula simplifica considerablemente la tarea de calcular áreas por transformaciones, que a su vez están muy ligadas al conteo de unidades, a la comparación por recubrimiento, y a la percepción de las figuras. Es decir, aquí hay un asunto de ecología de saberes.

Quiero hacer énfasis en esto último: la ecología de saberes. La problemática que he delineado hasta ahora toca la construcción de las figuras geométricas, la superficie como magnitud, su medición con unidades, por transformaciones y mediante fórmulas. Estos ámbitos están muy imbricados, dependen unos de otros, se dan sentido mutuamente, pero de ello no se infiere un camino lineal para la enseñanza o el diseño de ingenierías. No estoy afirmando que para empezar a medir con unidades haya que agotar antes la comparación directa de superficies. O que para hacer transformaciones primero hay que terminar todo el estudio de las unidades. Al contrario, Douady y Perrin-Glorian (1989) afirman que es necesaria una dialéctica entre la hoja blanca y la cuadriculada. Tampoco es que las fórmulas vengan después de haber terminado con las transformaciones. De hecho, conocer la fórmula del rectángulo puede favorecer que los alumnos busquen transformar figuras a rectángulos, comenzando así a dejar las cuadrículas. Pero sí planteo que las fórmulas inician cuando ya se tiene un buen trecho recorrido. El trabajo con fórmulas no puede desvincularse del estudio de las figuras, la superficie, las unidades y las transformaciones. Una identificación demasiado temprana de la superficie con los números -ya no digamos con la expresión algebraica que arroja esos números- es muy riesgosa.

Simplificar el cálculo de áreas es el principal uso de las fórmulas, pero hay otros usos (Perrin-Glorian, 1999). Las fórmulas sirven también para poner a funcionar el aspecto bidimensional de la superficie, que va en sentido inverso al aspecto unidimensional de las figuras que he descrito antes -hablo de esto más adelante-; para estudiar cómo varía el área cuando una figura se reproduce a escala; y son también una herramienta potente de demostración en geometría (Perrin-Glorian, 1999). Finalmente, las distintas fórmulas que muestra la imagen 9 tienen rasgos del trabajo algebraico, señalados por Cambriglia (2018):

a) Condensan una secuencia de acciones y cálculos. Detrás de la expresión $\frac{\mathrm{B}}{2}\ x\ h$ correspondiente al triángulo verde la imagen 9, está el corte a partir de la mitad de la base y el reacomodo de un triángulo
b) Son expresiones equivalentes, que provienen de manipulaciones distintas de las figuras. Cambriglia (2018) explica que el paso de otra muestra relaciones nuevas a los alumnos
c) Permiten avanzar hacia la generalización, porque hay una diferencia considerable entre convertir a rectángulo un triángulo muy específico y usar una expresión útil para todos los triángulos

Así, las fórmulas son una vía de entrada al álgebra. No obstante, esas mismas propiedades, es decir, ser un contenido que condensa un cúmulo de procedimientos y de conocimientos de distintas ramas, y que además es en cierta medida algebraico, hacen que las fórmulas sean muy difíciles de enseñar y aprender en primaria. En un estudio sobre prácticas docentes en escuelas primarias mexicanas (Weiss et. al., 2019) se observó a 15 maestros y se encontró que, en la asignatura de matemáticas, las clases en las que se abordaban procedimientos que apuntan a las fórmulas para obtener área o volumen fueron las más problemáticas. Para explicar a qué atribuyen esto los autores, hago una digresión.

La imagen 10 muestra una clase de aritmética de tercer grado de la escuela primaria Horace Mann, en Columbia, Estados Unidos, entre 1900 y 1905[29]. Da la impresión de que las fórmulas se enseñaban directamente, lo que también se ve en el libro de texto oficial mexicano del mismo grado de 1962. En ambos casos, la fórmula se acompaña de un ejemplo gráfico: un rectángulo cuadriculado y un triángulo rectángulo que es la mitad de un cuadrado[30]. Una diferencia es que el libro de los sesenta provee una explicación verbal, ciertamente breve, del origen de la fórmula: se muestra un rectángulo cuadriculado que tiene “tres hileras de 6 cm^2 o sea 3 x 6 cm^2 = 18 cm^2” y se

[29] Fotografía tomada por Elsie Rockwell, de otra imagen en la Universidad de Columbia, Nueva York. La escuela era anexa al Teachers College, Columbia, que era formadora de maestros en esos años.
[30] En la imagen 10 hay también un triángulo isósceles, que muestra una intención fugaz por mostrar diversidad de triángulos. Eso está ausente en el libro de los sesenta, la fórmula se deriva exclusivamente del triángulo rectángulo.

“recuerda que de un cuadrado dividido por la mitad salen dos triángulos” (SEP, 1962, p. 115).

Imagen 10

Esta breve intención de que la fórmula sea inteligible se vuelve fundamental a partir de la reforma de 1993, donde se recomienda incluso que los alumnos contribuyan a reconstruirlas. El estudio sobre práctica docente muestra que los maestros recuperan este propósito, pero encuentran muy difícil llevarlo a buen puerto. Esto tiene que ver en buena medida con dificultades en el diseño de las lecciones de los libros, oficiales y particulares, en los que se apoyan los maestros, y también con sus conocimientos matemáticos (Weiss et al., 2019).

Moreira Baltar (1996-1997) analiza resultados de evaluaciones nacionales a estudiantes de primaria y secundaria en Francia. Los reactivos concernientes al área son resueltos por menos del 50% de los alumnos. Por ejemplo, el 40% de estudiantes que comienzan sexto grado determina el área de un rectángulo. Ella interpreta que los errores se originan porque el tratamiento escolar ubica los problemas de superficie ya sea en el marco geométrico, ya en el numérico (con tendencia a privilegiar el numérico), pero no hay un trabajo de integración de ambos, esencial para la comprensión del área, en particular para el uso de fórmulas.

Como he dicho en este apartado y los anteriores, para saber cuándo usar una fórmula, poder aplicarla y regular los resultados que arroja, es necesario hacer un trabajo espacio-geométrico, conocer la superficie como magnitud física y adentrarse en procesos de generalización. Dentro de esta problemática, hay tres construcciones nodales. Dos de ellas son: a) la dialéctica entre el punto de vista estático y dinámico de las figuras, y b) la noción de altura, de las que he hablado en el apartado anterior. La tercera tiene que ver con otro cambio de dimensión necesario para poner en marcha las fórmulas, en un sentido distinto e inverso a la deconstrucción dimensional de las figuras. Cuando se pavimenta una figura con otra, la superficie se trata como unidimensional en el sentido de que no se descompone, se mide igual que la longitud, se trata de ver cuántas veces cabe una en la otra. En cambio, cuando el área se calcula con una fórmula, se multiplican dos medidas lineales, por ejemplo, base por altura. El producto de dos medidas de segmentos origina la medida de una figura. Así, pasar de medir con unidades a medir con la fórmula implica dejar de tratar la superficie como una magnitud unidimensional para verla como bidimensional, como medida producto. En lugar de comparar superficies con superficies -del patrón y de la figura-, se generan superficies a partir de longitudes (Vergnaud, et. al., 1983). Este cambio de dimensión tiene que ver entonces con la percepción de la superficie, mientras que la deconstrucción dimensional de la que hablo en el apartado 1.3.1 es relativa a las figuras.

Las fórmulas son entonces un conocimiento valioso, pero excesivamente complejo tanto para alumnos como para maestros. No es de extrañar, dado su carácter sintético. Es la punta del iceberg que se sostiene sobre una enorme cantidad de conocimientos relativos a las figuras geométricas, la superficie, los procesos de generalización, el número y las operaciones aritméticas. Pero lo que se prioriza desde programas, libros de texto, evaluaciones y por consecuencia también en el aula, es la punta del iceberg: las fórmulas tienen mayor jerarquía que las experiencias con la superficie por comparación directa, con unidades o por transformaciones porque se valora el marco numérico sobre el geométrico (Douady y Perrin-Glorian, 1989; Moreira Baltar 1996-1997; Artigue, 1995), el número sobre las magnitudes (Brousseau, 2001), el álgebra sobre la aritmética (Sadovsky, 2003; Comin, 2002) y la geometría sobre el espacio (Salin, 2004). Todo eso, aunado a unos materiales curriculares oficiales y una diversidad de ofertas particulares que no consiguen materializar el propósito de hacer accesibles las fórmulas para los alumnos, constituye, a mi juicio, un argumento para cuestionar la pertinencia de incluir ese contenido en primaria: ¿se tiene en primaria el suficiente tiempo para el estudio de las fórmulas, de manera que los alumnos puedan utilizarlas con sentido? ¿no convendría aplazar ese estudio para los siguientes niveles, y en cambio dedicar más tiempo a preparar el terreno construyendo los conocimientos que los alumnos necesitan para acceder a las fórmulas?

En los siguientes capítulos toco algunas partes de la problemática que he mostrado aquí. Primero las propiedades de las figuras geométricas en el microespacio que de manera implícita, local e incipiente, ponen en juego los alumnos al hacer configuraciones con piezas del tangram, fijándome en cómo intervienen las interacciones entre pares en esas producciones. Después analizo la actividad de una alumna en situación de fracaso escolar, tratando de entender cómo se engarzan las interacciones que ella sostiene con las configuraciones y con sus compañeros. Luego describo las producciones de alumnos respecto a las fórmulas para calcular áreas, fijándome especialmente en los alumnos con dificultades para mostrar todos los conocimientos que condensan esas fórmulas y la necesidad de articularlas, como he dicho acá, con las figuras, la superficie como magnitud física, las unidades, y las transformaciones. Finalmente, analizo un aspecto transversal, que recorre desde las figuras hasta las fórmulas y muestra también las contradicciones de un sistema educativo que promueve la comprensión de nociones y al mismo tiempo sobresatura el tiempo de estudio: el uso de vocabulario.

CAPÍTULO 2

EL TANGRAM, UNA ENTRADA ACCESIBLE PARA TODOS AL ESTUDIO DE LAS FIGURAS

En la introducción explico que inicialmente yo no estaba interesada en las características de las figuras geométricas, sino en la medición de la superficie de esas figuras. Eso es lo que fui a ver al aula. Sobre la marcha me fui encontrando que ambas están muy imbricadas. La manera de pensar una figura incide en la forma de comparar o calcular su área. Recíprocamente, al resolver tareas de superficie se modifica la percepción de las figuras.

La maestra dedicó dos clases a trabajar comparación directa de superficies a partir del uso del tangram, antes de medirlas con fórmulas, como prescribe el programa para quinto grado. La idea era que los alumnos vieran que dos plantillas de forma muy distinta -un *gato* y un *pato*- tienen la misma superficie si ambas se cubren con las mismas piezas. O bien, cuando no caben todas las piezas del tangram, al comparar la superficie de las que sobran se puede saber cuál plantilla es mayor. Estas actividades implican un deslinde importante del número que mide la superficie, del metro cuadrado y de las fórmulas, que suelen ser el centro del estudio de la medición. Se trata de dar un lugar al conocimiento, generalmente invisibilizado, de la superficie como cualidad física.

No obstante, los alumnos no se preocuparon mucho por la superficie sino por los arreglos de piezas en las plantillas. No estaban muy interesados en saber si el *pato* es mayor que el *gato*, sino en saber dónde poner el romboide en el pato. El rellenado de plantillas no hace emerger la noción de superficie -de hecho, más bien es pertinente cuando los alumnos ya conocen esa magnitud-, en cambio sí pone en juego, siempre de manera implícita, conocimientos espacio-geométricos. Ellos tenían mucho que aprender todavía sobre esto, porque el espacio también suele ser invisibilizado en la escuela (Salin, 2004; Saiz, 2003), ocupada con los números y los cálculos.

De esos conocimientos espacio-geométricos me ocupo en este capítulo: muestro las características de las figuras, materializadas en las piezas del tangram, que comienzan a cobrar relevancia para los alumnos al hacer configuraciones. Primero explico algunas condiciones institucionales que posibilitan y también dificultan el uso del tangram en las aulas, después describo las dos clases en las que se trabajó con el tangram, incluyendo un análisis previo de las actividades de configuraciones de piezas, y finalmente destaco una por una las propiedades de las figuras que se vuelven relevantes con las configuraciones, analizando cómo se va gestando esa relevancia en el marco de las interacciones de los alumnos con los problemas y con sus pares.

2.1 Una condición institucional: el tangram en las escuelas

El tangram es un material ampliamente conocido por los maestros, se encuentra frecuentemente en las escuelas, y numerosos libros para alumnos o docentes contienen secuencias didácticas en las que se utiliza para hacer emerger conocimientos de fracciones, medición de áreas, y principalmente de las figuras geométricas (Fuenlabrada et al., 1991; Rockwell, Rebolledo et al., 2016; Lozano Suárez et al., 2018). En la descripción de dichas secuencias se intenta proponer actividades graduando paulatinamente la dificultad, y se dan orientaciones al docente respecto a los conocimientos que los alumnos ponen en juego y la gestión de las actividades en el aula.

Más en general, los materiales didácticos suelen ser valorados por los docentes, señal de una enseñanza ideal que se supone opuesta a la “tradicional” (Trinidad Jiménez y Sarao, 2019). El material didáctico es también un recurso que permite a los docentes sostener el interés de los alumnos, regular el control de la clase y prevenir el aburrimiento o las disrupciones, además de realzar el valor del juego presente en ciertas normas curriculares (Rockwell, Mendoza, Rebolledo y Tapia, 2017). La idea de que el material es fundamental en los procesos de aprendizaje de los alumnos es ampliamente compartida entre el magisterio mexicano, sobre todo en preescolar y primaria. Los docentes suelen coincidir en que los alumnos aprovechan mejor el tiempo de estudio cuando abordan actividades planteadas con material didáctico.

No obstante, el tangram se usa poco en las clases. Esto puede explicarse en parte por una problemática más amplia relativa al uso de materiales didácticos. Los docentes identifican una serie de restricciones institucionales que dificultan el uso de materiales: la falta de consideración de las necesidades de los maestros en los procesos de adquisición de materiales para las escuelas, y de un proceso de formación que les permita conocer el potencial didáctico de los materiales que se adquieren; la distribución desigual de los recursos públicos entre las escuelas hace que la adquisición de materiales dependa de la participación de la escuela en diversos programas oficiales; la subordinación de la primaria a la secundaria hace, entre otras cosas, que de los múltiples materiales utilizables en primaria, se prioricen aquellos cuyo uso se exigirá al llegar a la secundaria, como el compás o transportador; la falta de comunicación entre las autoridades educativas que adquieren y envían los materiales a las escuelas, con los encargados en estas últimas de cuidar esos materiales, de manera que se tiende a responsabilizar a los maestros por la conservación de los materiales en buen estado, a veces al extremo de que ellos tienen que reponer esos materiales con su propio dinero; y finalmente, el tiempo y costo que implica a los docentes elaborar los materiales que ellos consideran pertinentes para trabajar con sus alumnos (Trinidad Jiménez y Sarao, 2019).

Otro asunto que incide en el uso de materiales por parte de los maestros, además de las condiciones institucionales que he descrito, es la diversidad de perspectivas didácticas perceptibles en la comercialización de los materiales, el diseño curricular y la formación docente. En 1993 se llevó a cabo una reforma educativa oficial en México que significó un parteaguas en la manera de concebir el aprendizaje en diversas asignaturas, en particular la de matemáticas. En las propuestas anteriores, sustentadas en distintas perspectivas, los conocimientos se presentaban a los alumnos para que después los aplicaran. En cambio, en la propuesta de 1993 se intentó “desarrollar secuencias de situaciones didácticas que *funcionalizaran* los conocimientos matemáticos específicos, es decir, que los pusieran en juego con el sentido de herramientas para resolver determinadas situaciones problemáticas” (Block, 2018, 294). Este enfoque se basó en la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), y la idea principal de caracterizar los conocimientos a partir de su funcionalidad se ha conservado en las sucesivas reformas que han tenido lugar a partir de entonces.

Este cambio en la manera de entender el aprendizaje tiene consecuencias sobre el papel que se hace jugar al material didáctico. Hasta mediados del siglo pasado se percibe en las propuestas curriculares una valoración del material en tanto que permite “ver, tocar, manipular”, idea que probablemente proviene de “las corrientes pedagógicas sensual-empiristas del siglo XIX (Juan A. Comenio)” según las cuales “nada hay en la mente que no haya pasado por los sentidos” (Konstantinov et al., 1994, 37 en Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007, 740). Más adelante, entre 1970 y 1980, se pretendía que el material fuera portador de una representación “concreta” de los conocimientos, punto de partida para que los alumnos accedieran a una representación gráfica y posteriormente a una simbólica (Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007). Finalmente, en la propuesta de 1993 y las subsecuentes, se promueve el uso de material didáctico cuando permite construir una problemática cuya resolución hace emerger los conocimientos que se pretende que los alumnos aprendan (Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007).

En la práctica, las tres ideas conviven, tanto en los libros de texto como en el aula. Entre el magisterio y en otras esferas del sistema educativo se enfatiza la importancia de que los alumnos puedan "tocar, palpar, ver, observar" (Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007, 272). Esta idea se refuerza por la enorme oferta comercial de materiales cuyo valor se centra en la diversión y el entretenimiento de los alumnos, materiales que han logrado entrar a las escuelas prestando poca atención a sus posibilidades para promover el aprendizaje (Rockwell, Mendoza von der Borch, Rebolledo y Tapia, 2017). Por otro lado, esos mismos maestros utilizan propuestas didácticas en las cuales se intenta que el conocimiento emerja como un medio de decisión frente a una problemática, planteada con material.

Existen entonces al menos dos factores que afectan las posibilidades de utilizar el tangram en las aulas para el estudio de las figuras geométricas: uno vinculado a las condiciones de adquisición y uso de materiales didácticos, y otro relacionado con el papel que se hace jugar al material didáctico en el aprendizaje de los alumnos. El segundo se engarza con ciertas concepciones sobre la enseñanza de la geometría y el espacio, que describo en el primer capítulo; por ejemplo, las lecciones de libros tienden a enseñar las figuras estáticas, prototípicas, en buena medida a partir de definiciones y vocabulario. Como resultado de estas condicionantes, el tangram se usa poco en las clases, a pesar de estar en las escuelas.

El caso de la maestra que observé lo muestra de muchas maneras. Al traer los tangram al salón, abrió las bolsas de plástico en las que vienen empacados desde la fábrica: ella estrenó los tangram que hacía dos años habían sido adquiridos para toda la escuela y estaban guardados en el salón de materiales. Tuvo que posponer dos semanas estas actividades respecto a la planeación que originalmente había hecho, pues el material se encontraba en otra sala a cargo de otra maestra, que tenía en ese tiempo licencia de trabajo. Fue necesario hacer las plantillas en tamaño real, en lugar de usar las tarjetas con configuraciones a escala que vienen en las cajas, para que los alumnos pudieran sobreponer ahí las piezas. Esta decisión puede ser tomada por maestros cuya formación les permite entender por qué vale la pena dedicar un tiempo considerable a confeccionar dichas plantillas: los tangram comerciales se venden con modelos a escala, a un tamaño muy pequeño, y para los docentes es mucho más práctico usar esos que ya están hechos. El resultado es que pronto desisten, porque las actividades resultan demasiado difíciles para los alumnos. Finalmente, a la maestra le preocupa que al manipular el tangram no queda registro de la actividad de los alumnos, y por lo tanto no hay evidencia para los padres del trabajo realizado. Por eso plantea una segunda tarea, reproducir la configuración de un compañero en una hoja blanca, que resulta más difícil para los alumnos y les toma el doble de tiempo que la de hacer la configuración sobre la plantilla. El uso de un material que deriva en una actividad sobre la cual hay poco registro escrito y verbal, demanda al docente la tarea de generar este registro para legitimar su trabajo frente a otros. En pocas palabras, la posibilidad de utilizar este material para estas actividades específicas pasa por reunir condiciones institucionales tanto en términos prácticos como de legitimación del trabajo de la maestra. Estas condiciones rebasan el ámbito de decisiones de ella y sus alumnos en el tiempo de clase.

2.2 Análisis previo de las configuraciones de piezas

En dos clases -la tercera y cuarta de las que observé-, los alumnos hacen configuraciones geométricas con el tangram, un rompecabezas de origen chino que tiene siete piezas: dos triángulos pequeños, uno mediano, dos grandes, un romboide y un cuadrado (Imagen 11).

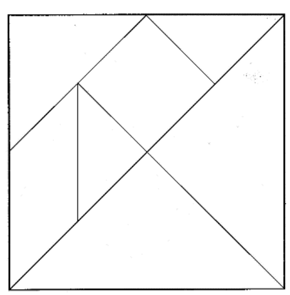


Imagen 11

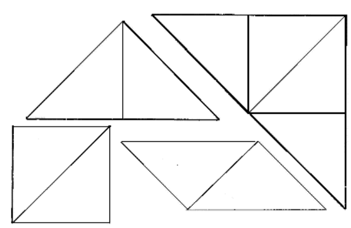


Imagen 12

Hay ciertas relaciones entre las piezas. Con dos triángulos chicos se puede cubrir el cuadrado, el romboide y el triángulo mediano. Con dos triángulos medianos, o bien con cuatro chicos, se forma uno grande (Imagen 12). Los ángulos son de 45, 90 o 135 grados.

En el siguiente apartado describo las dos clases, que la maestra organiza retomando actividades del taller para maestros que impartí antes de hacer observación en el aula.

2.2.1 Configuraciones con todas las piezas

En la tercera clase que observé, la maestra organiza a los niños en parejas, cada una en una mesa. Pide que reúnan las mesas dos a dos, de manera que quedan cuatro alumnos juntos, pero ellos en general comparten la tarea con la pareja. A cada alumno le entrega una plantilla, es decir, una hoja blanca que tiene trazado un contorno que puede rellenarse con las siete piezas de un tangram, de manera que cada pareja tenga las dos siguientes:

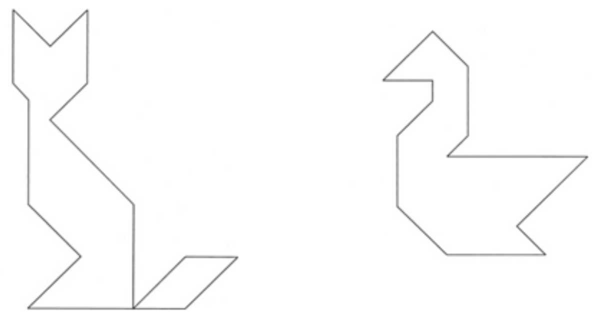


Imagen 13

Los alumnos resuelven tres tareas:

a) Cubrir las dos plantillas con las piezas

La maestra les muestra a todos un tangram y dice, "*les voy a dar a cada uno siete piezas… con tus siete piezas vas a tratar de formar la figura que te tocó*". Entrega un tangram a cada alumno, en algunos casos les da uno por pareja, y luego completa la consigna:

> *Maestra: (…) … por parejas recibieron dos dibujos distintos, lo que tienen que comprobar con sus piezas es que tengan la misma superficie, es decir, que ocupen la misma cantidad de piezas, para ver si están hechos con la misma superficie, ¿sí?*

Los niños hacen sus configuraciones (Imagen 14). Esa es la tarea que prevalece en la clase.


Imagen 14

b) Reproducir la configuración del compañero sin el contorno

Cuando ve que algunos terminan, la maestra da una segunda consigna:

Maestra: [a todo el grupo] Voy a darles una hoja blanca, y ya cuando lo hay…, bueno cuando ya lo tengan (…) van a cambiar con su compañero el dibujo, y vas a tratar en la hoja blanca de formar el dibujo que tenía tu compañero. [Se dirige ahora a una pareja específica, Jimena y Sebastián, pero habla en voz alta para que oigan todos] Porque la hoja que, este dibujo es tuyo [señala la hoja de Jimena] y ese es tuyo [señala la hoja de Sebastián], pero ahora en la hoja blanca vas [se dirige a Sebastián] a tratar de reproducir el dibujo de ella con las piezas del tangram y lo marcas con un lápiz con mucho cuidado ¿sí me expliqué?

Después pegan la hoja blanca en su cuaderno. Esa última consigna refuerza el deslizamiento de la superficie hacia las configuraciones de piezas, que desde el principio tiene más peso para los alumnos. La segunda tarea es mucho más compleja porque tienen que armar una configuración que no han hecho sin tener el contorno para regularla. Lo que hacen algunos es poner primero las piezas sobre la plantilla y después llevar una por una a la hoja blanca, pero no siempre logran conservar el lugar y posición de unas piezas respecto a otras, y no necesariamente observan diferencias entre el contorno original y el de la reproducción. La maestra me explica que su intención respecto a esta nueva tarea es dejar un registro escrito en los cuadernos "para que ellos se queden su evidencia" y para visibilizar el trabajo frente a los padres, "porque si no los papás van a decir que no están haciendo nada". La reproducción en la hoja blanca toma a los alumnos un tiempo considerable, en la mayoría de los casos más del que necesitan para la primera consigna. Por ejemplo, Luis y Alonso, al minuto diez de la clase ya tienen cubierta la primera plantilla, y a los 43 minutos terminan el registro para el cuaderno en la hoja blanca. Esta nueva tarea asignada por la maestra ejemplifica que las decisiones didácticas no solo se toman considerando el proceso de aprendizaje de los alumnos, aun cuando incidan sustancialmente en ese proceso. En este caso, cobra peso la necesidad de legitimar el trabajo docente frente a los padres de familia.

Después siguen explorando con el tangram, hacen configuraciones libremente, decoran su trazo (Imágenes 15 y 16). En esto último invierten a veces más tiempo del que tomó hacer la primera configuración. A los alumnos les importa tanto la resolución del problema como el registro en el cuaderno, con buena presentación.


Imagen 15


Imagen 16

Cuando un alumno termina, ha hecho el gato sobre la plantilla y el pato sobre hoja blanca, o al revés. Además, muchas veces ayudan a la pareja, entonces algo se han enterado del armado de ambos con y sin el borde. Sus acciones y explicaciones, en este momento o después en la puesta en común, dejan ver algunas variables didácticas, es decir, características de la tarea que afectan las resoluciones.

Respecto a las piezas, mencionan que los confunde la posición del cuadrado en ambas plantillas, porque no va horizontal: "aquí (…) no era el cuadrado de este lado, sino que era el cuadrado… rombo". Hay además una diferencia importante entre el romboide y las otras seis piezas. La posición y lugar de cualquier pieza se puede modificar a través de tres transformaciones: trasladar la pieza de un lugar a otro, girarla, o bien reflejarla, es decir, voltearla. Los alumnos tienden mucho más a trasladar y girar que a reflejar, por eso el romboide es el más difícil de colocar: al ser la única pieza no simétrica, es la única para la que a veces no basta con trasladar y girar.

Respecto a las plantillas, el gato es más fácil que el pato, porque el lugar del romboide y los triángulos chicos está claramente sugerido en el primero: “esto es lo más fácil obviamente la cola porque… porque ya se parecía a una figura”, “en el gato… yo primero me fijé con el… con… los… triángulos más chiquitos, y vi dónde podían estar, y luego vi que aquí (en las orejas del gato) se podía y los puse, y aquí (en la cola) luego luego se veía”. En cambio, en el pato no es claro de entrada dónde va ninguna pieza: “con el cisne fue un poco más complicado ya que… las figuras no eran tan obvias”. Además, el gato es una plantilla «delgada», «estirada», de manera que se puede cubrir poniendo pieza por pieza, de arriba hacia abajo o al revés, y esto permite regular mejor el arreglo paso a paso. Es decir, no solo se puede tener control sobre las piezas ya puestas, también es posible anticipar en cierta medida si las que faltan van a caber en el espacio en blanco. El pato es distinto, tiene una región ancha donde caben tres piezas, no se pueden controlar una por una. Esto también hace que sea más difícil.

c) Guardar el tangram

Finalmente, los alumnos deben guardar sus tangram. Esto implica una nueva tarea, que depende de la forma y tamaño de la caja. Hay dos tipos (Imágenes 17 y 18).

Imagen 17

Imagen 18

En el primer caso, un alumno debe hacer un cuadrado con sus siete piezas. En el segundo, el espacio para poner las piezas también es cuadrado, pero más pequeño y profundo, caben ahí dos tangram. Así, entre dos alumnos deben construir cuatro cuadrados con sus catorce piezas. La diferencia entre los dos tipos de cajas impone un cambio en el *medio* con el que interactúan los alumnos que guardan sus piezas en una o en otra: no es lo mismo que un solo alumno tenga que formar un cuadrado con las siete piezas de un tangram, que construir entre dos alumnos cuatro cuadrados con las catorce piezas de dos tangram.

Con cualquier molde, la tarea es más difícil que las dos anteriores. Igual que ocurre con el pato, aquí no está sugerido el lugar en el que va alguna pieza -como la cola del gato-, y la plantilla tampoco es alargada, así que los alumnos no pueden anticipar si las piezas que ponen permitirán colocar el resto en el espacio que sobra. Además, no es posible reconocer, por ejemplo, que un triángulo chico es “la cola del gato” o “el pico del pato”, es decir, identificar una pieza con una parte del objeto que representa la plantilla. La diferencia más importante respecto tanto al gato como al pato, es que los alumnos tienen que formar cuadrados, figura caracterizada por sus cuatro esquinas rectas. Pero, como se ve en las imágenes 17 y 18, no todas se construyen con ángulos rectos. Para resolver hay que orientar algunas piezas con el ángulo recto hacia el interior, y cubrir algunas esquinas con dos ángulos agudos. Así, mientras el pato y el gato ponen de relieve al menos tres “picos” que necesariamente se cubren con un ángulo agudo de una pieza, el borde cuadrado no da ninguna pista respecto a los ángulos, y por lo tanto cuando se selecciona una pieza no se puede saber cómo orientarla. Esto comporta además un conflicto con la idea de cuadrado.

Al terminar de guardar, los alumnos entregan sus tangram a la maestra, quien organiza la puesta en común mientras algunos completan su apunte en el cuaderno. Los alumnos tienden a relatar la manera de armar las configuraciones y los tropiezos que tuvieron. La maestra pregunta, además, si comprobaron que las dos plantillas tienen la misma superficie. Las actividades que he descrito tomaron más tiempo del que suponíamos la maestra y yo, así que ella decide dejar la otra que tenía programada para la siguiente clase.

2.2.2 Configuraciones con algunas piezas

La docente tiene varios juegos de cinco plantillas que pueden rellenarse con piezas del tangram (Imagen 19), pero a diferencia de la clase anterior, en ninguna caben todas las piezas (Imagen 20). Los alumnos están organizados en parejas, cada una en una mesa. La maestra muestra a todo el grupo dos de las cinco plantillas, y les da la consigna:

Maestra: A ver, les voy a entregar DIFERENTES figuras no sé cuál le toque a cada quien, así que no tendrán la misma que su compañero, ¿sí? pero lo que vas a hacer primero es SIN poner piezas, vas, a, a, observando tu figura, vas a calcular cuál de las dos figuras que tienen en las mesas es más grande, nada más de verla ustedes dicen: pues creemos que esta es más grande ¿de acuerdo? Y ya después (…) les voy a dar el tangram para que hagamos lo que hicimos el día de ayer, van a comprobar (…) ¿de acuerdo?

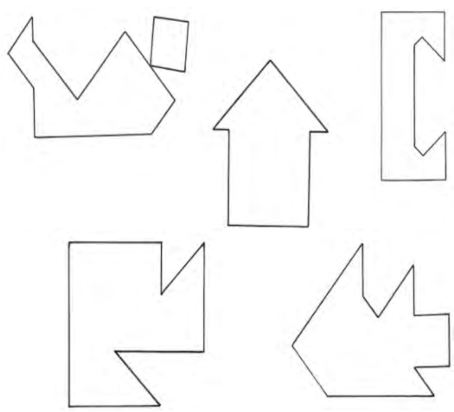


Imagen 19

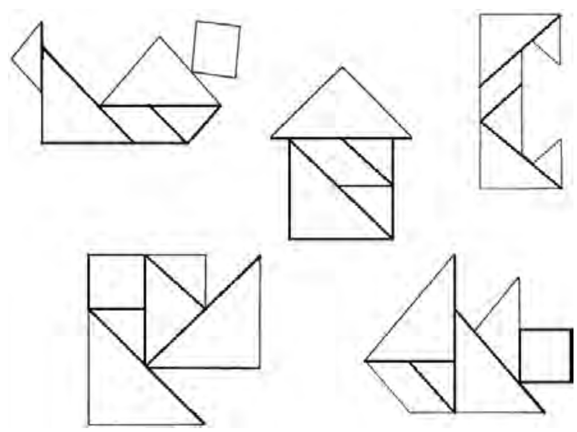


Imagen 20

Una vez que hacen sus anticipaciones, la maestra entrega un tangram a cada pareja, una plantilla a cada alumno cuidando que cada pareja tenga dos diferentes, y les da tiempo para rellenarlas, mientras ella pasa por las mesas para atender dudas. Nuevamente, lo que ocupa a los alumnos son las configuraciones, mucho más que la superficie. En la consigna anterior, la maestra no menciona explícitamente que esta vez no caben todas las piezas en ninguna plantilla. Habla de eso cuando ve que varios alumnos comparan las superficies erróneamente a partir de la cantidad de piezas que utilizaron para hacer cada configuración. Por eso, les aclara:

Maestra: Ok, todos ya saben si les sobraron piezas o no, saben cuántas piezas. Ahora lo que quiero es que me, que se, que se fijen, qué pieza les sobró en cada una, porque hay una cuestión ¿todas las piezas son iguales?
(…)

Aclara que "no es lo mismo que me sobre la grandota a que me sobre el cuadrado, a que me sobre el chiquito", y les pide que "anoten cuál pieza te sobró y la dibujan a un ladito (de la plantilla), esta es la pieza que sobró o las piezas; dense cuenta para que vean realmente entonces cuál (plantilla) fue más grande*…*". Más adelante pide que coloreen "sus figuras", las recorten y las peguen en sus cuadernos, incluyendo aparte las piezas sobrantes. Finalmente, cada equipo pasa "a exponer".

La diferencia entre estos arreglos y los de la clase anterior, a saber, que ahora en cada plantilla sobra una o dos piezas, incrementa la incertidumbre para los alumnos, porque cuando tienen dudas no solo está la posibilidad de que sea necesario reacomodar las piezas que han puesto, sino también que haya que sacar alguna. A la incerteza de no saber si el arreglo va bien, se agrega la de no saber cuáles piezas sobran.

También hay diferencias en el grado de dificultad entre una plantilla y otra. Voy a comentar las que hay entre la "*casa*" y la "*C*" -las del centro y la esquina superior derecha de la imagen 19-, que aparecen más adelante en el análisis de los registros. La casa puede cubrirse de varias maneras (Imagen 21). Esto da más flexibilidad a los alumnos. Por ejemplo, es muy poco probable acomodar incorrectamente un triángulo grande.

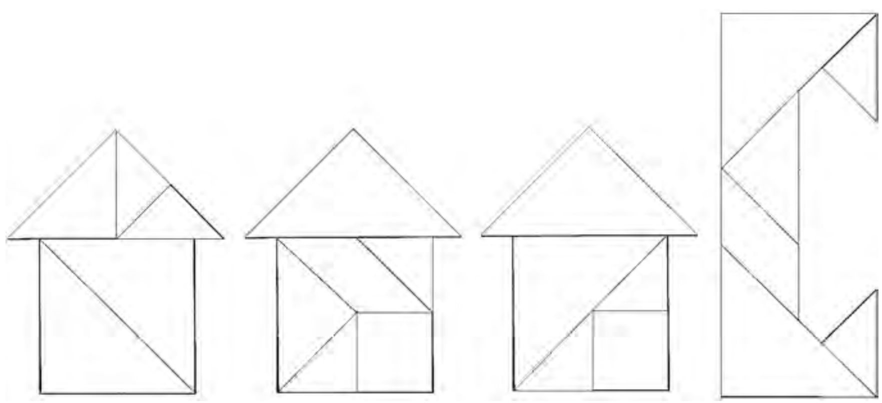


Imagen 21

En cambio, la "C" solo tiene un arreglo posible, porque los triángulos grandes pueden ir en un único lugar y posición, que en cierta medida está oculto, es decir, no es claramente visible como por ejemplo la cola del gato para el romboide. Más bien, al contrario, la franja delgada hace pensar que ahí van piezas más pequeñas. Así, los alumnos frecuentemente ponen otras piezas en ese espacio y encuentran un poco después que no pueden resolver, pero es muy difícil identificar por qué. Regina explica: "se nos hacía más complicada esta porque… acomodamos mal los triángulos y… el romboide, lo poníamos para acá y para acá [señala los dos lugares donde van los triángulos grandes]". También Daria: "yo estaba confundida porque no me salía esta figura, pensaba que aquí tendría que poner cuatro… cuaaaadros [señala la franja delgada] (…) y no ocupaba estos dos [los triángulos grandes]" Finalmente, como la "C" es simétrica y el tangram tiene piezas que son iguales, los alumnos pueden replicar en la zona superior lo que logran en la inferior, o viceversa.

Hago ahora un brevísimo recuento de lo que ocurre en las dos clases respecto a la superficie. Algunos alumnos afirman que el pato y el gato tienen la misma superficie porque se usan las mismas piezas, todas, en ambas, o bien, en la otra clase, se fijan en la superficie de las piezas que sobran. A veces les cuesta trabajo compararlas (¿es más grande el cuadrado o el romboide?), o bien plantear la relación inversa «donde sobra más, hay menos». Otros comparan a partir de la cantidad de piezas que sobran, sin considerar su superficie: una plantilla en la que se usan cinco piezas es más grande que una donde caben cuatro. Otros se fijan en la forma global de las plantillas. Por ejemplo, dicen que una plantilla "gruesa" -es decir, ancha- tiene más superficie que otra que "está bien flaquita". Algunos más concluyen que si el perímetro es mayor, el área también lo es. Finalmente, otros se centran exclusivamente en tapizar las plantillas, sin reparar para nada en la superficie.

Para todos los alumnos, tienen mucho más peso las configuraciones que la superficie, a la cual dedican apenas unos minutos, en las dos clases. Los alumnos dedican la mayor parte del tiempo de clase a hacer la configuración sobre la plantilla, sobre la hoja blanca y luego sobre la caja. Las discusiones entre ellos tienen que ver sobre todo con los arreglos de piezas. Paradójicamente, ni la maestra ni la observadora ni yo reparamos en ello en este momento. Enfocadas en la superficie -y pensando en las fórmulas, que ya venían pisándonos a todos los talones- preguntamos, al visitar a los equipos y en la puesta en común, si las dos plantillas tienen la misma superficie, o cuál es mayor. Después de preguntar equipo por equipo en las dos puestas en común, parece darse por enseñada la idea de que dos plantillas que se cubren con las siete piezas tienen la misma superficie, y que, cuando no caben todas, comparando las piezas que sobran se puede saber cuál plantilla es mayor. En la próxima clase se instaura la fórmula de área del romboide, a partir de una lección del libro oficial. En el siguiente apartado me concentro en las configuraciones, porque realmente no tengo datos suficientes para hablar de qué es para los alumnos la superficie.

2.3 Las características de las piezas

Durante las dos clases se hacen visibles -para mí- ciertas propiedades de las figuras que están en juego en el armado de configuraciones. Es decir, identifico características que se vuelve necesario poner en juego a un nivel muy implícito, sin que los alumnos necesariamente reparen en ello, o puedan dar cuenta de ello a otros, para conseguir rellenar diferentes plantillas. Voy a explicar cada una de esas propiedades, por separado, a partir de un ejemplo particular, pero como se verá en las descripciones y, con más claridad en el siguiente capítulo, siempre se conjugan.

También me interesa aclarar que, en estas actividades con el tangram, es imposible hacer registros que comuniquen todo lo que pasa. Hay mucho ensayo y error, muchas manos moviendo piezas en el espacio que abarca una hoja de papel, mucha volatilidad. He seleccionado las acciones e intervenciones orales que me permiten dar cuenta de las características de las piezas que me parece que están implicadas en las resoluciones, pero al hacerlo, quizá da la impresión de que la participación de los alumnos siempre es premeditada, calculada, que hay siempre una intención detrás de la elección de una pieza y no de otra, o de su orientación en una posición y no en otra. El azar ha quedado muchas veces escondido detrás de los puntos suspensivos de los registros, o bien en frases como “los alumnos siguen poniendo piezas”. Tanto en este capítulo como en el siguiente, queda pendiente un análisis más pensado de las relaciones entre las participaciones azarosas de los alumnos y las que parecen no serlo tanto.

2.3.1 Las figuras, ¿un contorno que delimita un espacio?

Frecuentemente, al hacer las configuraciones, los alumnos acomodan una o varias piezas sin salirse del borde y luego notan que en el espacio que queda por cubrir en la plantilla no cabe ninguna de las piezas que falta acomodar. Edgar le dice a Ian: “ya nomás me falta esta” (Imagen 22). Solo le falta colocar el cuadrado para formar el pato, pero no embona en la parte en blanco. Ian -un alumno con dificultades- trata de poner en ese lugar el triángulo mediano de su propio tangram (Imagen 23).

Es posible que al poner una pieza suya esté tratando de conservar lo que ha hecho Edgar. Si no cabe el cuadrado, que es lo único que le sobra a su compañero, puede caber algo más. Al poner su pieza, Ian modifica, creo que involuntariamente, la consigna original del problema. La maestra indicó al inicio de la clase que cada alumno pondrá sus siete piezas en su plantilla, lo que implica que en una misma no puede haber dos triángulos medianos. Pero esa consigna ha quedado un poco atrás, lo que parece interesarle ahora a Ian es resolver lo que tienen enfrente: Edgar casi ha terminado de cubrir su plantilla, ¿qué pequeña ayuda podría recibir para conseguirlo? La prioridad parece ser rellenar el gato, con las piezas que sean. Al desdibujarse la comparación de las superficies de las plantillas, pierde sentido el que cada una ocupe todas las piezas de un solo tangram.

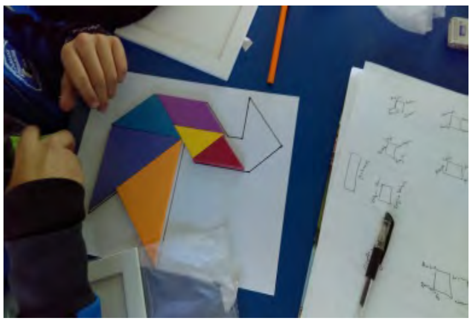


Imagen 22

Imagen 23

El problema se va transformando sobre la marcha, sin que se repare mucho en ello. La devolución no es entonces un proceso tajante, no es que el alumno se adentre a resolver un problema por completo o de plano no lo haga. Acá, se quedan con una parte, la que hace sentido, y dejan otra de lado. Tampoco es que solo participen en el problema que les ha sido asignado a ellos, pueden intervenir espontáneamente en el de otro. Al hacerlo, tiene peso el problema y también el avance de ese otro en la resolución, en este caso Edgar.

¿Por qué Ian pone el triángulo mediano, y no otra pieza, en el pato de Edgar? Tal vez lo hace al azar. De ser así, no es que elija precisamente ese triángulo, sino que toma esa pieza para probar si cabe, sin mucha premeditación, igual como podría haber agarrado otra: en esta actividad se juega mucho el ensayo y error. Si no es el azar lo que está operando, hay una interpretación que hace que elegir un triángulo para ocupar un espacio que no es triangular tenga sentido. Me voy a extender sobre esta posibilidad, en primer lugar, porque Ian no es el único alumno que pone esa pieza en ese espacio, como explico más adelante y, en segundo lugar, porque abre una manera de interpretar las figuras que invita a tener cautela respecto al riesgo de introducir demasiado pronto las fórmulas para calcular su área. El triángulo mediano es la pieza más parecida de todas al espacio en blanco. Otros alumnos también prueban triángulos en esa zona, incluso cuando no es la última que falta por rellenar. Cuando Alonso forma el pato, comienza poniendo piezas en la parte de abajo. Al buscar un lugar para uno de los triángulos pequeños, cambia de región y se va hasta arriba, a la cabeza del pato (Imagen 24). Como sobra espacio alrededor, Luis prueba en ese mismo lugar el triángulo mediano (Imagen 25). Es decir, a diferencia de Ian, que busca cubrir con una pieza el único espacio que le falta por ocupar a su compañero, Alonso pone los triángulos en esa zona de la plantilla, habiendo otras regiones y otras piezas disponibles. Y las dos veces, él y Luis orientan el triángulo con el ángulo recto hacia arriba.


Imagen 24


Imagen 25

Los tres alumnos prueban esas piezas en un contorno que es un pentágono (Imagen 26), pero ese movimiento tiene sentido como una anticipación hecha por alguien que, en esta situación específica, no considera el triángulo a partir de la definición típica del número de lados, sino que se orienta por la forma global -y el tamaño- tanto del triángulo mediano del tangram como de la parte de la plantilla que falta rellenar. En efecto, ese contorno se parece mucho al triángulo mediano, podría transformarse exactamente en él al cortar el pequeño trozo en la parte inferior y colocarlo en la esquina inferior derecha (Imagen 27).


Imagen 26

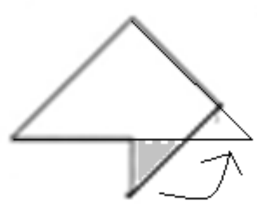


Imagen 27

Perrin-Glorian y Godin (2018) ayudan a entender esta posible manera de percibir las figuras geométricas. En las primeras experiencias los alumnos las reconocen apoyándose en la percepción visual y táctil. Por ejemplo, con frecuencia dicen que un cuadrado no es un rectángulo, pues este último es “alargado”. Además, dos rectángulos, uno mucho más alargado que otro, no necesariamente son puestos en la misma categoría por los niños: “*tener la misma forma* tiene a veces un significado muy amplio” (p. 19). Más adelante caracterizan las figuras a partir de sus propiedades, así que un rectángulo se distingue por tener cuatro ángulos rectos, y un cuadrado entra en esa categoría. Quizás Ian, Alonso y Luis ponen en juego esa primera percepción visual. De ser así, al tomar el triángulo mediano no están considerando que tiene tres lados, sino que, al ponerlo en la plantilla, cubre un hueco similar al espacio que falta por abarcar. La pieza tiene tres lados y el espacio en blanco en el caso de Ian tiene cinco, pero el número de lados no necesariamente es lo que orienta la comparación de regiones de la plantilla con las piezas. El triángulo no es una figura naturalmente percibida por los niños en ciertos objetos, sino una noción abstracta que se construye. De hecho, el nombre “triángulo” reúne en una misma categoría una infinidad de figuras de formas y tamaños muy distintos, que solo comparten la propiedad de tener tres lados. Apropiarse de esta noción implica modificar drásticamente la manera de percibir las figuras geométricas.

A todos los alumnos les ocurre que colocan algunas piezas y luego encuentran que no cabe ninguna en el espacio que sobra. No es fácil distinguir cuándo es necesario desarmar y volver a empezar de cero, y cuándo basta con cambiar el lugar de una o dos piezas. Dado que la tarea exige contrastar la forma de las piezas con la del contorno, los alumnos dicen que el gato es más fácil que el pato, pues en el pato “no sabíamos acomodarlo bien, nos confundíamos con muchas piezas que parecían encajar en las partes”. En cambio, en el gato “es más fácil descubrir donde se ponen las piezas, (en las orejas) van triángulos chiquitos, (el romboide va) en la cola y esas cosas”. Es decir, hay plantillas en las que se puede inferir qué pieza va en cierto lugar porque hay una analogía entre la forma global y el tamaño de dicha pieza y del objeto concreto que representa la región que ocupa en la plantilla: es más fácil elegir el romboide porque es la cola del gato, que elegirlo, por ejemplo, porque tiene un ángulo obtuso.

2.3.2 El tamaño de las piezas, un logro a partir de un trabajo conjunto

Después de un tiempo de intentar las configuraciones, varios alumnos encuentran que conviene empezar por colocar los dos triángulos grandes, porque si se dejan al final luego no caben. O al revés, que los triángulos chicos son los más fáciles de acomodar y por ello hay que intentar poner primero el resto de las piezas. Mostraré un ejemplo del primer caso, que ocurre cuando Axel y Jorge -dos alumnos que presentan rezago- rellenan la “C”. Cuando la observadora llega a grabarlos, Axel[31] tiene la mano puesta sobre las piezas y la plantilla de Jorge[32] (Imagen 28). Es decir, hacen la tarea juntos desde el principio. Ellos deshacen la “casa” y la vuelven a armar juntos.

Una vez que terminan, comienzan con la otra plantilla, la “C”. Ahora incluyo el proceso de resolución de los alumnos, y lo resumo en las imágenes 34, 38 y 42 (he marcado con verde las piezas que pone Axel, y con rojo las que pone Jorge):

Imagen 28

1. *Los dos alumnos buscan con cuál pieza comenzar. Axel elige el cuadrado y lo pone en una esquina (Imágenes 29 y 34A). A punto de agarrar otra pieza, se detiene para mirar a Jorge, quien tomó el triángulo mediano que sobró en la plantilla anterior y ahora lo acomoda en otra esquina (Imágenes 30 y 34B)*

Imagen 29

Imagen 30

2. *Axel agarra un triángulo chico y lo pone junto al cuadrado (Imágenes 31 y 34C)*

[31] De chamarra verde en la imagen 28.
[32] De suéter rojo en la imagen 28.


Imagen 31

3. *Jorge: [al ver que Axel toma el triángulo chico] ahora, ¿cuál va la chiquita, ahí? [toma el triángulo grande, lo gira varias veces] y la grandeeee…*
4. *Axel: ¿y aquí qué? [señala el espacio en blanco debajo del triángulo chico, quita el cuadrado y desliza el triángulo pequeño hacia abajo, imagen 34D. Luego lo refleja -es decir, lo voltea-, lo gira y lo sube, imagen 34E*
5. *Jorge: ¿qué? [agacha la cabeza, la inclina, la acerca más a Axel para ver los movimientos que hace con el triángulo chico. Cuando Axel termina, le da el otro triángulo pequeño]*
6. *Axel: falta otra pequeña aquí [señala el espacio junto al primer triángulo chico. Toma el triángulo que le dio Jorge y lo pone junto al primero, imagen 34F]*
7. *Mientras tanto, Jorge trata de acomodar un triángulo grande y no puede, aunque lo gira dos veces para orientarlo de tres maneras distintas [Imágenes 32, 34F, 34G, 34H]. Lo saca de la plantilla*
8. *Axel: [toma el cuadrado y lo coloca enseguida de sus triángulos pequeños, Imagen 34I] no, no va bien el cuadrado [quita sus tres piezas, Imagen 34M]*
9. *Al mismo tiempo, Jorge toma el otro triángulo grande y nuevamente lo gira y desliza para acomodarlo, pero no cabe [Imágenes 33, 34J, 34K, 34L], y lo saca de la plantilla [Imagen 34M]*


Imagen 32


Imagen 33

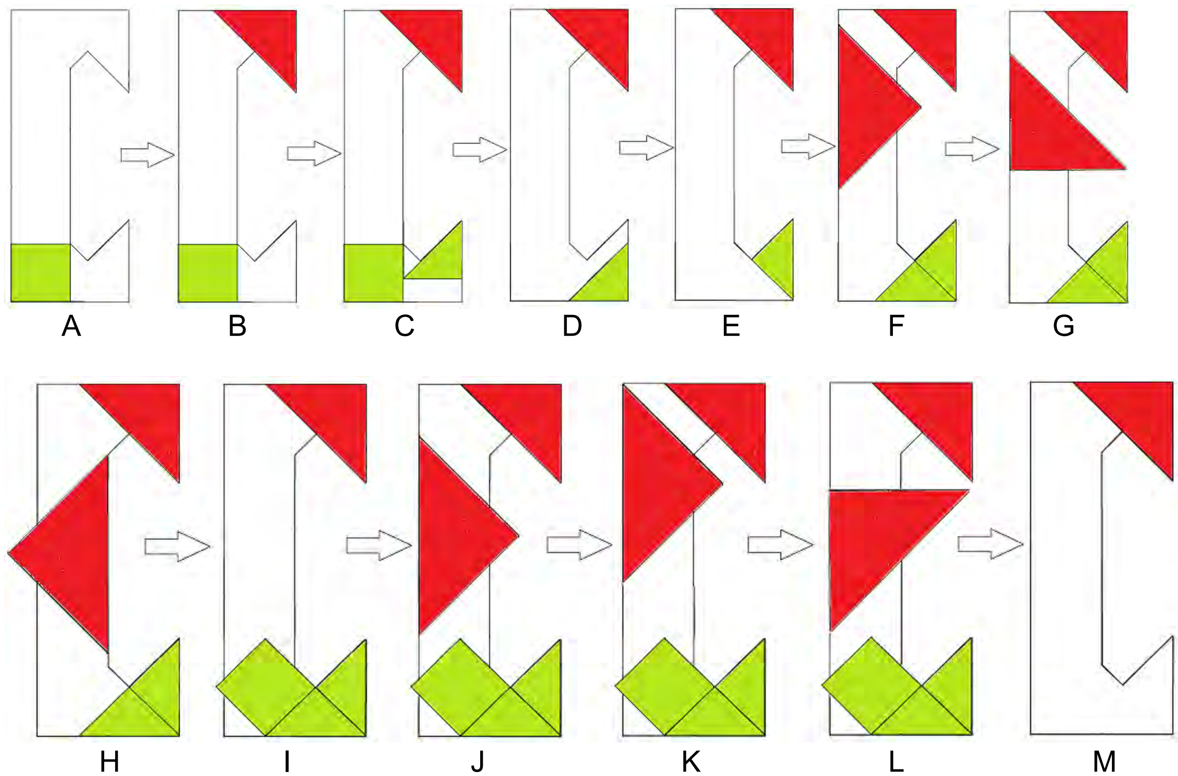


Imagen 34

En esta primera parte empieza a cobrar relevancia, muy fugazmente, una característica de las piezas: su tamaño. Más específicamente, el de los triángulos, las únicas piezas cuyo tamaño varía. Jorge y Axel saben desde el principio que hay triángulos diferentes -“la chiquita” y “la grande” (línea 3)-, pero no parecen darle mucha importancia. Los dos eligen la primera pieza un poco al azar. Jorge toma una que sobró al formar la “casa”, Axel pasa la mano por distintas piezas y toma el cuadrado (línea 1).

Me parece que el primer gesto de Jorge, de comenzar con el triángulo mediano porque sobró en la primera plantilla, desencadena que los dos se ocupen de los cinco triángulos, que prioricen ese tipo de figura. Axel también toma un triángulo, creo que en parte porque vio a Jorge, en parte porque cabe en la zona inferior de la plantilla, que él está rellenando (líneas 1-2). Lo acomoda de distintas maneras (línea 4). Y si Axel se encarga de “la chiquita”, entonces Jorge toma “la grande” (línea 3). Antes de buscar dónde puede ir, se detiene a ver a Axel y le propone seguir con otro triángulo pequeño (línea 5). Axel acepta (línea 6). Es interesante que Jorge no pone ahí la pieza, sino que se la da a Axel para que la ponga él. En las imágenes 34, 38 y 42 se puede ver que, desde el inicio hasta el final, Jorge solo pone piezas en la región superior de la plantilla y Axel en la inferior. Se dividen, sin hablarlo, la plantilla, pero lo que hace cada uno suele depender mucho de lo que acaba de hacer el otro.

Quedan dos triángulos más, los grandes. Jorge ya tiene uno en la mano y se dispone a acomodarlo, pero se encuentra con una traba: esas piezas no caben en la franja que falta por cubrir, porque es muy delgada (línea 7). Jorge modifica la posición del triángulo para ver si cabe de otra manera, pero no. Prueba con el otro triángulo grande (línea 9) -es decir, para él no es claro que los dos son iguales- y tampoco cabe. Este momento marca una ruptura. No es posible ocuparse de todos los triángulos de igual manera, porque no pasa lo mismo al ponerlos en la plantilla. Los últimos dos triángulos -los grandes- tienen algo que no tienen los primeros tres. A partir de aquí, la preocupación inicial por la figura comienza a deslizarse hacia el tamaño, siempre de manera implícita.

La reacción de Jorge no es concluir que entonces esos triángulos cubren al menos parte del complemento de esa región, sino dejarlas fuera (líneas 7 y 9). Ese complemento ya está ocupado por algunas piezas, moverlas implicaría deshacer algo de lo que ya tienen, en plural, que está muy sintonizado: uno ha cubierto un espacio igual al del otro, en espejo (Imagen 34F). Además, si desde la consigna se sabe que van a sobrar piezas, lo cual efectivamente ocurrió al rellenar la plantilla anterior, podrían ser esas dos esta vez.

En suma, los triángulos grandes están generando una dificultad que no surge con las otras piezas: son las únicas que no caben en la región que falta por cubrir. La primera reacción frente a eso es sacarlas de la plantilla, pero esto cambia después:

10. *Axel: ¿y si pongo este de acá? [quita el triángulo mediano del lugar en el que está, y lo pone abajo, Imagen 38N]*
11. *Los dos alumnos siguen poniendo piezas. Jorge intenta dos veces poner un triángulo grande, pero no cabe y lo quita inmediatamente. El resto del tiempo, ambos dejan de lado los dos triángulos grandes y ponen las otras cinco piezas. En un momento, las acomodan dispersas en toda la plantilla [Imágenes 35 y 38Ñ]. Los dos siguen moviendo esas cinco piezas, las cambian de lugar, las giran, voltean, buscan otros arreglos. Hasta que Axel toma uno de los triángulos grandes*
12. *Axel: ¿Es que esta que cabe aquí? [pone el triángulo grande sobre la franja delgada, imágenes 36 y 38O] Es que esta no cabe aquí*

Imagen 35

Imagen 36

13. Jorge: ¡Noooo! Es que esa noooo

14. Axel: [refleja el triángulo grande y lo acomoda en una esquina, donde cabe bien, imágenes 37 y 38P] Así, ¡así sí cabe!

Imagen 37

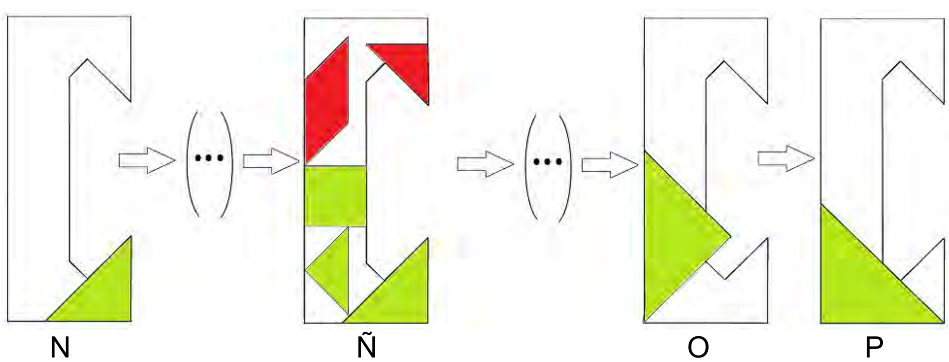


Imagen 38

Al inicio, los dos alumnos siguen dejando fuera los dos triángulos grandes y tratan de poner las otras cinco piezas en distintos lugares. En ese tiempo, Jorge intenta dos veces acomodar un triángulo grande, pero lo hace fugazmente, pues en dos segundos toma esa pieza, la pone en un lugar y la retira porque no cabe (línea 11). Es decir, la tiene presente y al mismo tiempo la deja fuera. En cierto momento, ambos ponen las otras cinco piezas desperdigadas en la plantilla, como preguntándose si es posible cubrirla toda sin los triángulos grandes (línea 11).

Cuando Axel toma un triángulo grande, pone en palabras lo que encontró Jorge, pero había estado implícito: hay una región importante de la plantilla donde los triángulos grandes no caben ("esta (pieza) no cabe aquí (en la franja delgada larga)*",* línea 12)*.* Él reacciona ante eso de otra manera, distinta a la de Jorge. En lugar de sacar esa pieza, la pone fuera de la franja (línea 14). Prioriza el triángulo grande, la pieza que está generando una dificultad que no tienen las otras. Cuando logra acomodarlo, se preocupa porque Jorge se entere (línea 14). Esto es llamativo porque la primera reacción de Jorge fue negar, explicar a Axel que esas piezas quedan fuera (línea 13). Axel trata de hacerle ver que no es así. Así, después de observar, Axel recupera, explicita, vuelve prioritaria y expande una idea que podría haber pasado de largo: si los triángulos no caben en esa franja, busca otro lugar dónde pueden caber y lo consigue.

Axel logra colocar el triángulo grande, a diferencia de Jorge. Pienso que lo consigue precisamente porque se sostiene sobre lo que Jorge hizo antes. Además, desde la primera pieza que pone, está operando sobre otra región de la plantilla: mientras Jorge tiene al frente la zona larga y delgada, él tiene la región inferior. Autores como Saiz (2003) o Marchand (2020) explican que lo que puede ver una persona en una figura o cuerpo depende de su perspectiva, del lugar desde donde mira. Axel conoce mejor esa región porque la ha explorado bastante: ha puesto ahí varias piezas, en particular triángulos, en distintas posiciones. Tal vez por eso puede ver un triángulo grande en ese lugar. A partir de ese momento, los dos juntos terminan rápidamente:

15. *Jorge: ¿Cómo? a ver [deja lo que está haciendo para fijarse en lo que hace Axel]*
16. *Axel: ¡Así! Y luego esta aquí así [toma un triángulo pequeño y lo coloca en el espacio que sobra en la esquina, imagen 42Q]*
17. *Jorge: ¡Ahí tá[33]! ¡Entonces una grande va aquí! [Toma el otro triángulo grande y lo acomoda en la esquina superior de la plantilla, imágenes 39 y 42R]*
18. *Axel: [Mientras Jorge toma el triángulo grande, lo gira y acomoda] No [está a punto de quitarle el triángulo a Jorge, pero no lo hace]. ¡Sí! Sí sí sí sí sí. Siiiiiiiii, sí sí sí sí sí [sonríe]*
19. *Jorge: Y este [toma el otro triángulo chico]…*

[33] Ahí está.

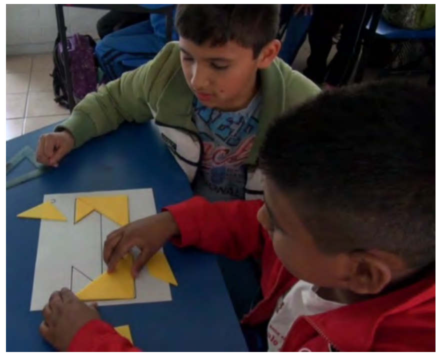


Imagen 39

20. *Axel: [interrumpe la frase anterior de Jorge y señala el espacio donde cabe ese triángulo chico] Y esta chiquita va aquí*
21. *Jorge: [continúa su intervención] Iría, así... de forma...*
22. *Axel: ¡ya falta poco!*
23. *Jorge: … de que le diera ASÍ [pone el triángulo chico junto al grande, imágenes 40 y 42S]*
24. *Finalmente, Axel coloca el triángulo mediano [Imagen 42T], Jorge toma el cuadrado, lo saca porque no cabe, y Axel pone la última pieza, el romboide [Imagen 42U]. Así terminan de rellenar la plantilla, y la pieza que sobra es el cuadrado [Imagen 41]*

Imagen 40

Imagen 41

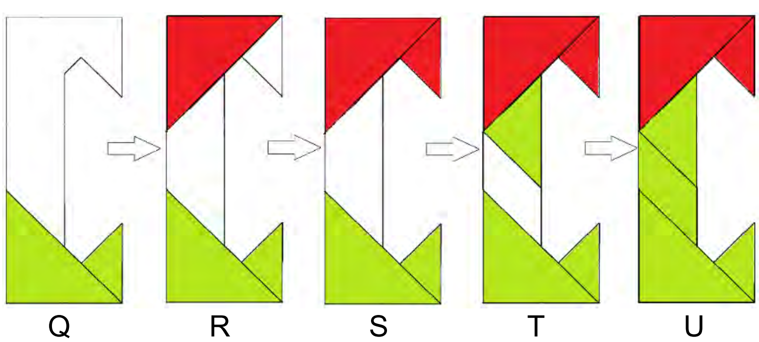


Imagen 42

Axel agrega una pieza al lado del triángulo grande que logró acomodar (línea 16), con lo cual queda cubierta la zona inferior de la plantilla, que le ha interesado desde el principio. Esto confirma que el triángulo grande está bien puesto. Además, consigue que Jorge cambie de opinión respecto a esa pieza (líneas 15 y 17). A la contribución de Axel, Jorge agrega otra: hay una región de la plantilla que es reflejo de la que rellenó Axel y dos piezas iguales a las que usó -esta vez sí las reconoce como iguales-, así que replica lo que hizo él, también en espejo (líneas 17, 19, 21 y 23). Creo que él encuentra eso en parte porque está encargado de la zona superior de la plantilla, así como ocurrió antes con Axel. El aporte de cada uno tiene que ver con la distribución implícita que han hecho de la plantilla en dos regiones y con el énfasis en formar primero los dos extremos, la zona inferior y la superior.

Cuando Jorge pone esas dos piezas, en lugar de simplemente hacerlo sin decir nada, reconoce que Axel encontró algo importante ("*¡ahí tá!*") y utiliza el marcador "*entonces*" (línea 17), con lo cual deja claro que él sabe dónde va el segundo triángulo grande porque vio dónde va el primero. O' Connor y Michaels (1996) explican que, a través del uso de ese tipo de marcadores, los alumnos reconocen que su aporte proviene de otra contribución anterior de algún compañero. La sorpresa de Axel en la línea 18 muestra que Jorge ha visto algo que él no. Tan es así que al principio lo considera un error y casi lo interrumpe, pero se detiene y finalmente reconoce esa producción como algo útil. Después la plantilla queda cubierta rápidamente con dos piezas más (línea 24). Los primeros intentos fallidos les toman casi dos minutos, pero a partir de que encuentran el lugar de un triángulo grande, ambos colocan rápidamente el resto de las piezas, una por una, con pocos titubeos y sin modificar la configuración ni una sola vez, en 30 segundos.

En este episodio hay una colaboración intensa entre Axel y Jorge, una interacción "sin costuras (*seamless*)"[34], desde el principio hasta el final. Cada alumno agrega algo nuevo al aporte anterior del otro, como ladrillos que se van superponiendo. Se reconocen mutuamente como interlocutores, en el sentido de que muestran que su producción proviene de otra anterior del compañero, dejan ver al otro que va por buen camino, explicitan y le dan prioridad a algo que el otro ha encontrado pero que al no formularse o no ser consciente podría pasar desapercibido, expanden la acción del otro al repetirla,

[34] Tomo esta palabra de Erickson (https://www.youtube.com/watch?v=vhthoOHXMSI) quien la usa para referirse a un grupo de alumnos de preescolar y su maestra que pasan del español al inglés y viceversa de manera fluida, sin rupturas, y por lo tanto sin necesidad de enmendar esas rupturas. Como una prenda de ropa que no tiene remiendos y en la que no se sabe cuándo se pasa de una pieza a otra.

se detienen para ver qué hace antes de interrumpirlo. Como muestran O'Connor y Michaels (1996), esto no es común ni fácil de lograr: los alumnos tienden a decir en clase lo que consideran pertinente, sin vincularlo a las producciones de sus pares. Muchas veces se requiere el despliegue de complejos movimientos discursivos –como el *revoicing*- por parte del maestro para dar voz a algunos alumnos, relanzando sus producciones al grupo.

No puedo rastrear de dónde viene esta interacción tan fluida. Tal vez Axel y Jorge tienen ya una historia trabajando juntos. Tal vez sentirse cercanos porque ambos son alumnos con rezago, que muchas veces no encuentran cómo abordar las tareas, les ayuda a sentirse más confiados, a soltar la guardia. Tal vez, al ser ambos alumnos con rezago, pero cuya imagen frente a otros no es degradada -no tienen lo que Poveda (2005) llama una "*negative face*", parecen ser percibidos por sus pares como alumnos que simplemente a veces deciden no participar, no entrar a las tareas académicas-, se sienten confiados de actuar cuando un problema les interesa. El problema específico también tiene un papel. Se trata de una tarea sobre la que pueden actuar: no hay algo que ya tendrían que saber para resolver, no se espera que apliquen una técnica previamente enseñada, ellos pueden identificar cuando algo de lo que hacen no funciona. Es decir, creo que la tarea genérica de hacer configuraciones potencia las interacciones sociales, y por eso trabajan juntos desde que hacen la "casa", la primera plantilla. Cuando hay mucha información para leer del problema, hay también más que hacer notar al otro y más que aprender de él. La segunda plantilla tiene además características específicas que estrechan la colaboración. La "C" es simétrica, y los dos extremos se cubren con piezas iguales puestas en espejo. Eso favorece que ellos se dividan las dos regiones, estén atentos a lo que hace el otro, puedan replicarlo y ampliarlo. Es decir, se dividen lo que Chevallard (1997) llama espacio matemático, sin disputa: cada uno tiene un lugar en la resolución, cada uno respeta el lugar del otro.

El hecho de que el tamaño de los triángulos sea una característica que no es relevante al principio, pero se va volviendo poco a poco, también tiene que ver con un rasgo del contorno por cubrir. Los dos triángulos grandes solo caben en un lugar muy particular, que además no está claramente sugerido, como el romboide en la cola del gato. Es decir, se pueden poner en un único lugar que está oculto para los alumnos.

Así, a la interacción de cada uno con el problema se agrega la información que aporta el otro. Como señala Cambriglia (2018), las interacciones sociales muchas veces permiten sostener la incertidumbre que genera el problema -en este caso, no saber qué hacer con los triángulos grandes-, cuando los participantes ayudan sucesivamente a completar producciones incompletas.

En resumen, los alumnos no reparan en el tamaño de las piezas solo por verlas o por distinguirlas con palabras. Al inicio no muestran mucho interés en las piezas grandes, después se van volviendo más relevantes, al ir resolviendo la tarea. El tamaño se torna funcional porque en esta configuración específica genera una dificultad, impone una traba en la resolución.

2.3.3 La simetría, el reto de reflejar una pieza

Engie trata de hacer el gato. Lo toma como una tarea estrictamente personal, pues casi no habla y cuando alguien de su equipo o del contiguo avisa que ha terminado, ella mira de reojo rápidamente y vuelve a su propio rompecabezas. Incluso los estuches de materiales, puestos en medio de la mesa, dificultan que ella observe lo que hace Ian, su compañero de equipo que también tiene ese modelo. El gato no es fácil de armar para ella. Al menos una vez quita todas las piezas que tiene puestas y vuelve a empezar. Hasta que casi logra rellenarlo, excepto por el romboide. Ella sabe dónde va esa pieza, pero no consigue hacer que embone con el contorno (Imagen 43).

Imagen 43

La gira una y otra vez, nunca la voltea, es decir, no la refleja. Yo espero un poco y luego decido intervenir pidiendo a Valeria “a ver ayúdale (a Engie) con este [el romboide]. Nomás le falta este”. Valeria inmediatamente refleja el romboide y con eso completa el gato. Engie permanece en silencio, espera la siguiente instrucción.

Me interesa contrastar la rapidez con que Valeria acomoda correctamente el romboide con el tiempo que Engie lo intenta sin lograrlo. Saber que una pieza va en cierto lugar no es suficiente para colocarla en posición correcta. A veces hace falta girarla para conseguir que un ángulo o el tamaño de un lado coincida con el borde marcado, y otras, como en este ejemplo, es indispensable voltearla. En las resoluciones que observé, los alumnos tienden mucho más a girar las piezas que a reflejarlas[35]. El romboide es la pieza cuya posición es más difícil de identificar, pues es la única que no es simétrica. Y me parece que la acción de reflejarlo vista como algo necesario, es decir, saber que a veces no basta con girar, supone cierta intuición respecto a la simetría. Difícilmente Engie podría haber reflejado la pieza por sí misma. Necesita ayuda, ver cómo lo ha hecho alguien más, pero no la pide. ¿Interpreta al extremo la consigna de que cada alumno rellene su plantilla, como una sanción a mirar cómo resuelve otro? ¿Considera que la observación se contrapone al aprendizaje, que ver a otro en lugar de resolver sola no le permitirá aprender algo nuevo? ¿No confía en Ian, el otro alumno que también tiene el gato, por ser un alumno con dificultades? ¿Le preocupa que yo la esté observando y tenga una idea específica de la copia? En todo caso, este episodio sugiere que la devolución del problema se entrecruza con las ideas sobre la copia y sobre los otros: ambos se juegan al decidir hasta dónde resolver solos y cuándo y a quién pedir ayudas.

Neyret (1977) y Marchand (2020) también perciben que el romboide es problemático en actividades con el tangram o con papel cuadriculado. Con frecuencia los alumnos parecen dar por sentado que todas las piezas son simétricas o, dicho de otro modo, las mueven con giros o traslaciones, como si no hubiera una que no es simétrica. La simetría también tiene un papel en situaciones que demandan escribir un mensaje a otros para que puedan construir una figura igual a la propia sin verla. Fregona y Orús Báguena (2011) encuentran que los alumnos incluyen la posición en el mensaje, pensando en comunicar no solo las características definitorias de la figura sino también un proceso mediante el cual otros la pueden trazar.

Castaño (en proceso), al hacer la confrontación grupal de la misma situación, relata que los alumnos no admiten que dos romboides son iguales si para empalmarlos es necesario reflejar uno. Pareciera que los alumnos consideran la posición de una figura como parte de ella, como una de sus características intrínsecas. Al analizar después los mensajes entre los maestros que aplican esa actividad, hay un punto en el que no hay unanimidad: algunos consideran que uno de los mensajes está bien escrito, pero la reproducción es incorrecta, porque la figura "les dio del otro lado". Ellos justifican esa respuesta a partir de una evocación espacial de la figura: si eso fuera una puerta, no

[35] Los maestros con los que he trabajado en proyectos de formación también relatan esto con frecuencia: el romboide es la pieza que más trabajo cuesta poner.

podría quedar del otro lado, no funcionaría. Es probable entonces que la acción de reflejar una pieza, la consideración de la simetría, incorporar la posición de una figura en sus características, tengan que ver con un tránsito entre una manera espacial y una geométrica de percibir las figuras.

2.3.4 Los ángulos, una nueva manera de ver

Como he descrito en el apartado 2.2, al terminar de cubrir las plantillas y el registro en el cuaderno, los alumnos deben guardar su tangram. En algunos casos, la caja contiene un espacio donde van dos tangram completos, cada uno en dos capas cuadradas (Imagen 44). Así, guardarlos implica que dos compañeros formen cuatro cuadrados con sus catorce piezas (por ejemplo, imagen 45 o 46).

Imagen 44

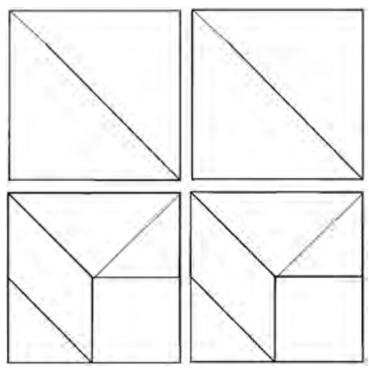


Imagen 45

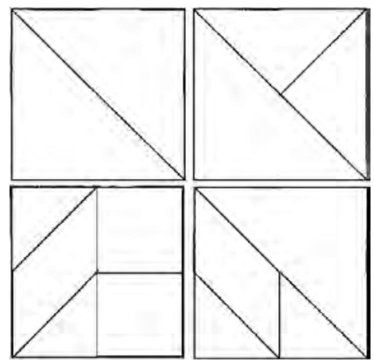


Imagen 46

En el siguiente episodio, Arturo y Juan David guardan sus tangram en la misma caja, con ayuda de Luis y Danna, y con Alonso y Angélica observando[36]. Al principio solo está Arturo:

1. *Arturo hace primero una capa con los dos triángulos grandes [Imagen 47]*
2. *Para hacer la segunda capa, Arturo coloca el triángulo mediano y luego uno pequeño, de manera que el ángulo recto de ambos coincide con una esquina del molde [Imágenes 48 y 49]. Agrega el cuadrado en la franja de en medio*
3. *Maestra: [a Juan David, quien no sabe en qué caja guardar sus piezas] este, aquí con Arturo [Arturo voltea a ver a la maestra] con Arturo por favor [Arturo saca las tres piezas que tiene en la segunda capa y se las queda en la mano]*

[36] En las imágenes del registro, he puesto de distinto color las piezas que pone cada alumno en la caja: amarillo las de Arturo, verde las de Juan David, azul las de Luis, y lila las de Danna.

4. *Juan David llega y pone sus piezas junto a las dos que Arturo tiene en la mesa (…)*

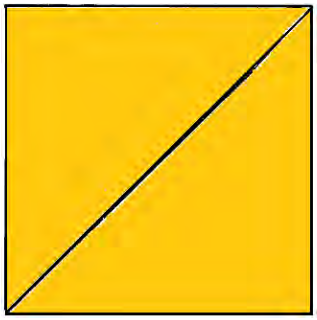


Imagen 47


Imagen 48

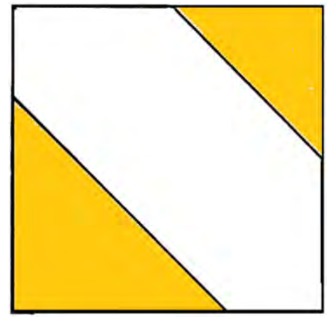


Imagen 49

(…)

5. *Arturo: ¿eh? ¿lo vas a poner? [vacía la caja, se queda con los dos triángulos grandes también en las manos] Tú primero*
6. *Juan David pone sus dos triángulos grandes como lo había hecho Arturo, igual que en la imagen 47. Para hacer una segunda capa, comienza por acomodar su cuadrado en una esquina [Imagen 50]. Luego agrega el romboide que Arturo dejó en la mesa*
7. *Arturo: [toma el otro romboide] esta es mía ¿eh?*
8. *Juan David agrega la última pieza de Arturo que estaba en la mesa y otra suya, pero quedan muchos espacios sin poder cubrir, y otra pieza que no cabe. Saca toda esa segunda capa de la caja*
9. *Juan David acomoda su triángulo mediano de manera que el ángulo recto queda en una esquina del molde [Imagen 51]. Después trata de poner un triángulo chico. Lo recorre por varios lugares, en distintas posiciones [Imagen 52]. Retira su mano de la caja*

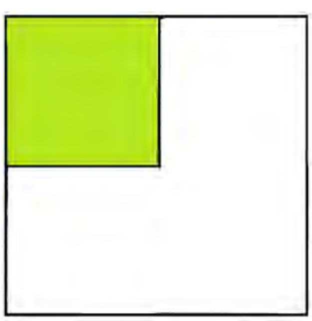


Imagen 50

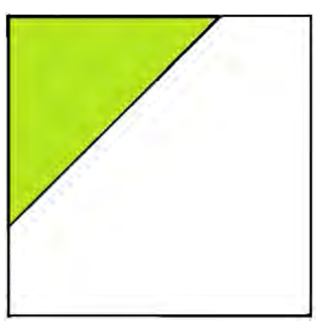


Imagen 51

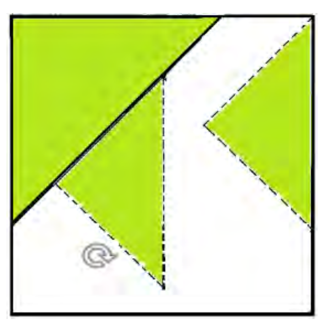


Imagen 52

10. *Arturo: ¿no sería…? [reacomoda las dos piezas como se ve en la imagen 53]*

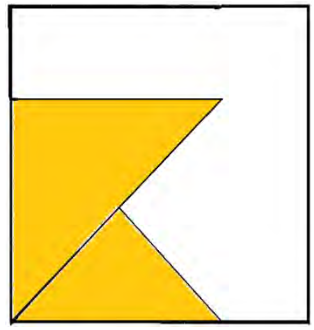


Imagen 53

11. *Juan David desliza las dos piezas hacia arriba, de manera que el ángulo recto del triángulo mediano vuelve a quedar en la esquina, como antes. Sigue explorando maneras de poner piezas manteniendo fijo el triángulo mediano. Pone dos triángulos chicos de distintas formas, su cuadrado en una esquina inferior. No deja ninguna fija*

En esta tarea hay que formar cuadrados, figura generalmente definida por tener todas sus esquinas rectas. Pienso que esto provoca en los alumnos una impresión de que todas esas esquinas se cubren con un ángulo recto de alguna pieza, y recíprocamente, cualquier ángulo recto de una pieza va en una esquina del molde. Ninguna de las dos predicciones se cumple, porque la única manera de acomodar los triángulos medianos es como se ve en las imágenes 45 y 46, con el ángulo recto hacia el centro y los agudos en las esquinas. Considerar que hay ángulos rectos del molde que se componen de dos agudos de las piezas, y que hay una pieza cuyo ángulo recto queda en el interior del molde, resulta muy difícil porque implica abandonar esas dos certezas iniciales.

Cuatro veces -en el fragmento que he mostrado, y cinco veces más en los que siguen-, los alumnos comienzan a formar una capa poniendo un ángulo recto de una pieza en una esquina del molde. Pareciera que lo primero que ven en el cuadrado son sus ángulos rectos. Arturo comienza poniendo dos triángulos, el mediano y uno pequeño, en dos esquinas opuestas (línea 2). Mi primera interpretación fue que, como se trata de la segunda capa, Arturo trata de reproducir lo que acaba de hacer en la primera (línea 1). Es decir, que pone así los triángulos porque debajo de ellos hay otros dos de mayor tamaño en posición similar. Pero no los orienta de la misma manera, sino en un reflejo horizontal. Además, no los pone juntos, sino cada uno en una esquina. Por eso me inclino a pensar que está priorizando los ángulos rectos de las piezas y del molde. Es probable que al poner el cuadrado en la franja que queda entre los dos triángulos, note que no embona del todo, es decir, que el lado del cuadrado es menor al ancho de esa franja. Así, deshace lo que lleva y le pide a Juan David que comience (líneas 3 y 5).

Sin haber visto antes cómo Arturo intentó hacer la segunda capa, Juan David comienza con un cuadrado en una esquina (línea 6). Luego con un triángulo mediano (línea 9). En ambos casos, embona un ángulo recto de la pieza con uno del molde. Igual que le pasó a Arturo, descarta esos arreglos al poner otras piezas. En el primer intento quedan espacios sin cubrir y una pieza sin poner. En el segundo, da la impresión de algo le incomoda con el triángulo pequeño, que no encuentra un lugar y posición que le convenza, porque lo mueve con frecuencia hasta que quita la mano, y parece que Arturo percibe esa incertidumbre porque propone una modificación más drástica del arreglo de los dos triángulos (línea 10).

En efecto, no hay manera de cubrir la región debajo del triángulo mediano como lo ha puesto Juan David (Imagen 51), esa pieza no puede ir así. Juan David no lo plantea de esa manera. Él parece saber que algo no está bien, pero no reacomoda las dos piezas, mantiene el triángulo mediano y mueve solo el pequeño, como si ahí estuviera el error. Parece cuestionar parcialmente el arreglo que lleva, no todo, no lo que implica al ángulo recto. Lo que hacen él ahora y antes Arturo es parecido a cuando se tiene un rompecabezas comercial común, de piezas irregulares: se empieza por buscar aquellas que van en las cuatro esquinas. En la línea 10, Arturo forma por primera vez un ángulo recto del molde por composición de dos ángulos agudos. Pero Juan David regresa las piezas y prueba otros arreglos que cambia una y otra vez, excepto por el triángulo mediano, que mantiene siempre cubriendo una esquina del cuadrado (línea 11).

Lo que me interesa destacar, en suma, en este primer fragmento, es el peso que los ángulos rectos parecen tener como el primer paso para construir un cuadrado. Centrar la atención en construir cada una de las cuatro esquinas de la caja con un ángulo recto vuelve prácticamente impensable la posibilidad de acomodar el triángulo mediano con el ángulo recto hacia el interior, o de formar un ángulo recto con dos agudos. Esa insistencia en embonar un ángulo recto de una pieza y uno del molde, además de sugerir la presencia de la idea de cuadrado en la resolución, ayuda a entender por qué Duval y Godin (2005) insisten en que es importante tener experiencia con la yuxtaposición de figuras -y no solo con la superposición-, la cual señalan como una de las cuestiones necesarias para que los alumnos enriquezcan progresivamente su mirada sobre las figuras.

Arturo decide ir a observar cómo ha resuelto Danna:

12. *Arturo: [mientras sigue Juan David, él va con Danna, quien está en la mesa contigua y ya tiene su tangram guardado en una caja igual a la suya. La observa, voltea a ver su caja que tiene Juan David, vuelve con Danna, y regresa a su mesa] ¿no sería…? [saca las dos piezas que están en la segunda capa, y pone un triángulo chico en una esquina] esta… préstame la otra chiquita… la otra chiquita [toma el otro triángulo chico que le da Juan David, y forma con los dos el cuadrado de la imagen 54]*
13. *Juan David agrega su cuadrado debajo del que formó Arturo*
14. *Arturo pone un romboide y un triángulo chico, Juan David otro más. Así forman la segunda capa completa, y quedan guardadas todas las piezas de Juan David excepto el triángulo mediano, y además los dos triángulos pequeños de Arturo [imagen 55]*

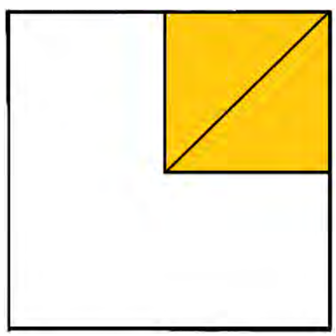


Imagen 54

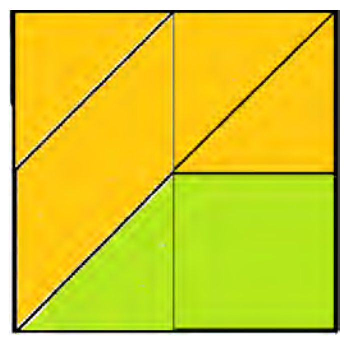


Imagen 55

15. *Arturo: ¡a mí me faltan (triángulos chicos)! [revisa las piezas que tiene en la mano] en sí a mí me faltan*
16. *Juan David toma los dos triángulos grandes de Arturo, y forma con ellos una tercera capa, igual que en la imagen 47. Para formar la cuarta capa, pone un triángulo mediano nuevamente en la esquina superior, como en la imagen 51. Luego pone el otro, forma con ambos un cuadrado, y lo recorre de una esquina a otra. Saca las dos piezas de la caja*
17. *Para intentar otra vez hacer la cuarta capa, Juan David pone un romboide en distintos lugares y posiciones, también un cuadrado en una esquina inferior [Imagen 56]. Arturo le advierte que, en uno de esos acomodos, va a faltar un*

triángulo pequeño. Después de varios intentos, Juan David saca todas las piezas y deja la caja vacía. En la mesa quedan revueltas las piezas de los dos alumnos

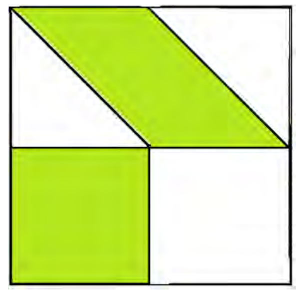


Imagen 56

18. *Juan David forma una primera capa con dos triángulos grandes. Para formar la segunda, pone un cuadrado en una esquina inferior del molde*
19. *Observadora: [a Luis, sentado en la mesa de enfrente] a ver tú qué opinas, a ver cómo se acomoda el tangram, dales alguna pista*
20. *Luis: [se acerca a la mesa, se pone en medio de Juan David y Arturo] ¿de cuál?*
21. *Arturo: pérate [quita el cuadrado que puso Juan David]… es que SÍ van estas dos acá [pone dos triángulos chicos formando un cuadrado en la esquina superior derecha del molde, como antes] van aquí, luego, pérate [a Luis, que agarra un cuadrado], ¡pérate viejito! [Luis pone un cuadrado debajo de los dos triángulos pequeños] (…)*
22. *Angélica llega a observar. Entre Arturo y Luis terminan la segunda capa, igual que antes [imagen 55]*
23. *Arturo: es que a mí me faltarían PIEZAS [levanta los hombros, voltea a ver a Danna, pero rápidamente regresa a ver a su equipo] (…) a mí me faltarían piezas… o sea sí cabe, pero a MÍ me faltarían piezas (…) me faltan chiquitas de estas [señala dos triángulos chicos]*

Esta vez, Arturo sí construye un ángulo recto con dos agudos. Cuando va con Danna, regresa con la seguridad de que dos triángulos chicos forman un cuadrado en una esquina (líneas 12 y 21). El arreglo que ha hecho Danna es probablemente igual al de la imagen 45 (más adelante muestro que ella misma lo hace frente a sus compañeros). En esa configuración no hay dos triángulos chicos formando un cuadrado, hay un triángulo chico junto a uno mediano y otro junto a un romboide. No obstante, en los dos casos, el triángulo chico está en un lugar y posición que harían posible unirlo a otro igual para hacer un cuadrado en la esquina del molde. Eso es lo que Arturo parece ver. La manera en que él después insiste en partir de ese cuadrado, y para hacerlo incluso rechaza la ayuda de Luis (línea 21), me hace pensar que su observación con Danna transforma la imagen 57 o 58 en la 59, que está seguro de haber visto ese cuadrado en el arreglo de alguien que ya consiguió guardar todas sus piezas.

