



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

Absorción Pasiva y Activa de Vibraciones en Sistemas Mecánicos  
de Tipo Autoparamétrico

Tesis que presenta el

**M. en C. Hugo Francisco Abundis Fong**

Para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

En la especialidad de

Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis:

**Dr. Gerardo Silva Navarro**

México, D.F.

Diciembre del 2015.



# Agradecimientos

Al Dr. Gerardo Silva Navarro que más que ser mi asesor y amigo, lo considero mi maestro. Sinceramente le doy las gracias por darme la oportunidad de aprender de usted y poder realizar de buena forma este trabajo en conjunto. Definitivamente, el respeto, admiración y gratitud que tengo hacia su persona siempre serán mayúsculos.

A los Doctores: Alejandro Rodríguez Ángeles, Carlos Alberto Cruz Villar y Rafael Castro Linares, por haber aceptado formar parte del jurado así como por sus correcciones y sugerencias al presente trabajo de tesis.

A mi profesor y amigo Pablo González Rodríguez, gracias por haber gestionado mi participación en el verano de investigación año 2004, hecho que sin lugar a dudas despertó en mí el interés por realizar estudios de posgrado.

A mis amigos y compañeros de laboratorio: Josué Enríquez Zárate, Luis Gerardo Trujillo Franco y Juan Fernando Peza Solís, quienes de una forma u otra contribuyeron positivamente en este trabajo de tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme otorgado una beca para poder llevar a cabo mis estudios de doctorado en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.

Al Ing. Julio Ramírez Bonilla por el apoyo técnico recibido en la parte experimental del presente trabajo de tesis.



# Resumen

En el presente trabajo de tesis se aborda el problema de absorción pasiva/activa de vibraciones en sistemas mecánicos de tipo autoparamétrico, en el cual se pone énfasis en plantear la generalización de un absorbedor autoparamétrico para un sistema primario con  $n$  grados de libertad por medio de una descomposición modal y haciendo uso de la solución para cuando el sistema primario consta de un solo grado de libertad. Este planteamiento se valida experimentalmente usando una estructura tipo edificio discretizada en 6 grados de libertad, la cual es excitada armónicamente en condiciones resonantes. Una vez que se sintoniza y se logra absorción de vibraciones usando un absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever sobre el sistema antes mencionado, se hace la comparación utilizando un absorbedor de vibraciones tipo pendular, mostrando así las ventajas y desventajas de ambos esquemas de absorción pasiva. Otros esquemas de control pasivo de vibraciones que se analizan, diseñan y validan sobre una estructura tipo edificio son: absorbedor autoparamétrico tipo pendular, absorbedor dinámico de vibraciones en configuraciones tipo masa-resorte-amortiguador y tipo viga en cantilever. Es importante señalar que la generalización propuesta también hace posible la implementación de control activo de vibraciones para cuando la frecuencia de excitación varía alrededor de una de las frecuencias resonantes del sistema primario, donde se realizan experimentos en una estructura tipo edificio de 2 gdl y utilizando un parche piezoeléctrico como actuador. Con la finalidad de ampliar la aportación en cuanto al estudio de vibraciones no lineales, también se realiza en el presente trabajo de tesis el diseño e implementación de un absorbedor de vibración tipo Duffing en forma pasiva/activa para un sistema primario de características similares. Para realizar la parte activa se utiliza una ley de control modal basada en la retroalimentación positiva de la posición, la cual muestra un buen desempeño ante incertidumbre en los parámetros y/o cambios en la frecuencia de excitación.

# Abstract

This work deals with the passive/active vibration absorption problem on autoparametric mechanical systems, in which the emphasis relies on the generalization of an autoparametric absorber for a primary system with  $n$  degrees of freedom, through a modal decomposition and using the solution when the primary system has one single degree of freedom. This approach is experimentally validated using a building-like structure discretized in six degrees of freedom, which is harmonically excited on resonant conditions. Once an autoparametric cantilever beam absorber is tuned and the vibration absorption is achieved on the above system, a comparison is also made using a pendulum-type vibration absorber, describing some advantages and disadvantages of both passive control schemes. Other passive vibration control schemes which are analyzed, designed and validated on a building-like structure are autoparametric pendulum absorber, dynamic vibration absorber configurations (mass-spring-damper) and cantilever beam. Importantly, the proposal also makes possible to generalize the implementation of active vibration control schemes, when the excitation frequency slightly varies around resonant frequencies on the primary system; these experiments are performed on a building-like structure with two degrees of freedom and using a piezoelectric patch actuator. In order to expand the contribution for the study of nonlinear vibrations, it is also performed the design and implementation of a passive/active Duffing vibration absorber for a Duffing vibration system with similar nonlinear dynamic performance. The active vibration control scheme employs a modal control law based on Positive Position Feedback (PPF), which shows a good dynamic and robust performance against parameter uncertainty and/or excitation frequency changes.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Absorción de vibraciones. . . . .	2
1.1.1. Algunas aplicaciones . . . . .	3
1.2. Sistemas autoparamétricos . . . . .	4
1.2.1. Absorbedores autoparamétricos . . . . .	6
1.2.2. Tipos de absorbedores autoparamétricos. . . . .	7
1.3. Una revisión bibliográfica . . . . .	8
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	14
1.5. Objetivos de la Tesis . . . . .	16
1.5.1. Objetivo general . . . . .	16
1.5.2. Objetivos específicos . . . . .	16
1.6. Contribuciones de la tesis . . . . .	17
1.7. Organización de la tesis . . . . .	17
<b>2. Absorción autoparamétrica en un sistemas primario de 2 gdl</b>	<b>19</b>
2.1. Introducción . . . . .	19
2.2. Absorción autoparamétrica con una viga en cantilever en un sistema primario Duffing . . . . .	20
2.2.1. Absorbedor autoparamétrico pasivo tipo viga en cantilever . . . . .	21
2.2.2. Respuesta frecuencial aproximada . . . . .	21
2.3. Absorción autoparamétrica en una estructura tipo edificio de 2 gdl . . . . .	23
2.3.1. Descripción del sistema . . . . .	25
2.3.2. Ecuaciones de movimiento . . . . .	26
2.3.3. Aplicación de un actuador tipo parche PZT sobre el absorbedor tipo viga en cantilever . . . . .	28
2.3.4. Estructura con absorbedor pasivo tipo viga en cantilever . . . . .	28
2.3.5. Análisis frecuencial aproximado . . . . .	29
2.3.6. Absorción autoparamétrica pasiva: resultados experimentales . . . . .	31
2.3.7. Absorción autoparamétrica pasiva/activa usando un absorbedor tipo viga en cantilever con parche PZT . . . . .	33
2.3.8. Absorción autoparamétrica pasiva/activa: resultados experimentales . . . . .	37
2.4. Comentarios . . . . .	38



<b>3. Absorción autoparamétrica en un sistema primario de <math>n</math> gdl</b>	<b>41</b>
3.1. Estructura tipo edificio de $n$ gdl con movimiento en la base . . . . .	42
3.2. Representación de la estructura de $n$ gdl en coordenadas modales . . . . .	43
3.3. Análisis modal de una estructura tipo edificio de 6 gdl . . . . .	45
3.3.1. Transformación a coordenadas modales . . . . .	51
3.3.2. Fuerzas modales . . . . .	52
3.3.3. Ecuaciones de movimiento en coordenadas modales . . . . .	53
3.3.4. Solución a las ecuaciones de movimiento modales . . . . .	53
3.4. Caso de estudio . . . . .	54
3.4.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	54
3.4.2. Resultados experimentales . . . . .	56
3.5. Aplicación de un absorbedor de vibraciones tipo pendular . . . . .	60
3.5.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	60
3.5.2. Resultados experimentales . . . . .	62
<b>4. Evaluación de esquemas de absorción pasiva de vibraciones en una estructura tipo edificio</b>	<b>65</b>
4.1. Introducción . . . . .	65
4.2. Sistema primario de 3 gdl . . . . .	66
4.3. Caso 1: Evaluación de un absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever	67
4.3.1. Descripción del sistema . . . . .	67
4.3.2. Resultados experimentales . . . . .	70
4.4. Caso 2: Evaluación de un absorbedor autoparamétrico tipo pendular . . . . .	74
4.4.1. Descripción del sistema . . . . .	74
4.4.2. Ecuaciones de movimiento . . . . .	74
4.4.3. Resultados experimentales . . . . .	76
4.5. Caso 3: Evaluación de un DVA tipo masa-resorte . . . . .	80
4.5.1. Descripción del sistema . . . . .	80
4.5.2. Ecuaciones de movimiento . . . . .	80
4.5.3. Resultados experimentales . . . . .	83
4.6. Caso 4: Evaluación de un absorbedor tipo viga configurado como un DVA . . . . .	88
4.6.1. Descripción del sistema . . . . .	88
4.6.2. Ecuaciones de movimiento . . . . .	89
4.6.3. Resultados experimentales . . . . .	89
4.7. Caso 5: Evaluación de un absorbedor tipo pendular configurado como un DVA . . . . .	95
4.7.1. Descripción del sistema . . . . .	95
4.7.2. Ecuaciones de movimiento . . . . .	95
4.7.3. Resultados experimentales . . . . .	96
4.8. Comentarios . . . . .	101
<b>5. Absorbedor tipo Duffing para sistemas tipo Duffing</b>	<b>103</b>
5.1. Descripción del sistema . . . . .	104
5.2. Sistema primario tipo Duffing . . . . .	105

5.3. Sistema primario tipo Duffing con absorbedor tipo Duffing . . . . .	105
5.3.1. Análisis frecuencial aproximado . . . . .	106
5.4. Absorbedor pasivo/activo usando un esquema de control PPF . . . . .	107
5.5. Resultados en simulación y experimentales . . . . .	108
5.6. Comentarios . . . . .	110
<b>6. Conclusiones</b>	<b>117</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>120</b>
<b>A. Lista de Publicaciones</b>	<b>127</b>
A.1. Publicados en Revistas Indizadas en JCR . . . . .	127
A.2. Aceptados en Revistas Indizadas en JCR . . . . .	127
A.3. Publicados en Congresos Internacionales . . . . .	127



# Capítulo 1

## Introducción

Las vibraciones se describen como la respuesta repetitiva, periódica u oscilatoria de un sistema. Estas pueden ocurrir en un sistema mecánico, incluso eléctrico, y pueden representar su comportamiento dinámico natural o bien pueden ser inducidas mediante alguna fuerza de excitación. Así mismo, estas fuerzas pueden ser generadas internamente en el sistema o transmitidas por alguna fuente externa. Cuando la frecuencia de la fuerza de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema, la respuesta de éste alcanzará grandes amplitudes. A este fenómeno se le conoce como *resonancia* y constituye un fenómeno producido por la inestabilidad del sistema. Operar una máquina en o cerca de la resonancia es, en general, indeseable e incluso podría llegar a ser destructiva en muchos sistemas mecánicos, ya que produce deterioro mecánico, fatiga, grietas, desgaste, ruido, desbalance, desalineamiento, fracturas, etc. Ver Braun *et al.* [11], Inman [43], Genta [32], Rao [61].

El nombre de vibraciones mecánicas es usado, en general, para describir oscilaciones pequeñas de estructuras y sistemas mecánicos. Por “pequeño” se entiende que las oscilaciones asociadas a los desplazamientos son pequeñas en comparación con las dimensiones del objeto oscilante. Lo anterior no está exento de ambigüedades y se podría decir que, en general, no hay un consenso al respecto.

La mayoría de las actividades del ser humano involucran de alguna manera las vibraciones, de ahí la importancia de su estudio. En general, las vibraciones pueden servir para un propósito deseado o ser consideradas como perturbaciones indeseables. Algunos ejemplos de las vibraciones deseadas son cuando se inducen electromecánicamente en los conos de las bocinas para generar el sonido, en máquinas mezcladoras de materiales, cribas o en máquinas herramientas. Por otro parte, las vibraciones que ocurren en la mayoría de las máquinas, vehículos, estructuras, edificios y sistemas dinámicos son indeseables, no solo debido a los movimientos y ruidos desagradables resultantes, y a los esfuerzos dinámicos que a la vez producirán fatiga y falla de la estructura o máquina, si no también, a la pérdida de energía que merma el desempeño del sistema. Por tanto es esencial llevar a cabo un adecuado análisis de vibración para cualquier máquina o estructura propuesta. Ver, e.g., Braun *et al.* [11], Rao [61].

En ingeniería existen muchos problemas de vibraciones que pueden ocasionar fallas físicas en los componentes mecánicos, tales como en los motores de combustión interna, el desba-

lance en las ruedas del ferrocarril, el desbalance en las turbinas por la ruptura de un álabe o formación de fisuras o grietas por fatiga, el desbalance en máquinas recíprocas (bombas de desplazamiento positivo, cepillos para maquinas, etc.), vibraciones en tuberías cuando se presenta el fenómeno conocido como golpe de ariete o choques térmicos, etc.

## 1.1. Absorción de vibraciones.

En numerosas aplicaciones industriales la presencia de ruido y/o vibraciones indeseables es un problema bastante común. En general, este tipo de señales exógenas o endógenas son el resultado del acoplamiento entre sistemas dinámicos. La cancelación o al menos la atenuación del ruido y las vibraciones que afectan a un sistema se puede abordar de dos maneras diferentes: *i*) modificar la estructura física del sistema empleando técnicas de amortiguamiento pasivo (control pasivo) o *ii*) utilizar la información de sensores para aplicar un esquema de control retroalimentado/prealimentado (control activo). Los métodos de control pasivo son efectivos para altas frecuencias, especialmente en los sistemas mecánicos, aunque el rediseño del sistema implica costos elevados. Últimamente los métodos de control activo se han popularizado gracias a los desarrollos recientes en tecnología de sensores, actuadores, procesadores de señales digitales (DSP, por sus siglas en inglés) y plataformas de programación. Existe una amplia literatura con material sobre absorción de vibraciones, como Braun *et al* [11], De Silva [21], Korenev y Reznikov [46], Genta [32].

Una clasificación más completa de los métodos para control de vibraciones incluye los esquemas pasivos, semi-activos y activos (Silva [67]). Estos métodos se pueden describir más específicamente de la siguiente manera:

1. Los dispositivos para *control pasivo* combinan masas, resortes y amortiguadores para modificar la estructura del sistema original. Este método no emplea ninguna retroalimentación de la información del sistema (control en lazo abierto), ni tampoco fuentes externas de energía, por lo cual solo puede usarse para compensar vibraciones en una banda pequeña de frecuencias de excitación, siendo inconveniente su operación cerca de las frecuencias resonantes.
2. Los dispositivos de *control semi-activos* se obtienen cuando en un control pasivo los resortes y/o amortiguadores se pueden ajustar en valor de acuerdo a un estudio de la dinámica en lazo abierto, con tal de lograr un mejor desempeño. En este caso se supone que la energía externa suministrada para propósito de control es muy pequeña, en comparación con las energías propias experimentadas por el sistema.
3. Los dispositivos para *control activo* utilizan la información obtenida de sensores de posición, velocidad o aceleración (retroalimentación / prealimentación) para modificar el sistema de acuerdo a actuadores que operan basados en técnicas de control retroalimentado y/o prealimentado.

Los absorbedores de vibraciones son entonces dispositivos que generan fuerzas inerciales o elásticas con la finalidad de reducir los niveles de la respuesta producida por el efecto de

las vibraciones externas (o internas), que afectan a un sistema o estructura mecánica. En la mayoría de los casos un absorbedor consta de masas adicionales, conectadas mediante elementos elásticos (resortes) y/o amortiguadores (amortiguamiento de tipo viscoso o propio del material) al sistema o estructura que necesita protección y ocasionalmente conectadas en forma directa sobre maquinaria rotatoria desbalanceada (fuente endógena de vibraciones).

El diseño de un control pasivo es relativamente simple y económico, sin embargo, no es conveniente cuando el sistema es inestable, cuando las señales de excitación no son fijas, ya sea en amplitud y/o frecuencia de excitación, o cuando los parámetros del sistema no se conocen con exactitud. Con el control activo de vibraciones se trata de eliminar estas desventajas agregando actuadores y eventualmente grados de libertad adicionales, que permitan la aplicación de técnicas de control robusto.

Un enfoque de control de vibraciones que ha recibido mucha atención en aplicaciones reales es el control modal, el cual es equivalente a la técnica de control por asignación de polos, aunque se concentra en los casos donde solamente se dispone de un modelo modal y se desea modificar las propiedades de los modos críticos del sistema dinámico. Por ejemplo, se pueden mover las frecuencias naturales o inyectar amortiguamiento, de manera que se logre una respuesta frecuencial apropiada. Ver, e.g., De Silva [21], Genta [32].

A pesar de que los métodos de control activo se conocen desde la década de los 30's, no es sino hasta las últimas décadas que se han aplicado en muchos sistemas complejos, incorporando sensores, actuadores y procesadores de señales con características adecuadas como tamaño, peso, exactitud, rapidez, bajo consumo de energía y bajo costo. Así, debido a los constantes desarrollos tecnológicos, últimamente se ha extendido la aplicación de los métodos de control activo a numerosos sistemas físicos.

### 1.1.1. Algunas aplicaciones

Los absorbedores dinámicos de vibraciones (DVA, por sus siglas en inglés), son dispositivos mecánicos compuestos por elementos de inercia, rigidez y amortiguamiento, los cuales una vez conectados a una estructura o máquina, comúnmente denominado sistema primario, son capaces de absorber la energía vibratoria en el punto de conexión. Como resultado, el sistema primario puede ser protegido de altos niveles de vibración. En la práctica los DVAs pueden ser incluidos en el diseño del sistema original o pueden ser agregados como un subsistema del mismo. Ver, e.g., Den Hartog [23], Korenev and Reznikov [46].

Desde su creación, hecha por Frahm al principio del siglo veinte, los absorbedores dinámicos de vibraciones han sido extensamente usados para mitigar vibraciones en varios tipos de sistemas mecánicos. Una aplicación muy conocida es el famoso amortiguador tipo *stock-bridge*, generalmente usado para reducir las vibraciones ocasionadas por el viento en las líneas de transmisión de alta tensión. En una sobresaliente aplicación de la ingeniería, un absorbedor de 400 toneladas fue diseñado por *Citicorp Center*, para suprimir principalmente la contribución al primer modo de vibración ocasionado por el viento en un edificio de 274 m de altura en la ciudad de Nueva York. En una aplicación similar, dos absorbedores dinámicos de vibraciones de 300 toneladas cada uno, han sido instalados en la torre John Hancock, en la ciudad de Boston, Massachussets. La dinámica de las antenas usadas para la señal de

televisión, es particularmente favorecida por el uso de DVAs del tipo pendular, los cuales han sido aplicados, por ejemplo, a las antenas de Alma-Ata y Riga en la antigua Unión Soviética.

Debido a su relevancia tecnológica, tanto en el ámbito académico como industrial, los DVAs siguen siendo objeto de un interés permanente. Nuevas aplicaciones incluyen dispositivos utilizados para estabilizar barcos, mejorar el confort de los usuarios mientras caminan sobre un puente, atenuar las vibraciones transmitidas del rotor principal hacia la cabina de mando de los helicópteros y mejorar las condiciones de operación de una máquina-herramienta. Solo por mencionar algunos ejemplos. También se han desarrollado aplicaciones militares. El uso de DVAs para reducir las fuerzas dinámicas transmitidas a un avión debido a las altas velocidades impuestas por el movimiento puede mencionarse como otro ejemplo.

En general, un DVA se diseña para atenuar vibraciones generadas por excitaciones de tipo armónicas. No obstante, en varias situaciones, las vibraciones son producidas por fuerzas periódicas que contienen más de una componente armónica (e.g., sismos, olas, viento). En este caso se pueden utilizar múltiples DVAs, cada uno sintonizado a una frecuencia específica que pudiera ocasionar daños al sistema primario. También es posible usar elementos estructurales con parámetros distribuidos, ya sea vigas o platos como absorbedores dinámicos. Además de la facilidad en la realización física, la razón principal por la cual se utilizan este tipo de configuraciones es porque el DVA puede sintonizarse simultáneamente a varios valores de frecuencia.

## 1.2. Sistemas autoparamétricos

Los sistemas autoparamétricos son sistemas vibratorios que consisten de al menos dos subsistemas. Uno denominado sistema primario, el cual generalmente se encuentra vibrando. El sistema primario puede estar externamente forzado, auto excitado, paraméricamente excitado, o una combinación de estas. Por su parte, al segundo subsistema se le denomina sistema secundario. El sistema secundario está acoplado al sistema primario en forma no lineal, tal que el sistema secundario puede estar en reposo mientras el sistema primario se encuentra vibrando. A esta condición se le llama solución semitrivial, de hecho, pueden existir un número infinito de soluciones semitriviales, por ejemplo, todos los estados transitorios de una solución periódica del sistema primario, pero en la práctica cuando se trata de las soluciones semitriviales se ignoran los estados transitorios. Ver, e.g., Nayfeh y Mook [56], Cartmell [17], Tondl et al. [71].

Algunas características de los sistemas autoparamétricos son:

- Un sistema autoparamétrico consiste de al menos un sistema primario (coordenadas  $x, \dot{x}$ ), y de un sistema secundario (coordenadas  $y, \dot{y}$ ) los cuales se encuentran acoplados en forma no lineal. Una solución semitrivial puede llegar a ser inestable en ciertos intervalos de la frecuencia de excitación. A este intervalo se le conoce como intervalo de inestabilidad.
- En o cerca del intervalo de inestabilidad de la solución semitrivial se presenta un fenómeno conocido como resonancia autoparamétrica, la cual es una condición en la

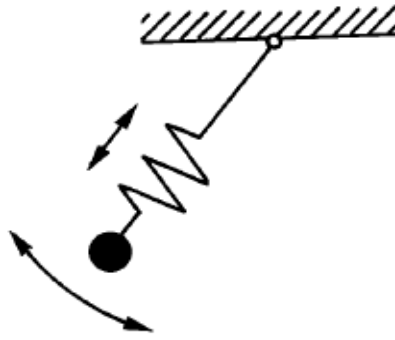


Figura 1.1: Diagrama esquemático de un péndulo elástico

que la vibración del sistema primario actúa como una excitación paramétrica en el sistema secundario, el cual ya no estará más en reposo.

Los sistemas autoparamétricos presentan diferentes fenómenos, como por ejemplo:

- Las vibraciones de un sistema autoparamétrico en resonancia pueden ser periódicas, quasi periódicas, no periódicas o incluso caóticas.
- Comúnmente se pueden presentar efectos de saturación, los cuales se caracterizan de la siguiente forma: Poner mayor energía en el sistema primario resulta en un incremento considerable en el desplazamiento del sistema secundario, mientras que la amplitud del sistema primario es mucho más pequeña. Este fenómeno se utiliza para el diseño de absorbedores. No obstante, existen sistemas en los cuales la saturación deja resultados indeseables.

Un ejemplo clásico de un sistema autoparamétrico es el péndulo elástico, que consiste en un resorte fijado en un extremo, donde éste se estira mientras oscila al mismo tiempo (Fig. 1.1). Un fenómeno interesante se presenta cuando la razón de las frecuencias lineales en las direcciones longitudinal y transversal es de 2:1. En este caso, si comenzamos con una oscilación del resorte en la dirección vertical o cerca de ésta, su modo normal de movimiento resulta inestable y la energía se transfiere gradualmente al movimiento de elongación. Este fenómeno de desestabilización de un modo normal es conocido como *resonancia autoparamétrica*. Este tipo de interacción entre dos modos ocurrirá cuando el sistema primario presenta una respuesta forzada de alguna excitación de frecuencia armónica, la cual llevará al sistema secundario a la *resonancia paramétrica principal*. De tal forma que hay dos modos interactuando en el sistema.

Esta forma de interacción autoparamétrica de dos modos de vibración depende de que se satisfagan ciertas relaciones de frecuencia, esto es, que (Cartmell [17], Nayfeh y Mook [56])

$$\Omega \cong \omega_1 \quad (1.1)$$

$$\omega_1 \cong 2\omega_2 \quad (1.2)$$



donde  $\Omega$  es la frecuencia de excitación,  $\omega_1$  es la frecuencia natural (paramétrica principal) del sistema primario y  $\omega_2$  es la frecuencia natural del sistema secundario. Es indispensable que estas dos condiciones se satisfagan para que haya transferencia de energía del sistema primario al secundario. No obstante, en ciertos sistemas se admite cierta holgura alrededor de esos puntos, proceso que se denomina sintonización.

El requerimiento fundamental de un sistema autoparamétrico radica en el acoplamiento entre modos (dos o más modos), de tal forma que se puedan establecer relaciones entre las respuestas frecuenciales mediante las frecuencias naturales (modales) y la frecuencia de excitación externa.

En general, un sistema autoparamétrico puede expresarse como (Cartmell [15])

$$\ddot{x} + 2\zeta_1\omega_1\dot{x} + \omega_1^2x - \varepsilon\mu(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) = F_0 \cos \Omega t, \quad \zeta_1, \omega_1, \varepsilon, \mu \in R \quad (1.3)$$

$$\ddot{y} + 2\zeta_2\omega_2\dot{y} + \omega_2^2y - \varepsilon\ddot{x}y = 0, \quad \zeta_2, \omega_2 \in R \quad (1.4)$$

donde el acoplamiento entre ambas ecuaciones de movimiento ocurre en los términos  $\varepsilon\mu(\dot{y}^2 + y\ddot{y})$  y  $\varepsilon\ddot{x}y$ . Es evidente en la ecuación (1.3) que si se fuerza a que  $y(t) \equiv 0$ , el acoplamiento con la ecuación (1.4) desaparece y se transforma en un sistema vibratorio lineal y forzado armónicamente. Se observa como la ecuación (1.4) es del tipo paramétrica, ya que el término  $\varepsilon\ddot{x}$  actúa como una función de rigidez variante y, de hecho, dependiente de la aceleración en la ecuación (1.3). El acoplamiento autoparamétrico entre ambos sistemas ocurre cuando se perturban ambos modos y se satisfacen las relaciones de frecuencia (1.1) y (1.2). Además del comportamiento autoparamétrico pueden ocurrir otros fenómenos no lineales complejos como el caos, saturación de modos, absorción modal, discontinuidades y saltos en la respuesta.

### 1.2.1. Absorbedores autoparamétricos

Una de las ramas de las vibraciones mecánicas más importantes e interesantes desde el punto de vista analítico así como práctico son los sistemas autoparamétricos. En su forma más simple un sistema autoparamétrico se divide en dos subsistemas, el primero representado por un oscilador forzado externamente y el segundo por un elemento excitado paraméricamente, cuya fuente de excitación es la respuesta del subsistema primario. El término primario se usa para referirse a la parte forzada externamente y el de secundario para describir la parte excitada paraméricamente. A raíz de que el sistema primario induce al secundario al movimiento, habrá un regreso de energía al sistema primario. Esta energía de regreso modificará la respuesta del sistema primario, la cual seguirá siendo la fuente de energía del sistema secundario, hasta que el sistema completo alcance el estado estable.

De forma muy general, los sistemas autoparamétricos son sistemas vibratorios interesantes, que constan de al menos dos subsistemas acoplados en forma no-lineal, típicamente con términos de rigidez o amortiguamiento, con las siguientes características (Nayfeh y Mook [54]):

1. Un sistema primario, excitado por una fuerza externa armónica.

2. Un sistema secundario (absorbedor), acoplado al sistema primario, que satisface la llamada excitación paramétrica, es decir, un mecanismo que transfiere la energía exógena hacia el sistema secundario a través de los acoplamientos inerciales, elásticos y/o viscosos.
3. En caso de que el sistema primario se perturbe exactamente o cerca de su frecuencia resonante lineal, es posible alcanzar la llamada resonancia paramétrica principal para el sistema secundario (interacción autoparamétrica), atenuando la respuesta resonante del sistema primario y constituyendo un esquema de absorción pasiva no lineal.

### 1.2.2. Tipos de absorbedores autoparamétricos.

La interacción autoparamétrica entre dos sistemas mecánicos se puede encontrar en muchos sistemas vibratorios y maquinaria (Nayfeh y Mook [56], Cartmell [15], Tondl [71]).

Los absorbedores autoparamétricos encontrados en la literatura de mayor relevancia son los siguientes:

#### Absorbedor autoparamétrico tipo viga.

Sin lugar a dudas, es el trabajo pionero en cuanto a los absorbedores autoparamétricos. En el año de 1972 Haxton y Barr [37] modelan, construyen y prueban un absorbedor de vibraciones autoparamétrico basado en una viga flexible de acero (Fig. 1.2).

#### Absorbedor autoparamétrico tipo pendular.

Los absorbedores pendulares de vibraciones se utilizan extensivamente en varias aplicaciones de la ingeniería. Este tipo de dispositivos son útiles en aplicaciones donde las oscilaciones de una estructura se deben restringir dentro de una región específica, particularmente bajo condiciones de resonancia externa.

Hatwal *et al* [35] investiga las vibraciones armónicas forzadas de un sistema masa-resorte-amortiguador al cual se le acopla un péndulo que es excitado paraméricamente (Fig. 1.3), para evaluar la respuesta del sistema usan el método del balance armónico y verifican sus resultados con integraciones numéricas.

Cartmell *et al* [16] implementa un absorbedor autoparamétrico pendular a un sistema lineal, utilizando el método de escalas múltiples para obtener la respuesta frecuencial no lineal y se propone un esquema de control adaptable (semiactivo) basado en un servomecanismo on/off, controlando la longitud efectiva del péndulo y validando resultados en una plataforma experimental (Fig. 1.4). Un absorbedor autoparamétrico pendular para un sistema primario tipo Duffing se analiza y valida experimentalmente en Vazquez *et al.* [74, 49].

Bajaj *et al* [5] analiza la dinámica de un sistema de un grado de libertad en resonancia acoplado a un arreglo de péndulos (ver Fig. 1.5), haciendo el estudio que ejerce la variación de ciertos parámetros en el desempeño del sistema completo, y desarrollando una estrategia para encontrar el valor de los parámetros más efectivos para un ancho de banda más amplio.

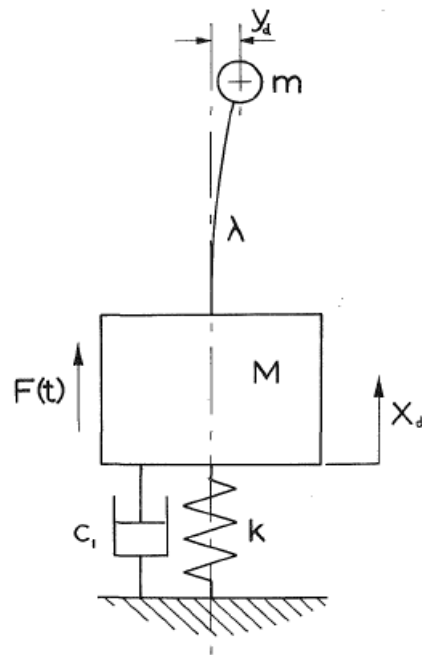


Figura 1.2: Diagrama esquemático del absorbedor autoparamétrico estudiado por Haxton y Barr [37].

### Otras formas de absorbedores autoparamétricos.

Un absorbedor autoparamétrico con una configuración física diferente a las anteriores (Fig. 1.6) ha sido trabajado tanto por Nayfeh como por Cartmell, donde han estudiado las vibraciones de un sistema autoparamétrico compuesto de dos vigas con sección transversal rectangular.

Cicek y Ertas [28] trabajan con un absorbedor tipo viga-péndulo (ver Fig. 1.7) para cuando el sistema primario se somete a vibraciones aleatorias, donde se enfocan en determinar la transferencia de energía entre la viga y el péndulo debida a la interacción no lineal de los modos del sistema.

En general, la mayoría de los casos analizados consideran el problema de absorción pasiva de vibraciones, haciendo énfasis en el análisis de la dinámica del sistema, análisis frecuencial aproximado y presentando esencialmente resultados mediante simulaciones numéricas.

## 1.3. Una revisión bibliográfica

En el año de 1972 surge el trabajo pionero de los sistemas autoparamétricos realizado por Haxton y Barr [37], donde se modela, construye y se prueba un absorbedor de vibraciones autoparamétrico basado en una viga flexible de acero. Ellos encontraron que ciertos parámetros geométricos referentes a la viga afectaban considerablemente el desempeño del sistema

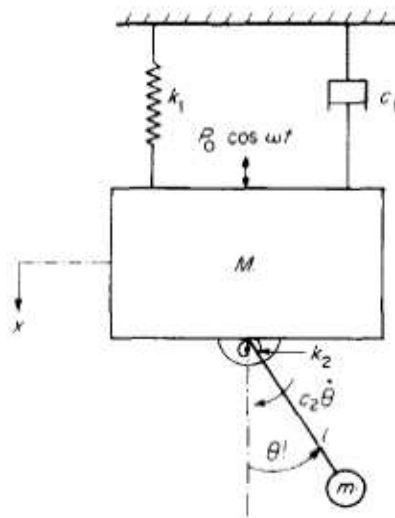


Figura 1.3: Diagrama esquemático del absorbedor autoparamétrico estudiado por Hatwal et al. [35].

completo. En 1976 Ibrahim y Roberts [41], investigan la respuesta de un sistema vibratorio de dos grados de libertad con acoplamiento autoparamétrico (absorbedor de Haxton y Barr) cuando el sistema primario es sujeto a excitaciones aleatorias, sus resultados muestran que pueden ocurrir amplios movimientos aleatorios del sistema acoplado cuando el parámetro de sintonización interno es cercano a la resonancia interna principal.

Nayfeh y Mook [56] en el año de 1979 publicaron el libro titulado *Oscilaciones no lineales*, el cual se convierte con el paso del tiempo en una herramienta de consulta casi obligada para las futuras investigaciones acerca de los sistemas autoparamétricos. En 1982 Hatwal *et al.*, [35] investigaron las vibraciones forzadas armónicas de un sistema masa-resorte-amortiguador, al cual se le acopla un péndulo que es excitado paraméricamente, ellos usan el método del balance armónico para evaluar analíticamente la respuesta del sistema completo, en base a sus resultados establecen que es posible tener respuestas del sistema no periódicas si la excitación paramétrica es grande. Un sistema autoparamétrico conformado por el acoplamiento entre dos vigas es examinado por Bux y Roberts en 1986 [14], en el cual se formula un sistema finito de grados de libertad y se usa el método de escalas múltiples. En este trabajo se muestra que los fenómenos de torsión y vibración que experimenta el sistema se debe a la existencia de los términos de acoplamiento no lineales de tipo cuadrático y a los efectos de la resonancia interna entre el tercer y cuarto modo. En una temática similar Ashworth y Barr [4] consideran el comportamiento resonante de una estructura bajo excitaciones armónicas de una sola frecuencia, se establece que los términos paraméricos lineales y las no linealidades de tipo inercial pueden regir el comportamiento del sistema cuando se presentan ciertas relaciones entre la frecuencia de excitación y una de las frecuencias naturales de la estructura (resonancia externa), y/o entre las mismas frecuencias naturales (resonancia interna). En 1987 Nayfeh [54] investigó la respuesta de un sistema de dos grados de libertad

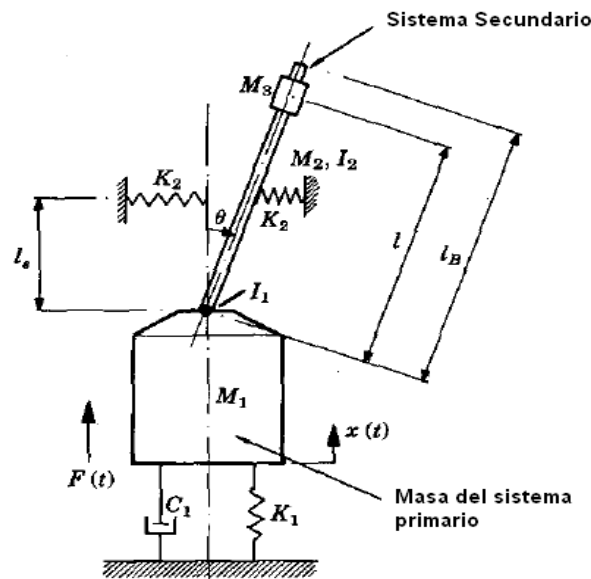


Figura 1.4: Diagrama esquemático del absorbedor autoparamétrico estudiado por Cartmell [16].

con no linealidades cuadráticas bajo la resonancia paramétrica principal en el caso en que la razón de la resonancia interna es 2 a 1, la respuesta analítica la obtiene usando el método de escalas múltiples con el cual construye una expansión de primer orden, dando como resultado cuatro ecuaciones diferenciales no lineales ordinarias de primer orden, dichas ecuaciones se usan para determinar las respuestas en estado estacionario de cada subsistema y su estabilidad. En 1988 Ibrahim *et al*, investigaron las vibraciones paramétricas y autoparamétricas de un tanque elevado, su estudio abarca la respuesta paramétrica no lineal [39], la respuesta autoparamétrica [40], y la respuesta aleatoria [69]. El mismo Ibrahim [47], publica un año después el trabajo realizado al investigar la interacción autoparamétrica de dos modos normales en un modelo estructural de tres grados de libertad sujeto a excitación aleatoria en una banda amplia.

En los primeros años de la década de los noventa, investigadores como Cartmell, Balachandran y Nayfeh ([15], [6] y [7]), estudian los fenómenos paramétricos y autoparamétricos en sistemas tipo estructura (prototipos formados por combinaciones de vigas), teniendo como aplicaciones submarinos y otros vehículos marinos, los cuales son sistemas estructurales inherentemente no lineales y sujetos a excitaciones, por lo tanto, un adecuado entendimiento de la influencia de las no linealidades sobre la respuesta dinámica del sistema es esencial para su diseño y control. En 1993 Fujino *et al* [30], realizaron experimentos en un prototipo estructura cable-viga para observar la interacción autoparamétrica y el fenómeno asociado a la saturación de amplitud. Bajaj *et al* en el año de 1994 [5] estudian la dinámica no lineal de un sistema de dos grados de libertad en un absorbedor autoparamétrico de vibraciones tipo pendular, su análisis abarca todos los posibles tipos de soluciones del sistema en estado estable tanto para vibraciones libres como forzadas, incluyendo soluciones caóticas y

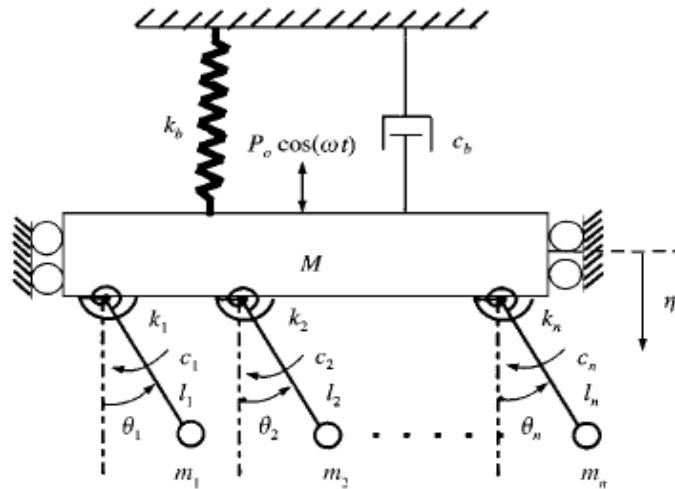


Figura 1.5: Diagrama esquemático del absorbedor autoparamétrico estudiado por Bajaj et al. [5].

bifurcaciones que se presentan al variar los parámetros del sistema. En el mismo año Tondl *et al* [70] y [51] hacen el análisis de un sistema mecánico autoparamétrico formado por  $n$  masas conectadas por  $n$  resortes lineales, a una de las masas se le conecta un péndulo, determinando la incidencia de todas las resonancias autoparamétricas al investigar en general la estabilidad de las soluciones semi-triviales. Cartmell y Lawson [16] utilizan el método de escalas múltiples para obtener la respuesta frecuencial no lineal de un absorbedor autoparamétrico de vibraciones tipo pendular, además de que proponen un esquema de control adaptable (semiaactivo) basado en un servomecanismo tipo *on/off*, controlando la longitud efectiva del péndulo y validando resultados en una plataforma experimental. Agnes e Inman [3] investigan el efecto de pequeñas no linealidades en la respuesta de absorbedores de vibraciones piezoeléctricos sus soluciones perturbadas las validan cualitativamente con resultados numéricos, además de que establecieron la presencia de soluciones periódicas, quasiperiódicas y caóticas.

Oueini y Nayfeh [57] en el año de 1998 reportaron una aplicación tanto teórica como experimental de un absorbedor activo de vibraciones no lineal para estructuras flexibles basado en el fenómeno de saturación que exhibe un sistema con múltiples grados de libertad (viga en cantilever) con acoplamientos no lineales de tipo cuadrático y que posee resonancias autoparamétricas. Oueini *et al* [58] consideran una planta modelada por una ecuación diferencial no lineal de segundo orden e introducen un absorbedor activo de vibraciones acoplado a la planta por un conjunto específico de no linealidades de tipo cúbico.

En el año 2000 Berlioz *et al* [10], reportan investigaciones experimentales y numéricas de un sistema autoparamétrico que consiste de un péndulo sujeto a un sistema masa-resorte excitado en la base, ellos determinan la bifurcación periódica del péndulo al linealizar las ecuaciones de la solución semi-trivial usando dos métodos: aproximación trigonométrica y cálculo simbólico usando la expansión polinomial de Chebyshev. Civalci [19] y [28] estudia

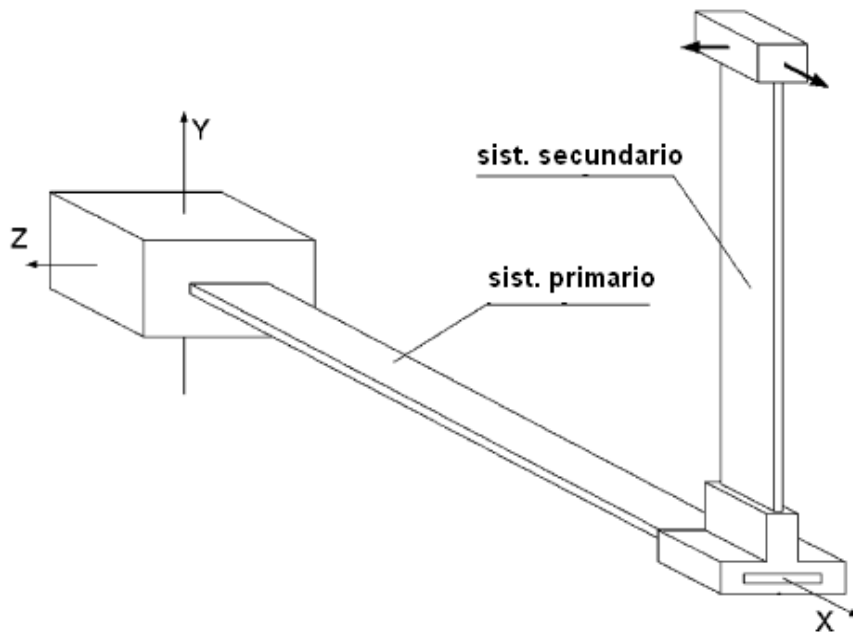


Figura 1.6: Diagrama esquemático del absorbedor autoparamétrico tipo viga-viga, estudiado por Nayfeh y Cartmell.

la interacción autoparamétrica al variar la amplitud de la fuerza y la razón de masas en la vecindad donde se presenta la resonancia autoparamétrica en un sistema formado por una viga en cantilever con una masa en el extremo libre donde se sujeta un péndulo para que realice la función de un absorbedor pasivo de vibraciones. En el año 2001 Abadi [1] considera un sistema autoparamétrico tipo Rayleigh, él estudia la solución semi-trivial y su dominio de inestabilidad donde empiezan las soluciones no triviales además investiga la existencia de estabilidad de las soluciones no triviales y analiza el comportamiento de las soluciones al variar los valores de los parámetros. Vyas y Bajaj [79] analizan la dinámica de un sistema de 1 GDL lineal al cual se le acopla un arreglo de absorbedores autoparamétricos no lineales de vibraciones (péndulos), demostrando analíticamente una mejora en el ancho de banda del absorbedor. En el mismo año Mickens [50] hace un estudio matemático y numérico del oscilador armónico Duffing. Verhulst [77] investiga la resonancia paramétrica y autoparamétrica para tres casos (rotor, oscilador excitado paramétricamente y oscilador auto-excitado). Cuvalci *et al* [20] realizan los experimentos de un sistema tipo estructura excitado sinusoidalmente y aleatoriamente al cual se le acopla un absorbedor de vibraciones no lineal, la estructura consiste de cuatro columnas flexibles que soportan en su extremo una masa mientras que el absorbedor consiste en una viga con masa en el extremo que se empotra en lo alto de la estructura. Zaki *et al* [80] investigan el efecto de la rigidez no lineal en el movimiento de un péndulo flexible. Song *et al* [68] utilizan el método del balance armónico para analizar la respuesta de un sistema masa-resorte-amortiguador al cual se le acopla un péndulo que es excitado paramétricamente. Haddow y Shaw [34] presentan resultados tanto

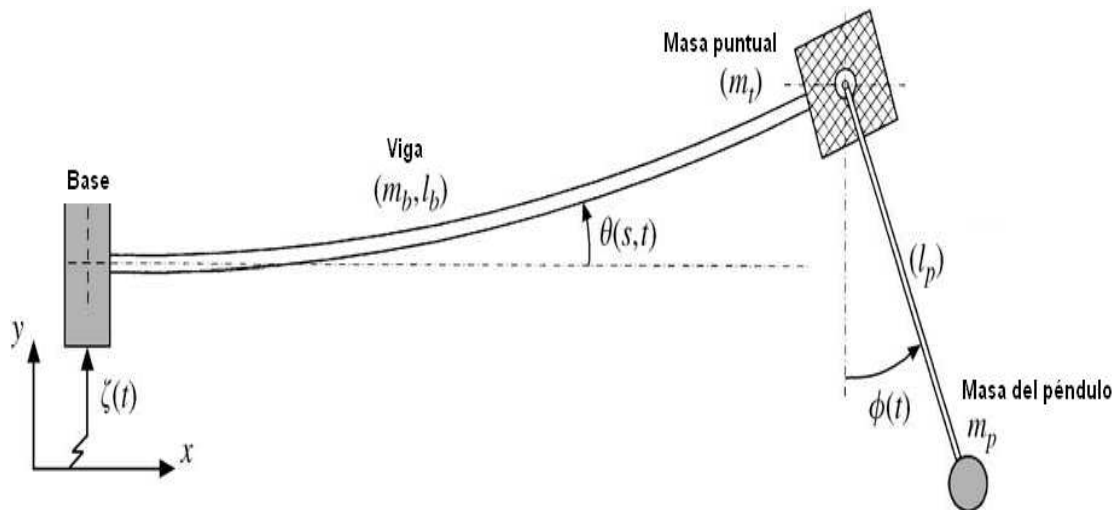


Figura 1.7: Diagrama esquemático del absorbedor autoparamétrico tipo viga-péndulo, estudiado por Cicek y Ertas [28].

teóricos como experimentales de un absorbedor de vibraciones tipo pendular centrífugo. Rifai *et al* [27] estudian la dinámica global y el campo de atracción para diferentes soluciones periódicas de un sistema autoparamétrico de cuatro GDL tipo masa-resorte-péndulo.

