



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SEDE SUR

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

**Trabajo colaborativo entre profesores de secundaria e  
investigadores. Una experiencia en torno a la caracterización y  
congruencia de figuras geométricas**

Tesis que presenta

**Yesenia Castaño Torres**

para obtener el grado de

**Maestra en Ciencias**

En la especialidad de

**Investigaciones Educativas**

Director de Tesis

**Dr. David Francisco Block Sevilla**

*Para la realización de esta investigación se contó con una beca CONACyT.*

*A ti mi ángel terrenal.*

*Mi dulce compañía.*

## AGRADECIMIENTOS

A mi familia por apoyarme y acompañarme en este camino que decidí emprender lejos de casa. Gracias por sus palabras reconfortantes en los momentos donde me sentía abrumada y triste. Gracias por convertir una videollamada en una regla familiar de cada día. Todo mi amor y gratitud a mi madre Nery, mi padre Alberto, mi hermana Nirieth y mi hermano de corazón, Juanpis.

Mi gratitud a David Block es inmensa. Si escribiera cada cosa por la que le agradezco, ¡llenaría otra tesis! Agradezco desde su decisión de aceptarme como alumna hasta el hecho de convertirse en mi maestro. Seguro que él no se imagina la gran admiración que le tengo y lo mucho que quisiera ser algún día una investigadora de su talla. No fue fácil seguir su ritmo, tuve que esforzarme mucho; ahora, recuerdo y aprecio cada corrección y cada sugerencia. Me siento afortunada de que hubiera sido parte de esta historia. ¡Gracias profe!

Al Maestro Aldo Escamilla por su ayuda incondicional en la búsqueda de las escuelas y maestros que participarían en la investigación. Gracias por estar en cada encuentro del colectivo, por el tiempo para observar clases y los invaluable aportes. Gracias por la gentileza y por haber confiado en mi trabajo desde un inicio.

A las directoras de las dos escuelas que permitieron la participación de sus maestros en la investigación ajustando sus horarios de clase y permitiendo espacios de encuentro dentro de sus escuelas. Agradezco infinitamente a los seis maestros que abrieron sus aulas de clase para que pudiéramos observar y luego discutir sobre lo que allí sucedía. Gracias por su disposición, su compromiso de principio a fin y la gran calidez humana que tuvieron hacia el grupo de investigadores.

A Laura Reséndiz por su acompañamiento durante el trabajo de campo de la investigación, por su gran ayuda con las videograbaciones de las clases y de los encuentros con los maestros. Por su participación en las reuniones del colectivo y por sus valiosos aportes. Por su amabilidad y compañía en los largos trayectos que hacíamos hacia las escuelas.

A Apolo Castañeda por su acompañamiento durante la construcción de la tesis. Gracias por tus sugerencias y comentarios tan acertados y enriquecedores. Gracias a la maestra

Yimmy (Irma Fuenlabrada) por tus comentarios en cada presentación pública y por tu cuidadosa lectura como sinodal.

A mis adoradas amigas Jess, Bere y Yuri que disfrutaron y padecieron a mi lado los ires y venires de esta maestría. Gracias por las lecturas compartidas, por las charlas después de clases, por la originalidad y exageración de nuestras tareas porque nos dejábamos llevar y terminábamos poniéndonos más trabajo del que tocaba hacer; a ustedes gracias por las risas infinitas, por las traspasadas y por cada encuentro para chismear. Aprendí mucho con ustedes. Mi gratitud y cariño siempre.

A mis amigas del alma que dejé en Colombia, Chiqui, Yuly, Luz Ángela. Gracias por su amor, sus palabras de aliento, sus llamadas y por creer en mí más que yo misma.

A mis compañeros de maestría Misraim, Fernando, Fede, Rocío que también me acompañaron y me regalaron bonitos momentos. Rocío fue mi compañera de lucha en la construcción de mi tesis. Agradezco por nuestras eternas charlas por notas de voz tratando de entender un texto de didáctica, por nuestras mutuas lecturas de nuestros avances de la tesis y por el ánimo que me diste en cada momento de dificultad.

A mi querida Diana Carolina por su apoyo en cada momento. Gracias por regalarme la dicha de tener un sobrinito. A ti mi adorado Santi por las alegrías que me regalas cada día.

A todos mis compañeros del seminario de Didáctica de las matemáticas les agradezco por ser parte de este camino. Tanto la tesis como yo tenemos un pedacito de su disciplina y su tenacidad. Gracias por permitirme ser parte de esta familia. Deseo poder seguir disfrutándolos al son de esos tinticos que me hacían sentir como en casa. David, Tatiana, Margarita, Laura, Javier, Ligia, Apolo, Alejandra, Aldo, Juanjo, María y Octavio, cada uno de ustedes tienen una personalidad única...desde afuera se puede ver que ¡son la mezcla perfecta! ¡infinitas gracias!

A los maestros del DIE, con los que tuve la fortuna de coincidir en las clases. Mi admiración y respeto para cada uno de ustedes. Gracias Inés Dussel por esa calidad humana tan maravillosa.

A todos ¡infinitas gracias! Gracias México lindo y querido por estos años de aprendizaje y de felicidad.

## RESUMEN

El propósito principal de esta investigación es aportar conocimientos sobre una estrategia de formación de maestros de matemáticas en servicio de secundaria, en el tema de geometría. La estrategia constituye un trabajo colaborativo entre maestros e investigadores. El enfoque que subyace al tratamiento de contenidos es constructivista, en el sentido de dar un lugar central a la resolución de problemas en los procesos de aprendizaje, y está fundamentado en la Teoría de las Situaciones Didácticas [TSD]. La experiencia se llevó a cabo con cinco maestros de dos escuelas secundarias de la Ciudad de México. El tema fue la caracterización y propiedades de algunas figuras geométricas.

La estrategia de formación elegida consta de un dispositivo de trabajo que alterna la implementación en los salones de clase, de situaciones didácticas propuestas por investigadores como base para el trabajo con los alumnos y los maestros y la reflexión sobre esta experiencia. En ese sentido, se apunta a la doble dimensión del enfoque colaborativo: la formación y la investigación.

## **ABSTRACT**

The main purpose of this research is to make a contribution about a training strategy addressed to mathematics in service teacher's of secondary school, around the geometry subject. The strategy constitutes a collaborative between teachers and researchers. The approach that underlies the educational contents treatment is constructivist, in the sense that it gives a central place to the problem resolution in the learning processes, and that is grounded on the Theory of Didactical Situations [TDS]. This experience was implemented with five teachers of two secondary schools of Mexico City. The subject-matter was the characterization and properties of specific geometric figures.

The chosen training strategy consists of a work device that alternates the implementation in classrooms of didactic situations, proposed by the researchers as a shared base to work with the students and the teachers, and a reflection about this experience. In this sense the aim is the double dimension of collaborative approach: formation and research.

## INDICE

<b>RESUMEN</b> .....	6
<b>INDICE</b> .....	8
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	12
<b>CAPÍTULO 1: REFERENTES TEÓRICOS, OBJETO DE ESTUDIO Y METODOLOGÍA.</b> .....	15
1.1 La investigación participativa como un enfoque cualitativo .....	15
1.1.1 El modelo colaborativo de los canadienses .....	16
1.1.2 Algunas diferencias entre la investigación colaborativa canadiense y otros enfoques colaborativos .....	21
1.2 Nociones de la teoría de situaciones didácticas [TSD] .....	25
1.3 La geometría y su enseñanza en la escuela .....	27
1.3.1 ¿Qué se entiende por geometría? .....	28
1.3.2 ¿Qué esperar de la geometría en la formación de los alumnos? .....	30
1.3.3 Problemáticas de la enseñanza “real” de la geometría en la escuela .....	32
1.3.4 La geometría en los programas escolares de la secundaria mexicana .....	34
1.4 Propósito y preguntas de la investigación .....	35
1.5 Metodología: Etapas del modelo colaborativo .....	37
1.5.1 Etapa de co-situación .....	37
1.5.2 Etapa de cooperación .....	49
1.5.3 Etapa de co-producción .....	50
<b>CAPÍTULO 2: ANÁLISIS DEL TRABAJO COLABORATIVO ENTRE INVESTIGADORES Y MAESTROS. LA SITUACIÓN 1 Y 2.</b> .....	52
2.1 La primera situación: El establecimiento de la colaboración .....	52
2.1.1 Dimensión Formativa .....	53
2.1.2 Dimensión de investigación .....	65
2.2 La segunda situación: Una colaboración que se reconfigura desde la experiencia colectiva .....	72
2.2.1 La planeación de la implementación .....	72
2.2.2 La implementación de la situación en el aula .....	92
2.2.3 La reflexión de la experiencia en aula .....	129
2.3 Síntesis y comentarios .....	142
2.3.1 Dimensión Formativa .....	143



2.3.2 Dimensión de investigación.....	149
<b>CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DEL TRABAJO COLABORATIVO ENTRE INVESTIGADORES Y MAESTROS. LA SITUACIÓN 3.</b> .....	156
3.1 La planeación de la implementación .....	156
3.1.1 Las condiciones mínimas como una indicación específica de la consigna ..	157
3.1.2 Validar el criterio LLL y luego restringirlo para que aparezcan otros .....	157
3.1.3 Un contraejemplo para invalidar un falso criterio .....	159
3.2 La implementación de la situación en el aula .....	159
3.2.1 Primera aplicación .....	160
3.2.2 Segunda aplicación .....	182
3.3 La reflexión de la experiencia en aula.....	190
3.3.1 La colaboración entre investigadores y maestros .....	190
3.3.2 La colaboración entre pares y la regulación del investigador.....	203
3.4 Síntesis y comentarios .....	205
3.4.1 Dimensión Formativa .....	206
3.4.2 Dimensión de investigación.....	214
<b>CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES</b> .....	222
4.1 Acerca de la formación de los maestros y los conocimientos de los alumnos....	222
4.1.1 Diversidad de formas de apropiación. La mirada desde la investigación .....	222
4.1.2 Los conocimientos de los alumnos. ....	230
4.1.3 La reflexión como práctica colectiva. La perspectiva de los maestros.....	232
4.2 El funcionamiento del dispositivo diseñado por los investigadores .....	242
4.2.1 La relación entre maestros e investigadores en el marco del trabajo conjunto. .....	243
4.2.2 Las formas que adquirió la colaboración en el marco del trabajo conjunto. ....	249
4.2.3 La reestructuración de las situaciones didácticas de comunicación. La co- construcción de conocimiento. ....	251
4.3 Comentario final: Desafíos de la investigación colaborativa.....	253
<b>REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS</b> .....	257
<b>ANEXOS</b> .....	263
Anexo 1: Ficha didáctica dirigida a los maestros .....	263
Anexo 2: Memoria del taller de geometría escolar para profesores de matemáticas .....	281

## ÍNDICE DE FOTOGRAFÍAS

Fotografía 1: Ejemplo de producción de los alumnos, situación 2. Mtra Liliana. Fuente: propia .....	75
Fotografía 2: Ejemplo de posición inclinada para indicar un lado del paralelogramo. Fuente: Propia .....	75
Fotografía 3: Figuras modelo en madera. Situación 2. Mtro Fabio. Fuente: Propia .....	95
Fotografía 4: Cartel con producciones de Situación 2. Mtra. Liliana. Fuente: Propia ..	113
Fotografía 5: Ejemplo de congruencia entre la figura modelo y su reproducción. ....	114
Fotografía 6: Ejemplo de no congruencia entre la figura modelo y su reproducción. ..	114
Fotografía 7: Correspondencia entre las parejas A y B. Situación 2. Mtra. Sara. Fuente: Propia .....	119
Fotografía 8: “Dos líneas de 16 cm, una arriba de la otra” .....	122
Fotografía 9: Figura obtenida al unir las líneas “en diagonal”. .....	122
Fotografía 10: Vértice donde debe trazarse el ángulo. Indicación de una alumna. ....	124
Fotografía 11: Ángulo de 155°. Obtuso. Situación 2. Mtra. Sara. Fuente: Propia .....	124
Fotografía 12: Acuerdos de la puesta en común. Situación 2. Mtra. Sara. Fuente: Propia .....	126
Fotografía 13: Representación criterio ALA (Ejemplo Mtra. Sara). Fuente: Propia. ....	200

## ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 1: Estructura del dispositivo de formación. Fuente: Propia .....	45
Imagen 2: Figura modelo 1. Situación 1 .....	56
Imagen 3: Figuras modelo. Situación 2. Mtra. Liliana. Fuente: propia. ....	74
Imagen 4: Figuras modelo. Versión 2. Situación 2. Mtra. Liliana. Fuente propia .....	98

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Aprendizajes esperados. Primer año de secundaria (SEP, 2017, p. 322) .....	35
Tabla 2: Situaciones didácticas para la implementación en aula. Fuente: Propia .....	42
Tabla 3: Situaciones didácticas previstas para los maestros. Fuente: Propia .....	44
Tabla 4: Porcentaje de suficiencia en los mensajes reportados. Situación 1. ....	61
Tabla 5: Estrategias de gestión propuestas por los maestros Situación 2. Fuente: Propia .....	89
Tabla 6: Intervenciones de la Mtra. Sara durante el trabajo de los alumnos. Situación 2. Fuente: Propia .....	101
Tabla 7: Porcentaje de suficiencia en los mensajes reportados por los cuatro maestros. Situación 2. Fuente: Propia. ....	103
Tabla 8: Mensajes originales y mensajes ajustados por los receptores. Mtra. Sara. Fuente: propia .....	128
Tabla 9: Características de los mensajes según los maestros. Situación 2. Fuente: propia .....	138
Tabla 10: Porcentaje de suficiencia de los mensajes por maestro. Situación 3, aplicación 1. Fuente: Propia .....	164

Tabla 11: Colección de datos considerados por los alumnos para describir la figura. Fuente propia.....	165
Tabla 12: Datos considerados por los alumnos para describir el triángulo. Situación 3, aplicación 2. Fuente propia .....	185
Tabla 13: Características de los mensajes según los maestros. Situación 3. Fuente: propia .....	200

## INTRODUCCIÓN

### 1. Antecedentes y propósitos

La problemática que se aborda en este estudio es la de la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria. Varias investigaciones (Itzcovich y Broitman, 2001) han reportado que este sector de las matemáticas ha ido perdiendo espacio y sentido, tanto en los programas curriculares como en la formación docente, lo que ha dificultado a los maestros el diseño, selección y/o adaptación de situaciones de enseñanza que brinden una oportunidad de formación matemática para los alumnos (Itzcovich, 2005).

El ángulo desde el cual se aborda esta problemática es la de la formación de maestros en servicio: se estudia una modalidad específica de formación con docentes, el trabajo colaborativo de maestros e investigadores. En lo que sigue explico brevemente esta modalidad.

Desde finales del siglo XX, la investigación participativa surgió como respuesta a una mirada “mecanicista” sobre el maestro, inscrita en una problemática más general: el alejamiento del mundo de la investigación y el de la práctica (Desgagné, Bednarz, Lebuis, Poirier y Couture, 2001). Este giro en la forma de hacer investigación promovió la participación de los actores implicados en las problemáticas que se quieren investigar, en una dinámica de acción y reflexión que posibilite influir positivamente en la solución de dichas problemáticas (Anadón y Couture, 2007).

Entre las distintas alternativas que se desarrollaron en el marco de la investigación participativa se encuentran los estudios colaborativos, en particular, el enfoque en el que se inscribe esta investigación: el modelo colaborativo de Desgagné et al. (2001). Estos estudios colaborativos se distinguen por la idea de reconocer los saberes de la acción de los profesionales como objeto de estudio. Un interés de los investigadores es indagar la manera como los docentes comprenden su propia práctica y lo que guía sus decisiones en el aula. Esto se ha abordado desde el diseño de dispositivos de trabajo que permiten un retorno reflexivo sobre la práctica (Desgagné et al., 2001). Se trata entonces de una renovación en la relación establecida entre el investigador y los maestros en lo que respecta a la investigación relacionada con la práctica docente, es decir, de modificar el estatuto de “ejecutores de los productos de la

investigación” que se ha atribuido a los maestros, para convertirlo en el de co-constructores de un saber del que ellos y su práctica son la fuente (Desgagné, 1997).

Esta forma de trabajo con los docentes que propone la investigación colaborativa ayuda a hacer frente a una problemática particular de la investigación en didáctica relacionada con el tema de la reproducibilidad de las situaciones didácticas en los contextos escolares. A lo largo del tiempo se observó que los maestros encontraban difícil llevar a cabo las situaciones diseñadas en el ámbito de la investigación, por lo que las adaptaban a su forma de hacer las cosas, lo que en algunos casos se alejaba de los objetivos que se habían planteado los investigadores (Bednarz, Poirier, Desgagné, y Couture, 2001). El problema viene en gran parte de que estas situaciones son objeto de apropiación por parte de los docentes de acuerdo con las limitantes institucionales, sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje, entre otras (ver también Block, et al., 2007). El modelo colaborativo en el que se inscribe esta investigación, aborda el tema de la producción de secuencias didácticas desde otra perspectiva: se concibe que tal producción debe considerar el punto de vista de los profesionales, su conocimiento de la experiencia, su contexto particular de intervención, sus rutinas de intervención, entre otras (Bednarz et al., 2001).

Entre los aportes de esta investigación se destacan los procesos de formación continua de los maestros en relación con un aspecto de la enseñanza de la geometría y la producción de un conocimiento (situaciones didácticas) mejor adaptado a las necesidades de la práctica.

## 2. Las partes de la tesis

La tesis está constituida por cuatro capítulos. A continuación, describiré brevemente cada uno de ellos:

En el capítulo uno documento los referentes teóricos que apoyan y orientan el análisis de la experiencia colaborativa y la metodología que usé para la investigación. En la parte de los referentes teóricos, presento algunos modelos colaborativos que se han propuesto para el trabajo conjunto entre investigadores y maestros y que se han ocupado particularmente de la enseñanza de las matemáticas (Desgagné, 1997; Sensevy, Forest, Quilio y Morales, 2013; Sadovsky, Itzcovich, Quaranta, Becerril, y García, 2016) También, algunos conceptos básicos de la Teoría de las situaciones didácticas [TSD] (Brousseau, 2007), que utilizo para comprender y analizar el

funcionamiento de las situaciones didácticas en el aula y la práctica de los maestros y, por último, un panorama general de la enseñanza de la geometría en la escuela, considerando lo que está planteado para su enseñanza en los programas curriculares del Modelo Educativo de 2017 en México. En la segunda parte describo las distintas etapas en las que se desarrolló la experiencia de trabajo con los maestros en el marco del modelo colaborativo adoptado para esta investigación.

En el segundo y tercer capítulos analizo el funcionamiento del dispositivo de formación diseñado para el desarrollo de la experiencia colaborativa, en relación con las tres situaciones didácticas que se escogieron para el trabajo con los maestros (las dos primeras situaciones en el capítulo 2, y la tercera en el capítulo 3). Analizo los tres momentos que caracterizaron el trabajo en el dispositivo: los espacios de planeación colectiva de las situaciones, la implementación en aula por parte de los maestros y los espacios de reflexión colectiva de la implementación. En particular, analizo el establecimiento de la colaboración entre los investigadores y los maestros, así como los cambios y permanencias del trabajo conjunto a medida que avanzaba el dispositivo.

Por último, en el capítulo 4, sintetizo los hallazgos de la investigación. Por un lado, en relación con la formación para los maestros, en la que doy cuenta de las características de los procesos de apropiación de las situaciones a lo largo de la experiencia colaborativa, así como del funcionamiento del dispositivo de formación. La experiencia confirmó que, en efecto, el análisis de las prácticas de enseñanza en espacios de trabajo colaborativo construye un camino para el desarrollo profesional de los maestros y la investigación en didáctica.

## **CAPÍTULO 1: REFERENTES TEÓRICOS, OBJETO DE ESTUDIO Y METODOLOGÍA.**

Este capítulo está organizado en cinco apartados. En los tres primeros presento un breve panorama de algunos modelos colaborativos que se han propuesto para el trabajo conjunto entre investigadores y maestros, y que se han ocupado específicamente de la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, algunos conceptos básicos de la Teoría de las situaciones didácticas [TSD] (Brousseau, 2007), que utilizo para comprender y analizar el funcionamiento de las situaciones didácticas en el aula y para analizar la gestión de los maestros y, finalmente, una breve discusión sobre el panorama de la enseñanza de la geometría en la escuela, situando lo que está planteado para su enseñanza en los programas curriculares del Modelo Educativo de 2017.

En la cuarta parte, presento el objetivo y las preguntas que orientaron el desarrollo y análisis de esta investigación y, en el último apartado, presento la metodología que seguí para el desarrollo de la experiencia colaborativa con los maestros.

### **1.1 La investigación participativa como un enfoque cualitativo**

En diversos campos de las ciencias sociales y humanas (la educación, la comunicación, la economía, entre otros), la investigación dio un giro importante que implicó la ruptura con el clásico positivismo, donde el investigador se ubicaba como un agente externo y “objetivo” frente a sus objetos de investigación (esto incluía personas o comunidades). El giro consistió en hacer de la investigación un proceso dinámico entre investigadores y comunidades, repensando de esta manera las relaciones tradicionalmente vistas como el “experto” y el “neófito” (Lascoumes, 2001 en Anadón y Couture, 2007). Tal orientación generó diversas formas de hacer investigación, metodologías alternativas y sobre todo, una valoración al proceso de producción de conocimiento llevado a cabo en conjunto con los actores involucrados (Anadón y Couture, 2007).

La investigación participativa [IP] como parte de estos nuevos enfoques propone una relación activa entre los distintos actores en la que se co-construye conocimiento y realidad. Las diversas propuestas participativas tienen en común que se reconoce el sujeto (la persona o comunidad) en su contexto tratando de comprender el significado y las implicaciones del problema de investigación y su solución para la comunidad (Anadón

y Couture, 2007). Los elementos que pueden contribuir a este proceso están determinados por la elección de métodos que favorecen la interacción entre los actores (investigadores y sujetos, investigadores y maestros o investigadores y comunidades), por una dinámica de reflexión y acción, y por la capacidad de influir positivamente en la práctica a través de una retroalimentación sistemática que permita ajustar los procesos con el tiempo.

La IP ha registrado a lo largo de los años una diversificación de enfoques y de denominaciones por lo que hoy en día se observa una polisemia del concepto y, al mismo tiempo, una multiplicación de perspectivas que quieren vincular los mundos de teoría y práctica a fin de incorporar la mirada de investigadores y profesionales en la producción de un conocimiento relacionado con la práctica. Por ejemplo, Anadón y Couture (2007) destacan los trabajos de investigación acción desarrollados por Anadón (2007), la investigación-intervención (Sebillote, 2007), el aprendizaje colaborativo (Monnet, 2002) y la investigación colaborativa (Desgagné, 1997), por solo mencionar algunos de los más recientes. Estos enfoques refieren necesariamente al vínculo entre la investigación y la acción, la teoría y la práctica y la lógica del investigador y la de los profesionales (Anadón y Couture, 2007).

En los siguientes apartados, me interesa profundizar en tres enfoques participativos que se vinculan al ámbito de la didáctica de las matemáticas: La investigación colaborativa desarrollada por un grupo de Canadá (Desgagné, 1997), (Desgagné, Bednarz, Lebuis, Poirier y Couture, 2001), (Desgagné y Bednarz, 2005); La ingeniería cooperativa (Sensevy, Forest, Quilio, y Morales, 2013), (Morales, Sensevy, y Forest, 2017) y, el trabajo que viene desarrollando entre docentes e investigadores en matemáticas el grupo de Sadovsky, Itzcovich, Quaranta, Becerril, y García (2016) en Argentina. Haré énfasis en el enfoque de la investigación colaborativa (Desgagné, 1997) que orientó el trabajo que realicé con los maestros para esta investigación. Lo describiré primero y, desde ese acercamiento, destacaré algunas diferencias que guardan los otros dos.

#### 1.1.1 El modelo colaborativo de los canadienses.

Hacia la década de 1990, una comunidad de investigadores canadienses del Centro Interdisciplinario de Investigación para el Aprendizaje y el Desarrollo en la Educación (CIRADE) desarrollaron un enfoque de investigación colaborativa. Su eje estaba



constituido por una *actividad reflexiva* entre profesionales e investigadores que se reúnen para interactuar y explorar juntos un aspecto de la práctica que sea de interés común. Esta actividad reflexiva se basa en la explicitación, clarificación y el análisis de situaciones de práctica (implementadas por los profesionales) en el marco de una experiencia de trabajo colaborativo (Morellato, 2017). Lo que se debe garantizar es que a través de dicha actividad reflexiva se promueva una especie de *conversación* (tomada de Schön, 1991, en Desgagné et al., 2001) entre la práctica de los profesionales y la retroalimentación reflexiva sobre esta práctica que se da entre profesionales e investigadores.

Sumado a lo anterior, este enfoque colaborativo forma parte de una perspectiva de investigación y formación continua, ya que combina actividades de producción de conocimiento y desarrollo profesional (Morellato, 2017).

De acuerdo con Desgagné (1997) este enfoque está estructurado en tres dimensiones que definen sus pilares epistemológicos: a) La investigación colaborativa presupone la co-construcción de un objeto de conocimiento entre investigadores y profesionales; b) La investigación colaborativa combina actividades de producción de conocimiento y desarrollo profesional y c) La investigación colaborativa tiene como objetivo mediar entre la comunidad de investigación y la comunidad de práctica.

a. La investigación colaborativa presupone la co-construcción de un objeto de conocimiento entre investigadores y profesionales.

En su sentido más amplio, el concepto de investigación colaborativa toma forma alrededor de la idea de investigar *con* en lugar de *sobre* maestros (Lieberman, 1986, en Desgagné et al., 2001). Este enfoque se opone a considerar al maestro como un objeto de investigación y a analizar la práctica desde una mirada distante y evaluativa; por el contrario, se acerca a la idea del maestro como un socio de la investigación, con quien se proyecta una mirada cómplice y reflexiva sobre la práctica. Se trata entonces de reconocer precisamente lo que Schön (1998) denominó el “conocimiento de la experiencia”, su forma de ejercer la “habilidad de actuación en la situación”, ya sea desde el ángulo de un enfoque didáctico-pedagógico o en otras facetas como la explicación del modo de gestión del aula por parte del profesor, la evaluación de los materiales de

enseñanza utilizados en el aula, el desarrollo de un modo de apoyo para estudiantes con dificultades, entre otros (Desgagné, 1997).

Partimos de la idea que, en estas investigaciones, colaborar no significa que todos (investigadores y maestros) deban participar de las mismas tareas, por ejemplo, los profesionales no están llamados a definir un objeto de investigación, la elección de herramientas metodológicas o el análisis de datos; así como los investigadores no están llamados a intervenir en las aulas; se trata de que, al partir de un proyecto común, todos los actores pueden beneficiarse de la contribución específica que cada uno hace en beneficio de todos los socios. La idea básica de colaboración en el marco de este enfoque consiste en un intercambio de conocimientos entre actores de diferentes culturas y que no necesariamente tienen que responder a los mismos objetivos. Los profesionales maestros están interesados en mejorar su práctica y alcanzar el aprendizaje en sus alumnos, mientras que la comunidad de investigadores debe contribuir a la producción de conocimiento en un campo determinado. Pero, en el marco de estas diferencias, el acuerdo de colaboración es justamente garantizar que la misma *actividad reflexiva* (que es organizada con base en un interés común de las partes) responda a las respectivas expectativas. Otros significados que toma la colaboración en investigación consisten en una preocupación por la influencia de estos actores, profesionales e investigadores y sus respectivas culturas. Es decir, los investigadores se interesan por producir un conocimiento que considere el punto de vista de los profesionales y las características de sus contextos de acción; así como los profesionales se interesan por desarrollar su práctica considerando el punto de vista del investigador. En este sentido, como afirman Desgagné et al. (2001), el acuerdo de colaboración también implica que existe una influencia entre la práctica y la investigación; de ahí la idea de *co-construcción* de un conocimiento en el que se utilizarán las habilidades respectivas de los diferentes actores.

Desde un punto de vista epistemológico, en el modelo colaborativo la construcción del conocimiento relacionado con un aspecto de la práctica debe considerar tanto el contexto real de los maestros y la comprensión que ellos dan a las situaciones que se están analizando, ya que estos contribuyen no solo a la estructuración de estas situaciones sino a la práctica misma. (Desgagné, 1997).

b. La investigación colaborativa combina actividades de producción de conocimiento y desarrollo profesional.

La investigación colaborativa supone por un lado buscar el apoyo de los profesionales (maestros) para indagar sobre un objeto de investigación y establece con ello un dispositivo necesario, entre otras cosas, para recopilar y analizar datos para la producción del conocimiento. El reto de esta perspectiva es que el proyecto de colaboración coloque al investigador en una situación de co-construcción con los profesionales en una actividad de investigación y capacitación de manera simultánea. De hecho, aliarse con los profesionales para construir conjuntamente y, al mismo tiempo, introducirlos en un proceso de mejora de algún aspecto de su práctica profesional ya es un juego “en dos mesas” tanto para el investigador como para los maestros (Desgagné,1997).

Esta identidad dual, tal como se concibe, es requerida por el concepto mismo de colaboración porque este supone que cada socio puede participar en ella desde sus respectivas preocupaciones e intereses (Arnaud, 1986 en Desgagné, 1997). El punto de encuentro de los distintos actores radica en que la producción de conocimiento mejorará la práctica (pues para los profesionales es una oportunidad de capacitación a quienes se les propone revisar su práctica con el fin de aclararla y mejorarla) y, al mismo tiempo, la práctica informará la producción de un conocimiento en un campo de investigación determinado (lo que para el investigador es su objeto de indagación) (Desgagné,1997). Es precisamente la actividad reflexiva la que permite capturar una práctica que se está haciendo en un “conocimiento” que se está construyendo.

Esta colaboración entre investigadores y profesionales, al menos en el campo de la educación, busca modificar el estatuto socialmente atribuido a los maestros como ejecutores de un saber producido por otros, para lograr un estatuto de co-constructores de un saber del que ellos son la fuente (el actuar es fuente del saber) y con el apoyo del cual ejercen su práctica (el saber ilumina el actuar) (Desgagné, 2007). Esta perspectiva requerirá un investigador sensible al profesional que tenga en cuenta la mirada de estos maestros y las limitaciones de su acción y, a su vez, profesionales sensibles a la investigación que tengan en cuenta el punto de vista del investigador y las limitaciones de la investigación (Desgagné,1997).

c. La investigación colaborativa tiene como objetivo mediar entre la comunidad de investigación y la comunidad de práctica.

La tercera dimensión de este modelo colaborativo nos sitúa en la idea de mediación entre la investigación y la práctica. Partiendo de que los profesionales e investigadores hacen parte de comunidades de práctica diferentes, la colaboración sugiere “unir” estos dos mundos con el surgimiento de una nueva comunidad en torno a esta unión deseada (Desgagné et al., 2001).

En el marco de estas investigaciones colaborativas, el investigador juega un papel central. De acuerdo con Desgagné (2007) es él quien echa a andar la experiencia de trabajo con los maestros y quien establece, desde el principio, el contrato colaborativo y quién va a regularlo después:

(...) es [el investigador] quien tendrá la responsabilidad de lograr que ese contrato modifique la relación de disimetría entre la representación que se hacen los practicantes del investigador y la que se hace el investigador de los practicantes en cuanto a la producción del saber de la práctica. Es él quien tendrá la responsabilidad de lograr que ese mismo contrato colaborativo permita un mestizaje de lógicas y de sensibilidades práctica y teórica el cual permite a su vez la producción de ese saber llamado estratégico o a la medida. En ese sentido, el investigador colaborativo, en una empresa tal, juega un papel de actor en la interface entre las comunidades que contribuyen a la construcción y a la producción del saber en juego, ya sea la comunidad profesional a la que se remiten los practicantes, es decir la comunidad profesional, y la comunidad científica a la que se remite el investigador qué es el mismo (p.8).

Esta línea de trabajo colaborativo es muy cercana a los enfoques etnometodológicos. De hecho, de acuerdo con estas corrientes, un investigador debe ingresar a un entorno determinado y crear una situación “reflexiva” que le permita interactuar con los actores y vincularlos a un tema determinado, tema que corresponde a su objeto de investigación. Para comprender mejor esta realidad, el investigador debe prestarse para desempeñar un doble papel: El de integrarse en la comunidad como miembro participante (lo que le permite tener acceso a la comunidad, *hacer que hablen*) y como investigador (lo que le permite construir su objeto de investigación); es en este sentido que hablamos del investigador como un “observador participante”. Esta vinculación con lo etnometodológico que plantea Desgagné (1997), expresa de nuevo esa encrucijada entre dos comunidades en las que se mueve el investigador: el de la práctica que lo obliga a acercarse a la cultura escolar e integrarse allí como formador, y el de la investigación que lo obliga, entre otras cosas, a las necesidades de análisis de

datos y presentación de resultados, para dar un paso atrás de su intervención y del discurso de los profesionales (Desgagné,1997).

1.1.2 Algunas diferencias entre la investigación colaborativa canadiense y otros enfoques colaborativos.

- El modelo de investigación-acción es uno de los primeros hitos que estableció el interés de anclar la investigación en la práctica. Desde 1940, Dewey y Lewin (precursores de este enfoque) motivaron la idea de devolver a los maestros el “poder” sobre su práctica al hacerlos investigadores, es decir, profesionales de su práctica (Desgagné,1997). Para Couture et al. (2007), la investigación-acción documenta un proceso de cambio que está vinculado a la acción y se respalda por los profesionales que en campo se convierten en investigadores. Este modelo también ha adquirido diversos enfoques a lo largo de los años y con ello ha dado lugar a una serie de nociones como: investigación-acción, investigación-acción participativa o investigación-acción crítica o emancipadora, entre otros.

La diferencia de este enfoque con el modelo colaborativo es que mientras este (la investigación acción) se interesa por reunir investigadores y profesionales para devolver ese “poder” a los maestros al ser investigadores, el foco de la colaboración está en la co-construcción de significado conjunto, sin hacer necesariamente que los profesionales sean investigadores y sin que esa identidad del profesional-investigador sea condición de su emancipación. Para Desgagné (1997), el enfoque colaborativo confía en un empoderamiento compartido entre investigadores y profesionales.

- Otra distinción que me parece importante hacer en este apartado es entre la investigación colaborativa (IC) y la investigación sobre procesos colaborativos. La diferencia es que para el primer tipo (IC), es necesaria la identificación de un objeto de investigación que será compartido y vinculado a la práctica como parte del proceso de co-construcción. Mientras en el segundo enfoque, es la colaboración entre actores lo que se estudia, sin que necesariamente el investigador esté vinculado al proceso como participante. De esta manera, el investigador se interesa por ese proceso de colaboración y los aprendizajes que se generan desde una postura externa (Couture et al., 2007).

- El tercer enfoque con el que quiero presentar algunas diferencias (que hasta el momento he logrado identificar) es la Ingeniería cooperativa. Esta línea de trabajo ha sido desarrollada en el Centro de Investigación en Educación, Aprendizaje y Didáctica (CREAD) por una comunidad de investigadores franceses. Gérard Sensevy y Alain Mercier (investigadores centrales de este enfoque) mencionan que una ingeniería cooperativa involucra a docentes e investigadores didácticos que comparten problemas situados en la práctica educativa. Generalmente son problemas de enseñanza, relacionados con el conocimiento en cuestión en un currículum dado (Sensevy et al., 2013). Para estos autores, la investigación se lleva a cabo dentro de un proyecto de ingeniería que prueba hipótesis durante situaciones implementadas en clases, de ahí que la investigación tenga un aspecto de ingeniería.

La diferencia entre estos dos enfoques (la ingeniería y el colaborativo) tiene que ver con sus raíces históricas. El enfoque canadiense nació ligado a una tradición de formación de profesionales y en el marco de la investigación participativa; la ingeniería cooperativa por su parte, aunque se ubica en esta perspectiva de investigación participativa, apareció recientemente en un marco muy específico que es la didáctica de las matemáticas (Morellato, 2017). En relación con el papel del investigador, la investigación colaborativa lo concibe como un intérprete y mediador de la acción del profesional, permitiéndoles a estos últimos aclarar o incluso, ampliar su visión de la práctica (Desgagné y Bednarz, 2005 en Morellato, 2017). En la ingeniería cooperativa, investigadores y profesionales actúan conjuntamente para avanzar en el sistema y producir conocimiento. Morales et al., (2017), especifican que actúan juntos en una postura de ingenieros que conlleva a una indistinguible práctica local (durante el desarrollo de la ingeniería) entre el profesor y el investigador. Con base en un principio de simetría que consiste en que cada actor “juegue su juego”, es decir, que aporta su punto de vista al grupo desde lo que ve y lo que sabe. Un juego donde cada actor es capaz de comprender y construir una relación con la lógica del diseño de situaciones, más allá de cualquier división del trabajo. Este tipo de compromiso que asumen desde el inicio los distintos actores en el marco de la ingeniería cooperativa es lo que para estos autores puede fomentar esa parte indistinguible de la práctica de unos y otros (Sensevy et al., 2013). Aunque aclaran que no se borran las diferencias entre estos, sólo las reúne temporal y localmente bajo una postura de ingeniero. En la ingeniería cooperativa, se

transforma la práctica para una mejor comprensión (la eficiencia del diseño, es decir, su capacidad para alcanzar los fines que los actores se propusieron con los medios - estrategias- que llevaron a cabo); por lo tanto, transforma (proceso normativo) para comprender (proceso epistémico), y comprende para transformar, y así sucesivamente, en un complejo entrelazamiento de los dos procesos (Morellato, 2017).

Lo que también distingue estos dos enfoques colaborativos tiene que ver con el objeto exploratorio de la investigación. En la ingeniería, investigadores y profesores actúan conjuntamente para avanzar en el sistema y producir conocimiento: actúan juntos en una postura de ingeniería (Sensevy, 2016 en Morellato, 2017). Para la investigación colaborativa, colaborar no solo significa hacer juntos, sino sobre todo reconocer un campo específico de competencia y ponerlo al servicio de un objeto de investigación. El profesor, su práctica, se convierten en el objeto de conocimiento que se estudia y el investigador en un acompañante del proceso reflexivo (Desgagné y Larouche, 2010 en Morellato, 2017). En ese sentido, Bednarz (2015, en Morellato, 2017) afirma que la idea misma de la investigación colaborativa se compromete a estar más en una simetría de posiciones en relación con la construcción del conocimiento, mientras este principio de simetría para la ingeniería cooperativa es un principio de explicitación compartida. Cada uno es un conocedor, con su propio sentido del juego, y cada uno juega el juego de la oferta y la demanda, con una doble responsabilidad: la responsabilidad de afirmar y la responsabilidad de apropiarse de las afirmaciones (Sensevy, 2011, en Morellato, 2017). El objeto de la ingeniería cooperativa se refiere a un proceso metodológico en el que un colectivo de docentes e investigadores implementan y vuelven a implementar (después de haber analizado y evaluado la experiencia anterior) una unidad de enseñanza sobre un tema en particular; es decir, el foco está en el proceso de transformación que sufren los diseños (las situaciones didácticas) en el marco de la ingeniería.

Como afirma Desgagné et al. (2001), las fronteras entre las diversas prácticas de investigación son diversas, nunca herméticas y probablemente no es necesario que lo sean. Estas representan en cierto modo los acentos particulares de cada investigación, la contribución al desarrollo del conocimiento relacionado con la práctica y, por supuesto, las características particulares de algunos actores en un contexto en especial.

- Finalmente, me quiero referir a los estudios colaborativos entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática que viene desarrollando desde el 2012 el grupo de Sadovsky, Itzcovich, Quaranta, Becerril y García (2016), en Argentina. La perspectiva de estos estudios colaborativos tiene sus raíces en los trabajos de Desgagné (1997), (Desgagné et al., 2001) y retoma algunos principios de la ingeniería cooperativa (Sensevy et al., 2013), (Morales et al., 2017).

Una condición principal de esta perspectiva es que tanto los investigadores como los profesores consideren el espacio de trabajo compartido como un ámbito en el que se construirán nuevas respuestas para las preguntas que se abordan:

Se asume la necesidad de una participación activa de los docentes en los estudios dirigidos a comprender los problemas que es necesario enfrentar cuando se busca desarrollar una enseñanza en la que se alienta a que los alumnos movilicen herramientas conceptuales propias para abordar las tareas que se les proponen y se concibe que las ideas matemáticas que elaboran son constitutivas de los conceptos que se espera transmitir (Sadovsky, Quaranta, García, Becerril e Itzcovich, 2019, p.42)

Una característica de este enfoque es que, a diferencia de algunas investigaciones colaborativas desarrolladas por los canadienses, el objeto de investigación inicial no lo definen los investigadores para los profesionales, sino que se desarrolla en conjunto con los maestros con el fin de profundizar en la comprensión de los problemas identificados y de esta manera intervenir en las aulas; es decir, los investigadores no proponen las situaciones didácticas como base del trabajo colaborativo. El investigador cumple una doble función: “por un lado, integra y coordina el espacio colaborativo y, por otro, conceptualiza las elaboraciones que allí tienen lugar” (Sadovsky et al., 2019, p.42).

He notado que no es fácil encontrar, caracterizar y delimitar las fronteras de los diversos enfoques participativos; dar cuenta de las perspectivas epistemológicas y metodológicas que estos comparten o se diferencian constituye un proyecto muy amplio que rebasa la posibilidad de hacerlo en el marco de mi tesis. Las diferencias que presento aquí son algunas que hasta el momento he podido identificar. En parte, esto se debe a las formas en que cada grupo de investigadores ha posicionado el trabajo entre los actores, las prácticas de enseñanza, el marco de referencia de los investigadores, entre otros. Roditi (2015, en Morellato 2017), afirma que las relaciones entre los



investigadores y los profesores no siempre son las mismas pues se construyen de acuerdo con el problema de investigación, las necesidades y sobre todo las expectativas de cada actor implicado.

## 1.2 Nociones de la teoría de situaciones didácticas [TSD]

En el marco de la didáctica de la matemática de la escuela francesa de los años setenta, Guy Brousseau desarrolló la TSD con la que propuso un modelo para “pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar” (Sadovsky, 2005, p.17). A partir de una concepción del aprendizaje por adaptación, Brousseau postula que un sujeto (alumno) puede aprender adaptándose a un medio que “es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios [...] Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta a través de respuestas nuevas que son la marca del aprendizaje” (Brousseau, 2007, p.30).

De acuerdo con Sadovsky (2005), desde la TSD se concibe la producción de conocimientos matemáticos en una clase con base en dos tipos de interacciones.

[...] a) la interacción del alumno con una problemática que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre los conocimientos matemáticos puestos en juego y b) la interacción del docente con el alumno a propósito de la interacción del alumno con la problemática matemática. A partir de ellos postula la necesidad de un “medio” pensado y sostenido con una intencionalidad didáctica (p.19).

Las interacciones entre el alumno y el medio se describen desde el concepto de *situación adidáctica*, mientras que las interacciones del docente con el alumno, a propósito de la interacción del alumno con la problemática, se explican desde el concepto de *contrato didáctico* (Sadovsky, 2005).

A continuación, ampliaré estos dos conceptos. Empezaré por las situaciones adidácticas, por lo que es necesario precisar primero el concepto de situación didáctica.

Una *situación didáctica* es una situación construida con la intención de enseñar al alumno un saber específico, con la que “se busca que el conocimiento al que recurra o que produzca el alumno se justifique por su interacción con el medio, sin la indicación implícita o explícita del docente (Fregona y Orús, 2011, p.26). En esta interacción el alumno pone en juego sus conocimientos, los modifica, los rechaza o produce otros nuevos, desde las interpretaciones que hace sobre las retroacciones que recibe del medio (Sadovsky, 2005). El *medio* es entonces la problemática matemática que debe

enfrentar el alumno (el problema, la tarea), así como el “conjunto de relaciones - esencialmente matemáticas también- que se van modificando a medida que el sujeto produce conocimientos en el transcurso de la situación, transformando en consecuencia la realidad con la que interactúa” (Sadovsky, 2005, p.20).

En este marco, se concibe el carácter “adidáctico” de una situación (o una fase adidáctica dentro de una situación) cuando “el alumno debe relacionarse con el problema a partir de sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución” (Panizza, 2003, p.62); esto no implica por supuesto, que la intención de enseñanza del docente desaparezca ni su silencio durante el trabajo de los alumnos, sino la no intervención en relación con el saber que se pretende con ellos. De hecho, el trabajo del profesor consiste en ayudar a que los alumnos lean las retroacciones que reciben del medio (Sensevy, 2011).

Otras nociones centrales de la TSD emergen en este marco de las situaciones adidácticas y están relacionadas con la acción del docente. Una de ellas es la noción de *variable didáctica*. Considerando la complejidad de los conocimientos que se pretenden en una situación, se requieren de tiempos de elaboración más o menos prolongados para que haya lugar para el aprendizaje (Sadovsky, 2005), por esto, es necesario que las situaciones se implementen varias veces y que en cada aplicación se cambien algunas de las condiciones y relaciones propias del conocimiento que se está estudiando. Estos cambios los hace el docente y “constituyen una variable didáctica cuando, según los valores que toma, modifican las estrategias de resolución y, en consecuencia, el conocimiento necesario para resolver la situación” (Panizza, 2003, p.66).

Retomando el segundo tipo de interacciones que se conciben en la producción de conocimientos matemáticos en una clase (las interacciones del docente con el alumno, a propósito de la interacción del alumno con la problemática), aparece una herramienta teórica en la que el maestro cumple un papel central: el *contrato didáctico*. De acuerdo con Sadovsky (2004), las interacciones entre el docente y los alumnos están marcadas por lo que cada uno espera del otro en relación con la resolución del problema matemático. Es decir que, a partir de las prácticas cotidianas del aula, los alumnos suponen aspectos que el docente espera de ellos: “elaboran un conjunto de normas que

monitorean su accionar, en el sentido de que habilitan ciertas posibilidades e inhiben otras” (p.1).

Finalmente, abordo dos conceptos relacionados con la acción de los maestros, que son necesarios para una buena interpretación de las nociones de situación didáctica y adidáctica (como afirma Margolinas, 1998) y en los que también me apoyo para analizar las implementaciones de las situaciones didácticas por parte de los maestros en mi investigación; estos son la *devolución* y la *institucionalización*.

Brousseau (2007) define la devolución como “el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia” (p.87). Mientras que la institucionalización, que se da en el marco del proceso de transformación de los conocimientos en saberes, es la tarea del docente de dar a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes (p.28). De acuerdo con Sadovsky (2005), Perrin Glorian (1993) y Margolinas (1993) proponen ver estas dos nociones como procesos. La devolución como el proceso de negociación que el docente tiene con el alumno durante toda la situación adidáctica para sostenerlo en su relación con el problema o la tarea y, la institucionalización, como un proceso que inicia “en el momento mismo de la devolución porque ya ahí es necesario que el maestro dé al alumno, si no lo tiene, el proyecto de adquirir esos conocimientos; en ese sentido, los procesos de devolución y de institucionalización se imbrican y son, en cierta medida, contemporáneos” (Perrin Glorian, 1993, en Sadovsky, 2005, p.45).

El proyecto de formación docente que implementé en mi estudio consistió en compartir con los docentes un conjunto de situaciones didácticas sobre un tema específico (propiedades de algunas figuras geométricas) y con un enfoque específico (vinculado a la TSD) y, en participar con ellos, en un proceso de implementación de las mismas y de reflexión sistemática sobre estas. Los conceptos que abordé brevemente fueron mi principal referente teórico para seleccionar y adaptar las situaciones didácticas que se utilizarían en el dispositivo de formación, así como para analizar la implementación de estas y para seleccionar los aspectos a destacar con el colectivo de maestros.

### 1.3 La geometría y su enseñanza en la escuela.

En este último apartado presento algunos posicionamientos que asumo en esta investigación sobre qué se entiende por geometría y lo que puede aportar la geometría a los alumnos en etapa escolar. Además, presento un breve panorama sobre la finalidad de su enseñanza, algunos problemas didácticos que se han documentado en el nivel secundario y finalmente, lo que está planteado para la enseñanza de la geometría en los programas curriculares del Modelo Educativo mexicano de 2017. Consideraré algunas investigaciones afines a la TSD, como Quaranta y Ressia (2009), Salin (2004), Sadovsky, Parra, Itzcovich y Claudia Broitman (1998); Itzcovich y Broitman (2001), Itzcovich y Broitman (2003), entre otras.

### 1.3.1 ¿Qué se entiende por geometría?

Coincido con Itzcovich y Broitman (2003) en que la geometría no es una ciencia que estudia el espacio físico. Esta afirmación tiene varias y fuertes implicaciones sobre la epistemología de la geometría y las cuestiones didácticas para su enseñanza. Bkouche (1991, en Quaranta y Ressia, 2009) menciona que la Geometría “se constituyó históricamente alrededor de dos grandes problemáticas: [i] la medida de las magnitudes geométricas (longitudes, superficies, volúmenes) [y ii] la representación plana de situaciones espaciales” (p.25). No obstante, la geometría se desarrolló posteriormente como rama de la matemática, desligándose de sus orígenes espaciales y constituyéndose en “el estudio de un espacio ideal con “objetos teóricos” que obedecen a las reglas del trabajo matemático” (Quaranta y Ressia, 2009, p. 292). De acuerdo con Itzcovich y Broitman (2003), la obra de “Los Elementos” de Euclides marcó el inicio de esta separación de los conceptos geométricos del espacio sensible.

#### *Los conocimientos espaciales, geométricos y espacio-geométricos.*

Salin (2004) coincide con la idea de que la geometría se ha desarrollado hasta el punto de estar desligada de sus orígenes espaciales, pero advierte que

(...) no es menos cierto que la geometría sigue siendo “la ciencia de las situaciones espaciales” y que el dominio del espacio, es decir, la posibilidad de un control eficaz por el sujeto de sus relaciones con el espacio sensible, viene facilitada si se dispone de conocimientos geométricos que se aplican al problema que hay que resolver (p.41).

Esto marca una distinción entre dos tipos de conocimientos que tradicionalmente en la escuela se traslapan en la enseñanza de la geometría: los conocimientos espaciales y los conocimientos geométricos. Los primeros refieren a las relaciones con el espacio sensible, sus representaciones, sus desplazamientos; son “ideas espaciales

construidas para modelizar el espacio físico, vinculadas a él, que sirven para resolver problemas del espacio real pero no se identifican con él” (Quaranta y Ressia, 2009, p.27). Salin (2004) plantea que los problemas espaciales se caracterizan porque: “su finalidad concierne al espacio sensible; pueden tratar sobre la realización de acciones: fabricar, desplazarse, dibujar, etc.; comunicaciones a propósito de acciones o de constataciones. El lenguaje y las representaciones espaciales permiten comunicar informaciones que sustituyen a la percepción” (p.39).

Por su parte, los conocimientos geométricos refieren a un espacio conceptualizado donde, a diferencia de los conocimientos espaciales, la validación se hace por medio de argumentaciones; incluso, estas pueden oponerse a la percepción o a la medida. “Por ejemplo, la construcción de un triángulo cuyos lados midan 10, 5 y 5, podría admitir una “resolución empírica”, aunque dicho triángulo no existe” (Itzcovich y Broitman, 2003, p.304). Ahora bien, resolver un problema geométrico implica que su tratamiento y validación se dan en el marco de la geometría teórica. Pueden darse relaciones con el espacio sensible, por ejemplo las figuras, pero se rigen por las definiciones y reglas de funcionamiento de los objetos teóricos que dichas figuras representan (Perrin y Godin, 2018).

Una aclaración importante que hace Salin (2004) es que, si bien los conocimientos espaciales y geométricos deben distinguirse, ambos están fuertemente ligados. Considerando las relaciones entre saberes espaciales y conocimientos geométricos, Berthelot y Salin (1994), introdujeron los conocimientos *espacio-geométricos*, que surgen del saber geométrico y se utilizan para modelar situaciones espaciales. Es decir, son conocimientos útiles para modelar y resolver problemas propuestos en el espacio sensible y donde la validación también se realiza en este espacio sensible (Perrin y Godin, 2018) .

Este tipo de conocimientos tienen una existencia estable en la escuela primaria, usualmente se relacionan con el estudio de la forma de los objetos y sus propiedades que permiten el cálculo de áreas y de volúmenes. De acuerdo con Salin (2004), este tipo de conocimientos en la enseñanza primaria contribuyen a preparar a los alumnos para la enseñanza de la geometría en la secundaria.

En este punto, Perrin y Godin (2018), afirman que el paso de la primaria a la secundaria es problemático tanto para los alumnos como para los profesores, ya que se

espera que con la llegada de la secundaria se introduzca una geometría teórica que ya no acepta validaciones en el espacio sensible como se hacía en la primaria, sino argumentaciones lógicas (demostraciones). Con base en esto, pensaron en una continuidad coherente de la enseñanza de la geometría entre la primaria y la secundaria, proponiendo, al igual que Berthelot y Salin (1994), un conocimiento “intermedio” que ayuda a preparar a los alumnos para el estudio de una geometría como rama de las matemáticas; a estos conocimientos los denominaron la *geometría del trazo* que, permiten modelar el espacio mediante el uso de instrumentos como la regla y el compás y la exclusión de instrumentos de medida de longitudes. En esta geometría los problemas y los medios de validación provienen del espacio sensible, pero el razonamiento se hace a partir de ese corpus de conocimientos considerados como verdaderos (Perrin y Godin, 2018).

Las investigaciones de Houdement y Kuzniak (2003) también están en esta línea de reconocer distintos tipos de conocimientos en la enseñanza de la geometría. Estos autores ponen en evidencia tres paradigmas diferentes que los lleva a distinguir tres formas de geometría: Geometría I [G1] (geometría natural), Geometría II [G2] (geometría axiomática natural) y Geometría III [G3] (geometría axiomática formalista). Justamente el paradigma G1 está pensado para resolver los problemas planteados en el espacio sensible. Permite la representación del espacio, de objetos del espacio, y de acciones en el espacio, e incluye una teoría en la que se basa el razonamiento, que se denomina teoría física del espacio, es decir, un corpus de conocimientos validados a partir de experiencias de trazos y de mediciones con ayuda de instrumentos en el espacio sensible (Perrin y Godin, 2018).

Estos conocimientos que ayudan a preparar a los alumnos para una geometría teórica interesan en mi investigación porque corresponden a los contenidos señalados en el programa escolar<sup>1</sup>. Las situaciones didácticas seleccionadas para la experiencia colaborativa movilizan justamente estos conocimientos *espacio-geométricos* con los alumnos (de secundaria).

### 1.3.2 ¿Qué esperar de la geometría en la formación de los alumnos?

---

<sup>1</sup> Por ejemplo, en el Modelo Educativo 2017 (SEP, 2017) se establece que en el primer año de secundaria (donde se espera la introducción de los alumnos a un razonamiento deductivo), el contenido establecido es el análisis de la existencia y unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros. Más adelante retomaré este asunto.

Camargo y Acosta (2012) plantean que la enseñanza de la geometría en la escuela pretende dos grandes objetivos. El primero es introducir a los alumnos en la teoría a partir de la percepción, esto es, convencer a los alumnos de que la teoría permite resolver problemas eficientemente; no obstante, se trata de no ignorar, ni desplazar, los procesos de percepción e intuición de la actividad geométrica, pues éstos deben ser insumos de apoyo. El segundo objetivo planteado por estos autores es lograr el equilibrio entre lo empírico y teórico de la actividad geométrica: el objetivo aquí es evitar el predominio de lo empírico sobre la teoría y viceversa. Esto es, en un comienzo lo empírico -la intuición y la percepción- pueden ser predominante, pero en la medida en que se vaya logrando el primer objetivo se debe dar lugar al equilibrio. En otras palabras, se espera preparar a los alumnos para que en un nivel superior profundicen en las prácticas deductivas de la geometría.

En esta misma dirección están Itzcovich y Broitman (2001), quienes afirman que la enseñanza de la geometría pretende el estudio de las figuras y cuerpos geométricos y el inicio a un *modo de pensar geométrico*. Lo primero implica un proceso a profundidad, que plantea conocer las propiedades de las figuras y los cuerpos para resolver problemas geométricos. Lo segundo, refiere al proceso de anticipación que se da a partir de la apropiación de las propiedades de las figuras y cuerpos, esto es “poder apoyarse en propiedades estudiadas de las figuras y de los cuerpos para poder anticipar relaciones no conocidas” (Itzcovich y Broitman, 2003, p. 303) y tener la certeza de que las relaciones obtenidas son verdaderas. Estos autores aclaran que el modo de validar una afirmación en geometría no puede darse bajo métodos empíricos (medir, dibujar, etc.), sino racionales, esto es, a través de argumentos. En este sentido, se puede inferir que el primer objetivo propuesto por Itzcovich y Broitman (2001) esté asociado a los primeros niveles de escolaridad y, el segundo, a procesos que se inician en nivel secundario.

Perrin y Godin (2018), desde mi lectura, coinciden con lo anterior y agregan que la enseñanza de la geometría en la secundaria tiene el propósito de ofrecer “un medio de representación para otros campos del saber, incluso al interior de las matemáticas. A este “medio de representación” se le llama a veces el pensamiento o intuición geométrica. El pensamiento geométrico constituye una herramienta heurística potente por el hecho de que se pueden transferir en esos campos intuiciones que provienen de nuestra relación con el espacio” (p.1).

Por último, Itzcovich (2005) afirma que estudiar geometría en la escuela plantea un reto difícil a la gestión del maestro en la construcción colectiva del conocimiento geométrico. Iniciar a los alumnos en el estudio de la geometría supone introducirlos en el trabajo deductivo, esto implica que el maestro “debe tomar decisiones a la hora de gestionar una demostración en la clase, articular las producciones de los alumnos, sus interrogantes, simultáneamente con su idea de presentar el conocimiento matemático en la clase y que no se contradiga con su concepción de rigor” (en Mántica y Renzulli, 2016, p.2). Así, el trabajo geométrico en el aula debe dar lugar a la puesta en juego de las propiedades de los objetos geométricos y la producción de argumentos asociadas al uso de propiedades. En este punto, conviene precisar que, para el caso de esta investigación, no pretendemos promover o potenciar la demostración, ya que, como mencioné antes, pretende el desarrollo de conocimientos espacio-geométricos, con un énfasis en la relación con los objetos perceptibles, manipulables, pero en condiciones que llevan a identificar y utilizar ciertas propiedades de los objetos.

### 1.3.3 Problemáticas de la enseñanza “real” de la geometría en la escuela

De acuerdo con Itzcovich (2005), el estudio de la geometría en la escuela ha ido perdiendo espacio y sentido, tanto en los programas curriculares como en la formación docente. Además de este estudioso del campo, son varias las investigaciones que ofrecen una visión general sobre la realidad de su enseñanza. Algunas plantean un panorama desolador; por ejemplo, Barrantes y Blanco (2004) y Goncalves (2006) afirman que en los últimos años la enseñanza de la geometría ha sido permeada por una fuerte tendencia a la memorización de conceptos, propiedades de las figuras y cuerpos geométricos, demostraciones de teoremas o las formas de resolver los problemas; a su vez, se ha generado un desplazamiento muy temprano de la intuición como medio para acceder el conocimiento (Barrantes y Blanco, 2004). Reducir la enseñanza de la geometría a la memorización da cuenta de una “presentación ostensiva de las nociones en la que los conocimientos son concebidos como exteriores al sujeto y directamente legibles de la realidad y no ligados a una acción del sujeto en el transcurso de la resolución de los problemas que se le proponen” (Gálvez, 1985, en Arceo, 1999, p.26). De ahí que el estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, se conviertan para los alumnos en una actividad mecanicista y descontextualizada.



Otros estudios dan cuenta de dificultades específicas, derivadas de formas de enseñanza. Por ejemplo, se ha visto que los alumnos presentan dificultad para comprender la generalidad y la particularidad de las figuras a causa de que, en su enseñanza, casi de manera reiterada, se les presentan “figuras típicas” (Berthelot y Salin, 1994; Fregona, 1995; Itzcovich y Broitman, 2003). Por ejemplo: “frente al pedido de construir un rombo, los alumnos tienden a construir un rombo cuadrado; o, frente al pedido de construcción de un cuadrilátero, tienden a construir un rectángulo” (Itzcovich y Broitman, 2003, p. 9).

Algunas propuestas didácticas parten del hecho de que las matemáticas y, en particular, la geometría guarda relaciones con los contextos reales y sociales; se sustentan en la idea de que la geometría que se enseña en la escuela debe ser útil para la vida cotidiana. Esta concepción arraigada de la geometría centra sus esfuerzos en la utilidad práctica y trasluce una posición instrumentalista de la enseñanza que desconoce el modo de pensar al que refiere Itzcovich y Broitman (2003): “una centración exclusiva en la utilidad hace perder de vista a la matemática como producto cultural, como práctica, como forma de pensamiento” (p. 29).

Otra problemática que se ha identificado en la enseñanza de la geometría y quizá la de mayor interés para esta investigación, es la dificultad que presentan los maestros para diseñar, seleccionar y/o adaptar situaciones de enseñanza que despierten el interés de los alumnos, se traduzcan en verdaderos desafíos para ellos y les brinden una oportunidad de formación matemática más edificante. Según Itzcovich (2005), esto se debe a que el campo de la geometría no está bien definido y en los currículos que desarrolla la escuela no están especificados ni objetivados los conocimientos geométricos, lo que conlleva a una jerarquización implícita de contenidos respecto a otras ramas de la matemática; esto implica que los contenidos geométricos sean abordados de manera superficial, desplazados hacia el final del curso o sean excluidos definitivamente del programa curricular.

Existe entonces un distanciamiento entre lo que se espera de la enseñanza de la geometría y lo que, en su mayoría, ocurre en los materiales curriculares y en las aulas. Coincido con Itzcovich y Broitman (2003), Itzcovich (2005), Camargo y Acosta (2012), en su insistencia en la necesidad de ofrecer a los alumnos condiciones que les permitan apropiarse de ese modo de pensar particular de la geometría como disciplina y que sólo puede darse mediante el trabajo geométrico orientado por la escuela: “Creemos que hay

un modo de estudiar geometría que permite que los alumnos desarrollen un modo de pensar, propio de la matemática, que sólo existe si la escuela lo provoca y al que creemos que todos los alumnos tienen derecho a acceder. Es la relación con el saber la que está en juego” (Sadovsky et al., 1998, p.29).

#### 1.3.4 La geometría en los programas escolares de la secundaria mexicana

Por último, situaré a la geometría en el currículo del Modelo Educativo de 2017, año en que se desarrolló la investigación. Explicito aquí lo que está planteado para la enseñanza de la geometría para el nivel secundario.

Uno de los tres ejes temáticos en los que está organizado este espacio curricular de matemáticas y que interesa para esta investigación es el de *Forma, espacio y medida*, en el que se consideran aprendizajes esperados relacionados con el espacio, las formas geométricas y la medición.

De acuerdo con la SEP (2017), se espera que las experiencias geométricas y métricas ayuden a los alumnos a comprender, escribir y representar el entorno en el que viven, así como resolver problemas y desarrollar gradualmente el razonamiento deductivo. En particular, se considera que estudiar las características y propiedades de las figuras proporcionará a los alumnos algunas herramientas que les permitan resolver problemas escolares y extraescolares, así como iniciarse en un modo de pensar propio de las matemáticas, es decir, el razonamiento deductivo: “el estudio de las figuras y los cuerpos es un terreno fértil para la formulación de conjeturas o hipótesis y su validación. Se trata de que los alumnos supongan o anticipen propiedades geométricas y luego traten de validar sus anticipaciones” (SEP, 2017, p. 305). En este marco, se establece que en la primaria la validación pueda ser empírica, en cambio, en la secundaria, los alumnos deben validar sus afirmaciones a través de argumentaciones, es decir, iniciarse en el razonamiento deductivo. Esto implica que, tanto para la primaria y la secundaria, los alumnos se apropien gradualmente de un vocabulario geométrico que les permita comunicar sus anticipaciones y sus validaciones (SEP, 2017).

Se tiene entonces que, para los niveles de escolaridad involucrados en esta investigación, los programas esperan que los alumnos ya estén en el camino de aprender a hacer las argumentaciones deductivas propias de la geometría como rama de la matemática, sin embargo, veremos a lo largo de la investigación lo ambicioso de este propósito.

Para el primer año de secundaria en particular, los aprendizajes para el eje de Forma, espacio y medida establecen los siguiente:

<b>MATEMÁTICAS. SECUNDARIA. 1°</b>		
<b>EJES</b>	<b>TEMAS</b>	<b>Aprendizajes esperados</b>
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos geométricos	- Analiza la existencia y unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros, y determina y usa criterios de congruencia de triángulos.

*Tabla 1: Aprendizajes esperados. Primer año de secundaria (SEP, 2017, p. 322)*

Estos propósitos generales sobre la enseñanza de la geometría, aunque muy generales, son muy compatibles con las consideraciones que se hacen actualmente, desde la investigación y desde el desarrollo curricular, sobre la orientación que debería tener la geometría en la escuela. Este hecho es muy importante en un proyecto de formación con docentes en servicio, pues permite “sumar fuerzas”, permite a los docentes participar en la experiencia colaborativa con la motivación adicional de que se busca avanzar en una dirección que coincide con la del programa.

Se constatará, como veremos, que las dificultades que hay que sortear, los conocimientos y habilidades que hay que adquirir, para lograr los propósitos enunciados (que los alumnos superen una mirada perceptiva sobre las figuras y comiencen a buscar los elementos y relaciones que las definen), son numerosos. De esto se trata el proyecto.

Finalmente, se escogió un tema más específico, del programa de primer grado de secundaria, por considerarlo central para el aprendizaje de los alumnos y propicio para el desarrollo del proyecto: favorecer el estudio de figuras geométricas y el establecimiento de los criterios de congruencia de triángulos (más adelante profundizaré en esto).

#### 1.4 Propósito y preguntas de la investigación

Esta investigación tiene como propósito principal contribuir a los procesos de formación de profesores de matemáticas respecto a la enseñanza de la geometría en primer año de secundaria. La modalidad elegida para llevar a cabo tal objetivo es mediante una experiencia de trabajo colaborativo con los profesores que, a través de una alternancia entre la implementación de situaciones didácticas (propuestas por los investigadores

como base para el trabajo con los alumnos y los maestros) y la reflexión sobre esta experiencia, busca promover en los alumnos aprendizajes sobre las características y propiedades de algunas figuras geométricas.

En este sentido, las preguntas que orientarán la investigación son:

*Pregunta principal:* ¿Cómo desarrollar una experiencia de trabajo colaborativo entre maestros e investigadores con la finalidad de brindar una formación a los maestros acerca de la enseñanza de algunos aspectos de geometría, bajo un enfoque didáctico específico?

Algunas preguntas auxiliares que considero para orientar el análisis sobre la experiencia colaborativa con los maestros son:

*Sobre el proceso de los maestros*

- ¿De qué maneras interactúan<sup>2</sup> los maestros con: i) las situaciones didácticas ii) el colectivo de investigadores y maestros? ¿En qué medida dichas interacciones contribuyen a la problematización, implementación y análisis de situaciones didácticas?
- ¿Qué transformaciones didácticas y de contenido geométrico hacen los maestros a la secuencia para trabajar con sus alumnos? En el marco del trabajo colaborativo, ¿Cómo reportan y argumentan su implementación? Esas transformaciones, ¿Se van modificando a lo largo de la experiencia?, es decir, ¿es posible conjeturar ciertos aprendizajes por parte de los maestros?

*b) Sobre el proceso de los investigadores*

- ¿De qué maneras interactúan los investigadores con los maestros? ¿Logran crear condiciones para una participación de los maestros en el proyecto? ¿Se observan cambios en las formas de posicionarse ante los maestros (mayor horizontalidad,

---

<sup>2</sup> Uso el término de interacción para enfatizar que me interesa considerar la acción recíproca entre dos partes: el docente actúa con un grupo de estudiantes, así como el grupo actúa con él, en relación a un tema compartido. Incluso, también la situación didáctica actúa con el docente: él la implementa y enseguida recoge la información que esta le da acerca de su funcionamiento. Desgagné (2007), refiere a una “zona interpretativa” o “espacio reflexivo” : “Au cœur de cette démarche, la création d’un espace réflexif, d’une zone interprétative entre les partenaires, par lesquels s’effectue un va-et-vient entre l’expérience de pratique et la réflexion sur cette expérience. Cet espace réflexif, cette zone interprétative, issue de l’interaction des partenaires, constituera le matériau de base, les données d’analyse du savoir à produire. C’est dire que le moment essentiel de la coconstruction sera ce moment de rencontre où se coconstituent les données de la recherche dans l’interaction entre les chercheurs et les praticiens” (p.91).

menos subordinación y más iniciativas por parte de estos) a lo largo de las sesiones de trabajo?

*c) Sobre el funcionamiento de las situaciones didácticas en el aula*

- ¿Cómo resuelven los alumnos las situaciones que les plantean los maestros? ¿Se identifican indicios de aprendizajes a lo largo de las tres aplicaciones? ¿Cuáles?

*d) Sobre el diseño de las situaciones didácticas y su comunicación a los docentes*

- Con base en la implementación de las situaciones por parte de los maestros, ¿Qué aspectos del diseño de las situaciones didácticas pueden mejorarse? ¿Qué aspectos de la manera de comunicar las situaciones (el nivel de detalle, el lenguaje, las recomendaciones) pueden mejorarse?

### 1.5 Metodología: Etapas del modelo colaborativo

El enfoque colaborativo adoptado para esta investigación es el modelo desarrollado por, Desgagné, et al. (2001). Considerando que la colaboración entre investigadores y maestros toma forma mediante una actividad reflexiva en la que son llamados para interactuar y explorar en torno a un aspecto de la práctica de interés común que en este caso refiere a la enseñanza de la geometría en nivel secundario, presento a continuación tres etapas que se conciben en este modelo para el desarrollo de esta experiencia colaborativa: La co-situación, la cooperación y la coproducción. Estas dan cuenta de la participación de los investigadores y los maestros en las diferentes momentos de la investigación colaborativa (Couture, 2005).

#### 1.5.1 Etapa de co-situación

En esta primera etapa se define el objeto de interés común entre los maestros y los investigadores. Se busca que este objeto satisfaga los intereses y preocupaciones de ambas partes. Se trata de una doble relevancia del objeto de investigación: una forma de desarrollo profesional para los maestros y una producción de conocimiento para los investigadores. En esta etapa, el objeto debe pasar por un proceso de negociación entre los socios de la investigación (Barry y Saboya, 2015). La preocupación e iniciativa de un proyecto con un enfoque colaborativo puede darse desde los maestros o los investigadores. En el caso de mi proyecto, nace en el marco de una investigación de maestría. El propósito es dar respuestas a preguntas de investigación relacionadas con

la finalidad de brindar una formación a los maestros acerca de la enseñanza de algunos aspectos de geometría, bajo un enfoque didáctico específico.

A continuación, presento los diferentes momentos que configuraron la etapa de co-situación para esta investigación.

a. La revisión documental.

Se partió de una revisión documental acerca de la situación actual de la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria: su lugar en los planes de estudio; las dificultades que se presentan a los maestros en el nivel didáctico, las concepciones de los maestros sobre la geometría y su enseñanza, el desarrollo e investigación de secuencias didácticas afines al tema de interés de esta investigación. Esta revisión permitió dos cuestiones. Por un lado, seleccionar el tema de geometría y las tres situaciones didácticas que se propondrían para el trabajo con los alumnos, bajo la premisa que estas debían ser susceptibles al interés de los maestros. Por otro, analizar y seleccionar cuatro situaciones didácticas para un trabajo de iniciación con los maestros (al inicio de la experiencia colaborativa) cuya intención fue dar lugar a una primera reflexión sobre la enseñanza de la geometría en el nivel secundario e introducir algunas ideas básicas del enfoque didáctico que interesaba compartir con ellos. Este trabajo con los maestros se materializó en un taller que denominamos “*Taller de Geometría Escolar para profesores de matemáticas*”. Las situaciones didácticas elegidas referían al estudio de nociones geométricas de nivel de escolaridad indistinto. Las situaciones que se plantearon en este taller fueron adaptadas de investigaciones afines y podían ser igualmente adaptadas y/o usadas por los profesores con sus alumnos, si lo consideran pertinente.

b. El contenido geométrico y las situaciones didácticas elegidas.

Como mencioné antes, el tema que consideré propicio para el trabajo con los alumnos fue el de la construcción de triángulos y cuadriláteros y los criterios de congruencia de triángulos ubicada en los aprendizajes esperados en primer año de secundaria del Nuevo Modelo Educativo de 2017 (SEP, 2017). Una vez elegido el contenido geométrico, el interés era identificar y adaptar un conjunto de situaciones didácticas para el trabajo con los alumnos que, de acuerdo con el enfoque didáctico elegido, les permitiera poner en juego sus conocimientos sobre las figuras geométricas, y a la vez, les ofreciera medio para generar conocimientos nuevos. Se trataba de ofrecer condiciones a los alumnos

para que confrontaran sus saberes sobre las figuras, sus propiedades, el lenguaje que las describe, su construcción, y los elementos y las propiedades que permiten caracterizar y determinar una figura geométrica.

A continuación, presentaré con más detalle cuáles fueron las situaciones que se seleccionaron para el trabajo con los alumnos y algunas de sus principales características. Asimismo, mencionaré las situaciones didácticas elegidas para el trabajo con los maestros en el taller de iniciación, previo al trabajo con los alumnos.

### **Las situaciones para el trabajo con alumnos.**

Para dar sustento a las situaciones didácticas seleccionadas y adaptadas, realizamos un análisis previo de las situaciones -en el sentido de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995), el cual incluye un estudio del contenido geométrico, una revisión de investigaciones similares o cercanas -considerando versiones de la misma situación, e investigaciones sobre el mismo tema-.

Las situaciones elegidas fueron de comunicación; con ellas se esperaba que los alumnos superaran una “mirada perceptiva” (Duval, 2016) sobre las figuras y comenzaran a buscar los elementos y relaciones que las definen.

En el marco de la TSD, la estructura de las situaciones de comunicación consiste en que “un alumno (o grupos de alumnos) *emisor* debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) *receptor*, que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio material o simbólico) de acuerdo con el conocimiento contenido en el mensaje” (Panizza, 2003, p.66). La característica principal de este tipo de situaciones es el carácter de necesidad de la comunicación de un mensaje.

Este tipo de situaciones didácticas, denominada en esta investigación: “Mensajes con figuras”, fue estudiada ampliamente por Dilma Fregona (1995). De acuerdo con esta autora, las situaciones de comunicación son fundamentales para definir un lenguaje y para que este lenguaje se asocie a modelos de acción implícitos eficaces, la comunicación debe ser eficaz.

Las situaciones de comunicación, al ser un tipo de situación adidáctica respecto del conocimiento en juego (que en este caso son las características y propiedades de

las figuras geométricas para los alumnos de secundaria), pone de manifiesto su carácter de adidacticidad a través de las siguientes características básicas:

- El reto que plantean implica al conocimiento que interesa, es decir, está organizada de manera que este conocimiento sea necesario para su resolución. A su vez, pueden ser abordadas con un dominio muy básico de este conocimiento por alumnos del nivel escolar al que están dirigidas.
- Proporcionan una retroalimentación a los alumnos acerca de sus intentos de resolución, esto es, les permiten saber si llegaron a no a la meta mediante una sencilla verificación empírica: superponer la figura original y la figura reproducida. Permiten manipular determinadas variables que complejizan la situación original para favorecer nuevos aprendizajes.

A continuación, presento una breve descripción de las situaciones de comunicación:

Se trata de un juego, por grupos, en el cual un grupo de alumnos (emisores) tiene un dibujo de una figura y debe enviar un mensaje escrito a otro grupo -que la desconoce- (receptores), de manera que, a partir de la interpretación del mensaje recibido, se pueda reproducir el dibujo que tiene el grupo de emisores. Se propone un trabajo cooperativo a los alumnos (al interior de cada equipo, los emisores no compiten con los receptores) de manera que ganan los equipos que logren reproducir las figuras de manera idéntica. La validación se hace por superposición de la copia con el dibujo original.

Las figuras elegidas deben estar en relación con los objetos matemáticos que desea enseñar. Fregona y Orús (2011) señalan que esta elección puede incluir figuras que han sido estudiadas previamente por los alumnos en los grados anteriores, como el cuadrado, el rectángulo o el triángulo, así como figuras menos familiares para ellos como los paralelogramos. Para el desarrollo de la experiencia colaborativa, adoptamos estas situaciones de comunicación con diferentes figuras geométricas. De ahí que se distinguieran las siguientes tres situaciones de comunicación para proponer como base del trabajo con los alumnos:

Situación 1: Reproducción de rectángulos y sus diagonales.



Situación 2: Reproducción de un paralelogramo.

Situación 3: Reproducción de un triángulo.

Cabe señalar que las tres situaciones implementadas no constituyen una secuencia didáctica en sentido estricto (en el que una se genera de la otra por la manipulación de una variable específica, para propiciar un aprendizaje específico), pero sí presentan cierta jerarquía: en la primera situación se trata de reproducir configuraciones hechas a base de rectángulos, con alguna diagonal o línea paralela a uno de los lados del rectángulo; es relativamente sencilla y busca funcionar como introducción al juego de comunicación (al tipo de situación, sus reglas, su meta y su funcionamiento). Entre la segunda (reproducir un paralelogramo) y la tercera (reproducir un triángulo) no hay una clara jerarquía. Es muy probable que la construcción del triángulo puede ser más accesible que la del paralelogramo, pues con el primero es más fácil evitar la descripción del ángulo (mediante la comunicación de los tres lados), mientras que evitar a los ángulos con el paralelogramo es más complicado, implica usar la noción de altura de alguna manera. No obstante, puse la situación del paralelogramo en segundo lugar pues pretendía extender la de los triángulos hasta establecer los criterios de congruencia. Como veremos en el análisis, desde el punto de vista de formar una “secuencia”, hubo decisiones que, a la luz de la experiencia, deben revisarse (entre ellos se encuentran, por ejemplo, ofrecer a los maestros los modelos de las figuras el tamaño que conviene considerarse, no incluir líneas adicionales al rectángulo de la situación 1 para no generar un efecto en las decisiones que toman los maestros para el paralelogramo de la situación 2, aclarar las características particulares de la validación empírica en cada una de las situaciones, así como de sus objetivos didácticos específicos).

Para este análisis previo de las situaciones de comunicación, no consideramos más precisiones sobre algunas de las condiciones que se podrían requerir para hacer funcionar la situación de manera óptima, a fin de no saturar de entrada a los profesores de información, provocando la sensación de una situación rígida y difícil de poner en práctica. En lugar de ello, antepusimos algunas situaciones “de familiarización o de iniciación” (que presentaré más adelante), que permitirían a los maestros conocer en vivo su funcionamiento y, a la vez, identificar algunas condiciones necesarias para su implementación en el aula. Como se verá a lo largo del análisis, a partir de las

experimentaciones en el aula y las reflexiones colectivas sobre estas, fueron emergiendo varias condiciones que requerían de más precisión (características deseables del material, información que debía darse o no en la consigna y, sobre todo, formas de intervención que ayudaran a conducir las puestas en común). Efectivamente, sobre la marcha se fueron elaborando respuestas para precisar lo que hacía falta. No obstante, nos quedó la duda de qué hubiera pasado si hubiéramos dado más información a los maestros: ¿habríamos logrado aprovechar mejor el poco tiempo que tuvimos disponible? ¿habríamos rigidizado en exceso la implementación?

Es menester decir también que, como investigadores, no teníamos presentes algunas de las condiciones que se revelaron importantes (otros autores que han explorado el mismo tipo de situación de comunicación las han señalado (Fregona, 1995), (Fregona y Orús, 2011)). La experiencia nos permitió confirmar su importancia, y esto forma parte del saber co-construido en el marco de la experiencia colaborativa del que doy cuenta a lo largo de los siguientes capítulos.