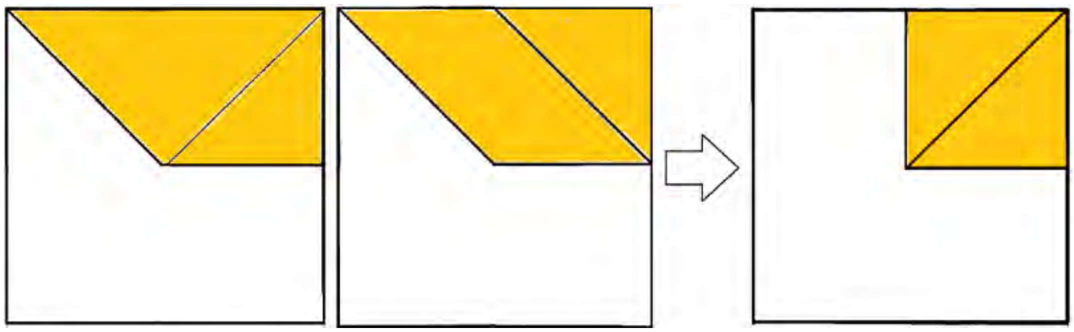


Imagen 57 Imagen 58 Imagen 59

Que Arturo vea dos triángulos iguales formando un cuadrado en lugar de dos triángulos de distinto tamaño formando otra figura -y también el ejemplo de Ian en un apartado anterior, quien trata de empalmar un triángulo con un pentágono-, ejemplifica la complejidad del "acto de ver" en geometría (Duval, 2005). Observar y copiar no son actividades cognitivamente neutras. Arturo se fija en lo que hace Danna desde sus propias anticipaciones que al parecer lo llevan a poner de relieve la forma cuadrada con ángulos rectos del molde. La observación y la copia tienen un valor para el aprendizaje (Paradise, 1991) porque al hacerlo el alumno moviliza conocimientos, elige qué ver y lo transforma. Y están muy ligadas a la acción: Arturo decide observar después de varios intentos por resolver en los que no hay salida (líneas 1-12), luego no es fácil reproducir lo que ha visto, y además tiene que completar la configuración y explicarse por qué no funciona. Marchand (2020) explica que copiar una configuración que se ha visto pero ya no se tiene enfrente implica construir una imagen mental de ella. De hecho, es todo un tipo de tareas que la autora incluye en una secuencia didáctica que diseña.

La observación y la copia tampoco son socialmente neutras. Arturo tiene que defender lo que ha visto frente a Luis y Juan David ("es que SÍ van estas dos acá", línea 21), cuando ellos no saben de dónde viene la certeza de Arturo, no han mostrado interés en ese cuadrado específico, y ponen las piezas de otras maneras. De hecho, la ayuda de Luis no es muy bienvenida, creo que precisamente por eso ("¡pérate viejito!", línea 21). Resumiendo, yo interpreto que Arturo efectivamente construye un ángulo recto del molde con dos agudos, pero no es esa su intención ni es lo que mira, sigue centrado en la forma cuadrada.

Juan David vuelve, como en el primer fragmento, a comenzar una capa poniendo una pieza de manera que su ángulo recto queda en una esquina del molde (líneas 16 y 18). La única vez que no comienza por cubrir esquinas del molde ocurre precisamente cuando ya no tiene triángulos pequeños (línea 17). La coincidencia de esos dos momentos impide que Juan David encuentre que un ángulo agudo puede ponerse en una esquina del molde cuadrado. No tener triángulos pequeños vuelve imposible formar una capa, y él termina por deshacer todo.

Quiero destacar ahora una contradicción que encuentra Arturo. Asumiendo que él ve que Danna puede resolver con dos triángulos chicos unidos en una esquina del molde, también encuentra que eso mismo lo obliga a utilizar los cuatro triángulos chicos en una sola capa, y entonces no podrán hacer la última (líneas 12-15, 17, 22-23). Desde su punto de vista, el mismo comienzo que es un acierto para Danna, lo lleva a él a un callejón sin salida. La manera en que Arturo percibe que lo que vio con Danna lo lleva por un camino equivocado tiene que ver con la distribución de la tarea entre él y Juan David. Desde que la maestra convoca a Juan David, se generan dos tensiones: ¿se ponen primero todas las piezas de un tangram y después todas las del otro, o pueden revolverse? ¿cada alumno acomoda exclusivamente sus piezas, o puede intervenir con las del otro? Es decir, como se empalma el espacio físico de resolución, hay cierta indefinición respecto a si las acciones de los alumnos y las piezas se separan o se fusionan. El problema es incierto en términos de las maneras de resolver, porque solo en el segundo caso es posible utilizar todos los triángulos chicos en una sola capa, como en efecto ocurre. También es incierto en un sentido social, porque no está claro si cada uno tiene una responsabilidad propia o tienen una compartida. Esa ambigüedad sigue presente hasta el final. Respecto a las piezas, es posible resolver de las dos maneras, como muestran las imágenes 45 y 46.

Al inicio del fragmento anterior, Arturo es responsable de formar dos cuadrados con siete piezas, pero muy pronto encuentra que el segundo no será fácil (línea 2). Así, le viene muy bien que la maestra integre a Juan David. Aprovecha inmediatamente ese momento: quita sus piezas de la caja, las conserva en la mano -es decir, las separa de las que trae su compañero, salvo dos que olvida en la mesa-, y le pide que comience él (líneas 3 y 5). No interviene en lo que hace Juan David (líneas 6-9), excepto para recuperar una de sus piezas (línea 7). En suma, Arturo hace que cada uno resuelva su tarea, uno por uno, independientemente del otro. Tal vez porque así comenzó, él solo con sus siete piezas, tal vez porque ya encontró una traba que no sabe cómo sortear y quiere delegarla a Juan David, tal vez porque pone a prueba a su compañero y compite con él. Esa decisión inicial de no colaborar lo lleva a dividir el problema en dos independientes. Juan David, por su parte, desde que llega pone sus piezas junto a las que Arturo tiene en la mesa (línea 4). Acepta comenzar él, y usa piezas de ambos (líneas 6 y 8). No muestra interés en distinguir cuál es de quién.

Arturo regresa de la mesa de Danna con la idea de formar un cuadrado con dos triángulos chicos (línea 12). Lleva esta idea hasta el final, aunque eso le implique intervenir en lo que hace Juan David, y aunque tenga que usar los cuatro triángulos pequeños (línea 14). Es decir, ahora permite que se revuelvan piezas y participantes, porque la prioridad ha cambiado, lo central es reproducir la resolución de Danna. Pero se topa con pared: la manera en que lograron guardar casi todas las piezas de Juan David (línea 14) hace que no puedan guardar muchas de las suyas (línea 15). Diez veces insiste –algunas muy enfáticamente- en que faltan *sus* piezas (líneas 15, 23, y mostraré que vuelve a hacerlo más adelante). Hay para él una contradicción que lo desconcierta: partir de lo que vio con Danna tendría que llevarlo a resolver, pero prácticamente solo consigue guardar lo de Juan David. Es decir, de esa forma, él se quedaría solo con un problema irresoluble. Juan David, en cambio, parece interesado en terminar de guardar todo, independientemente de qué pieza sea de quién. La primera vez que se quedan con piezas que no podrán acomodar, deshace todo, revuelve las piezas, y vuelve a comenzar (línea 17).

En suma, Arturo compone un ángulo recto del molde con dos agudos de las piezas cuando interpreta que así lo hace Danna. Pero me parece que transforma una figura irregular de ella en un cuadrado, que sigue poniendo de relieve el cuadrado, con sus respectivos ángulos rectos. Eso hace que no pueda guardar las catorce piezas. Ese camino está muy atravesado por la tensión que genera la incertidumbre sobre qué le toca a cada alumno si dos problemas que muy al inicio tenían separados, pronto se funden en el mismo espacio físico. Es decir, ese espacio físico incide en la construcción del espacio matemático. Chevallard (1997) llama *topogénesis* al lugar que ocupan los participantes en la resolución de un problema, fundamentalmente para diferenciar qué tanto hace el maestro y qué tanto los alumnos. Creo que esta noción puede extenderse a la distribución de la tarea entre un alumno y otro, porque también entre ellos hay indefiniciones y negociaciones respecto a qué hace cada uno. En este caso, reproducir lo que Arturo vio con Danna lo lleva a modificar su lugar en la resolución: ahora no se va a quedar quieto esperando a Juan David guarde primero, ahora decide intervenir en el armado que antes asignó solo a su compañero, ahora abre la posibilidad de poner piezas de los dos tangram en una sola capa.

Así consigue formar la segunda capa, pero no la cuarta. Esto no lo hace preguntarse si el cuadrado que formó era realmente el que hizo Danna. La explicación parece ser otra: no pueden revolverse las piezas, no debieron fusionar los dos espacios. Los alumnos continúan resolviendo:

24. *Luis: [para hacer la tercera capa, toma un triángulo mediano, lo pone haciendo coincidir el lado mayor con el lado del molde, imagen 60. Inmediatamente lo mueve para que su ángulo recto quede en una esquina del molde, ahí lo deja y toma otra pieza, imagen 61] ¿cuántas tenías?*

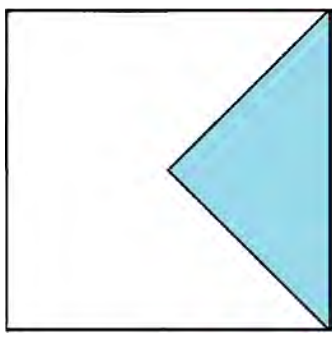


Imagen 60

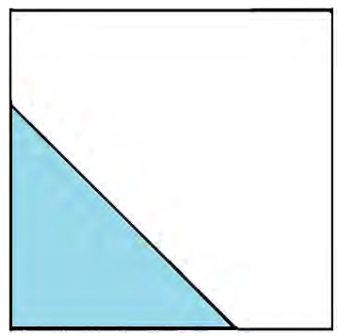


Imagen 61

25. *Arturo: ¡pus son dos!... y aquí ya hay tres… aquí ya están mis, mis do… son… aquí ya están las dos de él [señala a Juan David] y las dos mías. Alonso se acerca a observar [Imagen 62]*


Imagen 62

26. *Mientras Arturo habla, Luis quita el triángulo mediano para contar los triángulos chicos que están puestos en la segunda capa, y Juan David pone en esa misma esquina un cuadrado. Luis mueve el cuadrado hacia la otra esquina inferior. Juan David lo quita*

(…)

27. *Juan David: [saca de la segunda capa, que se ve en la imagen 63, dos triángulos chicos. Arturo los toma (…) Juan David saca también el romboide] (…) [a Arturo] a ver pásame [toma los dos triángulos chicos que Arturo tiene en la mano, forma con ellos un cuadrado y lo pone en la caja] a ver, ¿y el otro cuadrado? [Arturo le da un cuadrado y él lo pone en la caja. Así queda formada la segunda capa de una nueva manera, ver imagen 64]*

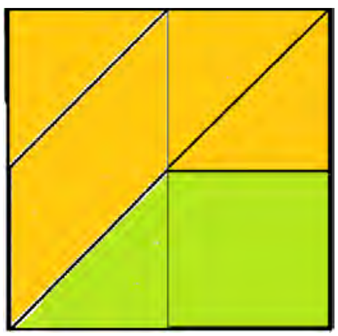


Imagen 63

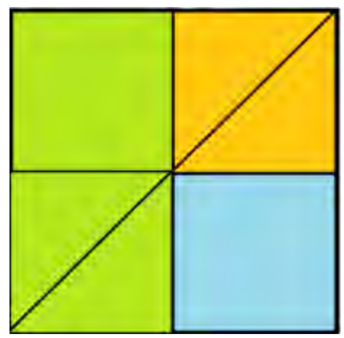


Imagen 64

28. *Angélica: ¡todos de a cuadrado!*
29. *Arturo: [toma las seis piezas que están en la mesa] yo ya tengo, son tres, cuatro, cinco, seis, ¡ah no! [a Juan David] te falta una aquí esta [le da un romboide. Alonso y Juan David cambian un poco el arreglo de la segunda capa] (…) una, dos, tres, cuatro, cinco, ¡yo tengo cinco! Me faltan DOS (…) a mí me faltan las chiquitas (…) son dos de él [señala a Juan David] chiquitas y dos mías chiquitas (…) faltan MIS piezas (…) él está utilizando mis dos chiquitas*

(…)

30. *Alonso y Luis se van. Juan David deshace toda la segunda capa. Trata de formarla de nuevo. Arturo toma su cuadrado y sus dos triángulos chicos, tiene en las manos sus siete piezas más el triángulo mediano de Juan David*
31. *Arturo: ¡a ver ven Danna! ¿lo puedes… hacer otra vez? [va por Danna, la toma del brazo, le da las piezas que tiene en la mano y la trae a la mesa] mira ven (…) … a ver (Juan David), ¡quita tus piezas!*

32. Juan David vacía toda la caja

Luis pone el triángulo mediano correctamente, solo por un instante. Inmediatamente lo mueve, embona el ángulo recto en una esquina (línea 24). Él no ha resuelto esta tarea antes, pues guardó su tangram en una caja distinta. Tampoco ha visto a sus compañeros elegir esa pieza en esa posición, lo hace por su propio pie. Si hubiera considerado la primera orientación como posibilidad -y si tuviera triángulos chicos-, muy probablemente habría logrado terminar, porque el triángulo mediano es clave. Pero no lo hace, pienso que otra vez el molde cuadrado y sus ángulos rectos están en primer plano. Así como, al parecer, reflejar el romboide en el gato supone cierta anticipación sobre la simetría, ahora Luis gira el triángulo tal vez porque pone de relieve su idea del cuadrado. Esto sugiere que reflejar, girar o trasladar una pieza son acciones que, si bien a veces pueden ser fortuitas, otras veces responden a anticipaciones sobre las características de las piezas y la plantilla. Luis descarta esa pieza por un nuevo motivo (línea 26), ya no por la combinación con otras piezas. Más bien, lo hace desistir un error anterior que no tiene nada que ver con esa pieza y que él no ve todavía, pero del que Arturo está muy seguro: en las capas anteriores ya se utilizaron todos los triángulos pequeños (línea 25).

En el fragmento anterior, las dos veces que Arturo forma un cuadrado con dos triángulos chicos (líneas 12 y 21), Juan David y Luis tienen la misma reacción: ponen una de las piezas cuadradas debajo (líneas 13 y 21). Y luego terminan la capa (líneas 14 y 22). Ahora, Juan David, al rehacer esa capa, divide el cuadrado del molde en cuatro cuadrados iguales (línea 27). Angélica enfatiza: "¡todos de a cuadrado!" (línea 28). Es decir, Arturo, Juan David, Luis y Angélica no destacan el ángulo recto compuesto de dos agudos, sino que descomponen el cuadrado del molde en cuadrados más pequeños. Nuevamente, da la impresión de que esa forma prevalece, con sus ángulos rectos: la característica que define al cuadrado tendría que orientar la elección de piezas.

La insistencia reiterada de Arturo en que faltan *sus* piezas (líneas 25 y 29) parece tener que ver también con la necesidad de detener a Luis, y después a Juan David. Luis llega precisamente cuando Arturo tiene una pregunta por contestar: ¿por qué los dos triángulos chicos juntos funcionan con Danna y con él no? Luis y Juan David no saben que Arturo está en eso, y Arturo sabe que ellos no saben. Es difícil inferir por qué no les comunica justo eso: por qué no les dice "miren, Danna ya terminó y yo vi que ella puso estas dos chiquitas aquí pero no sé por qué no sale". Tal vez no acepta una ayuda que no fue convocada por él, tal vez quiere resolver él solo volviendo con Danna para encontrar en el arreglo de ella qué anda mal con el suyo, tal vez se atribula porque todo pasa muy rápido y son muchas manos -a mí me costó especial trabajo en este fragmento entender quién pone qué piezas dónde y cuándo- así que quiere evitar que sus compañeros se vayan por otro camino. Él confía en Danna, porque ya terminó esa tarea. No tiene esa misma confianza en Luis, a pesar de que sus producciones son más reconocidas en el grupo, lo cual tiene sentido porque él guardó sus piezas en un molde muy distinto y no vio lo que pasó antes con los dos triangulitos. Los alumnos deciden a quién pedir ayuda y de quién recibirla, en función de lo que está pasando en el momento: saben quién les puede ayudar.

Creo que el énfasis de Arturo en que si ellos siguen explorando terminarán dejándolo a él a cargo de un problema irresoluble, es una manera de pedir tiempo y espacio para resolver la contradicción que acaba de encontrar. Candela (2001) explica que los alumnos usan recursos discursivos para convencer a otros que no ven lo mismo que ellos. La manera en que Arturo resalta *sus* piezas faltantes es un ejemplo de esto. Si antes no logró detenerlos -Luis y Juan David siguen moviendo piezas después de la línea 23-, ahora lo consigue: cuando más insiste en sus piezas (línea 29), Luis opta por irse (línea 30), y él va por Danna (línea 31). La imagen 62 muestra a Arturo junto a otros cuatro alumnos, pero ninguno de ellos es su principal interlocutor. Él más bien busca la ayuda de Danna, que está más lejos; trata de detener a Luis, y en cierta medida también a Juan David; y acepta a Angélica y Alonso observando. Danna accede a ayudar:

33. *Danna: [hace una capa con dos triángulos grandes. Para formar otra, pone primero un triángulo chico en una esquina inferior, después acomoda otras piezas hasta que termina, como muestra la imagen 65. Con eso ya queda guardado el tangram completo de Arturo. Él, Juan David y Angélica observan atentos, ver imagen 66. De las piezas que Arturo había dado a Danna, sobra el triángulo mediano de Juan David] ¿cuántas piezas son, las tuyas? [Arturo le da su triángulo a Juan David]*
34. *Arturo: son, pérate, son [a Juan David, quien señala los dos triángulos chicos puestos en la caja, y está a punto de vaciarla] ¡no ya, déjalo así! Esta está aquí [comienza a guardar el tangram de Juan David, arma una tercera capa con los dos triángulos grandes] Luego, ¿esta, Danna, acá? [para hacer la cuarta capa, pone un triángulo chico embonando el ángulo recto con una esquina]*

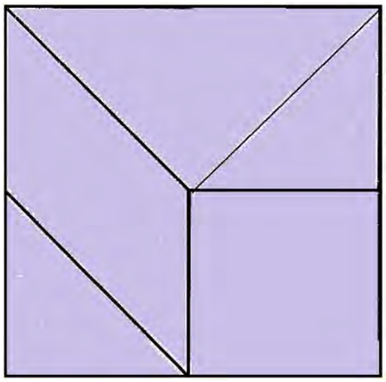


Imagen 65


Imagen 66

35. *Danna: ajá [asiente con la cabeza]*
36. *Juan David pone el romboide junto al triángulo que puso Arturo [Imagen 67]. Los tres siguen poniendo piezas, pero empiezan a notar que así no podrán formar la última capa [Imagen 68]*
37. *Arturo y Juan David discuten si falta una pieza. Danna saca todas las piezas de esa capa y la vuelve a hacer, igual que antes, salvo por una rotación de 180 grados [Imagen 69]*

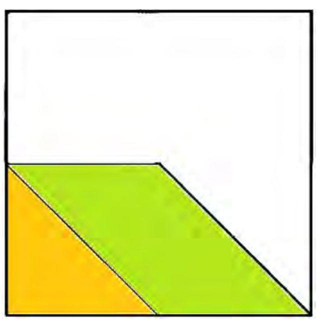


Imagen 67

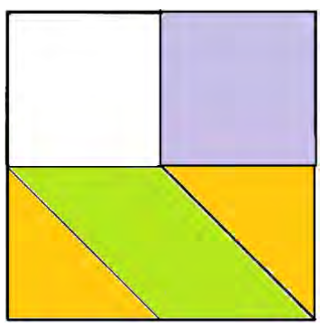


Imagen 68

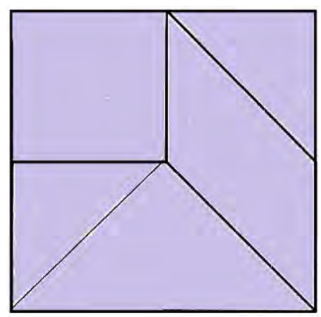


Imagen 69

38. *Arturo y Juan David se voltean a ver, sorprendidos. Arturo cierra la caja y se la lleva a la maestra*

La última vez que uno de los alumnos comienza una capa poniendo un ángulo recto de una pieza en una esquina del molde ocurre en la línea 34. Danna acaba de armar la segunda capa correctamente (línea 33), mientras los otros observaban. Danna comenzó con un triángulo chico orientado como siempre, y más adelante puso el mediano de otra manera, nueva para sus compañeros. Lo que Arturo reproduce ahora, es precisamente lo que ya conoce, el triángulo chico usado para construir una esquina. Danna confirma que la pieza está puesta correctamente (línea 35), y Juan David agrega otra que también podría funcionar, el romboide (línea 36). Así como van, la única manera de llegar a buen término es poner junto al romboide el triángulo mediano como antes lo hizo Danna. Esto no ocurre porque en ese lugar colocan un triángulo pequeño, formando así entre las tres piezas un rectángulo. Nuevamente, parece que prima una forma similar al cuadrado, que también tiene cuatro ángulos rectos.

Danna construye dos capas con el tangram completo de Arturo. Una duda respecto al triángulo mediano de Juan David que se había colado (línea 33) casi provoca que él vuelva a comenzar (línea 34). Además, la dificultad para guardar el segundo tangram los lleva a ambos a preguntarse si nuevamente están frente al mismo tope que encontraron antes, si solo dieron un rodeo para llegar al mismo punto: ¿otra vez faltan piezas? (línea 37). Danna resuelve guardando también el segundo tangram (línea 37). Es decir, para sostener la resolución del problema de uno, es importante terminar los dos.

A lo largo del episodio, Arturo y Juan David se ocupan en embonar los ángulos rectos de las piezas y del molde, en dividir el molde cuadrado en cuatro cuadrados, y cuando eso encuentra un límite, en no desperdiciar triángulos chicos[37], en distinguir si se pueden mezclar las piezas de ambos o no. Ninguno habla de definir cómo orientar el triángulo mediano, la única pieza cuyo ángulo recto no puede ir en una esquina. Ellos casi no reparan en esa pieza. Cada vez que hacen algo, ven lo que pasa y reaccionan: cambian algunas piezas por otras, modifican el lugar o la orientación de alguna pieza, juntan sus piezas, las separan, observan a otro equipo, piden ayuda, vuelven a empezar. Pero siempre parecen priorizar los ángulos rectos, cada uno construido con el ángulo recto de una pieza. Arturo y Juan David leen y reaccionan a las retroacciones del medio, pero este no habla por sí solo, la retroacción es una interpretación (Sensevy, 2011). Podría pensarse que esta actividad contribuye a que los alumnos reconfiguren su idea del cuadrado y del ángulo: si sus anticipaciones los llevan siempre a un punto en el que no hay manera de acomodar algunas piezas, hay que modificar esas anticipaciones. Es decir, encontrar una y otra vez la misma traba podría hacerlos preguntarse si todos los ángulos rectos van en las esquinas y si todas las esquinas se construyen con ángulos rectos. Como he mostrado, no es tan fácil. En este punto quiero retomar una

[37] Es decir, también se vuelve relevante el tamaño de las piezas en este episodio. Esta vez, las piezas cruciales no son las grandes que solo caben en un lugar y con una orientación muy específicos, como en el ejemplo de Axel y Jorge. Ahora las piezas valiosas son las pequeñas, porque en muchos arreglos quedan espacios donde solo caben ellas.

interpretación que hace Sensevy (2011) para una situación de proporcionalidad. Hay ciertamente un conflicto entre lo que Arturo y Juan David anticipan y lo que resulta, pero eso no basta. Amalgamar los ángulos rectos de las piezas con los del molde cuadrado tiene el efecto de no poder terminar la configuración, pero no van a cuestionar esa amalgama solo por no llegar a la meta. Ellos no son conscientes de que asocian ángulos rectos de piezas y molde, esa idea no tiene el carácter de una opción que se elige, no saben que hay otras posibilidades, es una idea naturalizada, invisible, las piezas y las plantillas son simplemente así. Por eso, partir de un ángulo agudo en una esquina o uno recto en el interior son impensables, y por eso, la intervención de Danna se vuelve imprescindible. O bien, en términos de Ericskon (1982), a veces las rupturas generadas en la estructura de la tarea académica se recomponen a través de la estructura de participación social.

Salin (2004) diseña una ingeniería didáctica pensada específicamente para la noción de ángulo. Explica que es muy compleja, en parte porque las situaciones no escolares que exigen diferenciar formas o hacer desplazamientos pueden resolverse por ensayo y error, sin reparar en los ángulos. Estos son indispensables solamente en situaciones muy específicas, ajenas a la mayoría de los ciudadanos, como usar una brújula, hacer el reglaje de una máquina, determinar el rumbo de navegación o localizar astros. Se trata entonces de un conocimiento muy especializado. Su aprendizaje en la escuela requiere de situaciones cuidadosamente pensadas. La autora plantea que el rellenado de plantillas con el tangram tampoco obliga a poner el ángulo de relieve, este se puede sortear considerando las longitudes de los lados, por eso diseña otras situaciones de configuraciones de piezas donde el tamaño de los lados no es relevante porque no hay un contorno delimitado, sino que hacen teselaciones. Yo encontré en mis datos maneras muy distintas de vincularse con el ángulo. En efecto, hay alumnos que resuelven como si no repararan en el ángulo, de hecho, este no siempre es problemático. Otros los ponen en juego de manera implícita, como Arturo y Juan David, sin percibir que hay algo de los ángulos que no los deja resolver. Otros, como Danna, orientan las piezas de manera más flexible respecto a los ángulos. En el capítulo que sigue muestro otro ejemplo de una alumna que va fijándose cada vez más en los ángulos, primero solo los agudos, luego uno recto, después uno obtuso. En todos los casos, el ángulo aparece de manera implícita y muy particular, asida a una pieza y una plantilla específicas.

2.3.5 Las relaciones entre piezas, una tarea que no ha sido pedida

En una clase me siento junto a Miranda -una alumna que presenta rezago- y Erick. Ellos son muy juguetones al resolver las tareas. Lo hacen mientras bromean, se quitan las piezas, agregan nuevas tareas, juegan carreras para ver quién arma una figura más rápido, alargan el tiempo de una tarea, y platican de distintos temas. Incluso en algún momento Miranda me dice “yo solo estoy cotorreando”. De pronto, en medio de una plática sobre huracanes que deriva en el juego “El huracán” del parque de diversiones “Six Flags” y en los juegos de ese parque, Miranda me pregunta “Miss, ¿quiere que forme un cuadrado?”. Cuando le contesto que sí, hace un cuadrado con los dos triángulos chicos, luego otro con los dos triángulos grandes, y también un “sobre”, es decir, un rectángulo con los dos triángulos chicos y el triángulo mediano (Imágenes 70, 71 y 72).

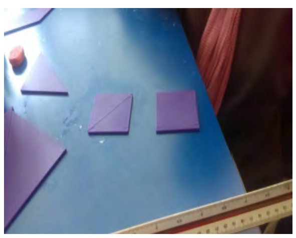


Imagen 70

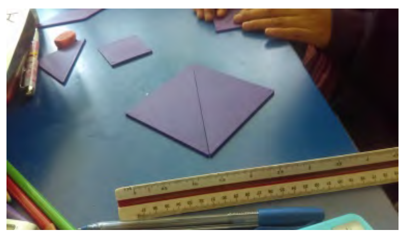


Imagen 71

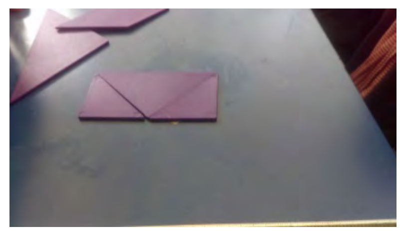


Imagen 72

Después sigue jugando con las piezas, arma las figuras que quiere, explora qué resulta, incluso durante la puesta en común. Estas combinaciones más sencillas resultan fundamentales para elegir piezas que se pueden intercambiar por otras al rellenar las plantillas, y también para resolver otras tareas (Neyret, 1977). Por ejemplo, al comparar la superficie de las plantillas, algunos se preguntan cuál es más grande si en una sobra el cuadrado y en otra el romboide. Saber que los dos son equivalentes porque cada uno se forma con dos triángulos pequeños, ayuda a responder.

Miranda encuentra así una tarea más fácil que la planteada por la maestra, una exploración fundamental de las relaciones entre las piezas. Y lo hace precisamente porque la devolución con ella se ha logrado a medias, es decir, porque al jugar, reír y hablar de cualquier cosa no se ciñe estrictamente a la tarea que se le ha pedido resolver. Esto tiene también una desventaja, pues Miranda no se interesa por lo que se discute en la puesta en común: se queda solamente con lo que ella logra producir con Erick, y eso resulta insuficiente para resolver después otras tareas.

Otro asunto que no es evidente, y que los alumnos descubren sobre la marcha, es que hay piezas que son iguales. Nahomi -otra alumna que presenta rezago-, al intentar armar el pato sobre la hoja blanca, pone la plantilla debajo de esa hoja, para poder seguir regulando a partir del contorno. Acomoda un triángulo grande en la esquina, pero lo descarta porque rebasa el contorno: *"*no pues está más grande*"* (Imagen 73). Toma el otro triángulo grande, lo superpone al primero y se queja: "pero es que los dos están del mismo tamaño" (Imágenes 74 y 75).


Imagen 73


Imagen 74

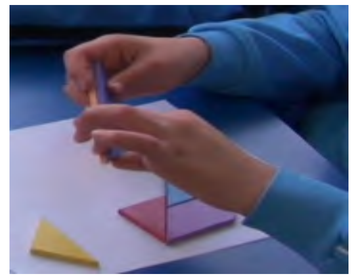


Imagen 75

Nahomi consideró que, si el triángulo naranja no cabía, podría intentar con el triángulo morado, pero al superponerlos encuentra que son iguales, así que tampoco cabe el segundo. Es decir, las dificultades de formar una configuración hacen emerger una característica de las piezas que no es obvia para los alumnos: hay dos parejas de triángulos iguales. Y ser iguales en esta actividad significa que pasa lo mismo al ponerlos en el mismo lugar de la plantilla. Es probable que el distinto color de las piezas lleve a suponer que estas son diferentes. No obstante, Jorge, en un apartado anterior, tiene un tangram con todas las piezas del mismo color y le ocurre algo parecido a lo que le pasa a Nahomi: después de notar que un triángulo grande no cabe en una región de su plantilla, prueba el otro en el mismo lugar y posición.

2.3.6 La conjugación de piezas, una regulación de la consigna

Frente a la tarea de formar la configuración del compañero sobre una hoja blanca, Irving -un alumno con rezago- hace un "pato robot" (Imágenes 77 y 78). Los bordes de su arreglo no coinciden para nada con los de la plantilla (Imagen 76), es decir, no reproduce exactamente la forma y tamaño del pato, más bien conserva lo que Marchand (2020) llama "forma global": su pato robot es similar al pato en tanto que en ambas hay un pico, un cuello alargado, una región inferior más ancha y más grande que la superior.

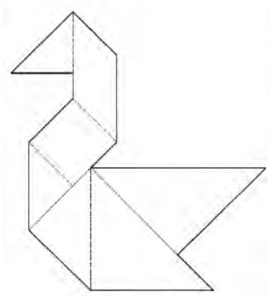


Imagen 76

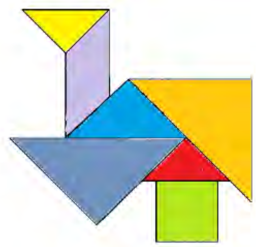


Imagen 77

Imagen 78

No parece afectarle que Nahomi lo cuestione: “eso es un pato ¿en serio?”. Él explica que Daniela “hizo primero pero no me enseñó su figura y entonces estoy haciendo a lo loco el pato”. Es decir, como la tarea no es fácil y no puede resolverla mirando la configuración de su compañera, él decide modificarla al mantener cierta similitud considerando la forma global, pero sin ceñirse estrictamente a la forma exacta. Así tiene más libertad para colocar las piezas. De hecho, después de esta primera exploración, él arma bastante rápido el pato sobre la plantilla y luego traslada correctamente las piezas a la hoja blanca. El ejemplo de Irving muestra cómo a veces para los alumnos es útil combinar las piezas siguiendo cierta intuición y ver qué pasa, sin preocuparse mucho por la forma precisa. También muestra el papel de la experiencia: al contrario de la tendencia visible en libros de texto a resolver un problema nuevo cada vez, los alumnos necesitan resolver varias veces problemas similares. Hacer la primera configuración le permite después hacer la otra que de entrada consideró que no podría hacer.

Que Irving sepa distinguir entre su pato robot y el de la plantilla habla de algo que sabe. Saiz (2003) explica que cuando los niños tienen que reproducir un arreglo de objetos -una granja hecha con animales, casas, árboles de plástico en tercera dimensión-, frecuentemente hacen una configuración cuya disposición global es similar a la del modelo, y admiten sin reservas que ambas son iguales. Al analizar clases en talleres con maestros yo he visto algo similar con el tangram: niños a los que es muy difícil convencer de que hay diferencias entre arreglos como el de la plantilla del pato y el pato robot. Irving, en cambio, sabe que se trata de un primer acercamiento. La aproximación también puede ser útil en el estudio del espacio y la geometría, no solo en el ámbito de los datos, medidas y cálculos numéricos.

Pero es algo por negociar: Nahomi no se ve muy convencida de que esa aproximación se valga (“eso es un pato ¿en serio?”); Irving, en cambio, se toma esa licencia. Cuando explica que lo hace porque no se le permitió observar -ya no digamos copiar- cómo resolvió su compañera, refleja un tono de seguridad, pero no dejo de tener la sensación de que también necesita justificarse, como si tuviera que rendir cuentas por no hacer de entrada la tarea como se la han pedido (Irving se apoya, por cierto, en otro asunto que tampoco es claro para los alumnos: ¿se vale copiar o no? ¿se vale trabajar con otro cuando cada uno tiene su material disponible? ¿se vale preguntar a quien ya ha producido una respuesta?). Hay un juego de expectativas respecto a si se puede pasar primero por una aproximación antes de hacer la configuración precisa, que tiene que ver con el funcionamiento del conocimiento en clase, en el que no parece estar implicada la maestra. Yo apostaría que para Nahomi se juega a partir de su historia siendo alumna de matemáticas, donde la estimación tiene una presencia muy diluida. Es en este sentido que en el primer capítulo hablo de pensar el contrato didáctico no solo como un juego de expectativas entre docente y alumnos, sino que también se da entre los propios alumnos. Aceptando la tensión entre la estimación espacio-geométrica considerada como legítima o sancionada como una norma del contrato, este fragmento es un ejemplo de que dichas normas no siempre son compartidas por todos los alumnos, es decir, no hay un solo contrato didáctico funcionando (Mendoza, 2018).

Bárbara, frente a la misma tarea, trata de reproducir la forma exacta del gato en la hoja blanca donde tiene que trazar todo el arreglo, pieza por pieza, para después pegarla en el cuaderno. Ella usa la plantilla que tiene a un lado como referencia. Inicia poniendo directamente algunas piezas sobre la hoja blanca, pero duda de que la cuarta pieza esté orientada correctamente (Imagen 79). Con su dedo, traza sobre la plantilla el contorno que tendría el triángulo grande en la posición en que lo ha puesto en la hoja blanca, y decide sustituir esa pieza por otras que tampoco la convencen. Entonces da un giro al procedimiento, acomoda los dos triángulos grandes sobre la plantilla (Imagen 80) y, una vez que logra la posición correcta de ambos, los traslada juntos a la hoja blanca.

Al hacerlo, pierde la conjugación de las dos piezas y vuelve a ponerlas sobre la plantilla. Esta vez logra trasladarlas correctamente a la hoja blanca (Imagen 81). Cuando Daniela -una alumna con dificultades- mira lo que hace Bárbara, piensa que ese recurso de regresar con las piezas a la plantilla no está permitido: "¡Oye! No, eso no se hace [Hace con la mano un gesto de regaño, apuntando a Bárbara con el dedo índice]… [A la observadora] ¡Ay ya hizo trampa!". Bárbara le contesta "no es cierto", no parece afectarle la sanción en este momento. Intenta acomodar una de las dos piezas que faltan, el triángulo mediano, y al no lograrlo[38], quita los dos triángulos grandes. Después de girarlos y reflejarlos varias veces, logra conjugarlos con el triángulo mediano de una manera que no embonaría en la plantilla, pero es muy parecida (Imagen 82).

Imagen 79

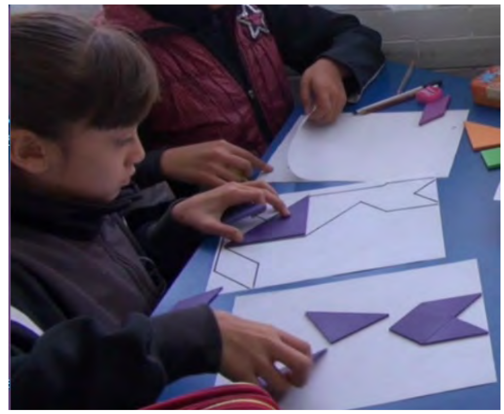


Imagen 80

Imagen 81

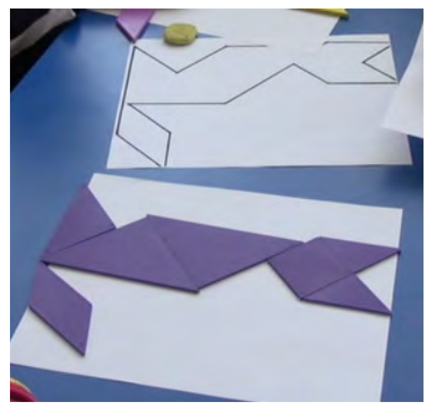


Imagen 82

Bárbara regresa el triángulo mediano a la plantilla para confirmar su posición, como antes con los triángulos grandes, pero lo hace muy rápidamente y no lo superpone en la plantilla, sino que lo acerca a ella, probablemente por la sanción anterior de Daniela. Una vez que tiene todas las piezas colocadas en la hoja blanca, confirma con su dedo que al recorrer el contorno de la configuración en la hoja blanca describa el trayecto del contorno de la plantilla. Es decir, se apoya en lo que Perrin-Glorian y Godin (2018) llaman percepción táctil. Marchand (2020) resalta su valor -y más en general, del movimiento corporal- en el desarrollo de conocimientos espaciales, en particular como recurso

[38] Lo que se necesita es girar el triángulo, pero Bárbara no lo hace. Este es otro ejemplo de que las transformaciones necesarias a una pieza para modificar su posición suponen un aprendizaje para los alumnos, como expliqué anteriormente.

cuando la vista no es suficiente. Considera incluso una variable didáctica pedir que los alumnos manipulen objetos a ciegas.

Con eso Bárbara se queda tranquila. En efecto, es difícil notar que lo que no ha reproducido es la longitud de cada lado del contorno de la plantilla. Duval y Godin (2005) han mostrado que los alumnos tienden a interpretar las figuras como bidimensionales, como manchas en papel, como un espacio delimitado por curvas cerradas. Llevar el análisis a los componentes lineales de las figuras toma tiempo y numerosas experiencias. Ese estudio me lleva a encontrar sentido a que Bárbara no considere la longitud de los lados del contorno: pretender que lo haga es minimizar el trabajo que implica dejar de fijarse en figuras globales para mirar las líneas, priorizar la unidimensionalidad como definitoria de la figura. Daniela, que nunca pone las piezas sobre la plantilla, hace exactamente la misma configuración que Bárbara.

En algún momento Daniela también reclama a Irving por formar el pato directamente sobre la plantilla: "¡Ah no! pero lo tiene que hacer en su hoja (…) blanca". Dado que la maestra no ha precisado en la consigna si la plantilla se puede usar o no para hacer el trazo en la hoja blanca, los alumnos asumen distintas cosas respecto a eso. Para Daniela, la plantilla se puede usar estrictamente como referencia visual, sin poner piezas encima, con lo cual se impone una mayor dificultad en el problema. En cambio, para Irving el arreglo se puede hacer primero sobre la plantilla para después trasladarlo a la hoja. Bárbara al principio hace lo mismo que Irving, pero la sanción de Daniela parece hacerla dudar. Así como los niños regulan el orden social de la clase, es decir, lo que en la Teoría de las Situaciones Didácticas se llama el "contrato pedagógico" -al reclamar a una compañera haber faltado el día anterior, al hacer que se siente un alumno que distrae a los demás de una discusión grupal-, encargándose de algo que podría parecer una tarea del docente (Naranjo, 2009), también regulan lo que tiene que ver directamente con el contenido, en este caso la consigna, y en el ejemplo de Irving, una norma del contrato: Daniela trata de vigilar que los demás no pongan piezas sobre la plantilla, Nahomi pone en duda que sea válido estimar una configuración.

La resolución de Bárbara muestra que el medio, es decir, aquello con lo que interactúan los alumnos al resolver (Fregona y Orús Báguena, 2011), cambia profundamente cuando las piezas se ponen sobre la plantilla y cuando no, aun si esta puede tenerse al lado como apoyo: cuando se colocan piezas sobre la hoja blanca hay incertidumbre respecto a si se ha delimitado un contorno que coincide con el de la plantilla, hay que decidir si basta la vista para confirmarlo o se requiere percepción táctil, y si con esta es suficiente o hay que ir a sobreponer a la plantilla y trasladar; al trasladar hay que cuidar de no perder la conjugación de las piezas; si esto se logra, al poner nuevas piezas junto a las que ya se tienen, puede ser que el borde no parezca coincidir con el de la plantilla y eso lleve nuevamente a cuestionar el arreglo que ya se tenía; finalmente, hay que negociar con los compañeros hasta dónde se puede usar la plantilla como apoyo.

Otra cosa que los alumnos encuentran es que hay distintas configuraciones con el mismo contorno. Leonardo -diagnosticado con TDAH- y Arturo, se sorprenden porque hay muchas maneras de cubrir una de las plantillas:

Arturo: es que hay muchas formas

Leonardo: Miss es que hay muchas, muchas maneras, puedo hacer que me sobre este [muestra el cuadrado] o que me sobre este [muestra el romboide] o que me sobre ESTE [muestra el triángulo mediano]

Los alumnos están sorprendidos porque una misma plantilla se puede rellenar de distintas formas y entonces la pieza que sobra puede variar. Después siguen explorando y encuentran que hay incluso distintas maneras de armar la figura haciendo que sobre la misma pieza.

2.4 Conclusiones del capítulo

Hacer y reproducir configuraciones de piezas permite funcionalizar algunas características de las piezas y las plantillas, volverlas un recurso para tomar decisiones en una situación (Brousseau, 2007; Block, 2018). El problema lleva a considerar, de manera implícita, las relaciones entre las piezas y entonces las características de cada una se vuelven relevantes por oposición a las demás y al contorno de las plantillas: que un triángulo sea mucho más grande que las demás piezas la vuelve muy difícil de colocar al final, que un triángulo sea el más pequeño lo vuelve la pieza más fácil de poner, que el romboide no sea simétrico hace que a veces sea indispensable reflejarlo, que los lados de un triángulo tengan distinta medida importa cuando en cierta posición se ha dejado sin cubrir una parte del contorno de la plantilla, los vértices del contorno dan pistas -a veces engañosas- sobre el ángulo de las piezas que hay que elegir en ese lugar, la forma global de las piezas es relevante cuando hay que escoger la que cabe en cierta parte del contorno, que dos triángulos son iguales se vuelve visible cuando ocurre lo mismo al probar tanto uno como otro en la configuración o cuando se quiere rellenar una región de la plantilla igual a otra ya cubierta. Estos ejemplos muestran la distancia que Fregona y Orús Báguena (2011) ponen de relieve entre las *figuras materiales,* las piezas que los niños tienen enfrente; las *figuras representación mental* que abarca lo que los alumnos miran en esas piezas; y las *figuras ideales,* que incluyen aquello que al docente le interesa que vean.

Las propiedades que acabo de mencionar son relacionales, más que intrínsecas a una figura. Como explica Marchand (2020), la manera de articular una pieza con otra, o una parte de una pieza con otra, incide en la manera de analizarla. El valor de trabajar con distintas figuras simultáneamente está dado porque no puede comprenderse una sin las otras (Duval y Godin, 2005; Perrin-Glorian y Godin, 2018). Además, esas características se aprenden juntas. Las he separado para poder analizarlas y ponerlas de relieve, pero en los episodios aparecen imbricadas. El ejemplo más claro es el de Arturo y Juan David. Ahí el asunto problemático tiene que ver con los ángulos, pero para ellos se manifiesta en la falta de triángulos pequeños. En el siguiente capítulo me centro en la actividad de una alumna en particular, mostrando con más claridad que estas propiedades aparecen juntas. Por eso las características de una figura tampoco pueden comprenderse una por una.

Los alumnos no reparan en el tamaño, los ángulos o la simetría de las piezas solo por verlas, estáticas, en una hoja de papel (Duval y Godin, 2005; Perrin-Glorian y Godin, 2018). Es al elegir una entre varias, al hacer giros, traslados y reflexiones, al cambiar unas piezas por otras, para ver qué pasa al comparar con el contorno de una plantilla, que empiezan a importar esas propiedades. Ese proceso exige una sucesión de acciones, una temporalidad que no es posible con las figuras fijas en una hoja.

El trabajo con el tangram tiene también un límite, porque se restringe al microespacio, el que cabe en una hoja de papel, el que más presencia tiene en la escuela. Salin (2004) destaca la importancia de estudiar también las figuras en el mesoespacio doméstico. Lo que se aprende en ambos es distinto: un alumno que sabe trazar un rectángulo en una hoja no necesariamente ubica el lugar que ocuparán las esquinas de una alfombra rectangular al trasladarse. Una diferencia entre las dos escalas es que en el microespacio es mucho más difícil distinguir entre el objeto físico y su representación: en el meso espacio es claro que un dibujo de la alfombra no es la alfombra. Las dificultades del microespacio originadas porque los alumnos tienden a amalgamar sus acciones con el modelo son tan grandes que la autora ha terminado por elegir el mesoespacio. Los conocimientos espaciales que los alumnos requieren son muy amplios y construirlos lleva tiempo, pero su complejidad tiende a ser subestimada en la escuela. Se considera que los alumnos los adquieren a partir de su experiencia cotidiana con objetos, o que pueden aprenderlos rápidamente a través del contacto visual y de explicaciones (Salin, 2004).

Me interesa destacar, por un lado, que estas actividades con el tangram permiten, más que otras, el involucramiento de los alumnos. En los ejemplos que he mostrado aparecen resoluciones de siete niños que presentan “rezago” educativo o “dificultades”: Irving, Miranda, Nahomi, Ian, Axel, Jorge y Leonardo. Todos ellos tienden a participar menos en otras clases que observé, a veces actuando a ciegas (*wildguesswork*, McDermott, 2001). En las dos clases que analizo aquí, se trata de problemas que pueden abordar y en las que el material ofrece la posibilidad de poner a prueba sus anticipaciones. Por eso la participación de estos alumnos en estas clases es distinta, y las interacciones entre ellos también, como en el caso de Axel y Jorge, quienes se reconocen mutuamente como interlocutores.

Por otro lado, no quiero pasar por alto el hecho de que las características de las piezas que se vuelven relevantes para hacer las configuraciones quedan, en esta experiencia, a un nivel muy implícito y local, tanto que da la impresión de que no pasan de esa única vez: si hicieran otra plantilla, pienso que Axel y Jorge no partirían de buscar un lugar para los triángulos grandes. A mi manera de ver, esto se explica desde varias puntas. Los alumnos necesitan trabajar más con el tangram, encontrar más de una vez las mismas dificultades los puede ayudar a reparar en ellas y sortearlas, a destacar más las características de las piezas. A esto hay que agregar que gran parte de las resoluciones no pasa a la puesta en común. Los intercambios grupales suelen ser un momento en el que cada equipo explica ordenadamente lo que hizo, uno por uno, y el diálogo es sobre todo con la maestra. Se trata de una revisión, más que de una discusión colectiva sobre los distintos procedimientos. Esa organización hace difícil que Engie pueda hacer ver a los demás que no conseguía acomodar el romboide porque era indispensable voltearlo, que no basta con girarlo. Además, en esta actividad específica, lo que sucede con las piezas es muy volátil, hay mucho ensayo y error, es frecuente volver a empezar de cero, no queda registro de los tropiezos y de cómo se logran sortear. No es fácil reparar en cuáles de todos los movimientos de piezas fueron clave para resolver. Si Arturo contara su manera de resolver a otros, creo que se centraría en decir que siempre les faltaban triángulos chicos. Y la maestra, al no haber visto el proceso, no podría ayudarle a notar que les costó trabajo formar el cuadrado porque hay esquinas que no se forman con un ángulo recto de una pieza. Finalmente, en la puesta en común se habla muy brevemente de los procedimientos de las configuraciones porque la maestra -y la observadora y yo también- tiene los ojos puestos en la comparación de superficies. Nuestras preguntas van más sobre la superficie, asunto que interesa muy poco a los alumnos: ellos dedican la mayor parte del tiempo a tapizar las plantillas, y apenas unos minutos a definir cuál es más grande. Así como para ellos es difícil reconocer qué características de las piezas y los arreglos son relevantes, para la maestra también es difícil ver que los conocimientos importantes de destacar en este momento, a partir de estas actividades, son otros muy distintos de la superficie, otros que ella no había anticipado. La maestra se fija en la superficie y los alumnos no, los alumnos se centran en las configuraciones y la maestra no. De por sí, la noción de superficie ya implica un "regreso" -en términos curriculares- importante respecto al contenido central en este grado, las fórmulas. Volverse hacia las propiedades de las piezas implicaría ir todavía más atrás. En resumen, la escasa experiencia con las configuraciones y también la falta de explicitación y socialización de los procedimientos hace que los alumnos se queden solo con lo que pueden descubrir por cuenta propia, que las características de las piezas no sean destacadas, no se reutilicen después. La manera de existir de estos conocimientos es opuesta a la de los típicos saberes escolares que se formulan, se escriben en el cuaderno, se aprenden de memoria, pero se usan poco. Tampoco se pueden evaluar fuera de la actividad de las configuraciones, son menos atrapables en términos curriculares.

Así las cosas, si yo quisiera probar que esas propiedades de las piezas que comienzan a cobrar relevancia pueden derivar en conocimientos de los alumnos, con los que ellos pueden contar, es decir, que pueden volverse parte de su "medio matemático" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998), tendría que diseñar una ingeniería contemplando qué tipo de configuraciones conviene pedir y en qué momento -dar plantillas con todas las piezas indicadas, con algunas, con ninguna, hacer configuraciones con algunas piezas, con todas, cuidar la forma de la plantilla para graduar el grado de dificultad o para hacer que cierta pieza solo pueda ponerse en cierto lugar de cierta manera, pedir configuraciones aproximadas a otra o exactamente iguales[39], etcétera-; qué, cómo y cuándo conviene explicitar para el grupo en las puestas en común -por ejemplo, anticipo que no tendría mucho sentido preguntar si descubrieron algo sobre los ángulos cuando

[39] Para otras variables didácticas en las configuraciones con el tangram, ver Marchand (2020).

la palabra misma tiene aún poco significado, pero sí lo tendría preguntar qué piezas les costó más trabajo acomodar-; cómo complementar el trabajo con el tangram con otras actividades que también involucran esas características de las figuras; y luego probar todo eso en el aula. No puedo hablar entonces aquí de conocimientos construidos, sino de ciertas propiedades de las figuras que comienzan a volverse útiles como herramienta para resolver, y que me parece que podrían, en otras condiciones, emerger como conocimientos.

Al comenzar a escribir este capítulo, me propuse centrarme en describir las características de las piezas implicadas en las configuraciones, no tanto las interacciones sociales. Estas serían el centro del capítulo siguiente. En efecto, lo que más pongo de relieve son esas características, esos potenciales conocimientos matemáticos. Pero encontré que no es posible describir cómo se ponen en juego esas propiedades considerando solamente la interacción de los alumnos con la tarea, sin dar cuenta de las interacciones entre pares. El caso más obvio es el de Axel y Jorge. La idea que destaco en ese apartado -la relevancia de los triángulos grandes-, surge cuando Jorge interpreta el resultado de una acción suya sobre las piezas y la plantilla; Axel recupera, prioriza y reinterpreta eso que leyó Jorge; ambos constatan que esa nueva idea funciona en la plantilla; Jorge la reconoce explícitamente y la expande; y ese ciclo continúa hasta que terminan. Cuando un alumno dice una cosa o hace algo con las piezas, está reaccionando tanto a lo que pasa con el problema como a lo dicho o hecho anteriormente por el otro. Ante un problema que regresa información a los alumnos, ellos socializan y discuten esa información. Una fértil interacción con el problema desencadena interacciones sociales a propósito de la resolución y estas discusiones a su vez modifican las acciones de los alumnos sobre la tarea. Si un problema se resuelve de manera individual o si hace colectivamente, no se resuelve el mismo problema. Dicho de otra manera, en el medio con el que interactúan los alumnos, está la tarea y también están los pares.

Las interacciones con el problema y con los pares también se engarzan en los otros episodios, ciertamente de forma más sutil. Ian pone el triángulo mediano en un espacio pentagonal en blanco cuando interviene en el problema de su compañero Edgar, a Engie podría serle útil mirar cómo ha resuelto Ian para conseguir acomodar el romboide, Arturo interpreta la complicación de los ángulos rectos como un error al haber mezclado piezas con Juan David, Miranda explora relaciones entre las piezas cuando se toma la tarea como un juego libre y se despreocupa de la consigna, Irving decide acercarse a una configuración por aproximación porque no se le permitió copiar la de Daniela.

CAPÍTULO 3

LEER LA TAREA, LEER A LOS OTROS: LAS CONFIGURACIONES DE PIEZAS PARA UNA ALUMNA EN SITUACIÓN DE FRACASO ESCOLAR

El capítulo anterior está organizado a partir de los conocimientos geométrico-espaciales que muy implícitamente están involucrados en las actividades del tangram. Los explico uno por uno, aparecen distintos alumnos en cada apartado, y las interacciones sociales están presentes en la medida en que son centrales en las producciones que analizo.

En cambio, en este capítulo voy a seguir lo que hace una alumna en esas mismas actividades, y mostrar cómo se engarzan su interacción con el problema y con sus pares en sus producciones. Se trata de una alumna percibida en el grupo como alguien con “rezago educativo”, es decir, es de los que siempre van “detrás” en el curso de acontecimientos en la clase. La elegí a ella, Angélica, porque, en una primera revisión de los videos de clase, me pareció que un fragmento de aproximadamente diez minutos en el que participa condensaba mucho de lo que yo quería mirar en la tesis. Había múltiples y rápidas interacciones entre alumnos cuya actividad matemática es valorada de distintas maneras en el grupo; momentos en los que ella trabajaba sola y otros en los que recibía ayuda, y esas ayudas eran diversas; las tareas eran abordables para ella, lo cual le daba más agencia que en otras clases, y al mismo tiempo esas tareas cambiaban sustancialmente. Para analizar todo esto, me he planteado las siguientes preguntas:

¿Qué queda a cargo de ella en las resoluciones de los problemas? ¿De qué manera la lectura que hace de un problema está mediada por las interacciones con sus pares? ¿Cómo influye el problema en las producciones que ella puede hacer y en las interacciones que sostiene con sus pares? ¿Cómo son recibidas sus contribuciones por sus pares? ¿Cuál es el medio con el que ella interactúa? En resumen, ¿Qué posibilidades de aprendizaje le ofrece la clase?

Voy a tratar de mostrar que, como plantea McDermott (2001), en las resoluciones de Angélica se percibe la preocupación por el ritmo de aprendizaje y cierta degradación de los que van atrás, pero también ella tiene agencia, pone en juego diversas características de las piezas y las plantillas, recibe ayudas y regula lo que hacen sus compañeros, en suma, actúa para mantenerse en la resolución de los problemas. En esa actividad, como enfatiza Brousseau (2007), las características de la tarea son centrales.

3.1 La actividad matemática de Angélica

Angélica es una alumna que falta a la escuela con frecuencia[40]. En ocasiones, la maestra le pide que en lugar de resolver las actividades que hacen todos, estudie lecciones de un libro de tercer grado. La maestra considera que ella tiene fuertes dificultades para las matemáticas, y las atribuye al bajo interés de su familia por la escolaridad de Angélica. Un año después de que yo hice mi trabajo de campo, su familia decidió darla de baja, un par de meses antes de concluir la primaria. A continuación, muestro cuatro fragmentos en los que ella participa.

3.1.1 Angélica y otros hacen el pato

Como explico en el capítulo anterior, en la tercera clase que observé, la maestra organiza a los alumnos en grupos de cuatro (dos parejas), y entrega a cada pareja dos plantillas, una con el contorno de un "gato" y otra de un "pato". Pide que cada alumno rellene su plantilla con las piezas de un tangram (Imagen 83) para "comprobar que (…) tengan la misma superficie". Resolver la actividad implica adentrarse en características como el tamaño de las piezas, los ángulos, los distintos lados, las relaciones entre las piezas, entre otras. Y para muchos alumnos, el problema es este, mucho más que la superficie[41].

Imagen 83

[40] Ella estuvo en siete clases de las dieciocho que observé.
[41] En el capítulo anterior explico que, además, la segunda tarea de intercambiar después la plantilla con la del compañero para hacer el arreglo sobre una hoja blanca, que la maestra plantea para dejar evidencia a los padres del trabajo realizado, orienta aún más la actividad hacia los conocimientos espacio-geométricos implicados en los arreglos de piezas, y produce un mayor desvanecimiento de la superficie.

En el equipo de Angélica está Arturo, sentado junto a ella, y también la pareja formada por Luis y Alonso, cuya producción matemática es altamente valorada por los alumnos y la maestra. Ellos dos suelen terminar los problemas rápida y correctamente, Luis participa activamente en las puestas en común y sus contribuciones suelen ser recuperadas. Voy a explicar cómo se logra la configuración de Angélica. Para ello divido el episodio en dos fragmentos. En el primero se ven las maneras en las que Angélica aborda el problema:

1. *Al principio cada uno de los cuatro se concentra en rellenar su propia plantilla. Luis termina el gato antes que los demás [Imagen 83]*
2. *Angélica rellena los tres ángulos agudos de su plantilla con los triángulos pequeños [rojo y amarillo] y el mediano [azul] [Imágenes 84 y 85]. Se fija en que no queden espacios en blanco entre las piezas que pone y el contorno de la plantilla*


Imagen 84

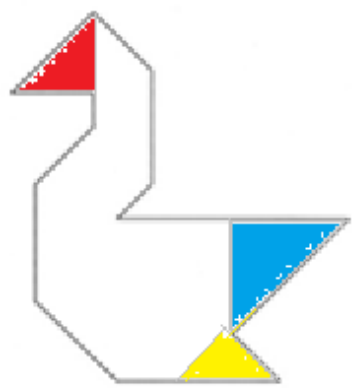


Imagen 85

3. *Angélica prueba poner el romboide junto al triángulo azul, pero se sale del contorno*
4. *Alonso termina de armar el pato, mientras Luis lo observa casi sin intervenir*
5. *Alonso: [en voz baja] ¡tan fácil eh! (…)*
6. *Angélica pone piezas en la región más grande del pato, pero quedan algunos huecos [Imágenes 86 y 87]*
7. *La maestra da al grupo la siguiente consigna, que consiste en intercambiar sus plantillas, y hacer esa nueva configuración con las piezas, pero sobre una hoja blanca, en la que deben marcar todas las piezas con lápiz*

Imagen 86

Imagen 87

8. *Alonso [mientras la maestra da la consigna anterior]: ¡maestra!... ¡maestra!... ¡yo ya lo hice!*
9. *Luis [a Alonso]: (…) Primero hay que comprobar si tienen la misma área (…)*
10. *Alonso: sí tienen… bueno…*
11. *Luis: porque… utilizamos las mismas figuras… y todas… ahorita que nos dejen la hoja hacemos el [inaudible]*
12. *Angélica rellena la parte inferior del pato con los dos triángulos grandes [Imagen 88]*
13. *Angélica sigue poniendo piezas, una por una, rellenando hacia arriba. Primero pone el lado mayor del triángulo rojo junto al naranja, pero lo descarta. Luego intenta poner el cuadrado [Imagen 88] pero no cabe. Después coloca el romboide, haciendo coincidir el vértice de un ángulo agudo con los de los triángulos naranja y azul. Y finalmente traslada el romboide y lo gira, de manera que su borde coincida con el de la plantilla [Imagen 89]. Ahí agrega el triángulo rojo. Cada vez que intenta con una pieza, controla que no haya huecos entre ella y las otras puestas anteriormente o los bordes de la plantilla*

Imagen 88

Imagen 89

14. *Arturo: ¿voy bien Luis?*

...

15. *Alonso: ¡Es tan claro como el agua! [Arturo y Angélica se molestan, Imágenes 90 y 91] ¡Es tan CLA-RO como el agua! ¡Está clarísimo!*


Imagen 90


Imagen 91

16. *Regina: ¡Miss! ¡Miss, ya (terminé)!*
17. *Alonso: ¿Apenas?*
18. *Angélica trata de acomodar el triángulo pequeño amarillo junto a la última pieza que puso, pero se sale del borde. Entonces lo lleva a la parte superior, lo rota y refleja varias veces, hasta que cubre el ángulo agudo de la plantilla, igual que antes [Imágenes 92 y 93]*


Imagen 92

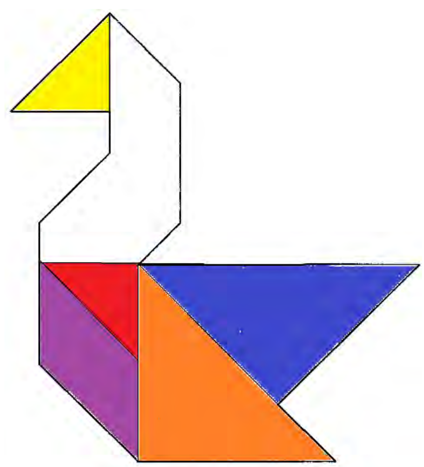


Imagen 93

19. *Angélica quita el triángulo rojo y busca dónde puede poner el mediano azul claro, pero no lo consigue*
20. *Maestra [Llega al equipo, les deja unas hojas blancas]: ¿cómo vas Angélica?*

21. *Angélica: ¡bien maestra!*

    (…)

22. *Maestra [A Luis y Alonso]: ¿y ya comprobaron? ¿usaron las mismas piezas?*
23. *Alonso y Luis: ¡Sí! (…) ¡ah, maestra! (…) yo fui el… el segundo (…) Y él [señala a Luis] fue el primero*

    (…)

24. *La maestra explica nuevamente a Luis y Alonso la segunda tarea, hacer la configuración del compañero sobre hoja blanca y marcar cada pieza*

    (…)

25. *Luis y Alonso se dedican a resolver esa nueva tarea*
26. *Arturo termina el gato. Ya con todas las piezas acomodadas, las mueve un poco para no dejar huecos entre las piezas y el borde de la plantilla*

    (…)

27. *Angélica [a Arturo]: ¿cómo te salió?... ¿CÓMO te salióoo?*

    (…)

Angélica comienza poniendo tres piezas en lugares dispersos de la plantilla. Las tres tienen ángulos agudos, con los cuales quedan cubiertos todos los ángulos agudos que hay en el pato (Imagen 85). Luego pone el romboide, pero se sale del contorno (línea 3). Entonces modifica algo de lo que había hecho: pone el romboide en el lugar del triángulo amarillo, y comienza a cubrir la parte más grande del pato con varias piezas (Imagen 87). También quita el triángulo rojo, es decir, las piezas ya no están en distintas regiones de la plantilla, sino concentradas en la zona más grande. Quizás elige piezas al azar buscando cubrir esa zona. Esto tampoco resulta porque quedan varios huecos donde no cabe ninguna pieza, y ella retira todo.

Comienza de nuevo, esta vez partiendo de las dos piezas más grandes del tangram, que pone en esa misma región inferior del pato (Imagen 88). Empezar por acomodar los dos triángulos grandes es un paso importante porque, al ocupar mucho más espacio que cualquier otra pieza -por lo menos el doble-, generalmente solo caben en un lugar muy específico. En esta plantilla, no caben en el cuello ni la cabeza del pato. Ella pudo haber hecho esto por una diversidad de motivos, como estos: le interesa probar en dos ángulos agudos de la plantilla las únicas dos piezas que no ha probado, o ha visto que así tiene Alonso los dos triángulos grandes en su pato, o lo hace al azar, o trata de usar las piezas más grandes en la región más grande de la plantilla, o busca otro modo de comenzar a rellenar por la región más baja y a la derecha para seguir hacia arriba y hacia la izquierda. De cualquier manera, poner esos dos triángulos en ese lugar es un acierto, son las únicas piezas que se mantienen fijas durante el resto de la resolución, las únicas cuyo lugar y posición nadie pone en duda.

Luego sigue pieza por pieza, tapizando hacia arriba, controlando que no haya huecos (línea 13). Para elegir la siguiente pieza después de los dos triángulos grandes, le quedan cinco, entre las cuales hay cuatro distintas. Intenta con tres de ellas, tal vez sin mucha premeditación, por ensayo y error organizado: toma una pieza, la pone junto a las que ya tiene, la descarta, agarra otra distinta. Primero el triángulo pequeño, que luego quita a pesar de que sí cabe, tal vez porque anticipa que si lo pone ahí va a quedar un hueco sin cubrir. Toma entonces el cuadrado y, como no cabe, lo deshecha. Es interesante que ella pruebe el cuadrado junto al triángulo naranja, en la parte inferior de la plantilla: si antes me daba la impresión de que ella tenía presentes los ángulos agudos (Imagen 85), ahora prueba una pieza que no los tiene, en un lugar que sí. Es decir, en todo caso, lo que pone de relieve va cambiando: cobra importancia un momento, luego se desdibuja. Finalmente toma el romboide, hace coincidir uno de sus ángulos agudos con los dos que están juntos de los triángulos grandes (¿vuelve a fijarse en los ángulos agudos?), luego lo mueve a un lugar en el que no deja huecos ni con las piezas anteriores ni con el borde. Una vez puesta la tercera pieza, agrega el triángulo rojo pequeño.

Así logra poner cuatro piezas, con las cuales quedan resueltas tres cosas: la parte más grande del pato está cubierta, dos de sus tres ángulos agudos también, y ni hay huecos ni piezas fuera del borde. En la quinta pieza el procedimiento de ir pieza por pieza hacia arriba encuentra un límite, no puede seguir porque la que elige se sale del contorno, así que se va a otra región de la plantilla (línea 18). Con ella ocupa el ángulo agudo que falta, lo cual no es inmediato: gira y refleja varias veces el triángulo. Hay dos posiciones en las que se puede hacer embonar el ángulo agudo de la pieza con el de la plantilla, y Angélica parece preferir una, la misma de antes (Imagen 85). Intuyo que aquí hay, otra vez, una conjugación de la casualidad con la puesta en juego de anticipaciones: creo que ella toma cualquier pieza, y ya que no le permite seguir ordenadamente -no la puede poner junto a las anteriores-, la usa fijándose en el ángulo agudo.

Después Angélica se da cuenta que algo no anda bien, al tratar de poner el triángulo azul y encontrar que no cabe en ningún lugar de la franja que queda por cubrir (línea 19). Terminar de resolver sola le implicaría prever que, si deja las cuatro primeras piezas que ha puesto, las tres restantes no cabrán (Imagen 91). Ella a veces anticipa que en un espacio en blanco no cabe ninguna pieza, pero ahora hace falta prever que un espacio en blanco no puede cubrirse con ningún arreglo posible de las tres piezas. Justo cuando seguir intentando le implicaría deshacer nuevamente algo de lo que ya tiene y cambiar radicalmente de procedimiento, Arturo termina de armar el gato (línea 26). En ese momento ella le pide ayuda (línea 27). Quiero destacar que la pide cuando ha hecho bastante y lo que se requiere para resolver sola está muy lejos de lo que hace. Si bien el contorno permite a Angélica identificar por sí misma que hay algún error en su arreglo de piezas, la retroalimentación, como suele ocurrir, indica que algo está mal, pero no deja ver cómo corregir (Brousseau, 1986). Angélica modifica el procedimiento varias veces, pero siempre vuelve a toparse con pared, igual que antes, queda atrapada en un proceso circular. Así que finalmente, sobre esa información que recibe del problema, busca la que le puede dar un par. Ejemplos como este dejan ver una característica de la interacción del alumno con el problema. Si los alumnos regulan sus acciones a partir de controlar que las piezas queden al interior del contorno sin dejar huecos, hay acomodos parciales que parecen funcionar. Pero de pronto, en cierto momento, resulta que ese camino no iba bien desde el principio, y hay que preguntarse qué se puede conservar de lo que ya se ha hecho o incluso si se tiene que rehacer todo otra vez. Así, a menos que un alumno pueda regular no solo las piezas que va poniendo sino las que faltan por poner en el espacio en blanco -lo cual es considerablemente difícil, ningún alumno lo hace-, se necesita mucho ensayo y error, mucho borrón y cuenta nueva. La retroalimentación puede ser engañosa, en el sentido de llevar a pensar que todo va bien cuando no es así. Puede llevar a aferrarse a caminos sin salida. Evitar esto último requiere aprender que cada vez que se pone una nueva pieza puede ser necesario dar marcha atrás. El problema no habla entonces por sí solo, son los alumnos quienes interpretan los resultados de sus acciones. Como explica Sensevy (2011):

> Es necesario desmarcarse de una mitología de las situaciones adidácticas en las que los hechos (…) hablan por sí solos, y van a poder orientar la acción de los alumnos. (…) Las evidencias que (las retroacciones de las situaciones adidácticas) proporcionan son siempre construcciones como tales, incluso antes de integrarse en un sistema de razones (…). Las evidencias son siempre hechos institucionales (p. 340).

En suma, Angélica pone en marcha tres procedimientos: cubrir los tres ángulos agudos de la plantilla, rellenar la parte más grande del pato, y ocupar esa parte más grande con las dos piezas más grandes. En el último sigue poniendo pieza por pieza, tapizando de abajo hacia arriba. Cada vez que encuentra un límite con esas maneras de resolver, intenta otra. Es decir, es una alumna que se hace cargo del problema, que pone en funcionamiento distintas características espaciales –como el control de los huecos y de no exceder el contorno, el tapizado organizado de abajo a la derecha hacia arriba a la izquierda y, lo intentaré justificar más adelante, también los ángulos agudos-, que lee lo que le dice el problema. Al hacer esta lectura identifica los límites de sus procedimientos y es capaz de modificarlos, es flexible. Perrin-Glorian (1994) argumenta que algunos alumnos "débiles" no se animan a poner en juego un procedimiento propio o que, por el contrario, están muy asidos a su procedimiento y solo admiten ese, es decir, alumnos con los que resulta difícil la devolución o la institucionalización. No encuentro ninguna de estas dos características en Angélica, en esta tarea específica del tangram.

Quiero resaltar una primera diferencia entre lo que enfrentan los cuatro niños al actuar sobre el problema: las implicaciones del momento en el que cada uno logra resolver en relación con el momento en que resuelven los demás. Cuando Alonso termina, enfatiza que la tarea es fácil (líneas 5 y 15), rápida (línea 17) y que él en particular es rápido (línea 23). Estas intervenciones no van dirigidas a Angélica, sino a Regina (línea 16), Arturo (línea 14) y la maestra (línea 23). Es decir, no necesariamente muestran lo que Poveda (2005) llama una "imagen negativa (*negative face*)" de Angélica frente al grupo, pero ella está cerca, escucha y, al menos una vez, es interpelada (línea 15). En cambio, cuando Alonso no ha acabado, no recibe esos comentarios de Luis, quien terminó antes (líneas 1 y 4). Así, Luis resuelve el problema independientemente de si los demás ya acabaron o no, Alonso resuelve problema preocupado por hacerlo antes que el resto, y Angélica y Arturo resuelven mientras oyen que otros ya lo hicieron, que se tardan demasiado, que la complejidad no es tanta. No obstante, tienen recursos que permiten sortear esto en cierta medida. Por un lado, la maestra consigue más tiempo para Angélica al permitir que siga resolviendo y asignar una nueva tarea a quienes ya terminaron (líneas 20-25). Por otro lado, Angélica y Arturo miran de frente a Alonso con un gesto de desacuerdo: no, la tarea no es clara como el agua (Imágenes 90 y 91). Así rechazan la autoridad que él parece querer asumir. Como explica Griswold (2007), las interacciones sociales también suceden a través de la orientación de la mirada.

Ahí radica una diferencia en el medio con el que interactúan los cuatro alumnos. Angélica, además de la preocupación por buscar una nueva manera de resolver, por cuarta vez, también sabe que no puede con un problema que para otros es fácil. Dicho de otro modo, como lo que importa no es solo resolver sino también hacerlo pronto, el momento de logro crea diferenciación entre los alumnos. Como explica McDermott

(2001), un sistema educativo que prioriza el ritmo de aprendizaje por encima del aprendizaje genera una degradación permanente de los que requieren más tiempo. Terigi (2010) señala que la escuela es “un cronosistema que fija regímenes de tiempo escolar” (p. 24), que implica una manera de prescribir el tiempo, que establece desde la edad para ingresar a cada nivel escolar hasta la duración de cada clase o los ritmos de adquisición de aprendizajes. En el caso de Angélica se ve cómo ese cronosistema tiene efectos incluso sobre los tiempos micro de resolución de un problema en una clase. Según la autora, se trata de una de las características de la escuela que hacen que no todos puedan acceder o permanecer en ella (Terigi, 2009).

Por último, me interesa destacar otra diferencia en el medio con el que interactúan los cuatro alumnos. Angélica resuelve un problema de configuraciones de piezas. Se ocupa de orientar y conjugar las piezas para hacer un arreglo acorde con el modelo. En ningún momento toma en cuenta la parte de la consigna que tiene que ver con la superficie. Para Luis, en cambio, el medio incluye, además de las configuraciones, la noción de superficie. Cuando él y Alonso terminan su primera plantilla y Alonso quiere avisar a la maestra (línea 8), Luis lo detiene porque antes deben determinar si tienen la misma área (líneas 9-11)[42]. Es decir, aunque todos los alumnos tienen las mismas plantillas y los mismos tangram, no resuelven exactamente el mismo problema. Como han señalado Fregona y Orús Báguena (2011), y también Perrin-Glorian (1998), el medio es distinto para los diferentes alumnos, el de Luis es más amplio que el de Angélica. La mayoría de los alumnos necesita más experiencia con la superficie, pero eso implica un regreso importante respecto al contenido curricular que corresponde estudiar, a saber, las fórmulas, y no hay tiempo para ello. Dos clases después de esta, se habla de la superficie como un objeto conocido, lo cual pone en desventaja a quienes, como Angélica, todavía no han accedido a dicha noción.

Mostraré ahora el segundo fragmento del proceso de resolución del problema. Arturo, convocado por Angélica (línea 27), interviene:

[42] Es difícil saber si Alonso busca la aprobación de la maestra porque quiere mostrar el momento en que lo hizo, porque al olvidar el asunto de las superficies cree que ya terminó la tarea o porque busca una validación parcial de cada etapa de los problemas (de esta última posibilidad, hay ejemplos en Block, Ramírez y Reséndiz, 2015). Lo que sí es claro es que a Luis no le interesa mostrar ese momento, tiene clara la consigna de comparar las superficies y resuelve con autonomía en el sentido de no buscar validación de la maestra hasta terminar de resolver el problema completo.

28. *Arturo trata de acomodar las piezas de Angélica en el pato. Mantiene los dos triángulos grandes como están. Quita el romboide*[43]*, pone ahí el triángulo mediano y después el romboide [Imagen 94]*
29. *Angélica: [asoma la cabeza y ve que ha quedado un espacio en blanco entre el borde del romboide y el de la plantilla] [Imagen 94] creo que así no va [con tono muy suave]*

Imagen 94

Imagen 95

30. *Arturo mueve un poco el romboide para hacer que su borde coincida con el contorno de la plantilla [Imagen 95]*
31. *Angélica: ah no, sí va*
32. *Arturo trata de poner el cuadrado junto al romboide, pero no cabe, así que lo descarta*
33. *Angélica: [toma el triángulo pequeño amarillo y lo lleva a la esquina superior, pero no lo pone] ¿qué no este?… [Arturo toma la pieza] este va acá arriba*
34. *Arturo pone el triángulo amarillo arriba. Después quita el romboide para acomodar ahí el cuadrado, pero no cabe y lo descarta nuevamente*
35. *Arturo: noooo má… ya te ayudé [quita las manos de la plantilla de Angélica]*
36. *Angélica: [vuelve a poner el romboide como lo tenía antes Arturo] ES que yo me COMPLICO*
37. *Arturo coloca el triángulo rojo arriba, en una orientación distinta a la que había elegido antes Angélica [Imagen 96]*
38. *Arturo: ¡ahhh, el gato está bien fácil!*

---

[43] Ver Imagen 93, Angélica tenía el romboide junto al triángulo naranja.

39. Angélica traslada el mismo triángulo rojo para llevarlo más arriba [Imagen 97]


Imagen 96


Imagen 97

40. Angélica: mejor me hubieras dejado el gato
(…)
41. Angélica pone el triángulo amarillo igual que antes. Toma el triángulo rojo que es del mismo tamaño y lo coloca junto al amarillo, uniendo ambos por un cateto, formando un triángulo mayor. El triángulo rojo se sale del contorno de la plantilla [Imagen 98] (…), y Angélica lo quita
42. Observadora [a Angélica]: (…) a ver, ¿si mueves esta [señala el romboide] de lugar (…)?
43. Angélica pone el romboide junto al triángulo amarillo, pero se sale del contorno
44. Observadora: ¿y si la volteas?
45. Angélica refleja el romboide, ahora el borde de la pieza coincide con el borde de la plantilla y del triángulo amarillo [Imagen 99]


Imagen 98


Imagen 99

46. *Observadora: [a Arturo] a ver tú qué opinas ayúdale un poquito, para que terminen más pronto.*
47. *Angélica quita el triángulo amarillo y desliza el romboide para ver si cabe en el pico del pato*
48. *Observadora [a Angélica]: mira así sí quedaba ¿no? [pone el romboide como estaba en la imagen 99] (…)*
49. *Angélica: ¡ah, sí! Y aquí ya le pongo el piquito [pone el triángulo amarillo de nuevo en el pico del pato]*
50. *Arturo toma el cuadrado y lo acomoda. Ambos mueven un poco las últimas piezas que han puesto para hacer coincidir los bordes con los de la plantilla. Arturo quiere tomar el otro triángulo pequeño, pero se le adelanta Angélica, quien lo toma, lo refleja y lo coloca [Imagen 100]*
51. *Arturo: ahí está*
52. *Angélica [muy contenta]: ¡ahí estáaaaaa! ¡Ya me salióoooo! [Imagen 101]*


Imagen 100


Imagen 101

Al final del primer fragmento, Angélica pregunta a Arturo cómo le hizo (línea 27). Esa pregunta equipara las dos plantillas, el gato con el pato. Supone que Arturo, por haber resuelto el gato, tiene una estrategia que puede aplicar al pato, que hay un procedimiento que Arturo tiene y ella no. Como explico en el capítulo anterior, varios alumnos reconocen que no es así. Entre otras cosas porque en el gato es muy claro el lugar del romboide, y en el pato no. Esta es precisamente la ayuda que le vendría bien a Angélica: si alguien le dijera que mantenga los triángulos grandes donde están y le pusiera el romboide donde va, ella podría terminar sola[44]. Pero Arturo no tiene idea de que eso es lo que necesita Angélica y tampoco sabe dónde va el romboide. Haber resuelto el gato no le dice nada de lo que le hace falta a su compañera para hacer el pato. Por eso, ante la petición de ayuda, interviene de la única manera posible: resolviendo él mismo (línea 28). Block, Ramírez y Reséndiz (2015) identifican, en aulas multigrado, que pedir ayuda a los pares o la maestra es un recurso frecuente de los alumnos en momentos de incertidumbre, y una forma muy común de ayudar es resolviendo. En otras palabras, no se trata de una intervención específica que tenga que ver con los alumnos con dificultades. En el mismo estudio que acabo de referir, los autores señalan que los alumnos suelen estar más dispuestos a ayudar cuando han terminado su propia tarea, como Arturo ahora. Él conserva parte de lo que ha hecho Angélica, los dos triángulos grandes (línea 28). Es decir, no empieza con borrón y cuenta nueva, afortunadamente, pues esos dos triángulos son un buen avance: con ellos quedan colocadas las dos piezas más grandes y por lo tanto difíciles de acomodar, queda rellena la parte de abajo a la derecha con lo cual se puede seguir hacia arriba y a la izquierda, y queda cubierta la región más ancha del pato.

Angélica por su parte, pide ayuda sin desentenderse. Cuando Arturo embona el romboide con el triángulo azul, ella percibe que ha quedado un hueco entre la pieza y el contorno de la plantilla, y eso la hace dudar (línea 29). Ella cuida constantemente que los bordes de piezas y plantilla coincidan (líneas 2 y 13). Ese contorno es más seguro que el de las piezas anteriores, porque esas piezas pueden estar mal colocadas pero la plantilla no. Así, Angélica regula con sutileza lo que hace Arturo. Él en cambio, al armar el gato, deja ciertos huecos cuando prueba un arreglo, y después acomoda mejor las piezas (línea 26). Lo que ocurre entonces es que Angélica y Arturo hacen distinta lectura de la retroacción del problema: para Angélica, ese espacio en blanco no es admisible; para Arturo es un margen de error aceptable. A Angélica le interesa que no queden huecos entre las piezas y el contorno de la plantilla, mientras que a Arturo busca probar el romboide en ese lugar. No obstante, Arturo recoge la petición de Angélica: mueve un poco el romboide (línea 30), y con eso, Angélica admite la pieza ahí (línea 31). Como señala Candela (2001), cuando los alumnos participan, no solo se preocupan por el contenido de su producción, también usan, de forma espontánea, no necesariamente

[44] Este tipo de ajustes a la tarea, como indicar dónde van algunas piezas cuando se ve que a un alumno le cuesta mucho trabajo rellenar cierta plantilla, se recomiendan en materiales como el de Rockwell y Rebolledo (2016).

intencional o consciente, “mecanismos discursivos que permiten influir sobre los siguientes turnos de la interacción en el aula” (p. 140). Para posicionar un punto de vista necesitan convencer a otros de que vale la pena seguir por ese rumbo, y ello no solo requiere saber algo sino también cómo formularlo para interpelar al otro. Así, pienso que Arturo no mueve la pieza porque él lo considere necesario, sino para conseguir la aprobación de Angélica -la responsable de ese problema-, es decir, para mantener el romboide ahí.

Arturo vuelve a toparse con el mismo límite que antes se encontró Angélica: trata de acomodar el cuadrado junto al romboide y no cabe (línea 32). Quita la última pieza que tenía para sustituirla con ese cuadrado, pero tampoco es posible (línea 34). Esa dificultad reiterada lo hace desistir (línea 35). Creo que aquí se conjugan otra vez el azar y las elecciones de los alumnos. Arturo resuelve siguiendo la misma pauta que Angélica: ir pieza por pieza rellenando hacia arriba. Toma una cualquiera -el triángulo mediano-, luego otra -el romboide-, y luego otra -el cuadrado- que esta vez no va. Me parece que ese cuadrado elegido de casualidad lo hace ver una falla, y eso lo lleva a interesarse por esa pieza específica. Cuando el cuadrado no le permite seguir, ya no da lo mismo una pieza que la otra: le hace un poco de caso a Angélica respecto al triángulo pequeño (líneas 33 y 34), pero vuelve al cuadrado, vuelve sobre lo que ya había hecho, modifica lo último que parecía ir bien para poner esa pieza. Pero encuentra que, así como no cupo junto al romboide, tampoco cabe junto al triángulo azul. No es un error menor, sino uno reiterado. Así que se va. De hecho, más adelante, cuando gracias a la observadora retoman un buen rumbo, Arturo acomoda precisamente el cuadrado (línea 50).

Regreso al momento en que Arturo desiste. Lo hace cuando no tiene idea de por dónde seguir, no sabe qué modificar de lo que hasta un poco antes parecía estar bien. No hay continuidad entre ver que su arreglo no puede extenderse con el cuadrado, y ver que es mejor no seguir pieza por pieza, sino priorizar ese cuadrado, encontrarle un lugar -el que se ve en la imagen 100-, aunque sea separado de las piezas anteriores, y luego seguir con las demás. En una palabra, no parece fácil pasar de la idea de ir pieza por pieza a poner algunas desperdigadas. Por eso, lo que queda es el ensayo y error, con el riesgo de verse una y otra vez ante el mismo callejón sin salida, o renunciar a resolver.