En el año 2008 Vazquez y Silva [74] investigan la respuesta dinámica y frecuencial de un sistema Duffing amortiguado acoplado a un absorbedor de vibraciones tipo pendular excitado paramétricamente, usan el método de escalas múltiples para obtener las condiciones de resonancia autoparamétrica y comparan los resultados obtenidos con el caso en el que el sistema primario es lineal. Macias-Cundapí *et al* [49] estudian la absorción de vibraciones pasiva/activa en un sistema tipo Duffing por medio de un absorbedor autoparamétrico tipo pendular. En el mismo año Gus'kov *et al* [33] investigan la influencia de los parámetros en un sistema autoparamétrico tipo pendular en relación a la disminución de la amplitud de la vibración en el sistema primario (lineal) y realizan una comparación de su eficiencia con relación al absorbedor clásico de vibraciones, todo esto bajo la acción de excitaciones armónicas. Ibrahim [38] presenta avances recientes de aislantes de vibraciones pasivos no lineales. Un año más tarde Wu [63] investiga el caso de un novedoso absorbedor de vibraciones tipo pendular con base rotacional, el cual puede ser sintonizado para un amplio rango de frecuencias con variar la velocidad rotacional de su base. En el año 2010 Ikeda [42] estudia la interacción autoparamétrica de una superficie líquida en un tanque rectangular con una estructura como soporte elástica sujeta a excitaciones verticales. Él menciona que cuando la frecuencia natural de la estructura es igual a la frecuencia natural mas baja del movimiento del líquido se tiene un sistema autoparamétrico con resonancia interna a razón de 1:1. En el año 2011 Chen [18] considera un sistema autoparamétrico que consiste de un oscilador acoplado con un subsistema excitado paramétricamente, el oscilador y el subsistema están en resonancia



interna a razón de 1:1, además el subsistema excitado está en resonancia paramétrica principal. Las no linealidades que se presentan en el sistema son de tipo cuadráticas y cúbicas. Wu *et al* [65] presenta resultados analíticos así como experimentales de un absorbedor tipo pendular rotacional donde las frecuencias características del absorbedor pueden sintonizarse dinámicamente al ajustar la velocidad rotacional. En el año 2012 Brzeski *et al* [13] investigan la dinámica de un oscilador forzado tipo Duffing al cual se le acopla un péndulo, realizando un análisis de la bifurcación en los parámetros amplitud y frecuencia de excitación. Un año después Eason *et al* [25] estudian el comportamiento de un sistema de tres grados de libertad el cual consiste de un sistema primario lineal, un Absorbedor dinámico de vibraciones (DVA, por sus siglas en inglés) no lineal con rigidez cúbica pequeña y un DVA lineal conectados en serie, muestran que la atenuación efectiva depende de una selección apropiada de los parámetros de diseño. Sun *et al* [64] investigan la atenuación de la respuesta de un oscilador Duffing duro utilizando un DVA no lineal, un DVA semi activo y múltiples DVA, mostrando que bajo este esquema se pueden atenuar tanto la respuesta transitoria como la de estado estable. El-Ganaini *et al* [26] aplican un controlador de retroalimentación positiva de la posición para suprimir la amplitud de vibración de un sistema no lineal en la resonancia primaria en el caso en la que resonancia interna es de 1:1.

## 1.4. Planteamiento del problema

En general, un sistema autoparamétrico se puede representar mediante el diagrama a bloques de la Fig. 1.8. Se tiene un sistema mecánico primario, cuya respuesta se desea atenuar para fuerzas de excitación  $\Omega$  cercanas al menos a una de sus frecuencias paramétricas principal ( $\Omega \approx \omega_{np}$ ). Para la atenuación de la respuesta resonante se acopla un absorbedor de vibraciones autoparamétrico que opera en autoresonancia (i.e.,  $\Omega \approx \omega_{np} \approx 2\omega_{nabs}$ ), donde la energía se transfiere del exterior al sistema primario y, posteriormente, al absorbedor de vibraciones. En general, el diseño pasivo del absorbedor autoparamétrico permite atenuar de forma estable la respuesta en una banda pequeña alrededor de una de las frecuencias paramétricas principales del sistema primario, es decir, que el absorbedor pasivo no es robusto ante cambios en la frecuencia de excitación. Por esta razón se considera una ley de control por retroalimentación (control activo o semiactivo) de vibraciones que permita variaciones en la frecuencia o amplitud de la fuerza de excitación y, posiblemente, cambios en los parámetros del sistema primario. Adicionalmente, la fuerza de excitación  $F(t)$  puede medirse directamente, o utilizar algún esquema de identificación de la frecuencia  $\Omega$  y amplitud  $F_0$  de excitación, con lo cual la ley de control puede combinar la retroalimentación con la prealimentación de la fuerza de excitación, de manera que el esquema de control de vibraciones sea más completo.

De forma general, se considera un sistema autoparamétrico consistente de un sistema primario de  $n_1$  grados de libertad acoplado a un absorbedor autoparamétrico de  $n_2$  grados de libertad. El sistema autoparamétrico se puede describir como sigue

$$M_1\ddot{x} + C_1\dot{x} + K_1x + \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = B_1F(t), \quad x \in R^{n_1}, F \in R^{m_1} \quad (1.5)$$

$$M_2\ddot{y} + C_2\dot{y} + K_2y + \psi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = B_2u(t), \quad y \in R^{n_2}, u \in R^{m_2} \quad (1.6)$$

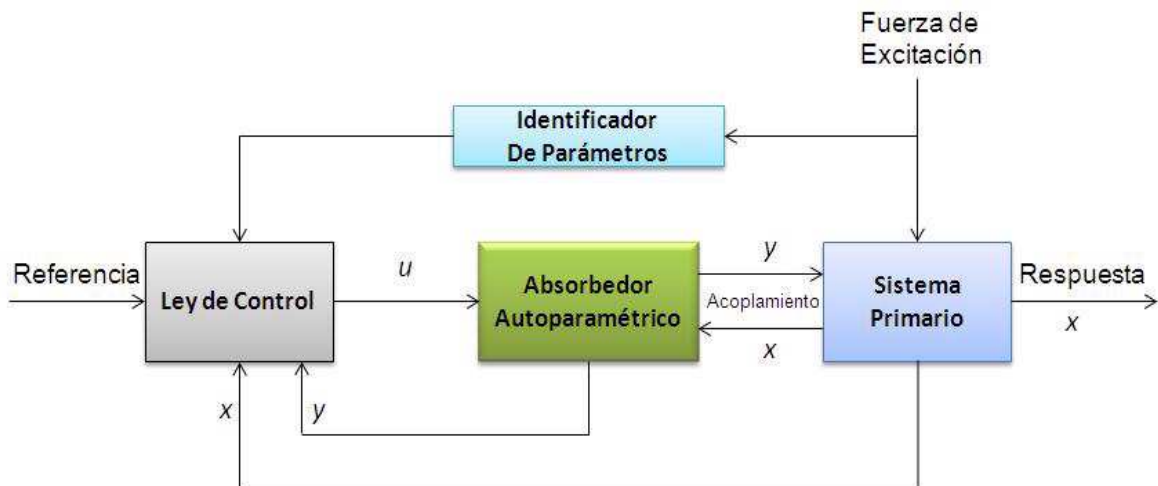


Figura 1.8: Diagrama esquemático de la forma general de un sistema autoparamétrico.

donde la matriz de inercia  $M_i$ , la matriz de amortiguamiento  $C_i$  y la matriz de rigidez  $K_i$  son matrices reales simétricas de  $n_i \times n_i$ ,  $i = 1, 2$ , las cuales satisfacen las propiedades conocidas de un sistema mecánico. Las funciones  $\phi$  y  $\psi$  representan los acoplamientos inerciales, viscosos y elásticos entre el sistema primario y el absorbedor autoparamétrico, generalmente no linealidades de tipo cuadrático o cúbico para sistemas tipo Duffing (i.e.,  $\phi, \psi \in C^\infty$ ). La fuerza exógena  $F(t)$  denota una señal de excitación armónica que puede contener diferentes componentes frecuenciales  $\Omega_i$ , o sea

$$F(t) = \sum_{i=1}^N F_{0_i} \cos(\Omega_i t + \varphi_i), \quad F_{0_i} \in R^{n_1} \quad (1.7)$$

Además,  $u(t) = \alpha(x, y, \omega)$  es un vector de fuerzas de control activo/semiactivo, mediante las cuales se puede tener un absorbedor autoparamétrico activo/semiactivo que permita la sintonización robusta del absorbedor para la atenuación de vibraciones. Las matrices  $B_i$ ,  $i = 1, 2$ , se utilizan para indicar cuando un grado de libertad está perturbado o actuado. Observe que cuando  $u(t) \equiv 0$  se trata solo de un absorbedor autoparamétrico pasivo.

Es importante señalar que el sistema autoparamétrico (1.5)-(1.6) es no lineal, excitado por fuerzas armónicas resonantes y generalmente subactuado. Asimismo, es común que se disponga de pocos sensores de desplazamiento, velocidad o aceleración, con lo que solo algunos grados de libertad se pueden medir, y que las señales de control estén limitadas. Para el diseño y sintonización de un sistema autoparamétrico se debe verificar que

$$\begin{aligned} \Omega_i &\approx \omega_{np_j}, & i, j &= 1, 2, \dots \\ \omega_{np_j} &\approx 2\omega_{nabs_j} \end{aligned}$$

La primera condición se conoce como *condición de resonancia externa (resonancia primaria)*, que establece una relación uno a uno entre la frecuencia de excitación y una de las frecuencias paramétricas principales del sistema primario. La segunda condición se conoce como condición de *autoresonancia (resonancia interna o subarmónica)*, que equivale a una relación uno a dos entre la frecuencia de excitación y una de las frecuencias paramétricas del absorbedor autoparamétrico. La segunda condición puede modificarse para incluir las llamadas resonancias superarmónicas, aunque en este caso el análisis frecuencial podría ser más complejo.

## 1.5. Objetivos de la Tesis

Para el desarrollo de este trabajo de tesis doctoral se plantean los siguientes objetivos.

### 1.5.1. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo de tesis es abordar el estudio tanto teórico como experimental de absorbedores no lineales de vibraciones, pasivos y pasivos/activos, de tipo autoparamétrico para sistemas primarios lineales y no lineales de un grado de libertad y su generalización a sistemas primarios de varios grados de libertad.

### 1.5.2. Objetivos específicos

El desarrollo del tema de investigación implica el cumplimiento de varios objetivos particulares, que parcialmente representan avances para la meta propuesta. Estos objetivos específicos son:

1. Rediseño y fabricación de algunos componentes de las plataformas experimentales (absorbedor tipo pendular, absorbedor tipo viga en cantilever y absorbedores tipo masa-resorte-amortiguador).
2. Diseño, construcción e instrumentación de nuevas plataformas experimentales (absorbedor autoparamétrico en estructuras tipo edificio).
3. Validación experimental de los resultados bajo diferentes configuraciones:
  - Sistema primario lineal.
  - Sistema primario de más de un grado de libertad.
  - Fuerza de excitación con varios componentes armónicos, además de la frecuencia de excitación resonante y a diferentes valores de amplitud.

## 1.6. Contribuciones de la tesis

Como se ha mencionado anteriormente, son pocos los trabajos en la literatura en el área de absorción de vibraciones en sistemas autoparamétricos que presentan resultados experimentales y aún menores aquellos que muestran resultados con algún esquema de control semiactivo o activo, de tal manera que las principales contribuciones de este trabajo de tesis doctoral son:

- Exploración del caso práctico en el que el sistema primario tiene mas de un grado de libertad (absorbedor autoparamétrico para una estructura tipo edificio).
- El rediseño e integración de plataformas experimentales que permitan analizar la absorción de vibraciones en sistemas autoparamétricos, validación de los modelos matemáticos obtenidos a diferentes configuraciones y la implementación de los esquemas de control desarrollados.

## 1.7. Organización de la tesis

En el Capítulo 1 se plantea el contexto general de esta tesis doctoral, se introducen algunos conceptos relevantes en cuanto a los sistemas autoparamétricos y su relación en la absorción de vibraciones en sistemas mecánicos, se presenta una revisión bibliográfica realizada durante el desarrollo de la tesis y finalmente se exponen los objetivos y las contribuciones del trabajo doctoral.

En el Capítulo 2 se presentan en forma general los resultados preliminares de un absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever para un sistema primario de un grado de libertad, debido a que este análisis es fundamental para los resultados que se muestran en los capítulos posteriores. También en este capítulo se muestra un caso de estudio en cuanto a la absorción pasiva/activa en una estructura tipo edificio de 2 gdl utilizando un absorbedor autoparamétrico con parche piezoeléctrico como actuador.

En el Capítulo 3 se aprovecha el trabajo planteado en el capítulo anterior para formular y plantear la generalización de un absorbedor autoparamétrico para un sistema primario de  $n$  grados de libertad haciendo uso del análisis modal, dicha generalización se valida experimentalmente en una estructura tipo edificio discretizada en 6 gdl, además, el desempeño del absorbedor autoparamétrico es comparado con el desempeño de un absorbedor pendular para el mismo sistema primario, estableciendo las ventajas y desventajas de ambos esquemas de absorción pasiva.

Con el objetivo de implementar y comparar otros esquemas de control pasivo sobre la estructura tipo edificio en términos frecuenciales, energéticos y dinámicos, en el Capítulo 4 se diseñan y aplican sobre el sistema primario antes mencionado, el absorbedor autoparamétrico tipo pendular y el absorbedor dinámico de vibraciones bajo dos configuraciones: sistema masa-resorte-amortiguador y tipo viga en cantilever.

En el Capítulo 5 se analiza, diseña e implementa un absorbedor de vibraciones no lineal pasivo/activo del tipo Duffing (sistema que contiene rigidez cúbica) para un sistema primario

con las mismas características. Para llevar a cabo la parte de control activo de este esquema de absorción se utiliza una ley de control modal llamada retroalimentación positiva de la posición (PPF), los resultados experimentales se hacen en la plataforma experimental conocida como ECP. Finalmente el Capítulo 6 contiene algunas conclusiones de este trabajo de tesis, así como la propuesta de trabajo a futuro para darle continuidad al mismo.

# Capítulo 2

## Absorción autoparamétrica en un sistema primario de 2 gdl

### 2.1. Introducción

Los absorbedores de vibraciones son dispositivos que generan fuerzas inerciales o elásticas para reducir el nivel de la respuesta producida por el efecto de vibraciones externas o internas que afectan a un sistema mecánico. En la mayoría de los casos un absorbedor consta de masas adicionales, conectadas mediante elementos elásticos (resortes) y/o amortiguadores (amortiguamiento de tipo viscoso o de material) al sistema o estructura que necesita de protección y, ocasionalmente, conectadas en forma directa sobre maquinaria rotatoria desbalanceada que genera vibraciones endógenas. Cabe señalar que la mayoría de los sistemas físicos presentan fenómenos no lineales y, en muchas aplicaciones industriales, los absorbedores dinámicos de vibración tienen que interactuar con ellos. Los términos no lineales pueden generar modificaciones interesantes en la respuesta de los llamados sistemas paramétricos forzados (Cartmell [17], Tondl [71]).

Los términos no lineales pueden ser el resultado de una característica física del sistema, como puede ser la rigidez o el amortiguamiento no lineal. Frecuentemente se ataca este problema erradicando esos términos, es decir, linealizando el sistema y considerando solo la respuesta lineal. Sin embargo, tales simplificaciones o cancelaciones no siempre ofrecen resultados satisfactorios.

En este capítulo se considera el estudio de un sistema primario de dos grados de libertad, que consiste en una estructura mecánica tipo edificio de dos pisos rígidos de masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, y un absorbedor de vibraciones pasivo/activo, el cual es una viga en cantilever con una masa  $m_3$  en su extremo con un parche PZT como actuador, con el cual se obtiene un esquema de absorción autoparamétrica pasiva/activa de vibraciones, controlando la rigidez efectiva de la viga, compensando así variaciones en la frecuencia de excitación e incertidumbres paramétricas.

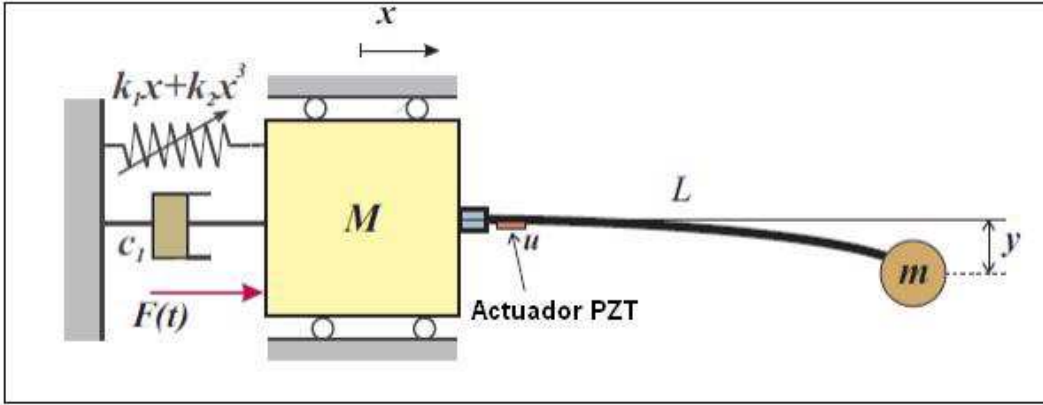


Figura 2.1: Diagrama esquemático del sistema Duffing con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever.

## 2.2. Absorción autoparamétrica con una viga en cantilever en un sistema primario Duffing

Como estudio preliminar al presente trabajo de tesis, se cuenta con el diseño y síntesis de un absorbedor autoparamétrico pasivo/activo tipo viga en cantilever con un parche piezoeléctrico como actuador para ser acoplado a un sistema primario del tipo Duffing (Abundis [2]).

El sistema primario es un sistema no lineal, compuesto de una masa  $M$ , un resorte no lineal con rigidez cúbica  $k_1x + k_2x^3$  y amortiguamiento viscoso  $c_1$ , como se observa en la Fig. 2.1. La no linealidad del sistema se debe al resorte que aumenta su rigidez conforme aumenta la carga (resorte duro). Este sistema se excita con una fuerza externa  $F_0 \cos \Omega t$ , con amplitud  $F_0$  y frecuencia de excitación  $\Omega$  sintonizada cerca de la resonancia paramétrica principal asociada al sistema primario. Es importante señalar que, cuando el resorte del sistema primario es lineal, el absorbedor pasivo tipo viga corresponde al caso clásico analizado por Haxton y Barr [37].

El sistema secundario consiste en una viga en cantilever, compuesto de una viga delgada sujeta sobre el sistema primario y con masa equivalente en el extremo libre  $m$ . Ambos subsistemas primario como secundario tienen acoplamientos de tipo inercial, los cuales resultan de la sujeción de la viga. La longitud  $L$  denota la longitud total de la viga y  $c_2$  es un amortiguamiento viscoso pequeño sobre la misma.

Las ecuaciones de movimiento para el sistema de dos grados de libertad, que se obtienen por la formulación Euler-Lagrange, son

$$(M + m)\ddot{x} - \frac{6}{5L}m(y\ddot{y} + \dot{y}^2) + k_1x + k_2x^3 + c_1\dot{x} = F \cos \Omega t \quad (2.1)$$

$$\left(m + \frac{36}{25} \frac{my^2}{L^2}\right) \ddot{y} - \frac{6}{5L}m\dot{y}\dot{x} + \frac{36}{25L^2}m\dot{y}^2 + \frac{3EI}{L^3}y + c_2\dot{y} = u(t) \quad (2.2)$$

## 2.2. ABSORCIÓN AUTOPARAMÉTRICA CON UNA VIGA EN CANTILEVER EN UN SISTEMA P.

donde  $x$  y  $y$  denotan el movimiento longitudinal del sistema primario y el desplazamiento lateral del absorbedor tipo viga en cantilever, respectivamente. La entrada de control activa  $u$  es la fuerza equivalente proporcionada por el parche piezoeléctrico. La fuerza de excitación armónica está dada por  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ , donde la frecuencia de excitación  $\Omega$  es cercana a la frecuencia resonante *paramétrica principal lineal* del sistema primario, la cual es

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_1}{M+m}}$$

Por otra parte, los parámetros asociados al absorbedor tipo viga en cantilever son el módulo de Young  $E$  (aluminio), el momento de inercia de área  $I$  y la longitud total  $L$ .

Es importante señalar que el sistema dado por las ecuaciones (2.1) y (2.2) es altamente no lineal, debido a la presencia de acoplamientos no lineales de tipo inercial y elástico. El absorbedor tipo viga en cantilever tiene un acoplamiento inercial con el sistema primario tipo Duffing, de tal manera que se pueda lograr la interacción autoparamétrica con la cual se puede atenuar la fuerza armónica resonante. Además, cuando  $u \equiv 0$  se converge al caso del absorbedor autoparamétrico pasivo tipo viga en cantilever. Por otra parte, se tiene un sistema de control en lazo cerrado, el cual es subactuado, puesto que se tienen 2 grados de libertad por sólo un actuador (parche piezoeléctrico) y la salida a controlar, es decir, el desplazamiento en el sistema primario Duffing  $x$  no es controlable por medio de  $u$ , exactamente en los puntos de equilibrio de interés. La única coordenada generalizada que es controlable mediante  $u$  es el desplazamiento lateral de la viga  $y$ , por lo tanto, se propone una adecuada ley de control prealimentada y retroalimentada para tener un control indirecto sobre la respuesta del sistema primario Duffing.

### 2.2.1. Absorbedor autoparamétrico pasivo tipo viga en cantilever

Si se hace  $u \equiv 0$  y se normalizan las ecuaciones (2.1) y (2.2) resulta

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\zeta_1\omega_1\dot{x} + \omega_1^2x + \varepsilon\alpha x^3 - \varepsilon h(y\ddot{y} + \dot{y}^2) = \varepsilon f \cos(\Omega t) \quad (2.3)$$

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\zeta_2\omega_2\dot{y} + (\omega_2^2 - \varepsilon g\ddot{x})y + \varepsilon^2\beta y(y\dot{y} + \dot{y}^2) = 0 \quad (2.4)$$

cuyos parámetros normalizados son

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k_1}{M+m}, & 2\varepsilon\zeta_1\omega_1 &= \frac{c_1}{M+m}, & \varepsilon\alpha &= \frac{k_2}{M+m}, & \varepsilon h &= \frac{6}{5L} \left( \frac{m}{M+m} \right), & \varepsilon f &= \frac{F_0}{M+m}, \\ \omega_2^2 &= \frac{3EI}{mL^3}, & 2\varepsilon\zeta_2\omega_2 &= \frac{c_2}{m}, & \varepsilon g &= \frac{6}{5L}, & \varepsilon^2\beta &= \frac{36}{25L^2}, & \varepsilon &= \frac{6\delta_0}{5L}, & \delta_0 &= \frac{F_0}{k_1} \end{aligned}$$

### 2.2.2. Respuesta frecuencial aproximada

Se usa el método de escalas múltiples para encontrar una solución aproximada del sistema perturbado (2.3) y (2.4), para mayores detalles ver Abundis [2] (para el caso de absorbedor pendular ver también Vázquez y Silva [74]).



Las respuestas en estado estacionario tanto para el sistema primario como el secundario son

$$a = \frac{4\omega_2^2}{(\varepsilon g)\omega_1^2} \sqrt{\left(\frac{\Omega}{2\omega_2} - 1\right)^2 + (\varepsilon\zeta_2)^2} \quad (2.5)$$

$$0 = b^4 + Qb^2 + R \quad (2.6)$$

donde

$$Q = \frac{12\omega_2(\varepsilon\alpha)(\Omega - 2\omega_2)^3}{(\varepsilon g)^3(\varepsilon h)\omega_1^6} + \frac{48\omega_2^3(\varepsilon\alpha)(\varepsilon\zeta_2)^2(\Omega - 2\omega_2)}{(\varepsilon h)(\varepsilon g)^3\omega_1^6} - \frac{8(\Omega - 2\omega_2)(\Omega - \omega_1)}{(\varepsilon h)(\varepsilon g)\omega_1\omega_2} + \frac{16(\varepsilon\zeta_1)(\varepsilon\zeta_2)}{(\varepsilon h)(\varepsilon g)}$$

$$R = \frac{2304\omega_2^8(\varepsilon\alpha)^2}{(\varepsilon h)^2(\varepsilon g)^6\omega_1^{12}} \left[ \left(\frac{\Omega}{2\omega_2} - 1\right)^2 + (\varepsilon\zeta_2)^2 \right]^3 - \frac{768\omega_2^4(\varepsilon\alpha)(\Omega - \omega_1)}{(\varepsilon h)^2(\varepsilon g)^4\omega_1^7} \left[ \left(\frac{\Omega}{2\omega_2} - 1\right)^2 + (\varepsilon\zeta_2)^2 \right]^2 + \frac{64[(\Omega - \omega_1)^2 + \omega_1^2(\varepsilon\zeta_1)^2]}{(\varepsilon h)^2(\varepsilon g)^2\omega_1^2} \left[ \left(\frac{\Omega}{2\omega_2} - 1\right)^2 + (\varepsilon\zeta_2)^2 \right] - \frac{(\varepsilon f)^2}{(\varepsilon h)^2\omega_2^4}$$

Es importante notar que la respuesta del sistema primario Duffing no depende de la *rigidez cúbica* ni tampoco de la *fuerza externa*. Por otra parte, la respuesta del sistema secundario sí está influenciada por la no linealidad cúbica debido a la rigidez del resorte a través de los parámetros  $Q$  y  $R$ . De hecho la amplitud en (2.5) está también limitada por el amortiguamiento debido a la viga  $\zeta_2$ .

Para obtener la respuesta frecuencial del sistema primario en términos de la rigidez equivalente de la viga, en un rango de frecuencias de excitación, se parametriza la amplitud en términos de  $k_c$ , dando como resultado

$$a = \frac{4}{(\varepsilon g)\omega_1^2} \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{3EI}{L^3} + k_c \right) \left[ 0.25(\varepsilon\rho_1 + \omega_1)^2 - \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{3EI}{L^3} + k_c \right) (\varepsilon\rho_1 + \omega_1) + \frac{1}{m} \left( \frac{3EI}{L^3} + k_c \right) + \frac{0.25c_2^2}{m^2}} \right]}$$

Los parámetros del sistema completo se muestran en la Tabla I. La rigidez equivalente asociada al (primer modo) absorbedor tipo viga es tal que, el absorbedor autoparamétrico de vibraciones esté propiamente sintonizado con la fuerza de excitación.

$M = 3.3502kg$	$k_1 = 723N/m$	$k_2 = 40970N/m^3$
$c_1 = 2.8481N/(m/s)$	$m = 0.217kg$	$L = 0.5324m$
$k_{viga} = 10.997N/m$	$c_2 = 0.072N/(m/s)$	$I_{viga} = 8.46825 \times 10^{-12}m^4$
$A = 4.03225 \times 10^{-5}m^2$	$E = 69GPa$	$k_c \in [-3, 3] N/m$
$F_0 = 1.25N$	$\omega_1 = 14.237rad/s = 2.266Hz$	$\omega_2 = 7.118rad/s = 1.133Hz$

### 2.3. ABSORCIÓN AUTOPARAMÉTRICA EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO DE 2 GDL23

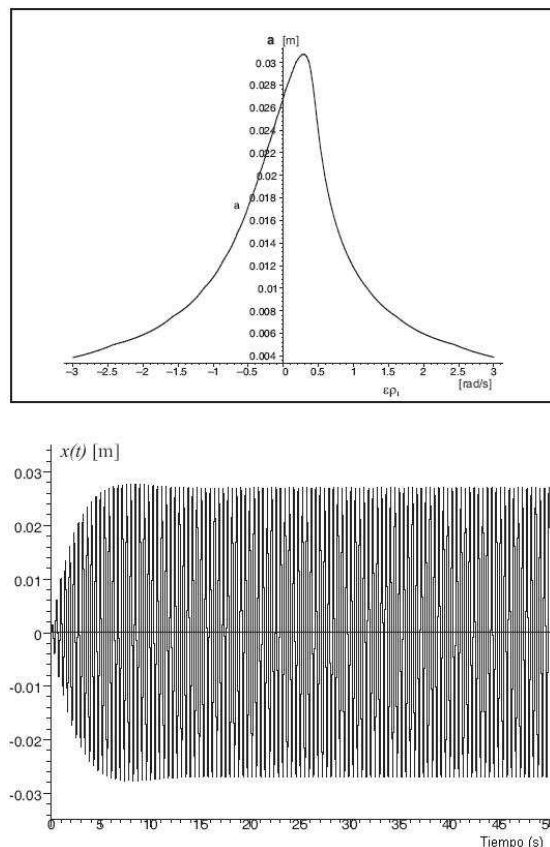


Figura 2.2: Respuesta frecuencial y dinámica del sistema Duffing sin interacción autoparamétrica.

La respuesta frecuencial aproximada del sistema Duffing y su correspondiente respuesta en el tiempo sin interacción autoparamétrica (i.e.,  $y(t) \equiv 0$ ) se muestran en la Fig. 2.2. Se nota que las amplitudes en estado estable de ambas gráficas son muy similares con  $a = 0.028m$ .

En la Fig. 2.3 se muestra la respuesta frecuencial aproximada y la respuesta en el tiempo tanto del sistema primario como del secundario cuando se presenta interacción autoparamétrica. En estado estable los valores de las amplitudes son  $a = 0.0105m$  y  $b = 0.1838m$ .

### 2.3. Absorción autoparamétrica en una estructura tipo edificio de 2 gdl

Aprovechando el análisis, diseño e implementación del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever detallado en la sección anterior, ahora el mismo absorbedor autoparamétrico se aplicará a una estructura tipo edificio modelada como un sistema primario lineal de 2 grados de libertad.

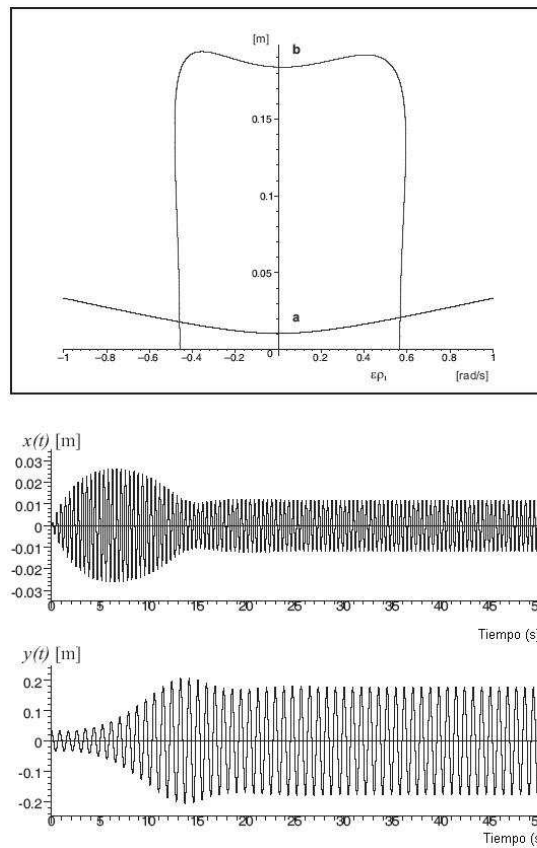


Figura 2.3: Respuesta frecuencial y dinámica del sistema Duffing con interacción autoparamétrica.

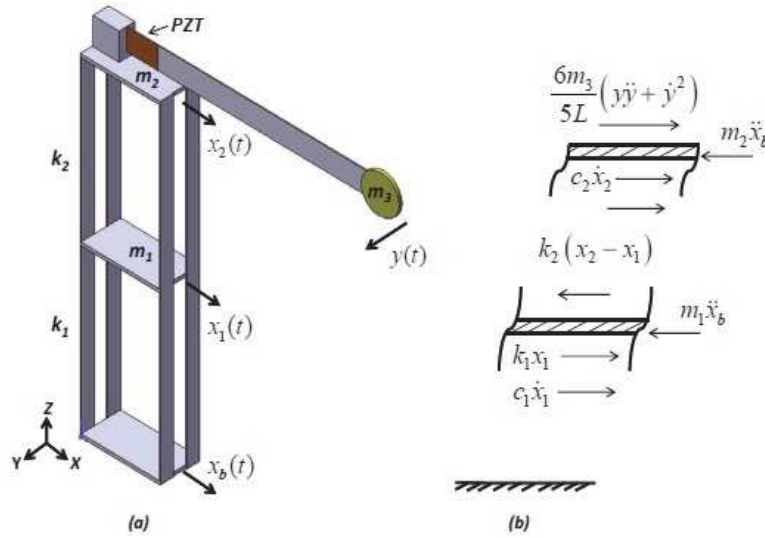


Figura 2.4: Diagramas esquemáticos. (a) Sistema primario con absorbedor de vibraciones tipo viga en cantilever, (b) Diagramas de cuerpo libre de los pisos

### 2.3.1. Descripción del sistema

En las Figs. 2.4 y 2.5 se describen el diagrama esquemático y el prototipo experimental del sistema mecánico, respectivamente. El sistema primario consiste de dos pisos rígidos con masas  $m_1$ , y  $m_2$ , respectivamente conectados por columnas flexibles de aluminio con rigidez equivalente  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente. La rigidez equivalente de la columna entre pisos se calcula considerando cuatro columnas en paralelo con rigidez lateral individual  $\frac{12EI_{col}}{h^3}$ , donde  $E$  es el módulo de Young del material (aluminio),  $I_{col}$  es el momento de inercia de área y  $h$  es la altura del perfil de la columna (Chopra [22]). Cuando uno de los pisos se mueve lateralmente con respecto al piso de abajo, las columnas actúan como resortes laterales. El sistema primario se excita por medio de una aceleración armónica en la base  $\ddot{z}(t) = -\Omega^2 z_0 \cos \Omega t$  con amplitud  $\Omega^2 z_0$  y frecuencia de excitación  $\Omega$  cercana a una de sus resonancias paramétricas principales  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Para poder atenuar las vibraciones armónicas debido al movimiento en la base  $\ddot{z}(t)$  (en la dirección X) se usa un absorbedor de vibraciones tipo viga en cantilever, el cual se compone por una viga delgada sujeta sobre el segundo piso del sistema primario y con una masa equivalente en el extremo  $m_3$ , considerando sólo su movimiento lateral (dirección Y) y restringido a un plano horizontal  $X - Y$  (i.e., se desprecian los efectos gravitatorios). La viga en cantilever tiene pegado en su base un parche piezoeléctrico y por el otro lado una galga extensométrica. Esta configuración del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever está motivada en el trabajo descrito en la literatura pero para el sistema primario con más de un grado de libertad (ver, e.g., Haxton y Barr [37], Roberts [62] y Cuvalci [20]).

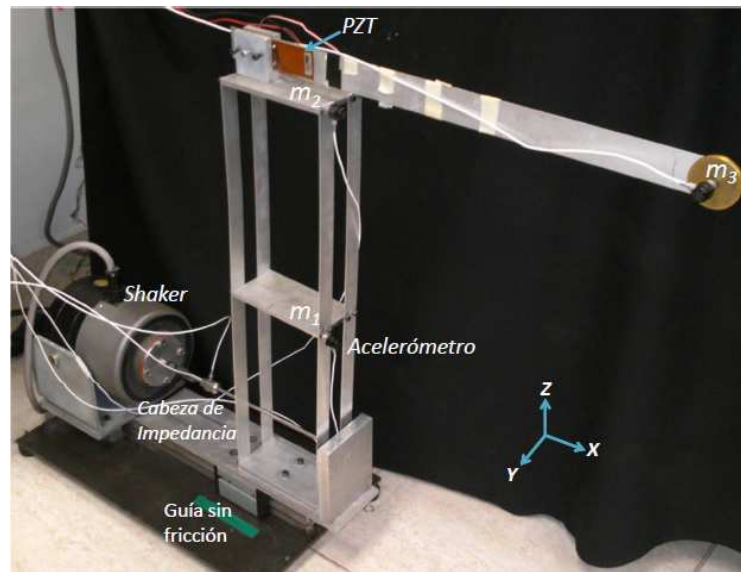


Figura 2.5: Plataforma Experimental

### 2.3.2. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento para el sistema de tres grados de libertad que consiste en la estructura tipo edificio y el absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever se obtienen empleando la metodología de Euler-Lagrange. La energía cinética y potencial total se describen como

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{w} - \dot{x}_2)^2 \quad (2.7)$$

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{3EI}{2L^3}\right)y^2 \quad (2.8)$$

donde  $w = \frac{3y^2}{5L}$  representa el desplazamiento axial (contracción) de la masa  $m_3$ , a través de la dirección  $X$ , la cual está directamente relacionada con el desplazamiento lateral  $y$  (dirección  $Y$ ) de la misma masa. Es importante señalar que la viga en cantilever es excitada armónicamente en su soporte por el movimiento longitudinal del segundo piso  $x_2$ , lo cual ocasionará la presencia de términos inerciales no lineales afectando la dinámica de la viga. La energía potencial asociada al absorbedor autoparamétrico.

Las ecuaciones de movimiento de la estructura tipo edificio con absorbedor tipo viga en cantilever se obtienen calculando el Lagrangiano  $L = T - V$  y desarrollando la metodología de Euler-Lagrange considerando amortiguamiento viscoso lineal y fuerzas exógenas debido

### 2.3. ABSORCIÓN AUTOPARAMÉTRICA EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO DE 2 GDL27

al movimiento en la base, resultando (Chopra [22], Roberts [62]):

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = -m_1\ddot{z} \quad (2.9)$$

$$(m_2 + m_3)\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 - \frac{6m_3}{5L}(y\ddot{y} + \dot{y}^2) - k_2x_1 = -m_2\ddot{z} \quad (2.10)$$

$$m_3\ddot{y} + c_3\dot{y} + \left(\frac{3EI}{L^3} - \frac{6m_3}{5L}\ddot{x}_2\right)y + \frac{36m_3}{25L^2}y(y\ddot{y} + \dot{y}^2) = u(t) \quad (2.11)$$

donde  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y$  denotan el movimiento longitudinal de cada piso del sistema primario y el desplazamiento lateral del absorbedor pasivo tipo viga en cantilever, respectivamente. La entrada activa de control  $u$  es la fuerza equivalente provista por el parche PZT cementado en la base de la viga.

La excitación armónica está dada por  $\ddot{z}(t) = -\Omega^2 z_0 \cos \Omega t$ , donde la frecuencia de excitación  $\Omega$  es cercana a una de las resonancias paramétricas principales del sistema primario. Además, los parámetros asociados al absorbedor pasivo tipo viga son el módulo de Young  $E$  (aluminio), el momento de inercia de área  $I$  y la longitud total  $L$ . La dinámica del sistema completo se puede expresar en forma compacta como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau(t) \quad (2.12)$$

donde  $q = [x_1, x_2, y]^T$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\tau = [-m_1\ddot{z}, -m_2\ddot{z}, u]^T$  es el vector de fuerzas exógenas con  $\ddot{z}(t) = -\Omega^2 z_0 \cos \Omega t$  y  $u$  es la fuerza de control suministrada por el parche piezoeléctrico. Además,  $M(q)$  representa la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q})$  es el vector de los términos centrífugos y de Coriolis, también incluye las fuerzas disipativas asociadas a los amortiguamientos viscosos, y  $G(q)$  es el vector de fuerzas gravitacionales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & -\frac{6m_3}{5L}y \\ 0 & -\frac{6m_3}{5L}y & m_3 \left(1 + \frac{36}{25L^2}y^2\right) \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q})\dot{q} &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -\frac{6m_3}{5L}\dot{y} \\ 0 & 0 & c_3 + \frac{36m_3}{25L^2}y\dot{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ G(q) &= \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es importante notar que el sistema (2.9)-(2.11) es altamente no lineal, ya que el absorbedor pasivo está inercialmente acoplado al segundo piso de la estructura tipo edificio de tal manera que una sintonización adecuada puede brindar la sintonización autoparamétrica (operación no lineal de dos modos), donde se pueden atenuar las excitaciones resonantes armónicas. Además, cuando  $u \equiv 0$  se tiene un absorbedor autoparamétrico puramente pasivo. Por otro lado se tiene un sistema de control en lazo cerrado (2.9)-(2.11), el cual es fuertemente no lineal, subactuado y las salidas a controlar  $x_1$  y  $x_2$  no son controlables desde la entrada  $u$

exactamente en los puntos de equilibrio de interés. Lo que sí es controlable desde  $u$  es el absorbedor autoparamétrico tipo viga y por lo tanto se propone la aplicación de un esquema de control prealimentado y retroalimentado para controlar indirectamente la respuesta del sistema primario.

### 2.3.3. Aplicación de un actuador tipo parche PZT sobre el absorbedor tipo viga en cantilever

El parche rectangular PZT se cementa en la base del absorbedor tipo viga. La entrada de control  $u(t)$  en (2.11) es equivalente a un par de momentos flexionantes  $M_p$  aplicado en ambos extremos del parche. La fuerza equivalente de control que actúa sobre la viga en cantilever, tipo Euler-Bernoulli, se obtiene de la siguiente forma

$$u(t) = BM_p(t) = Bg_a V(t) \quad (2.13)$$

donde  $V$  es el voltaje aplicado entre los electrodos del parche  $PZT$ ,  $B$  es el llamado vector de influencia y  $g_a = -e_{31}bz_m$  es la ganancia del actuador, la cual se calcula de los parámetros del parche  $PZT$  como son las propiedades del material y su tamaño. Aquí  $e_{31}$  es una constante del  $PZT$  ( $e_{31} = -7.5C/m^2$ ) y  $b$  es una constante relacionada con el ancho del electrodo (Preumont [59]).

Es importante señalar que el actuador empleado (parche piezoeléctrico) utiliza muy poco esfuerzo de control con una ley de control continua prealimentada y retroalimentada basada en la medida del desplazamiento actual de  $m_3$  y un amplificador de potencia externo. El absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever es pasivo y activo simultáneamente, trabajando como absorbedor pasivo cuando la frecuencia de excitación ( $\Omega$ ) es exactamente igual a una de las frecuencias naturales del sistema (condición de resonancia externa) y como absorbedor activo en cualquier otro caso. Debido al bajo consumo de potencia por el actuador, el esquema de control de vibración se puede llamar como un control semiactivo.

### 2.3.4. Estructura con absorbedor pasivo tipo viga en cantilever

Definiendo los parámetros representativos del sistema, las ecuaciones de movimiento del sistema de tres grados de libertad (2.9)-(2.11) se pueden normalizar para obtener una solución analítica aproximada para la respuesta frecuencial no lineal. Este procedimiento resulta en las tres siguientes ecuaciones diferenciales no lineales acopladas para el absorbedor pasivo tipo viga en cantilever (i.e., cuando  $u(t) \equiv 0$ ):

$$\ddot{x}_1 + 2\varepsilon\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 - m_a\varepsilon\omega_2^2x_2 = -\varepsilon f_1 \cos \Omega t \quad (2.14)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\varepsilon\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 - \varepsilon h(y\ddot{y} + \dot{y}^2) - \varepsilon\omega_2^2x_1 = -\varepsilon f_2 \cos \Omega t \quad (2.15)$$

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\zeta_3\omega_3\dot{y} + [\omega_3^2 - \varepsilon g\ddot{x}_2]y + \varepsilon^2\beta y(y\ddot{y} + \dot{y}^2) = 0 \quad (2.16)$$

donde los parámetros normalizados del sistema son

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{(k_1+k_2)}{m_1}, & 2\varepsilon\zeta_1\omega_1 &= \frac{c_1}{m_1}, & m_a &= \frac{m+m_2}{m_1}, & \varepsilon f_1 &= \Omega^2 Z, & \omega_2^2 &= \frac{k_2}{m+m_2}, & 2\varepsilon\zeta_2\omega_2 &= \frac{c_2}{m+m_2} \\ \varepsilon h &= \frac{6}{5L} \frac{m}{m+m_2}, & m_c &= \frac{m_2}{m+m_2} & \varepsilon f_2 &= m_c \Omega^2 Z, & \omega_3^2 &= \frac{3EI}{mL^3}, & 2\varepsilon\zeta_3\omega_3 &= \frac{c_3}{m}, & \varepsilon g &= \frac{6}{5L} \\ \varepsilon^2 \beta &= \frac{36}{25L^2} & \varepsilon &= \frac{k_2}{m_a m_1 \omega_2^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aquí el parámetro pequeño de perturbación  $\varepsilon$  considera los acoplamientos inerciales entre el absorbedor tipo viga en cantilever y el sistema primario, amortiguamientos viscosos, no linealidades y la excitación externa dentro del sistema.