A continuación, presento los tiempos estimados para la implementación de las situaciones didácticas en el aula. La propuesta que se hizo a los maestros fue realizar cada una de ellas en una o más sesiones de clase (ver tabla 2):

<b>SITUACIONES PROPUESTAS</b>	<b>Característica general de las situaciones</b>	<b>Tiempo estimado</b>
	1. Situación 1: Reproducción de rectángulos y sus diagonales.	3 sesiones en aula -100 minutos cada una aprox.-
	2. Situación 2: Reproducción de un Paralelogramo.	
	3. Situación 3: Reproducción de un triángulo.	

*Tabla 2: Situaciones didácticas para la implementación en aula. Fuente: Propia*

En torno a estas tres situaciones diseñamos una ficha didáctica dirigida a los maestros a fin de ofrecer orientaciones sobre los objetivos con los alumnos, tiempos y materiales, entre otros aspectos. También se redactaron algunas sugerencias para su

gestión en aula (puestas en común e institucionalización), y anticipaciones sobre las posibles producciones de los alumnos en cada una de las situaciones<sup>3</sup>.

### Las situaciones para el trabajo con los maestros [Taller de iniciación]

Se escogieron cuatro situaciones didácticas afines a la TSD que, además, se enmarcaban en nuestra perspectiva de la geometría y su enseñanza. En particular, las dos primeras situaciones fueron tomadas de las investigaciones de Camargo y Samper (2006), la situación 3 es una adaptación de una propuesta de Broitman e Itzcovich (2002), así como la situación 4 es una adaptación de una situación utilizada en un taller de Didáctica de la matemática de la Universidad Nacional del Nordeste<sup>4</sup>.

Estas situaciones tenían como propósito general enriquecer los procesos de enseñanza de las definiciones de objetos geométricos, enfatizando en el valor formativo de construirlas. Al mismo tiempo, el trabajo con dichas situaciones permitiría analizar características de situaciones didácticas con un alto potencial para propiciar estos procesos de construcción con los alumnos. Estas fueron las situaciones “de familiarización o de iniciación” que permitiría a los maestros conocer, de primera mano, algunas características y condiciones necesarias para su implementación en las aulas.

Las vías de aproximación a las definiciones y los propósitos didácticos son específicos en cada situación. A continuación, presento las cuatro situaciones elegidas para el taller de iniciación, sus propósitos y los tiempos estimados para su desarrollo:

Situaciones didácticas para la enseñanza de	Propósito	Nombre	Tiempo estimado
	Conceptualizar una definición a partir de ejemplos y no-ejemplos	<b>Situación 1:</b> Construcción de la definición del objeto geométrico: “Tonu”	40´

<sup>3</sup> Ver la ficha didáctica que se entregó a los maestros en el Anexo I de esta tesis.

<sup>4</sup> Esta última situación ha sido analizada y discutida por la maestra Irma Saiz en la asignatura Didáctica de la matemática y la pasantía del profesorado en Matemática en la Universidad Nacional del Nordeste (2016).

	Conceptualizar una definición a partir de propuestas de conjuntos de propiedades necesarias y suficientes y su contraste con representaciones	<b>Situación 2:</b> Construcción de la definición de Cuadrado	40´
	Conceptualizar una definición a partir del análisis de los elementos geométricos mínimos que caracterizan a un objeto geométrico	<b>Situación 3:</b> El cuerpo escondido	60´
	Conceptualizar definiciones de objetos geométricos a partir de la construcción y desarrollo de lugares geométricos.	<b>Situación 4:</b> ¿Dónde está la fábrica?	40´

Tabla 3: Situaciones didácticas previstas para los maestros. Fuente: Propia

Al igual que la ficha didáctica de las situaciones para los alumnos, para cada una de estas situaciones diseñamos un documento denominado: Memorias del Taller de Geometría Escolar para profesores de matemáticas, con las orientaciones generales (objetivos didácticos, consignas, conocimientos geométricos involucrados y algunos comentarios y precisiones para la gestión), el cual se entregó a los maestros al término del taller, de manera que estas situaciones pudieran ser insumos didácticos de apoyo para sus clases<sup>5</sup>.

c. El dispositivo de formación.

Con el fin de crear condiciones que favorecieran un proceso de colaboración entre investigadores y maestros<sup>6</sup>, se diseñó una dinámica de alternancia de reuniones de maestros e investigadores y de sesiones de implementación en aula con los alumnos.

<sup>5</sup> Ver Anexo II. De las cuatro situaciones que se previeron sólo se trabajaron con los maestros las situaciones 2 y 3. En particular, nos interesaba la situación 3 porque tenía características muy similares a las situaciones que propusimos para los alumnos (también era una situación de comunicación). Si bien esta experiencia de trabajo se realizó con los maestros no fue objeto de análisis durante la investigación.

<sup>6</sup> Conviene precisar que la colaboración no está en el diseño de las situaciones, sino en la planeación y desarrollo de la experiencia de trabajo conjunto.

Para esta investigación llamaremos *dispositivo de formación* a esta dinámica de trabajo colaborativo con los maestros. Se establecieron cuatro encuentros colectivos [reuniones] y tres implementaciones organizadas de la siguiente manera<sup>7</sup>:



Imagen 1: Estructura del dispositivo de formación. Fuente: Propia

La duración del dispositivo fue de cuatro semanas. Por cada semana se previó una reunión colectiva y la implementación de una situación por parte de los maestros. El último encuentro del colectivo se destinó para analizar la experiencia en aula con la última situación y analizar aspectos de la experiencia colaborativa que se tuvo.

Cada reunión colectiva tuvo una duración de 120 minutos. Estos encuentros tenían dos propósitos. El primero, la planificación de la situación que se implementaría en aula y, el segundo, las reflexiones sobre las experiencias de los maestros en sus aulas respectivas. Cabe aclarar que en el primer encuentro se tratarían algunos aspectos generales de las tres situaciones y la planificación de la primera situación.

### **Análisis previo del dispositivo.**

#### *1. Reuniones previas a las implementaciones*

Las reuniones previas a las implementaciones enriquecerían los espacios de planificación de la clase que habitualmente tienen los maestros antes de ir a las aulas. Era esperable que las situaciones fueran objeto de una apropiación por parte de los docentes de acuerdo con las condiciones institucionales, sus concepciones con respecto a los conceptos enseñados y el aprendizaje. El objetivo era construir una intencionalidad

---

<sup>7</sup> Conviene aclarar que los encuentros que se concibieron en este dispositivo no incluyen el encuentro inicial que se tuvo con los maestros (el taller de iniciación). Recordemos que este taller fue previo a la puesta en marcha de la experiencia colaborativa.

didáctica común en torno a cada una de las situaciones que se implementarían en el aula.

Como investigadores nos interesaba dos asuntos. Por un lado, determinar las condiciones de implementación necesarias para mejorar la experiencia en aula y, por otro, anticipar y analizar las posibles producciones de los alumnos como recurso para enriquecer la reflexión de los maestros en relación con el objetivo de formación. Compartimos la idea de Quaranta y Wolman (2003) de que las anticipaciones sobre las producciones de los alumnos

permiten al docente una planificación de su clase que, por cierto, podrá corresponderse en mayor o menor medida con la realidad, y se irá ajustando a su desarrollo de acuerdo con lo que suceda efectivamente en el aula. Son previsiones que permiten tomar conciencia de que no existe una única manera de resolver un problema -la canónica-, conocer la variedad de caminos posibles para hacerlo, comprender qué es lo que hacen los niños cuando despliegan procedimientos personales y anticipar cómo intervenir” (p.200).

La idea era que los maestros, a partir de los conocimientos que consideraban que tenían sus alumnos, pudieran construir algunos mensajes y de paso conocer otras posibilidades con las propuestas de sus compañeros. Se esperaba que las descripciones, al menos de alumnos de distinto grado escolar, fueran diferentes y quizá unas más elaboradas que otras. Esto no sólo permitiría una discusión alrededor de los conocimientos geométricos de los alumnos y de los propios integrantes del colectivo, sino la posibilidad de entrar en una discusión más álgida que tiene que ver con la gestión de los maestros durante la puesta en común con los alumnos:

En la organización de la clase, estas previsiones permiten establecer los ejes en torno de los cuales se intentará hacerla girar, así como elaborar intervenciones posibles para las diferentes cuestiones que pudieran aparecer. Esto no significa que alguna de las intervenciones reales de la clase no se geste a partir de su desarrollo, pero este trabajo siempre será más rico si el maestro cuenta con todo un respaldo de posibilidades para orientar su clase en dirección a lo que se trata de enseñar (Quaranta y Wolman, 2003, pp. 200-201).

Esta es la base sobre la que se tejerá la colaboración entre todos los integrantes del colectivo.

## *2. Implementaciones en aula*

Las implementaciones en aula se analizan y caracterizan como recurso que enriquece la discusión en el colectivo y promueve las participaciones de sus diferentes integrantes.

En términos del objetivo de formación estas implementaciones permiten a los maestros que participan en el proceso de colaboración reflexionar sobre su práctica, comprender mejor a sus estudiantes y su aprendizaje, para volver a ciertas dimensiones de su enseñanza (Bednarz, Poirier, Desgagné y Couture, 2001).

En particular, me interesó reconocer el medio al que se enfrentan los maestros durante la implementación, por lo que me apoyo en la noción de medio del docente, trabajada por Margolinas (1998) y algunos elementos de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007). Se trata de analizar cómo los maestros organizaron la clase y qué decisiones tomaron para configurar el medio de los alumnos en relación con la situación didáctica.

A su vez, analizo las producciones de los alumnos (que entregaron los maestros a los investigadores) a fin de identificar los conocimientos geométricos que tenían disponibles y la manera en que los funcionalizaron para dar solución a una tarea específica; estas producciones constituyen la materia básica con la que interactúan los maestros y en este sentido, forman parte fundamental de su medio.

### *3. Reunión posteriores a las implementaciones*

El interés como investigadores con estas reuniones era dar continuidad al ejercicio individual de reflexión sobre la acción por parte de los maestros y, a su vez, a la reflexión colectiva, a propósito de las distintas experiencias en el aula. En particular, identificar dificultades y logros en la aplicación de las situaciones por parte de los maestros, los aspectos de su experiencia que fueron observables para ellos y los que no, así como los conocimientos que se produjeron en relación con la situación didáctica.

Para estas reuniones interesó comprender el proceso de colaboración entre los distintos actores en términos de lo que cada uno aportó a la reflexión colectiva; por esto, fue pertinente analizar las interacciones en la relación maestro-maestros y en la relación maestro-investigador, algunas formas específicas de la colaboración entre las que cabe mencionar: el trabajo entre pares y los momentos de encuentro y desencuentro entre los distintos actores del colectivo.

d. Los maestros, las escuelas y los alumnos.

En la experiencia colaborativa participaron, de forma voluntaria, cinco maestros de matemáticas de secundaria de dos escuelas oficiales de la ciudad de México: una secundaria general y una secundaria técnica<sup>8</sup>.

Para el caso de la secundaria general, Aldo, un egresado de la maestría extendió la invitación a sus colegas para que participaran en este proyecto. Dos maestros de su escuela se vincularon a la investigación y Aldo participaría como observador<sup>9</sup>. En el caso de la secundaria técnica, se contactó a la maestra Sara<sup>10</sup> quien a su vez invitó a uno de sus colegas a participar en el proyecto.

Así los maestros que participaron en la experiencia colaborativa fueron:

Escuela secundaria técnica: Sara y Fabio.

Escuela secundaria general: Liliana, Ignacio y Aldo.

Tras conformar el colectivo de maestros e investigadores<sup>11</sup> se definió, a través de correos electrónicos, un calendario de trabajo que consideraba y ajustaba a los tiempos de cada uno de los participantes a fin de poner en marcha el dispositivo de formación. Por condiciones institucionales (permisos y acceso a las escuelas) los encuentros colectivos se realizarían en la escuela secundaria general y los dos maestros de la secundaria técnica, al salir de sus jornadas de trabajo, irían al encuentro con el colectivo.

### *¿Qué sabemos sobre los maestros?*

Ignacio	Formación: Ingeniero mecánico Experiencia docente: 19 años en la escuela donde trabajaba en el momento que se realizó el trabajo de campo. Su experiencia, en su mayoría, ha sido en secundaria con primer y segundo año.
---------	--

---

<sup>8</sup> Favoreció a la investigación que las dos escuelas estaban ubicadas una cerca de la otra.

<sup>9</sup> La posición de este maestro dentro de la investigación sería relativa, pues conocía previamente los objetivos de investigación y apoyaría como observador durante las implementaciones en aula.

<sup>10</sup> Esta maestra había participado previamente con un grupo de estudiantes en una investigación para una tesis de maestría del DIE.

<sup>11</sup> Conviene precisar que el equipo de investigadores estaba conformado por un investigador experimentado en didáctica de las matemáticas: el Dr. David Block (director de esta tesis), una maestra en didáctica con amplia experiencia (Mtra. Laura Reséndiz -auxiliar de investigación del Dr. Block-) y por mí, tesista de maestría en investigaciones educativas, autora de esta investigación.



Liliana	Formación: Normalista Experiencia docente: 19 años en la escuela donde trabajaba en el momento que se realizó el trabajo de campo. Su experiencia, en su mayoría, ha sido en secundaria con primer y segundo año.
Fabio	Formación: Ingeniero mecánico-electricista Experiencia docente: 10 años en la escuela donde trabajaba en el momento que se realizó el trabajo de campo, tres de estos en el taller de electricidad de la escuela y los últimos siete años ha sido docente de secundaria con grados segundo y tercero.
Sara	Formación: Normalista. Lic. en educación secundaria con especialidad en matemáticas Experiencia docente: 3 años en la escuela donde trabajaba en el momento que se realizó el trabajo de campo. Su experiencia ha sido en primer año de secundaria.

En relación con los alumnos, pertenecían a grupos de primer año (a excepción de los alumnos del maestro Fabio que, como veremos más adelante, experimentaría con su grupo de segundo año). El promedio de alumnos por grupo fue de 40 a 45 y sus edades oscilaban entre los 13 y 14 años.

#### 1.5.2 Etapa de cooperación

De acuerdo con Couture (2002) esta etapa da cuenta de la exploración en campo; es el momento en el que investigadores y maestros interactúan, organizan, proponen y construyen de acuerdo con un interés común. Además, permite la recopilación de los datos para la investigación. Esta etapa plantea un desafío importante, pues es la oportunidad de explorar conjuntamente las necesidades de los maestros y los investigadores a fin de crear espacios de reflexión (Barry y Saboya, 2015).

Para el caso de esta investigación, esta etapa corresponde al desarrollo del dispositivo de formación -capítulos 2 y 3- donde maestros e investigadores, a través de los encuentros colectivos, generaron acciones reflexivas y oportunidades de formación. De esta manera como afirma Barry y Saboya (2015), el dispositivo establece el proceso de exploración que conduce a la construcción conjunta, una *co-producción* entre los socios de investigación.

Para esta etapa se emplearon dos recursos metodológicos: la observación en el aula y la entrevista a los maestros. Los encuentros colectivos fueron videograbados, para tener el registro de las interacciones entre los diferentes participantes.

#### i) La observación en aula

La posibilidad de observar las implementaciones de los maestros estaba sujeta a las condiciones institucionales, de tiempos, administrativas o según el criterio de los maestros. Finalmente, se observó a los cuatro maestros durante la aplicación de las tres situaciones de comunicación en los espacios que designaron según sus horarios de clase<sup>12</sup>. Este ejercicio estuvo apoyado en las clases de Sara y algunas de Liliana con videograbaciones, en las de Ignacio y algunas de Liliana con audio y, en general, todas las clases con notas de campo. En el caso del maestro Fabio las notas fueron el único recurso para registrar sus clases<sup>13</sup>.

La observación en aula permitió tener acceso directo a información sobre la apropiación<sup>14</sup> de la situación por los docentes y la participación de los estudiantes. Además, estas observaciones permitieron a los investigadores retroalimentar la actividad reflexiva de los maestros en el marco de los encuentros colectivos.

#### ii) Entrevistas

Al finalizar la experiencia se convocó uno a uno los cuatro maestros para dialogar a través de una entrevista semiestructurada, en torno a sus trayectorias laborales y académicas, la formación en el campo de la geometría y el impacto de su participación durante todo el dispositivo de formación.

### 1.5.3 Etapa de co-producción

---

<sup>12</sup> Recordemos que en el colectivo participaron cinco maestros, pero sólo cuatro de ellos implementarían con sus grupos. Aldo, sólo apoyaría con la observación de algunas clases y la participación en las reuniones colectivas.

<sup>13</sup> El maestro Fabio desde la primera situación se opuso a la toma de registros en audio y video.

<sup>14</sup> Utilizo el término de apropiación en el sentido expresado por Espinosa (2004): "Los maestros, desde esta perspectiva, no se limitan a hacer uso de las propuestas pedagógicas tal como éstas son prescritas. Al hacer uso de estas, los maestros las reelaboran, las reformulan, porque "las llenan con sus propias intenciones". Esta manera de ver la apropiación advierte sobre la diversidad de usos y significados que adquieren las propuestas al ser incorporadas por los maestros a sus prácticas cotidianas" (en Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007, p.734).

Finalmente, en esta etapa se analizaron los datos, a la luz de los objetivos que orientaron la experiencia colaborativa con los maestros. Couture (2002) señala que los beneficios de la colaboración son dobles: un componente de capacitación para el profesional y un componente de desarrollo de conocimiento para la investigación. Incluso en esta última etapa, la experiencia colaborativa debe considerar las preocupaciones de ambos participantes y de los mundos que representan: el mundo de la investigación y el de la práctica (Desgagné, 2007). Se trata entonces de que los productos de la investigación deben ser útiles para los actores implicados. Por un lado, el investigador debe poder dar cuenta de su objeto de análisis y de las categorías que derivaron de la experiencia y, por el otro, se debe asegurar a los maestros los beneficios de haber hecho parte del proyecto colaborativo (Barry y Saboya, 2015 y Desgagné et al., 2001). En el caso de mi investigación, el beneficio para los maestros estaba en la oportunidad de formación en un aspecto de la enseñanza de la geometría. Es claro que los maestros corroboraron ese beneficio por cuenta propia, de lo contrario, probablemente lo hubieran manifestado, o incluso, hubieran dejado de participar en la experiencia colaborativa.

Desgagné (2007) señala que en esta etapa de coproducción el investigador –en soledad– se enfrenta con los datos que tendrá que analizar y el saber que deberá producir. Estos datos provienen de la interacción dada entre los distintos actores en la etapa de cooperación. En el caso de esta investigación, interesa analizar cómo se concibió la formación de los maestros a través de su participación en el dispositivo, es decir, precisando aquellos aspectos concretos relacionados con el enfoque didáctico subyacente a las situaciones didácticas y a la enseñanza de la geometría escolar. También analizar cómo funcionó el dispositivo de formación diseñado para el trabajo con los maestros, con base en las preguntas que orientaron la investigación.

En las conclusiones daré cuenta de las contribuciones sobre los aportes y limitaciones del trabajo colaborativo en esa doble vía de capacitación e investigación.

## **CAPÍTULO 2: ANÁLISIS DEL TRABAJO COLABORATIVO ENTRE INVESTIGADORES Y MAESTROS. LA SITUACIÓN 1 Y 2.**

Este capítulo está dividido en dos partes. En la primera, presento un breve análisis del funcionamiento del dispositivo de formación en relación con la primera situación de comunicación. Analizaré los tres momentos que caracterizaron la actividad reflexiva en el dispositivo: la planeación colectiva, la experimentación en aula por parte de los maestros y la reflexión colectiva de la experiencia. Esta primera situación se previó como una introducción para los maestros y los alumnos al juego de comunicación que caracterizaba a las dos siguientes situaciones en las que queríamos profundizar. La experiencia dejó ver, sin embargo, numerosos aspectos relativos a: la relación de los maestros con el enfoque subyacente a la situación didáctica; conocimientos de los alumnos, características de la situación didáctica y, sobre todo, la manera como se estableció el trabajo conjunto entre los maestros y los investigadores (la interacción, la colaboración y la co-construcción de conocimiento), que resultaron importantes en el desarrollo de las siguientes dos situaciones. Por lo anterior, los aspectos que reporto en esta primera parte servirán como parteaguas de lo que se desarrollará con mayor detalle en las siguientes dos situaciones.

En la segunda parte, analizo con mayor detalle el funcionamiento del dispositivo de formación en relación con la segunda situación de comunicación. Me interesa dar cuenta de los cambios y permanencias del trabajo conjunto con los maestros considerando la experiencia con la situación 1: la interacción, las formas que adquirió la colaboración, las contribuciones de uno cada de estos actores en el proceso de co-construcción, las formas de apropiación en los maestros, los conocimientos de los alumnos, entre otros. Al igual que con la situación 1, analizaré los momentos de la planificación colectiva, la implementación en aula y la reflexión colectiva sobre la experiencia.

### **2.1 La primera situación: El establecimiento de la colaboración.**

En este apartado, destacaré algunos aspectos del funcionamiento de cada uno de los dos componentes del dispositivo de formación: las reuniones colectivas y las implementaciones. El propósito es distinguir con esta primera situación, el doble carácter

de la actividad reflexiva que subyace a este estudio (y en general al modelo colaborativo en el que se inscribe esta investigación): 1) El formativo, donde me interesa identificar qué aportes recibieron los maestros desde el punto de vista de su formación y 2) el de investigación, donde analizo cómo funcionó el dispositivo de formación.

#### 2.1.1 Dimensión Formativa.

Me interesa precisar cómo la actividad reflexiva que se dio alrededor de la situación 1, se volvió una oportunidad para la formación de los maestros. Para esto, adopto el término de *apropiación* en el sentido de Block, et al., (2007), con el cual se destaca que la relación de los maestros con las situaciones didácticas que se les proponen es “compleja y dialéctica” (p.734). Es preciso aclarar que, para esta investigación, se consideran otras voces en este proceso dialógico: maestros e investigadores con el mismo proyecto de enseñanza. De ahí que, la apropiación de la situación didáctica y del enfoque didáctico subyacente a ella, se concibe como un proceso que entrelaza los momentos de la planeación, de la experiencia en aula y de la reflexión sobre la experiencia. Estos momentos, además, se reconfiguran constantemente por el trabajo conjunto entre los diferentes actores.

Con esta primera situación me interesó analizar la apropiación como una *trayectoria*, a fin de identificar qué cambios se producen en la comprensión de la situación por parte de los maestros a medida que avanza la experiencia colaborativa.

a. La planeación de la situación (primera reunión del colectivo).

##### i) Características generales

Con esta reunión se pretendía continuar la elaboración de una interpretación colectiva de las situaciones didácticas de comunicación, iniciada en el Taller introductorio, que probablemente se traduciría en los cimientos de un lenguaje y un enfoque didáctico comunes, a lo largo de la experiencia colaborativa. La participación de los investigadores y los maestros estuvo determinada por acciones distintas en el mismo marco de trabajo. Para empezar, los investigadores asumieron la responsabilidad del contenido de la reunión con la exposición de las características generales de las tres situaciones. Su participación se centró en el potencial didáctico que estas ofrecían para el estudio de las figuras y de sus propiedades geométricas. Los maestros, primero en una posición de

escucha, se informaron de las expectativas de los investigadores alrededor de la colaboración en el colectivo, así como específicamente de la propuesta didáctica.

En un segundo momento, se discutieron aspectos asociados a la implementación de la primera situación. Los maestros se interesaron por: i) el tiempo que tomaría cada fase de la implementación (instauración de la consigna, la redacción de los mensajes y la construcción de las figuras, la puesta en común), ii) la pertinencia de la situación didáctica respecto de los planes de estudio y iii) la necesidad de una actitud honesta por parte de los alumnos para desarrollar el juego de comunicación (les preocupaba que los receptores no respetaran la regla de no ver la figura que debían reproducir antes de tiempo). Mientras que los investigadores posicionaron aspectos como: i) las posibilidades de organización de acuerdo con el número de alumnos y el espacio físico disponible, ii) la previsión de las producciones de los alumnos y iii) algunos aspectos de la gestión como la importancia de los errores en las primeras producciones de los alumnos, la necesidad de una posición “reticente” del maestro durante el trabajo de los alumnos y de repetición de la experiencia.

En general, se puede decir que prevaleció un clima de interés por el trabajo conjunto, sin que esto significara que se estuviera de acuerdo en todo. De hecho, se dio un primer desencuentro entre maestros e investigadores: Fabio (M)<sup>15</sup> se resistía a implementar la situación 1 en los cursos que tenía a su cargo (segundo año), pues los temas no se ajustaban a los marcados por los planes de estudio. Sin embargo, la discusión en el colectivo ejerció presión para conservar el plan de trabajo previsto, por lo que el maestro terminó accediendo; pero fue evidente que su decisión se basó en el compromiso con el colectivo más que en considerar que la experiencia podía aportar conocimientos a sus alumnos. A lo largo de la experiencia de colaboración veremos cómo el maestro en cuestión fue reconociendo que algunos aspectos de las situaciones resultaron favorables para el aprendizaje de sus alumnos.

Finalmente, surgió de la discusión, de manera inesperada, la propuesta de que los docentes de una misma escuela, al igual que los investigadores, pudieran ser observadores de las clases de sus colegas. Los investigadores habíamos pensado

---

<sup>15</sup> En adelante, usaré las siguientes abreviaturas para distinguir los diferentes integrantes del colectivo. Para el caso de los maestros, usaré la abreviatura “(M)” al final del nombre de cada uno. Para el caso de los investigadores, usaré: “ID” para el investigador David Block; “IL” para la investigadora auxiliar Laura Reséndiz e “IY” para mis participaciones como investigadora.

proponer esto más adelante, una vez instalado un clima de confianza, pero dado el aparente apoyo que tuvo la propuesta, nos sumamos a ella<sup>16</sup>.

A continuación, presento algunas reacciones de los maestros frente a ciertas características del enfoque didáctico, reacciones que corresponden al inicio de un proceso de apropiación.

ii) Tensiones con aspectos del enfoque didáctico. Inicio de un proceso de apropiación.

Las discusiones que se sostuvieron en el colectivo ayudaron a caracterizar el *medio* al que posteriormente se enfrentarían los alumnos, no como acuerdos explícitos que todos los maestros debían seguir sino como la oportunidad de conocer formas de hacer en el aula posiblemente distintas a las usuales y de dar significado a la misma situación. A continuación, presento tres aspectos que fueron objeto de la apropiación y que se evidenciaron en los maestros en la planeación de esta primera situación:

*Aspectos del enfoque didáctico de la situación aún por esclarecerse.* La mayoría de los maestros dejó ver poca familiaridad con algunos planteamientos básicos del enfoque didáctico subyacente a la situación de comunicación. Me refiero, en particular, a los dos planteamientos siguientes: el error en las resoluciones de los alumnos como una oportunidad de aprendizaje para ellos; así como la idea de asumir una posición reticente frente al trabajo de sus alumnos. Para los maestros, parecía difícil confiar en que la situación estaba diseñada para que los alumnos interactuaran con un medio que les daría información sobre sus resoluciones (y sus errores) y, que la repetición de la situación se justificaba por la posibilidad de que los alumnos valoraran por sí mismos los resultados de su acción e intentaran nuevas resoluciones para establecer relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtendrían (Panizza, 2003).

*Las condiciones institucionales, determinantes para la implementación.* Las preocupaciones de los maestros para llevar al aula la situación 1 se concentraron principalmente en dos aspectos; el tiempo que se invertiría en la implementación de la situación y su pertinencia respecto de los planes de estudio. Estas preocupaciones responden en parte a las restricciones institucionales que tiene el trabajo de los maestros. Los documentos curriculares “expresan porciones de contenidos (agrupados

---

<sup>16</sup> La propuesta vino de un docente y fue aparentemente bien acogida por otros maestros. Cabe aquí preguntarse si los demás docentes se sumaron por convicción o compromiso, como pasó con Fabio al aceptar implementar la situación 1.

en unidades, ejes o temas) a las que se les asigna un período de enseñanza, en un cierto nivel de la escolaridad. Allí los saberes se listan y se impregnan de tiempo” (Sadovsky, 2019, p.106). Esta estructura “listado-tiempo” se materializa en un número determinado de clases que se deben invertir en cada uno de los temas; de ahí que repetir la situación demandaría más clases que podían ocupar el tiempo preestablecido para la enseñanza de otro tema. Esta misma estructura de los documentos curriculares exige a los maestros enseñar los contenidos que allí se establecen; de ahí surgió la renuencia inicial de Fabio por aplicar la situación 1 en sus grupos de segundo año.

*Aspectos de la planeación de las situaciones inusuales para los maestros.* Se identificó que los maestros no previeron por iniciativa propia las posibles producciones de los alumnos (así como sus dificultades y errores), ni sus estrategias de intervención en el aula. De acuerdo con Block, Martínez y Mendoza (2013), lograr que los maestros se fijen en estos aspectos en sus planeaciones “requiere de aprendizajes que no se pueden delegar completamente en los maestros” (p. 53). En efecto, la atención a aspectos específicos como las anticipaciones en las producciones de los alumnos y su gestión frente a estas, debió ser promovida, en esta primera reunión, por los investigadores.

Aun así, las anticipaciones que hicieron los maestros (en ese diálogo con los investigadores) tendieron a justificarse por los conocimientos que consideraban disponibles en sus alumnos: mencionaron aquellos que ya habían sido enseñados previamente y que, por lo tanto, muy probablemente usarían para resolver la situación. En suma, se mostraron confiados en que los alumnos usarían lo que se les ha enseñado recientemente en sus clases.

En particular, los maestros propusieron dos posibles formas en la que los alumnos podían caracterizar las figuras propuestas para esta primera situación (en particular, se fijaron en la figura 1), así como algunas informaciones que podían incluir en los mensajes:

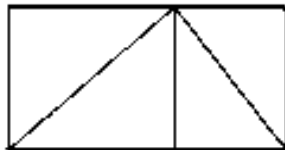


Imagen 2: Figura modelo<sup>17</sup> 1. Situación 1

---

<sup>17</sup> Conviene precisar distintos dominios de declaración sobre las figuras; tal como lo señala Fregona (1995). A lo largo de la tesis uso las expresiones “figura” o “figura modelo” para referir a la *figura material* que los



### *Formas de caracterización:*

1. “*Un rectángulo dividido*”. Un rectángulo que estaría “dividido” en otras dos figuras: Rectángulos y cuadrados.

2. “*Dos rectángulos juntos*”. Un ensamblaje por yuxtaposición de dos figuras: dos rectángulos que formaban otro rectángulo. Esta mirada sobre las figuras implicaba la dificultad en la descripción de la línea perpendicular (o lado que compartirían los dos rectángulos) que no se había considerado en la caracterización anterior. Los maestros concluyeron que las expresiones con las que los alumnos determinarían la yuxtaposición de los dos rectángulos serían “juntos” o “pegados”. El uso de términos como perpendicular o paralela fue descartado.

### *Informaciones que podían incluir en los mensajes:*

3. Medidas. Los maestros Ignacio, Liliana y Fabio consideraron que la inclusión de medidas era una opción natural que los alumnos podían tomar, probablemente en relación con el objetivo del juego; mientras que para Sara dependía de que se mencionara o no como una regla del juego al instaurar la consigna.

4. vocabulario técnico. Los maestros coincidieron en que la mayoría de los alumnos no usarían términos técnicos para describir la figura, por ejemplo, usarían *esquina* para referir al vértice y se apoyarían en la posición de la línea para referir a una diagonal (“*de esquina a esquina*”, “*una línea de la esquina de abajo a la esquina de arriba*”). Pero a su vez, considerando los dos ejemplos de caracterización, esperaban que los alumnos usaran términos técnicos como cuadrado y rectángulo tras caracterizar las figuras.

---

maestros entregan a los alumnos como modelos para la reproducción: “es una mancha sobre un papel, un punto sobre una pantalla, una descripción, con la cual se pueden establecer relaciones universales: observar, recortar, plegar, trazar, reflexionar, etc. Se supone que es la misma para el profesor y para el alumno, es parte del medio material” (Fregona y Orús, 2011, p.87). Otros dominios sobre las figuras que se pueden distinguir y que se reconocen en el marco de las situaciones de comunicación son: *la figura representación mental* y *la figura devuelta*. La primera es el resultado de una especie de negociación entre la percepción de la figura material y los conocimientos del alumno. Por su parte, *la figura devuelta* al alumno por la situación es aquella con que el alumno se relaciona cuando quiere resolver un problema (Fregona, 1995). Por ejemplo, en el juego de comunicación, la figura representación mental que el alumno tiene de un paralelogramo o un triángulo está presente en la descripción de ese dibujo (figura material), pero no es suficiente para determinar el mensaje que redacta. Es decir, para que el alumno emisor formule el mensaje, debe decidir sobre la información que considera pertinente, determinar qué conviene decir y cómo decirlo, debe optar por un vocabulario claro, preciso y común con sus receptores, decidir si presenta en el mensaje un procedimiento de construcción o una lista de instrucciones. Estas cuestiones establecen una nueva relación con el objeto (figura) que se distingue de las anteriores (Fregona y Orús, 2011).

5. contenidos geométricos que estaban viendo con sus alumnos en ese momento. Por ejemplo, Sara destacó que podían aparecer informaciones sobre el perímetro de la figura considerando que era el tema que estaba viendo con sus alumnos. Ignacio se unió y destacó los ángulos internos de los cuadriláteros como otra posibilidad.

En general, los maestros esperaban que la tasa de insuficiencia de las producciones fuera menor a la que se obtuvo. Por otra parte, no previeron las dificultades más comunes que aparecieron –es claro que no tenían elementos para hacerlo–, tales como el uso de la posición para describir la figura como si fuera una característica intrínseca a esta (más adelante volveremos sobre esto).

La discusión sobre la posible gestión dejó ver una fuerte tendencia hacia la formalización de vocabulario geométrico para los acuerdos que institucionalizarían con los alumnos tras las puestas en común.

Conviene mencionar que lo anterior corresponde a las características generales del primer contacto de los maestros con las situaciones de comunicación, las cuales dejan ver algunas nociones en el inicio del proceso de apropiación que se identificó en los maestros; pero con esto no se niega el carácter individual y contextualizado de estos procesos en cada uno de ellos (condiciones particulares en las que se da su práctica docente, características de sus alumnos, prácticas y rutinas de intervención en el aula, etc.).

b. La experiencia en el aula (implementaciones).

Paso ahora a destacar las expresiones iniciales del proceso de apropiación observadas en las distintas implementaciones que se hicieron en las aulas. Hubo varias modificaciones de la situación original, algunas intencionales y otras no; así mismo, algunas compatibles con el enfoque didáctico que los investigadores tratábamos de comunicar y otras no. Veamos.

*Apropiación débil del enfoque y la situación misma:* Se identificaron dificultades importantes en las fases de validación empírica y la puesta en común; esta última revelándose como la fase más difícil para todos los maestros. Para la validación, dos modificaciones se destacaron: Fabio, ofreció una calificación aprobatoria para quienes lograran hacer figuras con la misma forma que las originales, aunque su tamaño fuera distinto. Con esto, la actividad ya no consistió en construir figuras congruentes sino (en

el mejor de los casos) semejantes. Ignacio omitió en todos los momentos de la clase que el método de validación sería por la superposición de las figuras, lo que llevó a los alumnos a validar las construcciones mediante la comparación perceptiva, esto es, solo por *observación* de las figuras original y reproducida. Algunos usaron la regla graduada para verificar la igualdad de las medidas de los lados de las figuras. Fabio dejó ver que no tenía claridad del objetivo didáctico de la situación 1, quizás de entrada su decisión fue la de solamente gestionar una idea general de lo que se trataba, pero esto generó muchas dificultades para sus alumnos. Ignacio, por su parte, tuvo dificultades con un aspecto central del enfoque, a saber, confiar en que los alumnos pueden juzgar por sí mismos los resultados de sus acciones a través de la interacción del alumno con el medio.

Las puestas en común (e incluso la instauración de acuerdos finales para las futuras situaciones) tendieron en su mayoría a centrarse en la formalización de términos; hubo poca reflexión del por qué las figuras coincidieron o no coincidieron (por ejemplo, información faltante o ambigua en los mensajes).

Algunas de las estrategias que los maestros movilizaron para sostener el ritmo de la discusión y hacer partícipes a los alumnos en la construcción de los acuerdos finales fueron favorables, por ejemplo, Fabio e Ignacio usaron el recurso de ser ellos mismos intérpretes de los mensajes, recurso que parece más accesible o menos difícil de manejar que el previsto (la verificación entre los alumnos solos), y no elimina la posibilidad de someter a prueba los mensajes. Por su parte, Sara e Ignacio usaron el contraejemplo para que los alumnos vieran la falsedad de una descripción incluida en el mensaje. En contraste, hubo otras acciones que manifestaron numerosas dificultades: participaciones de los alumnos muy inducidas por el docente (todos); ambigüedades, destacadas por el docente pero no corregidas (Ignacio y Fabio); búsqueda de apoyo en pocos y los mismos alumnos sin involucrar los demás (Liliana y Sara); insuficiente articulación de la institucionalización con lo discutido en la puesta en común, por lo que en algunos momentos se vio forzada (sobre todo con Fabio e Ignacio); orientación de la puesta en común principalmente hacia la formalización de expresiones coloquiales para referir a objetos geométricos, dejando de lado aspectos importantes de las descripciones como informaciones ambiguas, faltantes, sobrantes (Ignacio, Fabio, Liliana), entre las más importantes.

Finalmente, quedó en evidencia la dificultad de los maestros (en unos más que en otros) para organizar y conducir las discusiones colectivas con sus alumnos. Esta

fase de la situación fue reveladora de carencias y del camino por andar en el trabajo que se realizaba en el colectivo y en relación con la formación de los maestros.

*Adopción de algunos aspectos del enfoque, pero aun con dificultades:* Hubo momentos de algunas de las clases en los que se evidenció una buena interpretación del enfoque por parte de los maestros. En la organización del medio, Sara y Liliana destacaron positivamente en varios detalles: instauración clara de la consigna, una posición reticente la mayor parte del tiempo durante el trabajo de los alumnos y la organización de un momento de validación por superposición. Aun cuando sugirieron la inclusión de medidas en los mensajes (Sara en la consigna y Liliana como una ayuda durante el momento de redacción de los mensajes), conservaron la esencia de la situación en estos momentos descritos. Sara, en particular, con sus pocos años de experiencia como maestra, se mostró muy entusiasta, conocedora de algunos elementos básicos del enfoque, e interesada en ellos.

Una modificación importante que se hizo a la situación fue permitir un segundo intercambio de mensajes, tras un primer intento de los receptores de reproducir la figura y, antes de la puesta en común. Esta fue una decisión intencional del maestro Ignacio que tenía todo el potencial de ser un buen recurso didáctico por considerar para las futuras implementaciones; sin embargo, bajo las condiciones que se dio el intercambio (los autores del mensaje no sabían qué información les faltaba a los receptores de este), no resultó como se esperaba. También, destacó su intención de ser reticente frente al trabajo de los alumnos como habían sugerido los investigadores, pero su gestión dejó ver una interpretación un tanto radical, pues en esta fase adidáctica de la situación Ignacio destacó por su silencio. Esta experiencia (incluso la de Fabio que por la ambigüedad de su consigna tuvo que reformularla varias veces) deja ver, como menciona Panizza (2003), que a los maestros les cuesta “encontrar intervenciones que permitan esta relación del alumno con el problema, sin hacer indicaciones sobre cómo resolverlo” (p.65). Esto tiene que ver también con la concepción habitual de la enseñanza en la que los maestros procuran que sus alumnos no se equivoquen; el error puede ser incluso reflejo de una mala práctica de enseñanza.

Aun cuando se encontró que, por ejemplo, la gestión de Fabio tuvo varias dificultades (no tenía claro en qué consistía la situación -reformuló varias veces la consigna, validó producciones con la misma forma pero distinto tamaño, omitió

asegurarse de la disponibilidad de las reglas para el trabajo de los alumnos-), su mirada sobre la situación se ajustó positivamente sobre la marcha: implementó más de una vez la situación en la misma clase y logró ver algunas fallas y corregirlas, mejorando la gestión, sobre todo, el cambio de estrategia que tuvo en la puesta en común: tras una estrategia deficiente como indagar por el contenido de los mensajes esperando encontrar “buenos” mensajes, sin profundizar en las descripciones, Fabio, al ver que los alumnos se dispersaban de la clase, cambió su estrategia: se asumió como un alumno receptor del mensaje y siguió las instrucciones de un mensaje en el pizarrón.

Este es un ejemplo de una apropiación que se forja durante la clase, por las retroacciones que recibe el maestro de su propio medio.

*Las producciones iniciales de los alumnos dejan ver escasos conocimientos:* El total de mensajes de los alumnos reportados por los cuatro maestros fue de 70. De este total, el promedio en los cuatro grupos de mensajes que resultaron suficientes fue aproximadamente del 16% (ver tabla 4)<sup>18</sup>:

<b>Maestro/Maestra</b>	<b>Mensajes reportados</b>	<b>Mensajes suficientes</b>	<b>% de suficiencia</b>
<i>Ignacio</i>	12	5	41,6%
<i>Fabio</i>	28 1ra. aplicación: 14 2da. aplicación: 14	4 1ra. aplicación: 0 2da. aplicación: 4	14,28%
<i>Sara</i>	18	1	5.5%
<i>Liliana</i>	12	1	5.5%
<b>Total</b>	<b>70</b>	<b>11</b>	<b>15.71%</b>

Tabla 4: Porcentaje de suficiencia en los mensajes reportados. Situación 1.

Se encontró un bajo porcentaje de mensajes con información suficiente y un escaso uso de conocimientos geométricos. En las descripciones, identificamos un

---

<sup>18</sup> Para el análisis de las producciones de los alumnos de todas las situaciones, sólo consideré las descripciones de las figuras presentes en los mensajes. Las construcciones no serán objeto de análisis pues los maestros las reportaron sin relacionarlas con los mensajes que las produjeron.

recurso persistente a la posición de las figuras (línea, horizontal, vertical, inclinada, línea a la derecha o a la izquierda de otra), uso de términos no matemáticos y ambiguos. Incluso, en algunos casos, hubo omisión de medidas. Las anticipaciones que hicieron los maestros en la reunión de planeación contrastan con este grado tan alto de insuficiencia; también, con la tendencia de los alumnos a considerar la posición como una característica geométrica de la figura. Al no anticipar estas dificultades, los maestros carecieron de herramientas para identificarlas y superarlas en el curso de la situación. Esto no significó que se pusiera en evidencia la distancia entre haber enseñado un tema y lograr que los alumnos lo puedan utilizar en una situación en la que es funcional (aunque no fue verbalizado); los maestros que tuvieron estas dificultades tendieron a trasladar la causa a los alumnos.

No obstante, es importante señalar que este panorama difícil era el esperado. Correspondió al inicio de un proceso de aprendizajes para todos, alumnos, investigadores y maestros. A la vez, justificó en su momento la pertinencia de la experiencia.

#### c. La retroalimentación de la experiencia (reuniones posteriores)

En esta segunda reunión, tras las implementaciones en aula, invitamos a los maestros a contar su experiencia de manera que todo el colectivo pudiera conocer cómo había funcionado el juego de comunicación en sus contextos particulares de práctica. El propósito era poner a los maestros en una posición reflexiva sobre la situación en el aula y que fuera la oportunidad para compartir su experiencia y conocer la de sus colegas.

Me interesa ahora precisar cómo se dio la retroalimentación de las implementaciones en el marco de la reflexión colectiva. En particular: lo que comparten los maestros con base en la retroalimentación que les ofreció su propia experiencia (lo que ven y no ven de ella) y, lo que otras voces (otros maestros e investigadores) lograron aportar para enriquecer este proceso de apropiación que experimentan los maestros a lo largo de la situación 1.

#### *La reflexión de los maestros sobre su experiencia:*

*Dificultad para ver en las acciones propias una de las causas de las dificultades.* En sus reflexiones, algunos maestros atribuyeron a factores externos a su gestión las

dificultades que detectaron en el aula. Las deficiencias de los alumnos fue la causa que más se destacó: olvidan temas que ya vieron antes o desatienden la clase. Otros factores que los maestros atribuyeron a las dificultades en el aula fueron condiciones particulares de su práctica como el escaso tiempo. Algunas decisiones que tomaron los maestros en sus clases no fueron visibles para ellos, como por ejemplo, que Ignacio no percibiera que la consigna que dio para abrir un nuevo intercambio para agregar información a los mensajes fue ambigua; Sara tampoco identificó varios momentos de su gestión en la puesta en común en los que fue muy directiva; Fabio no logró ver que tuvo problemas para instaurar la consigna y que, respecto de la validación, modificó el objetivo de la congruencia de las figuras, causando con esto un distanciamiento del propósito de la situación misma.

*Una mirada a las producciones, pero aun con dificultades:* Los maestros detectaron que hubo un uso excesivo de la posición para describir la figura, pero lo justificaron por la ausencia de términos técnicos en las descripciones; no fue visible para los maestros que los alumnos entendían la posición como una característica intrínseca a la figura. Es posible que esta dificultad para analizar las producciones se deba a que es un ejercicio inusual de su práctica docente o una carencia en su formación geométrica.

*Las aportaciones de los “otros” sobre las experiencias de los maestros:*

*Aportes de los docentes, para los docentes.* Ocurrieron aportes entre los mismos docentes, si bien estos se empezaron a construir desde la discusión colectiva con la planificación de la situación, fueron más evidentes y contundentes tras la experiencia en aula. Uno de estos aportes que destacó fue la retroalimentación que hizo Fabio a Sara, desde su posición como observador de su clase, con respecto a la tendencia que tuvo en la puesta en común de dar la palabra a pocos alumnos o a siempre los mismos. Otro tipo de aportes vinieron de conocer las experiencias y recursos que sus compañeros movilizaron en sus aulas (en la misma situación), como permitir agregar información al mensaje (Ignacio) o ajustar el tamaño de las figuras que se presentó en la ficha didáctica para que en la puesta en común fuera legible para todos los alumnos (Sara).

*Aportes de los investigadores a los docentes.* Dos tipos de aportes hicimos los investigadores. El primero, conceptos de didáctica para explicar algunos episodios que experimentaron los maestros en sus clases; fue el caso de la obsolescencia para ayudar a entender al maestro Ignacio que, al aplicar la situación con varios de sus grupos, puede

pasar que no de las consignas igual o que los conduzca un poco más; o bien, que se le olvide que hay cosas que hay que decir porque ya las dijo muchas veces para otros niños, pero no para esos niños. Otro concepto que se destacó fue el de contrato didáctico para explicar por qué algunos alumnos de Liliana usaron el doblado de papel como estrategia para reproducir las figuras sin haberlo sugerido en la consigna. En efecto, la maestra en sus clases de geometría usaba esta estrategia de trabajo con sus alumnos.

El segundo tipo de aportes que hicimos los investigadores fueron retroalimentaciones directas de las clases de los maestros. Destacamos aspectos positivos como: poner reglas disponibles para los alumnos y aspectos del medio material como la organización previa de equipos y del material (Sara) y; también susceptibles a mejora como: considerar un segundo momento para agregar información a los mensajes dando una consigna ambigua (Ignacio), que los alumnos no tengan reglas disponibles para construir las figuras (Fabio), inducir al uso de las medidas en la consigna (Sara).

Algunos aspectos en los que no hubo retroalimentación ni de los maestros ni de los investigadores y que convenía explicitar para mejorar las futuras implementaciones fueron: la inconveniencia de desplazar la congruencia por la semejanza (Fabio) y las dificultades que tuvieron todos los maestros con la conducción de la puesta en común, por ejemplo, no haber puesto desde un inicio y a la vista de todos los alumnos, la figura original, la construida, y el mensaje. Aun así, los distintos aportes que se lograron explicitar constituyen fuentes de retroalimentación que, al dar a conocer a los maestros formas concretas de gestión, pueden ayudarlos a diversificar su repertorio de actividades y desarrollar una mirada crítica sobre su propia práctica.

Se trató entonces del inicio de un proceso de apropiación, pautado por preocupaciones más centradas en la manera de hacer la situación viable en el aula que en el enfoque didáctico subyacente a ella; pero que fue tomando forma con la experiencia y la retroalimentación de esta. Encontramos distintos niveles de apropiación, unos más afines con el enfoque didáctico propuesto por los investigadores que otros.

Considerando que se trata de la primera aplicación de una situación totalmente novedosa para los maestros, el resultado debe tomarse como el punto de partida, como la confirmación de la pertinencia de las dos situaciones venideras. También puede verse



como un resultado positivo el que los maestros empezaran a ver algunas carencias en sus alumnos pues, al parecer, estos resultados casi no fueron previstos.

### 2.1.2 Dimensión de investigación.

Con la premisa de que la reflexión conjunta de las situaciones de enseñanza, a la luz de la experiencia en las aulas, es también un insumo para la investigación, me centraré aquí en precisar cómo funcionó el dispositivo de formación que se diseñó para el trabajo con los maestros. Esto implica analizar cómo se va construyendo el proceso de apropiación de las situaciones que experimentan los maestros en el funcionamiento del dispositivo. Para esto, me detendré en los siguientes aspectos: a) los tipos de interacciones que se dan entre los diferentes actores, b) las formas que toma la retroalimentación, c) las formas de colaboración que se dieron, d) el conocimiento que se genera alrededor de la situación didáctica (resultado de la construcción conjunta). Con esto, identificaré también aquellos aspectos del diseño de la situación didáctica y del dispositivo que pueden mejorarse.

#### a. La interacción entre los distintos actores

Al analizar las discusiones entre los maestros y los investigadores identifiqué distintas formas de interpretar y atribuir un significado al objeto que estaba en discusión; esto permitió una clasificación de las formas en las que se dio la interacción, en “encuentros” y “desencuentros”

*Encuentros:* momentos en los que, incluso sin negociar, los investigadores y maestros compartieron el significado que dieron al objeto de discusión. Fue el caso de las discusiones sobre las condiciones necesarias para que la situación fuera viable en los contextos de práctica de los maestros (tiempos, actitud honesta de los alumnos, la organización en equipos de acuerdo con el número de estudiantes y el espacio físico disponible).

*Desencuentros:* momentos donde se dieron interpretaciones distintas, pero que se conciliaron por argumentos de otros y por la experiencia. Un caso visible fue la discrepancia entre ID y Fabio (M) sobre la pertinencia de la situación didáctica en relación con los contenidos propuestos para los grados de segundo; Fabio argumentaba que los temas no se ajustaban a los marcados por los planes de estudio, mientras ID destacaba

que, aunque el contenido específico no estuviera en el programa, se relacionaba lo suficiente con otros que sí están, y además permitía un repaso novedoso de lo ya visto. Recordemos que el maestro finalmente accedió a implementar la situación.

Otro desencuentro, fue alrededor de la idea que tienen los maestros y los investigadores sobre el error en las resoluciones de los alumnos. Con esta primera experiencia, se empezó a ver que, a pesar de una preparación colectiva de la clase, los maestros implementan las situaciones según el significado que les dan. Lo interesante aquí es como se entrecruzan los postulados de los investigadores con las preocupaciones, intereses, concepciones de enseñanza, experiencia y condiciones institucionales de los maestros.

Hubo otros desencuentros de menor intensidad, entre los maestros, tales como: i) las razones que consideraron para determinar el tiempo que se dedicaría para la implementación: Sara e Ignacio asociaron el tiempo que debía invertirse al desarrollo de las distintas fases de la situación (sobre todo, a la previsión de que la puesta en común tomaría más tiempo) y a las condiciones institucionales (la duración de una hora de clase según los horarios de sus escuelas); mientras que para Fabio dependía de los conocimientos que tenían disponibles sus alumnos y, ii) en la previsión de las producciones, no todos los maestros coincidieron en el vocabulario que usarían los alumnos y ni en si incluirían naturalmente las medidas en sus descripciones.

#### b. La retroalimentación

Es preciso mencionar que la retroalimentación para los maestros no solo fue resultado de las discusiones que se dieron de manera colectiva (antes y después de la implementación), sino una característica del dispositivo de formación, que tuvo lugar tanto en el aula como en las reuniones colectivas. Se trata entonces de precisar qué fuentes de retroalimentación tuvieron los maestros y cómo funcionaron para esta primera situación.

*En las reuniones colectivas:*

*La retroalimentación de los investigadores. Del protagonismo a la reticencia de hacer comentarios críticos:* En el inicio, la participación de los investigadores fue protagónica. Hubo interacciones con una fuerte orientación sobre los temas que se discutieron, lo cual se explica por la necesidad que teníamos de comunicar las condiciones didácticas para

la implementación. Pero a su vez, mostramos la intención de no ser demasiado directivos frente a la forma como podían los maestros implementar la situación en el aula. Tras la experiencia, la participación se caracterizó por cierta reticencia a hacer comentarios críticos sobre las clases observadas. Esta reticencia para retroalimentar las implementaciones de los maestros se manifestó varias veces, sobre todo, con respecto a las clases que evidenciaron más dificultades (como la de Fabio). No obstante, algunos problemas sí se comentaron.

Los motivos de estas omisiones por parte de los investigadores fueron varios, unos conscientes y voluntarios, otros no. Entre los primeros estuvo la intención de no asumir el rol de “dadores de soluciones” (al menos no de manera excesiva) y con esto poner a los maestros en una simple posición de “aplicadores”. Entre los motivos fuera de nuestro control estuvo la presión de tiempo: el ritmo de un encuentro semanal con los maestros, con las observaciones de clases entre uno y otro, no nos dio la posibilidad de hacer un análisis de las clases antes del encuentro de manera que varias de las dificultades las fuimos conociendo después de las reuniones. Si bien considero pertinente la cautela que caracterizó nuestras participaciones como investigadores, considero también que faltó generar discusiones con los maestros que permitieran clarificar herramientas que apoyaran su gestión, sobre todo para la puesta en común. Al no decir nada, había en ese momento una baja probabilidad de que esto mejorara para las próximas situaciones. Lograr mejorar la calidad de nuestras intervenciones era el reto para las siguientes reuniones.

De acuerdo con lo anterior, es posible la siguiente tipificación de nuestras retroalimentaciones: i) Ausente (Omisiones). Por ejemplo, una consigna que admitió figuras semejantes (Fabio), ii) Indirecta (poco contundente); como la debilidad del recurso de agregar más información a los mensajes, sin saber qué necesitaban los receptores (Ignacio) y iii) Directa (contundente), al aportar conceptos didácticos para comprender hechos de las experiencias en aula como, por ejemplo, el contrato didáctico para explicar la estrategia de doblado de papel de los alumnos de Liliana.

*La retroalimentación que ofrecieron los maestros:* Se dio de dos maneras: 1) Directa: con la posibilidad que se dio en esta primera situación de que algunos maestros fueran observadores de las clases de sus colegas (Aldo observó la clase de Liliana y Fabio la de Sara) se dio un sentido de la retroalimentación potencial e inusual en el trabajo docente de los maestros, e incluso en sus experiencias formativas, para enriquecer sus

acciones y recursos de intervención en las clases. Fue el caso de la retroalimentación que Fabio ofreció a Sara en relación con un aspecto de su gestión de la puesta en común. 2) Indirecta: las discusiones colectivas que se dieron permitieron a los maestros conocer otras formas de interpretar y dar significado a la situación didáctica. El potencial de este sentido de la retroalimentación (maestro-maestro) está en la afinidad que pueden tener los maestros con experiencias que provienen de profesionales que comparten sus preocupaciones, limitaciones y recursos; es decir, que pertenecen a su misma comunidad de práctica.

*La retroalimentación que dio a los maestros la implementación con sus alumnos:*

El medio del maestro, “en tanto entorno de ese actor y como un subsistema que le es antagonista” (Fregona y Orús, 2011, p.91), le ofrece retroalimentaciones en el curso de la misma clase. Aquellas decisiones (o cambios de decisión) que se puedan interpretar en términos de mejoría, pueden ser un ejemplo de ello. De la observación de las implementaciones, sólo fue evidente para los investigadores la retroalimentación que Fabio recibió de su medio, al cambiar de estrategia en la gestión de la puesta en común (asumirse como receptor del mensaje) frente a las dificultades que estaba teniendo con los alumnos. En relación con lo que compartieron los maestros de sus experiencias (como ya mencioné antes), se dio, en su mayoría, una retroalimentación débil en el sentido de las pocas cosas que lograron percibir de su gestión y las dificultades de los alumnos.

En síntesis, empezaba a hacerse visible que la doble retroalimentación que reciben los maestros (de las reuniones colectivas y las implementaciones), funcionó, aun con las limitaciones señaladas: reserva de los investigadores a decir lo que ven y la dificultad de los maestros para ver.

c. La colaboración

Las formas de colaboración identificadas en esta primera etapa de trabajo conjunto entre maestros e investigadores tienen que ver con las formas de participación que cada uno de estos actores asumió en los distintos momentos de la actividad reflexiva (reuniones colectivas e implementaciones).

*Del lado de los maestros:* Estas formas de participación fueron promovidas por la misma estructura del dispositivo, pero a su vez, fueron resultado de las discusiones colectivas.

- Aportar aspectos asociados a la implementación en las discusiones colectivas previas a la experimentación (sus preocupaciones, su manera de comprender la situación, la forma de anticipar las producciones de sus alumnos, etc.).
- Implementar las situaciones en sus aulas respectivas, modificándolas y dejando ver con ello aspectos de su práctica (concepciones de enseñanza, de aprendizaje y, ejemplos de rutinas y formas de hacer en el aula, contratos pedagógicos que sostienen con sus alumnos) y de sus contextos de práctica (características de sus alumnos, organización escolar, etc.).
- Compartir con el colectivo su experiencia en aula: Los maestros narran y a su vez reflexionan sobre la implementación que realizaron (algunas decisiones para crear el medio: figuras modelo impresas, tipo de hojas entregadas para las construcciones y, recursos y estrategias de intervención) y también, la forma en la que sus alumnos experimentaron la situación (ejemplos y características de las producciones que se produjeron). Aquí, este tipo de retroalimentación se convierte en una forma de colaboración.
- Permitir que hubiera un observador externo (maestro y/o investigador) de su clase que luego hiciera comentarios públicos en el colectivo sobre su gestión de la situación; como ocurrió con Sara y Liliana. Conviene precisar que para el caso de maestro/observador, los maestros pertenecían a la misma escuela (Aldo y Liliana a la escuela general y Sara y Fabio a la escuela técnica) y tenían una relación laboral y personal de varios años; esta condición fue fundamental para que accedieran a las observaciones. Este es un ejemplo de una forma de colaboración que fue resultado de las discusiones colectivas.  
Para el caso de investigador/observador, los maestros (a excepción de Fabio) accedieron a que sus clases fueran videograbadas.
- Observar la clase de un colega y ofrecerle una retroalimentación de aspectos de la gestión observada. Nuevamente, aparece la retroalimentación como una forma de colaboración.

*Del lado de los investigadores:* En general, facilitar de varios modos las condiciones favorables para que se dé un trabajo colaborativo entre los maestros: logístico y de contenido matemático-didáctico.

- Proponer la situación didáctica y aclarar aspectos de esta: (objetivo y enfoque didáctico, fases de desarrollo).
- Retroalimentar aspectos de las experiencias en aula de los maestros: Esta posibilidad se dio de tres maneras; de las clases observadas directamente, de los comentarios de otros observadores sobre las gestiones de los maestros y de las narraciones que hicieron los maestros de sus propias experiencias.
- Regular las intervenciones que tienen lugar en las discusiones colectivas. Al ser la primera etapa del trabajo con los maestros (situación 1), los investigadores tendimos, en su mayoría, a posicionar los temas a discutirse en los encuentros colectivos. Por ejemplo, prever las producciones de los alumnos (reunión de planeación), narrar su experiencia en el aula de manera pública (reunión posterior a la implementación).

Estas formas de colaboración que se empiezan a entretener se dan desde los marcos de referencia de los distintos actores (didáctico y práctico) y son formativas tanto para los maestros (al explorar diferentes caminos y analizar su práctica) como para los investigadores (al confrontar sus supuestos didácticos con los contextos de práctica de los maestros).

d. La construcción conjunta (Conocimiento matemático-didáctico sobre la situación)

La colaboración que se dio en el marco de la actividad reflexiva fue pivote para arrojar luz sobre el proceso de co-construcción que se da alrededor de la situación didáctica. El conocimiento que se empieza a construir de manera conjunta se caracteriza como un conocimiento didáctico, ya que subyace a una posible y necesaria reestructuración de una situación para la enseñanza de la geometría en el nivel secundario.

La actividad reflexiva que se dio alrededor de la situación 1 permitió conocer algunas decisiones para crear el medio de los alumnos y ejemplos de recursos de intervención para conducir las puestas en común que podrían ayudar a mejorar las situaciones de comunicación 2 y 3. Veamos:

- ✓ Considerar un tamaño de las figuras modelo que favorezca la superposición y la visibilidad de estas frente a todo el grupo (aproximadamente de media o una hoja A4): La experiencia de Sara mostró la conveniencia de esta decisión, sobre la de los demás maestros que optaron por el tamaño que tenían las figuras en la ficha didáctica.
- ✓ Entregar papel blanco para las construcciones de la figura: Las dificultades que se generaron en las clases de Liliana al entregar para la construcción de las figuras un papel de colores (que los alumnos usaran el plegado de papel como estrategia para reproducir la figura); las que se presentaron en la clase de Fabio al entregar hojas cuadrículadas (la aparición de unidades de medida diferentes al centímetro -el uso de fracciones para expresar la longitud de un segmento respecto de otro segmento y el uso de unidades de medidas no convencionales como “cuadritos de la hoja”; así como los trazos a mano alzada); y en contraste, la ausencia de estas dificultades en la clase de Sara, dejaron ver la pertinencia de que estas hojas fueran blancas.
- Prever algunos aspectos de la creación del medio con anticipación: La organización y presentación del material que debía entregarse a los alumnos se destacó como una acción de las clases de Sara y Liliana que capitalizó el tiempo de la implementación.
- Estrategias de intervención que resultaron favorables y podrían ayudar a mejorar las puestas en común: i) Seleccionar mensajes con reproducciones exitosas y no exitosas (Sara), ii) Asumirse como un alumno receptor del mensaje “*Maestro intérprete*” (Fabio), iii) Dar un contraejemplo para que los alumnos vieran la falsedad de una descripción incluida en el mensaje (Sara e Ignacio) y iv) Solicitar “componer” el mensaje tras hacer evidente la ambigüedad (Liliana).

También, quedaron en evidencia algunas estrategias que no funcionaron bien y tendrían que omitirse o ajustarse, por ejemplo: i) evidenciar las ambigüedades, pero no corregirlas (Ignacio y Fabio); ii) promover una insuficiente articulación de la institucionalización con lo discutido en la puesta en común (Sara, Fabio e Ignacio); iii) orientar la puesta en común principalmente hacia la formalización de vocabulario (Ignacio, Fabio y Liliana).

Estos conocimientos sobre la situación operando en aula real, no son en su totalidad visibles para los maestros, a pesar de su participación en la construcción conjunta. Me refiero en particular a las estrategias para conducir las puestas en común, ya que no fue un aspecto que mencionaron los maestros cuando compartieron sus

experiencias. Pero, aquellos que sí fueron explícitos se vuelven recursos potenciales para las futuras implementaciones que harían los maestros.

Esta construcción conjunta también informa sobre aspectos susceptibles a mejorar de la herramienta escogida por los investigadores para el trabajo con los maestros (la situación); pues como vimos, es necesario comunicar algunos aspectos de la situación que omitimos tanto en la ficha didáctica como en la reunión de planificación.

2.2 La segunda situación: Una colaboración que se reconfigura desde la experiencia colectiva.

En esta segunda parte del capítulo, analizaré el funcionamiento del dispositivo en relación con la segunda situación de comunicación. Al igual que en la situación 1, retomaré los tres momentos de la actividad reflexiva (la planificación colectiva, la implementación en aula y la reflexión colectiva de la experiencia).

2.2.1 La planeación de la implementación.

La discusión para la planificación se realizó tras la reflexión del colectivo sobre la implementación de la situación 1. El objetivo de los investigadores fue crear un escenario propicio para el análisis de las condiciones de implementación que debían considerarse para la nueva situación. El conocimiento construido en el colectivo a partir de las dificultades y logros identificados con la situación 1, configuraría un recurso para guiar las acciones futuras de los maestros.

Se abordaron dos grupos de cuestiones. Primero, aprovechando que una maestra se adelantó con la implementación, se analizaron las producciones de sus alumnos; después, se repasaron las condiciones favorables para la implementación. En relación con este último, identifiqué dos objetivos diferentes; uno que estudia condiciones para crear el *medio* de los alumnos (antes de la clase) y otro que apunta a las estrategias de intervención para conducir la situación y en particular, la puesta en común.

a. Las producciones de los alumnos: una reflexión basada en la experiencia.

La primera parte de la discusión se concentró en el análisis de las producciones de los alumnos de Liliana (M). Esto permitió discutir sobre producciones reales y no sobre supuestos. Los investigadores iniciaron con una reflexión sobre los desafíos que traía la



nueva situación en relación con los conocimientos sobre la figura geométrica involucrada: los paralelogramos. Veamos:

IY: (...) la situación 2 es muy similar (...) lo que cambia son las figuras que vamos a presentar porque vamos ahora a trabajar el paralelogramo...

ID: y ahí vienen unas dificultades nuevas muy interesantes. Bueno, la maestra ya las probó y a ver qué nos cuenta [refiriéndose a Liliana], porque ahora sí van a estar presentes los ángulos; cosa que antes no importaba tanto porque todo era rectángulo y diagonales; pero ahora esa inclinación les va a dar una lata interesante.

(...)

ID: bueno, ¿qué creen que pase? [pregunta a los maestros]. ¿Qué se imaginan de alguna de las cosas que puedan pasar? La maestra [Liliana] ya vio alguna y nos puede comentar

ID e IY ofrecieron ejemplos de los elementos geométricos que podían aparecer en las descripciones como el ángulo y la altura, y a su vez, anunciaron un mayor grado de dificultad para los alumnos.

Ante la solicitud de ID, Liliana (M) hizo la primera intervención y expuso algunas producciones. Para esto, se apoyó en un cartel de papel bond que había usado para la puesta en común de sus implementaciones y donde había pegado las figuras modelo, los mensajes y las construcciones que previamente había seleccionado para presentar al colectivo<sup>19</sup>.

A continuación, presento los cuatro mensajes que se analizaron en el colectivo. Conviene mencionar que ninguno de los mensajes que se produjeron en la clase de Liliana (M) generó reproducciones idénticas. Como se previó, el paralelogramo implicaba dificultades nuevas.

i) Mensajes 1 y 2: La no funcionalidad del ángulo

El primer ejemplo fue elegido por Liliana. La maestra compartió la idea general de un mensaje que no estaba en el cartel. Recordemos las figuras modelo que había usado en la clase<sup>20</sup> (propuestas en la ficha didáctica):

---

<sup>19</sup> Desconocemos el criterio de selección utilizado por Liliana sobre las producciones de los alumnos.

<sup>20</sup> Desconocemos a cuál de las dos figuras modelo correspondía el mensaje que leyó la maestra.

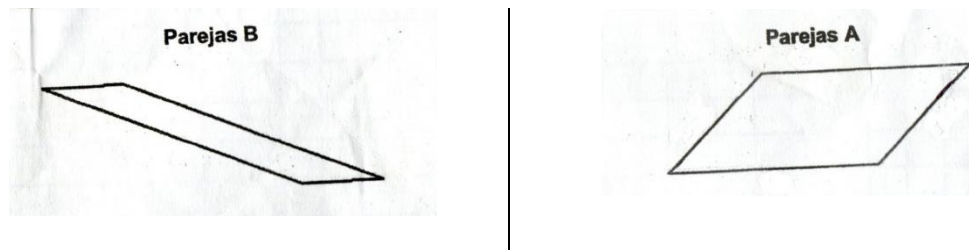


Imagen 3: Figuras modelo. Situación 2. Mtra. Liliana. Fuente: propia.

Liliana (M): Con mis alumnos apliqué y ellos dicen: *Primero, hay que hacer una diagonal y de la diagonal hacemos una línea horizontal en la esquina de la primera diagonal*

Ignacio (M): para ellos inclinada es una diagonal

Liliana (M): ajá. Y dicen luego: *se traza una horizontal de tanto, y abajo de la diagonal también se traza otra de tantos centímetros, y ya por último cerramos...Así dicen ellos.*

[Liliana no leía el mensaje, lo comentaba]

ID: ahí los ángulos no existieron

Liliana (M): no, no existieron.

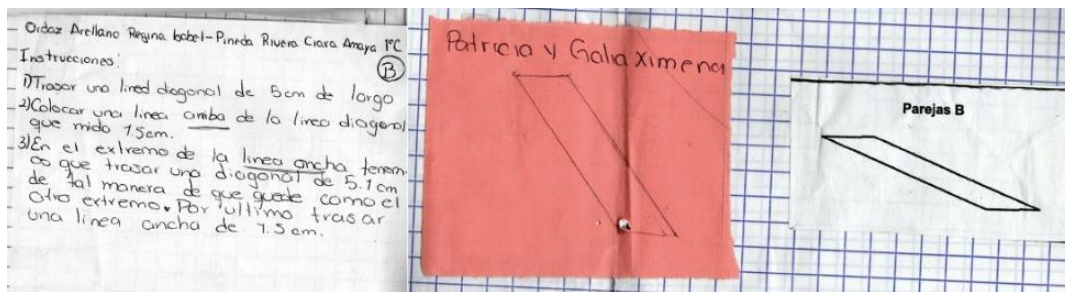
En relación con los conocimientos geométricos que movilizaron los alumnos se podía analizar que:

- Se limitaron a dar la medida de los lados.
- Solo hay una evocación indirecta, implícita al ángulo, a través de la mención de una “diagonal”; término que, como señaló Ignacio, para ellos significa recta inclinada.

La tendencia a usar la posición de las líneas y la insuficiencia del mensaje no fueron objeto de discusión. Quizás, hubiese convenido destacar que, con esta descripción, era posible que los alumnos receptores logran construir un paralelogramo, pero al omitir la medida del ángulo interior, no había garantía de que este fuera idéntico al original. En el colectivo no se hicieron más comentarios sobre este mensaje.

El segundo mensaje que compartió Liliana (M), había sido, según la maestra, “el que más se acercó” al modelo original. En esta ocasión, estaban disponibles la figura original, el mensaje y la figura reproducida:

Liliana (M): (...) En medidas no lo logra, pero este fue el que más se acercó [ver fotografía 1]



Fotografía 1: Ejemplo de producción de los alumnos, situación 2. Mtra Liliana. Fuente: propia

(...)

IY: ¿y qué dice el mensaje? a ver yo te ayudo [lee el mensaje]: *Primero trazar una línea diagonal de 5 cm de largo. Colocar una línea arriba de la línea diagonal que mide 1.5 cm.* Ah, está haciendo referencia a este [señala el lado horizontal superior de la figura]. *Tercero, en el extremo de la línea ancha tenemos que trazar una diagonal de 5.1 cm de tal manera que quede como el otro extremo; por último, trazar una línea ancha de 1.5 ...*

A ver, ¿cómo es esto? [expresa de confusión]

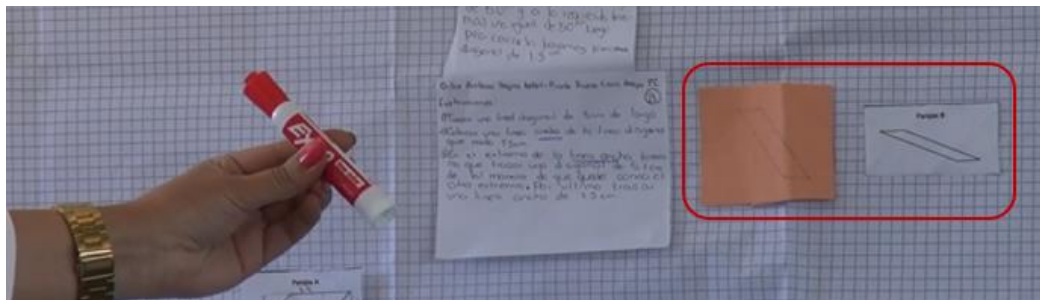
Todos: [risas. Parece que no es claro el mensaje]

(...)

IY: aquí fue casualidad que...

Ignacio (M): [interrumpe a IY] fue todo casualidad

IY: le dijeron [al alumno]: *trazar una línea diagonal* y precisamente la hizo así [indica con el marcador una posición inclinada para indicar la posición de un par de lados paralelos del paralelogramo. Ver fotografía 2]



Fotografía 2: Ejemplo de posición inclinada para indicar un lado del paralelogramo. Fuente: Propia

En esta interacción sólo participó Ignacio (M). A pesar de lo insuficiente de la descripción, dio lugar a una figura parecida. Es decir, los alumnos entienden bastante bien lo que sus compañeros quieren decir.

La estructura de este mensaje coincide con el anterior en lo siguiente:

- ✓ Los alumnos iniciaron su descripción apoyándose en “la línea diagonal”. Nuevamente llaman *diagonal* a los lados paralelos del paralelogramo que no están ni en posición horizontal ni vertical.

- ✓ Omitieron el ángulo interior de sus descripciones.
- ✓ Incluyeron las medidas de los lados del paralelogramo.

La diferencia estuvo en la forma como los emisores nombraron el otro par de lados paralelos del paralelogramo. Esta vez, ya no se trató de *líneas horizontales* sino de líneas “anchas”. En un rectángulo normalmente se llama “ancho” al lado más corto y “largo” al otro. Pareciera que los alumnos se inspiraron en eso cuando hablaron de la línea ancha.

Por otra parte, los autores del mensaje dicen: “tenemos que trazar una diagonal de 5.1 cm de tal manera que quede como el otro extremo”; Me parece que se trata de una forma muy vaga cuya intención es que, cuando se cierre la figura uniendo los extremos de los dos segmentos largos, el segmento resultante quede paralelo al de arriba (y eventualmente horizontal). Pero el paralelismo de los lados no había sido una propiedad destacada por los alumnos, por ello esa descripción tan vaga. Lo interesante es que se dan cuenta de que hace falta decir algo.

El colectivo pudo comparar la figura original, el mensaje y la figura reproducida (este fue el que más se acercó). La interacción entre Liliana (M) e IY dio cuenta de dos cuestiones. La primera, que la maestra atribuyó la insuficiencia del mensaje a la diferencia de las medidas, pero esto no es exacto pues sólo con las medidas –que podían ser de lados o de ángulos– no era posible la reproducción idéntica. Y la segunda, en la que IY destacó que el hecho de que la posición de la figura reproducida respecto a la hoja de papel fuera parecida a la de la figura original, era una *casualidad*, pues es poco común que los alumnos tracen líneas diagonales en esta posición (con grados de inclinación, respecto a una línea horizontal, mayores a 90°). También pudo haber pasado que los receptores echaron un vistazo a la figura original antes de entregarla, pero esto no se comentó. Con esto, IY contribuyó a evidenciar la insuficiencia del mensaje ante el colectivo, pero se anticipó y emitió un juicio muy pronto que lo descalificó. También quedó pendiente destacar la necesidad del ángulo como una manera de lograr reproducir la figura.

ii) Mensaje 3: el romboide como rectángulo.

El tercer mensaje correspondía a una descripción que podía ser interpretada como un rectángulo:

Mensaje (leído por IY): *Trace dos líneas de 5.1, una abajo y otra arriba cerrando con dos líneas de 1.5; formando una figura.*

Para los alumnos, la condición de paralelismo estaba asociada a la posición de dos líneas: una arriba de la otra; lo que implícitamente también suponía la horizontalidad de estas. Considerando que la longitud de los lados opuestos de la figura que podría construirse es igual y que no se hizo mención a líneas “inclinadas”, se entiende que los alumnos receptores construyeran un rectángulo. Este mensaje no fue discutido por el colectivo.

iii) Mensaje 4: Referencia a la altura. El vocabulario geométrico para evitar descripciones asociadas a la posición.

El último mensaje expuesto al colectivo se distinguió de los anteriores por incluir la altura, dato difícil de considerar pues no corresponde a un lado de la figura y, sin embargo, importante para la construcción. Además, por el uso de vocabulario geométrico y su efecto en la extensión de la descripción. Veamos:

Mensaje (leído por IY): *Traza un romboide con las siguientes medidas: 3.9 de base, 1.8 de altura y una línea diagonal en cada lado de 2.5 cm*

Ignacio (M): esa fue más específica

ID: la diagonal no hacía falta, ¿verdad?

Liliana (M): no

Ignacio (M): no

IY: entran otros elementos en juego

ID: o sea que por lo visto unos sí lo van logrando y muchos otros ni los ángulos, ni a altura, ni nada.

En este mensaje los alumnos involucraron términos que no habían aparecido antes: romboide, base y altura. En efecto, tal como lo había manifestado ID en una intervención anterior –“(…) la palabra paralelogramo o romboide puede ayudar porque nos evita tener que decir “y la otra paralela” y “la otra horizontal”...”–, nombrar las figuras evitaba el uso de descripciones asociadas a la posición de las líneas. Sin embargo, los alumnos nuevamente llamaron *diagonal* a los lados “inclinados” del romboide. En la interacción, el comentario de ID aludió al uso innecesario del dato de la diagonal, pero, como él mismo me lo hizo notar después, solamente con el dato de la base y la altura

no podía garantizarse la congruencia. Ningún integrante del colectivo se percató; al parecer no fue comprendido en ese momento.

En síntesis, las producciones tratadas por el colectivo evidenciaron que los alumnos siguieron utilizando la posición de una figura como una propiedad que la caracteriza -mensajes 1, 2 y 3-; la escasez de términos geométricos y la insuficiencia para lograr la reproducción idéntica también se hizo evidente. El único mensaje que no presentó estas debilidades no alcanzó a ser analizado lo suficiente.

Como ya dijimos, es claro que la situación presentó una nueva dificultad ante la cual, lo aprendido en la situación anterior no podía ayudar mucho: la necesidad de comunicar los ángulos, o bien los lados y la altura. No por ello descartamos posibles aprendizajes en la situación anterior, uno muy visible es que ahora comunican las medidas de los lados.

En relación con el trabajo colaborativo, la experiencia en aula de Liliana (M) permitió conocer, con ejemplos concretos, las posibles dificultades y logros que podían aparecer en los mensajes de paralelogramos, lo cual fue un valioso aporte de la docente. Los maestros e investigadores no nos detuvimos a profundizar en las características geométricas de los mensajes, nos interesamos por conocer la variedad de descripciones que podían surgir con la nueva situación. Esto se debió a las estrictas restricciones de tiempo (recordemos que este análisis se hizo en la segunda parte de la reunión). Empezaba a ser claro que el tiempo era insuficiente.

Aunque el tratamiento dado a las producciones fue superficial, la principal insuficiencia (no dar el ángulo o la altura) que se destacó, permitió reflexionar alrededor de las intervenciones posibles para conducir la puesta en común. Más adelante profundizaré en este aspecto.

b. Construcción de condiciones para la implementación: el medio de los alumnos y la gestión de los maestros.

Tras el momento de análisis sobre las producciones de los alumnos de Liliana (M), el trabajo en el colectivo se concentró en las condiciones de implementación para la segunda situación. La reflexión sobre la experiencia en aula de la situación 1 había posicionado varios aspectos a considerar para las futuras implementaciones (las dificultades con la puesta en común, la influencia del contrato didáctico y de la consigna

dada en las producciones de los alumnos, la insuficiencia del tiempo para desarrollar todas las fases de la situación y algunas estrategias de gestión de los maestros que resultaron favorables y otras que no) que se consideraron en la discusión; se trató de un diálogo en el que maestros e investigadores manifestaron sus expectativas frente a lo que se esperaba alcanzar con la situación y la forma como esta podía conducirse.