Ese freno que encuentra Arturo lo hace entender algo: el gato es más fácil que el pato (línea 38). No es que por hacer el gato ya puede hacer el pato, como ambos parecían suponer al principio. Es decir, no es solamente Angélica quien aprende en este episodio, Arturo también. En el siguiente fragmento muestro que Arturo consigue después hacer solo el pato sobre la plantilla, más fluida y rápidamente que ahora, lo que sugiere que esta experiencia le deja más cosas que la diferencia de complejidad entre el gato y el pato. Ayudar a otro no consiste simplemente en traspasarle algo que ya se tiene: supone un nuevo trabajo matemático, un aprendizaje.

Cuando Arturo se retira de la resolución, lo hace desmarcándose de la dificultad (línea 35). Al decir "ya *te* ayudé", recuerda que la tarea es de ella. Él ha cooperado en un asunto que no es su responsabilidad y eso ya es más de lo que le corresponde. Me parece interesante incorporar las interacciones sociales en la noción de *devolución* (Brousseau, 2007). En este episodio, la devolución funciona con Angélica, y parte de hacerse cargo es convocar a otro a participar. Ese otro tiene una responsabilidad distinta sobre el problema, puede participar en la resolución mientras quiera y salirse cuando quiera. En otros momentos de las clases observé esto mismo: un alumno al que se solicita colaborar en el problema de un compañero decide hasta dónde hacerlo. Además, muchas veces, cuando un alumno interviene en el problema de alguien más, no lo hace considerando únicamente sus anticipaciones, tiene también presentes las del otro. Esto se ve cuando Arturo se encarga de resolver un hueco que para él no es problemático, o cuando acepta buscar una nueva región para el triángulo a pesar de que él está preocupado por el lugar del cuadrado (línea 34).

A diferencia de Arturo, Angélica se atribuye la dificultad a ella misma (línea 36). Si esto se entiende como una reacción al turno anterior de Arturo, hay dos maneras de interpretarla. Por un lado, McDermott (2001) señala que constantemente la dificultad personal surge como explicativa de cualquier cosa que hacen o dejan de hacer los alumnos con discapacidad intelectual. Acá esa explicación es traída por la propia Angélica[45], quien no enfatiza que el problema sea complejo -como lo hace Arturo cuando ve que es más fácil el gato- o que Arturo tampoco pudo, la complicada es ella. Es como si quisiera darle tranquilidad a Arturo, asumiendo la falla como suya. Por otro lado, Angélica dice "es que yo me complico" al mismo tiempo que regresa el romboide al mismo lugar en que lo había puesto Arturo (línea 36), es decir, mientras sigue resolviendo, al contrario de Arturo que decidió no intentar más. Así, si bien lo que dice va un poco en el sentido de establecer que no podrá con el problema, lo que hace va en el sentido opuesto. Decir que ella se complica puede ser una forma de pedir a su compañero que no se salga de la resolución, que siga ayudándola, una manera de

[45] En otros casos encontré que los pares proveen esta explicación. Por ejemplo, cuando Ian me dice algo y regresa a su asiento, otra alumna me aclara "es que él tiene problemas".

plantear que, si él se va, el asunto será más difícil todavía. Griswold (2007) muestra el valor de mirar lo que ocurre cuando algunos niños se subordinan, por iniciativa propia, a otros que no han asumido previamente una posición dominante. Al hacerlo se apoyan en distintos criterios de autoridad que utilizan como herramientas para adscribir poder a alguien más, uno de los cuales es presentarse como indefensos (*displays of helplessness*). Angélica se subordina frente a Arturo, aunque él no ha reclamado una posición superior, pero no lo hace siempre sino en este momento específico. Me parece que sugiere que no va a poder con la tarea -ella se complica, él no- para ganar algo: mantenerlo en la resolución. La interpretación a partir de Griswold permite agregar algo a la de McDermott: los alumnos con dificultades son también agentes activos en la organización social de su entorno, también construyen su propia subordinación frente a otros.

El movimiento de Angélica parece tener efecto: Arturo vuelve a entrar al problema, solo un turno más (línea 37). Recupera nuevamente la sugerencia de Angélica, poner un triángulo chico arriba. Al hacerlo deja de agregar pieza junto a pieza, lo que no hizo antes con el cuadrado: en esta actividad, muchas veces no parece haber anticipaciones fijas y persistentes de los alumnos, más bien cambian una y otra vez, las mezclan con elecciones fortuitas. Angélica desliza ese triángulo, con la misma posición, hacia el ángulo recto de la plantilla (línea 39). Luego pone el amarillo, orientado de otra manera (línea 41). Ahora quiero explicar por qué interpreto que Angélica sí se fija en los ángulos, sobre todo los agudos. Muy al inicio, cubre con triángulos todos los ángulos agudos del pato (línea 2, Imagen 102A). Esto puede ser casualidad, o puede ser que haga cierta asociación entre esos triángulos y ángulos, que vea en ambos las “puntas” referidas por alumnos en el estudio de Gálvez (1995). Después, hace coincidir los ángulos agudos de tres piezas (línea 13, Imagen 102B). De nuevo, ¿es casualidad o se fija en las puntas? Más adelante, cuando va pieza por pieza y la quinta, que es un triángulo pequeño, no cabe, lo cambia de zona, lo lleva al mismo lugar y posición donde lo tenía al inicio: al pico del pato (línea 18, Imagen 102C). Otra vez cubre un ángulo agudo con esa pieza. Cuando Arturo interviene, modifica el arreglo y le vuelve a ocurrir que no puede seguir pieza junto a pieza porque la quinta no cabe (línea 32), ella reacciona planteando que el triángulo pequeño va arriba. Es decir, ya no cambia de región la pieza problemática, no es que continúe con la misma pieza que está usando, sino que toma ese triángulo, que estaba fuera de la plantilla, y explicita dónde piensa que va (línea 33). Hace más énfasis en la unión entre triángulo y pico del pato. Arturo pone la pieza donde ella ha pedido, pero en una posición distinta a las elegidas anteriormente por ella (línea 37, Imagen 102D). Cuando Angélica traslada un poco ese triángulo conservando la orientación de Arturo, no hace coincidir ángulos agudos de pieza y plantilla, sino los rectos. Es probable que el cambio de posición hecho por Arturo le haya hecho ver a ella ese otro ángulo en ambas. Después, saca esa pieza y vuelve a formar el pico del pato con el triángulo amarillo, como antes. Cuatro veces en total pone así el triángulo. Creo que ella insiste porque tiene una fuerte intuición de que va ahí. Me parece que no solo se fija en los ángulos, sino que ve una analogía entre esa parte del pato, el pico, y el triángulo entero. Es decir, tal vez ve un triángulo ahí, donde no está trazado, que Arturo no ve. Como si viera un segmento auxiliar en el pato, que, junto a los dos del pico, hacen aparecer un triángulo. Casi al final confirma que, en efecto, ahí se pone "el piquito" (línea 49).

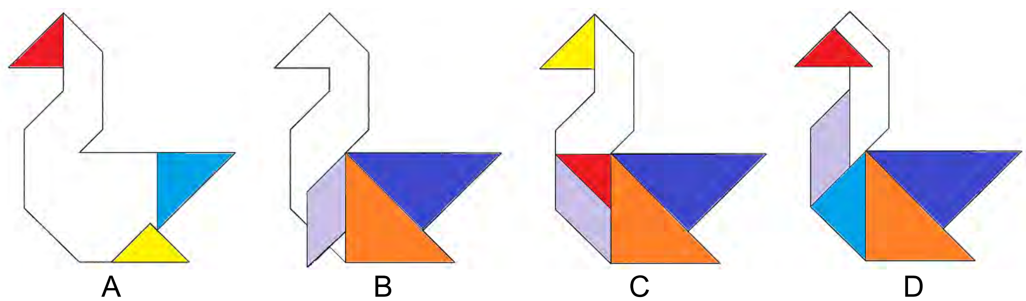


Imagen 102

Arturo, en cambio, en ningún momento me da la impresión de que ponga de relieve los ángulos agudos. Al contario, cuando intenta poner el cuadrado junto al romboide y después en el lugar del romboide, es decir, en espacios cuyas esquinas no son ángulos rectos sino agudos (líneas 32-34), sugiere que no repara mucho en los ángulos, que no es una característica relevante para todos. Esto implicaría que quien pide ayuda no necesariamente sabe menos que quien la da, Angélica puede estar mirando algo que Arturo no ve.

Hacia el final del episodio, cuando Arturo ha desistido del problema y Angélica sigue sin conseguir terminar de tapizar, la observadora interviene. Sugiere a Angélica cambiar el romboide de posición y reflejarlo (líneas 42 y 44). Es decir, ofrece exactamente la ayuda que Angélica necesita y que para Arturo era imposible prever. Pero inmediatamente después prioriza el tiempo de resolución, así que justo en el momento en que ella podría terminar la configuración por sí misma, pide a Arturo que intervenga (línea 46). Probablemente hace esto porque tiene presente a la maestra, a quien le corresponde ser “cronomaestra” (Sensevy et al, 2002), es decir, le preocupa que a Angélica todavía le quedan varias tareas por resolver en esa clase. Angélica desliza el romboide hacia otro lugar (línea 47), quizás porque interpreta que entendió mal la sugerencia de la observadora: había que mover el romboide a otro lado. En esta reacción se ve, más claramente que antes, que la prisa por resolver es parte del medio con el que Angélica interactúa: a raíz de ella modifica el procedimiento. También se ve que esa prisa puede hacer que el contrato didáctico, las expectativas del otro, tengan más peso que las propias anticipaciones, aun cuando ya está en condiciones de resolver sola: Angélica pone el romboide en lugar del triángulo amarillo, la única pieza de la que parecía estar segura.

La observadora da un paso a atrás, devuelve a Angélica cierta seguridad al confirmar que había entendido bien su sugerencia: el romboide sí va como lo había puesto (línea 48). Y eso la hace, por fin, confirmar la idea en la que tantas veces ha insistido, el triángulo chico va en el pico del pato (línea 49). Arturo, al ser convocado esta vez por la observadora, pone el cuadrado (línea 50). Angélica reacciona rápido para poner la última pieza (línea 50). Aunque ya sabe dónde va, encontrar la posición no es inmediato, necesita reflejarla. Finalmente, muy contenta, reconoce la tarea terminada como un logro suyo, algo que consiguió hacer (línea 52).

En todo este episodio se ve una relación compleja entre Angélica, el problema y sus pares. El problema es fundamental para las producciones de Angélica. Ella lo puede abordar, poner en juego distintos procedimientos, recibir información sobre lo que hace a partir del borde de la plantilla, y modificar sus acciones a partir de esas retroacciones. La alumna se hace cargo del problema, resuelve hasta donde le es posible. Pero la tarea es demasiado difícil: Angélica lo puede abordar, pero no puede llegar sola a la resolución. Quizás habría podido si en la plantilla estuvieran algunas piezas marcadas, pero no puede teniendo solo el borde. Cuando la retroacción del problema es repetitivamente la misma, en el sentido de “por ahí no va”, después de varios intentos de modificar por su cuenta y cuando ya tiene varios logros parciales, pide ayuda. La recibe, y ella regula lo que hace su compañero, sigue implicada en el problema. Durante toda la resolución se juega también la prisa, la importancia de resolver antes que los demás.

3.1.2 Angélica hace el gato

Cuando el pato de Angélica queda terminado, la observadora les pregunta qué tienen que hacer ahora:

53. Angélica: ¡Ah sí! [toma una hoja blanca y se dirige a Arturo] ¡agarra una hoja!, yo hago el tuyo

(…)

54. Alonso: [A Angélica] ¡y NO se puede ver! [Pone el estuche entre su hoja y la de Angélica y cubre su plantilla ya terminada con el brazo, Imagen 103. Luego quita el brazo]

Imagen 103

(…)

55. Angélica pone el romboide sobre la hoja blanca, abajo a la derecha, más o menos como en la plantilla, y traza el contorno con lápiz [Imágenes 104 y 105]

Imagen 104

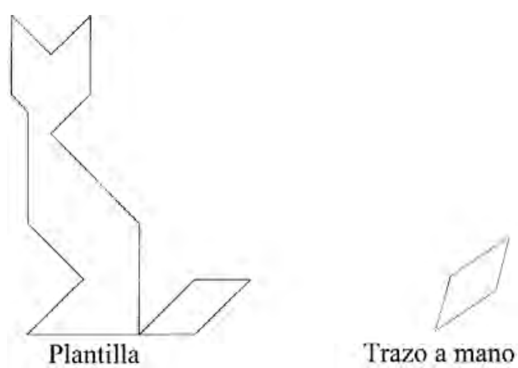


Imagen 105

56. Luis forma el pato sobre una hoja blanca, con un poco de ayuda de Alonso

57. *Arturo: [termina de hacer el pato, sobre la plantilla] ¡Ahí está Angélica! ¡Bien rápido!*
58. *Luis: ahí está ya*
59. *Alonso: ¡ya maestra!*
60. *Arturo: [extiende sus brazos, muy contento] ¡Yo ya lo hice! [a la maestra, que va hacia ese equipo] ¡Ya lo hice maestra! [Imagen 104]*
61. *Angélica: Ya maestra [refiriéndose a Arturo]*
62. *Alonso: yo fui el primero, luego él [Luis] y luego él [Arturo]*
63. *Angélica toma un triángulo grande y lo pone en la hoja blanca, cerca del lugar donde trazó el romboide, en una posición similar al arreglo de la plantilla, pero no igual. Voltea a ver la plantilla. Tiene el lápiz en la mano [Imágenes 106 y 107]*


Imagen 106

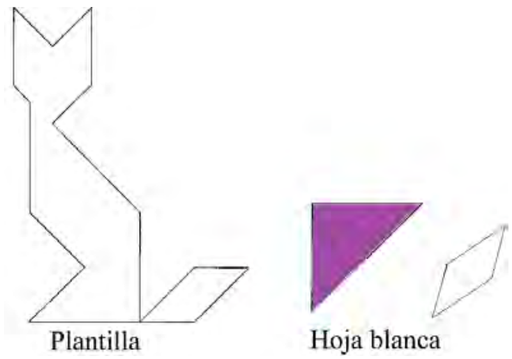


Imagen 107

(…)

64. *Angélica descarta el triángulo grande y pone el mediano en el mismo lugar*
65. *Observadora [a Angélica]: no (…) marques todavía (con lápiz), primero acomoda las piezas para que se vea igual que el gato, ya después es cuando las vas a marcar [Arturo observa un poco la plantilla de Angélica]*
66. *Angélica: ¡ah! [pone la hoja con la plantilla sobre la hoja blanca] mejor por qué no le… (pongo las piezas acá)*
67. *Arturo: [toma una hoja blanca] ahora lo tengo que poner aquí [es decir, tiene que pasar el pato de la plantilla a la hoja blanca]*
68. *Observadora [a Angélica]: Ah, pero no las acomodes aquí [quita la plantilla] las tienes que acomodar a tu hoja (blanca)*
69. *Angélica: Es para ver cómo... [señala la plantilla y la hoja. Después coloca el romboide en la hoja blanca y voltea a la plantilla]*

(…)

La observadora se va a ver a otros equipos. Regresa diecisiete minutos después:

70. *Angélica tiene el romboide sobre la plantilla. Además, ha armado la cabeza del gato en la hoja blanca. Debajo pone un triángulo grande [Imágenes 108 y 109], y después el otro. Cuando pone este último, el romboide se cae al piso. Un vértice del segundo triángulo grande coincide con un vértice del romboide que trazó con lápiz*

Imagen 108

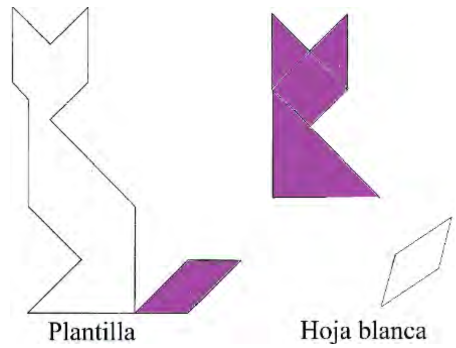


Imagen 109

71. *Angélica toma el triángulo mediano y sobrepone su ángulo recto al de la esquina inferior de la hoja blanca [Imagen 110]. Luego desliza un poco el triángulo conservando su posición, hasta que su diagonal coincide con la última pieza puesta*
72. *Angélica toma el romboide del piso y lo pone directamente en la hoja blanca, sobre el contorno que al inicio había marcado con lápiz para esa pieza*
73. *Angélica desliza nuevamente el triángulo mediano a la esquina inferior de la hoja blanca, y mueve también los triángulos grandes para ponerlos junto al mediano, pero uno se sale de la hoja. Entonces desliza toda la configuración un poco hacia arriba, hace coincidir el borde izquierdo de su gato con el borde izquierdo de la hoja blanca. Eso despega al triángulo mediano de la esquina de la hoja. Angélica lo toma, lo pone sobre la plantilla [Imagen 111] y luego lo traslada con esa posición a la hoja blanca, junto a un triángulo grande*

Imagen 110 Imagen 111

74. *Angélica [mira la plantilla, luego el gato en la hoja blanca]: ¡Ya me saliooooooó! [muy contenta, Imagen 112]*

Imagen 112

75. *Observadora: ¿Listo? Muy bien*
76. *Angélica: No me quería salir*
   (…)
77. *Observadora: ¿Cuál pieza no te quedaba bien? ¿Cuál pieza no podías acomodar?*
78. *Angélica: esta [señala un triángulo grande] (…) No la podía acomodar. Ni esta [el triángulo mediano], esta [el triángulo grande junto al cuadrado] sí la acomodé y esta [el triángulo mediano] (…) la puse acá [debajo del cuadrado]... y no me salía*
79. *Angélica: [comienza a trazar con lápiz el contorno del gato. Al hacerlo se le mueven un poco algunas piezas] ayyyyy, mi obra de arteee, nooo [inaudible] …*

> *[mueve un poco las piezas para que embonen correctamente. Con una mano sostiene cada una y traza su contorno]*

Diez clases después, me enseña orgullosa la hoja blanca en la que está trazado este gato.

Primero mostraré cuál es la consigna para Angélica. La maestra explicó la nueva tarea al grupo y después a Luis y Alonso cuando ella estaba cubriendo el pato. Cinco minutos después, Angélica deja ver que entendió que cada uno tiene que formar la plantilla del compañero sobre una hoja blanca (línea 53). No necesita que le expliquen esta parte de manera personal, como ocurrió con Luis y Alonso. Pero a diferencia de ellos y de Arturo, quienes hacen primero toda la configuración y después trazan el contorno de las piezas, ella comienza con el romboide, cuyo lugar es claro en la plantilla, y marca el contorno de esa única pieza (línea 55). Al poner la siguiente, tiene listo el lápiz, como si pretendiera seguir así, marcando la orilla de cada una por separado (línea 63). Esto puede ser una extensión de su estrategia al tapizar el pato en el episodio anterior que consistía en ir pieza por pieza: ahora además las fija con el lápiz, una por una. Pero así es más difícil resolver, porque un error en el acomodo de cualquier pieza afecta todo el trazo: las piezas se pueden mover con facilidad, los trazos no. La observadora la detiene, al pedir que primero acomode todas las piezas, y después registre el contorno con lápiz (línea 65).

Hay otra diferencia respecto a las condiciones de la consigna entre los cuatro alumnos. Luis y Alonso, al ver que es mucho más difícil hacer la configuración sobre la hoja blanca, toman una decisión: “a ver, déjame ver… primero lo voy a armar aquí (en la plantilla)”. Arturo resuelve así de entrada (líneas 57 y 67). Angélica intenta hacer eso también (líneas 66 y 69), pero la observadora le pide que forme la configuración directamente sobre la hoja blanca sin pasar primero por la plantilla (línea 68). Esta es una exigencia más a la consigna que solo se demanda a Angélica, y que vuelve más difícil la tarea. Por alguna razón, la observadora permite que ellos tres resuelvan primero sobre la plantilla y Angélica no. Al contrario de lo que ocurre frecuentemente con los niños con rezago o discapacidad, a saber, que les asignan tareas de menor complejidad o incluso de otras materias o fuera del aula (Broitman, Cobeñas, Escobar, Grimaldi, 2018), esta vez la exigencia de la consigna es mayor para Angélica. Perrin-Glorian (1994) encuentra otro aspecto en el que se demanda más a los alumnos “débiles”: los argumentos y explicaciones. Dada la presión del tiempo, cuando el docente confía en que un alumno puede terminar por sí mismo una explicación, ayuda a acelerarla y resumirla. En cambio, si no tiene esa confianza, exige más detalles y justificaciones, para verificar que el alumno ha entendido correctamente: el momento de explicación deviene en uno de evaluación.

Después de estas negociaciones respecto a la consigna, Angélica se dedica a formar el gato directamente sobre la hoja blanca, sin hacerlo primero sobre la plantilla, y sin fijar con lápiz el acomodo de cada pieza. No tengo acceso a la primera parte de su resolución, pero de algún modo logra formar la cabeza del gato y poner debajo los dos triángulos grandes (línea 70). Al parecer no fue fácil acomodar los dos triángulos grandes, pues hace un gesto de gusto con los puños (vale la pena recordar el trabajo que le toma a Bárbara poner esas mismas dos piezas en esta tarea, descrito en el capítulo anterior). Más adelante le cuenta a la observadora que se equivocó al poner el triángulo mediano en lugar del primer triángulo grande (línea 78): tal vez poner la pieza correcta le implicó mucha prueba y error, para dar con el tamaño adecuado de triángulo.

En este momento lleva cinco piezas colocadas, y sabe que el romboide va en la cola del gato. Eso deja claro dónde va el triángulo mediano, la última pieza que falta, su lugar, pero no su posición. Angélica recurre al borde de la hoja blanca (línea 71), la cual ofrece una orientación del triángulo a partir del ángulo recto, que ella conserva al trasladar la pieza para unirla a la anterior. Pero después vuelve a deslizar el triángulo mediano hacia la esquina de la hoja y, esta vez, mueve las otras piezas para unirlas a ese triángulo, como si quisiera dejarlo en esa esquina, empalmado a la orilla de la hoja (línea 73). Como si ya no solo buscara obtener una posición para el triángulo, sino dejarlo junto a un contorno. No lo consigue, su arreglo puesto ahí se desborda del contorno de la hoja. Despega entonces el triángulo de la esquina, pero conserva todo un borde del gato en el de la hoja. Es decir, le hace falta la plantilla, suple ese contorno con el de la hoja, en la medida de lo posible. Cuando el triángulo mediano termina despegado de esa orilla, lo regresa a la plantilla, consigue la posición correcta y la traslada a la hoja blanca. Hace ese movimiento de manera muy controlada.

Así termina un gato muy parecido al del modelo (línea 74). En la configuración que obtiene hay un solo error: la orientación del romboide. Ella mira la plantilla y su arreglo, tal vez para compararlos y asegurarse de que el segundo esté bien hecho, pero no le incomoda la manera en que está puesto el romboide. Tanto en el modelo como en su configuración el romboide es la cola del gato, que está unida al cuerpo por un solo vértice, la punta de la cola es un ángulo agudo. Percibir la diferencia visualmente implicaría fijarse, por ejemplo, que en la plantilla hay un segmento formado por el triángulo mediano y el romboide, y en su arreglo no. Ver algo de los segmentos, no de las piezas completas ni de los ángulos, implica dejar de fijarse en lo que hasta ahora parece haberse fijado. Angélica puso antes el romboide en la plantilla (línea 70), probablemente porque se cuestionó si la posición que fijó con el trazo era correcta. Pero la pieza se cayó, mientras ella estaba concentrada en otro asunto, y perdió la posición que ya había conseguido. Al volver a tomar el romboide, lo pone directamente sobre la hoja blanca, esta vez sin pasar por la plantilla (línea 72).

Cuando Angélica termina su configuración, se atribuye la resolución, orgullosa, contenta (línea 74), igual que en el episodio anterior. Lo hace sola, no intervienen los pares acá. Pero interactuar sola con el problema es también una forma de interacción con sus pares, porque Arturo termina su pato mucho antes que ella (línea 57), y la observa un poco (línea 65), sin intervenir. Es decir, él pone piezas en la configuración de Angélica solo cuando ella o la observadora se lo piden, como sucedió con el pato. Angélica tampoco pide ayuda, aunque es la única que no ha terminado: ella se hace cargo del problema todo lo que puede, tanto en este episodio como en el anterior. Diez clases después, cuando tiene que resolver problemas de aplicación de fórmulas en los que ella no tiene ninguna posibilidad de actuar, me enseña este gato. Es difícil saber por qué lo hace: tal vez evoca un recuerdo de una actividad que disfrutó, tal vez le gusta el gato -ya hablé de la importancia que tiene para los alumnos la decoración de sus trabajos, lo mencionaré de nuevo en el último capítulo-. Otra posibilidad es que quiera mostrar algo que sí pudo resolver, resarcir la imagen negativa que puede tener frente a mí en esas tareas que le son inaccesibles, resaltar que, si bien en cierto momento no puede hacer mucho, en otro sí ha podido. La manera en que Angélica aprecia este logro se ve también en la línea 79, cuando no quiere que se le desarme su “obra de arte*”.*

La configuración del gato tiene un par de características que permiten a Angélica abordar el problema y continuar hasta terminar. Es “angosta”, es decir, no tiene una región grande como el pato, así que ella puede usar su procedimiento de ir pieza por pieza, esta vez de arriba hacia abajo, colocando cada una sin dejar huecos con la anterior, sin que esto la lleve a un límite que le implique deshacer casi todo como ocurrió con el pato. Además, el lugar en el que va el romboide está claramente señalado en esta plantilla, a diferencia del pato, en el cual fue necesaria la intervención de la observadora para ubicar esa pieza. El lugar de los triángulos pequeños no está completamente indicado, pero es común que los alumnos los asocien a las orejas del gato. Finalmente, no todo es más fácil con el gato. Algo que dificulta el problema, pero no hace desistir a Angélica, es que las piezas deben ponerse sobre una hoja blanca y no sobre el contorno como ocurre con el pato. En los dos episodios que he descrito se ve la importancia de poder colocar las piezas sobre la plantilla para poder regular el armado.

Otro asunto que permite que Angélica resuelva por su propio pie es el tiempo que se toma. Tarda diez minutos en armar el pato, y 22 en el gato. Ese tiempo, que la maestra no restringe, es crucial. No obstante, la comparación con los tiempos de los otros también tiene implicaciones. Angélica comienza con el gato justo cuando Alonso ha terminado, quizás eso lo hace suponer que ella quiere aprovechar que el problema ya está hecho para dejar de hacerlo (línea 54). Arturo termina muy pronto el pato que a Angélica le costó mucho trabajo. Probablemente logra formarlo porque antes lo hizo con ella y recuerda parte del acomodo de las piezas, pero lo que destaca en este momento es que lo hizo rápido (línea 57). Arturo se apresura a contarle a la maestra que logró hacer el pato (línea 60), creo que en parte porque que está orgulloso de haber resuelto fácilmente cuando la primera vez fue muy difícil, y en parte porque Alonso acaba de avisar que él y Luis ya terminaron (líneas 56, 58 y 59). Alonso se encarga de ordenar los momentos de resolución (línea 62). Él terminó primero, Angélica es la única que no ha acabado. Al poner atención al orden de resolución, y al exhibirlo, se crea un ordenamiento también de los alumnos. De cualquier manera, esto no parece modificar en este episodio las decisiones de Angélica como sucedió en el primero: es algo que la alumna tiene presente (línea 61), pero igual se toma su tiempo.

Quiero hacer por último un comentario sobre el gesto de Alonso en la línea 54. Hay una tensión entre la competencia y la colaboración entre pares que permanentemente se hace presente en las clases. A veces, ya sean alumnos empeñados en resolver absolutamente solos su problema sin ver qué hacen los demás, ya sean alumnos que no permiten que otros observen lo suyo, sugieren una idea de que mirar la resolución de otro es evidencia de no saber y de no querer hacerse cargo del problema. Esto no atañe solamente a los alumnos con dificultades, tiene que ver con una idea sobre el aprendizaje que permea las interacciones. Otras veces, se manifiesta una idea opuesta. Por ejemplo, Luis y Alonso sí observan cada uno lo que hace el otro. Algo que para Alonso puede marcar una diferencia entre ser observado por Luis y por Angélica, es el momento: Luis lo mira cuando ya terminó (líneas 1 y 4), en cambio Alonso advierte a Angélica que no se puede ver cuando ella está por comenzar. En síntesis, hay una tensión en el grupo entre concebir la actividad matemática como una producción colectiva y asumirla como estrictamente personal, que se percibe en la propia disposición material de objetos en el aula: los mesabancos son para dos niños, la maestra pide que los reúnan dos a dos para tener equipos de cuatro alumnos, los alumnos colocan sus estuches en la línea entre un mesabanco y otro (Imágenes 83 y 103) -lo que a veces dificulta que uno mire las anotaciones o acciones del alumno de enfrente-, pero también muchas veces se levantan y van al lugar de un compañero a quien quieren consultar[46].

En resumen, Angélica hace correctamente la configuración, salvo por un pequeño error, con mayor autonomía que en el episodio anterior. Ella hace esto independientemente de la prisa que enfatizan Alonso y Arturo, y la copia como una falta que señala el primero. Este logro tiene que ver con las características de la tarea, con el mayor tiempo que tiene, y con la decisión tanto suya como de Arturo, la observadora y la maestra de dejarla resolver.

3.1.3 Otros hacen el cuadrado de Angélica

Cuando la clase está próxima a terminar, todos deben guardar el tangram en su caja, lo que implica una nueva tarea: hacer un cuadrado con las piezas. Este problema es considerablemente más difícil que los dos anteriores, por varias razones. En primer lugar, no indica dónde va ninguno de los ángulos agudos, importantes para Angélica. En segundo lugar, no tiene ninguna región estrecha y alargada, como el gato o el pato, por lo que se complica la posibilidad de poner pieza por pieza. En tercer lugar, ninguna de las piezas está indicada en la plantilla, como ocurre con el romboide en el gato. En cuarto lugar, la plantilla no representa un objeto conocido para los alumnos -no es un gato ni un pato sino un cuadrado-, y por lo tanto las piezas tampoco. Es decir, no se tiene la posibilidad de asociar al triángulo pequeño con las “orejas” del gato, ni de sospechar que es el “pico” del pato. En quinto lugar, la única información que da el cuadrado es que tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales, pero tanto unos como otros pueden ocuparse con cualquier pieza. En efecto, los ángulos rectos pueden componerse con dos ángulos agudos -todos son de 45 grados-, así que cualquier pieza puede ponerse en cualquier lugar del contorno y en cualquier posición, salvo una excepción: los ángulos obtusos del romboide no caben en las esquinas.

---

[46] Gabriela Naranjo (2011) muestra que la disposición material de los objetos, y más en general la construcción y el uso social y local del espacio inciden en la relación con el contenido que se genera en el aula.

El siguiente fragmento muestra cómo Angélica, Alonso y Edgar consiguen guardar el tangram de ella:

80. *Angélica coloca seis piezas, pero luego no cabe el romboide [Imagen 113], aunque lo gire y lo refleje.*
81. *Angélica quita el triángulo naranja y pone ahí el romboide [Imagen 114]. En el espacio que queda en blanco no cabe el triángulo naranja. Angélica desliza el romboide hasta ponerlo junto al triángulo azul, pero sigue sin caber el triángulo naranja*

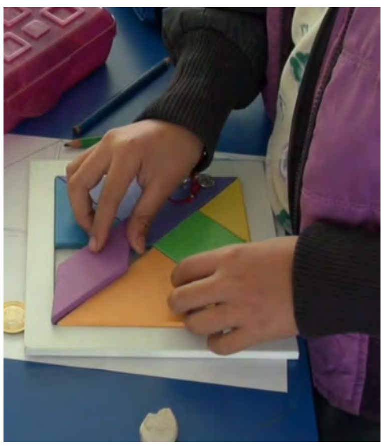


Imagen 113


Imagen 114

82. *Edgar [a Angélica]: a ver hazte a un lado [intenta quitarle el triángulo naranja, pero ella no lo permite. Él se fija en que la cámara lo graba y se retira]*
83. *Alonso [a Angélica]: mira [mientras, Angélica quita el romboide y en su lugar casi pone el triángulo naranja, junto al rojo, como estaba antes], ve, este [toma el triángulo que Angélica tiene en la mano] va aquí [quita el triángulo mediano y en ese espacio pone el naranja]*
84. *Angélica: ¡aaaaaahhhh!*
85. *Alonso: y este, va aquí [pone el triángulo mediano junto al rojo]*
86. *Angélica: [trata de acomodar el romboide, imagen 115] ¡ah, GRACIAS! [lo dice mientras retira enérgicamente el romboide para que Alonso, que iba a tomarlo, no lo haga]*
87. *Alonso: está mal [se refiere a que están mal las piezas que él mismo puso]*

88. Angélica intenta poner el romboide en el espacio que queda, lo gira y refleja, pero no cabe

89. Alonso: [le muestra a Angélica su tangram ya guardado, ella voltea a verlo] ve

90. Angélica: ¡ahhhhh!

91. Alonso: esto está así [gira su tangram y lo pone junto al de ella] a ver, disculpa, disculpa eh [casi toma uno de los triángulos grandes, pero no lo hace]

92. Angélica: no importa

93. Alonso vuelve a girar su tangram

94. Edgar quita los dos triángulos grandes

95. Alonso: bueno va, esta está bien [señala el triángulo amarillo]

96. Edgar reacomoda uno de los dos triángulos grandes, el naranja [Imagen 116]. Trata de poner el otro, para ello desliza un poco la configuración del cuadrado y los dos triángulos pequeños

Imagen 115

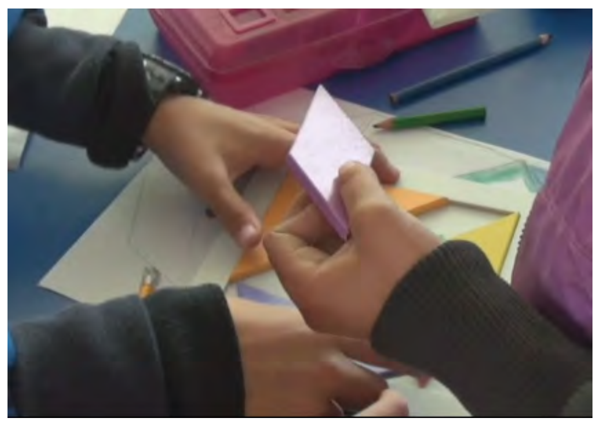


Imagen 116

97. Alonso [a Edgar]: ¿qué haces? [regresa el cuadrado y los dos triángulos pequeños a donde estaban]

98. Edgar: ¡ay ya me confundiste Alonso!

99. Alonso: esto va así [regresa el triángulo naranja como estaba en la imagen 115]

100. Edgar: esto ponlo aquí [coloca el otro triángulo grande junto al naranja, imágenes 117 y 118], ahí está ya, esto Angélica, va así [le quita el romboide a Angélica y lo pone junto al triángulo naranja]


Imagen 117

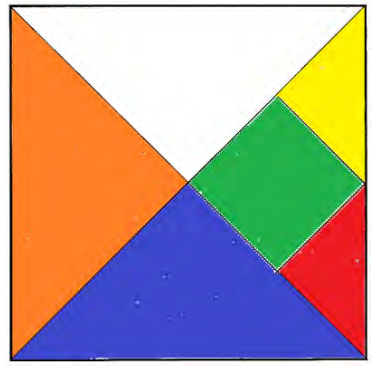


Imagen 118

101. Alonso: nooooo [pone el romboide en el mismo lugar, pero reflejado]

102. Edgar: Sí niñooo, porque ve…

103. Alonso: ve esto [le muestra su tangram ya armado], ve esto

104. Edgar: ve esto [toma el tangram armado], yo lo puse AQUÍ [vuelve a reflejar el romboide para ponerlo como lo tenía], aquí va ESTO

105. Alonso [a Angélica]: discúlpalo [mientras reacomoda los dos triángulos pequeños como se ve en la imagen 120]

106. Angélica se apresura a tomar la última pieza, antes de Alonso que estaba a punto de hacerlo [Imagen 119]. La refleja, la pone y con eso termina


Imagen 119

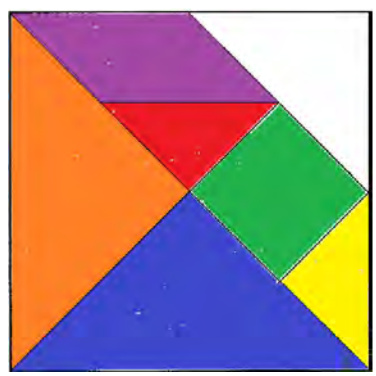


Imagen 120

107. Edgar: ¡aaaaay niñoooo!

108. Alonso: ¡TÚ! que no ponías

109. Edgar [interrumpe]: yo puse este aquí [señala el romboide], tú dijiste no, no, noooo

110. Alonso [interrumpe]: YO moví… yo moví estos dos [los dos triángulos pequeños] (…) y YO resolví primero ¡eh!

Angélica logra de entrada un arreglo en el que caben seis piezas sin dejar huecos. En el espacio que queda en blanco cabría un triángulo mediano, no un romboide (Imagen 113). Pero Angélica no descarta ese romboide, encaja uno de sus vértices en una esquina del hueco por cubrir. Cuando ve que así no cabe el romboide completo, lo gira, pone el otro ángulo agudo en esa misma esquina. Nuevamente no cabe la pieza entera, así que la refleja y vuelve a poner el vértice en la esquina. Tres veces busca poner la pieza ahí, a partir de embonar un ángulo agudo. El intento reiterado me hace pensar que no es una casualidad, un movimiento fortuito. Creo que nuevamente muestra su atención en los ángulos agudos, que ella no compara romboide con triángulo, sino un vértice de cada uno. Si el romboide no cabe en una posición, podría caber al girarlo o reflejarlo, como pasa a menudo. De hecho, cambiar la orientación de una pieza cuando no cabe es un aprendizaje importante, como explico en el capítulo anterior respecto al romboide del gato. Pero esta vez ni girar ni reflejar funcionan. Parece que ella no considera que la pieza y el hueco pueden compartir un rasgo sin ser iguales: ¿homologa ambos por tener un ángulo agudo? ¿o, aunque el romboide tenga materialidad, y sea lo que tiene en la mano, para ella lo que está ahí es una esquina, las esquinas borran el resto de la figura? ¿o no encuentra sentido a que la última pieza que falta no quepa en el último espacio sin cubrir? Eso último no le ha ocurrido, ni con el pato ni con el gato. En esas dos plantillas, cuando queda una sola pieza, encaja perfectamente en el espacio en blanco, después de girarla o reflejarla.

Sea como sea, después del tercer intento fallido busca otro lugar para el romboide (Imagen 114), luego otro, porque ahora no cabe el triángulo naranja (línea 81). Desliza el romboide hasta que queda junto al triángulo azul, tal vez porque está probando al azar, o bien porque ha visto un ángulo obtuso en el romboide que es igual al que forman el triángulo azul y el cuadrado, y lleva uno hacia el otro. Si fuera el segundo caso, sería el primer indicio de que ella ve un ángulo obtuso. En el episodio anterior me pregunté si un movimiento de Arturo ayudó a Angélica a ver un ángulo recto. Ahora, me pregunto si ella comienza a pasar de los ángulos agudos a los ángulos en general.

En las dos nuevas maneras de poner el romboide (línea 81), Angélica encuentra que no cabe el triángulo grande naranja. Esa pieza ha quedado hasta el final, lo cual se venía gestando desde antes: cuando la alumna hace su primer arreglo en el que caben seis piezas (Imagen 113), la penúltima que pone es ese triángulo. Eso complica las cosas, porque poner esa pieza al final implicaría formar, sin proponérselo, algo con las otras seis que deje un solo hueco igual a la pieza más grande de todas, cuando en general suelen quedar varios huecos más chicos o uno muy distinto al triángulo, como el de la Imagen 114. Es decir, con piezas pequeñas, dejar un hueco grande, cóncavo y conexo, cuando es mucho más fácil dejar un hueco convexo o inconexo[47]. Y todo esto, además, muy atravesado por la casualidad, por el ensayo y error. Para eso, Angélica tendría que hacer muchos movimientos difíciles tanto de anticipar como de hacer por azar.

Cuando Alonso interviene, a sabiendas o no, abre una posibilidad de arreglar ese asunto de los triángulos grandes, al ponerlos juntos (línea 83). Angélica acepta esa intervención y permite que Alonso se quede, a diferencia de Edgar en el turno anterior (línea 82). Ambos intentan tomar la misma pieza, pero el gesto es distinto. Edgar la interrumpe y explícitamente le pide salirse. Alonso, en cambio, ofrece una ayuda. Angélica recibe ese aporte de Alonso, pero no deja que Edgar la desplace, no por ahora.

La contribución de Alonso –poner juntos los dos triángulos grandes- implica que ahora sobran el romboide y el triángulo mediano. Con esas dos piezas no es posible cubrir el espacio que falta. Alonso pone el triángulo mediano azul, me parece que en cualquier lugar del espacio que queda, sin mucha premeditación, pero lo hace como si estuviera seguro ("y este, va aquí", línea 85, Imagen 115), como si el azar no tuviera cabida en una ayuda. Muy pronto, él mismo nota que se ha equivocado (línea 87). Es decir, llega al mismo punto al que llegó antes Angélica en la línea 80: hay seis piezas colocadas, pero en el espacio por cubrir no cabe el romboide que falta acomodar. Como hizo antes, Angélica trata de ponerlo (líneas 86 y 88). Pero a diferencia de la vez anterior, cuando embonaba el ángulo agudo de varias maneras, ahora primero hace coincidir el lado largo del romboide con el lado del triángulo azul, luego pone un ángulo agudo, después trata de poner toda la pieza de tajo. Y es que el espacio que sobra es muy distinto del que había antes: se trata un cuadrilátero, angosto, alargado y con un ángulo agudo, como el romboide que tiene en la mano. Ahora hay más características compartidas entre su pieza y el espacio que falta rellenar. El lado cabe, el ángulo también, la pieza no. Angélica la pone ahí a pesar de que Alonso le acaba de avisar que "está mal" (línea 87). De hecho, cuando su compañero quiere tomarla, no lo permite (línea 86). Es decir, no es en este momento una alumna que se subordina a quienes ya terminaron, defiende sus turnos. Lo hace agradeciendo, es decir, saca a Alonso de ese

[47] Un polígono cóncavo tiene todos sus ángulos internos menores a 180 grados, en caso contrario es un polígono convexo. Un espacio conexo es uno que no está separado en dos o más pedazos disjuntos (Munkres, 2000).

turno, pero deja abierta la posibilidad de que pueda influir en los siguientes. Alonso le advierte que hay un error, pero la deja hacer.

En ese momento, Alonso trae su tangram ya armado y lo pone junto al de Angélica para que ambos lo puedan utilizar como referencia (línea 89). Como explican Block, Ramírez y Reséndiz (2015), mostrar a otro un problema resuelto para que lo reproduzca es una manera de ayudar. Resalta el contraste entre el episodio anterior, donde Alonso sanciona la copia de Angélica, y este donde él mismo la propone. Él decide cuándo, a quién y cómo ayudar. Su manera de entrar en el turno 83, con un cauteloso "mira… ve…", me hace pensar que una diferencia entre este episodio y los dos anteriores es que ahora parece haber visto algo del proceso de Angélica. Alonso gira y gira su tangram (líneas 89-93). Creo que no consigue encontrar similitudes en los arreglos de las dos cajas y eso lo desconcierta. Tal vez por eso no se limita a dejarle el modelo para que ella lo reproduzca sola, sino que sigue participando en la resolución, todavía con cautela, disculpándose (línea 91). Este ejemplo muestra que la copia no es una actividad mecánica. Aun con la copia, ambos tienen relaciones todavía por construir. En particular, identificar si hay algo del arreglo de la caja de Angélica que se puede preservar y, como derivación de eso, percibir que con los dos triángulos grandes ya puestos el problema cambia, se trata ahora de hacer un triángulo con las cinco piezas restantes. Ver esto implicaría mirar la configuración en conjunto, no las piezas una por una.

Edgar, en cambio, no parece preocupado por la discordancia entre el tangram guardado y el tangram por guardar. Su intervención abrupta (línea 94) marca lo que Poveda (2005) llama un giro en el curso de la resolución, que modifica tanto el asunto matemático al quitar justamente los dos triángulos grandes que Alonso acaba de poner juntos, como la interacción social al moverse muy rápido en relación a sus dos compañeros. Antes había tratado de resolver excluyendo a Angélica (línea 82), sin conseguirlo. Ahora interviene justo cuando ni Angélica ni Alonso saben qué hacer. Erickson (1996) caracteriza esta manera de intervenir como de "caza-turnos" (*turn-sharks*), alumnos que son expertos en identificar el momento adecuado para robar el turno de otro en una interacción[48]. El autor explica que ello requiere una habilidad para manejar la dinámica de participación social en clase. Cambriglia (2018) muestra que a veces las interacciones sociales permiten sostener la incertidumbre, lo que efectivamente ocurre en este caso: Edgar logra que terminen la tarea a partir de

[48] Se refiere al turno del alumno designado por el maestro. Me parece que el término también puede utilizarse acá porque la intervención de Edgar no estaba contemplada por Alonso y Angélica.

comenzar de cero siguiendo el modelo, en un momento en que Angélica y Alonso están desconcertados. Pero esto no se da en un contexto de cooperación mutua, tiene un costo: dejar a Angélica fuera de la resolución. En este fragmento, la incertidumbre de Angélica y Alonso resulta ser estratégica para Edgar: ofrece el momento adecuado para intervenir y cambiar la manera de resolver.

A partir de la entrada de Edgar, él y Alonso prácticamente terminan de hacer el cuadrado, a través de una serie de negociaciones (líneas 94-105). Alonso primero acepta que Edgar deshaga lo que él hizo, que quite los triángulos grandes que él había puesto juntos (línea 95). Pero después, cuando Edgar modifica por completo la orientación de uno de estos triángulos (línea 96), Alonso lo confronta (línea 97) y defiende el acomodo de la pieza que él había hecho antes (línea 99). Esa reacción tan tajante, tan distinta de la anterior, me hace intuir que Alonso, quien ya ha guardado su propio tangram, tiene claro que los dos triángulos van juntos como los tenía, que ha dado esa ayuda a Angélica sabiendo que es parte de la configuración correcta, y que ahora lo pone nervioso que Edgar deshaga algo que él sabe certero para ponerse a improvisar. Es decir, pienso que, si la primera irrupción de Edgar no le ha molestado demasiado al principio, ahora empieza a haber tensión entre el azar de uno y la certeza del otro.

No se llega a una ruptura: Edgar acepta esa corrección de Alonso (línea 100), y no vuelve a mover esa pieza. Eso es clave en términos del contenido porque, al ser precisamente un triángulo grande el único que queda fijo, sucede que comienzan precisamente por estas piezas cruciales y que, de aquí en adelante, vayan agregando el resto de piezas una por una. Es decir, los triángulos grandes pasan de ser las últimas piezas que se ponen a ser las primeras. Que Edgar deje la pieza como Alonso quiere es clave también en términos de la interacción social, porque Alonso admite que Edgar haga el siguiente movimiento. Cuando Edgar pone un triángulo y el romboide, se dirige a sus dos compañeros. Le dice a Alonso una frase tranquilizadora, "ahí está ya": ahí está, dejo tu triángulo como lo quieres, pero voy a agregarle uno más. A Angélica ya no le ordena *"hazte a un lado",* sino que le explica *"esto Angélica, va así"* mientras toma la pieza que ella tiene en la mano. Ya no irrumpe, no hace borrón y cuenta nueva, despliega otra forma de influir en el curso de la resolución, que pasa por buscar la aceptación de los dos. Así, Edgar agrega el otro triángulo grande, de manera que los dos quedan juntos, pero no como los había puesto Alonso, sino en reflejo (línea 100, imágenes 115 y 118). El tangram de Alonso y el de Angélica por fin coinciden en esas dos piezas, incluyendo su color.

El romboide vuelve a ser motivo de tensión. Edgar lo pone de una manera (línea 100), Alonso la niega y refleja la pieza (línea 101). Ambos se remiten a comparar con el modelo para convencer al otro (líneas 103 y 104). Ya sea que Alonso es convencido, que cede, o que había cuestionado a Edgar sin tener realmente una anticipación sobre esa pieza, admite la posición del romboide que propone Edgar, con cierta ambivalencia: le habla a Angélica como si Edgar tuviera que ser disculpado, pero deja ahí la pieza y le agrega otras (línea 105). En otras palabras, no se ve muy contento con la corrección, pero la acepta y la expande.

Angélica cierra, pone la última pieza (línea 106), consigue tomar al menos un turno. Cuando finalmente queda una sola pieza por poner, que ahora sí cabe perfectamente en el espacio que falta cubrir, ella se adelanta a Alonso y la toma. Es hábil también para encontrar un momento oportuno para intervenir. Ella tiene que reflejar la pieza para orientarla correctamente: saber que esa pieza va ahí no quiere decir que ponerla sea inmediato. En el primer episodio, Angélica también toma rápidamente la última pieza, adelantándose a Arturo (línea 50). Las dos veces está atenta a lo que hacen sus compañeros y es astuta para atrapar la posibilidad de actuar. Tiene que hacerlo rápido, porque ya hay otro que está a punto de agarrar la pieza. Pienso que también necesita estar segura de lo que va a hacer, por eso espera a la última pieza, a diferencia de Edgar, que entra con rapidez en la línea 94, y cometer un error en la línea 96 no lo deja fuera de la resolución. Es decir, interviene en el momento exacto que hay después de que sabe que esa pieza va ahí, pero antes de que la tome el otro. Como señala Erickson (1982), la capacidad de improvisar es fundamental en clase, y hacerlo, en particular hacer un uso estratégico del tiempo, requiere echar mano de conocimientos tanto de la tarea académica como de la lógica de distribución de derechos y obligaciones relativos a la interacción social.

Ya que he analizado el fragmento paso a paso, quiero comentar cinco aspectos que lo atraviesan: la centralidad de los triángulos grandes, la manera en que se van modificando el espacio matemático y el medio de los alumnos, el papel de la observación de Angélica y la forma en que se juega la devolución del problema.

Los triángulos grandes tienen un papel crucial a lo largo de la resolución. En uno de los primeros intentos, uno de esos triángulos queda al final, y no cabe en el espacio por cubrir (línea 81). Después Alonso pone los dos juntos, es decir, correctamente, pero al no tomar eso como prioritario, al no modificar ninguna otra cosa hecha por Angélica, nuevamente no se pueden guardar las siete piezas (líneas 83-88). Finalmente, cuando entra Edgar, Alonso defiende la posición de uno de esos triángulos y, a partir de ahí, ya no es la última pieza sino una de las primeras. A esa se van agregando otras cinco, hasta que el tangram queda guardado.

El acierto de comenzar por acomodar los dos triángulos grandes fue para Angélica muy específico de su resolución en el pato, quizás porque en el pato hay una región claramente más grande que otra, cosa que no tiene el molde cuadrado: es posible que una zona más grande invite a cubrirla con las piezas más grandes. En el capítulo anterior explico que, en la siguiente clase, los triángulos grandes se vuelven problemáticos también para Axel y Jorge en una plantilla muy distinta, en la cual esos triángulos solo caben en un único lugar que además está en cierta medida oculto, no se ve con claridad. La importancia de los triángulos grandes se juega al resolver, pero pasa desapercibida para los alumnos en los tres casos. Al no distinguir, en medio de todo lo que ha pasado al ocuparse de la plantilla, que poner primero los dos triángulos grandes fue un paso importante, o que dejarlos al final dificultó la resolución, y al no poner eso en palabras, se desvanece y no se puede reutilizar en los nuevos problemas. Perrin-Glorian (1994) encuentra que este es un fenómeno crucial en la actividad de los alumnos “débiles”: los conocimientos que producen suelen quedarse en el problema particular en el que se ponen en juego, no se reutilizan en las siguientes tareas, así que pareciera que resuelven una nueva cada vez. Sensevy et al (2002), describen a un maestro para el cual hacerse cargo de la heterogeneidad de alumnos implica fundamentalmente promover la intensificación de los intercambios entre sus producciones a propósito de tareas que puedan abordar. Parece sensato buscar la explicitación en las puestas en común de características que, de manera muy implícita, cobran importancia en las distintas plantillas, es decir, se repiten en la experiencia. Esto podría contribuir a mantener en la clase a los alumnos con dificultades. Al mismo tiempo, no se ve fácil de lograr: ¿cómo podrían Angélica, Alonso y Edgar traducir algo caótico, desordenado, en algo como «primero no cabía el romboide, luego el triángulo, luego…», y después eso en algo como «dejar un triángulo grande al final hace el problema más difícil»? Es decir, ¿cómo podrían identificar que esa pieza es clave, y que lo es por su tamaño, no por otra característica? ¿Cómo podría ayudar la maestra, si no ha visto el procedimiento? ¿Bajo qué condiciones sería posible reconocer que, en las tres plantillas tan distintas, está pasando algo parecido, que en las tres conviene empezar por poner los dos triángulos grandes?

A partir de que Edgar interviene en el turno 94, la interacción inicial entre Alonso y Angélica se desliza hacia una entre Edgar y Alonso. La discusión sobre los triángulos grandes y el romboide es entre ellos, el interlocutor principal de cada uno es el otro, y Angélica es prácticamente desplazada de la resolución. Es decir, cambia la distribución de lo que le toca a cada uno de los tres en la resolución, el margen que tienen en ella, su espacio matemático, lo que Chevallard (1997) llama *topogénesis*: Edgar, quien no figuraba, acaba resolviendo una parte importante; Angélica, la responsable original, termina por quedar muy al margen; y Alonso, quien trataba de ayudar a Angélica y también de responderse por qué no había similitud entre las dos configuraciones, deja ambas cosas de lado y resuelve a partir del comienzo que marca Edgar.

Para entender cómo pasa esto, quiero contrastar primero la velocidad con la que actúan los tres alumnos, es decir, qué tan rápido ponen o quitan piezas, las cambian de lugar o de orientación, o bien recurren al molde para verificar. Cuando Alonso le ayuda a Angélica, va más o menos a su ritmo. En los momentos en los que ella actúa sola o interactúa con él, hacen en total 16 movimientos en 67 segundos. En cambio, cuando interactúan Edgar y Alonso, hacen 34 movimientos en 23 segundos[49]. Es decir, ellos van casi cuatro veces más rápido[50], y también hablan más. Es probable que a Angélica le cueste entender lo que hacen, porque son muchas cosas en poco tiempo. Alonso, en cambio, acelera su ritmo, lo cual le implica centrarse en lo que hace Edgar y dejar de lado a Angélica.

Cuando el tangram de Angélica queda finalmente guardado, Angélica no avisa feliz “¡Ya me saliooooó!”, como lo hizo al hacer el pato (línea 52) y el gato (línea 74). Quizás esta diferencia se debe a que ella no reconoce esta tarea como matemática: no es que la maestra haya asignado una consigna de hacer un cuadrado con las piezas, sino que tenían que guardar el tangram en la caja porque ya es el final de la clase y es importante cuidar el material. De hecho, incluso la manera de intervenir de Edgar, tan rápida y sin preocuparse porque Angélica entienda lo que hace, puede deberse a esto mismo. Es decir, es posible que las interacciones cambien cuando la tarea es guardar un material y no algo identificado como un ejercicio matemático. Quizás también pasa que Angélica no reconoce la resolución como suya. Y esto no tiene que ver con la idea de que tendría que hacerlo completamente sola, pues en el primer episodio recibe ayuda de Arturo y la observadora, y ella considera que ha logrado resolver. Más bien tiene que

---

[49] Para lograr claridad en el registro, no están anotados todos estos movimientos.
[50] El número de movimientos por segundo en ambas interacciones está en razón de 3.82.

ver con que en la parte que llevó a terminar esta tarea, ella solo puso la última pieza. En cambio, Edgar y Alonso sí se atribuyen la resolución, y tienen una disputa al respecto. Primero cada uno reclama al otro (líneas 107 y 108), después cada uno deja claro algo de lo que hizo (líneas 109 y 110): Edgar acomodó el romboide, Alonso los triángulos pequeños. A diferencia de Axel y Jorge en el capítulo anterior, en el que cada uno reconoce que su aporte proviene de lo que hizo el otro, ahora Edgar y Alonso protestan justo por no recibir ese crédito. Para los alumnos es importante que se reconozca no solo la producción sino también al productor. Cuando encuentro interacciones como esta, me hace sentido la preocupación de Sokolowicz, Spindiak y Terigi (2017) por tomar las interacciones sociales como objeto de enseñanza para los alumnos. Esas interacciones cotidianas entre alumnos, que ocurren todo el tiempo y que no están abarcadas desde el diseño del problema también se aprenden: cómo ayudar a otro sin darle la respuesta, cómo distribuirse las tareas, cómo formular lo que una pareja va a compartir con otra.

En el transcurso de este episodio, Angélica comienza resolviendo sola, después Alonso le ayuda y finalmente Edgar y Alonso se hacen cargo, con lo cual ella queda relegada a observar. Esta observación es muy distinta de la que describe Paradise (1991), la cual constituye una estrategia de aprendizaje socialmente reconocida entre grupos mazahuas que permea la escuela. Ahí los alumnos que no saben cómo hacer algo se quedan sentados quietos, mirando alrededor, con su tarea sin realizar. Frente a eso, otro niño que sabe cómo resolver, se encarga del trabajo del primero, sin explicación. Así, el que no sabe tiene la responsabilidad de observar atentamente para poder hacerlo cuando se le demande después. Paradise señala que esta práctica se apoya en la autonomía y la capacidad de iniciativa que se espera que los niños desarrollen. Aquí, Angélica es orillada a observar, pero al hacerlo también consigue atrapar un momento para intervenir, entrar nuevamente al espacio del que ha quedado fuera. No observa para poder reproducir después, sino para participar ahora. Y Edgar no se hace cargo del problema con la intención de que Angélica aprenda, se responsabilice de observar y construya autonomía. Le importa el problema, no quien debe resolverlo.

La observación de Angélica en este caso no es entonces la estrategia de aprendizaje que enfatiza Paradise (1991). Más bien, tiene que ver con la manera en que opera la devolución: los tres alumnos de este episodio se interesan por hacer el cuadrado. Cuando alguno termina, se responsabiliza también del asunto de Angélica, que no ha acabado. Los tres tienen que lograr mantenerse en ese armado. Edgar entra cuando hay incertidumbre (línea 94) y después interpela a sus compañeros para que lo dejen seguir poniendo piezas (línea 100). Alonso explica lo que hace, pide disculpas al intervenir en un problema que de entrada no es su responsabilidad (líneas 83 y 91), y posiciona enérgicamente su manera de orientar una pieza (líneas 97 y 99). Angélica se niega a darle una pieza a otro porque quiere ponerla ella (líneas 82 y 86), y se adelanta a los otros cuando está claro el lugar de una pieza (línea 106). Si Angélica queda fuera de la resolución a partir de cierto momento no es porque no quiera hacerse cargo del problema, es decir, porque la devolución no funcione con ella, sino porque funciona con los tres, y cada uno tiene distintas anticipaciones que probar. Es decir, porque no hay espacio para todos. Nuevamente, me parece útil pensar la noción de devolución a la luz de lo que ocurre en las interacciones sociales. El maestro tiene que convencer a sus alumnos de estudiar cierta cosa de cierta manera, pero los alumnos también tienen que actuar para conseguir y sostener esa posibilidad. Dicho de otro modo, “a menos que los (alumnos) (…) *vayan por la zona (de desarrollo próximo)* en el tiempo real, la *zona* nunca ocurre” (Erickson, 1996, p. 59). Y de otro modo: el espacio físico de resolución de un problema -en este caso la caja y las siete piezas del tangram- es, como el territorio, como el espacio público, objeto de disputa.

Finalmente, quiero destacar cómo va cambiando el medio con el que interactúan los tres alumnos. La tarea por resolver, común para los tres, hacer un cuadrado con las siete piezas, va generando otros asuntos, distintos para cada uno. Para Angélica, el primer tropiezo la hace encontrarse con una pieza y un hueco sin cubrir que tienen un ángulo agudo y sin embargo no embonan, o bien, con que la última pieza por poner no cabe en el último espacio por cubrir, ni siquiera después de girarla y reflejarla, algo que no le había pasado con las plantillas anteriores. Ahora le sucede incluso cuando, ella primero, y después Alonso, cambian un poco el arreglo de las primeras seis piezas, incluso cuando la última pieza por poner es otra. Mientras tanto, están en juego también sus decisiones respecto a Edgar y Alonso que quieren intervenir: ella a veces se los permite, otras los frena, otras veces no le da tiempo de reaccionar. La entrada de Edgar la deja frente a cuatro manos moviendo piezas rápidamente y dos voces discutiendo. No puedo saber qué recibe ella de todo eso, salvo la certeza de la última pieza que, esta vez, sí cabe en el hueco que falta por rellenar.

Para Alonso suceden otras cosas. Hacer primero su cuadrado, observar después a Angélica y ver el efecto de la ayuda que le ofrece, le plantean algo nuevo: aun poniendo los dos triángulos grandes juntos, no se puede resolver. En este momento, Angélica está en el medio de Alonso. Es a partir de los movimientos de ella que él propone el nuevo acomodo del triángulo grande, encuentra que eso no conduce a terminar, y no puede hacer un nuevo cambio en la configuración porque Angélica lo detiene. Recurre entonces al modelo para poder comparar, y encuentra otra cosa nueva: a pesar de que en las dos cajas los dos triángulos grandes están juntos, los arreglos no coinciden. La entrada de Edgar deja esas dos cuestiones en suspenso. A partir de ahí, los dos alumnos prácticamente reproducen el modelo pieza por pieza, partiendo de un triángulo grande. Angélica se desvanece del medio de Alonso, ella permanece en calidad de dueña de la caja, a quien hay que pedir permiso para maniobrar con las piezas.

A Edgar, los reiterados tropiezos de sus compañeros lo llevan a empezar todo de nuevo. Resuelve con una mezcla de azar y de recurrir al modelo, especialmente cuando hay tensiones con Alonso. Edgar y Alonso consiguen hacer el cuadrado en una especie de estira y afloja: uno deshace algo, el otro lo admite, uno deshace todavía más, el otro confronta, uno vuelve atrás, luego agrega otra cosa con sutileza… hasta terminar. Como Axel y Jorge en el capítulo anterior, cada uno agrega algo a lo hecho por el otro: Alonso pone un triángulo grande, Edgar le pega el otro y el romboide, Alonso reacomoda los dos triángulos chicos, finalmente Angélica pone el último triángulo. Ponen piezas una por una, hasta terminar. Pero, a diferencia de Axel y Jorge, ellos no reconocen que su aporte proviene del otro, y varios movimientos son objeto de tensión, de una pequeña disputa. Candela (2001) explica que el conflicto provoca que los alumnos desarrollen y desplieguen recursos discursivos para negociar los contenidos con quienes tienen un punto de vista que se opone al propio. Así me parece que Edgar y Alonso definen la posición de los triángulos grandes y el romboide, piezas clave. Esos recursos incluyen, en este caso, a la verificación empírica, que ocurre cuando ambos van al modelo ya armado para discutir sobre el romboide.

Además de aprender a negociar, a posicionar sus anticipaciones, Edgar y Alonso también aprenden sobre el contenido al ayudar a Angélica, igual que antes Arturo pudo cubrir el pato rápidamente después de hacerlo con ella. Edgar se entera de cómo va un triángulo grande, Alonso de cómo unirlo al otro para que quede como el modelo; Edgar aporta el lugar y posición del romboide, Alonso el de los triángulos pequeños. Tener éxito en un problema y luego intervenir en la resolución de un par que no ha conseguido terminar, no implica repetir lo mismo que se hizo antes, sino elaborar algunas cosas nuevas.

3.1.4 Angélica observa cómo otros hacen otro cuadrado

Un poco después de que el tangram de Angélica queda guardado en el episodio anterior, ella se acerca a mirar cómo Arturo, su compañero de equipo, y Juan David, tratan de guardar sus tangram con ayuda de Luis (ver capítulo anterior). La caja que tienen Arturo y Juan David es distinta a la de Angélica. También es cuadrada, pero de tamaño más pequeño, así que no se ponen todas las piezas en una sola capa sino en dos (Imagen 121). Además, caben dos tangram en cada caja, en este caso tienen que poner todas las piezas de Arturo y Juan David. Entonces el problema consiste en hacer cuatro cuadrados con las catorce piezas de dos tangram.

Imagen 121

Antes de que Angélica se acerque a mirar, Arturo y Juan David intentan cinco veces guardar sus rompecabezas. Cada vez forman primero un cuadrado con dos triángulos grandes, y luego no encuentran cómo hacer el segundo usando otras piezas. La observadora pide a Luis que les ayude, y Arturo trata de detenerlo para que no empiece desde cero, le explica lo que le preocupa: él tiene una manera de formar un cuadrado (Imagen 122) pero ocupa cuatro triángulos chicos, es decir, todos los de los dos tangram, lo cual será un problema al guardar las piezas que restan. Mientras está mostrando eso, llega Angélica, y se esfuerza por mirar a pesar de que la tapa de la caja verde le bloquea la vista:

> *111. Arturo [a Luis]: (…) y aquí va otra (pieza) [señala uno de los dos espacios que se ven en la imagen 39 donde no puso ninguna pieza], sería [Luis pone otro triángulo pequeño arriba a la derecha, imagen 123], a ver yo, a ver, es que a mí me faltarían PIEZAS [se encoje de hombros]*

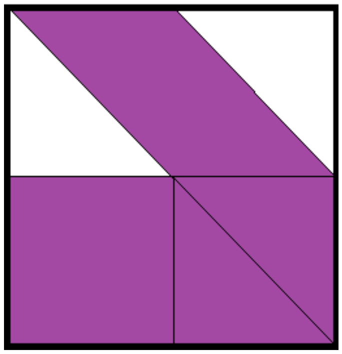


Imagen 122

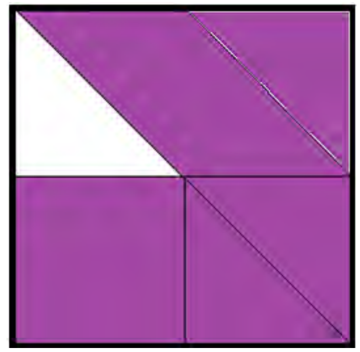


Imagen 123

112. Angélica: aquí va otra [señala el espacio que no ha sido rellenado, donde cabe el último triángulo pequeño]

113. Arturo [a Luis]: [pone el triángulo pequeño donde señaló Angélica, con ello se completa una capa] a mí me faltarían piezas [llega Alonso a ver qué está pasando], o sea sí cabe, pero a MÍ me faltarían piezas

114. Alonso: a ver

115. Luis: cómo que te faltarían piezas

116. Arturo: me faltan chiquitas de estas [señala un triángulo pequeño]

117. Luis: ¿cuántas tenías?

118. Arturo: pus son dos… [Angélica se acerca más a la caja, imagen 124] y aquí ya hay tres (…) aquí ya están mis, mis do… son, aquí ya están las dos de él [señala a Juan David] y las dos mías [Alonso se acerca más a la caja]


Imagen 124

Angélica señala que hay un espacio en blanco donde cabe una pieza (línea 112). Pero Arturo sabe muy bien que el triángulo pequeño cabe ahí y de hecho va más allá: no lo ha puesto porque eso implicaría dejar incompleto el segundo tangram, el suyo. Es decir, Angélica llega a la discusión cuando ya está muy avanzada, entonces su participación no representa un aporte para Arturo. Él de todas maneras le hace caso y pone la pieza (línea 113): acepta la presencia de ella ahí, pero explica por qué no es pertinente esa recomendación. Arturo se dirige a Luis, no a ella, es decir, le habla a quien la observadora ha designado para intervenir, a quien lleva más tiempo ahí, a quien puede cambiar el curso de la resolución que él ha puesto en juego (explico esto en el capítulo anterior). Al margen de todo esto, Angélica se acerca más, parece interesada (Imagen 124). Arturo se muestra tranquilo con la presencia de Angélica, en cambio está un poco ansioso ante la de Luis, a quien de hecho trata de detener. Después, Juan David hace una capa con puros cuadrados:

119. Juan David saca el romboide y los dos triángulos chicos de arriba de la capa de piezas que terminó de armar Arturo en la línea 113, y deja la parte de abajo [Imagen 125]

120. Juan David desliza el cuadrado hacia arriba, luego hacia abajo, como estaba

121. Juan David [a Arturo]: a ver presta [toma los dos triángulos chicos que tiene Arturo en la mano, hace con ellos un cuadrado y lo pone en la esquina superior izquierda de la caja, imagen 126]

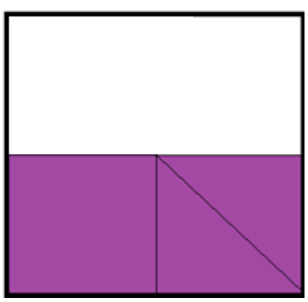


Imagen 125

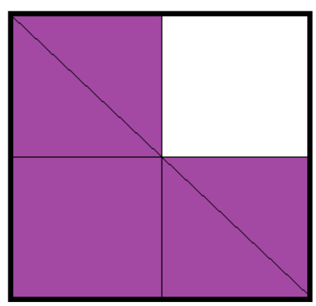


Imagen 126

(…)

122. Juan David [a Arturo]: a ver, el otro cuadrado [Arturo le entrega el cuadrado de su tangram]

123. Juan David pone el cuadrado de Arturo y termina la capa

124. Angélica: [presiona el último cuadrado que puso Juan David para que embone bien] ¡todos de a cuadrado!

Nuevamente, la intervención de Angélica en la línea 124 no representa un aporte para sus compañeros, es un señalamiento de lo que acaba de hacer Juan David. Pero observar le contribuye a ella misma: acaba de notar que se puede formar una capa con puros cuadrados. Notar esto no es nada fácil, pues las acciones de Juan David no son tan ordenadas como las acabo de describir y se mezclan con lo que hacen los otros alumnos que están ahí. Entre la línea 113 -cuando se completa la capa de Arturo- y la 124 -cuando se desarma la capa de Arturo y se hace la de Juan David- pasa todo esto:

- Juan David cuenta las piezas, señala una por una con el dedo
- Luis pone un triángulo mediano, lo gira y desliza, lo quita
- Alonso señala el otro triángulo mediano que está fuera de la caja
- Luis toma el romboide que está fuera de la caja y lo usa para señalar y contar las piezas puestas
- Juan David pone un cuadrado en la caja, Luis lo desliza, Juan David lo saca de la caja
- Luis intenta poner otra vez el triángulo mediano, Juan David se lo quita y lo saca de la caja
- Juan David saca de la caja un romboide y dos triángulos pequeños (línea 119), luego vuelve a poner el romboide
- Arturo toma una de las piezas que están fuera de la caja
- Juan David vuelve a sacar el romboide de la caja
- Juan David desliza un cuadrado que está en la caja hacia arriba, luego hacia abajo, donde estaba (línea 120)
- Alonso toma el otro cuadrado y lo pone en la esquina superior derecha de la caja, Arturo le dice que "no porque ya serían dos (cuadrados)" y lo quita
- Juan David le pide a Arturo sus dos triángulos pequeños (línea 121), hace con ellos un cuadrado y lo pone en la esquina superior izquierda
- Alonso toma un romboide, lo trata de poner en la caja, Juan David se lo quita
- Arturo toma piezas que están fuera de la caja para separar su tangram del de Juan David
- Juan David le pide a Arturo el otro cuadrado, Arturo se lo da (línea 122)
- Juan David lo pone y termina la capa (línea 123)

Muchas de estas acciones ocurren simultáneamente, mientras Arturo, Luis y Alonso siguen hablando del asunto de los triángulos chicos y tratan de distinguir las piezas de

Arturo de las de Juan David. Quizás Angélica no va siguiendo todos esos movimientos, ni seleccionando lo que tiene que ver con los cuadrados, pero notar esa capa de Juan David es ver algo que dura muy poco tiempo entre un mar de cosas más. Después, Luis y Alonso se van, Arturo y Juan David intentan un poco más hasta que Arturo convoca a Dana, que ya logró guardar sus piezas en una caja igual a la suya. Mientras lo hace, Arturo, Juan David y Angélica la observan. Angélica se acerca aún más a la caja. Cada vez que alguien la mueve, ella la sigue con la cabeza y la vista: está atenta a las acciones de Dana y sus compañeros que a veces intervienen. Dana guarda todas las piezas, Arturo cierra la caja y la lleva a la maestra.

En este episodio, Angélica no es relegada a observar, como en el anterior. Más bien lo hace por iniciativa propia. Sus compañeros van a un ritmo rápido, en el tangram hay tantas manos que resulta difícil ver qué piezas se mueven, a veces incluso la tapa de la caja obstaculiza la vista, se habla de varias cosas simultáneamente. Pero ella se queda ahí, se acerca más, mueve la cabeza hacia donde se mueve la caja, dice una cosita y otra. Lo hace a pesar de que su tarea ya está resuelta, quizás porque en ella participó poco y se quedó con ganas de más, tal vez también porque se dio cuenta de lo difícil que es la tarea, o simplemente porque ve mucho movimiento cerca de ella y eso le da curiosidad. Esta observación tan interesada es mucho más de lo que hace Angélica después, en una clase de fórmulas en la que me siento junto a ella. Ahí no intenta resolver por cuenta propia, tampoco observar lo que hacen los otros. Al ser tareas tan inaccesibles para ella -en parte por las características de las tareas, en parte por sus ausencias frecuentes- no puede abordarlas ni seguir lo que hacen sus compañeros.

La observación de Angélica esta vez es más cercana que la del episodio anterior a las que describe Paradise (1991), en tanto parece responder a un interés por seguir aprendiendo. Pero se distingue de ellas en dos cosas. Por un lado, Angélica no recurre a la observación al no poder con la tarea, sino después de que queda resuelta. Observar no es una manera de pedir ayuda para poder hacerlo luego sola. Por otro lado, sus pares están ocupados en resolver, no en hacer que ella entienda. No es que hagan algo que ya saben hacer para mostrarle a ella, al contrario, no saben cómo hacerlo. Tanto que, ellos mismos acaban pidiendo ayuda, terminan por observar cómo resuelve Dana. Si bien la participación de Angélica no les ayuda, tampoco les incomoda que esté ahí, la dejan estar, acercarse, tocar piezas y dar sugerencias, sin sancionar.

3.2 Conclusiones del capítulo

Desde las primeras veces que revisé los videos y notas de clase, elegí analizar estos fragmentos en los que participa Angélica. En ese momento entendía muy poco de lo que ahora he descrito. Lo que veía eran muchas interacciones sociales que iban desde la ayuda hasta la "pelea" por turnos, es decir, muy diversas. Veía también que los problemas con el tangram que planteó la maestra eran abordables por Angélica, una niña que ya me habían referido como una alumna con dificultades y a la que yo había observado en una clase de fórmulas en la que no tenía manera de producir respuesta alguna. Esta vez sí estaba implicada en el problema, pero ahí en su mismo tangram también movían piezas y opinaban otros niños, por momentos mucho más rápido que ella. Interpreté, muy directamente, que Arturo, Alonso y Edgar eran esos "turn-sharks" descritos por Erickson (1996), y que eso se debía fundamentalmente a la percepción devaluada que el grupo tenía de Angélica. En los primeros borradores de este capítulo, el título comenzaba con la frase "Nadar entre tiburones", caracterizando de esa manera todas las interacciones entre Angélica y sus tres compañeros.

En ese tiempo me parecía muy difícil dar cuenta tanto de los conocimientos en juego como de las interacciones sociales. En el capítulo anterior me pasaba lo mismo, cuando lo intentaba explicaba primero cómo se gestaba un conocimiento, y después cómo habían intervenido las interacciones sociales en esas producciones. A fin de cuentas, separaba las dos cosas en distintos párrafos. Pensé en resolver esa complejidad con una bifurcación tajante, que no dio buen resultado y después modifiqué: dar cuenta de los conocimientos que comienzan a emerger con las actividades del tangram en el capítulo anterior, y centrar este capítulo en el análisis de las interacciones sociales que tienen un papel en esa emergencia sin considerar los conocimientos ni las características de los problemas.

Así, en el fragmento de registro que corresponde al primer episodio de este capítulo, escribí:

> "Angélica ha intentado varias maneras de colocar sus piezas en el pato, y tiene algunas ya puestas, pero en el espacio que queda en blanco no caben las demás (Imagen X). Pregunta a Arturo: *¿cómo te salió?*"

Es decir, resumí en tres renglones lo que ahora tengo en las líneas 1, 2, 3, 6, 12, 13, 18 y 19 del registro, en las que explico todo lo que hizo Angélica en esos "varios intentos" antes de pedir ayuda: cubrió todos los ángulos agudos de la plantilla con ángulos agudos de triángulos, cubrió la zona más grande de la plantilla con piezas tal vez elegidas al azar y después con las más grandes, regulaba que cada nueva pieza que acomodaba no dejara huecos en blanco respecto a las colocadas anteriormente y al borde, ponía las piezas organizadamente, una por una de abajo hacia arriba. Omitir todo este trabajo me llevó a interpretar solamente que Angélica, frente a la retroacción del medio que deja claro que algo está mal pero no permite saber por dónde seguir, pidió ayuda. No vi que ella en realidad tuvo esa retroacción varias veces, y todas ellas modificó su procedimiento por cuenta propia. Pensé que había pedido ayuda al primer tropiezo, y que Arturo, frente a la inseguridad de Angélica, la había desplazado de la resolución, le había quitado la posibilidad de actuar sobre el problema para hacerlo él. No vi que Angélica estaba muy implicada en el problema e hizo todo lo posible por resolver ella misma, puso a prueba varias anticipaciones, cuando pidió ayuda se mantuvo en la resolución regulando lo que hacía Arturo y después también poniendo piezas. Tampoco vi que Arturo intervino cuando fue convocado y aceptaba las correcciones de Angélica. Es decir, dejar de lado los conocimientos matemáticos que movilizaban tanto Angélica como los demás, no me permitió entender lo que pasaba en las interacciones sociales. Pasar por alto la actividad matemática de los alumnos me condujo a no poder entender la agencia de Angélica, desde dónde pide ayuda y por qué la pide, cómo se la dan y cómo la recibe.

En pocas palabras, si en el capítulo anterior explico que para describir cómo se gesta un conocimiento me resultó indispensable dar cuenta de las interacciones sociales, en este ocurre lo recíproco: no pude analizar las interacciones sociales sin considerar los conocimientos matemáticos puestos en juego y las características de los problemas. La relación entre ambos es necesaria para poder entender los diversos matices en las resoluciones de los cuatro episodios.

Las situaciones implicadas en dichos episodios tienen dos características en común que son centrales para el trabajo matemático de Angélica. En primer lugar, contienen problemas accesibles, ella puede entender las consignas, poner en juego procedimientos propios, identificar si comete errores a partir de la plantilla o la caja. En segundo lugar, permiten que Angélica haga la misma actividad que sus compañeros, pero sin la exigencia de resolver cada tarea al mismo tiempo que los demás. Esto tiene distintas implicaciones. Por una parte, aunque la consigna sea igual para todos, hay una diferencia entre lo que tienen que sortear los alumnos. Luis solo se ocupa de resolver el problema; a Alonso le importa, además, ser el primero en terminar; y Angélica resuelve mientras los otros dejan claro que terminaron antes, que la resolución es fácil, asumen que ella quiere copiar y que la copia es una falta. Esto último también le toca a Arturo en el primer episodio: la presión por el tiempo, la habilidad y el trabajo individual no son expectativas dirigidas particularmente a los alumnos con dificultades, son más bien ideas sobre el aprendizaje que permean la actividad de todo el grupo. Pero a Arturo le toca escuchar eso en el primer episodio, a Luis en ninguno y a Angélica en tres. A Alonso, el tiempo le sirve para mostrar superioridad, en cambio a Angélica, la presión del tiempo atrasado la pone en desventaja. Es decir, a diferencia de sus compañeros, Angélica tiene que lidiar con ser una alumna que resuelve más despacio que los demás, en “un sistema en el que la velocidad de aprendizaje más que el aprendizaje es la medida absoluta del aprendiz” (McDermott, 2001, p. 272).

Por otra parte, la preocupación por aprender rápido y ser capaz de resolver correcta e individualmente no son permanentes. Al contrario, coexisten con el tiempo que la maestra gestiona para que unos alumnos puedan terminar de resolver un problema mientras los que ya acabaron sigan con otro, con las peticiones frecuentes de ayuda y las numerosas veces que un alumno se levanta a ver cómo están resolviendo los demás. Estar en la misma actividad que sus compañeros, sin la exigencia de resolver al mismo tiempo -es decir, con la posibilidad de tardarse más, por ejemplo, con el gato- permite que Angélica identifique hasta dónde puede seguir sola, pida ayuda y la reciba, observe lo que hacen sus pares y busque la manera de conseguir turnos. Aunque ya mostré que tanto la ayuda como la observación son complejas y tienen distintas aristas, son también fuente importante de aprendizajes. Coincido con Broitman, Cobeñas, Escobar y Grimaldi (2018), cuando afirman que la decisión de asignar tareas diferenciadas o incluso fuera del aula a los alumnos con discapacidad no es muy afortunada porque dificulta la posibilidad de que estos niños interactúen con sus pares que no tienen discapacidad a propósito de asuntos matemáticos. Lo mismo para los niños que no tienen discapacidad sino rezago o dificultades. En síntesis, los episodios de este capítulo dejan ver que elegir tareas accesibles para todos, buscar que todos participen en la misma actividad y al mismo tiempo alargar el tiempo de resolución para quienes lo necesiten, es complejo, pero tiene ventajas: ella resuelve con ayuda el problema intermedio -el pato-, de manera autónoma el problema más fácil -el gato-, sus compañeros se hacen cargo del más difícil -el cuadrado-, y puede observar cómo otros resuelven también el más difícil. Por supuesto, la condición de tener una actividad común para que todos sepan de qué se habla y al mismo tiempo dar a cada quien el tiempo que necesite, plantea una tensión muy difícil de resolver para la maestra y también para el diseño curricular.

Vuelvo a la relación entre el contenido matemático y las interacciones sociales. Para poder explicarla, fueron indispensables tanto el acercamiento desde la didáctica como desde teorías socioculturales. Por un lado, fue necesario pasar de mirar acciones tan simples como tomar una pieza, ponerla en la plantilla, girarla, reflejarla, deslizarla, o simplemente ver las manos de los alumnos que no dejan de moverse en el rompecabezas, a entender por ejemplo que deslizar una pieza puede provenir de seleccionar un ángulo recto y verlo tanto en la pieza como en la plantilla. Detrás de las acciones y discusiones de los alumnos hay ciertamente mucha casualidad, mucho ensayo y error, pero también está la selección, muy implícita, de un tipo de ángulos, un tamaño de pieza, un lado, la consideración de la simetría. Para observar esto no podía recurrir a textos que de manera genérica hablan de la importancia del contenido en las interacciones sociales. Fueron indispensables algunos estudios específicos de didáctica de la geometría y el espacio que me permitieran entender la complejidad del "acto de ver" (Duval, 2005; Duval y Godin, 2005; Fregona, 1995; Perrin-Glorian y Godin, 2018; Salin, 2004). Por otro lado, para entender cómo los alumnos buscan el momento oportuno para intervenir, cómo tratan de convencer a sus pares de que les permitan seguir participando en la resolución de sus problemas, cómo se juega en esas resoluciones la prisa por resolver antes que otros, fueron indispensables los análisis de interacciones en el aula desde perspectivas socioculturales. Los dos acercamientos se han ido tejiendo. Por ejemplo, al inicio yo había interpretado que Arturo era un "tiburón de los turnos". Pasar a otra explicación más adecuada implicó analizar la tarea para ver que la ayuda que en ese momento era ideal para Angélica consistía en indicarle dónde y en qué posición va el romboide y dejarla terminar sola, pero era imposible que Arturo supiera eso. Por eso la ayuda que él estaba en condiciones de dar era resolver él mismo. Entender la intervención de Arturo también implicó dar más peso a la petición de ayuda de Angélica. Es decir, mirar el contexto de la interacción: no es que Arturo estaba buscando la oportunidad para entrar al problema, es que fue convocado. Es decir, una misma acción, la decisión de Arturo de continuar resolviendo el problema de Angélica, se explica tanto por las interacciones sociales como por el procedimiento matemático y las características de la tarea.

CAPÍTULO 4

LAS FÓRMULAS, UNA POSIBILIDAD DESIGUAL DE APRENDIZAJE

Casi al final de la última clase, Miranda me pregunta cómo puedo escribir en la computadora sin ver el teclado. Junto a ella están Luis y Danna. Hacemos un trato: ellos me dictan y pueden ver en la pantalla lo que escribo, pero tiene que ser algo de la clase. Otros niños se acercan a ver también. En esa clase establecen la fórmula del área de polígonos regulares y después la aplican. El último problema que les ha planteado la maestra consiste en determinar el área de un terreno octagonal de 12 metros de lado y 6 metros de apotema. Miranda empieza a dictar:

Miranda: ¡ah! este primero vamos a hacer el pentágono y luego vamos a multiplicar los lados por perímetro... Sobre dos… ¡ahhhhh!, perímetro bla bla bla ya me hice bolas, y luego…

(…)

Danna: ¡no please[51] *yo no no no no no! [Ríe]*

(…)

Luis: ah bueno primero tenemos que sacar el perímetro que sería ehhh… la medida de los lados que es doce poooor ocho que es el número de lados del octágono y entonces eso lo multiplicamos por seis, que es el apotema y luego eso lo dividimos entre dos que eso daría el área

El contraste entre estas formulaciones es grande. Luis relata perfectamente el procedimiento que describe la fórmula, Miranda tiene alguna idea de los términos implicados en ese procedimiento y los combina como puede, y Danna -quien mientras se establecía la fórmula estaba ocupada con el trazo del polígono-, prefiere no ponerlo en palabras.

Este episodio del dictado me permite explicar el argumento que trataré de probar en este capítulo: la manera en que se estudian las fórmulas en este grupo, tensionada por una serie de condiciones institucionales de enseñanza, aumenta la diferencia entre los alumnos en términos de acceso a los conocimientos escolares, y es uno de los factores que generan exclusión de algunos.

[51] Por favor, en inglés.

La producción y uso de fórmulas para calcular áreas es un tema muy importante para la maestra por varias razones: es un asunto central en las lecciones del libro de texto Gader (Rincón y Rincón Ávila, 2014) con el cual ella se orienta mucho más que con el libro de texto gratuito, aparece en reactivos de la *Olimpiada del Conocimiento* -concurso oficial en el que sus alumnos participarán el siguiente año-, y es un tema del cual considera necesario dar cuenta a los padres de familia y a sus colegas. Por otro lado, los alumnos tienen posibilidades muy desiguales de acceder a las tareas que les asignan: muy pocos pueden entender y utilizar las fórmulas.