Para garantizar la interacción autoparamétrica entre cualquiera de los dos modos del sistema primario y el absorbedor tipo viga, de la cual se obtiene la atenuación, se deben de satisfacer las siguientes condiciones de sintonización

$$\Omega = \omega_j \quad \text{con } j = 1, 2 \quad (2.18)$$

$$\omega_j = 2\omega_3 \quad (2.19)$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia de excitación en el movimiento de la base,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  corresponden a las frecuencias paramétricas principales del primer y segundo piso de la estructura, respectivamente, y  $\omega_3$  es la frecuencia natural del absorbedor tipo viga en cantilever. Estas dos expresiones son bien conocidas como las condiciones de resonancia externa e interna, respectivamente (Cartmell [17], Nayfeh y Mook [56]). Es importante notar que  $\omega_3$  depende de la rigidez equivalente de la viga, la cual se puede modificar activamente por el parche piezoeléctrico PZT.

### 2.3.5. Análisis frecuencial aproximado

Se utiliza el método de escalas múltiples para calcular la solución aproximada (función de respuesta frecuencial) para el sistema perturbado (2.14)-(2.16) (Cartmell [17], Nayfeh y Mook [56], Vázquez y Silva [74]). Las soluciones perturbadas se expresan como

$$x_1 = x_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{11}(T_0, T_1) + \dots \quad (2.20)$$

$$x_2 = x_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{21}(T_0, T_1) + \dots \quad (2.21)$$

$$y = y_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon y_{11}(T_0, T_1) + \dots \quad (2.22)$$

donde  $T_0 = t$  es la escala de tiempo rápida,  $T_1 = \varepsilon t$  es la escala de tiempo lenta, dichas escalas de tiempo se relacionan con la perturbación por  $T_n = \varepsilon^n t$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Las derivadas con respecto al tiempo de las diferentes escalas de tiempo traen consigo operadores diferenciales de la forma  $d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots$  y  $d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots$

Las condiciones de resonancia externa e interna, que caracterizan la interacción autoparamétrica entre los tres grados de libertad, se perturban como

$$\Omega = \omega_j + \varepsilon \rho_j \quad \text{con } j = 1, 2 \quad (2.23)$$

$$\omega_j = 2\omega_3 + 2\varepsilon \rho_3 \quad (2.24)$$



donde  $\varepsilon\rho_j$  y  $\varepsilon\rho_3$  definen los parámetros de sintonización externo e interno, respectivamente. Nótese que, las dos primeras condiciones de resonancia externa ( $j = 1, 2$ ) consideran la posibilidad de que la estructura tipo edificio puede ser excitada en cualquiera de las dos frecuencias resonantes primarias (primero y segundo modo). La segunda condición establece que la resonancia interna del absorbedor tipo viga en cantilever con respecto a la estructura tipo edificio.

Sustituyendo las soluciones propuestas de primer orden  $x_1(T_0, T_1)$ ,  $x_2(T_0, T_1)$  y  $y(T_0, T_1)$  en (2.14)-(2.16) y agrupando los términos de cero y primer orden en  $\varepsilon$ , conduce al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales parciales

$$\varepsilon^0 : D_0^2 x_{10} + \omega_1^2 x_{10} = 0 \quad (2.25)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} = -2D_0 D_1 x_{10} - 2\zeta_1 \omega_1 D_0 x_{10} + m_a \omega_2^2 x_{20} - f_1 \cos \Omega t \quad (2.26)$$

$$\varepsilon^0 : D_0^2 x_{20} + \omega_2^2 x_{20} = 0 \quad (2.27)$$

$$\varepsilon^1 D_0^2 x_{21} + \omega_2^2 x_{21} = -2D_0 D_1 x_{20} - 2\zeta_2 \omega_2 D_0 x_{20} + h y_{10} (D_0^2 y_{10}) + h (D_0 y_{10})^2 + \omega_2^2 x_{10} - f_2 \cos \Omega t \quad (2.28)$$

$$\varepsilon^0 : D_0^2 y_{10} + \omega_3^2 y_{10} = 0 \quad (2.29)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 y_{11} + \omega_3^2 y_{11} = -2D_0 D_1 y_{10} - 2\zeta_3 \omega_3 D_0 y_{10} + g y_{10} (D_0^2 x_{20}) \quad (2.30)$$

Las soluciones propuestas en su forma polar se expresan como

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\alpha} \quad B = \frac{1}{2} b e^{i\beta} \quad C = \frac{1}{2} c e^{i\psi} \quad (2.31)$$

Sustituyendo las soluciones propuestas en (2.26), (2.28) y (2.30), y removiendo los términos seculares, se tiene

$$-i\omega_1 a' + \omega_1 \alpha a - \zeta_1 \omega_1^2 i a + \frac{1}{2} m_a \omega_2^2 b e^{i\theta} - \frac{1}{2} f_1 e^{i\phi} = 0 \quad (2.32)$$

$$-i\omega_2 b' + \omega_2 \beta b - \zeta_2 i \omega_2^2 b - h \omega_3^2 \frac{1}{2} c^2 e^{i(2\psi - 2\varepsilon\rho_3 T_0 - \beta)} + \frac{1}{2} \omega_2^2 a e^{i\gamma} - \frac{1}{2} f_2 e^{i\delta} = 0 \quad (2.33)$$

$$-i\omega_3 c' + 2\omega_3 \frac{1}{2} \psi c - \zeta_3 \omega_3^2 i c - \frac{1}{4} g \omega_2^2 c b e^{i\varphi} = 0 \quad (2.34)$$

donde  $\theta = \beta - \varepsilon\rho_2 T_0 - \alpha$ ,  $\phi = \varepsilon\rho_1 T_0 - \alpha$ ,  $\gamma = \alpha - \beta + \varepsilon\rho_2 T_0$ ,  $\delta = \varepsilon\rho_2 T_0 - \beta$  y  $\varphi = -\beta - 2(\omega_3 + \varepsilon\rho_3) T_0$ . En estado estable  $a' = b' = c' = 0$ , por lo tanto las amplitudes se reducen a la forma:

$$\omega_1 \alpha' a - \zeta_1 \omega_1^2 i a + \frac{1}{2} m_a \omega_2^2 b e^{i\theta} - \frac{1}{2} f_1 e^{i\phi} = 0 \quad (2.35)$$

$$\omega_2 \beta' b - \zeta_2 i \omega_2^2 b - h \omega_3^2 \frac{1}{2} c^2 e^{-i\varphi} + \frac{1}{2} \omega_2^2 a e^{i\gamma} - \frac{1}{2} f_2 e^{i\delta} = 0 \quad (2.36)$$

$$\omega_3 \psi' c - \zeta_3 \omega_3^2 i c - \frac{1}{4} g \omega_2^2 b e^{i\varphi} = 0 \quad (2.37)$$

Tomando las partes reales e imaginarias, se obtienen las respuestas en amplitud de estado estable para el primer y segundo piso así como para el absorbedor autoparamétrico tipo viga

en cantilever

$$-\zeta_2\omega_2^2b + h\omega_3^2\frac{1}{2}c^2 \sin \varphi + \frac{1}{2}\omega_2^2a \sin \gamma - \frac{1}{2}f_2 \sin \phi = 0 \quad (2.38)$$

$$\omega_2\rho_1b - h\omega_3^2\frac{1}{2}c^2 \cos \varphi + \frac{1}{2}\omega_2^2a \cos \gamma - \frac{1}{2}f_2 \cos \phi = 0 \quad (2.39)$$

$$-\zeta_3\omega_3^2c - \frac{1}{4}g\omega_2^2b \sin \varphi = 0 \quad (2.40)$$

$$\omega_3 \left( \frac{2\rho_3 + \rho_1}{2} \right) c - \frac{1}{4}g\omega_2^2b \cos \varphi = 0 \quad (2.41)$$

$$-\zeta_2\omega_2^2b + h\omega_3^2\frac{1}{2}c^2 \sin \varphi - \frac{1}{2}\omega_2^2a \sin \theta - \frac{1}{2}f_2 \sin \phi = 0 \quad (2.42)$$

$$\omega_2\rho_1b - h\omega_3^2\frac{1}{2}c^2 \cos \varphi + \frac{1}{2}\omega_2^2a \cos \theta - \frac{1}{2}f_2 \cos \phi = 0 \quad (2.43)$$

Nótese que son seis ecuaciones algebraicas no lineales y altamente acopladas, cuyas soluciones producen varias amplitudes en estado estable, y, por lo tanto, son parametrizadas y resueltas numéricamente en términos del parámetro de sintonización y usando *Maple*©.

### 2.3.6. Absorción autoparamétrica pasiva: resultados experimentales

La Tabla II presenta los parámetros del sistema completo. La rigidez equivalente asociada (primer modo) al absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever es tal que el absorbedor pasivo de vibraciones está propiamente sintonizado con la frecuencia de excitación.

$m_1 = 0.2439kg$	$m_2 = 0.6339kg$	$m_3 = 0.1229kg$	$k_1 = 780.445N/m$
$k_2 = 780.445N/m$	$k_{viga} = 16.278N/m$	$c_1 = 0.027N/(m/s)$	$c_2 = 0.079N/(m/s)$
$c_3 = 0.039N/(m/s)$	$E = 69GPa$	$L = 0.5446m$	$z_0 = 0.002243m$
$k_c \in [-3, 3]N/m$	$I_{viga} = 1.2702 \times 10^{-11}m^4$	$\omega_1 = 13.21Hz$	$\omega_2 = 3.662Hz$
$\omega_3 = 1.831Hz$	$A = 6.04837 \times 10^{-5}m^2$		

La estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico se sometió a un barrido sinusoidal en la base de 0 a 20Hz con una frecuencia de muestreo de 2KHz. En la Fig. 2.6 se muestra la función de respuesta frecuencial del sistema primario obtenida al calcular la transformada rápida de Fourier (FFT) al desplazamiento de cada uno de los pisos ante la excitación antes mencionada (los valores de las frecuencias resonantes son  $\omega_1 = 13.21Hz$  y  $\omega_2 = 3.662Hz$ ). De forma similar, la función de respuesta frecuencial del sistema secundario se describe en la Fig. 2.7, cuya frecuencia natural es  $\omega_3 = 1.831Hz$ .

La respuesta dinámica del primer y segundo piso así como del absorbedor autoparamétrico tipo viga, sin interacción autoparamétrica se ilustran en la Fig. 2.8 Nótese como el absorbedor se encuentra desacoplado y, por lo tanto, las amplitudes de vibración para el primer y segundo piso son alrededor de 22mm y 27mm, respectivamente.

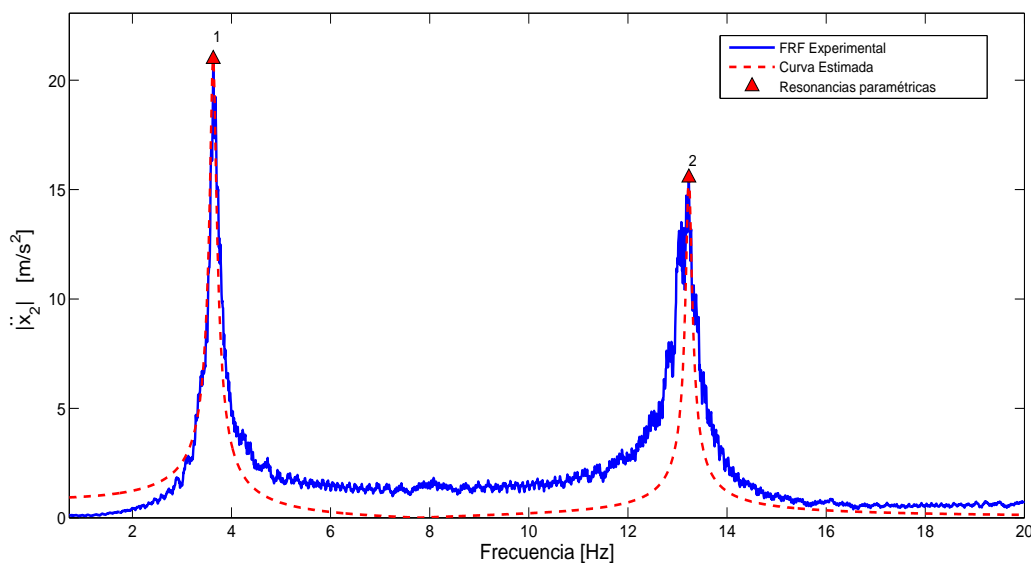


Figura 2.6: Respuesta frecuencial experimental de la estructura tipo edificio.

La respuesta dinámica del primer y segundo piso así como del absorbedor autoparamétrico tipo viga, con interacción autoparamétrica se ilustran en la Fig. 2.9 En este caso después de 20s el absorbedor autoparamétrico atenúa la respuesta del sistema completo, resultando en amplitudes de vibración para el primer y segundo piso cerca de  $5mm$  y  $5mm$ , respectivamente, con desplazamientos laterales de la viga alrededor de  $150mm$ . Es importante notar que, el porcentaje de absorción de vibración es de  $87.6\%$  para el primer piso y  $88.6\%$  para el segundo piso. (respuesta del sistema en lazo abierto).

En la Fig. 2.10 se describe la respuesta dinámica del primer y segundo piso, sin interacción autoparamétrica, cuando la base de la estructura edificio tiene un movimiento  $z(t)$  que contiene la suma de dos términos de excitación armónicos de la forma  $z(t) = z_0(\text{sen}\omega_1 t + \text{sen}\omega_2 t)$ , donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las frecuencias naturales de los dos pisos. Las amplitudes de vibración en ambos pisos son cerca de  $11mm$  y  $17mm$ , respectivamente.

La interacción autoparamétrica cuando  $z(t) = z_0(\text{sen}\omega_1 t + \text{sen}\omega_2 t)$  se muestra en la Fig. 2.11. Es importante notar que el absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever está sintonizado aún ante este cambio en la excitación del sistema. Las amplitudes de vibración en ambos pisos están alrededor de  $7mm$ . Nótese como el absorbedor de vibraciones está en condiciones de atenuar sólo la resonancia asociada al segundo piso ( $\omega_2 = 3.662Hz$ ).

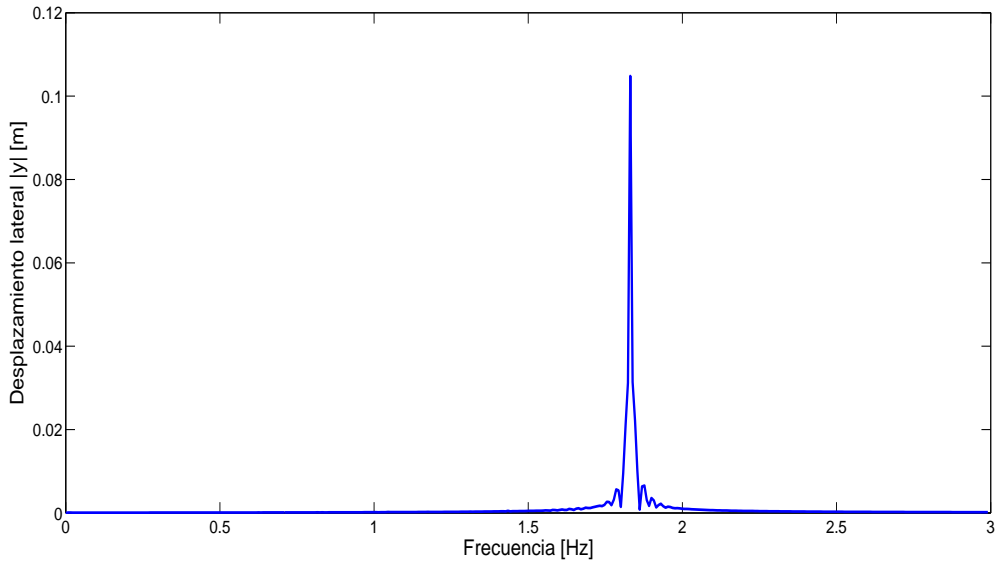


Figura 2.7: Respuesta frecuencial experimental del absorbedor autoparamétrico.

### 2.3.7. Absorción autoparamétrica pasiva/activa usando un absorbedor tipo viga en cantilever con parche PZT

En caso de que la frecuencia de excitación  $\Omega$  en el movimiento de la base (perturbación)  $x_b(t)$  sea desconocida o variable en el tiempo, el absorbedor tipo viga en cantilever no es útil para la absorción de vibraciones en la estructura tipo edificio. Sin embargo, cuando la frecuencia de excitación cambia tal que  $\Omega \neq \omega_2$ , aún se está en posibilidades de satisfacer la condición de sintonización interna  $\omega_2 = 2\omega_3$  para poder atenuar la respuesta del sistema primario. Esto se logra usando una ley de control activa en el parche PZT, por consiguiente modificando la rigidez equivalente y amortiguamiento de la viga.

La Fig. 2.12 muestra la respuesta frecuencial aproximada cuando la función de respuesta frecuencial del segundo piso se parametriza en términos de la rigidez equivalente  $k_c$ , prevista por el parche PZT. La amplitud en estado estable se muestra en términos de  $\varepsilon\rho_1$  y un rango razonable de la rigidez  $k_c$  del parche PZT, que se obtiene por una simple ley de control proporcional, de tal manera que, la condición de resonancia interna (2.19) se pueda cumplir para obtener la ganancia de atenuación mínima. Esta información se usa para obtener una atenuación óptima por medio del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever. De hecho, existe una región con amplitudes mínimas, las cuales pueden ser calculadas para garantizar la sintonización de atenuación óptima pasiva/activa por medio del absorbedor de vibraciones.

La formulación del objetivo de control para el esquema de absorción activa en el absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever con actuador PZT se realiza de acuerdo al siguiente procedimiento:

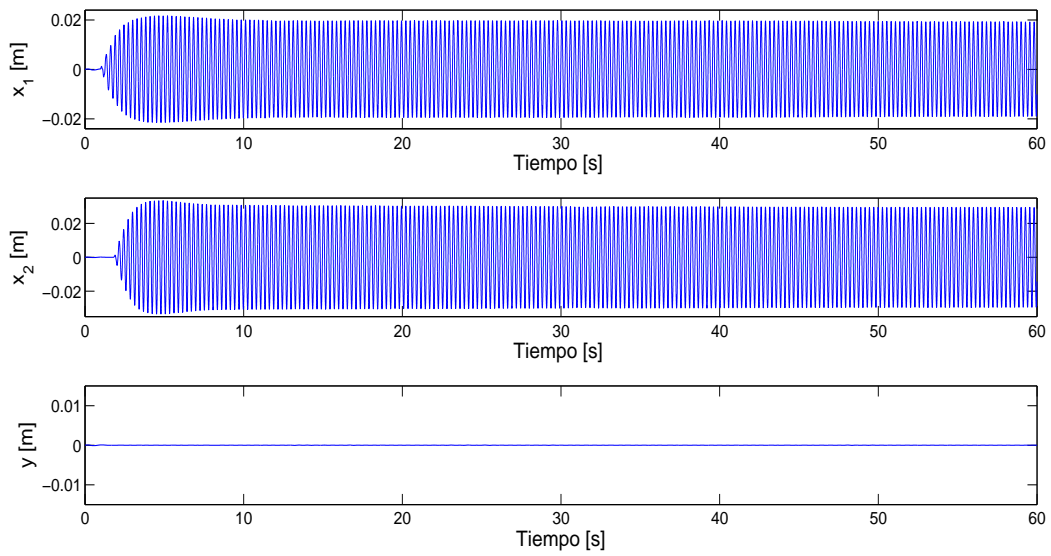


Figura 2.8: Respuesta dinámica de la estructura tipo edificio sin interacción autoparamétrica.

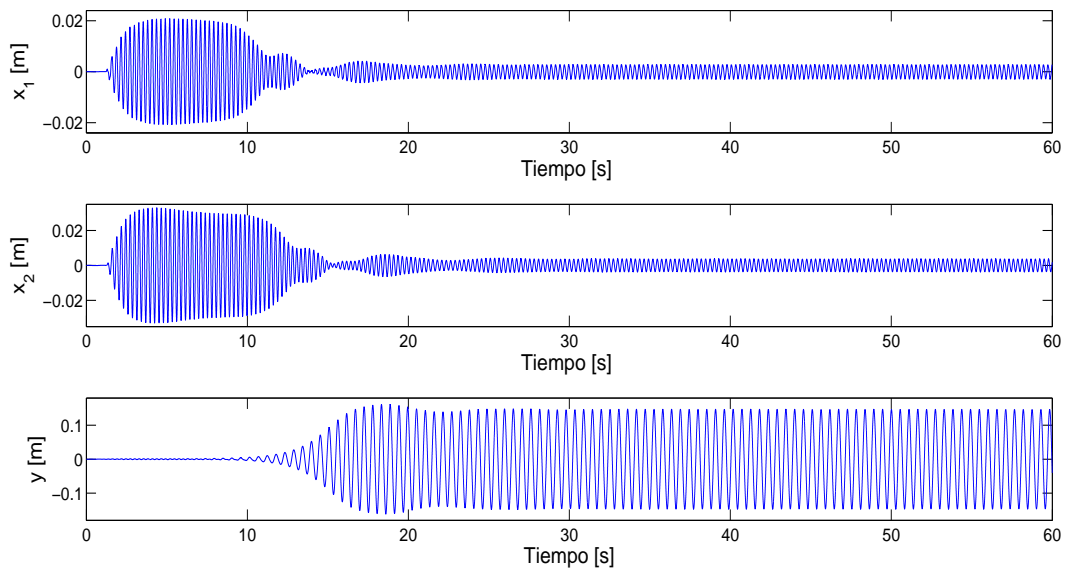


Figura 2.9: Respuesta dinámica de la estructura tipo edificio con interacción autoparamétrica

### 2.3. ABSORCIÓN AUTOPARAMÉTRICA EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO DE 2 GDL35

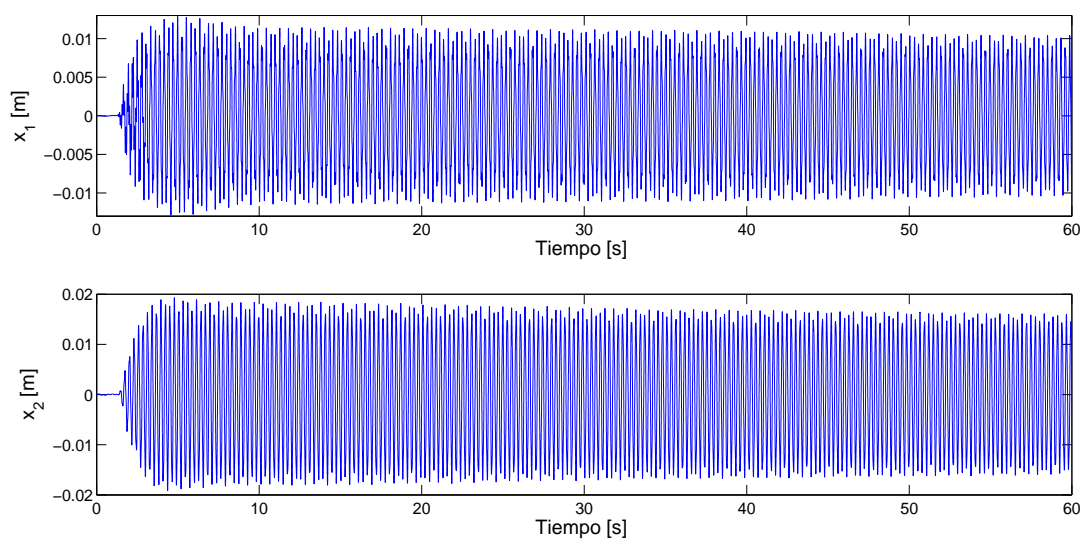


Figura 2.10: Respuesta dinámica de la estructura tipo edificio cuando  $z(t) = z_0(\text{sen}\omega_1t + \text{sen}\omega_2t)$  y sin presencia de interacción autoparamétrica.

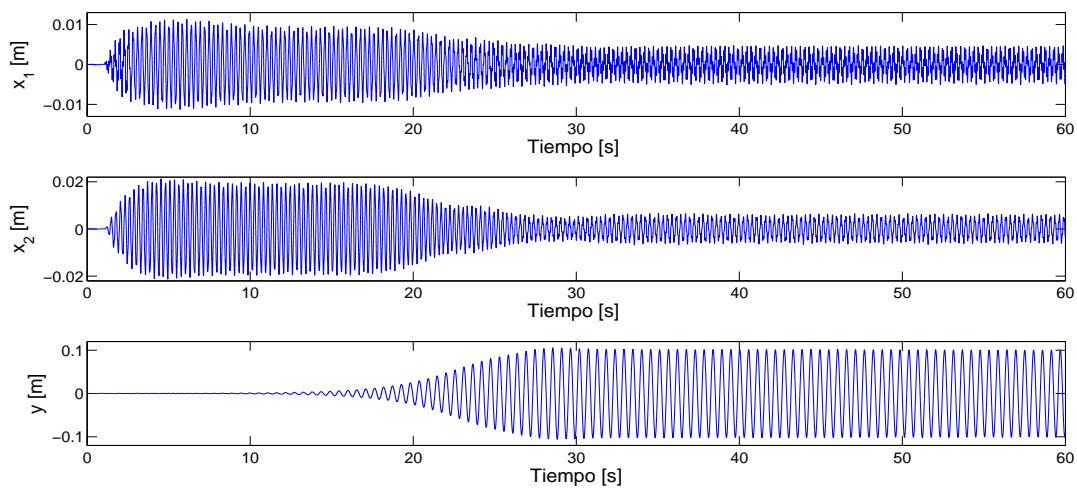


Figura 2.11: Respuesta dinámica de la estructura tipo edificio cuando  $z(t) = z_0(\text{sen}\omega_1t + \text{sen}\omega_2t)$  y con presencia de interacción autoparamétrica.

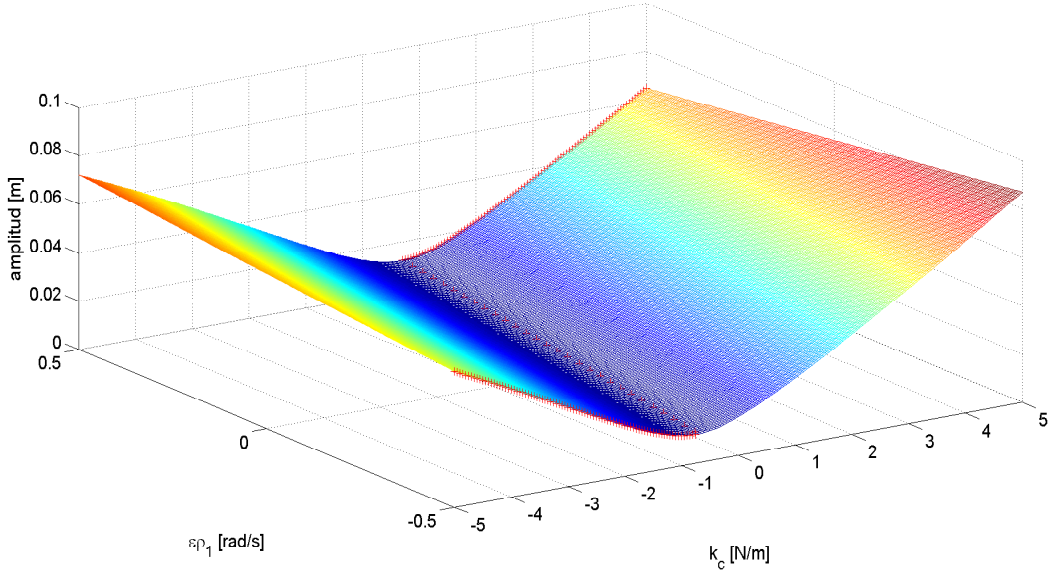


Figura 2.12: FRF del segundo piso parametrizada en términos de  $\varepsilon\rho_1$  y  $k_c$ .

1. Dada una frecuencia de excitación  $\Omega$  se calcula la constante de rigidez de atenuación óptima  $k_c^*(\Omega)$  para el actuador PZT, con la cual se minimiza la amplitud en estado estable del segundo piso  $a$ , es decir,

$$\min_{k_{c\text{mín}} \leq k_c \leq k_{c\text{máx}}} |a(\Omega, k_c)| \quad (2.44)$$

donde  $a(\Omega, k_c)$  denota la amplitud en estado estable parametrizada en términos de  $\Omega$  y  $k_c$  para el intervalo cerrado  $[k_{c\text{mín}}, k_{c\text{máx}}]$  asociado a las limitaciones físicas del actuador PZT. Esta solución es calculada numéricamente. Para fines prácticos la rigidez óptima  $k_c^*(\Omega)$  se calcula y parametriza en términos de la frecuencia de excitación  $\Omega$  usando técnicas de ajuste de curvas. De la FRF mostrada en la Fig. 2.12, se obtiene un polinomio de ganancia para lograr la atenuación óptima. Con los parametros de la Tabla I, el polinomio empleado tiene la forma (ver Fig. 2.13)

$$k_c^*(\Omega) = 0.28(\Omega - \omega_2)^3 - 0.02(\Omega - \omega_2)^2 + 1.4(\Omega - \omega_2) - 0.009 \quad (2.45)$$

2. Con el conocimiento de atenuación de rigidez óptima se sintetiza una ley de control prealimentada y retroalimentada para obtener la sintonización automática del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever:

$$u(t) = -k_c^*(\Omega)y(t) \quad (2.46)$$

Una vez que se activa el controlador proporcional (2.46), la respuesta en estado estable del sistema de control pasivo/activo converge al desempeño del caso pasivo y, por lo tanto, los esfuerzos de control son pequeños comparados con un objetivo completo de vibraciones activo.

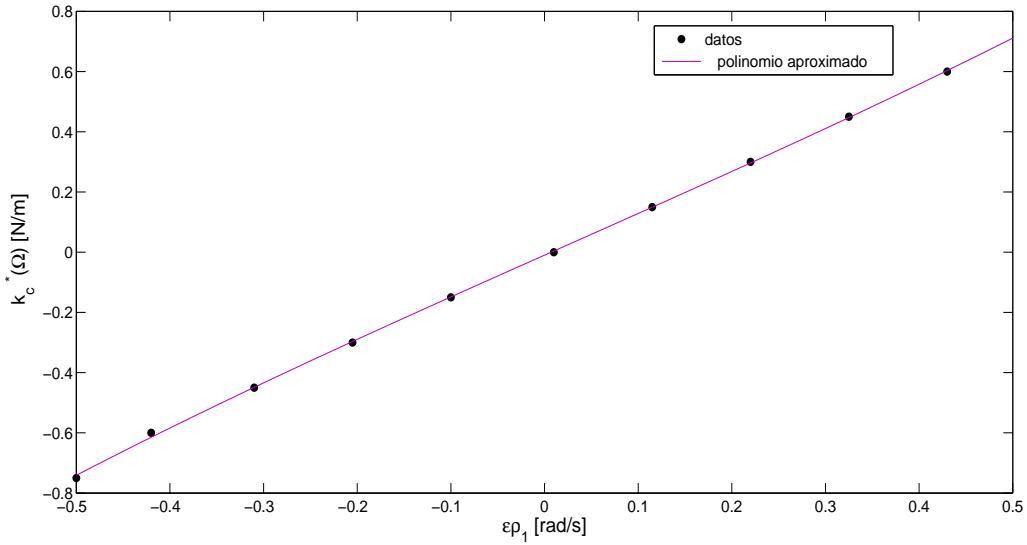


Figura 2.13: Polinomio para la condición de sintonización calculado usando técnicas de ajuste de curvas.

### 2.3.8. Absorción autoparamétrica pasiva/activa: resultados experimentales

Con el propósito de ilustrar el desempeño dinámico del absorbedor autoparamétrico pasivo/activo tipo viga en cantilever, cuando la frecuencia de excitación cambia entre dos valores constantes diferentes, se usan los parámetros en la tabla I. Las condiciones iniciales se colocan en  $x_1(0) = 0m$ ,  $x_2(0) = 0m$ ,  $y(0) = 0.01m$ ,  $\dot{x}(0) = 0m/s$ ,  $\dot{x}_2 = 0m/s$  y  $\dot{y} = 0m/s$ . La aceleración armónica  $\ddot{z}(t) = -\Omega^2 z_0 \cos \Omega t$  comienza con  $z_0 = 0.002243m$  con una frecuencia de excitación  $\Omega = \omega_2 = 3.662Hz$  (i.e.,  $\varepsilon\rho_1 = 0rad/s$ ).

En la Fig. 2.14 se muestra el comportamiento dinámico del sistema completo en lazo cerrado (2.9)-(2.11) con la ley de control proporcional, la cual incluye al sistema primario y al absorbedor pasivo/activo tipo viga en cantilever con parche PZT. Antes de  $t = 45s$  el sistema trabaja en su forma pasiva (i.e.,  $u \equiv 0$ ), con frecuencia de excitación  $\Omega = \omega_2 = 3.662Hz$  y  $\omega_3 = 1.831Hz$ . En  $t = 45s$  la frecuencia de excitación cambia a  $\Omega = 3.582Hz$  ( $\varepsilon\rho_1 = -0.5rad/s$ ). Se puede observar que después de un transitorio de aproximadamente 15s el sistema primario alcanza la condición de estado estable con pequeñas amplitudes.

En la Fig. 2.15 se muestra la fuerza de control así como la fuerza y movimiento que experimenta la estructura tipo edificio en la base de la misma cuando  $\varepsilon\rho_1 = -0.5rad/s$ . En la Fig. 2.16 se presenta otro resultado experimental. De nueva cuenta, antes de  $t = 45s$  el sistema completo está trabajando en su forma pasiva, con frecuencia de excitación  $\Omega = \omega_2 = 3.662Hz$  y  $\omega_3 = 1.831Hz$ , pero ahora la frecuencia de excitación se incrementa en  $t = 45s$  a un valor de  $\Omega = 3.7415Hz$  ( $\varepsilon\rho_1 = +0.5rad/s$ ). El sistema completo aún está en condiciones de mantener la interacción autoparamétrica, es decir, el sistema primario conserva amplitud



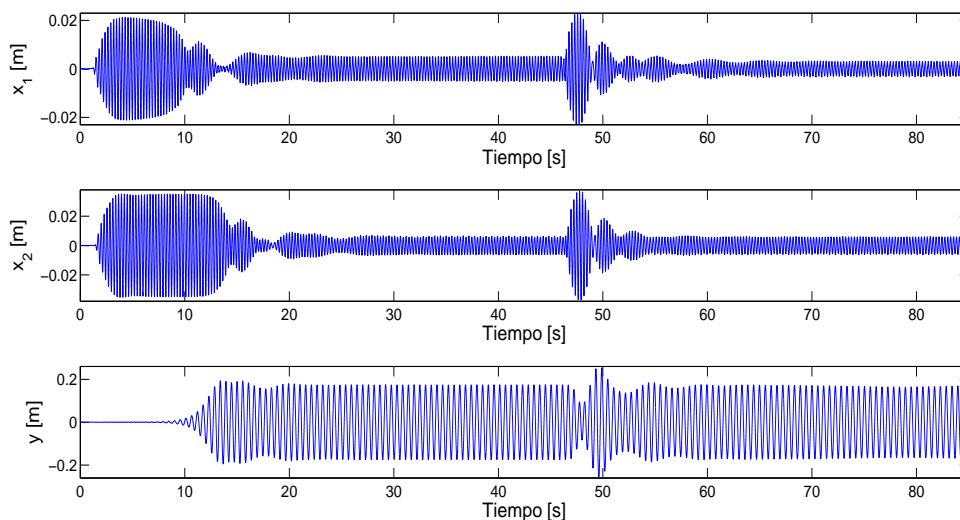


Figura 2.14: Respuesta dinámica del sistema cuando hay un cambio en la frecuencia de excitación ( $\varepsilon\rho_1 = -0.5rad/s$ ).

de magnitud pequeña y estable. En la Fig. 2.17 se muestra la fuerza de control así como la fuerza y movimiento que experimenta la estructura tipo edificio en la base de la misma cuando  $\varepsilon\rho_1 = -0.5rad/s$ .

## 2.4. Comentarios

El uso de absorbedores autoparamétricos para la atenuación de vibraciones es particularmente eficiente en sistemas excitados en una banda ancha de frecuencias, donde es necesario reducir condiciones de resonancia específicas. De hecho, los absorbedores autoparamétricos de vibración trabajan cerca o exactamente en la frecuencia para la cual son diseñados y no producen el efecto de amplitudes significativas o condiciones de resonancia en otras frecuencias, en comparación con los absorbedores dinámicos de vibración (DVA), los cuales atenúan la respuesta en su frecuencia de diseño pero producen fenómenos de resonancia para otras frecuencias (este fenómeno se comprueba experimentalmente en el capítulo 4).

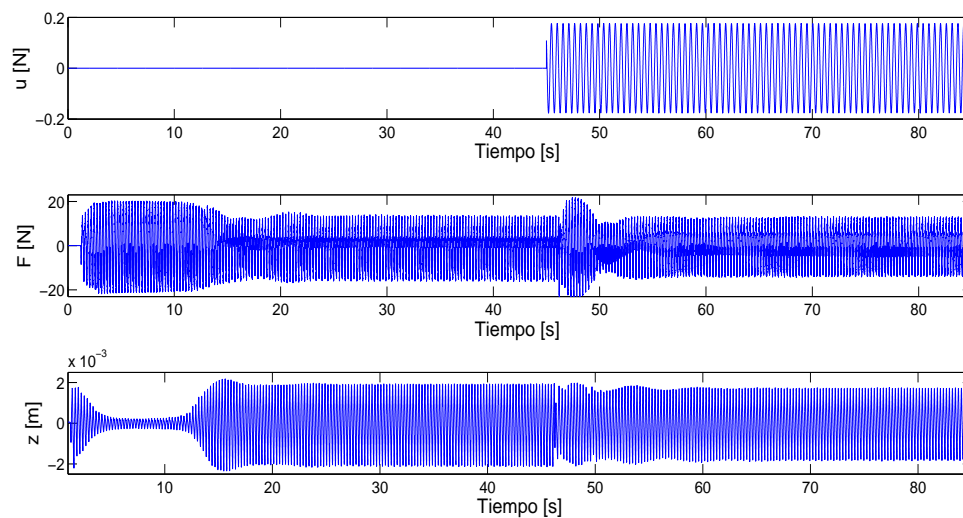


Figura 2.15: Fuerza de control  $u$ , Fuerza  $F$  y desplazamiento  $z$  cuando hay un cambio en la frecuencia de excitación de  $\varepsilon\rho_1 = -0.5rad/s$ .

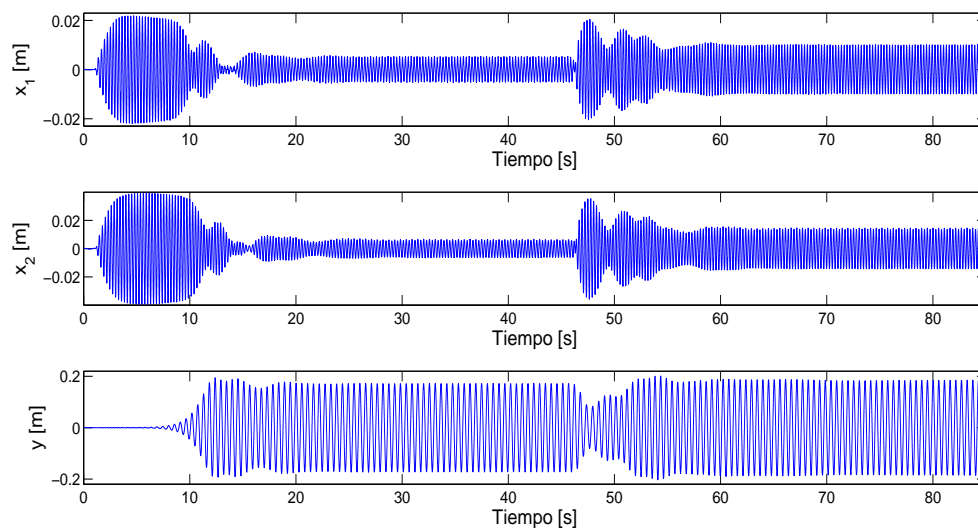


Figura 2.16: Respuesta dinámica del sistema cuando hay un cambio en la frecuencia de excitación ( $\varepsilon\rho_1 = 0.5rad/s$ ).

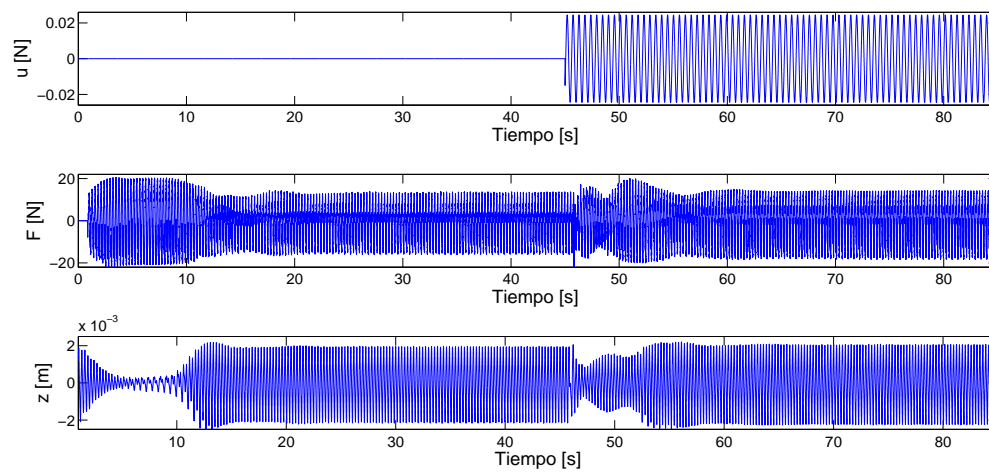


Figura 2.17: Fuerza de control  $u$ , Fuerza  $F$  y desplazamiento  $z$  cuando hay un cambio en la frecuencia de excitación de  $\varepsilon\rho_1 = +0.5\text{rad/s}$ .

## Capítulo 3

# Absorción autoparamétrica en un sistema primario de $n$ gdl

El análisis modal es el proceso de determinar las características dinámicas inherentes de un sistema en formas de frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y formas de modos, usando estas propiedades para formular un modelo matemático y describir así su comportamiento dinámico. Al modelo matemático formulado se le conoce como modelo modal del sistema y la información que proporciona son los datos modales.

El análisis modal se basa en el hecho de que la respuesta vibratoria de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo se puede expresar como una combinación lineal de un conjunto de movimientos armónicos simples llamados modos naturales de vibración, los cuales son inherentes a un sistema dinámico y son determinados completamente por sus propiedades físicas (masa, amortiguamiento y rigidez) y sus distribuciones espaciales. Cada modo se describe en términos de sus parámetros modales: frecuencia natural, amortiguamiento modal y el patrón de desplazamiento característico. El análisis modal abarca técnicas tanto teóricas como experimentales. En general este método constituye una herramienta importante y poderosa para el análisis de vibraciones, diagnóstico, diseño y control. El análisis modal también proporciona métodos que son útiles para la predicción de fallas inminentes u otros problemas mecánicos. La modificación estructural y subestructural son técnicas de análisis de vibraciones y diseño de sistemas mecánicos, las cuales están basadas fundamentalmente en la herramienta de análisis modal. Mediante los métodos de análisis de sensibilidad, usando un modelo modal, es posible determinar los grados de libertad de un sistema mecánico que son más sensibles a la adición o eliminación de elementos de masa, rigidez o amortiguamiento. De esta manera, se puede establecer un método adecuado y sistemático para realizar las modificaciones estructurales pertinentes.

En este capítulo se utiliza el análisis modal para la sintonización de un absorbedor autoparamétrico para un sistema de  $n$  grados de libertad, como caso de estudio, se realizan experimentos en una estructura tipo edificio discretizada en 6 gdl.

### 3.1. Estructura tipo edificio de $n$ gdl con movimiento en la base

Una estructura tipo edificio de  $n$  niveles sometida a movimiento en la base, en un solo plano de movimiento, se puede modelar como un sistema lineal de  $n$  grados de libertad con fuerzas de excitación sobre cada piso como se muestra en la Fig. 3.1 (Chopra [22]). Observe como las masas  $m_j$  denotan masas equivalentes por cada piso en la estructura. De manera similar las constantes de amortiguamiento  $c_j$  y rigidez  $k_j$  representan amortiguamiento viscoso y rigidez equivalente por cada arreglo paralelo de columnas entre los niveles  $j$  y  $j - 1$ .

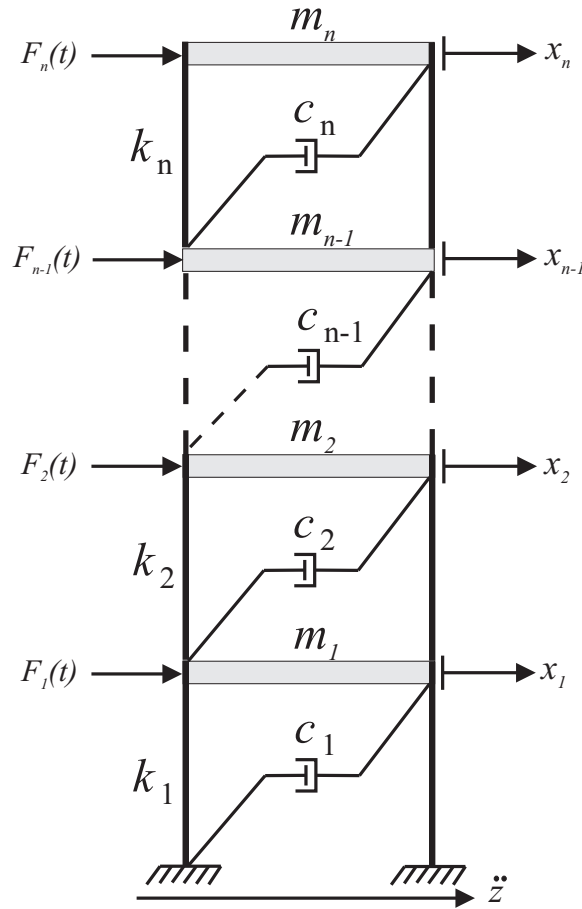


Figura 3.1: Diagrama esquemático de una estructura tipo edificio de  $n$  grados de libertad con movimiento en la base

El modelo simplificado de esta estructura de  $n$  grados de libertad con movimiento en la base es el siguiente

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -Me\ddot{z}(t), \quad x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n, \quad \ddot{z} \in R \quad (3.1)$$

donde  $x \in R^n$  denota el vector de coordenadas generalizadas de desplazamiento relativo de cada piso con respecto de un marco de referencia fijo,  $\ddot{z} \in R$  es la aceleración en la

base de la estructura y  $M, C, K$  son matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de  $n \times n$ , respectivamente, para cualquier estructura de este tipo. El vector  $e = [1, 1, \dots, 1]^T \in R^n$  se utiliza para transformar el efecto de la excitación en la base, a través de la aceleración de la base  $\ddot{z}(t)$ , como fuerzas concentradas que actúan directamente sobre cada masa (piso) de la estructura. Las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez se expresan como

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -c_n \\ 0 & \cdots & -c_n & c_n \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_n \\ 0 & \cdots & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

### 3.2. Representación de la estructura de $n$ gdl en coordenadas modales

De acuerdo a la teoría de análisis modal [29, 36], una estructura mecánica de  $n$  gdl (3.1) de la forma

$$M\ddot{x} + Kx = 0, \quad x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n \quad (3.2)$$

tiene  $n$  frecuencias naturales (no amortiguadas) que se determinan a partir de la ecuación de frecuencia

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0 \quad (3.3)$$

Esta es la llamada ecuación característica asociada al sistema (3.2), que tiene  $n$  soluciones reales no-negativas para  $\omega^2$  en sistemas físicamente realizables. Las  $n$  frecuencias naturales  $\omega_j, j = 1, \dots, n$ , se ordenan de manera que  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ .

Las formas modales o modos de vibración  $\psi_j$  asociadas a cada frecuencia natural  $\omega_j$  se obtienen como las soluciones no triviales de la ecuación algebraica

$$(-\omega_j^2 M + K) X_j = 0 \quad (3.4)$$

Los modos de vibración satisfacen *condiciones de ortogonalidad* respecto de las matrices de masa  $M$  y rigidez  $K$ , de tal manera que

$$X_i^T M X_j = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ M_i & \text{para } i = j \end{cases} \quad (3.5)$$

$$X_i^T K X_j = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ K_i & \text{para } i = j \end{cases} \quad (3.6)$$

donde  $M_i$  y  $K_i$  son la masa modal (equivalente) y rigidez modal (equivalente) asociada al modo  $i$ , respectivamente.

En general, un sistema de  $n$  grados de libertad con matriz de masa  $M$  no singular tiene  $n$  modos de vibración  $X_1, \dots, X_n$  que son linealmente independientes. Se utilizan como columnas de la llamada matriz modal de  $n \times n$  dada por

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$$

que es no singular.

Mediante la transformación lineal (modal) de coordenadas

$$x = Xq, \quad q \in R^n$$

la estructura mecánica (3.2) se puede expresar en coordenadas modales (principales o desacopladas)

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

De manera similar, en caso de amortiguamiento proporcional o de Rayleigh (i.e.,  $C = \alpha M + \beta K$ , para  $\alpha, \beta \in R$ ), la estructura mecánica con amortiguamiento y fuerzas externas (3.1) se puede transformar también a coordenadas modales como sigue

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q = \bar{f}_j(t), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

donde  $\xi_j$  y  $\omega_j$  son la relación de amortiguamiento y frecuencia natural (no amortiguada) asociada al modo  $j$ . La fuerza  $\bar{f}_j$  se denomina la fuerza modal correspondiente al modo  $j$ . Se hace notar que el vector de fuerza modal es  $\bar{F}(t) = -X^T M e \ddot{z}(t)$ . Se observa que cada ecuación de movimiento (3.7) describe la dinámica desacoplada de un sistema de un *solo grado de libertad*.

En forma compacta la estructura mecánica con amortiguamiento proporcional y movimiento en la base se puede describir como

$$\bar{M} \ddot{q} + \bar{C} \dot{q} + \bar{K} q = \bar{F}(t), \quad q = [q_1, \dots, q_n]^T \in R^n, \quad \bar{F} \in R^n \quad (3.8)$$

donde se tienen matrices de masa, rigidez y amortiguamiento modal expresadas como matrices diagonales de  $n \times n$  de la forma

$$\begin{aligned} \bar{M} &= X^T M X = \text{diag} [M_1, \dots, M_n] \\ \bar{K} &= X^T K X = \text{diag} [K_1, \dots, K_n] \\ \bar{C} &= X^T C X = \text{diag} [C_1, \dots, C_n] \end{aligned}$$

Además, la fuerza modal se obtiene como

$$\bar{F}(t) = -X^T M e \ddot{z}(t)$$

A continuación se presenta como caso de estudio una estructura de 6 grados de libertad.

### 3.3. Análisis modal de una estructura tipo edificio de 6 gdl

En algunos casos las características de un sistema se pueden obtener al abordar el análisis de éste considerándolo sin amortiguamiento. De hecho, para un sistema ligeramente amortiguado, es decir, aquél sistema que no se amortigua deliberadamente, las frecuencias naturales del sistema no amortiguado no difieren significativamente de su contraparte amortiguada. Por tal motivo y como primera aproximación de la solución del problema que se pretende resolver, en el análisis que a continuación se detalla se desprecian los coeficientes de amortiguamiento para llevar a cabo el análisis modal de la estructura tipo edificio discretizada en 3 gdl.

Considerando de momento sólo vibraciones libres del sistema que se muestra en la Fig. 3.2, cuya dinámica se puede representar de la siguiente manera

$$M\ddot{x} + Kx = 0, \quad x \in R^6 \quad (3.9)$$

Debido a que se realiza el análisis modal solamente al sistema primario, las matrices de masa ( $M$ ) y rigidez ( $K$ ) están dadas por

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 + k_6 & -k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

En este caso, la ecuación característica resulta aplicando el determinante a la matriz

$$-\omega^2 M + K = \begin{bmatrix} a & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & b & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & c & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & d & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & e & -k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & f \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

donde:

$$a = -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)$$

$$b = -m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)$$



$$c = -m_3\omega^2 + (k_3 + k_4)$$

$$d = -m_4\omega^2 + (k_4 + k_5)$$

$$e = -m_5\omega^2 + (k_5 + k_6)$$

$$f = -m_6\omega^2 + k_6$$

Sustituyendo los valores de la tabla II en (3.12) resulta

$$-\omega^2 M + K = \begin{bmatrix} \bar{a} & -897.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -897.33 & \bar{b} & -1038.77 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1038.77 & \bar{c} & -959.91 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -959.91 & \bar{d} & -1059.82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1059.82 & \bar{e} & -1092.49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1092.49 & \bar{f} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\bar{a} = -1.35\omega^2 + (1753.25)$$

$$\bar{b} = -1.45\omega^2 + (1936.1)$$

$$\bar{c} = -1.25\omega^2 + (1998.68)$$

$$\bar{d} = -1.35\omega^2 + (2019.73)$$

$$\bar{e} = -1.25\omega^2 + (2152.31)$$

$$\bar{f} = -1.55\omega^2 + 1092.49$$

Entonces,

$$\det \begin{bmatrix} \bar{a} & -897.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -897.33 & \bar{b} & -1038.77 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1038.77 & \bar{c} & -959.91 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -959.91 & \bar{d} & -1059.82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1059.82 & \bar{e} & -1092.49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1092.49 & \bar{f} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

Desarrollando (3.13), resulta

$$g\omega^{12} - h\omega^{10} + i\omega^8 - j\omega^6 + k\omega^4 - l\omega^2 + m = 0 \quad (3.14)$$

donde los coeficientes de (3.14) están dados por:

$$g = 6.4001$$

$$h = 5.2197 \times 10^4$$

$$i = 1.5719 \times 10^8$$

$$j = 2.1413 \times 10^{11}$$

$$k = 1.2876 \times 10^{14}$$

$$l = 2.7308 \times 10^{16}$$

$$m = 8.8672 \times 10^{17}$$

Las raíces positivas de la ecuación (3.14) son las frecuencias naturales del sistema primario, con valores de

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0.9976 \text{ Hz} \\ \omega_2 &= 2.9673 \text{ Hz} \\ \omega_3 &= 4.8671 \text{ Hz} \\ \omega_4 &= 6.3777 \text{ Hz} \\ \omega_5 &= 7.6941 \text{ Hz} \\ \omega_6 &= 8.5570 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Debido a que ya se conocen las frecuencias naturales del sistema, los modos de vibración se obtienen por medio de la siguiente ecuación

$$(-\omega_i^2 M + K) X = 0 \quad \text{con } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (3.15)$$

Desarrollando (3.15) para  $\omega_1 = 0.9976 \text{ Hz} = 6.2681 \text{ rad/s}$

$$\begin{bmatrix} 1700.2 & -897.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -897.3 & 1879.1 & -1038.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1038.8 & 1949.6 & -959.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -959.9 & 1966.7 & -1059.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1059.8 & 2103.2 & -1092.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1092.5 & 1031.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \\ X_{14} \\ X_{15} \\ X_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1700.2X_{11} - 897.3X_{12} = 0 \quad (3.16)$$

$$-897.3X_{11} + 1879.1X_{12} - 1038.8X_{13} = 0 \quad (3.17)$$

$$-1038.8X_{12} + 1949.6X_{13} - 959.9X_{14} = 0 \quad (3.18)$$

$$-959.9X_{13} + 1966.7X_{14} - 1059.8X_{15} = 0 \quad (3.19)$$

$$-1059.8X_{14} + 2103.2X_{15} - 1092.5X_{16} = 0 \quad (3.20)$$

$$-1092.5X_{15} + 1031.6X_{16} = 0 \quad (3.21)$$

El sistema formado por (3.16)-(3.21) consta de seis ecuaciones linealmente dependientes. Para obtener el vector modal  $X_1 = [X_{11} \ X_{12} \ X_{13} \ X_{14} \ X_{15} \ X_{16}]^T$  es necesario resolver dicho sistema, para lo cual se usa un programa de cálculo simbólico, dando como solución

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.1235 \\ 0.2340 \\ 0.3166 \\ 0.3898 \\ 0.4366 \\ 0.4624 \end{bmatrix}$$

Desarrollando (3.15) para  $\omega_2 = 2.9673 \text{ Hz} = 18.644 \text{ rad/s}$ , se tiene

$$\begin{bmatrix} 1284 & -897.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -897.3 & 1432.1 & -1038.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1038.8 & 1564.2 & -959.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -959.9 & 1550.5 & -1059.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1059.8 & 1717.8 & -1092.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1092.5 & 553.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \\ X_{23} \\ X_{24} \\ X_{25} \\ X_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1284X_{21} - 897.3X_{22} = 0 \quad (3.22)$$

$$-897.3X_{21} + 1432.1X_{22} - 1038.8X_{23} = 0 \quad (3.23)$$

$$-1038.8X_{22} + 1564.2X_{23} - 959.9X_{24} = 0 \quad (3.24)$$

$$-959.9X_{23} + 1550.5X_{24} - 1059.8X_{25} = 0 \quad (3.25)$$

$$-1059.8X_{24} + 1717.8X_{25} - 1092.5X_{26} = 0 \quad (3.26)$$

$$-1092.5X_{25} + 553.7X_{26} = 0 \quad (3.27)$$

Para obtener el vector modal  $X_2 = [X_{21} \ X_{22} \ X_{23} \ X_{24} \ X_{25} \ X_{26}]^T$  es necesario resolver el sistema formado por (3.22)-(3.27), teniendo como solución

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.3371 \\ 0.4823 \\ 0.3738 \\ 0.0871 \\ -0.2111 \\ -0.4164 \end{bmatrix}$$

Desarrollando (3.15) para  $\omega_3 = 4.8671 \text{ Hz} = 30.5808 \text{ rad/s}$ , resulta

$$\begin{bmatrix} 490.7 & -897.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -897.3 & 580.1 & -1038.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1038.8 & 829.7 & -959.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -959.9 & 757.2 & -1059.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1059.8 & 983.3 & -1092.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1092.5 & -357 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{31} \\ X_{32} \\ X_{33} \\ X_{34} \\ X_{35} \\ X_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$490.7X_{31} - 897.3X_{32} = 0 \quad (3.28)$$

$$-897.3X_{31} + 580.1X_{32} - 1038.8X_{33} = 0 \quad (3.29)$$

$$-1038.8X_{32} + 829.7X_{33} - 959.9X_{34} = 0 \quad (3.30)$$

$$-959.9X_{33} + 757.2X_{34} - 1059.8X_{35} = 0 \quad (3.31)$$

$$-1059.8X_{34} + 983.3X_{35} - 1092.5X_{36} = 0 \quad (3.32)$$

$$-1092.5X_{35} - 357X_{36} = 0 \quad (3.33)$$

Para obtener el vector modal  $X_3 = [X_{31} X_{32} X_{33} X_{34} X_{35} X_{36}]^T$  es necesario resolver el sistema formado por (3.28)-(3.33), teniendo como solución

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.4552 \\ 0.2492 \\ -0.2540 \\ -0.4893 \\ -0.1197 \\ 0.3668 \end{bmatrix}$$

Desarrollando (3.15) para  $\omega_4 = 6.3777 \text{ Hz} = 40.0722 \text{ rad/s}$ , resulta

$$\begin{bmatrix} -414.6 & -897.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -897.3 & -392.3 & -1038.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1038.8 & -8.5 & -959.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -959.9 & -148.1 & -1059.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1059.8 & 145.1 & -1092.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1092.5 & -1396.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{41} \\ X_{42} \\ X_{43} \\ X_{44} \\ X_{45} \\ X_{46} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-414.6X_{41} - 897.3X_{42} = 0 \quad (3.34)$$

$$-897.3X_{41} - 392.3X_{42} - 1038.8X_{43} = 0 \quad (3.35)$$

$$-1038.8X_{42} - 8.5X_{43} - 959.9X_{44} = 0 \quad (3.36)$$

$$-959.9X_{43} - 148.1X_{44} - 1059.8X_{45} = 0 \quad (3.37)$$

$$-1059.8X_{44} + 145.1X_{45} - 1092.5X_{46} = 0 \quad (3.38)$$

$$-1092.5X_{45} - 1396.5X_{46} = 0 \quad (3.39)$$

Para obtener el vector modal  $X_4 = [X_{41} X_{42} X_{43} X_{44} X_{45} X_{46}]^T$  es necesario resolver el sistema formado por (3.34)-(3.39), teniendo como solución

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0.5533 \\ -0.2580 \\ -0.3795 \\ 0.2840 \\ 0.3030 \\ -0.2363 \end{bmatrix}$$

Desarrollando (3.15) para  $\omega_5 = 7.6941 \text{ Hz} = 48.3434 \text{ rad/s}$ , resulta

$$\begin{bmatrix} -1401.8 & -897.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -897.3 & -1452.7 & -1038.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1038.8 & -922.7 & -959.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -959.9 & -1135.3 & -1059.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1059.8 & -769 & -1092.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1092.5 & -2530 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{51} \\ X_{52} \\ X_{53} \\ X_{54} \\ X_{55} \\ X_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-1401.8X_{51} - 897.3X_{52} = 0 \quad (3.40)$$

$$-897.3X_{51} - 1452.7X_{52} - 1038.8X_{53} = 0 \quad (3.41)$$

$$-1038.8X_{52} - 922.7X_{53} - 959.9X_{54} = 0 \quad (3.42)$$

$$-959.9X_{53} - 1135.3X_{54} - 1059.8X_{55} = 0 \quad (3.43)$$

$$-1059.8X_{54} - 769X_{55} - 1092.5X_{56} = 0 \quad (3.44)$$

$$-1092.5X_{55} - 2530X_{56} = 0 \quad (3.45)$$

Para obtener el vector modal  $X_5 = [X_{51} X_{52} X_{53} X_{54} X_{55} X_{56}]^T$  es necesario resolver el sistema formado por (3.40)-(3.45), teniendo como solución

$$X_5 = \begin{bmatrix} 0.2963 \\ -0.4601 \\ 0.3834 \\ 0.1325 \\ -0.4881 \\ 0.2116 \end{bmatrix}$$

Desarrollando (3.15) para  $\omega_6 = 8.557 \text{ Hz} = 53.8908 \text{ rad/s}$ , resulta

$$\begin{bmatrix} -2167.4 & -897.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -897.3 & -2275 & -1038.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1038.8 & -1631.6 & -959.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -959.9 & -1901 & -1059.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1059.8 & -1478 & -1092.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1092.5 & -3409 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{61} \\ X_{62} \\ X_{63} \\ X_{64} \\ X_{65} \\ X_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2167.4X_{61} - 897.3X_{62} = 0 \quad (3.46)$$

$$-897.3X_{61} - 2275X_{62} - 1038.8X_{63} = 0 \quad (3.47)$$

$$-1038.8X_{62} - 1631.6X_{63} - 959.9X_{64} = 0 \quad (3.48)$$

$$-959.9X_{63} - 1901X_{64} - 1059.8X_{65} = 0 \quad (3.49)$$

$$-1059.8X_{64} - 1478X_{65} - 1092.5X_{66} = 0 \quad (3.50)$$

$$-1092.5X_{65} - 3409X_{66} = 0 \quad (3.51)$$

Para obtener el vector modal  $X_6 = [X_{61} X_{62} X_{63} X_{64} X_{65} X_{66}]^T$  es necesario resolver el sistema formado por (3.46)-(3.51), teniendo como solución

$$X_6 = \begin{bmatrix} 0.1037 \\ -0.2490 \\ 0.4523 \\ -0.4936 \\ 0.4695 \\ -0.1511 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz modal de la estructura tipo edificio discretizada en seis grados de libertad se obtiene colocando cada modo de vibración como columna, esto es

$$X = [ X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_5 \quad X_6 ]$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.1235 & 0.3371 & 0.4552 & 0.5533 & 0.2963 & 0.1037 \\ 0.2340 & 0.4823 & 0.2492 & -0.2580 & -0.4601 & -0.2490 \\ 0.3166 & 0.3738 & -0.2540 & -0.3795 & 0.3834 & 0.4523 \\ 0.3898 & 0.0871 & -0.4893 & 0.2840 & 0.1325 & -0.4936 \\ 0.4366 & -0.2111 & -0.1197 & 0.3030 & -0.4881 & 0.4695 \\ 0.4624 & -0.4164 & 0.3668 & -0.2363 & 0.2116 & -0.1511 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Debido a que la matriz modal es no singular, es decir,  $\det \neq 0$ , se verifica que

$$\det X = \det \begin{bmatrix} 0.1235 & 0.3371 & 0.4552 & 0.5533 & 0.2963 & 0.1037 \\ 0.2340 & 0.4823 & 0.2492 & -0.2580 & -0.4601 & -0.2490 \\ 0.3166 & 0.3738 & -0.2540 & -0.3795 & 0.3834 & 0.4523 \\ 0.3898 & 0.0871 & -0.4893 & 0.2840 & 0.1325 & -0.4936 \\ 0.4366 & -0.2111 & -0.1197 & 0.3030 & -0.4881 & 0.4695 \\ 0.4624 & -0.4164 & 0.3668 & -0.2363 & 0.2116 & -0.1511 \end{bmatrix} = -0.3953$$

### 3.3.1. Transformación a coordenadas modales

El análisis modal se basa en el supuesto de que una transformación de coordenadas originales o coordenadas físicas  $x \in R^n$  a coordenadas principales o modales  $q \in R^n$ , se realiza por medio de la siguiente ecuación

$$x = Xq \quad (3.53)$$

donde  $X$  es la matriz modal del sistema y  $q(t)$  es el vector de amplitudes modales. A la relación (3.53) se le llama superposición modal, descomposición modal o descomposición espectral. Debido a que  $X$  no depende del tiempo se tiene que  $\dot{x} = X\dot{q}$  y  $\ddot{x} = X\ddot{q}$ , sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.9), resulta

$$MX\ddot{q} + KXq = 0 \quad (3.54)$$

Ahora se premultiplica la ecuación (3.54) por la transpuesta de la matriz modal  $X^T$ , para obtener

$$X^T MX\ddot{q} + X^T KXq = 0 \quad (3.55)$$

$$\bar{M}\ddot{q} + \bar{K}q = 0, \quad q \in R^n \quad (3.56)$$

donde  $\bar{M} = X^T MX$  es la matriz de masa modal y  $\bar{K} = X^T KX$  es la matriz de rigidez modal, por lo tanto, para este caso, las matrices de masa modal y rigidez modal están dadas

por

$$\bar{M} = X^T M X$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\bar{K} = X^T K X$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 39.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 347.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 934.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1608.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2330.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2894.5 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

donde  $M$ ,  $K$  y  $X$  están dadas por las ecuaciones (3.10), (3.11) y (3.52), respectivamente.

### 3.3.2. Fuerzas modales

Si se considera el vector de fuerzas generalizadas en la ecuación (3.9), se tiene

$$M\ddot{x} + Kx = F(t)$$

reescribiendo (3.55), resulta

$$X^T M X \ddot{q} + X^T K X q = X^T F(t) \quad (3.59)$$

$$\bar{M} \ddot{q} + \bar{K} q = \bar{F} \quad q \in R^n \quad (3.60)$$

donde  $\bar{F} = X^T F$  es el vector de fuerzas modales, a las entradas de  $\bar{F}$  denotadas por  $f_i(t)$  se les llama fuerzas modales. En este caso como  $\ddot{z}(t) = 0.0299 \cos(5.5t)$ , entonces

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0.1235 & 0.3371 & 0.4552 & 0.5533 & 0.2963 & 0.1037 \\ 0.2340 & 0.4823 & 0.2492 & -0.2580 & -0.4601 & -0.2490 \\ 0.3166 & 0.3738 & -0.2540 & -0.3795 & 0.3834 & 0.4523 \\ 0.3898 & 0.0871 & -0.4893 & 0.2840 & 0.1325 & -0.4936 \\ 0.4366 & -0.2111 & -0.1197 & 0.3030 & -0.4881 & 0.4695 \\ 0.4624 & -0.4164 & 0.3668 & -0.2363 & 0.2116 & -0.1511 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -m_1 \ddot{z}(t) \\ -m_2 \ddot{z}(t) \\ -m_3 \ddot{z}(t) \\ -m_4 \ddot{z}(t) \\ -m_5 \ddot{z}(t) \\ -m_6 \ddot{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} -0.0804 \cos(5.5t) \\ -0.0248 \cos(5.5t) \\ -0.0125 \cos(5.5t) \\ -0.0088 \cos(5.5t) \\ -0.0033 \cos(5.5t) \\ -0.0009 \cos(5.5t) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

### 3.3.3. Ecuaciones de movimiento en coordenadas modales

Sustituyendo (3.61) en (3.60) y dividiendo cada ecuación entre el coeficiente de  $\ddot{q}_i$ , se obtienen las ecuaciones modales de movimiento

$$\begin{aligned}\bar{m}_i \ddot{q}_i + \bar{k}_i q_i &= \bar{f}_i(t) \\ \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i &= \frac{1}{m_i} \bar{f}_i(t) \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, 6\end{aligned}\quad (3.62)$$

Sustituyendo los valores numéricos y expresando la ecuación (3.62) en forma vectorial-matricial, se tiene

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) \\ \ddot{q}_4(t) \\ \ddot{q}_5(t) \\ \ddot{q}_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 39.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 347.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 934.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1608.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2330.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2894.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.0804 \cos(5.5t) \\ -0.0248 \cos(5.5t) \\ -0.0125 \cos(5.5t) \\ -0.0088 \cos(5.5t) \\ -0.0033 \cos(5.5t) \\ -0.0009 \cos(5.5t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.63)$$

Es evidente que el sistema formado por (3.63) consta de seis ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes no homogéneas desacopladas, es decir

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1(t) + 39.3q_1(t) &= -0.0804 \cos(5.5t) \\ \ddot{q}_2(t) + 347.6q_2(t) &= -0.0248 \cos(5.5t) \\ \ddot{q}_3(t) + 934.9q_3(t) &= -0.0125 \cos(5.5t) \\ \ddot{q}_4(t) + 1608.7q_4(t) &= -0.0088 \cos(5.5t) \\ \ddot{q}_5(t) + 2330.8q_5(t) &= -0.0033 \cos(5.5t) \\ \ddot{q}_6(t) + 2894.5q_6(t) &= -0.0009 \cos(5.5t)\end{aligned}$$

donde la solución de cada ecuación diferencial es la suma de su solución homogénea (la cual depende de las condiciones iniciales) y la solución particular, la cual depende de la fuerza aplicada a cada piso. Una vez que se tiene la solución modal del sistema (3.63), se puede transformar a coordenadas físicas por medio de la relación  $x = Xq$ .

### 3.3.4. Solución a las ecuaciones de movimiento modales

Es común que en el sistema formado por (3.63) sólo sea de interés la solución particular. Se sabe que la solución particular de una ecuación diferencial de la forma  $\ddot{x} + \omega^2 x = A \cos \Omega t$



es  $x_p = A \cos \Omega t / (\omega^2 - \Omega^2)$ , por lo tanto, las soluciones del sistema (3.63) son

$$\begin{aligned}
 q_1(t) &= -8.88 \times 10^{-3} \cos(5.5t) \\
 q_2(t) &= -7.81 \times 10^{-5} \cos(5.5t) \\
 q_3(t) &= -1.38 \times 10^{-5} \cos(5.5t) \\
 q_4(t) &= -5.57 \times 10^{-6} \cos(5.5t) \\
 q_5(t) &= -1.43 \times 10^{-6} \cos(5.5t) \\
 q_6(t) &= -3.14 \times 10^{-7} \cos(5.5t)
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Sustituyendo las soluciones de (3.64) en (3.53), se tiene

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0.1235 & 0.3371 & 0.4552 & 0.5533 & 0.2963 & 0.1037 \\ 0.2340 & 0.4823 & 0.2492 & -0.2580 & -0.4601 & -0.2490 \\ 0.3166 & 0.3738 & -0.2540 & -0.3795 & 0.3834 & 0.4523 \\ 0.3898 & 0.0871 & -0.4893 & 0.2840 & 0.1325 & -0.4936 \\ 0.4366 & -0.2111 & -0.1197 & 0.3030 & -0.4881 & 0.4695 \\ 0.4624 & -0.4164 & 0.3668 & -0.2363 & 0.2116 & -0.1511 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.88 \times 10^{-3} \cos(5.5t) \\ -7.81 \times 10^{-5} \cos(5.5t) \\ -1.38 \times 10^{-5} \cos(5.5t) \\ -5.57 \times 10^{-6} \cos(5.5t) \\ -1.43 \times 10^{-6} \cos(5.5t) \\ -3.14 \times 10^{-7} \cos(5.5t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -0.0113 \cos(5.5t) \\ -0.021 \cos(5.5t) \\ -0.028 \cos(5.5t) \\ -0.034 \cos(5.5t) \\ -0.038 \cos(5.5t) \\ -0.041 \cos(5.5t) \end{bmatrix} m \tag{3.65}$$

### 3.4. Caso de estudio

Se diseñó y construyó una estructura tipo edificio de 6 niveles con placa y solera de aluminio. En la Fig. 3.2 se muestra la plataforma experimental con la estructura tipo edificio de 6 niveles y un absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever colocada sobre el último (sexto) piso.

#### 3.4.1. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento del sistema de siete grados de libertad que consiste en la estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever se obtienen por medio de la formulación Euler-Lagrange, donde el lagrangiano del sistema está dado por

$$L = T_{\text{primario}} + T_{V\text{catilever}} - V_{\text{primario}} - V_{V\text{catilever}} \tag{3.66}$$

donde los dos primeros términos en (4.1) corresponden a la energías cinéticas del sistema primario y del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever, respectivamente y los



Figura 3.2: Estructura tipo edificio de 6 niveles (sistema primario de 6 gdl) con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever.

términos restantes corresponden a las energías potenciales de ambos subsistemas.

$$T_{\text{primario}} = \frac{1}{2} (m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2 + m_4\dot{x}_4^2 + m_5\dot{x}_5^2 + m_6\dot{x}_6^2) \quad (3.67)$$

$$V_{\text{primario}} = \frac{1}{2} (k_1x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3(x_3 - x_2)^2 + k_4(x_4 - x_3)^2 + k_5(x_5 - x_4)^2 + k_6(x_6 - x_5)^2) \quad (3.68)$$

$$T_{V_{\text{catilever}}} = \frac{1}{2}m_7\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_7(\dot{w} - \dot{x}_6)^2 \quad (3.69)$$

$$V_{V_{\text{catilever}}} = \left( \frac{3EI}{2L^3} \right) y^2 \quad (3.70)$$

donde  $w = \frac{3y^2}{5L}$  representa el desplazamiento axial (contracción) de la masa  $m_4$ , a través de la dirección de la excitación en la base, la cual está directamente relacionada con el desplazamiento lateral  $y$  de la misma masa. Desarrollando las ecuaciones *Euler-Lagrange* y considerando amortiguamiento viscoso y fuerzas externas debido a la aceleración en la base, la dinámica de la estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever está representada por las siguientes ecuaciones (Chopra [22], Roberts [62])

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = -m_1\ddot{z} \quad (3.71)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = -m_2\ddot{z} \quad (3.72)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 - k_3x_2 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4x_4 = -m_3\ddot{z} \quad (3.73)$$

$$m_4\ddot{x}_4 + c_4\dot{x}_4 - k_4x_3 + (k_4 + k_5)x_4 - k_5x_5 = -m_4\ddot{z} \quad (3.74)$$

$$m_5\ddot{x}_5 + c_5\dot{x}_5 - k_5x_4 + (k_5 + k_6)x_5 - k_6x_6 = -m_5\ddot{z} \quad (3.75)$$

$$(m_6 + m_7)\ddot{x}_6 + c_6\dot{x}_6 + k_6x_6 - \frac{6m_7}{5L}(y\ddot{y} + \dot{y}^2) - k_6x_5 = m_6\ddot{z} \quad (3.76)$$

$$m_7\ddot{y} + c_7\dot{y} + \left( \frac{3EI}{L^3} - \frac{6m_6}{5L}\ddot{x}_3 \right) y + \frac{36m_7}{25L^2}(y\ddot{y} + \dot{y}^2) = 0 \quad (3.77)$$

### 3.4.2. Resultados experimentales

Los parámetros del sistema completo se muestran en la Tabla III.

Tabla III. Parámetros del sistema.			
$m_1 = 1.35kg$	$m_2 = 1.45kg$	$m_3 = 1.25kg$	$m_4 = 1.35kg$
$m_5 = 1.25kg$	$m_6 = 1.908kg$	$m_7 = 0.25kg$	$k_1 = 855.92N/m$
$k_2 = 897.33N/m$	$k_3 = 1038.77N/m$	$k_4 = 959.91N/m$	$k_5 = 1059.82N/m$
$k_6 = 1092.49N/m$	$k_{\text{viga}} = 9.2423N/m$	$c_1 = 0.0161N/(m/s)$	$c_2 = 0.0024N/(m/s)$
$c_3 = 0.0022N/(m/s)$	$c_4 = 0.0012N/(m/s)$	$c_5 = 0.0089N/(m/s)$	$c_6 = 0.0043N/(m/s)$
$c_7 = 0.032N/(m/s)$	$L_{\text{viga}} = 0.5745m$	$I_{\text{viga}} = 8.4682 \times 10^{-12}m^4$	$E = 69GPa$

La Fig. 3.3 muestra la función de respuesta frecuencial experimental de la estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever, en la cual se obtienen los

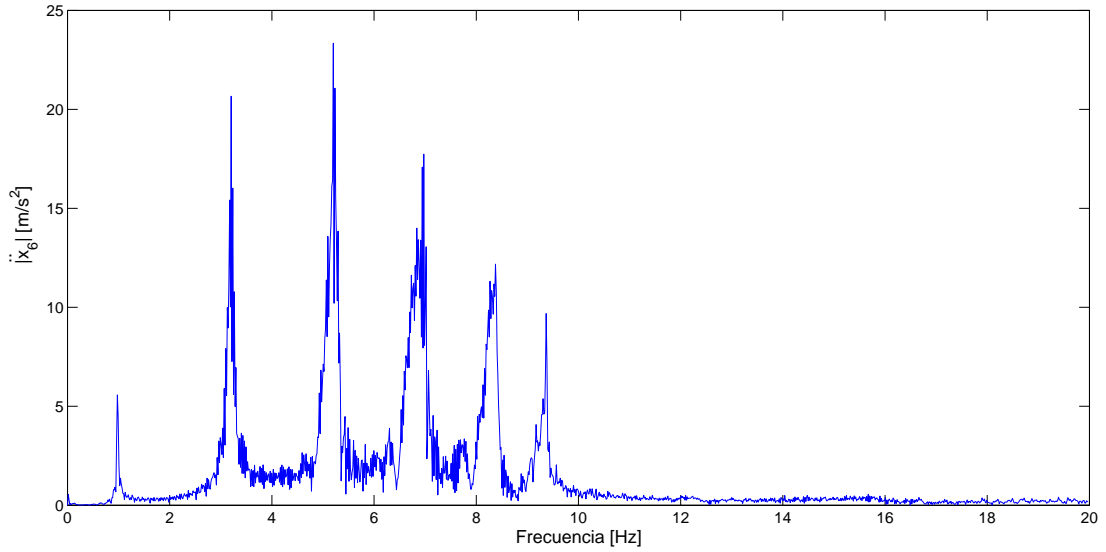


Figura 3.3: FRF experimental de la estructura tipo edificio con seis pisos.

valores de  $\omega_{n1} = 0.9766Hz$ ,  $\omega_{n2} = 3.204Hz$ ,  $\omega_{n3} = 5.203Hz$ ,  $\omega_{n4} = 6.973Hz$ ,  $\omega_{n5} = 8.377Hz$  y  $\omega_{n6} = 9.369Hz$  que corresponden a las frecuencias naturales de la estructura tipo edificio discretizada en 6 gdl.

En la Fig. 3.4 se muestra la respuesta dinámica de la estructura tipo edificio cuando no se presenta interacción autoparamétrica. Las amplitudes en estado estable del primer, segundo, tercer, cuarto, quinto y sexto piso son  $x_1(t) = 0.0085m$ ,  $x_2(t) = 0.0147m$ ,  $x_3(t) = 0.0205m$ ,  $x_4(t) = 0.0237m$ ,  $x_5(t) = 0.0265m$  y  $x_6(t) = 0.0305m$  respectivamente.

En la Fig. 3.5 se muestra la respuesta en el tiempo de cada uno de los pisos cuando se implementa el absorbedor autoparamétrico a la estructura tipo edificio de 6 pisos, la frecuencia de sintonización del absorbedor es  $\omega_{n7} = 0.763Hz$  que es la mitad de  $\omega_{n1}$ . Las amplitudes en estado estable cuando se presenta interacción autoparamétrica son  $x_1(t) = 1.6mm$ ,  $x_2(t) = 1.7mm$ ,  $x_3(t) = 2.5mm$ ,  $x_4(t) = 2.9mm$ ,  $x_5(t) = 4.5mm$  y  $x_6(t) = 7.17mm$ . Los porcentajes de absorción de vibraciones para este caso son 81 %, 88.4 %, 87.8 %, 87.7 %, 83 % y 76.5 % para el primer, segundo, tercer, cuarto, quinto y sexto piso respectivamente.

En la Fig. 3.6 se muestra la respuesta en el tiempo del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever cuando existe absorción de vibración en el sistema primario, teniendo amplitudes en estado estable  $y(t) = 0.0803m$ . En la Fig. 3.7 se muestra la FFT del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever, donde el valor de su frecuencia natural es de  $\omega_7 \approx 0.48Hz$ , con lo cual se satisface que  $\Omega = \omega_1 = 0.5\omega_7$ .

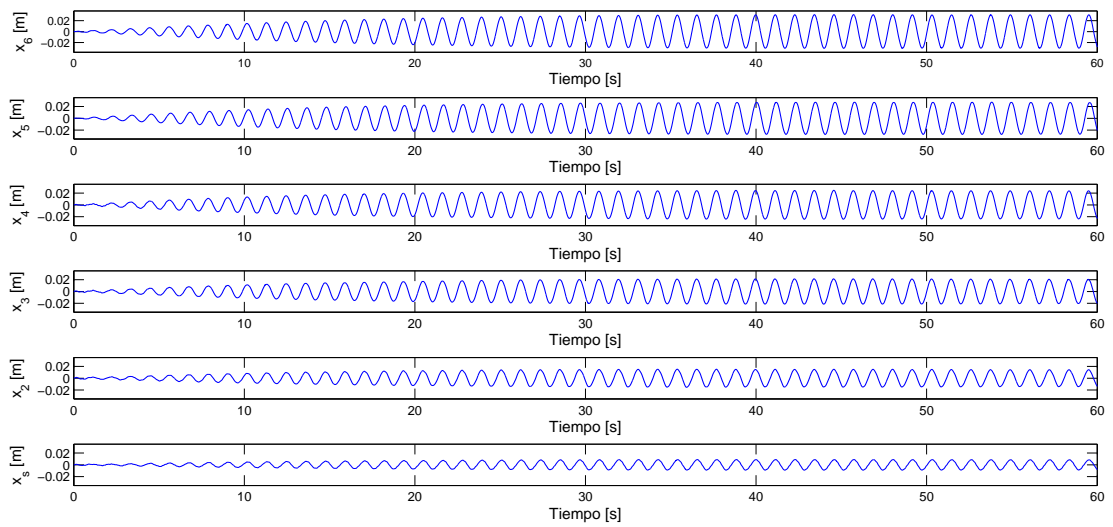


Figura 3.4: Respuesta dinámica del sistema primario sin interacción autoparamétrica.

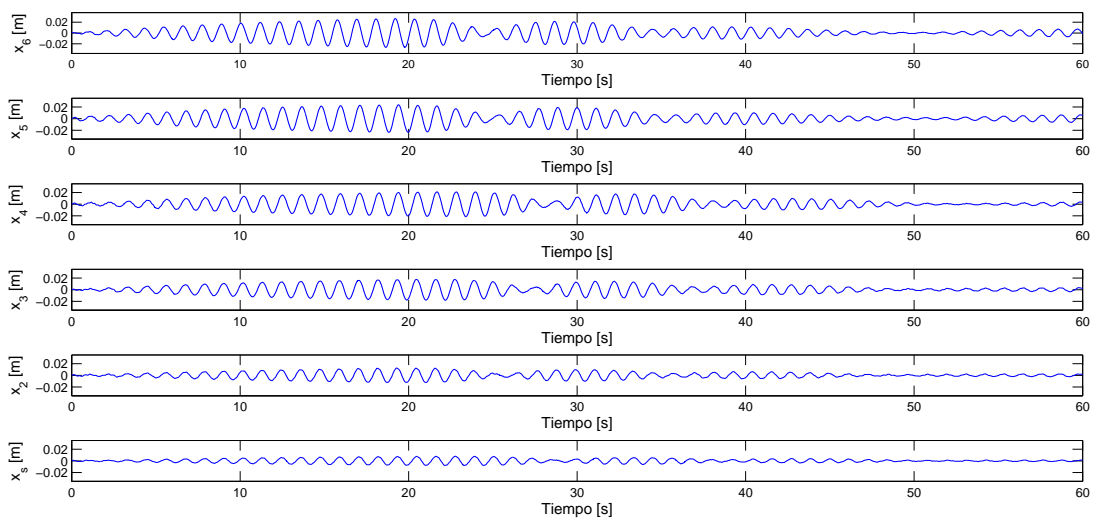


Figura 3.5: Respuesta dinámica del sistema primario con interacción autoparamétrica.

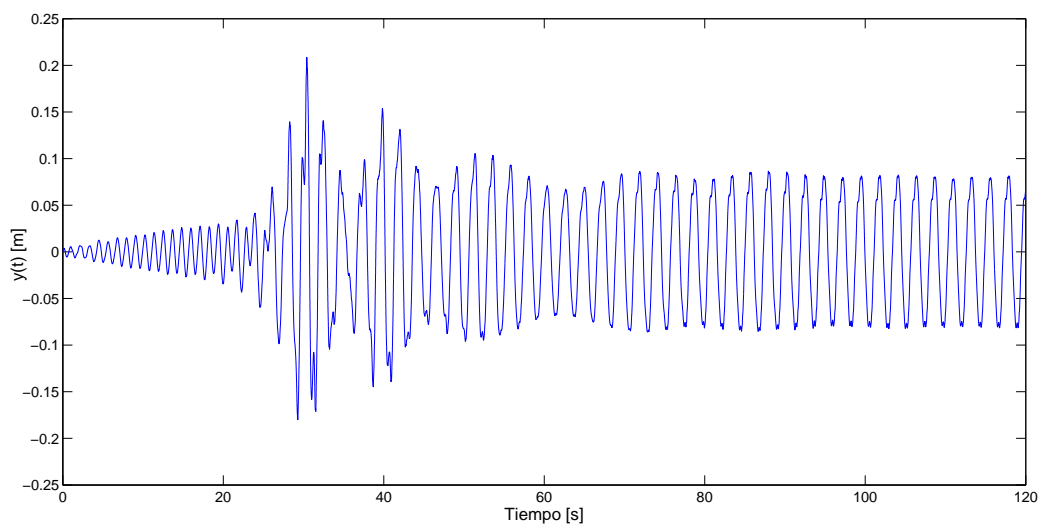


Figura 3.6: Respuesta dinámica del sistema secundario cuando se presenta interacción autoparamétrica.

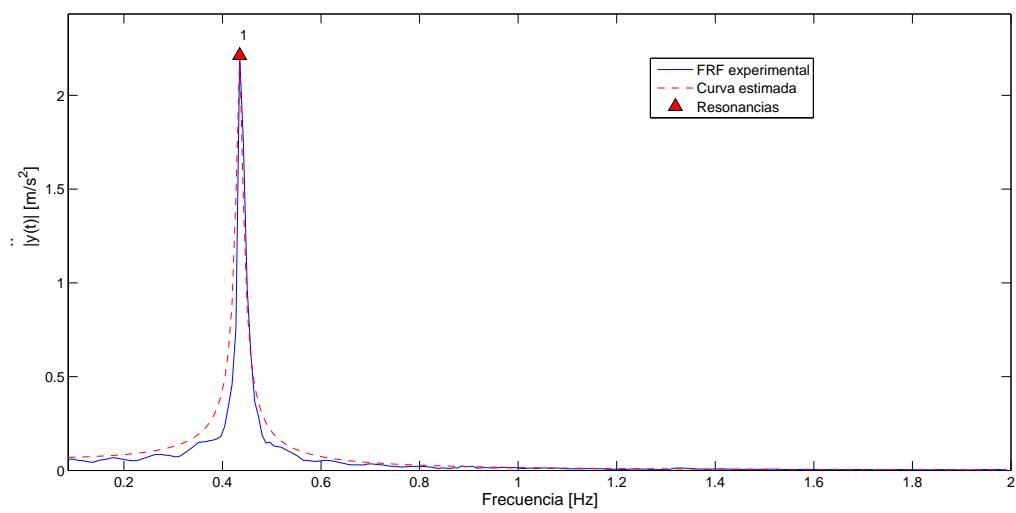


Figura 3.7: FRF experimental del sistema secundario cuando se presenta interacción autoparamétrica.

### 3.5. Aplicación de un absorbedor de vibraciones tipo pendular

El absorbedor dinámico de vibraciones (DVA, por sus siglas en inglés) es un dispositivo de control pasivo de vibraciones mecánicas que aprovecha la dinámica de los sistemas acoplados elásticamente con el fin de reducir los niveles de vibración en una parte del mismo a costa de aumentarla en otra. El DVA actúa a una frecuencia específica por sus parámetros característicos, como son su constante de rigidez  $k$ , de amortiguamiento  $c$  y masa  $m$ , lo cual implica que la reducción se produce en un cierto rango de frecuencias alrededor de la frecuencia de interés. Debido a este comportamiento se elige cuidadosamente la frecuencia de sintonización. En la mayoría de las aplicaciones se trata de alguna de las primeras frecuencias resonantes del sistema primario, dado que suelen ser las que mayor amplitud presentan en la respuesta dinámica.

En esta sección se implementa un DVA en forma pendular para la estructura tipo edificio discretizada en 6  $gdl$ , la sintonización de este absorbedor con el sistema primario se consigue por medio del análisis desarrollado en la sección 3.1. Los parámetros asociados al sistema secundario son longitud  $L$  y masa  $m_4$ , para medir los desplazamientos angulares del péndulo se utiliza un decodificador óptico rotacional marca *US Digital*<sup>®</sup>.

#### 3.5.1. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento del sistema de siete grados de libertad que consiste en la estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever se obtienen por medio de la formulación Euler-Lagrange, donde el lagrangiano del sistema está dado por

$$L = T_{\text{primario}} + T_{\text{péndulo}} - V_{\text{primario}} - V_{\text{péndulo}} \quad (3.78)$$

donde los dos primeros términos de lado derecho de la igualdad en (3.78) están dados por (3.67) y (3.68). Las expresiones para la energía tanto cinética como potencial para el absorbedor pendular son

$$\begin{aligned} T_{\text{péndulo}} &= \frac{1}{2}(m_6 + m_7)\dot{x}_6^2 + m_7L\dot{x}_6\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}m_7L^2\dot{\theta}^2 \\ V_{\text{péndulo}} &= m_7gL(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Desarrollando las ecuaciones Euler-Lagrange y considerando amortiguamiento viscoso, desplazamiento angular pequeño ( $\sin \theta \simeq \theta$  y  $\cos \theta \simeq 1$ ) y fuerzas externas debido a la aceleración en la base, la dinámica de la estructura tipo edificio con absorbedor tipo pendular está



Figura 3.8: Sistema primario de 6 gdl con absorbedor tipo pendular.



representada por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 &= -m_1\ddot{z} \\
m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 &= -m_2\ddot{z} \\
m_3\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 - k_3x_2 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4x_4 &= -m_3\ddot{z} \\
m_4\ddot{x}_4 + c_4\dot{x}_4 - k_4x_3 + (k_4 + k_5)x_4 - k_5x_5 &= -m_4\ddot{z} \\
m_5\ddot{x}_5 + c_5\dot{x}_5 - k_5x_4 + (k_5 + k_6)x_5 - k_6x_6 &= -m_5\ddot{z} \\
(m_6 + m_7)\ddot{x}_3 + m_7L\ddot{\theta} + c_6\dot{x}_3 - k_6x_5 + k_6x_6 &= -m_6\ddot{z} \\
m_7L^2\ddot{\theta} + m_7L\ddot{x}_6 + c_7\dot{\theta} + m_7gL\theta &= 0
\end{aligned}$$

### 3.5.2. Resultados experimentales

Los parámetros del sistema completo se muestran en la Tabla IV.