Entre las condiciones analizadas se pueden distinguir dos grupos: por un lado, las relacionadas con el *medio* material al que se verían enfrentados los alumnos; y por otro, las que se relacionan con la acción de los maestros: las estrategias de intervención, en particular, para el caso de la puesta en común.

i) Algunas condiciones didácticas y de organización para enriquecer la experiencia en aula (el medio material).

Se discutieron algunas condiciones que los maestros podían variar a voluntad. En algunos casos, estas condiciones influían en la relación de los alumnos con el conocimiento en juego, determinando así variables didácticas<sup>21</sup> de la situación y, en otros, sólo constituyeron modificaciones o posibilidades para favorecer la viabilidad de la situación en las aulas. En particular:

<b><i>Variables didácticas</i></b>	<b><i>Variables no didácticas</i></b>
Diversidad de las figuras (tipos de paralelogramos)	Tamaño de las figuras modelo
Instrumentos disponibles	Tiempo destinado para el desarrollo de la situación
Número de aplicaciones de la situación	
Ajustes al mensaje antes de la validación empírica	

<sup>21</sup> En el marco de la TSD, la finalidad de las situaciones didácticas “es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propios de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación” (Panizza, 2003, p.66)

A continuación, destaco algunos aspectos de la discusión que se realizó en el colectivo alrededor de cada una de las condiciones mencionadas.

- *El tamaño de las figuras: una decisión favorable desde una experiencia particular.*

El episodio de reflexión sobre las producciones de los alumnos permitió destacar la pertinencia de adoptar un tamaño más grande de las figuras modelo en relación con el que aparecía en la ficha didáctica. El cartel con las producciones de los alumnos que Liliana (M) había pegado en el pizarrón para que todo el colectivo lo viera, dio lugar a la siguiente sugerencia por parte de ID:

-ID: ¿eso que está ahí en el cuadro chiquito es el modelito [figura] que usted les dio? [pregunta a Liliana] (...) Oiga, maestra. Creo que sí conviene las figuras un poco más grandes, las veo muy chiquitas

-Liliana (M): es que como me dijeron que era de reproducción pues yo fotocopí, corté [de la ficha didáctica] y se las di a todos [los alumnos]

-ID: no es grave, está bien. Pero sí creo que para ellos [los alumnos] sería un poco más fácil poner figuras un poco más grandes.

Considerando que se trataba de un momento de retroalimentación, el comentario del investigador tenía cabida. Desde la posición en la que él estaba ubicado, las figuras no eran visibles; ni las construidas por los alumnos ni las que usó Liliana (M) como modelos. Si esta dificultad se tenía en el colectivo donde el número de sus integrantes no superaba la decena, era de esperarse que se acentuara aún más con los cuarenta alumnos que en promedio tenían los maestros en sus grupos. Recordemos que el argumento dado por Sara (M) para aumentar el tamaño de los rectángulos en la situación 1 fue precisamente este.

La respuesta de Liliana (M) dejó ver que, en efecto, los maestros que adoptaron el tamaño de las figuras que estaban en la ficha didáctica consideraron implícitamente que, al ser una actividad de reproducción, las figuras que se presentaron allí eran los modelos exactos para trabajar con los alumnos. Como he mencionado en varias ocasiones, como investigadores omitimos hablar del tamaño de las figuras pues no era una variable didáctica de la situación, sin embargo, el análisis de las experiencias en aula y los aportes de Sara (M) evidenciaron la necesidad de que este fuera un aspecto por considerar para las futuras implementaciones.

Conviene mencionar que la adopción de un tamaño grande de las figuras en relación con el tamaño de una hoja A4, no sólo favorecía la puesta en común, sino permitía a los alumnos emisores y receptores del mensaje evidenciar con facilidad los



errores al medir y trazar los ángulos interiores del paralelogramo. Esta razón no se explicitó en el colectivo ni por los maestros ni por los investigadores.

Cabe preguntar: ¿por qué los profesores (excepto Sara) no identificaron una característica de la situación, manipulable por ellos, que mejoraba notoriamente las condiciones de implementación (el medio material de la situación)? Como si su posición inicial fuera: *si los investigadores lo pusieron así en la ficha por algo será*, antes de tratar de averiguar. Y si eso fuera, ¿irá a cambiar esa postura?

- *Más de una aplicación de la situación: una condición que va más allá del tiempo.*

La insuficiencia detectada en las producciones relacionadas con la situación 1, sumada al análisis de algunos ejemplos concretos elaborados por los alumnos de Liliana (M), permitió al colectivo anticipar un mayor nivel de dificultad con la resolución de la situación de paralelogramos. En este punto, ID aprovechó para compartir lo siguiente:

ID: Si a lo largo de por lo menos dos aplicaciones logramos que se den cuenta y que es importante decir los ángulos, cómo se pueden medir, que dos lados son necesarios, que la palabra paralelogramo o romboide puede ayudar porque nos evita tener que decir "y la otra paralela" y "la otra horizontal"...si esas cosas se pueden cuestionar y mejorar ya va a ser ganancia (...) Ahí van a tener un montón de cosas que aprender, ojalá y puedan aplicarla dos veces porque en la primera creo que van a haber un montón de fracasos.

En la situación 1, sólo en la clase de Fabio (M) se inició una segunda aplicación (porque consideraba que por el tipo de figuras -rectángulos- no sería un desafío para sus alumnos de segundo grado). En el caso de los demás maestros, no fue posible una segunda aplicación, comentaron que el tiempo fue una limitante para desarrollar a cabalidad, incluso la primera aplicación de la situación.

En esta segunda reunión, ID nuevamente advirtió a los maestros sobre la posibilidad de que los alumnos pusieran en juego, en esta primera aplicación con paralelogramos, descripciones ineficaces (descripciones que no incluían ángulos, con vocabulario no matemático, etc.); pero, a la vez, mencionó que estas podrían evolucionar ante la posibilidad de reformular sus estrategias en una nueva tarea. Con base en la experiencia adelantada de Liliana (M) con los paralelogramos, el trabajo conjunto de mirar hacia atrás los logros y las dificultades de sus alumnos generó una aparente aceptación de los maestros a reconsiderar su posición. Sin embargo, por lo menos en las clases observadas, ningún maestro hizo más de una aplicación.

- *La diversidad de las figuras modelo: Una sugerencia de los investigadores que resultó ambigua.*

Considerar más figuras modelo para la reproducción nació tras la posibilidad de hacer al menos dos implementaciones de la situación. Liliana (M), que ya la había trabajado una vez con sus alumnos, hizo una pregunta respecto a las figuras geométricas que dio lugar a la siguiente propuesta por parte de ID:

-Liliana (M): (...) entonces el jueves lo vuelvo a aplicar [la situación 2] con la misma figura... ¿sí?, ¿o las cambio?

-ID: que sean paralelogramos (...) Yo les iba a decir, si no les hace mucho ruido, que podría haber incluso más variedad de paralelogramos dando vueltas [se refería a varias figuras modelo en una misma puesta en escena]. Tiene la desventaja de que tendría que discutir mucho un caso pues porque no todos tuvieron ese caso [en la puesta en común]

-Fabio (M): pero mire que sí estaría bien profe [le dice a ID, porque al modificarlo y tener yo [alumno] una figura y el de la derecha otra, ya tengo por lo menos tres figuras diferentes pero iguales [ríe]

-Sara (M): diferentes en dimensiones

-Fabio (M): lo que nos va a dar a nosotros que las indicaciones van a ser muy parecidas o casi van a utilizar los mismos términos que es a lo que vamos, que ellos conozcan los términos para que puedan construirla; lo que va a cambiar son las medidas...Con eso yo creo que después sí podemos hacer una socialización [con los alumnos] donde hagamos la comparativa al mismo tiempo: *A ver, la figura 1, 2 y 3, ¿qué necesitan para construirlas?*

La variedad de figuras modelo que proponía ID podía pensarse en términos de las medidas de lados y ángulos como lo comprendieron Sara (M) y Fabio (M), con lo que se resolvía el problema de las miradas indiscretas de los receptores, por así decirlo; pero la medida tenía otras ventajas que no se explicitaron: se podían variar los tipos de paralelogramos (rombos y romboides) y la posición de la figura con respecto a los bordes de la hoja.

Sin embargo, en la pequeña discusión acerca de las consecuencias de usar diferentes modelos para la puesta en común, ID logró destacar una posible dificultad para los maestros, pues al no poder involucrar a todos el grupo de alumnos con una misma discusión podía demandar más tiempo del que se tenía disponible para la implementación o causar desatención entre los alumnos.

- *El tiempo para la implementación: ¿una limitante del contexto de práctica?*

La escasez del tiempo se destacó como una condición poco favorable de la implementación de la situación 1, en particular, porque fue muy limitado para el desarrollo de la puesta en común. La posibilidad de usar dos sesiones de clase por cada una de las dos situaciones venideras (S2: paralelogramos y S3: triángulos) era poco

viable por las condiciones institucionales que enmarcaban la práctica de los maestros y el funcionamiento del dispositivo de investigación (una situación implementada por semana). Esta variable que se posicionaba como una dificultad para las siguientes situaciones, se había convertido en una preocupación común del colectivo.

Dado el acuerdo tomado con los docentes y con las autoridades para la experiencia colaborativa; como investigadores no nos era posible solicitar o sugerir a los maestros que invirtieran más tiempo del acordado en la implementación. No nos quedaba más que seguir adelante, con los tiempos asignados y con los extras que los docentes pudieran conseguir de su apretada agenda.

Por su parte, algunos maestros compartieron posibles alternativas para atender a esta problemática. En particular:

Ignacio (M):

Ignacio (M): Para esta [segunda situación] se me ocurrió algo...parece que podría, no puedo asegurarles porque tendría que hablar con el maestro de la siguiente hora, que fueran los 100 minutos [dos horas de clase en bloque]. Bueno, ya viendo lo que pasó [con la situación 1], ya desde hace dos días estaba yo maquinando entonces los [alumnos] que van a pasar a exponer a qué se enfrentaron [con la situación 2], espero que con los 100 minutos se logre algo más; que sean ellos y no el maestro el que esté interpretando, diciendo, sacando...entonces espero que me ceda el maestro de la siguiente hora sus 50 minutos a ver que obtenemos.

Michelle (M)<sup>22</sup>:

Michelle (M): (...) Yo ocuparía dos sesiones. En la primera sesión ya que se estableció eso pues hasta ahí [hasta el momento de validación por superposición] y ya uno como maestro se lo lleva y lo lee en casa y de ahí pues uno va escogiendo cuáles son las mejores indicaciones; a la siguiente sesión ya lo que se hace es como con los que hayamos escogido plantearseles a los alumnos, poner la imagen y empezar a escoger cuáles son las mejores.

Las dos propuestas permitían tener más tiempo para la implementación, que se sumaría específicamente a la puesta en común. La intervención de Ignacio dejaba ver parte de la complicación institucional para conseguir un tiempo extra. De la intervención de Michelle cabe destacar la interesante idea de que el docente se tome un tiempo para revisar los mensajes y a partir de eso tome decisiones estratégicas de cómo organizar la puesta en común. Pero quizás, el detalle de hacerlo en la casa implicó que no hiciera

---

<sup>22</sup> Michelle es una maestra que realizaba sus prácticas con el maestro Ignacio en la escuela, que participó en el dispositivo asistiendo a las reuniones colectivas y acompañando las implementaciones de Ignacio.

eco en los demás maestros. Por supuesto, no se trataba de darles más trabajo a los maestros del que ya tenían.

No obstante, las responsabilidades de las acciones de mejora estaban sobre actores distintos. Ignacio se mantenía en que las dificultades que experimentó con la conducción de la puesta en común fueron responsabilidad de los alumnos, mientras que Michelle, consideraba que una mejor selección de las producciones por parte de los maestros abonaría a esta problemática. La propuesta de Ignacio dejaba ver que las dificultades que tuvieron en la gestión no se hacían visibles, o apenas un poco. Al final, ninguna de las dos propuestas hizo eco en la discusión colectiva; la condición de la escasez del tiempo sería entonces un aspecto que cada maestro sortearía con la implementación de la situación 2. Como veremos, solo uno de los cuatro maestros hizo la implementación en dos sesiones de clase (en la misma semana).

- *El transportador: ¿explicitar disponibilidad?*

La reflexión que se dio alrededor de la relación de las producciones de los alumnos con la disponibilidad de la regla graduada y la explicitación sobre su uso en la consigna de la situación 1 permitió que, en este momento de planificación de la situación 2, los instrumentos se convirtieran en una variable a considerar por el colectivo. El interés de posicionarlo en la discusión nació de los investigadores. Veamos:

-IY: (...) Tendríamos que pensar, por ejemplo, así como nos pasó con la regla [en la situación 1], de decirle [a los alumnos]: "*puede usar la regla*", "*puede incluir medidas*" o "*háganlo como quiera, pero sin dibujos*"; pues aquí [en la situación 2] va a entrar el transportador. O sea, ¿qué vamos a hacer con eso?, o los vamos a dejar que ellos copien ángulos, así como muy artesanalmente o...

-Fabio (M): [interrumpe a IY] tendrían que pedírselos

-ID: pero ¿cómo los van a copiar si no tienen el modelo?

-IY: los que están emitiendo el mensaje, porque si van a usar ángulos, de pronto en una segunda aplicación, van a tener la necesidad de decir: *me tocó meter ángulos porque ya no me dio igual*. Y ¿cómo los van a medir?, ¿se les va a decir: *pueden usar transportador?*

-Sara (M): podemos decirles de manera muy sutil para no decirles directamente: *puedes usar todo tu instrumento de geometría*; si ya queremos ser más específicos podemos decir: *puedes usar regla, escuadra y transportador*

-Liliana (M): yo he pedido regla, compás y transportador, entonces ellos [los alumnos] dicen: *¿y debo de usar todo?*, yo les digo: *pues si quieres*

-Sara (M): pero habrá quien trace las paralelas con escuadras

-Liliana (M): pero hay niños que yo les digo: *sí, sí las tienes que usar*; [ellos] se tienen que aferrar a: *¿cómo meto el compás?*, por eso yo les digo: *si tú quieres*

-IY: ajá, pero debe estar a la orden [el transportador]

-Fabio (M): que haga acto de presencia

Con la situación 1, se concluyó en el colectivo la necesidad de que los alumnos tuvieran reglas disponibles para realizar sus tareas, pues si no se les ocurría a los alumnos utilizarla desde el principio, seguro en un segundo intento, tras la experiencia, lo harían. El comentario de IY por explicitar la necesidad del transportador para el caso de la situación de paralelogramos iba más allá de su disponibilidad durante la clase, la intención de fondo (involucrando directamente a las condiciones del juego que se darían en la consigna), era revisar si sugerir o no de manera explícita usar los instrumentos o, de manera aún más inductiva, indicar que midieran los ángulos con el transportador. Cabe destacar que fue Sara (M) quien dio un giro a la forma de hacer presente el transportador en el *medio* de los alumnos, al sugerir que este se presentara como uno más dentro de la lista de instrumentos que los alumnos podrían usar. Dos docentes más la secundaron. Este episodio da cuenta de que la importancia de no dirigir las resoluciones de los alumnos está presente, sobre todo para Sara (M), que en su consigna de la situación 1, indujo el uso de las medidas. La reflexión a la que llegaron de garantizar la disponibilidad de los instrumentos sin sugerir o solicitar acciones de medición sobre las figuras, es un ejemplo en el que el proceso de explicitación y reflexión colectiva sobre la práctica (con la situación 1) reconfigura el significado que los maestros otorgan a las situaciones exploradas.

- *Un momento adicional para agregar información al mensaje: recurso propuesto y valorado por los maestros.*

Otra condición que se discutió en el colectivo se relacionó directamente con el diseño de la situación didáctica: la posibilidad de agregar un momento de ajustes a los mensajes, después de que los alumnos receptores construyeran la figura a partir del mensaje inicial y antes de que se diera el momento de la validación empírica por superposición. La idea surgió a partir de la decisión de Ignacio (M) con la situación 1 comentada en la reunión grupal anterior. Sara (M), probablemente por su interés de enriquecer la situación de paralelogramos, planteó la posibilidad de adoptar esta variante. La discusión que se desarrolló a partir de esto involucró a Sara (M) desde su interés por este recurso, a Ignacio (M) desde su experiencia con la gestión de este y, a IY, desde la posición de observadora de la clase de Ignacio en la situación 1. En la primera parte de la discusión, Ignacio (M) explicó varias veces cómo gestionó este recurso, pues no era claro en qué momento y cómo se debía dar la segunda información en los mensajes. Finalmente,

aclaró: Los receptores construyen y, al hacerlo, detectan faltas en el mensaje. Los emisores *ven* lo que se construyó e infieren la información que les falta.

Durante varios minutos, unos y otros intentaron precisar esto. Incluso, hicieron una simulación. Ahora, la segunda parte de la discusión:

(...)

-Sara (M): [después de la última explicación de Ignacio] Ah ¡ya entendí!, por ejemplo, **ya vi lo que él hizo con las instrucciones** que yo le di [el receptor], todavía **no comparamos** las figuras, solamente yo [emisor] veo lo que él [receptor] hizo

-IY: por eso fue que las niñas [emisoras] cuando recibieron su mensaje, dijeron: *ah, voy a completar*, y les hicieron [a los receptores] la figura en el mensaje [recuerda un episodio que observó en la clase de Ignacio con la situación 1]

-Sara (M): sí (...) entonces regreso a mi equipo la figura que yo construyo [a los emisores], pero cuando mi equipo se dé cuenta que no era lo que ellos querían que construyera entonces me modifican el mensaje

-IY: pero también pasa y pasó [en la clase anterior de Ignacio] que yo como lectora [receptora] digo: *no, estas instrucciones no me sirven y te las devuelvo*, y me pueden decir [los emisores]: *no, pero yo la hice [la construcción de la figura] con mis instrucciones y está muy clarita*; porque lo que yo estoy viendo en el mensaje [en una posición de receptora] no lo está viendo el que lo escribió.

-Sara (M): sí, sí, es verdad

-IY: hay unos [alumnos emisores] que decían: *no, ¿es que está perfecto!* No están viendo lo mismo sobre el mensaje [que los receptores]. **No es lo mismo escribirlo que interpretarlo**

-Sara (M): ajá, ahí está la interpretación

-Ignacio (M): sí, a uno [alumno] le tuve que decir, me parece que ya no lo vio [le dice a IY], a uno [alumno] le tuve que decir: **sí, pero es que lo que tú estás escribiendo lo están entendiendo de forma distinta, aunque tú pienses que está bien**

-IY: porque él está viendo la figura [el emisor]

Podemos ver dos posibilidades que se manejan: a) cuando los receptores reciben el mensaje y se dan cuenta de que la información no es suficiente o b) cuando los receptores ya hicieron la figura y el emisor ve que es distinta a la que él tiene (lo que significaría que ya las compararon, al menos visualmente); aquí, Sara (M) marca una diferencia muy ambigua entre “ver lo que hizo” y “comparar las figuras”.

En la mayor parte de la discusión, se dio un desencuentro entre Ignacio (M) e IY alrededor de las acciones que se esperaban de los alumnos con este nuevo intercambio. No obstante, ambos estuvieron de acuerdo en un punto importante: no ve de la misma manera el mensaje el que lo escribe que el que lo debe interpretar. Sara (M) también estuvo muy de acuerdo con esto.

En el colectivo no se discutió más sobre esta variante; no se estudió la posibilidad de hacer ajustes al recurso mismo de manera que se validara positivamente para las futuras implementaciones. Una opción muy conveniente hubiera sido permitir a los alumnos receptores que, cuando se sintieran confundidos por las descripciones

recibidas o consideraran que les faltaba información, podían formular preguntas a los emisores, tal como plantea Fregona y Orús (2011) en su trabajo de análisis sobre la situación de comunicación de figuras. Más adelante veremos que tres de los cuatro maestros adoptaron este recurso didáctico para la situación de paralelogramos y cómo lo gestionaron.

Otras condiciones que se habían tratado en la reunión de planificación de la situación 1, no fueron retomadas en esta segunda reunión: la importancia de la reticencia de los maestros durante el trabajo de los alumnos, la honestidad como requisito necesario para alcanzar los objetivos del juego y el número de integrantes por cada equipo. Probablemente estos aspectos no se consideraron problemáticos y se asumirían con la nueva situación. Y precisamente por esto, la discusión de planificación se concentró en los aspectos que causaron dificultad y que debían ser ajustados para mejorar la funcionalidad en el aula de la situación de paralelogramos: La conveniencia de aumentar el tamaño de las figuras modelo (modificación hecha por Sara para la situación 1 y sugerida por ID en la exposición de las producciones por parte de Liliana) y la posibilidad de adoptar para la nueva aplicación un recurso didáctico, valorado positivamente, usado por otro colega (recurso de un momento extra para dar información, de Ignacio).

Es necesario aclarar que, al igual que ocurrió en la planificación de la primera situación, ninguna de las condiciones discutidas y analizadas se convirtieron en acuerdos concretos para la implementación. Incluso, hubo algunas condiciones que parecieron quedar más claras que otras. Recordemos, por ejemplo, que la necesidad de aumentar el tamaño de las figuras modelo no pareció ser reconocida por la mayoría de los maestros. Se trató entonces de discusiones que se enriquecieron con los distintos puntos de vista y propuestas generadas por los integrantes del colectivo, sin pretensión de unificar decisiones.

ii) Construcción de condiciones para la implementación: la puesta en común.

El trabajo de planificación de la situación 2, también dio cuenta de las condiciones relacionadas con las intervenciones de los maestros durante la puesta en común. En la reflexión sobre la implementación de la situación anterior, las principales dificultades que

percibieron los maestros concernían a la puesta en común, aunque no identificaron en su propia acción las razones por las que no funcionó. A lo largo de la reunión, los maestros propusieron algunas estrategias que posiblemente ayudarían a mejorar la conducción de la discusión grupal de la nueva situación. A continuación, presento las cuatro estrategias planteadas por los maestros:

Maestra/ maestro	Estrategia propuesta	Descripción
<b>Hacer evidente los errores en las descripciones</b>		
Liliana	<i>La maestra como emisora<sup>23</sup> – los alumnos como receptores</i>	Liliana (M): yo lo hice con uno de mis grupos más indisciplinados y dije: <i>bueno esto es un fracaso</i> [ríe]. Yo les fui dictando las indicaciones precisas; a ver: <i>número uno. trazamos una línea</i> , y ya le estoy diciendo cómo y ellos dicen: <i>¡pero maestra!</i> , y ya les digo: <i>pues una línea horizontal o vertical...y luego les digo que trazamos un ángulo y ellos dicen: pero ¿cómo un ángulo?, ¿hacia dentro o hacia afuera?</i>
Sara -Propuesta 1-	<i>Construir la figura con “mi propio mensaje”</i>	Sara (M): [a los alumnos] <i>Con las reglas que tu construiste, intenta hacer las figuras que tú quieres</i> , y a lo mejor se dan cuenta de que no va a salir porque mis reglas no son suficientes...podría ser también otra opción...con las mismas que ellos escriben construyen con esas reglas.
<b>Elaborar una respuesta nueva y desechar las erróneas</b>		
Sara -Propuesta 2-	<i>Construir con los alumnos un mensaje para toda la clase y construir la figura</i>	Sara (M): (...) la otra opción sería que, en la socialización, cuando nos demos cuenta de la necesidad de algunos, entre todos construyamos un mensaje que sea claro, que podamos seguir las indicaciones y logremos que se construya la figura  ID: Es buena idea. Yo lo dejaría ya para cuando no va a haber chance de más, de aplicarlo otra vez [inaudible] porque ya con eso casi cierras.
<b>Validar de entrada un procedimiento que se espera que hagan los alumnos</b>		

<sup>23</sup> El mensaje que leyó Liliana era uno de los producidos en la clase por los alumnos, cuando ella por error adelantó la Situación 2.



Michelle	<i>Seleccionar y discutir “buenos” mensajes</i>	Michelle (M): (...) uno va escogiendo cuáles son las mejores indicaciones [en los mensajes]; a la siguiente sesión, ya lo que se hace es que con los que hayamos escogido, planteárselos a los alumnos, poner la imagen [la figura modelo] y empezar...  Ignacio (M): [le dice a Michelle] o mejor el peor [mensaje] y entre todos reconstruir una indicación correcta  ID: exacto, uno con errores que pueden ser muy interesantes para compartir y otro con logros también muy interesantes
<b>Confíar en los “aprendizajes” de los alumnos</b>		
Fabio	<i>Apoyarse en los acuerdos establecidos en la situación 1</i>	Fabio (M): (...) pues con los acuerdos que hiciste (...) [le dice a Sara]. Cada vez que tu dabas un acuerdo es porque era una definición establecida y comprobada; si pasas a los acuerdos que tu diste, ahí efectivamente puedes ir con tus acuerdos y construyes la figura... ¡es más fácil!

Tabla 5: Estrategias de gestión propuestas por los maestros Situación 2. Fuente: Propia.

Las estrategias que propusieron los maestros, si bien estaban en el marco de la puesta en común, tenían propósitos distintos en relación con el trabajo de los alumnos. Liliana (M) y Sara (M), con la primera estrategia, buscaban enfrentar a los alumnos a descripciones incorrectas (ambiguas, con información incompleta) lo que probablemente, luego les permitiría reformular los mensajes o construir descripciones más elaboradas. Las maestras dejaban ver que su intención no era advertir directamente donde estaba el error ni ofrecer a los alumnos los conocimientos que querían que aparecieran; lo que constituye una condición didáctica necesaria para que los alumnos construyan el *sentido*<sup>24</sup> de los conocimientos. Conviene mencionar que, en el caso de Liliana (M), la estrategia había sido experimentada en aula y había tenido un valor adicional. Le permitió involucrar a todos los alumnos en una misma tarea, controlando condiciones asociadas a la organización de la clase: la indisciplina.

<sup>24</sup> De acuerdo con Quaranta y Wolman (2003), el *sentido* se logra cuando los alumnos “vinculan los contenidos matemáticos con situaciones en las cuales funcionan como medios de solución” (p. 192)

La segunda propuesta de Sara (M) parecía estar en relación con la primera, pues partía del hecho de que los alumnos ya eran conscientes de algunos errores y ambigüedades de las descripciones. En este caso, el objetivo era enriquecer la discusión con un ejemplo que incluyera descripciones comprensibles para todo el grupo, que no sólo permitieran construir una figura, sino que, además, fuera idéntica a la original. La validez de la estrategia estaba en la relación directa entre las “buenas” informaciones de un mensaje y la obtención de una figura idéntica. Esta propuesta fue retroalimentada por los investigadores; en este caso, el aporte de ID permitió ver que, en efecto, convenía implementar esta estrategia al final, tras una discusión de mensajes, tanto de los que no hubieran dado lugar a reproducciones idénticas como de los que sí.

La propuesta de Michelle (analizada anteriormente desde la variable tiempo) sugiere discutir con los alumnos ejemplos de “buenas” producciones”. La riqueza de esta estrategia estaba en la posibilidad que ofrecía a los maestros de destacar descripciones funcionales para la reproducción idéntica (informaciones necesarias, vocabulario pertinente, etc.). Un elemento que faltaría explicitar en esta estrategia, y que no se discutió con los docentes, es la conveniencia de incluir mensajes que no hayan permitido alcanzar el objetivo, y esto por dos motivos: uno, porque hay errores que enseñan tanto o más que los aciertos, y dos, porque de esa manera, los alumnos pueden participar de la identificación de los recursos que son útiles. Así se evita que “las mejores indicaciones” para la puesta en común, funcionen “como una pista de lo que el maestro espera que hagan todos” (Quaranta y Wolman, 2003, p.215).

La estrategia de Michelle (M) incluía también una modalidad de gestión, la de hacer la puesta en común al día siguiente, con dos posibles ventajas: los alumnos estarían descansados y los docentes tendrían tiempo de escoger con calma los mensajes.

La intervención de Ignacio (M) (en el marco de la propuesta de Michelle), configuraba una estrategia distinta, que estaba más en la línea de las propuestas de Liliana y Sara (detectar errores para luego construir buenas descripciones). Por su parte, ID ofreció un equilibrio entre lo que proponían Ignacio y Michelle; aclaró la conveniencia de analizar producciones que permitieran destacar logros y a la vez, errores de los alumnos. Esta sugerencia ya se había realizado a los maestros en la primera reunión de planificación (situación 1) y en la ficha didáctica.

Por último, Fabio (M), en respuesta a la segunda propuesta de Sara (M), sugirió apoyarse en los acuerdos establecidos con la situación de rectángulos. El maestro partía de la idea que estos acuerdos habían constituido aprendizajes en los alumnos y, por tanto, los pondrían en juego para la segunda situación. Esta propuesta dejaba ver cierta confianza del maestro en la producción de “buenos mensajes” por parte de los alumnos que, probablemente, le implicaría un menor esfuerzo en la discusión grupal. Aunque esta estrategia podía impactar de forma favorable en los mensajes, su valor potencial estaba en un momento distinto al planteado por el maestro; por ejemplo, sería más conveniente recordar a los alumnos los acuerdos en el momento de la consigna que esperar mencionarlos en la discusión grupal. Pero más allá de eso, es posible que los acuerdos tomados en la sesión pasada, por sí mismos, hubieran sido insuficientes para mejorar de manera significativa la gestión de la puesta en común, sobre todo porque eran acuerdos dirigidos a los alumnos (por ejemplo, proporcionar las medidas) y no a la gestión. El análisis que Fabio (M) hizo de la situación no da cuenta de esta consideración.

En términos del trabajo colectivo, la preocupación por las dificultades de la puesta en común se hizo evidente en varios momentos de la discusión. Las anticipaciones hechas sobre las posibles producciones de los alumnos y el estudio de las condiciones de implementación fueron escenarios que animaron a los maestros a compartir o proponer algunas estrategias de intervención para la puesta en común. Aunque en el colectivo no se analizó a profundidad cada una de las propuestas, en algunos casos, se evidenció que un maestro o un investigador las complementaba o ajustaba según el caso (ID con la segunda propuesta de Sara (M); Ignacio (M) e ID con la de Michelle). Sin embargo, todas las propuestas nacieron desde los maestros.

Desde el lado de las interacciones docentes-investigadores, cabe observar que, si bien los investigadores manifestaron su acuerdo con algunas de las propuestas, no lo hicieron sistemáticamente con todas, aun cuando estaban muy de acuerdo con ellas; por ejemplo, en los casos de las propuestas que buscaban hacer evidente los errores en las descripciones (Liliana y Sara con la segunda propuesta). Esta reticencia responde nuevamente a la intención de no erigirse en un referente obligado de validación de cuanta propuesta se hiciera. Cabe preguntar, y no sabemos la respuesta a ciencia cierta, si esta reticencia fue o no excesiva; por ejemplo, con la propuesta de Fabio.

Al igual que los maestros con los alumnos, no se trataba de que los investigadores aprobaran las buenas estrategias y desecharan las que no lo eran; recordemos que un principio del trabajo colaborativo es reconocer el "conocimiento de la experiencia" del profesor, esto es, su competencia para actuar en su contexto de práctica (Desgagné et al., 2001). Pero, en relación con el objetivo de formación y, ante las dificultades que tuvieron los maestros para conducir la puesta en común, cabe preguntar si hubiera convenido dar más "tips" que les permitieran mejorar o enriquecer sus intervenciones. Un aspecto de la co-construcción es, me parece, admitir algunos problemas en la implementación. En todo caso, cabe destacar que la oportunidad de formación no radicaba solo en la calidad de sus intervenciones sino en el dispositivo mismo de investigación: la alternancia planificada entre el desarrollo de situaciones de enseñanza, su experimentación en aula y la reflexión y retroalimentación sobre la experiencia.

### 2.2.2 La implementación de la situación en el aula<sup>25</sup>

En este apartado, me centraré en las distintas maneras en las que se dio la gestión de la situación por parte de cada uno de los maestros; me interesa analizar de qué manera la experiencia con la situación 1 se convirtió en un referente para la gestión de la situación 2. Ello nos permitirá apreciar también la evolución de los procesos de apropiación de los distintos maestros.

#### *Las decisiones y dificultades de los maestros.*

Para esta segunda situación de comunicación, las decisiones de los maestros para la gestión fueron diversas y dejaron ver nuevos logros y dificultades en cada una de las distintas fases de la situación; así como aspectos que se conservaron de la anterior experiencia. A continuación, enfatizo en: la consigna, la validación empírica y la puesta en común. También, las características generales de las producciones de los alumnos.

---

<sup>25</sup> Fue posible hacer observaciones de las implementaciones de los cuatro maestros; sin embargo, por la emergencia sanitaria COVID19, los registros de la clase de Fabio que corresponden a la validación empírica y la puesta en común no pudieron ser recuperados del Departamento de investigaciones educativas -DIE-Cinvestav; por lo que el análisis de estas dos fases de la situación fueron omitidas (sólo se conocerá detalles de estas fases de la voz del maestro en la reunión posterior a la implementación). Por otra parte, no daré cuenta de la puesta en común de Liliana porque ella decidió hacerla en una segunda sesión y ésta ya no fue posible observarla.

a. La consigna.

i) Las reglas del juego

*Maestra Sara.*

Sara inició reorganizando las parejas A y B y los equipos de trabajo establecidos para la situación 1. El objetivo fue incorporar a los alumnos que no habían asistido a la clase anterior y reubicar a los que, para esta sesión, no tenían pareja. El resultado fue 17 parejas y un trio. La correspondencia entre parejas también se modificó; la primera indicación de la maestra fue que mientras redactaban el mensaje ella escribiría en el pizarrón entre qué parejas se daría el intercambio de los mensajes; una decisión favorable que evitaba la tentación a los alumnos (receptores) de ver la figura que les tocaría reproducir; a esto se sumó otro cambio: la presencia de distintos modelos.

Apoyándose en los alumnos, instauró la consigna. A través de preguntas, Sara buscó hacer explícitas las reglas del juego y los acuerdos a los que habían llegado en la clase anterior. Entre las cosas que omitió decir, estuvieron las siguientes: cuándo y cómo se daría la validación (por superposición) de las figuras reproducidas y el uso de los instrumentos, en particular, del transportador; como sí lo había hecho con la regla graduada en la situación 1. Esta segunda omisión pudo ser intencional y haberse originado en la discusión sobre este tema que tuvo lugar en la reunión colectiva previa a la implementación<sup>26</sup>.

Hay tres aspectos que se destacaron en la interacción que se dio con los alumnos. Por una parte, hubo confusión entre “reglas” y “acuerdos”, esto pudo darse porque Sara pasó de tratar las reglas del funcionamiento del juego a solicitar acuerdos que fungían como recursos para la nueva tarea de redacción de los mensajes, sin marcar una diferencia explícita y clara entre ellas. Sin embargo, a pesar de la confusión, logró que se precisaran tres acuerdos (llamar *vértice* a la esquina o el punto, llamar *diagonal* a la línea que une a dos vértices no consecutivos y escribir el nombre las figuras), lo cual era una buena manera de hacer la conexión con la sesión anterior, y aprovecharla para mejorar la calidad de las descripciones que se harían ahora.

---

<sup>26</sup> Recordemos que una de las variables didácticas discutidas para esta implementación fue la importancia de no decir en la consigna información que sugiriera procedimientos, instrumentos, ni nada que afectara las producciones de los alumnos.

Un segundo aspecto fue la indicación que dio de incluir medidas en los mensajes para garantizar la igualdad entre las figuras. En la primera situación, al explicitarlo en la consigna, identificamos (en este análisis) cierta inducción por parte de la maestra, pero en este caso fue distinto pues se limitó a recordar las medidas sin señalar que éstas también podían referir a los ángulos. Considero que fue muy conveniente que la maestra hiciera prueba de “reticencia” y no hubiera mencionado a los ángulos.

Finalmente, un aspecto que llama la atención porque contrasta con un aspecto que había logrado destacar en la puesta en común de la situación 1 (los datos innecesarios que se incluyen en un mensaje) fue la instrucción que dio: “(...) No hay límite de palabras. Todo lo que le puedas escribir”, la cual parecía desafiar esta idea de un mínimo de datos.

En relación con el material entregado, el tamaño de las figuras se redujo de una hoja carta (situación 1) a la mitad de esta. Sara repartió entre todo el grupo cuatro figuras distintas. Para las parejas A, dos paralelogramos semejantes de manera que los alumnos no tuvieran la misma figura; y lo mismo para las parejas B. Aquí podemos ver otra decisión de Sara derivada de las condiciones discutidas en la reunión colectiva: la diversidad de las figuras modelo. Como allí se mencionó, esto efectivamente favorecía que los alumnos emisores no “copiaran” las descripciones de sus compañeros; los dos paralelogramos entregados a un mismo grupo de parejas (A o B), al ser semejantes, sólo diferían en las dimensiones de sus lados (aproximadamente en 2 cm); incluso tenían la misma posición respecto a la hoja de papel. Esta característica posiblemente respondía a un ahorro de trabajo para la profesora (pues para tener el segundo modelo bastaba con fotocopiar el primero con otra escala), ahorro válido pues la semejanza sí cumplía la función de impedir la copia. En relación con los instrumentos, se aseguró que las parejas tuvieran su juego de geometría (regla, compás, transportador).

#### *Maestro Fabio<sup>27</sup>*

Fabio, al igual que Sara, reorganizó las parejas y los equipos de alumnos para esta segunda situación. Decidió asignar las parejas al azar, por lo que al indicar que se distribuyeran en el salón (de manera que las parejas A quedaran a un lado y las B al

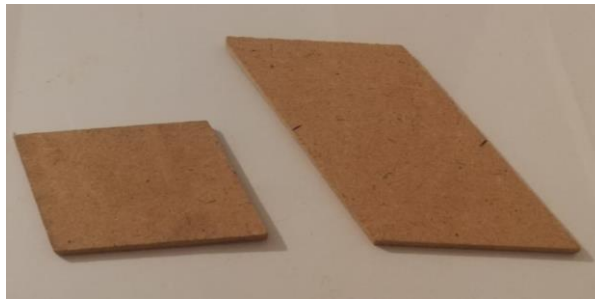
---

<sup>27</sup> Recordemos que las clases de Fabio no se podían videogravar, por lo que las notas del observador se convirtieron en la única fuente para reconstruir las implementaciones de las tres situaciones. En este caso, la observadora fue IL.

otro), los alumnos se vieron confundidos y tardaron en organizarse. Luego, con la ayuda de una alumna, entregó a cada pareja un sobre, una hoja blanca y un transportador. Cada sobre venía marcado con el código 1A, 2A, 3A, etc.; y 1B, 2B, 3B, etc. Seguido a esto, dio la consigna:

-Mtro: Tienen que abrir sus sobres y tienen que escribir para que su equipo lo haga tal como está. El equipo que tenga tal cual, **que sea exactamente igual** ... [unos segundos en silencio] No decirle al otro equipo. Pueden usar lo que quieran.

Los sobres contenían la figura que debían describir los alumnos. Las figuras eran de madera y de tamaño pequeño (aproximadamente como el que aparecía en la ficha didáctica). Sólo había un modelo para todas las parejas A y uno para las parejas B:



Fotografía 3: Figuras modelo en madera. Situación 2. Mtro Fabio. Fuente: Propia

Fabio continuó:

-Mtro: No pueden dibujar absolutamente nada, pueden escribir... No pueden estar intercambiando información

Luego de esta intervención, los alumnos empezaron la redacción del mensaje.

La consigna de Fabio destacó el objetivo del juego, logrando precisar con mucha más claridad que en la situación 1 que se trataba de que las figuras fueran iguales. A su vez, precisó la restricción de no incluir dibujos para apoyar las descripciones. Por otra parte, omitió información (que quizás hubiera sido útil recordar), por ejemplo: cómo funcionaba la situación (las parejas A enviaban un mensaje a las parejas B para que construyeran a partir de esto la figura) y la validación por superposición. Fabio, a diferencia de Sara, no consideró a los alumnos ausentes en la clase anterior, partió de la idea de que, al tratarse del mismo juego, no había necesidad de profundizar en las instrucciones.

Respecto al material entregado, podemos ver algunos cambios significativos en relación con la primera situación: i) Hojas blancas en lugar de cuadriculadas, ii) entrega de instrumentos: solamente el transportador (no regla, ni compás) y iii) el material de las figuras modelo: madera.

Más adelante analizaré con más detalle las implicaciones didácticas de estos cambios; por ahora, me centraré en las posibles motivaciones de estas decisiones. El cambio en el tipo de hojas podía atender a la dificultad que generaron las hojas cuadriculadas con la situación 1, a saber, los trazos a mano alzada o los cuadros usados como unidad de medida<sup>28</sup>; la decisión de entregar el transportador a cada pareja podría estar relacionada con las discusiones sostenidas en la reunión colectiva previa a esta implementación, pues allí se sugirió que el transportador se presentara en el *medio* de los alumnos como uno más dentro de la lista de instrumentos que podrían usar. Tal como lo expresó Fabio en la reunión colectiva, garantizó que el instrumento estuviera disponible para los alumnos (si bien indujo su uso al ser el único instrumento). Finalmente, una posible interpretación sobre las figuras en madera podía ser, además del hecho de que aprovecha el taller (de construcción) que tiene a su cargo en la escuela técnica, podía responder a la intención de facilitar la comparación de las figuras y, por tanto, la validación; otra interpretación, el interés por evidenciar en una futura reunión colectiva que, a diferencia de la situación anterior, en esta ocasión sí preparó su clase y dedicó tiempo para ello<sup>29</sup>. Como veremos más adelante, la intención del maestro fue una mayor preparación del material.

#### *Maestro Ignacio*<sup>30</sup>

Ignacio implementó la situación con uno de sus grupos (a diferencia de la situación 1 que implementó con todos los grupos de primero que tenía a su cargo). Organizó las parejas de alumnos y los equipos de trabajo de la misma manera que en la clase anterior. De acuerdo con las notas del observador, dio instrucciones claras y precisas; podemos suponer que recordó las reglas de juego, las restricciones y el método de validación.

---

<sup>28</sup> Aunque no lo podemos asegurar para este segundo aspecto; pues no fue discutido y analizado en el colectivo.

<sup>29</sup> Esta idea de *no preparación* fue explicitada por el mismo maestro en la primera situación para argumentar el porqué del “desorden” que tuvo en su implementación.

<sup>30</sup> A diferencia de la implementación de la situación 1, esta clase no pudo ser videograbada porque los alumnos no entregaron al maestro las autorizaciones de los padres. Al igual que la clase de Fabio, sólo nos basamos en las notas del observador que, en este caso, fue ID.



Desconocemos si dio instrucciones sobre los instrumentos que tenían disponibles, pero el observador registró que algunas parejas no tenían regla.

El material que entregó fue una hoja blanca y dos figuras impresas -A y B- del tamaño que con el que aparecían en la ficha didáctica. Nos preguntamos: ¿por qué conservar este tamaño cuando en la reunión colectiva se sugirió ampliarlas debido a que un tamaño pequeño dificultaba la manipulación por parte de los alumnos y la exposición durante la puesta en común? ¿Es porque él considero que, a pesar de las razones expuestas, las figuras de tamaño pequeño no le resultaban una limitante para la clase? ¿o bien, el tiempo requerido para cambiar el tamaño fue un factor disuasivo?

*Maestra Liliana*<sup>31</sup>

Liliana, al igual que Sara, instauró la consigna apoyándose en los alumnos. En la interacción, se evidenció que ellos tenían claras las reglas del juego. No se mencionó explícitamente el objetivo de la igualdad entre figuras, excepto por la mención que hizo una alumna de “replicar” la figura. La congruencia podía estar implícita (para la maestra, pero no sabemos si para todos los alumnos) en la instrucción que se recordó de incluir medidas de lados y ángulos. El método de validación no se mencionó, es posible que, al igual que la situación 1, Liliana fragmentara la consigna y, al terminar las construcciones, indicara cómo hacer el intercambio y la superposición (en efecto, así fue). Seguido, organizó el grupo en parejas y dos tríos; al igual que Sara.

Liliana entregó un paquete a cada pareja con una hoja blanca, una hoja de color y la figura impresa. Entre las parejas A y B repartió dos paralelogramos distintos: un rombo y un romboide. Cada figura tenía trazada una diagonal o un segmento paralelo a uno de los lados del paralelogramo. El tamaño era aproximadamente como las figuras que aparecían en la ficha didáctica:

---

<sup>31</sup> Esta clase corresponde a la segunda implementación de la situación 2 con el mismo grupo. Aldo (M) y IY observaron esta clase.

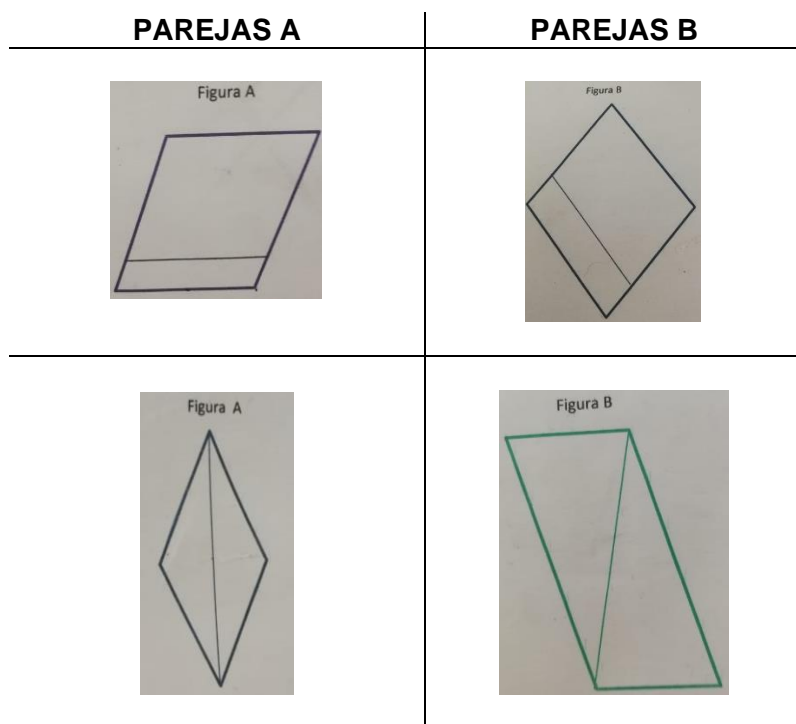


Imagen 4: Figuras modelo. Versión 2. Situación 2. Mtra. Liliana. Fuente propia

La decisión de entregar figuras distintas a un mismo grupo de parejas pudo relacionarse, al igual que en el caso de Sara y a diferencia de Ignacio y Fabio, con la sugerencia de ID de diversificar las figuras modelo. Considerar dos tipos de paralelogramos distintos en lugar de semejantes (como lo hizo Sara) era más efectivo para que los alumnos de un mismo grupo de parejas no copiaran sus descripciones<sup>32</sup>. Además, la figura modelo tenía la línea diagonal o la línea paralela a uno de los lados; claramente es un elemento que aumentaba el grado de dificultad de la tarea de describir la figura. Estas las líneas extra desviaban un poco el objetivo de identificar las características geométricas del paralelogramo. En el mejor de los casos, solo exigen un plus de descripción: una vez hecho el paralelogramo, hay que trazar el segmento. Pero, también, pueden provocar una visualización de la figura como la unión de dos figuras; distrayendo la atención del reto central: dar cuenta de los ángulos del paralelogramo; y justo ahí es donde cambia el objetivo.

<sup>32</sup> Al ser semejantes las figuras sólo diferían en las longitudes de sus lados; al tener rombos y romboides no sólo diferían estas longitudes sino los ángulos; incluso, la posición de la figura respecto a la hoja producía en los alumnos la idea de que eran figuras distintas.

Esta idea de trazar una línea extra pudo estar inspirada en la experiencia con la situación anterior, donde la figura modelo (rectángulo) tenía líneas al interior. Si es así, nos invita como investigadores a analizar con más cuidado si aquella figura no constituía un buen modelo para la situación 1.

ii) Otras decisiones para crear el medio

En la reunión de planeación, vimos cómo los maestros discutieron elementos del *medio* e hicieron diversas propuestas. Ahora veremos qué siguió, cuáles de esas propuestas retomaron y cómo.

- *Tipo de figuras geométricas:* Tres de los cuatro maestros hicieron cambios en las figuras. Mientras Sara y Liliana incluyeron más figuras en el juego, Fabio optó por presentarlas en madera. La decisión de diversificar las figuras facilitaba a las maestras controlar que los receptores vieran las figuras antes de la superposición, pero podía darles más trabajo en la puesta en común. La decisión de Liliana de incluir rombos y romboides, no sólo le permitiría destacar las propiedades necesarias para su reproducción sino las características generales (tipos, clases) de su condición de paralelogramos. Sin embargo, las líneas que agregó a las figuras determinaron una variable didáctica no prevista para la situación que la hacía más compleja y a su vez, desplazaba desafíos como la dificultad del ángulo interior o la altura. Incluso, se corría el riesgo de desplazar el objetivo de analizar paralelogramos desde el punto de vista de sus propiedades (en 1D), y que lo vieran más como un ensamblaje por yuxtaposición de otras figuras.

En el caso de Fabio, las figuras en madera podrían facilitar la superposición haciéndolas “encajar” en las figuras reproducidas, esto evitaría posibles errores que pasan con figuras impresas donde girar las figuras o voltear una de ellas para hacerlas coincidir, implica para los alumnos la no congruencia de estas<sup>33</sup>.

- *El tamaño de las figuras:* Sara nuevamente consideró un tamaño de las figuras que favorecía la medición, la superposición y su visualización ante todo el grupo en la puesta en común; mientras que Fabio, Ignacio y Liliana conservaron el tamaño de las figuras presentadas en la ficha didáctica, muy pequeño para lograr dichos

---

<sup>33</sup> Fregona y Orús (2011) denominan este fenómeno como un efecto de la posición de la figura respecto a los bordes de la hoja.

objetivos. Incluso las figuras de Ignacio fueron más pequeñas que las de sus colegas. Considerando el desafío de los ángulos interiores que traía la situación de paralelogramos, la tarea de medir ángulos con el transportador se hacía más compleja. Parecía que esta variable discutida previamente por el colectivo no tuvo eco en los maestros; el caso de Sara no es un ejemplo, pues desde el inicio adoptó un tamaño conveniente de las figuras.

- *Los instrumentos disponibles:* Sara, Ignacio y Fabio omitieron de sus consignas el uso explícito de algún instrumento. En particular, Sara e Ignacio confiaron en que sus alumnos disponían del juego de geometría (regla, compás, transportador, etc.) solicitado al inicio de esta experiencia (de hecho, la mayoría de sus alumnos lo tenían); mientras que Fabio lo entregó junto con las figuras modelo. En el colectivo se había discutido sobre no sugerir su uso para la medición de ángulos; probablemente esta fue la intención de Fabio, pero al entregarlo (sólo ese instrumento) pudo jugar el contrato didáctico de la clase: si el maestro lo entrega es porque debemos usarlo; y volverse inductivo. El caso de Liliana fue distinto, al ser la segunda aplicación de la situación 2, los alumnos ya habían incorporado el transportador en sus tareas.

Aún con distintos matices, los maestros dieron cuenta de su comprensión sobre la importancia de no dirigir las resoluciones de sus alumnos; es entonces un ejemplo en el que la actividad reflexiva que se construye en colectivo parece transformar algunas acciones de los maestros.

- *Las hojas para trazar la figura:* Todos los maestros entregaron hojas blancas a los alumnos. Ignacio y Sara, igual que en la sesión anterior; mientras que Fabio pasó de hojas cuadriculadas a blancas. Liliana, por su parte, anexó la hoja blanca a las hojas de color; esto para que en una se escribiera el mensaje y en la otra se construyera la figura. En el colectivo, no se había discutido hasta ese momento sobre el tipo de papel que se entregaba a los alumnos, pero sí aspectos no favorables como los trazos a mano alzada de los alumnos de Fabio (porque la cuadrícula desplazó el uso de la regla) y los dobleces en las hojas de color en el caso de Liliana (por la papiroflexia). Precisamente por esto, la elección de Fabio fue conveniente. Ahora, considerando que es la tercera vez que los alumnos de Liliana se enfrentaban al juego de comunicación, el papel de color ya había perdido el efecto de plegado sobre

las reproducciones de los alumnos. Así, todos los maestros ofrecieron mejores condiciones en comparación con la primera situación.

b. Redacción de los mensajes y la construcción de la figura.

De este momento de trabajo a cargo de los alumnos, doy cuenta de las gestiones de Sara y Liliana<sup>34</sup>.

*Maestra Sara:* Durante el trabajo de redacción, se desplazó por el salón e hizo varias intervenciones sobre las descripciones que estaban produciendo los alumnos, entre otras más bien disciplinarias (como no levantarse de su lugar y hablar con los compañeros de otras parejas). Veamos:

Intervenciones de la maestra	Intención / Función
-Mtra: Acuérdense que la figura que va a construir su compañero debe ser exacta	Da Instrucciones del juego (Recuerda el objetivo). Aunque esta expresión era ambigua. Quizá convenía decir “que se puedan superponer”.
-Mtra: Acuérdense que pierden si dejan ver la figura -Mtra: No pueden levantarse, váyanse a su lugar. -Mtra: es en parejas, no en grupos de cuatro.	Da instrucciones del juego (Controla y garantiza las condiciones del juego).
-Mtra: Acuérdense de los acuerdos para que sea un poquito más claro. -Mtra: Pónganse de acuerdo para redactar su mensaje.	Recuerda un recurso para resolver la tarea y/o mejorarla.
-Mtra: Ponga en su hoja en blanco el número de pareja que eres. -Mtra: Bien chicos, acuérdense que son 9 equipos y aquí ven con quien les corresponde -en el pizarrón la maestra a ubicado los equipos- ... ahorita intercambian pareja A1 con B1 y así sucesivamente... observen el pizarrón para ver como quedó. -Mtra: Ya estamos terminando.	Da instrucciones del juego (indicaciones para el momento de intercambio y validación). Información adicional a la dada en la consigna.  Administra el tiempo.

Tabla 6: Intervenciones de la Mtra. Sara durante el trabajo de los alumnos. Situación 2. Fuente: Propia

<sup>34</sup> Los registros de los observadores de Ignacio y Fabio no hicieron mención a este momento.

Los alumnos se mostraron muy inquietos, algunos parecían no estar conectados con la tarea asignada; a esto se sumó que Sara tardó mucho escribiendo en el pizarrón las parejas que se correspondían para el momento de intercambio que seguía. Esto la obligó a intervenir muchas veces en poco tiempo. A pesar de la variedad de sus intervenciones, en ningún caso dio informaciones sobre los conocimientos que quería que aparecieran; lo que responde a la pretensión de no corregir errores y a la idea de adidacticidad inherente a la situación.

*Maestra Liliana:* Intervino poco mientras los alumnos trabajaron. La dinámica fue que los alumnos la llamaban y ella iba hasta su puesto para resolver las dudas. Si bien no fue posible conocer de qué se trataron estas dudas ni las ayudas, suponemos, por la siguiente intervención de Liliana, que les costó describir la línea adicional que tenía la figura:

-Mtra: Recuerden que **la figura tiene una línea más**, no olviden también describirla [dice a todo el grupo].

Con esto, Liliana indujo la mirada de los alumnos hacia esta línea adicional; dejando ver con esto que, en efecto, sí creía que existía un mayor grado de dificultad. Quizá, buscaba que los alumnos usaran los conocimientos tratados en las sesiones anteriores (diagonales, líneas paralelas); recordemos que era la segunda aplicación de la situación 2. Es probable que Liliana no se haya dado cuenta de la forma en que esa línea extra desviaba la situación del propósito de analizar al paralelogramo. Más adelante veremos que, en efecto, influyó en la percepción que algunos alumnos tuvieron de la figura. Este tema fue retomado en la reunión colectiva posterior.

c. Producciones de los alumnos.

A continuación, daré un panorama de los mensajes que produjeron los alumnos de los cuatro maestros en una primera aplicación de la situación 2<sup>35</sup>. Algunos de los mensajes

---

<sup>35</sup> A excepción de Fabio que reportó los mensajes de dos aplicaciones que realizó en dos grupos distintos. Los mensajes no estaban discriminados por grupos ni por grados.

que me fueron entregados por los maestros no se relacionaban con las figuras construidas a partir de ellos, por lo que no los tuve en cuenta<sup>36</sup>.

Las categorías establecidas para el análisis de los mensajes son: i) la suficiencia e insuficiencia y ii) las características geométricas de las descripciones.

i) Suficiencia e insuficiencia de los mensajes<sup>37</sup>

El total de mensajes reportados por los cuatro maestros fue de 69. El promedio de mensajes suficientes fue aproximadamente del 14%. En la tabla 7 presento el dato por maestro.

<b>Maestro/ Maestra</b>	<b>Mensajes reportados</b>	<b>Mensajes suficientes</b>	<b>% de suficiencia</b>
<i>Ignacio</i>	13	0	0%
<i>Fabio</i>	30	4	13.3%
<i>Sara</i>	18	3	16.6%
<i>Liliana</i>	8	3	37.5%
<b>Total</b>	<b>69</b>	<b>10</b>	<b>14,49%</b>

Tabla 7: Porcentaje de suficiencia en los mensajes reportados por los cuatro maestros. Situación 2. Fuente: Propia.

En relación con la situación 1, observamos que, en promedio, se mantuvo un bajo porcentaje de suficiencia de los mensajes. Cabe señalar que no podía esperarse que las producciones de los alumnos mejoraran en relación con la situación anterior, debido a que estaba en juego una figura que no sólo era distinta, sino con una característica nueva: la necesidad de comunicar un ángulo, o dar datos que permitan sustituirlo.

Los aspectos discutidos e institucionalizados con la situación 1, por ejemplo: nombrar las figuras para evitar descripciones asociadas a la posición de los elementos geométricos, incluir medidas, usar vocabulario técnico y coherente respecto a las características de los elementos que se nombran podían ayudar a hacer mejores mensajes, pero no podían superar la nueva dificultad. Por ejemplo, para el caso de los paralelogramos, nombrar las figuras no trajo consigo la mejora que se esperaba, pues al

<sup>36</sup> En la reunión posterior, algunos maestros compartieron que detectaron que algunos receptores vieron la figura antes de la superposición; en otros casos, desconocemos por qué no asociaron los mensajes con las construcciones.


<sup>37</sup> El análisis que presento en este apartado forma parte de mi trabajo de investigación, por lo que en él no participan los docentes. Cabe precisar también que, en las reuniones colectivas, este análisis aún no estaba hecho, por lo que los investigadores participábamos a partir de las primeras impresiones e interpretaciones que podíamos hacer, con la información disponible.

parecer resultaba menos difícil para los alumnos describir la figura como una yuxtaposición de otras figuras conocidas (rectángulo y triángulos). Otros datos funcionales para la reproducción podrían ser la altura y el ángulo interior, pero estos conocimientos eran nuevos retos y no se movilizaron con la figura de la situación anterior. Los errores, el no lograr la congruencia con la situación 2, podían desencadenar esos aprendizajes.

Cabe precisar lo siguiente: no consideramos necesario replicar la situación 1, con rectángulos con subdivisiones, pues éstas tenían la función solamente de aclarar el funcionamiento del juego de comunicación. En cambio, las situaciones 2 y 3 debían repetirse para dar lugar a aprendizajes. Con base en la resistencia del *medio* que ofrecen estas situaciones, se esperaba que los alumnos reconocieran que sus conocimientos geométricos disponibles no les permitían producir un mensaje con los datos necesarios y suficientes para la reproducción idéntica; esto es, como afirma Sensevy (2011), se esperaba que *se enfrentaran con su ignorancia*. La posibilidad de repetir las situaciones fue tratada previamente por el colectivo, aparentemente se comprendió su pertinencia para mejorar las producciones de los alumnos, pero el factor tiempo impidió que se asumiera cabalmente.

A continuación, presento un ejemplo de un mensaje que resultó suficiente y uno que no.

*Mensaje suficiente:* Reconoceremos dos condiciones para la suficiencia: Una, que la descripción lograra la reproducción de un paralelogramo y dos, que los datos presentados garantizaran la unicidad de la construcción.


<i>Figura modelo. Mtra. Sara</i>	<i>Ej. 1. Mensaje</i>	<i>Datos para la reproducción</i>
 <p>Lado 1 (L1): 14.6 cm Lado 2 (L2): 6.7 cm Ángulo (A1): 149° Ángulo (A2): 31° Altura (h): 3.4 cm</p>	<p>“Romboide: Traza una línea recta de 14.7 cm y una diagonal de 155° con 6.5 cm de altura hacia la derecha; y del otro lado otra de 25° con 6.5 cm de altura y une los puntos de las alturas”</p>	<p>L1 – L2 – A1 – A2</p>

El mensaje es rico en datos, de hecho, contiene un exceso, si se considera el mínimo necesario. Cabe destacar la consideración de los ángulos. La precisión de que



la figura era un romboide prometía una descripción más económica; era suficiente con anexar los datos de dos lados y el ángulo comprendido entre estos (o incluso el otro ángulo). No obstante, los alumnos presentaron una descripción en la que dejaron ver que el concepto de romboide no fue funcional para la resolución de la tarea; por otra parte, el mensaje contiene algunas ambigüedades o errores en la manera de nombrar las partes del paralelogramo. Denominaron: “diagonal” a los lados paralelos que no están en posición horizontal, lo que refleja una noción de diagonal atravesada por el efecto de la posición de la línea (inclinada) y “altura” para referir a la longitud de un lado del paralelogramo o a un lado mismo. Es muy probable que, para los alumnos receptores, nombrar diagonal a los lados no haya sido un obstáculo, pues para la mayoría los lados del paralelogramo que no están en posiciones privilegiadas como vertical y horizontal son diagonales o inclinadas. Con los datos proporcionados, los receptores del mensaje lograron reproducir una figura idéntica.

*Mensaje insuficiente:* La insuficiencia de los mensajes se caracterizó por la ambigüedad de las descripciones y la ausencia de datos necesarios para reproducir la figura de manera que esta fuera congruente a la original. Al igual que para los mensajes suficientes, distingo entre la manera en la que los alumnos caracterizaron la figura y la efectividad de los datos privilegiados para la reproducción idéntica.

<i>Figura Modelo. Mtro. Ignacio</i>	<i>Ej 2. Mensaje</i>	<i>Datos para la reproducción</i>
 <p>Lado 1 (L1): 1.4 cm Lado 2 (L2): 4.7 cm Ángulo (A1): 25°</p>	<p>“Traza una línea pequeña arriba, y otras dos en diagonal hacia abajo y ciérralo”</p>	<p>Ninguno</p>
	<p><i>Ej 3. Mensaje</i></p>	
	<p>“Hagan 2 líneas de lado con demasiada distancia, luego únanlas de manera que quede un rombo de figura”</p>	

El ejemplo 2 es una descripción que no logra comunicar de qué figura se trataba, es ambigua e incompleta (omite, por ejemplo, las medidas). En el ejemplo 3, sólo el dato: “rombo” es funcional, sin esta aclaración, era imposible saber que se trataba de un paralelogramo. Sin embargo, considerando que, por ejemplo, Ignacio (M) sólo incluyó

romboides como figuras modelo, no había manera de obtener una figura congruente a la original. El grado de ambigüedad, sumada a la omisión de las medidas, deja la impresión que los alumnos no se interesaron mucho por ofrecer a sus compañeros condiciones que permitieran asegurar la reproducción idéntica. La mayoría de los mensajes con ausencia de medidas correspondieron a los alumnos del maestro Ignacio.

### iii) Características geométricas de los mensajes.

En este apartado analizo la manera en que los alumnos caracterizaron los paralelogramos y los recursos que usaron para poderlos comunicar. En particular, se trata de caracterizar las diferentes vías que usaron para analizar una figura.

Al igual que la situación 1, en los mensajes de los paralelogramos se identificaron descripciones en las que los alumnos usaron la posición de las partes de la figura (lados principalmente) para describirla, sin evocar ninguna figura geométrica conocida. Esto dio lugar a términos con una fuerte presencia de referencias espaciales como: línea, vertical, horizontal, arriba, abajo, derecha, izquierda, etc. También, hubo descripciones en las que se evidenció que los alumnos reconocían ciertas formas geométricas en las figuras modelo. De estas últimas, se detectaron dos casos: uno, en el que el rectángulo se convirtió en la figura de apoyo para controlar la inclinación y trazar lados opuestos paralelos del paralelogramo; y dos, en el que un ensamblaje por yuxtaposición (de rectángulos y triángulos) permitió la comunicación de la figura.

Finalmente, algunas descripciones evidenciaron una mirada geométrica de la figura, donde se movilizaron conocimientos sobre las definiciones y propiedades.

A continuación, presento un ejemplo de los tipos de descripciones mencionadas:

- *Una mirada donde la posición de una figura es una propiedad que la caracteriza*

#### *Ej 4. Alumnos Mtra. Sara*

“Tomar la hoja horizontal y marcar una línea de 14.6 cm y luego de izquierda a derecha de esta misma línea marcar 5.5 cm y de ahí hacia arriba marcar 3.4 cm y de ese punto hacer otra línea de 14.7 cm en horizontal y de la línea de 14.6 cm hacer una diagonal de donde comenzó la línea de 14.7 cm y de

#### *Figura modelo:*



*Romboide:*

L1: 14.7 cm

L2: 6.5 cm

Ángulo interior: 31°

la línea final de la que mide 14.7 cm hacer otra diagonal a donde terminó la de 14.6 cm”

La principal referencia que tomaron los alumnos fue la posición horizontal de la hoja. Con esto, las expresiones *arriba*, *abajo*, *derecha izquierda* se volvieron funcionales para realizar la descripción de la figura. Incluso, nombrar *diagonal* a los lados paralelos donde reconocen una inclinación distinta a la de un ángulo recto, aunque es incorrecto, fue funcional dentro de las indicaciones para realizar los trazos. Los datos proporcionados para la reproducción (un lado, el pie de altura y la altura), aun con referencias espaciales, permitían a los alumnos receptores construir el paralelogramo al poner en funcionamiento los mismos conocimientos. De acuerdo con Duval (2016), estas expresiones están relacionadas con

(...) una práctica gráfica y de desplazamiento en espacios de juego (tablero) o en planos dibujados, tiene un valor descriptivo más inmediato, en la medida en que corresponde, ya sea a lo que se produce por una acción de trazado (trazo, línea), o a las referencias físicas del sujeto (horizontal, vertical) (p.39)

Cabe destacar una virtud de este mensaje, que otros no tuvieron: si bien omite los ángulos, logra dar información que permite prescindir de ellos: implícitamente, la altura y la distancia el pie de la altura a un vértice.

Otro factor que puede influir para que los alumnos consideren a la posición como una propiedad inherente a las figuras, es la práctica escolar de mostrarlas siempre en la misma posición. Como afirma Itzcovich (2005), la imagen del paralelogramo que disponen los alumnos en este nivel es “producto de un vínculo excesivamente visual y perceptivo” (p. 19):



Retomando el modelo que entregó Sara para esta pareja de alumnos, encontramos que, en efecto, coincide con la “imagen” de paralelogramo que describe Itzcovich<sup>38</sup>.

---

<sup>38</sup> Conviene mencionar que todas las figuras modelos entregadas por las maestras Sara y Liliana y el maestro Ignacio tenían estas características. El caso de Fabio fue distinto porque sus modelos eran piezas de madera.

Con base en esto, encontramos que una variable didáctica de la situación que omitimos en nuestro análisis preliminar y en las discusiones colectivas realizadas hasta este momento y que convenía haber tratado, era que las figuras modelo estuvieran recortadas (o trazadas sin bordes paralelos a las orillas de la hoja) para evitar el efecto de la posición de la figura con respecto a la hoja, tal como lo planteó Fregona y Orús (2011) en su estudio sobre la situación de comunicación de figuras; o al menos, que no tuvieran dibujado un lado paralelo al borde de la hoja.

- *Una mirada en función de las formas que se reconocen en la figura.*

Caso 1: El rectángulo como figura auxiliar para comunicar la forma.

En el rectángulo de la situación 1, el ángulo recto no fue una dificultad para los alumnos, fue implícitamente tratado tanto por emisores como receptores; pero con el paralelogramo, una de las principales dificultades era precisamente la noción de ángulo interior. Al desconocer la definición de paralelogramo, algunos alumnos se apoyaron en los ángulos rectos para hacer evidente la inclinación y caracterizar o trazar lados opuestos paralelos. A continuación, presento algunos ejemplos:

<p><i>Ej 5. Alumnos Mtro. Fabio</i></p> <p>“Tiene cuatro lados. Dos diferentes y dos iguales (2 largos y 2 chicos). Es como <b>un rectángulo, pero chueco</b>”</p>	<p><i>Ej 6. Alumnos Mtro. Fabio</i></p> <p>“Tiene cuatro lados. 2 más grandes que otros. Es como si <b>un cuadrado</b> estuviera pegado de la base, pero no tuviera soporte y se inclinara. Es como un <b>rectángulo</b>”</p>
<p><i>Ej 7. Alumnos Mtro. Fabio</i></p> <p>“Es un <b>rectángulo que se cae</b>. 8 cm de alto y 5.5 a los costados”</p>	

De acuerdo con Itzcovich (2005) “lo que el ojo observa depende de los conocimientos que pone en funcionamiento el observador” (p. 18); para los alumnos emisores de estos mensajes, el rectángulo les aseguraba condiciones que reconocían en el paralelogramo: que sea cuadrilátero y que un par de lados sean iguales y estén en posición horizontal. Aquí, la inclinación se soportó en los ángulos rectos; expresiones como “chueco”, “que se cae”, o concebir un lado del rectángulo como fijo susceptible al movimiento (modificando la posición de un par de lados) para determinar las inclinaciones, fue una herramienta que, además de suplir la dificultad del ángulo, permitió

garantizar el paralelismo de los lados pese a la inclinación. En general, los mensajes con estas características permitieron reproducir la forma de las figuras originales.

*Caso 2: El paralelogramo como un ensamblaje por yuxtaposición.*

Otro recurso usado por los alumnos para describir el paralelogramo fue agregando trazos auxiliares para obtener formas distintas a las reconocibles en la figura modelo (tipo rompecabezas). Duval (2016) la denomina *Descomposición mereológica*, una mirada puramente visual de la figura de partida. Veamos:

*Ej 8. Alumnos Mtra. Sara*

“Es un romboide. Para el **rectángulo** traza una línea de base 9.8 y altura 3.5. Para los **triángulos** trazar una línea en la parte izquierda del **rectángulo** de 5.5 cm y hacer lo mismo del otro lado”

*Ej 9. Alumnos Mtro. Fabio*

“Es un **rectángulo** con una altura de 3.9 cm y de ancho 4.5 cm. En sus lados verticales tiene unos **triángulos escalenos**, su altura es de 3.9, su base de cada *triángulo* es de 4.3 cm y para unir la base con la altura tiene una línea que mide 4.1; y para el otro lado vertical del **rectángulo** es las mismas instrucciones del **triángulo**, pero esta base esta boca arriba”

*Ej 10. Alumnos Mtra. Sara*

“Haz un **rectángulo** de 9.5 cm de largo por 5 cm de altura. De la esquina superior derecha haz una línea horizontal de 3.5, en la esquina inferior izquierda marca una línea de 3.5 cm (igual que la anterior). Ahora una la esquina superior izquierda a la esquina inferior izquierda, esto formará un **triángulo**. Ahora repite lo mismo del otro lado, borra las líneas que formaron el rectángulo y así tendrás tu figura”

La descomposición consistió en una yuxtaposición de dos triángulos y un rectángulo. Los trazos auxiliares correspondían a la altura del paralelogramo que a su vez era la del rectángulo y la de los triángulos rectángulos; esta relación fue implícitamente manejada por los alumnos. La descomposición del paralelogramo en otras formas del mismo número de dimensiones (2D) evitó a los alumnos la dificultad del ángulo interior.

Respecto a esto, Duval (2016) afirma que la descomposición mereológica “no tiene relación directa con el discurso matemático, y por eso permite la exploración puramente visual de una figura de partida para detectar las propiedades geométricas” (p.30). En el caso de la descripción de los paralelogramos, la yuxtaposición fue útil para la tarea de la reproducción, pues en la mayoría de estos mensajes se evidenció que los

alumnos no disponen de la noción de paralelogramo. En los casos en los que se hace explícito (como en el ejemplo 8), no fue funcional para movilizar propiedades del romboide, parecía un dato para corroborar la forma de la construcción obtenida. En general, los mensajes con estas características permitieron reproducir la forma de las figuras y en algunos casos idénticas a la originales.

- *Una mirada en función del conocimiento geométrico sobre la figura.*

En algunos casos, las descripciones de las figuras evidenciaron la disponibilidad de conocimientos geométricos por parte de los alumnos que resultaron funcionales para resolver la tarea de la reproducción idéntica. A continuación, presento los mensajes que tuvieron esta característica:

<p><i>Ej 11. Alumnos Mtra. Sara</i></p> <p>“Es un romboide. Base: 14.5 cm Altura: 3.5 cm Lados diagonales: 6.6 cm”</p>	<p><i>Ej 12. Alumnos Mtra. Sara</i></p> <p>“Figura: Romboide. h= 6.3 cm b=15.7 cm Medidas de diagonales: 7.8 cm”</p>
<p><i>Ej 13. Alumnos Mtro. Fabio</i></p> <p>“Características: - Tiene 4 aristas - Tiene 4 vértices - 2 de sus aristas miden 5.5 cm - 2 de sus aristas miden 8 cm - Tiene un ángulo inclinado de 55° - Es un romboide”</p>	

En estas descripciones, podemos ver que los alumnos movilizaron de manera funcional la definición y las propiedades de los romboides. Fueron descripciones muy económicas que incluyeron los datos necesarios y suficientes para alcanzar el objetivo de juego. En particular, los mensajes 11 y 12 dejan ver la noción de altura que, como afirma Duval (2016) corresponde a “términos de relación entre (elementos) trazados fuera de toda pertenencia a una organización visual: no decidibles visualmente” (p.38). Incluir la altura en una descripción implicaba transformar el dibujo de la figura en una representación de objeto geométrico (Perrin y Godin, 2018); una producción brillante por parte de los alumnos. Incluso, en descripciones donde se privilegió la posición de la figura o en las que se usó la yuxtaposición, se evidenció la presencia de la noción de

altura como un recurso para comunicar la figura; por ejemplo, en expresiones como: “línea invisible”, “línea hacia arriba”, “línea punteada”.

En relación con el mensaje 13, encontramos que para los alumnos el ángulo era un dato que determinaba el paralelogramo que observaban; esto es “la posibilidad de concebir al ángulo como variable si se conocen solamente las longitudes de los lados” (Itzcovich, 2005, p. 20); fue un conocimiento del que disponían los alumnos que fue funcional para la resolución de la tarea.

Conviene mencionar que la cantidad de mensajes con estas características fue mínima, cosa que no es sorprendente pues los alumnos no habían tenido experiencias similares a esta. Precisamente lograr este tipo de mirada sobre las figuras era el desafío de la situación de comunicación.

Si miramos las características de los mensajes por clase de cada maestro, no sobresalen diferencias muy marcadas, apenas ligeras tendencias, de las que doy cuenta en seguida.

En la clase de Fabio y de Sara predominaron descripciones con una fuerte presencia de referencias espaciales y con una reorganización de la figura modelo por yuxtaposición de otras. Los mensajes en los que se identificó una mirada geométrica sobre la figura, si bien fueron mínimos respecto al total de producciones, tuvieron mayor presencia en las descripciones de los alumnos de Sara y de Liliana<sup>39</sup>.

En el grupo de Fabio, se identificaron tres casos en los que tuvo efecto el que las figuras modelo estuvieran hechas en madera:

- ✓ “(..) mide 4 mm de grosor (...)”
- ✓ (...) Une los puntos [en el mensaje estaban marcados los vértices del paralelogramo]”
- ✓ “(...) Es de madera (...)”

Si bien las figuras en madera que entregó Fabio redujeron el efecto de la posición de la figura respecto a la hoja y facilitaron la validación de las figuras evitando que los giros para hacerlas coincidir les dificultara determinar la congruencia, estas indicaciones dejan ver que el estatuto de atributos como el material, se considera a la par con las características geométricas, confundándose con ellas; al ser tangible para los alumnos,

---

<sup>39</sup> De los 8 mensajes que reportó la maestra Liliana, si bien sólo tres resultaron suficientes, las descripciones evidenciaron el funcionamiento de conocimientos geométricos sobre paralelogramos. Esto puede deberse a que estas producciones correspondían a una segunda aplicación de la situación 2.

dio lugar a un nuevo dato a considerar en su estudio, una dimensión adicional al largo y al ancho.

Por último, en el caso Ignacio, casi la totalidad de descripciones se caracterizaron por una fuerte presencia de referencias espaciales que no lograron comunicar al menos la forma de la figura original.

d. La validación y la puesta en común.

En este apartado analizo las fases de validación (empírica) y de puesta en común de la primera aplicación de la situación 2<sup>40</sup> gestionadas por tres de los cuatro maestros. El objetivo es identificar las dificultades y logros que tuvieron en relación con la experiencia previa de la situación 1 y las discusiones realizadas en el colectivo y analizar cómo las enfrentaron los maestros.

i) Maestra Liliana

Finalizada la tarea de construcción de las figuras, Liliana solicitó a los alumnos que le entregaran las producciones para pegarlas en un cartel en blanco que tenía en el pizarrón. Cabe destacar que pide las tres cosas que se necesitan para validar y analizar el resultado:

Mtra: Para poder comparar necesito el escrito, el dibujo que hicieron y aparte el original de quien nos lo mandó

Con ayuda de una alumna (Regina), Liliana organizó este material en el cartel de manera que se apreciara la relación entre el mensaje, la figura modelo y la construcción.

---

<sup>40</sup> A excepción de Liliana, cuya clase observada correspondía a una segunda aplicación.



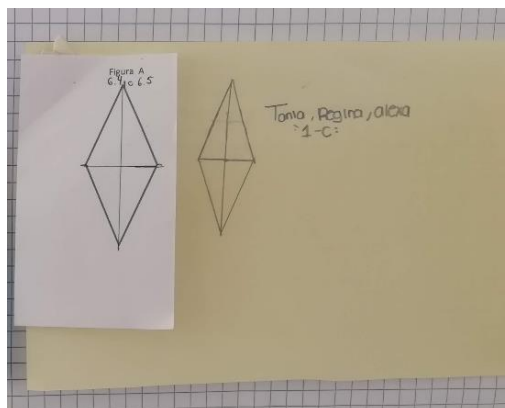


Fotografía 4: Cartel con producciones de Situación 2. Mtra. Liliana. Fuente: Propia

Cada pareja de alumnos entregó el mensaje que recibió y la figura que construyó; mientras que su respectiva pareja entregó la figura modelo. Los alumnos no superpusieron sus figuras antes de entregarlas. Liliana tardó aproximadamente 15 minutos pegando y organizando las producciones en el cartel. Durante este tiempo, algunas parejas que no habían entregado vieron la figura modelo e hicieron ajustes a la construcción; mientras que las parejas que ya habían entregado, hablaban en voz alta y se desplazaban por el salón; parecían esperar que la maestra terminara de organizar el cartel para continuar con la clase. Al parecer, aquí hay un problema práctico, la decisión de Liliana de organizar las producciones en un cartel; había sido muy útil para la reunión colectiva, pero para las puestas en común era costosa en tiempo y, sobre todo, daba lugar para que se perdiera el potencial didáctico de la situación con la posibilidad de que los alumnos arreglaran la figura reproducida tras ver la original.