4.1 Las clases observadas

Trece de las dieciocho clases apuntan hacia el estudio de fórmulas para calcular áreas de figuras. Las describiré brevemente en este apartado, con la intención de dar un panorama general del transcurso de esas clases, sin analizarlas todavía. En las primeras dos, la maestra retoma del taller de medición para docentes algunas actividades con el geoplano. Son tres problemas, en cada uno se da una hoja en la que están trazadas varias figuras del mismo tipo -rectángulos, romboides o triángulos- y se pide determinar cuáles tienen la misma superficie (Imágenes 127, 128 y 129). Los alumnos pueden usar ligas y un geoplano.

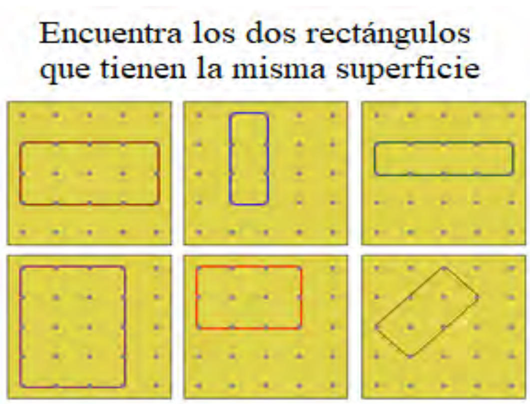


Imagen 127

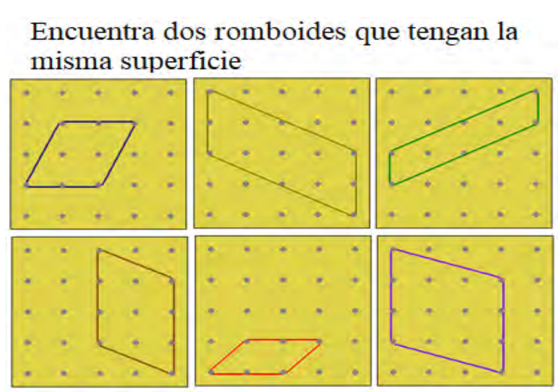


Imagen 128

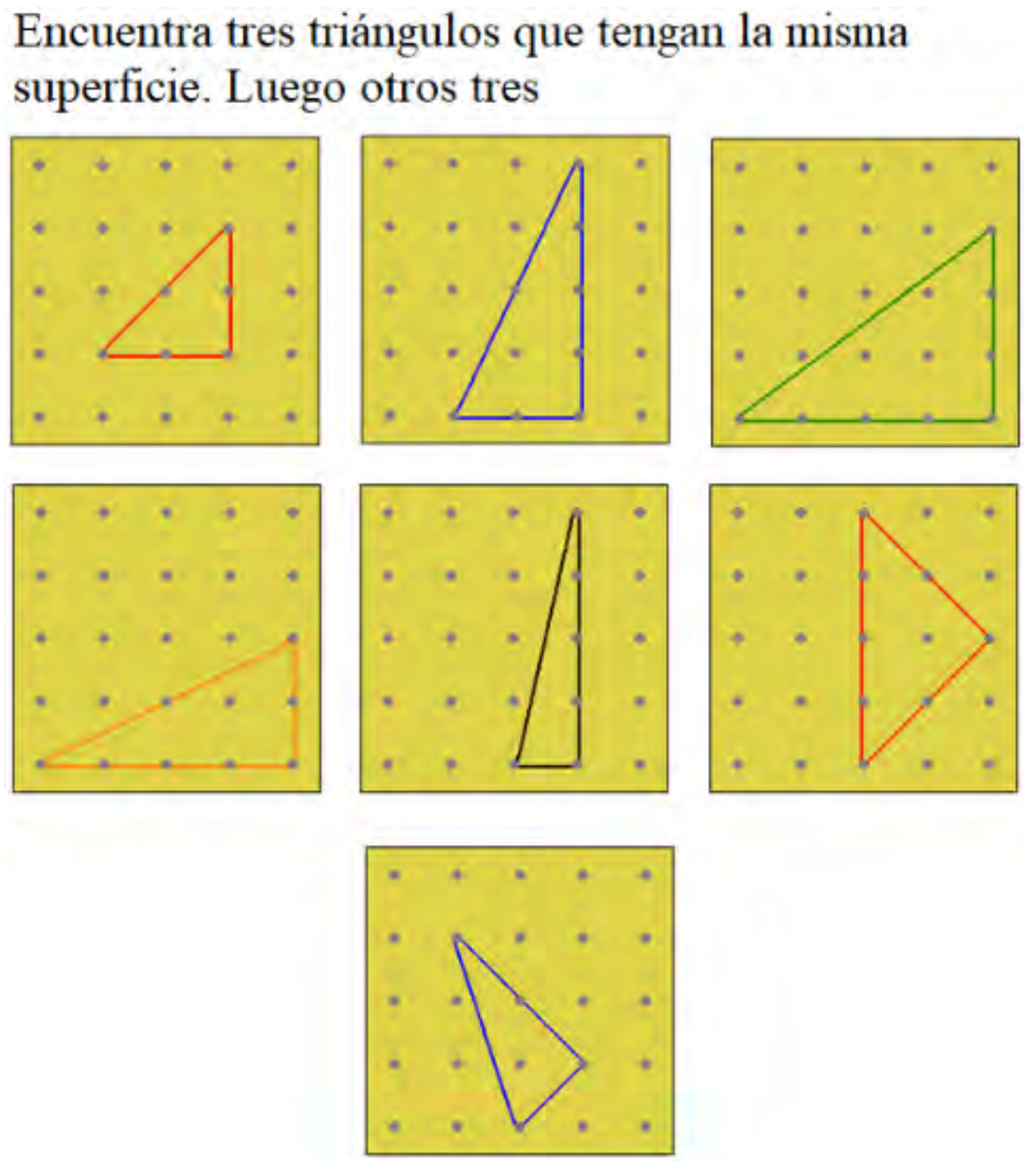
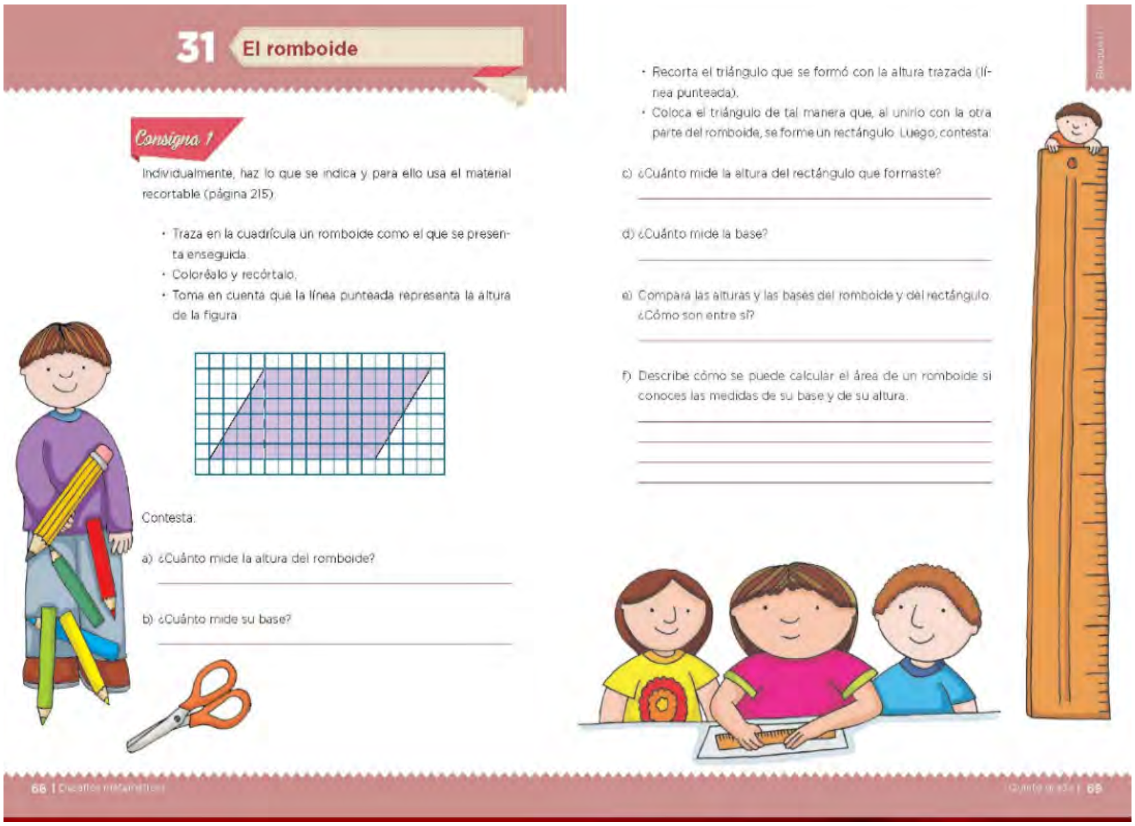


Imagen 129

La idea es que los alumnos calculen áreas de romboides y triángulos a partir de rectángulos. Es decir, dado que el área de un rectángulo se puede obtener por conteo de cuadritos, pero hacer esto con los romboides y triángulos se complica considerablemente, los alumnos pueden transformar estas figuras a un rectángulo equivalente en área, o inscribirlas en un rectángulo del doble de área. Así, el área del rectángulo se obtiene más fácilmente y permite calcular el área de las otras figuras. En la puesta en común, la maestra enfatiza frecuentemente que un triángulo es la mitad de un rectángulo.

En la clase 5 los alumnos resuelven una lección del Libro de Texto Gratuito (SEP, 2014) que también pretende derivar el área de romboides a partir del área de rectángulos (Imagen 130).


31 El romboide

Consigna 1

Individualmente, haz lo que se indica y para ello usa el material recortable (página 215).

- Traza en la cuadrícula un romboide como el que se presenta enseguida.
- Coloréalo y recórtalo.
- Toma en cuenta que la línea punteada representa la altura de la figura.

Contesta:

a) ¿Cuánto mide la altura del romboide?

b) ¿Cuánto mide su base?

- Recorta el triángulo que se formó con la altura trazada (línea punteada).
- Coloca el triángulo de tal manera que, al unirlo con la otra parte del romboide, se forme un rectángulo. Luego, contesta:

c) ¿Cuánto mide la altura del rectángulo que formaste?

d) ¿Cuánto mide la base?

e) Compara las alturas y las bases del romboide y del rectángulo. ¿Cómo son entre sí?

f) Describe cómo se puede calcular el área de un romboide si conoces las medidas de su base y de su altura.

Imagen 130

Esta lección tiene algunas diferencias respecto a los problemas del geoplano. En primer lugar, no se pide calcular el área de ningún romboide, sino inferir directamente la fórmula. El procedimiento de transformar el romboide a rectángulo para justificar que el área de ambos es la multiplicación de base por altura se provee a los alumnos, quienes van siguiendo los pasos: cortar a partir de una línea específica -la altura señalada con una línea punteada en la imagen-, y mover ese triángulo para formar un rectángulo. Los alumnos no están a cargo de buscar ese u otro procedimiento.

En segundo lugar, se pretende derivar una fórmula a partir de la experiencia de transformar a rectángulo con un solo romboide. En la pregunta f), (“Describe cómo se puede calcular el área de un romboide si conoces las medidas de su base y de su altura”), algunos alumnos responden que “se multiplica la base por la altura”. La maestra pregunta por qué, “en qué me va a ayudar eso”, y si se hace lo mismo en el rectángulo.

Una alumna, Valeria, contesta que sí porque el romboide se transforma al rectángulo. La maestra pide que comprueben, contando los cuadritos, si las dos áreas son iguales. Cuando cuentan los cuadritos del rectángulo, la maestra escribe la fórmula, B x h, en el pizarrón, y verifican que usándola se obtiene el mismo resultado que contando unidades. Concluye que esa fórmula sí sirve, y pregunta con cuáles otras figuras se puede utilizar. Un alumno responde "¡el triángulo!", y entonces la maestra recuerda que la clase anterior descubrieron que el triángulo es la mitad de un rectángulo. Así deriva la fórmula del triángulo y la escribe en el pizarrón. Después vuelve al romboide: es la misma fórmula que la del rectángulo porque ambos tienen la misma área. Así, en esta clase se establecen las fórmulas para calcular áreas de rectángulos, triángulos y romboides. Después, la maestra pide a los alumnos que calculen el área de los romboides de la segunda consigna de la lección (Imagen 131), especifica que usen las fórmulas.

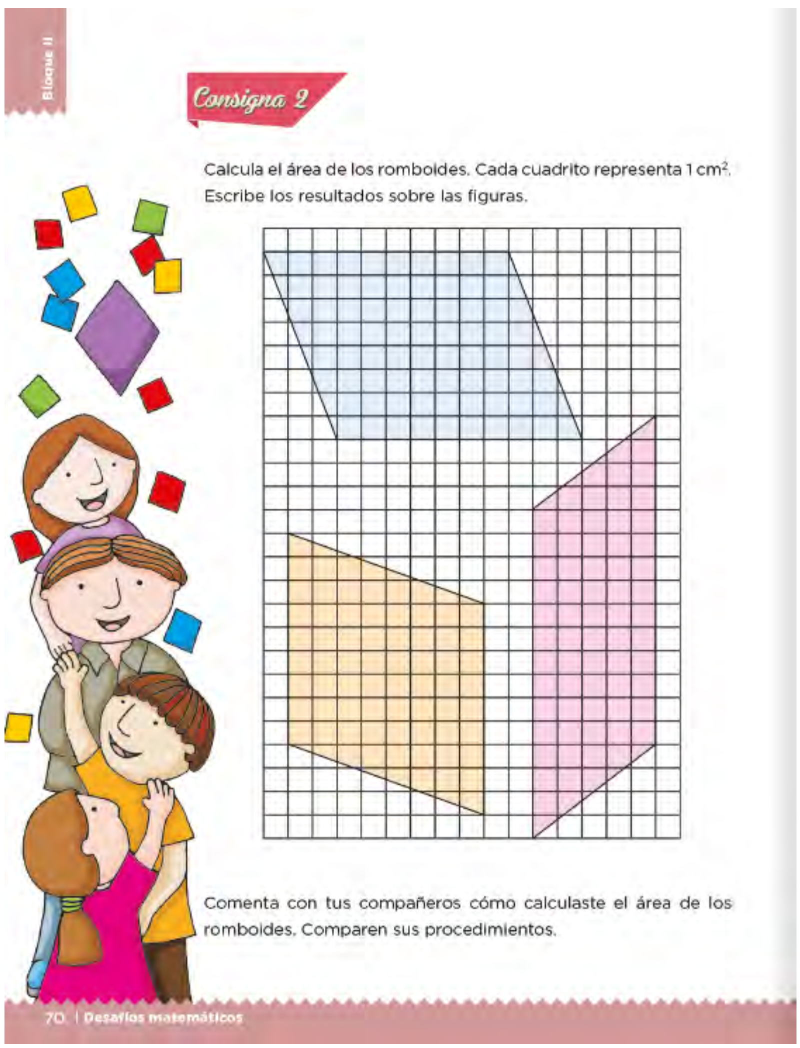
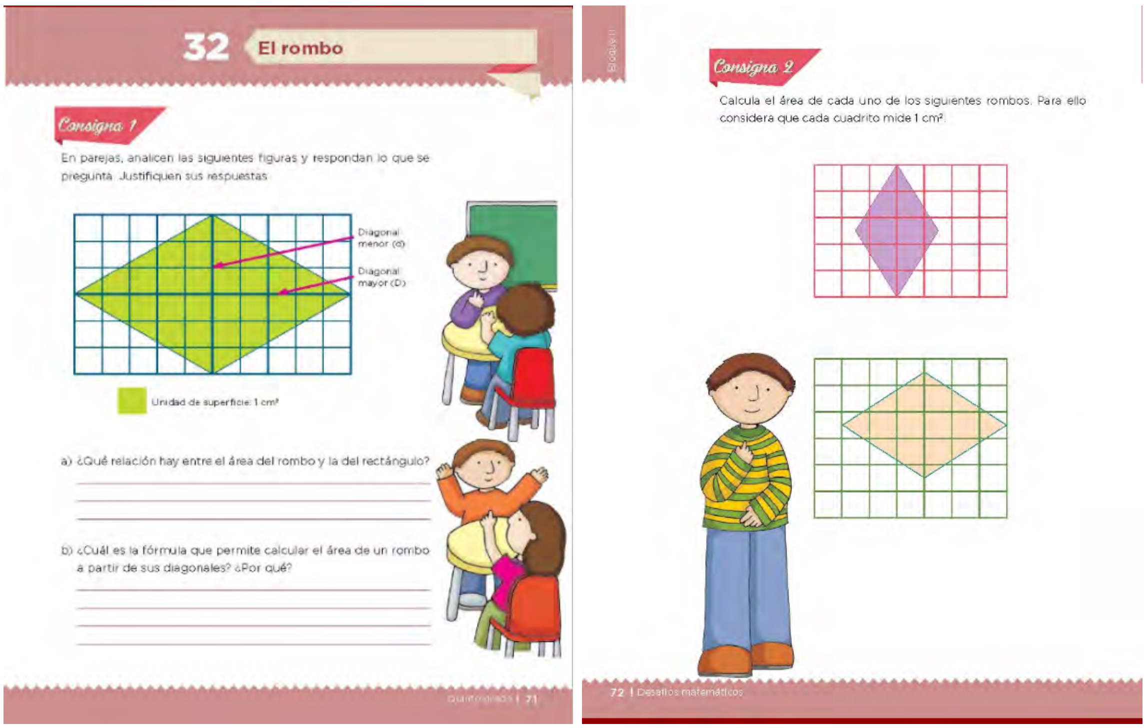


Imagen 131

Al terminar, la maestra se acerca a contarme que la próxima clase tiene pensado hacer la siguiente lección del Libro de Texto Gratuito (Imagen 132), me pide que la revise y, en caso de tener sugerencias, se las envíe por whats app.


32 El rombo

Consigna 1

En parejas, analicen las siguientes figuras y respondan lo que se pregunta. Justifiquen sus respuestas.

a) ¿Qué relación hay entre el área del rombo y la del rectángulo?

b) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de un rombo a partir de sus diagonales? ¿Por qué?

71

Consigna 2

Calcula el área de cada uno de los siguientes rombos. Para ello considera que cada cuadrito mide 1 cm².

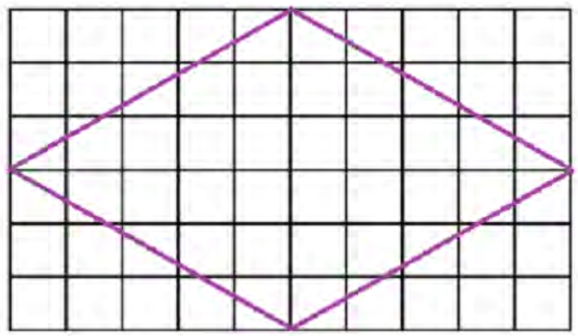
72 | Desafíos matemáticos

Imagen 132

Mi asesor y yo analizamos la lección y percibimos que, nuevamente, se pretende que muy pronto los alumnos deriven que el área de un rombo es la mitad del área del rectángulo en el que se inscribe, y de ahí infieran la fórmula. Por eso, proponemos que antes de resolver esa lección, aborden problemas que apuntan a esa relación (Imagen 133), es decir, que promuevan el paso de calcular el área de un rombo por conteo de unidades a calcularla a partir del rectángulo circunscrito, sin llegar todavía a la fórmula.

Esta actividad va del conteo hacia la relación de un medio entre rombo y rectángulo, a un ritmo mucho más rápido del que iríamos en una ingeniería didáctica. Al mismo tiempo, disminuye la velocidad con la que la lección se dirige hacia las fórmulas. Es el punto medio que encontramos entre la lección y lo que nosotros elegiríamos. La maestra hace las dos actividades en la clase: primero la que le propusimos, después la lección.

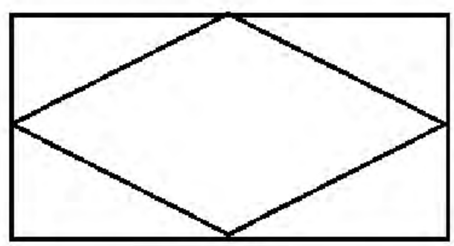
1. Pinta el siguiente rombo del color que quieras.



2. ¿Cuál es el área del rombo? Considera que cada cuadrito es la unidad de medida.

____

3. Ismael trazó otro rombo sobre una cuadrícula distinta, cuyos cuadritos son más pequeños. Después calcó el rombo y el rectángulo, sin la cuadrícula. Considera que el área del rectángulo es de 56 cuadritos. ¿Cuál es el área del rombo?



4. Considera que el área del siguiente rectángulo es de 36 cuadritos. ¿Cuál es el área del rombo?

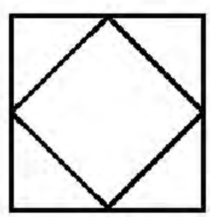


Imagen 133

En la clase 7, la maestra organiza al grupo en equipos de dos a cuatro integrantes, y asigna a cada equipo un tema visto en clases anteriores: a) fórmulas para área o superficie del triángulo y romboide, b) fórmulas para área o superficie del cuadrado y rectángulo, c) fórmulas para área o superficie del trapecio y rombo, d) qué son los polígonos, e) características de los cuadriláteros, f) tipos y características de triángulos, g) perímetro, h) área y volumen. Cada equipo debe registrar en la cartulina todo lo que han estudiado de ese tema, consultando su cuaderno (Imagen 134). En la siguiente clase cada equipo expone esta cartulina frente al grupo (Imagen 135). La maestra pide que peguen las cartulinas en la pared para que puedan consultar esa información cuando la necesiten.

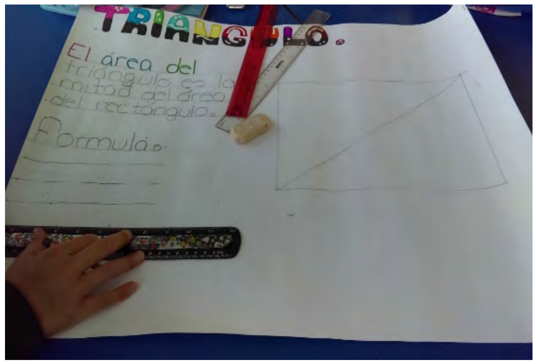


Imagen 134

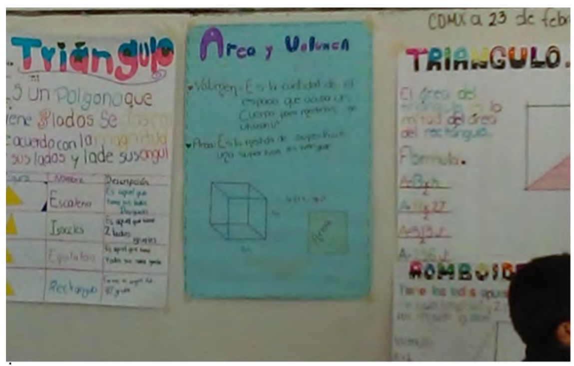


Imagen 135

Al final, la maestra revisa el Libro de Texto Gratuito para elegir por dónde seguir. Encuentra la siguiente lección sobre áreas (Imagen 136), pero la descarta porque anticipa que “va a ser muy difícil con tantos triangulitos tan chiquitos”. Considera la posibilidad de pedir a los alumnos que calculen el área de ese romboide y ese trapecio, sin triangularlos, finalmente decide abordar otros temas.

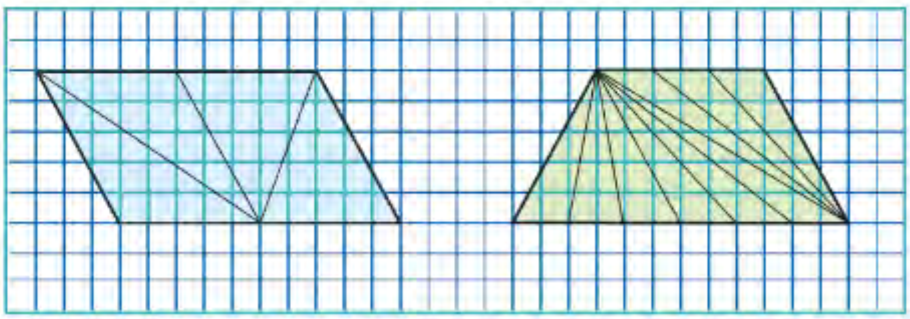
Esta lección tiene fuertes debilidades. Por ejemplo, en el trapecio, la altura es exterior a cada uno de los triángulos. En un estudio sobre práctica docente, Weiss et al (2019), observan su uso en un aula, y encuentran que las preguntas están lejos de ser suficientes para lograr que los alumnos vean lo que se pretende que vean. La decisión de saltarse la lección, tomada al vuelo por esta maestra, parece ser afortunada, en el sentido de ahorrar tortuosos procesos que además no derivan en el aprendizaje que se busca.

51 ¿Qué cambia?

Consigna 1

En parejas, realicen las actividades que se indican a continuación.

Las siguientes figuras están subdivididas en triángulos. Calculen el área de cada triángulo y el área total de la figura que los contiene.



a) ¿Cómo son la base y la altura de cada uno de los triángulos que forman el romboide?

____

b) ¿Cómo son las áreas de estos triángulos?

____

c) ¿Cómo son la base y la altura de cada uno de los triángulos que forman el trapecio?

____

d) ¿Cómo son las áreas de estos triángulos?

____

Escriban su conclusión.

____

____

Imagen 136

Previamente a la clase 10, la maestra organiza al grupo en equipos de cuatro y encarga a cada uno que de tarea haga varios prismas y pirámides de cartulina. En la clase, pide que calculen el perímetro de la base de uno de los cuerpos, después que inventen una fórmula para encontrarlo. Cuando terminan la primera tarea, la maestra toma uno de los prismas pentagonales, recuerda a los alumnos que ya saben cómo calcular el área de un triángulo y la de un rectángulo, pero ahora tienen una figura nueva, la base del prisma, un pentágono regular. ¿Cómo podría calcularse esa área? Los alumnos proponen distintas maneras de descomponerlo en triángulos, rectángulos, cuadrados. Una de ellas consiste en dividir el pentágono en cinco triángulos a partir del centro, y la maestra favorece la extensión de esa descomposición para otros polígonos regulares. Pide a los alumnos que calculen el perímetro y área de la base de un prisma cuadrangular, uno triangular, uno rectangular y otro cuya base sea un polígono de más de cuatro lados. Da el tiempo que resta de la clase para que resuelvan.

Al final, la maestra me invita a bajar con ella al recreo. Ha notado que "todavía no logramos que usen bien las fórmulas" y me pregunta si es buena idea dar a los alumnos algunas figuras con las medidas ya dadas para que calculen el área. Le contesto que eso dejaría sin poder resolver a los muchos niños que todavía no pueden con las fórmulas, sugiero darles figuras sobre cuadrícula para que haya otros procedimientos posibles, como hacer cortes para formar un rectángulo. La maestra acepta que varios alumnos no han accedido todavía a las fórmulas y para ellos es necesario disponer de otras maneras de calcular áreas, pero también le preocupa que, si ahora no dominan las fórmulas de área, después no podrán con las de volumen. Más tarde, con ayuda de mi asesor, acordamos proponerle combinar los dos asuntos: algunos problemas con cuadrículas para que los alumnos resuelvan como puedan, y otros donde se les demande usar las fórmulas.

Así, en la clase 11, empiezan a calcular áreas de figuras trazadas en una hoja cuadriculada (Imagen 137). Después, la maestra pide a los alumnos que digan, en cuadritos, las medidas que importan en cada figura para usar la fórmula. Dibuja las figuras en el pizarrón (Imagen 138), escribe al lado la fórmula y pide que la usen para comprobar si los resultados que obtuvieron antes son correctos.

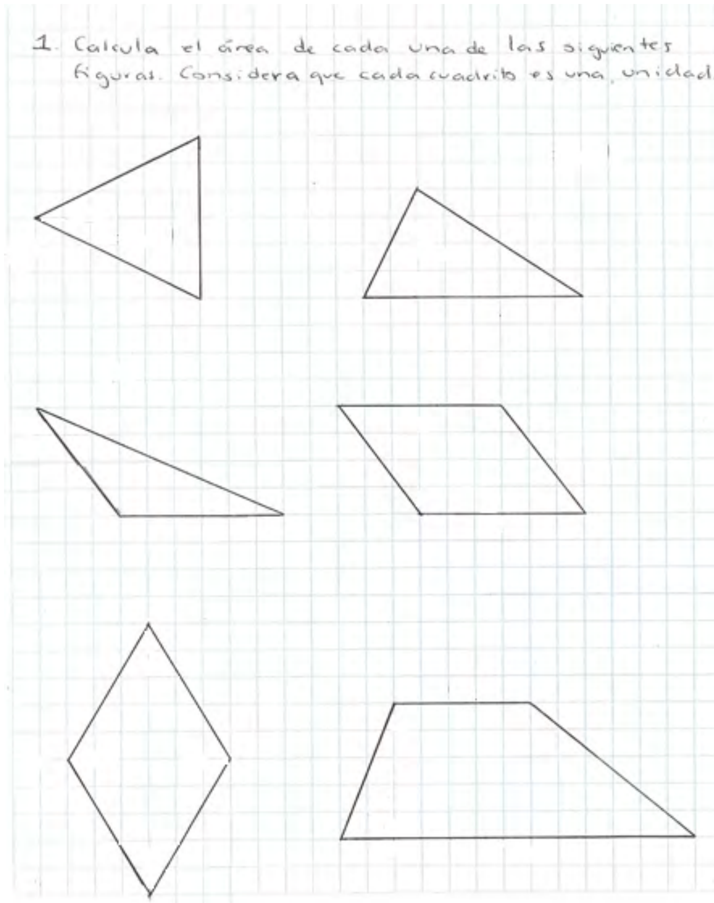


Imagen 137

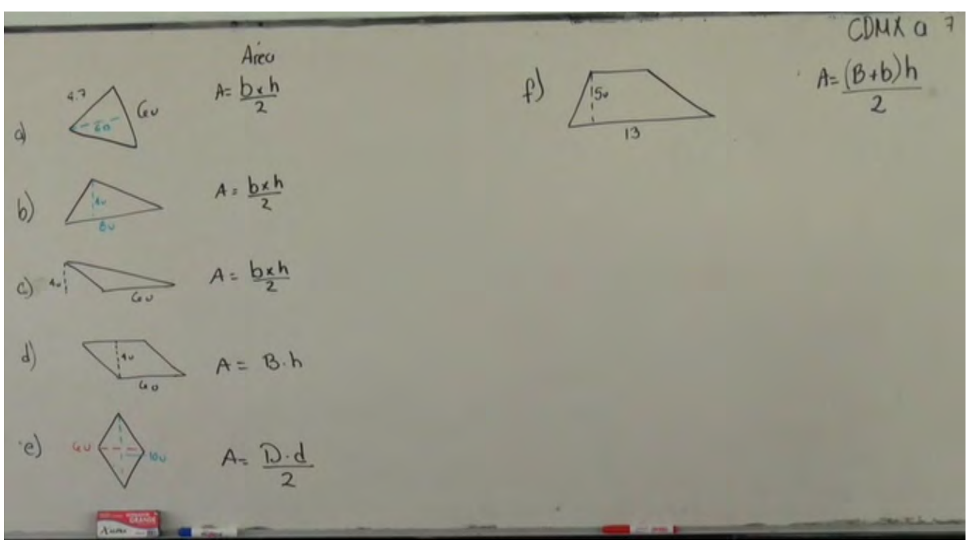


Imagen 138

Al inicio de la clase 12, la maestra pide al grupo que digan las fórmulas de área que han visto: triángulo, cuadrado, rombo, trapecio, romboide. Después les entrega una fotocopia con problemas para resolver. Hacen el primero en conjunto, todo el grupo, se trata de identificar la base mayor, base menor, altura, lados paralelos y lados no paralelos de un trapecio. En el segundo problema deben marcar la base menor de varios trapecios con azul y la base mayor con rojo "a excepción de la figura que no es trapecio", y después indicar cuál de las figuras no es trapecio, cuál es trapecio recto, cuál isósceles, cuál escaleno, cuáles pares de líneas paralelas tiene cada figura. Cuando terminan de resolver esa hoja, la maestra les entrega otra, donde hay una casa, dividida en un rectángulo, un trapecio y un cuadrado (Imagen 139). Se pide que calculen el área de cada parte y luego el área total.

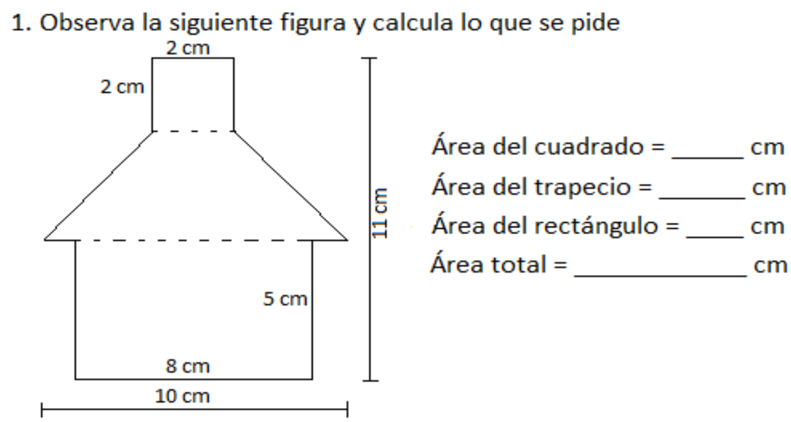


Imagen 139

La clase 13 empieza con una puesta en común para resolver un problema que había quedado de tarea. Se trata de calcular el área de cada una de las parcelas del terreno que muestra la imagen 140, y después el área total.

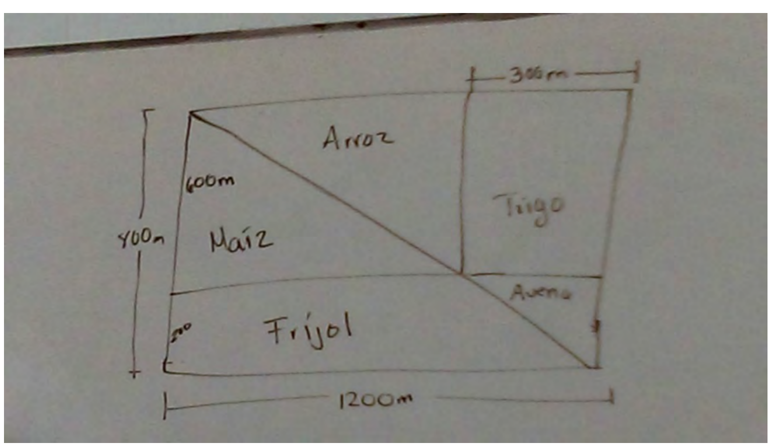
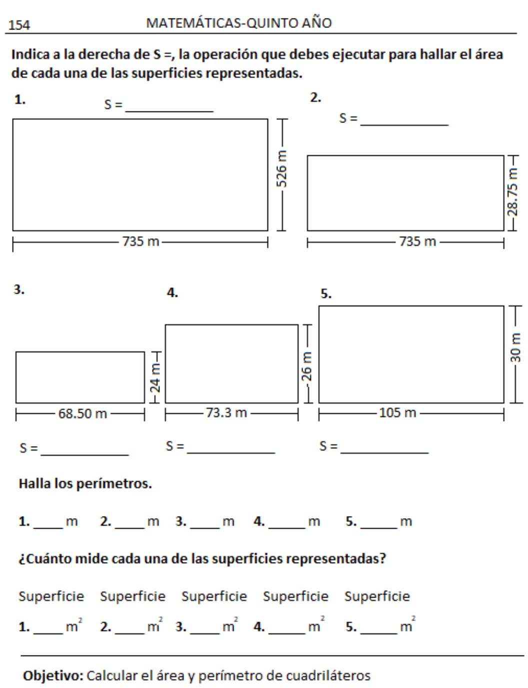


Imagen 140

A los 50 minutos, la maestra se acerca a enseñarme distintas lecciones del libro Gader, quiere elegir una para continuar la clase. En una de ellas se pide calcular el perímetro de varias figuras, la maestra quiere que también calculen las áreas “para que se entrenen”. Pero le muestro que las medidas de los lados son hipotéticas, y no están indicadas las de las alturas, entonces no tendrán cómo inferirlas. Ella responde que una opción es inventar esas medidas y darlas a los alumnos. Después me muestra otra lección, yo objeto que ahí se pide calcular solamente áreas de rectángulos. En la tercera opción se pide calcular áreas de terrenos irregulares, comentamos que puede ser buena idea porque tendrán que pensar en cómo descomponer esos polígonos. Me muestra otra lección donde se pide calcular áreas de triángulos, indicando en cada uno las medidas de los lados y una altura. Un poco después, me acerco a decirle que tal vez en la primera lección, que no tiene alturas indicadas, se les puede pedir que calculen las áreas reales usando su regla para medir. Hablamos un rato de que a los alumnos les va a costar trabajo identificar las alturas. La maestra también considera otra lección en la que se pide calcular el área y perímetro de varios trapecios rectángulos, que tienen indicadas las medidas de los lados. Finalmente, elige la lección de los rectángulos (Imagen 141) -ellos tienen ese libro fotocopiado y engargolado y lo llevan todos los días a la escuela- y, para los que van terminando, la de los polígonos irregulares (Imagen 142).


154 MATEMÁTICAS-QUINTO AÑO

Indica a la derecha de S =, la operación que debes ejecutar para hallar el área de cada una de las superficies representadas.

Halla los perímetros.

1. ___ m 2. ___ m 3. ___ m 4. ___ m 5. ___ m

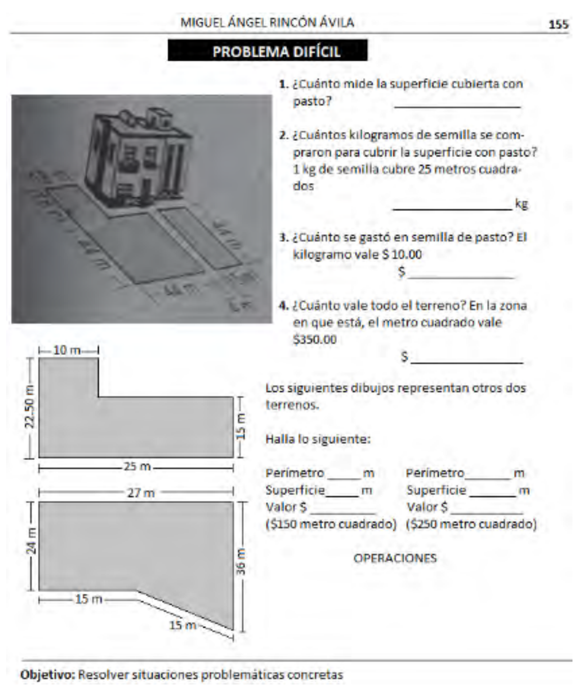
¿Cuánto mide cada una de las superficies representadas?

Superficie Superficie Superficie Superficie Superficie

1. ___ m^2 2. ___ m^2 3. ___ m^2 4. ___ m^2 5. ___ m^2

Objetivo: Calcular el área y perímetro de cuadriláteros

Imagen 141


MIGUEL ÁNGEL RINCÓN ÁVILA 155

PROBLEMA DIFÍCIL

1. ¿Cuánto mide la superficie cubierta con pasto? ____
2. ¿Cuántos kilogramos de semilla se compraron para cubrir la superficie con pasto? 1 kg de semilla cubre 25 metros cuadrados ____ kg
3. ¿Cuánto se gastó en semilla de pasto? El kilogramo vale $ 10.00 $ ____
4. ¿Cuánto vale todo el terreno? En la zona en que está, el metro cuadrado vale $350.00 $ ____

Los siguientes dibujos representan otros dos terrenos.

Halla lo siguiente:

Perímetro ____ m	Perímetro ____ m
Superficie ____ m	Superficie ____ m
Valor $ ____	Valor $ ____
($150 metro cuadrado)	($250 metro cuadrado)

OPERACIONES

Objetivo: Resolver situaciones problemáticas concretas

Imagen 142

Para la clase 14 la maestra escoge una lección del libro Gader que contiene problemas de cálculo de áreas de rectángulos (Imagen 143). Considera también otra lección del mismo libro en la que se pide obtener el área de figuras de distintos tipos, pero la descarta porque entre ellas hay un círculo y un polígono regular, y sus alumnos no han aprendido todavía a calcular esas áreas. Dado que en esa lección que descarta -y en otras del cuaderno Gader- la apotema de un polígono regular aparece vinculada al radio del círculo circunscrito a ese polígono, la maestra decide que más adelante enseñará el área del círculo como antecedente para después ver la de polígonos regulares. Por lo pronto, en esta clase pide a los alumnos que resuelvan la lección de la Imagen 143.

160 MATEMÁTICAS-QUINTO AÑO

PROBLEMAS

Resuelve.

1. El señor Galindo mandó pulir la sala de su casa (9.50 m x 1.5 m); 2 recámaras (6.50 m x 5.50 m c/u.) y otras cuatro piezas más (4.50 m x 6. m c/u.). Pulido: $1.25 el metro cuadrado. ¿Cuánto pagará por todo el trabajo?
PLANTEO OPERACIÓN RESULTADO

2. El señor Escobar quiere sembrar de pasto el terreno que está frente a su casa. Mide 35 m de ancho y 45 m de largo. ¿Cuánto gastarán en la semilla? Un kilogramo vale $10 y cubre 25 m^2.
PLANTEO OPERACIÓN RESULTADO

3. Cierta clase de linóleo mide 1.83 m de ancho y 6 m de largo; ¿Cuántos metros cuadrados mide el linóleo que compré?
PLANTEO OPERACIÓN RESULTADO

4. ¿Cuántos metros cuadrados cubre un linóleo de 2.75 m de ancho y 3.26 m de largo?
PLANTEO OPERACIÓN RESULTADO

5. El señor Mendoza quiere cubrir todo el frente de su casa con loseta asfáltica. El frente mide; 28 m de largo y 2.15 m de ancho. El metro cuadrado de loseta vale $35.00, ¿cuánto gastará?
PLANTEO OPERACIÓN RESULTADO

Resuelve. Actualmente se está usando cierto material de construcción. Pesa 3.5 kg por metro cuadrado y se vende en láminas de:

1. 1.22 de ancho y 1.83 m de largo __________ m __________ kg
2. 1.22 de ancho y 2.44 m de largo __________ m __________ kg
3. 1.22 m de ancho y 2.75 m de largo __________ m __________ kg
4. 1.22 m de ancho y 3.05 m de largo __________ m __________ kg

Objetivo: Resolver situaciones problemáticas concretas

Imagen 143

En la clase 15 la maestra enseña las fórmulas para calcular el perímetro y área de un círculo, como previó antes. Después, varias veces, demanda a los alumnos que tracen con el compás un círculo de un cierto diámetro o radio dado por ella -9 cm de diámetro, 13 cm de diámetro, 4 cm de radio- y que calculen su área y su perímetro.

Hacia el final de la clase, me muestra el examen que hará pronto a los alumnos. Me enseña una de las preguntas donde pide todas las fórmulas de área y perímetro que han visto "porque yo sí les voy a pedir las fórmulas ¡eh!, de cajón, yo sí". Después, al inicio de la clase 16, me muestra otra vez el examen y dice que “el reactivo de las fórmulas va a ser la prueba de fuego”.

En la clase 16, la maestra pide a los alumnos que abran su libro Gader en la página 122. En ese momento, decide comenzar primero con otra lección que está antes en el mismo libro, en la que se pretende “identificar los elementos de las figuras geométricas” (Imagen 144). Varios de estos elementos son los que aparecen en las fórmulas de áreas y que no son parte del contorno de la figura, es decir, que requieren la construcción de trazos auxiliares: alturas, apotema, diámetro, radio. Resuelven esto grupalmente en siete minutos, la maestra va haciendo las preguntas y todos contestan. Sobre la marcha, la maestra se detiene un poco para recordar con apoyo de dibujos en el pizarrón qué es el radio y la fórmula del área del círculo. A partir de ello traza un hexágono regular inscrito en un círculo, define la apotema y les adelanta que esto será muy importante después. Luego pasan a la actividad principal, otra lección del Gader que consiste en trazar cuadrados inscritos en círculos (Imagen 145). La maestra les adelanta que van a trazar esas figuras para después calcular su área. Busca asegurarse de que los alumnos entiendan la consigna. Por ejemplo, pregunta qué son dos líneas perpendiculares, explica cómo usar un transportador para asegurar el ángulo de 90 grados entre las dos líneas, pide que las tracen. Es decir, extiende con mucho cuidado la explicación de la lección respecto a cómo trazar un cuadrado inscrito en un círculo.

Luego pide a los alumnos que lo hagan solos tres veces más, como indica la lección. En uno de los tres círculos que quedan, pide que en lugar de trazar un cuadrado hagan un pentágono regular, y explica por qué en lugar de marcar arcos de círculo cada 90 grados, serán de 72 grados. Cuando algunos terminan, la maestra pregunta cómo calcularían el área de ese pentágono regular. Surge una propuesta de calcular las áreas de los cinco triángulos en los que se puede dividir a partir del centro, y a partir de ahí la maestra pretende derivar la fórmula, pero no da tiempo.

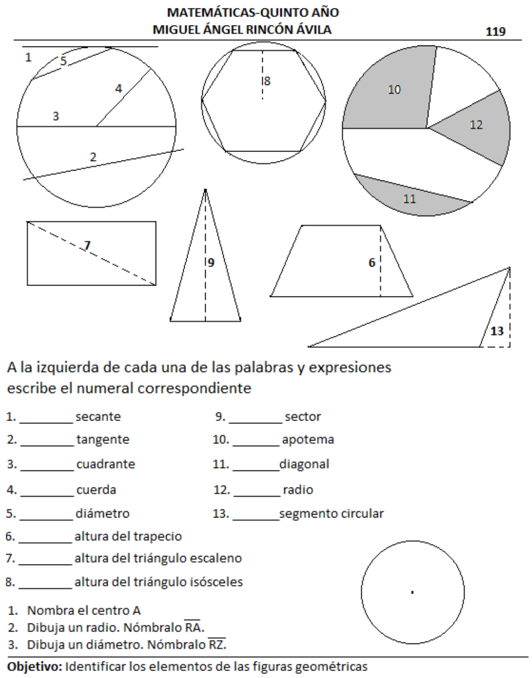


Imagen 144

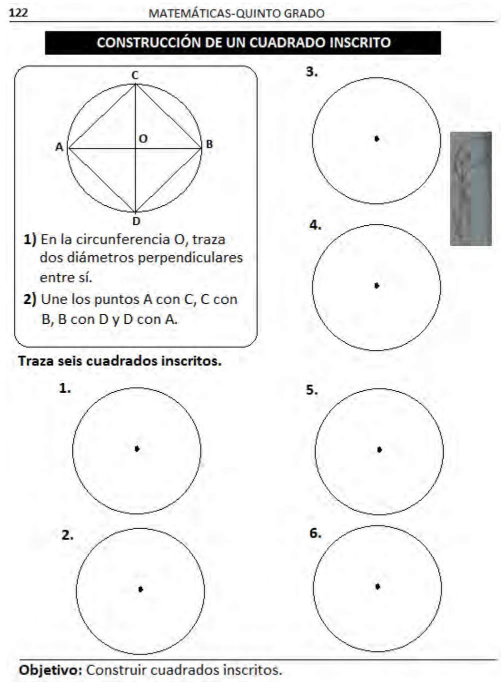
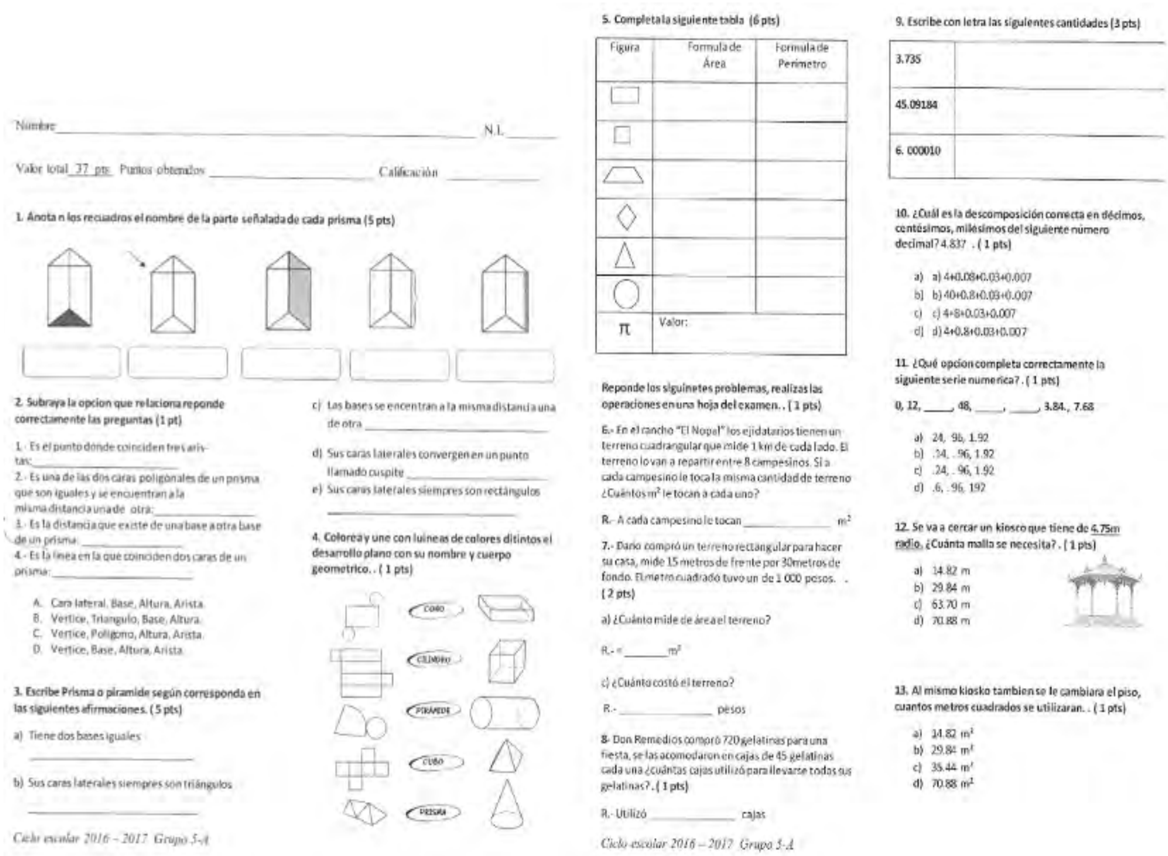


Imagen 145

Cuando llego a la clase 17 la maestra me avisa que tiene que aplicar el examen. Al parecer, si bien ya lo tenía preparado, la decisión de hacerlo en esta clase es repentina. Los alumnos responden el examen, pueden levantarse de su asiento, ir a preguntar a la maestra y a veces hasta ir con un compañero. Cuatro de trece reactivos -el 5, 6, 7 y 13- tienen que ver con cálculo de áreas (Imagen 146). La maestra me cuenta que el reactivo 13 es adaptación de otro que encontró en la Olimpiada del Conocimiento. Media hora después, entra una persona de la dirección a pedir a la maestra que firme un documento. Mientras ella atiende esto, algunos alumnos platican, van a las mesas de otros niños, hacen fila junto a su escritorio para preguntarle dudas. A partir de los 40 minutos de hacer el examen, los alumnos empiezan a entregarlo.



Nombre ____ N.L. ______

Valor total 37 pts Puntos obtenidos ____________________ Calificación __________

1. Anota n los recuadros el nombre de la parte señalada de cada prisma (5 pts)

2. Subraya la opcion que relaciona reponde correctamente las preguntas (1 pt)

1.- Es el punto donde coinciden tres aristas: ______________

2.- Es una de las dos caras poligonales de un prisma que son iguales y se encuentran a la misma distancia una de otra: ______________

3.- Es la distancia que existe de una base a otra base de un prisma: ______________

4.- Es la linea en la que coinciden dos caras de un prisma: ______________

A. Cara lateral, Base, Altura, Arista
B. Vertice, Triangulo, Base, Altura
C. Vertice, Poligono, Altura, Arista
D. Vertice, Base, Altura, Arista

3. Escribe Prisma o piramide según corresponda en las siguientes afirmaciones. (5 pts)

a) Tiene dos bases iguales

____

b) Sus caras laterales siempres son triángulos

____

c) Las bases se encentran a la misma distancia una de otra ______________

d) Sus caras laterales convergen en un punto llamado cuspite ______________

e) Sus caras laterales siempres son rectángulos

____

4. Colorea y une con luineas de colores ditintos el desarrollo plano con su nombre y cuerpo geometrico.. (1 pts)

CONO
CILINDRO
PIRAMIDE
CUBO
PRISMA

Ciclo escolar 2016 – 2017 Grupo 5-A

5. Completa la siguiente tabla (6 pts)

Figura	Formula de Área	Formula de Perimetro
π	Valor:	

Reponde los siguinetes problemas, realizas las operaciones en una hoja del examen.. (1 pts)

6.- En el rancho "El Nopal" los ejidatarios tienen un terreno cuadrangular que mide 1 km de cada lado. El terreno lo van a repartir entre 8 campesinos. Si a cada campesino le toca la misma cantidad de terreno ¿Cuántos m² le tocan a cada uno?

R.- A cada campesino le tocan ______________ m²

7.- Dario compró un terreno rectangular para hacer su casa, mide 15 metros de frente por 30metros de fondo. El metro cuadrado tuvo un de 1 000 pesos. . (2 pts)

a) ¿Cuánto mide de área el terreno?

R.- = ________ m²

c) ¿Cuánto costó el terreno?

R.- ______________ pesos

8- Don Remedios comoró 720 gelatinas para una fiesta, se las acomodaron en cajas de 45 gelatinas cada una ¿cuántas cajas utilizó para llevarse todas sus gelatinas? . (1 pts)

R.- Utilizó ______________ cajas

Ciclo escolar 2016 – 2017 Grupo 5-A

9. Escribe con letra las siguientes cantidades (3 pts)

3.735	
45.09184	
6. 000010	

10. ¿Cuál es la descomposición correcta en décimos, centésimos, milésimos del siguiente número decimal? 4.837 . (1 pts)

a) a) 4+0.08+0.03+0.007
b) b) 40+0.8+0.03+0.007
c) c) 4+8+0.03+0.007
d) d) 4+0.8+0.03+0.007

11. ¿Qué opcion completa correctamente la siguiente serie numerica? . (1 pts)

0, 12, _____, 48, _____, _____, 3.84., 7.68

a) 24, 96, 1.92
b) .24, .96, 1.92
c) .24, . 96, 1.92
d) .6, . 96, 192

12. Se va a cercar un kiosco que tiene de 4.75m radio. ¿Cuánta malla se necesita? . (1 pts)

a) 14.82 m
b) 29.84 m
c) 63.70 m
d) 70.88 m

13. Al mismo kiosko tambien se le cambiara el piso, cuantos metros cuadrados se utilizaran.. (1 pts)

a) 14.82 m²
b) 29.84 m²
c) 35.44 m²
d) 70.88 m²

Imagen 146

Finalmente, en la clase 18 la maestra comienza revisando la tarea que dejó la clase anterior: trazar un hexágono y un octágono regulares, cada uno inscrito en un círculo de cuatro centímetros de radio. Como ve que hay varios errores en los trazos de los alumnos, pide que vuelvan a hacerlo ahí, cuidando que todos los lados de cada polígono sean del mismo tamaño. Mientras, va dando indicaciones, por ejemplo, sobre cómo usar el compás o el transportador. Cuando algunos terminan, la maestra pregunta de qué manera pueden calcular el área del hexágono regular. A partir de la propuesta de calcular el área de uno de los triángulos isósceles en los que se puede dividir el hexágono y multiplicarla por seis, ella deriva la fórmula. Después les dicta un problema que implica calcular el área de un terreno octagonal (Imagen 147), y pide que lo resuelvan usando la fórmula.

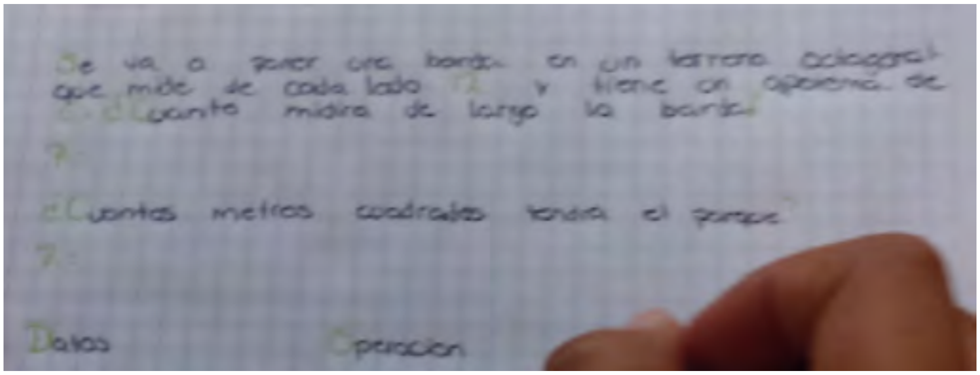


Imagen 147

Después de esta descripción general, mostraré en los siguientes apartados dos maneras distintas de vincularse con las fórmulas: la de Luis, uno de los alumnos que consiguen más logros en las tareas, y la de los alumnos con dificultades.

4.2 Las fórmulas, accesibles para los alumnos expertos

Es difícil y también artificial separar a los alumnos en categorías como “expertos” o “con dificultades”. En el primer capítulo explico que la “dificultad” no solamente es una característica atribuible a una persona, sino que es principalmente relacional: es una etiqueta que permea los vínculos de una persona con otras y con objetos matemáticos bien determinados. No obstante, en el trabajo con fórmulas es notoria una diferenciación entre alumnos: algunos, muy pocos, logran resolver correctamente las tareas, mientras para la mayoría son inaccesibles o consiguen resolver muy parcialmente. En este capítulo me centro en mostrar cómo el estudio de las fórmulas traza caminos muy desiguales para los alumnos, por eso he decidido organizarlo de esta manera.

Hay dos alumnos, Luis y Daria, a quienes, también a falta de un mejor nombre, he llamado “expertos”. Ellos entienden las consignas, suelen producir las respuestas esperadas, cuentan con los conocimientos que se requieren para resolver los problemas, logran adaptar procedimientos que no han producido por su cuenta, son hábiles para buscar información en sus notas, realizan las tareas completas. Me centraré en Luis, porque tengo más datos de su participación. Mostraré que él puede entender y utilizar las fórmulas, aunque opta por otros procedimientos cuando es posible elegir.

4.2.1 Las cuadrículas, un ir y venir del conteo a las transformaciones

En el primer problema de la clase 6 (calcular el área de un rombo trazado sobre una cuadrícula, ver imagen 148 sin considerar la línea café), Luis cuenta los cuadritos y obtiene 27. Alexa también da esa respuesta a la maestra y ella señala que ese resultado es incorrecto: *"*NO, no son veintisiete*"*. Es decir, deja claro que hay un error, sin decirles cómo arreglarlo. Después, cambia la manera de señalar los errores al preguntar sus resultados a otros alumnos:

Respuesta	21	27	20	26	25	32	30
Frecuencia	I	I	I	I	I	II	IIIII

Pide a Juan David, uno de los alumnos que respondieron 30, que explique cómo lo hizo. Él describe: "primero fui contando los cuadritos enteros, y luego los que estaban cortados los empecé a juntar y ahí". La maestra tiene un intercambio en voz baja, personal, con Juan David, después con Erick, y luego pide a todo el grupo: "pero lo que tienen que hacer es explicarnos cómo llegan a ese treinta, ¿por qué es treinta?". Valeria y Regina explican que resolvieron de manera similar a Juan David. La maestra enfatiza que hay varios resultados diferentes, así que hace falta buscar una manera de "comprobar que lo que dicen es cierto o no". Los alumnos regresan a sus hojas. Luis dice "ahorita voy a comprobar". Pone la regla sobre la diagonal vertical del rombo, cuenta los cuadros que hay en la mitad derecha del rectángulo limitada por la regla, y concluye que "sí son treinta*"*. Un poco después, explica a Alexa y Juan David lo que hizo:

1. *Luis: [toma la hoja de Alexa] mira, es queeee, mira, es la mitad y mitad. Mira, [marca con su lápiz una diagonal del rombo, imagen 148] una mitad es un triángulo y la otra mitad es un triángulo. Partimos a la mitad este (triángulo) [marca con el lápiz la mitad de la otra diagonal, imagen 149] y lo convertimos en dos triángulos. Este triángulo [señala el rosa de la imagen 150] lo pasamos para acá [señala el triángulo lila] y este triángulo [señala el triángulo azul] lo pasamos por acá [señala el triángulo]. Omitimos esta [tapa la mitad del rectángulo, imágenes 151 y 152] y ya, y luego contamos la figura, que ya está entera*

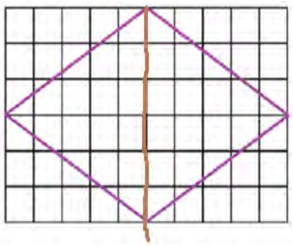


Imagen 148

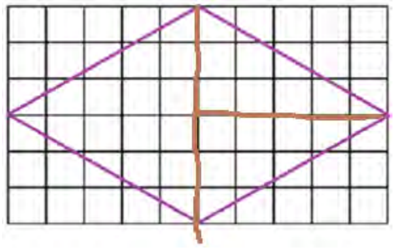


Imagen 149

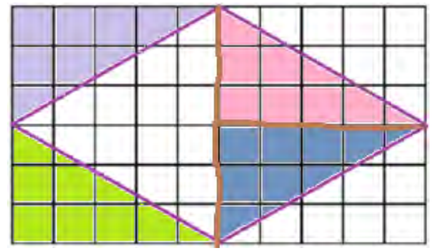


Imagen 150


Imagen 151

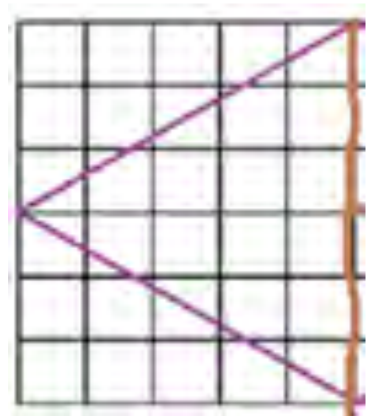


Imagen 152

2. *Alexa: [toma su hoja] ¡aaaah!, ¡ahhhhh!, ya entendíiii*

   (…)

3. *Alonso [a Alexa]: yo lo que hice es casi igual a lo de Luis. Hice lo mismo, pero lo hice de otra forma. Multipli… primerooo su... este como que contéeee, las rayas, bueno, los cuadritos de acá [señala el ancho del rectángulo de la imagen 152] y luego conté los cuadritos de acá [señala el largo del rectángulo de la imagen 152]. Aquí me dio 5 (de ancho) y aquí me dio 6 (de largo) y los multipliqué y me dio treinta*

   (…)

4. *Luis cuenta uno por uno los cuadritos del rectángulo equivalente al rombo*

Luis recurre primero al conteo de unidades y obtiene 27. La maestra deja claro que ese resultado no es correcto, la respuesta con mayor frecuencia es 30, la maestra pide que expliquen su procedimiento a dos alumnas cuya respuesta es 30 y que digan *"*cómo llegan a ese treinta[52]". Todo esto le hace saber a Luis que el área del rombo es 30 -lo

[52] Pienso que la maestra toma en esta frase el 30 como un ejemplo, para enfatizar que es necesario justificar la respuesta. Pero ese ejemplo, aunado a las otras cosas que explico en el párrafo, le indican a Luis que se trata del resultado esperado.

que se nota después en su formulación “sí son 30” al comprobar-. Sabe que se ha equivocado y a qué respuesta tiene que llegar. Para hacerlo, podría afinar el conteo de manera que los cuadritos no enteros se puedan reunir y formar unidades completas, como lo hacen Juan David, Valeria y Regina. De hecho, es muy común que los alumnos, al ver que un procedimiento no conduce a buena respuesta, no cuestionen su manera de resolver, sino que la repiten para asegurarse de haberla hecho bien y afinarla si es necesario (Sensevy, 2011; Brousseau, 1987).

Luis no hace esto, elige hacer un cambio radical de procedimiento: divide el rombo en cuatro triángulos congruentes y los reacomoda para formar con ellos un rectángulo. La puesta en juego de esta técnica se ve desde que, después de que la maestra pide comprobar sus respuestas, Luis cubre la mitad del rectángulo y señala con el dedo, uno por uno, los cuadritos de la otra mitad: ahora cuenta en el rectángulo, no en el rombo. Después explica con mucha claridad en la línea 1 ese procedimiento. Como en el nuevo rectángulo “la figura ya está entera”, ahora sí cuenta los cuadros uno por uno. Se queda conforme con el conteo (línea 4) incluso si Alonso sugiere una forma más rápida, la multiplicación (línea 3).

Vale destacar que no es la dificultad del conteo lo que hace que Luis transite a la transformación a rectángulo -como previmos en el diseño de estos problemas- sino el error en ese conteo destacado por la maestra. Es decir, no es que le parezca un lío analizar para cada trozo de cuadro con cuál se puede reunir para formar uno completo y luego hacer el conteo de esos nuevos cuadros. Él muy pronto obtiene 27 y se queda satisfecho con esa respuesta. Son la maestra y sus compañeros, al dar los distintos resultados, quienes le hacen saber que el resultado es 30, y eso lo hace cambiar drásticamente el procedimiento. No está Luis solo con un problema, los otros son también parte de su medio, de esos otros proviene la validación.

Ese cambio de procedimiento no es nada fácil para la mayoría de los alumnos, como muestro más adelante. Implica descentrarse de las unidades, del reacomodo local de trozos de unidades, mirar la figura entera, prever qué cortes y reacomodos son pertinentes y qué nueva figura conviene formar[53]. A pesar de que no es la complejidad del conteo la que lleva a Luis a transformar el rombo, dicha transformación sí está motivada por el conteo: se trata de obtener una figura que esté “entera”. Como muestran

[53] Siendo maestra, vi a numerosos alumnos de preparatoria aferrarse al conteo de unidades en este tipo de problemas, aún en figuras donde reacomodar los trozos para formar cuadritos completos no era posible. En ese momento me pregunté si el tránsito del conteo de unidades a la transformación de figuras es tan grande que se trata de un obstáculo didáctico (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998).

Douady y Perrin-Glorian (1989) hay una dialéctica entre el papel blanco y el cuadriculado: la cuadrícula abre paso a las transformaciones, que son motivadas por la intención de obtener cuadritos completos.

En el segundo problema (dar el área de un rombo sabiendo que está inscrito en un rectángulo cuya área es 56, Imagen 153), varios alumnos necesitan la cuadrícula, de hecho la trazan. A Luis no le hace falta, él explica a Juan David y Alexa que hace la misma transformación a rectángulo que antes:

1. *Luis: [tiene marcada la diagonal vertical del rombo con lápiz] (…) eran 56 cuadrados (…) la mitad, entonces saqué la mitad y aquí es la mitad*

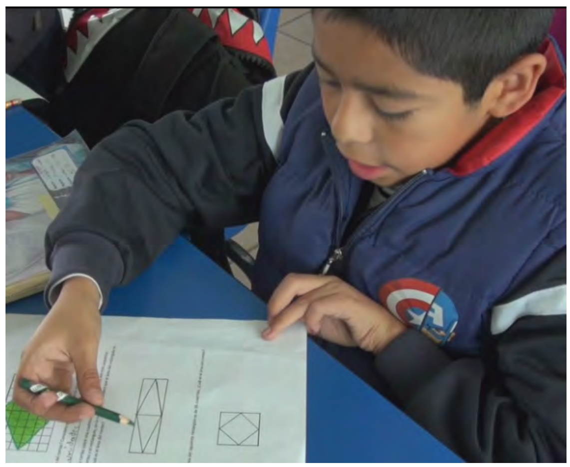


Imagen 153

2. *Alexa: ¡ahhh!*
   (…)
3. *Observadora: (…) ¿qué les explicaste?*
4. *Luis: queeeee, es como el otro que teníamos que convertirlo (…), que teníamos que convertirlo a un rectángulo, aquí en el rectángulo en total [recorre todo el rectángulo con el lápiz] eran 56 cuadritos entonces aquí [señala la mitad derecha del rectángulo] debería de haber la mitad y aquí [señala la mitad izquierda del rectángulo] debería de haber la otra mitad. Eso significa que la mitad de 56 son 28 y eso significa que el área del rombo es 28*
5. *Juan David: es más fácil*
6. *Observadora: y ya no necesitas hacer los cuadros ¿verdad?*
7. *Luis: no*
8. *Juan David: es más fácil dividirlo entre dos*

Luis conserva del problema anterior, con mucha facilidad, la manera de transformar el rombo a un rectángulo que es la mitad del rectángulo en el que está inscrito. Por eso tiene clara la relación entre ambos, sabe que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo en el que se inscribe. La cuadrícula es importante para Luis en el primer problema porque le permite poner en juego un primer procedimiento, el conteo, y también porque un error en ese conteo promueve un cambio en la manera de resolver, a saber, transformar la figura a un rectángulo. Ahora, Luis ya dispone de este nuevo procedimiento, ya no requiere la cuadrícula. Sus explicaciones en las líneas 1 y 4 tienen una diferencia respecto a la que dio en el problema anterior, y es que ahora menciona muy fugazmente la transformación ("teníamos que convertirlo a un rectángulo") que antes explicó a detalle. En cambio, se detiene mucho más en que el área es la mitad. Destaca más el cálculo que conduce a la respuesta que su justificación. Es decir, hay cosas que poco a poco van siendo prescindibles para él: ya no es necesaria la cuadrícula ni explicar cómo se transforma un rombo a rectángulo. Lo que importa es saber que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo, para poderla calcular.

En resumen, Luis pasa muy rápido del conteo de cuadros a la transformación de un rombo específico a rectángulo y puede extrapolar eso a otro rombo. Lo que hace Luis en los dos problemas va muy adelante de lo que hacen sus compañeros de equipo. Ellos están más bien centrados en el conteo de cuadritos. En el primer problema, Juan David obtiene el resultado correcto, 30 cuadritos, a partir de contar las unidades enteras y reunir los trozos para formar otras completas. Alexa primero obtiene 27, y después afina el conteo de la misma manera que Juan David, con lo que llega también a 30. Alonso reproduce la transformación a rectángulo que hace Luis. En el segundo problema, Alonso trata de usar la cuadrícula del primer rombo -dado que los dos rectángulos tienen casi el mismo ancho-, Juan David divide entre dos a partir de la explicación de Luis, y Alexa explica que pensaba que tenía que contar cuadritos hasta que Luis le dijo cómo hacer. La disparidad de procedimientos pone a Luis en una posición de "experto". Él se dedica a explicar a sus compañeros cómo resolver a partir de transformar los rombos a rectángulos, y también les hace ver algunos errores: aclara por qué el rombo se transforma a un rectángulo y no a un cuadrado, que la consigna del segundo problema especifica que ahí los cuadritos son más pequeños que en el primero. Ellos son en general receptivos a las contribuciones de Luis, reconocen sus conocimientos, aprenden de él: a raíz de los intercambios con Luis, Alexa cambia su procedimiento; Alonso también, y a eso agrega que en el primer problema se puede multiplicar largo por ancho para obtener el área del rectángulo en lugar de hacer el conteo; y Juan David retoma la relación de un medio entre rombo y rectángulo que Luis enfatiza en el segundo problema.

En la segunda parte de la clase los alumnos resuelven una lección del LTG en la que se muestra un rombo inscrito en un rectángulo y se pregunta cuál es la relación entre las áreas de ambos, con qué fórmula se puede calcular el área de un rombo y después se pide encontrar el área de dos rombos trazados sobre una cuadrícula. Analizo las primeras dos preguntas más adelante, por ahora basta decir que -como es de esperar- Luis no infiere la fórmula, más bien la busca en las notas del cuaderno. Respecto a la tercera pregunta, Luis se dispone a convertir los rombos a rectángulos, como lo hizo antes:

1. *Luis: hay que calcularlo [superpone su regla en una diagonal de cada rombo] (…)*
2. *Luis: es que hay que convertirlo [remarca con su lápiz las dos diagonales del primer rombo], creo que tenemos que convertirlo [comienza a trazar con el lápiz un rectángulo circunscrito en el rombo]*
3. *Luis: [traza la altura del rectángulo circunscrito en el rombo, que no coincide con una de las líneas de la cuadrícula, imagen 154. Va a trazar otra línea del rectángulo, pero se detiene] pero si lo convertimos quién sabe…*

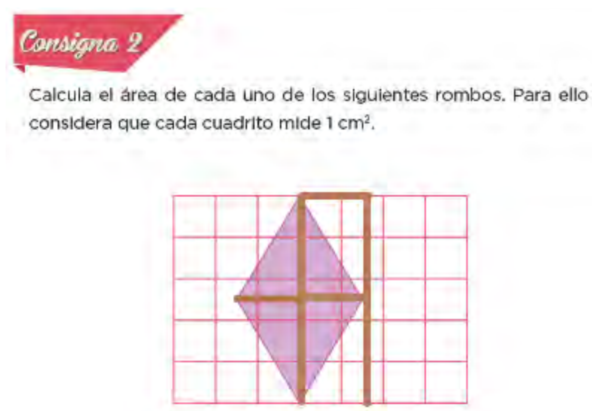


Imagen 154

(…)

4. *Luis: [borra la altura que había trazado del rectángulo circunscrito] ¡a ver! [a Juan David y Alonso, que discuten sobre si son 6 o 7 cuadritos de área] vamos a contarlos así, a ver, ya dejen de discutir*

5. *Luis trata de contar los cuadros lilas contenidos en el rombo, estimando cuántos completos se formarían con los pedazos. Juan David, Alonso y Alexa han hecho eso mismo desde el inicio. Tienen dudas sobre si son 5, 6 o 7 cuadritos en total*
6. *Luis: ¡cinco! Creo*
   (…)
7. *Luis: [hace lo mismo con el segundo rombo. Cuenta los cuadros, estimando cuántos se forman con los trozos. Juan David también hace un conteo] doce, a mí me salió doce [vuelve a hacer el conteo] ¡son diez! ¡son diez!*
   Suena el timbre del recreo, ellos cierran sus libros y se levantan.

Luis se dispone a usar la misma técnica que había usado antes: transformar el rombo a un rectángulo y ahí contar los cuadritos (línea 2). Pero se detiene después de trazar la altura del rectángulo (línea 3), quizás porque le incomoda que esta no se empalme con una línea de la cuadrícula, o bien porque nota que el rectángulo no contiene un número entero de unidades: el área del rombo es la misma que la del rectángulo, pero ¿cuál será la del rectángulo? Decide entonces volver al procedimiento con el que empezó al inicio de la clase, contar unidades (líneas 4-7). A pesar de que él y sus compañeros, o él mismo al repetir el conteo, obtienen distintos resultados, es un procedimiento que al menos les permite dar una estimación.

Antes, las distintas respuestas en el conteo de cuadros llevaron a Luis a transformar el rombo a rectángulo. Ahora, no poder construir un rectángulo que "esté entero", lo regresa a contar unidades. Y si obtienen distintos resultados, ni modo, ya es la hora del recreo. Este episodio muestra una debilidad en el diseño de la lección: el área del rombo lila no se puede obtener contando las unidades porque no hay forma de reunir pedazos de cuadritos para formar otros completos, la transformación a rectángulo también se dificulta porque su ancho no es entero en la cuadrícula, y la fórmula tampoco es fácil de usar porque la medida de la diagonal menor no es clara si la unidad de medida está dada por la cuadrícula. Esto deja dos salidas si se busca dar la respuesta exacta. Una es trasladar el rombo un poco hacia la derecha o la izquierda para hacer que el rectángulo circunscrito quede delineado sobre la cuadrícula. Nadie del grupo lo hace: la traslación no es fácil de poner en funcionamiento en este problema, como lo es en las configuraciones. Es decir, la traslación es un movimiento cuya funcionalidad está muy ligada a las condiciones del problema. La otra alternativa es obviar la cuadrícula y calcular el área en centímetros cuadrados (de hecho, es la salida que encuentra la maestra para salvar las reiteradas dudas de sus alumnos). Me parece que la intención de estos problemas desde el diseño de la lección es que apliquen la fórmula que se supone los alumnos acaban de establecer, pero la cuadrícula no lo favorece. No queda clara la función que se pretende conferir a esa cuadrícula en la lección, o si se trata de un error en la diagramación, un error gráfico. Al final de la clase, la maestra me habla de su desconcierto -yo diría que hasta enojo- por las dificultades que implicó la lección a los alumnos: ¿es posible que estas fallas en las lecciones del libro oficial, difíciles de ver de antemano para la docente cuando planea sus clases, pero que se hacen claramente visibles en la actividad de sus alumnos, contribuyan a hacerla dejar ese libro del lado y fortalezcan su predilección por el Gader?

Cinco clases después, los alumnos tienen que calcular el área de varias figuras trazadas sobre una hoja cuadriculada. Luis vuelve a hacer la transformación de rombo a rectángulo de la misma forma que antes (Imagen 155). Con el trapecio, reemplaza todo el triángulo A que se ve en la imagen 156 con el B, con lo cual se equivoca, pues los dos triángulos no son iguales. Cuenta los 35 cuadritos del rectángulo, y aparte los del triángulo C, estimando cuántos se pueden formar con los que no están completos. Ahí tiene otro error de conteo, pues comienza a partir de 35, obtiene 41, y luego suma esos 41 a los 35 nuevamente.

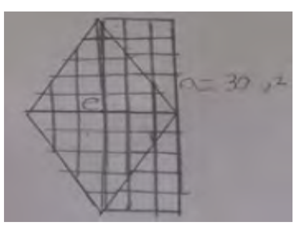


Imagen 155

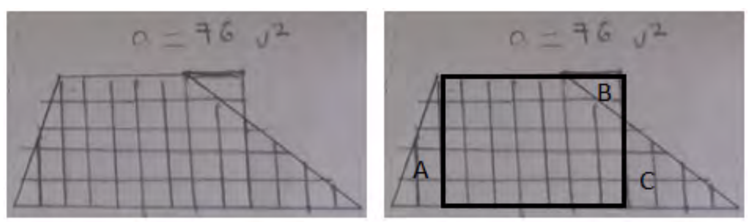


Imagen 156

El trapecio tiene una característica distinta del rombo: no se divide en cuatro triángulos congruentes. Podría transformarse a un rectángulo como muestra la Imagen 157, pero eso implica hacer cortes muy distintos a los que Luis ha hecho en el rombo. En particular, no tomar el triángulo completo A, sino ver otros que no están claramente definidos en la figura.


Imagen 157

La idea genérica de remitir figuras -triángulos muy distintos, romboides, rombos, trapecios- a un rectángulo para calcular su área es fértil porque es portadora de la superficie como cualidad física. El área sigue siendo la cantidad de superficie de una figura, que se cuantifica con un número. También porque resuelve las dificultades del conteo de unidades, es decir, el asunto de los trozos que muchas veces no es posible reunir para formar cuadritos completos. Además, puede ser un puente hacia las fórmulas, que precisamente sintetizan la relación entre el área de una figura y un rectángulo equivalente. Pero es una técnica compleja, que toma tiempo dominar. Tener claridad sobre cómo construir un rectángulo de la misma superficie que un rombo no implica para nada saber cómo hacerlo para un trapecio (o un romboide, o un triángulo que tiene una altura fuera del triángulo). La técnica engloba muchos casos particulares en los que hay que prever por qué líneas conviene hacer cortes y hacia dónde mover los pedazos que resultan de esos cortes para formar un rectángulo. O bien pensar en circunscribir la figura en un rectángulo (Imagen 158), o en duplicar la figura para obtener otra que se puede transformar a rectángulo (Imagen 159).

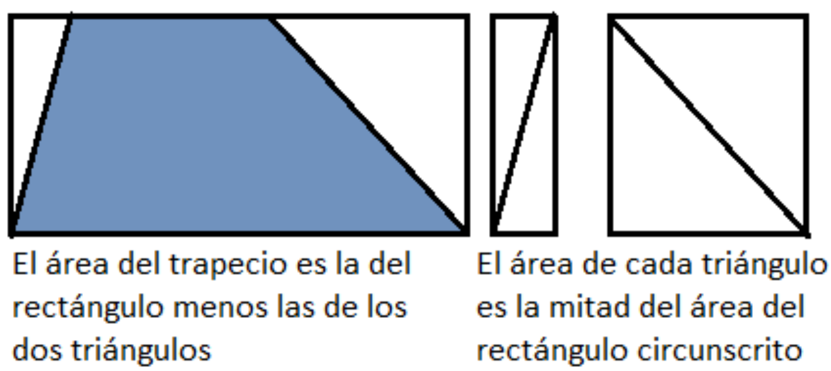


Imagen 158

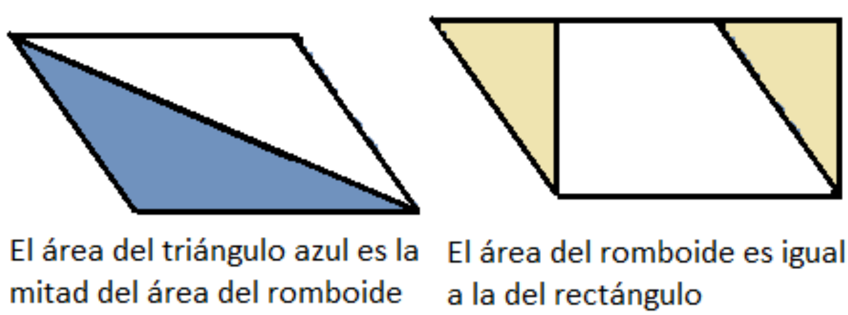


Imagen 159

Los alumnos necesitan resolver una amplia gama de problemas en los que se haga variar cuidadosamente el tipo de figura, su ubicación en la cuadrícula, tener o no cuadrícula, la posibilidad de recortar la figura o no, y la consigna (calcular, comparar u ordenar el área de figuras). Ninguno de los libros de texto, oficiales o particulares, ni propuestas en línea de los que dispone la maestra abarca un trabajo cuidadoso sobre el procedimiento de calcular áreas de figuras a partir de áreas de rectángulos. Cuando se aborda, generalmente se hace rápido, como un trámite sencillo que muy pronto permite acceder a la fórmula. Los libros entonces encierran una contradicción: se puede ver cierta intención de que los alumnos infieran las fórmulas, pero omiten gran parte de la experiencia necesaria para hacer esa inferencia, o al menos para comprenderla.

4.2.2 Establecer una fórmula, una expectativa difícil de alcanzar

Voy a mostrar cómo resuelve Luis una lección del LTG en la que se pretende que los alumnos infieran la fórmula del área del rombo [Imagen 161]. Quiero recordar que en la primera parte de la clase 6, Luis encuentra cómo calcular el área de un rombo conociendo la del rectángulo circunscrito. Identifica que la primera es la mitad de la segunda, a partir de transformar el rombo a un rectángulo. En la segunda parte de la clase, los alumnos abordan esta lección, en la que se muestra un rombo en una cuadrícula, con las dos diagonales marcadas, y a partir de esa imagen tienen que contestar las preguntas “¿Qué relación hay entre el área del rombo y la del rectángulo?” y “¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de un rombo a partir de sus diagonales? ¿Por qué?”. Luis pronto responde, en la primera, “ah ya sé, mira, que la… área del rombo, es la mitad del área que la del rectángulo”. Para la segunda, decide revisar las notas del cuaderno:

1. *Alexa: ¿cuál es la fórmula?*
2. *Juan David: ¿cuál es la fórmula pues, está fácil! Solamente le…*
3. *Luis: [interrumpe a Juan David] ¿alguien tiene el cuaderno de matemáticas?*
4. *Alexa: yo*

   (…)
5. *Luis: a ver, préstamelo. Es que yo me acuerdo que lo vimos la de las diagonales mayores y la de las diagonales menores*

   (…)

6. *Luis: [busca en el cuaderno de Alexa, varias veces adelanta y regresa páginas] creo que ya me pasé… es queee...*

   (…)

7. *Luis: [se detiene en una página en la que ve dos rombos grandes dibujados y a color] aquí está*

   (…)

8. *Luis: [lee en voz alta lo que está escrito en el cuaderno, imagen 160] El rombo es un paralelogramo que tiene cuatro lados iguales, su perímetro y su área pueden calcularse como los de un paralelogramo. La ex-preee-sión más habitual es el valor de sus diagonales mayor y menor, la fórmula es la siguiente: diagonal mayor por diagonal menor entre dos. Aaaah ya, entonces…*

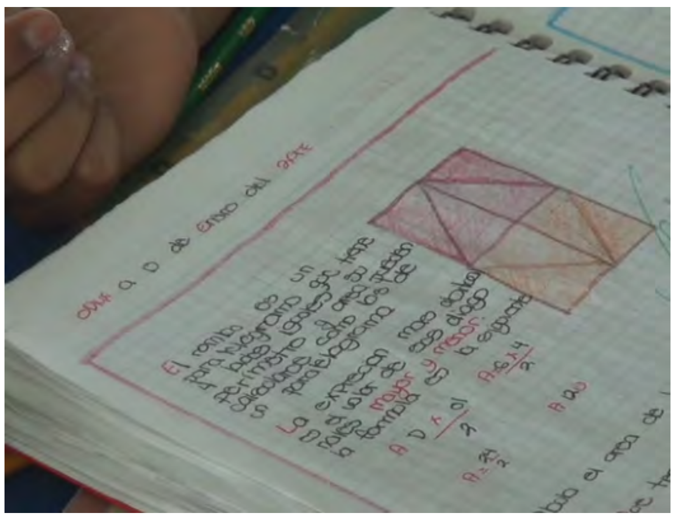


Imagen 160

9. *Alexa: es diagonal menor, eeeentreee dos… diagonal menor*
10. *Luis: no mira, es diagonal mayor por, por diagonal menor entre dos [escribe eso en el libro, en el espacio para responder]*

    (…)

11. *Juan David: es la diagonal mayor por la diagonal menor entre dos. ¿Y por qué Luis? ¿Por qué, por qué, por qué?*

    (…)

12. *Juan David: (…) faltó responder el "por qué"*
13. *Alexa: no es… ahhhhh, ¡sí cierto!*

    (…)

14. *Juan David: pero ¿por qué se utiliza?*

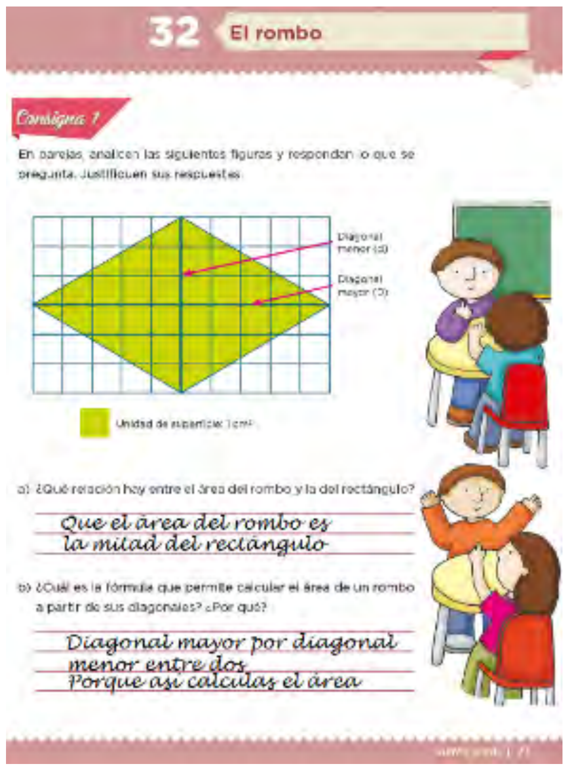
15. Alexa: ¿porque así se calcula el área?