$m_1 = 1.35kg$	$m_2 = 1.45kg$	$m_3 = 1.25kg$	$m_4 = 1.35kg$
$m_5 = 1.25kg$	$m_6 = 2.943kg$	$m_7 = 0.297kg$	$k_1 = 855.92N/m$
$k_2 = 897.33N/m$	$k_3 = 1038.77N/m$	$k_4 = 959.91N/m$	$k_5 = 1059.82N/m$
$k_6 = 1092.49N/m$	$L = N/m$	$c_1 = 0.0161N/(m/s)$	$c_2 = 0.0024N/(m/s)$
$c_3 = 0.0022N/(m/s)$	$c_4 = 0.0012N/(m/s)$	$c_5 = 0.0089N/(m/s)$	$c_6 = 0.0043N/(m/s)$
$c_7 = 0.153N/(m/s)$			

En la Fig. 3.9 se muestra la respuesta dinámica de la estructura tipo edificio sin absorbedor pendular con amplitudes en estado estable de  $x_1(t) = 10.58mm$ ,  $x_2(t) = 15.85mm$ ,  $x_3(t) = 20.61mm$ ,  $x_4(t) = 23.86mm$ ,  $x_5(t) = 25.28mm$  y  $x_6(t) = 27.18mm$ . La respuesta dinámica del sistema primario con absorbedor pendular se muestra en la Fig. 3.10, las amplitudes en estado estable de cada uno de los pisos son:  $x_1(t) = 0.57mm$ ,  $x_2(t) = 1.33mm$ ,  $x_3(t) = 1.61mm$ ,  $x_4(t) = 2.04mm$ ,  $x_5(t) = 2.55mm$  y  $x_6(t) = 3.34mm$ . Los porcentajes de absorción son: 94.61 %, 91.6 %, 92.18 %, 91.45 %, 90 % y 87.71 %. La respuesta dinámica del sistema secundario cuando se presenta absorción de vibración se muestra en la Fig. 3.11 con amplitudes en estado estacionario de  $\theta(t) = 0.22rad$ .

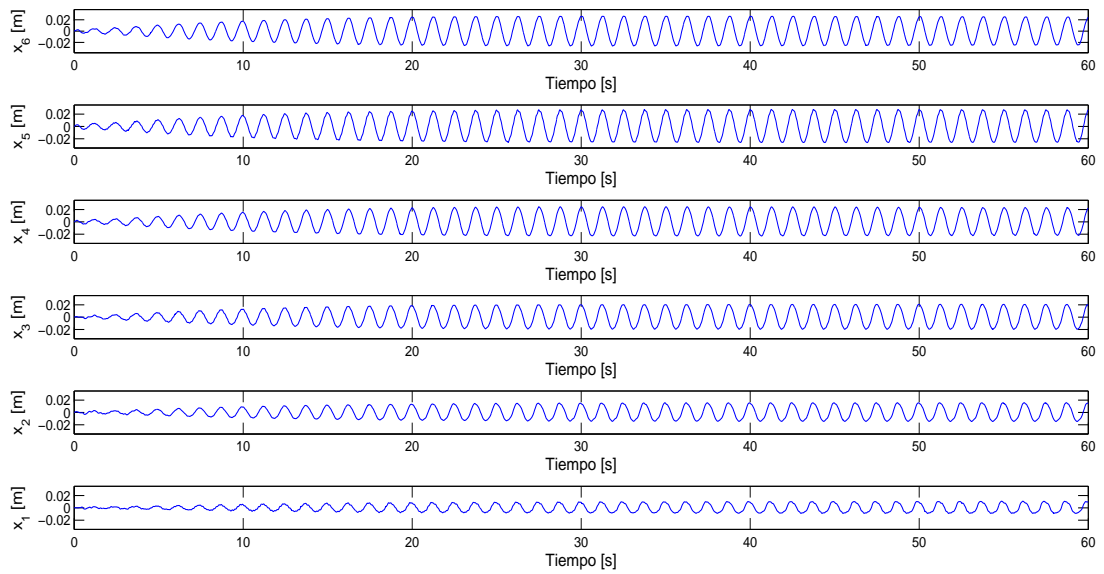


Figura 3.9: Respuesta dinámica del sistema primario sin absorbedor pendular.

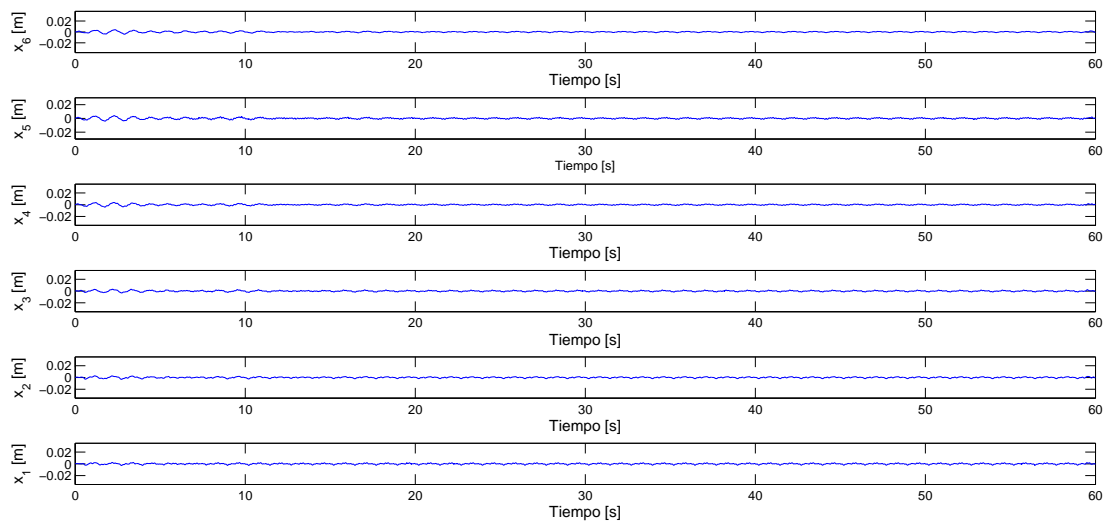


Figura 3.10: Respuesta dinámica del sistema primario con absorbedor pendular.

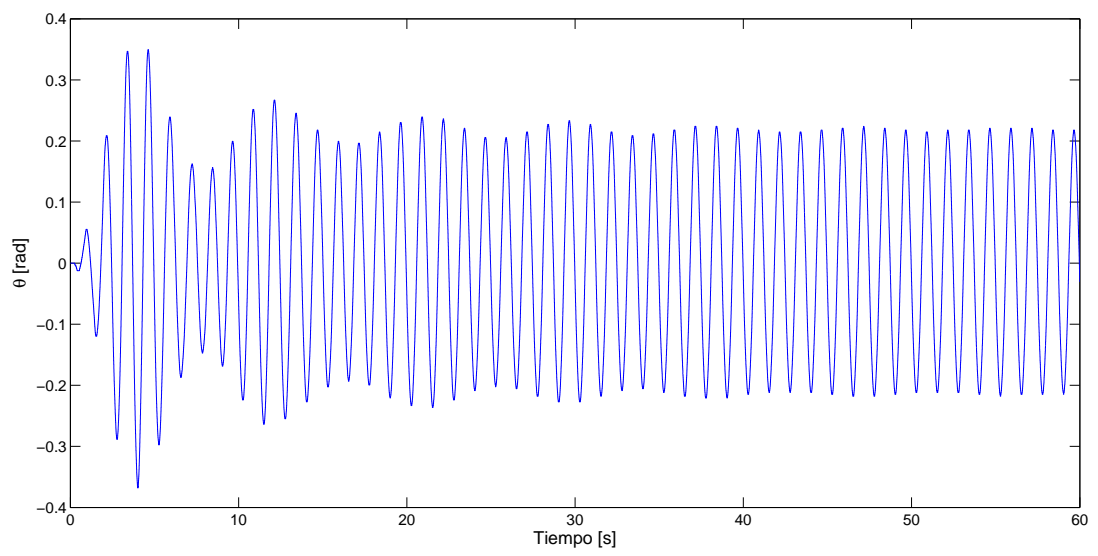


Figura 3.11: Respuesta dinámica del absorbidor pendular.

# Capítulo 4

## Evaluación de esquemas de absorción pasiva de vibraciones en una estructura tipo edificio

### 4.1. Introducción

Los dispositivos para control pasivo de vibraciones combinan masas, resortes y amortiguadores para modificar la estructura del sistema original. Este método no emplea ninguna retroalimentación de la información del sistema (control en lazo abierto) ni tampoco fuentes externas de energía, por lo cual solo puede usarse para compensar vibraciones en una banda pequeña de frecuencias de excitación, siendo inconvenientes en operación cerca de las frecuencias resonantes. Los absorbedores de vibraciones son entonces dispositivos que generan fuerzas inerciales o elásticas con la finalidad de reducir los niveles de la respuesta, producida por el efecto de las vibraciones externas (o internas), que afectan a un sistema o estructura mecánica.

En la mayoría de los casos un absorbedor consta de masas adicionales, conectadas mediante elementos elásticos (resortes) y/o amortiguadores (amortiguamiento de tipo viscoso o de material) al sistema o estructura que necesita protección y ocasionalmente conectadas en forma directa sobre maquinaria rotatoria desbalanceada (fuente endógena de vibraciones). Algunas configuraciones de absorbedores permiten que las masas describan movimientos oscilatorios como en los péndulos.

La principal aplicación de los absorbedores de vibración no ha cambiado considerablemente desde hace mucho tiempo, pues los absorbedores todavía se utilizan para suprimir o atenuar vibraciones en un ancho de banda reducido, pero de manera simple y económica. La mayoría de las aplicaciones son para problemas de una sola frecuencia de excitación y en estado estacionario, tales como desbalances en maquinaria rotatoria y numerosas aplicaciones de tipo industrial. Los problemas de vibraciones mecánicas que se pueden resolver utilizando este tipo de absorbedores se dividen en dos categorías. La primera es la de vibraciones forzadas, en la cual una estructura está sometida a excitaciones armónicas indeseables, tales como el desbalance rotatorio. Estos son problemas comunes que se pueden resolver con el

empleo de absorbedores pasivos de vibraciones. El segundo tipo de problemas involucra comportamientos resonantes, en los cuales una estructura se somete a frecuencias de excitación en una banda ancha, pero solamente una frecuencia debe ser atenuada o controlada con cuidado, es decir, la frecuencia resonante. Ambos problemas se resuelven con métodos clásicos de absorción pasivo de vibraciones, ya sea agregando grados de libertad (absorbedores) o mediante la modificación estructural directa del sistema.

En este capítulo se utiliza el trabajo realizado en la sección anterior para el control pasivo de una estructura tipo edificio de tres pisos (sistema primario) empleando diferentes absorbedores de vibración. El sistema primario se discretiza en tres grados de libertad, el cual tiene masas concentradas en cada piso conectadas por medio de columnas de aluminio. La parte de control pasivo a esta estructura mecánica se realiza con la implementación de cinco diferentes esquemas de absorción, los cuales son:

- Absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever.
- Absorbedor autoparamétrico tipo pendular.
- Absorbedor dinámico de vibración (DVA) tipo masa-resorte-amortiguador.
- Absorbedor tipo viga configurado como un DVA.
- Absorbedor tipo pendular configurado como un DVA.

La idea general es realizar un análisis comparativo en la respuesta del sistema primario desde el punto de vista energético, frecuencial y dinámico empleando los esquemas de absorción antes mencionados.

## 4.2. Sistema primario de 3 gdl

El sistema primario consiste en una estructura tipo edificio con tres pisos rígidos conectados entre ellos por medio de columnas flexibles de aluminio. las masas asociadas a cada uno de los pisos se denotan por  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ . La rigidez equivalente de la columna entre pisos se calcula considerando cuatro columnas en paralelo con rigidez lateral individual  $\frac{12EI_{col}}{h^3}$ , donde  $E$  es el módulo de Young del material (aluminio),  $I_{col}$  es el momento de inercia de área y  $h$  es la altura del perfil de la columna (Chopra [22]). Las coordenadas generalizadas asociadas a los desplazamientos laterales de cada piso son  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$ , para medir dichos desplazamientos se coloca un acelerómetro marca kistler en cada uno de los pisos. La excitación del sistema completo es por medio de una aceleración externa armónica de la forma  $\ddot{z}(t) = z_0 \text{sen} \Omega t$ , con amplitud  $z_0$  y frecuencia de excitación  $\Omega$ , la cual se proporciona a la base del sistema primario por medio de un actuador electromagnético (shaker). Para medir la excitación suministrada al sistema se utiliza una cabeza de impedancia marca kistler, con la cual se puede sensar tanto aceleración ( $\ddot{z}(t)$ ) como fuerza ( $f(t)$ ) presente en la base de la estructura tipo edificio. La Fig. 4.1 muestra los tres primeros modos laterales de la estructura tipo edificio obtenidos con ANSYS<sup>®</sup>.

### 4.3. CASO 1: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR AUTOPARAMÉTRICO TIPO VIGA EN CANTILEVER

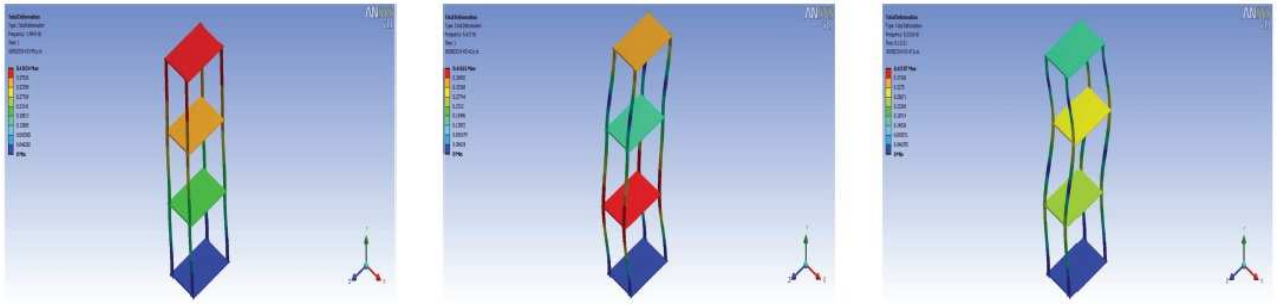


Figura 4.1: Modos del sistema primario obtenidos con ANSYS, donde  $\omega_1 = 1.99Hz$ ,  $\omega_2 = 5.61Hz$  y  $\omega_3 = 8.21Hz$

## 4.3. Caso 1: Evaluación de un absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever

### 4.3.1. Descripción del sistema

En la Fig. 4.2 se muestra la plataforma experimental donde al sistema primario se le acopla un absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever, el cual contiene una masa en el extremo libre de la viga cuyo desplazamiento es adquirido por medio de un acelerómetro. La dinámica de la viga está restringido a un plano horizontal. (se desprecian los efectos debido a la gravedad).

### Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento del sistema de cuatro grados de libertad que consiste en la estructura tipo edificio de tres grados de libertad con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever se obtienen por medio de la formulación Euler-Lagrange, donde el lagrangiano está dado por

$$L = T_{primario} + T_{Vcatilever} - V_{primario} - V_{Vcatilever} \quad (4.1)$$

donde los dos primeros términos en 4.1 corresponden a la energías cinéticas del sistema primario y del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever, respectivamente y los términos restantes corresponden a las energías potenciales de ambos subsistemas.

$$T_{primario} = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) \quad (4.2)$$

$$V_{primario} = \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 (x_3 - x_2)^2) \quad (4.3)$$

$$T_{Vcatilever} = \frac{1}{2} m_4 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_4 (\dot{w} - \dot{x}_3)^2 \quad (4.4)$$

$$V_{Vcatilever} = \left( \frac{3EI}{2L^3} \right) y^2 \quad (4.5)$$



Figura 4.2: Estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever.

### 4.3. CASO 1: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR AUTOPARAMÉTRICO TIPO VIGA EN CANTILEVER

donde  $w = \frac{3y^2}{5L}$  representa el desplazamiento axial (contracción) de la masa  $m_4$ , através de la dirección de la excitación en la base, la cual está directamente relacionada con el desplazamiento lateral  $y$  de la misma masa. Desarrollando las ecuaciones Euler-Lagrange y considerando amortiguamiento viscoso y fuerzas externas debido a la aceleración en la base, la dinámica de la estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever está representada por las siguientes ecuaciones (Chopra [22], Roberts [62]):

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = -m_1\ddot{z} \quad (4.6)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = -m_2\ddot{z} \quad (4.7)$$

$$(m_3 + m_4)\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 + k_3x_3 - \frac{6m_4}{5L}(y\ddot{y} + \dot{y}^2) - k_3x_2 = m_3\ddot{z} \quad (4.8)$$

$$m_4\ddot{y} + c_4\dot{y} + \left( \frac{3EI}{L^3} - \frac{6m_3}{5L}\ddot{x}_3 \right) y + \frac{36m_4}{25L^2}y(y\ddot{y} + \dot{y}^2) = 0 \quad (4.9)$$

donde  $x_1, x_2, x_3, y$  denotan el movimiento longitudinal de cada uno de los pisos del sistema primario y el desplazamiento lateral del absorbedor pasivo tipo viga en cantilever, respectivamente. La aceleración armónica está dada por  $\ddot{z} = -\Omega^2 z_0 \cos \Omega t$ , donde la frecuencia de excitación es una de las resonancias paramétricas principales del sistema primario, en este caso,  $\Omega = \omega_1$ . Los parámetros asociados al absorbedor autoparamétrico utilizado son: longitud de la viga ( $L$ ), Momento de inercia de área de la sección transversal de la viga ( $I$ ), Modulo de elasticidad del material ( $E$ ), masa en el extremo de la viga ( $m_4$ ) y coeficiente de amortiguamiento viscoso ( $c_4$ ).

Para que se presente interacción autoparamétrica entre la estructura tipo edificio y el absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever, se deben de satisfacer las siguientes condiciones de sintonización frecuencial entre ambos subsistemas.

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega_j \quad \text{con } j = 1, 2, 3 \\ \omega_j &= 2\omega_4 \end{aligned}$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia de excitación en el movimiento de la base,  $\omega_j$  es la  $j$ -ésima frecuencia natural de la estructura tipo edificio y  $\omega_4$  es la frecuencia natural del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever.

El sistema no lineal formado por (4.6)-(4.9) se puede representar en forma de la ecuación (2.12), donde

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 + m_4 & -\frac{6m_4}{5L}y \\ 0 & 0 & -\frac{6m_4}{5L}y & m_4 \left( 1 + \frac{36}{25L^2}y^2 \right) \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -\frac{6m_4}{5L}\dot{y} \\ 0 & 0 & 0 & c_4 + \frac{36m_4}{25L^2}y\dot{y} \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$



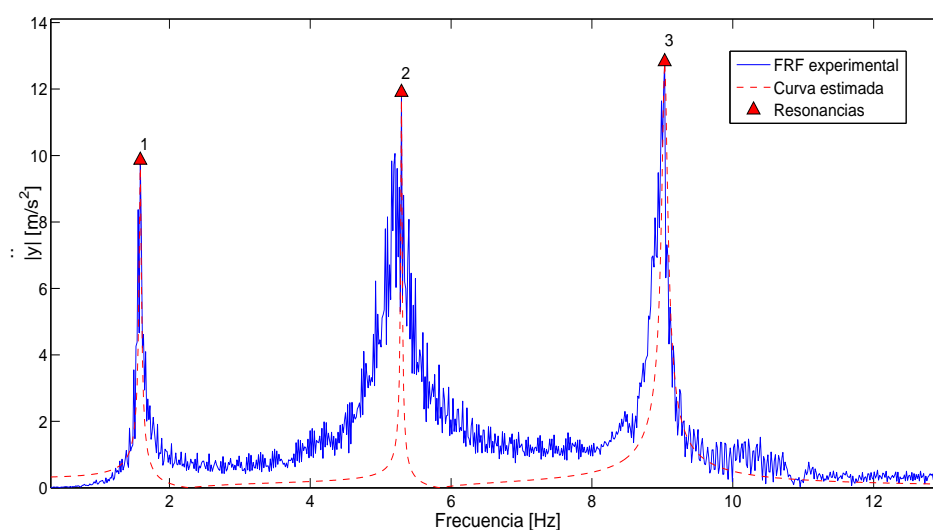


Figura 4.3: FRF Experimental del sistema primario con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever.

Es importante notar que en (4.10) existen acoplamientos no lineales tanto en la matriz de masa como en el vector que contiene los términos centrífugos y de Coriolis, lo cual es característico de los sistemas mecánicos de tipo autoparamétrico.

### 4.3.2. Resultados experimentales

Los parámetros del sistema completo se muestran en la Tabla V.

$m_1 = 1.03kg$	$m_2 = 1.014kg$	$m_3 = 1.7kg$	$m_4 = 0.361kg$
$k_1 = 897.02N/m$	$k_2 = 897.02N/m$	$k_3 = 888.23N/m$	$k_{viga} = 8.98N/m$
$c_1 = 0.1233N/(m/s)$	$c_2 = 0.3345N/(m/s)$	$c_3 = 1.8977N/(m/s)$	$c_{viga} = 0.039N/(m/s)$
$L = 0.58m$	$I_{viga} = 8.46 \times 10^{-12}m^4$	$E = 69GPa$	$A = 4.03 \times 10^{-5}m^2$

La Fig. 4.3 muestra la función de respuesta frecuencial experimental de la estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico tipo pendular, en la cual se obtienen los valores de  $\omega_{n1} = 1.587Hz$ ,  $\omega_{n2} = 5.295Hz$  y  $\omega_{n3} = 9.033Hz$ , que corresponden a las frecuencias naturales de cada uno de los pisos respectivamente. Es importante señalar, que a pesar de que el sistema completo es de 4 gdl, en la función de respuesta frecuencial sólo aparecen 3 frecuencias naturales.

En la Fig. 4.4 se muestra la energía en el sistema primario con y sin absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever, el porcentaje de absorción es cercano al 96 %. La Fig.

### 4.3. CASO 1: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR AUTOPARAMÉTRICO TIPO VIGA EN CANTILEVER.

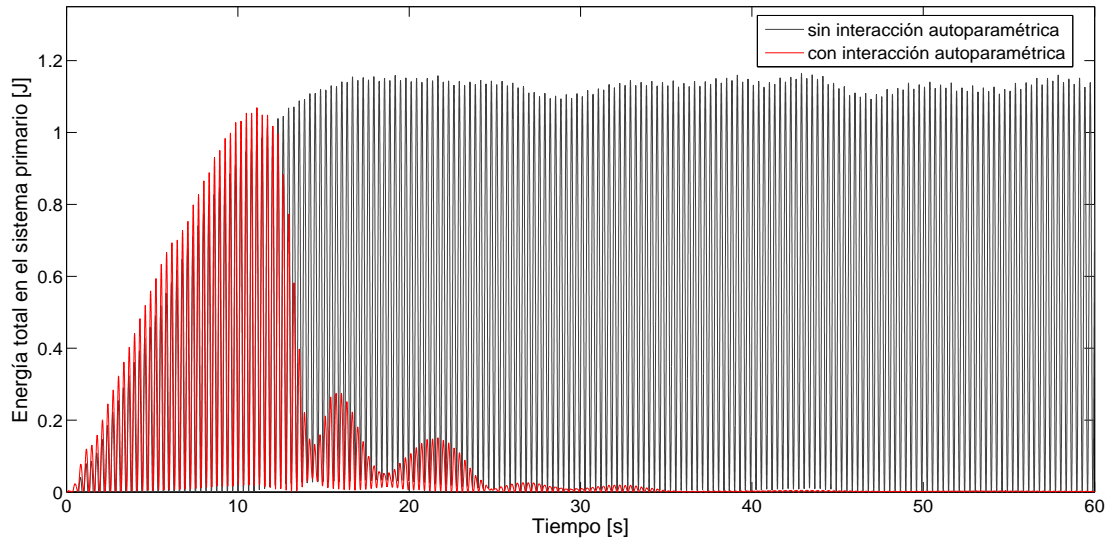


Figura 4.4: Energía en el sistema primario sin/con absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever.

4.5 muestra la energía en el absorbedor autoparamétrico tipo pendular cuando se presenta interacción autoparamétrica entre ambos subsistemas y, por lo tanto, la absorción de vibración.

En la Fig. 4.6 se muestra la respuesta dinámica de la estructura tipo edificio cuando no se presenta interacción autoparamétrica. Las amplitudes en estado estable del primer, segundo y tercer piso son  $x_1(t) = 0.026m$ ,  $x_2(t) = 0.048m$  y  $x_3(t) = 0.062m$ , respectivamente.

En la Fig. 4.7 se muestra la respuesta en el tiempo de cada uno de los pisos cuando se implementa el absorbedor autoparamétrico a la estructura tipo edificio de 3 pisos, la frecuencia de sintonización del absorbedor es  $\omega_{n4} = 0.763Hz$  que es la mitad de  $\omega_1$ . Las amplitudes en estado estable cuando se presenta interacción autoparamétrica son  $x_1(t) = 0.0019m$ ,  $x_2(t) = 0.0025m$  y  $x_3(t) = 0.0021m$ . Los porcentajes de absorción de vibraciones para este caso son 92 %, 95 % y 97 % para el primer, segundo y tercer piso, respectivamente.

En la Fig. 4.8 se muestra la respuesta en el tiempo del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever cuando existe absorción de vibración en el sistema primario, teniendo amplitudes en estado estable  $y(t) = 0.063m$ . En la Fig. 4.9 se muestra la FFT del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever, donde el valor de su frecuencia natural es de  $\omega_4 \approx 0.793Hz$ , con lo cual se satisface que  $\Omega = \omega_1 = 0.5\omega_4$ .

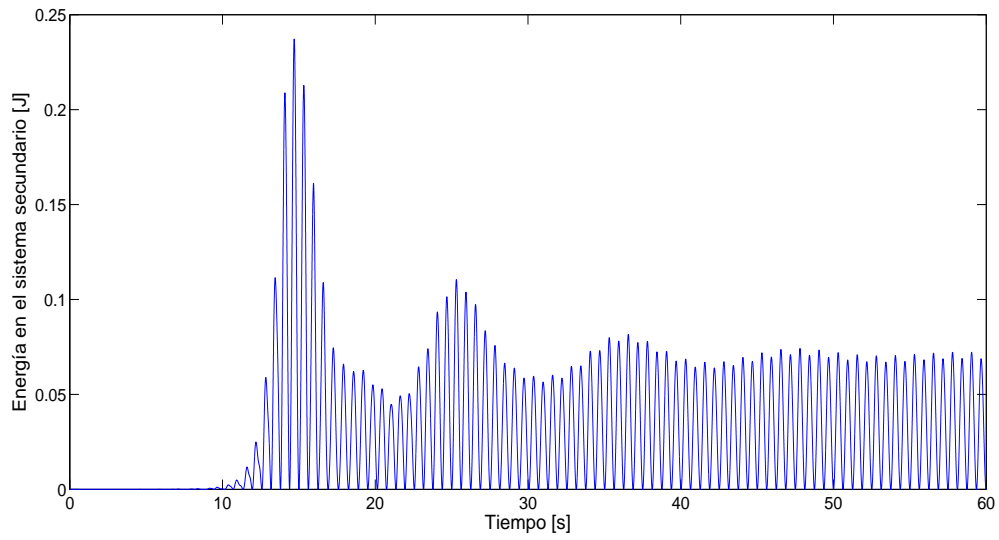


Figura 4.5: Energía en el sistema secundario cuando se presenta interacción autoparamétrica

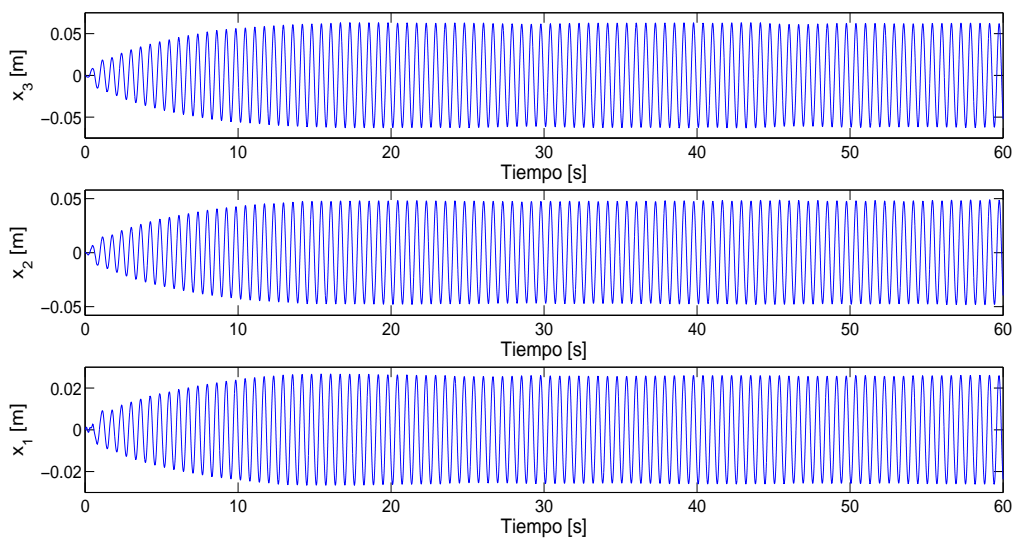


Figura 4.6: Respuesta dinámica del sistema primario sin interacción autoparamétrica

### 4.3. CASO 1: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR AUTOPARAMÉTRICO TIPO VIGA EN CANTILEVER

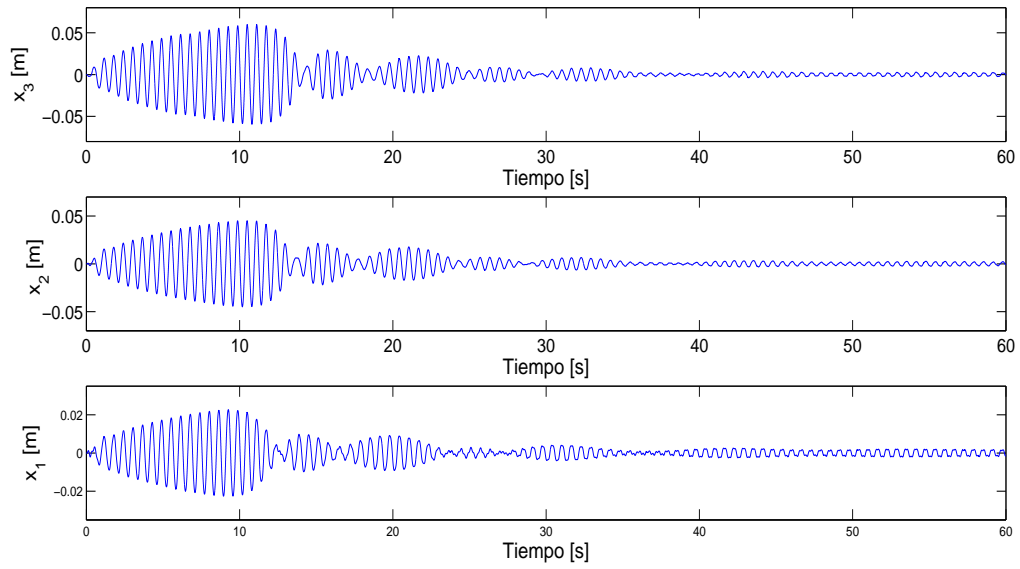


Figura 4.7: Respuesta dinámica del sistema primario cuando se presenta interacción autoparamétrica

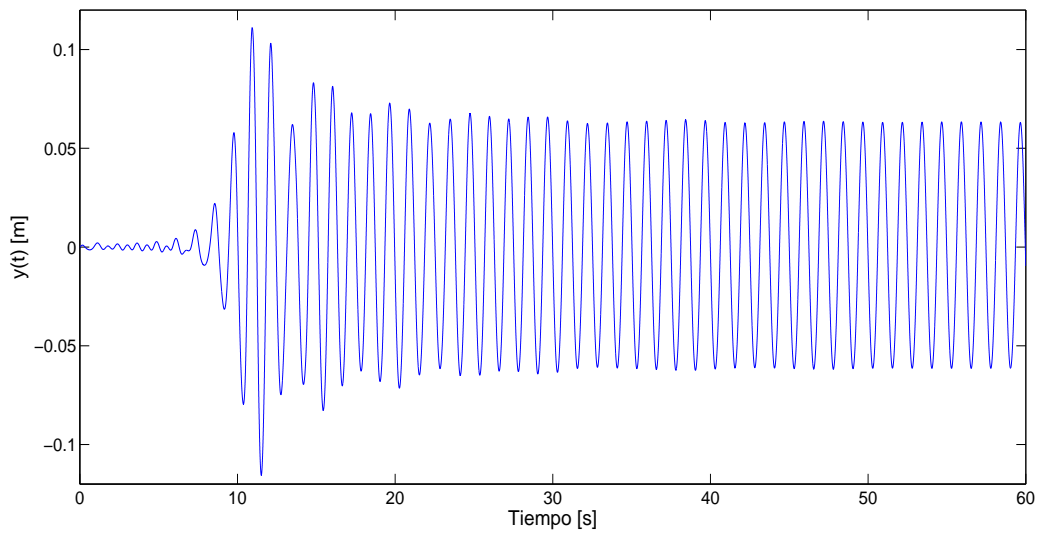


Figura 4.8: Respuesta dinámica del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever.

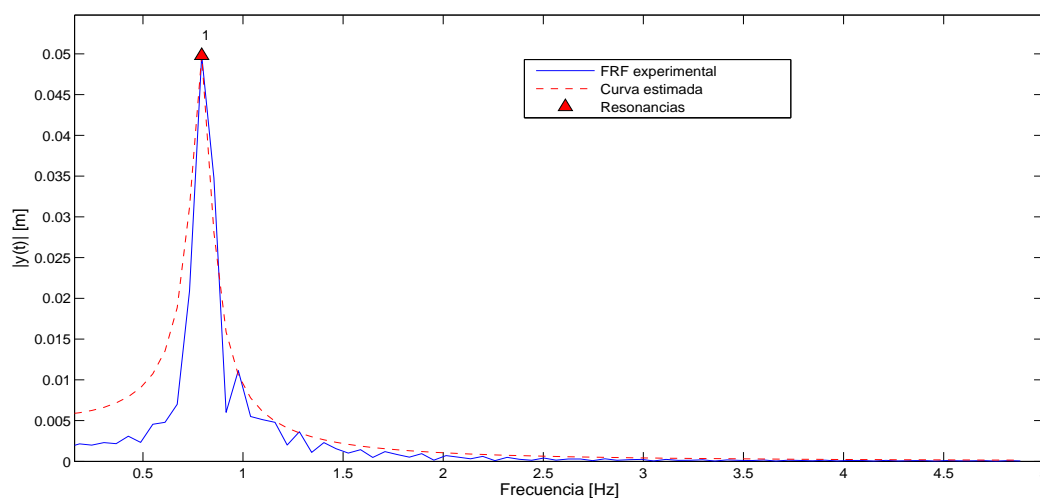


Figura 4.9: FRF experimental del sistema secundario cuando se presenta interacción autoparamétrica.

## 4.4. Caso 2: Evaluación de un absorbedor autoparamétrico tipo pendular

### 4.4.1. Descripción del sistema

En la Fig. 4.10 se muestra la plataforma experimental con absorbedor de vibraciones autoparamétrico tipo pendular sobre el tercer piso del sistema primario, cuyo movimiento está restringido a un plano horizontal (se desprecian los efectos debido a la gravedad). El sistema secundario consta de masa ( $m_4$ ), y para proporcionarle energía potencial se le acopla un resorte lineal con rigidez  $k_4$ , para medir los desplazamientos angulares del absorbedor autoparamétrico se utiliza un decodificador óptico rotacional de la marca *US Digital*<sup>®</sup>.

### 4.4.2. Ecuaciones de movimiento

Para obtener las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema de la Fig. 4.10 se utiliza el formulismo Euler-Lagrange, donde el Lagrangiano del sistema está dado por

$$L = T_{\text{primario}} + T_{\text{pendulo}} - V_{\text{primario}} - V_{\text{pendulo}} \quad (4.11)$$

donde los dos primeros términos en (4.11) corresponden a la energías cinéticas del sistema primario y del absorbedor autoparamétrico tipo pendular, respectivamente, y los términos

4.4. CASO 2: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR AUTOPARAMÉTRICO TIPO PENDULAR75



Figura 4.10: Estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico tipo pendular.

restantes corresponden a las energías potenciales de ambos subsistemas.

$$T_{\text{primario}} = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) \quad (4.12)$$

$$V_{\text{primario}} = \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 (x_3 - x_2)^2) \quad (4.13)$$

$$T_{\text{péndulo}} = \frac{1}{2} m_4 (\dot{x}_3^2 - 2L\dot{\theta}\dot{x}_3 \text{sen}\theta + L^2\dot{\theta}^2) \quad (4.14)$$

$$V_{\text{péndulo}} = \frac{1}{2} k_4 (l \text{sen}\theta)^2 \quad (4.15)$$

Desarrollando las ecuaciones Euler-Lagrange, considerando amortiguamiento viscoso, fuerzas externas debido a la aceleración en la base y suponiendo desplazamiento angular pequeño ( $\text{sen}\theta \simeq \theta$  y  $\text{cos}\theta \simeq 1$ ), la dinámica de la estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico tipo pendular está representada por las siguientes ecuaciones

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = -m_1 \ddot{z}(t) \quad (4.16)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = -m_2 \ddot{z}(t) \quad (4.17)$$

$$(m_3 + m_4) \ddot{x}_3 + c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 - m_4 L (\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2) = -m_3 \ddot{z}(t) \quad (4.18)$$

$$m_4 L^2 \ddot{\theta} + c_4 \dot{\theta} + k_4 l^2 \theta - m_4 L \theta \ddot{x}_3 = 0 \quad (4.19)$$

Este sistema se puede describir en forma compacta como

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = -M \ddot{z}(t), \quad x \in R^4, \quad z \in R \quad (4.20)$$

donde  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  es el vector generalizado del movimiento relativo de cada uno de los pisos con respecto a la posición inicial de la base,  $\ddot{z}$  es la aceleración de la base y  $M$ ,  $C$ ,  $K$  son matrices de  $4 \times 4$  de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente y se representan por

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 + m_4 & -m_4 L \theta \\ 0 & 0 & -m_4 L \theta & m_4 L^2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -m_4 L \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 l^2 \end{bmatrix}$$

### 4.4.3. Resultados experimentales

Los parámetros del sistema completo se muestran en la Tabla VI.

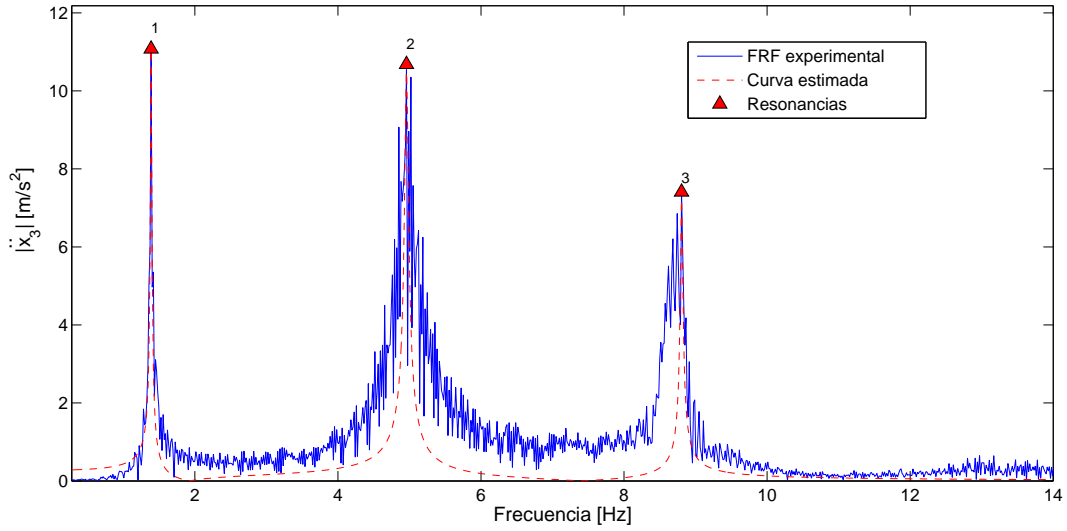


Figura 4.11: FRF experimental del sistema primario con absorbedor autoparamétrico tipo pendular.

$m_1 = 1.03kg$	$m_2 = 1.014kg$	$m_3 = 1.923kg$	$m_4 = 0.361kg$
$k_1 = 897.02N/m$	$k_2 = 897.02N/m$	$k_3 = 888.23N/m$	$k_4 = 350N/m$
$c_1 = 0.065N/(m/s)$	$c_2 = 0.05N/(m/s)$	$c_3 = 0.018N/(m/s)$	$c_4 = 0.045N/(m/s)$
$L = 0.58m$	$l = 0.14m$		

La función de respuesta frecuencial experimental de la estructura tipo edificio con absorbedor autoparamétrico tipo pendular se muestra en la Fig. 4.11, de nueva cuenta, tal y como sucede con el absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever, aún cuando el sistema es de 4 gdl, solamente se tienen tres frecuencias naturales con valores de  $\omega_1 = 1.389Hz$ ,  $\omega_2 = 4.959Hz$  y  $\omega_3 = 8.804Hz$ .

En la Fig. 4.12 se muestra la energía en el sistema primario con y sin absorbedor autoparamétrico tipo pendular, el porcentaje de absorción es cercano al 94 %.

La Fig. 4.13 muestra la energía en el absorbedor autoparamétrico tipo pendular cuando se presenta interacción autoparamétrica y por lo tanto absorción de vibración.

La Fig. 4.14 muestra la respuesta dinámica de la estructura tipo edificio sin absorbedor autoparamétrico tipo pendular, las amplitudes en estado estable de cada uno de los pisos son  $x_1(t) = 0.024m$ ,  $x_2(t) = 0.042m$  y  $x_3(t) = 0.056m$ . La Fig. 4.15 muestra la respuesta dinámica del sistema primario con absorbedor autoparamétrico tipo pendular, las amplitudes en estado estable de los desplazamientos de cada uno de los pisos son  $x_1(t) = 0.004m$ ,  $x_2(t) = 0.007m$  y  $x_3(t) = 0.01m$ . Los porcentajes de absorción son 81 % para el primer piso, 82 % para el segundo piso y 84 % para el tercer piso.



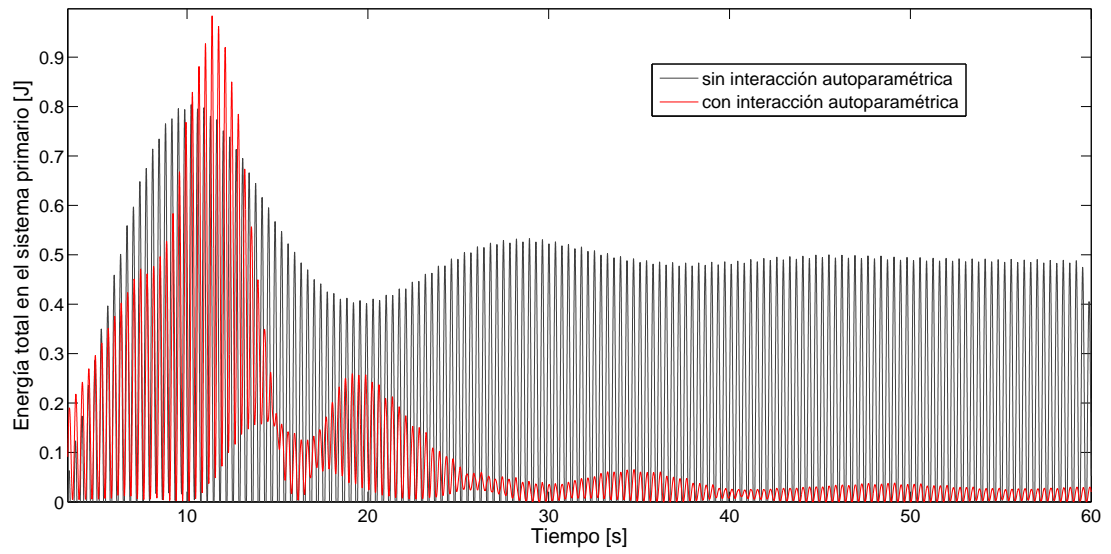


Figura 4.12: Energía en la estructura tipo edificio sin/con absorbedor autoparamétrico tipo pendular.

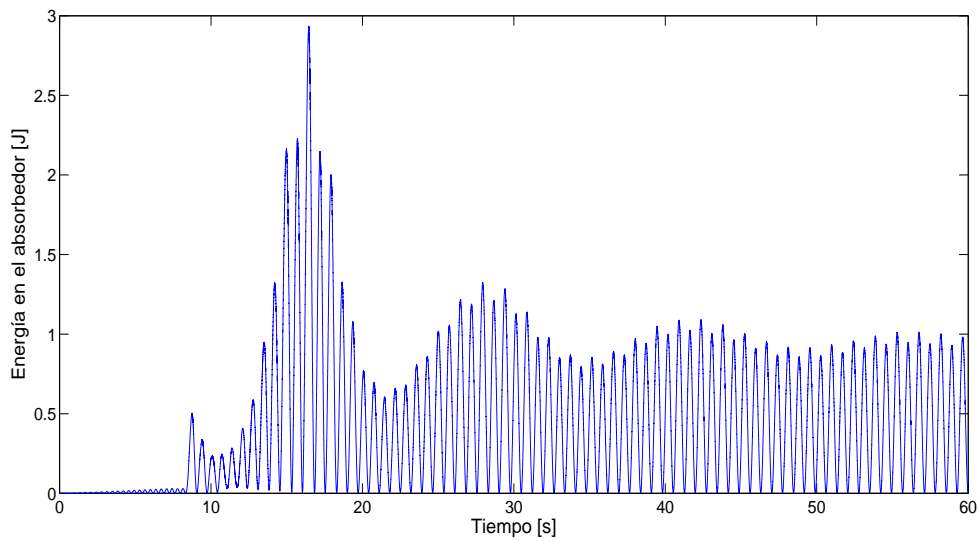


Figura 4.13: Energía presente en el absorbedor autoparamétrico tipo pendular cuando se presenta interacción autoparamétrica.