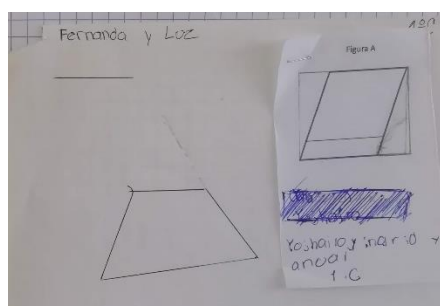
Tras terminar de llenar el cartel con algunas producciones (exitosas y no exitosas), Liliana continuó:

-Mtra: Jóvenes, estos son los trabajos que se obtuvieron [señala el cartel], tenemos todavía que analizar si su escritura corresponde con los trazos...porque aquí a simple vista vemos que ésta se parece demasiado ¿Verdad? [señala una figura modelo y su respectiva reproducción, que parecían ser iguales. Ver fotografía 5]



Fotografía 5: Ejemplo de congruencia entre la figura modelo y su reproducción.  
Situación 2. Mtra. Liliana. Fuente: Propia

Pero, tenemos que analizar si esta corresponde a estas dos [señala un segundo par de figuras cuya diferencia saltaba a la vista. Ver fotografía 6].



Fotografía 6: Ejemplo de no congruencia entre la figura modelo y su reproducción.  
Situación 2. Mtra. Liliana. Fuente: Propia

Entonces es nada más eso, exponer lo que obtuvieron, pero para la próxima clase tendré que dar, como lo hicimos ayer o antier, qué hicieron mal, cuáles fueron los conceptos que se confundieron o qué nos faltó para reproducir exactamente la figura, ¿estamos de acuerdo?... [Ningún alumno responde]

Liliana, omitió recordar la forma de validar tras concluir la tarea de la construcción de la figura y, a su vez, los alumnos entregaron sus producciones sin asegurarse de haber alcanzado el objetivo de la igualdad. Ninguno de ellos parecía tener la intención de comparar las figuras; como si implícitamente supieran que ese no era el momento para validar las producciones. ¿Se entretejió con la puesta en común? o tal vez ¿se omitió definitivamente? No era indispensable que la validación empírica se diera estrictamente antes de la puesta en común, pero sí deseable. En todo caso, debe estar “en la misma actividad, a través de la interacción del alumno con el *medio* (...) sin necesidad de que sea el docente quien determine si la resolución es correcta” (Fregona y Orús, 2011, pp. 32-33). Hacer la superposición casi de manera simultánea con la discusión del mensaje, limitaba la posibilidad de la maestra de conocer el grado de éxito

y fracaso de los mensajes, advertir las dificultades que tuvieron los alumnos, prever qué producciones convenía hacer públicas y qué conocimientos debía negociar e institucionalizar. Es posible que esto que nosotros vemos como una “reducción” del momento de la verificación, en tiempo y en forma, sea consecuencia de una valoración de la maestra, según la cual los alumnos aprenden más a partir de sus correcciones y explicaciones, que de la retroacción del *medio*. Si es así, consideramos que hay una forma de asimilación de la adidacticidad por parte de la maestra y, posiblemente, un camino por andar.

Por otra parte, cabe valorar que Liliana no omitió el momento de la validación empírica de la clase y que, además, tras su comparación a “simple vista” de dos pares de figuras (un posible caso de éxito y uno de fracaso), dejó ver su interés por discutir los mensajes no exitosos. Considerando que esta era ya la segunda aplicación de la situación 2, ella pareció considerar que podía recuperar las dificultades que persistían en los alumnos y avanzar en el proceso de enseñanza.

## ii) Maestro Ignacio.

Para esta clase, el observador no hizo referencia explícita a un momento de superposición, tras concluir con la construcción de las figuras, por lo que suponemos que no lo hubo; Ignacio siguió con la puesta en común. En esta, discutió dos mensajes. Por el análisis de las producciones generadas en su clase<sup>41</sup>, sabemos que se caracterizaron por su insuficiencia. La discusión que se generó sobre uno de los mensajes fue reportada por el observador de la siguiente manera:

Ignacio anota en el pizarrón la primera parte: “traza una línea horizontal de 1.4”. Luego le dictan: “traza otra línea horizontal de 1.4”. Ignacio la traza a propósito donde sabe que no va: una al lado de la otra.

Una alumna propone: “A los costados de la línea de 1.4 trazar dos diagonales”

(...)

En ese momento, Ignacio parece dar cierto giro de timón, deja pendiente el trazo de la figura, para detenerse en la noción de paralelismo: “¿dos diagonales que sean paralelas?” y les hace ver que nadie hizo esa precisión (se oye alguna voz que dice que él sí). Enseguida Ignacio pregunta: ¿cuál es la comprobación de que son paralelas? (...) La alumna que participa dice algo que no se oye bien, pero creo que hace referencia a que no se cortan. Pero Ignacio espera otra respuesta y cuestiona: “¿cómo sabes que no se juntaron, aunque a la vista no se juntaron?”. Dice que hay una forma de saberlo. La

---

<sup>41</sup> Ver apartado anterior “Producciones de los alumnos”.

alumna dice “porque tienen el mismo grado de inclinación” (...) ¿Cómo lo sabes? ¿Lo mediste? Ella dice que sí.

(...)

Siguen con la lectura del mensaje. Le dictan: “Trazar dos líneas diagonales paralelas”. Ignacio cuestiona el término de diagonales, les dice que ya habían visto la definición de diagonal. La alumna (sigue siendo la misma) responde que Diagonal “tiene un cierto grado de inclinación”. Ignacio deja ver que no es eso, les pide que recuerden la definición, les recuerda el contexto en el que la vieron. Finalmente, un alumno dice “va de un vértice a otro”. Ignacio con gesto aprobatorio, se ve satisfecho de que eso apareciera (...). (Notas del observador, abril/ 2019)

Al parecer, el mensaje, la figura modelo y la figura reproducida no estaban a la vista de todo el grupo de alumnos. Con base en este relato del observador, podemos identificar algunas de las estrategias que usó el maestro para sostener la discusión:

1. Asumirse como receptor del mensaje -*Maestro intérprete*-. Consistió en trazar las líneas posibles en el rango de la instrucción dada, que justamente diferían de lo que querían los alumnos. En particular, trazar las dos líneas horizontales (de 1.4 cm) una junto a la otra y no *una encima de la otra* como probablemente querían los alumnos para indicar lados paralelos de la figura. Lo mismo parecía ocurrir cuando Ignacio aclaró que las dos *líneas diagonales* (como llaman a los lados del paralelogramo que no están en posición horizontal), debían ser paralelas. En general, la estrategia resultó pertinente para hacer evidente la ambigüedad de las instrucciones, pero no permitió superar la deficiencia del mensaje.
2. Apelar a conocimientos “disponibles” de los alumnos: Con el fin de corregir la deficiencia de las instrucciones, el maestro asumió que los alumnos disponían de un conocimiento por el hecho de haberlo trabajado previamente con ellos. En particular, apelar a la definición de líneas paralelas y de diagonal para determinar dos lados del paralelogramo y atender la dificultad de la inclinación. El problema fue que para los alumnos estos conocimientos no fueron funcionales para describir la figura; nombrar “líneas diagonales” a un par de lados del paralelogramo era el recurso del que disponían los alumnos para intentar suplir (sin éxito) la ausencia del ángulo<sup>42</sup>. La ineficacia de la expresión *diagonal* para comunicar la inclinación de la figura o, la necesidad de aclarar que los lados de la figura son paralelos, no sería evidente para

---

<sup>42</sup> Recordemos que sus alumnos no se apoyaron en la yuxtaposición de figuras ni hicieron referencia a la altura para comunicar la figura modelo (ver apartado “Producciones de los alumnos”).

los alumnos, hasta que pudieran determinar si el éxito o fracaso de sus producciones podía tener relación con el uso de estas nociones.

3. Apoyarse en muy pocos alumnos (dejando fuera de la discusión a los demás): El observador reportó que Ignacio se apoyó, la mayor parte del tiempo, en la misma alumna. Este hecho se dio probablemente por la dificultad de involucrar y mantener a todos los alumnos en la discusión y la necesidad de hacer avanzar la clase y lograr los objetivos de la situación. Es posible que la poca participación haya sido un efecto de no poner a la vista de todos los alumnos la figura modelo, el mensaje y la figura reproducida del caso que se estaba discutiendo; también pudo influir el haberse saltado la validación de las construcciones.

Al igual que en la situación 1, Ignacio privilegió el uso correcto y necesario del lenguaje geométrico de las descripciones en las discusiones grupales. Su interés fue evidenciar la pertinencia de explicitar el paralelismo y de corregir el uso de líneas diagonales para tratar la inclinación. Si bien el uso del vocabulario geométrico se volvía un recurso eficiente para comunicar las características de la figura modelo<sup>43</sup>, no lograba responder a todas las posibles razones que explicaban la insuficiencia de las descripciones; por ejemplo, la dificultad del ángulo. En este punto conviene destacar que, en la discusión sobre las líneas paralelas, la respuesta de la alumna (“porque tienen el mismo grado de inclinación”) refería a la noción de ángulo, pero el maestro omitió su comentario, lo que indica que probablemente no lo tenía tan presente. Esto es un punto por considerar en el análisis previo de la situación, que se hace con los maestros.

Hasta este momento, parecía que Ignacio sólo esperaba analizar si la descripción resultase en un paralelogramo; ¿Por qué habrá dejado de lado el objetivo de la reproducción idéntica? ¿Consideró que el objetivo era demasiado ambicioso para el desempeño mostrado por sus alumnos? o ¿le faltó tiempo?

#### *Ajustes a los mensajes*

De acuerdo con las notas del observador, al terminar la puesta en común, Ignacio abrió un espacio para que los alumnos hicieran correcciones a los mensajes. Hasta ese momento los emisores revisaron si su figura modelo y la construida por los receptores

---

<sup>43</sup> Con la salvedad de que no necesariamente la presencia de términos técnicos en un mensaje garantizaba la correspondencia semántica con las unidades figurales (líneas, puntos, ...) de la figura (Duval, 2016).

coincidían<sup>44</sup>; y en una nueva consigna solicitó que los emisores agregaran la información que a su juicio faltó. Veamos el ejemplo que se reportó:

<i>Mensaje original</i>	<i>Mensaje ajustado</i>
“Tienen que trazar 2 líneas como de 2.5 cm, una arriba y otra abajo. Tienen que unir de esquina en esquina”	“Casi bien, solo que tiene que ser un poquito más grandes” [Lo escriben debajo del mensaje original]

El mensaje original era insuficiente para reproducir al menos un paralelogramo. Aun así, el mensaje ajustado, parece evaluar más que proporcionar información. La impresión que comparte el observador de los ajustes que se hicieron fue que en general “agregaron pocas cosas que, además, no resolvían el problema” (Notas del observador, Abril/2019).

Al igual que en la situación 1, Ignacio permitió que se hicieran ajustes al mensaje con la intención de superar las dificultades que posiblemente había visto con la puesta en común; tal como lo había anunciado en la reunión colectiva previa a la implementación. Pero esta vez, la hizo después de la puesta en común y de una validación de las figuras. Esto generó que los alumnos: i) no agregaran información al mensaje porque consideraban que sus instrucciones eran correctas y suficientes<sup>45</sup> y ii) que “corrigieran” la figura reproducida en lugar del mensaje.

En el colectivo, se había discutido que permitir ajustes a los mensajes (con la situación 1), sin que los emisores conocieran las dudas o confusiones de los receptores, pudo ser la causa de que algunos emisores no comentaran nada o evaluaran la figura. Una posibilidad que surgió para evitar esto, fue que los receptores pudieran formular preguntas a los emisores, pues una idea sí pareció quedar clara para todos: que el alumno emisor no ve de la misma manera el mensaje que el receptor que lo debe interpretar. Pero, por alguna razón, Ignacio no consideró esta recomendación; como hemos visto, cada maestro se apropia solamente de algunos aspectos de las discusiones que se dan en el colectivo y toma sus decisiones para la clase; en este caso, nuevamente permitió que fueran los emisores quienes ajustaran los mensajes, sin asegurarse de que los receptores de alguna manera (con preguntas, por ejemplo) pudieran hacerles ver qué era lo que faltaba en sus mensajes. Esto, sumado a la validación previa de las

<sup>44</sup> No fue explícito en las notas del observador si fue por superposición; pero suponemos que sí.

<sup>45</sup> Esto puede explicarse porque al conocer y tener a la vista la figura modelo, hay informaciones que son obvias o que manejan de forma implícita.

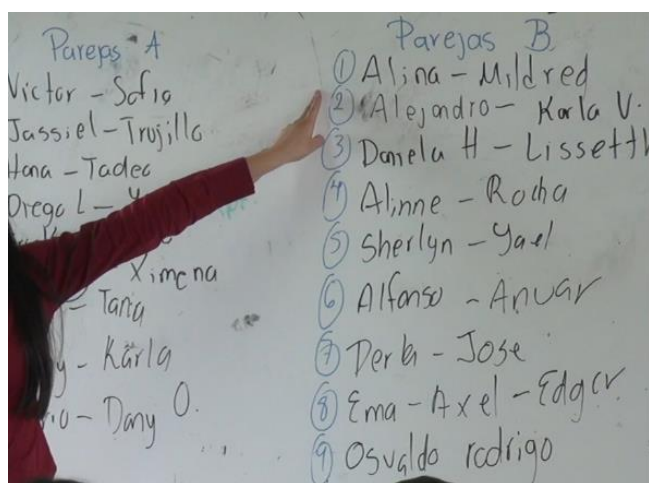
construcciones, generó que la oportunidad para ajustar los mensajes se convirtiera en una calificación de las producciones de sus compañeros. Por la forma en la que Ignacio organizó el momento de ajustes, parecía imponerse una idea arraigada de sus prácticas de enseñanza (la revisión se hace para evaluar) sobre una idea nueva, que aún no logra abrirse paso: la revisión es para mantener funcionalidad de la comunicación, para que los receptores puedan preguntar lo que creen que les falta saber.

Con pocos minutos dedicados para este momento de ajustes, la clase terminó.

iii) Maestra Sara

Al terminar de construir las figuras, Sara había escrito en el pizarrón los integrantes de cada pareja y la correspondencia entre ellas<sup>46</sup>. Luego, dio la siguiente consigna:

Mtra: Solamente una persona se va a levantar y va llevar la figura (...), solamente una persona se levanta. Pareja A1 y B1 pueden intercambiar sus figuras [Sara empieza a nombrar una a una las parejas que tenía anotadas en el pizarrón. Un alumno por pareja se levanta e intercambian las figuras reproducidas a partir del mensaje]



Fotografía 7: Correspondencia entre las parejas A y B. Situación 2. Mtra. Sara. Fuente: Propia

El intercambio fue únicamente de las figuras que se habían construido. Pasados algunos minutos, cada pareja desde su lugar realizó la superposición para determinar la congruencia. Mientras tanto, Sara se acercó a cada una de las parejas, indagando por el resultado de la superposición. En algunos casos, los alumnos se vieron confundidos para determinar si las figuras coincidían o no, pues había que someter la figura

---

<sup>46</sup> Recordemos que, al inicio de la clase, Sara había reorganizado las parejas y no les había indicado cuál era su pareja correspondiente. Durante el tiempo de trabajo de los alumnos, organizó los grupos y los registró en el pizarrón.

reproducida a giros o inversiones para hacerla coincidir con el modelo original. Por ejemplo:

Mtra: ¿Les quedó igualita? [pregunta a la pareja]

Alo<sub>1</sub>: Es que quedó al revés [le dice a un alumno de su pareja correspondiente]

Alo<sub>2</sub>: Es que no me dijiste para qué lado [responde el alumno interpelado]

Mtra: [Sara no interviene y sigue con otra pareja]

Para los alumnos no era evidente que a pesar de los giros e inversiones que hicieran a las figuras para hacerlas coincidir, se tenían reproducciones idénticas (tal como empezó a verse en la clase de Liliana). Sara, por su parte, decidió no intervenir en ninguno de los casos en los que se dio esta dificultad. Para el momento de validación por superposición, se esperaba, como lo hizo Sara, que los maestros acompañaran a los alumnos, "(...) no como poseedores de la palabra justa, sino para favorecer la continuidad del proceso de enseñanza" (Fregona y Orús, 2011, p.44); pero en este caso, no se trataba del número de milímetros que se podían aceptar para validar la igualdad entre las figuras, sino de la posibilidad de hacer movimientos a la figura reproducida para lograr la coincidencia con la original; se trataba de un criterio distinto de la superposición que no se había movilizado con la situación 1. Consideramos que era importante que la maestra pusiera a discusión este asunto en la puesta en común y, en caso de que los alumnos insistieran en la no congruencia, les hiciera ver que en geometría se vale girar y voltear las figuras para hacerlas coincidir. Sin embargo, lo anterior no ocurrió. Fue un tema de discusión en la siguiente reunión del colectivo.

Después de algunos minutos, Sara solicitó a los alumnos los resultados de la superposición para registrarlos en el pizarrón: a cada equipo de parejas que había alcanzado la reproducción idéntica (5 de 18) asignó dos puntos; dejando ver su interés por conservar el carácter lúdico de la situación.

Tras hacer públicos los resultados de la superposición, inició la puesta en común. La discusión giró alrededor de tres mensajes, dos de ellos insuficientes para la reproducción idéntica. En ningún momento de la puesta en común se retomaron las dificultades que se generaron para determinar la congruencia por superposición.

A continuación, presento las principales estrategias adoptadas por la maestra para conducir la discusión grupal:



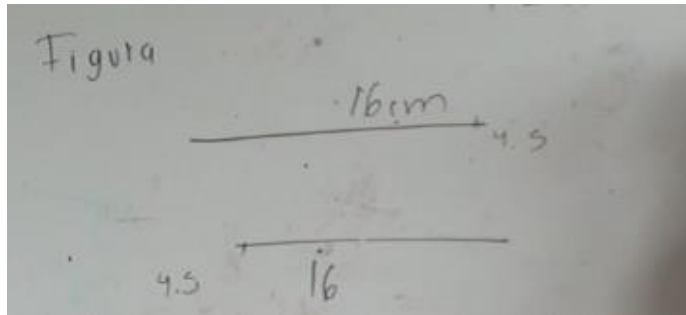
1. Seleccionó mensajes con reproducciones exitosas y no exitosas: Apoyándose en los resultados de la superposición, Sara inició con uno de los mensajes que no había logrado la congruencia.

<b>Mensaje 1</b>	<b>Mensaje 2</b>
“Es una figura geométrica, la línea de abajo mide 16 cm y la de arriba 16, pero en una parte le falta y en la otra le sobra y de la línea de debajo de izquierda a derecha marca 4.5 cm y has lo mismo con el de arriba, solo que de derecha a izquierda” (mensaje no exitoso)	“Romboide: Traza una línea recta de 14.7 cm y una diagonal de 155° con 6.5 cm de altura hacia la derecha; y del otro lado otra de 25° con 6.5 cm de altura y une los puntos de las alturas” (mensaje exitoso)
<b>Mensaje 3</b>	
“Haz un rectángulo de 9.5 cm de largo por 5 cm de altura. De la esquina superior derecha haz una línea horizontal de 3.5, en la esquina inferior izquierda marca una línea de 3.5 cm (igual que la anterior). Ahora une la esquina superior izquierda a la esquina inferior izquierda, esto formará un triángulo. Ahora repite lo mismo del otro lado, borra las líneas que formaron el rectángulo y así tendrás tu figura” (mensaje no exitoso)	

Sara destacó características de los mensajes que coincidieron con las tres maneras de describir el paralelogramo que identificamos en el análisis de las producciones: i) descripciones con una fuerte presencia de referencias espaciales donde la posición se usa como si fuera una propiedad de la figura (mensaje 1), ii) descripciones en las que los alumnos movilizaron conocimientos sobre las definiciones y propiedades (mensaje 2) y iii) descripciones en función de las formas que se reconocen (ensamblajes por yuxtaposición) (mensaje 3). Sara, quizá por considerar (acertadamente) que todos los procedimientos que llevan a la meta son válidos, mostró a los alumnos diferentes maneras y recursos para describir la figura. Sin inclinarse por alguna de ellas, destacó las falencias de cada caso para poder componerlas sin cambiar las características de la descripción.

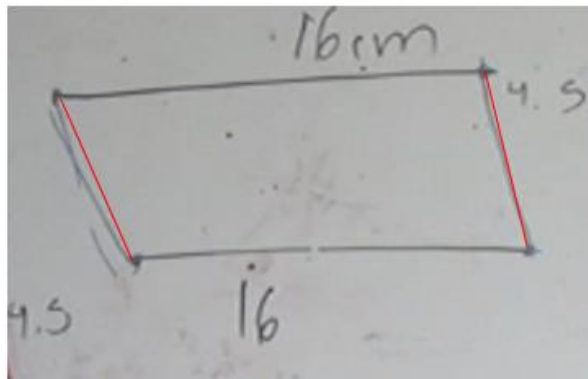
Por ejemplo, con el mensaje 1, tras evidenciar que faltaba el dato de la altura entre las dos líneas de 16 cm y borrarles un segmento de 4.5 cm a cada una, Sara mostró a los alumnos el dato que faltaba para obtener la figura, en este caso, un par de lados del paralelogramo. Veamos:

-Mtra: (...) ahora sí, nuestra construcción se quedó aquí [señala el pizarrón. Ver fotografía 8]... ¿qué nos faltó?



Fotografía 8: "Dos líneas de 16 cm, una arriba de la otra".  
Situación 2. Mtra. Sara. Fuente: Propia

- Alos: las puntas
- Alo<sub>1</sub>: la unión
- Mtra: ¿la unión de qué?
- Alo<sub>1</sub>: la unión en diagonal de las dos puntas
- Mtra: explíqueme eso [le replica a Alo<sub>1</sub>]
- Alo<sub>2</sub>: de los vértices
- Mtra: ¿de dónde a dónde?
- Tadeo: Del vértice superior derecho ... al vértice inferior derecho
- Mtra: [Traza las líneas indicadas en el pizarrón] (...) Y lo mismo al otro ¿no? [Traza otra línea de manera que se "cerrara" la figura. Ver fotografía 9]



Fotografía 9: Figura obtenida al unir las líneas "en diagonal".  
Situación 2. Mtra. Sara. Fuente: Propia

- Mtra: Entonces ¿qué otra cosa les faltó?...
- Alo<sub>3</sub>: Unir
- Mtra: Unir, ¡exacto! Les faltó decir que tenía que unir los vértices ...

En este mensaje se identificaron los datos que faltaban para lograr la figura, sin embargo, la esencia de la descripción de apoyarse en referencias espaciales para indicar

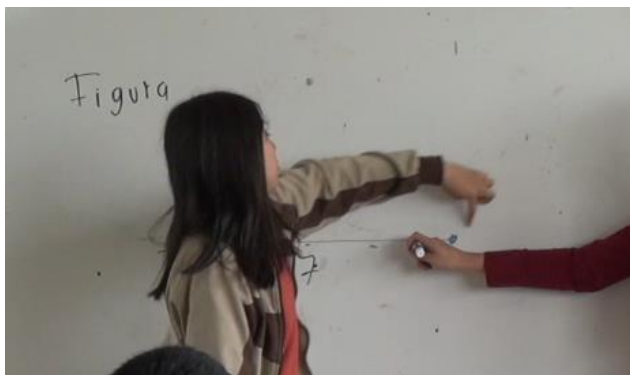
el trazado de líneas (por ejemplo, dos líneas, una abajo y otra arriba) no se cuestionó. Tampoco se cuestionó la ambigüedad de la expresión “pero en una parte le falta y en la otra le sobra”. Algo similar ocurrió con los otros dos mensajes.

Por otro lado, Sara, al igual que en la situación 1, omitió poner a la vista de los alumnos la figura modelo y la figura reproducida, lo que dificultaba que todo el grupo pudiera apreciar la no congruencia. Si bien solicitó a un alumno que pasara al pizarrón a leer el mensaje una y otra vez, el resto del grupo no sabía cuál era la figura que se estaba describiendo. Recordemos que Sara había repartido cuatro figuras modelo distintas (aunque semejantes); lo cual, generó que las discusiones de los tres mensajes se tornaran ajenas o confusas para algunos alumnos pues carecían de elementos para entrar y permanecer en la discusión. Se puede ver cómo, aún para Sara quien ha tenido más cercanía con el enfoque didáctico de las situaciones, se le dificultó dar más voz a los alumnos en este proceso de análisis colectivo. También es un indicador más de la necesidad de reforzar este punto –estrategias para la puesta en común- en la planeación con los maestros.

2. Se asumió como receptora del mensaje (*Maestra intérprete*): Con cada mensaje, Sara solicitó a un alumno que leyera las instrucciones, mientras ella se posicionaba como intérprete de la información. La esencia de la estrategia fue hacer evidente la ambigüedad de los datos y las informaciones faltantes para construir la figura. Se trata de un buen recurso, quizá más fácil de implementar para el docente, aunque con la desventaja de desplazar aquel en el que los mismos alumnos son quienes dicen lo que no entendieron. Esto puede verse como un proceso, y como parte de las adaptaciones que hacen accesible la incorporación de una metodología didáctica.
3. Solicitó componer el mensaje para superar la deficiencia: Con base en los errores o ambigüedades identificados con la estrategia de “Maestra intérprete”, Sara solicitó componer cada una de las instrucciones del mensaje. Para esto, formulaba preguntas que no sólo se dirigían al alumno emisor (lector) sino a toda la clase. A nivel de la descripción de la figura, la estrategia de “Maestra intérprete” permitió: i) reemplazar expresiones coloquiales por términos geométricos, por ejemplo, decir *vértice* en lugar de “punta” y “esquina” y ii) corregir el uso de términos técnicos de manera que coincidan con las características de los objetos geométricos que se describen. Por ejemplo, en el mensaje 2, las instrucciones que dieron los alumnos para trazar los ángulos generaron la siguiente discusión:

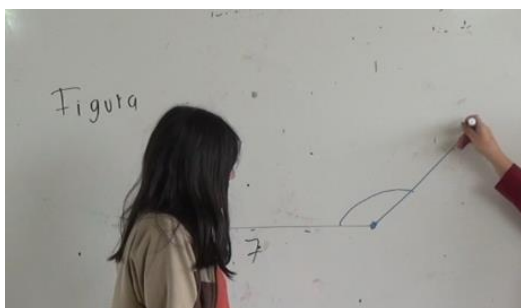
-Mtra: (...) y una diagonal de 155 grados con 6.5 centímetros de altura ... ¿a qué te referías?

-Sofía [alumna]: Son 155 grados [Sofía señala dónde trazar el ángulo. Ver fotografía 10]



Fotografía 10: Vértice donde debe trazarse el ángulo. Indicación de una alumna. Mtra. Sara. Fuente: Propia

-Mtra: Son 155, es obtuso [Sara traza el ángulo cómo le indicó la alumna. Ver fotografía 11]



Fotografía 11: Ángulo de 155°. Obtuso. Situación 2. Mtra. Sara. Fuente: Propia

-Mtra: me dijiste que de 6.5 centímetros de altura... ¿es correcto decir que de altura?

-Sofía: (...) No

-Alos: Noo [varios alumnos contestan]

-Alo<sub>1</sub>: de lado

-Mtra: ¡lado!, es importante o si no ¿qué va a pasar?

-Alo<sub>2</sub>: Se van a confundir

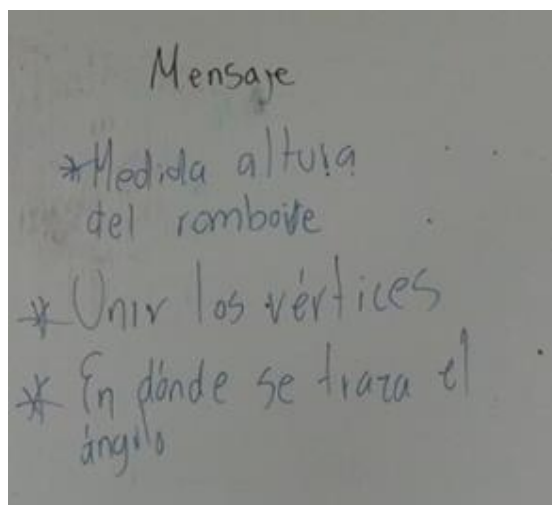
-Mtra: Se van a confundir o vamos a trazar mal, bien 6.5 de lado (...)

Los emisores usaron el término “altura” para indicar la longitud de un lado del paralelogramo (que llamaron línea diagonal) que se formaba al construir el ángulo y quizá, implícitamente, indicar una posición “hacia arriba”. Sara, abandonó la estrategia de “maestra intérprete” (pues lo que tendría que haber hecho era considerar una altura de 6.5 cm y no un lado para poner en evidencia el error) y optó por otra estrategia menos potente: la de insinuar que algo estaba mal por la manera de preguntar.

4. Recuperó o ignoró participaciones de los alumnos para hacer avanzar la clase: Durante toda la plenaria, Sara recuperó o reformuló algunas intervenciones de los alumnos para posicionarlas ante toda la clase. Esto le permitía entretener los conocimientos que movilizaban los alumnos con los objetivos de enseñanza de la situación y así avanzar en el análisis de los mensajes. El riesgo era que retomara solamente aquellas intervenciones que permitían llegar al concepto específico que deseaba destacar, y generar con eso confusiones en los demás alumnos o que, al recuperarlas, se sobrevaloraran, admitiendo información que no habían movilitado los alumnos. Por ejemplo, en el mensaje 1, Sara asumió el paralelismo entre las dos líneas de 16 cm que estaban *una arriba y otra abajo*.

El paralelismo entre estas dos líneas parecía ser una información que manejaban de manera implícita los alumnos que redactaron el mensaje; sin embargo, si se desconocía la figura modelo, no era posible inferir esta condición de la instrucción: “la línea de abajo mide 16 cm y la de arriba 16”. Sara lo aceptó. Luego, apoyándose en el dibujo que trazó en el pizarrón, logró que un alumno explicitara que las líneas eran paralelas; una tarea sencilla considerando que la imagen (típica: con líneas en posición horizontal) permitía inferir esta condición por la posición relativa entre las dos líneas. No obstante, bien valió la pena correr el riesgo mencionado, a cambio de hacer manejable la situación para la maestra.

5. Institucionalizó los conocimientos que habían surgido durante las discusiones: Durante toda la puesta en común, Sara y los alumnos movilaron conocimientos que les permitieron identificar las razones por las que no se logró la congruencia y, a su vez, que les permitieron superar la deficiencia de las descripciones. Al terminar de analizar cada mensaje y antes de pasar al siguiente, Sara registró en el pizarrón (de manera muy concreta) los aspectos que se habían destacado en la discusión. Veamos (fotografía 12):



Fotografía 12: Acuerdos de la puesta en común. Situación 2. Mtra. Sara. Fuente: Propia

Esto le permitió, al final de la clase, instaurar acuerdos para que en una segunda sesión se lograra el objetivo del juego (igual que lo hizo con la situación 1), asegurándose que los alumnos copiaran los acuerdos en su cuaderno. Sin embargo, Sara no realizó más aplicaciones de la situación 2.

Esta información (medida de la altura, líneas para unir vértices, especificar dónde trazar el ángulo) se instauró como los datos que necesariamente deben ir en las descripciones. Sara no advirtió que el conjunto de datos necesarios para construir un paralelogramo puede variar según los datos que se privilegien. Por ejemplo, si se dan: dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, no es necesario dar el dato de la altura; o bien, si se dan: un lado, la altura correspondiente a ese lado y la distancia del pie de altura a un vértice, no es necesario dar el dato del ángulo. Es probable que el objetivo de que los mensajes tengan un mínimo de información sea una condición que considere en nuevas aplicaciones de la situación.

De manera general, vemos que Sara usó diferentes recursos para conducir la puesta en común que le permitieron destacar las razones de la insuficiencia de los mensajes y mejorar las descripciones que, incluso, habían logrado reproducciones exitosas. A diferencia de la primera clase, la institucionalización pareció articularse con las discusiones que se dieron alrededor de los mensajes. Al hacer pequeñas conclusiones a lo largo de la puesta en común y dejar registrada la información que faltó incluir en cada uno de estos, construyó acuerdos con más sentido para los alumnos, es decir, que vieran que son funcionales para lograr el objetivo del juego.

No obstante, tuvo momentos en los que su interés por destacar información que le parecía importante, la llevó a sobre interpretar las producciones de los alumnos (como el caso de las paralelas) y, también a ignorar deficiencias como la presencia frecuente de referencias espaciales en el caso del mensaje 1. Quizá, el análisis de un mensaje en términos del receptor de este (por ejemplo, contrastando el mensaje 1 y el 2) hubiera ayudado a destacar la eficacia de descripciones económicas y a identificar datos que son suficientes para reproducir la figura.

*¿Un momento adicional para agregar información al mensaje o una nueva tarea de formulación?*

Tras la puesta en común, Sara instauró una consigna (adicional a la del inicio), que resultaba inusual para los alumnos. Se trataba de una variante del juego de comunicación que no había considerado con la primera situación. Veamos:

-Mtra: Con las instrucciones de tus compañeros (...), ahora ustedes [receptores] me van a decir cómo hubieran escrito para que les quedara claro ¿ok? Todas las parejas hacemos lo mismo, intercambiamos [los alumnos se ven confundidos]

Solamente cambian la figura para que hagan un nuevo mensaje [los alumnos hacen el intercambio de manera que cada pareja quedara con el mensaje que había recibido de sus compañeros y la figura modelo correspondiente a ese mensaje]

-Alo: ¿dónde?

-Mtra: Escríbelo aquí abajito [del mensaje] cómo lo hubieras escrito tú para que hubiera quedado claro...o en la parte de atrás pueden modificar los mensajes [los alumnos inician la redacción del nuevo mensaje]... Cuando ya lo tengan me lo entregan.

En la puesta en común cada pareja tenía el mensaje que había escrito y la figura modelo que se correspondía. El intercambio reorganizó las producciones de manera que cada pareja tuviera nuevamente el mensaje que había recibido para construir la figura y el modelo que debía reproducir.

En la siguiente tabla relaciono algunos mensajes que se realizaron antes de la puesta en común y los que redactaron los alumnos receptores sobre la misma figura, después de esta nueva consigna:

	<i>Mensaje original (alumnos emisores)</i>	<i>Mensaje "ajustado" (alumnos receptores)</i>
1	"Tiene cuatro lados, el lado derecho e izquierdo. Mide 6.5 cm los menores y los lados más largos 14.7 cm. La altura es de	"Es un romboide del cual deben trazar una base de 14.7 cm, su altura es de 3.4 cm. En el vértice superior derecho hacia el final de la base traza un lado de 6.5 cm y del lado

	3.4 cm, es como un rectángulo inclinado hacia la derecha”	izquierdo inferior trazar del inicio de la base superior a esta”
2	“Es un romboide con un vértice hacia el lado superior y el otro vértice en el izquierdo pero inferior. Base: 15.7 cm Altura: 7.8 cm Las dos bases arriba y abajo Los dos lados izquierda y derecha”	“Nos quedó claro”
3	“Es un romboide. Para el rectángulo la medida de la base es de 11.2, y de la altura 6.7. Para los triángulos la base es de 4.5 que unirán con el vértice”	“Trazar una línea de manera horizontal de 11.5 cm y luego de altura marcar 6.2 cm para poder hacer un rectángulo y después de la línea de abajo alargar esa línea de derecha a izquierda 4.5 cm y unirlo con la línea de arriba y de esta línea donde termina marcar 4.5 cm para alargar de izquierda a derecha y unirlo con el de abajo”

Tabla 8: Mensajes originales y mensajes ajustados por los receptores. Mtra. Sara. Fuente: propia

Los tres ejemplos son representativos del tipo de cambios que hicieron los alumnos en la nueva fase de redacción de los mensajes. En unos casos (como el ejemplo 1), las descripciones fueron más elaboradas: nombraron la figura, movilizaron correctamente nociones geométricas como la altura, usaron vocabulario técnico en lugar de expresiones coloquiales como vértice en lugar de “punta” o “esquina”; aunque en este caso, faltó un dato para lograr la congruencia (o bien el ángulo comprendido entre los lados o el pie de altura).

En otros casos (como el ejemplo 2), los receptores consideraron que el mensaje era claro y no formularon descripciones nuevas. Sin embargo, en esos casos (2), los mensajes originales no permitían la reproducción idéntica (el dato de la base y la altura del romboide no garantiza su unicidad).

Y, por último, un grupo (como el ejemplo 3), donde el mensaje original movilizaba conocimientos geométricos que implican descripciones más económicas y eficientes que las producidas tras el nuevo momento de redacción de los mensajes.

Conviene aclarar que no es posible inferir de estos cambios posibles aprendizajes de los alumnos sobre el objeto de enseñanza, pues la nueva versión de los mensajes no estuvo a cargo de los mismos alumnos que los elaboraron originalmente. A diferencia de lo que pasó en la clase de Ignacio, la nueva fase de formulación que propuso Sara, no se convirtió en la “corrección” de las construcciones, ni siquiera en la posibilidad de hacer ajustes a los mensajes, sino en una nueva tarea de análisis y descripción de la figura



(que antes desconocían). No obstante, no deja de ser un ejercicio interesante, para un constructor, tener la oportunidad de decir cómo le hubiera gustado que le dijeran a él las instrucciones. Por otra parte, hay que ver esta acción como una iniciativa de parte de la maestra, motivada por una idea difundida por uno de sus compañeros en la sesión colectiva. En ese sentido, es un indicador de la retroalimentación de los pares que se recibe en estas sesiones.

Con la redacción de los nuevos mensajes, se acabó el tiempo y la clase terminó.

### 2.2.3 La reflexión de la experiencia en aula

El tercer encuentro del colectivo se dio tras la experimentación en aula de la situación 2. A continuación, presento algunos episodios de la discusión que se destacaron.

#### a. La colaboración entre pares y la posición de maestro/observador

La reunión inició con la narración libre de la experiencia en aula que cada uno de los maestros tuvo con la situación de paralelogramos. Las participaciones de los maestros dejaron ver sus inquietudes e intereses: las producciones de sus alumnos, las generalidades de la puesta en común y, en algunos casos, los cambios que hicieron a la situación. En cambio, las decisiones asociadas al *medio material*, la consigna dada y los aspectos que pudieron ver durante el trabajo de los alumnos, no fueron mencionados. Esto pudo deberse a que la situación de paralelogramos tenía en su estructura las mismas condiciones que la anterior (igual consigna y reglas del juego); existía un conocimiento de la experiencia que permitió a los maestros actuar con mayor facilidad.

En sus participaciones, los maestros no sólo describieron su acción en el aula, también dejaron ver un ejercicio reflexivo sobre su práctica en el que reconstruyeron su experiencia desde una posición crítica. A medida que avanzaba el proyecto colectivo lograban ver, cada vez más, algunas de las dificultades que tuvieron para conducir la clase y reconocían la influencia de otras experiencias en la propia.

A continuación, presento dos casos en los que se hizo explícito lo anterior:

#### *El caso del maestro Fabio*

En su intervención, Fabio compartió con el colectivo cómo organizó su clase y las dificultades que tuvo con la gestión de la situación. Fue el único maestro que destacó sus decisiones sobre el *medio material* de los alumnos. Veamos:

Fabio (M): (...) [Hice] lo mismo, la explicación, sólo que nada más les cambié yo la forma (...) les di un sobrecito y les corté las figuras en este material [enseña figuras de paralelogramos en madera], se las metí en un sobre y también los organicé como había hecho la maestra [Sara]; cada par de parejas. A cada quien le di su sobre y después les di su hoja para que hicieran la representación (...) Ya después les di sus indicaciones, les entregué su sobre y empezaron a realizar sus actividades (...) Cuando ya empezamos a ver las figuras, empezamos a evaluar, y yo preguntaba: *Pareja 5, ¿cuántos tuvieron?, ¿los dos o uno?* [refería a las dos parejas que formaban un solo equipo]; y ellos: *no pues los dos*, y entonces palomita y palomita [indicando que lo registraba en el pizarrón]; Pareja 4, *¿uno o los dos?*; los dos...ok. Entonces agarré y ahora sí los puse en el pizarrón [los registró] y leí en el pizarrón a ver: *la pareja tal tuvo los dos, pásale, tenga el plumón, su compañero le va a dictar sus instrucciones. ¡Constrúyamelos!* (...). También les di, lo que habíamos comentado [La posibilidad de agregar información al mensaje], un minuto, regrésenlo para ver qué les hace falta para poder construirlo y lo van a regresar...les di un minuto, dos minutos y se lo regresaron (...).

Como vimos en el apartado de análisis de las implementaciones, para esta segunda situación, Fabio ofreció mejores condiciones a sus alumnos<sup>47</sup>. Habíamos sugerido la posibilidad de que algunos de los cambios en la gestión de Fabio, se asemejaban a las formas de intervenir en el aula que había tenido Sara con la situación 1; pues él había sido el observador de su clase. Ahora, con su participación, dejó ver que, en efecto, su acción estaba mediada por lo que observó de la experiencia de su colega Sara: la organización del material, de los alumnos en el salón de clase y el registro en el pizarrón de los resultados de la superposición como apoyo para iniciar la puesta en común. Mientras que la apertura de un momento para agregar información al mensaje por parte de los alumnos emisores, fue una estrategia utilizada por Ignacio (con la situación 1), discutida y analizada por el colectivo. Es interesante ver la claridad con la que Fabio expone su forma de proceder, la cual contrasta con la vaguedad de la vez anterior. También se percibe un cambio favorable de actitud.

#### *El caso de la maestra Sara*

Como ya vimos, Sara también solicitó a sus alumnos que agregaran (o corrigieran) información al mensaje después de la puesta en común. Veamos lo que comentó la maestra al respecto:

---

<sup>47</sup> A excepción del tamaño y el material de las figuras modelo (ver apartado de Análisis de producciones).

Sara (M): (...) hubo la discusión [acerca de] que faltaban algunos elementos; una vez que terminamos la puesta en común, yo les pedí, por ejemplo (...) con estas indicaciones no me fue suficiente, me hizo falta algo; entonces yo corrijo cómo lo hubiera escrito para que le hubiera entendido a mi compañero; una vez que ya habíamos socializado con los acuerdos que habíamos tenido, se reforzaron o se complementaron (...) Volvieron a redactar y cambiaron, cambiaron un poquito; [para que] ya aquello que no nos quedaba claro, ya quedara claro; o si le faltaban elementos le colocaran los elementos, o si había un dato incorrecto, lo omitieron. Porque era el mensaje de la pareja, no el mensaje que ellos elaboraron, porque puede pasar que ellos piensan que lo que ellos elaboraron está correcto, entonces cuando se dan cuenta de que el mensaje que me dieron es así, ellos se ven en la necesidad de: No, es que me falta, es que no le entiendo, es que no me explica...Entonces ellos fueron los que corrigieron el mensaje de la pareja. Hubo, sí, quienes me dijeron: *es que yo sí le entendí a mi pareja*; y nada más le dije: *agregale ahí abajo que no tienes dudas o que está bien...*probablemente, son aquellos que sí lograron la construcción.

A diferencia de Fabio, Sara advirtió que no fueran los alumnos emisores quienes corrigieran su propio mensaje, sino que fueran sus receptores. Esta decisión de la maestra parecía haber considerado la discusión que se tuvo previamente en el colectivo sobre este recurso, en la que se destacó la dificultad de pedir un ajuste al mensaje a los emisores sin que conocieran las dudas o confusiones de los receptores. Recordemos que, en esta reunión, Sara se vio muy interesada por comprender en qué consistía el recurso utilizado por Ignacio, para adoptarlo en esta segunda implementación.

Parece entonces que la práctica de estos dos maestros se enriqueció también a través de la práctica de los otros maestros. Fabio pudo observar directamente la eficacia de algunas acciones de Sara; además de que, en el colectivo, los investigadores también habían destacado su organización de los materiales y algunos aspectos potenciales de la gestión en la superposición y la puesta en común. Recordemos que este caso es particular, ya que la posibilidad de que un maestro fuera observador de otro y que a su vez los dos fueran aplicadores (para la situación 1) sólo se dio para Fabio y Sara. Los beneficios que esta inter-observación fueron evidentes, lo que deja ver su potencial como recurso para la formación. No obstante, como ya lo comentamos una vez, requiere de la anuencia total de los docentes.

El recurso de agregado de información usado inicialmente por Ignacio (en la situación 1) fue adoptado por tres de cuatro maestros<sup>48</sup> para esta situación, aunque por supuesto, cada uno a su manera, y con una función específica también distinta.

Entonces la retroalimentación reflexiva que permite la posición de observador no es unidireccional (como lo vimos cuando Fabio retroalimentó a Sara para la situación 1),

---

<sup>48</sup> Lilita fue la excepción.

también les devuelve a los observadores, les informa otras maneras de intervenir en el aula que resultan efectivas y que, en algunos casos como vimos aquí, logran incidir en su práctica.

Para cerrar, destacaré dos factores que, de acuerdo con mi percepción, explican la colaboración entre pares que se hizo evidente en los casos señalados arriba. El primero es, como afirman Bednarz et al., (2001), el hecho de que los maestros suelen compartir sus preocupaciones, limitaciones y recursos en la comunidad de práctica en la que están inscritos. Su interés común en este caso fue mejorar la calidad de sus intervenciones con los alumnos durante la implementación (Desgagné et al., 2001).

El segundo factor es el dispositivo de formación con el cual se crearon condiciones para que los maestros, con los investigadores, entraran en un proceso de reflexión sobre aspectos de la práctica: un objetivo común a alcanzar, un calendario de reuniones presenciales, el propósito de estas reuniones y una forma de trabajar juntos (el enfoque didáctico que proponían los investigadores, la experimentación en aula por parte de los maestros, entre otras). Estas condiciones configuraron una dinámica espiral entre planificación, acción y reflexión que, en este caso, favoreció la colaboración entre los propios maestros.

b. La colaboración investigador-maestro en la reflexión colectiva.

En las discusiones, nuevamente identifiqué encuentros y desencuentros en relación con la interpretación y el significado que atribuían al objeto de discusión los maestros y los investigadores. A continuación, analizo algunos casos representativos.

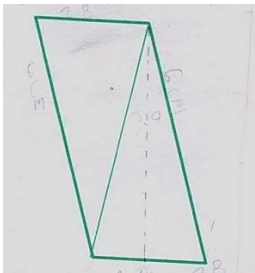
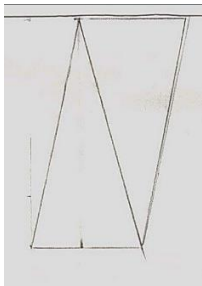
i) Desencuentros: Concepciones geométricas y reflexiones no colectivas.

Los desencuentros son episodios de las discusiones en los que maestros e investigadores tuvieron dificultades para: i) ponerse de acuerdo (interpretar y aceptar el punto de vista del otro) y ii) coincidir en los temas de interés común o sus preocupaciones.

- *Una discusión que no necesariamente concilia puntos de vista distintos.*

Durante su participación, Liliana (M) presentó algunos ejemplos de mensajes de los alumnos. Un mensaje en particular fue analizado en el colectivo. La estrategia que se

adoptó fue que un maestro (Ignacio) se asumiera como receptor y trazara la figura en el pizarrón. El mensaje era correcto, pero la maestra aclaró que la reproducción no lo había sido porque la figura reproducida les “había quedado del otro lado” a los alumnos receptores. Se dio una amplia discusión en el colectivo que dejaría a la luz las diferencias en las definiciones que los participantes tenían sobre la noción de congruencia. Veamos primero el mensaje y las figuras original y reproducida. Conviene aclarar que los lados y ángulos de las dos figuras (la original y la reproducida) eran iguales:

<i>Ej. 14. Mensaje. Mtra Liliana:</i>	<i>Figura modelo:</i>	<i>Figura reproducida:</i>
<p>Hacer una línea horizontal de 2.8 cm y luego hacer una línea imaginaria de 5.9 cm en el centímetro 1.4 hacia arriba. Se hace la línea de 2.8 hacia la izquierda, se hace una línea inclinada uniendo los dos extremos derechos y enseguida se hace otra línea inclinada uniendo los dos extremos izquierdos</p>		

La discusión se dio de la siguiente manera:

Liliana (M): (...) lo interpretaron mal porque les dio del otro lado [a los receptores]...estos chicos lo interpretaron del lado derecho y aquí con el maestro [Ignacio] dio bien con el original.

IY: eso está aquí [lee]: "se hace la línea de a 2.8 cm hacia la izquierda" y ellos [los receptores] lo hacen hacia la derecha.

Liliana (M): pero, no es...

ID: a ver maestros, pero ¿si la posición cambia la figura ya no es igual?, es decir, ¿si está inclinada para el otro lado ya no es un paralelogramo igual?

Fabio (M): no

Liliana (M): no...pues esta [la figura modelo del mensaje que se estaba discutiendo] yo la tuve que poner así y así y ya dio [gira y luego invierte la figura modelo]

Ignacio (M): sí, como espejo

ID: entonces, necesitaríamos acordar si para poderse llamar igual no se vale rotar o sí se vale rotar

Sara (M): sí, porque entonces ya en las instrucciones se estaría formando una figura distinta a la que nosotros le dimos por la orientación, tal vez de un lado o de un ángulo.

ID: si acordamos que no se vale rotarla entonces no son congruentes [el caso que se está estudiando de Liliana].

Liliana (M): por eso no les puse palomita porque a mí me llamó mucho la atención porque yo dije: parece que son congruentes; y por más que lo ponía y lo ponía a girar hasta que le tuve que hacer así [invertir la figura modelo] y así, sí ya son congruentes

Para los maestros, la posición en la que resultaba la figura importaba para establecer la congruencia. No estaba en discusión que los lados y ángulos de las figuras eran iguales, sino la validez de realizar acciones adicionales como girar o voltear la figura reproducida para hacerla coincidir con la original. ID se dio cuenta de esto, y concretó ante el colectivo el objeto de la discusión: “¿si la posición cambia la figura ya no es igual?”. Ante la unanimidad de los maestros, y un claro pero implícito desacuerdo del investigador, la discusión continuó:

ID: entonces, decidimos si se vale o no se vale girarla para el criterio de congruencia... ¡yo creo que sí se vale!

Ignacio (M): porque, por ejemplo, en el uso que a lo mejor alguno de ellos le podía dar...que llegara a ser hijo de herrero o carpintero, ¡no funciona!

Liliana (M): no, ya no queda

Fabio (M): ¡o cuando tu cambias la chapa de una puerta!

Ignacio (M): exactamente

Fabio (M): es la misma, pero te dicen: derecha o izquierda

Liliana (M): sí, y ya no es funcional

ID: [ríe] como dirían en francés “touché” o sea, ¡me dieron! [ríe]

Colectivo: [ríe. Pasan algunos segundos]

El argumento que dieron los maestros era válido en el contexto extra matemático en el que se planteó. Ante esto, ID no pudo refutar. Sin embargo, la aceptación del argumento no implicaba que se conciliaran los puntos de vista:

ID: pero, llevando un poco la discusión más lejos, distinguir el criterio de congruencia ya en geometría, de la congruencia ya aplicada en cosas prácticas como la del herrero y eso...pero bueno, de todas maneras, queda como la discusión, la duda...

Ignacio (M): sí

Sara (M): A mí me pasó lo mismo. En el caso del primer romboide, les pasó a muchos, ¡a muchos! entonces ellos sí dijeron: no son iguales. Y, obviamente se dieron cuenta que si yo volteaba probablemente coincidían, pero sí les pasó a muchos, que era la misma [figura], pero la tenían girar

ID: entonces, si nosotros decimos dos paralelogramos que tienen sus dos lados iguales y su ángulo entre los lados igual, pensamos que con eso era suficiente, con dos lados y el ángulo...

Colectivo: sí

ID: pero, si nos atenemos a que esos dos no son congruentes [el ejemplo de Liliana], quiere decir que esos criterios no son suficientes, entonces les falta algo más, ¿verdad?

Sara (M): sí

Ignacio (M): (...) yo dije, bueno, si nos basamos en los criterios de congruencia, pero ¿quién dicta los criterios de congruencia?...

ID: hay varias definiciones de congruencia...si las define como: son congruentes si yo puedo desplazar una y encimarle la otra y coincide totalmente, pero sin rotarla, entonces pues... es una...

[pasan algunos segundos]

Ignacio (M): para su nivel, yo creo que consideraría que sí son congruentes...ya nosotros quizá como adultos estamos rebuscando ...

Colectivo: sí [termina la discusión sobre este tema]

Los esfuerzos indirectos del investigador para persuadir a los maestros no lograron modificar su punto de vista. A pesar de que se concluyó que las figuras sí eran congruentes, la validez del argumento de la funcionalidad de la posición en otros contextos, sumado a la ambigüedad de las intervenciones del investigador frente a la discusión, generó una aceptación parcial en el colectivo: la congruencia era válida “para el nivel” en el que estaban los alumnos.

Pero ¿por qué los investigadores no intervinieron con más contundencia ante la idea errónea que había quedado en el ambiente de la discusión (que la posición también podía determinar la congruencia)? Una razón: por la naturaleza matemática del objeto de la discusión. Los episodios de formación que hemos identificado a lo largo de las reuniones se habían movilizó en el marco de la práctica de los maestros<sup>49</sup>, sin embargo, en esta ocasión, la discusión giró en torno al saber geométrico; lo que implicaba, de alguna manera, interpelar la legitimidad del docente en términos de su saber matemático. De allí la dificultad para hacerles ver sus falencias geométricas.

Otra razón: Por la intención del investigador de no imponer su punto de vista o una solución. Recordemos que, hasta ese momento, la función de los investigadores se había caracterizado por mediar o regular las reflexiones del colectivo; incluso, en algunos casos, su decisión de moderar los comentarios críticos había generado, tal vez como en este caso, que su retroalimentación fuera limitada. Incluso, otra posible razón podía ser nuestra propia inexperiencia como investigadores en el manejo de este tipo de reuniones; experiencia que ayuda a saber cuándo conviene y cuándo no ser más categóricos. Una salida que habría ayudado, pero no se nos ocurrió en el momento, habría sido la de dejar de tarea averiguar cómo se define la congruencia en geometría (por ejemplo, en Wikipedia se puede leer: “En matemáticas, dos figuras geométricas son congruentes si tienen las mismas dimensiones y la misma forma sin importar su posición u orientación, es decir, si existe una isometría que los relaciona: una transformación que puede ser de traslación, rotación o reflexión...”<sup>50</sup>).

---

<sup>49</sup> Entendida como la capacidad de actuar, de intervenir en el aula, de lograr que sus alumnos “aprendan”.

<sup>50</sup> En Wikipedia. Recuperado en noviembre de 2020 de [https://es.wikipedia.org/wiki/Congruencia\\_\(geometr%C3%ADa\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Congruencia_(geometr%C3%ADa))

- *Algunas preocupaciones de los maestros sin eco en la reflexión colectiva.*

La participación de Fabio (M), además de describir cómo implementó la situación 2, dio cuenta de un ejercicio reflexivo que iba más allá del espacio inmediato de la clase: la preocupación por la actitud de sus alumnos durante con el desarrollo de las situaciones de comunicación, en relación con algunas condiciones específicas de su contexto de práctica.

Para esta segunda implementación, Fabio decidió usar la hora de tutoría que tenía con sus alumnos cada semana. Como no fue una decisión planeada, causó desconcierto y una actitud de desinterés en los alumnos frente al trabajo que les propuso. Una respuesta en cierto punto comprensible por la alteración de los contratos que se sostenían tanto para la clase de matemáticas como para las tutorías de curso. Las dificultades que tuvo el maestro con esta experiencia probablemente orientaron su reflexión hacía las condiciones particulares de su implementación:

Fabio (M): (...) pero ya ven que en un principio yo no pensaba meterlo [implementar las situaciones de comunicación] porque como no va ligado a mis temas, ahorita estoy viendo ecuaciones de primer grado, estamos por ahí en ese tipo de situación; entonces no le están tomando la atención debida (...) entonces siempre los tienes que condicionar a que les vas a dar algo a cambio, o que es parte de su calificación; yo lo hago, pero necesito una remuneración numérica en mi calificación porque sí lo hice. Con el otro equipo, aunque les haya dicho: los que tengan bien les voy a dar dos o tres firmas, los que no cuando menos una y los que no, pues nada. Entonces a veces el problema o la forma del aprendizaje no lo vamos a encontrar en la didáctica o la dinámica que tú le des, se puede presentar un poquito en la conducta, en la sociabilidad del grupo. A veces me cuesta, repito, ese grupo me costó más trabajo iniciarlo que en el momento que empiezas a trabajar los conceptos o el tema que vaya a ser. Es eso lo que me cuesta.

La intervención de Fabio (M) invitaba a leer sus dificultades en el aula a la luz de otros factores que no fueran su propia práctica. Por ejemplo, la desarticulación de los objetivos de la situación de comunicación con los contenidos del programa de segundo grado fue desde el principio una preocupación del maestro. Al parecer, esta dificultad tenía que compensarla con una especie de pago (calificación) a los alumnos para promover su interés y su trabajo. Este asunto ya había sido objeto de desencuentro entre el maestro y los investigadores en la primera reunión colectiva (previa a las implementaciones). En esa ocasión, ID expresó que el contenido de las situaciones se relacionaba lo suficiente con otros contenidos de segundo año y que podían ser una oportunidad de un repaso novedoso de los temas vistos. En efecto, la experiencia en aula había dejado ver la dificultad de los alumnos de Fabio con la resolución de las



situaciones 1 y 2; y con esto la pertinencia de este trabajo. Pero esta vez el objeto de desencuentro no fue exactamente el mismo, pues no se trataba de la pertinencia del contenido sino de las dificultades de gestión que había tenido Fabio por incluir un tema que no es “evaluable” para los alumnos.

Ante la intervención de Fabio (M), no hubo ninguna respuesta de los investigadores. Los maestros por su parte coincidieron con la reflexión sobre la calificación.

Este desencuentro parecía darse por dos cosas. Primero, por la dificultad de los investigadores de tomar acciones frente a prácticas tan imbricadas en los contextos escolares como la de movilizar el trabajo de los alumnos a través de la evaluación y, segundo, por su decisión de no profundizar en los demás elementos planteados por el maestro. En esto último, ¿convenía hacerle ver al maestro que, si bien esas condiciones institucionales y normativas dificultaban su gestión, también lo hacían algunas de sus formas específicas de intervenir en el aula, por ejemplo, imponer una clase de matemáticas en un espacio destinado para otro tipo de actividades? Probablemente sí, pero eso implicaba de alguna manera “juzgar” la decisión del maestro y dificultar la retroalimentación reflexiva (tampoco es muy claro qué se hubiera ganado). Como investigadores, estábamos incursionando en este tipo de trabajo con los maestros, teníamos la mirada muy centrada en la didáctica del contenido y quizá por eso, en ocasiones no profundizábamos en temas que no fueran directamente relacionados a este propósito. Se trataba entonces de limitaciones por parte de los investigadores que vale la pena considerar en el momento de analizar el dispositivo de investigación (considerando que las *fallas* son tan interesantes como los aciertos). A esto se suma que, desde la primera reunión, identificamos que Fabio (M) tenía la tendencia de extender sus participaciones en temas que no hacían parte de la reflexión que se estaba dando en ese momento en el colectivo, lo que propiciaba que ID interviniera para retomar el curso de la discusión; esto generaba que la comunicación entre ellos fuera tensa afectando incluso la forma como el investigador hacía las retroalimentaciones; menos críticas y, por tanto, menos contundentes. Como afirman Bednarz, Desgagné, Maheux y Zajc (2012), la coordinación relacional (el humor, un clima de trabajo cálido, la confianza) juega un papel importante en estos enfoques de investigación.

ii) Momentos de encuentro: La reflexión sobre las producciones de los alumnos

Entre los momentos en los que coincidieron los intereses de los distintos actores del colectivo destaco el análisis de las producciones de los alumnos. Los maestros (a excepción de Fabio) dedicaron la mayor parte de sus participaciones a dar sus impresiones generales sobre el estado de los mensajes y a compartir algunos ejemplos.

A continuación, presento algunos temas que plantearon los maestros sobre lo que identificaron de las producciones de sus alumnos.

<p><i>“Diagonal”: un término (erróneo) para describir lados del paralelogramo</i></p>	<p>Sara, Liliana e Ignacio detectaron que los alumnos llamaban, erróneamente, “diagonal” a los lados del paralelogramo que se ven inclinados, cuando los otros lados se ponen horizontales.</p> <p>Todos afirmaron haber discutido con sus alumnos, en sus puestas en común, el uso incorrecto que dieron a esta noción.</p>
<p><i>La yuxtaposición como estrategia para describir el paralelogramo.</i></p>	<p>Sólo Sara manifestó que sus alumnos usaron la “descomposición” para comunicar la figura. En particular: un rectángulo y dos triángulos.</p>
<p><i>Alguna presencia, escasa, de las nociones de ángulo y de altura.</i></p>	<p>Liliana afirmó que en algunos mensajes se incluyó el dato del ángulo; esto lo atribuyó a la institucionalización que hizo en la primera aplicación de la situación <sup>51</sup>. No compartió nada sobre la altura. Sara identificó la noción de altura y la ausencia del ángulo en la mayoría de los mensajes; lo justificó por la estrategia de la yuxtaposición usada por los alumnos. Ignacio, afirmó que estas dos nociones tuvieron muy poca presencia en los mensajes.</p>
<p><i>La persistencia de vocabulario no geométrico</i></p>	<p>Sara, Ignacio y Liliana coincidieron en que los alumnos aún incluían, por ejemplo, términos como <i>punta</i> o <i>esquina</i> en lugar de <i>vértice</i>.</p>

Tabla 9: Características de los mensajes según los maestros. Situación 2. Fuente: propia

<sup>51</sup> Recordemos que esta era la segunda aplicación de la situación de paralelogramos que hacía Liliana con el mismo grupo de alumnos.

Sara y Liliana reconocieron una mejoría en las descripciones; mientras que Ignacio consideró que “les faltaba mucho para lograrlo”. Sin embargo, todos coincidieron en su preocupación por la persistencia de los errores a pesar de que en la clase anterior (con la situación 1), o bien en años anteriores, los alumnos habían estudiado los temas.

Fabio, no compartió generalidades sobre los mensajes; se concentró en comentar la dificultad que tuvo en la puesta en común con un mensaje cuya descripción incluía cuatro puntos señalados y la leyenda: “une los puntos”. La dificultad, explicó Fabio, fue convencer a los alumnos de que esa descripción ya era un dibujo y, por tanto, no era válida.

En general, a diferencia de la situación 1, los maestros lograron identificar varios de los aspectos que caracterizaron las producciones de sus alumnos. La cantidad de mensajes que resultaron suficientes les permitió identificar algunas de las nociones geométricas que movilizaron los alumnos y su funcionalidad para comunicar la figura. Por sus intervenciones, también se puede dar cuenta de cuestiones que no vieron, o que no consideraron importantes para mencionarse, como las siguientes: Fabio no identificó que la decisión de hacer las figuras modelo en madera generó que los alumnos asumieran el material como un atributo geométrico de la figura (indicar el material o medir “el grosor” de la figura); y que la dificultad que tuvo con el ejemplo que compartió con el colectivo era sólo una muestra de esto. Así mismo, Liliana no habló de la dificultad que se dio en los alumnos para describir la línea adicional que había trazado a las figuras modelo.

El ejercicio reflexivo de los maestros sobre las producciones de los alumnos fue pivote para la reflexión colectiva. Sus participaciones no sólo hicieron eco en los demás maestros, por el interés de conocer y comparar sus experiencias prácticas entre sí; también lo hicieron en los investigadores, por un doble interés: i) Un interés investigativo que convierte a las producciones en un insumo para la investigación<sup>52</sup>; y ii) un interés de capacitación que debe ofrecer las condiciones para que los maestros reflexionen sobre su práctica. Me detendré en este segundo aspecto.

En el proceso de reflexión colectiva, los investigadores orientaron sus participaciones en dos sentidos: i) retroalimentar a través de su punto de vista la acción

---

<sup>52</sup> Considerando que en la investigación colaborativa buscamos el aprendizaje del alumno (de conocimientos sobre las figuras geométricas) a través de la acción de los maestros (Desgagné, 1997)

de los maestros y ii) poner a los maestros en la posición de explicar las razones de su acción.

Veamos un ejemplo en cada caso:

- *La importancia del error: Una idea difícil de asimilar para los maestros*

A los maestros les estaba resultando difícil comprender el error (la información insuficiente, o el uso incorrecto de un término) como oportunidad de aprendizaje para los alumnos. En sus participaciones fueron muy insistentes en afirmar que los alumnos ya no deberían cometer los mismos errores de la situación 1. Su preocupación era legítima, pues una idea arraigada de sus prácticas cotidianas es ver el error como un fracaso tanto del aprendizaje de los alumnos como de las acciones de enseñanza de los maestros. Fue precisamente en este punto, donde ID concentró varias de sus intervenciones.

En relación con el tema sobre el uso incorrecto de la diagonal para describir lados inclinados del paralelogramo, se dio la siguiente discusión:

Liliana (M): Sí. O sea, los alumnos están todavía fallando en varias cosas.

ID: pero, no son las fallas de los alumnos...bueno sí...podemos decir que es falla de los alumnos, pero hay que verlo también como un conocimiento del aula que está en proceso. Esto está hecho para que surjan esas ambigüedades y entonces poco a poco se vayan discutiendo..."¿ya vieron que usaron diagonal para dos cosas diferentes?, ¿cómo le hacemos?" o sea, ese es el chiste, que salgan esos problemas y esas ambigüedades y que se vayan trabajando poco a poco

Liliana (M): lo que pasa es que yo ya había aplicado esto y yo ya les había dicho que la diagonal no más es para las que están adentro de la figura (...) y estos chicos todavía siguen mal

(...)

Ignacio (M): Sí, lo mismo me pasó. Tenían por ahí la definición de diagonal y la buscaron y les decía: (...) lo que están diciendo ustedes no es una diagonal, y aunque ya tienen el concepto no lo aplican

ID: sí, y ese es el chiste, que salgan esas ambigüedades, que salgan esos usos cotidianos de palabras que acá quieren decir otra cosa y que se vaya viendo la necesidad de tomar acuerdos.

Sara (M): me pasó exactamente lo mismo (...) Cuando estábamos trabajando ellos igualmente dicen diagonal, entonces regresamos al concepto y entonces ya no concuerda, porque entonces ya une y es el lado ya no es la diagonal, entonces sí, sí sale a la luz.

Las intervenciones de ID se movilizaban por el enfoque didáctico que se subyace a las situaciones utilizadas en el dispositivo de investigación<sup>53</sup>, enfoque que también se asumió como objeto de estudio con los profesores. El objetivo fue comunicar a los maestros una idea del error como parte de un proceso de construcción de conocimientos, destacando, a la vez, la necesidad de que la situación permitiera a los alumnos por sí mismos detectar los errores. Así, los alumnos podrían enterarse de que algo les falta por saber (de su *ignorancia*, como menciona Sensevy, 2011). Además, los errores permiten a los docentes informarse de las dificultades de los alumnos y tomar acciones frente a ellas.

Otra consideración del enfoque que subyace a las situaciones utilizadas es que hay diferentes maneras de “saber” una noción. Una es saberse la definición, pero otra es saber reconocer su pertinencia en una situación específica, donde es funcional. Esta última no se logró comunicar con claridad a los maestros. Es precisamente el fracaso en este primer intento lo que genera la necesidad de aplicar la situación más de una vez con el mismo grupo; pues con estas situaciones, el conocimiento al que se apunta debe hacerse necesario para su resolución; por ejemplo, el conocimiento de que detrás del problema del uso incorrecto del término “diagonal”, estaba la no funcionalidad de la noción de ángulo.

- *Explicar las razones de la acción: una posición que favorece la reflexión colectiva.*

En su participación, Liliana expuso ante el colectivo el cartel con algunas producciones de sus alumnos, tal como lo había hecho para la reunión anterior. Esto puso a la vista las figuras modelo que había usado para la implementación, las cuales tenían un elemento adicional al paralelogramo: una línea paralela a uno de los lados o una de sus dos diagonales. Esto llamó la atención de los investigadores; veamos:

ID: Maestra, ¿por qué las figuras tienen esta línea así? [señala la línea paralela a uno de los lados del romboide]

Liliana (M): estas fueron las figuras que yo entregué; entonces ellos ya tenían que expresarse cómo poder poner esta línea paralela

IY: ¿ya lo habían visto con la primera, con la actividad de rectángulo [situación 1]? [la noción de paralelismo]

Liliana (M): No, no lo vieron. Vieron las anteriores...las anteriores no más fueron los romboides y yo aquí puse los romboides más la línea paralela [refería a las figuras modelo que les habíamos presentado en la ficha didáctica]

ID: esa línea paralela, ¿con qué propósito la puso maestra?

---

<sup>53</sup> Enfoque sustentado a su vez en la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Liliana (M): Ah, pues para que se expresaran más y pudieran decir cómo poder hacerlo ... porque anteriormente yo ya la había aplicado y era un romboide como el que ustedes nos propusieron [en la ficha didáctica], entonces ya sabían más o menos la temática (...) entonces de esa manera ya no es tan fácil como la anterior; ¡pues yo digo!

[El tema concluyó. La maestra continuó con su participación sobre lo que vio de las producciones de los alumnos]

Aquí, podemos ver que las preguntas de los investigadores colocaron a la maestra en una posición para explicar las razones de su decisión de agregar líneas a las figuras modelo. En el análisis de la implementación de Liliana, nos habíamos preguntado cuál habría sido la intención de la maestra con estas figuras; una de las posibles razones que dimos en ese momento, coincidía con lo que mencionó Liliana, porque parecían ser más *elaboradas* y buscaba que los alumnos usaran los conocimientos tratados con la primera aplicación.

Naturalmente, los maestros tienen una racionalidad que guía su acción, las elecciones que hacen tienen una intención respecto al aprendizaje de los alumnos (Bednarz et al., 2001). En el caso de Liliana, la línea adicional era considerada por ella como una variable didáctica con la que esperaba no sólo aumentar el nivel de dificultad sino dar lugar a otras nociones geométricas como el paralelismo.

En este punto, el interés de los investigadores era comprender las intenciones y los motivos que guiaron la acción de la maestra; este camino por el que optaron es otra manera de aportar a la reflexión colectiva distinta a la retroalimentación directa, que sirve a los intereses de los distintos actores del colectivo. Por un lado, promueve la actividad reflexiva de los maestros sobre su propia acción y por otro, permite a los investigadores comprender el significado que los maestros dan a las situaciones exploradas y a su práctica.

Cabe señalar también que probablemente subyace a la decisión de la maestra, la idea de que la situación, para valer la pena, no debía ser igual que la anterior, es decir, la idea de que un paralelogramo, aunque con distintas medidas, no habría sido suficiente reto para los alumnos. En esto la postura de los investigadores diverge, pero, nuevamente, optaron por no ponerlo de manifiesto. Además, explicar en tan poco tiempo por qué esa línea paralela no aportaba una dificultad interesante al proyecto didáctico del momento, no se veía factible.

### 2.3 Síntesis y comentarios

En la situación 2, la figura utilizada, un paralelogramo, introdujo un nuevo reto para todos los alumnos: dar cuenta de los ángulos. Los maestros lograron un mejor manejo general de la situación, aunque todavía dejaron ver dificultades importantes. Finalmente, se pusieron de manifiesto nuevamente varios aspectos del proceso de interacción entre los participantes, el cual sigue evolucionando.

Como con la situación 1, distinguiré aquí aspectos relativos al propósito de formación (el proceso de apropiación de los maestros) por un lado y al de investigación (funcionamiento del dispositivo) por otro.

### 2.3.1 Dimensión Formativa

Me interesa destacar qué cambios se produjeron en la comprensión de la situación por parte de los maestros, así como la manera como enfrentaron los nuevos retos que traía la situación 2 (recordemos que las reuniones colectivas en la que se discutían las situaciones constaban de dos partes: una previa a la implementación, centrada en la planeación, y una posterior, en la que se comentaba la implementación).

A continuación, presento una valoración del grado y forma en que los maestros van apropiándose de características didácticas de la situación: desde la planeación, la implementación y la reflexión sobre la experiencia.

#### a. La planeación de la situación

*Planteamientos del enfoque didáctico aun ambiguos para los maestros.* Los maestros siguieron siendo renuentes a dos consideraciones complementarias del enfoque didáctico subyacente a la situación: la conceptualización positiva de los errores en las resoluciones de los alumnos, junto con la confianza de que podrían ser superados en las aplicaciones sucesivas.

*Aspectos del enfoque con los que se empiezan a familiarizar los maestros.* A diferencia de la reunión anterior, los maestros se interesaron por anticipar en las posibles producciones de los alumnos, motivados por los ejemplos reales que compartió Liliana. Así mismo, se interesaron por acciones que les permitieran conducir y llevar a buen término las puestas en común. La reflexión sobre las producciones permitió conocer varias de las características que tuvieron los mensajes que aportó Liliana (la no funcionalidad del ángulo, apoyarse en el rectángulo para describir el paralelogramo,

entre otras). En cambio, la preocupación por la puesta en común se dio por las dificultades que tuvieron con la situación 1. Las propuestas que surgieron constituían, en su mayoría, condiciones didácticas favorables para los objetivos de la situación (proponer un único mensaje para que lo interpretaran todos los alumnos, construir con los alumnos un mensaje para toda la clase y construir la figura, seleccionar y discutir mensajes con reproducciones exitosas y no exitosas).

En este momento de planeación, el proceso de apropiación de los maestros se reveló por las interpretaciones que tuvieron de la situación y las propuestas para la implementación. Se mantuvo la preocupación por la escasez del tiempo, pero hubo otras propuestas: sobre el tamaño de las figuras, sobre los instrumentos disponibles (y la forma de presentarlos en el medio de los alumnos), sobre la posibilidad de organizar un momento extra para aportar información sobre las figuras y, principalmente, sobre las estrategias posibles para la gestión de la puesta en común. En síntesis, hubo aquí un rico conjunto de ideas y de recursos sugeridos para mejorar el funcionamiento de la situación que aportaban al proceso de apropiación que experimentaban los maestros.

#### b. La experiencia en el aula

En esta segunda implementación identificamos mejoras notorias en algunas decisiones de los maestros, considerando que no se trató de una simple réplica de una situación similar a la anterior (situación 1), sino más compleja (por las figuras, sobre todo, por la intervención del ángulo). A continuación, destacaré las diferentes formas en las que los maestros llevaron la situación a la práctica. Se trata de analizar ver en qué medida las modificaciones empezaron a ser compatibles con el enfoque didáctico y a qué dificultades se enfrentaron.

*Aspectos del enfoque que, aun con dificultades, se llevan a la práctica:* Para crear el *medio* de los alumnos, se encontró que la consigna instaurada por todos los maestros fue clara y completa y la mayoría de decisiones para configurarlo permitieron condiciones más favorables que en la ocasión anterior, en particular: las características de la hoja para la construcción, la disponibilidad de los instrumentos para la resolución de las tareas -transportador- y la posición didáctica asumida por los maestros -no inductiva-. Tres de cuatro maestros optaron por el recurso originalmente propuesto por Ignacio de una segunda oportunidad para agregar información a los mensajes (Ignacio, Fabio y Sara), y lo intentaron mejorar (ya no se dio antes sino después de la validación y las puestas



en común). No obstante, los maestros nuevamente omitieron que los emisores, antes de enviar más información, se informaran ante los receptores de qué era lo que les había faltado (a pesar de la discusión que se dio sobre ello en la reunión previa). Aun así, resalta el interés de los maestros por retomar acciones usadas por otros colegas para sus propias clases.

En las puestas en común, Sara e Ignacio movilizaron más estrategias que les ayudaron a avanzar en el análisis de mensajes (como la de *maestro intérprete* para evidenciar errores y ambigüedades en el vocabulario) y en el caso de Sara, hacer institucionalizaciones más articuladas con las discusiones. Aunque se siguió privilegiando el vocabulario geométrico sobre otros aspectos importantes que también explican la insuficiencia (la referencia a la posición de las figuras) y concentraron sus puestas en común en que las descripciones garantizaran un paralelogramo olvidando la reproducción idéntica, es destacable cómo los maestros buscaron acciones que les ayudaran a superar las dificultades que habían tenido con la situación 1 y, además, que en lo posible estuvieran alineadas con el enfoque didáctico en cuestión.

*Aspectos del enfoque que aún no son retomados.* Hubo decisiones que implicaron dificultades en la creación del medio de los alumnos y en la validación: la mayoría de los maestros continuó adoptando el tamaño de las figuras de la ficha didáctica, a pesar de las sugerencias de ID en la reunión previa y la experiencia favorable de una colega en la situación anterior (Sara); esto puede explicarse por limitaciones de sus contextos de práctica (acceso a fotocopias, escasez de tiempo para preparar material, entre otras) o porque no lo veían como una limitante (como sí lo hacían los investigadores). Otras decisiones como agregar líneas diagonales y paralelas a uno de los lados de las figuras modelo (Liliana) o que estas estuvieran hechas en madera (Fabio), desviaron la atención de los alumnos del propósito didáctico de la situación. Las razones de estos cambios fueron respectivamente la preocupación por aumentar el grado de dificultad de la situación tras una aplicación de esta y la intención de facilitar su gestión en el aula con la preparación y organización de los materiales.

Otra dificultad fue la conceptualización de la noción de congruencia que se pone de manifiesto con la validación empírica. Se encontró que, para los maestros, los giros e inversiones invalidaban la congruencia (Sara, Ignacio). No pudimos detectar directamente si esto ocurrió en otras clases. A esto se suma la “reducción” del momento de validación, en tiempo y en forma (Liliana e Ignacio), quedando al descubierto la idea

de que los alumnos aprenden por las correcciones y explicaciones de los maestros y no por las retroacciones del *medio*.

*Las producciones de los alumnos dejan ver escasos conocimientos.* Se manifestó nuevamente un alto porcentaje de insuficiencia en los mensajes. Uno de los retos más interesantes que subyacían a la situación es poner en juego la noción de ángulo para comunicar las características del paralelogramo y lograr la congruencia. Este no fue un conocimiento disponible y funcional para resolver la tarea, pues en la mayoría de los casos que resultaron suficientes el ángulo no se consideró. En algunas descripciones los alumnos dejaron ver una noción de paralelogramo donde la “inclinación” entre los dos lados es siempre fija; incluso, una forma de evitar la dificultad del ángulo interior fue mediante la descomposición del paralelogramo en dos triángulos y un rectángulo. Al igual que en la situación 1, destacó el uso de la posición y de términos no matemáticos y ambiguos; incluso, hubo omisión de medidas. La mayoría de estas características de los procedimientos de los alumnos fueron previstas en el colectivo, pero hubo otras que no se anticiparon, lo cual dificultó la gestión de los maestros (el uso de la posición de la figura y las opciones de datos que permiten construir un paralelogramo idéntico). Justamente el sentido de la situación es poner en evidencia esa escasez en los conocimientos de los alumnos para iniciar el recorrido de su superación, lo cual no se logra en una ni dos sesiones.

c. La retroalimentación de la experiencia (reuniones posteriores)

A continuación, destaco aspectos centrales de las reflexiones individuales que hicieron los maestros. Estos aspectos permiten precisar qué de su experiencia fue visible y relevante para ellos; también dejan ver ausencias, esto es, aspectos considerados por los investigadores en el diseño, pero aparentemente aun no por los maestros. Finalmente, destacaré la retroalimentación que recibieron de las reflexiones colectivas.