16. Luis: esteeeee…. porqueeeeeee… porqueeee…. porqueeee… porqueeee… ¿así calculas el área?

17. Alexa: es lo que dije

18. Luis: bueno

Los cuatro responden "porque así calculas el área" en el libro [Imagen 161]



32 El rombo

Consigna 1

En parejas, analicen las siguientes figuras y respondan lo que se pregunta. Justifiquen sus respuestas.

Diagonal menor (d)

Diagonal mayor (D)

Unidad de superficie: 1cm²

a) ¿Qué relación hay entre el área del rombo y la del rectángulo?

Que el área del rombo es la mitad del rectángulo

b) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de un rombo a partir de sus diagonales? ¿Por qué?

Diagonal mayor por diagonal menor entre dos

Porque así calculas el área

Imagen 161

Está claro que establecer por cuenta propia la relación entre el área del rombo y del rectángulo en el que se inscribe -cosa que Luis no logró a partir de mirar el rombo de la lección sino de los problemas de transformaciones resueltos antes- no conduce a inferir una fórmula de la manera tan inmediata como pretende la lección. Frente a la pregunta sobre la fórmula, Luis recurre inmediatamente al cuaderno (línea 3). Sabe que ahí está la respuesta porque recuerda una parte, algo de las diagonales mayores y menores (línea 5). Y está tan seguro, que interrumpe a Juan David (línea 2) para invocar la autoridad del cuaderno. No pide a Alexa, la dueña del cuaderno, que busque dónde está la fórmula, lo hace él.

Me parece que recurre a esas notas por dos razones. La primera es que no le cruza la idea de que él podría inferirla. En efecto, para que eso pase hacen falta varias cosas, empezando por despegarse del rectángulo. Para Luis, cualquier rombo va a asociado a un rectángulo equivalente en superficie. La fórmula expresa el área en función exclusivamente de las medidas del rombo, pero Luis la encuentra contando los cuadritos del rectángulo. Necesitaría primero recuperar la recomendación hecha tiempo atrás por Alonso (línea 3 del primer fragmento del apartado anterior) -dejar el conteo y multiplicar base por altura del rectángulo-, y después pensar qué son del rombo esas dos medidas del rectángulo. Por más esmero que ponga la lección en remarcar las diagonales, poner sus nombres y señalarlas con llamativas flechas rojas, Luis no vincula la pregunta a) con la b), lo que tiene sentido porque no está utilizando las diagonales, es decir, las medidas del rombo, ni las del rectángulo, sino sus cuadritos. Esto se puede ver en el apartado anterior, cuando Luis desiste de convertir un rombo a rectángulo porque su base no es entera, así que no podrá contar los cuadritos (línea 4, apartado anterior). Es decir, para Luis, esa base es un objeto geométrico que está ubicado en un lugar muy específico, delimita el espacio que ocupa el rombo. Asociar esa base a la diagonal menor del rombo implica quedarse con la medida de ese segmento, verlo como un número. Él sigue orientándose por una idea espacial de la superficie, el rectángulo no le es prescindible todavía. No hay ninguna razón para que deje el procedimiento que termina con el conteo de unidades, porque funciona muy bien en los problemas que hasta ahora se le ha pedido abordar.

Para inferir la fórmula también hace falta un interés por buscar un procedimiento genérico, para todos los rombos. Es verdad que Luis puede transportar su manera de resolver de un rombo a otro, pero cada vez calcula el área de ese rombo particular, un área concreta, no el área hipotética de un rombo cualquiera. De hecho, cuando él transforma el rombo a rectángulo, no lo hace para usar la fórmula del rectángulo, sino para contar ahí los cuadritos, porque la figura “ya está entera”. Él no deriva una fórmula de otra, sino que hace más eficiente el conteo de unidades.

¿Qué tipo de tareas podrían llevar a necesitar despegarse de las cuadrículas, dejar de convertir a rectángulo, expresar el procedimiento de cálculo en términos exclusivamente de la figura cuya área se quiere calcular? ¿Tendría que encontrar áreas de muchos rombos para reconocer el aporte generalizador de la fórmula? ¿O basta con hacer más eficiente la transformación a rectángulo para economizar el conteo de cuadros y, en ese sentido, la fertilidad de las fórmulas no reside tanto en que ahorra trabajo espacio-geométrico, sino en que puede ser una entrada al estudio del álgebra, con nuevos problemas y herramientas?

La otra razón por la que Luis recurre al cuaderno es que recuerda que ya le enseñaron la fórmula (línea 5). Nada de que "está fácil", como dice Juan David (línea 2): si eso ya lo vieron, no hace falta reconstruirlo, copiarlo es más rápido. Él recuerda que ya vieron algo de las diagonales cuando se le demanda la fórmula, pero no cuando se le pide calcular áreas, eso lo hace bien por cuenta propia. Probablemente Luis también reconoce que la fórmula tiene un lugar en la escuela muy distinto de su procedimiento personal. Se trata de un saber legítimo, reconocido, esperado, enseñado, lo cual se nota en la formulación erudita que Luis lee en la línea 8. Esa sí que debe estar en el cuaderno, porque ahí se registran los conocimientos para mostrar a los padres, los que deben permanecer, los que son evaluables. Ahí reside la autoridad del texto escrito. Como muestran Rockwell y Gálvez (1982), al tener que reflexionar sobre sus experiencias, los alumnos:

> vuelven a la seguridad de encontrar las respuestas en el texto escrito, disociando así su propia confrontación con el fenómeno de la interacción sobre el tema que exige el rito escolar (…) el texto impreso se convierte en depositario de una especie de poder mágico, de manera que su cita literal parece ser aceptada como indicación de asimilación adecuada del conocimiento (p. 122-127).

La búsqueda en el cuaderno de la información que necesita Luis no es inmediata, la tiene que localizar entre un mar de notas (línea 6). Quizás podría ayudar recordar más o menos la fecha en que estudiaron la fórmula o el título del tema. Al ver el video me dio la impresión de que lo que hace que se detenga en una página es el llamativo dibujo de un rombo (línea 7). De ser así, esto deja ver que la enorme cantidad de tiempo invertido en las notas del cuaderno, cuidando por ejemplo la decoración de figuras con colores, la limpieza y orden del texto o la escritura del título con un color específico, cumple una función: ayudar a ubicar después la información que se requiere.

Me quiero detener un poco en el "¿por qué?" del libro, que viene después de la pregunta por la fórmula: ¿por qué esa fórmula permite calcular el área del rombo a partir de sus diagonales? A Luis parece pasarle por alto, es Juan David quien insiste en responderla (líneas 11, 12 y 14). Le demanda la respuesta específicamente a Luis (línea 11), poniéndolo nuevamente en posición de experto. Juan David tiene un papel particular frente a Luis, que también encontré en otros episodios que no analizaré ahora: él hace que Luis responda los problemas completos, le recuerda partes de la consigna que a veces él se salta. Esta vez, no es Luis quien responde, sino Alexa. Ella sugiere, como pregunta, sin afirmar: "¿Porque así se calcula el área?" (línea 15). Luis recupera la sugerencia dudosa de Alexa, de hecho, incrementando el grado de incerteza (línea 16).

Cuando Alexa reclama como suya esa idea que Luis ha replicado sin reconocer de quién proviene[54] (línea 17), pasa a los libros de todos como una respuesta segura (línea 18).

La respuesta “porque así se calcula el área” es casi lo mismo que contestar “porque sí”. No tiene mucho sentido, o no está clara, la demanda de una justificación. ¿Qué van a justificar, si tomaron la fórmula del cuaderno, es decir, si dieron una respuesta institucional? La transformación a rectángulo y la fórmula son en este episodio dos maneras de calcular áreas de rombos, dos formas de conocer un mismo objeto, que no se tocan. Uno se moviliza al resolver problemas, otro está en los textos. La manera de preguntar por la fórmula en la lección no es suficiente para que los alumnos la conecten con lo que hicieron antes, no ayuda a reconocer eso que se ha hecho como parte de un procedimiento general. La fórmula no proviene del procedimiento espacial en este episodio. En parte por todo el trabajo de construcción que la lección pasa por alto, y en parte porque la fórmula ya está en el cuaderno, el resultado es que ni el alumno experto logra producir la fórmula como busca la lección: se trata de un conocimiento que los alumnos no están en condiciones de fabricar en este momento y frente a estos problemas. Quizás podría ser más útil promover más experiencia con las transformaciones, y después traducir eso a una fórmula, pero desde la enseñanza, sin pretender que los alumnos la infieran.

Cuatro clases después, la docente muestra a los alumnos la base de un prisma pentagonal y pregunta cómo podrían calcular esa área que nunca han obtenido antes. Recuerda que ya saben calcular el área de un triángulo y la de un rectángulo con las respectivas fórmulas, pero ahora se trata de un problema nuevo. En el equipo de Luis están Juan David, Cristofer y Erick, sentados al frente:

1. *Maestra: base por altura, ¿pero y de este? [les muestra la base pentagonal del prisma] ¿cómo le podríamos hacer?*
   (…)
2. *Maestra: (…) a ver, tengo un pentágono, no es ni cuadraaado, ni, ni este [señala un rectángulo trazado en el pizarrón] ¿cómo le puedo hacer?*
   (…)

[54] O’Connor y Michaels (1996) muestran la importancia que tiene reconocer que las aportaciones de unos provienen de aportaciones de otros para lograr orquestarlas en clase, para hacer de la clase una construcción conjunta.

3. *Maestra: si yo tengo este, pentágono (…) [traza un pentágono regular grande en el pizarrón] ¿Cómo podría hacer para calcular el área? (…) nada más les voy a dar un tip, con algo de lo que ustedes ya saben de áreas, lo pueden sacar, pero ¿cómo?, ¿cómo?*
4. *Alumnos: base por alt… ¡miss, miss!... ah ¿quiere calcular el área?... puedooo… ¡miss, miss! [Varios alumnos hablan al mismo tiempo, Luis levanta la mano sin hablar]*
5. *Maestra: a ver, uno a la vez, Luis*
6. *Luis: miss, puedo convertirlo en otra figura*
7. *Maestra: ¿en qué figura?*
8. *Luis: mire, por ejemplo lo de arriba se convierte en un triángulo [la maestra traza una línea en el pentágono para destacar el triángulo al que se refiere Luis, imagen 162], y mira y lo de abajo se convierte en un trapecio*

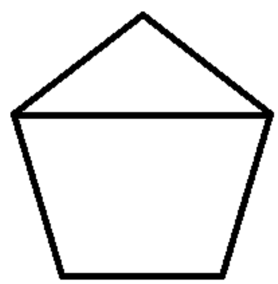


Imagen 162

9. *Maestra: OK, él dice yo lo convierto en un trapecio y en otro, ¿alguien que tenga otra manera diferente? [traza otro pentágono en el pizarrón] no está mal, pero a ver, alguien, que lo pueda descomponer en alguna otra figura*
   (…)
10. *Maestra: (…) ¿en qué otras figuras lo puedo descomponer?*
11. *Alumnos: eeeeeennnn…. Ehhhh….*
12. *Luis: en dos triángulos, ah no, no es cierto*
13. *Cristofer: en tres*
14. *Maestra: en dos triángulos en tres ¿en cuántos triángulos más?... ¿en cuántos?...*
    (…)
15. *Luis: eeeeennn, en cuatro tria… en tres, tres, tres triángulos*
16. *Maestra: [voltea a ver a Luis] ¿cómo harías tres triángulos?*

17. *Luis: el de arriba [Erick se levanta y señala en el pentágono en blanco un triángulo igual al de la imagen 162], y el de ahí [se levanta y traza con los dedos dos líneas en la parte inferior del primer pentágono, imagen 163]*

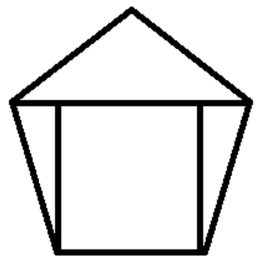


Imagen 163

18. *Maestra: a ver, su idea de los triángulos me gusta pero en cuántos triángulos lo podrían convertir?*
19. *Alumno: ¡en tres! ¡tres!*
20. *Maestra: ¿en tres nada más? ¿a ver?*
21. *Luis: ¡cinco! ¡en cinco!*
22. *Maestra: a ver, él dice en tres él dice en cinco ¿cómo lo cortarías en cinco?*
23. *Luis: ah, cómo lo cortaría en cinco*

    (…)
24. *Luis pasa al pizarrón, divide el pentágono del pizarrón en cinco triángulos como se ve en la imagen 164*

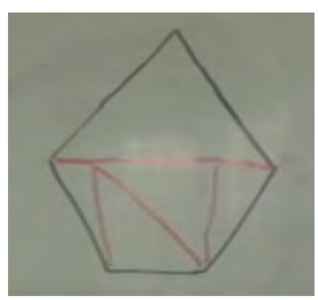


Imagen 164

25. *Maestra: mmmmh, pues va a estar un poco medio difícil… bueno ¿y luego qué harías con eso?*
26. *Luis: para eso le calcularíaaaa looo, el área de loooos triángulos y luego los sumaría*

27. *Maestra: OK, ¿y alguien podría sacar cinco triángulos pero de manera diferente a Luis? [traza un tercer pentágono en el pizarrón] le voy a poner aquí un ombligo [marca el centro del pentágono, imagen 165] un ombligo… ¿cómo harían ahí? ¿a ver? [muchos alumnos hablan, uno sugiere dividir en seis] ¿en seis? (…) ¿cómo? ¿En este cómo lo convertirían? Está bien en triángulos, ¿cómo le…?*

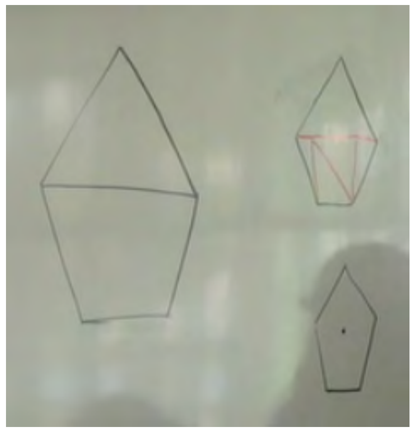


Imagen 165

28. *Juan David: [interrumpe] ¡ahhhhhh! Ya sé [se levanta]*
29. *Maestra: a ver, pasa, pasa y hazlo*
30. *Juan David: [pasa corriendo al pizarrón] sería, las vértices los unimos*
31. *Maestra: [mientras Juan David sigue explicando] a ver, ¡pongan atención!*
32. *Juan David: …al punto central [marca con rojo cinco líneas que unen cada vértice del pentágono con el centro, imagen 166]*

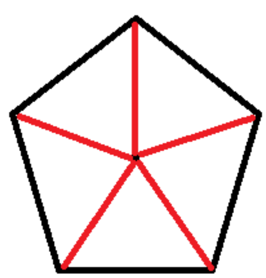


Imagen 166

33. *Maestra: ¡¡ESSSOO!! [voltea a ver al grupo] Miren esa*
34. *Juan David: …donde se forman*
35. *Maestra: ¿ajá?*
36. *Juan David: …los triángulos*

Me interesa destacar tres cosas en este fragmento: la maestra va induciendo hacia la fórmula, lo hace en una especie de estira y afloja entre dirigirse a un alumno específico y tratar de interpelarlos a todos, y los alumnos van respondiendo a sus expectativas.

La maestra plantea una primera tarea, «calcular el área del pentágono», que muy pronto traduce, mediante un "tip", en «calcular el área del pentágono con algo de lo que ya saben de áreas» (línea 3). Habla en plural, dirige la tarea a todo el grupo. Surgen dos maneras de recuperar ese tip. Una viene de un alumno que no puedo identificar: "base por alt…" (línea 4). Esta respuesta tiene sentido si se toma en cuenta que algo muy importante de lo que "ya saben de áreas", son ciertas fórmulas. De hecho, "base por altura" aparece, con ajustes, en las fórmulas del rectángulo, romboide, triángulo y trapecio. Podría estar implicada acá también. Esa propuesta se pierde entre lo que dicen todos al mismo tiempo, encimándose. Luis es el único que levanta la mano, decidido (línea 4), tal vez por eso consigue el primer turno (línea 5). Luis propone otra cosa, descomponer el pentágono regular en un trapecio y un triángulo (líneas 6-8), dos figuras para las cuales ya dispone de una fórmula. Si esto también responde a la sugerencia de la maestra, lo "que ya saben" no es una parte de otras fórmulas, sino una manera de calcular áreas de otras figuras en las que se puede descomponer la que tienen ahora. Vale la pena comparar este procedimiento de Luis con el que antes ha producido por su cuenta, cuando transformaba rombos a rectángulos equivalentes en superficie. Las dos maneras de resolver se distinguen en que ahora el pentágono no se transforma en otra figura, sino que se descompone en dos, pero tienen en común que remiten el área de una figura a las de otras cuya área ya saben cómo cuantificar. Antes el rectángulo, ahora el trapecio y el triángulo. Quizás por ello Luis conserva la palabra "convertir" (líneas 6 y 8), que la maestra precisa, cuando pasa de "convierto" a "descomponer" (línea 9).

La descomposición del pentágono que hace Luis en efecto permite saber su área, pero no puede traducirse a una fórmula. La maestra pide hacerlo de otra manera (líneas 9 y 10): ella da la posibilidad a los alumnos de participar, pero no puede aceptar cualquier idea buena, hay una que necesita para avanzar hacia donde quiere llegar. En esa intervención, si bien rechaza la descomposición particular de Luis, sugiere que está bien la idea de descomponer. Con ello acota más la consigna, la tarea se vuelve a transformar: en lugar de «calcular el área del pentágono con algo de lo que ya saben de áreas», ahora hay que «descomponer el pentágono en otras figuras». Ese nuevo planteamiento viene de una idea de Luis, que ella relanza al grupo: "él" ha hecho esto, ¿"alguien" puede cambiarlo un poco? (línea 9). No pide a Luis que haga otra descomposición distinta, no se enfrasca en un intercambio exclusivo con él, vuelve a convocarlos a todos.

Los alumnos empiezan a adivinar que quiere la maestra. Cuando algunos titubean ("eeeeeehhh", línea 11), Luis interviene rápidamente, aunque no esté seguro (línea 12). Cristofer secunda a Luis en su apuesta de partir en triángulos, con un "tres" más asertivo que elimina la sensación de duda en la formulación de Luis (línea 13). Es difícil saber de dónde sale esta idea, me da la impresión de que ambos están adivinando más que haciendo una búsqueda, pero es muy afortunada para la fórmula (¡a veces parece que las fórmulas tienen vida propia!). La maestra la agarra al vuelo y así agrega otra condición a la consigna: ya no hay que «descomponer el pentágono en otras figuras» sino específicamente identificar «en cuántos triángulos se puede descomponer el pentágono» (línea 14). Así, empuja un poco más hacia la fórmula: el tipo de figura en el que hay que desagregar ya no es impreciso sino uno bien definido, el asunto ahora es determinar la cantidad.

Ante el titubeo de Luis, ella se dirige específicamente a él, le asigna la tarea a él, quien desagrega en más triángulos que antes (líneas 15-17, imagen 163). Esto cumple, a su modo, con lo que ha pedido la maestra: es una descomposición del pentágono, distinta a la que ha hecho antes, y tiene más triángulos. Ante esa nueva partición que hace Luis en un rectángulo y tres triángulos, la maestra refuerza la petición anterior: está bien desagregar en triángulos, ahora hay que definir en cuántos (línea 18). Cuando la maestra reafirma la idea de los triángulos, lo hace en plural y en segunda persona: los triángulos fueron "su" idea (línea 18). La atribución del aporte no es a ella sino a los alumnos, a varios, no solo al que se dirigió en su turno anterior. El plural incluye quizás, además de Luis, a Cristofer, quien apoyó la idea de los triángulos, y a Erick, quien se levantó a señalar en la figura del pizarrón, con el dedo, lo que Luis estaba explicando verbalmente (línea 17). De ser así, atribuye la contribución al equipo de Luis, no solo a Luis. O bien, dado que ella dirige la mirada y la orientación corporal al grupo, no la focaliza a un solo equipo, es posible también que ese plural sea una manera de relanzar a todos la pregunta: ¿cuántos triángulos?

Un alumno apuesta que tres (línea 19), Luis le atina a la respuesta esperada, son cinco (línea 21). La maestra pone sobre la mesa las dos opciones, elige una, la dirige a Luis, quien la propuso (línea 22). Otra vez, la tarea cambia: ya no hay que «definir en cuántos triángulos se puede descomponer el pentágono» sino «partir el pentágono en cinco triángulos». Luis responde a esa demanda con una nueva descomposición (líneas

23 y 24, imagen 164) que se distingue de la anterior en que ahora son únicamente triángulos, y son cinco. De hecho, retoma la anterior partiendo en triángulos el rectángulo, la única figura que no es triángulo. La maestra deja ver que no está muy convencida ("mmmmmh, pues va a estar un poco medio difícil", línea 25), pero igual pregunta en qué deriva ("bueno, ¿y luego qué harías con eso?", línea 25). Es decir, aunque la partición de Luis no es la que espera, no la cancela del todo. Ese estira y afloja me parece orientado por una necesidad de no perder a los alumnos, seguir en un intercambio, no terminar en monólogo. Va hacia la fórmula, pero busca que los alumnos la acompañen en la medida de lo posible. La lógica del contenido (Rockwell y Gálvez, 1982) se fractura cada vez que una partición funciona en el problema, pero no es la esperada por la maestra; en cambio, la lógica de la participación social parece funcionar con fluidez.

Luis se sostiene, argumenta que puede calcular el área de cada triángulo para sumarlos después (línea 26). Lo que hace Luis es una triangulación, una técnica que de hecho podría afinarse para generalizarse a todo tipo de polígonos, y que en algunos libros se propone para calcular áreas de polígonos irregulares que no tienen fórmula. La fórmula de polígonos regulares proviene de una triangulación, pero una distinta a la que hace Luis. Se trata de una triangulación muy específica, que incluye al centro del polígono para descomponer en triángulos congruentes, no en triángulos diferentes. Luis ha hecho de nuevo una propuesta que funciona en el problema, pero no es la que conduce a la fórmula.

Me parece que hay una tensión generada por dos maneras distintas de ver al pentágono. La maestra ve un polígono regular, una figura entre toda una familia en la que hay pentágonos, hexágonos, eneágonos[55], en fin, cualquier figura que tenga todos sus lados y ángulos iguales. En cambio, creo que los alumnos ven una sola figura que no está asociada a otras, para la que basta cualquier partición, no está en su horizonte una figura general y por lo tanto tampoco un procedimiento general. El juego de expectativas de la maestra y de intentos de los alumnos por satisfacerlas parece funcionar como si hablaran de la misma cosa, pero hay un tironeo entre lo que Fregona y Orús Báguena (2011) llaman la "figura ideal" y la "figura representación mental", que maestra y alumnos, respectivamente, ponen de relieve en la "figura material", en ese

[55] Más adelante se ve esto con más claridad, cuando la maestra intenta transferir una manera de calcular el área del pentágono a otros polígonos regulares.

pentágono negro del pizarrón. Y el problema no alcanza a hacer que los alumnos entren en contacto con una figura más genérica.

La maestra acepta la descomposición de Luis, pero pide otra que cumpla con una última condición, incluir al centro del polígono (línea 27). Así, la tarea se restringe aún más: «partir el pentágono en cinco triángulos» deviene en «descomponer el pentágono en cinco triángulos usando el centro». En esa última orientación que da la maestra, usa la palabra “ombligo”. Es el único término no convencional que usa en sus 29 turnos[56]. Me pregunto si esto es una manera de disimular su aporte de información a los alumnos: pone un ombligo, no el objeto matemático «centro». Como sea, sí da información. De hecho, me parece que marcar el centro hace que la “figura material” se vuelva una “figura didáctica”, un pentágono con algo muy específico que la maestra quiere agregar al procedimiento. Juan David consigue ver la partición que desde el inicio esperaba la maestra (líneas 28-36). A ella le gusta esta respuesta (líneas 31 y 33): esa descomposición es fundamental, es la que permite llegar hacia donde quiere llegar, salvar por fin los rodeos que las particiones de Luis han hecho dar. La maestra enfatiza esa desagregación del pentágono dirigiéndose a todos: no sé si ella ve que el margen para que los alumnos desplieguen procedimientos propios se va estrechando, pero creo que sí mantiene un esfuerzo por que se enteren de lo que está pasando.

Me detengo un momento a comparar esta manera de obtener el área con las tres particiones propuestas antes por Luis. La descomposición a partir del centro tiene dos ventajas. Una tiene que ver con el ámbito espacial: ya no hay que pensar en cómo desagregar cada polígono regular, basta con trazar líneas del centro a cada vértice y se obtienen puros triángulos. La otra reside en el ámbito numérico, porque se reduce la cantidad de medidas que hay que tomar y de cálculos por hacer. Por ejemplo, la descomposición de la imagen 164 implica medir la base y altura de cinco triángulos diferentes, aplicar la fórmula cinco veces y sumar las cinco cantidades. En cambio, en la última descomposición solo hay que utilizar una vez la fórmula y multiplicar el resultado por cinco. Tomar dos medidas -una base y una altura- y hacer tres cuentas -base por altura sobre dos por cinco- es mucho más económico que tomar diez medidas y hacer 11 cuentas.

No tener que elegir cada vez cómo hacer la descomposición y reducir el trabajo numérico podría ser un motivo para preferir la partición en triángulos iguales a partir del centro del polígono regular sobre otras descomposiciones, pero ambas características

[56] Estoy contando los turnos del episodio que he descrito y la continuación, que presento más adelante.

quedan ocultas en la discusión. De entrada, no sé si la maestra orienta las particiones hacia la que finalmente hace Juan David teniendo en consideración sus ventajas, o más bien, lo hace porque es la descomposición oficial, la que se traduce en la fórmula. En todo caso, las condiciones de economía del procedimiento esperado no se ponen de relieve: no hay una amplia comparación de las distintas maneras de resolver, tampoco se pide calcular el área de varios polígonos para favorecer que se vaya eligiendo la técnica más eficiente.

Por otro lado, las formas en que Luis desagrega la figura tienen también una ventaja sobre la de Juan David: es una estrategia que sirve para el área de cualquier polígono, no solo los regulares. Eso tampoco se ve en la clase, los polígonos irregulares no están en las tareas. Luis propone tres descomposiciones distintas del pentágono, las cuales son ejemplos de lo que Marchand (2020) llama “articulación”, que entre otras cosas abarca la “posición de una parte de un objeto respecto a otra”, y a la cual atribuye importancia en el estudio de las figuras y los cuerpos. Poder descomponer una figura o cuerpo de distintas maneras enriquece las posibilidades para calcular su área, área lateral o volumen. Esta es otra muestra de que el estudio de las figuras y su área están entretejidas, y también del valor que pueden tener las particiones de Luis, aunque no sean la oficial, aunque no sean las más eficientes para los polígonos regulares. Pero eso se desdibuja en el curso de la discusión, lo que muestra otra vez la tensión entre los procedimientos espontáneos y el que se espera: para que los alumnos pudieran establecer la fórmula, necesitarían antes detenerse un buen rato en otros procedimientos, pero, justo porque esos procedimientos no se traducen a la fórmula, se descartan.

Tanto las particiones de Luis como la de Juan David permiten ampliar el repertorio de maneras de calcular áreas de figuras nuevas remitiéndolas a figuras cuyas áreas ya saben cómo encontrar. Esto tampoco se analiza en la clase.

La maestra comienza con la tarea abierta: ¿cómo calcular el área de ese pentágono? Esa tarea puede resolverse descomponiendo la figura en otras cuyas fórmulas ya conocen, de muchas maneras distintas, como las de Luis. Para los alumnos, basta con eso. Para la maestra, en cambio, no son suficientes, porque ella busca una partición muy específica, la oficial. En pocas palabras, hay un intento de que los alumnos propongan la triangulación a partir del centro, a partir de un problema que no hace necesario ese procedimiento. Así, el lugar de los alumnos en la resolución -que Chevallard (1997) llama *topos*- va disminuyendo, mientras se acrecienta el de la maestra. En el estudio de Weiss, et al (2019) se describe una contradicción muy parecida en la que varios maestros se ven inmersos: la pretensión de que los alumnos infieran las fórmulas de área, a partir de problemas que no las implican realmente, termina generando muchas dificultades en las clases.

Los autores señalan que esta tensión viene desde las directrices curriculares: así están diseñadas en el libro de texto gratuito las lecciones dedicadas a las fórmulas de área del romboide y el rombo, que la maestra trabaja con sus alumnos. Hay un enfoque oficial que sobre todo destaca la construcción por parte de los alumnos de sus conocimientos, pero las lecciones muchas veces no abarcan problemas que lo permitan. Berthelot y Salin (1993) describen un fenómeno similar en la enseñanza de la simetría: los manuales hacen un tratamiento tal de ciertas propiedades, que los alumnos no responden como se espera. En estas condiciones, "la participación del maestro, subestimada por los libros, es esencial (…). Si el "mensaje" no es decodificado por al menos un alumno" (p. 50-51), el maestro, que no puede renunciar al conocimiento del cual se le hace responsable, decide avanzar a partir de una serie de preguntas al grupo. En ese intercambio, el maestro tiene que intervenir ampliamente, manteniendo una ficción de que la información proviene de los niños. La paradoja es que los alumnos no perciben ese diálogo como algo que les ha aportado una información nueva, sino como una incapacidad para identificar aquello que tendrían que poder mirar. ¿Qué sería mejor para la maestra, retomar del libro oficial la pretensión de que los alumnos infieran la fórmula, a partir de problemas que la orillan a este tipo de diálogo con sus alumnos? ¿O seguir el Gader, que proporciona la fórmula directamente? Si ella me hubiera pedido consejo en ese momento, como lo hizo en otros, yo no sabría qué responder. En cambio, sí tengo una posición respecto al diseño del libro oficial: me inclino por dar más cabida a diversas particiones -como las de Luis-, y paulatinamente plantear problemas que apunten a la generalización de la figura, aunque eso implique abrir más tiempo de estudio, a cambio de posponer para los siguientes grados el arribo a la fórmula.

Una vez obtenido el procedimiento esperado para ese pentágono, la maestra intenta extenderlo a otros polígonos regulares:

37. *Maestra: ¿y todos los triángulos cómo te quedarían?*
38. *Juan David: mmmm, así [señala el dibujo que hizo en el pizarrón]*
39. *Maestra: pero ¿qué habría en todos los triángulos, todos qué? ¿cómo serían entre ellos?*

40. Luis: ¿iguales?

41. Juan David: iguales

42. Maestra: iguales, y a ver en este [dibuja un hexágono en el pizarrón]

43. Juan David: igual el punto central

44. Maestra: y con ¿y cuántos lados te quedarían? ¿cuántos te…? a ver hazlo

45. Juan David divide el hexágono en seis triángulos iguales a partir del vértice

46. Maestra: ¿cuántos te salieron?

47. Alumnos: seis

48. Maestra: ¿cuántos lados tenía la figura?

49. Alumnos: seis

50. Maestra: ¿y la figura de abajo?

51. Alumnos: cinco

52. Maestra: ¿y si hacemos un octágono? ¿cuántos (triángulos) te van a salir?

53. Alumnos: ¡¡ocho!!

54. Maestra: (…) ¿cómo entonces ahora podría sacar, el área de este [señala el hexágono]?

55. Luis levanta la mano

56. Maestra: ¿cómo? [señala a Luis]

57. Luis: ahhh, calcular eeeel, el área de un triángulo

58. Maestra: ajá

59. Luis: y luegooooo

60. Cristofer: multiplicarlo pooooor

61. Luis: multiplicarlo por el número de lados

Una vez propuesta la partición esperada, la maestra hace un tipo de pregunta (línea 37), muy frecuente en libros de texto, que generalmente solo puede contestar quien ya sabe la respuesta. Luis traduce el “mmmmh, así” de Juan David (línea 38) en un “son iguales” (línea 40), lo que da pie a avanzar un paso hacia la generalización que supone la fórmula (líneas 42-61): la maestra cambia el pentágono por otros polígonos regulares, Juan David rápidamente establece como punto de partida el “punto central” con su respectiva triangulación, varios alumnos extienden los seis triángulos de un hexágono a ocho de un octágono, Cristofer evoca la multiplicación implicada en el cálculo, y Luis cierra el episodio con una formulación de ese cálculo disociada de la cantidad específica de lados. Es decir, parece haber varios alumnos que pueden dar, a partir de la intervención de Juan David, el giro que esperaba la maestra.

Desde la partición inicial en un trapecio y un triángulo, hasta la formulación final en la que plantea calcular el área de uno de los triángulos trazados a partir del centro y multiplicarla por el número de lados, Luis va, con ayuda de sus compañeros, sobre todo los de su equipo, sucesivamente incorporando las peticiones de la maestra. Es decir, prácticamente cada turno de Luis es una producción personal que proviene de la comprensión de una nueva expectativa de la maestra y la intención de cumplirla. La participación de Luis en este fragmento tiene entonces dos caras: por un lado, va renunciando a cada una de sus producciones sin saber por qué no son aceptadas; por otro lado, cada renuncia lo hace producir algo nuevo. A su vez, cada nueva condición que la maestra agrega a la consigna es un intento por orientar las producciones de los alumnos hacia la fórmula, sin aportarla ella de un tirón. Es decir, cada intervención de uno es una reacción muy particular a una anterior del otro: las de Luis son condicionadas, las de la maestra van condicionando sin decirlo todo de un tirón. Hay una tensión en términos del contrato didáctico: la maestra espera que los alumnos produzcan la fórmula, los alumnos ponen en juego otros procedimientos útiles para ese pentágono específico, la maestra empuja esos procedimientos hacia otros cada vez más cercanos a la fórmula, los alumnos siguen el rumbo que pauta la maestra, Luis despegándose de sus propuestas. Mantener la interacción en estas condiciones no es nada sencillo para la maestra, implica regresar la pregunta al grupo una y otra vez, pedir más respuestas, rescatar en ellas lo que sí apunta hacia el procedimiento que ella busca, dar alguna pista.

Vuelvo un poco atrás para mostrar cómo se vincula Luis con las expectativas de la enseñanza, sea que provengan de la maestra o el libro de texto. En el apartado anterior, Luis pone en juego procedimientos propios -el conteo de cuadros, la transformación de un rombo a rectángulo-, pero también es tajante para responder una pregunta del libro sobre la fórmula recuperándola del cuaderno. En este episodio, Luis sucesivamente despliega maneras de descomponer el pentágono que en efecto permiten saber el área, las descarta porque no satisfacen a la maestra, y vuelve a producir otras. Es capaz de proponer, y también de despegarse de lo que propone, de reconocer lo que espera la maestra y aquello que cumple con esa expectativa, ya sea que venga de él o de alguien más. Como explica Sensevy (2011), la producción autónoma de los alumnos y la intención de actuar como espera la maestra se engarzan, no es una cosa o la otra. Además, Luis también sabe cómo colocar sus aportaciones en el plano público: levanta la mano mientras todos hablan al mismo tiempo, interviene rápidamente aun sin estar seguro de lo que va a decir, admite el procedimiento de Juan David aunque tres suyos hayan sido descartados. Finalmente, cuando Cristofer intenta contribuir a una idea que él ha comenzado a formular (línea 60), acelera el ritmo, habla más rápido, sin elongaciones y sin una sola palabra de más, para terminar de explicar él mismo. Sabe manejar el ritmo como recurso discursivo. Sabe abrirse campo entre los alumnos. En pocas palabras, conoce la lógica del contenido y la de participación social (Rockwell y Gálvez, 1982).

Esta clase no culmina con la escritura de la fórmula. La maestra tiene precaución, pide a los alumnos que calculen áreas de distintos polígonos regulares. Ocho clases después, es decir, en la última que observé, dedica un tiempo a traducir la partición a partir del centro a una fórmula. Vuelve a preguntar cómo calcular el área de un hexágono regular, y Luis responde, como si lo hubiera hecho hace muy poco: "calculando el área de un triángulo y la multiplicas por el número de lados te da el área total". Cuando la maestra pregunta al grupo cómo sacar de ahí una fórmula para cualquier polígono regular, Luis oscila entre una fórmula expresada con las medidas de uno de los triángulos en los que se divide el polígono, y de plano volver a las medidas específicas de un polígono particular: "¿base por altura sobre sobre dos por lados?", "¿seis por cuatro?", "multiplicamos el número de bases por lo que mide", "miss, lado por base", "¿seis por cuatro? ¿Seis por cuatro veinticuatro?". Es la maestra quien expresa ese procedimiento con las medidas del polígono y no del triángulo. Luis lo entiende perfectamente:

Luis: ah bueno primero tenemos que sacar el perímetro que sería ehhh… la medida de los lados que es doce poooor ocho que es el número de lados del octágono y entonces eso lo multiplicamos por seis, que es el apotema y luego eso lo dividimos entre dos que eso daría el área

A lo largo de las dieciocho clases, Luis y Daria son los que más respuestas correctas consiguen obtener. ¿Hasta dónde llegan los alumnos que tienen más "éxito"? Luis, a partir de lo que lee de sus pares, la maestra y los problemas, logra descomponer o transformar figuras en otras cuya área ya sabe cómo calcular, poner estos procedimientos en palabras, recuperar un procedimiento de un par que avanza hacia la fórmula y extenderlo un poco más, comprender y utilizar la traducción que hace la maestra de esa manera de resolver en una fórmula expresada con las medidas de la figura original, no de aquellas en las que se divide. Los alumnos no consiguen establecer una fórmula con literales, es decir, expresar con letras lo que Cambriglia (2018) llama un "relato de cálculo", por cuenta propia, o ver las ventajas de hacerlo, como se pretende en el libro. Esto refleja, entre otras cosas, que detrás de la fórmula del área del polígono regular -o de cualquier otra figura-, está la noción de *fórmula*, es decir, de un procedimiento genérico que trasciende el caso particular para englobar en una sola manera de resolver a una familia de problemas. Pasar de pensar en cómo calcular el área de un pentágono específico a calcular la de todos los polígonos regulares implica un trabajo de generalización. Cambriglia (2018) ubica ese tipo de procesos de generalización en otro más amplio de transición de la aritmética y la geometría hacia el álgebra.

4.2.3 Uso de fórmulas, adaptación al procedimiento esperado

En varias clases hay problemas o ejercicios que requieren aplicar las fórmulas previamente establecidas. La primera vez que veo a Luis hacer las cuentas que corresponden a una fórmula es en la clase 6. He mostrado en los dos apartados anteriores que, en esa clase, Luis primero calcula el área de rombos de distintas maneras, pero hago un resumen ahora. Empieza con el área de un rombo trazado en una cuadrícula contando unidades. En la puesta en común se da cuenta que el resultado más frecuente es distinto del suyo, y eso lo hace cambiar a la transformación a rectángulo, estrategia que conserva para los siguientes problemas en los que se pide determinar el área de dos rombos conociendo la del rectángulo circunscrito. Después tiene que resolver una lección del LTG en la que se pretende que los alumnos deriven la fórmula a partir de un rombo trazado en una cuadrícula y luego la apliquen en dos rombos. Luis hace una cosa distinta. Cuando la lección pregunta por la fórmula, él busca la respuesta en el cuaderno. Cuando después se pide calcular el área de los dos rombos, la primera reacción de Luis no es utilizar esa fórmula que acaba de escribir, sino transformar cada uno a un rectángulo, pero en el primero encuentra que la base de ese rectángulo no es un número entero de cuadritos, así que vuelve al conteo de unidades: a veces los alumnos, cuando encuentran trabas con un procedimiento, no se van a uno más sofisticado sino a uno más simple. Responde que son 5 cuadros en el primer rombo y 10 en el segundo. Sabe que se trata de estimaciones, porque en el equipo -y él mismo al hacer varias veces el conteo- obtienen distintos resultados, pero no se detiene en ello porque sale corriendo al recreo. Para él, en este momento, hay una diferencia tajante entre el conteo y la transformación a rectángulo, por un lado, y la fórmula, por el otro. Los primeros son maneras de encontrar áreas, -ya sea precisas o estimaciones-, la segunda es algo que se le pide reportar en el libro.

En el apartado anterior mostré que Luis no traduce la relación «el área del rombo es la mitad del área del rectángulo en el que se inscribe» a una fórmula, porque no vincula el largo y ancho de ese rectángulo con las diagonales del rombo, entre otras razones. Más adelante, volviendo del recreo, en la puesta en común, la maestra explica con detenimiento esta relación [Imagen 167]: al transformar el rombo en rectángulo, la diagonal mayor -marcada en azul- se desliza hasta las tres líneas azules del rectángulo, y la menor a las dos rojas. Por eso, la base y altura del rectángulo son la diagonal menor y la mitad de la diagonal mayor del rombo.

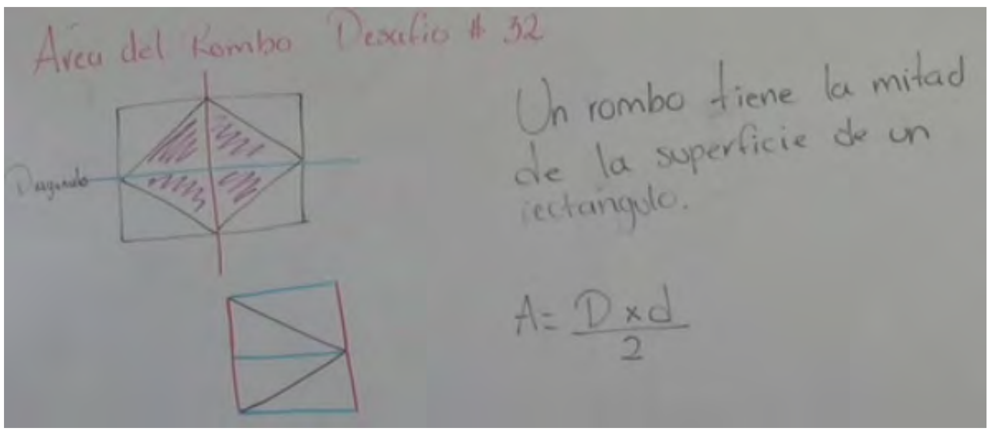


Imagen 167

Luego, como ha observado que la diagonal menor del rombo de la lección no abarca un número entero de lados de cuadritos, y que eso causa confusión a varios alumnos, les pide que las midan en centímetros:

1. *Maestra: para no estar contando cuadritos, con su regla (…) vamos a tomarle medidas, cuántos centímetros tiene, esta diagonal [señala la diagonal menor del primer rombo] (…) y cuánto esta [señala la diagonal mayor] tomen la medida de las diagonales*
2. *Luis: [mide con su regla las dos diagonales del primer rombo, son 3 cm y 5 cm, imagen 168] (…) [a sus compañeros de equipo] son quince cuadritos y entre dos (…) es siete punto cinco (…) ¿no creen?*
(…)

3. *Maestra [a todo el grupo]: [pide a los alumnos las medidas de las dos diagonales y las anota en el pizarrón] entonces vamos a hacerlo con la fórmula [pregunta a los alumnos cada paso de la puesta en marcha de la fórmula, y los anota, imagen 169]*
   (…)

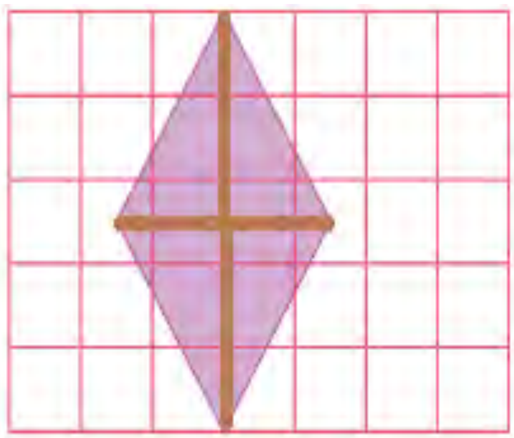


Imagen 168

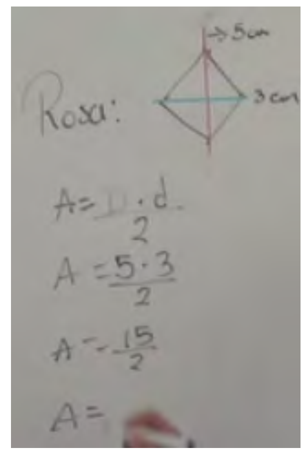


Imagen 169

4. *Luis [a su equipo]: [mide con la regla las dos diagonales del segundo rombo, son 6 cm y 4 cm] (…) ah no seis por cuatro veinticuatrooo, veinticuatro entre dos, ¡doce!, en la segunda son doce sí es cierto (…) [a Alexa] mira porque seis por cuatro veinticuatro entre dos son doce*

El uso de la regla permite a Luis resolver la dificultad que antes encontró usando los cuadros como unidad: ya sabe que la diagonal menor del primer rombo mide tres centímetros. Con ese dato, rápidamente determina el área exacta. Ya no son aproximadamente los cinco cuadritos obtenidos por conteo, sino 15 cuadritos entre dos. Es difícil saber si usa la palabra “cuadritos” en lugar de «centímetros cuadrados» porque ha notado que es lo mismo -la diagonal mayor mide 5 centímetros y también 5 lados de cuadros-, porque empalma centímetros cuadrados y cuadritos sin haberse preguntado si son iguales o no, porque usa esa palabra en sentido genérico -los centímetros cuadrados también son cuadritos-, o por distracción. Así, no puedo saber si a partir de la medida obtenida con la regla Luis vuelve a la cuadrícula o se despega de ella. Y entonces, tampoco puedo distinguir si ha logrado pasar del conteo de unidades cuadradas a la cuenta «tres por cinco entre dos» porque tener las medidas enteras le permite volver a la transformación a rectángulo de la que antes se sentía muy seguro -

en todo caso, esta vez sería la primera que no traza el rectángulo- o bien porque la explicación de la maestra hace que Luis deje de ver la fórmula como algo que se queda escrito en el libro y la recupere como un procedimiento de cálculo -en todo caso, lo hace por iniciativa propia, antes de que la maestra pida explícitamente el uso de la fórmula. Como sea, lo que él hace embona muy bien con el uso que hace la maestra de la fórmula: tanto para quien piensa en la cuadrícula y el rectángulo equivalente, como para quien piensa en la fórmula despegada de la cuadrícula, la operación que resuelve es tres por cinco entre dos. Luis hace después la cuenta análoga para el segundo rombo.

En clases posteriores, los alumnos resuelven tareas en los que se pide directamente aplicar las fórmulas, sin evocar ya la manera de derivarlas a partir de transformar figuras a rectángulos equivalentes en área. Generalmente Luis localiza la fórmula que debe usar, las cuentas que esta implica hacer y las realiza correctamente. A veces comete algunos errores. Por ejemplo, para obtener el área de un rectángulo de 105 metros por 30 metros, usa la calculadora y obtiene 21,131 (Imagen 170), pero pronto él mismo borra esa respuesta.

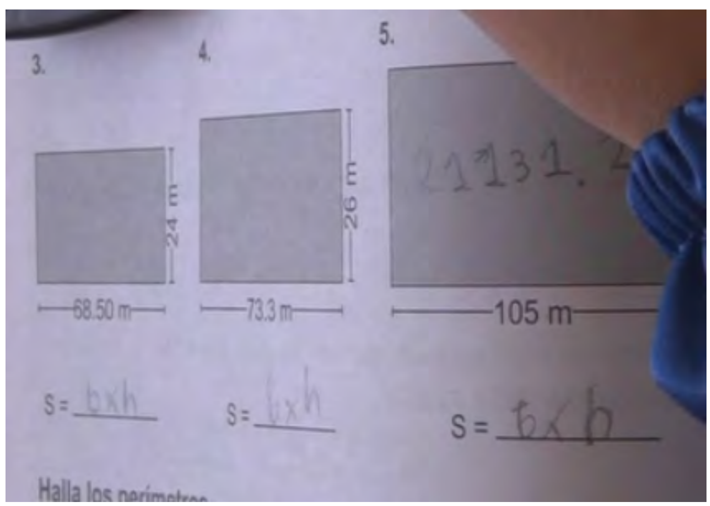


Imagen 170

Cuando tiene círculos, me cuenta que no ve a *Pi* en la figura (¿como si π fuera una parte del círculo?), pero escuchó a la maestra que es 3.1416. Luego Erick pregunta algo sobre ese número y él contesta que “pi es el mismo de siempre”, enfatizando quizás su carácter constante: pi siempre es igual, no cambia. Cuando va a que la maestra le revise un resultado, vuelve diciendo que se equivocó por poner la medida del diámetro en vez del radio, y corrige el error. Es decir, aunque no sepa por qué esa fórmula funciona, puede usarla. Pide supervisión de la maestra para controlar sus resultados, y entiende las correcciones que ella le marca. Como planteo en el apartado anterior, él puede poner en marcha procedimientos propios, y también usar otros que no ha producido ni puede explicarse: se mueve bien en las dos lógicas, la del contenido y la de participación social.

Otro tipo de error tiene que ver con las cuentas. En la imagen 171 se ve que, al calcular el área de un octágono regular de 6 cm de apotema, Luis tiene un pequeño error en una multiplicación. Lleva su cuaderno a la maestra, vuelve y corrige ese error ("sí es que tenía un errorcito… es que me salió mal una multiplicación pero ya está bien") y nuevamente lo lleva para enseñarle la corrección.

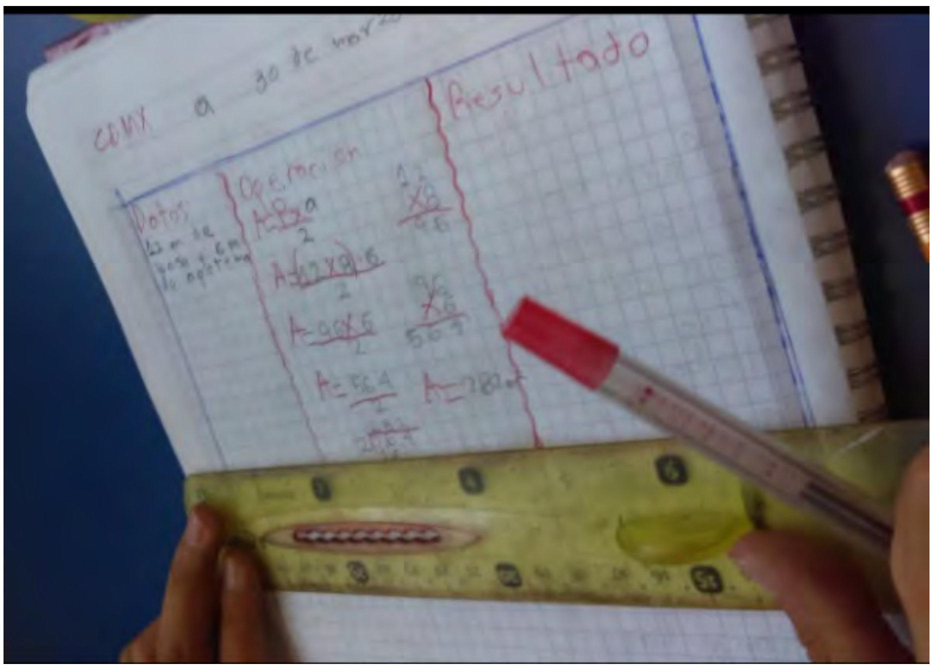


Imagen 171

En resumen, con el transcurso de las clases Luis deja de usar las cuadrículas y las transformaciones de figuras en rectángulos, utiliza las fórmulas. Ya sea que sepa de dónde provienen o no, puede identificar qué fórmula usar, las cuentas por hacer, y sabe operar. Frecuentemente pide supervisión de la maestra para identificar y controlar sus errores al usar la calculadora o al hacer operaciones, también para elegir las medidas que debe considerar.

4.3 Las fórmulas, lejanas para los alumnos con dificultades

Como explico en el primer capítulo, en el grupo hay ocho alumnos que tienen algún diagnóstico que los posiciona como alguien con dificultades de aprendizaje, o bien la maestra sospecha que necesitan ese diagnóstico, o bien son percibidos como estudiantes con rezago. La puesta en marcha y uso de fórmulas, tal y como se concretan en estas clases, es particularmente difícil para ellos. Los procedimientos que ellos ponen en juego pero que no dominan todavía, es decir, que necesitan seguir explorando, son lejanos a las fórmulas; y las tareas que abordan no alcanzan a promover el tránsito hacia ellas. En este apartado muestro cómo se desenvuelven estos niños frente a las mismas tareas que analicé antes: las cuadrículas, producción de fórmulas y su aplicación. Comienzo haciendo un breve comentario sobre la manera en que los materiales didácticos influyen en la actividad matemática de los niños.

4.3.1 Las condiciones materiales

Al trabajar con el geoplano, muchas veces pasa que las ligas se rompen porque no tienen suficiente flexibilidad; los pines son tan gruesos que las figuras se deforman, y eso hace difícil prever qué trozos reorganizar para formar un rectángulo; los pines tienen poca altura, así que las ligas con frecuencia se salen, deshaciendo la figura; los geoplanos son pequeños, así que en la puesta en común, los alumnos de atrás no alcanzan a ver lo que quiere mostrar quien está al frente explicando, y no hay producción de geoplanos grandes para ese propósito, como sí la hay para los instrumentos de medición (el clásico metro grande de madera es un ejemplo). Todo eso complica considerablemente el trabajo con el geoplano y su socialización. Las características de los geoplanos comerciales sugieren que la producción de algunos materiales didácticos, y también los procesos de adquisición de estos en las escuelas, se hace sin tomar en cuenta su uso real en las aulas. Así, no tener buenos geoplanos puede hacer que la maestra termine por descartarlos -yo no lo vi en esta experiencia, pero conozco muchos maestros que han decidido no usar los geoplanos en sus clases- y, en consecuencia, por dejar fuera las fértiles tareas que pueden plantearse con ellos. En cambio, sí hay unas grandes cajas con prismas y pirámides, y un instructivo que sugiere una serie de actividades ostensivas, como identificar las aristas, las caras laterales, etcétera, que están en la sala de materiales.

En el párrafo anterior hablo de materiales disponibles en la escuela para todos los alumnos. Otro asunto que me interesa destacar tiene que ver con los materiales que los padres de familia están a cargo de proveer, lo que marca posibilidades muy desiguales de acceso a materiales didácticos de calidad para los alumnos del grupo. En una clase, los alumnos tienen que trazar un romboide en una cuadrícula del material recortable del libro de texto, igual a otro que está dibujado en la lección. Hay un equipo formado por Ian -un alumno con dificultades-, Danna, Arturo y Cristofer. En el minuto 26, los últimos tres ya han trazado un romboide en su hoja cuadriculada. Cristofer lo superpone al de la lección, encuentra que hizo un lado más largo que su paralelo y corrige su figura. Danna también superpone y constata que le "salió igualita". Arturo pone ligas en su geoplano. Ian recorta su cuadrícula, es decir, quita las partes en blanco de la hoja recortable que sobran. Lo hace con las manos, así que dobla la hoja sobre un lado del rectángulo, repasa con el dedo esa línea para marcarla bien, rompe la hoja sobre ella, y así para cada lado. ¿Por qué no usa tijeras, como el resto de sus compañeros que resuelven eso en menos de un minuto? No tiene tijeras, no quiere usarlas, no las pide prestadas, no se las quieren prestar, prefiere entretenerse cortando el papel que arriesgar un error al resolver, o cualquier otra razón, no puedo saber. El punto es que cortar la orilla de la cuadrícula con la mano y no con tijeras como los demás, lo ocupa hasta aproximadamente el minuto 40. Mientras tanto, los demás ya han trazado sus romboides y la maestra ha hecho aclaraciones al grupo sobre la manera de hacerlo, él de espaldas al pizarrón. En el minuto 54 tiene ya un romboide trazado, lo superpone al modelo del libro, y cuenta los cuadritos de uno de sus lados, todavía de espaldas al pizarrón, mientras la maestra hace preguntas al grupo para establecer la fórmula.

Lo que me interesa destacar aquí es que el acceso desigual a los materiales -las tijeras en este caso- genera una diferencia también en términos de las matemáticas que producen los alumnos. En otros casos pasa lo mismo: unos alumnos desisten de trazar un hexágono regular por no tener transportador o porque no se puede mantener fija la abertura del compás, mientras otros hacen círculos sin dificultades con un buen compás; algunos no hacen un resumen de un tema por no tener cartulina, y eso termina quedándoles de tarea, a diferencia de sus compañeros que terminan durante la clase y tendrán más tiempo libre en la tarde; algunos empiezan a resolver una lección cuando sus compañeros ya llevan un buen trecho avanzado, porque dejaron el cuaderno Gader en casa y tuvieron que esperar a que la maestra consiga fotocopias; la diferencia entre proveer o no un resultado de un problema puede estar marcada por tener o no calculadora para hacer las cuentas implicadas. Todo eso hace que algunos alumnos consuman mucho más tiempo que otros en una misma tarea, o que dejen de hacerla.

Nuevamente, esto no es algo que ocurra solo a los alumnos con dificultades, pero en algunos casos, como el de Ian, les sucede con más frecuencia que a los demás. En efecto, las condiciones materiales son uno de los múltiples factores que inciden en el aprendizaje (Naranjo, 2011). En particular, la desigualdad entre los alumnos del grupo en términos de acceso a materiales didácticos de buena calidad genera desigualdad en las producciones respecto al contenido. Esto deja ver, en la escala micro de las resoluciones de los alumnos en clase, que la gratuidad de la educación básica no está garantizada si los aprendizajes dependen del acceso a materiales cuya adquisición recae en los padres de familia e incluso el personal de la escuela.

Creo que esto está vinculado con una desigualdad a una escala mayor. Gómez Tagle Mondragón (2017) muestra que el acceso, la permanencia y aprendizaje de los niños en la escuela -en suma, la inclusión educativa (Terigi, 2009)- están condicionados de dos maneras. Por un lado, a los aportes de padres de familia y personal de la escuela ya sea en dinero, tiempo, trabajo o especie para cubrir necesidades tan diversas como la reparación de un techo, un foco fundido o un material didáctico, dado que ninguna escuela consigue fondos federales que cubran sus necesidades operativas y de mantenimiento por completo. Esta inversión muchas veces se da a costa del tiempo de enseñanza de los maestros, y en los ejemplos que mostré acá se ve que también es a costa del tiempo de aprendizaje de los alumnos. Por otro lado, el funcionamiento de la escuela depende de su posibilidad para conseguir recursos, dado que la operación de políticas “de financiamiento selectivo” (p. 119) por parte del estado, ha transformado la obligación estatal de garantizar el sostenimiento de las escuelas en mecanismos mediante los cuales ellas compiten para ganar financiamiento. Es decir, que la inclusión educativa no puede ser una realidad mientras no se garantice la gratuidad.

4.3.2 Las figuras, un conocimiento en construcción

Algunas veces, los problemas comienzan por pedir a los alumnos que tracen o reproduzcan una figura, antes de calcular su área. Eso resulta ser una tarea que demanda tiempo, genera dudas, y afecta después la manera de determinar el área.

La lección que resuelven en la clase 5 pide trazar un romboide igual a un modelo (Imagen 172) en una cuadrícula recortable (Imagen 173), con la intención de que puedan recortarlo para transformarlo a un rectángulo y luego inferir la fórmula.

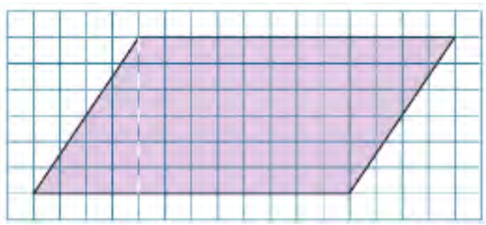


Imagen 172

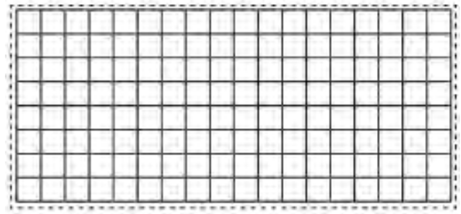


Imagen 173

En un equipo están Nahomi y Daniela -dos niñas con dificultades-, Edgar y Bárbara. El siguiente episodio muestra los intentos de Nahomi por hacer el romboide:

1. *Bárbara traza un romboide distinto al modelo. Luego lo borra y lo vuelve a hacer (…)*
2. *Nahomi: son uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis [Cuenta el número de líneas horizontales que atraviesa un lado inclinado del romboide]*
3. *Nahomi: Dani, ¿cuántos cuadritos te saltaste? (…) es que no me sale (…) [a la maestra] miss, no me sale [la maestra está revisando lo que hace otro equipo] (…)*
4. *Nahomi: [dibuja un trapecio, imagen 174] no me sale, tendría que haber hecho más para acá ¿no? [borra el trapecio y comienza de nuevo]*

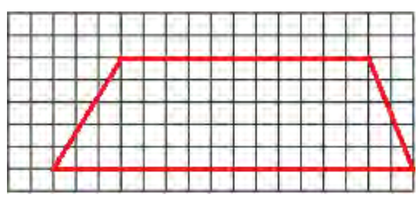


Imagen 174

5. *Edgar, sentado junto a Nahomi, se acerca a ver qué hace ella. Luego regresa a lo suyo. Bárbara y Daniela ya han trazado sus romboides y los recortan*
6. *Nahomi: [le da su cuadrícula en blanco a Daniela para que le trace el romboide, luego se dirige a mí] es que nunca me salen esas… en el cuaderno como que sí me sale porque medio le calculas… es que como ese están bien chiquitos nunca he hecho chicos*
   (…)
7. *Daniela entrega a Nahomi su cuadrícula con un romboide trazado, distinto del modelo [Imagen 175]*

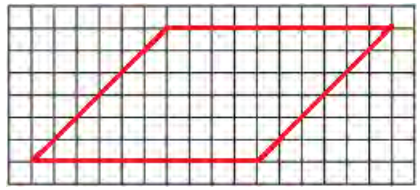


Imagen 175

8. *Nahomi: gracias Dani*
9. *Maestra: [a todo el grupo, mostrando el romboide de Cristofer] aquí es bien importante que se fijen que no les quede chueco, la misma medida que tiene la línea de arriba tiene que tener la de abajo*
10. *Mientras habla la maestra, Nahomi, Bárbara y Daniela pintan el interior de sus romboides. Los tres son distintos al modelo. Edgar está levantado, platicando con alguien de otro equipo. La maestra se acerca al equipo*
    (…)
11. *Maestra: ¿(tu romboide) tiene doce (cuadritos de base) Nahomi?*
12. *La maestra superpone el romboide que tiene Nahomi al de la lección. Como son distintos, le explica que para trazar en la cuadrícula debe empezar por la base cuidando que sea del mismo tamaño que la del modelo, y luego recorrerse cuatro cuadros para trazar el lado opuesto*
13. *Cuando la maestra se va, Daniela y Bárbara arrancan una hoja cuadriculada del cuaderno y empiezan a hacer sus romboides otra vez*
14. *Nahomi [a Bárbara]: ¿también te salió mal?*
15. *Daniela y Bárbara responden con la cabeza que sí, y hacen sus nuevos romboides. Bárbara calca el suyo del modelo*
16. *Nahomi se levanta de su mesa y le pide a Esteban, un niño del equipo que está al lado, que le haga su romboide*
17. *Esteban: dile a tu amiguita que está allá que te lo haga*
18. *Nahomi: es que a ella también le salió mal*
19. *Nahomi: [a Esteban, mientras lo abraza] ¿sí, sí, sí, sí?*
20. *Esteban: no*
21. *Nahomi: grosero [vuelve a su asiento. Intenta dibujar otra vez el romboide]*
22. *Edgar ha vuelto a su asiento, superpone su romboide sobre el del libro, no son iguales. Refleja su romboide y tampoco coincide con el modelo*
23. *Nahomi termina de trazar su romboide y me lo enseña. Le digo que lo ponga sobre el de la lección para ver si son iguales. Nahomi se levanta a mostrarle su*

figura a la maestra. Cuando llega a su escritorio, ella está revisando las figuras de Esteban y Arturo. Le dice a Esteban que se equivocó, pues dos lados paralelos deben medir lo mismo

24. *La maestra voltea a ver a todo el grupo, mientras Nahomi, Esteban y Arturo vuelven a su lugar. Nahomi comienza a hacerle un romboide a Edgar. Yo le hago ver que su figura es muy parecida al modelo, pero deslizó un cuadrito de más en el lado de arriba*
25. *Nahomi: entonces lo tengo que marcar acá [señala un cuadro menos en uno de los lados]*
26. *Maestra: a ver, me doy cuenta que les está fallando algo, algunos no están poniendo atención en la cantidad de cuadritos (…) [traza una cuadrícula en el pizarrón] si voy a hacer un, ¿qué figura están haciendo?*
27. *Alumnos: ¡un romboide!*
28. *Maestra: lo que voy a hacer es, pongo mi primera línea que es la base (…) [traza una línea roja horizontal, y cuenta en voz alta los cuadritos que abarca[57]] si me dicen (que) tiene, seis de altura, voy a contar, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis [va señalando los cuadritos que cuenta en dirección vertical a partir de la base, para ubicar dónde va la otra línea horizontal del romboide] la siguiente línea la voy a hacer hacia acá, pero me voy a recorrer un poco, aquí [señala el punto a seis cuadros de distancia del extremo de la base] estaba exactamente encima, pero me voy a recorrer cuatro, pero la siguiente línea también es de diez [traza otra línea roja paralela a la primera, imagen 176] a lo mejor el mío se ve chueco porque mis cuadros no están, parejos, pero, el de ustedes no, y ahora sí ya nada más voy a unir [traza las dos líneas rojas que faltan para formar el romboide] y así no me va a quedar chueco, ¿de acuerdo?*

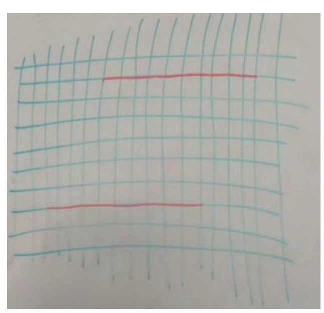


Imagen 176

[57] Cuenta diez cuadritos en lugar de doce. Pienso que es un error pequeño, una distracción.

29. Nahomi, de espaldas a la maestra, trata nuevamente de hacer el romboide mientras ella da la explicación anterior
30. Edgar ha trazado un nuevo romboide, lo recorta, lo superpone al modelo y ahora sí embona. Daniela y Bárbara ya tienen también sus romboides iguales al modelo, los doblan por la altura, para cortarle un triángulo y reacomodarlo para formar un rectángulo, como han indicado la maestra y la lección

    (…)
31. Daniela y Bárbara llaman a la maestra, para enseñarle cómo forman con el tangram un romboide que se transforma a rectángulo. La maestra viene al equipo
32. Nahomi [a la maestra]: miss, me dijo la miss Tatiana que estoy mal

    (…)
33. Nahomi me enseña la nueva figura que ha trazado. Es casi un romboide, en el que ha deslizado dos cuadritos de un extremo, y tres del otro, en lugar de los cuatro del modelo [Imagen 177]

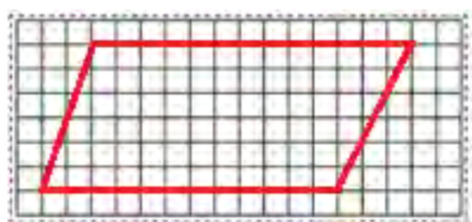


Imagen 177

34. Yo pongo su hoja cuadriculada sobre la figura de la lección y le marco los cuatro vértices, calcándolos
35. Nahomi: ¿por qué no pensé esto antes?
36. Nahomi: [traza el romboide, lo recorta y lo superpone al modelo, ahora ambos coinciden] miss, ahora sí ya me salió

    (…)
37. Nahomi: [copia en su cuaderno las notas que ha puesto la maestra en el pizarrón] ay no me salió el romboide miss [tiene dibujado un trapecio]

    (…)
38. Nahomi [a mí]: [ha borrado el trapecio] miss, ¿me ayuda a hacer la figura esa? [el romboide]

En los cinco dibujos distintos que obtiene Nahomi se puede ver lo difícil que es para ella reproducir el romboide. Dado que siempre traza dos lados horizontales paralelos, creo que pone en funcionamiento esa característica. En su primer dibujo hace un trapecio, es decir, pone también los otros dos lados inclinados, como los tienen los romboides, pero no quedan paralelos (línea 4). Su figura tiene dos lados paralelos y otros dos inclinados, pero se ve muy distinta a la original. Ella sabe que algo no está bien, aunque no tiene claro qué es.

Después de que Daniela le hace un romboide (línea 7), ella hace dos más y una tercera figura muy cercana (líneas 23, 33 y 36). De alguna manera logra entonces poner los dos lados inclinados paralelos, o casi, en un caso, donde la pendiente de ambos es parecida. Lo que le hace falta es: a) averiguar cómo trazar esa inclinación precisa en uno de los lados (línea 33), cosa que la maestra trata de hacerle ver indicando que debe "recorrerse" (línea 12), b) considerar la altura, asunto en el que repara al inicio (líneas 2 y 3) y luego deja de lado, y c) reproducir la medida de la base (líneas 11, 24 y 25).

No puedo saber si, al acercarse o alejarse del romboide, ella pone o deja de poner en juego el paralelismo de los lados inclinados. En la explicación de la maestra (línea 28) se ve que esa propiedad no es necesaria para replicar el romboide: con preservar la medida de los dos lados horizontales, la altura y la inclinación de un tercer lado, la figura queda determinada. Lo que quiero destacar es que, si a Nahomi le sale dos veces un trapecio, otra un cuadrilátero muy cercano a un romboide, y dos más un romboide que no tiene los mismos ángulos, base o altura, significa que la caracterización típica del romboide como una figura que tiene dos pares de lados paralelos, que parece obvia para quien la conoce bien, y las medidas que lo determinan, no son nada fáciles de percibir. Como muestra Fregona (1995), el romboide no es portador de esas características por sí mismo, se va volviendo a partir de la experiencia con las figuras.

Nahomi tiene un camino que recorrer respecto al aprendizaje de las figuras geométricas: copiar el romboide en una cuadrícula es una tarea que parece asumirse con ligereza desde el diseño de la lección, pero supone un importante trabajo de producción por parte de los alumnos. Perrin-Glorian y Godin (2018) dan cuenta del largo proceso que implica transitar de una percepción global y táctil de las figuras a lograr caracterizarlas por sus propiedades. Nahomi parece estar en algún lugar a medio camino, en el que se fija en los segmentos, percibe algunas propiedades, pero no las suficientes como para que el romboide quede determinado.

De hecho, a los compañeros de equipo de Nahomi también les cuesta trabajo lidiar con la inclinación, la altura y la medida de la base del romboide (líneas 1, 7, 10, 13, 22). Las explicaciones de la maestra sobre el trazo dejan ver que ella identifica este asunto en varios alumnos más (líneas 9, 26, 28). No se trata de una dificultad específica de Nahomi, sino de algo que la mayoría tiene todavía por aprender.

No obstante, hay diferencias entre Nahomi y sus compañeros de equipo. Una es que a ella la tarea de reproducir el romboide le toma todo el tiempo de la clase. Cuando termina, los demás ya han resuelto la siguiente tarea, considerada desde la lección como central. Nahomi ya no aborda ese problema: copia las respuestas del libro de Bárbara, se peina, sale al baño, estira el cuello. Sensevy (2011) explica que la organización temporal escolar de temas a enseñar muchas veces hace que los conocimientos se visiten de una vez y para siempre. Si un alumno se pierde un proceso de búsqueda en el momento abierto para ello desde la enseñanza, después será inapropiado hacerla: eso que en algún momento se espera que todos hagan, se vuelve vergonzoso cuando se hace a destiempo. El destiempo se crea institucionalmente, es el tiempo que excede al asignado para el estudio de una cosa. Nahomi se ha perdido ahora la posibilidad de buscar cómo calcular el área de un romboide, después tendrá una sola oportunidad más, en la clase 11.

Otra diferencia es que mientras los compañeros logran resolver el trazo del romboide como pueden, incluso calcando, y transformarlo a un rectángulo (líneas 30, 31) ella al final de la clase sigue preguntándose por qué al intentar dibujar un romboide le sale un trapecio (línea 37): las dudas de Nahomi son las del resto de sus compañeros más el asunto del trapecio, es decir, son más grandes.

Me parece que la manera de percibir el romboide puede tener implicaciones sobre la forma de calcular su área, como ejemplifica Marchand (2020) para el área lateral de un sólido. Detrás de la fórmula *base x altura* para encontrar el área del romboide, está la transformación de este a un rectángulo equivalente en superficie. Para hacerla, los alumnos necesitan prever que hay un triángulo que podría reacomodarse para formar el rectángulo (Imagen 178), anticipar que el triángulo que se corta y el que se agrega son iguales. ¿Será posible ver eso sin poner en juego implícitamente algo ligado al paralelismo de las dos parejas de lados? Suponiendo que Nahomi perciba al romboide como una figura con dos lados paralelos y otros dos inclinados, ¿está en condiciones de ver esos dos triángulos congruentes y por consiguiente la transformación a rectángulo?[58]

Imagen 178

Además, Cambriglia (2018) explica que una función de las fórmulas de área es “condensar un relato de cálculo” (p. 97). Pero si Nahomi no estuvo en ese relato, no calculó el área de ningún romboide y tampoco ha visto cómo resolvieron los demás, no se ha enterado de que se puede cortar un triángulo en el romboide y reacomodarlo para formar un rectángulo, ¿qué sentido tendrá para ella la fórmula que después se le pedirá usar?

Douady y Perrin-Glorian (1989) encuentran otros ejemplos similares. Muchos alumnos perciben al romboide como un rectángulo deformado (Imagen 179), es decir, un rectángulo en el que se deslizan los dos vértices superiores dejando fija la base[59]. Ver al romboide de esta manera los lleva a suponer que en esa deformación se conserva la superficie. Las autoras deciden diseñar una serie de actividades para que los alumnos se pregunten cómo cambian el perímetro y la superficie al deformar el rectángulo de manera continua, obteniendo una serie de romboides, desde uno muy similar al rectángulo hasta otro muy “achatado”, cercano a la línea definida por la base.

Imagen 179

[58] Es probable que también suceda lo recíproco, aunque no tengo datos para probarlo. Me refiero, por ejemplo, a que, si en el estudio de la superficie se priorizan las fórmulas, solo se estudian las figuras que tienen fórmula. Eso podría tener la consecuencia de que los alumnos no reparen en las otras figuras, como si no existieran. Es decir, pensar que solo son figuras las que tienen fórmula. Así, es posible que la manera de estudiar la superficie de figuras repercuta en la manera de concebir esas figuras.

[59] Esta manera de ver el romboide se encuentra también en otros estudios que no se ocupan de la superficie sino de las figuras. Fregona (1995) explica que algunos niños se preguntan si la descripción de un romboide como “rectángulo achatado” con ciertas medidas es suficiente para que un compañero pueda reproducirla. Castaño (en proceso) encuentra eso mismo con estudiantes de secundaria y maestros en México.

Lo que hay de común y de distinto entre Nahomi y otros alumnos me hace pensar en la posición que he tomado en el capítulo 3 sobre la importancia de que los niños “con dificultades” resuelvan las mismas tareas que el resto del grupo. Sigo pensándolo, porque la posibilidad de discutir con otros sobre lo que hacen es crucial para avanzar. Pero ¿qué tareas pueden resolver todos? En este episodio se abren dos caminos. Uno es apuntar hacia las fórmulas, como prescriben el programa, los libros de texto, el proyecto de enseñanza escolar. Esto implica buscar maneras de jalar a Nahomi -y a muchos más- hacia tareas que ella está lejos de poder abordar, y dejar de lado la necesidad que la mayoría tiene de profundizar el estudio de figuras geométricas. El otro camino es posponer el estudio de las fórmulas, y abrir tiempo para el trabajo espacio-geométrico que todos están en condiciones de hacer y que les sería útil. Me inclino por la segunda, aunque tengo claro el descomunal trabajo que implicaría abrir condiciones institucionales que posibiliten a la maestra la decisión de dejar de lado los contenidos prescritos en el currículo y optar por los que requieren los estudiantes: ¿es una decisión que la maestra podría tomar sola? ¿necesita el apoyo de la comunidad escolar para eso? ¿tendría necesariamente que suceder a nivel de desarrollo curricular para que pueda ocurrir en el aula?

Me interesa mostrar las formas en que Nahomi y sus compañeros validan sus dibujos. Edgar recurre por cuenta propia a la validación empírica (líneas 22 y 30). Bárbara y Daniela, cuando hacen sus primeros romboides, quedan satisfechas, se disponen a recortarlos y seguir (líneas 5, 10). No verifican empíricamente, quizás porque visualmente no parece haber mucha diferencia entre su figura y el modelo. La posible confianza en la vista sugiere nuevamente una manera de percibir el romboide: la forma global es similar en la figura y el modelo -ambas tienen dos pares de lados paralelos, uno de los cuales está inclinado, y el tamaño es parecido-, no parece haber necesidad de asegurar que coincidan la inclinación, altura y tamaño de la base. Es decir, intuyo que tener la iniciativa de superponer los romboides supone saber que la forma global no es suficiente para equiparar dos figuras, que hay diferencias más locales que importan, como el tamaño de lados o la inclinación. Es la maestra quien las hace reparar en que, al superponer, el tamaño de la base y el número de cuadros a “recorrer” pueden no coincidir (línea 12). Aunque ella se dirige a Nahomi, las dos alumnas entienden que tienen que volver a trazar su romboide (líneas 12-15).

Nahomi también controla por la vista para descartar los trapecios (líneas 4 y 37). Con los romboides, no confía ni en la vista ni en contrastar su figura con el modelo, busca la validación de otros. Cuando Daniela le hace un romboide, ella lo acepta inmediatamente (línea 8): si lo hace alguien más, está bien. Admite que está mal cuando la maestra hace la superposición y le da información sobre las medidas por conservar (líneas 12 y 14). Cuando Nahomi traza el romboide ella misma, me lo muestra a mí. Incluso si yo le pido que lo ponga sobre el que está en la lección para saber si está bien, ella va a enseñárselo a la maestra (línea 23). Al no recibir información de la maestra dirigida solo a ella -la maestra encuentra errores frecuentes y se los hace notar a todo el grupo- no se da por aludida, regresa tranquila a su asiento a hacer otro romboide para Edgar (línea 24). Yo le hago ver su error específico (línea 24), y entonces ella lo acepta (línea 25), pero corrobora nuevamente con la maestra (línea 32). Al hacer su nuevo romboide, me lo muestra (línea 33). Cuando yo le enseño una forma de construirlo (línea 34), su reacción me da un poco la sensación de que reconoce su valor pragmático, pero también se descalifica (línea 35). Finalmente, una vez sí superpone al modelo (línea 36), además de confirmar conmigo. Las distintas maneras de utilizar la superposición muestran otra vez -he analizado otro ejemplo en el capítulo 3- que la validación empírica no es empirista: supone, cuando no está dada desde la consigna, una cierta forma de ver la figura, y en el caso de Nahomi, confianza en lo que ella misma podrá percibir al contrastar. La posibilidad de validar se imbrica con la inseguridad de Nahomi en sus propios recursos para resolver los problemas.

Llama la atención la manera en que Nahomi se apoya en los demás. Cuando busca que los otros le indiquen si está bien lo que hace, demanda que se lo digan exclusivamente a ella. Varias veces la maestra explica al grupo exactamente lo que ella necesita saber: las dos líneas horizontales deben medir lo mismo (línea 9), hay que conservar del modelo la medida de la base, la altura, la inclinación y la medida del lado paralelo a la base (línea 28). Nahomi no parece escuchar estas recomendaciones. Sigue pintando el interior de su romboide (línea 10) o trazándolo sin mirar el dibujo que hace la maestra en el pizarrón (línea 29). Si bien los otros alumnos tienden también frecuentemente a centrarse en sus producciones y se les escapan las recomendaciones de la maestra, es un rasgo exacerbado en Nahomi. Su manera de demandar atención exclusiva puede tener que ver con su experiencia siendo alumna durante años: ¿no atiende las ayudas de la maestra porque está concentrada resolviendo ella misma? ¿o ha aprendido que las explicaciones dirigidas a todos no le sirven a ella? ¿su actitud es un efecto de la práctica de asignar actividades diferenciadas a los niños con dificultades, es decir, algunos aprenden que lo que se dirige al grupo no es para ellos?

Por otro lado, ella varias veces reacciona frente al error pidiendo a alguien más que lo resuelva. Cuando ve que su trazo no es romboide pide a Daniela, quien ya tiene el suyo y lo está recortando, que se lo haga (líneas 5 y 6). Se justifica conmigo por ello: no es que no pueda resolver en general, puede cuando se trata de cálculos en el cuaderno, pero no con estas cuadrículas tan pequeñas. Toma por bueno el romboide que recibe, sin más trámite (línea 8), pero cuando se entera de que no es igual al modelo, pide a Esteban que lo dibuje (líneas 16-21). Lo busca quizás porque al parecer no se ha equivocado, a diferencia de Daniela y Bárbara. Cuando él se niega, lo hace ella, dos veces (líneas 23 y 29). Finalmente, al notar que copiando del pizarrón un romboide sale un trapecio, me pide a mí que se lo dibuje (línea 38). Al escoger a quién solicitar el trazo, parece considerar que lo sepan hacer: alguien que ya tenga el suyo, alguien a quien no se haya señalado un error, una adulta. Con frecuencia no recibe la ayuda que pide, como le ocurre en este episodio con Edgar (líneas 17-21). Me he preguntado si eso pasa porque ella tiene una imagen devaluada[60] frente al grupo, porque tiende muy pronto a desentenderse de las tareas y los pares no quieren asumir esa responsabilidad, o porque no ha aprendido a moverse en la lógica de participación social para conseguir ayudas.

Las reacciones de los niños con dificultades frente a los errores que no saben cómo corregir son diversas. Nahomi tiende a sostenerse mucho más que otros niños en las ayudas, confía poco en lo que puede hacer ella y lo que puede leer en el problema. Pero tiende también a hacerse cargo de las tareas de otros: la de Edgar en este episodio (línea 24), y aunque no se ve en este registro, en muchas clases ayuda a Víctor, el alumno con síndrome Down, probablemente porque eso le da seguridad. A él suelen asignarle tareas más sencillas, como hacer la plana de una palabra, anotar números o hacer manualidades. De esta manera, Nahomi parece seleccionar tareas de las que puede hacerse cargo. Nuevamente me parece útil pensar cómo ocurre la devolución en las interacciones sociales: Nahomi tiende a deslindarse de sus tareas, en el sentido de que frecuentemente pide a otros que las terminen o las validen, en cambio asume las de otros.

Nahomi atiende solo las explicaciones que van dirigidas exclusivamente a ella, valida sus resultados a partir de alguien más a quien reconoce por haber terminado sin errores o por ser adulto, pide constantemente ayudas que muchas veces no recibe, le

---

[60] Me refiero a lo que Poveda (2005) llama una *negative face.*

cuesta hacerse cargo de sus tareas, pero se hace responsable de tareas de otros. Todo esto muestra, como explica McDermott (2001), que el nicho de quien “tiene dificultades” es socialmente construido, no inherente a la persona.

En este apartado mostré que el trazo de la figura se vuelve para Nahomi la tarea única por resolver en clase. Es compleja porque el romboide es una noción abstracta, aún en construcción para ella. Y también para muchos otros alumnos, aunque logran sortear el problema y pasar al asunto del área. Esto ocurre también con otras figuras, incluso con el rectángulo. Es decir, la posibilidad de que los alumnos deriven las fórmulas para calcular áreas supone un trabajo de transformación de figuras geométricas en otras -particularmente en rectángulos-, lo cual requiere una articulación con el estudio de dichas figuras. Dicho de otra manera, detrás de la fórmula del área del romboide hay un conocimiento implícito de propiedades que caracterizan al romboide. Hay otros conocimientos que las tareas vinculadas a las fórmulas de áreas que observé suponen que los alumnos ya tienen, como iré mostrando más adelante.

4.3.3 Las cuadrículas, fuente de tareas accesibles y fértiles

Al describir la actividad de Luis, el alumno “experto”, expliqué que una fórmula resume procedimientos espacio-geométricos como transformar un rombo a un rectángulo equivalente en superficie. A su vez, las transformaciones pueden tejerse con el conteo de unidades. Douady y Perrin-Glorian (1989) sostienen que es necesaria una dialéctica entre la hoja cuadriculada donde las superficies se miden por conteo de unidades y la hoja blanca de las transformaciones. Un posible vínculo entre ambas tiene que ver con hacer emerger las transformaciones a partir de las unidades. Es decir, las dificultades del conteo cuando las unidades no son todas enteras pueden dar paso a las transformaciones. Mostraré, en este apartado y el siguiente, que este tránsito a las transformaciones no es nada fácil de ocurrir.

Empiezo por describir las maneras de abordar el conteo de cuadros. Dado que las clases que observé son sobre fórmulas, las tareas de cuadrículas tienen un propósito muy específico: inferir dichas fórmulas. Según el programa, el conteo de unidades por sí mismo se estudia un año antes, en cuarto grado. Así, en estas tareas aparecen únicamente figuras que tienen fórmula: rectángulos, romboides, triángulos, rombos y trapecios. Además, las unidades en todos los problemas son cuadradas y, generalmente, los bordes de los rectángulos se empalman en líneas de la cuadrícula. Por ello, la única figura en la que se puede hacer un conteo de cuadros completos es el rectángulo.

<u>El conteo de unidades enteras</u>

Dado que el rectángulo no tiene, en general, la problemática de qué hacer con los pedacitos sobrantes, es la figura cuya área es más fácil de cuantificar usando unidades de medida. De cualquier manera, encontré dos dificultades que los alumnos tienen que sortear. Una es que a veces cuentan el número de vértices de los cuadros que quedan contenidos en la figura, en lugar de los cuadros, sobre todo cuando está el geoplano.