#### 4.4. CASO 2: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR AUTOPARAMÉTRICO TIPO PENDULAR79

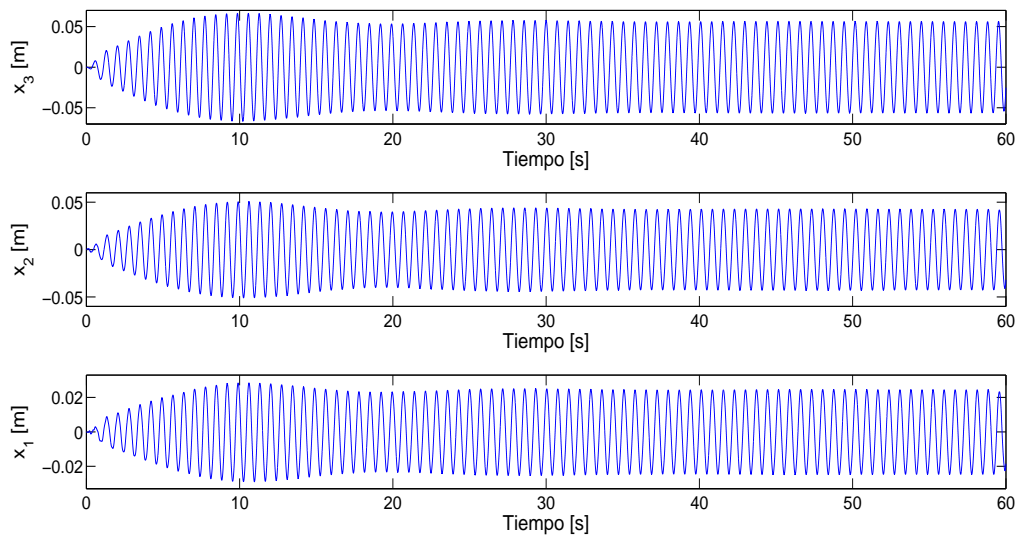


Figura 4.14: Respuesta dinámica del sistema primario sin absorbedor autoparamétrico tipo pendular.

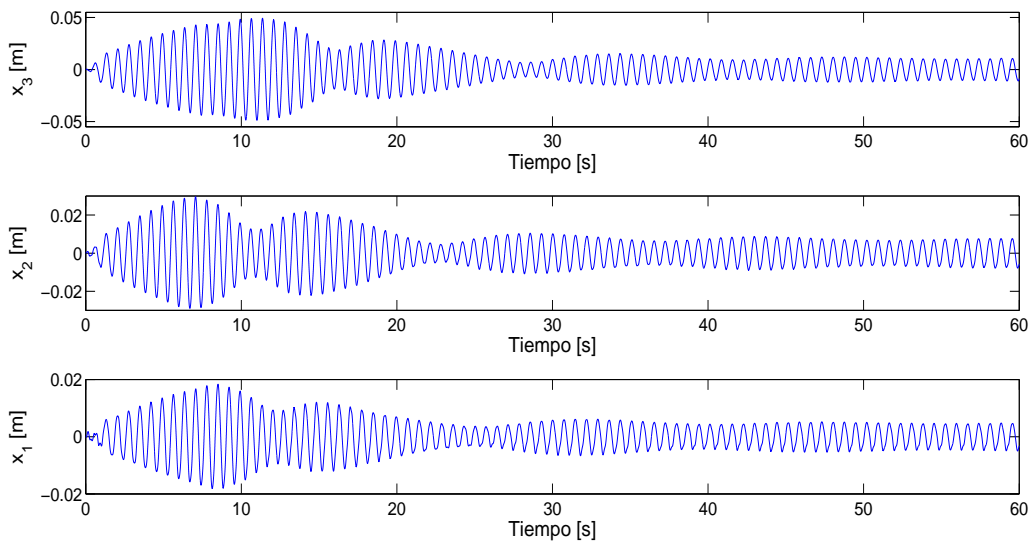


Figura 4.15: Respuesta dinámica del sistema primario con absorbedor autoparamétrico tipo pendular.

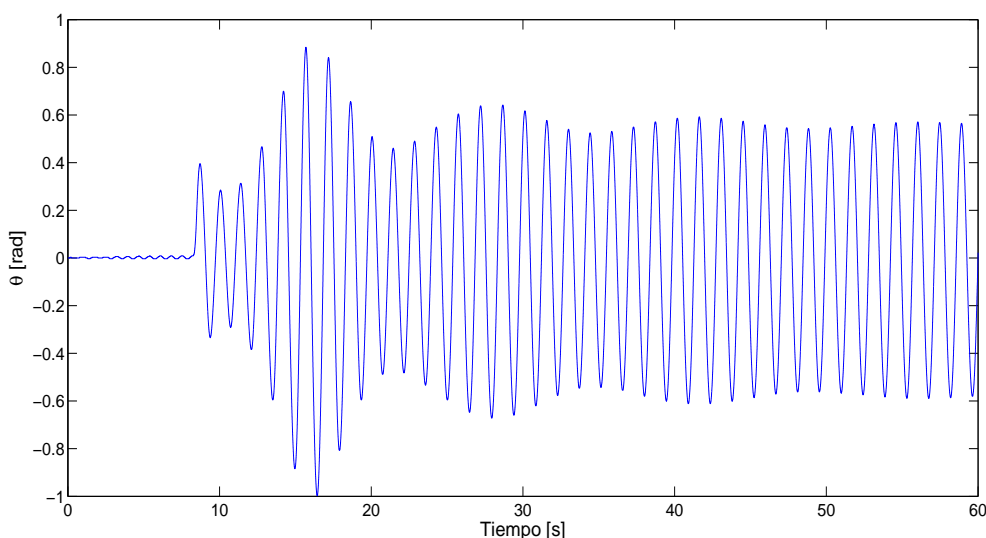


Figura 4.16: Respuesta dinámica del absorbedor autoparamétrico tipo pendular.

En la Fig. 4.16 se muestra la respuesta en el tiempo del absorbedor autoparamétrico tipo pendular cuando se presenta interacción autoparamétrica entre éste y la estructura tipo edificio, la amplitud en estado estable es de  $\theta(t) = 0.567\text{rad} \approx 32.4^\circ$ . En la Fig. 4.17 se muestra la FFT del absorbedor autoparamétrico tipo pendular, donde el valor de su frecuencia natural es de  $\omega_4 \approx 0.694\text{Hz}$ , con lo cual se satisface que  $\Omega = \omega_1 = 0.5\omega_4$ .

## 4.5. Caso 3: Evaluación de un DVA tipo masa-resorte

### 4.5.1. Descripción del sistema

En la Fig. 4.18 se muestra la plataforma experimental de la estructura tipo edificio con absorbedor tipo masa-resorte. Para medir los desplazamientos laterales asociados a la masa del absorbedor ( $m_4$ ) se utiliza un acelerómetro marca *Kistler*. La estructura esta excitada por un movimiento en la base de la forma  $z(t) = Z\text{sen}(\omega t)$  generada por un actuador electromagnético de vibraciones acoplado en la base de la estructura.

### 4.5.2. Ecuaciones de movimiento

Para obtener las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema de la Fig. 4.18 se utiliza el formulismo Euler-Lagrange, donde el Lagrangiano del sistema está dado por

$$L = T_{\text{primario}} + T_{DVA} - V_{\text{primario}} - V_{DVA} \quad (4.22)$$

donde los dos primeros términos en (4.22) corresponden a la energías cinéticas del sistema primario y del absorbedor DVA, respectivamente y los términos restantes corresponden a las

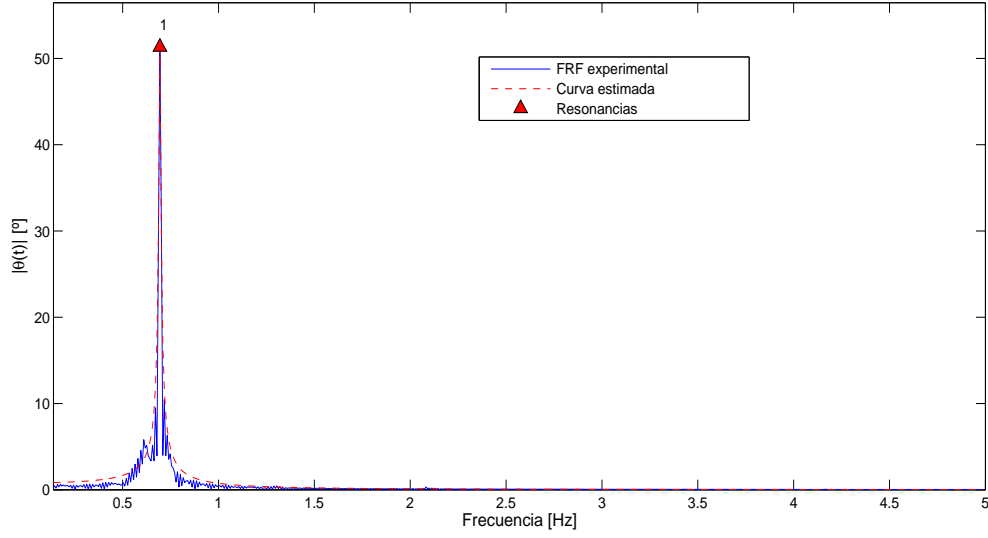


Figura 4.17: FRF del absorbedor autoparamétrico tipo pendular.

energías potenciales de ambos subsistemas.

$$T_{\text{primario}} = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) \quad (4.23)$$

$$V_{\text{primario}} = \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 (x_3 - x_2)^2) \quad (4.24)$$

$$T_{DVA} = \frac{1}{2} m_4 \dot{x}_4^2 \quad (4.25)$$

$$V_{DVA} = \frac{1}{2} k_4 x_4^2 \quad (4.26)$$

Desarrollando las ecuaciones de Euler-Lagrange y considerando amortiguamiento viscoso y fuerzas externas debido a la aceleración en la base, la dinámica del sistema (4.18) está representada por las siguientes ecuaciones

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = -m_1 \ddot{z}(t) \quad (4.27)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = -m_2 \ddot{z}(t) \quad (4.28)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_2 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4 x_4 = -m_3 \ddot{z}(t) \quad (4.29)$$

$$m_4 \ddot{x}_4 + c_4 \dot{x}_4 - k_4 x_3 + k_4 x_4 = 0 \quad (4.30)$$

Expresando las ecuaciones (4.27)-(4.30) en la forma(4.20), resulta



Figura 4.18: Estructura tipo edificio con absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador.

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \\
K &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Es importante notar que el sistema completo presenta acoplamiento de tipo elástico, es decir, éste se da en la matriz de rigidez del sistema  $K$ .

De forma general el absorbedor tipo masa-resorte se puede diseñar para que trabaje de forma pasiva con el  $j$ -ésimo modo,  $j = 1, 2, 3$ , de la siguiente forma

- Se obtienen los parámetros asociados al absorbedor, la masa  $m_4$  y rigidez  $k_4$ , de tal forma que su frecuencia resonante desacoplada coincida con la  $j$ -ésima frecuencia resonante del sistema primario que se quiere atenuar, i.e.,

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{k_4}{m_4}} \cong \omega_j, \quad j = 1, 2, 3 \tag{4.32}$$

- Se selecciona un amortiguamiento viscoso apropiado  $c_2$  para garantizar estabilidad asintótica y cierta robustez ante posibles variaciones en la frecuencia de excitación  $\Omega$ .

### 4.5.3. Resultados experimentales

Los parámetros del sistema completo se muestran en la Tabla VII.

Tabla VII. Parámetros del sistema.			
$m_1 = 1.03kg$	$m_2 = 1.014kg$	$m_3 = 2.12kg$	$m_4 = 0.784kg$
$k_1 = 897.02N/m$	$k_2 = 897.02N/m$	$k_3 = 888.23N/m$	$k_4 = 75N/m$
$c_1 = 0.091N/(m/s)$	$c_2 = 0.026N/(m/s)$	$c_3 = 0.031N/(m/s)$	$c_4 = 1.2N/(m/s)$

El sistema formado por (4.27)-(4.30) se excita con desplazamientos en la base  $z(t) \leq 0.0127m$ , amplitud de fuerza cercana a  $45N$  y una frecuencia de excitación que va de 0 a  $20Hz$ . La función de respuesta frecuencial experimental de la estructura tipo edificio sin absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador se muestra en la Fig. 4.19, donde los valores de las frecuencias resonantes son  $\omega_1 = 1.556Hz$ ,  $\omega_2 = 5.219Hz$  y  $\omega_3 = 8.957Hz$ .

En la Fig. 4.20 se muestra la función de respuesta frecuencial cuando se acopla el absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador sobre el tercer piso de la estructura tipo edificio. Es evidente que ahora se tienen cuatro frecuencias naturales cuyos valores son  $\omega_1 = 1.2512Hz$ ,  $\omega_2 = 2.2583Hz$ ,  $\omega_3 = 5.58Hz$  y  $\omega_4 = 9.14Hz$ .

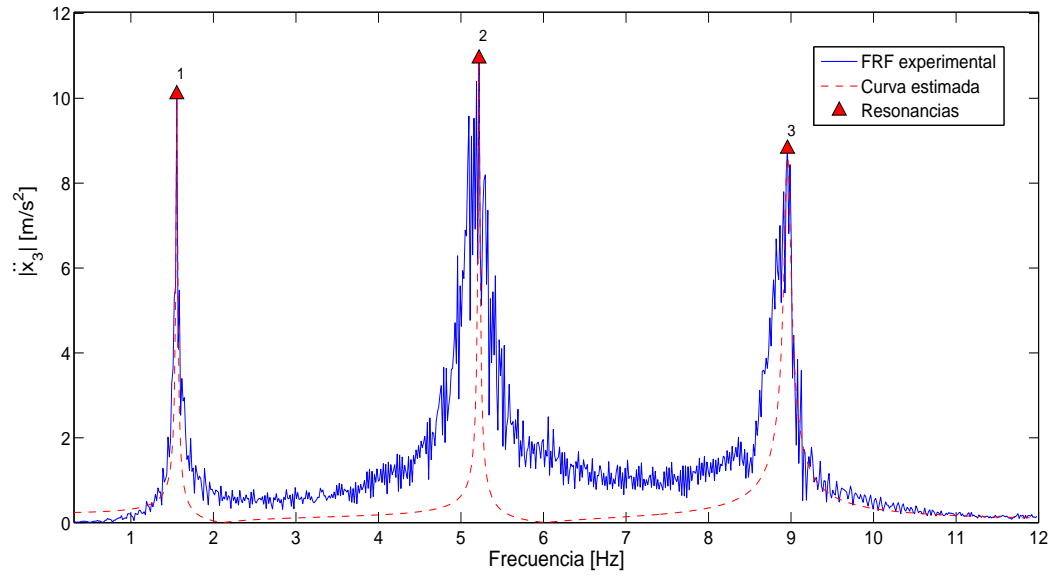


Figura 4.19: FRF experimental del sistema primario sin absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador.

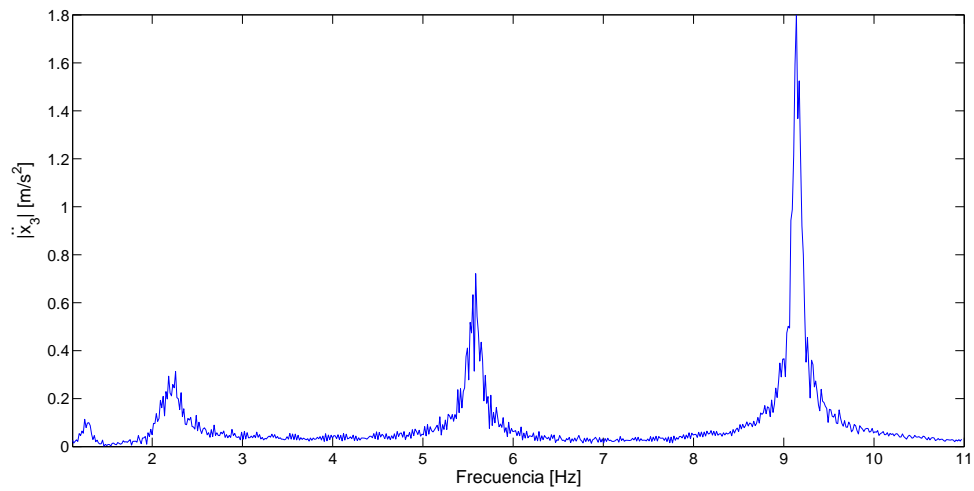


Figura 4.20: FRF experimental del sistema primario con absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador

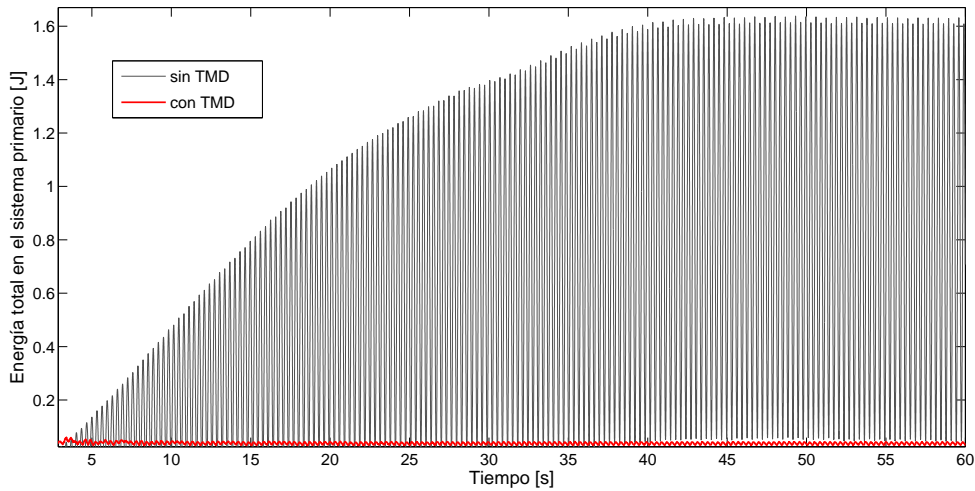


Figura 4.21: Comparación de la energía del sistema primario cuando se utiliza el absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador

Utilizando las ecuaciones (4.23) y (4.24) es posible representar la absorción de vibración en la estructura tipo edificio en términos energéticos, en la Fig. 4.21 se muestra la energía en el sistema primario con y sin absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador, el porcentaje de absorción es cercano al 97 %.

La Fig. 4.22 muestra la energía en el sistema secundario (absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador) cuando se presenta la absorción de vibraciones en el sistema primario.

La Fig. 4.23 muestra la respuesta dinámica de la estructura tipo edificio cuando no se utiliza el absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador, las amplitudes en estado estable de cada uno de los pisos son  $x_1(t) = 0.021m$ ,  $x_2(t) = 0.038m$  y  $x_3(t) = 0.053m$ . La Fig. 4.24 muestra la respuesta dinámica del sistema primario con absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador, las amplitudes en estado estable de los desplazamientos de los pisos son  $x_1(t) = 2.7mm$ ,  $x_2(t) = 1.7mm$  y  $x_3(t) = 0.54mm$ . Los porcentajes de absorción son 87 % para el primer piso, 96 % para el segundo piso y 98 % para el tercer piso.

En la Fig. 4.25 se muestra la respuesta en el tiempo del absorbedor pasivo tipo masa-resorte-amortiguador cuando se coloca en la estructura tipo edificio y se sintoniza para que atenúe el primer modo de vibración asociada a ésta, teniendo amplitudes en estado estable de  $x_4(t) = 19.5mm$ . En la Fig. 4.26 se muestra la FRF correspondiente al absorbedor pasivo tipo masa-resorte-amortiguador, se observa que  $\omega_4 \approx 1.55Hz$ , lo cual indica que el absorbedor está sintonizado para absorber el primer modo de vibración del sistema primario desacoplado, es decir,  $\Omega = \omega_1 = \omega_4$ .



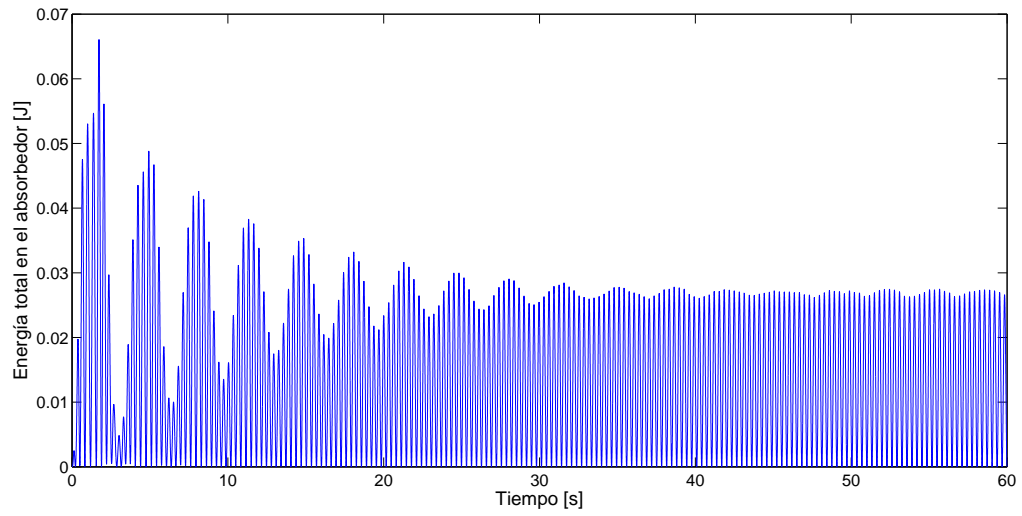


Figura 4.22: Energía en el absorbidor tipo masa-resorte-amortiguador.

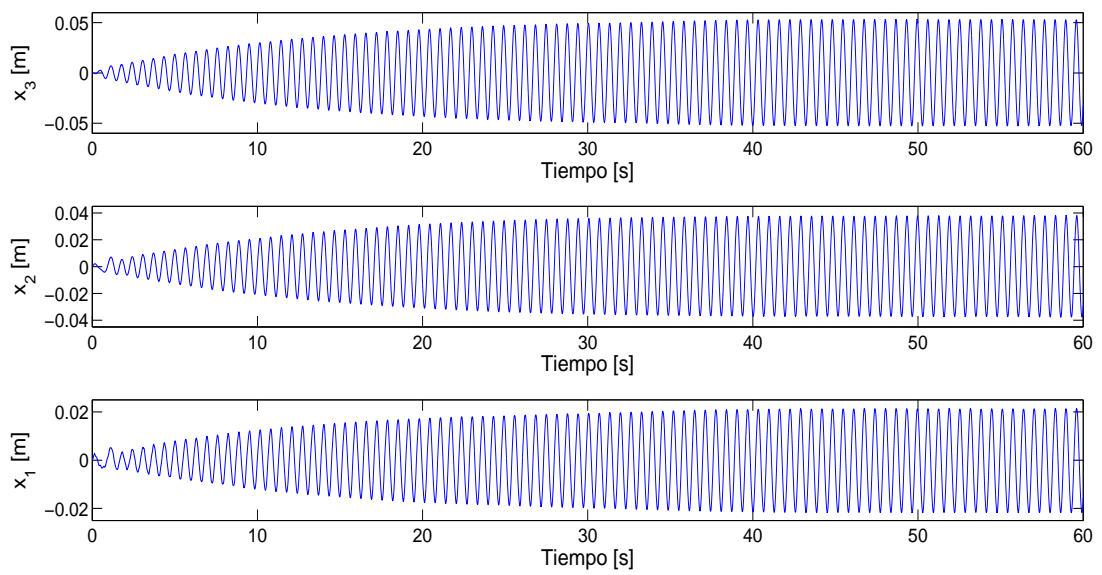


Figura 4.23: Respuesta dinámica del sistema primario sin absorbidor tipo masa-resorte-amortiguador.

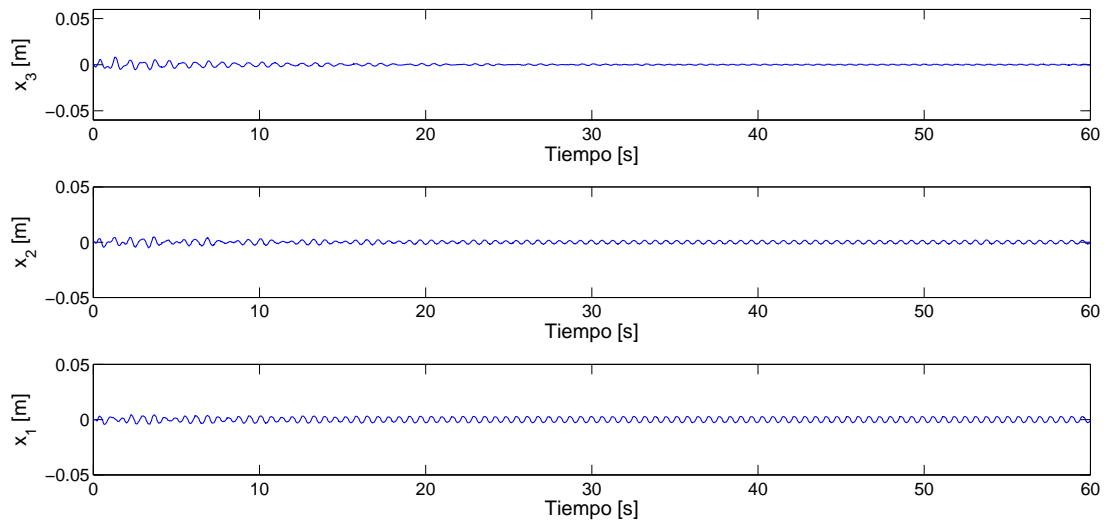


Figura 4.24: Respuesta dinámica del sistema primario con absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador.

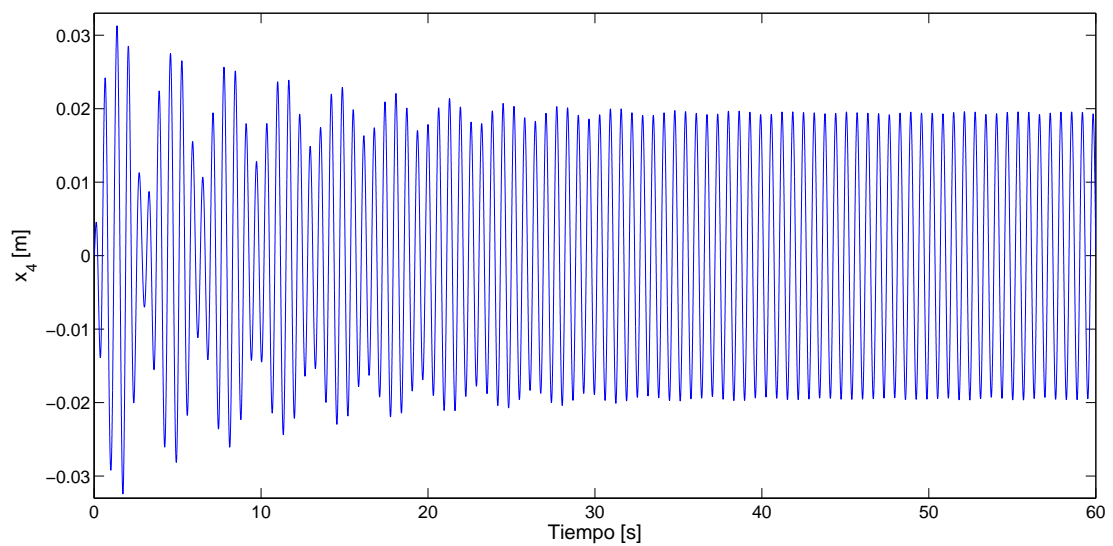


Figura 4.25: Respuesta dinámica del absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador.

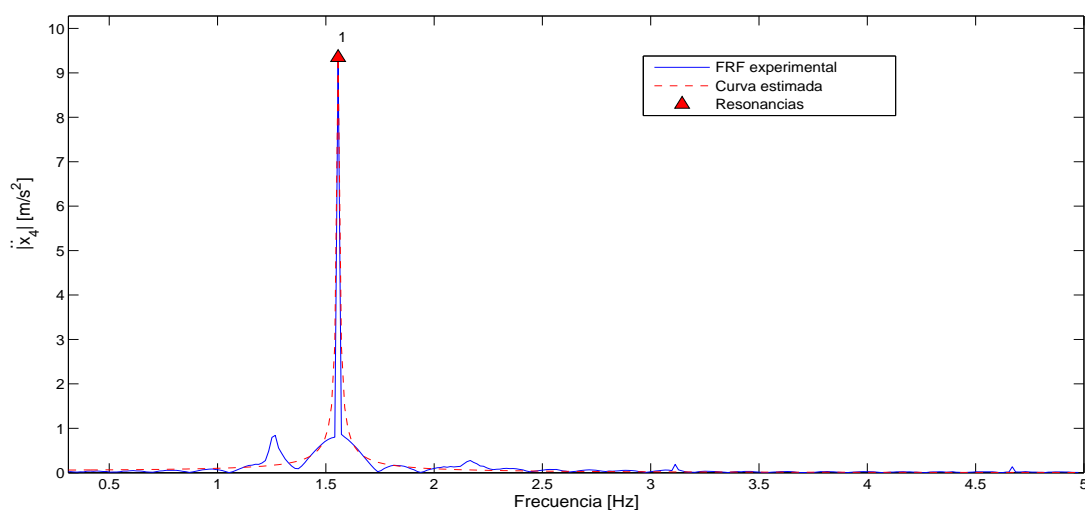


Figura 4.26: FRF experimental del absorbedor tipo masa-resorte-amortiguador.

## 4.6. Caso 4: Evaluación de un absorbedor tipo viga configurado como un DVA

### 4.6.1. Descripción del sistema

Debido a que los elementos mecánicos elásticos (vigas, columnas, etc.), dinámicamente hablando, se comportan como resortes, en esta sección se propone utilizar un esquema de absorción de vibraciones pasivo similar al presentado en la sección anterior donde se considera el absorbedor tipo viga en cantilever como un sistema tipo masa-resorte. Para obtener la rigidez equivalente asociada a este tipo de configuración de la viga (viga en voladizo) considere una viga en cantilever con masa  $m$  en el extremo de ésta, tal y como se muestra en la Fig. 4.27, asumiendo por simplicidad, que la masa asociada a la viga es mucho menor en comparación con la masa en el extremo de la misma. De mecánica de materiales, se sabe que la deflexión estática en el extremo libre de la viga está dada por

$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{3EI} \quad (4.33)$$

donde  $W$  es el peso asociado a la masa  $m$ ,  $E$  es el módulo de elasticidad asociado al material de la viga,  $l$  es la longitud de la viga e  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal de la viga. Usando la Ley de Hooke, la rigidez equivalente se representa por

$$k_{eq} = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{3EI}{l^3} \quad (4.34)$$

En la Fig. 4.28 se muestra la plataforma experimental que tiene como sistema primario la estructura tipo edificio y sobre el tercer piso se acopla el absorbedor pasivo de vibración que

#### 4.6. CASO 4: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR TIPO VIGA CONFIGURADO COMO UN DVA

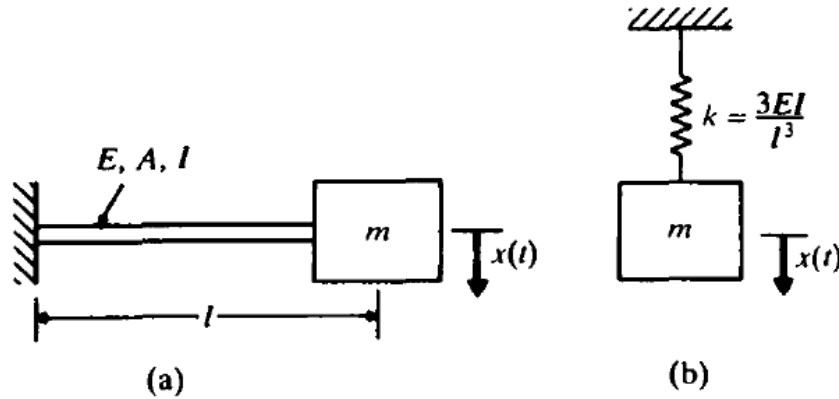


Figura 4.27: Viga en cantilever con masa en el extremo. a) Configuración actual, b) Modelo discretizado con un  $gdl$

es una viga en cantilever cuya dinámica es analizada como si se tratara de un sistema masa-resorte, para esto, dicho absorbedor se coloca de manera normal a la dirección de la excitación proporcionada por el actuador electromagnético. Para medir el desplazamiento asociado a la masa que se encuentra en el extremo libre de la viga ( $m_4$ ) se usa un acelerómetro de la marca *Kistler*<sup>®</sup>.

#### 4.6.2. Ecuaciones de movimiento

Debido a que el absorbedor tipo viga está diseñado para que trabaje como un DVA, bajo esta configuración, las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema mostrado en la Fig. 4.28 son iguales al sistema dado por (4.27)-(4.30), es decir,

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = -m_1\ddot{z}(t) \quad (4.35)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = -m_2\ddot{z}(t) \quad (4.36)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 - k_3x_2 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4x_4 = -m_3\ddot{z}(t) \quad (4.37)$$

$$m_4\ddot{x}_4 + c_4\dot{x}_4 - k_4x_3 + k_4x_4 = 0 \quad (4.38)$$

#### 4.6.3. Resultados experimentales

Los parámetros del sistema completo se muestran en la Tabla VIII

Tabla VIII. Parámetros del sistema.			
$m_1 = 1.03kg$	$m_2 = 1.014kg$	$m_3 = 1.445kg$	$m_4 = 0.105kg$
$k_1 = 897.02N/m$	$k_2 = 897.02N/m$	$k_3 = 888.23N/m$	$k_{viga} = 14N/m$
$c_1 = 0.355N/(m/s)$	$c_2 = 0.55N/(m/s)$	$c_3 = 0.26N/(m/s)$	$c_{viga} = 0.011N/(m/s)$
$L = 0.5m$	$I_{viga} = 8.46 \times 10^{-12}m^4$	$E = 69GPa$	$A = 4.03 \times 10^{-5}m^2$



Figura 4.28: Estructura tipo edificio con absorbedor tipo viga configurado como un DVA

#### 4.6. CASO 4: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR TIPO VIGA CONFIGURADO COMO UN DVA

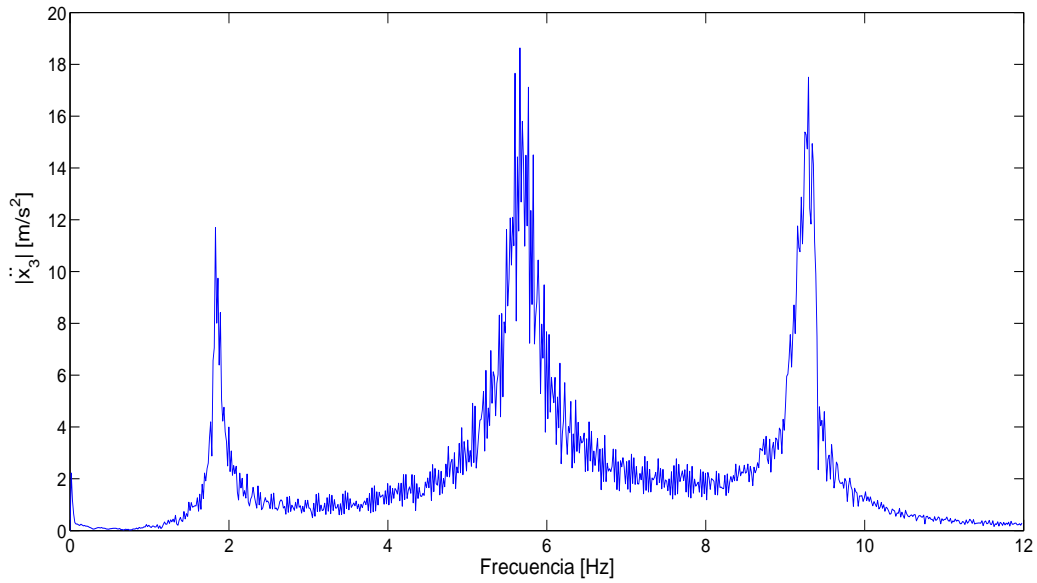


Figura 4.29: FRF experimental del sistema primario sin absorbedor tipo viga configurado como DVA.

La función de respuesta frecuencial experimental del sistema primario sin absorbedor tipo viga configurado como DVA se muestra en la Fig. 4.29 donde los valores de las frecuencias naturales son  $\omega_1 = 1.831Hz$ ,  $\omega_2 = 5.661Hz$  y  $\omega_3 = 9.29Hz$ . En la Fig. 4.30 se muestra la función de respuesta frecuencial cuando se acopla el absorbedor tipo viga configurado como un DVA sobre el tercer piso de la estructura tipo edificio. De forma similar a la Fig. 4.20 se tienen cuatro frecuencias naturales cuyos valores son  $\omega_1 = 1.526Hz$ ,  $\omega_2 = 2.06Hz$ ,  $\omega_3 = 5.49Hz$  y  $\omega_4 = 9.01Hz$ .

La Fig. 4.31 muestra la absorción de vibraciones desde el enfoque energético sobre la estructura tipo edificio, el porcentaje de absorción es cercano al 96%. La Fig. 4.32 muestra la energía en el sistema secundario cuando se presenta absorción de vibración en el sistema primario usando el absorbedor tipo viga configurado como un DVA.

La Fig. 4.33 muestra la respuesta dinámica de la estructura tipo edificio con absorbedor tipo viga configurado como DVA, las amplitudes en estado estable de los desplazamientos de los pisos son  $x_1(t) = 5.4mm$ ,  $x_2(t) = 3.6mm$  y  $x_3(t) = 2.7mm$ . Los porcentajes de absorción son 85% para el primer piso, 94% para el segundo piso y 96% para el tercer piso.

En la Fig. 4.34 se muestra la respuesta en el tiempo del absorbedor tipo viga configurado como DVA, teniendo amplitudes en estado estable de  $x_4(t) = 0.082m$ . En la Fig. 4.35 se muestra la FRF correspondiente al absorbedor tipo viga configurado como DVA, se observa que  $\omega_4 \approx 1.83Hz$ , lo cual indica que el absorbedor está sintonizado para absorber el primer modo de vibración del sistema primario desacoplado, es decir,  $\Omega = \omega_1 = \omega_4$ .

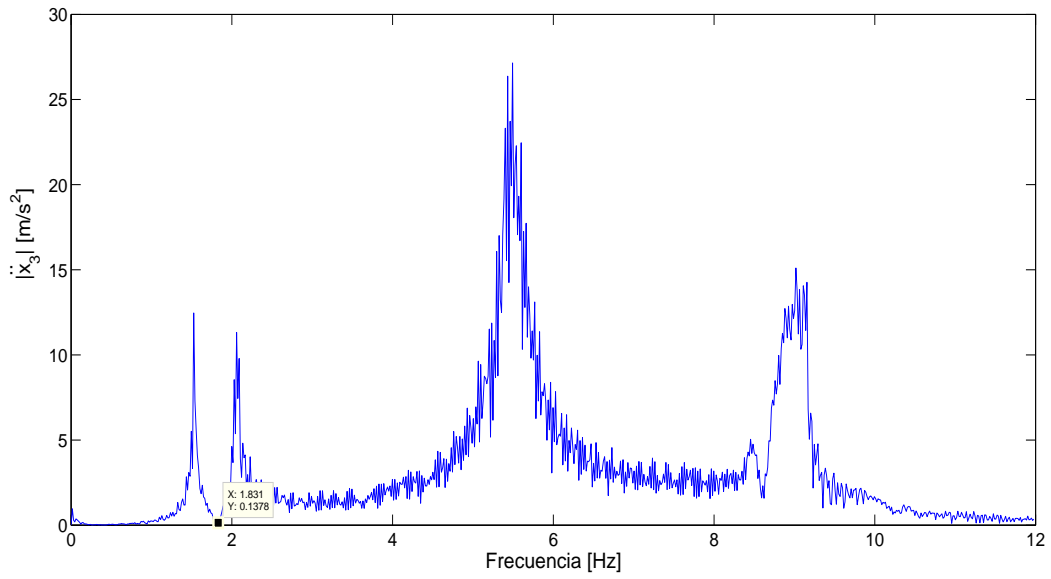


Figura 4.30: FRF experimental del sistema primario con absorbedor tipo viga configurado como un DVA.

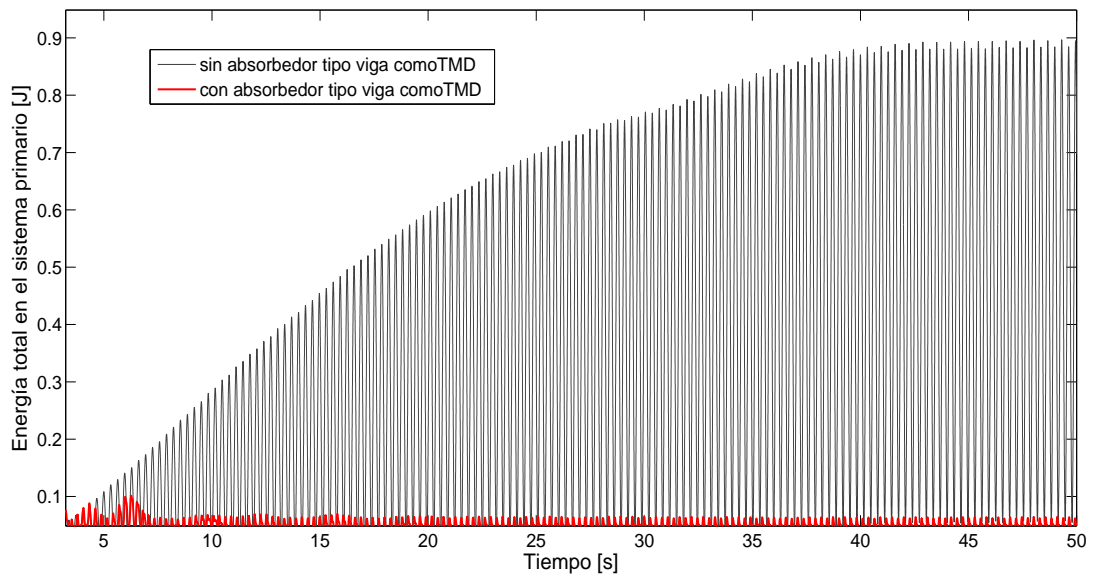


Figura 4.31: Energía en el sistema primario con y sin absorbedor tipo viga configurado como un DVA.

4.6. CASO 4: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR TIPO VIGA CONFIGURADO COMO UN DVA

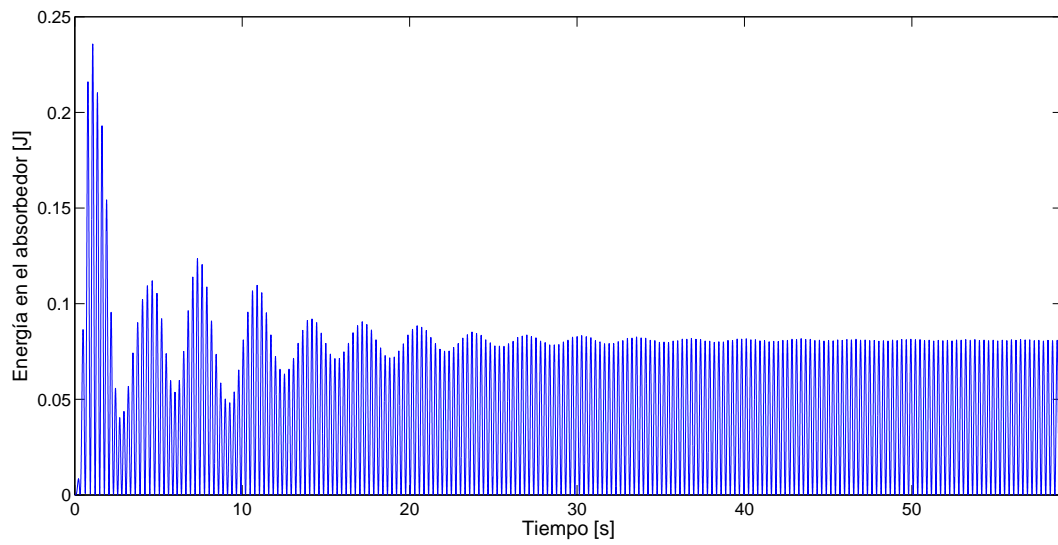


Figura 4.32: Energía presente en el absorbedor tipo viga configurado como DVA

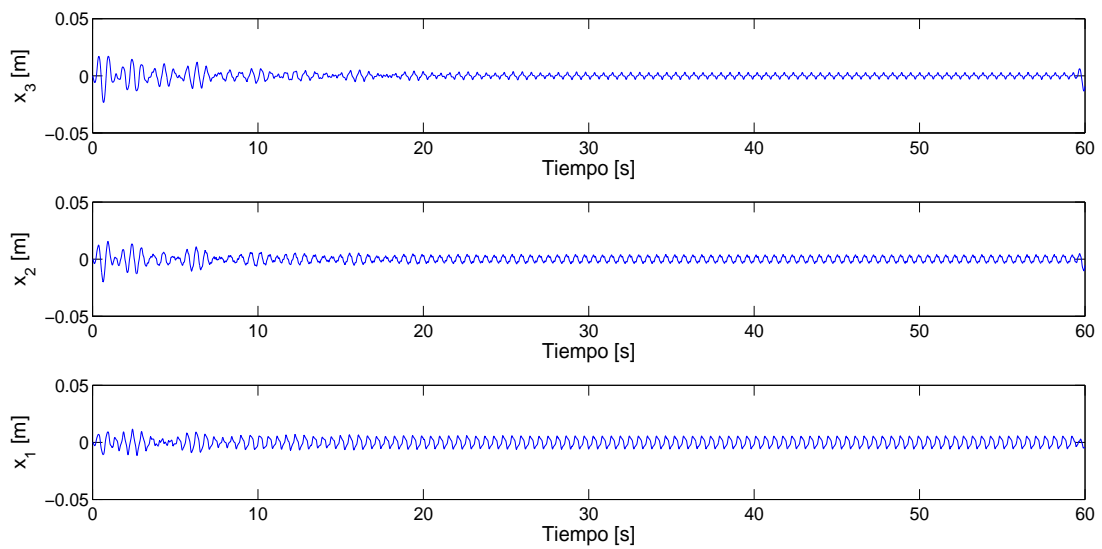


Figura 4.33: Respuesta dinámica del sistema primario con absorbedor tipo viga configurado como DVA



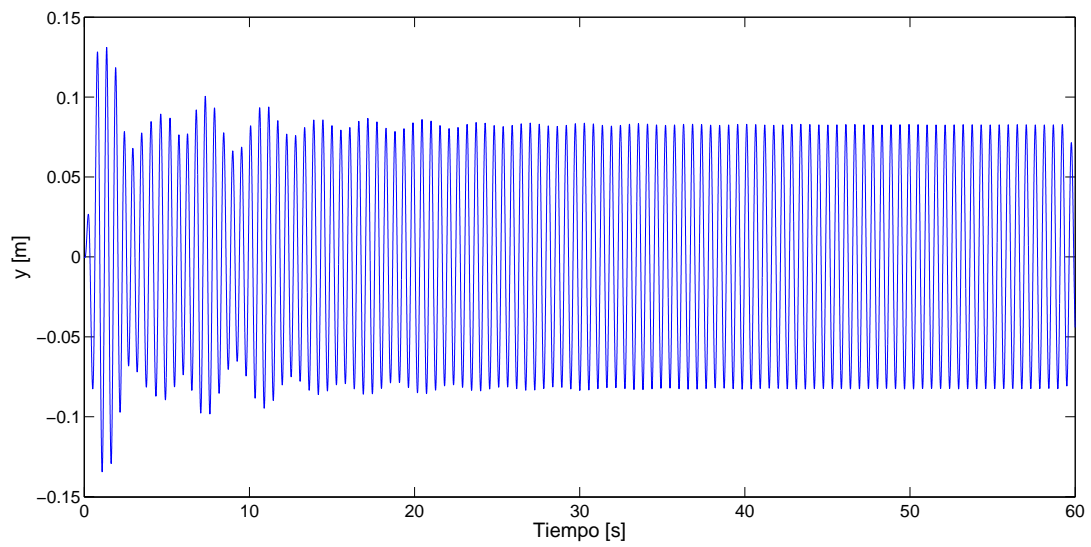


Figura 4.34: Respuesta dinamica del absorbedor tipo viga configurado como DVA.