*La reflexión individual de la experiencia:*

*Reflexionar sobre la clase, pero no lo suficiente sobre la propia gestión.* Aun con la notable mejoría de las gestiones de los maestros, en sus reflexiones persistía cierta tendencia a atribuir a factores externos a su práctica las razones de las dificultades que tuvieron en el aula, principalmente carencias de los alumnos, y también condiciones institucionales como la escasez de tiempo (ese último de gran afectación para las discusiones colectivas) o, nuevamente, la no correspondencia de los objetivos de la

situación con los contenidos del programa (como lo manifestó Fabio). Algunas de las dificultades que nosotros identificamos pero no los maestros fueron: un tamaño pequeño de la figura (Liliana, Ignacio y Fabio); el recurso de agregado de información sin funcionar adecuadamente (los emisores pueden dar más información, pero sin saber qué necesitan los receptores, esta última dificultad ya había sido señalada (Ignacio y Fabio) o planteándolo como una nueva tarea de análisis y descripción de la figura (como en el caso de Sara donde los ajustes de los mensajes no estuvieron a cargo de los mismos alumnos que los elaboraron originalmente); concentrar las discusiones colectivas en la formalización de términos geométricos dejando en segundo plano el problema del recurso a la posición de la figura (Ignacio, Sara). Otras dificultades que nacieron por los nuevos retos que traía la situación 2 y que tampoco fueron observables para los maestros fueron: aceptar que los giros e inversiones no invalidaban la congruencia (todos), agregar líneas adicionales a las figuras modelo (Liliana) afectando el reto de dar cuenta de los ángulos y hacer figuras de madera que corrían el riesgo de meter a escena la dimensión del espesor (Fabio). Es claro que había un proceso en marcha, paulatino, de identificación de los numerosos detalles que juegan un papel en la situación, de transformación de algunos de esos detalles a modalidades más accesibles o compatibles con sus puntos de vista, así como de desarrollo de la habilidad de gestión que se requiere.

Los maestros coincidieron en su preocupación por la persistencia de los mismos errores de sus alumnos que aparecieron en la situación 1, en particular: el uso de términos no matemáticos para describir elementos geométricos e incluso la ausencia de las medidas. Con esto dejaron ver, además de la importancia que tenían para ellos los términos, la expectativa de una superación de los errores más inmediata, y con ello, cierta dificultad para visualizar un proceso en el que, gracias a la retroalimentación de las sucesivas aplicaciones, los errores se irían corrigiendo. De alguna manera, en esa expectativa, el error es visto como expresión de fracaso.

*Una mirada más centrada en las producciones de los alumnos.* A diferencia de la situación 1, los maestros (a excepción de Fabio) centraron sus reflexiones en las producciones de los alumnos. Mientras Liliana y Sara percibieron una mejoría, Ignacio insistió en las carencias. Pese a esto, identificaron varias de las características que tuvieron las producciones: usar “diagonal” para describir lados del paralelogramo, la yuxtaposición de un rectángulo y dos triángulos como estrategia para describir el

paralelogramo, la escasa presencia de las nociones de ángulo y de altura y, la persistencia de un vocabulario no geométrico. Si bien los maestros atendieron más a las producciones, no todos se dieron cuenta de lo mismo; esto dependía de las características de los mensajes que se produjeron en sus clases (en la de Ignacio, por ejemplo, no se dio la yuxtaposición) y de lo que ellos consideraban que era importante para comunicar la figura (uso correcto de términos geométricos). Fabio fue el único que no manifestó claramente un interés en las producciones, lo que lleva a suponer que no tenía esa práctica en su quehacer cotidiano.

*La reflexión colectiva sobre la experiencia (Las aportaciones de los “otros” sobre las experiencias de los maestros).*

Empezaré destacando los aportes entre docentes. Al hacer pública su experiencia y su mirada sobre las producciones de los alumnos, todos los maestros tienen la oportunidad de conocer otras formas de hacer en el aula y con ello enriquecer su propia mirada. Lo más destacable fue la posibilidad de conocer qué aspectos de su experiencia pasada fueron retomados por sus colegas para esta nueva situación, y con ello, ver que la funcionalidad de sus aportaciones en el marco del trabajo colaborativo (por ejemplo, que Sara y Fabio adoptaran el recurso de agregado de información a los mensajes de Ignacio).

Por su parte, los investigadores dieron una retroalimentación a las reflexiones individuales de los maestros, sobre todo en aquello en lo que coincidían: i) se explicó que la congruencia no se veía afectada por los movimientos que se le hicieran a la figura, ii) se hizo una valoración positiva del error en las producciones de los alumnos y iii) se planteó la necesidad de permitir que la situación informe a los alumnos sobre su producción.

Cabe destacar, por otro lado, una nueva forma de retroalimentación: invitar a los maestros a explicar las razones de algunas de sus decisiones (como vimos con Liliana, a quien se pidió que explicara por qué introdujo líneas extras en la figura).

En síntesis, a lo largo de estos tres momentos que configuran la actividad reflexiva, los maestros dejaron ver indicios de un proceso de apropiación que evoluciona a medida que avanza la experiencia. Identificamos distintas interpretaciones y maneras

de llevar a la práctica la situación de paralelogramos, en varias de las cuales la experiencia con la situación 1 fue un referente importante para los maestros y los investigadores. En algunos casos, vimos cómo lo que ven los maestros de su propia experiencia, aumenta a medida que avanza el dispositivo, enriqueciendo su punto de vista y llevándolos a un proceso de análisis de su práctica con miras a mejorarla y, en otros, se empezó a evidenciar que la forma de trabajo colaborativo inherente al dispositivo de formación logra, en algunos casos, permear la acción de los maestros. Con elecciones concretas, configuraron mejores condiciones para el *medio* de los alumnos y mayor calidad en sus intervenciones.

### 2.3.2 Dimensión de investigación

Me interesa aquí analizar cómo funcionó el dispositivo de formación para esta segunda etapa de trabajo con los maestros y cómo la experiencia con la situación 1 configuró nuevas relaciones y formas de trabajo entre los distintos participantes. Me centraré en particular en: a) las características de las interacciones que se dieron entre maestros e investigadores, b) el funcionamiento de la retroalimentación, c) las formas de colaboración que se dieron y d) el conocimiento co-construido sobre la situación didáctica.

#### a. La interacción entre los distintos actores

Identificamos momentos de unanimidad y otros de dificultad para conciliar sus puntos de vista:

*Encuentros.* Al igual que en la situación anterior, un tema de interés común fue la previsión de las condiciones necesarias para que la situación fuera viable en sus aulas (tiempos, instrumentos disponibles, etc.); pero a diferencia, ahora aparece la preocupación por la conducción de la puesta en común y por el tipo de producciones de los alumnos. Como vimos, se compartieron ideas y propuestas, tanto de los maestros como de los investigadores.

*Desencuentros.* Se identificaron dos tipos de episodios, uno puntual, una discrepancia entre maestros e investigadores respecto de una noción geométrica (la congruencia), y otros más extendidos, en relación con los factores que según cada participante originaban las dificultades en las implementaciones. Me referiré a este último. Por una

parte, ante algunas dificultades, los investigadores tendieron a voltear más hacia la didáctica del contenido mientras los maestros dirigían su atención hacia factores institucionales, externos a su gestión: la falta de tiempo, el desempate con el programa (ver la idea de Fabio de la inconveniencia de la situación didáctica en relación con los temas de segundo).

Por otra parte, y esto es quizá más relevante, se siguió manifestando, por parte de los maestros, una interpretación de los errores como algo que no debería de ocurrir, no al menos después de la primera aplicación, como si con ella hubiera tenido que aprender todo lo necesario para resolver todas las situaciones similares. En este punto de vista, se pasan por alto las diferencias entre los conocimientos implicados en ambas situaciones, y se sostiene una interpretación de los errores como fracasos que no deberían de ocurrir, y no como parte normal de un proceso de aprendizaje en el que el reto es dar retroalimentación.

También hubo desencuentros entre los maestros en relación con su forma de prever y gestionar la puesta en común: Fabio confiaba en que sus alumnos harían mejores producciones por los acuerdos de la situación 1, mientras Liliana y Sara, proponían acciones que les permitieran evidenciar los errores sin decírselos directamente. Esto tiene que ver con la forma en la que comprendían la situación y sus prácticas habituales en el aula.

Los episodios de desencuentro pueden considerarse expresiones previsibles de un trabajo conjunto que funciona; para nada impidieron la colaboración entre los distintos actores; la cual se sostuvo porque, implícitamente, había una forma de interactuar de cada participante que hacía posible que el diálogo fluyera: i) justificando su punto de vista, dejando ver por qué era válido desde su posición como maestro o investigador (como vimos en el episodio de la congruencia) y ii) aceptando el punto de vista de los otros aun sin que fuera muy claro hasta qué punto estaban de acuerdo (como cuando los investigadores y maestros decidieron no mencionar nada tras la intervención de Fabio).

#### b. La retroalimentación

Para esta segunda situación, se identificaron algunos cambios en las fuentes y formas de retroalimentación que tuvieron los maestros; los investigadores encontraron nuevas formas de enriquecer las experiencias de los maestros, sin dejar completamente de lado

su posición reticente, mientras que la posibilidad de retroalimentación entre maestros fue más limitada.

*La retroalimentación de los investigadores: nuevamente en la encrucijada de retroalimentar, pero preservar la autonomía.*

En este segundo ciclo, no hubo una orientación explícita de los investigadores sobre los temas que se discutieron en el colectivo. Aun sin haber sido analizada hasta ese momento, la experiencia en la situación 1 influyó en cierta medida en la forma en que los investigadores participaron en la situación 2. En la reunión previa detectamos que las participaciones fueron *prematuras* (IY emitía juicios adelantados sobre las producciones de los alumnos), *débiles* o poco contundentes (ID no aclaró su propuesta de diversificar las figuras) y *escasas* (en momentos en los que era necesario intervenir para aclarar, ajustar, profundizar en una propuesta o un hecho en discusión, por ejemplo, con el análisis de las producciones de los alumnos de Liliana o algunas de las estrategias de intervención que propusieron los maestros).

Tras las implementaciones, las retroalimentaciones que ofrecimos desde la posición de observadores de las clases fueron heterogéneas. En algunos casos fueron poco contundentes frente a errores que se filtraron en las clases y en las discusiones del colectivo; por ejemplo, aclarar que la posición de la figura es irrelevante para determinar la congruencia. En otros casos fueron más directas, en particular al insistir a los maestros en una idea del error como oportunidad de aprendizaje, y también al ponerlos en una posición de explicar más las razones de su acción, por ejemplo, pedir a Liliana que explicara el porqué de su decisión de agregar líneas a las figuras modelo; pedir que se justificara una acción fue una modalidad de retroalimentación que no se dio con la anterior situación.

Por otra parte, el hecho de que se evidenciaran errores de naturaleza geométrica en los conocimientos expresados por los maestros contribuyó un poco a la dificultad de retroalimentarlos, pues esto podía interpretarse como interpelar la legitimidad de su trabajo docente en términos de su saber matemático. Así, por esta y otras razones (matizar el rol de guías) continuó la tendencia a mantener cierta reticencia. Pero, por otra parte, el precio fue una retroalimentación que se dejó de dar. Aquí se expresa nuevamente una tensión que los investigadores tratan de manejar un tanto intuitivamente.

Los investigadores juegan un papel inevitablemente directivo, el cual se busca que no sea igual a una dirección total y autoritaria, sino muy acotada al saber didáctico subyacente, y que deje abierta la puerta para que los maestros, con autonomía, vayan tomando posturas diversas, y participen del conocimiento que se está generando sobre la situación en aula.

*La retroalimentación entre los maestros en las reuniones colectivas.*

Para esta segunda situación, se dieron retroalimentaciones implícitas e indirectas. En la reunión previa, al haber mayor implicación de los maestros en las discusiones, conocieron con antelación posibles formas de mejorar las puestas en común (la propuesta de Michelle de destinar dos sesiones para prever qué producciones se discutirían con los alumnos o las distintas estrategias de intervención que surgieron). La posibilidad que se dio en la situación anterior de que algunos maestros fueran observadores de las clases de sus colegas y que, como vimos, se convirtió en un recurso potencial para la formación de los maestros, se perdió para esta segunda implementación; de ahí que no hubo retroalimentaciones directas a las clases de los maestros por parte de otros maestros. Al parecer las condiciones institucionales no favorecieron espacios de encuentro comunes en los horarios de clase de los maestros. No sabemos si, de haber sido posible, algunos de ellos habrían hecho observaciones, es decir, no había llegado a ser aún una práctica establecida y valorada.

*La retroalimentación que dio a los maestros la implementación con sus alumnos.*

De acuerdo con lo que compartieron los maestros, se puede suponer que sí recibieron una retroalimentación del *medio* de su clase, tal vez más amplia que la vez anterior (una mirada más amplia sobre las producciones de sus alumnos y las dificultades que manifestaron para conducir las puestas en común).

Así, de nuevo, los maestros tuvieron dos fuentes de retroalimentación, la clase y los espacios de discusión colectiva, que funcionaron con todo y las dificultades mencionadas.

c. La colaboración

Con la situación 2 algunas formas de colaboración se consolidaron y otras desaparecieron.



La mayoría de las formas en las que colaboraron los maestros en la primera fase del dispositivo se conservaron: aportar propuestas relativas a la implementación de la situación en las discusiones colectivas y compartir con el colectivo la experiencia en el aula. Pero además, se manifestó que los maestros retomaron elementos de las retroalimentaciones recibidas de sus colegas y de los investigadores en las reuniones previas y en las interobservaciones (cuando las hubo), por ejemplo: adoptar un recurso usado por otro maestro (como el recurso de Ignacio de permitir ajustes a los mensajes), una sugerencia de los investigadores (preparar distintas figuras modelo), o de la construcción conjunta (forma en la que se presentaría el transportador en el medio de los alumnos). Por el contrario, las formas de colaboración que se dieron por la posición de maestro/observador, desaparecieron para esta segunda fase del dispositivo (observar y/o permitir que un colega observara su clase para luego ofrecer una retroalimentación pública de aspectos de su gestión).

Los investigadores, por su parte, conservaron las formas de colaboración identificadas durante la fase anterior, esto es, facilitar condiciones favorables para un trabajo colaborativo con y entre los maestros.

Estas formas de colaboración se empiezan a consolidar a medida que va avanzando la experiencia y para esta segunda situación dejan ver con mayor claridad algunos beneficios que traen para la formación de los maestros y para los intereses de producción de conocimiento de los investigadores. La colaboración consistió en que algunas pautas implementadas por unos fueran retomadas por otros; es decir, en el marco del trabajo conjunto, los maestros e investigadores tienen la idea de que necesitan al otro porque él tiene una experiencia o una manera de ver las cosas que ellos no tienen y por tanto, podría complementarse: investigadores que se informan de las dificultades y necesidades de los maestros para gestionar situaciones con un enfoque didáctico específico y maestros que tratan de considerar las orientaciones de los investigadores (al prever y analizar las producciones de los alumnos y su gestión en el aula, reflexionar sobre su práctica verbalizando su experiencia, retroalimentar a sus colegas, considerando algunas sugerencias para crear el medio de los alumnos) y también las aportaciones de sus colegas (al adoptar un recurso propuesto o utilizado por ellos).

d. La construcción conjunta (Conocimiento matemático-didáctico sobre la situación)

Los conocimientos que se generaron sobre la factibilidad de la situación y sobre formas posibles de mejorarla fueron:

- ✓ Considerar dos aspectos de las figuras modelo: el material en el que están hechas y los objetos matemáticos que se quieren enseñar con ella. La experiencia de Fabio dejó ver la conveniencia de recortar las figuras (para evitar el efecto de la posición respecto a la hoja y favorecer los giros e inversiones en la superposición), pero, a su vez, la inconveniencia de que estén hechas en un material que pueda confundirse con las características geométricas de la figura (madera). Por su parte, con Liliana quedó en evidencia que agregar líneas a la figura (diagonales y/o paralelas) puede inducir a una visualización del paralelogramo por yuxtaposición de dos figuras, desviando la problemática del ángulo.
  
- ✓ Estrategias de intervención para conducir las puestas en común: En la reunión de planeación surgieron en el colectivo estrategias como: i) asumirse como emisores de un mismo mensaje para todos los alumnos, ii) solicitar a los alumnos emisores construir la figura con el mensaje que elaboraron (“seguir sus propias instrucciones”), iii) construir con los alumnos un mensaje para toda la clase y construir la figura, iv) seleccionar y discutir producciones que permitieran destacar logros y a la vez errores en los mensajes y v) apoyarse en los acuerdos establecidos en la situación 1. De estas, sólo se evidenciaron las dos últimas en la clase de Sara.  
Con la experiencia en aula, identificamos un recurso que funcionó bien: articular la institucionalización con algunos de los conocimientos que habían surgido durante las discusiones (Sara).
  
- ✓ Distinguir y explicitar los distintos propósitos que se tienen con la validación por un lado y la puesta en común por otro, destacando los nuevos retos didácticos que trae la reproducción de paralelogramos: i) considerar las transformaciones de la figura (simetría, rotación) en la validación empírica y ii) un doble objetivo para las discusiones con los alumnos: que las descripciones den lugar a un paralelogramo y a su vez, que este sea idéntico al modelo original.

Como mencioné antes, hubo algunos conocimientos que surgieron con la situación 1 que, al considerarse, dejaron ver su potencial para mejorar las gestiones de los maestros y, al ignorarse, implicaron dificultades nuevamente. Lo interesante de esto, es ver cómo la movilización de estos conocimientos mostró, con esta segunda experiencia, indicios de una estructuración favorable de la situación de comunicación.

Cabe señalar, en atención a una valoración más equilibrada de los conocimientos producidos sobre la situación, que varios de estos no fueron objeto de profundización (no había el tiempo suficiente), a veces no fueron objeto de reacción (no se dio explícitamente una retroalimentación por parte de los integrantes del colectivo) y a veces no se llevaron a las aulas, como fue el caso de las estrategias para la puesta en común propuestas en la reunión de planeación. No obstante, se trata de conocimientos contruidos de manera conjunta, que podrán seguir desarrollándose en las aplicaciones siguientes. A la postre, se espera que ayuden a mejorar el diseño y la gestión de la situación por los mismos maestros, en otras ocasiones, y por otros maestros, si se da lugar a una difusión que vaya más allá de esta experiencia específica.

### CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DEL TRABAJO COLABORATIVO ENTRE INVESTIGADORES Y MAESTROS. LA SITUACIÓN 3.

En este capítulo presento el análisis de la tercera y última situación de comunicación. Conservaré la estructura de análisis alternado entre las reuniones colectivas y las implementaciones en el aula. Destacaré episodios de la interacción que dejan ver formas de colaboración entre los maestros y los investigadores más equilibradas (respecto a la experiencia con las dos situaciones anteriores) en relación con los temas que se discutieron, las preocupaciones y las aportaciones que hicieron. En las implementaciones, se identificaron indicios de apropiación de algunos planteamientos del enfoque didáctico por parte de los maestros. Finalmente, el proceso de construcción conjunta dejó en evidencia la necesidad de repensar la situación y hacer ajustes en relación con la formulación de los criterios de congruencia, así como algunos conocimientos que ayudarían a mejorar la factibilidad de la situación didáctica en el aula.

#### 3.1 La planeación de la implementación

La fase de planeación de la situación 3 duró pocos minutos en relación con las reuniones de planeación anteriores<sup>54</sup>. Los investigadores hicieron la primera intervención, en la que destacaron un objetivo importante de la situación, algunas condiciones que consideraban necesarias para su implementación e incluso, las posibles dificultades de los alumnos:

IY: Para la tercera y última sesión, vamos a trabajar con los triángulos. Esta situación tiene las mismas características de las situaciones que venimos trabajando con los rectángulos y los paralelogramos, pero **persigue un propósito adicional** (...) y es poder, de alguna manera, concluir en los criterios de congruencia. Entonces nosotros proponemos hacer la actividad varias veces, como lo estamos viendo en paralelogramo; pero sentimos que la dificultad puede no estar en que reproduzcan el triángulo idéntico porque es un triángulo y como les está permitido nombrar la figura, pues van a empezar por ahí y seguramente lo van a encontrar rápidamente o no les va a costar más de una ronda encontrar el triángulo idéntico. Entonces, lo que podemos mirar y analizar aquí es cuáles son las combinaciones que nos van a garantizar que sí se obtenga ese triángulo idéntico

ID: las mínimas

IY: ajá.

---

<sup>54</sup> Recordemos que los encuentros con los maestros respondían a dos objetivos: la reflexión sobre la experiencia anterior y la planeación de la siguiente. En este encuentro en particular, la reflexión sobre la experiencia con los paralelogramos se extendió más de lo previsto, dejando poco tiempo para planear la situación 3.

Desde la perspectiva de los investigadores, el mayor reto no sería comunicar que se trataba de un triángulo, ni siquiera comunicar los datos necesarios para hacer un triángulo igual sino encontrar las tres maneras distintas de lograrlo (LLL, LAL, ALA); sobre todo donde los ángulos están involucrados. De ahí el interés de centrar la discusión del colectivo en la previsión de las producciones de los alumnos. En efecto, los maestros respondieron a esta solicitud y, en el colectivo, las participaciones se concentraron en las posibles estrategias de intervención en el aula de los maestros en relación con las producciones de los alumnos.

A continuación, presento las tres propuestas que surgieron y se analizaron. La primera implicaba condicionar desde un inicio las producciones de los alumnos hacia los criterios de congruencia; mientras que la segunda y la tercera se elaboraron pensando en posibles producciones de los alumnos que podían aparecer.

### 3.1.1 Las condiciones mínimas como una indicación específica de la consigna

La primera propuesta nació de los maestros. El objetivo de instaurar los criterios de congruencia llevó a Liliana a proponer lo siguiente:

Liliana (M): Entonces hay que decirles al principio [a los alumnos] que las instrucciones mínimas para obtener un triángulo

ID: Tal vez la primera vez no, pero a lo mejor lo podemos dejar la primera vez así, abierto, y después, ahora sí, vamos a tratar de ver cuáles son las mínimas...que cada equipo busque las mínimas. Y se analizará, cada equipo sacará tres, otros cuatro y a lo mejor algunos dos [refiere a la cantidad de datos que se den en la descripción], y ahí habrá que ver qué pasa. Seguramente el que “no más” da dos [datos] no tendría por qué salir un triángulo igual y esas cosas se pueden analizar.

Incluir en la consigna la condición de un mínimo de datos en los mensajes, definitivamente sería necesario para lograr los criterios con los alumnos; pero antes, debía permitírseles describir la nueva figura y poner en juego los conocimientos que tienen sobre ella; así como en las situaciones anteriores. Esta idea movilizó la intervención del investigador que, sin invalidar la propuesta de la maestra, destacó su conveniencia para una segunda aplicación de la situación.

### 3.1.2 Validar el criterio LLL y luego restringirlo para que aparezcan otros

Los maestros y los investigadores coincidieron en que el primer criterio al que podían llegar los alumnos era LLL (lado-lado-lado), considerando la poca funcionalidad del ángulo que se identificó con la situación de paralelogramos; incluso, podía ser el único criterio que apareciera si los maestros no intervenían para hacer avanzar a los alumnos:

IY: (...) El primer criterio que puede salir ¿cuál creen que es?

Sara (M): la medida de los tres lados

IY: Lado, lado, lado; ese va a ser el primero que va a salir

Ignacio (M): De hecho, podría ser el único al que lleguen

Liliana (M): sí

ID: ajá, entonces, previendo eso, habría que tener una vuelta más diciendo: *bueno, ya tenemos este, ahora encuentren otros*; a ver que otros pueden encontrar

Sara (M): Sí

Ignacio (M): O podríamos restringir la indicación: *Nada más se permiten ... no sé.*

Sara (M): colocar una medida [completa la idea de Ignacio]

Ignacio (M): ajá, una medida de un lado, por ejemplo

Sara (M): [decirles] ahora ya puedes incluir dos lados y otro dato, el que tú quieras y no decirles cuál

(...)

Liliana (M): sí, sí tenemos que restringir para obligarlos a encontrarlos [otros criterios]

Ignacio (M): me parece que la van a construir rápido dando los tres lados, pero luego...bueno, sería que rebusquemos cómo ir sacando cada criterio

ID: Una posibilidad, dijimos, es decirles, ya en la segunda vuelta, este dato de los tres lados sí sirvió (...) Ahora hagan datos diferentes, ya con eso ya están asegurando que no pueden ser otra vez tres lados.

La pregunta de IY interpeló directamente a los maestros y generó una discusión en el colectivo muy activa, donde se buscó construir opciones concretas para hacer aparecer los criterios que involucraban a los ángulos (LAL y ALA). En su primera participación, ID propuso aceptar el criterio LLL y luego, en una segunda aplicación, solicitar a los alumnos otras combinaciones de datos para garantizar la congruencia; en esencia, la misma propuesta que había hecho a Liliana previamente. Pero, al parecer para los maestros no era suficiente; no podían “confiar” en que esta restricción haría aparecer los dos criterios que se querían. Es posible que la preocupación de los maestros tuviera de fondo la limitación del tiempo de la implementación, pues esperar a una segunda e incluso, una tercera aplicación para que se dieran los demás criterios, no parecía una opción viable para ellos.

### 3.1.3 Un contraejemplo para invalidar un falso criterio

Una última propuesta fue un recurso de intervención para el caso en que los alumnos llegaran a combinaciones de datos que no garantizaran la congruencia:

IY: Sería bueno que ellos [los alumnos] dijeran, por ejemplo, AAA [Ángulo-ángulo-ángulo]; y que se llegue en la puesta en común a decir: *Ah, son semejantes, no es idéntico*

ID: claro, eso sería muy interesante

Maestros: sí

El contraejemplo es un recurso didáctico efectivo para convencer a los alumnos de que sus resoluciones no son válidas para todos los casos y así, se vean en la necesidad de modificarlas. En este caso, el ejemplo que dio IY fue para la combinación AAA, porque pondría en evidencia con los alumnos que estos datos garantizan la forma, pero no la congruencia entre los triángulos. La idea del contraejemplo podía usarse para otras combinaciones, por ejemplo, LLA. Esta sugerencia de la investigadora fue aceptada por los maestros; no se profundizó en la discusión probablemente porque este es un recurso comúnmente utilizado en sus clases<sup>55</sup>.

### 3.2 La implementación de la situación en el aula

Los objetivos que se perseguían, de acuerdo con lo planteado en la ficha de la situación y en la discusión que tuvimos todos en la fase de planeación, eran: para una primera aplicación, que los alumnos logaran reproducir un triángulo congruente, sin importar la cantidad de datos que usen (3 o más, puesto que con 2 o 1 no se asegura la congruencia); en las posteriores aplicaciones, que logaran la reproducción con sólo tres datos y, además, de tres maneras diferentes (LLL, ALA, LAL). Como veremos, no todos los maestros entendieron de esta manera los objetivos.

Lograr la suficiencia<sup>56</sup> de datos fue la mayor dificultad que se previó con la situación. Me interesa mostrar ahora cómo enfrentaron los docentes estas dificultades, así como los recursos que pusieron en juego para lograrlo.

---

<sup>55</sup> Recordemos que Sara e Ignacio se apoyaron en este recurso para conducir la puesta en común de la situación 1.

<sup>56</sup> Entendemos por Suficiencia a una cantidad mínima de datos (3) que son suficientes para obtener la reproducción idéntica.

Analizaré dos aplicaciones de la situación, considerando los momentos de instauración de la consigna, validación empírica y puesta en común, así como las producciones de los alumnos. Cabe aclarar que no dispuse de información<sup>57</sup> para analizar todas las fases para cada uno de los maestros. Los casos con más datos para analizar fueron el de Sara e Ignacio. De la implementación de Sara, se analizaron todas las fases de las dos aplicaciones; mientras que, con Ignacio, se analizó la primera aplicación y la consigna de la segunda. Para el caso de Liliana se analizó la primera aplicación y, finalmente, de Fabio sólo pudimos analizar las producciones de los alumnos, de la primera aplicación, y parte del *medio material*.

### 3.2.1 Primera aplicación

#### a. La consigna

Para fines de organización, primero me centraré en las condiciones de trabajo que explicitaron a través de las reglas del juego de comunicación y luego, en aquellas decisiones relativas a la organización de los alumnos, el tipo y tamaño de las figuras modelo y los instrumentos que estuvieron disponibles para el desarrollo de la tarea.

#### i) Las reglas del juego

A continuación, presento las consignas de los maestros Sara e Ignacio

Sara	[Observador]: Sara organiza a las parejas, las trae anotadas en el teléfono. Al parecer, no hay ausentes. Traza una tabla en el pizarrón (...) Enseguida, repasan los acuerdos de la sesión anterior (hay mucho ruido abajo en el patio, ensayan algo), Sara habla en voz muy alta. Se mencionan los vértices, la diagonal, como cosas de las que se habló (...) se recuerda que se puede escribir el nombre de las figuras y que deben incluirse los datos necesarios (...) Se harán 3 figuras; recuerda que el mensaje debe ir sin dibujos; recuerda que no deben ver la figura de las parejas.
Ignacio	Ignacio (M): (...) ¿Qué se vale?, pues en la primera parte, recuerden que pueden dar las indicaciones que ustedes gusten, pueden dar medidas, pueden dar nombres de la figura, lo que gusten (...) ¿Alguna duda? [nadie contesta] bueno, reparto [las figuras] Alo: ¿sin dibujos maestro?

<sup>57</sup> Las razones son diversas. En los casos de Ignacio y Liliana porque sólo coincidieron los horarios de los maestros y los investigadores (observadores) en una clase; y estos maestros usaron más de una clase para hacer las dos aplicaciones. En el caso de Fabio, se presentó un evento institucional en su escuela (la visita del secretario de educación) justo el día que el maestro tenía clase con su grupo de experimentación; esto impidió el ingreso de visitantes a la institución.



Ignacio (M): sin dibujos.  
 [entrega las figuras a las parejas]

Nótese que ninguno de los dos maestros solicitó un mínimo de datos y recordaron aspectos que sí podían incluirse en las descripciones; esta decisión configuró una buena condición de trabajo para los alumnos, ya que les ofrecía recursos para redactar sus mensajes.

Estos maestros aparentemente no tuvieron dificultades para instaurar la consigna, parece que ayudó la experiencia con las implementaciones anteriores. Para el caso de Liliana (M) el observador registró en sus notas que la maestra no tuvo dificultades para instaurar la consigna y que recordó las reglas del juego. Parece que la sugerencia de ID de no incluir en la consigna, desde la primera aplicación, la condición del mínimo de datos, y permitir que los alumnos pusieran en juego los conocimientos que tenían sobre triángulos para describir la figura, fue tomada por los maestros.

ii) Decisiones relativas a las figuras, los materiales y la organización de los alumnos<sup>58</sup>

Los observadores registraron que los alumnos disponían de la regla graduada y el transportador; en ninguno de los casos estuvo presente el compás. Las maestras Liliana y Sara entregaron hojas blancas para construir las figuras, mientras que Ignacio y Fabio optaron por hojas cuadrículadas. La organización de los alumnos se conservó en equipos de parejas.

En relación con las figuras, se evidenciaron decisiones específicas en cada caso. Veamos:

Liliana	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tipo de figuras: En su mayoría, triángulos isósceles y equiláteros. No hubo triángulos rectángulos.</li> <li>- Tamaño: mediano (más grande que el que aparecía en la ficha didáctica)</li> <li>- Figuras recortadas</li> <li>- Entregó uno de tres triángulos distintos a cada pareja A y otro a las parejas B (de manera que no todas las parejas A tenían el mismo triángulo; ni tampoco las B).</li> </ul>
Sara	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tipo de figuras: Triángulos isósceles y escalenos. No hubo triángulos rectángulos.</li> <li>- Tamaño: mediano (Aprox. la mitad de una hoja A4)</li> </ul>

<sup>58</sup> Considerando que no hubo cambios significativos de una aplicación a otra, para este apartado retomo el material utilizado en las dos aplicaciones (o una, según el caso) que hicieron los maestros. A su vez, con base en el material de producciones que Fabio entregó a los investigadores, fue posible reconstruir el *medio* que creo para sus alumnos.

	- Para cada aplicación, entregó uno de dos triángulos distintos a cada pareja A y, uno de otros dos, para las parejas B (igual que con el caso de Liliana, no todas las parejas A tenían el mismo triángulo; ni tampoco las B).
Ignacio	- Tipo de figuras: Triángulos escalenos. Un triángulo era rectángulo. - Tamaño: pequeño (aprox. como el que aparecía en la ficha didáctica) - En las dos aplicaciones entregó un mismo triángulo a todas las parejas A y otro a las parejas B.
Fabio	- Tipo de figuras: Triángulos isósceles y escalenos. Algunos triángulos rectángulos. - Tamaño mediano (Aprox. la mitad de una hoja A4) - Entregó un triángulo distinto a cada una de las parejas A y uno distinto a cada una de las parejas B (el maestro entregó 20 modelos de triángulos distintos <sup>59</sup> ).

Destacamos algunas cuestiones:

- ✓ *Tipo de figuras:* Fabio diversificó las figuras. Como vimos anteriormente, poner en juego varias y distintas figuras ayudaba a los maestros a controlar que los alumnos emisores no se apoyaran en descripciones ajenas para construir las suyas; pero les dificultaría involucrar a la totalidad del grupo en una misma discusión en la puesta en común. Es probable que la decisión del maestro se relacione con su impresión de que los alumnos “copiaban” las descripciones de sus compañeros; recordemos que en varias ocasiones lo había compartido con el colectivo. De hecho, la posibilidad de diversificar las figuras surgió en el colectivo como una alternativa para evitar este comportamiento de los alumnos. A pesar de la dificultad que se podía prever con tantas figuras en juego, debemos destacar el trabajo de preparación del material que dedicó Fabio para esta última sesión.

Por último, conviene mencionar que Liliana presentó las figuras recortadas. Esta decisión fue favorable porque ayudaría a que los alumnos se dejaran de fijar en la posición de la figura respecto a la hoja de papel y, además, facilitaría que vieran la congruencia de las figuras a pesar de los giros o inversiones que se hicieran para hacerlas coincidir. Esta decisión se revela como una variable didáctica de la situación.

- ✓ *Tamaño de las figuras:* Ignacio fue el único que adoptó un tamaño pequeño para las figuras. Respecto a las dos situaciones anteriores, los maestros Fabio y Liliana tuvieron un cambio significativo, pues ofrecieron mejores condiciones para sus alumnos adoptando un tamaño más grande. Parece que la insistente sugerencia de ID en las reuniones colectivas y, posiblemente, la necesidad de que los alumnos se

<sup>59</sup> En varios casos los triángulos eran semejantes.

fijaran en el ángulo para lograr los criterios de congruencia influyó en esta decisión. Pero ¿por qué no pasó lo mismo con Ignacio? Es posible que para el maestro fuera una tarea dispendiosa construir figuras nuevas que fueran grandes, en lugar de imprimir las que aparecían en la ficha didáctica. Incluso, implicaba más trabajo fotocopiar los modelos en una escala distinta a la que allí aparecía. Esto nos interpela como investigadores y nos deja ver que hay condiciones particulares del trabajo docente que limitan la posibilidad de acción de los maestros, por ejemplo, el escaso tiempo del que disponen para preparar sus clases o, incluso, el poco acceso a una fotocopidora. En cualquier caso, para futuras experiencias, sería ventajoso incluir en la ficha didáctica las figuras en el tamaño que se considera conveniente.

- ✓ *Los instrumentos disponibles:* Para esta situación en particular convenía incluir el compás en los instrumentos que disponían los alumnos, previendo las construcciones de los triángulos con regla y compás; sin embargo, este no se evidenció en las clases observadas, ni hay rastro de su uso en las producciones de los alumnos (marcas). Este asunto no se previó en la reunión colectiva. Como investigadores, manejábamos implícitamente la idea de que, al tratarse de la construcción de triángulos, el compás estaría disponible<sup>60</sup> y, además, no previmos que esto sería un problema para los alumnos. Más adelante retomaré este asunto.
  
- ✓ *Las hojas para trazar la figura:* De los cuatro maestros, Sara y Liliana optaron por hojas blancas, ofreciendo con ello mejores condiciones para el trabajo de los alumnos<sup>61</sup>. Por su parte, Fabio e Ignacio pasaron de hojas blancas (en la situación anterior) a hojas cuadrículadas. En el colectivo, no se discutió sobre el efecto de las características del papel que se entregaba a los alumnos. Faltó problematizar este aspecto en las reflexiones desde que detectamos esta dificultad en la implementación de la situación 1 de Fabio.

#### b. Las producciones de los alumnos

A continuación, analizo los mensajes que produjeron los alumnos de los cuatro maestros en esta primera aplicación. En la primera parte, considero la suficiencia y no suficiencia

---

<sup>60</sup> Esta idea se sustentaba porque en los planes y programas de estudio (2017), la construcción de triángulos con regla y compás se ubica en el último ciclo de primaria (5° y 6°).

<sup>61</sup> Las hojas blancas evitan los trazos a mano alzada y hacen necesaria información adicional de la figura: líneas paralelas, ángulos rectos, etc. (Fregona & Orús, 2011).

de los mensajes y una revisión de las colecciones de datos que incluyeron en sus descripciones, a fin de identificar cuáles se correspondían con los criterios de congruencia. En la segunda parte, analizaré las características geométricas de las descripciones.

Recordemos que la consigna que orientó el trabajo de los alumnos no estaba restringida a un mínimo de datos.

i) Suficiencia y no suficiencia de los mensajes

El total de mensajes analizados fue 46. Aproximadamente el 22% resultaron suficientes. En relación con las clases de los maestros se obtuvo lo siguiente:

<b>Maestro/ Maestra</b>	<b>Mensajes reportados</b>	<b>Mensajes suficientes</b>	<b>% de suficiencia</b>
<i>Ignacio</i>	5	1	20%
<i>Fabio</i>	14	2	14.2%
<i>Sara</i>	19	4	21%
<i>Liliana</i>	8	3	37.5%
<b>Total</b>	<b>46</b>	<b>10</b>	<b>21,7%</b>

Tabla 10: Porcentaje de suficiencia de los mensajes por maestro. Situación 3, aplicación 1. Fuente: Propia

El número de mensajes que reportaron los maestros para esta tercera situación fue menor respecto a las anteriores; el porcentaje de suficiencia se mantuvo bajo. A diferencia de la situación anterior, ahora los alumnos podían prescindir de los ángulos comunicando la medida de los tres lados, por ello, es extraño que el porcentaje de suficiencia fuera solo del 22%.

Considerando la experiencia de los alumnos con las anteriores dos situaciones y que la consigna de esta primera aplicación no tuvo restricciones, se esperaba que las descripciones estuvieran menos apoyadas en la posición, que hubiera más presencia de vocabulario técnico; a su vez, que los primeros datos que considerarían serían lados y quizá, algunos, una altura. La dificultad estaría entonces, para las futuras aplicaciones, en lograr colecciones de datos distintas a LLL, y mínimas, que les aseguran la congruencia. Ello exigiría movilizar los ángulos para la reproducción.

A continuación, presento los datos que privilegiaron los alumnos en sus descripciones. En la tabla, relaciono la cantidad de datos que consideraron para esta primera aplicación respecto a los datos identificados:

<i>Cantidad de datos considerados</i>	<i>N° mensajes /cantidad de datos</i>	<i>Colección de datos presentados</i>	<i>N° mensajes/colección de datos</i>
1	3	1 lado	3
2	2	1 lado – 1 ángulo	1
		2 lados	1
3	<b>23</b>	3 lados	<b>12</b>
		2 ángulos – 1 lado	2
		1 ángulo – 2 lados	<b>9</b>
4	<b>13</b>	2 lados – 1 ángulo – 1 altura	1
		3 lados – 1 altura	<b>7</b>
		3 lados – 1 ángulo	3
		3 ángulos – 1 lado	1
		2 lados – 2 ángulos	1
5	3	3 lados – 2 ángulos	3
6	2	3 lados – 3 ángulos	2

Tabla 11: Colección de datos considerados por los alumnos para describir la figura. Fuente propia

Del total de mensajes (46), cerca del 78% tenían tres datos o más. De hecho, la mayoría de los alumnos consideró tres o cuatro datos (partes sombreadas de la tabla). Si bien privilegiaron los lados del triángulo, hubo también una presencia significativa de los ángulos y las alturas en las descripciones. Casi todos los mensajes que incluyeron al menos tres datos daban suficiente información para construir el triángulo congruente<sup>62</sup>. A primera vista resulta extraño entonces que, como vimos, sólo el 22% lograron el triángulo idéntico. El problema tuvo que ver con la descripción misma y con su interpretación. Detecté tres razones: i) las medidas presentadas no se correspondían con las de la figura modelo (sobre todo de los ángulos), ii) la ambigüedad de las descripciones y iii) que los alumnos receptores no sabían construir un triángulo con regla y compas dadas las medidas de sus tres lados; lo hicieron por ensayo y error. Este es otro aspecto que, en una experiencia futura, sería importante discutir en la reunión de planeación.

<sup>62</sup> La excepción estuvo en la combinación de dos lados y un ángulo; ya que esa no necesariamente implica el criterio LAL. Estas descripciones daban cuenta de LLA.


ii) Características geométricas de las descripciones.

Al analizar las descripciones identifiqué dos maneras en que los alumnos recurren a la posición para caracterizar el triángulo. La primera, reconocieron el triángulo como una composición de líneas y puntos que se caracterizó por una fuerte presencia de expresiones asociadas a la posición. En este grupo, también se consideraron mensajes en los que, aun cuando se explicitaba que la figura era un triángulo, no lograron ser funcionales pues importaba la posición de cada elemento (lados, ángulos) para describirlo. En esta manera de caracterizar la figura, puede decirse que el uso de la posición fue *conceptual*, en el sentido de verse como una propiedad intrínseca a la figura. Este tipo de descripciones representaron aproximadamente el 80% del total de los mensajes. Esto ocurrió menos en el caso donde las figuras se presentaron recortadas (Liliana).

En la segunda manera en que los alumnos recurren a la posición para caracterizar el triángulo, los conocimientos sobre las definiciones y propiedades de los triángulos que se movilizaron fueron funcionales para comunicar la figura; se recurre a la posición, pero su uso *auxiliar*, es decir que sirve para ayudar a sus compañeros a construir la figura.

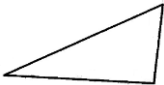
A continuación, profundizaré en estas cuestiones.

*La posición como recurso conceptual. Una propiedad intrínseca a la figura*

<i>Ej. 15 Figura modelo. Mtra. Sara (dibujada en la hoja)</i>	<i>Mensaje</i>	<i>Datos para la reproducción</i>
 <p>L1: 20.3 cm L2: 13 cm L3: 9.3 cm Ángulos: 132°, 28° y 20°</p>	<p>“Primero trazar una línea de 17 cm de forma horizontal, luego con el transportador del lado izquierdo de la línea medir de la orilla de izquierda a derecha con el transportador 135° y trazar una línea de 6.5 cm; luego de la primera línea que se trazó para cerrar la figura, tomar el transportador y medir de la orilla de la línea de derecha a izquierda 20° y trazar una línea hacia la otra que ya estaba de 135° de 13.2 cm”</p>	<p>3 lados – 2 ángulos</p>

Aquí hay dos cosas en relación con la posición: No solo importa qué lado del triángulo será el horizontal, sino de qué lado, izquierdo o derecho, va a quedar determinado el ángulo; como si al ponerlo del otro lado, el triángulo obtenido pudiera no resultar igual. Pero aun con las referencias espaciales y un vocabulario no matemático como apoyo para describir los lados y ángulos, se logró comunicar que la figura era un triángulo. A pesar del exceso de datos, el triángulo no resultó congruente. Las medidas de dos lados y un ángulo tenían una diferencia significativa con las originales; de ahí la no suficiencia de la descripción.

El siguiente ejemplo, es parte del numeroso grupo de mensajes en los que los alumnos aclararon que la figura a reproducir era un triángulo y, además, lo clasificaron con base en las longitudes de los lados:

<i>Ej. 16 Figura modelo. Mtro. Ignacio (figura dibujada en la hoja)</i>	<i>Mensaje</i>	<i>Datos para la reproducción</i>
 <p>L1: 7 cm L2: 6 cm L3: 3.2 cm Ángulos: 60°, 26° y 94°</p>	<p>“Es un triángulo escaleno. El lado derecho debe quedar inclinado y el lado izquierdo a 60° o un poco más recto que el lado derecho. La base mide 7 cm. El lado derecho con la base debe tener un ángulo de 30°”</p>	<p>2 ángulos – 1 lado</p>

La información que refería al triángulo escaleno no ayudó a construirlo; parece que su función fue *corroborar* que la figura obtenida cumplía con esta condición. Como la posición les importaba a los alumnos, tuvieron que indicar cuál era el ángulo que estaba a la derecha o a la izquierda. La expresión “un poco más recto”, deja ver que primero se fijan en la posición de las líneas inclinadas respecto al lado que fijaron como base y luego se apoyan en la medición para comunicar las longitudes de los lados del triángulo. A pesar de lo anterior, considerar más ángulos que lados, sumado a una cantidad mínima de datos suficientes para la reproducción resultó sorprendente para esta primera aplicación de la situación.

Este tipo de mensajes, en los que se explicitaba que la figura a reproducir era un triángulo, no lograron minimizar las expresiones apoyadas en referencias espaciales.

Las características visuales de la figura modelo, principalmente aquellas relacionadas con la posición, son irrelevantes para el concepto geométrico, pero para los alumnos influyen fuertemente en su caracterización. La condición de que sus compañeros construyan una figura idéntica a partir del mensaje genera en varios alumnos la necesidad de que la figura reproducida quede construida, incluso, en la misma posición respecto a la hoja. En los ejemplos anteriores, los alumnos acuden a la posición por una concepción de congruencia de figuras que la incluye o bien porque las figuras están dibujadas en una hoja y no recortadas (esto es más evidente cuando está en juego una inversión en la superposición de las figuras).

*La posición como recurso auxiliar, subordinado a las propiedades geométricas de la figura.*

En algunos mensajes, los conocimientos que movilizaron los alumnos sobre las propiedades de los triángulos fueron funcionales y dejaron ver descripciones más económicas de la figura. La posición aparece, pero esta vez, como auxiliar para comunicar, paso a paso, cómo construir el triángulo.

Veamos algunos ejemplos:

<p><i>Ej 17.</i></p> <p>“Triángulo. Su base mide 9 cm. <b>En la mitad de la base su altura es de 5.7 cm</b> y el vértice izquierdo y derecho se unen en la cúspide”</p> <p><i>(exitoso)</i></p>	<p><i>Ej 18.</i></p> <p>“Es un triángulo. Su base mide 9.2 y su altura 5.7. Sus lados miden 7.3 cm. Es un triángulo isósceles”</p> <p><i>(exitoso)</i></p>
<p><i>Ej 19</i></p> <p>“Trazar un ángulo de 68° de izquierda a derecha. Trazar del vértice del ángulo una línea hacia la derecha de 10.4 cm y para la izquierda una de 8.3 cm. Unir los vértices con una línea de 10.4 cm.</p>	

En el mensaje 17 se utiliza implícitamente un teorema según el cual, si la altura y la mediana de un triángulo coinciden, el triángulo es isósceles. Suponemos que los autores lo utilizaron a partir de cierta intuición, pero, aun así, resultó ser una combinación de datos que, para este caso particular, aseguró la congruencia de los triángulos.

Los triángulos de los ejemplos 17 y 18 eran isósceles; este tipo de triángulos son prototípicos en la enseñanza escolar. El que sean casi los únicos que se utilizan, puede



ser un obstáculo para que los alumnos reconozcan que las alturas de un triángulo no siempre están situadas en su interior o pueden hacer que desistan de apoyarse en las alturas cuando estas salen del contorno cerrado de la figura (en cuyo caso es necesario prolongar los lados para hacer aparecer las rectas subyacentes) (Duval, 2016). De hecho, la noción de altura sólo se identificó en mensajes que describían triángulos isósceles o equiláteros. Pero, aun así, el uso de esta línea, invisible para los alumnos, movilizaba un conocimiento geométrico importante.

Por último, en el mensaje 19, el uso de la posición es un recurso que permite a los emisores comunicar el triángulo mediante instrucciones para su construcción; la posición no tuvo ninguna relevancia en la caracterización de la figura.

Los tres ejemplos anteriores dejan ver que existe una prioridad cognitiva de los conocimientos que tienen los alumnos de los triángulos, sobre las características visuales (asociadas a la posición) de la figura.

Así, vemos que continúa siendo un reto para la mayoría de los alumnos superar este anclaje en la posición al describir la figura, y para los maestros encontrar formas de propiciarlo.

### c. Validación empírica y puesta en común

En este apartado presento cómo se dieron el momento de la superposición de las figuras y la puesta en común. Me interesa analizar qué mensajes recuperaron los maestros para discutir públicamente, qué dificultades y recursos usaron para gestionar el análisis de las descripciones y finalmente, qué se logró acordar en cada grupo para la siguiente aplicación en relación con los propósitos didácticos de la situación.

Uno de los aspectos específicos que interesa rastrear es si en los grupos se amplió la noción de congruencia (ya sea porque los alumnos lo manifiesten, o los docentes) de manera que incluya los movimientos que se le efectuaron a las figuras para hacerlas coincidir, sobre todo, el de voltearla, cambiando la cara visible. Recordemos que, en la reunión con los maestros, identificamos las diferentes ideas que ellos tenían sobre la noción de congruencia; la conclusión aparentemente aceptada por todos fue que la congruencia era válida a pesar de los movimientos (rotación e inversión de las figuras).

i) Maestra Sara

### *Validación*

La superposición de las figuras estuvo a cargo de los alumnos emisores de los mensajes. Sara, que ya había registrado en el pizarrón los equipos, preguntó a cada pareja por el resultado. En caso de congruencia, sumaba dos puntos a la pareja:

Sara (M): (...) la superponen para observar si las figuras son exactamente iguales o si son idénticas. Ahorita voy a preguntar a quienes sí les coincidió y a quienes no; debe de quedar exactamente igual. Pregunto, ¿pareja A1 y B1 cómo les quedó?, ¿pareja A2...? (...)

El recordatorio que hizo la maestra sobre la igualdad entre las figuras resultaba pertinente para evitar que los alumnos validaran triángulos con la misma forma y distinto tamaño. El registro público de los resultados de la superposición le ayudaría a darse una idea general del estado de las descripciones y quizá de allí podía apoyarse para escoger los mensajes que pondría en discusión grupal. La puntuación positiva que asignó a los casos que alcanzaron la congruencia (que sostuvo en todas sus implementaciones) le ayudaba a mantener la idea de *juego* con los alumnos, pero al asignar los puntos por pareja y no por equipos dejaba la impresión que el logro de la congruencia era únicamente de los receptores del mensaje. Finalmente, Sara se informó sobre el resultado de la superposición, pero no se detuvo a revisar en qué condiciones los alumnos reconocieron esta congruencia y si hubo errores o no en sus conclusiones. Aquí, creemos que era importante que la maestra hubiera considerado para la discusión algún caso donde los alumnos rechazaran la congruencia por girar o voltear la figura, de manera que pudiera aclarar que en geometría se vale hacer este tipo de movimientos para que coincidan las figuras.

### *Puesta en común*

La discusión giró alrededor de los siguientes mensajes:

**Mensaje 1:** “Hacer una diagonal de 7.3 cm y hacer otra de 7.3 cm que se unan en forma de triángulo y la base de 9.2 cm (...)”

**Mensaje 2:** “Es un triángulo escaleno. Su base mide 17 cm. En el inicio de la línea [sic] del lado izquierdo trazar una línea [sic] de 6.5 cm de 45° de inclinación hacia la derecha.

Unir la línea [sic] de 45° con la base de la derecha”

**Mensaje 3:** “Es un triángulo escaleno.  
Lado menor: 7.2 cm  
Lado de base (de arriba): 13 cm  
Lado de base (de abajo): 14 cm”

Los tres mensajes se correspondían con reproducciones que no alcanzaron la congruencia, pese a contener datos suficientes. Sus descripciones dejaban ver tres de las características principales que detectamos previamente: i) Llamar erróneamente “diagonal” a los lados del triángulo que se ven inclinados cuando el otro lado está en posición horizontal, ii) apoyarse en expresiones asociadas a la posición y iii) funcionalizar sus conocimientos para hacer descripciones donde la posición tiene menor relevancia en la caracterización de la figura. Esta selección que hizo la maestra ofrecía de entrada condiciones favorables para destacar errores, la ambigüedad y exceso de las indicaciones, entre otros. A su vez, podía informarle de la importancia que seguían dando los alumnos a la posición de la figura.

Para la puesta en común Sara se concentró en los datos que aparecían en los mensajes, al parecer con la intención de destacar cuáles eran suficientes para construir el triángulo. Se apoyó en la estrategia *Maestra Intérprete*<sup>63</sup>, para sostener toda la discusión.

Para cada mensaje, solicitó a los alumnos que lo leyeran en voz alta mientras ella seguía las instrucciones en el pizarrón. Como vimos en las situaciones anteriores, esta estrategia le permitía hacer evidente la ambigüedad de la información, datos faltantes y en algunos casos, datos que sobran para construir la figura (llamados por ella, en aras de no desacreditarlos, “datos para corroborar”). Pero, en esta ocasión, el interés por los datos que hacían posible la reproducción idéntica limitó su gestión llevándola a destacar errores y hacer correcciones y aclaraciones de una manera muy inducida, e incluso, permitir una noción de congruencia incorrecta en la discusión.

Veamos esto más de cerca:

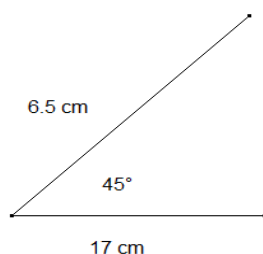
- El uso del término “diagonal” (Mensaje 1). Con este mensaje, Sara dibujó el triángulo. Luego, cuestionó el término *diagonal* y en su lugar, corrigió por *línea inclinada*. La

---

<sup>63</sup> Recordemos que la esencia de esta estrategia era que los maestros se asumían como intérpretes de los mensajes y dibujaban la figura en el pizarrón.

pregunta con la que partió fue “¿qué está mal?”, de allí, su inducción para resaltar algo que por sí mismos los alumnos no reconocían como un error. Los datos que destacó con este mensaje fueron LLL, escribió “3 lados” junto al dibujo y continuó con el siguiente mensaje. Sara no reparó en el método de construcción del triángulo que usaron los alumnos; como vimos, ninguno de ellos usó la regla y el compás. Quizá, en este punto, convenía recordar a los alumnos cómo se construye un triángulo con este método para desplazar el ensayo y error. Esta ausencia tiene su contraparte en la reunión de planeación, en la que tampoco se previó la necesidad de abordar la construcción de triángulos con compás.

- Induce la suficiencia de los datos: LAL (Mensaje 2): El mensaje menciona tres lados y un ángulo, pero sólo da las medidas de dos de los tres lados y del ángulo. Sara siguió las indicaciones, sin cuestionar el vocabulario ni analizar si era ambigua la información. El dibujo que trazó en el pizarrón fue el siguiente:



Con esto, destacó que era *suficiente* para obtener el triángulo y que el dato sobre el tercer lado no hacía falta, excepto para “corroborar”. Junto al dibujo escribió “lado - ángulo- lado”. Esta idea de datos para corroborar era una forma de la maestra de conceder que el mensaje no estaba mal, pero que estaría mejor si sólo se daban los datos mínimos para construir el triángulo. En la clase, no se había instalado la consigna de “ahora se trata de dar la menor información posible”, pero la gestión de la maestra sí parecía ir en esta dirección. Esto debió ser desconcertante para los alumnos, quienes habrán tenido que ir infiriendo sobre la marcha el nuevo juego. Haber enfatizado más, en la reunión colectiva, los distintos objetivos que se tenían con la situación podrían haber ayudado a evitar las dificultades que vemos aquí.

Nos preguntamos, ¿para los alumnos quedó claro que con tres datos y, además, con esos tres datos, el triángulo resultaba idéntico? Creemos que no. La idea que ellos

tenían era que entre más datos se daban en el mensaje mayor era la probabilidad de obtener la congruencia entre las figuras<sup>64</sup>. Para ellos “cerrar” el triángulo resultaba necesario. Para convencer a los alumnos de la suficiencia había que generar acciones adicionales, por ejemplo, que todos trazaran los dos lados y el ángulo y se dieran cuenta que el tercer lado quedaba determinado y coincidía con el tercer lado del triángulo original. Los alumnos no estaban haciendo la tarea de reducir los datos al mínimo porque nunca quedó claro que esa fuera la tarea.

Cierta inducción por parte de la maestra se observa en el hecho de que, con el mensaje anterior, que sólo tenía tres datos, no cuestionó si sobraba alguno; pero en este caso sí lo hizo.

- Refuerza una idea de congruencia donde la posición importa (mensaje 3): Con este último mensaje, nuevamente la maestra sólo se concentra en los datos que permitieron alcanzar la congruencia: tres lados. Mientras Sara siguió las instrucciones, no cuestionó por las expresiones “de arriba”, “de abajo”:

Alo: lado de la base de abajo 14 cm [lee el mensaje]

Sara (M): [dibuja una línea horizontal en el pizarrón y escribe 14 cm] ¿y luego?

Alo: otro lado de 13 cm

Sara (M): ¿y luego?

Alo: otro de 7.2

Sara (M): entonces, 14, 13 y 7.2. Pregunto, ¿lo pudieron construir?

Alo: sí, pero al revés

Sara (M): Ah ok, entonces ¿hizo falta indicar algo cierto? Pero ¿se pudo construir?

Alo: sí

Sara (M): ¿qué le hubieras modificado?

Alo: darle una referencia

Sara (M): por ejemplo, si este lado [señala el lado que estaba a la izquierda] era el que medía 7.2 o era el que medía 13, con eso hubiéramos solucionado el problema, ¿están de acuerdo?

Alo: sí

---

<sup>64</sup> Como vimos en el anterior apartado de análisis de producciones.

La ambigüedad de estas expresiones (“de arriba”, “de abajo”) generó que la figura reproducida no quedara en la misma posición respecto a los bordes de la hoja de la figura original; de ahí, que el alumno aclarara que quedó “al revés”. Esta idea donde la posición importa para la congruencia fue avalada por la maestra al aceptar que incluir referencias espaciales podía evitar que las reproducciones quedaran giradas o invertidas.

Se había filtrado en la clase un error de naturaleza geométrica que convenía retomar en las discusiones del colectivo. En la reunión colectiva, el observador de la clase lo hizo notar.

La discusión terminó con este mensaje. Sara dejó registrados en el pizarrón los dibujos y datos que surgieron (LLL y LAL). Con estas colecciones de datos, Sara sostenía un proceso de institucionalización que le permitiría concluir, más adelante, en los criterios de congruencia. Seguido a esto, instauró la consigna para la segunda aplicación de la situación.

ii) Maestro Ignacio

#### *Validación*

Para la superposición, Ignacio recordó que las figuras debían ser idénticas. Mientras los alumnos comparaban los triángulos, recorrió el salón ayudando a algunas parejas a hacer la superposición y determinar si eran congruentes o no. En un caso aclaró que no importaba que la figura quedara “rotada”. Luego, solicitó que se pusieran de pie los alumnos que lograron la congruencia sin cuestionar los resultados.

A diferencia de la situación anterior, esta vez para Ignacio la congruencia era independiente de los movimientos que se efectuaran a las figuras. Con la pareja de alumnos logró aclarar esta idea, pero no lo hizo a nivel general.

#### *Puesta en común*

De las parejas de alumnos que afirmaron haber logrado la congruencia, Ignacio seleccionó tres para que compartieran el mensaje con el que habían realizado la construcción de la figura.

Para la plenaria, solicitó a los alumnos que leyeran en voz alta las indicaciones del mensaje, mientras las escuchaba atentamente para identificar los datos que habían

usado para la reproducción. Olvidó poner a la vista de todos la figura original y reproducida y no realizó ningún dibujo en el pizarrón para ninguno de los tres mensajes; sólo registro los datos.

La estrategia de escuchar y recuperar sólo las colecciones de datos que le permitirían concluir en los criterios, le implicó una posición directiva en la discusión en la que los alumnos tuvieron poca voz para expresar lo que no entendieron. Veamos:

- Corrige un error en el uso de vocabulario y recupera la colección de datos LLL: Con el primer mensaje, Ignacio se dio cuenta de que los alumnos nuevamente usaron el término *diagonal* para referir a los lados inclinados de la figura:

Ignacio (M): (...) ¿qué indicaciones diste?, por favor, Jael

Jael [alumno]: *la primera línea la haces en diagonal que mida 3.2 centímetros* [lee el mensaje]

Ignacio (M): sí [sólo escucha]

Jael: *después, abajo de esa línea, la base, que mida 7 cm y luego una diagonal que mida 6 cm* [continúa leyendo el mensaje]

Ignacio (M): A ver, ¿por qué usas la palabra diagonal si lo que estas describiendo es un lado? ... ¿qué dijimos acerca de las diagonales? ... Jael, hasta donde yo entiendo, lo que quisiste fue dar los tres lados y diste la medida de los tres lados y con esa información fue suficiente. Lo que sí quiero que quede claro es que no tienen por qué definir un lado con la palabra diagonal. Es lado nada más, ¿con qué lo hubieran mencionado?, *un lado de tal medida*...era suficiente para sustituir la palabra diagonal. Y lo correcto sería lado. Entonces, tú diste los tres lados; Aquetzali, ¿él lo logró? [le pregunta a una alumna de su pareja correspondiente en el juego]

Aquetzali [alumna]: no [Ignacio escribe en el pizarrón: "1) LLL"]

Ignacio (M): No. Vamos con ustedes [continúa con el siguiente mensaje]

El interés del maestro estaba en identificar cuáles datos estaban involucrados, de ahí, que en su intervención destacara que usaron los tres lados y que, además, habían resultado *suficientes* para construir la figura.

Por otra parte, podemos ver que el maestro ignoró la ambigüedad de las indicaciones; en esta descripción apenas se podía sospechar que se trataba de un triángulo.

Se hacía evidente que, a pesar del error, había implícitamente un significado compartido del término "diagonal" entre los alumnos (que se referían a lados inclinados de la figura) que les permitía comunicarse correctamente.

Es claro que la idea de suficiencia del maestro respondía a un mínimo de datos que garantizaban que el triángulo que se obtenía era idéntico; pero ¿qué idea tenían los alumnos? Quizá para ellos la suficiencia sólo daba cuenta de la construcción de un triángulo y no de su congruencia. Notemos que, en el registro anterior, Aquetzali aclaró que estas figuras no fueron idénticas<sup>65</sup>. Ignacio no reparó en esto y continuó con otro mensaje.

- Recupera la colección de datos ALA: Con el segundo mensaje, Ignacio destacó que los datos usados para la reproducción fueron dos ángulos y un lado:

Elías [alumno]: *Traza una línea horizontal de 7 centímetros* [lee el mensaje]

Ignacio (M): (...) ¿luego qué dice?

Elías: *después traza un ángulo de 60°*

Ignacio (M): ¿un ángulo de cuánto?

Elías: de 60°

Ignacio (M): luego, la siguiente indicación el dio un ángulo [refuerza la información con todo el grupo]; ¿y finalmente? [pregunta a Elías]

Elías: *traza uno de 27°*

Ignacio (M): ¿le diste dos ángulos?

Elías: sí

Ignacio (M): ok [escribe en el pizarrón, debajo de los datos que ya había escrito con el primer mensaje: "2) LAA"]

Nuevamente, el interés del maestro estuvo en los datos. Con este segundo registro que hizo en el pizarrón, Ignacio construía una lista de colecciones de datos que se correspondían con los criterios de congruencia de triángulos.

- Induce la suficiencia de los datos: Con el último mensaje, Ignacio identificó cuatro datos: Tres lados y un ángulo, por lo que su gestión se concentró en hacer ver a los alumnos que sobraba un dato. Veamos:

Sebastián [alumno]: *Primero traza una línea horizontal de 7 cm* [lee el mensaje]

Ignacio (M): el lado, ajá. ¿qué más?

Sebastián: *luego, una línea de 3,2 cm que tenga 60°*

Ignacio (M): ahí qué...levante la mano el que sepa ahí qué me está dando [pregunta al grupo]

Alo<sub>1</sub>: un ángulo

Ignacio (M): un ángulo. Pero, no nada más un ángulo

---

<sup>65</sup> Aunque Ignacio creía que sí; pues esta pareja estuvo entre las que se levantó cuando indagó por los casos que resultaron congruentes.



Alo<sub>2</sub>: y una medida

Ignacio (M): ¿y finalmente? [pregunta a Sebastián por la última indicación del mensaje]

Sebastián: *una línea de 6 cm*

Ignacio (M): sí es cierto que me dio un ángulo, pero ¿qué más me dio? [nadie responde] ... Sí estarán de acuerdo que en este caso tu compañero ocupó dos indicaciones. La primera nos dijo el lado, en la segunda nos dijo el ángulo y el lado, y en la tercera nos dio el lado. **¿a cuál se parece de las dos anteriores** Emiliano? [las dos colecciones que ya tenía registradas en el pizarrón]

Emiliano [alumno]: a la dos

Ignacio (M): yo creo que no...**hay algo que está sobrando ahí**, ¿quién me dice qué sobró?

Emiliano: el ángulo

Alo<sub>3</sub>: la medida

Ignacio (M): ¿nos sobró qué Emiliano?

Emiliano: el ángulo

Ignacio (M): ¿por qué Emiliano?

Emiliano: pues porque ...porque sí... ¡no sé! [ríe]

Ignacio (M): A ver Aquetzali...

Aquetzali: pues ya había dado la medida y el ángulo [parece que con "medida" refiere a los lados]

Ignacio (M): ¿y es necesario?

Aquetzali: no

Ignacio (M): ¿era suficiente con qué?

Aquetzali: con la medida

La intención de Ignacio era acomodar los cuatro datos del mensaje a la opción 1 que tenía registrada en el pizarrón: LLL; de ahí que indujera en los alumnos la idea de que sobraba el ángulo. Vemos que tanto Sara como Ignacio, cuando encontraron colecciones mayores de tres datos, indujeron a los alumnos a pensar que sobraba un dato.

Por supuesto, no es cuestionable que concentren sus esfuerzos en buscar las colecciones de datos que les permitirían institucionalizar los criterios; la dificultad es que no se brindaron condiciones favorables para que los alumnos participaran de la discusión, y en cambio se planteó una dinámica –tan típica en clases de matemáticas– en la que se hacen preguntas incomprensibles para los alumnos, ante las que no les queda más que ir adivinando. De hecho, como ya dijimos, no se planteó la tarea de encontrar datos mínimos. En este caso, por ejemplo, quizá podrían ser útiles preguntas que interpelaran directamente a los alumnos: *¿será que lo podemos hacer con menos datos?, ¿qué creen ustedes?, Busquen, si es posible, hacer el triángulo con menos datos y ya revisamos qué encontraron.* A diferencia de lo que se propone en la fase anterior

de elaboración e interpretación de un mensaje, esto implicaba a todos los alumnos con la construcción de un mismo triángulo; lo que podía ser una ventaja, pues ya sea que quitaran un lado o un ángulo, los triángulos resultarían congruentes y tendría muchos ejemplos para hacer una superposición que permitiera convencer los alumnos que con LLL o ALA, sí podía obtenerse un triángulo idéntico.

- Institucionalización un criterio de congruencia: Al finalizar la puesta en común, Ignacio oficializó el criterio LLL:

Ignacio (M): Entonces, ¿quién me dice qué podemos concluir acerca de trazar un triángulo idéntico?, ¿qué es necesario para poder hacerlo?, ¿qué información necesitamos que sea **necesaria y suficiente**?

Alo<sub>1</sub>: las medidas

Ignacio (M): ¿las medidas de qué?

Alo<sub>1</sub>: ¿de los lados? [en tono inseguro]

Ignacio (M): de los tres lados. Entonces, esto que está aquí [lo que tiene anotado en el pizarrón] por favor, el número 1 [LLL], lo van a anotar en su cuaderno y van a anotar... ¿quién hace el enunciado? ... Para trazar **un triángulo idéntico** se necesita...

Alo<sub>1</sub>: las tres medidas de los lados

Ignacio (M): las tres medidas de los lados; y así era suficiente para lograrlo [pasan algunos segundos].

La idea de suficiencia que sostuvo el maestro en toda la clase no parecía clara para los alumnos; ¿qué podían entender de los términos *necesario y suficiente*? Al parecer sabían que, si el maestro había anotado esos datos en el pizarrón, eran importantes para la conclusión; la respuesta del alumno parecía ser un intento de llenar la expectativa del maestro. Se evidenció que este episodio de institucionalización se vio forzado y sin mucho sentido para los alumnos. ¿Cómo pasar de la validez de estos datos para el caso del triángulo analizado, a una cuestión más general, donde son válidos para cualquiera que sea el triángulo? Convencer a los alumnos de esto, también necesitaba de acciones adicionales por parte de los maestros. Por ejemplo, proponer medidas de tres lados y pedir a todos los alumnos que construyeran el triángulo de modo que se analizara si todos salían iguales o alguno salía diferente (simultáneamente, podrían aprender a construir un triángulo dados sus tres lados). Aunque la validación sería empírica, se volvía una herramienta fundamental para promover en los alumnos una idea de *generalización* que ayudaba a la construcción del criterio de congruencia.

Insistimos en que el problema que tuvieron Ignacio y Sara radicó en que ninguno transmitió una consigna donde la meta fuera el “mínimo de datos”, pero en su gestión de la puesta en común parecía que sí lo hubieran hecho; como consecuencia, tuvieron que inducir todas las conclusiones de la discusión. Los alumnos se quedaron atrás de la posibilidad de participar en la construcción de estas conclusiones.

Cabe mencionar que este tipo de dificultades que estaban teniendo los maestros para descartar colecciones que excedían un número de datos suficientes para la reproducción y recuperar aquellas con las que formalizarían un criterio de congruencia; no se previeron en la reunión de planeación del colectivo.

iii) Maestra Liliana

#### *Validación*

En la clase que se observó, Liliana inició con la puesta en común. Pegó en el pizarrón el cartel con ocho mensajes y sus respectivas figuras original y reproducida. Desconocemos si en la clase anterior se dio un momento para hacer la superposición de las figuras y determinar la congruencia<sup>66</sup>; pero en esta clase, al terminar de analizar con el grupo cada mensaje, Liliana hacía la superposición de las figuras (despegando la figura original y superponiéndola a la figura reproducida que estaba pegada en el cartel) o solicitaba que algún alumno pasara al frente a hacer la superposición. Más adelante profundizaré en esto.

#### *Puesta en común*

De los ocho mensajes que tenía el cartel, Liliana analizó seis. Para cada caso, leía las indicaciones del mensaje o pedía a los alumnos emisores que lo hicieran. Su estrategia principal fue asumirse como *Maestra Intérprete*, trazando en el pizarrón lo que se pedía en cada indicación. Con esto movilizó varios recursos de intervención que le permitieron destacar información ambigua, errores en el uso de término geométricos (como usar *diagonal* para referir a un lado del triángulo) y, también, analizar si con los datos que se incluyeron en los mensajes era posible construir el triángulo.

Veamos algunos ejemplos de los recursos que utilizó:

---

<sup>66</sup> Recordemos que Liliana dividió la aplicación de las situaciones en dos clases; la primera donde los alumnos redactaban los mensajes y construían la figura y, la segunda, dedicada sólo para la puesta en común.

- Hace preguntas para evidenciar la ambigüedad: Con el primer mensaje, Liliana leyó en voz alta cada una de las instrucciones. Como advirtió su ambigüedad, empezó a formular preguntas a los alumnos para que se fijaran en fragmentos del mensaje que no se entendían y que pretendía aclarar. Veamos:

Liliana (M): (...) Vamos a pedir que nos expliquen qué problemas tuvieron [los receptores del mensaje]. Lo leo: *Trazar un ángulo de  $68^\circ$  de izquierda a derecha, trazar del vértice del ángulo una línea hacia la derecha de 10.4 y para la izquierda una de 8.3. ¿Si se entiende?*

Alos: sí

Liliana (M): **¿qué le falta?**

Regina [alumna]: es que le falta que se explique mejor porque no entendimos muy bien [alumna receptora del mensaje]

Liliana (M): ok. El primer punto dice: *trazar un ángulo de izquierda a derecha. Trazar del vértice del ángulo una línea hacia la derecha*; imagino que así [traza una línea horizontal en el pizarrón]. A ver muchachos, **para trazar un ángulo ¿qué necesitamos?**

Alo<sub>1</sub>: un transportador

Liliana (M): ajá y **¿qué más?**

Alo<sub>2</sub>: una línea

Liliana (M): hay que trazar una línea; entonces primero esta línea hay que trazarla [la que había trazado en horizontal], ¿de acuerdo? y ahora sí empezamos a medir nuestro ángulo con el transportador. Entonces aquí **¿qué le faltó Regina?**

Regina: que se explicara mejor

Liliana (M): sí, que nos diera más detalles

Alo<sub>2</sub>: y no dice cuanto va a medir la línea

Liliana (M): ajá, hasta después me pide que haga la línea hacia la derecha de 10.4. O sea, tengo un ángulo, pero si no tengo la base [del ángulo], cómo voy a hacer [para construirlo]. Entonces, **aquí nos faltó más explicar**. Y checamos la figura, ¿cómo quedó? a ver [Liliana pone la figura original y reproducida una al lado de la otra. Visualmente era evidente la diferencia en tamaños de las dos figuras]. Este no se logró.

En efecto, la descripción era ambigua por las expresiones apoyadas en la posición, incluso, era difícil saber que se trataba de un triángulo. El interés de Liliana se concentró en el ángulo. Con sus preguntas, logró destacar la ausencia de *la línea (de apoyo)* para construirlo. El problema para la maestra era que esta línea aparecía en el mensaje (línea de 10.4 cm), después de solicitar la construcción del ángulo.

A Liliana le importaba explicitar esa ambigüedad por el método que se había validado previamente para construir ángulos (con la situación de paralelogramos); éste partía de un segmento (usualmente en posición horizontal y con longitud arbitraria o de alguna medida) para ubicar el ángulo en uno de los vértices del segmento (con ayuda del transportador). Las preguntas que hizo la maestra, si bien indujeron a los alumnos hacia lo que ella le interesaba evidenciar (al recuperar o ignorar participaciones de los alumnos para hacer avanzar la clase), le permitieron involucrarlos y sostenerlos en la discusión.

Una última cosa que podemos destacar es la validación empírica (por comparación visual) que hizo Liliana tras analizar el mensaje. Parecía establecerse una relación coherente entre la ambigüedad analizada y la no congruencia entre las figuras. Es probable que no haya usado la superposición porque la diferencia entre las medidas de los lados saltaba a la vista.

Nótese que con este mensaje no se interesó por los datos; quizá porque el mensaje involucraba tres datos. En todo caso, esta gestión, alejada de la idea de un *mínimo de datos*, respondía a lo solicitado en la consigna.

- Recupera las dudas de los alumnos para aclarar nociones geométricas: Con uno de los mensajes analizados, ni la maestra ni los alumnos tuvieron dificultades para construir el triángulo. La descripción, aunque no fue ambigua, se caracterizó por sus expresiones apoyadas en la posición; pero Liliana no se detuvo en este aspecto. Cuando preguntó a los receptores si habían tenido alguna dificultad, se dio una interacción que destacó la idea de congruencia que manejan los alumnos y que, como vemos en este caso, generaba que un caso exitoso fuera valorado como fracaso. Veamos:

Liliana (M): (...) ¿quién construyó esa imagen?

Alos [receptores del mensaje]

Liliana (M): ¿tuvieron algún problema?

Alos [receptores]: **no, es que nosotros lo hicimos al revés**

Liliana (M): a ver

Alos [receptores]: es que nosotros en lugar de hacerla como la tienen ellos, la hicimos al revés

Liliana (M): Ahh, gracias. A ver, vamos a checar... ¿ustedes creen que se parece o no? [superpone las figuras (las del cartel que están en el pizarrón)] ¿qué ven?

Alos [receptores]: que sí se parecen [las figuras coincidían]

Liliana (M): lo que pasa es que no importa cómo queda esto [mueve el triángulo y vuelve a mostrar que coinciden]. ¡Sí queda! **No importa la posición que nos dé, no importa, a la hora de colocarla debe de coincidir.**

Esta gestión de Liliana es destacable, por su interés de conocer las dificultades de la voz de los alumnos y por aclarar, en un episodio en el que se hacía necesario (y, por tanto, tendría sentido para los alumnos), un error que se había filtrado con la situación de paralelogramos. También podemos ver la conveniencia que tuvo para la superposición que las figuras modelo estuvieran recortadas.

- Induce la suficiencia de los datos: Con el mismo mensaje del episodio anterior y tras aclarar la congruencia, Liliana recuperó los datos con los que se había construido el triángulo:

Liliana (M): entonces ellos utilizaron... ¿partieron de qué?  
 Alo<sub>1</sub>: el transportador  
 Liliana (M): no, ¿qué datos? ... ¿lados, ángulos?  
 Alos: ángulos  
 Liliana (M): primero ¿qué nos dio?  
 Alo<sub>1</sub>: ángulo  
 Alo<sub>2</sub>: una línea  
 Alo<sub>3</sub>: un lado  
 Liliana (M): Nos dio un lado, primero nos enunció un lado [escribe "lado" en el pizarrón]; ¿qué más nos dio?  
 Alo<sub>1</sub>: un ángulo  
 Liliana (M): ángulo [escribe "+ ángulo" en el pizarrón]. ¿Después del ángulo? ¿cómo finalizó?  
 Alos: [no contestan]  
 Liliana (M): primer paso, el lado; después fue el ángulo... [revisa los datos del mensaje] y por último...nos pidió que trazáramos un lado que vale 7 cm....entonces nos quedó (...) más "lado" [escribe "+ lado" en el pizarrón. Finalmente quedó: "lado + ángulo + lado"]. Con esto, ella (...) aseguró que estas dos distancias que faltaba por unir deben de valer 8.5. Aseguró que el tercer lado es igual a 8.5 [este dato también aparecía en el mensaje]. **Pero básicamente, ella partió con esto** [señala los datos que había anotado en el pizarrón].

Con sus preguntas, Liliana llevó a los alumnos a fijarse en cada dato del mensaje en el orden que iban apareciendo (L-A-L-L). Finalmente, concluyó, sin la participación de los alumnos, que la colección de datos que resultó suficiente fue LAL.

- Institucionalizó un criterio de congruencia: Al finalizar la puesta en común, oficializó el criterio LAL y recordó que las diagonales "no se deben confundir con una línea inclinada" (esto lo aclaró con uno de los mensajes analizados). Para esto, solicitó a los alumnos que anotaran en su cuaderno lo que les iba a dictar. Este episodio de institucionalización, si bien se relacionaba con las discusiones de la puesta en común, no involucró a los alumnos.

### 3.2.2 Segunda aplicación

Para esta segunda y última aplicación cuento con datos de todas las fases de la situación implementada por Sara y la consigna de Ignacio.

#### a. La consigna

Me interesa ver qué retomaron y qué cambiaron los maestros Sara e Ignacio en la formulación de la consigna, en comparación con la aplicación anterior, y qué rumbo dieron a la búsqueda de los criterios de congruencia<sup>67</sup>.

La consigna del maestro Ignacio fue ambigua. Generó muchas dudas en los alumnos, quienes manifestaron su confusión con preguntas sobre lo que era válido incluir en el mensaje:

Ignacio (M): Bueno, les voy a dar otro triángulo (...) y vamos a hacer exactamente lo mismo (...). La indicación ahora es la siguiente: **No pueden brindar ninguna medida de los lados, ningún lado puede darles a sus compañeros.** Comiencen a dar las indicaciones...no le pueden decir cuánto mide los lados...

Alo<sub>1</sub>: ¿nada?

Ignacio (M): yo nada más dije los lados

Alo<sub>2</sub>: ¿puedo decir una línea horizontal?