Por ejemplo, Miranda -una alumna que presenta rezago-, frente a la tarea de encontrar, entre seis rectángulos, dos que tienen la misma superficie, empieza por cuantificar cada uno de ellos. Hace con una liga un rectángulo de tres por cuatro (Imagen 180), cuenta todos los vértices -los “puntitos” del geoplano encerrados por la liga-, y anota que el área es 20:

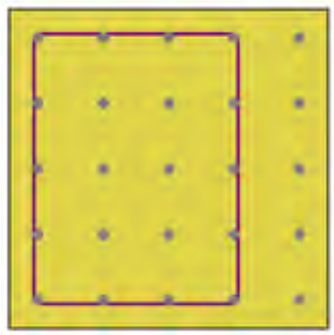


Imagen 180

Es difícil saber qué muestra el conteo de vértices. Quiero recordar que, en esta tarea, los alumnos tienen esos rectángulos en una fotocopia y los reproducen en el geoplano. Para hacer eso, Miranda cuenta los vértices de largo, define esa longitud con la liga, hace lo mismo con el ancho, y forma el rectángulo. Después cuenta todos los vértices contenidos en la figura, primero los de la orilla, luego los del interior, y anota “20” en la hoja. Es posible que, dado que necesita los vértices para reproducir el rectángulo, los conserva a la hora de cuantificar la superficie. Es decir, que “ver” la figura como unidimensional, definida por sus medidas lineales -largo y ancho-, medidas que a su vez se toman a partir de sus puntos de dimensión cero, hace que se conserve esa dimensión cero al hablar de la superficie de esa figura. De ser así, nuevamente la manera de ver la figura incide en la manera de calcular su área, y en este ejemplo interviene el juego entre dimensiones del que hablo en el primer capítulo (Duval y Godin, 2005). Además, el geoplano es un material que visualmente pone muy de relieve los vértices. Finalmente, puede ser que la primacía de los vértices esté mostrando que la superficie está todavía en construcción: si la superficie no está muy presente, no hay algo que promueva dejar de centrarse en los vértices para considerar los cuadros. El problema habla de superficie como si se tratara de algo conocido para los alumnos, pero si no lo es, puede dar lo mismo comparar puntos que cuadros.

Otro asunto por construir en el cálculo del área del rectángulo es el paso del conteo uno a uno a la multiplicación. En la clase 6, los alumnos obtienen el área de un rombo trazado en una cuadrícula y después deben inferir el área de otro rombo conociendo la del rectángulo circunscrito (Imagen 181).

3. Ismael trazó otro rombo sobre una cuadrícula distinta, cuyos cuadritos son más pequeños. Después calcó el rombo y el rectángulo, sin la cuadrícula. Considera que el área del rectángulo es de 56 cuadritos. ¿Cuál es el área del rombo?

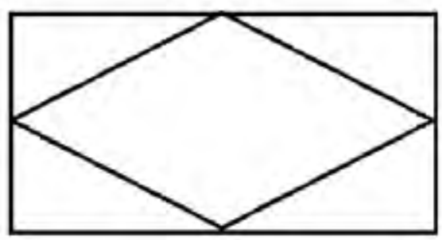


Imagen 181

En el equipo de Irving -un alumno que presenta rezago-, lo primero que propone Esteban es “hacer cuadritos”. Los demás aceptan, pero se preguntan cómo averiguar “cuántos son” porque los cuadritos no son iguales a los del problema anterior y tampoco pueden usar los centímetros de la regla. Esto deja ver un cambio en el medio cuando de pronto ya no está la cuadrícula: no es que los alumnos pasen inmediatamente a ver la relación de “la mitad” entre las áreas del rombo y el rectángulo, sino que buscan restituir el reticulado, seguir con las unidades y el conteo. Pero contar los cuadritos que ya están es muy distinto de identificar las características de una cuadrícula que hace caber un número dado de cuadros en una figura dada.

Los alumnos cuadriculan como pueden, hasta que Irving sugiere: “oigan yo tengo una idea, que veamos en todas las tablas qué números (multiplicados) dan 56 para que hagamos las rayitas y vemos si son 56 cuadritos ¿no?”. Los demás siguen haciendo sus cuadrículas, sin anticipar cómo obtener 56 cuadros en total. Irving elige varias multiplicaciones de parejas de números y no obtiene 56:

1. *Irving: Erick, ¿qué multiplicación da 56?*
2. *Erick: [prueba varias multiplicaciones] no, no hay ninguna*
3. *Esteban: [pregunta si en la tabla del nueve hay una] seis por nueve, 54, casi casi*
4. *Tatiana: siete por ocho*
5. *Daria: ah, siete por ocho 56*
6. *Irving: gracias miss*
7. *Esteban: ya sé cómo le voy a hacer, voy a marcar aquí (a lo ancho) siete (cuadritos) y aquí (a lo largo) ocho*

Irving aporta a sus compañeros la idea de usar la multiplicación para definir el largo y ancho de la cuadrícula, y entonces conocer el tamaño de cada cuadro. Al principio no le hacen caso, pero él insiste: formula la pregunta de manera más directa y resumida (línea 1, "¿qué multiplicación da 56?") y la dirige a un interlocutor en particular, Erick. Esto, aunado a mi intervención que hace ver que sí hay una multiplicación así, hace que los tres compañeros, uno por uno, den un giro, dejen lo que hacen para incorporarse a la búsqueda de Irving (líneas 2, 3, 5 y 7).

Este ejemplo muestra que los alumnos con dificultades también pueden hacer avanzar a sus pares, no es que siempre vayan detrás, que siempre tengan que recibir ayudas o explicaciones. La idea de Irving responde una pregunta que sus pares no sabían cómo abordar y que seguramente les habría tomado mucho más tiempo: cuadricular poniendo un largo al azar y borrar toda la cuadrícula cada vez que no se llega a un total de 56 es mucho más largo y tedioso que definir desde el principio el largo y el ancho, con seguridad. Irving busca maneras de hacerse escuchar: no se desanima la primera vez que su propuesta no tiene eco en los demás, insiste, focalizando la pregunta y el interlocutor. Él moviliza la multiplicación como recurso para reconstruir una cuadrícula, y más precisamente, para hallar las medidas de los lados de un rectángulo dada su área, mientras los otros están en el ensayo y error. En este caso específico, no se trata de multiplicar la base por la altura para agilizar el conteo, sino al revés, buscar dos números que multiplicados den el área que ya se conoce. Por eso, la tarea demanda conocer o tener a la mano las tablas de multiplicar.

Los ejemplos de Miranda e Irving muestran, en situaciones muy distintas, que las tareas vinculadas al área del rectángulo tienen un grado de complejidad. Implican descartar los vértices y contar cuadritos, pasar del conteo uno por uno a la multiplicación -o la suma, aunque eso no lo he mostrado aquí-, hallar las dimensiones de un rectángulo de área dada. Todo eso antes de que aparezca el asunto de cómo contar los pedazos de cuadritos no enteros. Eso no tiene que ver con "dificultades" de los alumnos con dificultades. A los compañeros de Irving también les cuesta trabajo ver el área del rectángulo como una multiplicación.

El origen histórico del cálculo del área del rectángulo deja ver la cantidad de conocimientos que condensa. De Varent (2018) argumenta que si ahora podemos decir rápidamente que el área de un rectángulo se calcula multiplicando la base por la altura, abstrayendo las unidades de longitud y agregando al final las de superficie, es porque tenemos un sistema métrico y uno numérico con varias características: las unidades de longitud no dependen del objeto a medir, las unidades de superficie se derivan de las unidades de longitud, las medidas y los cálculos se expresan con los mismos números, el sistema de números tiene una técnica eficiente para multiplicar, y es posible vincular la longitud a la superficie a pesar de ser magnitudes muy distintas. Es decir, porque el sistema de medición tiene la misma lógica para las distintas magnitudes y además está coordinado con el sistema de cálculo numérico. Pero esto es el resultado de un proceso milenario[61].

Cambiar la forma de la unidad para tener mitades

Muestro ahora qué pasa cuando hay trozos de cuadritos que se deben incorporar al conteo. Si sobran triángulos que son mitades exactas de cuadros, los alumnos las reúnen dos a dos para formar cuadros completos, como Daniela -una alumna con dificultades- que explica: "juntamos los triángulos que había, por la mitad los unimos y eran cuadritos cada uno, y el de en medio era un cuadro completo, y lo juntábamos y ya eran cuatro" (Imagen 182).

[61] El cálculo de áreas en sistemas antiguos era mucho más complicado, incluso para el caso que ahora nos parece trivial, el cuadrado de 2 x 2. Por ejemplo, en el sistema egipcio las unidades de longitud eran completamente distintas de las unidades de superficie. Además, el sistema numérico con el que se expresaban las medidas era diferente del sistema en el que se hacían los cálculos, el babilonio de base 60. Así, para calcular el área de un cuadrado, primero se tenía que tomar la medida de un lado, convertirla al sistema babilonio, hacer ahí la multiplicación, y finalmente convertirla a una medida de área (De Varent, 2018). Kula (1988) muestra otro ejemplo más complicado. En la edad media en Europa, las unidades de longitud variaban según el objeto a medir, al extremo de que el largo de una red de pescar se podía medir con una unidad y el ancho con otra. La superficie de la red no se medía, tampoco de los terrenos. El vínculo entre longitud y superficie estaba lejos de construirse.

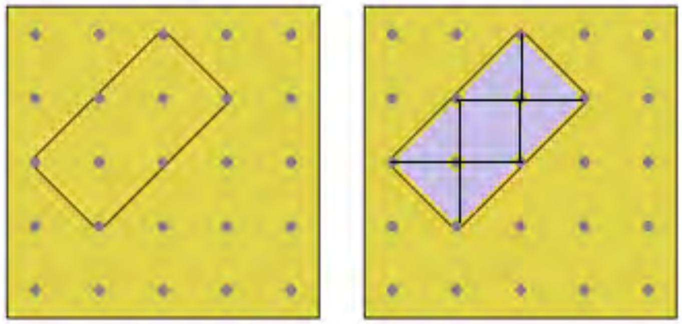


Imagen 182

Cuando los trozos no son medios cuadros, evidentemente el conteo se complica. Irving, un alumno que presenta rezago, divide el romboide que va a medir en pequeños romboides (Imágenes 183 y 184). Es decir, traza un nuevo reticulado que no está conformado por cuadritos: cambia la forma de la unidad. En lugar de contar cuadritos, cuenta pequeños romboides, y eso tiene la ventaja de que solo hay unidades enteras o mitades exactas.

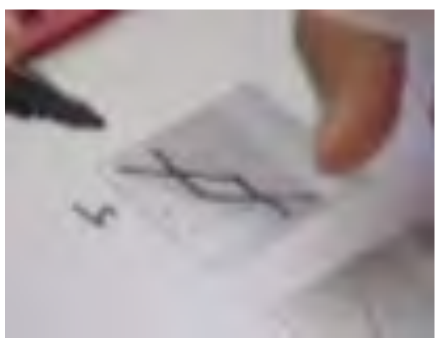


Imagen 183

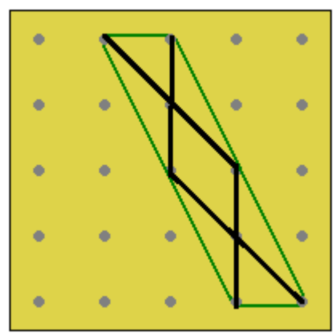


Imagen 184

Irving retoma de Daniela y Bárbara, sus compañeras de mesa, esa manera de partir el romboide. Ellas, con otros romboides, reacomodan trozos para formar cuadros completos -lo muestro más adelante-, y al llegar a este romboide, no encuentran cómo hacer eso mismo. Entonces, cambian la retícula: en lugar de tapizar con cuadritos, tapizan con pequeños romboides. Para Irving el proceso es al revés: comienza por este romboide, copiando de sus compañeras el nuevo reticulado. Al lograr hacer el conteo, es decir, al obtener el número 4 contando pequeños romboides enteros o a la mitad, va a los otros romboides, y ahí extiende la técnica de reunir trozos para formar unidades enteras, esta vez cuadritos.

Mi primera interpretación al ver los trazos de Irving era que se trataba de un error que no podía explicar: la unidad siempre está dada desde el problema y suele ser cuadrada, no contemplé la posibilidad de que los alumnos pudieran cambiarla. Y si además eso viene de niños que un adulto de entrada ve como “con dificultades”, es más fácil interpretar esa producción precisamente así, como una dificultad. No obstante, encontré en otros estudios la tendencia a proponer una unidad por parte de los alumnos. Douady y Glorian (1989) reportan que a veces cambian la forma de la unidad para facilitar el conteo, como hacen acá Irving y su equipo. O bien, cuando tienen que comparar el área de figuras que han medido con distintas unidades, inventan una nueva para medir todas las superficies con la misma unidad. Chamorro (2005) incluso diseña una secuencia didáctica que contempla la exploración de preguntas sobre cómo elegir la unidad según lo que se va a medir. Es decir, que la respuesta de inventar una unidad propia se da en distintas situaciones y, si bien a veces es fuente de errores, también puede ser incluso una intención didáctica desde el diseño de los problemas para enriquecer la idea de superficie.

La búsqueda específica de las compañeras de Irving responde a la necesidad de medir con unidades completas o exactamente a la mitad. Como en muchas otras situaciones, la fracción de unidad “mitad” se revela como la más accesible[62]. En la situación que analizo acá, es comprensible que contar mitades sea más fácil que contar otros trozos: al reunir dos cualquiera se tiene una unidad completa, no es necesario preguntarse cuál trozo puede juntarse con cuál otro. Es decir, tener las mitades libera de las complicaciones ligadas a la forma global.

En suma, Irving retoma de sus compañeras el cambio de unidad. No está claro si él sabe que de esa manera podrá contar mejor, es decir, si conoce la motivación de Bárbara para proponer esa nueva unidad. Además, mientras Bárbara está preocupada por encontrar los romboides que tienen la misma área, Irving cuantifica esas áreas sin encargarse de la comparación, e incluso -como he relatado con Nahomi- en reproducir las figuras en el geoplano. Nuevamente, los medios con los que interactúan los alumnos son tan diferenciados que se corre el riesgo que algunos vayan quedando fuera de las actividades poco a poco.

---

[62] Alumnos del primer ciclo de primaria, al hacer repartos, tienden a partir sucesivamente en mitades, sin preguntarse si de esta manera se puede repartir por ejemplo entre tres (Dávila, 1992). Adultos no alfabetizados se apropian de los medios, cuartos y octavos mucho más fácilmente que las demás fracciones (Ávila, 2006). Alumnos de primaria y secundaria reconocen al 50% de una cantidad como la mitad -o el 25% como la cuarta parte- pero les cuesta más trabajo identificar la fracción que corresponde a otros porcentajes (Lembke y Reys, 1994; Mendoza y Block, 2013). Estos son solo algunos ejemplos.

Por otro lado, la decisión de cambiar la unidad podría abrir preguntas nuevas para tratar con todo el grupo: ¿nos aseguramos de que esta nueva unidad sea siempre igual?, ¿pueden compararse las áreas de distintas figuras si se midieron con distintas unidades?, si dos alumnos eligen diferente unidad para medir sus figuras ¿obtendrán el mismo orden?, ¿qué figuras pueden tapizarse con esta nueva unidad? Mirar las resoluciones de los alumnos con dificultades ayuda a identificar nuevos asuntos interesantes a pensar, para todo el grupo. Pienso que, si yo hiciera un diseño de ingeniería didáctica, tomaría como punto de partida los procedimientos, tropiezos y contribuciones de los alumnos con dificultades, para organizar un proceso de estudio articulado con el grupo completo.

Encuadramientos

En la clase 11 los alumnos tienen que calcular el área de seis figuras trazadas sobre hoja cuadriculada. Cuando la observadora llega con Ian -un alumno con dificultades-, nota que él no ha intentado resolver ninguna, y le pregunta cómo haría con la primera (Imagen 185).

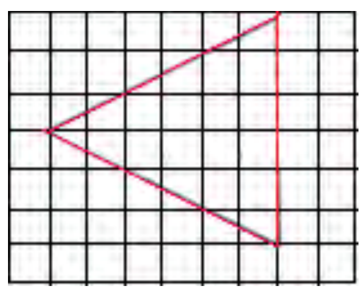


Imagen 185

Ian de entrada quiere usar la fórmula, así que hace la cuenta "base por altura entre dos". Toma como base el lado vertical, lo cual implica elegirla en un triángulo que no está en posición típica. Obtiene 36, olvida la división entre dos. La observadora le pide verificar esa respuesta contando los cuadros, entonces Ian cuenta todo, los cuadros completos y los pedazos, también como si fueran enteros, y obtiene 24.

Él explica que ese resultado no es definitivo: "yo uso ese método para primero acercarme (…) y luego ya busco la respuesta final". La observadora le muestra que si une trozos de cuadros para formar cuadros completos podría obtener 18, una respuesta menor. Ian no retoma la sugerencia de reunir trozos, pero sí la de disminuir el resultado:

Ian: lo más fácil es que, estos cuadritos [señala algunos cuadros que tienen una parte dentro del triángulo y otra fuera] (…) no valieron (…) llevamos hasta acá y entonces serían cuatro [señala una de las dos hileras de cuatro cuadros completos dentro del triángulo, ver el rectángulo azul en la imagen 186], cuatro por cuatro

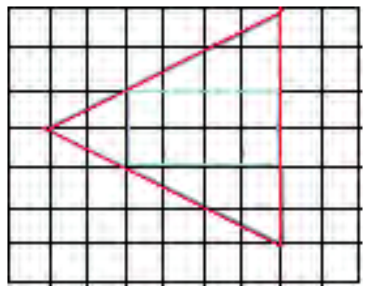


Imagen 186

Así como antes había contado todos los cuadros incluyendo los incompletos para hacer una estimación del área, ahora la estima por debajo contando únicamente los cuadros completos y descartando los trozos, que “no valieron”. Al hacer esto considera los cuadros contenidos en el rectángulo azul, en bloque, tal vez por eso no incluye los otros cuatro cuadros completos. Además, multiplica las dos hileras de cuatro cuadros en lugar de sumarlas. Cambiar una suma por una multiplicación puede tener que ver con su deseo original de usar las fórmulas de área.

En resumen, él hace encuadramientos, encuentra, sin formularlo de ese modo, un rango en el que está la respuesta correcta: es mayor que la cantidad de cuadros completos dentro de la figura y menor que la cantidad de cuadros que toca la figura. Douady y Perrin-Glorian (1989) muestran el valor de ese procedimiento, incluso en la historia de las matemáticas. Me parece que podría ser muy útil para él y otros alumnos, valdría la pena hacer un esfuerzo por explicitarlo con más claridad, afinarlo para asegurarse de hacer bien el conteo tanto por arriba como por debajo, darle más visibilidad e importancia como recurso para acercarse al área, identificar que se puede lograr una aproximación cada vez más certera al hacer los cuadros más pequeños.

No obstante, él no está interesado en fortalecer su “método” sino en saltar hacia las fórmulas. Cuando la observadora pregunta por qué no ha calculado el área de las otras cinco figuras que hay en el problema, Ian explica:

Ian: este… o sea, para mí contar cuadritos… yo lo quiero hacer bien o sea, yo no quiero contar cuadritos (…) sino que yo lo quiero hacer bien (…) primero tengo que multiplicar [inaudible]

Observadora: ¿tú prefieres multiplicar que contar los cuadritos?

Ian: [asiente con la cabeza] (…) pero no puedo

Ian desiste de la tarea por dos motivos. Uno es que él considera a las fórmulas como la única técnica legítima: “yo no quiero contar cuadritos (…) sino que yo lo quiero hacer bien”. Douady y Perrin Glorian (1989) encuentran también que, frente a tareas en las que no se demanda la fórmula y que los alumnos pueden resolver incluso sin números, es decir, por comparación directa, ellos a veces sienten una fuerte necesidad de remitirse a los números, sobre todo si ya les enseñaron la fórmula del área del rectángulo. Así, para las otras figuras, inventan fórmulas erróneas, como multiplicar los dos lados del romboide o los tres del triángulo, extendiendo lo que aprendieron para el rectángulo.

Al mismo tiempo, considera la fórmula inaccesible para él: “lo quiero hacer bien (…) pero no puedo”. Llama la atención que asuma que no podrá, pues al menos en el triángulo identifica la fórmula, una base y una altura, lo cual, como argumento más adelante, no es poca cosa. Solo le hace falta la última división entre dos, y tener una manera de regular su resultado, el conteo que sugiere la observadora para saber que 36 es demasiado grande y poder volver a la fórmula. Eso es algo a su alcance.

Si una cara de la moneda es la sobrevaloración de la fórmula, la otra es que el procedimiento en el que Ian se siente más seguro, el conteo, no le parece socialmente válido. Perrin-Glorian (1994), al trabajar con un grupo “débil”, encuentra que algunos niños temen hacerse cargo de la resolución de un problema con sus propios medios. Prefieren referirse a una autoridad, así que buscan los algoritmos, que les permiten obtener una respuesta rápida de la cual no son completamente responsables. Para estos alumnos, hay un problema con la devolución. Lo que ocurre con Ian es similar en el sentido de elegir no abordar la tarea a pesar de tener maneras de hacerlo, pero no parece ser porque tema hacerse responsable de la respuesta, sino que esos procedimientos propios no son autoridad. No resolver la tarea tiene que ver con saber que los otros disponen de algo que tiene reconocimiento, pero con lo que él no cuenta.

Esta decisión de Ian contrasta con lo que hace Luis, el alumno experto. A él no le preocupa qué tan legítimos o no son sus procedimientos. Recurre al conteo, a las transformaciones o las fórmulas según se lo demanda su interacción con el problema, o bien la maestra. Ian tiene prisa por dejar el conteo y usar las fórmulas, Luis no. Ian quiere abandonar el procedimiento en el que más puede aprender en este momento para usar uno al que está lejos de acceder, Luis recurre a lo que le resulta más útil en cada problema. Esta diferencia entre los dos alumnos deja ver algo que plantea McDermott (2001): mientras unos niños solo resuelven la tarea, los alumnos con discapacidad intelectual resuelven la tarea preocupados porque no emerja su condición como explicativa de lo que hacen.

Hay entonces aquí un asunto ligado al contrato didáctico: la idea de que la fórmula es el único procedimiento admisible, asumida por Ian y no por Luis, pone al primero en desventaja. La diversidad de maneras de asumir normas del contrato didáctico puede traducirse también en una posibilidad desigual de producción matemática. Es en este sentido que Sensevy (2011: 405) habla de “contratos didácticos diferenciales”, en los cuales algunos alumnos “acumulan capital de adecuación, mientras que otros ya están excluidos de este juego”, enfatizando no tanto la heterogeneidad sino la desigualdad.

La preocupación de Ian se nota también en la manera en que deja ver lo que sabe. Al principio, cuando la observadora llega a preguntarle cómo va, él contesta cosas que no tienen que ver con la tarea:

> *Ian: si uso un escalímetro se vería fácil porque el escalímetro tiene las escalas, entonces lo que hace el escalímetro es que, a la hora de las figuras, nomás vamos a hacer esto (traza en el cuaderno una línea recta con la regla), marcas un puntito, y marcas un puntito, entonces, le pones la regla, y lo trazas*

Con este inicio, una primera impresión podría ser que Ian habla de cualquier cosa porque no tiene mucha idea de qué hacer con esa tarea. Pero sabiendo todo lo que dice después, es claro que no es así, él sabe bastantes cosas. Parece más bien que no quiere exponerse, que busca cuidar lo que Poveda (2005) llama imagen (*face*). Después, cuando hace el conteo de cuadros, no dice el resultado que obtiene hasta que la observadora insiste. En la puesta en común, generalmente habla poco. A veces, al interactuar con los compañeros también dice cosas que no parecen venir muy a cuento del problema por resolver o no muestra sus respuestas. Y eso tiene el efecto de que sus producciones pasan desapercibidas. Así, su intento de protegerse también lo invisibiliza.

La consecuencia de que Ian desista de la tarea por no poder aplicar las fórmulas es que pierde la posibilidad de fortalecer el dominio del conteo. Me refiero al encuadramiento, como expliqué antes, y también a acceder a otra manera de lidiar con los trozos, que sugiere la observadora: reunirlos para formar cuadros completos. Incluso hay otras técnicas, además del conteo y las fórmulas: el recubrimiento, y dentro de esta, un caso muy específico que consiste en transformar una figura a un rectángulo de la misma superficie. En otra clase, cuando Ian cuenta cada trozo de cuadro como si fuera uno entero -esta vez tomando esa respuesta como correcta, sin asumirla como estimación-, Darío le explica cómo el triángulo se puede convertir a rectángulo, pero Ian comenta que no entiende. Se trata de un procedimiento que está muy lejos de lo que él hace. Si el salto del conteo a las transformaciones es grande, el que quiere dar hasta las fórmulas es abismal.

Reunir trozos para completar unidades enteras

Otra manera de contar los pedazos de cuadros que no son mitades contenidos en la figura, consiste en reunir esos trozos para formar cuadros completos. En la clase 2, Daniela –una alumna con dificultades- resuelve con Bárbara la tarea de encontrar tres triángulos de la misma superficie entre una familia de siete [Imagen 187]:

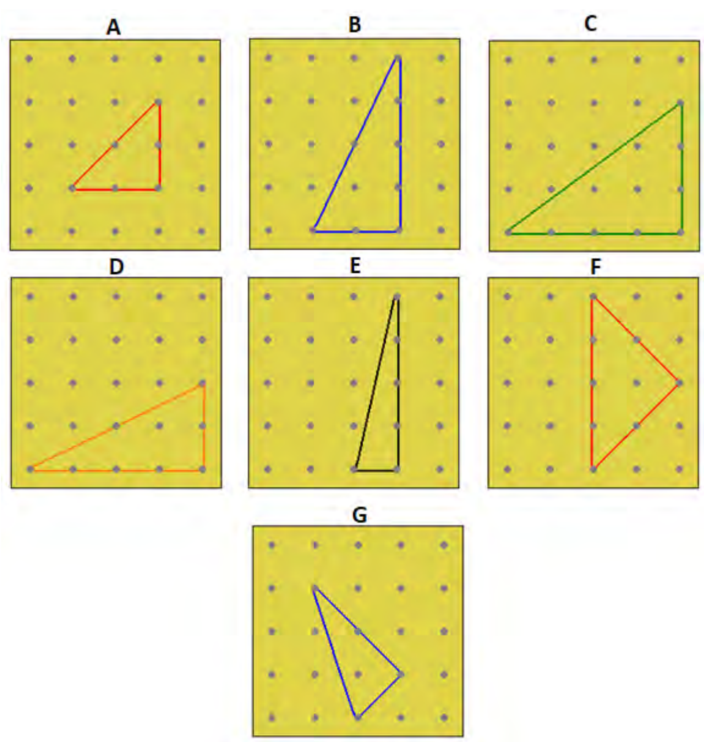


Imagen 187

(…)

1. *Bárbara: este [señala el triángulo A] también tiene dos, dos y dos [señala el triángulo E] (…)*
2. *Daniela: ah sí porque aquí se unen [señala en el triángulo E los cuatro trozos del triángulo que definen las hileras de clavos del geoplano, uno por uno, de arriba hacia abajo, imagen 188]*
3. *Bárbara: ajá, estos dos se unen [señala los dos trozos marcados en verde en la imagen 189] y estos dos [los dos trozos naranjas en la imagen 189], y estos dos se unen [señala las dos mitades de cuadrado en el triángulo A, imagen 190] para reunirlo con este [señala con el lápiz el cuadrado que se formaría al llevar uno de los medios cuadros de la figura A junto al otro, imagen 190] porque este está completo [señala el cuadrado entero contenido en A] a ver dice tres con la misma superficie, aquí [señala A y E] ya van…*

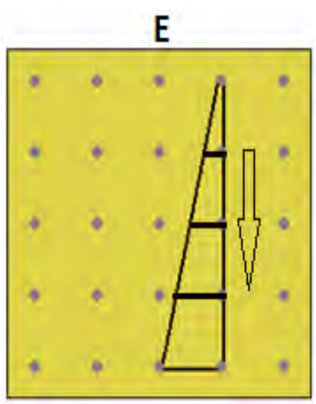


Imagen 188

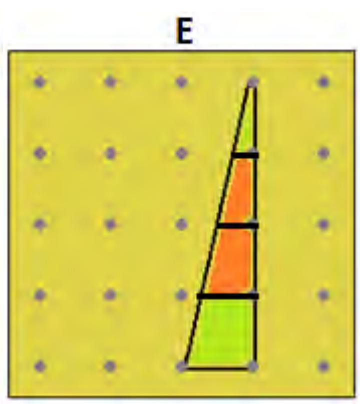


Imagen 189

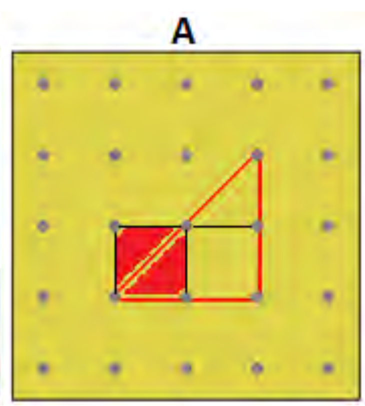


Imagen 190

4. *Daniela: dos*
5. *Bárbara: ajá, ahora...*
6. *Daniela: espérame*
7. *Bárbara marca las líneas de la cuadrícula que están contenidas en el triángulo D y luego en el C, mientras Daniela hace lo mismo en el triángulo A*
8. *Daniela: ah pues sí porque este es un cuadrito [señala el cuadro completo en A] y si estos [los dos medios cuadros] los unimos da dos, así que este vamos a ponerle ¡dos! [escribe “2” y se sigue al triángulo B]*

La primera vez que vi el episodio me dio la impresión de que Daniela iba siguiendo a Bárbara. Ahora pienso que hay algo de eso, pero no solo eso. Bárbara encuentra muy pronto que los triángulos A y E tienen la misma área (línea 1). Daniela la reafirma (línea 2), evocando sin mucha precisión la manera en que Bárbara ha encontrado una de las dos áreas: uniendo los trozos. Deja sobreentendido que esto se hace para formar cuadros completos. Bárbara termina esa explicación, dice cómo se unen y cuántos cuadros se forman (línea 3). Me llama la atención la claridad, parece que ella asume cierta responsabilidad no solo por resolver sino también porque Daniela entienda lo que hace. Daniela, en cambio, la escucha, pero regresa al primer triángulo (líneas 6-8). Ella se encarga primero de calcular las áreas, una por una: primero el A, luego el B (línea 8), a diferencia de Bárbara, quien no va en orden.

Creo que Daniela no ve inmediatamente que en el triángulo rectángulo de 2x2 hay dos cuadros, ni por sí misma ni después con la explicación de Bárbara, sino hasta que analiza por su cuenta ese triángulo (línea 8). Ahí es cuando explicita, con perfecta claridad, cómo se obtienen dos cuadros al unir las dos mitades. Pienso que esa explicación no va dirigida a Bárbara, quien ya la ha dado, sino a ella misma. Esto deja ver que el caso que a quienes sabemos calcular áreas nos parece más sencillo, no lo es para los estudiantes[63]. Lo que, a su vez, muestra que Daniela no copia en automático lo que hace Bárbara: en lugar de hacer las marcas que hace su compañera en otros triángulos, ella regresa al primero y va a otro ritmo. Bárbara sigue con el triángulo F:

9. *Bárbara: [marca los cuadros y medios cuadros del triángulo F con lápiz] (…) este, con este [señala dos medios cuadros] uno, [señala otros dos medios] dos, tres, cuatro… uno, dos, tres, cuatro. Aquí ya tenemos cuatro [imágenes 191 y 192]*

Imagen 191

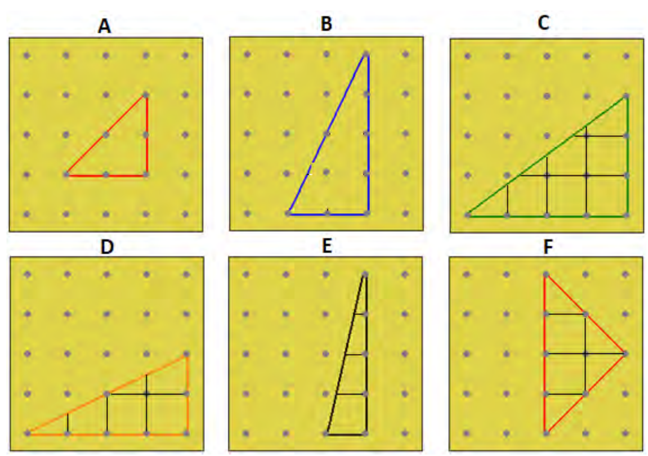


Imagen 192

[63] En uno de los ejemplos anteriores mencioné que históricamente tampoco ha sido fácil calcular el área de un cuadrado de 2x2.

10. Daniela: ¿dónde?

11. Bárbara: aquí [en F]

12. Daniela: ¿y en este cuántos? [señala el triángulo B] yo lo estoy haciendo

13. Bárbara: OK [traza las líneas de la cuadrícula B como hizo con los triángulos anteriores]

14. Daniela: mira [tiene marcadas algunas rayas, imagen 193]

15. Bárbara marca en la hoja de Daniela una de las dos rayas que ella ha marcado [imagen 194] y Daniela no

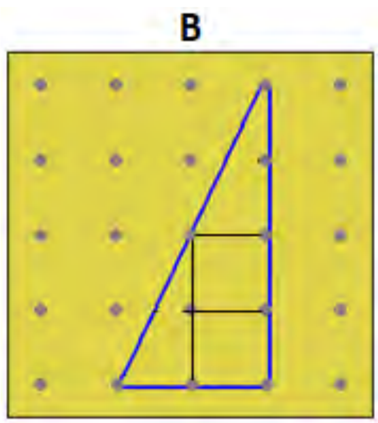


Imagen 193

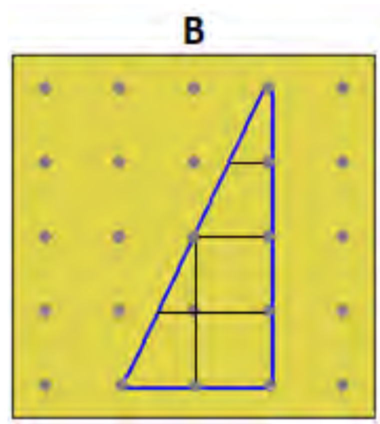


Imagen 194

Daniela sigue con el segundo triángulo, el B, aunque Bárbara ya tenga el resultado de F (líneas 9-12). Y hace que Bárbara tome también esa figura (línea 13). Daniela le muestra su trazo (línea 14, Imagen 193). Ella no ha marcado todas las rayas de la cuadrícula, solo algunas. No hay manera de saber por qué, pero es posible que Daniela no esté desagregando el triángulo en trozos definidos por la cuadrícula, sino que esté anticipando una transformación más global (Imagen 195). De ser así, se trata de un procedimiento más cercano a transformar la figura en un rectángulo de la misma superficie, como hizo Luis, el alumno experto.

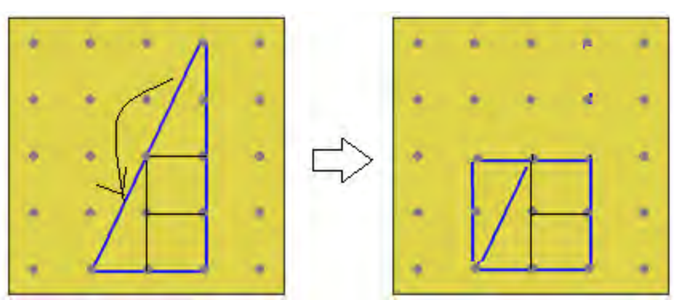


Imagen 195

Aunque no tengo manera de saber si esto es lo que Daniela pone en juego, creo que se sostiene como posibilidad porque hay algo que ella quiere mostrar a Bárbara (“mira*”,* línea 14). Esto dejaría ver también que Daniela no va solamente siguiendo a Bárbara, ni en el orden de los triángulos ni en el procedimiento. Pero Bárbara no “mira” eso. Ella traza un segmento, como si viera rayitas que faltan (línea 15). Bárbara siempre busca formar cuadro por cuadro, eso es lo que hace con los triángulos A, E (línea 3), C, D (línea 7), F (línea 9) y B (línea 13). Creo que eso es también lo que ve en lo que le enseña Daniela. ¿Será que Bárbara está muy centrada en su propio procedimiento, y por eso lo que ve en la hoja de Daniela es eso mismo, pero inacabado? ¿es que, además, el salto de ahí a las transformaciones es tan grande que cuesta verlo puesto en juego por alguien más? ¿puede ser que, además, Bárbara no contemple un posible aporte de quien tiene una imagen más devaluada que la suya? La marca hecha por Bárbara tiene un efecto en Daniela:

16. *Daniela traza la otra raya. Los dos triángulos quedan iguales, con las mismas marcas a lápiz, como la imagen 194. Enseguida, Daniela borra todas las marcas en su triángulo*
    (…)
17. *Bárbara: a ver, este [dibuja un trozo igual al azul de la imagen 197, ver imagen 196] con este [señala el trozo verde del triángulo, y dibuja otro igual junto al anterior para formar con ambos un cuadro completo] ya, aquí ya tengo uno [Daniela deja de borrar sus trazos y voltea a ver lo que hace Bárbara], esto es uno [señala en el triángulo los trozos azul y verde], este [señala el trozo verde en el triángulo] es el de acá [señala el trozo verde que ella dibujó] uno [los trozos azul y verde], dos [los trozos naranja y rojo], tres [uno de los cuadros completos], cuatro [el otro cuadro completo] [escribe “4” junto al triángulo en la hoja]*

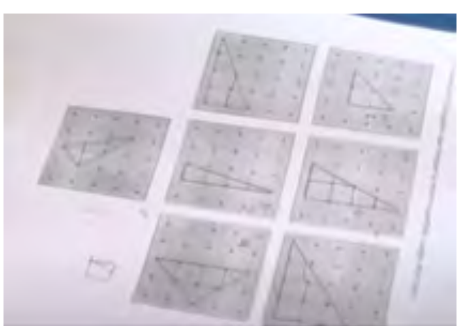


Imagen 196

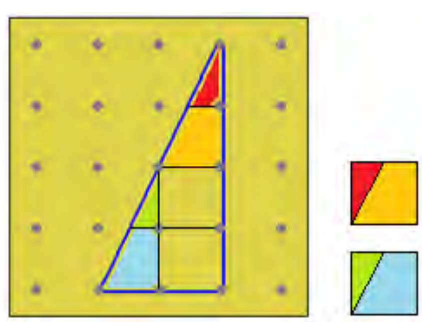


Imagen 197

18. *Daniela regresa a su hoja y hace en el triángulo B las mismas marcas que hizo Bárbara [imagen 194]*
    (…)
19. *Bárbara: aquí cuatro [señala los triángulos B y F] y dos [señala A y E]*
20. *Daniela: ¡no puede ser! O sea aquí hay dos [señala A] dos [señala E], y cuatro [señala B] cuatro [señala F]. Uno de estos puede ser [vuelve a su hoja]*
    (…)
21. *Daniela: a ver pérate ¿cuántos son?... Este da cuatro [escribe “4” junto al triángulo B]*
22. *De la misma manera, Bárbara encuentra que en D también hay 4 cuadros, así que ya tienen tres de la misma superficie*

La intervención de Bárbara tiene como efecto que Daniela adopte la manera de resolver de su compañera: marca la otra raya, borra todos los trazos, vuelve hacerlos de nuevo marcando pedazo por pedazo, y escribe el resultado 4 (líneas 16, 18 y 21). Mi interpretación es que, esta vez, no es Daniela quien tiene la iniciativa de seguir a Bárbara, sino Bárbara la que se hace seguir por Daniela, modificando su procedimiento, sin percatarse de ello.

Al contar los cuadros del triángulo B (línea 17), hay dos maneras posibles de asociar los retazos. El azul de la imagen 197 se puede unir al rojo o al verde, Bárbara toma el verde. Esto puede ser una casualidad, o bien, lo elige como si pensara en el triángulo formado por los pedazos azul y verde, en hacer, a partir del punto medio de la hipotenusa de ese triángulo, un giro hipotético del trozo verde para empalmarlo con el azul formando un cuadro. Tal vez, la correspondencia que establece Bárbara entre el trozo verde y lo que le falta al azul para completar una unidad, se ve a partir de imaginar ese giro. Esto sugiere que la reconstrucción de cuadros enteros a partir de retazos no solo se da a partir de considerar características de esos retazos, sino también el movimiento que llevaría uno hacia otro.

En otros fragmentos he destacado que a veces los alumnos con dificultades seleccionan una parte de la consigna, la primera y también la que está su alcance, que resulta ser la que los ocupa todo el tiempo. Angélica deja de lado la comparación de superficies y se dedica a rellenar plantillas. Nahomi se ocupa de reproducir un romboide, no de transformarlo a rectángulo. Miranda se fija en las relaciones entre las piezas del tangram, aunque dedique menos tiempo a rellenar las plantillas. En esta misma tarea, Irving calcula las áreas una por una, sin ocuparse de encontrar cuáles son iguales. Estos son algunos ejemplos que muestran que las consignas suelen aglutinar distintas cosas, se desagregan en varias tareas o abren para los alumnos otras cuestiones que les interesa explorar, y dentro de todo eso, ellos eligen, seleccionan aquello de lo que se pueden hacer cargo. En este caso ocurre lo contario: Daniela tiene presente la consigna completa. Sabe que están buscando tres triángulos de la misma área, para eso calculan las áreas (líneas 4 y 20).

La estimación

El procedimiento de conteo cuadro por cuadro permite ocuparse de los primeros seis triángulos. Pero el área del triángulo G no puede calcularse así. Quiero recordar que en la clase anterior los alumnos encontraron el área del rectángulo (Imagen 198) que resulta de duplicar G (Imagen 199).

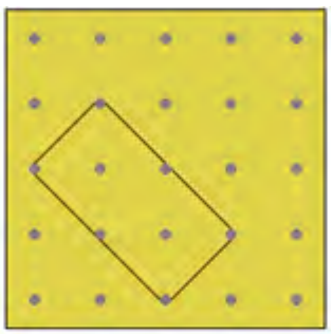


Imagen 198

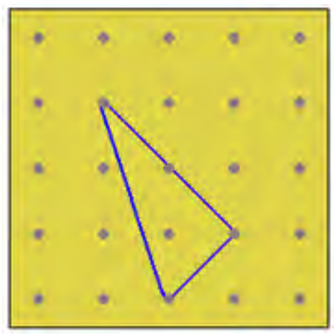


Imagen 199

En esta clase, la intención es que, si ellos recuerdan que el rectángulo tiene cuatro cuadros, infieran que el triángulo tiene dos. No vi a nadie que lo hiciera así. Alumnos como Bárbara, que en todos los triángulos anteriores tienen éxito al pensar en cada trozo del triángulo sin contemplar para nada un rectángulo circunscrito, intentan extender ese mismo procedimiento a G. Leonardo –un alumno con dificultades- explica que en G hay dos cuadros, porque “estos dos son mitades [pone dos dedos sobre dos trozos del triángulo (Imagen 200), son los verdes de la imagen 201], si los juntamos es uno… ehhhhh… este y este [los trozos naranjas] es mitad, estos dos…, este, este, esteeeeeeee [el amarillo], no tieneeeeee”.

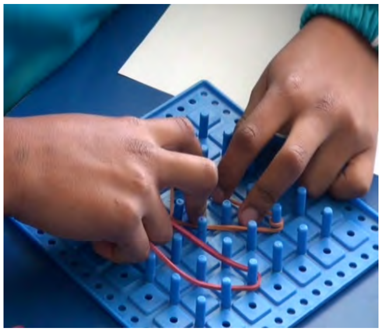


Imagen 200

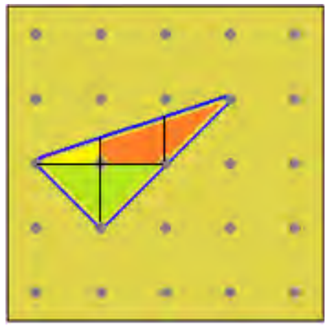


Imagen 201

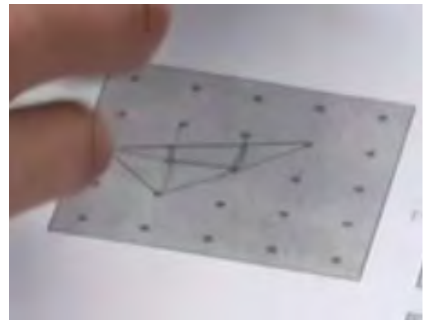


Imagen 202

Leonardo dice con mucha seguridad que los dos trozos verdes son mitades de un cuadro y al juntarlos forman uno completo. Después baja la voz, habla más pausado, titubea: los trozos naranjas no forman una unidad, y además hay tres pedazos, no dos. En los triángulos anteriores los pedazos se reúnen dos a dos para completar un cuadro, pero no eso no pasa ahora. Más adelante explica esas mismas dudas con mayor claridad, sobre la hoja de papel (Imagen 202):

> *Leonardo: (…) este [uno de los pedazos verdes] es el pedacito que le falta a este [la otra mitad verde] [marca con el lápiz el cuadro que se forma al unir los dos trozos] entonces uno (…) y este [uno de los trozos naranjas] es el pedazo que le falta a este [el otro naranja]… y ya son dos, pero aquí queda este, esteeeeee, este pe-da-ci-to [el amarillo].*

Finalmente rectifica:

> *Leonardo: ¡no! este, este y este [los trozos amarillo, naranja y lila de la imagen 203] hacen uno, porque este [el naranja de la Imagen 203] es el de aquí [marca con lápiz el naranja de la Imagen 204], y este [el amarillo de la Imagen 203] es el pedacito que le falta aquí [marca con lápiz el amarillo de la Imagen 204].*

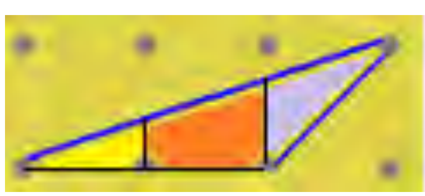


Imagen 203


Imagen 204

Si bien los dos trozos naranjas no son iguales –de hecho, tampoco los amarillos-, Leonardo ajusta el procedimiento usado en los triángulos anteriores, a partir de que tanto el triángulo como el cuadro que forma están definidos por tres pedazos, similares en forma global y cantidad de superficie.

Así, el encontrar que no es posible completar cuadros como en los triángulos anteriores, no abandona ese procedimiento, sino que lo ajusta con estimaciones, considerando la forma global, la cantidad y la superficie de los trozos. Esto deja ver que ni en el caso del triángulo rectángulo es fácil ver que el triángulo es la mitad de un rectángulo, relación que en los libros de texto muchas veces se muestra como evidente y se usa para introducir la fórmula para todos los triángulos. Los alumnos miran la figura que tienen, el triángulo, no hacen aparecer un rectángulo que para nada está presente en el problema. Además, están centrados en el conteo, no en hacer derivar la figura que tienen en otra que tenga un número entero de cuadritos.

Las resoluciones de Daniela, Bárbara y Leonardo dejan ver que los alumnos –muchos, no solo aquellos con dificultades- pueden mantenerse en una manera discreta de ver la figura, desagregándola cuadro por cuadro, sin importar qué tan difícil se vuelva el conteo. Unen dos mitades, o bien dos trozos diferentes que forman un cuadro entero o, si esto no es posible, estiman tanto la forma global como la cantidad de superficie para anticipar cómo formar un cuadro. Esta es la segunda vez que aparece la estimación. Antes la he mostrado puesta en juego por Ian, quien estima un área por encima y por debajo. Como he planteado en el segundo capítulo, la estimación no solo es fértil en el ámbito de los cálculos numéricos, sino también en el espacio-geométrico. Nuevamente pienso que, en lugar de considerar la unión que hace Leo de esos tres pedazos como un sinsentido, como un tipo de respuesta por contrarrestar, valdría la pena tomar la estimación como un asunto importante a tratar en clase.

Para terminar este apartado quiero destacar que, cuando el conteo de cuadros se complica, abandonarlo para dar paso a transformar la figura en un rectángulo de la misma superficie no es inmediato como se pretende en algunas lecciones de los libros de texto. En primer lugar, porque el conteo de unidades completas en el rectángulo en sí mismo es problemático: los alumnos aún necesitan experiencias para descartar el conteo de vértices y transitar del conteo uno a uno a la multiplicación de la base por la altura, lo cual requiere pasar de ver el rectángulo como unidimensional a bidimensional (Chamorro, 2005). En segundo lugar, porque el conteo cuando las unidades que no son completas abre un universo de preguntas y procedimientos que todo el grupo -no solo los alumnos con dificultades- se enriquecería al explorar: cambiar la forma de la unidad para facilitar el conteo, hacer estimaciones y encuadramientos, reunir trozos para formar cuadros completos. Qué tanto espacio dar al conteo de unidades, cuándo motivar a descartarlas para dar paso a las transformaciones, e incluso considerar si conviene promover ese tránsito o ver el universo de las unidades y el de las transformaciones como dos procesos articulados pero paralelos, son decisiones delicadas a tomar en un diseño. Lo que sí queda claro es que la prisa curricular por acceder a las fórmulas, que Ian tiene bien incorporada, no puede orientar esas decisiones si se busca cuidar el proceso de aprendizaje de los alumnos.

4.3.4 Las transformaciones, un drástico cambio de estrategia

En el apartado anterior se ve que el conteo de cuadros puede complicarse muy pronto, porque, una vez elegida la unidad, hay muchas figuras que no se pueden pavimentar con un número entero de unidades. Un procedimiento que ayuda a salvar las complicaciones del conteo es remitir la figura a otra que sí se puede cubrir con unidades. Esto puede hacerse al menos de tres maneras. Una consiste en transformar la figura a un rectángulo de la misma superficie. Por ejemplo, cortar un triángulo de un romboide y deslizarlo. La segunda es duplicar la figura para formar un rectángulo (un triángulo rectángulo, cuya área se obtiene dividiendo entre dos la del rectángulo) o bien para obtener una figura que puede transformarse a rectángulo (un triángulo obtusángulo, al duplicarse forma un romboide). La tercera consiste en circunscribir la figura en un rectángulo. Por ejemplo, un trapecio, de manera que su área es la del rectángulo menos la de dos triángulos rectángulos. He mostrado ejemplos de los tres casos en el primer apartado de este capítulo. Estas técnicas permiten dejar atrás las dificultades de la pavimentación de una figura con unidades, y también avanzar hacia las fórmulas.

No obstante, el tránsito del conteo de unidades a las transformaciones implica un salto considerable. En el apartado anterior mostré que los alumnos no dejan el conteo tan fácilmente, de hecho, lo adaptan de muchas maneras, manteniéndose en esa estrategia. En mis datos no hay ejemplos en los que algún alumno con dificultades haya hecho transformaciones por cuenta propia. Pero sí hay casos en que las comprenden a partir de otro que las hace.

En una puesta en común, Leonardo -un alumno con dificultades- levanta la mano para explicar cómo transforma un rombo a rectángulo para saber cuántos cuadritos contiene:

Leonardo: nosotros hicimos lo mismo que ellos [señala al equipo de Luis, que está detrás de su banca] lo cortamos entre, en cuatro partes y la tenemos COMPLETA (…) es que cortamos aquí [señala la diagonal menor del rombo, imagen 205] y luego cortamos aquí [señala la diagonal mayor del rombo], este con este [señala dos de los cuatro triángulos verdes], y este con este [señala los otros dos triángulos verdes] y nos dio 30 (…)

Maestra: pero ¿qué figura formaste?

Leonardo: un rectángulo

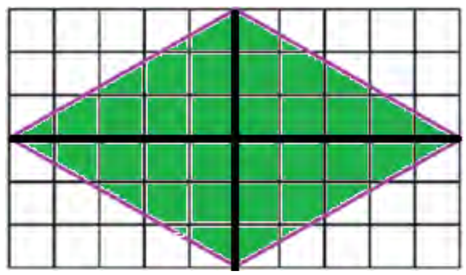


Imagen 205

En el apartado 4.2.1 se puede ver cómo Luis pasa del conteo de cuadros a transformar el rombo a un rectángulo de la misma superficie. Ahora, Leonardo relata con mucha claridad cómo ha adoptado esa manera de resolver. Después la sigue utilizando. Los siguientes dos problemas consisten en inferir el área de un rombo conociendo la del rectángulo circunscrito, sin tener ya la cuadrícula. En el último rombo[64] (Imagen 206), Leonardo es el primer alumno en dar la respuesta en la puesta en común: 18.

4. Considera que el área del siguiente rectángulo es de 36 cuadritos. ¿Cuál es el área del rombo?

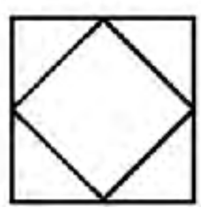


Imagen 206

Más adelante explica por qué, esta vez sin necesidad de hacer marcas a lápiz para dividir el rombo:

64 Que también es cuadrado, pero eso no se problematiza en la clase, ni la inclusión del cuadrado circunscrito en los rectángulos.

Leonardo: es que… este, nos dimos cuenta que, estos cuatro cuadritos (…) estos cuatrooooooo, triángulos perdón [señala los dos triángulos rectángulos de abajo en la imagen 206], esteee, forman, puedeeen, formar este, este rombo [señala el rombo en el interior de la imagen 206], yyyyyyy están diciendo que el área del rectángulo es de treinta y seis cuadritos, entonces… [*Inaudible*]

En esta formulación, Leonardo deja ver otra manera de establecer la relación de mitad entre el área del rombo y la del rectángulo. Ya no se trata de dividir el rombo en cuatro partes para formar con ellas un rectángulo que es la mitad del rectángulo circunscrito, como hace Luis. Leonardo encuentra que el rectángulo circunscrito tiene dos partes, el rombo y lo que queda entre el rombo y el rectángulo. Y esas dos partes son iguales, por eso el área de cada una es la mitad del área total. Es decir, Leonardo comprende bien la primera transformación que hace Luis, la reproduce en el mismo rombo, la vuelve a usar en el siguiente, y puede establecer una nueva relación en el último. Copiar al inicio le permite producir algo nuevo después. Es otro ejemplo que muestra las posibilidades de aprendizaje que abre la observación, como argumenta Paradise (1991).

A veces se sugiere promover interacciones entre alumnos “parejos”, es decir, con un nivel de conocimientos similar, y con una imagen social parecida, con el argumento de que hay más posibilidades de colaboración entre estos niños, que los intercambios son menos unidireccionales, más fecundos. En mis datos he encontrado ejemplos en los que efectivamente las interacciones son muy fluidas entre niños “parejos”, como la que analizo entre Axel y Jorge en el capítulo 2. Pero este ejemplo de Leonardo muestra lo contrario: un alumno con dificultades adopta por cuenta propia un procedimiento del experto, al cual probablemente no habría podido acceder de manera autónoma. Esto le permite resolver problemas que, como he mostrado, se habrían complicado mucho con el conteo, y además generar después una idea nueva. Como argumenta Santos (2011), la asimetría entre los saberes de los niños que se manifiestan simultáneamente, puede traducirse en circulación de saberes.

Estos procedimientos que utiliza Leonardo dejan ver también que el cambio de la hoja cuadriculada a la hoja blanca supone un cambio en el medio con el que interactúan los alumnos, como mencioné antes. La hoja blanca y los pares llevan a Irving a buscar maneras de restituir la cuadrícula, mientras a Leonardo lo lanzan fuera de los cuadritos y el conteo, hacia las transformaciones. El rombo con el que interactúa el equipo de Irving es uno desagregado en pequeños cuadros y trozos, en cambio el rombo de Leonardo y Luis es una figura más bien dinámica, de una pieza.

La relación entre una figura y un rectángulo no siempre es tan fácil de ver como en el caso de Leonardo. En otra clase, la maestra trata de hacérsela ver a Daniela –una alumna con dificultades- y su compañera Bárbara. Las dos alumnas tienen un triángulo rectángulo de 4 x 2 marcado en el geoplano con una liga, y también el rectángulo, sugerido por la maestra (Imagen 207):

Imagen 207

1. *Maestra: ¿qué es más fácil, contar cuadros cortados por la mitad? porque esto quedaría como así ¿o contar los cuadros completos?*
2. *Bárbara: ehhhhh…. contar los cuadros por la mitad*
3. *Daniela: [en voz muy baja, al mismo tiempo que Bárbara] contarlos completos*
4. *Maestra: ¿es más fácil contar los cuadritos por mitad?*
5. *Daniela: ¡No! contar los cuadros de [señala con los dedos dos cuadros completos]*
6. *Maestra: completos*
7. *Daniela: completos*
8. *Maestra: eso está bien, ahí ya van bien ¿entonces qué hacemos para contar los cuadros completos?... ¿contamos el triángulo o, o, o contamos lo del rectángulo? [recorre con un dedo el contorno del rectángulo]*
9. *Bárbara: lo del triángulo*
10. *Maestra: ¿en el triángulo sí tiene los cuadros completos?*
11. *Bárbara: ah no*

12. *Daniela niega con la cabeza*
13. *Maestra: entonces ¿qué es más fácil?*
14. *Bárbara y Daniela: en el rectángulo*
15. *Maestra: en el rectángulo. Entonces ya contaron los del rectángulo ¿cuánto les dio?*
16. *Daniela y Bárbara cuentan los cuadros del rectángulo con los dedos, de dos en dos*

    (…)
17. *Observadora: ¿maestra cómo, cómo fue esto del rectángulo?*
18. *Maestra [a Daniela y Bárbara]: a ver explíquenle por favor, ¿por qué pusieron el rectángulo?*
19. *Daniela: ¡porque el triángulo es la mitad del rectángulo!*
20. *Bárbara: [al mismo tiempo que Daniela, en voz muy baja] [inaudible] del rectángulo*

    (…)
21. *Maestra: ¿cómo podemos conocer cuánto tiene de superficie entonces este? [señala el contorno de uno de los triángulos en el geoplano de Bárbara]*
22. *Bárbara: mmmhhh… ¿dividir?*
23. *Maestra: ¿qué dividir?*
24. *Bárbara: dooos entreeeee...*
25. *Daniela vuelve a contar con los dedos los cuadros del rectángulo, de dos en dos*
26. *Maestra: ¿qué, qué, qué van a dividir ahí?*
27. *Bárbara: ¿dos entre ocho?*

    (…)
28. *Maestra: ¿DOS entre ocho?... ¿o al revés no? ¿ocho entre qué?*
29. *Bárbara: ocho entre dos*
30. *Maestra: ocho entre dos. OK, ¿y por qué ocho entre dos?*
31. *Bárbara: porque, nos dan ocho cuadritos completos, por el rectángulo, y dos porqueee, son dos (triángulos) [señala sus dos triángulos con el dedo]*

    (…)
32. *Maestra: aaaaaah OK, y por eso lo vas a cortar. Entonces ¿cuánto tiene de superficie UNO de los triángulos?... todo lo que dijiste está bien pero entonces ¿cuánto tiene de superficie?... ¿qué operación ibas a hacer Dani?*
33. *Bárbara: la división*

34. Daniela: la división

35. Maestra: a ver y dime, entonces ¿qué ibas a dividir? ¿Cuántos cuadritos tenías… o tienes?

36. Daniela: aquí tengo... en el rectángulo tengo ocho

37. Maestra: OK pero entonces ahí tienes ocho ¿cuántos tienes en cada triángulo?

38. Daniela: mmhhhh…. ¡cuatro!

39. Maestra: ¿cuatro?

40. Daniela: ajá [asiente con la cabeza]

La maestra intenta hacer ver algo que para ella es muy claro: el triángulo es la mitad del rectángulo, relación que facilita el cálculo del área del triángulo. Esta decisión es comprensible, no solo porque para ella es muy evidente, sino también por lo que ha ocurrido media hora antes en esa clase. Las dos alumnas encontraron el área de seis triángulos rectángulos reuniendo trozos dos a dos para formar cuadros completos, y no desistieron ni con las considerables complicaciones del séptimo triángulo (ver apartado 4.3.3). Al contar cuadro por cuadro, el área de cada triángulo rectángulo es un problema nuevo, porque los trozos tienen formas globales muy distintas, entonces la manera de unirlos en un triángulo rectángulo no deja ver cuáles asociar en el siguiente. Duplicar el triángulo engloba a todos los triángulos rectángulos en un mismo procedimiento que generalmente solo implica contar cuadros completos. No sé si la maestra piensa en esa ventaja, o bien, que esa manera de resolver puede traducirse a una fórmula, y el conteo de cuadros no.

Pero para las alumnas sucede otra cosa. Ellas de entrada no traen a escena al rectángulo, es la maestra quien les sugiere trazarlo. Incluso cuando lo tienen, su utilidad no es clara: si bien pueden repetir la relación «el triángulo es la mitad del rectángulo» (líneas 19 y 20), no la vinculan al problema que están resolviendo. Bárbara sigue centrada en el triángulo: elige contar por trozos (“mitades”, línea 2), y hacerlo en el triángulo (línea 9), como lo hizo antes en la clase. Daniela parece ser más receptiva al cambio de procedimiento que sugiere la maestra, cuando responde que es mejor contar los cuadros completos (líneas 3-7). Quiero recordar que media hora antes, al resolver solas la tarea, Bárbara estaba más asida al conteo trozo por trozo que Daniela, como describo en el apartado 4.3.3. Quizás por eso ahora le cuesta más trabajo a ella pasar a esta nueva manera de resolver. Como muestra Sadovsky (2003), a quienes participan menos en la construcción de un procedimiento, les es más fácil despegarse de él para evaluar los de otros. Finalmente, después de una fuerte orientación por parte de la maestra, Bárbara explica que, como son dos triángulos, su área se obtiene dividiendo la del rectángulo a la mitad (línea 31), y Daniela pone en juego esa relación para sacar el resultado (líneas 36 y 38).

Más adelante, en la puesta en común, las alumnas explican que han notado que el triángulo es la mitad de un rectángulo y muestran eso a partir de un caso en el que el conteo del triángulo y del rectángulo tiene las mismas características, porque en ambos hay que considerar unidades a la mitad (Imágenes 208 y 209). Es decir, se trata de un rectángulo que no facilita el conteo de unidades del triángulo.


Imagen 208

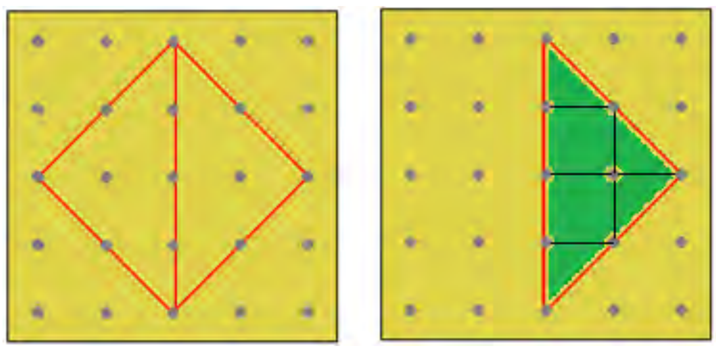


Imagen 209

Si bien hay algunas diferencias entre Daniela y Bárbara, para ninguna parece muy claro que ahí hay un rectángulo, que el área de ese rectángulo es el doble del área del triángulo, que el conteo ahí es mucho más fácil que el conteo en el triángulo. Hay entonces una tensión entre lo que ve la maestra y lo que ven las alumnas: lo que para una es evidente y está ahí, para otras no existe todavía, en el sentido de que no es parte del medio*,* de aquello de lo que pueden echar mano para resolver. La posibilidad de remitir el área del triángulo a la del rectángulo implica un trabajo espacio-geométrico que no es menor: es necesario dejar de ver lo que está –el triángulo-, para ver lo que no está –el rectángulo[65].

En el apartado anterior mostré que los alumnos no abandonan el conteo cuadro por cuadro por mucho que se complique unir los trozos, porque en ese universo del conteo hay todavía muchas cosas por explorar, preguntas por responder. El ejemplo de Daniela y Bárbara muestra otra razón: pasar a las transformaciones implica ver las

[65] Irma Fuenlabrada, conversación personal.

figuras de otra manera, mirar nuevas figuras y relaciones entre las figuras que no son fáciles de ver. Se trata de un cambio fuerte de procedimiento.

Douady y Perrin-Glorian (1989) se preocupan por la relación entre el conteo de unidades y las transformaciones. Al diseñar una primera secuencia didáctica, las autoras apostaron al procedimiento de recubrimiento, que consiste en transformar una figura en otra de la misma superficie al cortar pedazos y reacomodarlos sin empalmarlos ni dejar huecos. La transformación de una figura en un rectángulo es un caso particular de esta manera de comparar superficies. Las autoras consideraban que el recubrimiento es más fecundo que el conteo de unidades, porque el primero contribuye a disociar la superficie de la forma[66] de una figura, mientras que en el segundo esto no pasa porque la forma se mantiene fija. No obstante, al ver la actividad de los niños en la secuencia y entrevistas, cambiaron de opinión: es necesaria una interacción entre el “papel blanco” de las transformaciones y el “papel cuadriculado” del conteo de unidades, porque el conteo de cuadros permite validar resoluciones cuando surgen dudas respecto al recubrimiento, dudas que se originan porque los alumnos tienen todavía por aprender que el recubrimiento conserva la superficie.

La idea de una interacción entre el papel cuadriculado y el blanco me hace mucho sentido a la luz de las resoluciones que encontré en este trabajo. Por un lado, las cuadrículas son importantes porque es ahí donde están los alumnos en este momento y tienen todavía muchas preguntas por responder. En cambio, las transformaciones están muy lejos de lo que hacen alumnos como Ian. Por otro lado, tener mayor experiencia con las transformaciones, y más en general, con el recubrimiento, ayudaría a que los alumnos construyan otra idea de «tener la misma superficie», importante para separarla de la forma global de las figuras, por un lado, y para acceder a las fórmulas, por otro. Los fragmentos que he analizado me han dejado ver que esa interacción entre las cuadrículas y el recubrimiento podría ser fructífera, pero al mismo tiempo nada fácil de construir.

Mostraré ahora lo que ocurre cuando los alumnos abordan tareas que implican directamente a las fórmulas para calcular áreas.

[66] Las autoras hablan de la “forma”, pero entiendo que se refieren a lo que en este trabajo llamo la “forma global”, pues no consideran la implicación de las medidas exactas de lados y ángulos en los razonamientos de los niños.

4.3.5 La producción y uso de fórmulas, tareas inaccesibles

Al describir la actividad de Luis, el alumno experto, relaté que no llega a producir por cuenta propia fórmulas para calcular áreas, pero sí a comprender cómo las establece la maestra y a utilizarlas de manera controlada.

A los alumnos cuya actividad analizo en este apartado les resultan difíciles las tres cosas: establecer, comprender y usar las fórmulas. Prácticamente quedan fuera de la producción y uso de fórmulas. Mientras en clase se establece una fórmula, ellos muchas veces están resolviendo otras tareas. Me refiero a casos como el de Víctor –el alumno con Síndrome Down-, a quien siempre asignan otras actividades: jugar libremente con el tangram, trazar números, hacer manualidades. Un ejemplo extremo es cuando Ian está literalmente dormido en clase mientras se produce la fórmula del área de polígonos regulares. Pero sobre todo hablo de alumnos de quienes sí se espera que hagan lo mismo que el resto, solo que están ocupados con tareas previas a la producción de la fórmula o incluso a calcular cualquier área.

Antes mostré cómo actúa Nahomi frente a una lección que pide reproducir un romboide en una cuadrícula para después calcular su área y derivar la fórmula. Nahomi consume casi todo su tiempo de clase en esa primera tarea, considerada desde el libro como no problemática: hacer el romboide. Cuando termina de trazarlo, la maestra está llegando a la fórmula en el pizarrón. Nahomi no pone atención, para ella la tarea, que fue considerablemente difícil, ya terminó. Mientras la maestra termina de explicar, Nahomi se peina, mueve la cabeza, se estira, pregunta la hora, bosteza, toma el reloj de la maestra, sale al baño. Nuevamente, esto no pasa solo con los alumnos con dificultades. Bárbara tampoco se entera de cómo se establece la fórmula porque da por terminada la tarea antes. Pero ella logra utilizarla, y Nahomi copia sus respuestas. Así, Luis no produce la fórmula, pero entiende cómo se genera; Bárbara no sabe cómo se establece, pero puede utilizarla; y Nahomi no la usa, su preocupación es la figura, no el área de esa figura ni mucho menos de ese tipo de figuras. Iré desglosando algunos aspectos que ayudan a entender por qué la manera en que se estudian las fórmulas en las clases que observé, va dejando cada vez más en un lugar marginal a los alumnos.

<u>Las figuras geométricas</u>

Que Nahomi tarde más que otros en resolver esa primera tarea, y el trabajo que le implica, deja ver también una construcción que en los libros se asume como ya dada: la noción de romboide, o de rombo, o de triángulo. Es decir, se da por hecho que los alumnos agrupan por ejemplo a todas las figuras de tres lados en una misma categoría, la del triángulo, y entonces pueden preguntarse por el área de ese conjunto de figuras. Yo he interpretado que a Nahomi le cuesta trabajo reproducir un romboide porque no lo ve todavía como una figura con dos pares de lados paralelos, justamente la característica que hace que todas esas figuras se agrupen en una misma categoría. Así, la pregunta "¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de un romboide?", da por sentado que «el romboide» es una idea ya construida.

La altura y otros segmentos auxiliares

La producción y uso de fórmulas supone, además, una idea compleja de las figuras. No se requiere solamente saber que el rombo es una figura de cuatro lados iguales, sino también fijarse en las diagonales. No basta con saber que el triángulo tiene tres lados, hay que agregarle la altura. En las fórmulas están implicados segmentos auxiliares, que no están de entrada en la figura: alturas de triángulos, romboides y trapecios; diagonales de rombos; radios de círculos; apotemas de polígonos regulares.

Esos segmentos auxiliares aparecen de maneras muy distintas en las clases. A veces son funcionales al resolver problemas. Esto pasa al reproducir una figura o al calcular su área con procedimientos propios. Un ejemplo del primer caso es el de Nahomi, quien, al intentar trazar un romboide igual a otro dado, pregunta "¿cuántos cuadritos te saltaste?" (apartado 4.3.2), es decir, cuántos cuadros hay entre un lado y su paralelo, en otras palabras, cuál es la altura del romboide. El segundo caso ocurre cuando Leonardo corta un rombo en cuatro partes para formar un rectángulo (apartado 4.3.4). En ambos ejemplos, el segmento auxiliar no se nombra: para Nahomi son los cuadritos que se saltan, para Leonardo es el lugar donde se hace el corte ("cortamos aquí"). Es decir, ni la altura ni la diagonal se explicitan, pero tienen un papel implícito en la resolución. La maestra sí habla de la altura cuando describe el procedimiento para reproducir el romboide: "si me dicen que tiene seis de altura, voy a contar, uno, dos, tres…". No obstante, esa palabra queda inmersa dentro del procedimiento, no sé si los alumnos logran o no ponerla de relieve a partir de esa explicación. Después, al discutir sobre cómo calcular el área de ese romboide, la maestra habla de "cortar el triángulo que se forma con la altura".

Quiero resaltar que encontré pocas veces este uso de segmentos auxiliares. En las clases 3, 4, 6, 10, 11 y 16 resuelven problemas que podrían dar pie a transformar la figura a un rectángulo o descomponerlo en triángulos, pero los alumnos suelen más bien centrarse en el conteo de unidades, o bien, se van directo a la fórmula. Además, cuando Leonardo transforma un rombo a rectángulo, usa las diagonales para hacer los cortes, pero después el cálculo del área no es a partir de ellas sino de las medidas del rectángulo. Traducir ese cálculo a una operación con las diagonales es un trabajo que queda pendiente.

Otras veces, esos segmentos se muestran a los alumnos, ya sea desde la lección, o bien lo hace la maestra. Después del episodio en el que Leonardo transforma un rombo en rectángulo, los alumnos resuelven una lección en la que se muestran las dos diagonales con unas flechas rojas y se pregunta "¿cuál es la fórmula que permite calcular el área de un rombo a partir de sus diagonales?". Esa pregunta implica un cambio abrupto de algo que solo pocos han puesto en juego en sus procedimientos, de manera muy implícita y para una sola figura, a su explicitación clara para el caso general por parte de todos los alumnos. Ellos muchas veces se equivocan al responder, o describen un cálculo específico de un rombo particular -muestro ejemplos más adelante, o bien, como expliqué para el caso del equipo de Luis, se apoyan en las notas del cuaderno. En el siguiente capítulo analizo un largo episodio en el que la maestra introduce la apotema como una "línea" que más adelante será muy importante, y muy parecida al radio del círculo, segmento con el cual los alumnos ya han tenido más contacto.

Finalmente, en otros casos, los problemas demandan el uso de fórmulas, o bien los alumnos las eligen, lo cual exige hacer cálculos con los segmentos auxiliares que aparecen en dichas fórmulas, como si se tratara de objetos conocidos para los alumnos. Mostraré ahora un ejemplo largo, que divido en tres partes. En la clase 11, Miranda –una alumna que presenta rezago- está sentada sola en una mesa adelante de Mía y Valeria. La maestra le pide que trabaje con ellas. Tienen que encontrar el área de varias figuras trazadas en una cuadrícula, con el procedimiento que quieran. Ellas comienzan con la primera, un triángulo (Imagen 210):

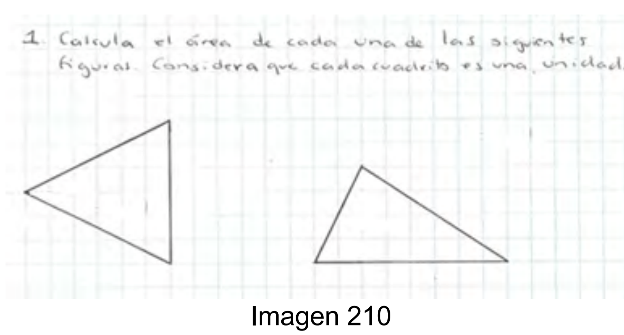


Imagen 210

1. *Valeria: entonces sería base por altura… sobre dos*
   (…)
2. *Valeria: [mide con la regla uno de los lados del primer triángulo, Imagen 211], cuatro punto ocho*

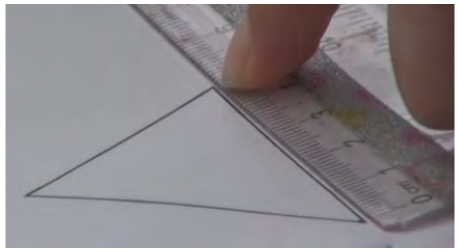


Imagen 211

3. *Mía comienza a remarcar el cuadriculado. Luego voltea a ver a Valeria, deja de remarcar, saca una regla de su mochila y la usa para medir el mismo lado del triángulo*
   (…)
4. *Mía: [vuelve a medir ese mismo lado en su hoja] ah no sí estás bien… me había dado cuatro punto nueve… ah no sí sí es ocho*
5. *Valeria y Mía toman la medida de otro lado del triángulo y la anotan. Mía 4.3, Valeria 4.2*
6. *Miranda: [voltea hacia atrás para enseñar su hoja a Valeria y Mia, donde tiene anotadas medidas de todos los lados de cada una de las seis figuras. En los dos lados del primer triángulo tiene 4.8 y 4.2] ¡ya!*
7. *Valeria: [ve la hoja de Miranda y se dirige a Mía] qué te estoy diciendo es cuatro punto OCHO*
   (…)
8. *Valeria: sería cuatro punto ocho pooooor… cuatro punto dos [en voz baja]*
9. *Miranda: [al tiempo que termina Valeria] PUNTO DOS*
10. *Miranda voltea de nuevo a su mesa. Las tres comienzan a hacer una multiplicación en su hoja, con lápiz. Mía 4.8 por 4.3, Miranda y Valeria 4.8 por 4.2*
11. *Miranda anota el primer resultado parcial de la multiplicación, 96 (Imagen 212). Después señala el 4 y el 8 de la cuenta con el lápiz una y otra vez. Cuenta los dedos de una mano. Ya no anota más resultados en la cuenta*

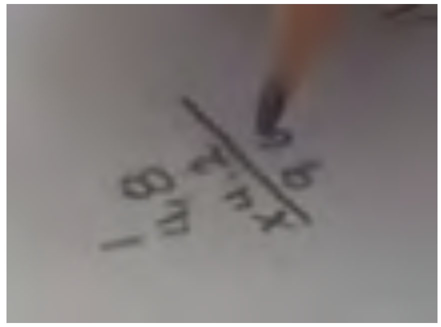


Imagen 212

12. *Valeria también llega hasta el 96, y usa la calculadora para obtener el resultado final, 20.16. Mía también termina la cuenta con la calculadora*

    (…)

13. *Miranda: [voltea hacia atrás para enseñarle su hoja a Valeria] ¿hiciste una suma o lo multiplicaste?*
14. *Valeria: multipliqué*

    (…)

15. *Observadora [a Valeria y Miranda]: ¿y cuánto les dio?*
16. *Valeria: veinte punto dieciséis*
17. *Observadora [a Miranda]: ¿y a ti también te dio eso?*
18. *Miranda: [tiene su mano sobre la cabeza] no, yo me equivoqué*

    (…)

En un problema que puede resolverse de distintas maneras -contar los cuadros uniendo los trozos, transformar la figura a un rectángulo de la misma superficie, inscribirlo en un rectángulo, aplicar la fórmula- Valeria asume, casi en automático, el uso de la fórmula (línea 1). Ella también es quien comienza a ponerla en práctica: es la primera que mide los lados (línea 2) y, una vez que tienen las medidas, recuerda que hay que multiplicarlas (línea 8). Más adelante muestro que también es ella quien reporta a la maestra el uso de la fórmula. Así, ella desde la primera intervención define el procedimiento que terminan usando las tres. Nuevamente, se ve que la fórmula es un procedimiento que tiene legitimidad y muy pronto se hace presente. Resolver los problemas de cálculo de áreas mediante las fórmulas parece ser una norma del contrato didáctico, que tiene más peso para algunos alumnos que para otros.

Miranda y Mía siguen el curso de resolución pautado por Valeria (líneas 3, 6, 8-10), tal vez porque ella ha tomado la iniciativa y sus compañeras la aceptan. O bien, porque se subordinan a ella. Si se tratara del segundo caso, no es una subordinación absoluta: cuando Miranda les enseña la hoja con todas las medidas ya tomadas (línea 6), no parece hacerlo para pedir una revisión, sino para mostrar que ha terminado, antes que ellas, de hecho. Valeria tampoco asume que le toca corregirla, más bien usa las medidas de Miranda para hacerle ver un error a Mía (línea 7), sobre el que ellas dos habían hablado un poco antes (línea 4)[67]. Así, en todo caso se trata de una subordinación como las que describe Griswold (2007): se despliega por iniciativa propia hacia alguien que no ha reclamado una jerarquía más alta. Hay una tercera posibilidad: quizás Miranda y Mía usan la fórmula porque confían en Valeria, quien parece darles una sensación de seguridad.

Como sea, el problema es que la fórmula involucra a la altura, que no es nada fácil de ver. Valeria sabe cuál es la fórmula que tienen que usar (línea 1), pero toma la altura como uno de los lados del triángulo, una asociación muy común, que se ha mostrado en trabajos como el de Castaño (en proceso). Así, multiplica las longitudes de dos lados. Sus compañeras hacen lo mismo (líneas 8-10).

Hago ahora una pequeña desviación. Este fragmento muestra, además de la dificultad para identificar la altura, que la puesta en marcha de una fórmula requiere cierta destreza con los cuatro algoritmos básicos, fundamentalmente el de multiplicación. Las tres alumnas comienzan a hacer la cuenta -4.8 por 4.3 o 4.2- con lápiz y papel (línea 10). Miranda y Valeria se detienen en el mismo punto, es decir, al obtener el primer resultado parcial (líneas 11 y 12). Al parecer las dos tienen dudas sobre cómo seguir. La diferencia es que mientras eso se convierte en un freno para Miranda (línea 11), Valeria y Mía lo resuelven recurriendo a la calculadora (línea 12). Como mencioné antes, por alguna razón que no logro entender, los alumnos con dificultades tienen menos acceso que los demás al material didáctico, y esto incide en sus producciones. La calculadora no figura aquí como una posibilidad para Miranda. Así, la dificultad al hacer la cuenta la lleva a dudar de la pertinencia de esa cuenta (¿sí había que multiplicar, o había que sumar?, línea 13) y a terminar asumiendo esa dificultad como un fracaso personal: ella se equivocó (línea 18). En cambio, Valeria y Mía sí producen un resultado (línea 16).

[67] Esta intervención de Valeria me hace pensar que, así como he dicho varias veces que puede ser útil pensar la noción de devolución a la luz de las interacciones sociales, lo mismo valdría la pena con la validación. Valeria y Mía obtienen dos medidas que solo difieren por un milímetro, 4.2 y 4.3 centímetros. Ellas no asumen esto como el margen de error que siempre hay que aceptar en las medidas, sino como un error de alguna de ellas que se debe corregir. Para ello vuelven a medir, es decir, regresan al problema. Podría decirse que hacen una validación empírica. A eso se suma la intervención de Miranda, que se vuelve para Valeria un recurso social de validación: si las dos obtuvieron la misma medida, es Mía quien tiene que corregir. La validación empírica y la social se superponen aquí, no va una en oposición a la otra.

Vuelvo ahora al asunto de la altura. Trece minutos después, las tres alumnas van con la maestra para que les revise sus respuestas:

19. *Valeria le da su hoja a la maestra*
20. *Maestra: y ustedes chicas ¿cómo hicieron para esto?*
21. *Valeria: base por altura*

    (…)

22. *Maestra: ¿usaron fórmulas?*
23. *Valeria: sí*

    (…)

24. *Maestra [mirando a Valeria]: pero por ejemplo para usar fórmula tuviste que calcular… calcular la altura, ¿la tomaste?*
25. *Valeria: ajá sí aquí está la base [señala el lado que mide 4.8 cm] y la altura [señala el lado que mide 4.2 cm]*
26. *Miranda también señala el lado del triángulo que mide 4.2 cm*
27. *Maestra: ¿cuál es la altura?*
28. *Miranda: es esto [señala el lado que mide 4.2 cm]*
29. *Valeria [al mismo tiempo que Miranda]: la altura es eso [recorre con el dedo el mismo lado que Miranda]*
30. *Maestra [mira a Valeria]: nooooo… está mal, ¿cuál sería la altura de un triángulo? Es de la BASE a la punta más alta, ¿esta es la base? [señala el lado que mide 4.8 cm]*
31. *Miranda dibuja un triángulo en el aire con su dedo*
32. *Maestra: ¿cuál sería la base? ¿cuál sería la punta más alta?*
33. *Valeria: aaaaah [señala ese mismo lado, que mide 4.8 cm] esta es la base*
34. *Miranda señala con el dedo el tercer lado del triángulo, que no habían señalado antes, el que no han medido*
35. *Maestra [mira a Valeria]: entonces tendrías que haber encontrado primero tu altura, ¿si no cómo lo hiciste?*

    (…)

36. *Maestra: aquí también [señala el segundo triángulo, imagen 210] ¿dónde marcaron la bas… la altura? ¿cuál tomaron como altura aquí?*
37. *Valeria: ehhhhh… sería esta [señala con el lápiz el lado horizontal, imágenes 213 y 214]*

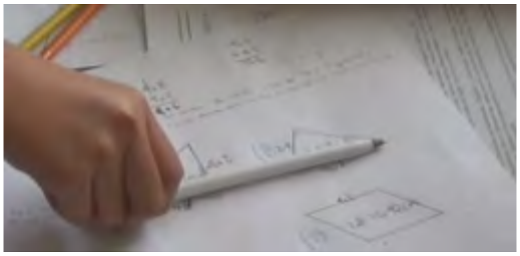


Imagen 213

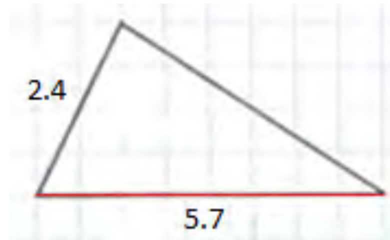


Imagen 214

(…)

38. Maestra: nooooo… [voltea a ver a Mía] ¿esta [señala el mismo lado que Valeria] sería la qué, Mía?

39. Mía: [en voz baja] ¿la base?

40. Maestra: [afirma con la cabeza] ¿cuál sería la altura?

41. Mía señala con el dedo el vértice opuesto al lado horizontal [Imagen 215]

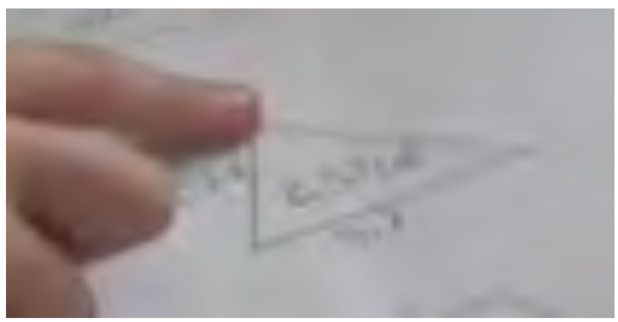


Imagen 215

42. Maestra [señala el mismo vértice]. Hasta acá sería pero a ver enséñame

43. Miranda señala el lado horizontal, marcado con rojo en la imagen 214

44. Maestra: nooooo, este es un lado

45. Valeria: esta es la base [señala el lado rojo de la imagen 214] y esta es la altura [señala el lado que mide 2.4 en la imagen 214]

46. Maestra: nooooo, esto [recorre con su pluma el lado que indicó Valeria] es un lado, la altura va de la base al punto más alto, si esta es tu base [señala el lado horizontal] ¿cuál es la altura?

47. Valeria: pero, bueno, yo lo tenía así [pone su lápiz sobre el lado que mide 2.4, imagen 216]

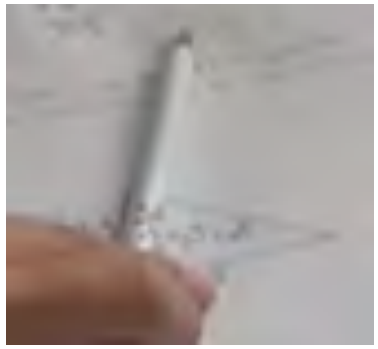


Imagen 216

48. Maestra: no, pero no se mide chueco

49. Miranda: ¡ahhhh! [toma el mismo lápiz y lo mueve para superponerlo al tercer lado del triángulo, el que no han medido]

La maestra anticipa muy pronto que puede haber problemas con la altura (línea 24)[68]. Es interesante su titubeo con la palabra "calcular". Hace una pausa, quizás porque tiene una duda: ¿qué es lo que se hace con la altura? No es una medida que se obtiene haciendo cálculos con las que ya se tienen, como el área. Pero tampoco se toma directamente con la regla, como se hace con los lados, porque no está ahí previamente trazada, entonces primero hay que encontrarla. La altura no es un lado, se distingue de los lados en algo (líneas 44 y 46). La maestra termina esa primera intervención diciendo las dos palabras, "calcular" y "¿la tomaste?" (línea 24), quizás porque no es ni una ni la otra, sino algo intermedio. Once turnos después, tiene otra palabra, más adecuada: "encontrar" la altura (línea 35).