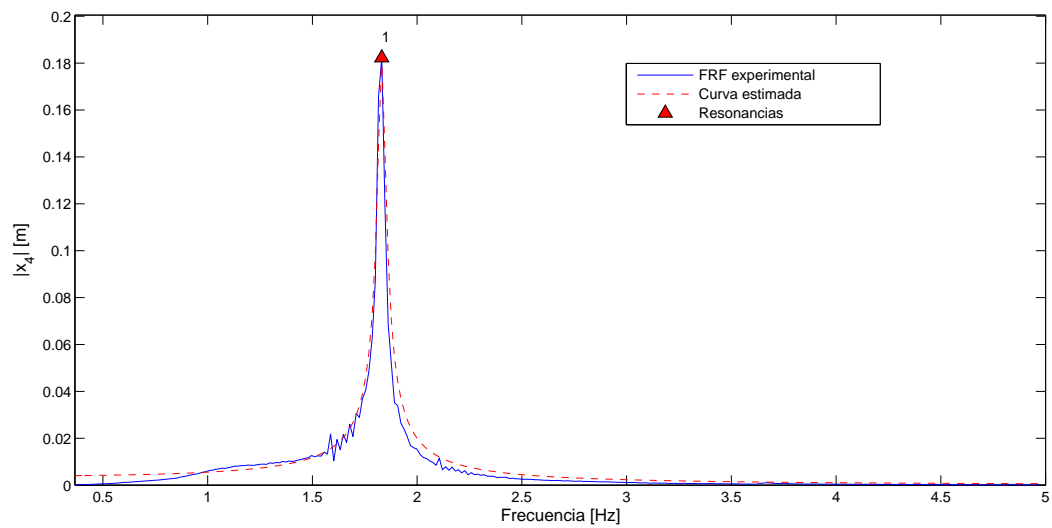


Figura 4.35: FRF Experimental del sistema secundario.



Figura 4.36: Sistema primario con absorbedor tipo pendular

## 4.7. Caso 5: Evaluación de un absorbedor tipo pendular configurado como un DVA

### 4.7.1. Descripción del sistema

En la Fig. 4.36 se muestra la estructura tipo edificio discretizada en 3 gdl cuando se le acopla un absorbedor pendular diseñado para que trabaje en un plano vertical (se consideran los efectos debido a la gravedad), el cual consiste en una barra rígida de longitud  $L$  y una masa en el extremo de la misma  $m_4$ , para medir los desplazamientos angulares del absorbedor pasivo de vibraciones se utiliza un decodificador óptico rotacional marca *US Digital*<sup>®</sup>.

### 4.7.2. Ecuaciones de movimiento

Para obtener las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema de la Fig. 4.36 se utiliza el formulismo Euler-Lagrange, donde en Lagrangiano del sistema está dado por

$$L = T_{\text{primario}} + T_{\text{péndulo}} - V_{\text{primario}} - V_{\text{péndulo}} \quad (4.39)$$

donde los dos primeros términos en (4.39) corresponden a la energías cinéticas del sistema primario y del absorbedor autoparamétrico tipo pendular, respectivamente y los términos restantes corresponden a las energías potenciales de ambos subsistemas.

$$T_{\text{primario}} = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) \quad (4.40)$$

$$V_{\text{primario}} = \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 (x_3 - x_2)^2) \quad (4.41)$$

$$T_{\text{pendulo}} = \frac{1}{2} (m_3 + m_4) \dot{x}_3^2 + m_4 L \dot{x}_3 \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m_4 L^2 \dot{\theta}^2 \quad (4.42)$$

$$V_{\text{pendulo}} = m_4 g L (1 - \cos \theta) \quad (4.43)$$

Desarrollando las ecuaciones Euler-Lagrange, considerando amortiguamiento viscoso, fuerzas externas debido a la aceleración en la base y suponiendo desplazamiento angular pequeño ( $\sin \theta \simeq \theta$  y  $\cos \theta \simeq 1$ ), la dinámica de la estructura tipo edificio con absorbedor pendular en un plano vertical se representa por las siguientes ecuaciones

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = -m_1 \ddot{z}(t) \quad (4.44)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = -m_2 \ddot{z}(t) \quad (4.45)$$

$$(m_3 + m_4) \ddot{x}_3 + m_4 L \ddot{\theta} + c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = -m_3 \ddot{z}(t) \quad (4.46)$$

$$m_4 L^2 \ddot{\theta} + m_4 L \ddot{x}_3 + c_4 \dot{\theta} + m_4 g L \theta = 0 \quad (4.47)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 + m_4 & m_4 L \\ 0 & 0 & m_4 L & m_4 L^2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 g L \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

### 4.7.3. Resultados experimentales

Los parámetros del sistema completo se muestran en la Tabla IX

Tabla IX. Parámetros del sistema.			
$m_1 = 1.03kg$	$m_2 = 1.014kg$	$m_3 = 2.73kg$	$m_4 = 0.31kg$
$k_1 = 897.02N/m$	$k_2 = 897.02N/m$	$k_3 = 888.23N/m$	$c_1 = 0.02N/(m/s)$
$c_2 = 0.024N/(m/s)$	$c_3 = 0.014N/(m/s)$	$c_4 = 0.033N/(m/s)$	$L = 0.252m$

#### 4.7. CASO 5: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR TIPO PENDULAR CONFIGURADO COMO U

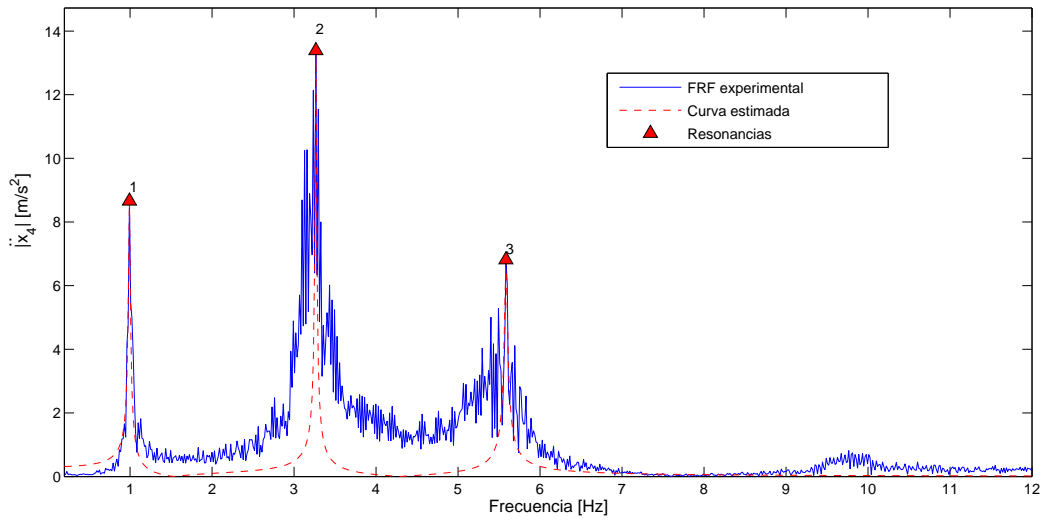


Figura 4.37: FRF experimental del sistema primario sin absorbedor pendular.

La función de respuesta frecuencial experimental del sistema primario sin absorbedor tipo pendular en plano vertical se muestra en la Fig. 4.37 donde los valores de las frecuencias naturales son  $\omega_1 = 0.9918Hz$ ,  $\omega_2 = 3.265Hz$  y  $\omega_3 = 5.585Hz$ . En la Fig. 4.38 se muestra la función de respuesta frecuencial cuando se acopla el absorbedor pendular en un plano vertical sobre el tercer piso del sistema primario. De forma similar a la Fig. 4.20 se tienen cuatro frecuencias naturales cuyos valores son  $\omega_1 = 0.8545Hz$ ,  $\omega_2 = 1.083Hz$ ,  $\omega_3 = 3.22Hz$  y  $\omega_4 = 5.524Hz$ . La Fig. 4.39 muestra la energía en la estructura tipo edificio con y sin absorbedor pendular, el porcentaje de absorción en términos energéticos es de 98%. La energía en el absorbedor pendular cuando existe absorción de vibraciones se presenta en la Fig. 4.40.

La respuesta dinámica de la estructura tipo edificio sin absorbedor pendular en plano vertical se muestra en la Fig. 4.41, las amplitudes en estado estable de cada uno de los pisos son  $x_1(t) = 0.017m$ ,  $x_2(t) = 0.035m$  y  $x_3(t) = 0.044m$ .

La Fig. 4.42 muestra la respuesta dinámica de la estructura tipo edificio con absorbedor pendular en plano vertical, las amplitudes en estado estable de los desplazamientos de los pisos son  $x_1(t) = 2.5mm$ ,  $x_2(t) = 3mm$  y  $x_3(t) = 3.08mm$ . Los porcentajes de absorción son 85% para el primer piso, 91.4% para el segundo piso y 93% para el tercer piso.

En la Fig. 4.43 se muestra la respuesta en el tiempo del absorbedor pendular en plano vertical, teniendo amplitud en estado estable de  $\theta(t) = 0.84rad$ . En la Fig. 4.44 se muestra la FRF correspondiente al absorbedor tipo pendular en un plano vertical, se observa que  $\omega_4 \approx 0.9919Hz$ , lo cual indica que el absorbedor está sintonizado para absorber el primer modo de vibración del sistema primario desacoplado, es decir,  $\Omega = \omega_1 = \omega_4$ .

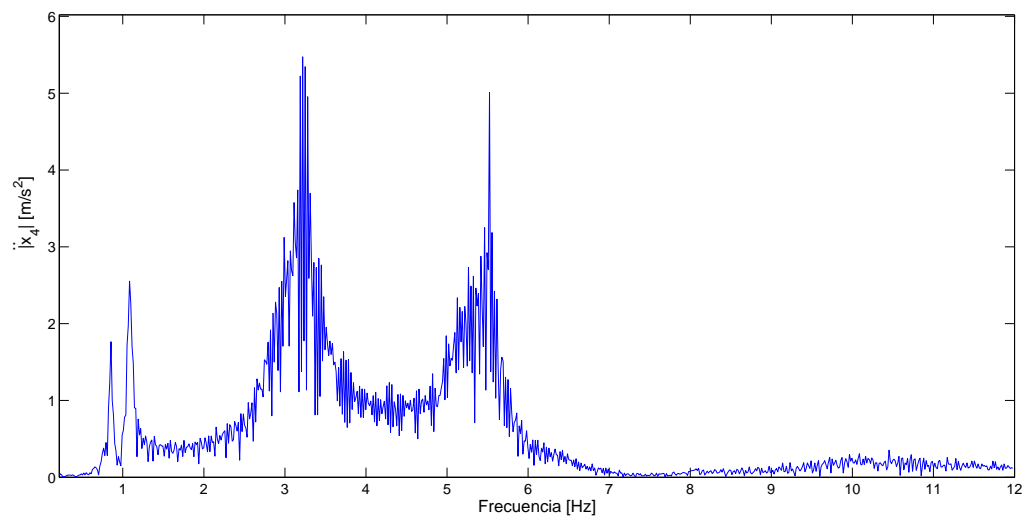


Figura 4.38: FRF experimental del sistema primario cuando se le acopla absorbedor pendular.

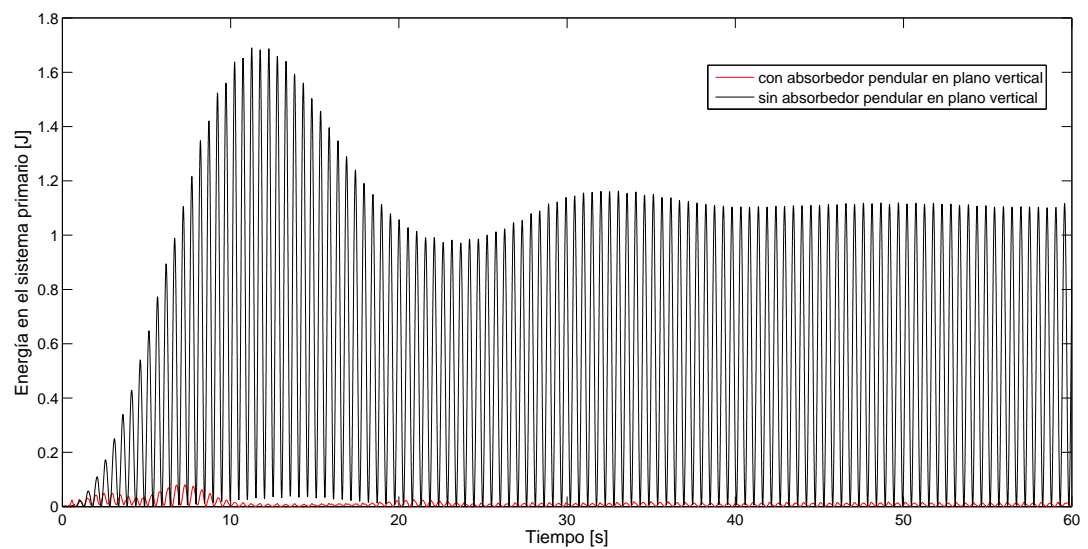


Figura 4.39: Energía en el sistema primario sin/con absorbedor pendular.

4.7. CASO 5: EVALUACIÓN DE UN ABSORBEDOR TIPO PENDULAR CONFIGURADO COMO U

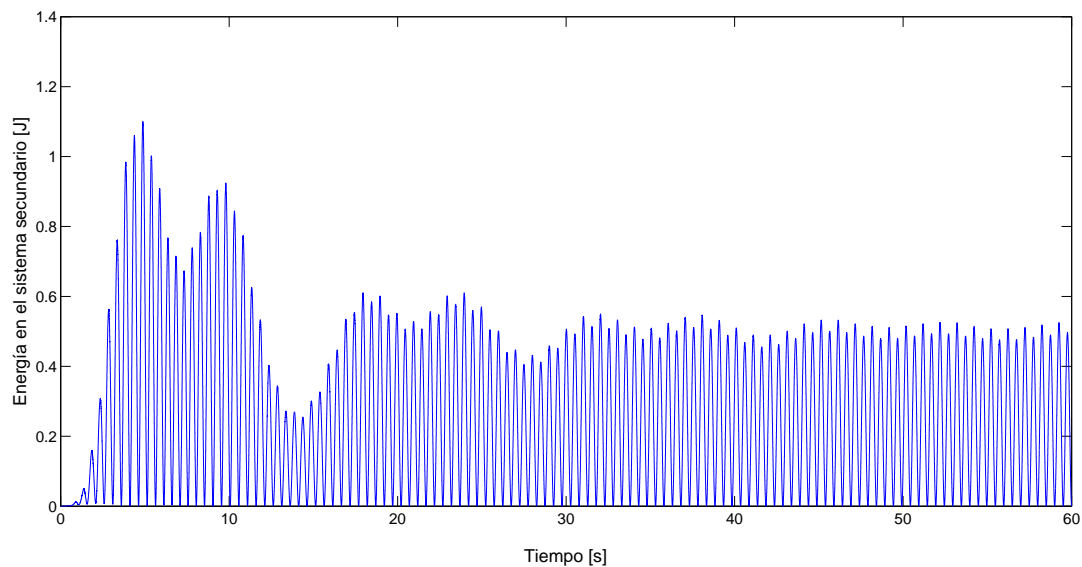


Figura 4.40: Energía en el sistema secundario.

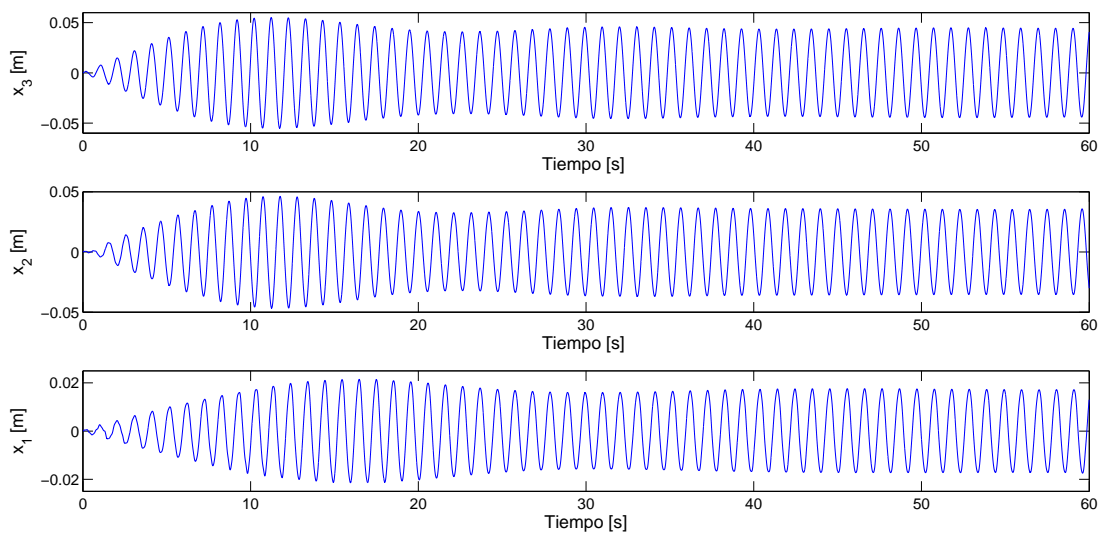


Figura 4.41: Respuesta dinámica del sistema primario sin absorbedor pendular.

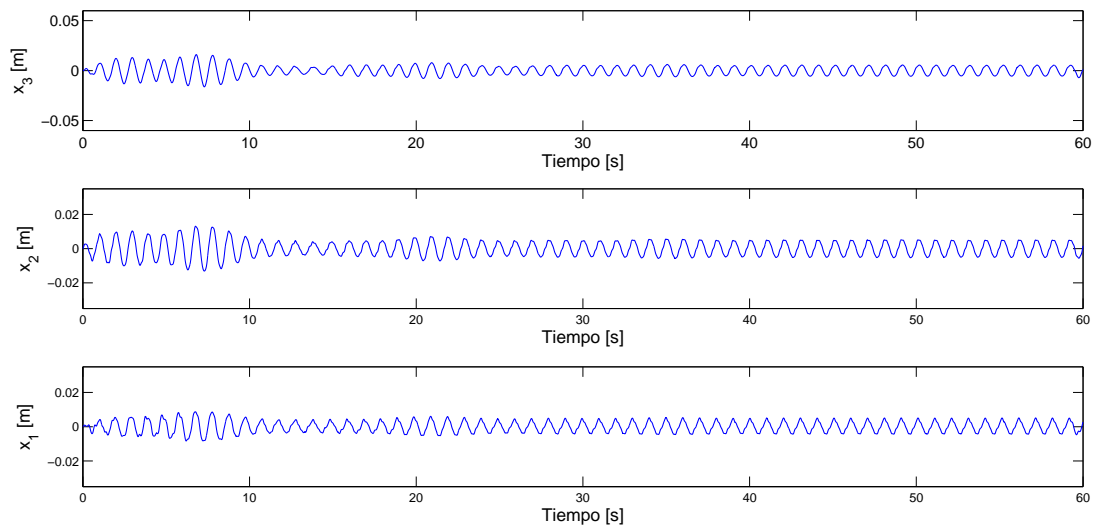


Figura 4.42: Respuesta dinámica del sistema primario con absorbedor pendular.

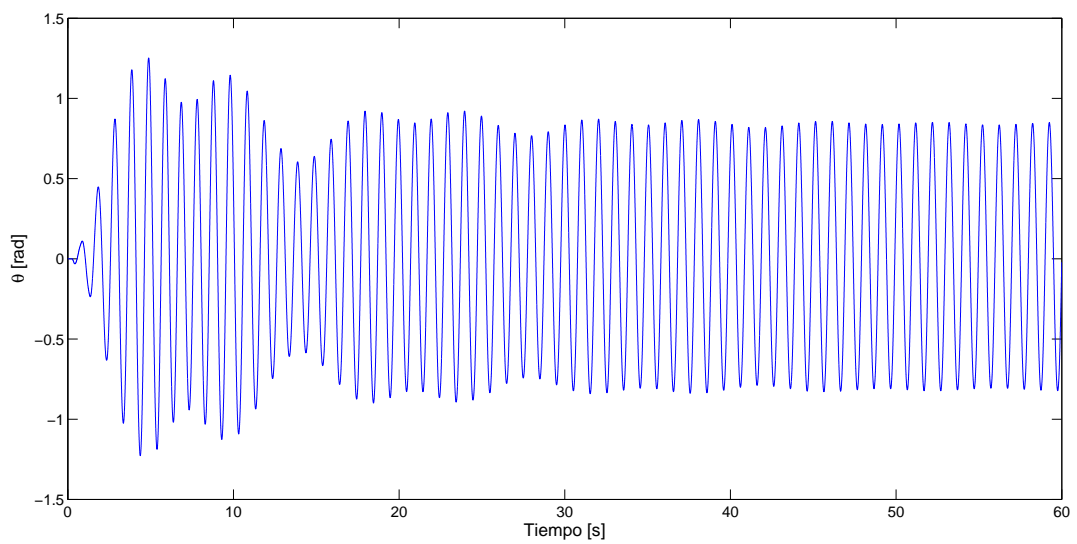


Figura 4.43: Respuesta dinámica del sistema secundario.

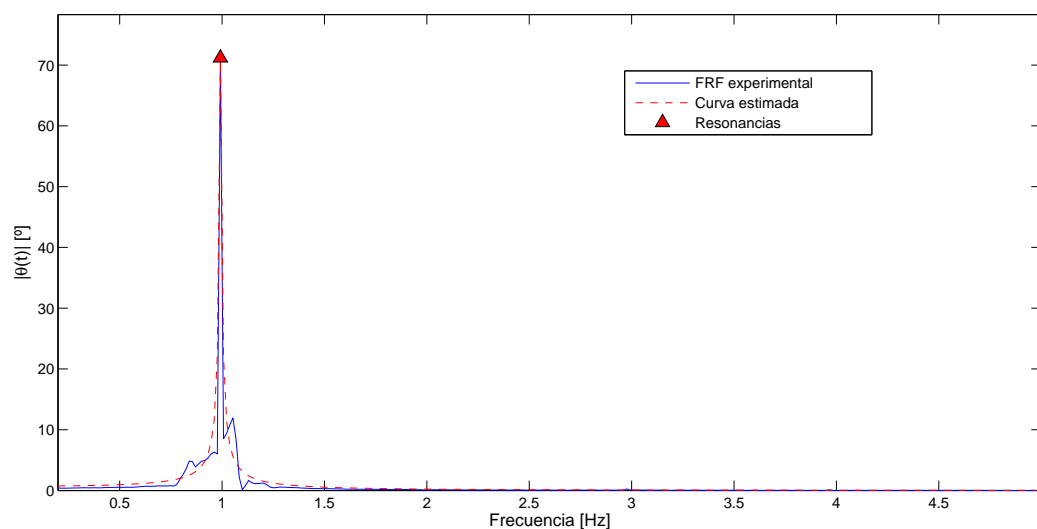


Figura 4.44: Función de respuesta frecuencial del sistema secundario.

## 4.8. Comentarios

En este capítulo se abordó el estudio experimental de la absorción de vibraciones en una estructura tipo edificio de tres pisos usando cinco diferentes esquemas de control pasivo bajo condiciones de excitación en resonancia. Los esquemas utilizados son: dos absorbedores de tipo autoparamétrico (tipo viga en cantilever y pendular) y tres absorbedores configurados para que trabajen como un sistema masa-resorte. En términos generales se puede concluir que el absorbedor autoparamétrico es particularmente eficiente para sistemas que son excitados en una banda ancha de frecuencia, donde es necesario reducir una condición específica de resonancia. De hecho, el absorbedor autoparamétrico solamente trabaja en o cerca de la frecuencia de diseño y no produce condiciones resonantes para otros valores de frecuencias, lo cual es su principal ventaja en comparación con el absorbedor clásico de vibración, el cual funciona adecuadamente en su frecuencia de sintonización pero produciendo condiciones de resonancia en otros valores de frecuencia, es decir, los absorbedores clásicos de vibración (Figs. 4.18, 4.28 y 4.36) experimentan un corrimiento en su función de respuesta frecuencial (Figs. 4.20, 4.30 y 4.38). Este efecto ocurre por que el sistema primario (estructura tipo edificio) y el absorbedor en cuestión están elásticamente acoplados, de tal manera que las frecuencias naturales del sistema primario se desplazan alrededor de la frecuencia resonante original. Por lo tanto, para pequeños cambios en la frecuencia de excitación, en este caso  $\omega_1$ , la dinámica del sistema completo puede ser complicada e inestable debido a la proximidad con respecto a otras frecuencias resonantes. En el caso de los absorbedores autoparamétricos (Figs. 4.2 y 4.10) los acoplamientos entre el sistema primario y secundario son no lineales de tipo inercial y centrífugo y por lo tanto, no se produce el fenómeno antes mencionado (Figs. 4.3 y 4.11), sin embargo, esta característica hace que la dinámica del sistema comple-



to sea altamente no lineal para propósitos de análisis y de diseño, lo cual definitivamente complica su implementación. Por otra parte, una desventaja que presentan los absorbedores autoparamétricos es su transitorio en la respuesta dinámica (Figs. 4.7 y 4.15), es decir, el tiempo que transcurre para lograr su sintonización es evidentemente mayor que en los absorbedores convencionales (Figs. 4.24, 4.33 y 4.42), lo cual es un punto desfavorable si se pensara en una aplicación real, sin embargo, los absorbedores autoparamétricos son más fáciles de rediseñar para diferentes frecuencias naturales del sistema primario, para esto, basta con cambiar la longitud del absorbedor  $L$ , mientras que si se quisiera resintonizar el absorbedor masa resorte, habría que cambiar la constante de rigidez  $k$  o incrementar la masa del absorbedor  $m_4$ , lo cual no resulta ser tan viable e inmediato.

# Capítulo 5

## Absorbedor tipo Duffing para sistemas tipo Duffing

Existe una tendencia reciente en la literatura técnica relacionada con vibraciones mecánicas, de explotar los fenómenos dinámicos no lineales en lugar de evitarlos tal y como se acostumbra en la práctica. Cada vez es más frecuente que las no linealidades asociadas a un sistema mecánico sean utilizadas tanto en absorción de vibraciones como en cosechadores de energía. Los disipadores de energía no lineal (NES, por sus siglas en inglés) se han aplicado para varios propósitos, entre los cuales están: aplicaciones sísmicas, absorción de vibraciones de estructuras flexibles a gran escala, supresión de inestabilidad aerolástica y mitigación acústica. Estas contribuciones demuestran que la consideración de las no linealidades pueden mejorar el desempeño del sistema, sin embargo, el tomar en cuenta las no linealidades complica significativamente el análisis del sistema completo (Vakakis [72]). Una clase particular de un sistema mecánico vibratorio no lineal es aquel que se describe por medio de la ecuación de Duffing (sistema con rigidez cúbica) en el cual se presenta un fenómeno no lineal complejo, incluyendo fenómenos como bifurcaciones, caos, brincos en la función de respuesta frecuencial, histéresis y resonancias no lineales. El desempeño de un absorbedor de vibraciones pasivo con dinámica lineal y no lineal para un sistema primario tipo Duffing, ha sido analizado en la literatura por Vigué y Kerschen [78], Ji y Zhang [44], Gendelman et al [31] y Beltrán y Silva [8].

En este capítulo se considera la aplicación de un absorbedor de vibraciones pasivo/activo tipo Duffing (rigidez cúbica) para un sistema primario de las mismas características, el cual se excita por una fuerza armónica cuya componente frecuencial es cercana a la resonancia primaria. El esquema pasivo de absorción de este sistema de 2 gdl se evalúa utilizando un análisis aproximado en la función de respuesta frecuencial no lineal. Con el objetivo de mejorar las propiedades de atenuación y proveer de robustez al absorbedor tipo Duffing, se propone un esquema de control activo de vibraciones basado en la retroalimentación positiva de la posición (PPF, por sus siglas en inglés).

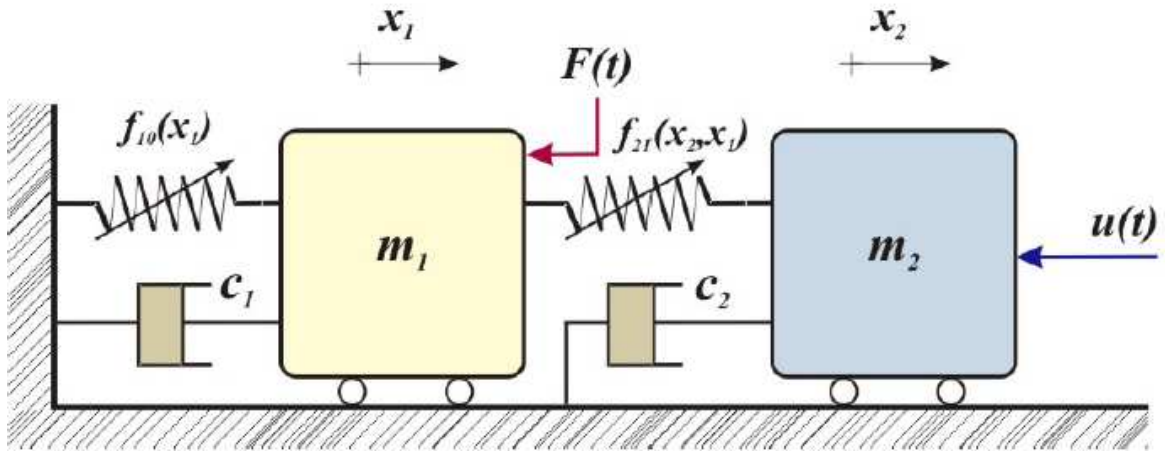


Figura 5.1: Diagrama esquemático de sistema Duffing con absorbedor tipo Duffing

## 5.1. Descripción del sistema

El diagrama esquemático del absorbedor tipo Duffing para sistema tipo Duffing se muestra en la Fig. 5.1. Las coordenadas generalizadas son los desplazamientos de ambas masas respecto a su posición de equilibrio estático, las cuales se denotan por  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. La masa y el coeficiente de amortiguamiento viscoso del sistema primario se representan por  $m_1$  y  $c_1$  respectivamente. De forma similar,  $m_2$  y  $c_2$  son la masa y el coeficiente de amortiguamiento viscoso del sistema secundario (absorbedor tipo Duffing). El sistema primario se excita por una fuerza armónica  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$  con amplitud  $F_0$  y frecuencia de excitación  $\Omega$ , la cual es cercana a la frecuencia resonante del sistema primario. Además, el absorbedor tipo Duffing tiene una fuerza de control activa  $u(t)$ , la cual se emplea para mejorar las propiedades de robustez contra las posibles variaciones tanto de amplitud como de frecuencia en la señal de excitación. Es importante notar que cuando  $u(t) \equiv 0$  se tiene un esquema de absorción de vibraciones puramente pasivo.

Los resortes no lineales de ambos subsistemas tienen funciones de rigidez cúbica descrita por

$$f_{10}(x_1) = k_1 x_1 + k_{1p} x_1^3 \quad (5.1)$$

$$f_{21}(x_2, x_1) = k_2 (x_2 - x_1) + k_{2p} (x_2 - x_1)^3 \quad (5.2)$$

donde  $k_i$  y  $k_{ip}$ ,  $i = 1, 2$  son constantes que caracterizan los términos lineales y cúbicos de la rigidez asociada a cada uno de los resortes. Cuando  $k_{ip} < 0$  o  $k_{ip} > 0$  se tiene un resorte blando o duro, respectivamente.

La dinámica del sistema de dos grados de libertad está representada por las siguientes ecuaciones

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{1p} x_1^3 - k_2 (x_2 - x_1) - k_{2p} (x_2 - x_1)^3 = F(t) \quad (5.3)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_{2p} (x_2 - x_1)^3 = u(t) \quad (5.4)$$

Para que se pueda cancelar la vibración armónica que experimenta el sistema primario, el absorbedor tipo Duffing debe de aplicar sobre éste una fuerza equivalente con signo o fase opuesto a la fuerza de excitación  $F(t)$ . Esto es equivalente a que la energía exógena suministrada al sistema primario se transfiera al absorbedor a través de los acoplamientos en el resorte no lineal  $f_{21}(x_2, x_1)$ . Cabe aclarar que este método de control de vibración se basa en el supuesto de que la señal de excitación  $F(t)$  es conocida con frecuencia de excitación  $\Omega$  cercana al diseño del absorbedor pasivo tipo Duffing (e.g., resonancia primaria) y condiciones de operación estables ([52],[78])

## 5.2. Sistema primario tipo Duffing

La dinámica del sistema primario sin absorbedor tipo Duffing se representa por medio de la siguiente ecuación

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_{1p}x_1^3 = F(t) \quad (5.5)$$

donde  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$  representa la fuerza de excitación armónica externa, con amplitud  $F_0$  y frecuencia  $\Omega$  cerca a la resonancia primaria del sistema Duffing  $\omega_{10} = \sqrt{k_1/m_1}$ . La función de respuesta frecuencial no lineal aproximada del sistema Duffing alrededor de su frecuencia natural ha sido extensamente estudiada en la literatura ([56]). Para llevarlo a cabo, la ecuación (5.5) se normaliza en la forma

$$\ddot{x}_1 + 2\varepsilon\zeta_1\dot{x}_1 + \omega_{10}^2x_1 + \varepsilon\alpha_1x_1^3 = \varepsilon f_0 \cos(\Omega t) \quad (5.6)$$

donde  $\varepsilon$  es un parámetro adimensional pequeño tal que

$$2\varepsilon\zeta_1 = \frac{c_1}{m_1}, \quad \omega_{10}^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \varepsilon\alpha_1 = \frac{k_{1p}}{m_1}, \quad \varepsilon f_0 = \frac{F_0}{m_1}$$

donde  $\omega_{10}$  es la frecuencia natural lineal (resonancia primaria) del sistema primario tipo Duffing sin ningun tipo de absorbedor pasivo y, por lo tanto, la única resonancia primaria externa se representa como  $\Omega = \omega_{10} + \varepsilon\sigma$ , donde  $\sigma$  es un parámetro de sintonización. En este caso, la función de respuesta frecuencial aproximada se calcula como la solución de la ecuación algebraica

$$\left\{ (\varepsilon\zeta_1)^2 + \left[ (\varepsilon\sigma) - \frac{3(\varepsilon\alpha_1)a_1^2}{8\omega_{10}} \right]^2 \right\} a_1^2 - \frac{(\varepsilon f_0)^2}{4\omega_{10}^2} = 0$$

Es importante señalar que la amplitud en estado estable  $a_1$  depende directamente de los parámetros del sistema (masa, amortiguamiento viscoso y rigidez) así como de la amplitud de la fuerza externa  $F_0$ .

## 5.3. Sistema primario tipo Duffing con absorbedor tipo Duffing

Ahora se considera el caso cuando al sistema primario antes mencionado se le acopla un absorbedor de vibraciones tipo Duffing pasivo (5.3)-(5.4). Para hacer esto, es necesario

obtener un análisis frecuencial aproximado cuando la entrada de control es  $u(t) \equiv 0$ , es decir,

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_{1p}x_1^3 - k_2(x_2 - x_1) - k_{2p}(x_2 - x_1)^3 = F(t) \quad (5.7)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_{2p}(x_2 - x_1)^3 = 0 \quad (5.8)$$

El sistema no lineal de dos grados de libertad (5.7)-(5.8) se normaliza para obtener la función de respuesta frecuencial no lineal de la siguiente forma

$$\ddot{x}_1 + 2\varepsilon\zeta_1\dot{x}_1 + \omega_{10}^2x_1 + \varepsilon\alpha_1x_1^3 - \varepsilon m\omega_{20}^2(x_2 - x_1) - \varepsilon\alpha_{12}m(x_2 - x_1)^3 = \varepsilon f_0 \cos(\Omega t) \quad (5.9)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\varepsilon\zeta_2\dot{x}_2 + \omega_{20}^2(x_2 - x_1) + \varepsilon\alpha_2(x_2 - x_1)^3 = 0 \quad (5.10)$$

donde los parámetros normalizados son

$$\omega_{10}^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \omega_{20}^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad \varepsilon m = \frac{m_2}{m_1}, \quad \varepsilon f_0 = \frac{F_0}{m_1}$$

$$2\varepsilon\zeta_1 = \frac{c_1}{m_1}, \quad 2\varepsilon\zeta_2 = \frac{c_2}{m_2}, \quad \varepsilon\alpha_1 = \frac{k_{1p}}{m_1}, \quad \varepsilon\alpha_{12} = \frac{k_{2p}}{m_1}, \quad \varepsilon\alpha_2 = \frac{k_{2p}}{m_2}$$

además,  $0 < \varepsilon \ll 1$  es un parámetro pequeño adimensional, el cual es útil para describir el comportamiento interno entre sistema primario, absorbedor pasivo, amortiguamiento viscoso, rigidez cúbica y la fuerza externa presente en el sistema no lineal completo.

La respuesta frecuencial en estado estable del sistema formado por (5.7)-(5.8) se puede aproximar y analizar para propósitos de diseño utilizando métodos de perturbación. Los parámetros del absorbedor tipo Duffing (5.8), se seleccionan de tal forma que se pueda reducir, tanto como sea posible, la respuesta del sistema primario alrededor de  $\Omega \approx \omega_{10}$ .

### 5.3.1. Análisis frecuencial aproximado

Se utiliza el método de escalas múltiples para calcular una solución aproximada para el sistema perturbado (5.9)-(5.10). Ambas soluciones perturbadas se pueden expresar como

$$x_1 = x_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{11}(T_0, T_1) + \dots$$

$$x_2 = x_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{21}(T_0, T_1) + \dots$$

donde  $T_0 = t$  es la escala de tiempo rápida asociada a los cambios en las frecuencias  $\omega_1$  y  $\Omega$ ,  $T_1 = \varepsilon t$  es la escala de tiempo lenta asociada a los cambio de amplitud y fase debido a las no linealidades, amortiguamientos, resonancias y fuerzas externas. Las escalas de tiempo restantes se relacionan por las perturbaciones como  $T_n = \varepsilon^n t$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Las derivadas temporales a través de las diferentes escalas de tiempo conducen a los operadores diferenciales  $d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots$  y  $d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots$

Sustituyendo las soluciones propuestas de primer orden  $x_1(T_0, T_1)$  y  $x_2(T_0, T_1)$  en (5.9)-(5.10) y agrupando los términos de cero y primer orden en  $\varepsilon$ , se obtiene el siguiente sistema

de ecuaciones diferenciales parciales

$$\varepsilon^0 : D_0^2 x_{10} + \omega_{10}^2 x_{10} = 0 \quad (5.11)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 x_{11} + \omega_{10}^2 x_{11} = -2D_0 D_1 x_{10} - 2\varepsilon \zeta_1 D_0 x_{10} - \alpha_1 x_{10}^3 + m\omega_{20}^2 x_{20} + \alpha_{12}(x_{20} - x_{10})^3 + f_0 \cos(\Omega t) \quad (5.12)$$

$$\varepsilon^0 : D_0^2 x_{20} + \omega_{20}^2 x_{20} = \omega_{20}^2 x_{10} \quad (5.13)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 x_{21} + \omega_{20}^2 x_{21} = -2D_0 D_1 x_{20} + \omega_{20}^2 x_{11} - 2\varepsilon \zeta_2 D_0 x_{20} - \alpha_2 (x_{20} - x_{10})^3 \quad (5.14)$$

La solución propuesta para la ecuación diferencial homogénea (5.11) está dada por

$$x_{10} = A(T_1) e^{i\omega_{10}T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_{10}T_0} \quad (5.15)$$

donde la barra superior denota complejo conjugado. La solución propuesta para la ecuación diferencial no homogénea (5.13) consiste en la suma de una solución complementaria más una solución particular

$$\begin{aligned} x_{20_c} &= B(T_1) e^{i\omega_{20}T_0} + \bar{B}(T_1) e^{-i\omega_{20}T_0} \\ x_{20_p} &= C(T_1) e^{i\omega_{10}T_0} + \bar{C}(T_1) e^{-i\omega_{10}T_0} \end{aligned}$$

donde  $C(T_1) = G_0 A(T_1)$  es una amplitud proporcional al término de la fuerza, el cual depende de la solución (5.15), donde  $G_0 = \omega_{20}^2 / (\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2)$ . Por lo tanto, la solución general se reescribe como

$$x_{20} = G_0 A(T_1) e^{i\omega_{10}T_0} + B(T_1) e^{i\omega_{20}T_0} + c.c. \quad (5.16)$$

donde *c.c.* representan los términos complejos conjugados. Las amplitudes en las soluciones (5.15) y (5.16) dependen de la escala de tiempo rápida  $T_1$  y las oscilaciones de la escala de tiempo  $T_0$ .

Para obtener soluciones aproximadas alrededor de la condición de resonancia primaria (externa), se asume que

$$\Omega = \omega_{10} + \varepsilon\sigma_1 \quad (5.17)$$

donde  $\varepsilon\sigma_1$  define el parámetro de sintonización externo.

Si se reemplaza la condición de resonancia primaria (5.17), sustituyendo las soluciones (5.15) y (5.16) en las ecuaciones diferenciales (5.12) y (5.14), removiendo los términos seculares, igualando a zero para garantizar soluciones uniformes, se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales de donde se pueden obtener las amplitudes en estado estable del sistema primario Duffing con absorbedor de vibración tipo Duffing. Las funciones de respuesta frecuencial aproximada se calculan numéricamente con uso de software para los parámetros del sistema obtenidos de la plataforma experimental.

## 5.4. Absorbedor pasivo/activo usando un esquema de control PPF

En problemas de control de vibraciones lineales existen muchas metodologías de control y técnicas experimentales para validación y evaluación. En contraste, para sistemas vibratorios

no lineales los fenómenos asociados a éstos (e.g., múltiples equilibrios, estabilidad, desempeño en el transitorio y estado estable) son específicos, diferentes y complejos, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. De hecho, es más complicado obtener soluciones aproximadas para las funciones de respuesta frecuencial, las cuales son útiles para el análisis, diseño y síntesis de los esquemas de absorción pasivo y activo. Por consiguiente, en las técnicas de control de vibraciones no lineales es una práctica común el diseño e implementación de leyes de control para linealizar o cancelar las no linealidades y, por lo tanto, el análisis se simplifica considerablemente, pero destruyendo las características interesantes y potenciales debidas a la no linealidad de la dinámica del sistema completo ([9])

Investigaciones recientes se han centrado en la aplicación de leyes de control simples para el control de vibraciones no lineales, las cuales preservan las no linealidades presentes en el sistema primario y en el absorbedor pasivo de vibraciones, empleando análisis frecuencial no lineal, fenómenos autoparamétricos y de saturación, transferencia de energía, etc. [78, 45, 24].

Para el sistema primario Duffing con absorbedor tipo Duffing (5.3)-(5.4) se propone la aplicación de una ley de control por medio de la retroalimentación Positiva de la Posición (PPF, por sus siglas en inglés) para compensar las fuerzas armónicas cercanas a la resonancia primaria  $\Omega = \omega_{10}$ . El enfoque de control PPF es ampliamente conocido y popular en la literatura como un método de control modal para la atenuación de vibraciones, debido a que sus parámetros se pueden sintetizar usando datos puramente experimentales, los cuales se pueden obtener en muchas aplicaciones de ingeniería estructural y sistemas mecánicos. Este esquema de control por retroalimentación dinámica de la salida agrega un grado de libertad al sistema primario, el cual se puede considerar como un absorbedor de vibraciones virtual o como un filtro de segundo orden.