Ignacio (M): sí, eso sí se permite

[Ignacio camina por el salón. No se escucha lo que preguntan algunos alumnos]

Ignacio (M): sus compañeros me hacen una pregunta que considero que es importante, y me dicen que, si **no importa que la figura este rotada y no, no importa que tenga una rotación** [pasan algunos segundos] Repito, ninguna medida de ningún lado, cualquier otra medida sí es posible

Alo<sub>3</sub>: ¿no podemos poner números?

Ignacio (M): sí, números sí, **lo que no quiero es que proporcionen la medida de ningún lado**

Alo<sub>2</sub>: un ángulo

Ignacio (M): el me pregunta que, si puede proporcionar la medida de un ángulo y sí, de los lados no, pero de los ángulos sí

Alo<sub>1</sub>: o sea, los lados no podemos decir cuánto mide... ¿en cuadros sí? [el alumno propone una unidad de medida]

Ignacio (M): no porque eso es dar la medida, todos sabemos que los cuadros miden 0.5. Además, estarías dando una unidad.

En las discusiones de la puesta en común, Ignacio registró en el pizarrón las siglas de las colecciones de datos: LLL y LAA. Posiblemente su interés se orientaría hacia el criterio LAL; sin embargo, al restringir el uso de los lados sólo dejaba una opción, la combinación AAA<sup>68</sup>. Creemos que Ignacio intentaba movilizar un recurso que se propuso en la reunión de planeación; este era usar una combinación de datos que sirviera como contraejemplo para convencer a los alumnos de que podían garantizar la

---

<sup>67</sup> Recordemos que las decisiones relativas a las figuras y los instrumentos que estuvieron disponibles para el desarrollo de la tarea se analizaron en la consigna de la primera aplicación.

<sup>68</sup> Otra posibilidad podía ser con las *alturas*; pero la probabilidad era mínima, ya que estas no aparecieron en la situación de paralelogramos.

forma, pero no la congruencia entre los triángulos. No se esperaba que este recurso fuera inducido por el maestro, sino que esto ocurriera por iniciativa de los alumnos.

Por último, conviene destacar que entre las intervenciones que hizo Ignacio, aclaró que sí era válido rotar la figura. Esta información era nueva para el grupo de alumnos, ya que en la primera aplicación no se hizo esta precisión.

La consigna de Sara fue la siguiente:

Sara(M): Ahora te voy a dar otra figura y vas a intentar darme **el mínimo de datos posibles** para que la figura se pueda construir, pero si en la primera figura tú me diste, por ejemplo, la medida de ... ¿qué es esto? [señala del pizarrón el caso donde se dieron los tres lados]

Alos: los lados

Sara (M): ajá, ahora vas a intentar buscar otros datos que no sean los mismos. Pon atención, **intenta buscar otros datos que no sean los mismos que los que están en el pizarrón**, pero va a ser posible construir la figura que te den, idéntica. Los datos deben ser **distintos a los que están en el pizarrón**, ¿hasta ahí queda claro?, debe de ser el mínimo de datos y distintos a los que están en el pizarrón, **organizados de diferente manera** a los que están en el pizarrón.

Con la condición de un mínimo de datos, Sara buscaba reducir la cantidad de información que podía utilizarse para describir la figura; una idea que implícitamente había orientado su gestión de la puesta en común anterior. Esta restricción abonaría a la búsqueda de las condiciones que se requerían para llegar a los criterios. Habría que considerar que, para los alumnos, ese *mínimo* de datos no necesariamente implicaba tres datos. Así, para la puesta en común, Sara tendría que movilizar estrategias de intervención para los casos donde la información no fuera suficiente para la reproducción idéntica (1 o 2 datos) y para aquellos que la excedieran (4, 5 o 6 datos). Incluso, para colecciones mínimas de datos que no implicaban un criterio de congruencia: AAA y LLA.

Otra restricción de la consigna fue no usar las combinaciones LLL y LAL que se habían discutido en la puesta en común anterior, pero podría resultar prematura considerando que estas combinaciones aún no se habían institucionalizado en la clase. Al igual que el maestro Ignacio, Sara buscaba la última colección de datos (ALA) que daría lugar al tercer criterio de congruencia. Orientar la acción de los alumnos hacia el objetivo que se tenía con la situación implicaba un fuerte trabajo por parte de los dos maestros en la puesta en común. Además, era una gestión muy costosa en tiempo.

b. Las producciones de los alumnos



En este apartado analizo 19 mensajes que produjeron los alumnos de Sara. Primero me referiré a la suficiencia y no suficiencia, luego, presentaré qué datos usaron los alumnos para comunicar el triángulo tras la consigna dada. Por último, una breve descripción de las características geométricas de las descripciones.

En relación con la suficiencia, encontramos que 7 de 19 mensajes produjeron la congruencia. En general, la posición sigue importando para describir la figura (lo cual era previsible, pues no ha sido objeto de cuestionamiento); y con esto, las descripciones se hacían más ambiguas.

La cantidad de datos que se privilegiaron fueron:

<i>Cantidad de datos considerados</i>	<i>Nº mensajes /cantidad de datos</i>	<i>Colección de datos presentados</i>
<b>3</b>	<b>10</b>	2 lados – 1 ángulo 3 lados 2 lados – 1 altura
4	5	3 lados – 1 altura 3 lados – 1 ángulo
2	3	2 lados 1 lado – 1 altura
5	1	3 lados – 2 ángulos

Tabla 12: Datos considerados por los alumnos para describir el triángulo. Situación 3, aplicación 2. Fuente propia

Al igual que en la aplicación 1, los alumnos consideraron tres o cuatro datos para describir la figura; se privilegiaron los lados del triángulo; pero se mantuvo una presencia significativa de ángulos y alturas (quizá ahora reforzada por la restricción de no usar LLL). Cabe señalar que el dato del ángulo no resultó funcional porque sus medidas difieren de las originales. Parece que a los alumnos se les dificultaba el manejo del transportador.

Considerando la doble restricción de la consigna (el mínimo de datos y no usar las combinaciones LLL y LAL), podemos ver que los alumnos movilizaron implícitamente una idea de suficiencia: con menos de tres datos no era suficiente para la reproducción idéntica, y a su vez, más de cuatro datos resultaban innecesarios; esto constituyó una buena respuesta a la restricción del mínimo de datos. El reto de la maestra sería convencer a los alumnos que se podía lograr un triángulo idéntico con menos datos de los que consideraron en algunos de los mensajes.

La restricción de no usar LLL y LAL no pareció ser tan clara para los alumnos, ya que apareció en un buen número de mensajes. Pero, en lugar de ser una dificultad para la maestra, le ayudaría a ratificar que, aunque el triángulo es distinto (al usado en la primera aplicación), con estos datos era posible la congruencia con el original. Recordemos que Sara aún no había validado ninguna de las combinaciones de datos que había logrado en la primera aplicación.

A continuación, presento algunos ejemplos de suficiencia y uno de no suficiencia (respecto al objetivo de la congruencia):

- Suficientes:

Ej. 20: "Es un triángulo escaleno. Su base es de 9.2 y sus dos lados miden 7.4 y la altura es de 5.7" [Datos: LLLH<sup>69</sup>]

Ej. 21: "Tiene una base de 13.3 cm; 4.7 cm de altura. El lado izquierdo mide 5.4 y el derecho 11.6. La figura es un triángulo escaleno" [Datos: LLLH]

En estos dos ejemplos podemos ver que la suficiencia se sustenta por los datos de los tres lados. Si bien con referencias innecesarias (a la altura en ambos mensajes y a la posición en el de la derecha), los emisores lograron comunicar las condiciones para reproducir el triángulo. Hay información que, en un sentido estricto, resultaba ambigua y errónea, pero, aun así, se logró el objetivo. Por ejemplo, el triángulo del mensaje 20 no era escaleno; y el dato de la altura de los ejemplos 20 y 21 dejan la impresión de que los alumnos sólo reconocían una altura del triángulo: la correspondiente al lado que fijaban como base. En el caso del triángulo isósceles (ej.20) se aseguraba que la altura respecto a la base coincidía con su punto medio; este tipo de triángulo es prototípico y no tiene mayor dificultad para los alumnos. Pero, en el caso del triángulo escaleno (ej.21), el dato de la altura resultaba sorprendente, ya que es correcta la longitud de la altura respecto al lado que indicaron como base. Lograr este dato implicaba movilizar no sólo la noción de altura, sino un procedimiento para garantizar la perpendicularidad.

- No suficientes

Ej. 22: "Hacer una línea inclinada de 5,4 cm de 85°. En el extremo

Ej. 23: "Figura: Triángulo isósceles  
Base: 9.9 cm

---

<sup>69</sup> Altura.

derecho de la base unir desde el extremo izquierdo de la base hacia el extremo de la parte de arriba de la diagonal de 5.4 cm. Es triángulo escaleno” [Datos: 1 lado – 1 ángulo]

Altura: 10.3 cm

1. Traza la base
2. Del lado izquierdo abre un ángulo de  $128^\circ$  hacia la derecha. Trazarás una diagonal y dicha diagonal medirá 13.1 cm
3. Une ambos puntos

Nota: la última unión que realizaste deberá medir 10.5 cm” [Datos: 3 lados – 1 ángulo – 1 altura]

La no suficiencia, como se puede ver en los ejemplos no se debió necesariamente a la escasez o exceso de datos. En el ejemplo 22, las indicaciones son ambiguas, la medida del ángulo no corresponde con ninguna del original y, además, con dos datos no se podía asegurar la congruencia. En el ejemplo 23, el triángulo no es isósceles y también, la medida del ángulo está mal tomada. En los dos casos, persiste el uso del término *diagonal* para referir a lados inclinados del triángulo (en este punto convendría que los maestros pudieran aclarar que un triángulo, cualquiera que sea, no tiene líneas diagonales).

En relación con las características geométricas de las descripciones, encontramos nuevamente dos maneras de caracterizar al triángulo que se dieron para la primera aplicación. La primera, donde la posición de la figura es a lo que se recurre de manera preponderante para caracterizarla (ej. 22 y 23) y, la segunda, una mirada que moviliza conocimientos geométricos (ej. 20 y 21) donde importa menos la posición. Este tipo de descripciones en la mayoría de los casos, logran ser funcionales para la reproducción idéntica.

### c. La puesta en común

*Durante el trabajo de los alumnos:* Mientras redactaban el mensaje y construían la figura, Sara se acercó a las parejas para informarse de su trabajo. Al parecer notó que, en algunos casos, se estaban apoyando en las combinaciones de datos que tenía en el pizarrón; por lo que hizo intervenciones que reforzaron la restricción de la consigna:

Sara (M): Si no encontramos datos diferentes a los del pizarrón entonces construimos una figura más...sí se puede, sí se puede.

Una dificultad que tuvieron los alumnos, que quizá no detectó Sara y que el observador registró, fue la de construir un triángulo, dadas las medidas de sus tres lados.

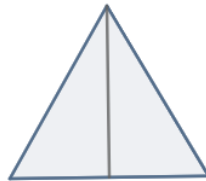
*La validación:* Para la superposición de las figuras no hubo episodios donde se invalidara la congruencia por la posición de la figura, ni se consideró analizar la congruencia en relación con la posibilidad de rotar o invertir las figuras.

*La puesta en común:* La puesta en común duró pocos minutos; quedaba poco tiempo de la clase. Se discutieron dos mensajes; no alcancé a identificar el criterio de selección, si es que hubo uno para seleccionarlos. Nuevamente, Sara se interesó únicamente por los datos del mensaje y sostuvo la estrategia de “*Maestra intérprete*”.

- En el primer mensaje, aparecieron las medidas de los tres lados. Sara señaló que esta combinación de datos “ya se había visto” y que con ella era posible obtener el triángulo. En este caso, la figura reproducida resultó congruente. Siguió sin problematizarse cómo construir un triángulo, con regla y compás, dados sus tres lados.
- Con el segundo mensaje, surgió la altura:

*Mensaje:* Es un triángulo isósceles. La base de 9.2 y con el transportador de derecha a izquierda  $50^\circ$ ; la altura tiene que ser de 7.3 y lo unes (dos lados miden 7.3 y uno 9.2).

Sara siguió las instrucciones sin reparar en la ambigüedad de esta descripción ni el uso incorrecto del término altura (llaman altura a un lado del triángulo). La figura que dibujó en el pizarrón fue:



La figura modelo tenía esta misma posición en relación con los bordes de la hoja. La figura reproducida con este mensaje resultó idéntica a la original. Esta vez, Sara no enfatizó en el conjunto de datos; recordemos que sólo registraban en el pizarrón aquellas combinaciones que se correspondían con un criterio de congruencia.

Finalmente, Sara indagó por los datos que se utilizaron para todos los mensajes en general. Al confirmar que, a pesar de la restricción, los alumnos se habían apoyado en las mismas combinaciones de datos; instauró una tercera consigna para una nueva aplicación de la situación:

Sara (M): A ver chicos, ¿alguien dio unos datos diferentes?, levanten la mano...pregunto, ¿quién les dio la medida de sus lados? [LLL]

Alos: [varios alumnos levantan la mano]

Sara (M): ¿a quién le dio la medida de sus lados y la medida de un ángulo? **[LAL]**

Alos: [varios levantan la mano]

Sara (M): ¿y todos los demás qué datos le dieron?

Alos: [no contestan]

Sara (M): ¿qué datos les dieron?

Alo<sub>1</sub>: los mismos

Sara (M): ¿qué datos son esos?

Alo<sub>1</sub>: la altura y los lados

Sara (M): pero, no a todos les salió eso (...). Ahora yo les cuestiono o hacemos un trabajo distinto. Te pedí que los datos con los que vas a dar el mensaje fueran distintos a los del pizarrón, entonces no lo pueden escribir en el mensaje que van a hacer; como te saltaste esa regla van a tener que volverlo a hacer. Pon atención [los alumnos no se ven involucrados en la actividad] **No pueden incluir en el mensaje las medidas de todos sus lados, no lo puedo escribir y tampoco puedo escribir la medida** ¿de qué? [espera que los alumnos contesten, pero no lo hacen] **de dos lados y un ángulo**. Entonces, pon atención, **no puedo escribir la medida de sus tres lados o la medida de dos lados y un ángulo, tienen que buscar otros datos diferentes para que lo puedan construir, ¡piénsenle!**

Las preguntas de la maestra buscaban un mensaje que involucrara a dos ángulos y un lado (ALA); al no encontrarlo, dio lugar a una tercera ronda de la situación. La restricción en la que enfatizó esta vez fue no usar las combinaciones que estaban en el pizarrón (LLL y LAL). Podemos advertir algunas dificultades con el uso del término “medidas”, ya que podía desviar la atención de los alumnos hacia las unidades de medidas de los lados y no del dato mismo.

Finalmente, esta segunda puesta en común no generó un debate en la clase. Se disponía de poco tiempo. Con los dos mensajes que destacó, logró precisar dos ideas. La primera, ratificar (aunque de manera casi impuesta) que la combinación de datos LLL permitía obtener el triángulo. La segunda, que quizás quedó más clara para los alumnos, que los mensajes que habían producido no cumplieron las expectativas de su maestra. Sospechamos que esta idea de “repetición” de los datos que le quedó a Sara con esta segunda aplicación, pudieron no tenerla los alumnos; ya que aquellos que usaron LLL en la primera ronda pudieron usar LAL en la segunda. Así, para ellos, se cumplía con la consigna dada. Esto lo pudimos identificar al comparar algunos mensajes de las dos aplicaciones.

### 3.3 La reflexión de la experiencia en aula

El siguiente análisis corresponde a la cuarta y última reunión del colectivo que se dio tras la implementación de la situación 3. Me interesa analizar cómo se da la colaboración entre maestros e investigadores y destacar algunos episodios de co-construcción de conocimiento en el marco de la reflexión colectiva sobre la experiencia de los maestros.

#### 3.3.1 La colaboración entre investigadores y maestros

En la reunión colectiva (que duró una hora y media aproximadamente) los maestros compartieron su experiencia con la implementación de la situación. Los observadores dieron sus impresiones sobre estas clases.

Las participaciones de los maestros se concentraron en las producciones de los alumnos en relación con las consignas que gestionaron en las distintas aplicaciones que hicieron, en los recursos de intervención y las dificultades que tuvieron con la puesta en común. Al igual que en la reunión anterior, poco refirieron a las decisiones que tomaron para configurar el *medio* de los alumnos: tipo de triángulos, tamaño y presentación de las figuras (recortadas, por ejemplo); pero a diferencia, la consigna fue central en sus intervenciones. Esto tiene que ver con uno de los propósitos didácticos de esta situación; recordemos que, en la reunión de planificación, se acordó hacer varias aplicaciones e ir ajustando la consigna para lograr los criterios.

La reflexión colectiva que se dio a partir de las distintas participaciones configuró una colaboración entre maestros e investigadores alrededor de tres aspectos: i) las modificaciones a la situación, ii) las retroalimentaciones de los observadores y iii) las producciones de los alumnos. A continuación, me detengo en cada aspecto.

##### a. Las modificaciones a la situación. Decisiones de los maestros

Las participaciones de los maestros dejaron ver que sus puestas en común se concentraron en la búsqueda de las colecciones de datos que implicaban un criterio de congruencia, tal como lo identificamos cuando analizamos las experimentaciones en aula. El ejercicio reflexivo que hicieron al contar su experiencia dejó ver una doble referencia. Por un lado, las resoluciones de los alumnos en relación con los datos que destacaron en los mensajes y, por otro, las decisiones que tomaron para lograr los

criterios (consignas y algunos recursos de intervención que movilizaron para sostener la puesta en común).

Sara, Liliana e Ignacio destacaron la dificultad que tuvieron para lograr las tres maneras distintas de asegurar la congruencia (LLL, LAL, ALA); esto les implicó tomar decisiones en la clase con base en lo que sucedía con sus alumnos. Por ejemplo, Liliana e Ignacio optaron por consignas que alteraron la esencia de la situación de comunicación, involucrando a los alumnos en un nuevo contrato. La tarea ahora era buscar combinaciones de datos que permitieran la reproducción idéntica, con todos los alumnos implicados con un mismo triángulo. Veamos:

Liliana (M): Ofrecer las instrucciones para construir el triángulo.

Liliana (M): (...) Hay otros grupos que son muy inquietos, entonces esta parte no me resultó [el juego de comunicación] y **entonces lo que decidí fue yo darles las instrucciones**. *Te doy un triángulo de base y altura y de ahí vamos a trazar un triángulo exactamente igual, pero con otros datos, yo ya te di una, ahora dame otros*; y ahí llegaron a LAL.

ID: O sea, ¿usted les daba dos datos?

Liliana (M): sí, yo les digo: *me van a trazar un triángulo isósceles de base 11 y altura 10*; entonces se les dificulta a veces medir con el transportador y ya yo les ayudo a acomodar el transportador. Y entonces ya que tienen las medidas y su triángulo **les digo: ¿de qué otra manera van a construir el triángulo sin usar base y altura...ustedes, ¿de qué otra manera?** [otros datos distintos a los dados] (...) Y pues ahí voy, hoy los voy a ver.

Ignacio (M): Restringir datos. No dar “ninguna medida”.

Ignacio (M): (...) En el primer grupo que lo trabajamos, lo trabajé con la maestra Michelle [su maestra practicante], y también ella estaba medio atorada en cómo sacar los criterios de congruencia. A ella se le ocurrió, y dije bueno le voy a dar el beneficio de la duda, y **propuso que les diéramos [a los alumnos] el mismo triángulo** y el primer criterio funcionó, nada más dijeron LLL y a todos les quedó igual y ¡oh sorpresa! todos tenían el mismo triángulo. Pero, el segundo triángulo, que ya era distinto, ya no obtuvimos nada, ningún criterio, ni nada (...) no logramos lo que se quería

ID: pero ¿por qué?, ¿había mensajes que decían qué o....?

Ignacio (M): les dimos la indicación de que no podían...porque decidimos la maestra Michelle y yo que, si les decíamos, *bueno pueden dar un lado*, ya les estábamos dando el criterio [ALA]; entonces **decidimos que la restricción en el segundo triángulo** [segunda aplicación] **era no decirles lo mismo, no podían tratar ninguna medida** [de lados]. No podían dar ninguna medida, entonces nosotros pensamos que iban a voltearse inmediatamente a los ángulos y no, no fue así, se atoraron, nosotros tratamos de empujarlos y no lo lograron más. En ese grupo sí siento que se quedó ahí, porque el primer criterio sí siento que fue fácil (...).

En el caso de Liliana, había dos tareas que debían hacer los alumnos. La primera, construir el triángulo con los datos solicitados (la longitud de un lado (“la base”) y una de las alturas de un triángulo isósceles) y luego, buscar datos distintos para construir el mismo triángulo. Parecía que la intención de la primera tarea era mostrarles a los alumnos un ejemplo de una combinación de datos (dos) que servía para la congruencia<sup>70</sup> para que luego ellos buscaran otros datos posibles. Aunque ya no se trataba de comunicar la figura para la reproducción, la maestra lograba transmitir una idea potente de entrada a los alumnos: había varias maneras (combinaciones de datos) de lograr la congruencia. Recordemos que una de las mayores dificultades de los maestros fue que, al encontrar el primer criterio (usualmente LLL), los alumnos se resistían a buscar otra forma, ¿qué sentido tenía otra? Hubiera sido muy interesante conocer cómo respondieron los alumnos a esta nueva tarea. En todo caso, parecía haber una buena idea aquí.

A diferencia de Liliana, los alumnos de Ignacio no recibieron instrucciones para aplicar, pero tampoco se trató de describir una figura para comunicarla a un compañero. Con la restricción de no incluir “medidas”, Ignacio daba por sentado que los alumnos entendían que sólo aplicaba para los lados (pues ya habían encontrado una forma efectiva para la congruencia: los tres lados del triángulo) y así se fijarían en los ángulos. Es interesante el análisis que hicieron Ignacio y Michelle antes de instaurar la consigna; buscaban orientar la mirada de los alumnos a los ángulos, pero no querían “decirles” el criterio que querían que surgiera (“si les decíamos, bueno pueden dar un lado, ya les estábamos dando el criterio”). Aunque se puede anticipar que la ambigüedad de la restricción de “no incluir medidas” podía causar confusión en los alumnos al creer que debían buscar otras unidades de medida (como los cuadritos de la hoja) en lugar de otros datos del triángulo o bien, al pensar que también las medidas de los ángulos quedaban excluidas, fue un intento de los maestros por orientar y sostener la clase hacia el propósito que entendieron como principal: la formulación de los criterios de congruencia.

Estas decisiones dejan ver dos reelaboraciones distintas de los maestros sobre la situación misma y sus estrategias de intervención a partir de su lectura de lo que

---

<sup>70</sup> En el caso del triángulo isósceles, estos tres datos resultaban suficientes para determinar un triángulo congruente al original. Además, nótese que Liliana involucró datos, como la altura, que no tenían relación con un criterio; así, los alumnos voltearían la mirada hacia los ángulos.



sucedía con los alumnos, así como de las dificultades que encontraban para hacer avanzar la clase. Las decisiones de Liliana y de Ignacio responden, en primer lugar, a la retroacción de su *medio* (*medio* del maestro. Margolinas, 1998): con la situación original no logran que los alumnos elaboren el conocimiento al que apuntan. entonces, ajustan la situación.

Los maestros tienen un conocimiento de la experiencia que funge como una reserva de recursos que movilizan en sus clases para lograr los objetivos didácticos que se proponen; sus decisiones no son improvisadas, pues no era la primera vez que los maestros enseñaban este tema de congruencia de triángulos.

Ahora bien, evidentemente, cuando los maestros sienten que *no funciona* (o no funcionará) una situación didáctica con sus alumnos, hay mayor probabilidad de que la modifiquen o desechen; debe aclararse que estas modificaciones a la situación original buscan conservar sus objetivos didácticos, como lo vimos con Liliana e Ignacio. Ciertamente, a veces parecen lograrlo, como en el caso de Liliana, y a veces no. Como en otras ocasiones, los maestros atribuyeron las dificultades a distintos factores; en este caso, la “falla” estuvo en los alumnos: inquietos, confundidos, cansados y, sobre todo, que no funcionalizaban los conocimientos que, según los maestros, *ya saben*. No obstante, las modificaciones que hicieron a la situación dejan ver que, implícitamente, también reconocieron que había que hacer *algo más* de lo propuesto en la situación para lograr los objetivos esperados.

Los maestros detectaron que para lograr la formulación de los criterios se requería ineludiblemente de una mayor intervención de su parte; cosa que como investigadores no previmos en un análisis preliminar de la situación y que en la reunión de planificación no profundizamos. Es la experiencia de los maestros la que ponía en evidencia la necesidad de construir estrategias de intervención para las futuras implementaciones.

#### b. Estrategias de intervención: Las propuestas del investigador

Con sus participaciones, los maestros contribuyeron a la reflexión colectiva al explicitar las dificultades que tuvieron y orientaron sus acciones en el aula. A partir de esto y, apoyados en la experiencia como observadores de algunas clases, los investigadores también participaron de esta reflexión. Sus intervenciones se concentraron en proponer

a los maestros estrategias y/o recursos de intervención para mejorar la conducción de las puestas en común.

A continuación, presento dos estrategias:

i) Estrategia 1: La validación empírica como una forma de propiciar aprendizajes de los alumnos

La primera propuesta se dio en el marco de la retroalimentación que ID hizo a Sara (M); pero claramente sus reflexiones interpelaban a todos los maestros:

ID: (...) yo tengo la impresión que hay varios alumnos que todavía no están convencidos y no lo tienen tan claro. Había por ahí un alumno que tenía cerca, que tú le preguntabas [dirigiéndose a Sara]: *Entonces, ¿sí?* y él decía: *sí [tono dubitativo]; así como no muy convencidos (...)* Yo digo, aquí falta algo y quizá, **a lo mejor podía ser algo así como tomar uno de los casos y decir, bueno ¿y cómo podríamos estar seguros? bueno, una manera es ¿y si hacemos un triángulo todos?, cada quien hace uno, con los tres lados que les pongo en el pizarrón y luego vamos a compararlos todos a ver si todos salen iguales o alguno diferente.** No es una prueba matemática muy rigurosa, pero ayudaría mucho ver que 40 triángulos salieron iguales con los tres lados. Pero, para que tenga mucho chiste eso, **sería bueno hacerlo también con alguno de los mensajes en donde la cosa no sale (...); un poco para asegurar que quede más claro esta cosa de cuándo se puede y cuándo no.** Y también, cuando lleguen a esta parte de *A ver, ahora los menos datos posibles*, bueno, había muchos mensajes que tenían cuatro datos o hasta cinco creo, porque daban los tres lados, a veces dan también ángulos y a veces daban altura, entonces estaban llenos de datos, entonces **también se puede escoger uno de esos y decir, por ejemplo, bueno y a este qué le podemos quitar, pero un análisis que sea medio colectivo de uno que está muy bueno y ver qué le podemos quitar y probar también.** O sea, a lo que voy es a **analizar un poquito más por qué sí se puede, qué se le puede quitar, cómo puedo estar seguro de que no va haber otro igual (...)** Siento que **las puestas en común están resultando muy difíciles...**también en la clase que observé de Ignacio me dio esa impresión [en la situación de paralelogramos]; Ignacio hizo (...) maravillas para destacar cosas importantes como la diagonal, la altura, pero hay cosas que siento que se quedan un poco en el aire y que hay que encontrar maneras de regresarlas y de volver a trabajar con ellas.

La preocupación del investigador era el aprendizaje de los alumnos. Había observado que ellos no estaban quedando convencidos de que algunas combinaciones mínimas de datos resultaban *suficientes* para reproducir un triángulo idéntico y, además, que servían para cualquier triángulo y no sólo para el caso en el que surgió. Para hacer frente a esta problemática, era necesario pasar del aprendizaje a la enseñanza; pensar en estrategias concretas que permitieran involucrar a los alumnos en la construcción de estas ideas clave como la suficiencia y la generalización. Por ello, sugería movilizar preguntas que invitaran a los alumnos a explorar distintas posibilidades y apoyarse en la

validación empírica para generar pruebas contundentes que les permitiera convencerse de su validez.

ii) Estrategia 2: La búsqueda de mensajes económicos.

En la retroalimentación que IY hizo a Liliana (M), destacó una característica general de los mensajes que se discutieron en su clase. Su intervención dio lugar a una nueva propuesta por parte de ID:

IY: (...) Aquí vemos [en el cartel] que en estos mensajes [8] no nombraron la figura como *triángulo*, no sé si [los alumnos] creían que no se podía decir *triángulo* o ¿qué pasó?

(...)

ID: Algunos mensajes son interesantes para ver qué pudo haber pasado, y **que lleguen, por ejemplo, a que midieron mal el ángulo, o bien, que son ambiguos**. Esos errores, me parece importante que se socialicen porque seguro que a más de uno les pasó. Bueno, a nosotros sí nos importa llegar a esos tres datos [los criterios], pero creo que también hay que ver que tienen muchas palabras que ellos [los alumnos] podían quitar; ***si se tratara de mandar telegramas y cada palabra cuesta mucho dinero ¿cómo le haces para que sean menos palabras?***

Liliana (M): sí, lo mínimo

ID: porque, por ejemplo, dicen mucho: *horizontal, pon la línea horizontal* y luego, no sé qué y no sé cuánto; *¿y es necesario decir horizontal?* como para romper esa cuestión de que siempre hay una horizontal.

IY ponía en evidencia ante el colectivo una característica que tuvieron la mayoría de las producciones de los alumnos: la importancia de la posición de la figura para caracterizarla. Apoyándose en esta participación, ID posicionó en la discusión un objetivo didáctico de la situación que se había perdido de vista en las implementaciones: el estudio de las características geométricas de la figura. Su intención fue invitar a los maestros a ver, más allá de los datos para la reproducción (lados, ángulos), otros aspectos que pudieron influir para que no se lograra la congruencia: la dificultad de los alumnos para medir ángulos, la ambigüedad de las descripciones, y otras. Esta participación era congruente con lo que observamos; recordemos que en el análisis de las producciones encontramos que la principal razón de la insuficiencia de los mensajes radicó en estos aspectos.

La propuesta del investigador para trabajar la idea de que la posición es irrelevante para caracterizar una figura fue considerar una variante de la situación: se trataba de generar en los alumnos la necesidad de buscar términos de los que se pudiera

inferir información que podía omitirse en las descripciones; por ejemplo, decir *triángulo* en lugar de describir uno a uno sus lados y vértices. Esto llevaría a trabajar la idea (implícita) de suficiencia con los alumnos (¿Qué es necesario decir y qué no?). Por otro lado, también se trataba de dar lugar a que los alumnos detectaran en sus mensajes información innecesaria, lo cual plantea un reto que va más allá de eliminar redundancias, un reto más conceptual: el de darse cuenta de que, si una base de un triángulo no se dibuja horizontalmente, no pasa nada, esto es, el reto de desentenderse de la posición absoluta, para atender solo a la posición relativa de las otras partes de la figura.

La intención del investigador con estas propuestas fue ayudar a los maestros con recursos que les permitieran mejorar las puestas en común para futuras implementaciones. La limitación de tiempo (esta fue la última reunión) presionó al investigador para desarrollar más ampliamente que en otras ocasiones las sugerencias. Cabe observar que las sugerencias se agregaban a las estrategias propuestas por Liliana e Ignacio, sin invalidarlas, más bien, llevándolas más lejos. Esto se puede relacionar con el principio de investigación colaborativa que concibe a los maestros como profesionales reflexivos que disponen de recursos interpretativos para hacer frente a las situaciones en el aula, que tienen un conocimiento pragmático que guía su acción y sus decisiones (Desgagné, 1997). De acuerdo con Bednarz et al. (2000) los investigadores no pueden ignorar estos recursos, ya que estas interpretaciones que movilizan los maestros son esenciales para comprender la reapropiación que hacen de las situaciones de enseñanza. En este sentido, pudimos haber explotado más la iniciativa de Liliana, que parecía bien encaminada, desde nuestra perspectiva.

Desde la situación 1 (rectángulos), las dificultades para conducir las discusiones colectivas en la clase estuvieron presentes en las reflexiones individuales que hacían los maestros. Las propuestas de los maestros Liliana e Ignacio, sumadas a las del investigador (inspiradas en sus observaciones de clase y lo que estos dos maestros hicieron en sus clases), constituyeron una experiencia de co-construcción de estrategias de intervención necesarias para ayudar a los estudiantes a aprender y a los maestros a lograr que la situación didáctica avance.

c. La retroalimentación que proporcionan los investigadores a los maestros a partir de la observación de sus clases.

Las intervenciones de los investigadores en las que compartieron sus impresiones sobre las clases observadas también fueron la oportunidad para poner nuevamente a los maestros en una posición de reflexión sobre su práctica. Aquí, el investigador se posicionó como formador. A diferencia del apartado anterior, aquí las retroalimentaciones son directas al maestro sobre algún aspecto a reflexionar y/o mejorar de su implementación. Veamos un par de ejemplos:

- La posición es irrelevante para la congruencia: ID informó a Sara (M) que en uno de los mensajes que discutió en la puesta en común, reforzó con sus alumnos la idea que la posición importa para la congruencia:

ID: (...) Un último detalle es que volvió a aparecer el hecho de que hay un triángulo que quedó bien, pero ubicado para el otro lado; y entonces *¿quedó igual?* Sí, sí y todo sí, pero un alumno dijo, *pero volteado para el otro lado. Y entonces tú aceptaste que eso hacía que no fueran congruentes* y entonces dijiste *Pues... qué había hecho falta para que hubiera quedado del mismo lado* Entonces, bueno, nada más recuerden que quedó pendiente, aquí para nosotros, averiguar si el hecho de que queden volteados para el otro lado hace que no sean congruentes; o si uno puede definir congruencia como uno quiera. Bueno pues, para mí, congruencia va a ser que yo sin voltearlos los puedo superponer o si congruencia es si lo puedo superponer volteándolos y eso. **En la geometría que yo aprendí sí son congruentes porque incluso cuando se empezó a usar eso de las geometrías de las transformaciones, se acuerdan de la traslación y la rotación, esas son transformaciones que no modifican a la figura, nada más la mueven. Entonces la simetría axial lo que hace es volteártela** y, por lo tanto...

Sara (M): sí son congruentes [interrumpe a ID]

ID: sí son congruentes...o si las recortas y ya las tienes sueltitas, también se puede encimar.

La discusión sobre la congruencia que se sostuvo en una reunión previa en el colectivo había resuelto, de manera muy ambigua, que girar o invertir las figuras para hacerlas coincidir no invalidaba la congruencia entre ellas. Precisamente esta ambigüedad se revelaba, para esta implementación, con Sara. El interés del investigador fue aclarar esta noción, ofreciendo un argumento geométrico para persuadir a la maestra de su idea de congruencia; al parecer logró su propósito.

- Presupuestos de los saberes de los alumnos: Ante la idea de “fracaso” de la situación que manifestó Ignacio (M), ID propuso pensar en aquellos conocimientos que se dan por sentado en los alumnos, esos que “debían” tener y movilizar en esta tercera situación. Veamos:

*Construir un triángulo con regla y compás:*

ID: (...) cuando tienen los tres lados los construyen con la regla así, como medio ensayando. A lo mejor en algún momento hay que decirles: *Oigan, ustedes ya saben construir un triángulo con compás, entonces, pues órale ¿no?* Y si no, pues paramos tantito y vamos a ver cómo se construye un triángulo si tenemos los tres lados. **Echarles una manita para que se acuerden** como se usa el compás para que ya les salga, eso más a lo seguro.

*Medir ángulos – Uso del transportador:*

ID: ¿y sí saben medir ángulos?

Ignacio (M): sí saben. En el primer periodo le dediqué mucho tiempo a que estuvieran midiendo ángulos porque les cuesta mucho trabajo (...) Sí, sí sabían medir.

Como el interés de los maestros estuvo en los datos que los alumnos usaron para la reproducción para destacar los criterios de congruencia, dejaron de lado otros conocimientos que también debían movilizarse para garantizar la congruencia. Los maestros partían de la idea de que construir un triángulo con regla y compás dados sus tres lados o hacer mediciones efectivas de los ángulos, eran conocimientos que ya dominaban los alumnos, o bien, no los consideraron necesarios para resolver la tarea. En este caso, el investigador invitaba a los maestros a reflexionar sobre estos *otros* conocimientos que estaban implicados y, si se requería, ayudar a los alumnos a funcionalizarlos, o bien, detener la situación un momento para recordarlos o enseñarlos.

d. La reflexión sobre las producciones de los alumnos

Esta reflexión, estuvo presente en las participaciones individuales de todos los maestros. Al igual que en las reuniones colectivas anteriores, se dejaron ver momentos en los que coincidieron los intereses de los distintos actores del colectivo.

Los temas que compartieron los maestros estuvieron centrados en tres aspectos: i) el uso de vocabulario geométrico en los mensajes, ii) los datos para la reproducción idéntica y iii) algunas dificultades para alcanzar los criterios de congruencia. Veamos:

<i>(i) En relación con el uso de vocabulario geométrico</i>	
<i>“Diagonal”: un término (erróneo) para describir lados del triángulo</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Lilibiana (M): Se rectificó también lo que era la diagonal porque me siguen diciendo que la inclinación era la diagonal (...)</li> <li>○ Ignacio (M): (...) Sí surgió otra vez lo de diagonal, en todos los grupos, tanto de primero [grado] como de segundo (...)</li> </ul>

<p>(ii) <i>En relación con los datos para la reproducción</i></p>	
<p><i>Criterios de congruencia utilizados (o identificados) por los alumnos, según los maestros</i></p>	<p>En el caso de Sara: LLL y LAL</p> <p>Sara (M): (...) Salen algunos alumnos, como una tercera parte del grupo, que construye a partir de las tres medidas; sin embargo, no todos toman ese camino, que yo pensaba que iba a ser la mayoría o todos.          IY: ¿la medida de?          Sara (M): <b>sus tres lados</b>. Hay otra parte del grupo que sí considera tomar la medida de <b>dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (...)</b>.</p> <p>En el caso de Ignacio: LLL y ALA</p> <p>Ignacio (M): En primer año, les costó menos trabajo el primer criterio, <b>se remitían a LLL desde el primer triángulo (...)</b> todos, el 100% era LLL. Los segundos años, me llamó mucho la atención que, desde la primera figura, en el grupo que observó ella [IY], salió eso [señala el pizarrón]: <b>LLL y ALA (...)</b></p> <p>En el caso de Liliana: ALA</p> <p>Liliana (M): (...) Bueno, entonces nos dimos cuenta que esta chica hablo <b>de base, ángulo, ángulo</b> y la revisamos y nos dimos cuenta de que sí sale [hace la superposición de las figuras] Entonces fue de las chicas que trabajó ese criterio.</p> <p>En el caso de Fabio: LLL, ALA, LAL</p> <p>Fabio: (...) me doy cuenta al hacer el balance, ahorita acabo de hacer la estadística, <b>muchos hablan de tres lados, 8 equipos fueron de LLL, 6 fueron de LAL, dos de ALA y un equipo que no tiene nada.</b>          [Más adelante profundizaré en esta participación del maestro]</p>
<p>(iii) <i>Dificultades identificadas en los alumnos</i></p>	
<p><i>Criterio ALA</i></p>	<p>Sara y Liliana coincidieron en que el criterio más difícil y sorprendente para los alumnos era ALA:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ -Sara (M): (...) yo si esperaba que el último criterio [ALA] fuera un poquito más complicado para ellos, porque ellos precisamente referían... ¿puedo dibujar? [pregunta a ID]</li> <li>-ID: sí claro</li> <li>-Sara (M): [pasa al pizarrón] (...) si el lado mide 8 cm y el ángulo 45° y el otro, por ejemplo 95°, obtienen el triángulo <b>hasta que se prolonguen</b> [los lados], entonces ese es el más complejo para ellos en ese sentido, <b>porque ellos</b></li> </ul>

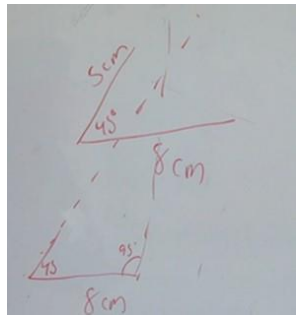
	<p><b>tienen que visualizar que deben de prolongar</b> [ilustra su ejemplo con un dibujo. Ver fotografía 13].</p>  <p>Fotografía 13: Representación criterio ALA (Ejemplo Mtra. Sara). Fuente: Propia.</p> <p>y ese es el que me estaba costando con los alumnos que logaran.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>o Lilitiana (M): (...) les pregunté [a los alumnos] <i>¿De qué otra manera se puede trazar otro triángulo de igual medida y de forma pero que ya no sea con lo que yo te di?</i>; entonces los chicos empezaron a decir: <i>Ah, puede ser base y ángulo y ángulo</i>. Les digo, <i>A ver, trázalo</i>. Y ya lo trazaron y una niña se quedó trazando los ángulos, y me decía maestra: <b>¿y luego cuánto de lado?</b> [porque le habían dado ALA] y ya le dije <b>pues prolongalos a ver qué pasa</b>, Así como decía Sara, <b>cuando van prologando y llegan a la punta y comprueban entonces ellos también se admiran dicen: ¡es que con esto fue suficiente para poder lograrlo!</b></li> </ul>
--	---

Tabla 13: Características de los mensajes según los maestros. Situación 3. Fuente: propia

Los maestros concentraron su participación en los criterios de congruencia que surgieron en el aula, en particular, las que lograron destacar con sus alumnos en las puestas en común. Fabio fue una excepción, sólo hizo una aplicación, su tiempo de implementación fue limitado y no logró socializar las producciones con sus alumnos<sup>71</sup>. Lilitiana, Ignacio y Sara, encontraron dos criterios de congruencia en un promedio de dos aplicaciones. En todos los casos, manifestaron que harían una nueva implementación para concluir el tema.

A continuación, comentaré tres aspectos de las participaciones anteriores.

- 1) Lo qué se dejó de lado o recibió menos atención.

<sup>71</sup> El maestro manifestó que ese día tuvieron la visita del Secretario de Educación y hubo muchas actividades en la escuela que afectaron el tiempo de la clase y la disposición de los alumnos.



La centralidad de la problemática de los criterios dejó de lado la atención a otros aspectos que se habían venido trabajando: i) el uso de los términos (dos de los cuatro maestros lo retoman con la noción de *diagonal*), ii) el uso de la posición (ninguno lo retoma) y iii) ideas para abordar la suficiencia, por ejemplo, la cantidad de datos que los alumnos consideraron para la reproducción en las distintas aplicaciones y, con esto, la idea de *datos para corroborar* que sostuvieron con ellos para lograr un mínimo de datos (tres de cuatro lo retomaron).

## 2) El análisis del criterio ALA

En el análisis que hicieron las maestras Liliana y Sara sobre el criterio de congruencia ALA, explicaron por qué consideraban que era el de mayor dificultad para los alumnos. Pusieron en evidencia dos hechos que observaron en sus clases para justificar su conjetura: i) Para los alumnos era difícil aceptar que, aun con los dos lados “que faltaban”, era posible construir el triángulo, pues no les era fácil ver que el tercer vértice quedaba determinado al prolongar las rectas que contenían dos de sus lados y ii) que el triángulo obtenido sería idéntico al original porque las longitudes de los dos lados que se prolongaban también quedaban determinadas. Estos hechos resultaron sorprendentes para algunos de sus alumnos. De acuerdo con Perrin y Godin (2018) esta dificultad se explica por la necesidad, en estas tareas de reproducción, de que los alumnos *vean* unidades figurales (línea, puntos) no explicitadas en la figura, a partir de aquellas presentadas. Por ejemplo, el triángulo es delimitado por su contorno (tres lados, tres vértices) pero habría que *ver* que para cada uno de los lados hay una recta que lo contiene y que el tercer vértice se obtiene a través de una intersección de dos rectas. Todo lo anterior implica una mirada sobre la figura donde las líneas dejan de ser solamente bordes de las superficies y los puntos dejan de ser solo vértices de esa superficie (las líneas son prolongables, los vértices emergen como intersecciones de las líneas, los lados emergen como segmentos definidos por vértices); de ahí, la dificultad de los alumnos.

La experiencia puso en evidencia algunas dificultades –con el criterio ALA y la importancia de la posición para caracterizar la figura– no previstas en la reunión de planificación (y sobre las que no profundizamos en el análisis preliminar de la situación que realizamos los investigadores). Las intervenciones de las dos maestras constituyen un aporte valioso para el análisis de la dificultad del criterio ALA; constituyen un ejemplo relevante de construcción de los docentes, y socialización en el colectivo.

### 3) Los criterios de congruencia identificados por Fabio

Por último, destaco la reflexión que compartió el maestro Fabio. Encontramos, al analizar los mensajes en los que el maestro enumeró los datos, que, en la mayoría de los casos, omitía datos, a su consideración, para hacer surgir alguno de los criterios. Por ejemplo:

<b>Mensaje:</b> “Haz una línea acostada de 9.5 cm que sea la base. En la esquina derecha inicia una línea diagonal de 30° y de alto 16.5 cm. En la esquina izquierda de la base haz una línea diagonal de 60° con una altura <sup>72</sup> de 10 cm”	<p>- Datos para la reproducción: 3 lados y 2 ángulos</p> <p>- Datos (criterio) que identificó el maestro: “ALA”</p>
--	---

De esta manera, Fabio infirió que, en las producciones de una primera aplicación, resultaron los tres criterios de congruencia que se proponía con la situación. Esto no se pudo detectar antes del encuentro colectivo, pues no había sido posible observar su clase y, hasta ese momento, no conocíamos las producciones que surgieron en ella. Pero, la razón por la que como investigadores no hacíamos ningún comentario al maestro, no siempre fue por el desconocimiento a priori del hecho que relataba el maestro como veremos a continuación:

Fabio (M): (...) Hay niños que dicen: *trazas una línea de tanto y pues un ángulo y ya después las puntas, entonces ¿qué utilizan? pues LAL. A veces se presentan que primero hagan un ángulo de tanto, y después un lado y después el otro [lado] y sería ALL, pero pues el orden [del criterio] me dice que es LAL, pero el orden no me afecta, igual da (...)*

En este caso Fabio se apoyó en un ejemplo concreto para explicar cómo identificó los datos usados para la reproducción en cada mensaje; pero con ello, dejó ver un error de naturaleza geométrica que movilizaba su análisis sobre las producciones de los alumnos; para él, la combinación LLA era equivalente al criterio de congruencia LAL. Ante esto, no hubo ninguna respuesta ni de los maestros ni de los investigadores. Nuevamente, estábamos ante una situación en la que se hacía necesario posicionarnos como formadores, para hacerle ver al maestro que la combinación LLA no garantizaba la congruencia de dos triángulos. La dificultad de una retroalimentación como esta, que

---

<sup>72</sup> En este caso hubo un uso incorrecto del término “altura”, pues los alumnos referían a la longitud de un lado del triángulo.

ya habíamos experimentado en reuniones anteriores, era interpelar el saber matemático del maestro.

Como lo mencioné en un análisis anterior (tras la implementación de la situación de paralelogramos), se identificó cierta reticencia de los investigadores para retroalimentar a este maestro. Este episodio ponía en evidencia que en este tipo de investigaciones el grado de colaboración entre los actores (investigadores y maestros) también depende de su compromiso y de las relaciones de confianza que se construyen (Roditi, 2015, en Morellato, 2017). Así mismo, como hemos visto en esta investigación, debemos considerar que el factor tiempo de alguna manera obliga a los investigadores a escoger aquello en lo que cree que conviene profundizar. En el capítulo de conclusiones volveré sobre este asunto.

Frente a la reflexión que los maestros construían en el colectivo sobre las producciones de los alumnos, los investigadores tendieron a no opinar. Es probable que simplemente no sintieron la necesidad de hacerlo, pues el análisis de los maestros era pertinente, interesante y correcto. O bien, en ese momento no se había analizado con tal profundidad (como se hizo después) sobre lo importante de las observaciones de Liliana y de Sara.

Encontramos que la intención didáctica que se construyó para esta tercera situación con los maestros en la reunión previa priorizó, en efecto, los criterios de congruencia; es decir, la precisión que se hizo de que no debía ser ese el primer objetivo, resultado débil o ambigua. Los investigadores partimos del hecho de que, al ser la tercera situación de comunicación, el objetivo de estudiar las características geométricas de la figura ya era inherente a la situación, de ahí que centráramos la discusión en un segundo objetivo; los criterios. Empujamos a los maestros a prestar atención a lo de los criterios, cuando hacía falta prestar atención a otras cosas, y, además, tampoco estaba muy claro cómo dar lugar a los criterios. Pero también, lo que se está revelando, es que ciertas omisiones dejadas por los investigadores, involuntariamente, se convirtieron en oportunidades para desarrollar múltiples soluciones por parte de algunos de los maestros.

### 3.3.2 La colaboración entre pares y la regulación del investigador

Anteriormente, destaqué una modificación a la situación que hizo el maestro Ignacio por la dificultad que identificó en sus alumnos para fijarse en los ángulos, tras haber encontrado LLL. En el marco de este mismo episodio, Ignacio aclaró algunas decisiones sobre el *medio material* (características del papel en el que presentó la figura modelo y la consigna); en su reflexión, él quería comprender por qué sus alumnos no habían logrado avanzar hacia los otros dos criterios. Frente a esto, ID hizo una participación que desató una interacción entre los maestros que me interesa destacar:

Ignacio (M): (...) Y pues fue distinto a como lo aplicamos ahí [en segundo C] a como lo aplicamos en el resto de los grupos. En ese grupo los triángulos que les dimos venían en cuadrícula, y todos los demás no, todos los demás venían en hoja blanca; es el único grupo que paso eso. No sé si tenga algo que ver, la verdad no sé si al ver los cuadros nada más se ... porque también me decían: *le podemos decir cuántos cuadritos*, y le digo *no porque eso es dar unidades, es dar una medida*. Y ahí me insistían que si cuadritos, y yo *no, no se puede*. Pero de ahí no pasaron... y ya no llegamos a nada. Ese fue el grupo que me llamó la atención

ID: **ok, pues comentarios, ¿cómo ven compañeros? ¿qué pudo haber pasado ahí?** [pregunta a los demás integrantes del colectivo]

Liliana (M): pues yo creo que sí influyó mucho que hubiera utilizado la hoja de cuadrícula porque todos [los alumnos] quieren sacar las cosas de acuerdo con los que nos están dando, entonces nos están dando cuadritos, pues agárrate de los cuadritos. Y en ese momento decirles: *no, no los cuadritos no los puedes tomar*, ellos dirán, *pero si me los estas dando*

Ignacio (M): pero para el segundo criterio, en el primero si salió LLL, en el segundo, nada, nunca obtuve la palabra ángulo por ningún lado

Sara (M): yo creo que también un poquito las instrucciones como bien lo menciona. ¿Me hace ruido esta cuestión que usted les dijo que no podían incluir medidas? [pregunta a Ignacio]

Ignacio (M): ninguna medida, sólo de ángulos. O sea, no pueden dar ninguna distancia

Sara (M): ¿tú esperabas que saliera AAA?

Ignacio (M): ajá, y entonces era ver que si eran los tres ángulos ¿por qué hubo triángulos más grandes que otros? Entonces era ver que a lo mejor era limitarlo con las medidas de los lados

ID: ¿pero dijiste ninguna medida?

Ignacio (M): ninguna medida en cuanto a lado. Les dije, lo único que no pueden hacer es dar la medida de ningún lado. Inclusive les ayudamos al final y les dijimos: *Pueden dar la medida de un lado, nada más de uno...y ni así*

Sara (M): yo creo que sí fue por eso, yo creo que ellos se cerraron mucho al decir: *¿Ninguna medida?*, como que sí les hizo mucho ruido esa cuestión y por eso se bloquearon, no supieron como por dónde. Si al final lo que ellos esperaban era que los triángulos tuvieran la misma medida de sus lados, al ya no indicar ninguna medida, pues ellos decían: *pues entonces ¿cómo?*

Con su intervención, ID involucró a los demás maestros en la reflexión de Ignacio. En efecto, Sara y Liliana movilizaron su conocimiento pragmático para interpretar la experiencia de Ignacio a la luz, no sólo de las decisiones que explicitó, sino de su propia experiencia con la implementación de la situación. Las aportaciones de las dos maestras fueron pertinentes y parecían responder a la expectativa de Ignacio. Lograron analizar y comunicar dos aspectos didácticos importantes: la manera como la consigna y *el medio* prevé y condiciona las interacciones de los alumnos con la situación y que algunos de ellos interpretaron “no medidas” como “ninguna, ni lados ni ángulos”; otros quizá no, pero pensaron que con solo los ángulos no se podía. Es decir, hubo un problema de interpretación de una consigna ambigua y de conocimiento geométrico. Por otra parte, Sara logró que el maestro explicitara el objetivo que perseguía con esta consigna: que apareciera el criterio AAA, a fin de mostrarle a los alumnos una combinación de datos que garantizara la forma, pero no la congruencia; tal como lo inferimos en el análisis de su implementación.

Este episodio de colaboración entre los maestros fue también objeto de formación para ellos. La posición mediadora/reguladora del investigador ofreció la oportunidad para reflexionar sobre la práctica; comprender el porqué de las dificultades de los estudiantes para volver a ciertas dimensiones de su enseñanza. Ignacio desde su propia práctica y Liliana y Sara desde la posibilidad de interpretar una experiencia en el marco del mismo proyecto de enseñanza. Cabe preguntar: ¿por qué en este caso el investigador devolvió el problema a los compañeros, y no en otros casos? ¿Es porque en este caso un docente formuló claramente una duda, lo cual, por cierto, nadie había hecho de esa forma tan clara? Es posible que esa sea una razón, pues resulta difícil devolver un problema que no ha sido identificado y formulado. Pero también parece deseable que ese tipo de intervención hubiera sido más frecuente. En todo caso, estas decisiones son todavía difíciles de analizar y tematizar.

### 3.4 Síntesis y comentarios

El principal desafío de la situación 3 fue dar lugar a la búsqueda de los criterios de congruencia por parte de los alumnos. Las dificultades que se presentaron llevaron a algunos maestros a realizar modificaciones a la situación planeada (cuyo análisis previo hecho por los investigadores se reveló insuficiente), encaminadas a favorecer la identificación de los criterios de congruencia de triángulos. Dichas modificaciones,

pertinentes en general, se pueden considerar un aporte de los profesores al diseño de la situación y en ese sentido, constituyeron un producto de la construcción conjunta (o un “co- producto”). La interacción entre los participantes dio lugar a nuevas formas de colaboración, y a una amplia construcción de conocimientos sobre la situación didáctica.

A continuación, analizo el proceso de apropiación de los maestros para esta última situación y cómo funcionó el dispositivo originalmente diseñado por los investigadores.

#### 3.4.1 Dimensión Formativa

En esta primera parte analizo las formas y niveles en los que se dio el proceso de apropiación de esta última situación por parte de los maestros: qué aspectos retomaron, qué omitieron y cómo enfrentaron las dificultades que tuvieron en las implementaciones. Esto en diálogo con la experiencia que tuvieron con las dos situaciones anteriores y los diferentes momentos de la actividad reflexiva del colectivo.

##### a. La planeación de la situación

La discusión colectiva se concentró en posibles acciones de los maestros para conducir la puesta en común. El interés fue la búsqueda de significado de recursos desde un objetivo (los criterios de congruencia), que instauraron los investigadores, y que se volvió común para la discusión.

*Aportaciones de los maestros al análisis previo de la situación: expresión de apropiación de aspectos relevantes del enfoque.* Al igual que en la situación 2 (y a diferencia de la situación 1), el interés de los maestros se concentró en estrategias para orientar la puesta en común. La reflexión colectiva aportó algunos recursos favorables para el funcionamiento de la situación en el aula: 1) que se daría más de una aplicación, 2) que en una primera aplicación no se incluiría en la consigna la condición de un mínimo de datos en los mensajes y 3) que se aspiraría a establecer un primer criterio y luego, para una segunda aplicación, se solicitaría a los alumnos otras combinaciones de datos que garantizaran la congruencia. Entre los recursos de intervención, destacó la posibilidad de apoyarse en un contraejemplo para invalidar un falso criterio. Respecto a las posibles producciones, se previó que el primer criterio al que llegarían los alumnos sería LLL,

considerando la no funcionalidad del ángulo que se dio con la situación 2. No se previeron algunas dificultades que aparecieron: las asociadas a la caracterización de la figura (como el uso de la posición para describirla) ni las que estarían asociadas directamente al objetivo de los criterios de congruencia.

*Planteamientos del enfoque que permanecieron ambiguos para los maestros.* Aun con la discusión centrada en la puesta en común, los maestros, frente a la insistencia de los investigadores de aplicar varias veces la situación e ir logrando poco a poco los criterios, demandaron recursos concretos que les asegurara lograrlos, sobre todo aquellos que incluían a los ángulos. Al igual que con las situaciones 1 y 2, en los maestros persistía una idea de inmediatez en los aprendizajes de los alumnos que discrepaba de la concepción de procesos más largos de construcción de nociones, inherentes a las tres situaciones; dejaron ver poca credibilidad en que los errores que surgieran podían ser superados con nuevas aplicaciones. Esta postura de los maestros tuvo que ver también con su preocupación por el tiempo adicional al previsto que llevaría implementar la situación varias veces. Este factor institucional fue determinante para las implementaciones desde la primera situación.

Las dificultades que tuvieron los maestros con las implementaciones dejaron ver que, en este momento de planeación, tanto maestros como investigadores, desestimamos las dificultades inherentes a la situación. De acuerdo con Block et al. (2007), una causa común de las dificultades al gestionar una situación es “un análisis previo insuficiente de la misma, es decir de su propósito, de la complejidad subyacente y, por lo tanto, de las dificultades previsibles, de los procedimientos posibles, de las formas de poner en práctica la actividad, del número de repeticiones necesario ...” (p.743); como vimos, si bien en esta reunión se precisaron algunos elementos favorables para la gestión, no se previó la problemática subyacente al objetivo de los criterios de congruencia. A esto se sumó un desencuentro entre las interpretaciones de los maestros y los investigadores frente a los objetivos didácticos de la situación: mientras para los investigadores los criterios de congruencia eran un objetivo “adicional” al de caracterizar geométricamente la figura (objetivo común a las tres situaciones didácticas), para los maestros se redujo al único objetivo a perseguir.

Conviene aclarar que hay estrategias de intervención que son transversales a las tres situaciones, en el sentido que ofrecen condiciones didácticas favorables para conducir las discusiones con los alumnos (por ejemplo, la estrategia de *Maestro*

*intérprete*), pero hay que considerar también la especificidad de estos espacios de discusión, pues dependen “de los diferentes objetivos de enseñanza , del contenido matemático en cuestión y de los conocimientos de los alumnos” (Quaranta y Wolman, 2003, p.198). Precisamente estas estrategias para lograr los criterios fueron las que se omitieron.

#### b. La experiencia en el aula

En las distintas aplicaciones de la situación que hicieron los maestros, identifiqué algunas adaptaciones para hacerla factible en el aula que, desde mi punto de vista, parecían conservar el sentido. Pero a la vez identifiqué dificultades asociadas a los objetivos de los criterios de congruencia. Veamos.

*Aspectos del enfoque que se llevan a la práctica.* Las decisiones asociadas a la creación del medio de los alumnos fueron, en algunos casos, favorables: optar por un tamaño grande de la figura (Liliana, Sara y Fabio); proponer distintos triángulos en una misma aplicación (Liliana, Sara y Fabio); presentar las figuras recortadas (Liliana). Algunas de estas decisiones significaron un cambio positivo en la gestión de los maestros respecto a las implementaciones con las dos situaciones anteriores (por ejemplo, Liliana y Fabio con un mayor tamaño de las figuras o Fabio al diversificarlas). La consigna que instauraron los maestros fue clara y no restringió a un mínimo de datos, tal como se había acordado en el colectivo. Hubo modificaciones a la situación que ayudaron a los maestros a avanzar en dirección de los criterios y que resultaron afines al enfoque didáctico. Es el caso de Liliana, quien aun dejando de lado la tarea de comunicar la figura, decidió involucrar a todos los alumnos en la construcción de un mismo triángulo dándoles los mismos datos, a fin de que buscaran otras maneras de describirlo. Otra modificación la hicieron Ignacio y Michelle, quienes, con el fin de que los alumnos se fijaran en los ángulos, restringieron el uso de medidas en la segunda aplicación. Esto generó muchas dificultades en los alumnos, no obstante, fue destacable su intención de no “decirles” el criterio que querían que surgiera. De fondo, fue un intento por seguir una idea subyacente al enfoque en la que los investigadores venían insistiendo desde el inicio: “(...) el alumno debe relacionarse con el problema respondiendo al mismo en base a sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución” (Panizza, 2003, p.62).



*Aspectos del enfoque que no fueron retomados.* Hubo omisiones y características del material usado en la creación del medio de los alumnos que implicaron dificultades: instrumentos que no estuvieron disponibles (ningún maestro aseguró la presencia del compás) y las hojas para la construcción de la figura (dos maestros volvieron a las hojas cuadrículadas -Ignacio y Fabio-). Las implementaciones pusieron de manifiesto dificultades para conducir las puestas en común, sobre todo en las clases de Sara y de Ignacio, quienes sostuvieron interacciones muy inductivas para forzar la emergencia de los criterios, contraponiéndose a la consigna instaurada (preguntas como “¿qué sobra?” -Sara e Ignacio-, afirmaciones como “son datos para corroborar” -Sara-; o acciones como destacar sólo algunos datos que aparecían en los mensajes para obtener un criterio -Liliana, Ignacio y Sara-). Esto desplazó el estudio de relaciones y propiedades que caracterizan un triángulo, dejando de lado el cuestionamiento al uso de la posición, que para esta primera aplicación era lo más importante.

La definición incompleta de la noción de congruencia que se dio con la situación anterior se superó en algunos casos<sup>73</sup> (Liliana e Ignacio) y en otros permaneció (Sara). Los maestros omitieron atender el desarrollo de alguna técnica para construir un triángulo con regla y compás a partir de ciertos datos dados, por lo que en todas las clases prevaleció el ensayo y error. Esto último, no se advirtió en el colectivo.

Con la segunda aplicación, las consignas buscaron dar lugar a la tarea de usar un mínimo de datos en los mensajes (tal como se había acordado en el colectivo). En algunos casos, las consignas fueron ambiguas e implicaron dificultades para a los alumnos (como vimos con Sara e Ignacio). La gestión nuevamente se concentró en la búsqueda de los criterios de congruencia. Las puestas en común poco se centraron en aspectos como la ambigüedad de la información causada, sobre todo, por la importancia que tiene para los alumnos la posición en la figura. El uso pertinente de vocabulario técnico fue de gran interés para los maestros. Esto fue más evidente en las clases de Sara e Ignacio.

*Las producciones de los alumnos.* Se encontró un bajo porcentaje de suficiencia de los mensajes. La principal razón no fue por la escasez de los datos que consideraron los alumnos para la reproducción idéntica, sino por la ambigüedad de las descripciones y la ausencia o toma incorrecta de medidas, sobre todo de los ángulos. Identifiqué dos

---

<sup>73</sup> Considerar que la transformación por simetría axial (la que refleja las figuras) no conserva la congruencia.

maneras en que se apoyan en la posición de los triángulos para caracterizarlos. En la primera, describen a la figura como si la posición fuera una propiedad subyacente a ella (lo que llamo *uso conceptual*) y, en la segunda, sí movilizan algunos conocimientos geométricos, y utilizan la posición para apoyar la tarea de construcción: un paso a paso de cómo construir la figura (la llamo *uso auxiliar*).

Resultó sorprendente que, para la primera aplicación, los alumnos consideraran los ángulos. Y, al contrario, también fue sorprendente que pocos alumnos de Liliana encontraran el caso LLL. En ningún caso, los maestros lograron que los alumnos establecieran los tres criterios de congruencia en sus aplicaciones.

Una dificultad que se destacó en los alumnos fue el uso del transportador. Esto deja ver la necesidad de un trabajo simultáneo al de la suficiencia de los datos: aprender a medir bien lados y ángulos. Incluso, el no saber trazar un triángulo dados los tres lados, o dados dos lados y un ángulo, etc., evidencia quizá otra necesidad, la de trabajar con los alumnos en construcciones con regla y compás. Probablemente algunos de estos conocimientos podrían adquirirse sobre la marcha, al analizar con los alumnos los fracasos obtenidos. Estos fracasos podrían ser el marco en el que el docente diera ciertas informaciones acerca de cómo usar los instrumentos, e incluso el compás para hacer un triángulo dados sus tres lados. Este análisis deja ver que lo que en un primer momento pareció una simple ausencia de un conocimiento previo, a saber, cómo trazar un triángulo, dados sus tres lados, en realidad puede constituir una situación alterna para abordar el contenido de los criterios.

Las dificultades que se identificaron en las implementaciones no pueden leerse únicamente a la luz de las falencias de los maestros. Faltó claridad, desde la transmisión de la actividad a los maestros, de la presencia de tres objetivos que quedaron sobrepuestos: i) lograr comunicar, con el número de datos que sea, la información para construir un triángulo congruente a otro dado, ii) lograr el mismo objetivo, pero con el mínimo de datos y iii) este es una continuación del ii, de hecho, su culminación: encontrar las tres formas de hacerlo (LLL, ALA, LAL). El segundo objetivo era fundamental, es ahí donde correspondía librar la batalla contra el aferramiento a la posición, identificando información sobrante y descubriendo que los señalamientos de posición son innecesarios para caracterizar la figura.

¿De qué otra manera se podían orientar las discusiones? ¿qué consignas convenían dar en cada aplicación? ¿qué recursos o estrategias de intervención permitían involucrar y sostener a los alumnos en la construcción de ideas como la *suficiencia* de los datos? Estas preguntas me llevan a dos aspectos. Por un lado, como ya mencioné antes, a un análisis previo insuficiente de las posibles resoluciones de los alumnos en relación con las restricciones que se previeron en el colectivo. Al omitir estas anticipaciones sobre la cantidad y las combinaciones de datos que podían surgir, se dejaron de prever posibles intervenciones para las diferentes cuestiones que podían aparecer. La otra cuestión es que, hacer avanzar a los alumnos hacia los criterios implicaba una fuerte intervención de los maestros en las puestas en común. Las dificultades que se dieron hicieron visible la necesidad de movilizar varios recursos para construir esos hechos/evidencias que logran orientar la acción de los alumnos.

c. La reflexión de la experiencia (reuniones posteriores)

A continuación, destaco algunos aspectos de la reflexión que hicieron los maestros sobre su propia experiencia y la retroalimentación que recibieron de los demás integrantes del colectivo.

*La reflexión individual de la experiencia, centrada en las dificultades de los alumnos y alejada de la propia gestión.* Al igual que en las dos situaciones anteriores, los maestros manifestaron la gran dificultad que tuvieron con la puesta en común. Entre los factores que destacan, queda muy desdibujada su propia gestión, y, sobre todo, ciertas deficiencias de la situación didáctica.

Sus reflexiones se concentraron en las consignas que dieron en las distintas aplicaciones y su relación con las producciones de los alumnos. Así como con las situaciones 1 y 2, poco refirieron a las decisiones sobre el material usado para la creación del medio de los alumnos. Los maestros que hicieron modificaciones a la situación planeada fueron conscientes de ellas y las compartieron con el colectivo como una vía para hacer avanzar la situación (Liliana e Ignacio), pero no todos identificaron si dicha modificación fue conveniente o no para su propósito. En el caso particular de Ignacio, no logró ver que las dificultades para que surgieran los criterios que involucraban a los ángulos, radicaron principalmente en la consigna que dio en la segunda aplicación (restringir el uso de medidas en los mensajes). En todo caso, las dificultades de los maestros aunado a los recursos que dos de ellos movilizaron para superarlas,

implícitamente, ponían en evidencia las deficiencias de la situación en relación con los criterios.

Las razones que los maestros atribuyeron a las dificultades se concentraron principalmente en los alumnos (siguieron sin usar vocabulario técnico o lo usan de forma incorrecta -Liliana, Ignacio y Sara-, no movilizaron sus conocimientos sobre triángulos -Ignacio-, no siguen las indicaciones dadas en la consigna -Sara-). El caso de Fabio destacó por una reflexión superficial de su experiencia con la implementación (recordemos que para este maestro se dieron todos los criterios en una única aplicación de la situación, pues los identificó omitiendo datos de los mensajes, a su consideración, para hacerlos aparecer).

Los errores de naturaleza geométrica que emergieron en el aula fueron invisibles para los maestros (Fabio con el criterio de congruencia y Sara con la noción de congruencia).

En relación con las resoluciones, los maestros destacaron dos cuestiones, por un lado, la insistencia de los alumnos en llamar diagonal a los lados de la figura que no están en posición horizontal y, por otro lado, los criterios que lograron en sus implementaciones (Sara: LLL y LAL; Ignacio: LLL y ALA; Liliana: ALA; Fabio: LLL, LAL y ALA). Hubo una reflexión interesante por parte de las maestras Sara y Liliana en relación con la dificultad del criterio ALA (a saber: que a los alumnos les fue difícil aceptar que dados dos ángulos y un lado era posible construir el triángulo, pues no veían con facilidad que el tercer vértice quedaba determinado al prolongar las rectas que contenían dos de sus lados). Cabe señalar que los investigadores no habíamos considerado estas dificultades geométricas en los alumnos en el análisis de la situación.

Los maestros dejaron ver que su interés fue propiciar la elaboración de los criterios, lo que los llevó a omitir en sus reflexiones otros aspectos como: el uso por los alumnos de la posición de las figuras, o de sus partes, para caracterizarlas (todos) y la forma en que ellos, los docentes, tendieron a inducir la suficiencia de los datos (todos). Incluso, tampoco expresaron dificultades importantes en los alumnos como la medición incorrecta de ángulos (por el uso del transportador) y el método para construir un triángulo (por ensayo y error).

Estas reflexiones que hicieron los maestros fueron, en parte, resultado de una intención didáctica construida previamente en el colectivo (en la reunión de planeación) y que, como investigadores, omitimos destacar (recordar) esos otros objetivos didácticos

(la caracterización de la figura con sus propiedades, por ejemplo) de la situación con los maestros. Ahora se puede ver que el poco tiempo que se dedicó a la planeación, sumado a un complejo y difícil proceso en el que los maestros identificaran en sus propias acciones (como la inducción a los alumnos, o el hecho de que no se cuestionó el recurso a la posición), deja en evidencia la necesidad de una experiencia más larga con los maestros.

*La reflexión colectiva sobre la experiencia (Las aportaciones de los “otros” sobre las experiencias de los maestros).* Las aportaciones entre docentes, al igual que en la situación 1 y a diferencia de la situación 2, destacó una colaboración entre pares que, si bien no se dio por la posición de un maestro observador, permitió una retroalimentación directa a las experiencias de los maestros. Sobresalió un episodio de la reflexión colectiva en el que los maestros tuvieron la oportunidad de retroalimentar la experiencia narrada por otro maestro (como vimos con Liliana y Sara cuando destacaron que dos causas posibles de las dificultades de Ignacio fueron la consigna ambigua y el uso de hojas cuadriculadas para las construcciones). A esto se suma la posibilidad que tuvieron de conocer, en las experiencias de sus colegas, otras formas de hacer en el aula (favorables o no). Considero que estas formas, junto con las reflexiones que se construyen en colectivo, enriquecen su proceso de apropiación de la situación.

Por su parte, los investigadores, desde su posición de observadores de las clases y a partir de las reflexiones individuales de los maestros, dieron una retroalimentación marcadamente *propositiva* aportando posibles estrategias que ayudarían a la mejora de las puestas en común e hicieron una *crítica* de aspectos específicos de la conducción de algunos maestros. La proposición de recursos de intervención se dio por las dificultades que se evidenciaron en las implementaciones y en respuesta a una demanda implícita que venían haciendo los maestros desde la primera experiencia en aula. Una estrategia destacada fue apoyarse en la validación empírica para propiciar aprendizajes de los alumnos (que todos los alumnos hagan un triángulo con los mismos datos para luego compararlos e inferir si ese conjunto de datos es o no candidato a un criterio de congruencia). La retroalimentación a las clases de algunos maestros se centró sobre todo en el caso de Sara, en la que el investigador destacó algunas dificultades que observó, por ejemplo, la aceptación por la docente de una definición incorrecta de congruencia donde la posición importa o el hecho de que los alumnos no estaban

quedando convencidos de la suficiencia de los datos para la reproducción idéntica. En el caso de Ignacio, lo invitó a reflexionar sobre los presupuestos de los saberes de los alumnos, sobre todo, con la medición de ángulos con el transportador y la construcción de triángulos con regla y compás. Por último, dos ideas generales de las implementaciones lograron posicionarse: la recurrencia al uso de la posición para caracterizar la figura en las producciones de los alumnos, junto con la necesidad de cuestionarla, y de tener presente el objetivo didáctico sobre la caracterización geométrica de las figuras.

Así, a lo largo de los tres momentos de la actividad reflexiva, la preocupación por la viabilidad de la situación en el aula (como pasó con la situación 1), fue cediendo y, en su lugar, aparecen indicios de apropiación de algunos planteamientos del enfoque didáctico: la conveniencia de prever las posibles producciones de los alumnos y sus estrategias de intervención en el aula y de ser reticentes durante el trabajo de los alumnos; el potencial de las situaciones de comunicación que se han venido utilizando, en particular, del trabajo geométrico de los alumnos que favorece su participación en la construcción de su propio conocimiento; la identificación de carencias en los alumnos y con ello la pertinencia de trabajarlas en el aula. Es destacable cómo la experiencia y la retroalimentación que recibieron los maestros aportó a su proceso de apropiación.

Otros aspectos requerirán de experiencias más largas de trabajo conjunto con los maestros para empezar a cambiar: la concepción del error como algo indeseable que debe erradicarse ipso facto y, junto con ello, la falta de confianza en que hay errores que los alumnos pueden superar por sí mismos (eventualmente con ayuda) a lo largo de varias aplicaciones. También deberá continuarse trabajando sobre otros aspectos relacionados con el trabajo geométrico, como la necesidad de cuestionar el uso de la posición en la caracterización de las figuras geométricas o el dar demasiada importancia al vocabulario.

#### 3.4.2 Dimensión de investigación.

A continuación, analizo cómo funcionó esta última fase del dispositivo de formación y cómo se reconfiguraron las formas de trabajo conjunto entre los maestros y los investigadores considerando la experiencia con las situaciones 1 y 2. Asimismo, los conocimientos co-construidos sobre la situación didáctica. En particular, analizaré: a) las

formas de interacción que sostuvieron los maestros y los investigadores, b) las formas y tensiones que se dieron con la retroalimentación, c) las formas de colaboración que se dieron y d) el conocimiento co-construido sobre la situación de triángulos.

a. La interacción entre los distintos actores

A continuación, destaco los aspectos de “encuentro” y “desencuentro” más importantes que identifiqué entre los integrantes del colectivo. Veamos:

*Encuentros.* En la planeación, los maestros y los investigadores coincidieron en su interés por las posibles producciones de los alumnos y las estrategias y recursos que ayudarían a conducir las puestas en común (al igual que en la situación 2); esto, con base en las dificultades que habían tenido los maestros con las anteriores dos situaciones. En las reflexiones sobre la experiencia, aunque implícitamente, coincidieron en que las razones de las dificultades que se tuvieron en el aula no se dieron por fallas en los alumnos (Ver Liliana y Sara y su análisis sobre los desafíos geométricos del criterio ALA; y a Ignacio, Sara y Liliana, determinando que elementos como la hoja cuadriculada y una consigna ambigua generaron dificultades en los alumnos). Claro está, no desapareció completamente la idea en los maestros de que los alumnos son quienes olvidan los temas y cometen los mismos errores, pero es destacable que se fijaran, a diferencia de las dos situaciones anteriores, en estos factores.

Ahora, tras el análisis, identifiqué otro aspecto en el que coincidieron los maestros y los investigadores: la necesidad de movilizar acciones adicionales para avanzar en dirección de los criterios, aun cuando estas pudieron implicar dificultades (como vimos con Liliana e Ignacio).

*Desencuentros.* Hubo dos episodios que pueden considerarse “desencuentros”, relativamente importantes. Un desencuentro ocurre en el nivel de la intención didáctica misma de la situación en juego: para los maestros el objetivo didáctico fue exclusivamente establecer los criterios de congruencia, mientras que para los investigadores aquél era un objetivo adicional al que se venía trabajando con las situaciones anteriores, más general, a saber, establecer información suficiente para la construcción de un triángulo (no necesariamente mínima). El otro desencuentro viene desde la primera situación, y tiene que ver con la concepción de los errores de los alumnos, los cuales tienden a ser vistos como fracaso por parte de los maestros, mientras que los investigadores, situados en una postura constructivista, tratan de verlos

como parte de un proceso de aprendizaje. Otros desencuentros fueron: la discrepancia de los investigadores frente a la reflexión de naturaleza geométrica que Fabio hizo sobre la forma en la que identificó los criterios en los mensajes (seleccionando un criterio del grupo de datos que aparecían en los mensajes) y la noción de congruencia (donde importa la posición) que movilizó Sara en sus implementaciones.

En la experiencia en torno a la situación 1, puede decirse que las posiciones de los investigadores y los maestros fueron en su mayoría asimétricas, debido a la notoria prevalencia de la voz de los investigadores. En la experiencia de las situaciones 2 y 3, la posición jerárquica del investigador, si bien no desapareció, permitió interacciones con los maestros más equilibradas en relación con los temas que se posicionaron en las discusiones, las preocupaciones y las aportaciones que hicieron. En particular, desde la situación 2, fue posible identificar algunas formas implícitas de interacción entre los participantes del colectivo que se fueron configurando a medida que avanzó la experiencia y que, aún con los desencuentros, permitieron una colaboración en dirección del objetivo común. Dicha colaboración se expresó en: i) la justificación por los maestros de sus puntos de vista (ver Liliana e Ignacio con las modificaciones que hicieron a la situación), ii) la regulación de los momentos de tensión para avanzar en las discusiones, lo cual se observa en el esfuerzo por entender el punto de vista de los demás y, si no, enfrentar o aceptar la discrepancia entre las formas de dar significado al objeto de discusión (como la decisión de los investigadores y demás maestros de no interpelar a Fabio por la manera de analizar las producciones de sus alumnos); aceptar las sugerencias para mejorar las implementaciones (Sara al aceptar que movilizó una noción incorrecta de congruencia).

#### b. La retroalimentación

Comentaré acerca de los tres tipos principales de retroalimentación que reciben los profesores, a saber, de los investigadores, de sus colegas y de su propia implementación.

*La retroalimentación de los investigadores.* En la reunión previa, los investigadores involuntariamente propiciaron que se centrara la atención solo en los criterios. Esto propició una retroalimentación limitada en el sentido de que no lograron comunicar a los maestros los distintos objetivos que se pretendían con la situación. Asimismo, aunque se hicieron propuestas para gestionar la clase, no se profundizó lo suficiente en las



posibles producciones que podían surgir y las formas de hacer frente a las dificultades que podían presentarse.

Tras la experiencia en aula, la retroalimentación se caracterizó por ser crítica y propositiva, en contraste con las dos situaciones anteriores. Al ser la última fase del dispositivo, también era la última oportunidad que tenían los investigadores para hacer evidentes algunas dificultades de las implementaciones y ofrecer a los maestros ejemplos de recursos que podían ayudarles a superarlas en sus próximas aplicaciones.

Se identificó una nueva forma para que se diera una retroalimentación entre los maestros: solicitarles explícitamente que pensarán en las causas de las dificultades que tuvo un colega en su implementación, aprovechando la apertura que el maestro Ignacio tuvo.