Valeria y Miranda responden que la altura es uno de los lados inclinados, el que han medido (líneas 25-29). Valeria lo dice con una marcada seguridad: la primera vez que la maestra pregunta por la altura, ella en una sola frase, "ajá sí aquí está", confirma tres veces, con cuatro palabras enfáticas, que ese lado es la altura (línea 25). No hay titubeos en sus primeras respuestas. La maestra reacciona sin ambigüedad y sin rodeos: esa respuesta está mal (línea 30, y vuelve a hacerlo en las líneas 32, 46 y 48). Define primero a la altura como un tramo de la base al vértice opuesto (línea 30), y después, por un momento, evoca tangencialmente la condición que falta en esa definición, la perpendicularidad entre la altura y la base: "no se mide chueco" (línea 48).

[68] En otras ocasiones también deja ver que tiene presente la dificultad para ubicar la altura. Por ejemplo, en una clase, al considerar distintas actividades para seguir trabajando más adelante, se refiere a una en la que hay distintas figuras y se demanda que los alumnos tomen las medidas que necesiten para calcular su área. La maestra anticipa que les costará trabajo identificar las alturas.

Frente al error que señala la maestra, las respuestas cambian un poco. Valeria comienza a titubear: cambia el seguro “ajá sí aquí está” que indicaba base y altura, por un más dudoso “aaaaah, esta es”, que señala la base y omite el punto más alto (línea 33). Miranda hace un ajuste: si no es ese lado, debe ser el tercero, que no tiene un número -es decir, nadie lo ha medido-, al que no se ha puesto atención, del que no se ha hablado (líneas 34 y 49)[69]. O bien, ambas eligen la base (líneas 37, 43). Es decir, cambian de lado, manteniendo la idea de que la altura es un lado. La definición que la maestra ha dado de altura, como un segmento que va “de la base a la punta más alta” (línea 30) es, de hecho, acorde con los lados distintos a la base. Esos lados también van de la base a la punta más alta. La definición no descarta dos de los lados que las alumnas asignan a la altura, pues omite la condición de perpendicularidad entre base y altura. Después Valeria vuelve a señalar un lado adyacente a la base, el que han medido, para el segundo triángulo. Primero con seguridad, y cuando la maestra desaprueba, con menos certeza (líneas 45-47).

La identificación de la altura con un lado puede estar también fortalecida por una tradición de por lo menos varias décadas en la enseñanza de la fórmula del triángulo. Como explico en el primer capítulo, es común que la relación de un medio entre el área de un triángulo y un rectángulo se enseñe a partir de un triángulo rectángulo. Ese caso específico en el que la relación es más visible se generaliza a cualquier triángulo. Así está organizada la lección del libro Gader, también las de los libros oficiales de los años setenta, con los que probablemente estudió la maestra al cursar la primaria. Así se presenta la fórmula en la clase 8, cuando los alumnos sintetizan y exponen lo que saben de un tema a sus compañeros (ver imagen 135). En ese caso del triángulo rectángulo, que se utiliza como puente para saltar al área de todos los triángulos, la altura sí coincide con un lado. ¿Cómo podrían inferir los alumnos que en la mayoría de triángulos eso no sucede? Y si esa tradición en la enseñanza es tan expandida, ¿cómo podría la maestra percibir que genera confusión a los alumnos? La interacción de la maestra con las alumnas parece mostrar una diferencia en el medio de una y otras: mientras, para la maestra, la coincidencia entre la altura y un lado es un caso particular, un ejemplo escaso entre el universo de triángulos; para las alumnas es el genérico. Para la maestra, la altura es un segmento distinto de los lados que no se mide chueco, idea en la que puede estar

[69] Tengo la impresión de que Miranda se sorprende al reparar en este tercer lado (línea 49). El hecho de que un lado, por no haber sido medido, se vuelva invisible por un tiempo, es una de muchas muestras de la mayor jerarquía que el marco numérico tiene frente al geométrico (Douady y Perrin-Glorian, 1989).

implícita la perpendicularidad. Para las alumnas, es un lado. Al hablar de altura, se refieren a distintos objetos.

La maestra usa varios recursos para hacer ver la altura a Valeria, su principal interlocutora. De entrada, pone la altura sobre la mesa y la mantiene en la discusión (líneas 24, 27, 32, 35, 36, 40, 42). Deja claro que hay un error, y provee una definición de altura, ciertamente insuficiente para desechar los lados (líneas 30, 32, 46, 48). Se dirige a Mía cuando ve que está en un callejón sin salida con Valeria (líneas 37-42). Finalmente, le habla de nuevo a Valeria:

50. *Maestra: [toma el mismo lápiz y lo pone sobre la base] esta es la BASE, cuál es la altura, ASÍ [pone otro lápiz sobre el lado que mide 2.4 como lo hizo antes Valeria] no es la altura*
51. *Valeria: no, o sea yo, como estaba chueco, le… le [inaudible]*
52. *Maestra: [voltea la hoja para que Valeria la vea de frente] ¿cómo tomaste la altura?*
53. *Valeria: así [pone el lápiz correctamente sobre la altura]*
54. *Maestra: entonces márcala, si la estás tomando aquí, con su regla marquen la altura [traza la altura con el lápiz, con una línea punteada] porque entonces si no, aunque usaron la fórmula a lo mejor la fórmula la usaron bien, pero tomaron mal las medidas y les va a dar mal el resultado a ver vayan a revisar [entrega a Valeria su hoja]*

    (…)
55. *Las tres alumnas regresan a su asiento*

La maestra interpela directamente a Valeria (línea 50), desde que se refiere a la última respuesta que dio ella (línea 47) y no a la que Miranda dio después (línea 49). Cuando la alumna está tratando de descifrar qué respuesta quiere la maestra (línea 51), la interacción podría derivar en un interminable intercambio de preguntas y respuestas, hasta que la maestra acabaría por señalar la altura. En cambio, ella hace un giro a ese posible curso de la interacción, similar a los que describe Poveda (2005), al darle la hoja para que le quede de frente y hablarle en segunda persona del singular ("tomaste", línea 52). Es decir, le pide que se haga cargo, a ella directamente: intenta restaurar una ruptura en la lógica del contenido a través de la lógica de participación social, eligiendo una sola interlocutora y asignándole una responsabilidad. Eso hace que Valeria cambie la anterior frase adivinatoria que no se comprometía con ningún segmento (línea 51) por un seguro "así" con el que señala la altura correcta del triángulo (línea 53). En ese momento, la maestra vuelve a hablar en plural, incluye a las tres en la identificación de la altura y les asigna la tarea de revisar lo que han hecho (línea 54).

Aquí se puede ver una diferencia entre la actividad de las tres alumnas. La altura es problemática para todas. Otra vez, no se trata de un asunto de los niños con dificultades, sino de una noción compleja, difícil de construir para cualquiera. Pero la interacción con la maestra ofrece al menos un bote salvavidas a Valeria, por esta vez, y a Miranda y Mía no. El medio es distinto también para las tres alumnas. Valeria trata de poner en marcha un procedimiento que ha elegido, sus compañeras de adherirse a esa decisión. Valeria y Mía tienen el recurso de la calculadora cuando las cuentas a mano fallan, Miranda no. Valeria tiene la mayor interlocución con la maestra, Mía y Miranda muy poca. En las otras clases, no encontré ningún momento en el que Miranda supiera cuál es la altura de una figura y la pusiera en juego en una fórmula.

¿Es posible que una interacción distinta entre las alumnas y la maestra hubiera derivado en que Miranda también identificara la altura? Mi apuesta es que no, o en todo caso no sería suficiente para que pudiera hacerlo en otros problemas con otras figuras. La noción de altura es muy difícil de construir, precisamente por eso que intuye la maestra cuando no le convencen las palabras "calcular" ni "tomar" y cuando insiste en que la altura no es un lado. Reparar en la altura requiere dejar de ver los segmentos que están trazados, y ver uno que no está. Descartar todo lo que ya se ha puesto en los lados: uno es la base, otro el lado inclinado medido, otro el lado inclinado que no importa mucho. Y ver algo que hasta ahora no existe.

Ese cambio en la mirada es tan fuerte que de hecho modifica la noción de triángulo. Para Perrin Glorian y Godin (2018), en un problema en el que aparece una fotografía de la entrada al museo del Louvre -una pirámide cuadrangular-, cuando los alumnos hacen un esquema, es precisamente la colocación de la altura en ese esquema lo que lleva a "transformarlo en una representación de un objeto geométrico" (p. 11). Es decir, es al poner la altura que un objeto material del espacio sensible se convierte en uno conceptual: el esquema deja de representar una parte del museo para representar a una pirámide. Para Duval y Godin (2005), el estudio de la geometría implica pasar de ver a las figuras como bidimensionales a unidimensionales, y empezar a ver segmentos auxiliares que no son parte de la figura de entrada, como la altura, es un paso importante en ese largo proceso. Finalmente, la fórmula incluye a las tres posibles alturas de un triángulo, pero en este fragmento se habla de una sola base y una sola altura. Perrin-Glorian (1999) afirma que, de hecho, los alumnos solo se convencen de la fórmula cuando encuentran que da el mismo resultado para las tres alturas. A Mía, Valeria y Miranda les cuesta trabajo encontrar una, y parecen asumir que es única. El asunto de las tres no aparece en el episodio.

En las clases que observé, pocas veces los alumnos usan la altura como algo necesario para resolver, y de pronto las tareas que demandan deducir o aplicar una fórmula suponen su presencia explícita, nombrada, clara, fundamental. En este sentido, pasa de prácticamente no existir, a existir absolutamente. Hace falta un momento intermedio, en que la altura aparezca como algo funcional pero implícito, como el segmento por donde conviene cortar una figura para transformarla a un rectángulo (Douady y Perrin-Glorian, 1989; Chamorro, 2005). Es decir, hace falta que todos tengan más experiencias como la de Leonardo, que se discutan grupalmente. La altura emerge como un objeto funcional, un medio de decisión (Brousseau, 2007) cuando los alumnos se ocupan de la superficie en el marco geométrico. Aplicar la fórmula para obtener directamente un número, pasando apenas brevemente por el marco geométrico, hace que se pierda de vista precisamente eso que la fórmula mide: la superficie. Se tiene entonces una técnica, pero no es claro para qué es. Es decir, ese número que resulta, el área, no es portador de la cantidad de superficie de la figura. En pocas palabras, detrás de la «fórmula del área del triángulo» hay una idea compleja de área.

Suponer que la maestra podría ayudar a dar este enorme paso a los alumnos con una interacción cara a cara en una clase es demasiado pedir. Por más que la manera en que ella logra que Valeria identifique la altura en este problema me parezca milagrosa (es como si alguien consiguiera de pronto ver el flujo eléctrico, no a partir de estudiarlo más que antes en un laboratorio, o desde otra perspectiva, sino de que alguien más le demande verlo), creo que es una salida momentánea a las dificultades de esa interacción específica, pero que no permite resolver a más largo plazo ni incluir a las otras alumnas. Es decir, creo que la reacción en la inmediatez, la capacidad de improvisar que destaca Erickson (1982), y que en otros episodios se revela como un componente fundamental del funcionamiento de la clase, esta vez permite a la maestra salvar momentáneamente el asunto de la altura a través de Valeria, pero es una solución muy fugaz. Los alumnos necesitan más experiencias, más tiempo para aprender a reconocer la altura, como las transformaciones que describo en el primer capítulo.

La maestra parece tener una idea clara de la altura[70], anticipa que puede ser problemática para los alumnos, señala sin rodeos que hay un error, aporta una definición de altura -sin percibir que le hace falta una condición que la distingue de los lados-y trata de que las alumnas la identifiquen. A pesar de todos estos recursos, me parece imprescindible que ella pueda tener otras condiciones institucionales de enseñanza que, de entrada, le permitan acceder a una serie de problemas que hagan emerger la altura como un recurso de resolución, reconocer su valor en los procesos de aprendizaje de los alumnos, y darse el tiempo para llevarlos a la práctica. Delegar, en casos como este, la posibilidad de resolver una serie de limitaciones institucionales a la capacidad de improvisación de la maestra, es una apuesta desafortunada que además implica una exigencia desmedida hacia la docente.

En suma, en las distintas clases, el papel de las alturas, diagonales, radios y apotemas oscila entre algo que podría utilizarse al resolver problemas, pero no se usa; algo que sí se pone en juego implícitamente al resolver con procedimientos propios; algo de lo que habla la maestra, a veces en medio de una explicación más amplia, sin reparar demasiado en ellas, otras veces precisamente para hacer visible ese segmento a los alumnos; o finalmente, algo que está implicado de manera explícita en las fórmulas, de manera que ponerlas en marcha supone esos segmentos ya conocidos para los alumnos, lo cual no necesariamente sucede.

La superficie como magnitud bidimensional

Hay otra manera en que la longitud se mezcla con la superficie. Ian, para saber el área de un romboide (ver imagen 217, sin los números), cuenta los cuadritos uno por uno, recorriendo las hileras de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Cada vez que llega al último cuadrito completo de una hilera, se encuentra con un trozo que une con el primer trozo de la siguiente hilera, argumentando que ambos forman un cuadrito completo. Unos minutos después intenta resolver el mismo problema con la fórmula. Para ello cuenta solo los cuadritos de la primera hilera, en voz alta hasta diez, y se detiene en el último trozo de cuadro sin decir “once” (Imagen 217).

[70] Lo cual no es menor, la altura a veces también es difícil de identificar para los propios maestros (Elsie Rockwell, conversación personal).

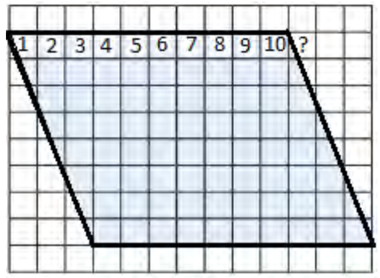


Imagen 217

Cuenta varias veces esa hilera, hasta que le dice a su compañero que el área es 88 (la altura es de 8 lados de cuadrito):

1. *Ian: ocho por once ochenta y ocho (…) yo conté, entre la ALTURA [recorre con el lápiz toda la altura del romboide] y esto [recorre el lado horizontal superior] pero como este [señala el trozo de cuadrito que tiene signo de interrogación en la imagen 90] no estaba completo, lo junté con el otro de acá abajo [señala el primer trozo de cuadrito de la segunda hilera], pero con CUADRITOS, así que fueron, ONCE, y entonces, por la altura que son OCHO (…)*
   (…)
2. *Cristofer: (…) ¿ochenta y ocho? ¿pero por qué ochenta y ocho? (…) ¿qué no sería diez por ocho? ¿ochenta?*
3. *Ian: mira, mira, mira, mira (…) entre este [señala el trozo de cuadrito al final de la primera hilera], queda partido por la mitad (…) lo cuento*
4. *Cristofer interrumpe para contar los cuadritos de la altura*
5. *Ian: no mira, no mira, si cuento, entre esto (…) [señala el último trozo de cuadrito de la primera hilera, marcado con signo de interrogación en la imagen 217] y si lo junto (con el primero de la segunda hilera) fueron once porque, aquí ya nada más son diez [cuenta los cuadros de la primera hilera] mira, aquí, ya [señala el último trozo de la primera hilera y el primero de la segunda hilera]*
6. *Cristofer: [mientras Ian explica, él termina de contar los cuadros de la altura y después cuenta los de un lado horizontal] ochenta… diez por ocho ochenta*
   (…)
7. *Ian: [vuelve a contar los cuadros de la primera hilera, como muestra la imagen 217, señala cada cuadro mientras cuenta con el lápiz] uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, entre, [hace una marca en el último trozo de la primera hilera y en el primero de la segunda hilera] once*

8. *Cristofer: [interrumpe] no, pero este ya nooo se cuenta [señala el último trozo de cuadrito de la primera hilera] porque este cachito ya no, ya no se cuenta esto [señala todo el lado inclinado derecho del romboide], esto ya ignóralo, solo esto, este cacho sí [señala todo el lado inclinado izquierdo del romboide], esto ya no [vuelve a señalar el lado inclinado derecho], entonces sería ochenta*
9. *Ian: ¡qué raaaaro! ¡wow!*

   (…)

La fórmula implica dos medidas lineales, la base y la altura. El paso del conteo cuadro por cuadro al uso de la fórmula implica dejar de contar unidades cuadradas para contar unidades de longitud. Y esas unidades de longitud están dentro de las de superficie. Ian tiene que contar los cuadritos de la primera hilera, como hacía antes, pero ya no fijándose en cada cuadro completo sino en uno de los lados. Abandonar la superficie y fijarse en la longitud, para poder cuantificar la superficie. Ian hace algo distinto. Al medir la base y la altura para multiplicarlas, arrastra lo que le pasaba contando cuadros: ¿qué hacer con el último y primer trozos de cada hilera? Así, conserva un pie en cada magnitud. Al contar longitudes, se preocupa por las superficies en las que están inmersas esas longitudes. Y le sorprende que su compañero le haga saber que esas superficies ya no importan (línea 9).

Vergnaud, et al (1983) encuentran algo similar en un estudio sobre volumen. Muchos alumnos, al contar el número de cubos que caben en cada una de las tres dimensiones de un prisma rectangular -largo, ancho, altura-, para después multiplicarlas y obtener su volumen, cuentan los cubos por ejemplo del largo, y después descuentan un cubo al ancho y la altura, “porque no se puede contar dos veces el cubo de la esquina” (p. 99). Ellos interpretan esto como una “contradicción esencial entre la concepción unidimensional y la concepción tridimensional del volumen” (p.98). En la primera se cuentan los cubos uno por uno, de la misma manera que se cuentan las tiras unidad que caben en una longitud. Aquí la manera de obtener el volumen no se distingue mucho de cualquier otra magnitud como la longitud o el peso. En este caso, efectivamente un mismo cubo no se cuenta dos veces. En cambio, en la concepción tridimensional, el volumen es el producto de tres medidas de longitud. De hecho, dos de esas tres medidas no representan medidas sino escalares: se trata del número de veces que cabe una hilera en una capa, y una capa en todo el prisma. Los autores afirman que este tránsito implica un obstáculo epistemológico inevitable, que los alumnos deben encontrar y superar. Me parece que la insistencia de Ian en considerar la superficie de los trozos cuando está contando longitudes deja ver también la coexistencia de la superficie vista como magnitud unidimensional y como bidimensional.

El paso de *un* rombo a *el* rombo

Otro asunto vinculado a la producción y uso de fórmulas es que hay alumnos que se ocupan del área de una figura específica, no de un tipo de figuras, por eso no les hace mucho sentido el asunto de plantear una fórmula. Irving -un alumno con rezago-, en la clase 6, encuentra el área de tres rombos inscritos en un rectángulo. Después aborda una lección en la que se pregunta “¿Qué relación hay entre el área del rombo y la del rectángulo?” Él responde refiriéndose al primero de los tres rombos, un rombo particular, no el genérico: “que cortábamos en cuatro el rombo y pegábamos los pedazos y nos daba 30 u^2” (Imagen 218).

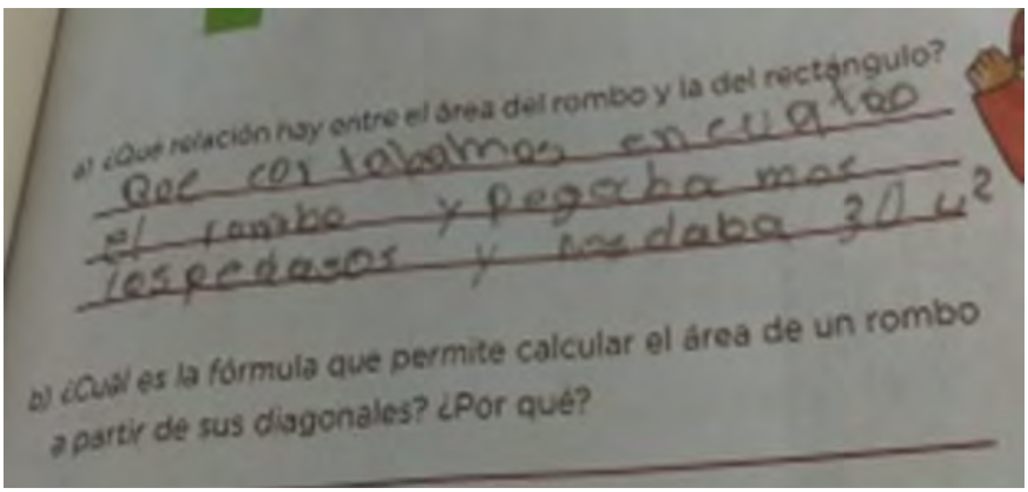


Imagen 218

Ese tipo de preguntas sobre la relación entre dos objetos matemáticos, frecuente en los libros de texto oficiales, es difícil de contestar para quien, como los alumnos, no saben todavía la respuesta. ¿A qué repertorio pueden acudir para elegir? ¿La relación es que el rombo es más chico, que uno tiene forma un poco más “aplastada” que el otro, que los dos son figuras geométricas, o alguna otra?

Irving no responde la segunda pregunta, que pide la fórmula. Al parecer la intención de la lección es que, viendo un rombo inscrito en un rectángulo, los alumnos infieran que el área del primero es la mitad del segundo, generalicen esta relación a cualquier rombo y la traduzcan a una fórmula. Esta pretensión pasa por alto, entre otras cosas, una generalización que no es fácil de construir: el paso de *un* rombo a *el* rombo. La lección parece dar por sentado que los alumnos interactúan con un rombo simbólico, en el que no importan las medidas, cuando en realidad los alumnos tratan con un rombo concreto, con medidas lineales y de área específicas. El tránsito de uno a otro no es fácil para los alumnos, con dificultades o no, como mostré que sucede con Luis, el alumno experto.

Sadovsky (2003) y Cambriglia (2018), muestran que el paso de un caso particular a uno general tampoco es menor cuando los alumnos transitan procesos que se inscriben en el tránsito de la aritmética hacia el álgebra: cuando los alumnos hacen ciertos cálculos, dan argumentos, se refieren al caso específico con el que están tratando, no lo ven como un ejemplo de un asunto más genérico. Aquello que para la maestra es una particularidad incluso accidental, accesoria, que permite sospechar una propiedad aplicable en toda una clase de problemas, para los alumnos es el asunto completo a tratar. El paso de un rombo particular al rombo conceptual parece ser entonces uno entre muchos procesos de generalización posibles, que se imbrican con la transición de la matemática elemental hacia el álgebra. Cambriglia (2018) muestra ejemplos en los que esa transición hacia la generalidad puede empezar a gestarse cuando los alumnos reconocen varios problemas como similares, intuyen que algunas acciones son reproducibles en muchas tareas. Esto les permite, poco a poco, "descentrarse de la particularidad" (p. 135). Es decir, los alumnos necesitan, al menos, calcular el área de varios rombos, no de uno solo, para poder hacer la generalización que supone la fórmula.

El uso de la regla, la imprecisión de las medidas

El uso de la fórmula cuando el problema no da medidas hipotéticas, es decir, cuando se mantiene todavía cierto vínculo entre la figura y los cálculos, también requiere saber usar la regla. En el fragmento en el que analizo el papel de la altura en una interacción entre Miranda, Mía y Valeria, se ve que aparece el asunto de la imprecisión de las medidas.

En otra clase, Miranda tiene un escalímetro, es decir, una regla triangular graduada en centímetros, en pulgadas y con escalas. Ella se desconcierta porque su resultado en pulgadas es muy distinto al de sus compañeros. Esa regla hace más difícil la medición: se necesita elegir la graduación en centímetros. Brousseau (2000b) destaca el papel de los instrumentos en el estudio de la medición. Este ejemplo deja ver la importancia de la adecuación de esos instrumentos a la necesidad de quien los usa: la regla que tiene Miranda es más complicada que la ella requiere, y le genera confusión[71].

Bessot y Eberhard (1983) explican que la regla condensa muchos conocimientos sobre longitudes. Saber que se empieza a medir desde el cero y no desde el uno, que la orilla se alinea con la longitud a medir, que el número que coincide con el otro extremo de la longitud reporta la cantidad de veces que cabe una tira de un centímetro de largo en esa longitud, es el resultado de numerosas experiencias de medición con un patrón que después se vinculan con la graduación de una sola tira. Yo no encontré evidencia de todo esto en las clases, porque los alumnos pocas veces miden longitudes. Calculan áreas con fórmulas que relacionan medidas de longitud, pero dichas medidas generalmente ya están dadas. En las lecciones del libro de texto oficial que resolvieron, las figuras aparecen en cuadrículas, entonces no requieren uso de regla sino conteo de cuadros. En las lecciones del libro Gader, los problemas siempre tienen figuras con las medidas ya dadas, la mayoría de las veces en metros. La maestra es la única que diseña una actividad que requiere tomar medidas de unos prismas construidos por ellos en cartulina.

Así, el estudio de las fórmulas implica una discontinuidad en el de las longitudes, al pasar directamente del conteo de unidades a las medidas ya representadas, evitando la medición directa con la regla. Esta tendencia a evadir las mediciones efectivas es frecuente en la escuela (Brousseau, 2001), y tiene una implicación respecto al asunto de la altura del que hablé anteriormente: los problemas en los que ya están dadas las medidas, tienen que dar también la medida de la altura y por lo tanto representarla.

La adivinación a ciegas

Los ejemplos anteriores muestran algunos de los muchos conocimientos que condensan las fórmulas y que los alumnos aún tienen por construir. No es de extrañar que, frente a preguntas como "¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de un rombo a partir de sus diagonales? ¿Por qué?" (Imagen 219) que delegan al alumno todo el trabajo de

---

[71] En Solares (2012) hay otro ejemplo de cómo la interacción con las magnitudes está mediada por los instrumentos de medición: algunos trabajadores agrícolas migrantes, al no tener acceso a una báscula electrónica para pesar las uvas cuando las están recolectando, transforman la necesidad controlar el peso de las uvas empacadas en un problema de conteo. Regulan la cantidad de bolsas por caja y de racimos por bolsa, y estiman por volumen el tamaño de cada racimo. Derivan entonces el peso a la cardinalidad y el volumen. Al llegar con el empacador, este define con una báscula si el peso está dentro del margen estándar o no, en cuyo caso el trabajador tendrá que agregarle o quitarle uvas, lo cual significa una mayor inversión de tiempo de trabajo que no se traduce en un mayor pago. Por eso es importante para los trabajadores contar con técnicas eficientes de estimación del peso de las cajas de uvas.

inferir y justificar una fórmula, ellos inventen una. Nahomi responde “área por perímetro porque se multiplica área por perímetro”. Quiero destacar, otra vez, que todo el equipo de Nahomi da esa misma respuesta, es decir, la tarea es inaccesible para todos.

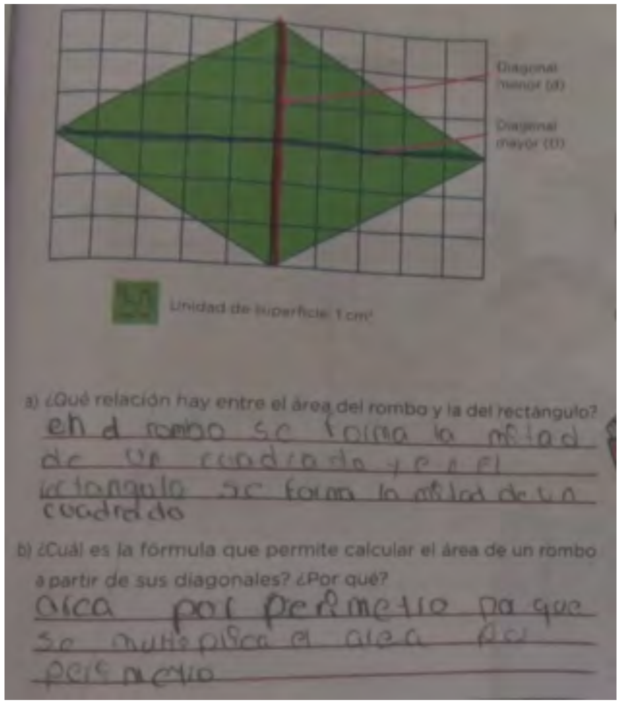


Imagen 219

Al utilizar las fórmulas también encontré muchos ejemplos en los que los alumnos involucran, como pueden, algunas de las medidas y las operan, un poco al azar (*wildguesswork,* McDermott, 2001).

Tampoco es de extrañar el silencio de los alumnos con dificultades cuando se establecen las fórmulas a nivel grupal en la clase. Solo encontré dos ocasiones en las que estos alumnos intervienen: una vez Irving, designado por la maestra, y la otra Daniela. Ella, atenta a la interacción que se da fundamentalmente entre Luis y la maestra, a propósito de cómo calcular el área de un polígono regular –describo este episodio en el primer apartado, al hablar de la actividad de Luis- se levanta de la silla y, parada en su lugar, hace señas con el dedo, como previendo de qué manera descomponer el pentágono que la maestra ha dibujado en el pizarrón en otras figuras cuya área ya saben calcular. Al interior de los equipos, a veces pasa que un alumno se mantiene ajeno a las discusiones entre otros respecto a la producción o uso de fórmulas. En la imagen 220 se ve a Miranda –una alumna con rezago- sentada, tomando notas a las que no puedo acceder, pero al parecer copia lo que está en el pizarrón, mientras

Valeria y María Fernanda hablan de cómo obtener el perímetro y área de la base de un prisma, y Mía las observa.

Aunque Mía y Miranda no hablan, la participación de ambas es distinta. Miranda está sentada, concentrada en sus notas, no parece reaccionar a lo que ocurre entre sus tres compañeras: voltea varias veces al pizarrón, y los momentos en los que escribe son distintos de los momentos en los que sus compañeras escriben o acuerdan algo. Mía está levantada, observa lo que hacen y dicen Valeria y María Fernanda, anota y hace las cuentas que ellas dos plantean.

Imagen 220

4.4 Conclusiones del capítulo

Detrás de la fórmula del área del triángulo -o de cualquier otra figura- hay una serie de conocimientos relativos a las nociones de fórmula, área y figuras geométricas que los alumnos tienen todavía por construir.

Pensar en la fórmula del área para un triángulo exige pensar en todos los triángulos posibles, y no solo el que se tiene enfrente. Esto implica dejar de poner a un triángulo en la misma categoría que a un pentágono que casi ocupa el mismo lugar en la mesa y reunirlo con otros triángulos, aunque sean muy distintos. Poner en el mismo saco, por ejemplo, a un triángulo equilátero pequeño y uno mucho más grande con lados y ángulos desiguales. Esto es dar un paso en el tránsito de ver a la figura como bidimensional a unidimensional (Duval y Godin, 2005), porque se caracteriza por el número de lados. En suma, se requiere construir la noción de triángulo. Eso implica conocer las propiedades que reúnen a distintas figuras en una sola etiqueta, por ejemplo, saber que el romboide es una figura con dos pares de lados paralelos, no una figura que tiene dos lados horizontales y otros dos inclinados. Finalmente se necesita dar un paso más hacia la unidimensionalidad (en el sentido de Duval y Godin): dejar de centrarse en los segmentos que se ven -los lados- y poner de relieve algunos que no se ven -la altura, las diagonales, la apotema. Una acción aparentemente simple como cortar un romboide por su altura para transformarlo a rectángulo está vinculada con todo eso.

En cuanto a las maneras de determinar el área, las fórmulas son los procedimientos más generales. La idea de que el área del triángulo es la mitad del área de un rectángulo con la misma base y altura resume una diversidad de maneras de construir ese rectángulo para triángulos muy distintos. Ya no es necesario averiguar por dónde hacer cortes y reacomodos en un triángulo cuyos lados tienen medidas muy distintas, o en uno cuya altura queda afuera. Solo hace falta tomar dos medidas, base y altura, y calcular con ellas. Pero los alumnos necesitan construir una idea de superficie que permita regular lo que hacen con las fórmulas, entender qué cosa cuantifica el número que obtienen. El sentido de la fórmula está dado precisamente por los caminos largos que ahorra, por ejemplo, porque antes se ha pasado por las transformaciones de figuras a un rectángulo equivalente en área. Esas transformaciones están, en esta experiencia, vinculadas a las dificultades del uso de cuadrículas, las preguntas de qué hacer con los trozos de cuadritos. El cambio de estrategia es drástico, pero útil. Una de las cosas que suceden en ese tránsito es el paso del conteo uno a uno al uso de la multiplicación para encontrar el área de un rectángulo, que supone otra vez un cambio de dimensión (Perrin-Glorian, 1999).

Tanto en las actividades en las que se cuentan unidades como en las del tangram, para dar la consigna se necesita hablar de la superficie, así que se requiere conocerla en cierta medida. Las unidades son intermediarios que permiten comparar figuras cuando estas no pueden superponerse ni recortarse. Esto supone ya una familiaridad con la noción de superficie, que sea una propiedad visible y relevante para los alumnos. En resumen, las fórmulas son la cúspide de un largo proceso de estudio de la superficie, aun si no se pretende que los alumnos las produzcan por sí mismos, sino simplemente que las utilicen.

Finalmente, una fórmula es un procedimiento genérico, que permite resolver todo un tipo de problemas, no uno específico. En un fragmento mostré una larga negociación entre la maestra y los alumnos respecto al área de un pentágono. Cuando ella propone esa figura, apunta a calcular el área de todos los polígonos regulares, mientras los alumnos están interesados exclusivamente en un polígono trazado en el pizarrón. Por eso los procedimientos que ellos proponen difieren tanto del que la maestra espera.

¿Bajo qué condiciones se podría promover desde el desarrollo curricular un trabajo de búsqueda de una manera de resolver que vaya mucho más allá del problema que se tiene en el momento, verlo como un caso particular?

La puesta en marcha de una fórmula implica, además, hacer funcionar otros conocimientos de medición, como utilizar una regla graduada, y de aritmética, como las tablas de multiplicar (para buscar cuál podría ser el ancho y largo de un rectángulo de área dada), el algoritmo de la multiplicación o bien el uso de una calculadora. Adentrarse en las fórmulas es apostar a que los alumnos ya han tenido acercamientos importantes a esos conocimientos en grados anteriores y podrán aplicarlos ahora. Por ejemplo, se asume un amplio trabajo sobre la longitud que se condensa en la regla (Bessot y Eberhard, 1983).

En resumen, las fórmulas sintetizan, culminan, operacionalizan una serie de conocimientos estudiados a lo largo del preescolar y primaria respecto al número, la longitud, la superficie, el espacio y la geometría. Además, suponen un trabajo de generalización que se inscribe en la transición hacia al álgebra. Dicho de otra manera, incluir las fórmulas para calcular áreas en el programa de estudios de primaria, y pretender que los alumnos sepan utilizarlas e interpretar el resultado que obtienen, requiere pensar la educación básica como un solo proceso de estudio de problemáticas amplias, en el que los conocimientos se van articulando y revisitando, tarea nada fácil de lograr. Por ejemplo, Moreira Baltar (1996-1997) muestra que las evaluaciones nacionales en Francia revelan la enorme dificultad de los reactivos de áreas para estudiantes de primaria y secundaria[72].

En los programas de estudio vigentes cuando hice el trabajo de campo se percibe en cierta medida la consideración de un proceso largo de estudio, por ejemplo, al contemplar el trabajo con unidades de superficie en cuarto grado y las fórmulas de áreas en quinto (SEP, 2011b, 2011c). Pero están ausentes la comparación directa de superficies y las transformaciones de figuras en un rectángulo de la misma superficie. En cambio, hay dos contenidos en los que se estipula la “construcción y uso de una fórmula para calcular el área” de rombo y romboide en un bimestre, del triángulo y trapecio en otro. Es decir, están las fórmulas, pero no están los procedimientos que les dan origen ni la cualidad física que miden.

[72] En particular, dos terceras partes de los alumnos de quinto grado, no consiguen “evaluar el área de un triángulo a partir de la de un rectángulo” (p. 57).

Se trata de un fenómeno de *transposición didáctica*: cuando un proceso de estudio se prescribe en un texto -los programas-, muchas veces ocurre que los contenidos se separan de los problemas que les dan origen, con lo que se pierde su "razón de ser". Esto aunado a la necesidad de pautar los tiempos de aprendizaje produce una atomización de contenidos: se separan contenidos que los problemas juntarían, y en cambio se estipulan contenidos muy pequeños pensando en que sean estudiables en un ciclo, un año escolar, un bimestre (Chevallard, 1997). Esa atomización lleva a diseñar en los libros problemas muy restringidos, que pongan en juego solamente esos contenidos muy recortados, hasta llegar incluso a uno por lección. Los dos contenidos de fórmulas que menciono en el párrafo anterior para quinto grado se concretan en ocho lecciones: dos para identificar las alturas de un triángulo, tres para la fórmula de área del triángulo, una para la del romboide, una para la del rombo, una para la del trapecio. En ellas se pretende derivar una fórmula a partir de encontrar el área de una sola figura, o incluso de ninguna, simplemente observando la figura (SEP, 2014).

En resumen, lo que desde la lógica de la problemática que da origen a un contenido sería un largo proceso de estudio, se transforma en un cúmulo de contenidos instantáneos, de conocimientos del día, aprendizajes del día, que parecen independientes unos de otros. Contenidos que se estudian de una vez y para siempre, a los que no se regresa cuando pueden ser vistos desde otro ángulo, como el uso de unidades visto en cuarto grado, que no es retomado en quinto como una posible fuente de transformaciones que llevan a las fórmulas. A los pequeños átomos que se ven en las lecciones de los libros oficiales, otros fenómenos agregan más: la maestra decide enseñar también las fórmulas de área de polígonos regulares y del círculo porque están incluidas en el libro de editorial particular que más utiliza (Rincón y Rincón, 2014) -en parte porque le permite liberarse de tiempo para atender al alumno con Síndrome Down mientras el grupo trabaja de manera autónoma- y en la Olimpiada del Conocimiento.

Aun con ese escenario, la maestra tiene márgenes para tomar decisiones permanentemente. Aplica una actividad de conteo de unidades que encuentra en internet porque percibe que a los alumnos "todavía no les queda qué son las unidades cuadradas", descarta una lección porque anticipa que va a generar más confusión que aprendizajes, hace una explicación muy detallada sobre cómo reproducir un romboide cuando ve que varios no perciben sus errores, anticipa que la altura es difícil de ver, permite que los alumnos se tomen el tiempo que necesitan para resolver una tarea aunque no hagan las siguientes. También se pasa todo un recreo relatándome su sorpresa cuando Sebastián seguía diciendo que una plantilla era más grande que otra después de haber cubierto las dos con las mismas piezas, y del desconcierto de no saber qué hacer en las siguientes clases frente a esa respuesta. Ella busca siempre más problemas, más libros, más páginas de internet: prepara sus clases, más allá de la propuesta del libro distribuido. Observa constantemente a sus alumnos, y termina por extender a quince clases las ocho lecciones del libro oficial dedicadas a las fórmulas. Pero no puede resolver sola un problema gestado en un espacio y tiempo mucho mayores a los suyos. Constantemente se ve en una encrucijada, dividida entre la necesidad de seguir a sus alumnos y la de enseñar lo que se siente responsable de enseñar. Queda pendiente para mí la tarea de comprender más a fondo cómo se entretejen el contexto en el que ella tiene que hacer su trabajo, las necesidades que identifica en sus alumnos, y sus propios intereses cuando enseña las fórmulas.

Las condiciones de enseñanza para la maestra son también condiciones de aprendizaje para los alumnos. Ellos, incluyendo los alumnos con dificultades, ponen en juego una diversidad de procedimientos que tienen que ver con el conteo de unidades, las transformaciones y el uso de fórmulas. Pero lo que producen generalmente se queda en ese equipo y en esa clase, es decir, perdura poco. Los alumnos se quedan con muchas preguntas en el aire, procedimientos incipientes por fortalecer, vínculos entre estrategias por establecer. La mayor jerarquía de las fórmulas hace que las otras maneras de resolver tengan poco espacio en la actividad de los alumnos. Mientras unos logran sortear esas tareas de distintas maneras que van desde tener una calculadora hasta entender lo que explica la maestra o saber usar la fórmula como receta, otros van quedando fuera de la actividad matemática.

Quiero dejar claro que ninguna de las “dificultades” que encontré en las resoluciones de los niños “con dificultades” es exclusiva de ellos. En todos los casos se trata de conocimientos que a todo el grupo le vendría bien revisitar, de preguntas que a todos les serviría explorar. Me parece, resumiendo, que los fenómenos vinculados a la transposición didáctica que explico unos párrafos antes, al derivar en atomización de contenidos, y al privilegiar conocimientos convencionales y generales como las fórmulas sobre otros más bien implícitos y locales como la noción de superficie, son algunos de los factores que producen exclusión de la actividad matemática.

En las conclusiones de los dos capítulos anteriores explico que, a pesar de varios intentos, no pude describir ni interpretar las interacciones de los alumnos con las tareas sin dar cuenta de las interacciones con sus pares, y viceversa: ambas están muy engarzadas. En este capítulo entendí, además, que no podía comprender ese tejido sin incorporar otros fenómenos que se ven en el aula, pero se gestan más allá de sus paredes. Programas, libros de texto, ofertas educativas de particulares, comercialización y acceso a materiales didácticos, políticas de inclusión educativa, relaciones entre las matemáticas escolares y las de los matemáticos, formación de maestros, tamaño de los grupos de alumnos, todos esos procesos se imbrican con las interacciones inmediatas que ocurren en el aula, y de ese tinglado depende que los niños puedan decir, convencidos: “el área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo”.

CAPÍTULO 5

DEL HIPOTÁLAMO A LA APOTEMA, DE LA ALTURA A LA ESTATURA: EL USO DE VOCABULARIO EN CLASE

Al observar clases me encontré con algo que no iba buscando. La manera de nombrar objetos matemáticos y de usar esos nombres se hace presente en casi todas las clases, tiene múltiples aristas, y también ahí se puede ver una tensión entre los conocimientos puestos en juego por parte de los alumnos y los contenidos curriculares que se espera que aprendan. Mostraré en este capítulo la diversidad de formas en que el uso de vocabulario se inserta en la actividad matemática de la maestra y los alumnos. Analizo cómo se complementan, contraponen, entretejen por un lado los términos que llamo "convencionales" o "formales", aquellos que aparecen en los libros de texto y se espera que los alumnos incorporen paulatinamente a su vocabulario, y por otro lado los "no convencionales", "informales", "personales", que los alumnos utilizan espontáneamente.

5.1 Nombrar para actuar

Comienzo por mostrar el papel de los nombres cuando los alumnos resuelven problemas como acomodar piezas del tangram o comparar figuras trazadas en un geoplano. En estas situaciones aparecen más términos informales que en la puesta en común, el registro por escrito y el uso de fórmulas.

A veces los alumnos hacen referencia a ciertos objetos, pero no necesitan nombrarlos. Un ejemplo es el siguiente, en el que Alexa y Juan David intentan mostrarle a la maestra cómo se puede rellenar una plantilla con seis piezas del tangram de manera que sobre el cuadrado (Imagen 221):

Imagen 221

Juan David: este va acá [pone el romboide, pero no embona]

Alexa: no

Juan David: no, este iba así [refleja el romboide], este va aquí [coloca un triángulo grande], ese ahí... [a Alexa] pérate, pérate... este va aquí [acomoda el triángulo mediano], este aquí [pone un triángulo pequeño], y este aquí [acomoda el otro triángulo pequeño, y queda toda la figura rellena]

Al poner las piezas, Juan David las designa con las palabras “este” o “ese”. Cuando la maestra les pregunta cómo se llaman, ambos alumnos responden correctamente: “el romboide y el cuadrado y el triángulo chico”. Es decir, saben los nombres convencionales -lo cual no es cualquier cosa, muchos no conocen el término “romboide”-, pero no los usan porque no hace falta si las piezas están a la vista y al alcance de la mano.

Más adelante, ambos dicen “uno chiquito” para hablar del triángulo pequeño. No hace falta aclarar de qué figura se trata: el triángulo es la única cuyo tamaño varía en el tangram, además los triángulos pequeños son las piezas más chicas de todas las que hay. También dicen que dos plantillas “son iguales”, “son lo mismo, no tienen ni mayor ni menor” para responder a la pregunta de si tienen la misma superficie. Alexa y Juan David no necesitan las palabras “triángulo” o “superficie”, al resolver juntos van construyendo un piso común de diálogo, como nos ocurre a todos con mucha frecuencia al hablar. Como explica Goodwin (2014), cuando hay un conocimiento compartido de la situación, no es necesario decirlo todo. Aquí hay un marco de acción que hace que adjetivos como “chiquito” sean suficientes para darse a entender. Por supuesto, que puedan entenderse no quiere decir que para ellos “triángulo” o “superficie” sean la misma cosa. Puede ser que Alexa esté pensando en la superficie como característica física, la extensión de las plantillas; que Juan David esté pensando en que ambas se cubren con la misma cantidad de piezas; y de todas maneras ambos coincidan en que ninguna tiene más o menos superficie. Eso siempre ocurre: poder hablar de algo no quiere decir que se entienda igual. Romo y Hache (2019) muestran que la práctica de omitir nombres o símbolos que consideran compartidos ocurre también entre matemáticos, en textos publicados. Por ejemplo, omiten frecuentemente el cuantificador universal “para todo”. Científicos y alumnos de primaria se rigen por un mismo principio, la economía del lenguaje. Y esto me lleva a poner en cuestión la frecuente recomendación en materiales curriculares de introducir paulatinamente el lenguaje convencional sin explicar en qué casos puede ser útil: en este ejemplo de Alexa y Juan David, demandar el uso de esos términos más bien parece que metería un pie en una interacción y secuencia fluida de acciones.

La maestra permite que los alumnos usen sus propias maneras de nombrar figuras o sus características. Sobre la marcha, utiliza el vocabulario formal y a veces demanda que los alumnos también lo hagan. Los alumnos tratan de atender esa expectativa. Bárbara responde a Danna “unidades cuadradas” cuando ella pregunta “¿con qué (se mide)?”, Luis contesta a la maestra, en tono de pregunta, que “apotema” es el nombre de la altura de cada triángulo de un polígono regular. A veces dudan o no recuerdan la palabra completa, como Luis, quien sabe que el término correspondiente a el “cachito del radio que no se toma en cuenta en la apotema” es parecido a “sa… sa… sa…”, hasta que un compañero dice “sagito”. Otras veces olvidan el término que se les pide. También sustituyen un nombre convencional por otro, sin generar confusión, porque el contexto de la actividad permite entender de qué se habla, como explico más adelante.

En el siguiente episodio se puede ver la insistencia de la maestra en el uso del término “unidades cuadradas”, sin dejar de poner en primer plano su significado y relevancia en la actividad. Los alumnos resuelven el problema de la imagen 222. Para ello tienen la hoja impresa, un geoplano y ligas de colores.

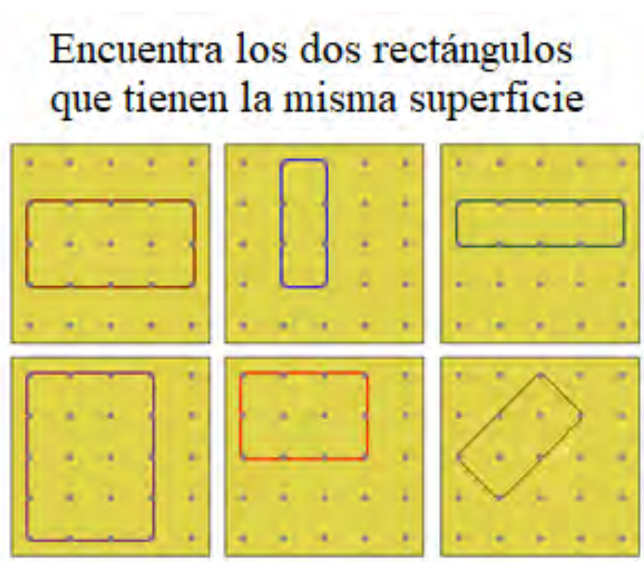


Imagen 222

Al leer la consigna, la maestra recuerda que superficie es “lo que está adentro”. Luego va pasando por distintas mesas para ver cómo resuelven los alumnos. En el primer equipo, percibe que no comprenden la consigna. Ella les pide que formen en el geoplano las mismas figuras que están en la hoja blanca, y encuentren cuáles tienen la misma superficie. Les pregunta cuál es la superficie. Ante el silencio de ellos, hace una pausa para dirigirse al grupo:

1. *Maestra [al grupo]: ¿qué se utiliza para calcular la superficie?*
2. *Alumno: ¡cuadritos!*
   (…)
3. *Maestra: ¿y cómo se le llama a esos cuadritos?*
4. *Alumnos: ¡cuadrículas!, unidades*
5. *Maestra: unidades ¿qué?*
6. *Alumnos: ¡de medida!*
   (…)
7. *Maestra [vuelve a dirigirse al equipo]: ¿cuáles son las figuras que tienen LA MISMA superficie?... o sea si es la misma superficie tienen que tener ¿qué?*
8. *Alumnos: la misma cantidad (…) de unidades de medida*
   [el resto de la conversación es inaudible]

Después sigue pasando por las mesas. Varias veces encuentra que los alumnos han contado los “puntitos”, es decir, los pines del geoplano contenidos en el rectángulo (en el capítulo anterior analizo este procedimiento puesto en juego por Miranda). La maestra aclara: “los puntitos no son unidades de medida (…) no me están pidiendo cuántos puntos, sino (…) cuántas unidades cuadradas hay dentro de la figura”. A Valeria le pide que marque los cuadritos en la hoja: “¿cómo pondrías aquí estos cuadritos? Porque ahí solo se ven puntos (…) para que los puedas ver”.

En la consigna hay un término que no es claro para los alumnos y es central en la actividad: superficie. La maestra provee al inicio una definición que evoca la cualidad física y además no adelanta cómo resolver: superficie es lo que está adentro. Pero esa idea es nubilosa, difícil de asir. Saber que hay que encontrar dos rectángulos que tengan lo mismo adentro no ayuda a mucho a entender el problema. Frente al silencio del primer equipo, la maestra se dirige al grupo entero, y esta vez no pregunta cuál es la superficie, sino qué se usa para calcularla (línea 1). Es decir, evoca la medida para tratar de aclarar qué es la magnitud. En las líneas 7 y 8, otra vez se asocia la magnitud superficie a la cantidad de unidades. Las dos veces, la maestra apela a una expresión de la superficie que le da concreción, que ayuda a poner en marcha un procedimiento. Tener la misma superficie ya no es tener lo mismo adentro, sino la misma cantidad de cuadritos. Douady y Perrin-Glorian (1983) eligen un camino similar en ese aspecto. En su secuencia didáctica, muy pronto introducen situaciones de conteo de unidades para dar un significado práctico, asequible, a la noción de superficie, y luego regresan a situaciones de comparación directa de superficies.

Al establecer una identidad entre superficie y número de unidades, la maestra apunta a un término convencional preciso. No se conforma con "cuadritos", "cuadrículas" o "unidades" (líneas 2-8). Más adelante mostraré que "unidades de medida" tampoco es suficiente, que ella demanda el uso del nombre "unidades cuadradas". Al pasar por las otras mesas, la maestra identifica que los alumnos cuentan "puntitos", no unidades. Las unidades están un poco escondidas, no se ven en el geoplano, a diferencia de los puntos que están muy puestos de relieve. Además, los puntos que cuentan son los que están contenidos en las figuras, es decir, ese conteo es congruente con la primera caracterización de superficie como "lo que está adentro". La maestra responde volviendo a apelar a la segunda manera de hablar de la superficie, a través de su medición con unidades: los "puntitos" no son unidades, lo que hay que contar son unidades cuadradas en el interior. Enfatiza más el conteo de unidades, incluyendo el término "unidades cuadradas".

Después la maestra se acerca a la mesa donde está Alison, quien también ha contado los vértices de cuadritos en los seis rectángulos. Nuevamente les explica que tienen que contar las unidades cuadradas para calcular la superficie, que es "todo lo que queda dentro de la figura". Toma el geoplano de Alison, quien ha representado con ligas el rectángulo y cada uno de los cuadros que abarca:

9. *Maestra: (…) unidades cuadradas, ¡aquí Alison las tienes! Ya las marcaste (…) ¿cuál sería tu superficie?*
10. *Alison señala el interior del rectángulo*
11. *Maestra: ¿y cuánto tiene?*
12. *Alison: [mueve la mano hacia el geoplano, parece que va a comenzar a contar, pero se regresa a la hoja y ve la respuesta que ya había escrito antes] quince*
13. *Maestra: ¿cuántos?*
14. *Alison: quince*
15. *Maestra: a ver, ¿QUÉ UNIDADES usamos para la superficie Alison?*

16. *Alison: ¿área y perímetro?*
17. *Maestra: no mi amor, qué unidades usamos para la superficie, ya me lo dijiste… y de hecho aquí se ve [le muestra el geoplano]... ¿qué unidades usas?*
18. *Alison guarda silencio*
19. *Maestra: aquí en el piso, que les estaba diciendo, si yo quiero saber qué superficie hay... [Recorre con la pierna una parte del piso]*
20. *Esteban [interrumpe]: cuadradas*
21. *Maestra: ¿cuáles?*
22. *Esteban: unidades cuadradas*
23. *Maestra: ¿cuáles son Alison?*
24. *Alison: unidades cuadradas*
25. *Maestra: entonces, en tu […] en este, todo, todo esto, [señala el rectángulo de 4x2 trazado con liga en el geoplano] ¿cuántas tienes?... [A Esteban] déjala a ella por favor*
26. *Alison guarda silencio*
27. *Maestra: ¿cuántas tienes Alison? Porque, a ver muéstramelas*
28. *Alison señala una por una las primeras unidades del rectángulo en el geoplano que sostiene la maestra*

    (…)
29. *Maestra: área o superficie, ¿cómo se calcula el área o superficie Alison?*
30. *Alison señala el interior del rectángulo*
31. *Maestra: ¿usando qué?*
32. *Alison: los cuadrados*
33. *Maestra: ¿unidades…? [espera que Alison complete el término]*
34. *Alison: de medida*
35. *Maestra: [niega con la cabeza] ¿unidades qué? [señala uno de los cuadros en el rectángulo del geoplano]*
36. *Alison se queda viendo el rectángulo*
37. *Maestra: ¿qué figura tiene?*
38. *Alison: un cuadrado*
39. *Maestra: entonces, ¿unidades qué?*
40. *Alison: cuadradas*
41. *Maestra: unidades cuadradas, entonces ¿qué tienes que hacer, para saber, la superficie de cada uno?, ¿qué vas a contar, o qué vas a calcular?*

42. Alison: ¿los cuadrados?

43. Maestra: los cuadrados qué ¿qué?

44. Alison: que hay dentro

45. Maestra: [afirma con la cabeza] los cuadrados que hay dentro

(…)

46. Maestra: entonces Alison nada más repíteme, ¿qué unidades vas a usar?

47. Alison: ¿unidades cuadradas?

48. Maestra: OK, muy bien Alison

La maestra se va a otra mesa. Alison cuenta correctamente la cantidad de unidades contenidas en todos los rectángulos. De hecho, usa multiplicaciones de largo por ancho.

Nuevamente, frente al conteo de vértices, la maestra enfatiza el conteo de unidades. Al parecer ella y el equipo van logrando entenderse, pero frente a la petición de una respuesta, Alison vuelve a la que ya tenía escrita, sin reparar en que proviene del error de los puntos (líneas 11-14). Eso provoca una ruptura: entre las líneas 15 y 24 hay cierto desencuentro entre Alison y la maestra. La primera, una vez que está claro que ha dado respuestas equivocadas, se mantiene precavida. La segunda reacciona frente a la repetición del error preguntando con qué unidades se mide la superficie (línea 15). Tal vez lo hace para promover que Alison consiga descartar los puntos: cada magnitud tiene sus unidades, la longitud se mide con segmentos, la capacidad con vasitos, la superficie con cuadritos, no con puntos. Tal vez trata nuevamente de dar concreción a la idea de superficie a través su medición: las unidades ayudan a "saber qué superficie hay" (línea 19). Ella no pregunta todavía cuántas unidades contiene el primer rectángulo, como lo hace después en la línea 25, sino qué unidades se usan. Es decir, no demanda todavía la cuantificación sino la identificación de aquello que hay que cuantificar. Ella sabe que eso no es fácil de ver en este problema: muy al principio, cuando está con Valeria, le pide que marque los cuadritos, porque ahí no se ven, lo que se ve son los puntos. Después trata de ilustrar las unidades con la cuadrícula marcada con ligas en el geoplano (línea 17), con los mosaicos cuadrados que pavimentan el piso (línea 19) y, cuando Alison no responde cuántas hay en el primer rectángulo (líneas 25 y 26), le pide que se las muestre (líneas 27 y 28), como si quisiera averiguar si la falta de respuesta se debe a que no se ven las unidades. La maestra vuelve dos veces más a recurrir a la medida para aprehender la magnitud (líneas 29-32 y 41). Esto ocurre ocho veces en total, en todo el episodio.

Ante la pregunta de con qué unidades se mide la superficie, la respuesta que satisface a la maestra, al menos momentáneamente, es un nombre: “unidades cuadradas” (líneas 20-25). No sigue pidiendo otros, como antes hizo con “cuadritos”, “cuadrículas”, “unidades” o “unidades de medida” (líneas 1-8). En las líneas 31-41 se puede intuir por qué la maestra insiste en ese término y no en otro: los “cuadrados” no son suficientes porque no cualquier cuadrado es unidad de medida, y “unidad de medida” tampoco alcanza porque no dice nada de su forma. Ella percibe, como he explicado en el párrafo anterior, que en el problema no son visibles ni los cuadritos ni que su conteo expresa la superficie. El nombre que elige es portador de las dos cosas. ¿Piensa que ese término puede ayudar a verlas, que el nombre habla? ¿Apuesta a que el nombre dé luz sobre el procedimiento y la manera de ejecutarlo, a que el nombre construya, haga aparecer algo que no necesariamente estaba? ¿Encuentra en esas palabras un recurso para decir lo que no se atreve a decir directamente, es decir, el procedimiento, porque se espera que los maestros dejen a los alumnos desplegar sus propias maneras de resolver? ¿o es simplemente un énfasis en la precisión del vocabulario? Por un momento admite “los cuadrados que hay dentro” -eso ya los distingue de los puntos-, pero al final se asegura de que Alison diga el nombre “unidades cuadradas” (líneas 46-48). La maestra no confirma si Alison consigue dar con el número correcto, si cuenta lo que hay que contar, sino que provea el término que espera. Ese nombre sella el intercambio, lo cierra, como si escucharlo diera tranquilidad a la maestra para irse con otro equipo. Alison, en efecto, resuelve sola correctamente.

En resumen, cuando los alumnos actúan sobre un problema que no exige dominio de términos, sean convencionales o no, se los ahorran, ya sea porque designan objetos que tienen a la mano o porque hay un entendimiento común construido durante la resolución. La maestra promueve el uso de vocabulario formal, dentro de un asunto más amplio, el del significado y la comunicación. Esos propósitos se mezclan, como en el caso de Alison, cuando a través del nombre se intenta también comunicar en cierta medida un procedimiento y una caracterización de la superficie.

5.2 Nombres que hacen analogías

Frecuentemente, los alumnos usan términos personales que les permiten hacer analogías entre ciertas características de los objetos matemáticos con los que están trabajando y otros objetos concretos, materiales. Miranda le llama “sobre” a un rectángulo que hace con tres triángulos del tangram -el mediano y dos pequeños- (Imagen 223).

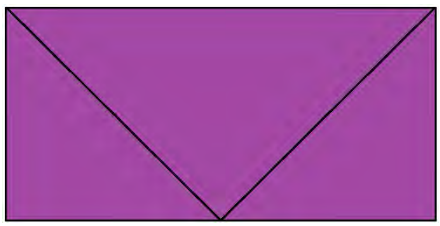


Imagen 223

Imagen 224

El arreglo de Miranda reproduce la forma rectangular de los sobres de papel para enviar cartas, y el triángulo mediano ubicado con el lado mayor arriba semeja la solapa del reverso (Imagen 224). El nombre “sobre” contiene cosas distintas de lo que contiene la palabra “rectángulo”: no da cuenta solamente del contorno, sino que incluye a la solapa, es decir, al triángulo mediano. En este sentido, ya sea que Miranda conozca o no la palabra “rectángulo”, esta sería menos adecuada para describir su configuración.

Los alumnos nombran también las piezas del tangram aludiendo a la parte que representan en la plantilla: el romboide es “la cola del gato”. Estos nombres evidentemente van cambiando: un triángulo chico es primero “el pico” del pato y luego “la oreja” del gato. Hay entonces una diferencia entre los términos convencionales y los personales portadores de analogías. Un “triángulo” es triángulo siempre, es independiente de la plantilla. La palabra “triángulo” designa únicamente a la pieza, mientras “oreja” indica su lugar y posición en una configuración específica, asocia pieza y plantilla. En el capítulo 2 explico que el borde más difícil de cubrir es el cuadrado, en parte porque no permite hacer estas analogías.

A veces las analogías se hacen a partir de términos convencionales, cambiando el objeto que designan. Los alumnos le dicen “compás” al transportador, “figura” al cuerpo, “romboide” al cuadrado. Irving anticipa que dos rectángulos son equivalentes en superficie porque “tienen la misma estatura”, es decir, bases iguales. La manera en que modifican el objeto no parece ser azarosa, al menos no siempre.

En estos ejemplos, cambian un instrumento de medición por otro, un objeto geométrico por otro, una figura por otra que también tiene cuatro lados, una medida lineal por otra. No eligen la palabra convencional exacta pero sí una que asocia cosas que están en una misma categoría. En los primeros dos casos, puede ser que los alumnos recurran a una palabra que designa un objeto más conocido para ellos que aquel con el que están trabajando. El transportador es más complejo que el compás, porque tiene ya incorporada una graduación y porque sirve para trabajar con ángulos en lugar de con longitudes (Duval y Godin, 2005). Al usar esa palabra para un objeto que conocen poco, los alumnos pueden estar enfatizando que también es un instrumento de medición. Es decir, me parece que destacan la similitud entre compás y transportador, no sus diferencias, que la palabra “compás” asociada al transportador contribuye a integrar al segundo al repertorio de instrumentos de medición. El segundo caso es similar, porque los alumnos también han tenido más experiencias con las figuras que con los cuerpos geométricos.

El tercer ejemplo puede tener que ver con la percepción de las figuras. El cuadrado no está dibujado en una hoja de papel, es una pieza del tangram. No es fija su posición con un lado horizontal, como suele aparecer en los libros. A veces queda solamente con un vértice en la parte inferior, como generalmente se dibujan los rombos, palabra fonéticamente cercana a “romboide”. La rigidez con la que se tratan el rombo y el cuadrado en los libros no concuerda con la relación que los alumnos tienen con esas figuras a través del tangram. La palabra “cuadrado” que se asigna a los cuadrados de los libros no va con el cuadrado que ellos están conociendo en las configuraciones geométricas. Tal vez por eso necesitan incorporar en él un nuevo término, “romboide”, para dar cuenta de esa mayor riqueza semántica. Finalmente, Irving habla de “estatura” cuando está tratando de averiguar cuáles rectángulos tienen la misma superficie, y para hacerlo compara las bases. Traduce una comparación de superficies a una de medidas lineales, y probablemente de todas las posibles, la estatura es con la que tiene más experiencia. Además, tiene sentido decir que la base es la estatura del rectángulo, porque es su lado más largo. Todas las veces que observo un cambio de palabras, los compañeros entienden perfectamente de qué habla el alumno y la actividad sigue su curso sin confusión. Como mencioné antes, la maestra permite estos usos.

Estos ejemplos me sirven para aclarar de una vez que las funciones de los términos convencionales y los no convencionales no se distinguen de manera tajante. Los alumnos han incorporado las palabras formales “figura”, “compás” y “estatura” a su repertorio y las usan igual que cuando recurren a un término no convencional, asociándolo a objetos con los que tienen poca experiencia, quizás para dotarlos de significado, o bien para enriquecerlo. Los alumnos también recurren a descripciones del objeto que designa un término convencional, como Danna, quien, refiriéndose a un hexágono, dice “el de seis”, o Juan David que hace tanto analogía como descripción al explicar que perpendicular es “que no se pase de noventa (grados), como una (letra) *ele*”. Los términos personales muestran lo que el nombre convencional oculta. La relación entre “perpendicular” y dos rectas que se cruzan formando un ángulo de noventa grados se vuelve visible cuando Juan David dice que es “como una L”. Al nombrar, Miranda hace aparecer un sobre donde yo veía un rectángulo. Los nombres agregan cosas al objeto que no necesariamente estaban. Los términos repentinos que usan los alumnos contribuyen a dotar de sentido a los objetos. Nombrar es prodigioso, un acto creativo, una manera de dar existencia (Tabachnik, 2007).

El uso espontáneo de términos portadores de características de los objetos con los que se interactúa se reporta en estudios como el de Fregona (1995) o el de Gálvez (1995): los alumnos, para hablar de una figura a un compañero que no puede verla, le dicen “zapato” al trapecio rectángulo, “maceta” al trapecio isósceles, “tira” al rectángulo, describen al rombo como algo que “tiene forma de diamante”, el romboide es una figura “ladeada” o “puntuda”. Estos términos son quizá una muestra de la distinción que hace Fregona (1995) entre la “figura representación mental”, es decir, aquello que el alumno ve en las piezas del tangram o las plantillas, y la “figura ideal”, la que percibe y trata de enseñar el maestro. En otras palabras: es posible que, si los alumnos le dicen “zapato” a algo que el maestro llama “trapecio rectángulo”, no estén mirando la misma cosa, así como Miranda no parece ver un rectángulo en su sobre[73]. Fregona interpreta que el cambio de nombre por parte de los alumnos, descartar el zapato y quedarse con el trapecio rectángulo, es a veces un efecto del contrato didáctico: estamos en clase de geometría, si la maestra habla del trapecio rectángulo, hay que adoptar esa palabra. Gálvez afirma que las analogías que hacen los alumnos pueden ser útiles para conectar el vocabulario formal con los objetos que designa, para establecer puentes entre los términos espontáneos de los alumnos y los convencionales. Desde una perspectiva histórico-cultural, Gutiérrez, Sengupta-Irving y Dieckmann (2010) coinciden en que la

[73] También son distintas la “figura representación mental” de un alumno y de otro, Fregona (1995) lo muestra con varios ejemplos. En uno de ellos, los niños entienden un texto que incluye la palabra “rombo” de distintas maneras, porque unos la conocen y para otros es nueva, así que la asocian al rectángulo y el cuadrado.

articulación entre el “discurso cotidiano” (*everyday discourse*) y el “discurso científico” (*school-based or scientific discourse*) -entendiendo por discurso mucho más que los nombres, pero donde los nombres tienen una importancia central-, una articulación en la que los alumnos tengan posibilidades de “usar activamente el lenguaje (…) en formas que los provean de un punto de vista en primera persona de la comunicación matemática” (p. 38), es crucial para sobrepasar la comprensión de los conocimientos de los alumnos en términos del “déficit”, para entender el “fracaso” de los alumnos, y para concebir otras formas de hacer vivir los conocimientos en el aula.

5.3 Presentar palabras para presentar lo hecho

En la puesta en común, cada equipo “cuenta cómo le hicieron” al resolver los problemas. Algunas pocas veces, comienzan a coro: “¡Buenos días, maestra y compañeros!, hoy les vamos a exponer sobre…”. Mientras, los equipos que todavía no lo han hecho planean su próxima intervención, deciden quién dirá qué cosa y se asignan turnos. Los que ya pasaron, a veces hablan un poco de su presentación: se sienten satisfechos, se reclaman por haber dicho algo mal (“lo practicamos muchas veces”), se les olvidó decir alguna cosa. La exposición se hace en algunas clases desde sus mesas, en otras pasando al frente. En el segundo caso, a veces todos aplauden cuando un equipo termina.

Si se oye mucho ruido, la maestra pide respeto para quienes están hablando. También hace preguntas a los alumnos que exponen para que amplíen sus explicaciones, o bien lo que dicen en ese momento le sirve para aclarar algo a todo el grupo. Es un ritual que se hace antes de salir al recreo, o justo volviendo, para cerrar la clase. En este escenario hay más formalidad que en el trabajo en pequeños grupos, también es un momento en cierta medida de evaluación. Por eso, las palabras cambian: los alumnos explican que "el área del rombo es la mitad que la del rectángulo" despúés de que al trabajar en parejas decían “este es la mitad de este”. O dicen “nosotros descomponíamos el triángulo…” para referirse a que contaban unidad por unidad.

A veces, las preguntas y agregados de la maestra hacen que las formulaciones iniciales de los alumnos se extiendan poco a poco, como en el siguiente fragmento, en el que Valeria cuenta cómo encontró el área de un triángulo trazado en un geoplano:

1. *Valeria: ehhhh, bueno yo, (…) aquí había un cuadro [señala el cuadrado marcado en naranja en la imagen 225], y las dos que sobraban las unía y me daba otro [señala los dos triángulos verdes]*

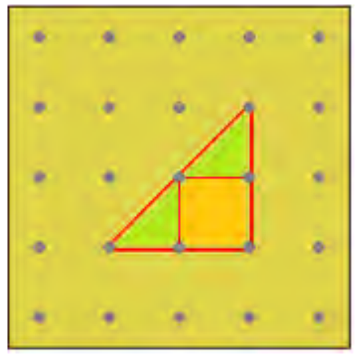


Imagen 225

(…)

2. *Maestra: ¿y qué descubrieron o qué, o cómo? [a todo el grupo] ¡A ver chicos! ¡acá Darío!...*
3. *Mientras la maestra se dirige al grupo, Engie, que está parada junto a Valeria, le dice algo en voz baja*
4. *Valeria: eeeeeeeeh, queeeeee, los triángulos incompletos los unimos y forman un cuadrado*
5. *Maestra: ¿los triángulos incompletos? (…)*
   (…)
6. *Engie: aaaaah, los triángulos que sobraban a la mitad los unimos y nos dio un cuadrado*
7. *Maestra: ah ok, entonces qué, cómo podrían decir, un triángulo entonces ¿qué cosa es?*
8. *Engie: un cuadrado… un cuadrado a la mitad*
9. *Valeria: un triángulo es la mitad de un cuadrado*
10. *Maestra: un triángulo es la mitad de un cuadrado, eso descubrieron [Engie afirma con la cabeza] por eso los unían [Engie vuelve a afirmar]. Ok, bueno, muy bien chicas*

En este intercambio se van modificando gradualmente tanto la idea como las palabras. A la primera expresión "había un cuadro (…) y las dos que sobraban las unía y me daba otro" (línea 1), Valeria agrega varias cosas (línea 4), después de una sugerencia que le ha hecho Engie de manera íntima (línea 3). “Las dos” no son trozos cualesquiera sino triángulos; “sobrar” significa que son unidades incompletas; esos dos triángulos no “le dan” algo a Valeria por casualidad, sino que forman algo al unirse; y eso “otro” que se forma es un cuadrado, una unidad entera que se puede agregar al conteo. Luego Engie precisa la idea de “unidades incompletas”: no son dos pedazos cualesquiera sino mitades exactas de unidad, por eso uniendo dos se forma una entera (línea 6). Las sucesivas reformulaciones responden a demandas de la maestra por ampliar la explicación (línea 2) y hacer una precisión (línea 5). Y mediante este proceso las alumnas siguen elaborando las nociones que están implicadas: las identifican mejor, las distinguen, precisan las relaciones en juego. La formulación es, en efecto, una parte importante de la construcción de un conocimiento. El conocimiento pasa de lo implícito y amorfo, a lo explícito y mejor definido.

La maestra se sostiene en esa nueva formulación a la que llega Engie para hacer una extrapolación, un salto cuántico: traduce la relación de un medio entre la unidad cuadrada y los dos triangulitos en los que la divide su diagonal, en una relación genérica entre cualquier triángulo y algún cuadrado (líneas 7-9). El intercambio cierra con esa última frase: un triángulo es la mitad de un cuadrado (línea 10). Un poco antes, durante el trabajo en equipos, la maestra habló con las dos alumnas de que un triángulo es la mitad de un cuadrado. Al visitar a los equipos va recopilando información, que luego usa en los momentos grupales. Ahora en particular, traslada esa relación entre triángulo y rectángulo de la pareja al grupo, la relanza hacia todos. Me parece que por eso las alumnas saben qué responder aun cuando hay una diferencia entre la relación unidad-mitad de unidad y la relación cualquier triángulo-algún cuadrado. Y pienso que a la maestra le interesa poner la segunda en primer plano porque apunta hacia la fórmula del área del triángulo. En suma, una explicación que destaca la idea de unir trozos para formar unidades completas, hecha sin poner atención en los nombres convencionales, deriva en una que enfatiza la relación de un medio entre un triángulo y un cuadrado, con términos formales.

La manera en que se va transformando gradualmente la primera frase muestra que al cambiar una expresión con nombres personales por otra con términos convencionales no hay una equivalencia, no es que simplemente se cambie una palabra por otra con el mismo significado. En el camino, la idea se va precisando e incluso modificando. Además, afortunadamente, tener un arsenal de términos convencionales a disposición no resuelve el trabajo de construir una explicación, de poner en palabras una manera de hacer.

En general, los alumnos hablan con mayor formalidad en la puesta en común, no solo para referirse a los objetos matemáticos. También sueltan frases como “aquí, como pueden ver… así sacábamos el resultado fácilmente… lo primero que hicimos fue…”, que generalmente no hacen cuando están en parejas, salvo para dirigirse a mí, la observadora o la maestra cuando nos acercamos a preguntar cómo van.

La diferencia entre la manera de hablar al resolver y en la puesta en común tampoco es radical. En la segunda, a veces cobra más importancia el procedimiento por sí mismo que el interés por expresarlo con formalidad, como se ve en la primera frase de Valeria del fragmento anterior. Otro ejemplo ocurre cuando un equipo narra cómo calcularon el área de un rombo, e Irving, desde su asiento, contribuye a explicar cómo transformarlo a un rectángulo, en voz alta y con mucho entusiasmo: “la de abajo, ajá, así, cruzado para que quede”, “está acostado” y “el de abajo, ¡para arriba!”. Este procedimiento supone para la mayoría de los alumnos un avance importante respecto al conteo de cuadros, es muy significativo para Irving. Creo que por eso se emociona tanto al contarlo y deja de lado la elección de términos formales, es decir, vuelve a imponerse la economía del lenguaje.

5.4 Nombres convencionales para la formalidad de la escritura

Con frecuencia, la maestra pide a los alumnos que escriban en el cuaderno parte de la actividad que han realizado. Cuando rellenan dos plantillas con algunas piezas del tangram sabiendo que no caben todas, después tienen que verificar cuál plantilla tiene mayor superficie. Al ver que algunos equipos terminan de cubrir los contornos, la maestra les pide que registren la pieza que sobra:

Maestra: a ver, oigan, (…) aquí dice, ¿cuál o cuáles piezas te sobraron? NO VOY A DIBUJARLA, VOY A ANOTARLO, voy a, ¿cómo se llama esta figura? [les muestra un triángulo grande]

Alumnos: ¡triángulo!

(…)

Maestra: ¿este cómo se llama? [les muestra un romboide]

Alumnos: ¡romboide!

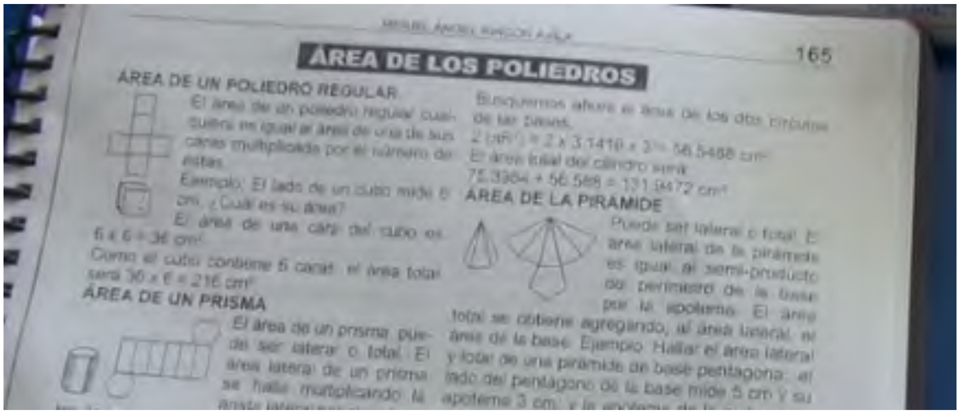
(…)

Maestra: ah, entonces eso anótalo, me sobró el romboide o me sobró el cuadrado...

Los alumnos necesitan tener presente la pieza que sobra en cada plantilla porque así es como van a comparar las superficies de ambas: es menor una en la que no se usa un triángulo grande que otra que no ocupa el cuadrado. Pero como primero se encargan de cubrir los contornos, deshacen la primera configuración para usar las piezas en la segunda, y después no tienen cómo comparar si no recuerdan la pieza que había sobrado antes. Los niños, a veces vuelven a hacer la configuración y dibujan en la misma hoja el contorno de esa pieza clave. La maestra pide cambiar el dibujo por el nombre escrito. Esa es una función del nombre, registrar la pieza que necesitarán recordar después para resolver. Esta vez no ayudan pronombres como "este", se usa el término convencional. La otra función del nombre es dejar un registro escrito en el cuaderno que dé cuenta a los padres de lo que han hecho sus hijos en clase y que sirva para consultas futuras. La indicación de la maestra tiene efecto en los alumnos: Nahomi, al escribir en su cuaderno, toma el romboide y le pregunta a Leo "¿cómo se llama este?". La necesidad de recordar la pieza y de registrar en el cuaderno llevan a conocer y elegir los nombres convencionales.

En otra clase, la maestra pide que se organicen por equipos para que cada uno escriba en una cartulina un resumen de la información que tienen sobre un tema específico: *qué son los polígonos, cuadriláteros, triángulos, perímetro, área y volumen, fórmulas para área o superficie.* El último se divide en *triángulo, romboide, cuadrado y rectángulo, trapecio.* De manera que se conforman nueve equipos. Los alumnos buscan la información que necesitan en el libro Gader (Imagen 226), sus cuadernos y algunas fotocopias que les ha entregado la maestra en clases anteriores (Imagen 227). De ahí a veces también toman la disposición espacial de la información.

Las cartulinas son un registro escrito de otros registros escritos. Se pasa del cuaderno o libro a la cartulina para volver grupales las notas individuales, seleccionar entre todas sus notas los temas específicos que están estudiando en ese momento, y poder hacer consultas de manera inmediata volteando a la pared. Los alumnos cuentan que a veces hacen carteles como estos para otros temas. En una de las paredes se ve uno similar de la clase de ciencias.


165

ÁREA DE LOS POLIEDROS

ÁREA DE UN POLIEDRO REGULAR

ÁREA DE LA PIRÁMIDE

ÁREA DE UN PRISMA

Imagen 226

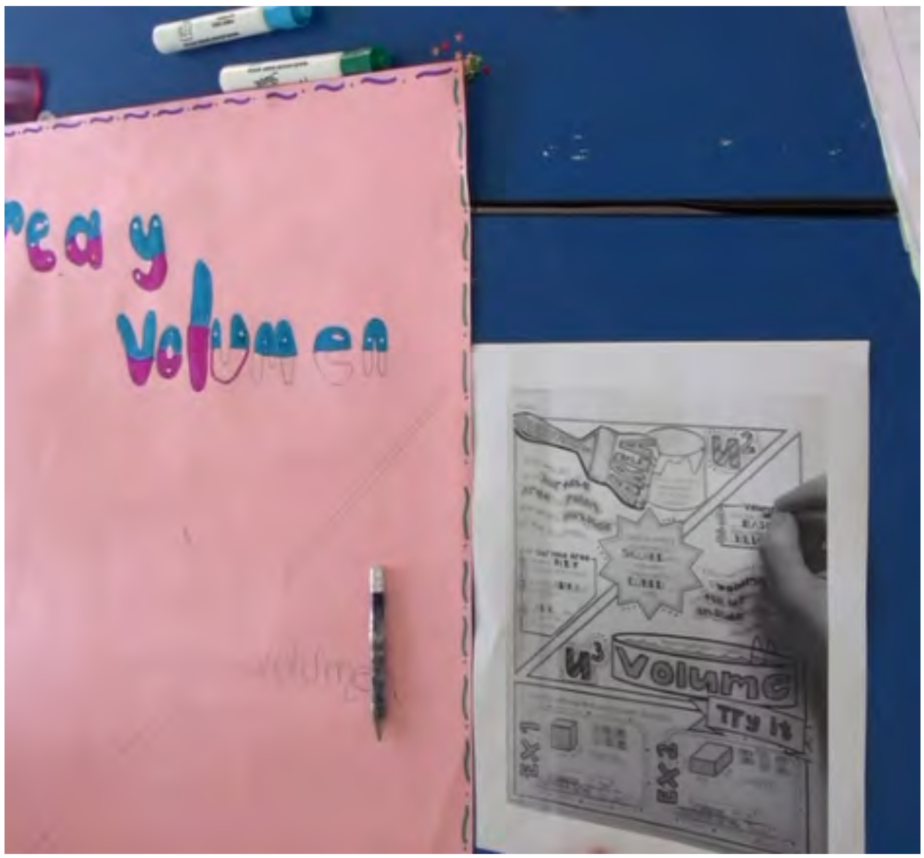


Imagen 227

En esta actividad, los nombres tienen un papel muy particular. El “este” de las configuraciones con el tangram se vuelve el “triángulo”, la palabra clave para buscar en sus libros y cuadernos, el tema a exponer, el centro de la cartulina, el título con letras grandes, a colores y con adornos (Imagen 228).

Imagen 228

Cuando la observadora se acerca a preguntar, los alumnos dejan ver distintas formas de entender algunos términos. Alonso considera que la cubierta de la mesa -que es un trapecio isósceles- no es un polígono porque “esta parte [los lados adyacentes a un ángulo agudo] es como que máaaas… junto, y aquí [los lados adyacentes a un triángulo obtuso] está más separado”. Erick dice que sí es un polígono.

Al día siguiente, los equipos presentan su trabajo al grupo. La producción y exposición de la cartulina implican un despliegue de términos convencionales: volumen, ángulos oblicuos, polígono, cuadrilátero, trapezoide, segmento rectilíneo, trapecio escaleno, trapecio rectángulo… Los nombres formales pasan a primer plano.

Víctor, el alumno con Síndrome Down, también hace su cartulina y presenta sus palabras: “Mamá, Memo, Masa”. El grupo lo escucha leerlas, atento. Hacen menos ruido que con los otros equipos y cuando termina, todos le aplauden. La maestra lo felicita por haber estudiado y le saca una fotografía junto a su cartel para enviársela a su mamá.

Mientras los equipos exponen, la maestra va haciendo preguntas. A Regina, Bárbara, Daniela y Engie les pide que expliquen por qué funciona la fórmula del área del triángulo:

1. *Las alumnas leen la información de su cartulina [Imagen 229]*

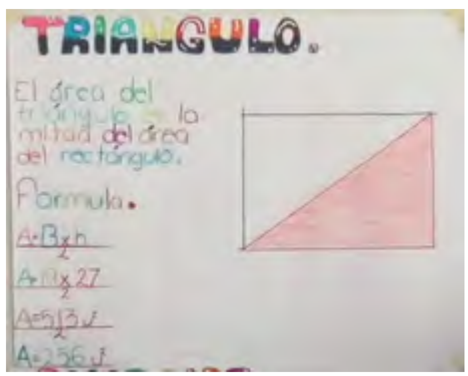


Imagen 229

2. *Maestra: ok pero ¿por qué es base (por altura) entre dos chicas… explíquenme por qué se usa eso, por qué base por altura sobre dos?*
3. *Bárbara: porqueeeee, está a la mitad [señala la diagonal del rectángulo]*
4. *Maestra: (…) porque está a la mitad ¿de quién?*
5. *Bárbara: del rectángulo*
6. *Maestra: ¿y entonces base por altura a qué corresponde?... ¿A qué corresponde Leo?*
7. *Leo: a un rectángulo completo*
8. *Maestra: a un rectángulo completo. Y entonces a ver explíquennos chicas ¿por qué esa fórmula?*

9. *Daniela: porqueeeeee... eeeeeeh…*
10. *Maestra: ¿por qué sobre dos? Leo dijo, base por altura me da de todo el rectángulo ¿por qué sobre dos?*
11. *Silencio*

    (…)
12. *Daniela: ¿porque está a la mitad?*

    (…)
13. *Maestra: ¿quién es la mitad de quién?*
14. *Regina: la mitad del rectángulo es la mitad del triángulo [va bajando la voz]*
15. *Maestra: a ver, fíjense bien*
16. *Daniela y Bárbara: ¡la mitad del triángulo es la mitad del rectángulo!*

    (…)
17. *Maestra: ¿la mitad del triángulo es la mitad del rectángulo?*
18. *Regina: no, la mitad del rectángulo es la mitad de un triángulo*
19. *Juan David: [se levanta y alza la mano] ¡yo, yo, yo!*

    (…)
20. *Juan David: un triángulo es la mitad de un rectángulo*

    (…)
21. *Maestra: a ver Barbi ¿cómo es?*
22. *Bárbara: un triángulo es la mitad del rectángulo*
23. *Maestra: un triángulo es la mitad del rectángulo, que no se les olvide ¿de acuerdo?*
24. *Engie asiente con la cabeza*

Ante la demanda de establecer la relación de un medio entre las áreas del triángulo y del rectángulo, que para la maestra es evidente, pero para ellas no, intentan adivinar la respuesta que se espera que den: hacen combinaciones con “mitad”, “triángulo” y “rectángulo”[74]. La maestra muchas veces sabe que ella y sus alumnos no ven la misma cosa. En el capítulo anterior mostré que ella sabe que a los alumnos les cuesta trabajo encontrar la altura. En el apartado 5.1, sabe que las unidades cuadradas no se ven en

[74] Es posible que estas respuestas obedezcan al contexto de exposición frente al grupo en el que se da la interacción. No obstante, en otra clase, al trabajar en parejas pasa algo similar. Frente a la pregunta de la maestra “un triángulo es la mitad de un ¿qué?”, Bárbara y Regina apuestan por distintas palabras: “¿de un triángulo?”, “¿de un cuadrado?”. A la maestra le sorprende, porque ambas figuras están a la vista: “Bárbara, ¡lo estás viendo!”. Por eso creo que también tiene que ver que la relación “el triángulo es la mitad del rectángulo” no es claramente visible para ellas.

el geoplano. Pero esta vez, el triángulo y el rectángulo están físicamente en la cartulina (Imagen 229). Esta vez me parece que sí se trata de una relación tan clara, tan evidente para ella, que no cabe la posibilidad de que otros no la vean: una figura es la mitad de la otra, para todo el mundo, como ha mostrado Fregona (1995) en otros casos.