Frente a la reflexión que los maestros hicieron sobre las producciones de los alumnos, los investigadores tendieron a no opinar. Es probable que simplemente no sintieron la necesidad de hacerlo, pues el análisis de los maestros era pertinente, interesante y correcto. O bien, no percibieron en el momento mismo la importancia de las observaciones (como se hace en este análisis posterior a la experiencia).

Nuevamente, algunos maestros incurrieron en ciertos errores de naturaleza geométrica; en algunos casos se logró retroalimentar, como en el caso de la maestra Sara, y en otros no, como con el maestro Fabio. Como se vio con las situaciones 1 y 2, con el maestro Fabio los investigadores dejaron ver cierta tensión en el intento de retroalimentarlo. Un análisis transversal al proceso vivido alrededor de las tres situaciones deja ver una faceta difícil de la conformación de un grupo, así como cierta fragilidad y sensibilidad del proceso. Nos recuerda que no siempre los miembros de un grupo en gestación son inmediatamente empáticos, puede haber sentimientos de inseguridad o desconfianza que dificultan la comunicación. No obstante, si bien para los investigadores (ellos mismos en situación de aprender) fue más difícil interactuar con este maestro, el resultado final fue positivo. Él permaneció, participó y mostró mejoras que resultaban de los comentarios que se hacían en las reuniones o de lo que él observó en las clases de su compañera Sara. Otra cosa que queda en evidencia es que hay omisiones en las retroalimentaciones que se hacen porque no fueron visibles sino en un análisis posterior, o porque, simplemente, se carecía de información (por ejemplo, para esta situación no fue posible observar la clase del maestro). De ahí que hay que confiar

en que, en las experiencias más largas y, en las repeticiones, las retroalimentaciones sean más enriquecedoras.

*La retroalimentación entre los maestros.* Al igual que en la situación 1 y a diferencia de la situación 2, se dio nuevamente una retroalimentación directa entre los maestros promovida por el investigador (ver episodio en el que Sara y Liliana retroalimentan a Ignacio). Además, se mantuvo una retroalimentación implícita donde las reflexiones colectivas permitieron a los maestros relacionarse con otras experiencias y puntos de vista que enriquecieran su práctica.

*La retroalimentación que recibieron los maestros de su propia clase.* Las decisiones que tomaron los maestros en el curso de la misma clase, como movilizar recursos no previstos o que implicaron modificaciones a la situación, dejan ver que recibieron una retroalimentación del medio de su clase (*medio del maestro*, Margolinas, 1998) que los llevó a buscar la manera de ayudar a sus alumnos a avanzar hacia los criterios (como las modificaciones de Liliana e Ignacio). Claro está, no necesariamente esta manera es la más efectiva para superar la dificultad (como vimos con Ignacio), pues las retroacciones del medio están mediadas por las interpretaciones que hacen los maestros de estas.

### c. La colaboración

Con la situación 3 nuevamente algunas formas de colaboración se mantuvieron y otras se transformaron. Por parte de los maestros se dieron algunas que, al conservarse durante las situaciones 1 y 2, se consolidaron gracias a la estructura del dispositivo: hacer propuestas para la implementación de la situación en el aula y compartir sus experiencias individuales con el colectivo. Otras formas de colaboración se dieron por la interacción entre los distintos actores y las aportaciones para la implementación que surgieron en las discusiones. Estas se manifestaron en algunas decisiones que tomaron para la implementación (la decisión de Liliana y Fabio de aumentar el tamaño de las figuras o la de Fabio de diversificar las figuras) y en las participaciones que tuvieron en las reflexiones colectivas (retroalimentar la experiencia de un colega, buscando las razones de las dificultades que tuvo, que resultaron estar relacionadas con su gestión y, a su vez, aceptar las observaciones y sugerencias provenientes de otros colegas).

Los investigadores conservaron las formas de colaboración que se habían dado con las dos situaciones anteriores y movilizaron una adicional: promover y regular la retroalimentación entre los maestros.

Las formas de colaboración que se dieron a lo largo de las tres situaciones claramente surgieron de la interacción entre los investigadores y los maestros, así como de los aportes que cada uno hacía para la construcción conjunta de conocimiento. En un principio, las formas de colaboración se dieron por la estructura misma del dispositivo (el compromiso de planear la situación, para implementarla y luego discutir sobre las experiencias individuales). Con las situaciones 2 y 3, aparecieron otras formas de colaboración que, me parece, son de gran beneficio para la formación de los maestros: la retroalimentación entre los mismos maestros (ya sea ofrecerla o recibirla para adoptarla en sus propias clases).

d. La construcción conjunta (Conocimiento matemático-didáctico sobre la situación)

Las dificultades que tuvieron los maestros en relación con la formulación de los criterios de congruencia pusieron en evidencia la necesidad de hacer una previsión de estrategias de intervención para lograr este objetivo, tal como lo identifiqué en el análisis de las implementaciones. Frente a esto, encontré que los mismos maestros avanzaron en esa dirección: desarrollaron estrategias, algunas más efectivas, como la de Liliana de dar la misma figura y los mismos datos a todos los alumnos, o la de Ignacio, similar a la de Liliana, pero con una consigna ambigua. Considerando los aportes de los maestros y de los investigadores, se plantearon no solamente mejoras posibles a la situación original, sino la necesidad de situaciones complementarias para el objetivo de los criterios. Esto, en conjunto, constituye un conocimiento de ingeniería didáctica sobre la situación que emerge de la experiencia. Puede decirse que es un producto de la co-construcción del colectivo.

Entre las aportaciones de los maestros se destacaron sus implementaciones y la reflexión que hicieron de su experiencia. Ellos pusieron en evidencia tres asuntos. El primero, la necesidad de que, como investigadores, comuniquemos con claridad los distintos objetivos que se preveían con la situación, pues en la reunión de planeación quedaron sobrepuestos. El segundo, la necesidad de hacer ajustes a la situación didáctica en relación con la formulación de los criterios de congruencia y, el tercero, la

necesidad de movilizar diferentes recursos para hacer frente a las dificultades y poder avanzar hacia los criterios.

Los conocimientos que surgieron de la construcción conjunta que ayudarían a mejorar la factibilidad de la situación didáctica fueron:

- ✓ Considerar aspectos de las figuras modelo, los materiales e instrumentos para la reproducción: La experiencia de Liliana dejó ver la conveniencia de entregar las figuras recortadas, cosa que ya habíamos identificado con los modelos en madera que había hecho Fabio para la situación 2. También, la conveniencia de que las hojas sean blancas para evitar dar información adicional o que los alumnos creen que deben utilizarlos para describir la figura (como sucedió con el papel cuadriculado (Fabio e Ignacio). Finalmente, la necesidad de que el compás esté disponible para los alumnos.
  
- ✓ Estrategias de intervención para conducir las puestas en común: En la planeación surgieron estrategias como: i) dar un contraejemplo para desechar falsos criterios, ii) no restringir la primera consigna a un mínimo de datos, iii) restringir el primer criterio que surgiera para que aparezcan otros en las siguientes aplicaciones. En las clases de los maestros identificamos, con algunas dificultades, todas las anteriores. La experiencia en aula dejó ver un recurso que funcionó bien: involucrar a todos los alumnos en la construcción de un mismo triángulo con los mismos datos, para luego solicitar otras combinaciones de datos para construirlo (Liliana). Finalmente, de la reflexión tras la experiencia surgieron un par de estrategias de intervención que pueden ayudar a conducir la situación: i) Apoyarse en la validación empírica para propiciar aprendizajes de los alumnos (analizar un mensaje y persuadir a los alumnos sobre cómo estar seguros de que determinados datos siempre sirven para garantizar la congruencia: que todos los alumnos hagan un triángulo, con tres lados dados para luego encontrar que todos salieron iguales) y ii) Promover la búsqueda de mensajes económicos (cada mensaje es un telegrama y cada palabra tiene un costo; el objetivo es que este costo sea el mínimo).
  
- ✓ Actividades (de construcción) adicionales previas a la situación 3: Como vimos, quedó en evidencia la necesidad de que los alumnos sepan hacer construcciones de los triángulos con regla y compás a partir de ciertos datos dados. Encontramos que

el que ellos logren esto, es un asunto complejo, que va más allá de un problema técnico o de manipulación de los instrumentos: dados tres segmentos, ¿el triángulo que resulta existe y es único? Analizar si dicho triángulo existe o no, lleva a establecer la desigualdad triangular; construirlo, lleva a perfeccionar la técnica con el compás (la cual puede ser directamente enseñada, pues no es fácil que la establezcan los alumnos por sí mismos); determinar que el triángulo resultante es único (o que todos los que se produzcan serán congruentes) es más complejo. De hecho, implica ya establecer el criterio LLL. En este nivel escolar, no se puede aspirar a demostrarlo, pero sí se puede constatarlo empíricamente.

Así, las acciones o tareas que promuevan estos conocimientos en los alumnos podrían ser adecuadas para aprender a usar los instrumentos y, al mismo tiempo, encaminar hacia los criterios. No obstante, incluso considerando estas actividades adicionales, es posible que sea necesario que en cierto momento (en la tercera aplicación, sobre todo) debilitar el carácter adidáctico de la situación de comunicación, aumentando el grado de intervención del docente (o, lo que es lo mismo, disminuyendo la *reticencia*, en términos de Sensevy (2011)).

## CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

En este capítulo destacaré aspectos centrales de la experiencia de trabajo colaborativo que se desarrolló para esta investigación. Atenderé primero a la dimensión formativa, en la cual incluyo dos aspectos: las características de los procesos de apropiación que experimentaron los maestros, respecto a la situación didáctica de comunicación y del enfoque didáctico subyacente, a lo largo de la experiencia. En este punto me interesa discutir sobre cómo y por qué se puede hablar de aprendizajes por parte de los maestros. Me referiré también a la experiencia de los alumnos, a los conocimientos que pusieron en evidencia, y a sus posibles aprendizajes. En segunda instancia, trataré de responder a otra pregunta central de la investigación, relativa a cómo funcionó el dispositivo diseñado para el trabajo conjunto con los maestros.

### 4.1 Acerca de la formación de los maestros y los conocimientos de los alumnos

El dispositivo que se puso en marcha en esta investigación tenía como objetivo principal brindar una formación a los maestros acerca de la enseñanza de algunos aspectos de geometría, bajo un enfoque didáctico específico. La herramienta que escogimos los investigadores para el trabajo con los maestros fue la situación de comunicación de figuras que fungiría como una propuesta base, susceptible de modificaciones durante el transcurso de la experiencia, a fin de que fuera factible en las aulas. Distintas manifestaciones de los procesos de apropiación de las situaciones que experimentaron los maestros fueron un buen indicador para determinar qué aportes recibieron en relación con su formación. Estos procesos se entrelazaron en los distintos momentos del dispositivo: la planeación, la implementación en el aula y la reflexión sobre la experiencia y, se enriquecieron por las experiencias y aportes de cada uno de los integrantes del colectivo.

#### 4.1.1 Diversidad de formas de apropiación. La mirada desde la investigación

Como esperaba, cada uno de los cuatro maestros dejó ver formas distintas de apropiarse de las tres situaciones de comunicación, evidenciando con ello la singularidad de estos procesos, su relación con las condiciones en las que se desarrollaba la práctica de cada docente (institucionales como el tiempo de clase, los contenidos del programa, el acceso a materiales, el modo en que los alumnos actúan, entre otros), su concepción de

aprendizaje, sus conocimientos geométricos, etc. Lo interesante de esta diversidad fueron los cambios que se evidenciaron en la comprensión de las situaciones por parte de los maestros a medida que avanzó la experiencia colaborativa.

Con la situación 1, los maestros dejaron ver poca familiaridad con varios planteamientos del enfoque didáctico subyacente a las situaciones de comunicación (la importancia de la no intervención en relación con el saber durante el trabajo de los alumnos -posición reticente-, que los alumnos puedan juzgar por sí mismos los resultados de sus acciones desplazando validaciones centradas en los maestros, una concepción de los errores como parte de un proceso de aprendizaje y la posibilidad de superarlos con nuevas aplicaciones). También dejaron ver poca familiaridad con las situaciones mismas: privilegiaban la formalización de vocabulario geométrico por encima de otros aspectos que sin embargo explicaban la insuficiencia de las producciones de los alumnos, por ejemplo, la importancia que los alumnos daban a la posición de la figura para caracterizarla.

En las situaciones 2 y 3 los maestros siguieron manifestando dificultades para asumir algunos aspectos del enfoque didáctico, por ejemplo, dejaban ver una concepción negativa del error en las producciones de los alumnos, inducían en exceso las participaciones de los alumnos en las puestas en común para asegurar ciertas conclusiones, entre otros. Además, se sumaron nuevas dificultades debidas a los desafíos particulares que traía consigo cada una de las figuras implicadas en las situaciones, por ejemplo, tendieron a sostener una conceptualización de la noción de congruencia donde importaba la posición de la figura (recordemos aquí el caso de Ignacio con la situación 2 y Sara con la situación 2 y 3). A pesar de lo anterior, en estas dos situaciones, se empezaron a evidenciar, en todos los maestros, indicios de un proceso de apropiación: una consigna clara y completa en la situación 2; condiciones más favorables que en la situación 1 para configurar el medio de los alumnos: hojas blancas para las construcciones; en ambas situaciones, la disponibilidad de los instrumentos para la resolución de las tareas y la forma de presentarlos en el medio de los alumnos, entre otras.

Los avances y dificultades que se dieron en la manera en que los maestros comprendían las tres situaciones pudieron evidenciarse en los distintos momentos de la actividad reflexiva organizada en el dispositivo: la planeación, la experimentación en el aula y la reflexión de la experiencia.

En los espacios de planeación se esperaba que los maestros reflexionaran sobre las condiciones didácticas necesarias para mejorar sus posibilidades de gestión, anticipando y analizando las posibles producciones de los alumnos. No obstante, sobre todo al principio, se puso de manifiesto que maestros e investigadores tenían inquietudes diferentes. En la situación 1, por ejemplo, mientras los investigadores nos preocupamos por condiciones didácticas (la necesidad de una posición reticente de los maestros durante el trabajo de los alumnos, la importancia del error para justificar nuevas aplicaciones de la situación, la previsión de posibles producciones de los alumnos), los maestros pensaron en condiciones que hicieran viable la situación en sus contextos de práctica, con las características de sus alumnos y con lo que habían interpretado de la situación didáctica propuesta por los investigadores: el tiempo que se utilizaría para la implementación, la no pertinencia de la situación didáctica con el currículo escolar (en el caso del maestro Fabio), la honestidad de los alumnos como una condición necesaria para que la situación de comunicación funcionara y la organización del grupo en equipos de trabajo (número de integrantes).

A diferencia de la primera planeación en la que la discusión se movilizó por los supuestos de los distintos actores frente a una futura implementación, en las planeaciones para las situaciones 2 y 3, la experiencia en aula y, sobre todo, las dificultades para gestionar las puestas en común, determinó los objetos de reflexión en el colectivo: estrategias de intervención para conducir las puestas en común y algunas decisiones asociadas al *medio material* (el tamaño de las figuras modelo, los instrumentos disponibles para los alumnos, las consignas -como vimos en la situación 3-), dejando de lado las primeras cuestiones en las que se fijaron los maestros. Esto se debió, además, a la insistencia que tuvimos los investigadores y a la necesidad de los maestros de generar un aprendizaje en sus alumnos. La dificultad de gestionar las puestas en común sumada a la constante insuficiencia de las producciones de los alumnos fueron indicadores contundentes para el colectivo de que las respuestas de los alumnos no estaban ocurriendo tal como ellos esperaban.

En los momentos de experimentación en el aula, identificamos algunas decisiones de los maestros (intervenciones y modificaciones a las situaciones) compatibles con el enfoque didáctico que los investigadores tratamos de comunicar, mientras que otras no lo fueron. De principio a fin, la puesta en común se reveló como la fase más difícil para todos los maestros, aunque a lo largo de la experiencia con las tres



situaciones se evidenciaron algunos indicios claros de mejora. Con la situación 1, por ejemplo, destacó una gestión directiva por parte de los maestros centrada en el uso de términos técnicos y alejada de reflexiones sobre el por qué las figuras coincidían o no coincidían (información faltante, ambigua, errónea). En las situaciones 2 y 3, se mantuvo un panorama de dificultad, por ejemplo, con la situación 2, al centrarse en que los mensajes describieran un paralelogramo, olvidando la reproducción idéntica -Ignacio-; o bien, con la situación 3, al sobre interpretar las producciones de los alumnos para forzar la emergencia de los criterios -Sara e Ignacio-; o también en las dos situaciones, al conservar un especial interés por el uso correcto y necesario del lenguaje geométrico de las descripciones. No obstante, los maestros movilizaron nuevos recursos de intervención con el fin de que les ayudaran a superar las dificultades que habían tenido con la situación 1, una de las más destacadas fue la estrategia de *Maestro intérprete* para evidenciar errores y ambigüedades en las descripciones (como vimos con todos los maestros). Otro fue el recurso de permitir que los alumnos emisores agregaran información a los mensajes antes de la validación empírica y la puesta en común que, de hecho, fue propuesto por Ignacio en la situación 1 y adoptado por Sara y Fabio en la situación 2, el cual tenía el potencial para ayudar a alcanzar los objetivos de las tres situaciones, pero en ningún caso resultó favorable por las condiciones de intercambio de los mensajes que se dieron en el aula (que los autores del mensaje supieran qué información les faltaba a los receptores antes de ajustarlo). En todo caso, fue un esfuerzo de los maestros por mejorar sus implementaciones y con ello, favorecer el aprendizaje de sus alumnos.

La forma como se desarrollan las puestas en común son un indicador de la familiaridad que tienen los maestros con los planteamientos del enfoque didáctico, pues estos momentos de discusión no son «eventos naturales» de la vida en el aula” (Quaranta y Wolman, 2003, p.190), sino que deben ser organizados y conducidos por ellos. A esto se suma una alta valoración de estos momentos desde la concepción didáctica que se movilizó con los maestros (TSD), pues su riqueza está en que son “potencialmente fructíferos para la generación de confrontaciones, reflexiones y argumentaciones” (Quaranta y Wolman, 2003, p.190). Pero justamente por estas dos razones y por la falta de tiempo en las clases, se da la tendencia en los maestros de convertir estos momentos en una exposición de procedimientos por parte de los alumnos para luego instaurar los contenidos sin estar muy articulados con las discusiones y sin mucho sentido para ellos. Lo cierto es que estas dificultades, aunque en distintos niveles

y grados como vimos en los capítulos anteriores, no son particulares de estos maestros; desde nuestra concepción didáctica, sabemos de la riqueza de estos espacios, pero también, de que no hay una manera general de organizarlos con los alumnos, pues esto depende de muchos factores: los objetivos de enseñanza y del contenido matemático en cuestión (en este caso, particulares para cada una de las tres situaciones de comunicación), de los conocimientos de los alumnos (referencias frecuentes a conocimientos espaciales para caracterizar geoméricamente una figura), de lo que permiten las propias situaciones de enseñanza que están en juego (para el caso de la situación 3 se evidenció la necesidad de repensar la situación en relación con la formulación de los criterios de congruencia), del tiempo del que se dispone para esta fase de la clase (muy limitado e insuficiente para que los maestros realizaran varias aplicaciones de las situaciones), etc.

Otra fase de la situación que también resultó difícil para los maestros fue la validación empírica. En este punto, las modificaciones de los maestros fueron poco compatibles con lo propuesto en la situación: un caso notorio fue el de Fabio, quien validó reproducciones con la misma forma y distinto tamaño, o el de Ignacio al omitir el momento de validación empírica en la clase. De fondo, pareció manifestarse una creencia de los maestros de que los alumnos aprenden más a partir de sus correcciones y explicaciones que de la retroacción del *medio*. Pero también en este punto, en las situaciones 2 y 3, hubo una mejora notable, con todo y que en algunos casos quedó en evidencia una reducción del momento de la verificación en tiempo y en forma: superposiciones a cargo de los maestros o verificaciones con métodos como la comparación a simple vista. Además, aparecieron otras dificultades de naturaleza distinta, que implicaban conceptualizaciones incompletas de la noción de congruencia por parte de los maestros (a saber, que los giros e inversiones para hacer coincidir las figuras en la superposición invalidaban la congruencia de estas). Esta dificultad se hizo más evidente con la situación 3.

En relación con la validación que implica procesos de argumentación por parte de los alumnos (explicar el porqué de la congruencia o no congruencia de las figuras) que se entrelaza con las dificultades que se tuvieron en las puestas en común, encontré que la principal dificultad radicó en la escasez de momentos en la puesta en común en los que los alumnos explicaran, justificaran y debatieran sobre sus resoluciones y la de

sus compañeros. Esto nos remite de nuevo a la complejidad de conducir las puestas en común, y de integrarlas al momento de la verificación, por parte de los maestros.

Veamos ahora las respuestas de los maestros, y sus procesos, respecto de otras características del enfoque didáctico. Respecto a la recomendación de no intervención en relación con el saber durante la fase adidáctica de la situación, encontré que, con la situación 1, los maestros trataron de seguir la sugerencia de los investigadores de permitir que los alumnos se equivocaran y que el error emergiera en la misma situación, pero la interpretación de algunos fue asumirse como espectadores, dejando “solos” a los alumnos ante sus dudas e inquietudes (sin recordar, por ejemplo, las restricciones enunciadas en la consigna -como vimos con Ignacio-). Con las situaciones 2 y 3, la dificultad fue menor, pues las intervenciones de los maestros, sin indicar cómo resolver el problema, alentaron a los alumnos a hacerlo; además que estos ya se habían familiarizado con el juego de comunicación (lo que era válido incluir en los mensajes y lo que no). La dificultad que se aparece es entonces justamente encontrar intervenciones que permitan a los maestros sostener esta relación adidáctica de los alumnos con el problema, sin dar ayudas que impliquen decirles cómo deben resolverlo como pasó con Liliana en la situación 1 al sugerir la inclusión de medidas en los mensajes, o en una interpretación débil de la noción de adidacticidad en la que el maestro cree que debe asumirse como espectador del trabajo de los alumnos. En este punto, coincido con Margolinas (1993) cuando advierte que “no es el silencio del maestro lo que caracteriza las fases adidácticas, sino lo que él dice” (en Panizza, 2003, p. 65). También, no hay que perder de vista una idea en los maestros que está muy arraigada a sus prácticas y tiene mucho que ver con la resistencia que tuvieron, de principio a fin, para aplicar varias veces las situaciones: el error en las resoluciones implica el fracaso tanto del aprendizaje de los alumnos como de sus acciones de enseñanza.

Desde una perspectiva didáctica (la TSD), entendemos la importancia de estos planteamientos a la luz de una concepción constructivista del aprendizaje en la que los alumnos aprenden adaptándose a un medio “antagonista” que lo confronta y se resiste a sus primeras interacciones (Fregona y Orús, 2011), pero para los maestros, incorporar estas ideas en sus prácticas es de suma complejidad, pues entra en tensión con sus propias ideas sobre el aprendizaje y con las condiciones institucionales en las que se desarrolla su práctica: las exigencias del currículo, la diversidad de ritmos de aprendizaje de los alumnos, el escaso e insuficiente tiempo que disponen para la enseñanza y sobre

todo, la necesidad de atender a la consigna de “asegurar que *todos* los alumnos del grupo dominen *todos* los contenidos y competencias evaluables propuestos para el grado en un año escolar” (Rockwell, 2018, p.12). En este panorama, la concepción de aprendizaje de los maestros se ve atravesada por una necesidad de *inmediatez*, cayendo en la falsa idea de que el aprendizaje de los alumnos “es un reflejo o una consecuencia lineal de la enseñanza” (Rockwell, 2018, p.11). En fin, todo esto es lo que aflora, y con lo que debe lucharse, negociarse, para compartir poco a poco un enfoque didáctico que mejora al actual.

Finalmente, en los momentos de reflexión sobre la experiencia, cuyo objetivo era que los maestros lograran explicitar, comprender, explicar y analizar su propia práctica de manera retrospectiva (lo que hicieron o intentaron hacer y los resultados que obtuvieron), así como conocer y participar de la reflexión de las experiencias de sus colegas, encontré que los objetos de reflexión de los maestros se concentraron, en un inicio, en el estado insuficiente de las producciones de los alumnos (escaso o nulo uso de vocabulario técnico y sobre todo el bajo porcentaje de figuras que resultaron congruentes), pero aún sin identificar las características generales que estas tuvieron (por ejemplo, el excesivo uso de la posición para describir la figura). Hubo una escasa problematización de las puestas en común, la gestión no fue objeto de reflexión en esta primera parte. Frente a las dificultades que percibieron los maestros en sus clases, se dio la tendencia a atribuir las a factores externos a su gestión, siendo los alumnos la causa más destacada por ellos: *“olvidan los temas vistos en años anteriores”, “no están acostumbrados”, “(...) no les gusta pensar, no les gusta analizar, ni esforzarse”, “(...) hay que instigarlos, hay que estar incidiendo en ellos para que digan algo y no es muy fácil hacerlo. Empiezan a caer en el aburrimiento”*. Otro factor que destacaron fue la escasez de tiempo con la que se vio sacrificada la puesta en común: *“No se profundiza mucho en el análisis por falta de tiempo”*.

Con la situación 2, los maestros identificaron varias de las características de las producciones de los alumnos (la yuxtaposición de un rectángulo y dos triángulos como estrategia para describir el paralelogramo, la escasa presencia de las nociones de ángulo y de altura, la persistencia de un vocabulario no geométrico y el uso del término “diagonal” para describir lados del paralelogramo), aunque siguió sin detectarse el problema del uso de la posición para la caracterización de la figura. La atención en la gestión se asomó un poco con la concientización de los maestros de lo difícil que fue

para ellos encontrar formas de intervenir que les ayudaran a sostener y avanzar en las discusiones con los alumnos. En este punto del dispositivo, apareció con fuerza la preocupación de los maestros por la persistencia de los mismos errores en las producciones de los alumnos (que ya “*habían corregido y aclarado*” con la situación 1), por ejemplo, el uso correcto del vocabulario geométrico o la inclusión de medidas en los mensajes. La tendencia de atribuir a los alumnos las razones de las dificultades en el aula y la insuficiencia en las producciones se mantuvo.

Al igual que en la situación 2, con la situación 3 se conservó una mirada más profunda que en la 1 sobre las producciones, aunque aún limitada, pues continuó fuera el problema de la posición y el uso de la regla y el compás para construir los triángulos a partir de ciertos datos dados. Si bien la reflexión nuevamente estuvo alejada de la propia gestión en un sentido crítico, apareció un interés de los maestros por mostrar todo lo que hicieron para sacar adelante la situación, en particular, las modificaciones para hacer emerger los criterios de congruencia. Hubo estrategias efectivas, como la de Liliana de dar la misma figura modelo y los mismos datos para la reproducción a todos los alumnos y, otras no tanto, como vimos con Ignacio que movilizó una consigna ambigua que terminó restringiendo la inclusión de medidas en los mensajes. Los factores que explicaban las dificultades nuevamente se concentraron, en su mayoría, en los alumnos.

Identifiqué, que la reflexión de los maestros sobre su práctica involucró más elementos a medida que avanzó el dispositivo. Esto se dio a raíz de tres aspectos que quiero resaltar: 1) su propia experiencia en el aula, por ejemplo, por las dificultades con la puesta en común se interesaron en aspectos de la gestión (situación 3), 2) la experiencia de sus colegas, que les permitió ver la funcionalidad de otros recursos posibles para conducir las situaciones en el aula, y 3) la orientación de los investigadores, por ejemplo, con la invitación a fijarse en aspectos concretos en las planeaciones (las producciones de los alumnos o aspectos del medio material - instrumentos, tipo y tamaño de las figuras modelo, las hojas para la construcción y la consigna-). Pero, también hubo aspectos que quedaron fuera de sus reflexiones (incluso, a pesar de las retroalimentaciones que recibieron) o que no lograron profundizarse lo suficiente para lograr incidir en la práctica de los maestros. En relación con el enfoque didáctico, los maestros se resistieron a la idea de que el error en las producciones de los alumnos da cuenta de un proceso de construcción de conocimientos que se está dando

en los alumnos. Esto pudo verse a lo largo de las tres situaciones y fue más difícil de asimilar para unos maestros que para otros, pues algunos estaban menos familiarizados con el enfoque didáctico propuesto (como fue el caso de Fabio). En relación con la situación de comunicación de figuras, hubo aspectos que evidenciaron una apropiación débil por parte de los maestros. Hay indicios de que aspectos como los siguientes no eran dominados:

- La irrelevancia que tiene la posición de una figura geométrica para caracterizarla (todos los maestros / Situaciones 1, 2 y 3).
- Los datos necesarios para construir un paralelogramo pueden variar según los datos que se privilegien en las descripciones; por ejemplo, si se dan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, no es necesario dar el dato de la altura; o bien, si se da un lado, la altura correspondiente a ese lado y la distancia del pie de altura a un vértice, no es necesario dar el dato del ángulo (todos los maestros / Situación 2).
- La idea de que el uso de vocabulario geométrico en las descripciones era importante, pero no lo más importante para describir una figura (maestro Ignacio / Situaciones 1, 2 y 3).
- Los datos mínimos necesarios para obtener triángulos congruentes determinan tres criterios (LLL, LAL, ALA) en los que el orden en el que aparecen las letras es crucial para que se cumpla el criterio (maestro Fabio / Situación 3).
- La inconveniencia de agregar líneas paralelas a los lados de paralelogramo y/o alguna de sus líneas diagonales para la caracterización de la figura por parte de los alumnos (Maestra Leticia / Situación 2).

#### 4.1.2 Los conocimientos de los alumnos.

Considerando que el acento de la investigación estuvo en los maestros y que el aprendizaje de los alumnos era un interés común entre los maestros y los investigadores, las producciones de los alumnos se convirtieron en objeto de reflexión en el colectivo. Me interesa retomar cómo resolvieron los alumnos las situaciones que les plantearon los maestros y destacar las dificultades y los indicios de aprendizajes a lo largo de las tres aplicaciones.

En las tres situaciones, las producciones de los alumnos dejaron ver escasos conocimientos frente a la posibilidad de caracterizar geoméricamente una figura. Se dio

una constante insuficiencia de los mensajes para lograr el objetivo de la congruencia de las figuras. Hubo razones transversales a las tres situaciones, así como aspectos particulares a cada una de ellas. Con la situación 1, la insuficiencia se explicó por la ambigüedad que generó la constante referencia a conocimientos espaciales en las descripciones (línea, horizontal, vertical, inclinada, línea a la derecha o a la izquierda de otra, arriba, abajo), la ausencia de términos técnicos o el uso incorrecto de estos y, en algunos casos, la ausencia de medidas. Con la situación 2 y 3 se mantuvo el hecho que los alumnos consideraran la posición como una propiedad intrínseca a la figura y desapareció casi por completo el problema de la ausencia de las medidas (al menos para el caso de los lados de la figura). Para la situación 2 en particular, el reto para los alumnos era poner en juego la noción de ángulo para comunicar las características del paralelogramo, pero este no apareció en la mayoría de los mensajes (no por ello se evitó siempre que se comunicara la figura). A cambio, aparecieron otras estrategias para describirlo como la yuxtaposición de dos triángulos y un rectángulo. Finalmente, con la situación 3, además de la ambigüedad en las descripciones, la insuficiencia se dio por la medición incorrecta de ángulos. Identifiqué dos estrategias que usaron los alumnos para describir los triángulos donde la posición jugó un papel distinto. El uso conceptual, entiende la posición como propiedad subyacente a ella (como ocurrió con las dos situaciones anteriores) y, el uso auxiliar, pone en juego la posición, pero esta vez solamente para apoyar la tarea de construcción: un paso a paso de cómo construir la figura. Aquí las descripciones movilizaron conocimientos geométricos (se nombra la figura, se movilizan algunas propiedades, se usa correctamente el vocabulario técnico), lo que significó un gran avance respecto a las situaciones anteriores. En relación con el objetivo de los criterios de congruencia, encontré que el primer conjunto de datos que consideran los alumnos para la reproducción está compuesto por los lados del triángulo y, en algunos casos, consideran un ángulo. La principal dificultad estuvo en la idea de *suficiencia*, pues no quedó claro para los alumnos que con tres datos (y específicamente con tres combinaciones: LLL, LAL y ALA) era posible obtener un triángulo congruente al que tenían y, además, que servían para cualquier triángulo que tuvieran que describir. Otra dificultad fue que los alumnos no sabían (o no recordaban) cómo trazar un triángulo, dados sus tres lados, lo que aumentó la dificultad en la construcción de la figura.

Aun con las dificultades que se dieron, es claro que los alumnos mejoraron su desempeño, comprendieron mejor la dinámica del juego de comunicación, enriquecieron

y aclararon sus mensajes, pero no lo suficiente. Requerían de un mayor número de experiencias con cada situación (sobre todo con la 2 y la 3), de una gestión que también siguiera volviéndose más eficiente, y, en el caso de la situación 3, de cierto rediseño que comentaré más adelante.

#### 4.1.3 La reflexión como práctica colectiva. La perspectiva de los maestros

Me interesa destacar en este apartado cuál fue la percepción de los maestros frente a su experiencia de trabajo en el dispositivo propuesto por los investigadores. Para ello, me apoyo en fragmentos de sus intervenciones hechas en la segunda parte del último encuentro colectivo que tuvimos, en el que se reflexionó sobre algunos aspectos destacables de la experiencia y otros que son susceptibles a mejora. También uso fragmentos de las entrevistas que realicé, a nivel individual, algunos días después de la finalización de la experiencia colaborativa.

Me importa esa mirada en retrospectiva, conocer de la voz de los maestros cómo vivieron esta experiencia de trabajo conjunto con investigadores y demás colegas (incluyendo colegas de otra escuela), qué aspectos consideraban que habían funcionado bien y qué otros no fueron relevantes para ellos. Además, qué aspectos de las situaciones didácticas favorecieron el aprendizaje de sus alumnos.

##### a. Los aprendizajes que identificaron para sí mismos

En la reflexión sobre los posibles aprendizajes los maestros destacaron dos cuestiones: i) el trabajo entre pares y ii) los aportes del observador externo.

i) Una nueva connotación del trabajo entre pares que se construyó en los maestros a partir de su participación en el dispositivo.

Todos los maestros, frente a la pregunta sobre cómo les había parecido la dinámica de trabajo de tener encuentros de discusión antes y después de las implementaciones en aula, resaltaron la discusión y reflexión entre pares como una forma de trabajo que enriqueció sus prácticas frente a la manera de llevar al aula las situaciones de comunicación durante el desarrollo del dispositivo:

Sara (M): Sucede lo mismo que con los estudiantes, yo creo que muchas veces aprendemos entre pares más que de manera individual. Definitivamente, yo aprendí mucho de mis compañeros al escuchar sus experiencias, me dan ideas, me imagino cómo



fue su clase y veo qué puntos puedo yo considerar que me pudieron haber servido. Definitivamente la actividad, los consejos, las modificaciones, porque cada uno de nosotros tomó sus propias modificaciones por las condiciones del grupo [de alumnos], por las características de su trabajo, por las decisiones que las hayamos tomado... sin embargo, el hecho de reunirnos y que seamos varios y que estemos hablando de lo mismo nos brinda un panorama más amplio que si yo hubiera sido sola... No hubiera tenido todo el aprendizaje que tuve de mis compañeros, no hubiera podido visualizar qué hubiera pasado si hubiera hecho esto, porque a lo mejor en una sesión fueron muchas experimentaciones, fueron muchos resultados de qué pasó y sin la necesidad de yo probarlo tantas veces. Aquí estamos cuatro [maestros] que la aplicamos entonces en una aplicación yo me llevé la de cuatro, entonces aprendí y aprendí mucho.

Para Sara, el diálogo que se había logrado entre los maestros era comparable con el trabajo que se da entre los alumnos en las clases. El sentido de esta comparación fue positivo; para ella, hubo una experiencia de aprendizaje que implicó la posibilidad de conocer otras maneras de hacer en aula que estaban en el marco del mismo proyecto de enseñanza y de retomar aquello que consideraba le podía ayudar a mejorar su comprensión de las situaciones y con ello sus implementaciones. Aquí no sólo se trató de conocer otras formas de intervenir en el aula para adoptarlas sino, incluso, para no hacerlo.

El maestro Ignacio amplió esta postura, relacionándola con la forma de trabajo de *Aprendizaje entre pares* que se les viene solicitando a los maestros desde hace muchos años a través de los Consejos Técnicos escolares -CTE-:

Ignacio (M): Acaba de pasar ahorita la junta de Consejo Técnico (...) nos tocó algo que se llama *Aprendizaje entre pares*. El aprendizaje entre pares es un anhelo educativo, es un sueño que finalmente cuando se lleva a cabo se convierte en pesadilla porque no aprendemos nada entre pares. Lo que ustedes [los investigadores] están proponiendo no es algo nuevo, sin embargo, anoto las diferencia que vi: le dieron funcionalidad, como los muchachos con el lenguaje [geométrico], le dieron funcionalidad al trabajo entre pares...Tengo trabajando con Lili creo que más de 15 años y creo que es la primera vez que yo me llevo unas ideas de ella, otras ideas de la maestra [señalando a Sara], porque se volvió funcional al estar aquí, a lo que nos enfrentamos en el aula y cómo lo solventó cada uno de nosotros; entonces ya es significativo porque bueno yo puedo decir: *yo hice esto*, pero no era el problema que tenía otra maestra en su aula, sin embargo, ahorita aquí sí lo era y entonces eso permite que sí sea funcional el aprendizaje entre pares. Yo tengo ya casi 20 años de servicio y es la primera vez que veo un verdadero trabajo entre pares... yo le dije en la sesión pasada a Lili: *Lili, me voy a robar esta idea tuya* y también le dije a Michelle [su maestra practicante] que había que ver cómo le vamos a hacer para ese orden de la maestra Sara....entonces sí se ve ese aprendizaje que aquí [en su escuela] la verdad no se da, pero es por la dinámica que ustedes lo organizaron...yo sí decía que no aprendía nada en esas reuniones de aprendizaje entre pares, no hay una cabeza que lo dirija, que tenga una visión clara de cómo se va a dar, de qué se necesita etc., sin embargo, aquí sí la hubo.

Los CTE son espacios que institucionalmente “deben analizar temáticas relativas al plan y programas de estudio, métodos de enseñanza y evaluación. (...) en los que los profesores tienen la oportunidad de compartir experiencias, movilizar sus saberes y reforzar áreas de oportunidad” (González, De la Garza, y De León, 2017, p.25); son considerados como espacios propicios para fomentar el desarrollo profesional del personal docente de las escuelas (SEP, 2019). En efecto, como mencionó Ignacio, la forma de trabajo entre maestros que permitió el dispositivo no era nada nuevo para ellos. Lo nuevo, era su percepción positiva frente a ella, a partir de las condiciones de trabajo en las que se dio la experiencia colaborativa. Con esto, hay un problema que se asoma, en el que no puedo profundizar aquí, pero que ha sido documentado ya desde hace muchos años: la discrepancia entre el discurso oficial sobre cómo deberían funcionar los CTE (y lo que se espera de este) y lo que ocurre realmente en las escuelas. El asunto es que las cuestiones pedagógicas y didácticas “ocupan un lugar periférico con relación a otras instancias de la organización institucional, especialmente las Comisiones” (Ezpeleta, 1990, en González et al., 2017, p. 17). De acuerdo con Ignacio, estas cuestiones ya no sólo parecen desatenderse por cuestiones organizativas y administrativas, sino porque hay cierto desconocimiento sobre las necesidades reales de los maestros respecto a los procesos de enseñanza y de aprendizaje que tienen en sus aulas y sobre formas de trabajo que favorezcan este diálogo e intercambio de experiencias que tanto se les pide (“*no hay una cabeza que lo dirija, que tenga una visión clara de cómo se va a dar, de qué se necesita etc. (...)*”).

Frente a esto, no podemos olvidar que no es característico del trabajo docente que los maestros sostengan prácticas colaborativas con sus colegas, por el contrario, por las mismas condiciones institucionales en las que se da su práctica, su trabajo pedagógico y didáctico es solitario y apartado de ellos (Fullan y Hargreaves, 2000), tal como mencionaron los maestros Sara y Fabio:

IY: ¿Entre maestros es usual este tipo de prácticas colaborativas o no?

Sara (M): En la realidad no es usual, a pesar de que a veces tenemos el mismo grado, cada profesor trabaja de manera independiente, no coinciden en horarios, en tiempos...hay tantas situaciones que tenemos dentro del plantel que es difícil hacer ese espacio o bien no está la iniciativa.

(...)

Fabio (M): No nada, hay maestros que llevan 20 años y van a seguir siendo aislados. No hay una convivencia ni un: “*Te platico como me fue*”.

Quiero aclarar que con estos puntos de vista críticos sobre los CTE no intento extender esta situación a todos los maestros del sistema educativo, pues es la realidad que exponen y viven los maestros que participaron en la investigación, pero no es difícil suponer que se trata de un problema generalizado y no resuelto.

Detrás de la percepción positiva que manifestaron los maestros sobre el trabajo entre pares, ellos reconocieron una experiencia de aprendizaje en relación con la posibilidad de mejorar sus propias prácticas. El valor central de esta forma de trabajo no está en el hecho mismo de trabajar con *otros*, sino en las condiciones en las que se desarrolló: que todos se enfrentaron al mismo problema en tiempo y forma (las mismas situaciones didácticas y un mismo periodo de tiempo para la implementación con sus alumnos) como lo manifestó Ignacio; que compartieran su experiencia y, a la vez, conocieran las de sus colegas (la forma como organizaron su clase y prepararon los materiales, los recursos de intervención que movilizaron, las dificultades que tuvieron, las características de las producciones de los alumnos, la recepción que estos tuvieron de la situación, etc.), como lo expresó Sara. A partir del conocimiento de estas *otras* experiencias enmarcadas en el mismo proyecto de enseñanza y desarrollada en condiciones de trabajo similares, los maestros tuvieron la posibilidad de decidir qué elementos y recursos movilizados por sus colegas les convenía retomar para mejorar sus futuras implementaciones. Esto es lo que para Ignacio significó *funcionalizar* el trabajo entre pares.

ii) El observador externo. Una mirada que complementó la reflexión de la práctica

La observación de las implementaciones fue otra de las condiciones en las que se dio el trabajo conjunto con los maestros ofrecidas por el dispositivo. Con la primera situación se dio la posibilidad de que, al igual que los investigadores, algunos maestros también fueran observadores externos de las clases de sus colegas.

Frente a esto, los maestros Sara y Fabio destacaron lo siguiente:

Sara (M): (...) Me parece muy interesante, muy enriquecedor que ustedes [los investigadores] hayan tenido la oportunidad de hacernos las observaciones; es distinto porque uno percibe cosas, pero nuestra mirada es limitada a la de alguien externo que nos pueda hacer otro tipo de comentarios o que pueda observar otro tipo de cosas...A

veces son tantos alumnos que a veces no somos capaces de ver todo lo que sucede, esto nos permite tener un panorama más amplio de lo que sucede en el aula.

(...)

Fabio (M): Nos pasa [a los maestros] exactamente lo que pasó con los niños. La información que ellos están dando creen que es la correcta y no tenemos un reflejo, y esto es lo que se alcanzó a ver aquí, porque cada quien exponía su experiencia y venían las observaciones que estaba haciendo el supervisor [señalando al ID]... A veces no las notamos porque parecemos que estamos con un tema, cuidando a este [alumno], escuchando la participación de otro [alumno], etc. Entonces todo eso es lo que sí se vino aquí a reforzar (...) Yo siento que sí logramos bastante y nos dimos cuenta que a veces estamos correctos y a veces no, a veces cometemos errores porque hasta eso, **porque cuando tenemos a alguien que nos está observando nosotros nos damos cuenta que la regamos**, pero cuando estamos solos podemos envolver al niño... pero cuando está una persona que nos está observando dices: ¡Chin, hay que rectificar de manera más oficial!

Para los maestros, esta mirada externa que les ofreció el observador, complementó su propia mirada frente a la experiencia que tuvieron en el aula. Les permitió ver cosas que ellos no vieron, incluso, en el caso de Fabio, le exigió estar más atento a su propia gestión para no equivocarse. Frente a esto, quiero hacer dos observaciones. La primera, es la apertura que tuvieron los maestros para permitir observadores de sus clases<sup>74</sup>, para que los comentarios se hicieran de manera pública en el colectivo y, en algunos casos, que no sólo vinieran de los investigadores sino también, de otros maestros (como vimos con Sara y Liliana con la situación 1). Esta apertura de los maestros se dio, en principio, por las condiciones de trabajo que se plantearon en el dispositivo y que ellos aceptaron, pero a medida que avanzó la experiencia, se volvió más real, más sustanciosa: los maestros asumieron una postura en la que se atendían a otros puntos de vista, a otras posibilidades de intervención en el aula que, en ocasiones, fueron retomadas para mejorar su gestión como vimos con: Sara y Fabio al retomar el recurso de agregado de información de Ignacio en la situación 2; la adopción de Fabio, en la situación 3, de un mayor tamaño en las figuras como lo sugerimos los investigadores y que había funcionado en la clase de Sara. Esta

---

<sup>74</sup> Conviene recordar que como investigadores no teníamos planeado que estas observaciones a las clases de los maestros fueran obligatorias. Teníamos muy claro lo intrusivas e intimidantes que pueden llegar a ser para ellos. Considerábamos que, sobre la marcha, si se lograba establecer una mínima confianza con los maestros, posiblemente algunos de ellos aceptarían, o incluso se interesarían en agregar ese elemento a su experiencia. Nos sorprendió que desde el inicio algunos se mostraron dispuestos, incluso, accediendo a que estos observadores las hicieran sus colegas.

característica de repensar algo que se toma como natural y correcto, como lo es la práctica, es una de las tres actitudes que Dewey considera necesarias para la *acción reflexiva* de los profesionales (en Zeichner, 1993). Las reflexiones de Sara y Fabio fueron un indicador de que la actividad reflexiva del dispositivo funcionó, aún con las dificultades que señalé en los capítulos anteriores (retroalimentaciones limitadas de los investigadores y maestros frente a todo lo que ocurrió en el aula).

Mi segunda observación, está vinculada al comentario de Fabio sobre su necesidad de hacer las cosas bien porque hubo alguien que lo observaba. Aunque en su participación, el maestro reconoció aspectos positivos de esta observación externa, dejó ver que esta impresión no la comparte en otros casos; nótese, por ejemplo, que llamó *supervisor* al ID. La observación para los maestros tiende a relacionarse con la evaluación de sus prácticas, donde estas se “juzgan” y terminan afectando su desempeño docente. De acuerdo con Rockwell (2018), esta *lógica de fiscalización* no aporta mucho a nivel formativo, pues solo ofrece “una larga lista de lo que no se observó, lo que el maestro no hizo durante la hora de observación (...), ofrece muy poca información del trabajo real de los maestros frente a grupo, y los problemas que enfrentan en diferentes condiciones y subsistemas” (p.18); por esto, en la mayoría de los casos los maestros se sienten renuentes, molestos e incluso nerviosos ante la observación, más aún, si son videograbados. Esto lo pudimos ver justo con el maestro Fabio, quien se negó a que sus clases fueran grabadas en audio y video. De entrada, había dos retos de la investigación frente a esta problemática. El primero, transmitir a los maestros una idea de observación contraria a la que estaban acostumbrados, pues el propósito era formativo y nada tenía que ver con instancias evaluativas de las escuelas como los supervisores o inspectores. El segundo reto, subyacente a los principios del modelo colaborativo, nos ponía como investigadores en una posición en la que queríamos comprender las dificultades que podía implicar para los maestros usar una herramienta de trabajo como la situación de comunicación de mensajes. Sólo a medida que avanzaba la experiencia se fue desestimando esta mirada evaluativa frente a la observación, sobre todo, aquella que venía de los investigadores, pues las retroalimentaciones que recibieron no consistieron en señalar qué estuvo bien y qué estuvo mal con fines evaluativos, sino en destacar aspectos favorables de las clases, y ciertamente también cosas susceptibles de mejora, pero con ánimo muy claro, creemos, de contribuir a mejorar. Además, recordemos que, al menos con las situaciones 1 y 2, la

retroalimentación de los investigadores fue limitada (débilmente crítica) frente a las dificultades que observamos en el aula.

Se tiene entonces, que la dimensión formativa que reconocieron los maestros tuvo que ver con la posibilidad de reflexionar con otros su propia práctica. Así incluso lo mencionó el maestro Fabio: "(...) pues ustedes aportaron la herramienta [las tres situaciones] porque el profesor está acostumbrado a hacer una planeación, es un requisito, no hay nada novedoso ahí".

Desde el modelo de colaboración de esta investigación, la formación es vista justo como la posibilidad que se abre para los maestros de reflexionar sobre su práctica, comprender mejor las situaciones, las producciones de sus estudiantes, para volver a ciertas dimensiones de su enseñanza (Desgagné, et al, 2001). Como vimos, este hecho fue reconocido por los maestros, pero dieron especial atención a la forma como lo lograron: una reflexión de la práctica *colectiva* en la que cada maestro puede apoyar y sostener el desarrollo profesional de otro (Zeichner, 1993).

***La situación didáctica de comunicación. Condiciones favorables para el aprendizaje de los alumnos y la enseñanza de los maestros.***

Otra cuestión que destacaron los maestros frente a su experiencia de trabajo en el dispositivo fue las situaciones didácticas con las que trabajaron. Reconocieron en ellas dos características favorables para el aprendizaje de los alumnos y para su propia comprensión de algunos planteamientos de enfoque didáctico.

1. La comunicación (escrita) como una manera de que los alumnos expliciten y expresen sus conocimientos.

Ignacio (M): yo creo que la actividad [la situación] en sí, la forma en que está planteada favorece esta situación que plantearon desde el 2006 (...) Ellos [los alumnos] no saben comunicar, inclusive, no saben ordenar lo que está en su cabeza ...Al escribirlo, permite ordenar, permite comunicar y permite desarrollar competencias que dejamos de lado por ser matemáticas. Yo sí decía que me gustaba que ellos les expliquen a sus compañeros, pero jamás que lo escribieran, me parece que eso es lo más importante de esta actividad, que permite uno a uno ordenar los procesos que sigue el cerebro; tratar de comunicarlo y ver si lo que hice surtió el efecto que yo pensaba que tendría. En los planes de estudio viene la habilidad de comunicar y no dice de qué forma, pero con esto me di cuenta que lo importante es que lo escriban (...)

(...)

Liliana (M): Lo que ustedes nos propusieron con la actividad es cómo están procesando las cosas [los alumnos], cómo se comunican y eso es lo que enriquece. Nunca nos habían dicho que cuando los muchachos tratan de comunicar se van a forzar a usar términos matemáticos, a ver cómo están pensando. Sí nos habían dicho: *es que hay que ver cómo están pensando, hay que ver que ellos sean conscientes de qué proceso siguen para llegar a la solución de algún problema*; pero no que lo hicieran comunicando y aquí lo rico creo que es eso.

En efecto, una característica interesante de las tres situaciones es el lugar que le da a la comunicación y, sobre todo, que la convierte en una herramienta para resolver el problema; no es comunicar por comunicar, aquí la comunicación es parte de la situación misma; se funcionaliza. De acuerdo con Brousseau (2007), la comunicación de un conocimiento “correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico)” (p.25). A este proceso que sucede en los alumnos, reconocido por Ignacio y Liliana, se sumó Sara.

## 2. La funcionalización del conocimiento.

Ignacio (M): En cuanto a geometría, creo que la actividad permite que nosotros podamos sustentar lo que luego les manejamos como Rigor académico: *es que te lo tienes que aprender porque así es*, pero ellos no le ven una funcionalidad y aquí sí la hay... si yo no sé qué es un vértice y le llamo punto, pues el otro [compañero] no me va a entender; entonces le da intención a lo que manejamos, le da rigor académico... aquí en la actividad nos permite que todos los términos geométricos cobren un sentido especial porque si yo lo manejo bien y el otro también entonces nos podemos entender (...) la intención es que ellos vayan construyendo el lenguaje y lo que ya sabían lo vayan reforzando y vean que tiene una función.

Con este ejemplo, Ignacio destacó ante el colectivo un aspecto que caracteriza las situaciones adidácticas (como la de comunicación de figuras): el carácter de necesidad de los conocimientos que se pretenden con ellas. En efecto, desde la TSD, el conocimiento al que se aspira debe ser necesario para la resolución de la tarea, esto implica que “(...) no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende (...)” (Panizza, 2003, p.63). La identificación de esta característica por parte del maestro pone en evidencia lo que a veces sucede con la enseñanza: los conocimientos carecen de *sentido* para los alumnos; es decir, “no [se] logra que los alumnos vinculen los contenidos matemáticos con aquellas situaciones en las cuales funcionan como medios de solución” (Quaranta y Wolman, 2003, p.192). La perspectiva de Ignacio fue compartida por Sara y Liliana.

### 3. La posibilidad de los alumnos de construir su propio conocimiento.

Fabio: (...) La herramienta [las situaciones] fue importante porque el profesor no está acostumbrado a hacer una dinámica de este tipo donde utilices una figura, donde les establezcas un problema a los niños y donde ellos traten de buscar su solución. Normalmente todos los profesores les decimos: *A ver, este es el procedimiento y se hace así y ahora les pongo un ejercicio.*

La reflexión del maestro deja ver consideraciones sobre el aprendizaje que son fundamentales en las posturas constructivistas, como el hecho de que los alumnos aprenden enfrentándose a un problema de manera autónoma en el que tienen la posibilidad de poner en juego sus conocimientos y recibir información sobre su resolución. Pero a su vez, deja ver una impresión positiva sobre esta “dinámica” de las situaciones de comunicación que trabajó con sus alumnos. Si bien, quedó nuevamente en evidencia la poca familiaridad de este maestro con varios planteamientos del enfoque didáctico, también lo fue su sensibilidad para tomar nota, en alguna medida, de varios de sus componentes básicos; es probable que, con más experiencias orientadas en la misma dirección que esta, el maestro podría apropiarse en mayor medida del enfoque y mejorar su trabajo docente.

En esta primera parte sobre la dimensión formativa quise dar cuenta de la complejidad que subyace a los procesos de apropiación de situaciones enmarcadas en un enfoque didáctico específico como la TSD. El propósito de ofrecer una formación a los maestros se cumplió en el marco del trabajo conjunto durante el desarrollo del dispositivo. La experiencia particular de cada uno de los maestros fue objeto de reflexión individual y colectiva permitiendo “capitalizar” su propia experiencia y brindándoles la oportunidad de mejorar (con cada situación) algunas de sus intervenciones en aula y de volver incluso a conceptos matemáticos.

Los cambios y permanencias en las formas de apropiación de las situaciones que logré evidenciar dejaron ver que los maestros construyeron nuevas comprensiones a partir de su experiencia y de la interacción con los otros docentes implicados y con los investigadores; tal como se postula en el modelo colaborativo (Bednarz, 2000). La diversidad de formas de apropiación puso en evidencia varios aspectos que inciden en la forma como los maestros interpretan y llevan al aula las situaciones. Una de ellas es que no todos los maestros tienen el mismo punto de partida, es decir, unos estaban más



familiarizados con el enfoque didáctico que otros, –por ejemplo, Sara conocía algunos planteamientos básicos a diferencia de Fabio–. Otra es, como ya mencioné antes, el peso de las condiciones en las que se da el trabajo docente. En este punto quiero resaltar dos que están directamente relacionadas con la enseñanza de la geometría y que destacaron en las entrevistas con los maestros. Me refiero a la escasez de cursos de actualización sobre geometría y su didáctica que oferta la SEP y a la perspectiva geométrica que se moviliza en los cursos complementarios dirigidos a los alumnos de secundaria como es el caso del club de *Geometrizarte* (este fue un caso expuesto por el maestro Fabio que retomaré más adelante).

Frente a mi pregunta por sus acercamientos con cursos de geometría y su enseñanza durante su formación continua, los maestros mencionaron lo siguiente:

Ignacio: (...) A mí me gusta ser un maestro que sí va a cursos, sí me he preparado, sí he tomado muchos, muchos cursos; yo creo que fácil en todos estos 19 años paso de 40 cursos, pero los de geometría son muy escasos, yo creo que de esos 40 [cursos] unos dos han sido de geometría (...)  
(...)

Sara (M): No, en relación con geometría casi no se ofertan, sólo de matemáticas en general.

Esta ausencia de la geometría en la formación continua de los maestros también tiene que ver con lo difícil que fue para ellos apropiarse de las situaciones de comunicación.

Otro aspecto que destacó fue el descontento de Fabio frente al Club de Geometrizarte que adoptó la escuela técnica donde trabajaba para el ámbito de Autonomía Curricular del Nuevo Modelo Educativo de 2017:

IY: (...) ¿Geometrizarte es una materia?

Fabio (M): sí, tiene dos horas a la semana, independiente de matemáticas

IY: ¿y dura todo el año profe?

Fabio (M): El horario sí. Eso es como un Club, pero el manual está para 12 sesiones y el año no tiene 12, tiene treinta y tantas, el resto de sesiones queda a cargo de nosotros y depende de cada uno de nosotros qué es lo que vamos a hacer porque el proyecto está enfocado hacia una presentación tridimensional...empiezas con pasos básicos y ya después se vuelve como un arte o proyecto de arte, de una materia que no viene a la geometría...tiene que estar obligatoriamente ligado al arte, tiene que sacar las experiencias del niño, su forma de ser del niño las tiene que expresar ahí (...) va enfocado para conservar animales en vías de extinción (...) A mí no me gusta porque a mí eso no me interesa, a mí me interesaría más bien cuáles son los principios para un triángulo equilátero por ejemplo...ese otro enfoque matemático que sí es, pero ellos lo ven para

arte, para distraerte ...a mí no me gustó. Ahorita como ya acabé la cartilla ya me gusta más porque yo decido.

En efecto, el Proyecto del que habló Fabio es “una propuesta didáctica orientada a mejorar las habilidades de abstracción matemática, el cuidado y preservación del medio ambiente, así como el desarrollo de habilidades motrices; todo ello a través de espacios de convivencia artística entre alumnos y profesores” (SEP, 2018, p.6). Se espera con esto “el fortalecimiento de saberes como la geometría, ecología y cartonería mexicana” (SEP, 2018, p.6).

La crítica del maestro no sólo era que el manual no cubría todas las sesiones de clase que estaban programadas con los alumnos, sino que la perspectiva de geometría que allí se movilizaba no era “ese otro enfoque matemático que sí es”. Parecía que, para Fabio, la geometría estaba vinculada a definiciones y teoremas. Considerar razones extra-matemáticas para destacar la importancia que tiene la geometría (es decir, que guarda relaciones con los contextos reales y sociales y puede ser útil para resolver problemas de la vida cotidiana) me parece una medida bien orientada; pero probablemente centra la atención solamente en aspectos de utilidad práctica, con lo cual ocurriría una reducción del potencial de esta rama de las matemáticas y en este punto, coincidiría con el maestro Fabio. Sería conveniente hacer un análisis de los saberes que se pretenden movilizar con este Club (y los cursos enmarcados en esta perspectiva) y, por supuesto, revisar qué habilidades se fortalecen a través de las actividades que se proponen en el manual que deben seguir los maestros, pero por ahora, quedará como una tarea pendiente.

#### 4.2 El funcionamiento del dispositivo diseñado por los investigadores

Ahora, me centraré en otro aspecto de mi pregunta principal de investigación: ¿Cómo desarrollar una experiencia de trabajo colaborativo con la finalidad de brindar una formación a los maestros acerca de la enseñanza de algunos aspectos de geometría, bajo un enfoque didáctico específico? Desde la investigación, me interesa destacar qué aspectos del dispositivo funcionaron bien, conforme a las expectativas, y qué otros podrían mejorarse para futuras investigaciones colaborativas con los maestros. Esto implica analizar de qué manera se dio el trabajo entre los investigadores y los maestros, si hubo cambios en sus formas de interacción, en la posibilidad de retroalimentación y de reflexión a lo largo de las sesiones de trabajo y si el dispositivo logró crear condiciones

para una participación de los maestros en el proyecto. En particular, me referiré a las formas que tomó la colaboración y la retroalimentación y finalmente, al conocimiento que se generó en el marco de la actividad reflexiva del dispositivo.

#### 4.2.1 La relación entre maestros e investigadores en el marco del trabajo conjunto.

En la interacción que sostuvieron los distintos actores en las reuniones colectivas identifiqué dos *tensiones* en la construcción de la simetría de trabajo que caracteriza las investigaciones colaborativas (Sadovsky, Itzcovich, Quaranta, Becerril, y García (2016), una en relación con la interacción que se dio entre los distintos actores y otra, en relación con la retroalimentación que ofrecimos los investigadores a las clases de los maestros.

a. La tensión entre conservar la simetría de trabajo con los maestros y posicionar en las discusiones colectivas los puntos de vista desde la investigación.

En el análisis de las interacciones que se dieron entre los maestros y los investigadores identifiqué distintas formas de participación de estos actores en la co-construcción del conocimiento que tienen que ver con la manera de interpretar y atribuir un significado a los objetos de discusión (condiciones para la implementación, interpretaciones de las situaciones didácticas, las producciones de los alumnos, las reflexiones sobre hechos ocurridos en el aula) que se tuvieron en las reuniones colectivas. Las clasifiqué en Encuentros y Desencuentros.

Los encuentros fueron episodios de las interacciones que dejaron en evidencia la convergencia de los puntos de vista de los distintos actores frente a un tema de discusión. Con la situación 1, estos encuentros se dieron en relación con el interés, tanto de maestros e investigadores, por discutir las condiciones que debían darse para que la situación fuera viable en los contextos de práctica de los maestros (tiempo disponible para la implementación, la organización en equipos de acuerdo con el número de estudiantes y el espacio físico disponible, entre otras). Con la situación 2, el interés común se centró en algunas decisiones asociadas al medio material (instrumentos disponibles, por ejemplo) y por las posibles producciones de los alumnos. Esto se mantuvo con la situación 3, pero a diferencia de las dos primeras situaciones, el interés fue la gestión. Como vimos a lo largo de los capítulos, se compartieron y negociaron ideas y propuestas, tanto de los maestros como de los investigadores.

En los desencuentros, identifiqué dos tipos, unos conciliables a través de la experiencia en el aula y las reflexiones colectivas y otros que definitivamente no lograron negociarse. Un ejemplo que destacó en la planeación de la situación 1 y se conservó hasta el final como un desencuentro, fue la discrepancia entre el ID y Fabio (M) sobre la pertinencia de la situación de comunicación en relación con los contenidos propuestos para los grados segundo de secundaria (el ID sostenía que las situaciones podrían ser útiles, aunque el programa no incluyera el tema de la congruencia de triángulos, y con lo cual Fabio no estaba de acuerdo). Otros desencuentros tuvieron que ver con algunos planteamientos del enfoque didáctico que propusimos los investigadores; uno que destacó en todas las situaciones fue la concepción sobre el error en las resoluciones de los alumnos (los investigadores insistiendo en su carácter natural, casi necesario en un proceso de aprendizaje, y los maestros viviéndolo como algo negativo, como una expresión de un fracaso. Incluso, a esto se vinculan discrepancias menos explícitas como el papel de la retroalimentación del medio (las verificaciones) y de la necesidad de repetir las situaciones). Otra característica de estos episodios de desencuentro estuvo asociada a la especificidad de cada una de las situaciones que se implementaron y dejó ver que en el marco de las reflexiones que se sostuvieron en el colectivo, los puntos de vista de los actores no son estáticos, pueden cambiar y matizarse (Bednarz, et al., 2012). Por ejemplo, la discrepancia en la forma de concebir la congruencia entre las figuras que se dio desde la planeación de la situación 2, pareció resolverse al término de la situación 3.

La diversidad de interpretaciones que se evidenciaron frente a los objetos de discusión dejó ver que, en efecto, hay marcos de referencia distintos que están interactuando, que definen las contribuciones que cada uno hace a la construcción del conocimiento. Esto no es sorprendente, pues es claro que no esperaba que todos contribuyeran de la misma manera a la investigación. Lo interesante es la dinámica cambiante de los puntos de vista de unos y otros a partir de la experiencia en aula y las reflexiones colectivas que se dieron. Un ejemplo de las influencias mutuas entre los maestros se evidenció cuando unos retomaron recursos compartidos por otros para sus propias implementaciones -caso de Sara y Fabio-; un ejemplo de efecto de los aportes de los maestros sobre las acciones de los investigadores, fueron las dificultades externadas por estos para implementar la situación 3, la cual derivó en la necesidad de repensar dicha situación, específicamente en relación con los criterios de congruencia.

Otro aspecto interesante tiene que ver con la manera en que cada actor lograba posicionar sus aportaciones (intereses, preocupaciones, desacuerdos) en las discusiones colectivas. Por ejemplo, en la planeación de la situación 1 y la reflexión de la experiencia en aula de la situación 3, las posiciones de los investigadores y los maestros fueron en su mayoría asimétricas debido a la notoria prevalencia de la voz de los investigadores. En el primer caso, los maestros estuvieron buena parte del tiempo en una posición de escucha, informándose de las expectativas sobre la colaboración en el colectivo y la propuesta didáctica y, en el segundo, por su interés de proponer a los maestros estrategias y/o recursos de intervención que les ayudara a mejorar las futuras las puestas en común, considerando que era la última oportunidad que se tenía para hacerlo. Es importante aclarar que el término simetría/asimetría lo uso para referir a la forma en la que se dieron las interacciones al interior del colectivo, más no a la relación que maestros e investigadores tienen con los saberes en la construcción de estos (como se entiende en estos modelos de investigación colaborativa. Ver capítulo 1).

b. La tensión entre la intención de retroalimentar la práctica de los maestros y el carácter colaborativo del trabajo conjunto.

Desde el diseño del dispositivo se consideraron dos fuentes de retroalimentación para los maestros en el marco de la actividad reflexiva que se tendría en el colectivo: la clase y las discusiones en colectivo. Durante la experiencia colaborativa, los investigadores estuvimos en una constante encrucijada frente a dos objetivos para el trabajo con los maestros: retroalimentar sus implementaciones en el aula y enriquecer sus reflexiones tras esta y no mermar la simetría de trabajo en la construcción de conocimiento.

La retroalimentación que dimos los investigadores fue limitada. En algunos casos *ausente*, por ejemplo, no comunicamos a Fabio que, con la situación 1, movilizó una consigna en la que admitió como validas reproducciones con figuras semejantes; en otros *poco contundente*, como cuando se señaló la debilidad del recurso de que los emisores agregaran más información a los mensajes sin saber qué necesitaban los receptores (como vimos con Ignacio en la situación 1 y con Sara y Fabio con la situación 2); y finalmente, una retroalimentación *directa y contundente*, la que se dio en la situación 3, al proponer a los maestros estrategias y/o recursos de intervención para mejorar la conducción de las puestas en común. Las dos primeras características que tuvo la retroalimentación (ausencia o debilidad) redujo la posibilidad de que los maestros se

informaran de aspectos susceptibles de mejorar para las siguientes situaciones (sobre todo con las situaciones 1 y 2).

Identifiqué cinco razones que explican esta dificultad que tuvimos los investigadores para retroalimentar a los maestros; unas muy vinculadas a los principios del enfoque colaborativo que tratábamos de comunicar y otras al clima de trabajo que se logra construir con los maestros durante el trabajo conjunto. Otras razones tienen que ver con las condiciones de trabajo en las que se puso en marcha el dispositivo:

1. *La búsqueda de la simetría de posiciones en relación con la co-construcción del conocimiento.* Los investigadores tratamos de no ser demasiado directivos frente a la forma como los maestros podían implementar las situaciones en el aula (en las reuniones de planeación), así como hacer comentarios críticos sobre las clases observadas (en las reuniones posteriores a las implementaciones). Esto último, podía ser interpretado por los maestros como una evaluación de sus prácticas.
2. *Concepciones matemáticas incompletas o erróneas de los maestros.* Comunicar a los maestros que parte de las dificultades que tuvieron en las aulas se dieron por nociones matemáticas incompletas o erróneas que movilizaron fue difícil para los investigadores, pues de cierta manera implicaba interpelar la legitimidad de los maestros en términos de su saber matemático. Al inicio de la experiencia colaborativa los maestros manifestaron un interés por conocer situaciones didácticas y formas de hacer en el aula que les ayudara a mejorar sus prácticas en relación con la enseñanza de la geometría y lograr aprendizajes en sus alumnos, es decir, había un interés centrado en la didáctica de la geometría más no en la geometría misma. En efecto, esto pudo evidenciarse a lo largo de la experiencia colaborativa. Las reflexiones de los maestros tendieron a estar alejadas de su propia gestión y más aun de la posibilidad de tener lagunas geométricas (recordemos, por ejemplo, las conceptualizaciones sobre la congruencia de figuras -Ignacio, Sara- y sobre los criterios de congruencia -Fabio-). De aquí que pareciera más factible decirle a un maestro que hay cosas de su gestión que pueden mejorarse (sin que sintiera vulnerado su profesionalismo) a decirle que hay aspectos de su saber matemático que debían reformularse (¿Qué está enseñando mal a sus alumnos?).

De fondo, esta situación probablemente refleja, como lo han señalado otros investigadores, creencias epistemológicas de los maestros relativas al saber matemático y el saber didáctico. En relación con las matemáticas, es probable que existan rasgos de una mirada *absolutista* (o "*monumentalista*" como dice Chevallard, 2019), donde son vistas como un conjunto de verdades universales e incuestionables; de ahí que, por ejemplo, se priorice el lenguaje formal y, sobre todo, se tenga la creencia que, una vez aprendidas, no hay necesidad de repensar los conceptos o buscar nuevos conocimientos (Vesga-Bravo y de Losada, 2018). En contraste, al volver las matemáticas un "objeto de enseñanza", los maestros reconocen la existencia de diferentes teorías y estilos de enseñanza y adoptan para su práctica lo que consideran les ayuda a alcanzar el aprendizaje de sus alumnos. La diferencia está justo en que este saber didáctico es cambiante y puede actualizarse y adaptarse a las condiciones particulares de los contextos de práctica de los maestros.

3. *Un clima de trabajo en el que aún no se había construido la confianza suficiente para comunicar a los maestros aspectos a mejorar de su práctica.* La relación que se logra construir entre los investigadores y maestros en el marco de un trabajo colaborativo es un factor importante en la riqueza de los resultados que se pueden obtener. De acuerdo con Roditi (2015 en Mollerato, 2017), el grado de colaboración depende del compromiso de los distintos actores y de las relaciones de confianza que se logren establecer. En el caso de los maestros, este sentimiento hacia los investigadores es fundamental ya que están haciendo pública su práctica y pueden sentirse vulnerables frente a este hecho. Los investigadores sabemos que esta confianza no está dada de entrada y que debe construirse en el marco de la interacción con los maestros. Justamente, lograr estos lazos de confianza ayuda tanto a la comunicación como a la recepción de aquellos aspectos de la práctica de los maestros susceptibles a ser mejorados. En mi investigación, esto se dio, en especial, con el maestro Fabio.
4. *Las condiciones de los contextos de práctica de los maestros.* En algunos casos no fue posible observar todas las clases de los maestros, lo que implicó conocer e interpretar a partir de sus relatos y, a la par con ellos, sus experiencias en el aula. Si bien, como afirman Sadovsky et al. (2016), el hecho que los investigadores hagan visibles sus dudas e incertidumbres para entender lo que el maestro está contando

abona a la creación de un clima de confianza, también, como vimos en los capítulos anteriores, puede dar lugar a retroalimentaciones limitadas de las experiencias en el aula por parte de los investigadores. Esto, considerando el hecho de que los maestros tendieron a dejar fuera de sus reflexiones individuales aspectos asociados a su propia gestión.

5. *La forma en la que se organizó el trabajo en el dispositivo.* Desde su diseño no se incluyó la posibilidad de que los investigadores nos encontráramos antes de las reuniones colectivas para discutir y analizar las implementaciones observadas, identificar los temas que queríamos destacar con los maestros y prever nuestras intervenciones en el colectivo. La razón principal fue el escaso tiempo del que se disponía para el trabajo con los maestros: el ritmo de un encuentro semanal y las observaciones de clases entre uno y otro. Esta fue una condición institucional de las escuelas a la que nos tuvimos que ajustar para desarrollar la investigación.

Esta reticencia, que en su mayoría caracterizó las participaciones de los investigadores, pone de manifiesto la necesidad de problematizar la complejidad de promover y sostener un principio de simetría de trabajo con los maestros en la interacción con ellos y en la retroalimentación de sus prácticas. Considero que, así como hay un conocimiento de los maestros, vinculado a su práctica, que les permite hacer frente a las situaciones que emergen en sus aulas (Schön, 1983, en Desgagné et al., 2001), hay también un conocimiento que los investigadores movilizan, en el marco de las investigaciones colaborativas, que está asociado a su marco didáctico y que les permite justamente promover y sostener una simetría de trabajo con los maestros: ¿qué decir y qué no?, ¿cómo decirlo?, ¿cuándo decirlo?. Este conocimiento al que me refiero es implícito y se desarrolla de manera espontánea en la interacción con los maestros en el marco de la reflexión colectiva. Creo que este *saber hacer* es inherente a la construcción de la colaboración y se gana sólo con más experiencias en el trabajo conjunto con los maestros.

En la literatura, se concibe la noción de *Contrato de colaboración* (Bednarz, et al., 2001) para referir a las reglas tácitas de interacción que se definen en un grupo para entenderse entre sí. Es decir, aquellos patrones, rituales de interacción o normas implícitas que pueden informar sobre las formas de involucrar y regular la reflexividad que se construye entre los distintos actores; por lo que es resultado de la interacción y



no un acuerdo previo a esta (Bednarz et al., 2012). En mi investigación, a partir de la situación 2, identifiqué en el colectivo algunas formas implícitas de sostener y avanzar en las discusiones: i) justificando su punto de vista, dejando ver por qué era válido desde su posición como maestro o investigador (como pasó en la discusión sobre la noción de congruencia donde los maestros e investigadores expusieron argumentos para defender su posición) y ii) aceptando el punto de vista de los demás aun sin que fuera muy claro hasta qué punto estaban de acuerdo (como nos ocurrió a los investigadores frente al rechazo de los maestros sobre ver el error como parte de un conocimiento que se está construyendo). Estas formas de negociar el significado de los objetos de discusión y de avanzar en la co-construcción de conocimiento que se construye en la interacción, devuelve la discusión a lo que mencioné antes: los investigadores tienen un conocimiento implícito que se juega en el trabajo con los maestros que les permite sostener y avanzar en colaboración y bajo un principio de simetría. Este *saber hacer* de los investigadores no está documentado en la literatura, en este sentido hay mucho que investigar y abonar a las investigaciones colaborativas.

#### 4.2.2 Las formas que adquirió la colaboración en el marco del trabajo conjunto.

Hablar de colaboración no sólo implica un trabajo conjunto con los maestros, sino que existe una influencia entre la práctica y la investigación que permite la co-construcción de un conocimiento mejor adaptado a las necesidades de la práctica.

En mi investigación, esta idea se materializó en las distintas formas de participación que cada uno de los actores asumió en los distintos momentos de la actividad reflexiva (reuniones colectivas e implementaciones) que se sostuvo en el dispositivo. En el caso de los maestros, algunas formas de colaboración fueron promovidas por la misma estructura del dispositivo: al aportar en las reuniones de planeación aspectos asociados a la implementación (sus intereses y preocupaciones, su manera de comprender la situación, la forma de anticipar las producciones de sus alumnos, etc.); al implementar las situaciones en sus aulas dejando ver con ello aspectos de su práctica y de sus contextos de práctica (concepciones de enseñanza, de aprendizaje, ejemplos de rutinas y formas de hacer en el aula, contratos pedagógicos que sostienen con sus alumnos, características de sus alumnos, organización escolar, etc.); al compartir con el colectivo su experiencia en el aula y la forma en la que sus alumnos vivieron la situación y al permitir que el investigador observara su clase para

luego hacer comentarios públicos en el colectivo sobre esta. Otras formas de colaboración de los maestros se constituyeron en el marco de la dinámica de reflexión conjunta: la posibilidad de observar la clase de un colega y ofrecerle una retroalimentación de aspectos de la gestión observada (como pasó con Fabio y Aldo de las clases de Sara y Liliana respectivamente) y al retomar para sus implementaciones elementos de las retroalimentaciones recibidas de sus colegas y de los investigadores o de las propuestas que surgían en el marco de la discusión colectiva.

En el caso de los investigadores, las formas de colaboración se centraron en facilitar condiciones favorables, de tipo logísticas y de contenido matemático-didáctico, para que se diera un trabajo colaborativo con los maestros (proponer la situación didáctica y aclarar aspectos de esta -objetivo y enfoque didáctico, fases-, retroalimentar las experiencias de los maestros desde la observación directa y desde las reflexiones individuales de los maestros, regular la reflexión del colectivo).

Las formas de colaboración asociadas a la estructura del dispositivo se mantuvieron a lo largo de toda la experiencia colaborativa, mientras que aquellas que nacieron en el marco de la reflexión colectiva (para el caso de los maestros), se dieron sólo con alguna de las tres situaciones que se trabajaron (como la posibilidad que se dio sólo con la situación 1 de que los maestros fueran observadores de las clases de sus colegas) o se hicieron visibles en pocas ocasiones (la adopción de recursos propuestos por otros para sus propias implementaciones).

Frente a estas distintas formas de colaboración que se dieron en la actividad reflexiva, conviene analizar qué llevó a los distintos actores a colaborar y qué produjo la colaboración en términos de la formación de los maestros y los intereses de la investigación. Una razón compartida que motivó el trabajo colaborativo entre maestros e investigadores se movilizó por el interés común acordado al inicio de la investigación: una oportunidad para mejorar las prácticas de los maestros en relación con la enseñanza de la geometría y el aprendizaje de los alumnos. Con base en esto, el trabajo en el marco de la actividad reflexiva favoreció algunas formas de colaboración que se dieron, en particular, por las formas de interacción entre maestros e investigadores y por las experiencias en aula de los maestros. Por ejemplo, los maestros se dieron cuenta de que las aportaciones de los investigadores no pretendían juzgar su práctica, sino que estábamos en la misma tónica de comprender qué dificultades se dieron en el aula para reflexionar sobre las formas para mejorarlas. También, la constante dificultad con la

puesta en común y la insuficiencia en las producciones de los alumnos, llevaron a los maestros a reformular algunas de sus decisiones para las nuevas implementaciones apoyándose en las experiencias de sus colegas o en las reflexiones colectivas.

Finalmente, la colaboración permitió la construcción conjunta de un conocimiento didáctico (precisiones y adaptaciones que requieren las situaciones didácticas) que se puede adaptar con mayor facilidad a los contextos de práctica de los maestros. Este proceso de co-construcción contribuyó a los intereses y necesidades de los maestros ayudándolos a aclarar y mejorar su práctica en algunos aspectos y, a los intereses de los investigadores, permitiendo identificar las dificultades que puede implicar a los maestros apropiarse de una situación didáctica como la de comunicación.

4.2.3 La reestructuración de las situaciones didácticas de comunicación. La co-construcción de conocimiento.

Desde la perspectiva de los modelos colaborativos, la noción de viabilidad es central. No se trata solamente de producir situaciones fructíferas para el aprendizaje de los alumnos que, como afirman Bednarz et al. (2001), podría iluminarse con un análisis didáctico, sino producir situaciones que también sean viables en los contextos de práctica de los maestros. En este sentido, el significado que ellos dan a las situaciones se vuelve crucial para la producción de estas situaciones. Es aquí donde la colaboración se asume como un proceso de construcción permitiendo poner en juego las habilidades respectivas de los diferentes actores.

El conocimiento que se construyó durante esta investigación dio cuenta de la necesidad de reestructurar las situaciones de comunicación para favorecer tanto los procesos de apropiación de los maestros, así como su viabilidad en el aula. Estos conocimientos se manifestaron en ajustes concretos a cada una de las tres situaciones y en la identificación de aspectos que deben repensarse o ampliarse para lograr los objetivos didácticos que se pretenden.

En relación con los ajustes que deben hacerse para mejorar el funcionamiento de las situaciones en el aula se destacaron algunas decisiones para el medio material de los alumnos, modificaciones a la situación misma y recursos o estrategias de intervención que pueden ayudar a mejorar la gestión la conducción de las puestas en

común. Algunos implican a las tres situaciones didácticas y otros son específicos de alguna de ellas.

Entre aquellos que implican a las tres situaciones se destacaron: i) considerar un tamaño de las figuras modelo que favorezca la superposición y la visibilidad de estas en las puestas en común (aproximadamente media o una hoja A4), ii) la conveniencia de recortar las figuras para evitar el efecto de la posición respecto a la hoja y favorecer los giros e inversiones en la superposición, iii) Optar por papel blanco para las construcciones de la figura, ya que el papel cuadriculado ofrece información adicional como los ángulos rectos o las líneas paralelas (Fregona y Orús, 2011), y iv) estrategias de intervención para las puestas en común como: Asumirse como un alumno receptor del mensaje “*Maestro intérprete*” para evidenciar ambigüedades en los mensajes, solicitar “componer” el mensaje tras hacer evidente la ambigüedad, ofrecer un contraejemplo para convencer a los alumnos de la falsedad de una descripción incluida en el mensaje, asumirse como emisores de un mismo mensaje para todos los alumnos para que estos construyeran una misma figura, solicitar a los alumnos emisores construir la figura con el mensaje que elaboraron (“seguir sus propias instrucciones”) y, finalmente, construir con todos los alumnos un mensaje común y que todos construyan la figura.

Otro conocimiento que se construyó en el colectivo fue la identificación misma de aspectos que deben aclararse, ampliarse o repensarse para lograr los objetivos didácticos que se pretenden con cada situación. Me refiero, en particular a la necesidad de aclarar en la situación 2 que la validación empírica trae nuevos desafíos respecto a la situación 1, esto es, movilizar una noción de congruencia que acepte las transformaciones de la figura (simetría, rotación) en la superposición. Con la situación 3, dos cosas se destacaron; por un lado, la necesidad de distinguir con claridad los tres objetivos que se preveían con la situación (que los alumnos comunicaran con el número de datos que sea la información para construir un triángulo congruente a otro dado, que luego lo lograrán con el mínimo de datos y, finalmente, que encontraran las tres formas de hacerlo -LLL, ALA, LAL-) y, por otro, la necesidad de repensar la situación justo en relación con la formulación de los criterios de congruencia, en términos de estrategias de intervención y en la posibilidad de sumar actividades (de construcción) previas a la situación 3 que problematicen el asunto de la existencia y la unicidad del triángulo.

Como mencioné en los capítulos de análisis, hubo algunos conocimientos que se construyeron en el colectivo de los cuales los maestros no fueron conscientes (sobre

todo, aquellos relacionados con las posibles intervenciones para la conducción de las puestas en común), y que tampoco logramos precisar en su momento los investigadores. Estos conocimientos se hacen visibles tras una segunda fase de la coproducción del conocimiento (Desgagné, 2007), en la que una mirada analítica transversal, posterior a la experiencia colaborativa con los maestros, me permite convertir las experiencias en aula y las reflexiones construidas en el colectivo en un conocimiento didáctico materializado en situaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en nivel secundario, factibles para desarrollarse en las aulas de los maestros.

Otro conocimiento que se construyó en colaboración pero que quedó en evidencia tras un segundo y posterior análisis de la experiencia, se dio en términos de la investigación, pues proporcionó información sobre el funcionamiento del dispositivo de formación que pusimos en marcha los investigadores en relación con: los procesos de apropiación de las situaciones por parte de los maestros, el propósito de comprender la naturaleza del proceso de colaboración que surge de la interacción entre investigadores y maestros (las aportaciones de unos y otros y el producto de dicha colaboración) y aspectos de la comunicación de las situaciones a los maestros que los investigadores omitimos tanto en la ficha didáctica como en la reunión de planificación y que son necesarios para favorecer los procesos de apropiación de los maestros en futuras experiencias colaborativas.

#### 4.3 Comentario final: Desafíos de la investigación colaborativa

Para terminar, me interesa exponer algunas condiciones de trabajo con los maestros que apunten al desarrollo de nuevas investigaciones colaborativas. A continuación, desarrollo cuatro desafíos que apuntan al diseño y puesta en marcha de los dispositivos para el trabajo con maestros.

- *La relación con los planes curriculares:* Desde el diseño, debe garantizarse que las situaciones didácticas que sirven como base para el trabajo con los maestros tengan relación con los contenidos establecidos en los programas curriculares. Esto requiere que el trabajo en el dispositivo se ajuste, en la medida de lo posible, a las planeaciones de los maestros, de manera que puedan ver los temas que tienen programados en los tiempos que deben hacerlo. Otra cuestión que ayudaría a garantizar este diálogo con los programas curriculares y favorecería el trabajo colaborativo es que participen maestros que tienen a cargo alumnos del mismo

grado. Si bien, como vimos en esta investigación, el diálogo entre maestros de diferentes niveles es muy enriquecedor e implica para los alumnos la oportunidad de reforzar temas vistos, también limita la participación de estos.

Considero que esto es necesario hacerlo porque no podemos desconocer que en la cultura escolar los contenidos están agrupados y tienen asignado un tiempo de enseñanza. En este punto, un desafío para la investigación es lograr establecer, desde los insumos didácticos, vínculos entre lo ya visto y lo nuevo que está por verse de manera que podamos reunir maestros de diferentes niveles. Pero volvemos a las restricciones institucionales y vienen a cuenta reflexiones como las que hace Sadovsky (2019): “¿Hay espacio en la escuela para [revisar antiguos contenidos] a la luz de las nuevas ideas? ¿Para retomar algo que no se terminó de entender? ¿Para modificar incluso una idea que se tenía y que un nuevo trabajo con los saberes contribuiría a resignificar?” (p.108).

- *La duración de las experiencias colaborativas y la familiaridad que tienen los maestros con estas:* Otro aspecto que se destacó en la investigación fue la necesidad de que estas experiencias colaborativas sean más largas a fin de favorecer el trabajo entre los maestros y los investigadores. Me refiero a condiciones que favorezcan la simetría de trabajo entre unos y otros, que regulen las tensiones que se puedan dar en las discusiones colectivas, desde un clima de confianza entre los distintos actores para destacar aquellas cosas susceptibles a mejora, hasta asumir una postura mutua en la que se necesita al otro porque tiene una experiencia que puede complementar la otra. Las razones que dificultan la construcción de esta simetría son muy profundas en la cultura de la investigación y en la cultura escolar, entre estas se encuentran: la distancia que ha existido entre la investigación y la práctica, la experiencia poco positiva que han tenido los maestros con el *aprendizaje colaborativo* para el desarrollo profesional docente, el carácter solitario del trabajo docente, la observación de la práctica para evaluar el desempeño docente, entre otras, por lo que será necesario ir construyendo una cultura de la colaboración.
- *La participación de maestros de diferentes escuelas:* Un aporte que deja esta investigación en torno a los trabajos colaborativos y que significa un verdadero desafío en términos de las múltiples restricciones institucionales en las que están inmersos los maestros, es la posibilidad de reunir a maestros de distintas escuelas. En particular, los maestros que participaron en el dispositivo pertenecían a una

escuela secundaria general y una técnica. Tras la experiencia, los maestros manifestaron su sorpresa y agrado por la cercanía de las dificultades que se tuvieron en la gestión y, sobre todo, por las características de las producciones de los alumnos. Esto es una consecuencia del aislamiento entre las prácticas de los maestros, las jornadas escolares, los programas establecidos para unas escuelas y otras, en síntesis, a la falta de atención al contexto social donde se da la enseñanza. Esto lleva justamente a los maestros a creer que sus problemas son exclusivos y que no tienen relación con el trabajo de otros maestros ni con la estructura de las escuelas y los sistemas escolares (Zeichner, 1993). En este punto, las investigaciones colaborativas, a través de la creación de pequeñas comunidades de práctica entre los maestros, pueden contribuir a su desarrollo profesional.

- *La participación de investigadores en formación:* Mi participación en el dispositivo como investigadora colaborativa implicó un desafío en el marco del trabajo con los maestros y con otros investigadores, pues mientras la experiencia colectiva avanzaba, yo me estaba formando como investigadora. Los diferentes momentos de la actividad reflexiva enriquecieron algunas miradas que tenía sobre la didáctica, el trabajo docente y las investigaciones colaborativas; esta experiencia dejó ver cómo el trabajo conjunto entre diferentes actores configura un espacio de co-formación para todos los participantes (Couture, 2002). En este sentido, las investigaciones colaborativas se convierten en un lugar fructífero para la formación de investigadores en didáctica.

Finalmente, las condiciones de esta experiencia son muy particulares, por lo que no permiten concluir que se trata de un modelo replicable que funcionará en todos los casos. Pero podemos identificar aspectos que puede valer mucho la pena considerar en el diseño de este tipo de experiencias, por ejemplo, el de la funcionalidad, esto quiere decir, el trabajo en torno a un tema común para los distintos actores que participan, con situaciones didácticas interesantes y potenciales.

Aunque en esta investigación colaborativa hubo un avance un poco a tientas en varias decisiones de cómo organizar, promover y sostener la colaboración y a su vez, asegurar una formación para los maestros, fue una experiencia muy valorada por los

ellos; lo que nos lleva a confirmar que este enfoque construye un camino para el desarrollo profesional de los maestros y la investigación en didáctica.



## REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

- Anadón, M., & Couture, C. (2007). La recherche participative. Multiples regards (Introducción). In *Anadón, M. (coord.) La recherche participative. Multiples regards* (p. (1-11), (205-220)). Québec: Presses de l'Université du Québec.
- Arceo, E. (1999). ¿Problemas de geometría o problemas con la geometría? *Educación Matemática*, 11, 25–45.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. In *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Gómez, P (Editor), Moreno, L. Douady, R. y Artigue, M. (pp. 33–60). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
- Barrantes, M., & Blanco, M. (2004). Recuerdos , expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro. *Enseñanza de Las Ciencias*, 241–250.
- Barry, S., & Saboya, M. (2015). Un éclairage sur l' étape de co-situation de la recherche collaborative à travers une analyse comparative de deux études en didactique des mathématiques. *Recherches Qualitatives*, 34(1), 49–73.
- Bednarz, N. (2000). Formación continua de los docentes de matemática: una necesaria consideración del contexto. *Universidad de Quebec En Montreal (Mimeo)*.
- Bednarz, N., Desgagné, S., Maheux, J.-F., & Zajc, L. S. (2012). La mise au jour d'un contrat réflexif comme régulateur de démarches de recherche participative : le cas d'une recherche-action et d'une recherche collaborative. *Recherches En Education*, 14, 129–151.
- Bednarz, N., Poirier, L., Desgagné, S., & Couture, C. (2001). Conception de séquences d'enseignement en mathématiques: une nécessaire prise en compte des praticiens. In *Le génie didactique* (pp. 43–69). Retrieved from [www.cairn.info](http://www.cairn.info)
- Berthelot, R., & Salin, M. H. (1994). La Enseñanza de la geometría en la escuela primaria. *Grand N*, 53(Grenoble, Francia y traducido para el PTFD, Programa de transformación de la Formación Docente. Ministerio de Educación de la Nación en 1994.).
- Block, D., Martínez, P., & Mendoza, T. (2013). La observación y el análisis de las

- prácticas de enseñar matemáticas como recursos para la formación continua de maestros de primaria. Reflexiones sobre una experiencia. *Educación Matemática*, 25(2), 31–59.
- Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., & Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 12(33), 731–726.
- Broitman, C., & Itzcovich, H. (2002). *El estudio de las figuras y los cuerpos geométricos. Actividades para los primeros años de la escolaridad* (1ra ed.). Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Libros del Zorzal* (Vol. 1). Buenos Aires.
- Camargo, L., & Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis:TED*, 4–8.
- Camargo, L., & Samper, C. (2006). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa, 55–78.
- Chevallard, Y. (2019). Des programmes, oui. mais pour quoi faire ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 39(1), 97–115. Retrieved from <https://revue-rdm.com/2019/des-programmes-oui-mais-pour-quoi-faire-vers-une-reforme-fondamentale-de-lenseignement/>
- Couture, C. (2002). *Étude du processus de co-construction d'une intervention en sciences de la nature au primaire par une collaboration praticien-chercheur. Tesis doctoral*. Université Du Québec À Chicoutimi en association avec Université Du Québec À Montréal Étude.
- Couture, C. (2005). Repenser l'apprentissage et l'enseignement des sciences à l'école primaire: une coconstruction entre chercheurs et praticiens. *Revue Des Sciences de l'éducation*, 31(2), 317–333.
- Couture, C., Bernarz, N., & Barry, S. (2007). Multiples regards sur la recherche participative: une lecture transversale. In Anadón, M. (coord.) *La recherche participative. Multiples regards* (pp. 205–220). Québec: Presses de l'Université du Québec.

- Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue Des Sciences de l'éducation*, 23(2), 371–393.
- Desgagné, S. (2007). Le défi de coproduction de “savior” en recherche collaborative. Autour d'une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante. In *La recherche participative. Multiples regards* (pp. 89–116). Canadá: Presses de l'Université du Québec. Traducción realizada para el Seminario de Didáctica de las Matemáticas del DIE.
- Desgagné, S., & Bednarz, N. (2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche « avec » plutôt que « sur » les praticiens. *Revue Des Sciences de l'éducation*, 31(2), 245. <https://doi.org/10.7202/012754ar>
- Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L., & Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue Des Sciences de l'éducation*, 27(1), 33–64.
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. In *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Duval, R & Saénz-Ludlow, A. (pp. 13–60). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Fregona, D. (1995). *Les figures planes comme “milieu” dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*. L' Université Bordeaux I.
- Fregona, D., & Orús, P. (2011). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemáticas* (Primera). Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Goncalves, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista Ciencias de La Educación*, 1(27), 83–98.
- González, R. M., De la Garza, C. H., & De León, M. E. (2017). Consejos Técnicos Escolares, un espacio de colaboración para evaluar el ejercicio docente en Educación Básica. *Revista Electrónica de Investigacion Educativa*, 19(3), 24–32.

- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. *Proceedings of CERME 3*, 3(1957), 1–9. Retrieved from [http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG7/TG7\\_Houdement\\_cerme3.pdf](http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf)
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones* (Primera). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Itzcovich, H., & Broitman, C. (2001). Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la Geometría en EGB, 34. Retrieved from <http://servicios2.abc.gov.ar/docentes/capacitaciondocente/plan98/pdf/geometria.pdf>
- Itzcovich, H., & Broitman, C. (2003). Geometría en los primeros años de la EGB: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza. In *Panizza, Mabel (Comp.). Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (1RA ed.). Buenos Aires: Paidós.
- Mántica, A., & Renzulli, F. (2016). Entrada en el trabajo geométrico para la validación de conjeturas formuladas por estudiantes de la escuela secundaria. Análisis de una actividad para enunciar criterios de congruencia de triángulos. *VI REPEM – Memorias*, (2011), 142–153.
- Margolinas, C. (1998). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. *Université D'Été de La Rochelle, France*, 3–16.
- Morales, G., Sensevy, G., & Forest, D. (2017). About cooperative engineering : theory and emblematic examples. *Educational Action Research*, 0792, 1–12.
- Morellato, M. (2017). *Travail coopératif entre professeurs et chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres : conditions de la constitution de l'expérience collective*. Université de Bretagne occidentale.
- Panizza, M. (2003). Conceptos Básicos De La Teoría De Situaciones Didácticas. *Enseñar Matemática En El Nivel Inicial y El Primer Ciclo de La E.G.B.: Análisis y Propuestas*, 59–71.
- Perrin, G., & Godin, M. (2018). Geometrie plane: Pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. *HAL Archives-Ouvertes, Traducción*.

- Quaranta, M. E., & Ressa de Moreno, B. (2009). *La enseñanza de la Geometría en el jardín de infantes* (1a ed.). Provincia de Buenos Aires. Retrieved from [http://abc.gob.ar/inicial/sites/default/files/2\\_la\\_ensenanza\\_de\\_la\\_geometria\\_en\\_el\\_jardin\\_de\\_infantes.pdf](http://abc.gob.ar/inicial/sites/default/files/2_la_ensenanza_de_la_geometria_en_el_jardin_de_infantes.pdf)
- Quaranta, M. E., & Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática. Qué, para qué y cómo se discute. In *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas. (Comp.) Mabel Panizza* (1 ed., pp. 189–242). Buenos Aires: Paidós.
- Rockwell, E. (2018). La complejidad del trabajo docente y los retos de su evaluación: resultados internacionales y procesos nacionales de reforma educativa 1. *Cuadernos de Educación*, XVI(16), 7–29.
- Sadovsky, P. (2004). Marco didáctico general. La teoría de situaciones. In *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas*. Argentina: Informe final de tesis de doctorado, Facultad de Filosofía y Letras, UBA.
- Sadovsky, P. (2005). La teoría de las situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. In *Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P. Reflexiones teóricas para la educación matemática* (1a ed.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Sadovsky, P. (2019). La Teoría de la Transposición Didáctica como marco para pensar la vida de los saberes en las instituciones. In *Bitácoras de la innovación pedagógica* (Ministerio, Vol. 1, pp. 1–476).
- Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta, M. E., Becerril, M. M., & García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Educación Matemática*, 28(3), 9–29.
- Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich, H., & Broitman, C. (1998). Matemática. Documento de trabajo nº5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. *Secretaría de Buenos Aires Dirección de Planeamiento*.
- Sadovsky, P., Quaranta, M. E., García, P., Becerril, M. M., & Itzcovich, H. (2019). Trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática.

- Reflexiones metodológicas. *Contextos de Educación. UNRC.*, 26, 41–49.
- Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. In *Números, Formas y Volúmenes en el Entorno del Niño* (pp. 37–80). España: Ministerio de educación y ciencia.
- Schön, D. a. (1998). *El profesional reflexivo. Como piensan los profesionales cuando actúan*. Buenos Aires: Paidós.
- Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles: De Boeck.
- Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S., & Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 45(7).
- SEP. (2017). Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. *Secretaría de Educación Pública*.
- SEP. (2018). Manual del Proyecto “GeometrizarTE”. Fase 0. *Secretaría de Educación Pública*.
- Vesga-Bravo, G. J., & de Losada, M. F. (2018). Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Revista Colombiana de Educación*, 74, 243–267.
- Zeichner, K. M. (1993). El maestro como profesional reflexivo. *Cuadernos de Pedagogía*, 220, 44–49.

## **ANEXOS**

Anexo 1: Ficha didáctica dirigida a los maestros

### **DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS CINVESTAV**



**Ficha didáctica para el docente**



**Ficha adscrita a Tesis de maestría en ciencias en  
la especialidad en investigaciones educativas**

**Director: Dr. David Block Sevilla**

**Tesista: Yesenia Castaño Torres**

En este documento se presentan tres situaciones de comunicación denominadas “Mensajes con figuras” con algunas orientaciones didácticas, comentarios y precisiones de su gestión en el aula. Esta propuesta se da el marco de una investigación orientada a favorecer el estudio de figuras geométricas y los criterios de congruencia de triángulos en nivel secundario.

A continuación, se presenta las situaciones y tiempos estimados para la implementación de la secuencia:

	<b>Característica general de las actividades</b>	<b>Tiempo estimado</b>
<b>Situaciones didácticas</b>	Situación 1: Reproducción de rectángulos y sus diagonales.	3 sesiones -100 minutos cada una aprox.-
	Situación 2: Reproducción de un Paralelogramo.	
	Situación 3: Reproducción de un triángulo.	

### **1. Situación 1: Reproducción de rectángulos y sus diagonales.**

*Objetivo:* Formular e interpretar relaciones que caracterizan una figura geométrica.

*¿En qué consiste?*

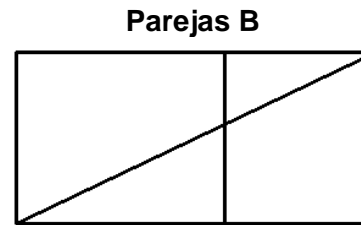
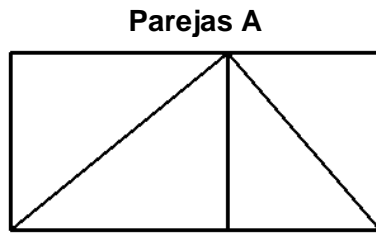
Se trata de proponerles a los alumnos un juego, por grupos, en el cual un grupo tiene un dibujo de una figura y debe enviar un mensaje a otro grupo (que la desconoce), de manera que, a partir del mensaje recibido, se pueda reproducir el dibujo que tiene el otro grupo. Ganan los equipos que logren reproducir las figuras de manera idéntica.

*Material*

Cada pareja debe tener disponible un equipo de geometría: compás, escuadra, transportador y regla graduada.

El profesor entregará a las parejas **A** y **B** los siguientes dibujos:





### *Desarrollo*

El profesor organiza la clase en una cantidad par de parejas. La mitad serán parejas **A** y la otra mitad parejas **B**:

- ✓ Cada pareja **A** es “socia” de una pareja **B**
- ✓ A todas las parejas **A** el profesor entregará un mismo dibujo -en una hoja-, el cual deberán reproducir los integrantes de las parejas **B** con los que se corresponden. De manera similar, a todos los equipos **B** el profesor entregará un mismo dibujo que deben reproducir los integrantes de las parejas **A** con los que se corresponden.
- ✓ Ninguna pareja **A** puede ver los dibujos que reciben las parejas **B** y viceversa.
- ✓ Cada pareja **A** debe redactar un mensaje -sin dibujos- con las instrucciones para que su pareja asociada **B** pueda reproducir la figura. De igual manera, las parejas **B** redactaran un mensaje para sus parejas asociadas **A**.
- ✓ Cuando los mensajes hayan sido terminados de redactar, de forma simultánea, las parejas deben intercambiar los mensajes de manera que se dé inicio a la realización de los dibujos según las descripciones recibidas.
- ✓ Ganan las parejas que al superponer ambas figuras -la original y la reproducida- estas coincidan.

Algunas consideraciones para tener en cuenta durante el desarrollo y las puestas en común:

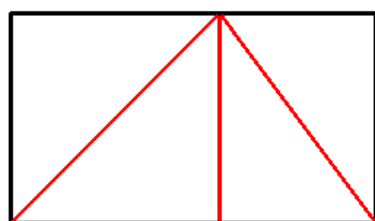
- *Redactar un mensaje a partir del dibujo recibido:*

En esta primera parte de la actividad, los alumnos tendrán que redactar un mensaje en el cual se enfrentan con una primera restricción: no incluir dibujos en el mensaje. Esta condición “obliga” a los alumnos a describir por medio de palabras la figura geométrica que recibieron. Se trata de que pongan en juego los conocimientos que tienen sobre los elementos de una figura geométrica (lados, ángulos, vértices, diagonales).

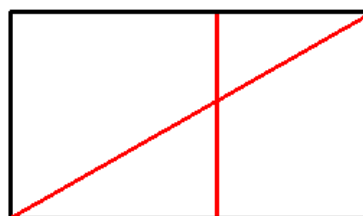
*Sobre los mensajes de los alumnos:*

A partir de las figuras dadas, los alumnos pueden emitir mensajes relacionados con la forma en la que comprenden el dibujo. Por ejemplo:

- ✓ Si consideran que el dibujo es un rectángulo “grande” o dos rectángulos “pegados, unidos, juntos, ...”
- ✓ La forma como nombran a los segmentos que dividen los rectángulos. Si consideran un sólo rectángulo: el “grande”. Las figuras modelo que se entregarán a los alumnos son:



**Parejas A**



**Parejas B**

- ✓ Si consideran el dibujo como dos rectángulos, entonces, cómo nombrar por donde están “unidos”: “el lado más corto”, “el ancho del rectángulo”, “el lado largo”, “un lado paralelo a un lado del rectángulo y que sea vertical”, “comparten un lado”, ...entre otras.
- ✓ Para el caso del dibujo de la pareja **B**, si consideran que son dos rectángulos: ¿cómo nombrarán a la diagonal del rectángulo “mayor”?



Veamos dos ejemplos de posibles mensajes de los alumnos sobre la figura **A**:

*Ej 1: “Dibujar un rectángulo y trazar una línea desde la punta inferior izquierda hasta la punta superior derecha. Pegado del rectángulo del lado derecho dibujar un cuadrado y trazar una línea desde la punta superior izquierda hasta la parte inferior derecha”*

Un mensaje de este tipo evidenciaría que los alumnos no manejan la noción de diagonal, además, de que no incluyen medidas en el texto. Es probable que este mensaje de lugar a figuras semejantes, pero no idénticas.

*Ej 2: "Dibuja un rectángulo de base 5,6 cm y de lado 2,2. Dividir el rectángulo en un rectángulo de 3,4 cm y un cuadrado de 2,2. Trazar una línea perpendicular desde la parte inferior izquierda a la parte superior derecha del rectángulo de 3,4 cm y otra desde la parte superior izquierda del cuadrado hasta la parte inferior derecha"*

En este mensaje se observa el uso de las medidas y de nociones geométricas como: rectángulo, cuadrado, recta perpendicular. En este caso también hay ausencia de la noción de diagonal y el mensaje en general concibe la figura de manera particional: un rectángulo y un cuadrado.

- *Dibujar a partir del mensaje recibido:*

Luego de que todas las parejas de alumnos han terminado de elaborar el mensaje, se deben intercambiar con su respectiva pareja asociada. Ahora se trata de que cada pareja realice el dibujo siguiendo las instrucciones del mensaje. Es probable que las interpretaciones que se den a las indicaciones del mensaje sean muy diversas. Puede que los alumnos:

- ✓ No tengan en cuenta toda la información del mensaje
- ✓ Utilicen datos adicionales que no estaban en el mensaje (agreguen medidas que no eran parte del mensaje)
- ✓ Haya una mala interpretación de los datos (orientación de las diagonales, medidas, entre otras).

Es conveniente precisar que la producción de un buen dibujo no necesariamente es respuesta a un buen mensaje.

- *Comparar los dibujos:*

En esta etapa de la actividad, se sugiere al profesor proponer a los alumnos comparar los dibujos originales con los elaborados a partir de los mensajes. Si los dibujos al ser superpuestos coinciden, se tendrán parejas ganadoras de la actividad. Entre los alumnos que no logren obtener un dibujo idéntico se generará la discusión si los errores estuvieron en el mensaje o en la interpretación de este. Se trata entonces de proponer un análisis de estas cuestiones en forma grupal.

- *Análisis de los mensajes:*

Se sugiere que el profesor oriente una discusión grupal donde se analicen los mensajes utilizados para las reproducciones de los dibujos y cómo fueron interpretados. La discusión debe darse en torno a si las descripciones incluidas en los mensajes coinciden con las propiedades y características de la figura geométrica en juego.

Se trata de que el profesor seleccione un mensaje de las parejas **A** y un mensaje de las parejas **B**<sup>75</sup> de manera que se discuta los siguientes elementos:

- ✓ Identificación de información incorrecta
- ✓ Información que se podría adicionar para completar el mensaje
- ✓ Análisis del vocabulario geométrico utilizado

Las intervenciones del profesor dependerán del contenido de los mensajes. El propósito es establecer nuevas relaciones entre las figuras geométricas y formalizar el vocabulario utilizado por los alumnos: diagonal, rectángulo, cuadrado, entre otras.

Finalmente, se sugiere que estas precisiones que se van haciendo con los alumnos queden registradas en sus cuadernos de manera que se conviertan en recursos para nuevas situaciones de mensajes.

## **2. Situación 2: Reproducción de un paralelogramo**

### *Objetivos:*

- ✓ Favorecer el análisis de las características de un paralelogramo, así como su formulación.
- ✓ Funcionalizar el vocabulario utilizado por los alumnos en la descripción de esa figura y favorecer la construcción de vocabulario nuevo.
- ✓ Explorar técnicas de construcción de figuras geométricas.

### *¿En qué consiste?*

---

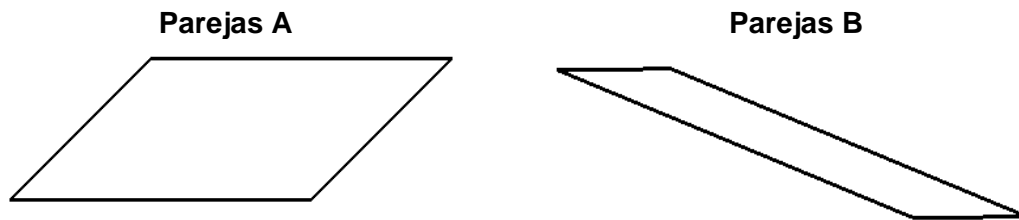
<sup>75</sup> Es conveniente que el profesor seleccione mensajes que cuenten con algunos datos asociados a propiedades y características de la figura que se desea reproducir. Si se analiza un mensaje muy alejado del “correcto” puede generar un ambiente de críticas a los autores del mensaje. De manera análoga, si se analiza un mensaje “muy elaborado” puede darse una gran distancia con el resto de los mensajes elaborados, perdiendo la posibilidad de hacer una discusión enriquecedora de la actividad (Broitman y Itzcovich, 2002).

Se trata de proponer a los alumnos un juego, por equipos, en el cual un equipo tiene un dibujo de un paralelogramo (no rectángulo) y debe enviar un mensaje a otro grupo (que lo desconoce), de manera que, a partir del mensaje recibido, se pueda reproducir el dibujo que tiene el otro grupo. Ganan los equipos que logren reproducir las figuras de manera idéntica. Se verificará por superposición.

### *Material*

Cada pareja deberá tener disponible un equipo de geometría: compás, escuadra, transportador y regla graduada.

El profesor entregará a las parejas **A** y **B** los siguientes dibujos (figuras modelo):



### *Desarrollo*

El profesor organiza la clase en una cantidad par de parejas. La mitad serán parejas **A** y la otra mitad parejas **B**:

- ✓ Cada pareja **A** es “socia” de una pareja **B**
- ✓ A todas las parejas **A** el profesor entregará un mismo dibujo -en una hoja-, el cual deberán reproducir los integrantes de las parejas **B** con los que se corresponden. De manera similar, a todos los equipos **B** el profesor entregará un mismo dibujo que deben reproducir los integrantes de las parejas **A** con los que se corresponden.
- ✓ Ninguna pareja **A** puede ver los dibujos que reciben las parejas **B** y viceversa.
- ✓ Cada pareja **A** debe redactar un mensaje -sin dibujos- con las instrucciones para que su pareja asociada **B** pueda reproducir la figura. De igual manera, las parejas **B** redactaran un mensaje para sus parejas asociadas **A**.
- ✓ Cuando los mensajes hayan sido terminados de redactar, de forma simultánea, las parejas deben intercambiar los mensajes de manera que se dé inicio a la realización de los dibujos según las descripciones recibidas.

- ✓ Cuando las figuras estén terminadas, deben recortarse para facilitar la superposición de estas. Ganan las parejas que al superponer ambas figuras -la original y la reproducida- estas coincidan.

Algunas consideraciones para tener en cuenta durante el desarrollo y las puestas en común:

- *Redactar un mensaje a partir del dibujo recibido:*

Se considera que los conocimientos que tienen los alumnos sobre figuras geométricas les permitirán abordar la situación, aunque no necesariamente tener éxito las primeras veces. Al jugar varias veces, al revisar los errores que impidieron el éxito, poco a poco se producirán conocimientos nuevos<sup>76</sup>.

Las decisiones que toman los alumnos sobre las figuras en torno a los datos, las formulaciones y las construcciones, son las que favorecen el uso y descubrimiento de conocimientos geométricos que dan sentido al objeto de enseñanza (Fregona y Orús, 2011)

*Sobre los mensajes de los alumnos:*

Se conserva la restricción a los alumnos de que el mensaje que deben redactar no puede incluir dibujos. “Obligar” a los alumnos a describir por medio de palabras la figura geométrica les exige poner en juego sus conocimientos. En este punto hay que analizar una posible dificultad, y es que estos conocimientos y vocabulario que utilizan los alumnos para hacer las descripciones de la figura (vértices, segmentos, lados, triángulos, paralelogramos, ángulos, etc.), no tengan el mismo sentido para los alumnos receptores del mensaje. Se trata entonces de que el desarrollo de esta situación favorezca las negociaciones de los significados tanto al interior de las parejas como en la totalidad del grupo de alumnos.

---

<sup>76</sup> Se sugiere que esta situación se repita dos veces, por lo que al final de esta ficha se anexa dos pares de paralelogramos más.

Es conveniente precisar que la riqueza de la actividad se encuentra en la dialéctica que se genera entre los equipos de alumnos en torno a la formulación e interpretación de los mensajes y, las técnicas de construcción de las figuras.

*Ejemplos de posibles mensajes de alumnos.*

A partir de las figuras dadas, los alumnos pueden emitir mensajes relacionados con la forma en la que comprenden el dibujo. A continuación, se muestran algunos ejemplos:

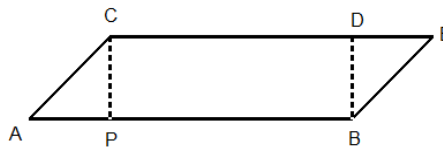
*Ej 3: “es un rectángulo inclinado cuyos lados miden 6 cm y 2,5 cm”<sup>77</sup>*

Este mensaje pone en evidencia que los alumnos reconocen la figura del paralelogramo como un rectángulo con un grado de inclinación diferente (el grado de inclinación refiere al ángulo interior, diferente a  $90^\circ$ ). Los alumnos receptores del mensaje pueden acertar con la forma de paralelogramo, pero no podrán construir uno idéntico pues se pueden obtener varias figuras con diferentes “inclinaciones”.

*Ej 4: “Trazar una línea de 6 cm de largo cuyo extremo izquierdo se llama **A** y el extremo derecho se llama **B**. A dos centímetros del punto **A** trazar una línea vertical de 1,3 cm cuyo extremo se llama **C**. Del punto **B** trazar una línea vertical de 1,3 cm de altura que se llamará **D**. Trazar una línea de 6 cm que une el extremo **C** y el extremo **D**.*

*Debe pasar la línea **D**. Se llamará **E**. Unir la línea **B** y **C** a la línea **A**”<sup>78</sup>*

Es probable que la figura que reproduzcan las parejas que reciban el mensaje tenga la siguiente forma:



---

<sup>77</sup> Tomado de Fregona y Orús (2011, p. 70)

<sup>78</sup> Tomado de Fregona y Orús (2011, p. 71)

La descripción realizada no hace explícito el punto P de la construcción, no obstante, sí da cuenta de su existencia pues determina un extremo de la línea vertical a 2 cm del punto A.

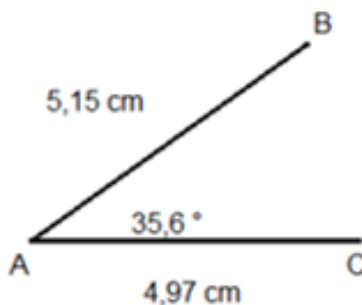
Es altamente probable que un mensaje de este tipo sea exitoso, siempre y cuando los alumnos encargados de la construcción conserven las medidas de los segmentos y la condición de “línea vertical” se comprenda como perpendicular (se entiende ese sentido en el mensaje redactado por los alumnos).

Si aparece un mensaje de este tipo, el docente puede analizar con los alumnos si esta descripción es válida para determinar cualquier paralelogramo (en efecto, sí lo es). Cabe precisar que esa discusión conlleva a una problemática de generalización y validación que trasciende la situación de comunicación. Por ello, no se recomienda que esto se haga muy pronto (al menos no en la primera aplicación).

El primer ejemplo de mensajes presentado anteriormente no permite reproducir un paralelogramo igual al modelo, el segundo ejemplo sí. No obstante, ninguno de los dos refleja un conocimiento de la noción de paralelogramo. A continuación, se presentan dos aspectos que pueden caracterizar mensajes donde la dificultad ya no radica en definir si es paralelogramo o no, sino en que la reproducción sea idéntica.

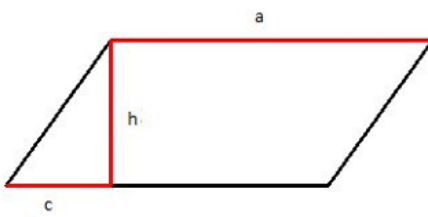
- i) Los alumnos pueden enviar un mensaje donde afirmen que la figura a reproducir es un paralelogramo y adicione las medidas de dos lados no paralelos y el ángulo comprendido entre ellos.

Este tipo de mensaje da cuenta de que los alumnos emisores reconocen la figura del paralelogramo y algunas de sus características (lados opuestos paralelos y congruentes). Se entiende entonces que consideran suficiente facilitar a sus compañeros los datos de dos lados y el ángulo comprendido para construir la figura:



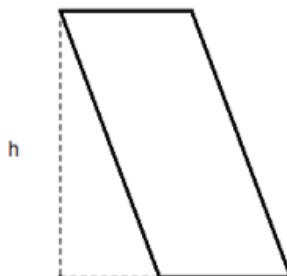


- ii) Los alumnos pueden enviar un mensaje donde afirmen que la figura a reproducir es un paralelogramo y adicione las medidas de  $a$ ,  $h$  y  $c$ .



A partir del reconocimiento del paralelogramo, los alumnos emisores pueden considerar que ofrecer las medidas de los segmentos  $a$ ,  $h$  y  $c$  será suficiente para construir el paralelogramo.

- La interpretación de este mensaje puede ser favorable si los alumnos receptores conocen la noción de altura y el paralelogramo a reproducir tiene el ángulo interior del segmento base menor a  $90^\circ$ .
- En el caso del paralelogramo de las parejas B (ver el siguiente dibujo), puede ser complejo reproducirlo, pues la altura queda determinada “fuera” del paralelogramo:



- *Dibujar a partir del mensaje recibido:*

Luego de que todas las parejas de alumnos han terminado de elaborar el mensaje, se deben intercambiar con su respectiva pareja asociada. Ahora se trata de que cada pareja realice el dibujo siguiendo las instrucciones del mensaje. Es probable que las interpretaciones que se den a las descripciones que aparecen en el mensaje sean muy diversas. Puede que los alumnos:

- ✓ No tengan en cuenta toda la información del mensaje
- ✓ Utilicen datos adicionales que no estaban en el mensaje (agreguen medidas que no eran parte del mensaje)

- ✓ Haya una mala interpretación de los datos (orientación de las diagonales, medidas de los lados y ángulos, entre otras)

Es importante que el profesor **no evite** que los alumnos manden mensajes defectuosos, pues estos permitirán que la no coincidencia de las figuras ponga en evidencia que algo no funcionó. Después, será la revisión y análisis de los mensajes los que permitan detectar las fallas del proceso.

- *Comparar las figuras:*

En esta etapa de la actividad, el profesor podrá proponer a los alumnos comparar las figuras originales con las elaboradas a partir de los mensajes. Si los dibujos al ser superpuestos coinciden, se tendrán parejas ganadoras de la actividad. Entre los alumnos que no logren obtener un dibujo idéntico se generará la discusión si los errores estuvieron en el mensaje o en la interpretación de este. Se trata entonces de proponer un análisis de estas cuestiones en forma grupal.

- *Análisis de los mensajes:*

Se sugiere que el profesor oriente una discusión grupal en la que se analicen los mensajes utilizados para las reproducciones de los dibujos y cómo fueron interpretados. La discusión debe darse en torno a si las descripciones incluidas en los mensajes coinciden con las propiedades y características de la figura geométrica en juego, y si fueron suficientes o no para garantizar una figura igual.

El profesor puede seleccionar algunos mensajes de las parejas **A** y de las parejas **B**, de manera que se discutan los siguientes elementos: identificación de información incorrecta, información que se podría adicionar para completar el mensaje y análisis del vocabulario geométrico utilizado.

Las intervenciones del profesor dependerán del contenido de los mensajes. El propósito es establecer nuevas relaciones entre las figuras geométricas y precisar y enriquecer el vocabulario utilizado por los alumnos. Debe considerarse la utilización, por parte de los alumnos, de los acuerdos y vocabulario establecidos en la situación anterior de rectángulos. Por ejemplo<sup>79</sup>:

*Respecto al vocabulario:*

---

<sup>79</sup> Ejemplos tomados de Broitman y Itzcovich (2002, p. 35).

- ✓ Lo que decimos punta, se llama vértice
- ✓ La “raya” inclinada que une puntas opuestas es la diagonal del rectángulo o del cuadrado
- ✓ El cuadrado alargado refiere a un rectángulo
- ✓ El cuadrado y el rectángulo tienen dos diagonales
- ✓ Si se sabe que es un cuadrado, no hace falta dar la medida de todos los lados

*Respecto a los acuerdos:*

- ✓ Hay que informar sobre las medidas de los lados para que la figura reproducida quede igual a la original

### **3. Situación 3: Reproducción de un Triángulo.**

*Objetivos:*

- ✓ Favorecer el análisis de las características de un triángulo.
- ✓ Funcionalizar el vocabulario utilizado por los alumnos en la descripción de la figura.
- ✓ Explorar técnicas de construcción de figuras geométricas.
- ✓ Reproducir un triángulo, a partir de un mínimo de datos.
- ✓ Formular los criterios de congruencia de triángulos.

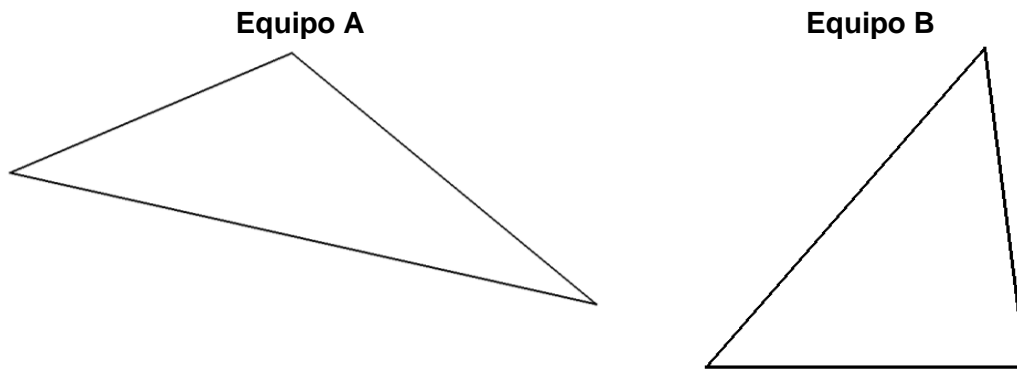
*¿En qué consiste?*

Se trata de proponer a los alumnos un juego, por equipos, en el cual un equipo tiene un dibujo de un triángulo y debe enviar un mensaje a otro grupo -que lo desconoce-, de manera que, a partir del mensaje recibido, se pueda reproducir el dibujo que tiene el otro grupo. Ganan los equipos que logren reproducir las figuras de manera idéntica. Se verificará por superposición.

*Material*

Cada grupo de alumnos deberá tener disponible un equipo de geometría: compás, escuadra, transportador y regla graduada.

El profesor entregará a los equipos **A** y **B** los siguientes dibujos:



### *Desarrollo*

Esta actividad requiere organizar al grupo en una cantidad par de equipos. Se sugiere que cada equipo tenga máximo 3 integrantes. La mitad de los equipos se identifican como **A** y la otra como **B**. Cada equipo **A** debe estar asociado a un equipo **B** y viceversa, de manera que conformen un sólo equipo AB para la actividad.

- ✓ A todos los equipos **A** el profesor entregará un mismo triángulo -en una hoja-, el cual deberán reproducir los integrantes de los equipos **B** con los que se corresponden. De manera similar, a todos los equipos **B** el profesor entregará un mismo triángulo que deben reproducir los integrantes de los grupos **A** con los que se corresponden.
- ✓ Cada equipo **A** deberá proporcionar por escrito -en un pedazo de papel- a su correspondiente equipo **B**, los datos que considera **indispensables** para reproducir un triángulo idéntico. Al mismo tiempo, **B** proporcionará por escrito los datos para la construcción al equipo **A**.
- ✓ Por ningún motivo se podrá enviar dibujos en los mensajes.
- ✓ En caso de que algún equipo -**A** o **B**- no logre hacer la construcción y considere que necesita más información, puede hacer el pedido de la información a su equipo correspondiente, por escrito. Recibirá la respuesta por escrito también.

Algunas consideraciones para tener en cuenta durante el desarrollo y en las puestas en común:

Los alumnos deben proporcionar los datos que consideran necesarios para que su correspondiente equipo construya el triángulo que desconocen. Con esta actividad,

también se pretende dar lugar a la enunciación de las condiciones que permitan formular los criterios de congruencia de triángulos<sup>80</sup>.

La actividad debe repetirse tres veces de manera que los alumnos vayan identificando y ajustando las condiciones que se quieren precisar. En la primera repetición, se debe agregar a la consigna: *“Esta vez se trata de que logren dar **la mínima información necesaria**”*.

En la tercera aplicación, se mantiene esta última consigna y se anima a los alumnos a buscar más alternativas, sobre todo si aún no encuentran las condiciones asociadas a los tres criterios de congruencia<sup>81</sup>.

- *Sobre la formulación de mensajes de los alumnos:*

La restricción de no incluir dibujos en los mensajes pretende que los alumnos se vean “forzados” a tener que describir por medio de *palabras* las características de los triángulos que se desean reproducir.

A partir de la modificación de la consigna, los alumnos pueden presentar dificultades para redactar los mensajes y para construirlos con la información que se les facilita. Se trata entonces de un problema en la comunicación de las figuras, lo que hace necesario la repetición de la actividad un par de veces más.

*Sobre la comparación de las figuras:*

El profesor podrá proponer a los alumnos comparar las figuras originales con las elaboradas a partir de los mensajes. Si los dibujos al ser superpuestos coinciden, se tendrán equipos ganadores de la actividad. Se sugiere que al finalizar cada ronda de mensajes se realice una corta puesta en común de manera que se vayan precisando las condiciones, dificultades y logros de las construcciones obtenidas a partir de los mensajes. El propósito es descartar colecciones de datos que no permitieron obtener un triángulo idéntico e identificar aquellas colecciones, con el mínimo de datos, que sí

---

<sup>80</sup> Se aceptará que la verificación de la congruencia de las construcciones de los alumnos pueda darse por superposición de estas.

<sup>81</sup> Para esta situación se sugiere que en cada repetición de la actividad se den a los alumnos triángulos diferentes, por lo que al final de esta ficha se anexan dos pares de triángulos más.

dieron lugar a la reproducción idéntica del triángulo para institucionalizarlas como un criterio de congruencia.

Es importante que el profesor **no evite** que los alumnos manden mensajes incompletos o defectuosos o con exceso de datos, pues estos permitirán que la no coincidencia de las figuras ponga en evidencia que algo no funcionó. Después, será en la revisión y análisis de los mensajes que se detecten las fallas del proceso.

#### *Análisis de los mensajes:*

Se sugiere que el profesor oriente una discusión grupal en la que se analicen los mensajes utilizados para las reproducciones de los dibujos y cómo fueron interpretados. La discusión debe darse en torno a si las descripciones incluidas en los mensajes coinciden con las propiedades y características de la figura geométrica en juego, y si fueron suficientes o no para garantizar una figura idéntica.

El propósito es precisar (quizá con cada aplicación) los datos que fueron suficientes para obtener el triángulo deseado:

- ✓ Tres lados **-LLL-**
- ✓ Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos **-LAL-**
- ✓ Un lado y dos ángulos adyacentes a él. **-ALA-**

Finalmente, concluir que los criterios de congruencia garantizan que, con un mínimo de datos se dé la congruencia de dos triángulos sin conocer la totalidad de elementos del triángulo (tres lados, tres ángulos, tres medianas, tres alturas, tres bisectrices).

#### **Referencias.**

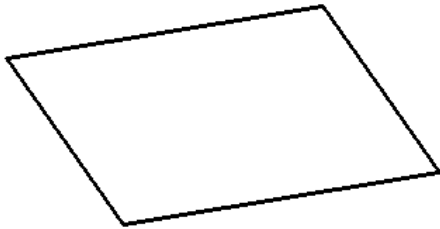
- Broitman, C. y Itzcovich, H. (2002). El estudio de las figuras y de los cuerpos geométricos (Primera). Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.
- Carbó, A. L., y Mántica, A. M. (2010). Una propuesta para trabajar congruencia de triángulos en la escuela secundaria priorizando la validación, 376–386
- Fregona, D., y Orús, P. (2011). La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemáticas (Primera). Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Ministerio de Educación GCBA/MCBA. (2007). Matemática-Geometría. Aportes para la enseñanza Nivel Medio. (Primera). Buenos Aires.

### Figuras adiciones. Situaciones 2 y 3

A continuación, se presentan los paralelogramos y triángulos que se sugieren para las repeticiones de la situación de los mensajes:

*Primera repetición:*

**Parejas A**



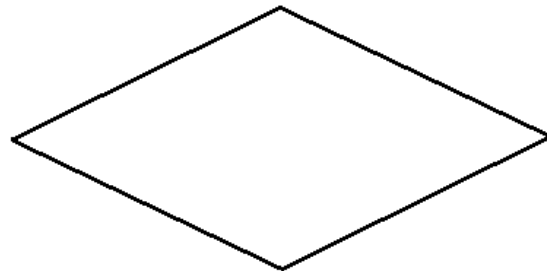
**Parejas B**



**Parejas A**

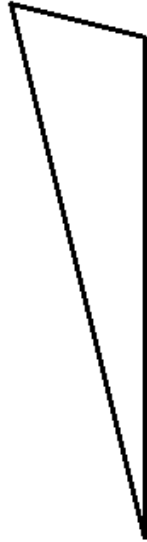


**Parejas B**

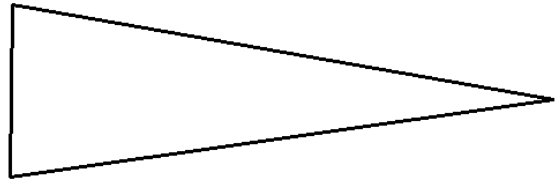


*Segunda repetición:*

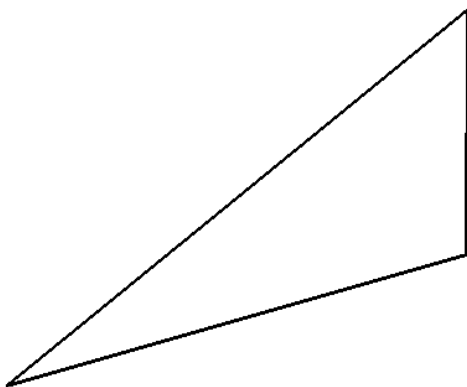
**Equipos A**



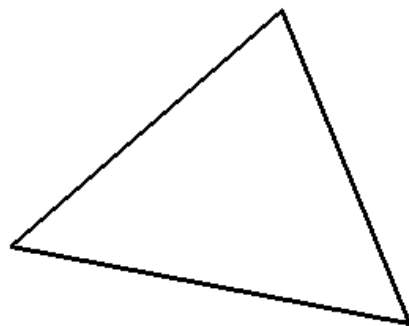
**Equipos B**



**Equipos A**



**Equipos B**





Anexo 2: Memoria del taller de geometría escolar para profesores de matemáticas

**DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS  
CINVESTAV**



**Memorias del Taller de Geometría  
Escolar para profesores de matemáticas**



**Taller adscrito a Tesis de maestría en ciencias en  
la especialidad en investigaciones educativas**

**Coordinadores:**

**Director: Dr. David Block Sevilla**

**Tesista: Yesenia Castaño Torres**

## Presentación

El presente documento contiene un conjunto de situaciones didácticas de geometría plana para la realización de un taller corto dirigido a profesores de matemáticas de nivel secundario. El taller fue orientado por el Dr. David Block, investigador del Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav y la Lic. Yesenia Castaño, estudiante de la Maestría en ciencias en la especialidad de investigaciones educativas, en el marco de una investigación relacionada con la enseñanza de la geometría en nivel secundario. Las situaciones que se presentan atienden al estudio de nociones geométricas de diferentes niveles de secundaria.

Un aspecto importante para la enseñanza de la geometría escolar<sup>82</sup>, que consideramos como eje central de este taller, es la construcción de significado de las definiciones de los objetos geométricos. De acuerdo con Camargo y Samper (2006), Freudenthal (1978), Vinner y Hershkowitz (1980), Vinner (1991) y de Villiers (1998) afirman que conocer la definición de un objeto geométrico no es garante de que este objeto sea aprendido, es decir, el trabajo en el aula que proporcionan a los alumnos las definiciones de los objetos, dadas de manera directa, no necesariamente tiene como consecuencia que ellos conceptualicen dichos objetos. Se ha despertado entonces un interés, desde la didáctica, por generar situaciones que aporten en la construcción y significación de las definiciones de los objetos geométricos en el aula. Desde esta perspectiva, construir la definición de un objeto, es construir la conceptualización misma del objeto, o, en palabras de Camargo y Samper (2006):

(...) las definiciones en geometría contribuyen a la construcción significativa de conocimiento, en la medida en que se usen para algo más que para asociar un nombre a un conjunto de representaciones gráficas; este uso depende del reconocimiento de la bicondicionalidad de la relación entre un conjunto de propiedades de un objeto y el nombre que se le asigna al objeto que cumple dichas propiedades (p. 56)

La identificación de las características de un objeto geométrico es un proceso que está asociado a la experiencia y a la visualización de representaciones gráficas de los objetos. No obstante, debe considerarse que la conceptualización de una definición pasa de esta caracterización de lo visual a hacerse operativa en la producción de cadenas deductivas en una demostración (Camargo y Samper, 2006). A través de situaciones que invitan a

---

<sup>82</sup> Denominamos Geometría escolar al conjunto de tópicos geométricos a enseñar en nivel secundario.

la exploración, observación, y conjeturación pretendemos que los profesores determinen las condiciones y propiedades necesarias para construir y significar los conceptos. De igual manera, esperamos que participen en la evaluación de definiciones ya construidas, analizando las propiedades que definen un objeto y las implicaciones que tiene cada una de ellas. También esperamos que, a través de la solución de situaciones enmarcadas en un problema, funcionalicen las definiciones de los objetos geométricos.

En este taller presentamos una aproximación didáctica a la enseñanza de las definiciones, dirigida a profesores de matemáticas de nivel secundario en ejercicio. Cabe aclarar que, si bien el propósito general del taller está en el marco de la enseñanza de las definiciones de objetos geométricos, no desconocemos la existencia e importancia de otros objetivos específicos asociados a cada una de las situaciones que se plantean y que serán precisados en ellas más adelante.

A continuación, presento las situaciones que componen el taller, sus propósitos, y los tiempos estimados para su desarrollo.

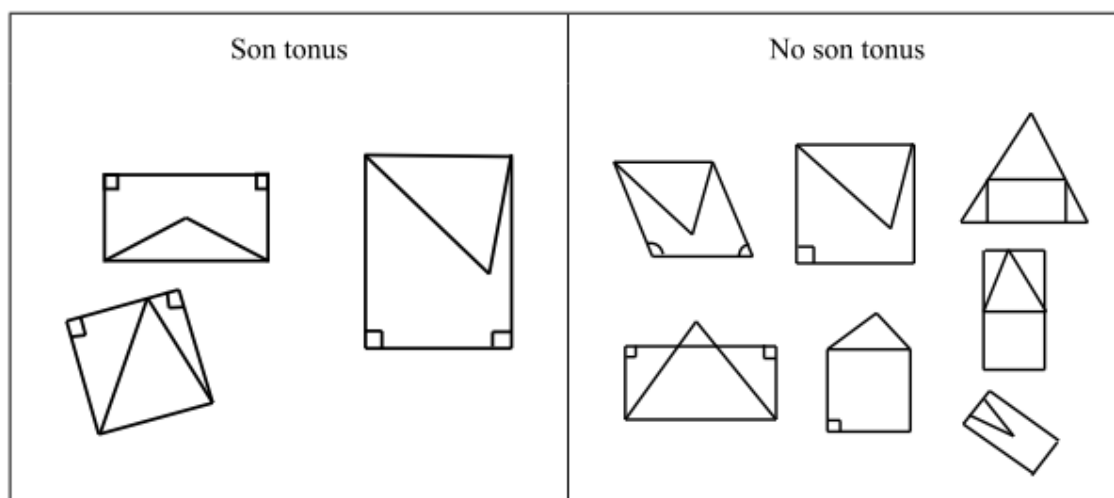
<b>Situaciones didácticas para la enseñanza de definiciones de elementos geométricos</b>	<b>Propósito</b>	<b>Nombre</b>	<b>Tiempo estimado</b>
	Conceptualizar una definición a partir de ejemplos y no-ejemplos	Situación 1: Construcción de la definición del objeto geométrico: "Tonu"	40´
	Conceptualizar una definición a partir de propuestas de conjuntos de propiedades necesarias y suficientes y su contraste con representaciones	Situación 2: Construcción de la definición de Cuadrado	40´
	Conceptualizar una definición a partir del análisis de los elementos geométricos mínimos que caracterizan a un objeto geométrico	Situación 3: El cuerpo escondido	60´
	Conceptualizar definiciones de objetos geométricos a partir de la construcción y desarrollo de lugares geométricos.	Situación 4: ¿Dónde está la fábrica?	40´

La estructura de cada una de las situaciones consta de dos componentes: caracterización de la situación - ¿de qué se trata?, objetivo, saberes geométricos involucrados, situación didáctica y Comentarios y precisiones.

### 1. SITUACIÓN 1: Construcción de la definición del objeto geométrico: “TONU”


#### Situación didáctica

A continuación, se presentan dos conjuntos con representaciones gráficas que corresponden a ejemplos y no-ejemplos de un objeto geométrico llamado **TONU**<sup>83</sup>. Observe e identifique las características de las figuras que componen cada uno de los conjuntos.









*Fuente:* (Camargo y Samper, 2006, p. 4)

- En la tabla se presentan las figuras que no son Tonus. Complete escribiendo las razones por las que cada figura no es un tonu.

No son Tonus	¿Por qué? - Razones
	

<sup>83</sup> Inventado por Camargo y Samper (2006)

- Participe en la puesta en común compartiendo los resultados obtenidos en el punto anterior.
- Escriba una definición para el objeto geométrico Tonu. Tenga en cuenta que la definición debe incluir las propiedades necesarias y suficientes para definir el objeto, es decir, sin que falten propiedades indispensables o presente propiedades que se puedan inferir de otras ya mencionadas. A partir de la definición dada, proponga 2 ejemplos y no-ejemplos de Tonu.

Definición de Tonu	Son Tonus	No son Tonus

4. Participe en la puesta en común compartiendo su definición, ejemplos y no-ejemplos de Tonu. Analice y discuta las producciones de sus compañeros.

*Caracterización de la situación - ¿de qué se trata?:*

Esta situación consiste en construir una definición para un objeto geométrico *desconocido* llamado Tonu<sup>84</sup> a partir de conjuntos de representaciones gráficas -figuras- que responden a ejemplos y no-ejemplos. Al inicio se presentan en un cuadro los conjuntos de figuras y se indica explorar a través de la observación las propiedades que posiblemente definen un Tonu, se trata de permitir aproximarse a una primera construcción mental de lo que puede ser un Tonu. Luego, se presentan las figuras que no son Tonu en una tabla, la cual debe ser completada haciendo explícitas las razones por las cuales se considera que las figuras no son Tonu. Este ejercicio permite identificar características comunes de los Tonus a partir de la exclusión de las no comunes. Las características que hacen que una figura no sea un Tonu permiten afianzar y/o ajustar ese constructo que se está conformando para que finalmente se pueda proponer una definición más elaborada del objeto geométrico.

*Objetivo:*

La aproximación a la conceptualización de definiciones considerada para esta situación consiste en presentar a los participantes conjuntos de representaciones gráficas ejemplos y no-ejemplos del objeto geométrico llamado Tonu. El objetivo es construir una definición para el objeto geométrico Tonu que involucre todas sus propiedades a partir de la caracterización de ejemplos y no-ejemplos.

*Saberes geométricos involucrados:*

Esta situación requiere conocimientos básicos de geometría asociados a elementos como: vértices, ángulos, clasificación de ángulos según su medida, segmentos, figuras geométricas, entre otros. A su vez, requiere la habilidad para funcionalizar las nociones

---

<sup>84</sup> Inventado por Camargo y Samper (2006)

de estos saberes en la construcción de la definición de un objeto geométrico desconocido.

### *Comentarios y precisiones*

El proceso inicial de conjeturación de la definición se basa en un trabajo experiencial que alude a la identificación de propiedades a partir de la observación -ítem 1-. Las modificaciones que va sufriendo esta definición inicial se da en los momentos de puesta en común, pues permite a otros participantes involucrados con la tarea propongan contraejemplos que evidencien la enunciación de propiedades que no corresponden a un Tonu o propiedades que no necesariamente son propias del objeto. Estos ejercicios -ítem 2 y 4- favorecen las construcciones colectivas del concepto geométrico. Particularmente en el ítem 4 puede darse contraejemplos que invaliden una definición que se esté analizando o aparezcan ejemplos de Tonu que se ajustan a la definición pero que generan, en un primer momento, escepticismo por su originalidad.

La **definición de Tonu** a la que se espera se aproximen es la siguiente:

Es la unión de un cuadrilátero y dos segmentos de recta; el cuadrilátero tiene dos ángulos rectos consecutivos; los dos segmentos tienen un extremo común el cual está en el interior del cuadrilátero o sobre el lado del cuadrilátero que contiene los vértices de los ángulos rectos, y el otro extremo de cada segmento es un vértice del cuadrilátero que no corresponde a los ángulos rectos consecutivos (Camargo y Samper, 2006, p. 59).

Esta definición presenta las propiedades necesarias<sup>85</sup> y suficientes<sup>86</sup> de un Tonu, no obstante, es necesario aclarar que se pueden producir varias definiciones que se correspondan con estas propiedades, es decir, que sean equivalentes<sup>87</sup> entre sí.

Finalmente, el trabajo de validación de las definiciones y los ejemplos que se producen en el desarrollo de la situación se realiza de forma colectiva, en este punto es pertinente precisar que los procesos de justificación, en esta actividad no se hacen mediante deducciones, sino mediante la refutación y validación de ejemplos y contraejemplos.

---

<sup>85</sup> Son aquellas propiedades que obligatoriamente deben estar incluidas en una definición.

<sup>86</sup> Refiere a que en la definición no esté incluida una propiedad que se pueda deducir de alguna propiedad necesaria ya enunciada.

<sup>87</sup> Dos definiciones son equivalentes si el conjunto de ejemplos es el mismo ( Winicki-Landman y Leikin, 2000 en Camargo y Samper, 2006, p. 66)

## 2. SITUACIÓN 2: Construcción de la definición de Cuadrado

*Situación didáctica.*

A continuación, se presentan algunas propuestas de definición de cuadrado sugeridas por estudiantes universitarios<sup>88</sup> en el marco de una actividad en clase de geometría plana.

1. Complete la tabla teniendo en cuenta las siguientes indicaciones:

En la columna **Correcta/incorrecta**: Se debe indicar si la definición es *correcta* (menciona todas las propiedades necesarias) o *incorrecta* (no incluye todas las propiedades necesarias, menciona una propiedad que no puede tener el objeto, o una propiedad que puede no tener el objeto)

En la columna **Ejemplos/no ejemplos**: Se deben presentar figuras ejemplos ó no-ejemplos de la definición correspondiente, según sea el caso. (ejemplo si es correcta la definición y no-ejemplo si es incorrecta)

En la columna **Valoración**: Se debe indicar (con un tache) si las características de la definición propuesta son necesarias y suficientes.

En la columna de **justificación**: escriba las razones con las cuales sustenta su valoración dada en la columna anterior.

Conjunto de propiedades para CUADRADO	Correcta / incorrecta	Ejemplos / no ejemplos	Valoración	Justificación
Una figura geométrica cerrada con cuatro lados congruentes			Son necesarias <input type="checkbox"/> Son suficientes <input type="checkbox"/>	
Un polígono que tiene diagonales de igual longitud.			Son necesarias <input type="checkbox"/> Son suficientes <input type="checkbox"/>	

<sup>88</sup> Estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional -Colombia-; tomado de las investigaciones de Camargo y Sampe (2006).



Un cuadrilátero cuyos vértices están colocados en $(x, y)$ $(x + 1, y)$ $(x, y + 1)$ y $(x + 1, y + 1)$ .			Son necesarias <input type="checkbox"/> Son suficientes <input type="checkbox"/>	
Un cuadrilátero regular.			Son necesarias <input type="checkbox"/> Son suficientes <input type="checkbox"/>	
Un rectángulo con diagonales perpendiculares.			Son necesarias <input type="checkbox"/> Son suficientes <input type="checkbox"/>	
Un cuadrilátero con todos los lados congruentes y un ángulo de $90^\circ$			Son necesarias <input type="checkbox"/> Son suficientes <input type="checkbox"/>	

2. Participe en la puesta en común de manera que comparta, analice y discuta con sus compañeros los resultados obtenidos en el punto anterior.

*Caracterización de la situación - ¿de qué se trata?:*

Una de las principales características de esta situación es la construcción de una definición de un objeto geométrico con la que se está familiarizado. Se trata de someter varios conjuntos de propiedades geométricas de un *cuadrado* a un análisis detallado que permita identificar las implicaciones que tiene cada propiedad en el objeto que se está definiendo. Los participantes deben hacer un análisis individual y colectivo de las propiedades que se presentan en cada conjunto -definición- que se ofrece, de manera que puedan validarlas a través de ejemplos y contraejemplos, puedan identificar qué propiedades pueden incluirse en cada definición para evitar que se generen estos contraejemplos y qué propiedades son innecesarias para definir el objeto. Las propiedades innecesarias son las que pueden deducirse de otras ya mencionadas o aquellas que no necesariamente tiene que tener el objeto. Este análisis para determinar

conjuntos de propiedades correctas o incorrectas exige a los participantes hacer inferencias lógicas de cada una de las propiedades fortaleciendo así su pensamiento deductivo. Establecer relaciones de equivalencia entre las propiedades que se explicitan en una definición o en otra y analizar las implicaciones de cada una de las propiedades dadas para el objeto geométrico exige constantemente referir a las reglas y axiomas de la geometría plana.

#### *Objetivo:*

La aproximación a la conceptualización de definiciones considerada para esta situación consiste en presentar a los participantes algunos conjuntos de propiedades de un cuadrado, de modo que analicen y determinen cuáles son necesarias y suficientes para definir el objeto. El objetivo es identificar el mínimo de propiedades necesarias para validar una definición de un objeto geométrico: el cuadrado.

#### *Saberes geométricos involucrados:*

Esta situación requiere conocimientos básicos de geometría asociados a elementos como: vértices, ángulos, clasificación de ángulos según su medida, segmentos, figuras geométricas, entre otros. Particularmente, se debe estar familiarizado con el objeto geométrico: Cuadrado.

#### *Comentarios y precisiones*

- ❖ Es pertinente mencionar que las propiedades necesarias y suficientes no son mutuamente excluyentes, es decir, una propiedad puede ser necesaria y a su vez suficiente para definir un objeto geométrico, puede ser necesaria pero no suficiente para definirlo o puede ser que dos o más propiedades suficientes se traduzcan en propiedades necesarias para definir el objeto. En este punto se trata de analizar cuidadosamente las implicaciones que tiene sobre el objeto mismo una propiedad que se enuncie.
- ❖ Es relevante precisar que el análisis de las definiciones se confronta constantemente con la construcción teórica a priori con la que el participante cuenta sobre cuadrado

y con la representación gráfica de las propiedades que se están enunciando. Se trata de que el participante actúe sobre un medio que le exige la puesta en acción de sus conocimientos geométricos implícitos.

- ❖ Las definiciones que se vayan determinando como correctas deben privilegiar el menor número de propiedades necesarias, teniendo en cuenta que las demás propiedades puedan inferirse de ellas (es decir, las propiedades necesarias deben ser las menos y ser a la vez ser suficientes). El análisis que determina si una propiedad puede obviarse o eliminarse es útil para comprender las implicaciones de cada propiedad dentro de la definición. Estos procesos favorecen el razonamiento deductivo.

### **3. SITUACIÓN 3: El cuerpo escondido**

#### *Situación didáctica*

Esta actividad tiene como propósito construir un cuerpo geométrico -idéntico a uno que está escondido- a partir de información obtenida mediante cuestionamientos de sus propiedades y/o características<sup>89</sup>.

Tenga en cuenta las siguientes indicaciones:

- ✓ Para el desarrollo de la actividad ubíquese en pareja con uno de sus compañeros.
- ✓ El cuerpo geométrico que se debe construir estará escondido -oculto- por dos de sus compañeros, por lo que sólo podrán caracterizarlo a través de preguntas que le formulen.
- ✓ El desarrollo de la actividad se hará de forma simultánea con sus demás compañeros, las preguntas que formulen deben realizarse una a una según el turno que le sea asignado por el coordinador.
- ✓ Las respuestas a las preguntas formuladas sólo serán respondidas con la siguiente estructura: “sí”, “no”, “no es clara la pregunta”, “no sé” o una medida específica, por ejemplo: “7 cm”.

---

<sup>89</sup> El cuerpo geométrico utilizado en el taller fue una pirámide pentagonal truncada.

- ✓ Pueden hacer el número de preguntas que consideren necesarias para construir el cuerpo geométrico.

Los incisos de la situación son:

1. Formulen a sus compañeros que tienen el cuerpo escondido las preguntas que consideren útiles para obtener la información necesaria para construir el cuerpo geométrico.
2. Con la información obtenida, diseñen la plantilla del cuerpo geométrico. Constrúyanlo con los materiales asignados.
3. En el momento que indique el coordinador, comparen el cuerpo geométrico construido con el cuerpo que estaba escondido: ¿Son iguales?.
4. Participen en la puesta en común, compartan con sus compañeros el cuerpo geométrico construido y discutan sobre la pertinencia – ambigüedad, redundancia, validez, etc.- de cada una de las preguntas y respuestas realizadas por el grupo para la construcción del cuerpo geométrico.

*Caracterización de la situación - ¿de qué se trata-:*

Esta situación consiste en construir un cuerpo geométrico idéntico a uno que está escondido a partir de información obtenida mediante cuestionamientos de sus propiedades y/o características. Se aproxima a la construcción de definición de un objeto en tanto favorece la conceptualización de las propiedades necesarias para definirlo. Exige a los participantes poner en acción los conocimientos geométricos que poseen para formular preguntas que les permitan obtener información que caracterice el cuerpo que deben construir. Debe considerarse que las respuestas que recibirán son únicamente: “sí”, “no”, una medida específica, o bien “no es clara la pregunta” y “no sé”.

La validación que ofrece esta situación se basa en la confrontación de los dos cuerpos geométricos, el escondido y el construido, de manera que constatar si se logró o no construir un cuerpo idéntico es rápidamente verificable. Se trata de una validación contundente, que evidencia si la información que se utilizó para construirlo era suficiente

y correcta. De allí que revisar en retrospectiva el proceso de preguntas y respuestas que determinó la información usada para construir el cuerpo es de gran importancia.

*Objetivo:*

La aproximación a la conceptualización de definiciones considerada para esta situación consiste en caracterizar un cuerpo geométrico que no se puede observar de forma directa y del cual no se les ofrece ninguna información inicial. El objetivo es construir un cuerpo geométrico (idéntico a uno dado que no se puede ver) a través de un mínimo de propiedades necesarias. Además, esta situación suma como objetivos específicos: i) análisis de características geométricas de los objetos, ii) funcionalización del lenguaje geométrico, iii) conceptualizar conocimientos geométricos en el marco de la solución de un problema.

*Saberes geométricos involucrados:*

Esta situación requiere conocimientos básicos de geometría asociados a elementos como: cuerpos y figuras geométricos y sus elementos -caras, aristas, vértices-. Al terminar la actividad, se espera que se consolide un conocimiento más específico asociado a los datos necesarios y suficientes para construir determinado cuerpo geométrico.

*Comentarios y precisiones*

La situación del cuerpo escondido exige analizar una figura o un cuerpo destacando sus características geométricas, aquellas que son necesarias para obtener otro cuerpo igual. Esto conlleva a movilizar los conocimientos geométricos disponibles de los participantes, así como su capacidad para comunicar -formular preguntas y respuestas más precisamente-

- ❖ Para que una pregunta sea funcional debe indagar mínimamente por elementos geométricos que caracterizan un cuerpo geométrico cualquiera. Por ejemplo: el número de vértices, de aristas, de caras. Se trata de analizar cuál es la relación que se da entre los conocimientos que posee un participante sobre cuerpos geométricos

y la pregunta que realizó, es probable que si conoce sobre elementos geométricos asociados como poliedros -prismas-, cuerpos redondos, pueda, en una sola pregunta obtener más información que otros. Esto guarda relación con el manejo del lenguaje geométrico claro y preciso.

- ❖ Es probable que aparezca una pregunta que no comprenda los participantes que tienen el cuerpo geométrico escondido, ya sea porque esté mal formulada o porque no comprenden los términos geométricos que se usan en ella. En cualquiera de los dos casos, la riqueza está en analizar los factores que influyeron en que no se haya dado una comunicación asertiva.

#### 4. SITUACIÓN 4: ¿Dónde está la fábrica?

##### *Situación didáctica*

En una comunidad rural se desea construir una fábrica de aceites y la delegación ha autorizado el proyecto bajo dos condiciones:

- ✓ Estar ubicada a **más** de 3 km de cada una de las casas (no necesariamente a la misma distancia de cada casa) de manera que no se afecte la integridad física de los habitantes del lugar.
- ✓ Estar a **menos** de 2 km de alguna de las dos carreteras (no importa cuál) para evitar largos desplazamientos con la carga de insumos y materiales.

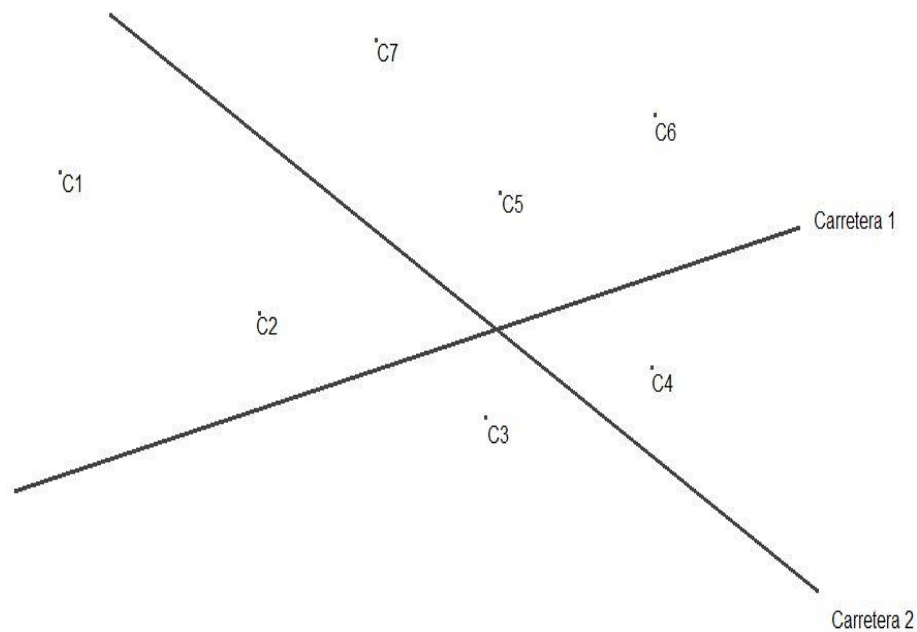


Imagen 1: Plano Comunidad rural<sup>90</sup>

Teniendo en cuenta esta información:

1. Marque UNA posible ubicación de la fábrica de aceites. Para las construcciones recuerde que puede usar los instrumentos geométricos que desee.
2. ¿La ubicación señalada es la única opción posible?, ¿puede señalar otro punto para la ubicación de la fábrica?
3. ¿Cuántos puntos posibles se pueden determinar para construir la fábrica? Señálelos todos.
4. Participe en la puesta en común compartiendo las soluciones que encontró para el problema.

*Caracterización de la situación - ¿de qué se trata?:*

---

<sup>90</sup> Considere en el plano que 1cm = 1km y que los puntos **Cn** representan la ubicación de las casas (C1, C2, C3, ..., C7)

Esta situación consiste en buscar todas las soluciones posibles a un problema que involucra conocimientos geométricos básicos pero cuya finalidad es hacer emerger las nociones de lugares geométricos en general y las nociones de rectas paralelas y circunferencia en particular, esto es, crear un medio en el que los conocimientos geométricos que se quieren conceptualizar se hacen necesarios en el marco de la solución de un problema. La situación puede abordarse sin estar familiarizados con la noción de lugares geométricos como la circunferencia y las rectas paralelas. Estas nociones son requeridas por el problema, pero su funcionalización y significado se adquieren cuando se logra la solución de todos los ítems solicitados. El nivel de exigencia va aumentando a medida que se solicita más de un lugar para ubicar una fábrica que debe cumplir con unas condiciones específicas para su ubicación; la dificultad radica en pasar de ejemplos concretos medidos por la relación directa con el medio a inferir posibles ubicaciones en condiciones abstractas sujetas exclusivamente a las condiciones del problema.

*Objetivo:*

La aproximación a la conceptualización de definiciones considerada para esta situación consiste en la construcción de lugares geométricos y la identificación de sus características en la solución de un problema. El objetivo es desarrollar una definición de circunferencia y de rectas paralelas como lugares geométricos, y de esa manera, conceptualizar una definición de esos objetos.

*Saberes geométricos involucrados:*

Esta situación aborda conocimientos básicos de geometría como: segmentos, rectas paralelas, rectas perpendiculares, circunferencias, y todos los elementos geométricos asociados a estas nociones.

*Comentarios y precisiones*



- ❖ Considerando que el propósito es aproximarse a la definición de circunferencia y de rectas paralelas como lugares geométricos, para dar solución al problema se debe *pasar* por la noción de lugar geométrico para así construir y/o afianzar la conceptualización de las definiciones de estas nociones. Con este propósito, las condiciones que se especifican en el problema generan lugares geométricos que a su vez están asociados con objetos geométricos tales como:

**Condición 1:** Estar a menos de 2 km de alguna de las dos carreteras para evitar largos desplazamientos con la carga de insumos y materiales.

→ { Esta condición refiere al lugar geométrico dado por todos los puntos que equidisten de una recta, esto es, *una recta paralela*.

**Condición 2:** Estar ubicada a más de 3 km de cada una de las casas de manera que no se afecte la integridad física de los habitantes del lugar.

→ { Esta condición refiere al lugar geométrico dado por todos los puntos que equidistan de un punto fijo, esto es, *una circunferencia*.

- ❖ En la validación de los resultados obtenidos se hace necesario que se analice, de manera colectiva, todas las ubicaciones que son válidas. Esto implica en primera medida, que se precise que las soluciones son infinitas y que el conjunto de puntos que responde a las condiciones del problema se caracteriza por cumplir propiedades geométricas específicas, dando lugar a la caracterización de los lugares geométricos de circunferencia y rectas paralelas. Es pertinente mencionar que al identificar las propiedades geométricas de los puntos que dan solución al problema, facilita a los participantes asociarlas al lugar geométrico pues conocen previamente estas nociones, allí es necesario precisar que más allá de definir los objetos geométricos se trata de una situación que los hace necesarios para solucionar un problema. En caso de no estar familiarizado con estas nociones, será cuestión de nombrar y definir formalmente esos conjuntos de puntos con propiedades geométricas particulares.

## Referencias

Camargo, L., y Samper, C. (2006). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa, 55–78.