Este episodio deja ver una doble exigencia hacia la tarea de enseñar, que es de hecho contradictoria: para enseñar algo hay que conocerlo, pero es precisamente por conocerlo que cuesta trabajo ver qué tan difícil puede ser aprenderlo. Cuando ya se recorrió todo el camino hace un buen tiempo, cuesta recordar lo que implica el recorrido. La maestra tiene un fuerte dominio de las matemáticas escolares: casi nunca identifiqué errores -salvo algunos de distracción que pronto resuelve-, se encarga de contenidos tan complejos como las fórmulas, da claras y detalladas explicaciones que amplían por mucho la información de los libros. Eso por un lado facilita que pueda identificar errores, responder preguntas, pero, por otro lado, se sorprende cuando sus alumnos no ven cosas para ella muy claras. Las cartulinas quedan pegadas en la pared de atrás del salón. En las siguientes clases, los alumnos las consultan algunas veces cuando tienen que aplicar fórmulas de área.

Kerslake (1991, en Gutiérrez, Sengupta-Irving & Dieckmann, 2010) al estudiar desde la Teoría de la Actividad el uso del lenguaje en clases de matemáticas, encuentra prácticas que llama “algorítmicas” y que caracteriza, entre otras cosas, porque condensa en el discurso de los alumnos una jerga que “obscurece las ideas matemáticas”. En las clases que observé encuentro un poco esa tendencia, pero no ocurre todo el tiempo, sino especialmente en la escritura: son las cartulinas y los cuadernos los que se llenan de términos convencionales al punto de dificultar la comprensión. Las imágenes 226 y 227, y la 230 que analizo en el siguiente apartado, dejan ver que el peso del vocabulario convencional en la escritura está presente desde los libros de editoriales particulares.

El peso que se confiere al dominio del vocabulario formal puede explicarse por varios motivos. En primer lugar, la autoridad del texto escrito de la que hablan Rockwell y Gálvez (1982). Ellas también encuentran mayor formalidad en las palabras que se eligen para un resumen escrito que en otras actividades. También puede estarse jugando lo que Fregona (1995) describe como una “ilusión de un repertorio común”:

> Esta hipótesis es un “corolario” de la ilusión de la evidencia: al asumir que se “ven” los mismos objetos y que los alumnos pueden disponer de un vocabulario para describirlos, es “transparente” que se “habla” también de la misma cosa y entonces el profesor se autoriza para introducir inmediatamente un vocabulario [convencional]. De la misma manera que la ilusión de la evidencia coloca un

> saber sobre un elemento del medio, el vocabulario sabio se coloca sobre el repertorio cotidiano (p. 98).

La autora agrega que este mecanismo encierra un círculo vicioso, pues "la imposición de un vocabulario pertinente al objeto es un mecanismo de creación de evidencia" (p. 98). Esto se ve un poco entre las líneas 21-24 del fragmento anterior: hay cierta esperanza en que, si las alumnas dicen las cosas, las comprendan. Como si, al uniformar el vocabulario, aumentaran las posibilidades de que todos vean una misma cosa, de que los alumnos vean lo que ella ve. En esta medida, el énfasis en los nombres convencionales puede estar abriendo paso a cierto grado de simulación, en momentos específicos como los de la escritura y algunos intercambios orales, como el fragmento anterior.

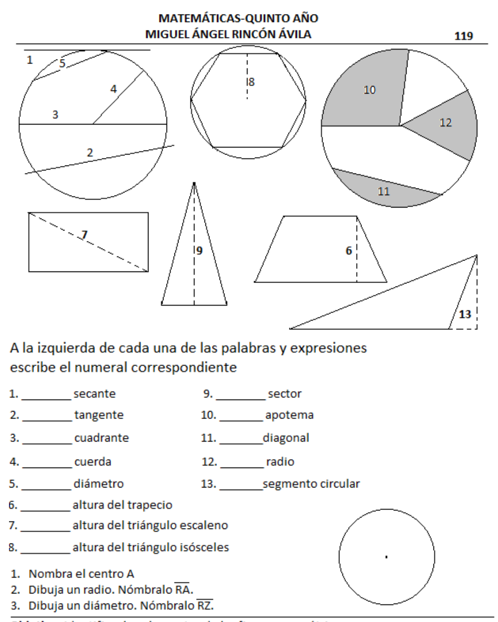
La maestra también toma en consideración el ingreso, no muy lejano, de sus alumnos a la secundaria, y la culminación de la primaria, criterios que en varias ocasiones orientan sus decisiones. El siguiente ciclo escolar, ella y su colega más cercana son asignadas a grupos de primer grado. Su compañera explica: "a mí me ha costado mucho el lenguaje, bajarme, adaptarme a su lenguaje porque siempre había tenido quinto y sexto". La maestra explica que la demanda por el uso de una jerga convencional también proviene de autoridades: "hasta el director siempre nos dice *tienen que usar el lenguaje matemático, nada de que la casita, no, es la galera*, *porque después cuando ya son más grandes se confunden, no lo manejan el lenguaje*". Como menciono más adelante en las conclusiones, desde los materiales curriculares y textos para el docente también se recomienda promover paulatinamente la incorporación del lenguaje convencional. Finalmente, también puede jugarse la legitimidad de su trabajo. Romo y Hache (2019), al trabajar con maestros de universidad, preparatoria y secundaria, encuentran que no es fácil lograr que se adentren en la tarea de producir escritos "intermediarios" entre las formulaciones no convencionales y las convencionales, porque en el contexto en el que ellos trabajan "está bastante mal vista la utilización de un lenguaje no formal por sobre la utilización del formal" (p. 125). Son entonces numerosos los hilos que tensionan hacia el vocabulario convencional.

5.5 Conocer palabras para usar las fórmulas

El uso e interpretación de algunos términos convencionales es indispensable para establecer y aplicar fórmulas de áreas. Mostraré un ejemplo que tiene que ver con la aparición de una palabra nueva para los alumnos en la fórmula de polígonos regulares: apotema. Ese hecho tiene muchas incidencias en lo que pasa en clase.

Un día la maestra se acerca a contarme cómo planea continuar en las siguientes clases. Me explica que quiere llegar al área de polígonos regulares y que los alumnos "tienen que ubicar bien la apotema". Se orienta por algunas lecciones del libro Gader. Ahí, los polígonos regulares están inscritos en círculos, y la apotema es casi el radio: "es que ya vamos a ver los polígonos, pero mira (…) viene la apotema, pero también es (casi) el radio del círculo, entonces yo sí quiero ver el círculo antes". En suma, la maestra quiere abordar el área de polígonos regulares, sabe que esa fórmula implica a la apotema, ha visto que en la lección que ha decidido usar la apotema está muy vinculada al radio del círculo inscrito, así que elige enseñar primero el área del círculo. De esta manera, la maestra anticipa muy pronto que los alumnos tendrán que incorporar una nueva pieza de vocabulario, y eso incide en la organización temporal de temas a enseñar. En efecto, ocho clases después introduce la fórmula del círculo.

La siguiente clase, la maestra toma siete minutos para responder grupalmente una lección del libro Gader en la que se pide identificar el nombre de varios elementos de las figuras geométricas: secante, tangente, cuadrante, cuerda, diámetro… (Imagen 230).


MATEMÁTICAS-QUINTO AÑO
MIGUEL ÁNGEL RINCÓN ÁVILA
119

A la izquierda de cada una de las palabras y expresiones escribe el numeral correspondiente

1. ________ secante
2. ________ tangente
3. ________ cuadrante
4. ________ cuerda
5. ________ diámetro
6. ________ altura del trapecio
7. ________ altura del triángulo escaleno
8. ________ altura del triángulo isósceles
9. ________ sector
10. ________ apotema
11. ________ diagonal
12. ________ radio
13. ________ segmento circular

1. Nombra el centro A
2. Dibuja un radio. Nómbralo $\overline{RA}$.
3. Dibuja un diámetro. Nómbralo $\overline{RZ}$.

Objetivo: Identificar los elementos de las figuras geométricas

Imagen 230

El movimiento es rápido, la maestra dice el nombre, los alumnos el número. Hasta que se detienen en la apotema:

1. *Maestra: hay aquí una palabra que dice APOTEMA*
2. *Alumna: es el ocho*
3. *Maestra: el ocho… quiero que se fijen bien chicos, porque ahorita LO VAMOS A USAR, sí es el ocho. Si se fijan ahí hay una figura, ¿qué figura es?*

   (…)
4. *Alumnos: ¡hexágono! ¡heptágono!*
5. *Maestra: es un HEXÁGONO (…) si yo aquí le dibujara un círculo a su alrededor, tocando los vértices aquí (…) [dibuja en el pizarrón un círculo con un hexágono inscrito] si esta figura no existiera, ¿qué cosa sería, el apotema? [traza con una línea punteada la apotema en el hexágono, imagen 231]*

Imagen 231

6. *Jimena: el radio*
7. *Maestra: [da media vuelta para señalar a Daniela con la mano] ¿sería el qué?*
8. *Jimena: el radio*
9. *Maestra: sería el radio, es bien importante que ahorita se den cuenta de esto porque vamos a hacer unas figuras, usando CÍRCULOS, pero esta, ESTA rayita [señala la apotema], esta línea, es bien importante, porque, como la figura está dentro (…) del círculo, nosotros para sacar el área del círculo ¿qué usamos?*
10. *Alumnos: ah el, este, el pi… ¡el pi!... ¡pi!*
11. *Maestra: ¿pero aparte del pi?*

    (…)
12. *Jimena: pi por radio al cuadrado*
13. *(…)*
14. *Maestra: como esta figura, no va a estar, va a estar dentro de un círculo, pero no es el círculo completo porque, estos pedacitos [marca con achurados los seis*

trozos de círculo que quedan fuera del hexágono] ¿cuentan? (…) todo esto, es como el sobrante, ¿de acuerdo? entonces por eso aquí [señala el pequeño segmento que es la diferencia entre un radio y la apotema punteada], no vamos a tomar, todo el radio, solo vamos a tomar (…) hasta donde está la arista[75] *de la figura (…) el apotema (…) es igual al radio pero solamente llega hasta donde está la arista (…) de la figura, el radio sí llega hasta la… hasta donde está la circunferencia, ¿ya se dieron cuenta entonces?*

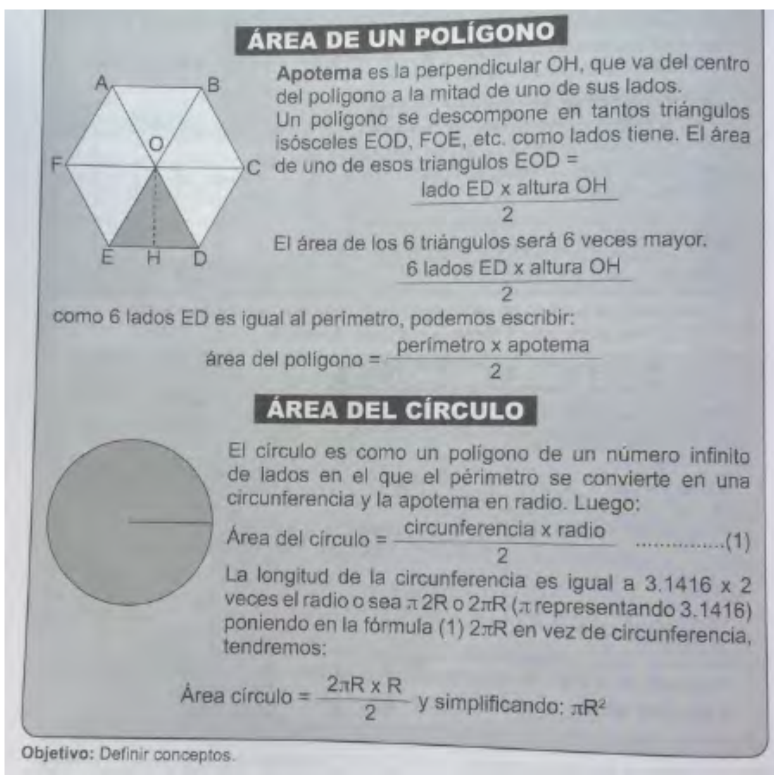
15. *Alumnos: ¡siiiii!*
16. *Maestra: sí porque esto va a ser bien importante ahorita que lo hagamos ¿sí? (alguien puede preguntar), pero ¿por qué es, este pedacito? Bueno, porque es el equivalente al radio pero no llega a tocar toda la circunferencia, solo (…) las aristas de la figura que estoy haciendo ¿de acuerdo?*

La maestra habla más pausado que de costumbre en las líneas 1 y 5, y sube el volumen de la voz cuando dice “apotema”: va de puntillas con esa palabra. Cuatro veces anticipa que es especial. Es una nueva palabra (línea 1), en la que hay que fijarse porque va a aparecer un poco más adelante (línea 3), y tendrá un papel central porque designa a una “rayita (…) bien importante” (líneas 9 y 16). Los alumnos se están encontrando por primera vez con un término que es indispensable para utilizar la fórmula, pero en esta lección podría pasar de largo, perderse entre los otros de la lista. La maestra hace especial énfasis en él, lo destaca entre los otros: es más importante “apotema” que “sector” o “segmento circular”. Me da la impresión de que está tratando de generar una expectativa, un interés por lo que viene. Quizás también quiere que los alumnos se vayan familiarizando con la fonética de una palabra que seguramente no han escuchado antes, porque no es de uso común como “círculo” o “cuadrado”, es mucho más especializada.

En esa lección, la apotema es un segmento suelto que no tiene mucha razón de aparecer en el hexágono. La maestra lo asocia al radio del círculo circunscrito, más conocido para los alumnos, de dos maneras. Primero compara los dos segmentos, destacando tanto su similitud como su diferencia: la apotema es *casi* el radio. Sería el radio del círculo si no estuviera el hexágono (línea 5), pero como sí está, no llega a ser exactamente el radio (líneas 14 y 16). De hecho, dos clases después, la diferencia entre los dos segmentos también se nombra: sagito.

[75] Se refiere al lado del pentágono, es decir, de una figura. Las aristas son un elemento de los cuerpos geométricos.

Después trae a colación el área del círculo (línea 9, “para sacar el área del círculo ¿qué usamos?”), en una lección que no tiene que ver con las áreas. La apotema y el radio tienen una función similar en las fórmulas, que voy a explicar ahora, antes de seguir analizando el episodio. En algunos libros de secundaria, el área del círculo se obtiene como el límite de áreas de polígonos regulares. Dado que el círculo es curvo, su área no se puede calcular triangulando como en los polígonos. Lo que se puede hacer es inscribir en él polígonos regulares de cada vez más lados, es decir, que se acerquen al círculo progresivamente. Las áreas de esos polígonos se calculan con la fórmula *perímetro por apotema sobre dos*. Al tender al círculo, el perímetro de los polígonos tiende al perímetro del círculo, la apotema tiende al radio, y el área de los polígonos tiende al área del círculo. Así, la fórmula de los polígonos permite derivar la del círculo: *perímetro por radio sobre dos,* es decir, $A = \frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r^2$. Por eso hay un segundo vínculo entre el radio y la apotema: en las fórmulas, apotema es al hexágono como el radio es al círculo. Esta asociación, más bien acorde con el programa oficial de secundaria, está presente en una lección del Gader (Imagen 232).



ÁREA DE UN POLÍGONO

Apotema es la perpendicular OH, que va del centro del polígono a la mitad de uno de sus lados.
Un polígono se descompone en tantos triángulos isósceles EOD, FOE, etc. como lados tiene. El área de uno de esos triangulos EOD =

$$\frac{\text{lado ED x altura OH}}{2}$$

El área de los 6 triángulos será 6 veces mayor.

$$\frac{\text{6 lados ED x altura OH}}{2}$$

como 6 lados ED es igual al perímetro, podemos escribir:

$$\text{área del polígono} = \frac{\text{perímetro x apotema}}{2}$$

ÁREA DEL CÍRCULO

El círculo es como un polígono de un número infinito de lados en el que el perímetro se convierte en una circunferencia y la apotema en radio. Luego:

$$\text{Área del círculo} = \frac{\text{circunferencia x radio}}{2} \quad \text{..............(1)}$$

La longitud de la circunferencia es igual a 3.1416 x 2 veces el radio o sea π 2R o 2πR (π representando 3.1416) poniendo en la fórmula (1) 2πR en vez de circunferencia, tendremos:

$$\text{Área círculo} = \frac{2\pi R \times R}{2} \text{ y simplificando: } \pi R^2$$

Objetivo: Definir conceptos.

Imagen 232

La maestra no aborda esta lección. Ella establece una conexión entre las dos fórmulas distinta a la que hacen los textos de secundaria y el Gader. En ellos, el círculo es visto "como un polígono de un número infinito de lados en el que (…) la apotema (se convierte) en radio" (Imagen 232), y así, la asociación entre los dos segmentos se da porque el área del círculo proviene de áreas de polígonos, es decir, surge de un procedimiento para calcular áreas. En cambio, la maestra decide enseñar las dos fórmulas al revés, primero la del círculo, luego la de los polígonos regulares. En el fragmento anterior, al preguntar qué se usa para calcular el área del círculo (línea 9), y descentrarse del número *pi* que destacan los alumnos (líneas 9-12), la maestra vincula, muy tangencialmente, la apotema al radio a partir de las fórmulas. Creo que ahí está ubicada la "casi equivalencia" entre ambos (línea 16): son casi el mismo segmento, y los dos aparecen en su respectiva fórmula. Ella invierte una parte de una cadena trófica (Chambris, 2010): ya no es el área del círculo quien se alimenta del área de los polígonos regulares, sino la apotema quien se alimenta del radio. Al hacerlo así, el vínculo entre los dos términos pierde utilidad, se vuelve más bien una información. El término apotema, y la noción subyacente, se obscurecen.

No creo que esta decisión sea casual, efecto únicamente de las decisiones rápidas que a veces exige el trabajo docente. Ella me avisa varias veces que quiere ver primero el área del círculo, como algo necesario para poder abordar después la del polígono regular. Incluso cuando yo le digo que ese es un tema del programa de secundaria, sostiene su decisión y la lleva a cabo. Creo que esa decisión puede explicarse teniendo en cuenta que la maestra no parece no reparar en la lección de la imagen 232: ella nunca me refiere la única lección que habla de las áreas de los dos tipos de figura, y en cambio varias veces menciona las lecciones donde los polígonos aparecen inscritos en círculos. Así, tal vez la maestra interpreta que el Gader define apotema y sagito en relación al radio al superponerlos, y que también los acerca, como explico más adelante, al usar círculos para trazar los polígonos de los que después se pedirá obtener el área. Este episodio me parece una muestra del riesgo que supone importar de la secundaria a la primaria un tema nada sencillo a través de un libro, además hacerlo apenas como una centelleada, y dejar un rastro poco comprensible de ese tema en otras lecciones.

La idea de derivar la apotema del radio hace cierta resonancia con el precepto "partir de los saberes previos": el círculo y el radio son objetos más comunes, de uso más extendido que el polígono regular y la apotema, más bien adscritos a la clase de matemáticas. Esto también se engarza con otra posible idea puesta en juego por la maestra, a saber, que al introducir una palabra nueva es mejor hablar de otra ya conocida, aunque la cercanía no tenga un uso visible en ese momento. Rebolledo (2015) observa clases en una escuela multigrado cuyos alumnos hablan chinanteco, y analiza el encuentro de alumnos y maestro con términos del libro de texto oficial que no conocen. La palabra "dígito" en una consigna los lleva a una búsqueda en el diccionario que termina por hacer aparecer otros términos desconocidos: guarismo, cifra y signo, alejando todavía más a los alumnos del significado del dígito. Finalmente, el maestro apela a sus conocimientos y define dígito como número. Esa aparición súbita de un término nuevo que llega solo, aislado del repertorio conocido y sin significado, es lo que creo que la maestra trata de evitar en esta clase. Pareciera que busca ir graduando el manejo de los términos por parte de los estudiantes, hacer de "apotema" una pieza de vocabulario común entre ellos. El énfasis que hace la maestra en que apotema es una palabra nueva, algo que los alumnos tendrán que ubicar, algo que después se develará muy importante, y que es casi el radio, me hace dar peso a la posibilidad que la maestra vea en el vínculo radio-apotema una vía para introducir un término nuevo. Es como si quisiera decir "recuerden esta palabra, y para que no olviden qué objeto nombra, recuerden que no es cualquier segmento, es casi lo mismo que el radio". En suma, me parece que ella prioriza la introducción de un nuevo nombre poniéndolo en la misma clase de otro conocido, y al hacerlo pierde la emergencia de esa conexión a partir de los procedimientos para calcular áreas, sin reparar mucho en ello.

La reacción de los alumnos es variopinta. Mostraré tres ejemplos, empezando por Axel. Al terminar el fragmento anterior, la maestra pide que abran otra lección del libro Gader*.* Ahí se indica trazar cuadrados inscritos en círculos. La maestra les explica cómo hacerlo. Luego pide que tracen pentágonos regulares también inscritos en círculos y que identifiquen en ellos la apotema, pregunta "¿qué tiene que ver ahí la apotema?". Recuerda que va "del centro a la mitad de la arista", indica que la marquen en sus pentágonos y les plantea un "reto": cómo calcular la superficie de ese pentágono. Axel, concentrado en el trazo de los polígonos, no repara en la superficie o la apotema. Unos minutos después, cuando le pregunto qué más ha pedido la maestra, responde: "ah sí, que nos pidieron hacer el hipotálamo ¿no?". Cambia un término por otro que también es convencional y es similar en términos fonéticos, pero designa un objeto completamente distinto. La tarea de trazar los polígonos demanda a Axel un trabajo considerable, especialmente por el uso de la graduación del transportador y muchos otros conocimientos relativos a los ángulos implicados en ese trazo. No tiene la apotema en el horizonte. Él descarta ese término que no es todavía funcional en las tareas que está resolviendo. No parece muy interesado en identificar un objeto que acaba de ser definido, ni en la relación entre apotema y radio de la habló hace poco la maestra. Lo que le importa es más bien lo que puede usar, lo que le permite tomar decisiones. Al ver reacciones como la de Axel, me hace sentido que Brousseau (2010, en Sensevy, 2011) considere "la cosa antes del término y antes de la explicación" como un elemento fundamental del diseño de ingenierías didácticas:

> (más que introducir los conocimientos verbalmente), a partir de su definición y su justificación (…) parece útil estudiar dispositivos en los que el sentido se puede manifestar por decisiones antes de ser objeto de formulaciones y explicaciones. Crear las condiciones que provocan en el alumno decisiones en las cuales la causa y la razón son el conocimiento a enseñar, dota a este conocimiento de una existencia concreta que permite después evocarlo, comunicarlo y explicarlo. Examinar, explicar, justificar, definir, son actividades posteriores (…). Estas condiciones (…) son simulaciones que dotan a los conocimientos el sentido finalmente retenido por los matemáticos. Tienen la ventaja de invitar a los innovadores a evitar la intrusión de conceptos muy discursivos, acompañados de un vocabulario que no podría ser sostenido por un uso matemático (p. 301).

La preocupación de Axel parece estar precisamente en la cosa, no en los nombres: ni "pentágono", que designa a la figura que lo tiene ocupado, ni "apotema", que no tiene que ver con lo que está haciendo. Así como en el apartado 5.2 afirmé que los nombres pueden dar existencia, en este caso me parece que es lo opuesto. El nombre apotema no le dice mucho a Axel. Lo que cobra existencia para él, son los pentágonos que no necesariamente nombra, pero sí utiliza. Es decir, a veces la palabra puede hacer ver una cosa nueva, otras veces la cosa puede emerger en el uso y después nombrarse. No hay una receta, un principio aplicable a todas las circunstancias.

Dos clases después, la maestra parte de una propuesta de Luis y Juan David para calcular el área de un polígono regular: "base por altura sobre sobre dos por lados", y dirige la discusión hacia la fórmula convencional. En el camino, pregunta qué es de la figura un segmento que señala (un lado del polígono). Los alumnos buscan entre el repertorio de términos convencionales el adecuado en este momento: "¡cuerda!", "¡apotema!", "¡no!, ¡el sagito!", "¡ah!, ¡sus lados!". La palabra "apotema" tiene aquí el mismo estatuto que cuerda, sagito o lados. Ha entrado en el universo de segmentos disponibles, en el conjunto de nombres posibles cuando no se recuerda el exacto. Ya no es un término aislado, es parte de una clase de términos.

Hacia el final de la clase, se define la apotema como “la altura de cada uno de los triángulos”. Esta vez, no se vincula al radio sino a la altura. No se destaca la similitud entre los pares apotema-hexágono y radio-círculo, sino el papel de ese segmento en una parte del polígono. En esta asociación desaparece el círculo y aparecen los triángulos isósceles en los que se divide un polígono regular. Esta otra manera de acercar la apotema al repertorio de términos conocidos para los alumnos ya no proviene de la organización de saberes en el libro sino del procedimiento que se ha puesto en marcha. En este sentido, es funcional, a diferencia de la anterior. No sé cómo reacciona Axel a esta nueva definición, pero apostaría que le resulta más cercana que la anterior si antes asumió la tarea de encontrar el área por sus propios medios. No obstante, los alumnos son muchas veces impredecibles. La maestra renuncia a vincular apotema con radio, su primera gran apuesta, para optar por otra que se deriva del uso, y Juan David responde regresando a la primera analogía: “la apotema es casi como el radio ¿no?”.

Por último, quiero mostrar un ejemplo de Miranda, que va más allá del asunto de la apotema y su relación con el radio o la altura. En una clase, la maestra plantea el problema de trazar un círculo de 13 centímetros de diámetro y calcular su área y perímetro. En cierto momento, me pide que me encargue del grupo pues tiene que salir a hablar con uno de los niños. Miranda viene a pedirme que le explique (“no entiendo nada”), y me enseña su cuaderno sin anotaciones:

Tatiana: a ver mira, para el área, aquí [en el primer renglón está la fórmula] dice pi por radio al cuadrado, entonces pon 3.1416 por, y dejas vacío y luego vienes

Miranda se va y yo reviso los cuadernos a otros alumnos. Cuando regresa, tiene escrito en su cuaderno A = Л x

Tatiana: ok entonces aquí tienes que poner el radio, ¿cuánto mide el radio?

Miranda: ¿trece?

Tatiana: no, ese es el diámetro [superpongo la pluma en el diámetro del círculo] mira es que es todo esto el diámetro, y el radio es nomás esto [le indico con el pulgar y el índice la longitud del radio], ¿entonces cuánto mide?

Miranda propone distintos números, ninguno de ellos es 6.5

Aplicar la fórmula implica, entre otras muchas cosas, interpretar la expresión A = Л x r^2. En particular, saber que *r* designa al radio, y saber cuál es el radio[76]. Miranda no puede contar con eso, no tiene manera de resolver esta tarea del círculo. Por consiguiente, tampoco podrá después apoyarse en el radio para apropiarse de la apotema, es decir, se van acumulando los términos y las asociaciones entre ellos que las tareas suponen conocidos, pero no necesariamente lo son, al menos no para todos.

En síntesis, las fórmulas ponen en relación segmentos como la base, altura, diagonales y apotema, relaciones que se expresan con una escritura que contiene ostensivos que apelan a los nombres convencionales de esos objetos. Utilizar las fórmulas para calcular áreas pasa por la interpretación de esos ostensivos, requiere saber qué nombres designan y a qué segmentos corresponden esos nombres, asunto que no siempre es fácil.

5.6 Conclusiones del capítulo

En diecisiete de las dieciocho clases que observé hubo episodios relacionados con el uso de nombres de objetos matemáticos que valía la pena analizar. Es un asunto que constantemente se hace presente. Los niños despliegan una diversidad de recursos lingüísticos para darse a entender, para poner en marcha procedimientos y también para acercar los términos convencionales a su repertorio. La maestra se rige por dos hilos: dar prioridad a la eficacia comunicativa y promover el uso de un lenguaje convencional que se considera responsable de enseñar. Su participación en el uso de vocabulario es muy diversa. A veces se carga más hacia los términos convencionales y otras deja que los alumnos se expresen como necesitan e incluso ella misma flexibiliza el uso para ser clara. Anticipa con nueve clases de antelación que va a entrar un término nuevo para los alumnos, *apotema,* y en función de eso regula desde la organización de temas hasta la velocidad con la que habla. Busca vincularlo al radio, asociación muy común en la enseñanza secundaria, pero que no resulta pertinente para sus alumnos, y termina por descartarla para establecer un vínculo entre apotema y altura, que sí es funcional.

El vocabulario convencional que se espera que los alumnos dominen es demasiado extenso. A lo largo de las clases pude ver que los siguientes términos están todavía en proceso de ser apropiados:

---

[76] En otros momentos, los alumnos preguntan si la *a* en una fórmula corresponde al área o la altura, qué es $\frac{Bxh}{2}$, o si *c/u* significa “cúbicos”. Los alumnos saben que las letras indican nombres de algo con lo que se opera para obtener el área. Y el ostensivo *c/u* que abrevia “cada uno” genera confusión en ese contexto.

Área, fórmula, perímetro, volumen, áreas laterales, superficie, desarrollo plano, romboide, rectángulo, cuadrado, trapecio, rombo, pentágono, triángulo, triángulo isósceles, triángulo escaleno, triángulo equilátero, cubo, círculo, polígono inscrito, pentágono regular, hexágono regular, octágono regular, prisma, cuadrilátero, polígono, paralelogramo, prisma triangular, prisma rectangular, polígono regular, pirámide, cuerpo geométrico, figura plana, tridimensional, dimensiones, ancho, largo, profundidad, altura, base, apotema, diagonal, vértice, base mayor, base menor, cara, arista, cara lateral, base triangular, base pentagonal, diagonal mayor, diagonal menor, radio, diámetro, circunferencia, ángulo, ángulo obtuso, ángulo oblicuo, sagito, cuerda, unidades cuadradas, metros cuadrados, grados, transportador, paralelismo, líneas paralelas, pi.

La lista sería mayor si incluyera el vocabulario usado en clases de otros temas de matemáticas y de otras asignaturas a lo largo del año escolar. Si bien muchas de estas palabras corresponden a nociones que han sido estudiadas en los años anteriores, siguen siendo problemáticas. Rebolledo (2015) muestra que los libros de texto son portadores de una variante del español que es lejana de la variante del español de los niños hablantes de chinanteco en una escuela multigrado de Oaxaca. En las clases que observé se ve que esa variante, incluyendo tanto a libros oficiales como particulares, es también lejana para los propios hispanohablantes[77].

Diversos materiales curriculares recomiendan permitir que los alumnos usen términos personales, pero introducir el vocabulario convencional sobre la marcha, sin convertirlos en objeto explícito de enseñanza, para que los alumnos se apropien de ellos paulatinamente. Esto se ve en programas, orientaciones didácticas y materiales para maestros, con distintos matices. Por ejemplo, en el programa de preescolar se habla de "favorecer el uso del vocabulario apropiado" (¿hay alguno inapropiado?), "a partir de las situaciones que den significado a las palabras "nuevas" (la forma *rectangular* de la ventana o la forma *esférica* de la pelota, la *mitad* de una galleta)" (SEP, 2011d, p.54). Una orientación didáctica para primaria es más cuidadosa respecto a la apropiación del vocabulario convencional y su articulación con la comprensión de las nociones matemáticas: recomienda no exigir la memorización de términos, avisa que su

[77] Como sucede siempre. Es decir, aquello que les cuesta trabajo a los niños con "barreras", generalmente deja ver contenidos difíciles para el grupo completo. La distribución temporal de contenidos genera problemas no solo a las escuelas multigrado, sino también a las de organización completa. El encuentro a través del libro con cierta variante del español no solo es complicado para los niños cuya primera lengua es distinta del español. Dicho de otra manera, un diseño curricular que funcione para las "poblaciones vulnerables", funcionaría por fin para todos.

apropiación toma años y enmarca la funcionalidad de estos términos en un tipo específico de actividad, las configuraciones geométricas como, por ejemplo, los arreglos de piezas del tangram (SEP, 2017).

De cualquier manera, se pide introducir el vocabulario convencional paulatinamente, pero no se dice cuándo ni cómo ni por qué. Pareciera que esto puede hacerse fácilmente, casi sin notarlo, sin consumir tiempo, sin alterar la vida en el aula, simplemente cambiando una palabra por otra de vez en cuando. En las clases de carne y hueso la cosa resulta muy distinta. Se termina entonces por delegar al maestro la tarea de entender cuándo es útil, funcional y pertinente dar condiciones para el uso de términos formales, y cómo articularlos con los personales para que los nombres permitan describir, hacer analogías, poner en marcha procedimientos, hacer ver propiedades, comunicarse con los otros.

En el acto de nombrar también se despliegan las contradicciones del sistema educativo de las que habla Terigi (2009). Por un lado, se prescribe tener cautela con la introducción del vocabulario convencional, poner en primer lugar el significado y dar cabida a los usos espontáneos de los alumnos. Por otro lado, esos mismos materiales curriculares oficiales y también la diversidad de materiales particulares están tan saturados de términos convencionales que se comen el tiempo para dotarlos de sentido. Así, con el paso de los años se va acumulando la jerga que desde la norma se asume ya incorporada al repertorio de los alumnos y que permea las paredes del aula, el pizarrón, las hojas de trabajo y el habla. La maestra y los alumnos hacen maromas para hablar con esos términos, para crear más tiempo del supuesto por el libro para palabras nuevas como “apotema” y volver a otras viejas como “unidades cuadradas”.

CONCLUSIONES

Con este trabajo me he propuesto dar cuenta de las tensiones que se generan por la distancia entre los conocimientos que los alumnos están en posibilidades de construir y los que se espera que aprendan. Al analizar los datos, me preguntaba: ¿por qué la mayoría de los alumnos queda muy al margen del trabajo con fórmulas? ¿y por qué las tareas que sí pueden abordar tienen tan poco espacio en la clase? ¿cómo se gestan espacios para esos otros conocimientos? En el primer apartado de las conclusiones intento explicar en qué medida mi tesis abona a responder esas preguntas, es decir, recopilar lo que se juega en las resoluciones de los alumnos. En el segundo apartado recojo algunos aspectos de la manera en que, al mirar desde la didáctica y desde perspectivas socioculturales, las he conjugado para analizar la actividad matemática de los alumnos, encontrando que ambos acercamientos pueden nutrirse mutuamente.

Las tensiones entre conocimientos de alumnos y conocimientos esperados

Trataré ahora de ir recuperando dónde he visto materializadas esas tensiones. Dicho de otra manera, voy a condensar aquí mis interpretaciones respecto a dónde se ubican las dificultades para resolver una tarea, o bien, las posibilidades de llegar a buen puerto al abordarla.

Un primer aspecto tiene que ver con la *naturaleza de los conocimientos*. He mostrado desde el primer capítulo y después con varios ejemplos hasta qué punto las fórmulas condensan una serie de conocimientos. Las fórmulas sintetizan en una sola expresión una diversidad de transformaciones de figuras en otras equivalentes en área. La fórmula del triángulo contiene en un solo ostensivo a tres alturas posibles, mientras los alumnos, sin darse cuenta, interactúan con una sola de ellas, o incluso con ninguna. La fórmula del rombo establece una relación entre las diagonales que los alumnos no ponen en juego al resolver, ellos recurren a las medidas del rectángulo circunscrito. Cualquier fórmula es una regla genérica, que funciona para una figura hipotética, es decir, para cualquier romboide, mientras los alumnos están interactuando con un solo romboide, el que tienen enfrente, aquel cuya área calculan. Usar una fórmula implica dejar de evocar el conteo de unidades de superficie para operar con medidas de longitud. En suma, las fórmulas son la punta de un iceberg, sintetizan y articulan una serie de procedimientos muy diversos, y también requieren un trabajo de generalización que apunta hacia el álgebra. Con este tipo de conocimiento contrastan otros, como las características de las figuras geométricas materializadas en las piezas del tangram. Se trata de conocimientos que pueden ponerse en juego al hacer configuraciones, que no requieren saber algo más de antemano.

Considerando esos rasgos que son orgánicos al conocimiento matemático, es decir, que le son inherentes, podría concebirse desde la enseñanza un proceso de estudio largo, de años, organizado alrededor de una problemática amplia, para que los alumnos se apropien más profundamente de las figuras, la superficie, y accedan a las fórmulas. Pero esto no es lo que vi en el aula. Las *condiciones institucionales de enseñanza* generan múltiples tensiones. Para empezar, se juega una serie de expectativas a un nivel que rebasa las paredes del aula y a la vez permea profundamente en ellas: los conocimientos espacio-geométricos que terminan subordinados a las fórmulas, y la superficie que es desplazada por las fórmulas, son precisamente los menos atrapables en términos curriculares. Son los que funcionan a un nivel tan implícito que cuesta reconocer como conocimientos, los que prácticamente no pasan al cuaderno, ni a las cartulinas de la pared, ni al examen, los que nadie exige. En cambio, las fórmulas casi no están en los procedimientos de los alumnos, pero sí en los textos, las evaluaciones, las preguntas de los padres. No vi a ningún padre de familia preocupado porque su hijo no sabe diferenciar entre la superficie del pato y la del gato, pero sí vi algunos preguntar por qué se había equivocado en una pregunta del examen que implicaba aplicar una fórmula.

Esas condiciones institucionales de enseñanza influyeron fuertemente en la manera particular en que se articularon los distintos contenidos, es decir, en la *ecología de saberes* (Chevallard, 1997) que se fue configurando en esta experiencia específica que observé. La superficie como magnitud física no está muy presente para los alumnos, en buena medida porque está ausente desde los programas y libros de texto. Eso tiene como consecuencia que el trabajo con fórmulas sea en cierta medida ajeno, difícil de regular, porque no está anclado en la característica que miden. He argumentado también que los alumnos tienen una interacción con las figuras geométricas muy distinta de la que supone poner en marcha una fórmula. En algunos problemas, los alumnos parecen tratar a las figuras como manchas en una hoja de papel, es decir, como un espacio delimitado por un contorno. En otros, se fijan más en los segmentos, pero no necesariamente ven la altura, que en la fórmula tiene un papel explícito y fundamental. También he explicado que los alumnos tienen todavía mucho que explorar respecto al uso de unidades y las transformaciones de figuras, es decir, los procedimientos espacio-geométricos para medir áreas, y que en esas condiciones, no dan paso a las fórmulas. Los programas, los libros de texto, las tareas y las formas de abordarlas en clase van configurando vínculos o ausencia de vínculos entre las figuras geométricas y su área, entre la superficie y las maneras espacio-geométricas de medirla, entre esos procedimientos espaciales y el numérico-algebraico que constituyen las fórmulas.

Ese entramado muestra continuidades y rupturas en las *cadenas tróficas* (Chambris, 2010), es decir, las cadenas alimenticias entre conocimientos: para que los alumnos pudieran calcular áreas con fórmulas, que el número obtenido les diera información y que pudieran controlar esos números, se necesitaría que las fórmulas se alimentaran de la cualidad física superficie, que las figuras y su área se nutrieran más mutuamente, que esas figuras se estudiaran con más detenimiento tanto desde el punto de vista espacial como el geométrico[78], es decir, que la geometría se alimentara más del espacio. Las fracturas que observé en estas cadenas llevan a una doble pérdida: los conocimientos que hacen falta e interesan a los alumnos son subvalorados, mientras se debilita la razón de ser de los contenidos que se priorizan de la enseñanza.

En medio de ese entramado ecológico, en *las tareas* específicas a través de las cuales se organizó la enseñanza de las fórmulas, las figuras y la superficie en las clases, también se manifestaron algunas tensiones. Cuando la maestra apunta hacia las fórmulas, recupera de los libros de texto gratuitos una tarea que lleva a una encrucijada, que para mí fue visible sobre todo en el caso del rombo y el pentágono regular: las lecciones pretenden que, a partir de calcular el área de una sola figura, los alumnos puedan inferir la fórmula correspondiente a todo un tipo de figuras. Esa intención de que los alumnos establezcan las fórmulas por cuenta propia a través de tareas que ellos más bien resuelven satisfactoriamente con otros procedimientos, tiene varias consecuencias. Las maneras de resolver de los alumnos y la fórmula que queda escrita en el cuaderno o en el libro resultan ser dos acercamientos a un mismo objeto, la cuantificación de áreas, que no se tocan: uno es funcional, otro es institucional. Para obtener el segundo, los alumnos tratan de cumplir las expectativas de la maestra o del libro mediante un juego de adivinación, a veces a ciegas, otras veces más orientado por las preguntas de la maestra. O bien, guardan silencio, se brincan esa pregunta, atienden otros asuntos. La

[78] Al distinguir geometría y espacio me refiero a lo que he descrito en el primer capítulo, es decir, a que haya interacción entre los objetos materiales, sensibles, y los conceptualizados; que las propiedades de las figuras, formuladas en términos de teoremas y demostraciones, provengan de un trabajo en el que se valida empíricamente, en el que las figuras se construyen como objetos físicos por ensayo y error; que haya un tránsito de las figuras percibidas como manchas en la hoja hacia las figuras vistas como haces de líneas.

maestra se ve orillada a dar pistas y cerrar las posibilidades de resolver, para extraer la fórmula de los alumnos, lo que al final de cuentas hace que ella misma vaya dando buena parte de la información a cuentagotas. En contraste con esto, todos los alumnos que yo vi se involucran en las tareas de cubrir plantillas con piezas del tangram: es una tarea que no exige aplicar conocimientos previamente enseñados, que permite hacer muchas anticipaciones, mucho ensayo y error, y que deja ver a los alumnos cuando algo de lo que hacen no está bien. Eso no quiere decir que consigan tapizar todas las plantillas, o que al hacerlo no tengan tropiezos, pero he mostrado que su actividad en esas tareas es amplia.

En el diseño particular de la tarea también se hacen presentes algunas tensiones, especialmente en las *variables didácticas*, es decir, las características específicas de una tarea que el maestro puede manipular y que tienen efectos sobre los procedimientos. En el cuarto capítulo he mostrado que muchos alumnos fracasan en tareas de cálculo de áreas que solo pueden resolverse con las fórmulas, como las del libro Gader donde hay figuras sobre hoja blanca cuyas medidas hipotéticas ya están indicadas. En cambio, tienen más posibilidades de calcular un área cuando la figura está trazada en una cuadrícula. A su vez, el conteo de cuadritos es mucho más difícil cuando la figura no abarca cuadros completos o medios cuadros, sino otros trozos. La elección de esas variables no solo se orienta por el proceso de aprendizaje de los alumnos, ahí intervienen otros factores. Un caso que destaqué en el segundo y tercer capítulos, sucede cuando la maestra pide que hagan “el pato” o “el gato” sobre una hoja blanca, es decir, que hagan una configuración de piezas que coincida con el modelo. Esa tarea es mucho más difícil para los alumnos que la original en la que se ponen las piezas directamente sobre la plantilla. El medio de los alumnos cambia sustancialmente. Pero la decisión de la maestra no obedece a una intención de provocar este cambio de medio, sino de que esa hoja blanca quede pegada en el cuaderno para dar cuentas a los padres de familia, pues, como me han contado reiteradamente ella y sus colegas, los padres exigen todos los días evidencias del trabajo en el cuaderno. Esa nueva tarea implica mayores dificultades para los niños que interpretan que no se vale poner primero las piezas sobre la plantilla para luego trasladarlas a la hoja blanca, asunto que no es claro en *la consigna.*

Estos fenómenos vinculados directamente con el conocimiento dejan claro que las dificultades para resolver las tareas no son explicables a partir de “dificultades” de los alumnos. Esta preocupación por descentrar el fracaso escolar de la capacidad del alumno y abonar a su comprensión a partir de la manera en que se reconstruyen los objetos matemáticos en el aula está también en el origen de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau y Warfield, 1999).

He mostrado que esas dimensiones vinculadas al conocimiento se entretejen con otra que se cuela hasta la médula en los procesos de resolución: *el tiempo*. Este hilo se tensa y se afloja cuando se pone en suspenso la posibilidad de entender en qué se han equivocado porque ya es la hora del recreo; cuando terminar antes que los demás se usa para mostrar superioridad y, en la otra cara de la moneda, la presión del tiempo atrasado crea una desventaja; cuando el curso de una resolución se modifica como reacción a quien pide acabar más rápido; cuando necesitar más tiempo que los demás para resolver una tarea se resuelve con más tiempo personal, a costa de no enterarse del asunto central de la clase; cuando la maestra advierte que tienen cinco minutos para terminar un problema porque todavía falta hacer muchas cosas, pero al ver a los alumnos lo alarga hasta veinte; cuando se consigue un espacio en la resolución de otro al intervenir en el momento exacto en el que hay incertidumbre, y una vez dentro, moverse con rapidez termina por reducir drásticamente el espacio matemático del responsable original del problema; cuando la maestra abre tiempo para temas que corresponden curricularmente a grados anteriores, pero también decide parar sabiendo que esa decisión pondrá en suspenso algunos aprendizajes importantes, porque necesita ocuparse de lo que curricularmente está a su cargo; cuando la maestra extiende el tiempo de una lección para dar explicaciones que no están ahí porque ha notado que los alumnos necesitan esa información; cuando una mirada puede parar en seco la prisa que otro quiere hacer presente, es decir, puede comprar tiempo de resolución.

El tiempo atraviesa todos los procedimientos, los que ocurren y los que no. El tiempo clasifica a los alumnos, cancela algunas maneras de resolver y deja aflorar otras, se extiende para dar cabida a conocimientos que no estaban contemplados y luego se comprime para apuntar hacia uno muy definido. Para mí, lo que he dicho se sintetiza en una contradicción entre dos escalas radicalmente distintas: el tiempo de aprendizaje de los alumnos, que se mide en años; y el tiempo de aprendizaje prescrito desde el currículo, que termina por apremiar hasta los tres minutos de una resolución. Así es como McDermott (2001) y Terigi (2009, 2010) argumentan que el fracaso escolar no depende de las capacidades individuales del alumno.

La posibilidad de resolver o no un problema también depende de otro aspecto, ciertamente atravesado por el tiempo y las tareas: *la manera en que las producciones de unos se articulan con las de otros*, es decir, las resoluciones colectivas. Uno de los ejemplos que más he destacado en la tesis es el de Axel y Jorge, quienes, frente a un problema que les devuelve mucha información y que en cierta medida pueden distribuirse dividiéndolo en dos subproblemas similares, intercambian y potencian esa información al articular cada uno sus aportes con los del otro: dejan claro que su contribución proviene de otra anterior del compañero; que el otro lo está haciendo bien; recogen algo que el otro ha encontrado y descartado, y en lugar de dejarlo pasar, lo vuelven prioritario, lo explicitan y lo expanden; replican lo que ha hecho el otro y lo hacen notar; dejan de hacer algo para ver qué está haciendo el otro; dejan que el otro termine de probar algo, detienen su impulso de interrumpir. Ese trabajo de orquestación que muchas veces demanda al maestro el despliegue de movimientos discursivos (ver O'Connor y Michaels, 1996), se da esta vez en un problema que promueve esa forma de interacción y a la vez hace que ella dé frutos. Evidentemente, no todas las resoluciones conjuntas que vi son así. La diversidad que encontré en las interacciones entre pares es tanta que me cuesta pensar en dos ejemplos similares. Al analizar los fragmentos he enfatizado que las posibilidades de diálogo, de intercambio entre los alumnos, dependen de cómo construyen jerarquías entre ellos y entre los conocimientos, de lo que tienen para decir o hacer, de la habilidad para formular algo de manera que sea escuchado por los otros, para solicitar ayudas, de la disposición para darlas o recibirlas, de la sagacidad para tomar turnos, y también -retomo esto un poco más adelante- de la forma en que se distribuyen el espacio matemático y de las distintas maneras de asumir la observación y la copia de lo que hace el otro. Todo eso se teje con las características de las tareas[79].

Las *acciones de la maestra* también inciden, por supuesto, en el curso que toman las resoluciones de los alumnos. He explicado que es ella quien finalmente elige las lecciones del Gader cuyos problemas solamente pueden abordarse si se conocen las fórmulas, quien extiende las explicaciones del libro en función de lo que ve que cuesta trabajo a los alumnos, y quien combina ese libro con otros problemas que admiten procedimientos que están más al alcance de los alumnos. Ella permite que los niños se levanten cuando quieran y vayan incluso al otro extremo del salón a consultar con el par

---

[79] Un aspecto que no analicé en la tesis, pero que también se juega en los procedimientos puestos en marcha, es *la dimensión afectiva.* La confianza entre dos alumnos puede favorecer un trabajo conjunto; o al revés, puede hacer que un alumno se encamine en un procedimiento que ha elegido un par, pero que para él termina resultando inaccesible. La confianza interviene de distintas maneras en los procedimientos de los alumnos. También la vergüenza por no saber, el humor para sortearla, en fin. Me queda como un pendiente para trabajos futuros incorporar esta dimensión de mejor manera, hacerla visible e integrarla con el análisis de las tareas, entender por ejemplo cómo interviene en la regulación del contrato didáctico.

que eligen; y también prueba distintas maneras de organizar las parejas o los equipos, como poner juntos en una mesa a los que tienen dificultades, o bien, al contario, hacer parejas donde uno sabe más que el otro, pensando en que le ayude. Ella deja que los alumnos que no han terminado sigan resolviendo y tomen el tiempo que necesiten para eso, pero también decide seguir avanzando con el resto del grupo. Ella vincula la apotema al radio, haciendo una articulación de contenidos que no proviene del uso, sino que más bien es un rastro de la organización de contenidos en secundaria que se filtra a un libro de primaria; y luego se desprende de esa articulación al optar por otra donde se asocian apotema y altura, que sí deriva de un procedimiento. Ella tiene prisa por llegar a la fórmula, pero luego está muy atenta a lo que hacen los alumnos en el trabajo en equipos, identifica numerosas dificultades que ellos enfrentan, y es receptiva a otras propuestas que la desvían un poco del Gader y de las fórmulas.

Por último, también las condiciones materiales afectan el aprendizaje. No tener buenos geoplanos comporta el riesgo de que la maestra decida dejarlos de usar paulatinamente, es decir, de que muchas buenas tareas no se resuelvan simplemente porque dejarán de plantearse, de tener cabida en la clase. Lo que más he resaltado de esta problemática es que los alumnos de este grupo no tienen las mismas posibilidades de *acceso a los materiales didácticos*. En el cuarto capítulo mostré que a Ian le toma 40 minutos cortar la orilla de un rectángulo con la mano, cuando sus compañeros lo hacen con tijeras en menos de un minuto. Mientras él corta, los demás trazan un romboide, y mientras él lo traza, se discute grupalmente sobre la fórmula. Él no llega a la fórmula. También he dejado ver que un niño puede decidir no trazar un hexágono inscrito en un círculo porque en su compás no puede mantener fija la abertura, mientras otros hacen los círculos sin problemas con compases de mejor calidad. La diferencia entre obtener un área o no hacerlo puede estar marcada por usar calculadora o tener que hacer la cuenta a mano. El acceso desigual a los materiales -tijeras, calculadoras, compases, fotocopias, transportadores, trozos de cartulina- hace que unos consuman mucho más tiempo que otros en resolver, e incluso que algunos desistan de las tareas mientras otros siguen. Como explican Brousseau (2000b, 2001), Kula (1998), Duval y Godin (2005), Solares (2012), la experiencia de niños y adultos con la medición y con las figuras geométricas está estrechamente vinculada con el uso de instrumentos. No contar con las mismas herramientas de trabajo hace, de entrada, que algunos estén en desventaja en términos de producción matemática. Extrapolando un argumento de Gómez Tagle (2017), quien afirma que la inclusión educativa requiere garantizar la gratuidad, he planteado que esa gratuidad implica también el acceso para todos a materiales didácticos de calidad.

He descrito estas distintas dimensiones una por una para poder distinguirlas, pero desde luego se mezclan. En el tercer capítulo analizo cómo Angélica consigue cubrir una plantilla, el "pato", con las siete piezas del tangram. Es una manera muy particular de resolver, que ocurre así porque los conocimientos están implicados en un problema que no demanda saber mucho antes, un problema que ella puede abordar sola; porque en el camino encuentra muchas trabas -que seguramente no habría encontrado si la plantilla tuviera marcada una pieza en el interior-, de tal suerte que prueba una y otra vez, y encuentra siempre que por ahí no va; porque los laberintos en los que se ve enfrascada la hacen tomar mucho más tiempo que los demás, así que a diferencia de Luis, que resuelve tranquilo, ella tiene que lidiar con que un problema "es claro como el agua", que todavía no ha terminado, que alguien más fue primero y ella última, que no se vale copiar; porque selecciona una parte de la consigna, dejando de lado otra que después se da por resuelta en el grupo; porque cuando la maestra va a verla, le permite tomar más tiempo y asigna una nueva tarea a sus compañeros de equipo; porque cuando ya no puede seguir sola pide ayuda a Arturo, y cuando él acepta, se mantiene atenta, evalúa y corrige lo que él hace, busca hacerse escuchar por él; porque cuando Arturo se dispone a terminar solo, ella atrapa el momento en el que puede intervenir sin equivocarse. Todo esto confluye en la forma en que finalmente Angélica consigue cubrir el pato.

Resumiendo, cada una de las resoluciones puestas en juego por los alumnos en clase, es una conjugación particular de la naturaleza del conocimiento, la ecología de saberes que se va configurando en el proceso de estudio, la tarea específica que se está abordando -incluyendo su estructura y características particulares como las variables didácticas y la consigna-, la organización y el uso del tiempo, la manera en que se engarzan las producciones de unos alumnos con las de otros, la participación de la maestra, los materiales didácticos con los que se está trabajando y, por supuesto, el azar, la casualidad. Todo eso es en parte una producción local, construida por alumnos y maestro en el aula, y en parte se ve moldeado por condiciones institucionales que se gestan fuera del aula. Entiendo el aprendizaje como un proceso de interacción del alumno con esas dimensiones: todas ellas forman parte del medio con el que interactúa el alumno al estudiar determinada noción en la escuela. Acercarse al problema de la inclusión educativa supone considerar estos factores.

El diálogo entre estudios didácticos y estudios socioculturales

Al usar los dos acercamientos, al mirar desde la didáctica y de estudios socioculturales, fui confirmando que cada uno puede enriquecerse a partir del otro. Ponerlos en diálogo me ha servido para entender cómo se conjugan la "lógica de participación social" y la "lógica del contenido" (Rockwell y Gálvez, 1982) en ciertos aspectos específicos.

Voy primero en una dirección, después en la inversa. Al analizar mis datos, he tratado de entender cómo algunos fenómenos vinculados a la lógica de participación social, mostrados por estudios socioculturales, se juegan en la lógica del contenido. Quiero referirme a tres de ellos: la degradación hacia los alumnos con dificultades, la regulación del orden social de la clase, y la observación como estrategia de aprendizaje.

Me resultó muy útil la explicación del fracaso a partir de la degradación hecha por McDermott (2001); la recuperaba cuando se hacía presente la preocupación no solo por terminar sino por terminar antes que los demás, la vergüenza por no usar las fórmulas, la deficiencia personal como explicativa del fracaso ante una tarea. Pero McDermott no admite que la dificultad y la arbitrariedad de la tarea tengan un papel central en la actividad de los alumnos con discapacidad intelectual: ellos son perfectamente capaces de aprender y de resolver tareas difíciles, es al tratarlos como si no pudieran que se construye su fracaso. Acuerdo en gran parte con esa posición, pero agregaría otros factores determinantes. En varios episodios que he analizado se ve que las tareas también se juegan en ese proceso de degradación. Entre más conocimientos suponen las tareas, o entre más cerradas en tanto que admiten un único procedimiento, más posibilidades de degradación hacia quienes no cuentan con dichos conocimientos o con ese procedimiento. Las interacciones sociales frente a una tarea que solo pocos alumnos pueden abordar son distintas de las interacciones sociales frente a una tarea que la mayoría puede abordar[80]. En ese sentido, las tareas juegan un rol también en la clasificación de alumnos y la producción del fracaso de los que quedan hasta abajo. Para que cierta tarea se plantee cierto día a los alumnos de cierto grupo tienen que suceder innumerables negociaciones a muy distintas escalas. La tarea es -igual que la etiqueta "discapacidad"- una construcción política que refleja, produce, conserva o modifica las contradicciones del sistema educativo.

[80] Por supuesto, con esto no quiero promover actividades de bajo nivel cognitivo, que no presenten reto alguno, para asegurar un alto porcentaje de logro. Eso sería cancelar la actividad matemática de los alumnos.

Naranjo (2009) muestra que los alumnos regulan el orden social de la clase, asumiendo una función que en principio parecería ser del docente, como promover la asistencia o el respeto hacia las discusiones grupales. Su trabajo me hizo ver que esa regulación también atañe al funcionamiento del conocimiento. He mostrado ejemplos en los que, cuando los alumnos resuelven tareas, sobre la marcha las van cambiando, modifican la consigna, negocian algunas normas del contrato didáctico, deciden cuándo, cómo y a quién dar o pedir ayuda, o de quién recibirla. Mucho de esto pasa como si nadie se diera cuenta, en el terreno de lo implícito.

Por último, algo que aparece con cierta frecuencia en la tesis son las múltiples relaciones entre la observación, la copia y la puesta en marcha de procedimientos. Los textos de didáctica que yo leía me llevaban a fijarme en la última: siempre veía cómo hacen un conteo, cómo discuten sobre la relación entre dos figuras, qué pieza del tangram pone quién en qué lugar y en qué momento. No reparaba en la observación hasta que leí el texto de Paradise (1991), quien la analiza con cuidado y valora su papel en el aprendizaje. En ese texto vi mucho sobre la observación, pero me quedaba sin responder la pregunta de si después de observar los niños pueden o no resolver tareas similares: ¿la observación que hacen sirve realmente para construir autonomía en la clase de matemáticas? En mis datos encontré una diversidad de respuestas. Ir a mirar qué hace el otro y poder, a partir de ahí, resolver después solo, depende para empezar de la idea que se tiene respecto a la observación y la copia. No es lo mismo levantarse tranquilamente, con todo el derecho, para ir al asiento de alguien a quien se elige; que mirar apenas de reojo y fugazmente a los que ya han terminado; que resolver mientras el compañero de enfrente tapa su hoja y dice en voz alta que no se vale copiar; que no poder creer que quien tiene al lado a alguien muy inteligente no haya aprovechado todavía la oportunidad para copiarle (copiar también depende de la habilidad para ver la ocasión y aprovecharla, y quien lo hace deja ver esa agilidad de reacción).

En la observación y la copia también está en juego el rumbo que toma la propia resolución, lo que ha hecho antes de ir a observar. Algunos van a mirar a otro cuando ya no dan más, cuando han intentado por varios caminos sin encontrar salida; otros lo hacen desde el principio, esperan la respuesta del otro y la recuperan sin saber de dónde vino; otros son relegados a observar cuando alguien más interviene sin haber sido convocado, y se quedan con pocas posibilidades de hacer más, a su pesar; otros, al observar, atrapan el momento oportuno para intervenir; otros observan después de que su tarea ha quedado resuelta, porque el problema sigue siendo interesante; a otros, observar les permite salir del estancamiento de una manera lenta y poco útil de resolver, dar un salto hacia otro más eficiente y además agregarle cosas nuevas; a otros, observar no les sirve mucho, cuando la distancia entre lo que hicieron y lo que ven es demasiado grande.

Tampoco hay que olvidar que entre quien hace y quien observa y copia muchas veces no hay una ilación directa: ahí también hay otros, hay terceros que le ponen más sal y pimienta al tránsito resolución-observación-resolución. Esos terceros pueden o no estar de acuerdo con la observación, preservar o no la copia, considerar o no las preguntas que surgen a raíz de las diferencias entre lo que se vio y lo que se reprodujo. Finalmente, observar y reproducir también requiere el trabajo intelectual de preservar una imagen que ya no se tiene enfrente (Marchand, 2020), conjugar lo del otro con las propias anticipaciones a partir de las cuales se ve lo que se ve, reconocer otro problema como similar, pensar cómo se puede extender lo que se ha visto para adaptarlo cuando hace falta.

Tomé esos tres trabajos hechos desde perspectivas socioculturales para pensar qué ocurre en torno al conocimiento, o más bien, cómo ciertos aspectos de la organización social del aula se extienden también a la manera en que viven los conocimientos en esa aula, o incluso se configuran también a través de ella. Me dirijo ahora en el otro sentido, es decir, me voy a detener en nociones de la didáctica que me ha sido útil pensar a la luz de las interacciones sociales para analizar mis datos: devolución, contrato didáctico, topogénesis, retroacciones del medio.

Antes de hacer la tesis, yo pensaba en la devolución como algo que se da entre el maestro y un alumno, en singular: el maestro tenía que convencer al alumno -solo a él, como si el proceso con todos fuera un agregado de muchos procesos personales que pueden darse en simultaneidad- de adentrarse en el problema -en todo el problema, tal como lo plantea el maestro. Al analizar la actividad en el aula, fui entendiendo que los alumnos también intervienen en la devolución a un par. A veces, parte de hacerse cargo de un problema es convocar a otro a participar cuando hace falta. La propia maestra, al transferir la responsabilidad del problema al alumno, puede asignarle a un par una parte de esa responsabilidad.

También ocurre con frecuencia que los alumnos se hacen cargo no solo de su problema sino además del que ha sido asignado a un par, de manera espontánea, por iniciativa propia, ya sea cuando perciben que el otro necesita ayuda, cuando la tarea les ha interesado tanto que quieren seguir resolviendo aun después de haber terminado, o cuando la propia tarea parece tan difícil que optan por tomar la de otro al que se le exige menos. Al participar en la resolución de otro, eligen hasta dónde llegar: en ese problema, que es de alguien más, están un poco de invitados, pueden aportar hasta donde den, tienen derecho de salirse cuando no saben más por dónde seguir. También modifican involuntariamente la tarea considerando el avance del par en la resolución: al tomar responsabilidad en la tarea de otro, los alumnos actúan considerando a ese par, lo que lleva andado, lo que le importa, las regulaciones que hace.

La devolución se engarza con las ideas que los alumnos tienen de la observación, de la copia y de sus pares, en función de todo eso deciden hasta dónde resolver solos, cuándo y a quién mirar o pedirle ayudas (a veces, no pedir una ayuda lleva a no poder completar una tarea). Incluso cuando un alumno resuelve solo su propio problema, en la manera de abordarlo están presentes los otros, como, por ejemplo, cuando no se pone en juego un procedimiento que está al alcance y podría funcionar en el problema, por considerar que solo la fórmula es legítima[81].

Además de integrar papel de los pares en la devolución, también me ha sido útil fijarme en el trabajo del alumno para tomar el problema como suyo, más que en el trabajo del profesor para hacer que el alumno acepte la responsabilidad del problema. Encontré que a veces los alumnos aceptan una tarea, pero en el camino van explorando otras que se les ocurren, y así miran cosas que sus compañeros no han visto, a cambio de perderse lo que se va estableciendo como compartido en la clase. También encontré que hay alumnos que actúan para mantenerse resolviendo cuando sus compañeros abren la oportunidad de deslindarse haciéndose cargo ellos. Es decir, me parece que a veces la devolución funciona de sobra, que hay un exceso de devolución, en el sentido de que, al haber muchos interesados en resolver la tarea asignada a un solo alumno, niños que ponen en juego anticipaciones muy distintas y actúan a ritmos muy distintos -por ejemplo, al estar todos quitando y poniendo piezas del mismo tangram en la misma caja al mismo tiempo-, no hay espacio para todos. Así que tienen que desplegar recursos para no quedar fuera, como entrar cuando hay incertidumbre para los otros, o actuar rápidamente cuando se tiene una certeza. Son alumnos que "van por la zona de desarrollo próximo" (Erickson, 1996).

Este último planteamiento implica una imbricación entre las nociones de devolución y de topogénesis. Cuando varios alumnos se involucran en el problema que ha sido asignado a alguien más, o simplemente cuando un problema es asignado de

[81] En este caso hay un asunto de contrato didáctico que termina por hacer que no ocurra una devolución.

entrada a dos o más alumnos, el espacio de resolución se vuelve algo por definir. La noción de topogénesis, acuñada por Chevallard (1997) como herramienta para analizar qué lugar ocupa el maestro y qué lugar ocupan los alumnos en la resolución de las tareas -asunto fundamental para entender qué tanto participan los alumnos en la producción de los conocimientos escolares que se van instaurando-, me ha sido útil también para mirar cómo se distribuyen los alumnos, entre ellos, el espacio de resolución, porque eso es objeto de negociaciones, de colaboración o de conflicto, y ahí también está en juego la diferenciación entre alumnos, el fracaso o el éxito en las tareas. Cuando hay varios alumnos resolviendo un problema en el mismo espacio físico, es decir en la misma caja del tangram o en la misma hoja de papel, se crea un espacio matemático para cada uno de muy distintas maneras: los alumnos pueden tratar de delegar al otro una parte importante, de detenerlo, de hacer una distribución más pareja, o de ampliar el propio espacio, lo que incluso puede derivar en que el responsable original del problema termine por quedar muy al margen. En esas negociaciones, el lugar que ocupa cada uno se va modificando en función de las anticipaciones que les interesa probar, de su habilidad para sostener esas anticipaciones frente a los otros, del grado de incertidumbre, de la rapidez con la que actúan, del deseo de poner al otro a prueba, de las ambigüedades en la consigna, del grado en que se reconocen unos a otros como interlocutores, del espacio que han ocupado unos antes de que otros intervinieran.

Para hablar del contrato didáctico quiero recuperar una norma que permanentemente se hace presente en las clases que observé: hay que resolver los problemas de cálculo de áreas siempre con fórmulas. Ciertamente, la maestra en este caso da un peso fuerte a las fórmulas: estas son, de hecho, su propósito, el contenido por enseñar y el que se privilegia en los libros. Por otro lado, ella permite que también entren al aula problemas que pueden abordarse de otras formas, y para los cuales los alumnos elijan qué procedimiento usar. Creo que todos los alumnos perciben la mayor jerarquía de las fórmulas, pero no la asumen de la misma manera. Valeria dice de inmediato que va a usar la fórmula, pasa por alto las otras posibilidades que ofrece la cuadrícula incluso cuando tiene dificultades para aplicar la fórmula. Luis resuelve cada vez en función de las condiciones del problema: cuenta cuadritos cuando hay cuadrículas, hace transformaciones cuando hay un rectángulo circunscrito, puede dejar ambos de lado si se pide expresamente la fórmula; no parece preocuparle el mayor reconocimiento que tienen las fórmulas, no pone un procedimiento por encima y otros por debajo, usa lo que le conviene cada vez. Ian termina desistiendo de un problema que empieza resolviendo por conteo de unidades, porque no dispone de la fórmula: “yo no quiero contar cuadritos (…) sino que yo lo quiero hacer bien (…) tengo que multiplicar (…) pero no puedo”. Con ejemplos como estos he mostrado que las normas del contrato inciden de distinta manera en la actividad de los alumnos, o bien, que hay una diversidad de formas de posicionarse frente a las normas, o bien, que no se puede hablar de una norma en términos de una regla que opera para todos sino de algo que está presente entre signos de interrogación: ¿hay que resolver los problemas de cálculo de áreas siempre con fórmulas? Para algunos sí, para otros no, para otros más o menos: para Luis son un tipo de procedimiento entre otros disponibles, para Ian los otros procedimientos quedan prácticamente cancelados.

Finalmente, me ha resultado útil la manera en que Sensevy (2011) incorpora al maestro en las retroacciones del medio, y pensar de una forma similar las intervenciones de los pares en la interacción entre un alumno y una tarea. Cuando los alumnos resuelven una tarea que ofrece una manera de validar empíricamente -por ejemplo, un contorno que permite saber si la configuración de piezas es igual al modelo o no-, podría pensarse que la retroacción del problema es suficiente para hacer que los alumnos se cuestionen algunas ideas erróneas. El conflicto entre las anticipaciones que ponen a prueba y lo que resulta puede, en efecto, hacer que los alumnos modifiquen esas anticipaciones. Pero no siempre es así. Los alumnos a veces repiten esa misma anticipación para, ahora sí, hacerla bien, y en todo caso afinarla, sin alcanzar a ver el error de fondo; a veces esa anticipación que los lleva a no poder resolver no es clara para ellos, no son conscientes de estarla movilizando, y si no la ven, tampoco están en condiciones de dudar de ella ni de pensar en otras posibilidades; a veces parece que todo va bien, las piezas van permitiendo cubrir la plantilla, y solo al final o cuando ya se lleva un buen trecho recorrido resulta que no es así, así que corregir implica identificar qué de todo lo que se ha hecho no funciona. En una palabra, el problema no habla por sí solo, la información que devuelve el problema es siempre sujeta a una interpretación. Cuando la interacción con la tarea no es suficiente para que los alumnos modifiquen el procedimiento, la intervención de otro se vuelve imprescindible, ya sea el maestro, cuyo rol destaca Sensevy, o bien los pares, en los que me he fijado aquí. Los dos tipos de ayuda son ciertamente bien distintos. Mientras el maestro puede estar en condiciones de hacer preguntas que contribuyan a explicitar la idea que no parece estar funcionando en el problema, sin asumir el trabajo de producir un nuevo procedimiento, los alumnos no pueden hacer eso: ellos aportan lo que saben, lo que han hecho, la solución, el procedimiento que consideran correcto. Aun así, he destacado que de otra manera el alumno no alcanzaría a resolver, y que la solución no le llega al alumno de entrada, sino cuando ya ha tenido una intensa interacción con el problema.

He utilizado estas cuatro nociones, que los trabajos en didáctica proponen como herramientas para pensar la relación de los alumnos con el maestro a propósito del conocimiento que es objeto de enseñanza, para pensar en las interacciones entre pares, es decir, para hablar de los alumnos en plural, como lo han hecho Fregona y Orús Báguena (2011) con el medio. Resumiendo todo este apartado, para analizar la actividad matemática de los alumnos en clase -esos “encuentros” en los que se habla de un tema específico (Erickson, 1982)-, me ha servido estirar un poco ciertos hallazgos de estudios socioculturales hacia los conocimientos, y estirar nociones de la didáctica hacia las interacciones sociales entre pares.

Con esto termino. He tratado de recoger dos cosas en las conclusiones: dónde están las dificultades o las posibilidades para resolver las tareas, y la manera en que el diálogo entre estudios didácticos y estudios socioculturales me ha permitido analizar esas resoluciones. Tengo que confesar, ahora al final, que, al inicio, cuando leía textos de didáctica o de perspectivas socioculturales, por supuesto me interesaban y me enseñaban siempre cosas nuevas, pero no dejaba de tener presente la pregunta de cuál es mejor. Me esforzaba en encontrar qué cosa se puede mostrar desde un acercamiento que le hace falta al otro. Los niños y la maestra me demostraron que no tiene caso dejar que el tiempo se escurra buscando dónde flaquea una teoría y dónde la otra. En las dos miradas importan las relaciones entre el conocimiento, la tarea, las interacciones inmediatas que suceden en el aula, y las más lejanas que trascienden sus paredes. Es solo una cuestión de inclinación de la balanza: desde la didáctica se ve más el conocimiento matemático, desde las perspectivas socioculturales la vida social. Pero es justamente ahí donde reside la fertilidad de hacerlas confluir. Mejor dicho, usar las dos linternas cuando se tiene un fragmento de video o unas notas de clase enfrente hace que analizarlo sea como tener a Axel y Jorge con el tangram: una pone, la otra agrega y expande, la primera reformula, como ladrillos que se sostienen uno sobre otro. Lo interesante de reunir dos perspectivas luminosas es ver cómo la efervescencia de palabras de una resuena en la efervescencia de palabras de la otra. Y en ese sentido hay todavía mucho camino por recorrer.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, Pedro (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, A. (2006). Prácticas cotidianas y conocimiento sobre fracciones. Estudio con adultos de escasa o nula escolaridad. *Educación Matemática*, 18, (1), pp. 5-35.

Bessot, A. y Eberhard, M. (1983). Une approche didactique des problèmes de la mesure. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 4 (3), 293-324. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Belmonte, J.M. (2005). La construcción de magnitudes lineales en educación infantil. En Chamorro, M.C. (Ed.) *Didáctica de las matemáticas. Colección Didáctica. Preescolar.* Madrid: Pearson Educación.

Berthelot, R. y Salin, M. H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39-56.

Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico* (Tesis doctoral). México: Departamento de Investigaciones Educativas (DIE), Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV).

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, México, *12*, (33), 731-762, abril-junio. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v12n33/1405-6666-rmie-12-33-731.pdf. Fecha de consulta: 29 de junio 2019.

Block, D., Ramírez, M., Reséndiz, L. (2015). Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado: un estudio de caso. *Revista mexicana de investigación educativa*, *20*(66), 711-735.

Block, D. (2018). La enseñanza de las matemáticas en la reforma curricular de 1993 en México. Algunas reflexiones 25 años después. En: Ávila, Alicia (Coord.). *Rutas de la Educación Matemática.* Primera edición. Ciudad de México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., 363. Disponible en: https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/downloads/rutas-de-la-educacion-matematica-30/. Fecha de consulta: 29 de junio 2019.

Broitman, C.A., Cobeñas, P., Escobar, M., Grimaldi, V. (2018, May) Enseñar y aprender matemática en aulas inclusivas. En *IV Seminario Nacional de la Red Estrado Argentina*.

Brousseau, G. (1981). Problémes de didactiques des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Grenoble, *2*(1), 37-125.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G., & Warfield, V. M. (1999). The case of Gaël. The study of a child with mathematical difficulties. *The journal of mathematical behavior*, *18*(1), 7-52.

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1992). Le poids d'un récipient. Etude des problèmes de mesurage en CM. *Grand N*, *50*, 65-87.

Brousseau, G. (2000a). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática,* 12(1), 5-38.

Brousseau, G. (2000b). Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *9,* 21-30.

Brousseau, G. (2001) *Les grandeurs dans la scolarité obligatoire*. Curso para la XI Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas. Versión preliminar.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study (Vol. 7). Libros del Zorzal.

Cambriglia, V. (2018). Emergentes colectivos de generalización en la entrada al álgebra. Tesis de doctorado. Argentina: Universidad de Buenos Aires.

Candela, A. (1990). Investigación etnográfica en el aula: el razonamiento de los alumnos en una clase de ciencias naturales en la escuela primaria. *Investigación en la Escuela. Revista de investigación de innovación escolar.* No. 11, 1990, 13-24.

Candela, A. (2001). Poder en el aula: una construcción situacional. *Discurso*, No. 23-24, 139-157.

Castaño, Y. (en proceso). Trabajo colaborativo entre profesores de secundaria e investigadores. Una experiencia en torno a la caracterización y congruencia de figuras geométricas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Tesis de maestría.

Castela, C. (2019). Un enfoque ecológico de lo didáctico. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica de Perú, 15 de octubre. Conferencia.

Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*, (2-3), 135-182.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* La Pensee Sauvage, 30, 317-366. (hal-01741352)

Chamorro, M.C. (2005). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M.C. Chamorro (Ed.). *Didáctica de las matemáticas. Colección Didáctica. Primaria.* Madrid: Pearson Educación.

Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* SEP, Biblioteca del normalista.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. Recherches en didactique des mathématiques,* 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2019). Des programmes, ou, mais pour quoi faire? Vers une reforme fondamentale de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 39 (1), 97-115.

Dávila, M. (1992). El reparto y las fracciones. *Educación Matemática*, vol. 4, nº 1, pp. 32-45.

De Agüero, M. (2006). El pensamiento práctico de una cuadrilla de pintores. Estrategias para la solución de problemas en situaciones matemáticas de la vida cotidiana. México: CREFAL, Universidad Iberoamericana.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R. y Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N* 76, 7-27.

De Varent, Ch. (2018). Pluralité de concepts liés aux unités de mesure. Liens entre histoire des sciences et didactique, le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens. Thèse de doctorat de Didactique et d'Histoire des mathématiques. París : Université Sorbonne Paris Cité, Université Paris Diderot.

Douady, Regine y Perrin-Glorian, Marie Jeanne (1983). Liason ecole-college. Mesure des longueurs et des aires. Université Paris VII. Institut de Recherche sur l'enseignement des mathematiques (IREM), (48).

Douady, Regine y Perrin-Glorian, Marie Jeanne (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics,* 20 (4), 387-424.

Erickson, F. (1982) Classroom Discourse as Improvisation: Relationships between Academic Task Structure and Social Participation Structure in Lessons. *Communicationg in the classroom*.

Erickson, F. (1996) Going for the zone: the social and cognitive ecology of teacher-student interaction in classroom conversations. En D. Hicks (Ed.) *Discourse, learning, and schooling*. USA : Cambridge University Press.

(1995). *Encyclopaedia Universalis*: Francia.

Fluckiger, A., y Brun, J. (2005). Conceptualisation et classes de problèmes dans le champ conceptuel de la mesure. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, *25*(3), 349-402.

Fregona, D. (1995) Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques. Université Bordeaux I.

Fregona, D. y Orús Báguena, P. (2011). La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Fuenlabrada, I. et.al (1991). *Juega y aprende matemáticas. Actividades para divertirse y trabajar en el aula.* Primera edición. México: Secretaría de Educación Pública, 93.

Gálvez, G. (1995). La descripción de las figuras geométricas en el aprendizaje de la Geometría. En D. Block, H. Balbuena, I. Fuenlabrada y A. Avila (coords.) *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas.* México: Secretaría de Educación Pública.

Gómez Tagle, M. E. (2017). El abandono de la gratuidad en la educación básica: la desigual gestión de recursos para las escuelas públicas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Tesis de maestría.

Goodwin, Ch. (2014). The intelligibility of gesture within a framework of cooperative action. En Seyfeddinipur, M. y Gullberg, M. (Eds.) *From Gesture in Conversation to Visible Action as Utterance: Essays in honor of Adam Kendon.* USA: John Benjamins Publishing Company.

Griswold, O. (2007). Achieving Authority: Discursive Practices in Russian Girls' Pretend Play. *Research on Language and Social Interaction,* 40(4), 291-319. DOI: 10.1080/08351810701471286.

Gutiérrez, K., Sengupta-Irving, T., Dieckmann, J. (2010). Developing a Mathematical Vision: Mathematics as a Discoursive and Embodied Practice. En Moschkovich, J. (Ed.) Language and Mathematics Education. Multiple Perspectives and Directions for Research. Information Age Publishing Inc.

Imaz, E. (2005). *Convertirse en madre. Etnografía del tiempo de gestación.* Feminismos. Madrid, España: Ediciones Cátedra.

Kula, W. (1998). *Las medidas y los hombres.* México: Siglo XXI Editores.

Lembke, L. y Reys, B. (1994). The Development of, and Interaction Between, Intuitive and School-taught Ideas about Percent. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (3), 237-259.

Lozano, M. (Coord.) (2018) *Matemáticas. Primer grado.* Primera edición. México: Secretaría de Educación Pública, 221. Disponible en: https://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2402. Fecha de consulta: 30 de junio 2019.

Marchand, P. (2020). Quelques assises pour valoriser le développement des connaissances spatiales à l'école primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 40(2),* 135-178.

McDermott, R. (2001). The acquisition of a child by a learning disability. *Understanding learning: Influences and outcomes*, 60-70.

Mendoza, T. y Block, D. (2013). Si 100% es todo, ¿cuánto es 120%? Variables didácticas en situaciones de porcentaje. En Broitman, Claudia (compiladora) *Matemáticas en la escuela primaria [II]. Saberes y conocimientos de niños y docentes.* Buenos Aires: Paidós cuestiones de Educación.

Mendoza, T. (2017). Dejar de ver lo que se ve, y ver lo que no se ve: la construcción de las magnitudes en los libros de texto. *XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa.* San Luis Potosí.

Moreira, P. (1996-1997). A propos de l'apprentissage du concept d'aire. *Petit X,* 43, 43-68.

Munkres, J. (2000). Topology. Second Edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Naranjo, G. (2009). Ser alumno. Análisis multimodal de la participación de los alumnos en las clases de ciencias naturales. Tesis de doctorado. DIE-CINVESTAV, México.

Naranjo, G. (2011, enero-junio). La construcción social y local del espacio áulico en un grupo de escuela primaria. *CPU-e, Revista de Investigación Educativa 12.* Recuperado el 15 de octubre de 2019, de http://www.uv.mx/cpue/num12/Inves/naranjo-construccion-social.html

Naranjo, G. (2019). Educar en y para la diversidad de alumnos en aulas de escuelas primarias de la Ciudad de México*. Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva, 13(2),* 209-225.

Neyret, R. (1977). Le Tangram au CM. *Grand N,* 12, 49- 62.

Nespor, J. (1994). Knowledge in motion: Space, Time and Curriculum in Undergraduated Physics and Management. London&Washington: The Falmer Press.

O'Connor, M. C. y Michaels, S. (1996). Shifting participant frameworks: orchestrating thinking practices in group discussion. *Discourse, learning and schooling.* 63-103.

Padilla, E. (2015). Conocimientos matemáticos de menores trabajadores. El caso de la proporcionalidad (Tesis de maestría). México: Universidad Pedagógica Nacional.

Paradise, R. (1991). El conocimiento cultural en el aula. Niños indígenas y su orientación hacia la observación. *Infancia y Aprendizaje* 55, 73-85.

Perrin-Glorian, M. J. (1994). Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège: ce que nous apprend l'étude de classes faibles. *Paris, Petit x*, (35).

Perrin-Glorian, M. J. (1998). Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu : Structuration du milieu pour l'élève et pour le maître. *Actes de Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Université d'été, La Rochelle. IREM de Clermont-Ferrand*.

Perrin-Glorian, M. J. (1999). Le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir de l'exemple des aires. Francia: HAL 01385025.

Perrin-Glorian, M. J. (2009). L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. En C. Margolinas et al, *En amont et en aval des ingénieries didactiques. 15e École d'été des mathématiques.* Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009. Grenoble : La Pensée Sauvage, 57-78.

Perrin-Glorian, M. J. y Godin, M (2018) Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. Francia : HAL-archives-ouvertes. 01660837v2. Disponible en: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837/document. Fecha de consulta: 30 de junio 2019.

Poveda, D. (2005) Metalinguistic activity, humor and social competence in classroom discourse. *Pragmatics,* (15:1), 89-107.

Rebolledo, V. (2015) *Diálogos multivocales en torno al español escrito: La escuela unitaria del pueblo chinanteco de San Isidro Laguna.* Tesis de doctorado. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados.

Rincón, V. y Rincón M.A. (2014). *Cuadernos Gader 5. Matemáticas. Primaria.* México: Valegra.

Rockwell, E. y Gálvez, G. (1982). Formas de transmisión del conocimiento científico: un análisis cualitativo. *Educación: Revista del Consejo Nacional Técnico de la Educación*, 42, 97-139.

Rockwell, E., Rebolledo Angulo, V., Mendoza von der Borch, T., García González, M., Tapia Álvarez, E. et al. (2016). *Yoltocah. Estrategias didácticas multigrado***.** México: Autores, ISBN: 978-607-97459-0-5. Disponible en: www.yoltocah.mx Fecha de consulta: 30 de junio 2019.

Rockwell, E., Mendoza, T., Rebolledo, V. y Tapia, E. (2017). Mediating research and practice: the dilemmas of designing didactic sequences by integrating teacher knowledge and research on teaching. *Revue Française de Pédagogie*, Francia, 201, 41-52, octubre-noviembre-diciembre.

Romo, A. y Hache, C. (2019) Prácticas lingüísticas en la clase de matemáticas. Una experiencia de profesionalización online para profesores de matemáticas. *REDIMAT*, *8*(2), 112-138.

Sadovsky, P. (2003). Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas. Tesis de doctorado. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática. en H. Alagia, A. Bressan, P. Sadovski *Reflexiones teóricas para la educación matemática.* Formación docente. Matemática. Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina.

Sadovsky, P. (2019). La Teoría de la Transposición Didáctica como marco para pensar la vida de los saberes en las instituciones. En Balagué, Claudia (comp.) *Bitácoras de la innovación pedagógica.* Santa Fe, Argentina: Flacso, Santa Fe Educación.

Saiz, I. E. (2003). La derecha… ¿de quién? Ubicación espacial en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B. En Panizza, M. (comp.). *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Salin, M.H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En Chamorro, C. (Ed.) *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño.* España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Santos, L. (2011). Aulas multigrado y circulación de los saberes: especificidades didácticas de la escuela rural. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado,* 15(2), 71-91.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (1962). *Mi libro de tercer año. Aritmética y geometría. Estudio de la naturaleza.* México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP (2000). Matemáticas. Quinto grado. México: SEP.

SEP (2011a). Programas de estudio 2011. Guías para el maestro. Educación básica primaria. Tercer grado. México: SEP.

SEP (2011b). Programas de estudio 2011. Guías para el maestro. Educación básica primaria. Cuarto grado. México: SEP.

SEP (2011c). Programas de estudio 2011. Guías para el maestro. Educación básica primaria. Quinto grado. México: SEP.

SEP (2011d). Programa de estudio 2011. Guía para la educadora. Educación Básica Preescolar. México.

SEP (2014). Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado. Segunda edición. México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP (2017). Orientaciones didácticas, primer grado, matemáticas.

Sensevy, G. (2011). Le sens du savoir. Eléments pour une théorie de l’action conjointe en didactique. Bélgica: Groupe de Boeck.

Sensevy, G., Turco, G., Stallaerts, M. & Le Tiec, M. (2002). Prise en compte de l'hétérogénéité : le travail de régulation du professeur. Le cas de l'étude d'une fourmilière en découverte du monde au cycle 2. *Aster*, 35, *Hétérogénéité et différentiation,* 85-122.

Sokolowicz, D; Spindiak, J. y Terigi, F. (2017). El sistema de numeración en el plurigrado rural: un análisis cualitativo de los aprendizajes infantiles. *V Jornadas de psicopedagogía de Comahue "El aprendizaje en infancias y adolescencias. Prácticas, intervenciones y producción de saberes".* Río Negro, Argentina: Universidad Nacional del Comahue, Centro Universitario Regional Zona Atlántica.

Solares, D. (2012). Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros agrícolas migrantes. Tesis de doctorado. México: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Tabachnik, S. (2007). Retratos secretos. Figuraciones de la identidad en el espacio virtual. *Revista Latina de Comunicación Social*, 1-12.

Terigi, F. (2009). El fracaso escolar desde la perspectiva psicoeducativa: hacia una reconceptualización situacional. *Revista iberoamericana de educación*, *50*, 23-39.

Terigi, F. (2010). Las cronologías de aprendizaje: un concepto para pensar las trayectorias escolares. Santa Rosa. La Pampa. Conferencia disponible en: http://www.chubut.edu.ar/concurso/material/concursos/Terigi_Conferencia. pdf.

Trinidad, C., y Sarao, W. (2019). El papel de la escuela en la adquisición de materiales didácticos en educación primaria. *RIDPHE_R Revista Iberoamericana Do Patrimônio Histórico-Educativo*, Campinas (SP), 5, 1-19, e019023, diciembre.

Vera, H. (2013). El número con sangre entra. Contar, medir y calcular en las calles. México 1895-1940 (Conferencia). México: IISUE, UNAM.

Vergnaud, G., Rouchier, A., Desmoulières, S., Landre, C., Marthe, P., Ricco, G., Samurcay, R., Rogalski, J., Viala, A. (1983). Une experience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12-13 ans). *Recherche en didactique des mathématiques,* 4.1, 71-120. La Pensée Sauvage.

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. En Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Psychology Press.

Weiss, E., Block, D., Civera, A., Dávalos, A., Naranjo, G. (2019). *La enseñanza en educación básica. Análisis de la práctica docente en contextos escolares.* México: Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación.

Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, argumentation, and autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27(4), 458-477.