El problema de control de vibración consiste en la atenuación, tanto como sea posible, de las vibraciones resonantes  $F(t)$  que afectan al sistema primario Duffing con absorbedor pasivo/activo tipo Duffing, de tal forma que se preserve la no linealidad inducida por la función de rigidez cúbica. Por lo tanto, suponiendo como salida  $y = x_1$ , el sistema de control pasivo/activo en lazo cerrado, usando un controlador tipo PPF, se puede establecer de la siguiente manera

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_{1p}x_1^3 - k_2(x_2 - x_1) - k_{2p}(x_2 - x_1)^3 = F(t) \quad (5.18)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_{2p}(x_2 - x_1)^3 = u(t) \quad (5.19)$$

$$\ddot{\eta} + 2\zeta_f\omega_f\dot{\eta} + \omega_f^2\eta = g\omega_f^2y \quad (5.20)$$

$$u = g\omega_f^2\eta \quad (5.21)$$

donde  $u$  es la entrada de control,  $y = x_1$  es la salida a ser controlada, y  $g$ ,  $\zeta_f$  y  $\omega_f$  son los parámetros de diseño del controlador PPF descritos como la ganancia del controlador, amortiguamiento y frecuencia natural del absorbedor virtual, respectivamente.

## 5.5. Resultados en simulación y experimentales

En esta sección se muestran resultados en simulación y experimentales del sistema primario Duffing con absorbedor de vibraciones pasivo/activo tipo Duffing. La plataforma ex-

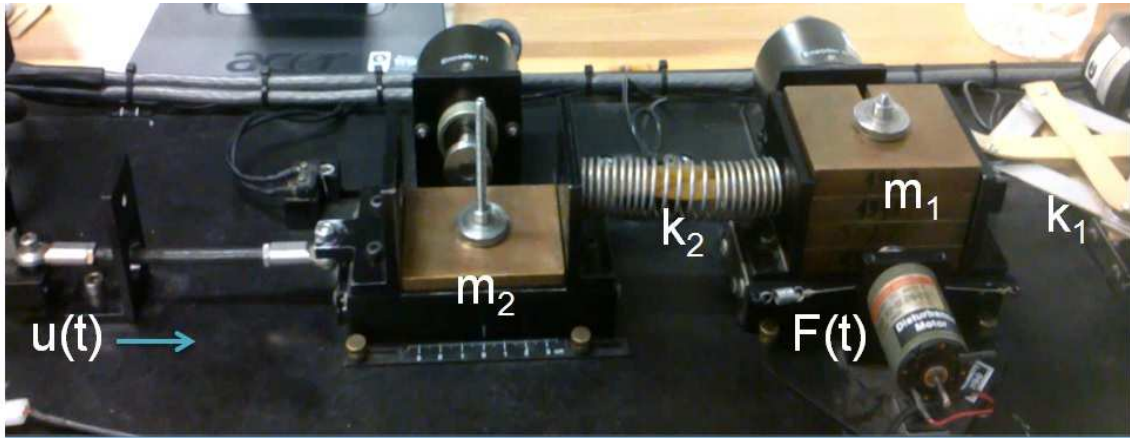


Figura 5.2: Plataforma rectilínea modelo 210a de la marca Educational Control Products (ECP).

perimental que se utilizó es un equipo mecánico que consiste de masas, resortes y amortiguadores. Este equipo se puede configurar en un sistema de uno hasta tres grados de libertad. La plataforma es un modelo 210a de la marca *Educational Control Products (ECP)*, diseñada para aplicaciones de modelado dinámico, estudio de vibraciones e ingeniería de control (ver Fig. 5.2).

Los parámetros del sistema completo se muestran en la tabla X.

Tabla X. Parámetros del sistema.			
$m_1 = 2.9371kg$	$m_2 = 1.133kg$	$c_1 = 12.03N/(m/s)$	$c_2 = 3.3N/(m/s)$
$k_1 = 1100N/m$	$k_{1p} = -1.22 \times 10^6 N/m^3$	$k_2 = 1500N/m$	$k_{2p} = -9.5 \times 10^4 N/m^3$
$F_0 = 4.8107N$	$\omega_1 = 2.5Hz$	$\omega_2 = 7.4Hz$	

En las Figs. 5.3 y 5.4 se muestra la función de respuesta frecuencial numérica y experimental del sistema primario Duffing sin absorbedor dinámico de vibraciones tipo Duffing cuando  $F_0 = 4.8107N$ , respectivamente. Resulta evidente que el sistema es altamente no lineal debido a la función de rigidez en el resorte cúbico (resorte blando). De hecho, la amplitud del sistema en la resonancia primaria  $\Omega = \omega_{10} = 3.08Hz$  es  $x_1 \approx 14.428mm$ . La funciones de respuesta frecuencial numérica y experimental del absorbedor de vibraciones tipo Duffing se muestran en las Figs. 5.5 y 5.6, respectivamente. Por otra parte, las funciones de respuesta frecuencial experimental del sistema Duffing con absorbedor tipo Duffing se describen en las Figs. 5.7 y 5.8. Es importante notar que en la resonancia primaria  $\Omega = \omega_{10} = 3.08Hz$ , la amplitud del sistema primario es  $x_1 \approx 8.358mm$  mientras que la del absorbedor es  $x_2 \approx 11.88mm$ .

El esquema de control de vibraciones pasivo/activo sobre el sistema primario (5.20-5.21) se selecciona para atenuar apropiadamente la resonancia primaria y garantizar la estabilidad asintótica en lazo cerrado. Los parámetros del controlador tipo PPF son  $\omega_f = \omega_{10} = 3.08Hz$ ,  $\zeta_f = 0.01$  con una ganancia del controlador  $g = 0.9$ . Las Figs. 5.9 y 5.10 muestran la respuesta dinámica tanto del sistema primario como del absorbedor tipo Duffing en lazo abierto y lazo



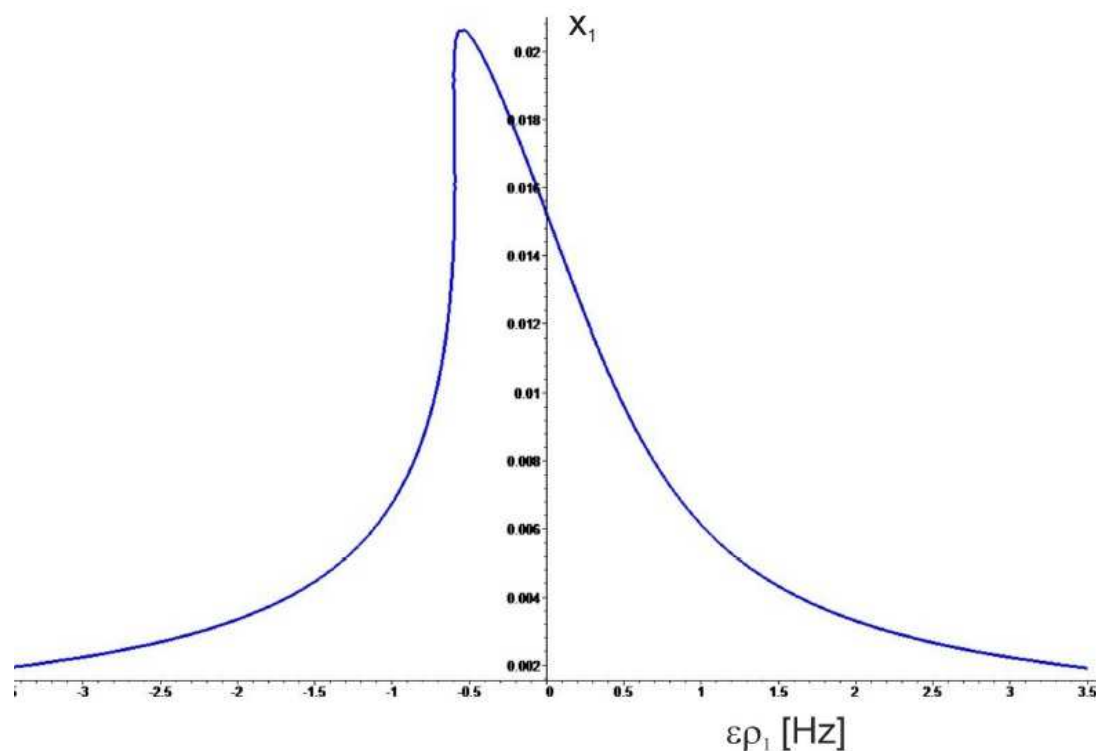


Figura 5.3: Función de respuesta frecuencial del sistema primario Duffing obtenida con software.

cerrado usando el esquema de control propuesto tipo PPF. Es importante observar que, la amplitud del sistema primario en estado estable se reduce significativamente, de un valor de  $x_1 = 9.81\text{mm}$  en el caso pasivo, a un valor de  $x_1 \approx 0.285\text{mm}$  usando el esquema de control pasivo/activo, con un porcentaje de atenuación ligeramente mayor al 97%. En la Fig. 5.11 se observa el esfuerzo de control utilizado bajo el esquema de control PPF (cerca de  $2.7N$ ). Por lo tanto, la energía externa suministrada al sistema es transferida simultáneamente al absorbedor de vibraciones tipo Duffing y a la fuerza activa de control. Es evidente que la respuesta del sistema completo se puede afectar por una fuerza de excitación armónica en el peor caso dinámico para un sistema mecánico (resonancia primaria), sin embargo, el absorbedor pasivo/activo tipo Duffing es todavía capaz de atenuar la respuesta del sistema primario.

## 5.6. Comentarios

En este capítulo se propuso un esquema de control pasivo/activo para un sistema primario Duffing con absorbedor dinámico de las mismas características, usando un esquema de absorción pasivo combinado con un esquema de control basado en la retroalimentación positiva de la posición (PPF). La estrategia principal es preservar la presencia de las no

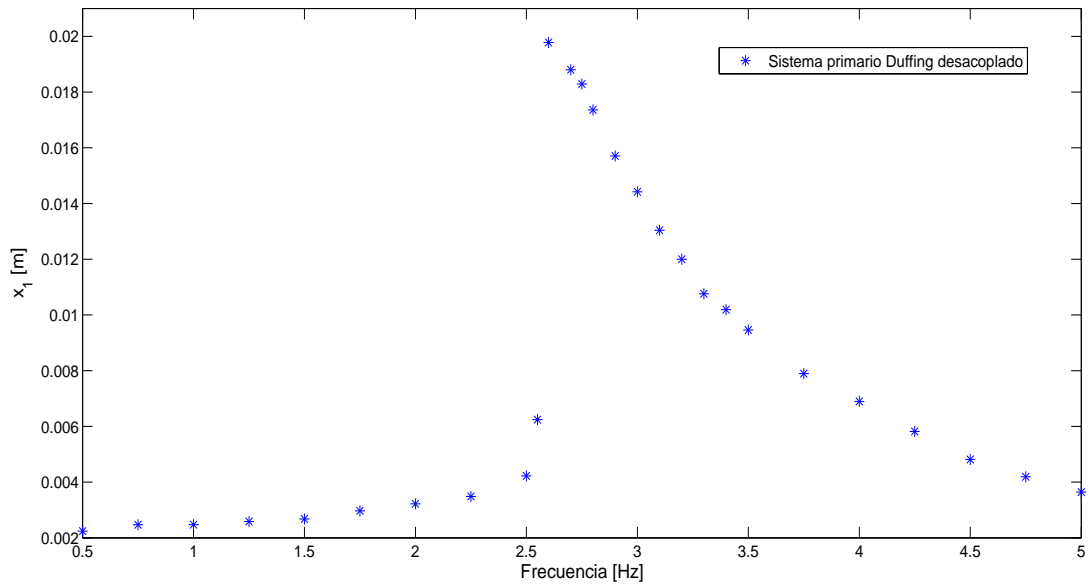


Figura 5.4: Función de respuesta frecuencial experimental del sistema primario desacoplado.

linealidades debidas a las funciones de rigidez cúbicas presentes en los resortes del sistema completo, utilizando un esquema de control modal para atenuar la respuesta del sistema primario durante la resonancia primaria. Los resultados experimentales validan la efectividad, robustez y la eficiencia en el desempeño del absorbedor de vibraciones propuesto.

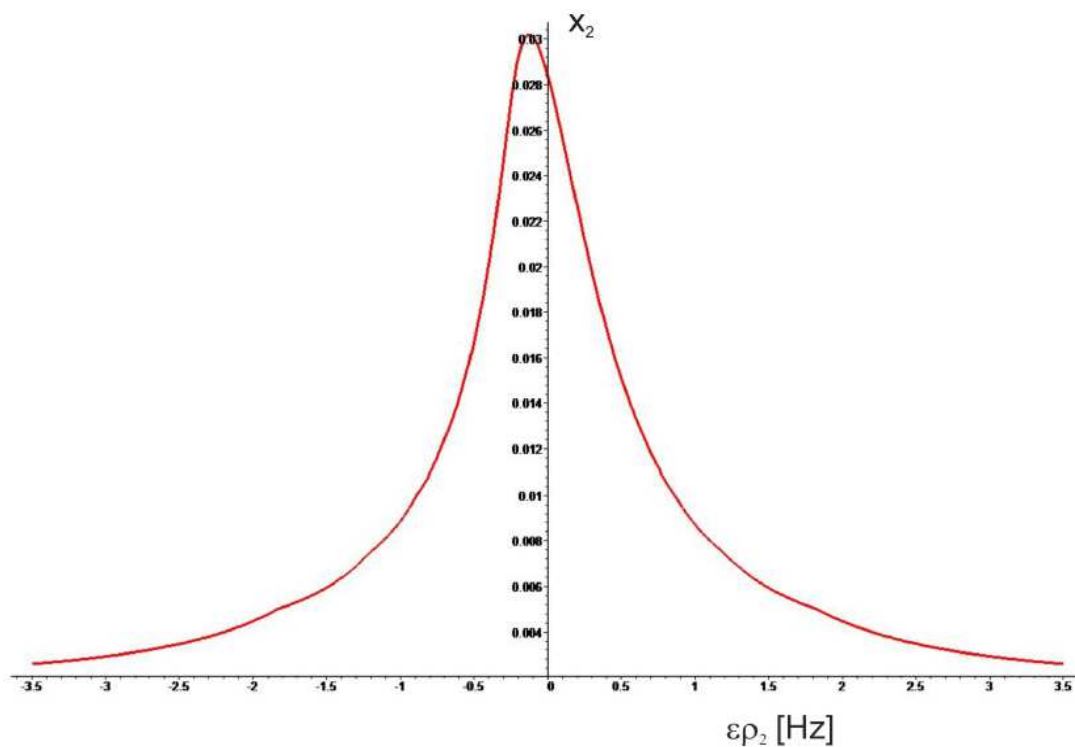


Figura 5.5: Función de respuesta frecuencial del sistema secundario obtenida con software.

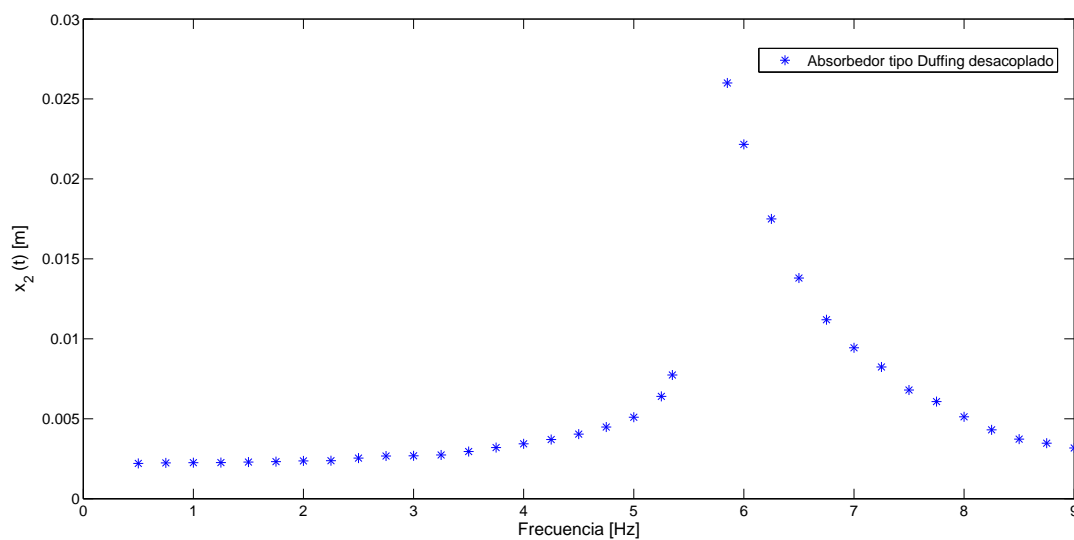


Figura 5.6: Función de respuesta frecuencial experimental del sistema secundario desacoplado.

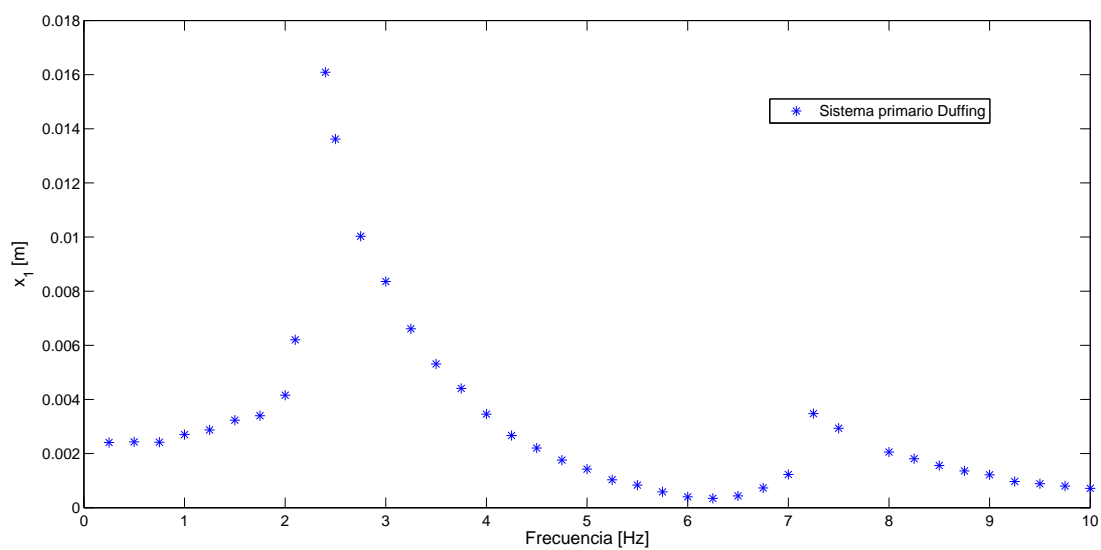


Figura 5.7: FRF experimental del sistema primario acoplado al absorbedor tipo Duffing

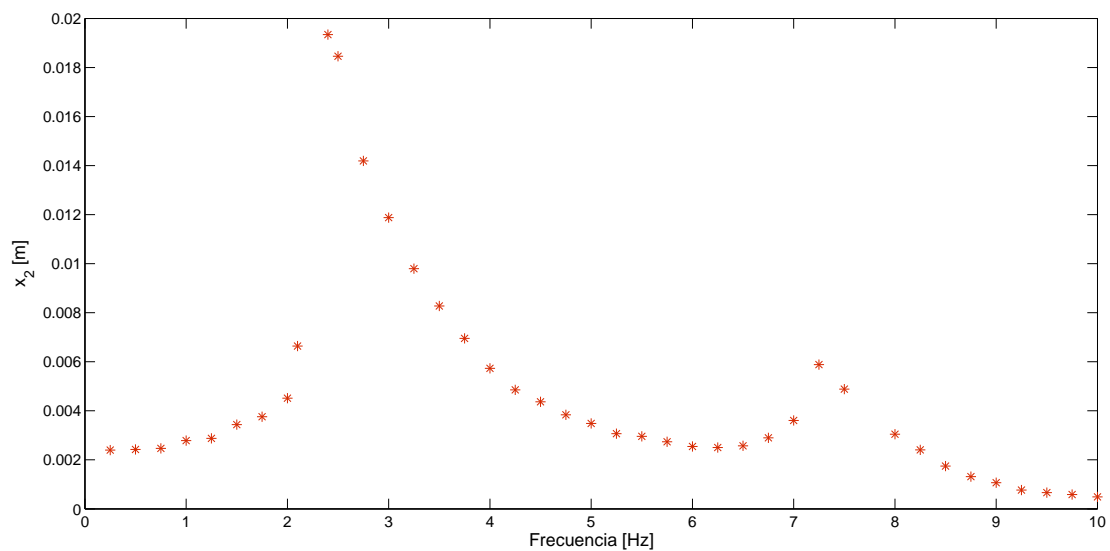


Figura 5.8: FRF experimental del absorbedor tipo Duffing cuando está acoplado al sistema primario.

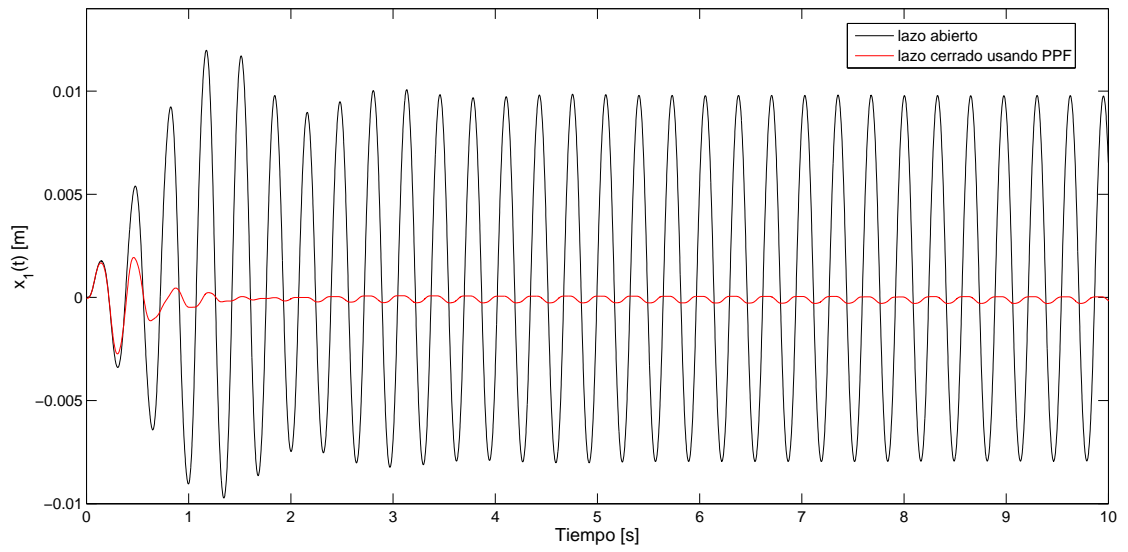


Figura 5.9: Respuesta dinámica del sistema primario Duffing.

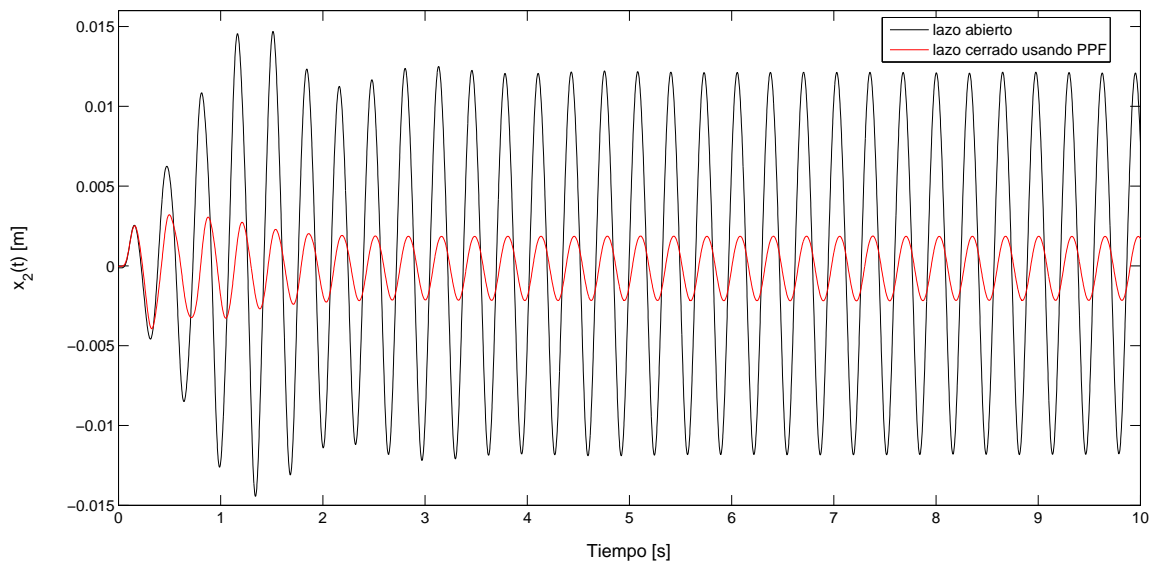


Figura 5.10: Respuesta dinámica del sistema secundario (absorbedor tipo Duffing).

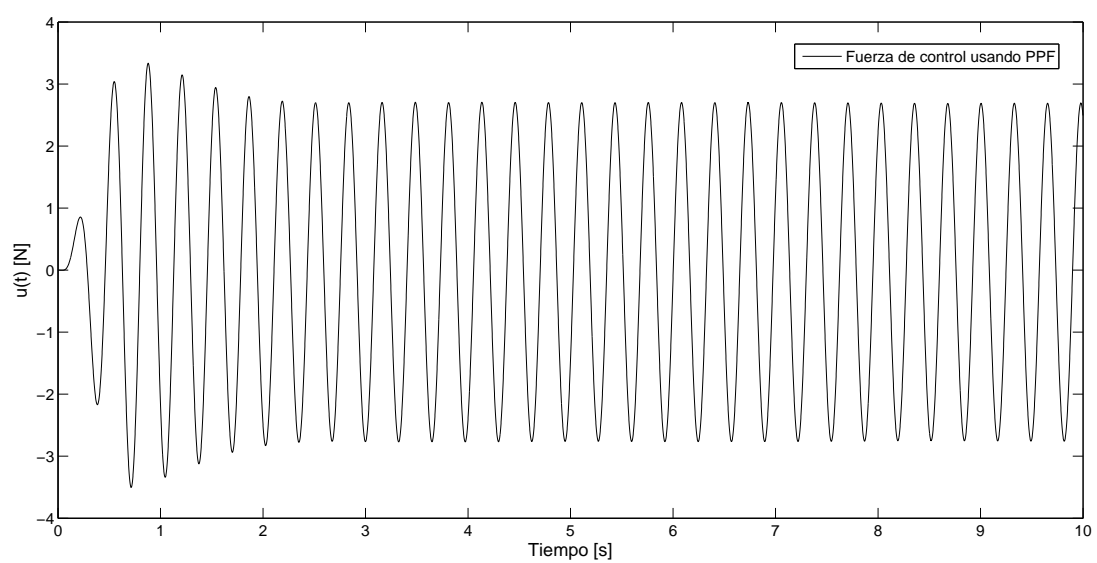


Figura 5.11: Esfuerzo de control utilizando retroalimentación positiva de la posición.



# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se aborda el estudio de la absorción pasiva y activa de vibraciones en sistemas mecánicos con características no lineales (autoparamétricos y tipo Duffing) y lineales. Para ello se utilizan básicamente dos sistemas primarios diferentes, el primero de ellos consta de una estructura tipo edificio (sistema de parámetros distribuidos), la cual se discretiza en un número específico de grados de libertad, dependiendo del número de masas concentradas consideradas (número de pisos). El primer objetivo sobre este sistema primario es controlar la respuesta dinámica resonante de cada uno de los grados de libertad correspondiente, para lo cual se utilizó, en primera instancia, un absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever; la sintonización entre este esquema de absorción pasiva y el sistema primario antes mencionado se consigue debido a que el sistema primario es lineal y, por lo tanto, es aplicable el análisis modal sobre éste, dando así la pauta para el planteamiento y formulación de una generalización de un absorbedor autoparamétrico para un sistema de  $n$  grados de libertad. La validación experimental de esta generalización es bastante satisfactoria. Las pruebas se realizaron excitando al sistema primario en su primera frecuencia resonante, debido a que es la más peligrosa por presentar los desplazamientos máximos en el sistema completo, aunque es importante señalar que la generalización establecida nos permite sintonizar el absorbedor para cualquier otro valor en la frecuencia de excitación.

Aprovechando la formulación planteada y resuelta, además de que la estructura tipo edificio es un sistema primario que nos permite aplicar otros esquemas de control pasivo, se realizó la comparación en términos frecuenciales, energéticos y dinámicos entre distintos esquemas de control de vibraciones, siendo éstos: absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever y tipo pendular, absorbedor dinámico de vibraciones tipo: masa-resorte-amortiguador, tipo pendular y tipo viga en cantilever, estableciendo y validando experimentalmente las diferencias, ventajas y desventajas que existen entre ellos. De forma concluyente se puede establecer que el absorbedor dinámico de vibración se puede representar como un sistema masa-resorte con poco amortiguamiento, el cual puede absorber vibraciones a través de una transferencia de energía existente entre el sistema primario y secundario, logrando reducir los niveles de vibración del primero, teniendo una implementación simple y confiable, pero teniendo como principal desventaja el generar otro pico en la función de respuesta frecuencial del sistema completo, debido al tipo de acoplamiento que se tiene entre ambos subsistemas (acoplamiento



elástico), produciendo así, otro valor de frecuencia que debe evitarse en la excitación, para no caer en el caso de resonancia. En cuanto al absorbedor autoparamétrico se refiere, sin lugar a dudas, la dinámica resultante entre el sistema primario y secundario es más interesante y compleja, debido a que los acoplamientos entre ambos subsistemas son no lineales, teniendo como ventaja significativa que la función de respuesta frecuencial del sistema permanece inalterada en cuanto al número total de picos presentes en ésta, y solamente experimentan un ligero corrimiento (debido a que se está agregando más masa sobre el sistema primario). La principal desventaja del absorbedor autoparamétrico radica en que el tiempo de sintonización es alto comparado con el absorbedor dinámico de vibraciones, situación que definitivamente es indeseable pensando en alguna aplicación real.

Con la intención de agregar robustez al sistema completo ante posible incertidumbre en los parámetros y/o ligeros cambios en la frecuencia de excitación alrededor de la frecuencia de sintonización, el segundo objetivo sobre el cual se trabajó en la estructura tipo edificio, fue diseñar, implementar y validar experimentalmente un control activo de vibraciones en el absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever implementado en ésta. Para llevar a cabo dicha tarea, se utiliza como actuador un parche piezoeléctrico, el cual se pega lo más cercano posible al empotramiento de la viga. Por medio de este actuador es posible modificar activamente la rigidez de la viga que en conjunto con un esquema de control adecuado es posible la resintonización automática del absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever. La ley de control aplicada es del tipo proporcional, ésta utiliza tanto la prealimentación del valor de la frecuencia, el cual es usado para calcular un valor óptimo de rigidez equivalente en la viga, así como la retroalimentación de uno de los estados del sistema, que en este caso es la posición de la masa puntual que se tiene en el extremo libre de la viga. De esta forma se converge a un caso de absorción pasiva/activa (híbrido), el cual garantiza amplitudes mínimas en el sistema primario.

El segundo sistema primario en el cual se realizó absorción pasiva/activa de vibraciones fue del tipo Duffing, es decir, un sistema masa-resorte-amortiguador cuya rigidez es no lineal debido a la presencia de un término cúbico. La parte de control pasivo se lleva a cabo utilizando un absorbedor dinámico no lineal de vibraciones, cuyas características de este sistema secundario son similares a las del sistema primario. Es importante señalar que la idea principal de este enfoque de absorción fue considerar las no linealidades inherentes al sistema y no hacer una linealización del mismo, tal y como es común en la práctica. La parte de control activo de vibraciones se lleva a cabo implementando una ley de control modal, basada en la retroalimentación positiva de la posición, y bajo este esquema de lazo cerrado se agrega un grado de libertad adicional al sistema completo el cual puede ser considerado como un absorbedor virtual de tipo pasivo. Una de las principales características de esta ley de control es que se puede diseñar por medio de una función de respuesta frecuencial experimental, por lo que no es indispensable contar un modelo del sistema a controlar, además de que sus parámetros son seleccionados usando datos completamente experimentales. Los resultados experimentales que se obtienen con el sistema Duffing con absorbedor pasivo/activo tipo Duffing validan de buena forma la efectividad y robustez del esquema propuesto.

Mediante la realización de este trabajo de tesis doctoral fue posible adquirir un amplio panorama de las diversas formas de plantear y darle solución al problema de absorción de

vibraciones mediante la aplicación de esquemas de control pasivo/activo, estableciendo que la principal contribución de este trabajo radica en la implementación de dichos esquemas para sistema primario con varios grados de libertad.

Como trabajo futuro, que podría contribuir a mejorar los resultados reportados en el presente trabajo de tesis, se considera lo siguiente:

- Realizar un análisis comparativo usando los mismos absorbedores de vibración mostrados en el Capítulo 4, pero ahora desde el punto de vista de control activo.
- Explorar el caso de estudio considerando sistemas primarios de  $n$  gdl con múltiples absorbedores de vibración, sean de tipo autoparamétrico, convencionales o combinación entre ambos.
- Analizar y sintonizar los absorbedores autoparamétricos en condiciones de excitación con componentes subarmónicos y/o superarmónicos.
- Probar los esquemas de absorción de vibraciones para una estructura tipo edificio con excitación simultánea en diferentes direcciones y con múltiples componentes armónicos.
- Aprovechar el trabajo realizado para implementar los llamados cosechadores de energía basados en sistemas autoparamétricos.
- Realizar la prueba de estabilidad y validación experimental ante diferentes casos de excitación del esquema propuesto en el Capítulo 5



# Bibliografía

- [1] ABADI, On self-excited auto-parametric systems, *Nonlinear Dynamics*, 24, pp. 147-166, 2001.
- [2] H.F. Abundis-Fong, *Diseño y Construcción de un Absorbedor Autoparamétrico Pasivo/Activo Tipo Viga en Cantilever Utilizando un Parche Piezoeléctrico*. Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad de Ingeniería Eléctrica (Mecatrónica), CINVESTAV-IPN, México, 2011.
- [3] G.S. Agnes, D. Inman, Nonlinear piezoelectric vibration absorbers, *Smart Materials and Structures*, 5, pp. 704-714, 1996.
- [4] R.P. Ashworth, A.D.S. Barr, The resonances of structures with quadratic inertial non-linearity under direct and parametric harmonic excitation, *Journal of Sound and Vibration*, 118, pp. 47-68, 1987.
- [5] A.K. Bajaj, S.I. Chang, J.M. Johnson, Amplitude modulated dynamics of a resonantly excited autoparametric two degree of freedom system, *Nonlinear Dynamics*, 5, pp. 433-457, 1994.
- [6] B. Balachandran, A.H. Nayfeh, Nonlinear oscillations of a harmonically excited composite structure, *Composite Structures*, 16, pp. 323-339, 1990.
- [7] B. Balachandran, A.H. Nayfeh, Observations of modal interactions in resonantly forced beam-mass structures, *Nonlinear Dynamics*, 2, pp 77-117, 1991.
- [8] F. Beltrán-Carbajal, G. Silva-Navarro, Active vibration control in Duffing mechanical systems using dynamic vibration absorbers, *Journal of Sound and Vibration*, 2014.
- [9] F. Beltrán-Carbajal, G. Silva-Navarro, A. Blanco-Ortega, E. Chavez-Conde, Active vibration control for a nonlinear mechanical system using on-line algebraic identification. In *Vibration Control, Edited by Mickael Lallart*, 201-214, Sciyo, Croatia, 2010.
- [10] A. Berlioz, R. Dufour, S.C. Sinha, Bifurcation in a nonlinear autoparametric system using experimental and numerical investigations, *Nonlinear Dynamics*, 23, pp. 175-187, 2000.
- [11] S.G. Braun, D.J. Ewins, S.S. Rao (Eds). *Encyclopedia of Vibration*, Vols. 1-3, Academic Press, San Diego, CA, 2001.

- [12] A.E. Bryson, Jr., *Dynamic Optimization*.
- [13] P. Brzeski, P. Perlikowski, S. Yanchuk, T. Kapitaniak, The dynamics of the pendulum suspended on the forced Duffing oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 331, pp. 5347-5357, 2012.
- [14] S.L. Bux, J.W. Roberts, Nonlinear vibratory interactions in systems of coupled beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 104, No 3, pp. 497-520, 1986.
- [15] M.P. Cartmell, The equations of motion for a parametrically excited cantilever beam, *Journal of Sound and Vibration*, 143, pp. 395-406, 1990
- [16] M.P. Cartmell, J. Lawson, Performance enhancement of an autoparametric vibration absorber by means of computer control, *Journal of Sound and Vibration*, 177, pp. 173-195, 1994.
- [17] M.P. Cartmell, *Introduction to Linear, Parametric and Nonlinear Vibrations*. Chapman and Hall, London, 1990
- [18] H. Chen, Q. Xu, Global bifurcations and multi-pulse orbits of a parametric excited system with autoparametric resonance, *Nonlinear Dynamics*, 65, pp. 187-216, 2011.
- [19] O. Civalci, The effect of detuning parameters on the absorption region for a coupled system: a numerical and experimental study, *Journal of Sound and Vibration*, 229, pp. 837-857, 2000.
- [20] O. Civalci, A. Ertas, S. Ekwaro-Osire, L. Cicek, Non-linear vibration absorber for a system under sinusoidal and random excitation: experiments, *Journal of Sound and Vibration*, 249, pp. 701-718, 2002.
- [21] C.W. De Silva, *Vibration: Fundamentals and Practice*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2000.
- [22] A.K. Chopra, *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, NY, 2001.
- [23] J.P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, NY, 1934.
- [24] T. Detroux, G. Habib, L. Masset, G. Kerschen, Performance, robustness and sensitivity analysis of the nonlinear tuned vibration absorber, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60-61, pp. 799-809, 2015.
- [25] R.P. Eason, C. Sun, A.J. Dick, S. Nagarajaiah, Attenuation of a linear oscillator using a nonlinear and a semi-active tuned mass damper in series, *Journal of Sound and Vibration*, 332, pp. 154-166, 2013.
- [26] W.A. El-Ganaini, N.A. Saeed, M. Eissa, Positive position feedback (PPF) controller for suppression of nonlinear system vibration, *Nonlinear Dynamics*, 72, pp. 517-537, 2013.

- [27] K. El Rifai, George Haller, Anil K. Bajaj, Global dynamics of an autoparametric spring-mass-pendulum system, *Nonlinear Dynamics*, 49, pp. 105-116, 2007.
- [28] A. Ertas, O. Cuvalci, S. Ekwaro-Osire, Performance of pendulum absorber for a non-linear system of varying orientation, *Journal of Sound and Vibration*, 229, pp. 913-933, 2000.
- [29] D.J. Ewins, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Research Studies Press LTD, Second Edition, England, 2000.
- [30] Y. Fujino, P. Warnitchai, B.M. Pacheco, An experimental and analytical study of autoparametric resonance in a 3DOF model of cable-stayed-beam, *Nonlinear Dynamics*, 4, pp. 111-138, 1993.
- [31] O.V. Gendelman, T. Sapsis, A.F. Vakakis, L.A. Bergman, Enhanced passive targeted energy transfer in strongly nonlinear mechanical oscillators, *Journal of Sound and Vibration*, 330, pp. 1-8, 2011.
- [32] G. Genta, *Vibration of Structures and Machines: Practical Aspects*. 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1995.
- [33] A.M. Gus'kov, G. Ya. Panovko, Chan Van Bin, Analysis of the dynamics of a pendulum vibration absorber, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 4, pp. 321-329, 2008.
- [34] A. Haddow, Steven W. Shaw, Centrifugal pendulum vibration absorbers: An experimental and theoretical investigation, *Nonlinear Dynamics*, 34, pp. 293-307, 2003.
- [35] H. Hatwal, A.K. Mallik, A. Ghosh, Non-linear vibrations of a harmonically excited autoparametric system, *Journal of Sound and Vibration*, 81, pp. 153-164, 1982.
- [36] W. Heylen, S. Lammens and P. Sas, *Modal Analysis Theory and Testing*, Katholieke Universiteit Leuven, Faculty of Engineering, Department of Mechanical Engineering, Division of Production Engineering, Machine Design and Automation, Belgium, 1998.
- [37] R.S. Haxton, A.D.S. Barr, The autoparametric vibration absorber. *Journal of Engineering for Industry*, Vol.94, No.1, pp. 119-124, 1972.
- [38] R.A. Ibrahim, Recent advances in nonlinear passive vibration isolators, *Journal of Sound and Vibration*, 314, pp. 371-452, 2008.
- [39] R.A. Ibrahim, Jin-Shy Gau, A. Soundararajan, Parametric and autoparametric vibrations of an elevated water tower, Part I: Non-linear parametric response, *Journal of Sound and Vibration*, 121, pp. 413-428, 1988.
- [40] R.A. Ibrahim, W. Li, Parametric and autoparametric vibrations of an elevated water tower, Part II: Autoparametric response, *Journal of Sound and Vibration*, 121, pp. 429-444, 1988.

- [41] R.A. Ibrahim, J.W. Roberts, Broad band random excitation of a two-degree-of-freedom system with autoparametric coupling, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 44, No 3, pp. 335-348, 1976.
- [42] T. Ikeda, Autoparametric interaction of a liquid surface in a rectangular tank with an elastic support structure under 1:1 internal resonance, *Nonlinear Dynamics*, 60, pp. 425-441, 2010.
- [43] D.J. Inman, *Vibration with Control*, John Wiley & Sons, Chichester, 2006.
- [44] J.C. Ji, N. Zhang, Suppression of the primary resonance vibrations of a forced nonlinear system using a dynamic vibration absorber, *Journal of Sound and Vibration*, 329, pp. 2044-2056, 2010.
- [45] J.C. Ji, Design of a nonlinear vibration absorber using three-to-one internal resonances, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 42, pp. 236-246, 2014.
- [46] B.G. Korenev, L.M. Reznikov, *Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications*, John Wiley & Sons, London, 1993.
- [47] W. Li, R.A. Ibrahim, Principal internal resonances in 3-DOF systems subjected to wide-band random excitation, *Journal of Sound and Vibration*, 131, pp. 305-321, 1989.
- [48] L. Macías-Cundapí, *Integración de una plataforma experimental con un absorbedor autoparamétrico tipo pendular para sistemas mecánicos Duffing*. Tesis de Maestría en Mecatrónica, Sección de Mecatrónica, CINVESTAV-IPN, México, 2009.
- [49] L. Macias-Cundapi, G. Silva-Navarro, B. Vazquez-Gonzalez, Application of an active pendulum-type vibration absorber for Duffing systems, *5th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE 2008*, pp. 392-397, 2008.
- [50] R.E. Mickens, Mathematical and numerical study of the Duffing-harmonic oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 244, pp. 563-567, 2001.
- [51] R. Nabergoj, A. Tondl, Z. Virag, Autoparametric resonance in an externally excited system, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol 4, No 2, 263-273, 1994.
- [52] S. Natsiavas, Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorbers, *Journal of Sound and Vibration*, 156, pp. 227-245, 1992
- [53] J.A. Murdock, *Perturbations: theory and methods*, John Wiley & Sons, Inc., NY, 1973.
- [54] A.H. Nayfeh, Parametric excitation of two internally resonant oscillators, *Journal of Sound and Vibration*, 119, pp. 95-109, 1987.
- [55] A.H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, Inc., NY, 1973.

- [56] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons, NY, 1979.
- [57] S. S. Oueini, A.H. Nayfeh, J.R. Pratt, A nonlinear vibration absorber for flexible Structures, *Nonlinear Dynamics*, 15, pp. 259-282, 1998.
- [58] S. S. Oueini, Char-Ming Chin, A.H. Nayfeh, Dynamics of a cubic nonlinear vibration absorber, *Nonlinear Dynamics*, 20, pp. 283-295, 1999.
- [59] A. Preumont, *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*, Springer, Dordrecht, 2006.
- [60] A. Preumont, K. Seto. *Active Control of Structures*, John Wiley & Sons, NY, 2008.
- [61] S.S. Rao, *Mechanical vibrations*, Addison-Wesley, 3rd ed., USA, 1995.
- [62] J.W. Roberts, Random excitation of a vibratory system with autoparametric interaction, *Journal of Sound and Vibration*, 691, pp. 101-116, 1980.
- [63] W. Shang-Teh, Active pendulum vibration absorbers with a spinning support, *Journal of Sound and Vibration*, 323, pp. 1-16, 2009.
- [64] C. Sun, R.P. Eason, S. Nagarajaiah, A.J. Dick, Hardening Duffing oscillator attenuation using a nonlinear TMD, a semi-active TMD and multiple TMD, *Journal of Sound and Vibration*, 332, pp. 674-686, 2013.
- [65] W. Shang-Teh, Yu-Rong Chen, Se-Si Wang, Two-degree-of-freedom rotational-pendulum vibration absorbers, *Journal of Sound and Vibration*, 330, pp. 1052-1064, 2011.
- [66] G. Silva-Navarro, L. Macias-Cundapi and B. Vazquez-Gonzalez, Design of a Passive/Active Autoparametric Pendulum Absorber for Damped Duffing Systems. In: *New Trends in Electrical Engineering, Automatic Control, Computing and Communication Science*, Edited by C.A. Coello, A. Pozniak, J.A. Moreno and V. Azhmyakov, pp. 159-175, Logos Verlag Berlin GmbH, Germany, 2010.
- [67] G. Silva-Navarro, *Notas del Curso de Vibraciones Mecánicas*, Sección de Mecatrónica, CINVESTAV-IPN, México, D.F., 2014.
- [68] Y. Song, H. Sato, Y. Iwata y T. Komatsuzaki, The response of a dynamic vibration absorber system with a parametrically excited pendulum, *Journal of Sound and Vibration*, 259, pp. 747-759, 2003.
- [69] A. Soundararajan y R.A. Ibrahim, Parametric and autoparametric vibrations of an elevated water tower, Part III: Random response, *Journal of Sound and Vibration*, 121, pp. 445-462, 1988.
- [70] R. Svoboda, A. Tondl, F. Verhulst, Autoparametric resonance by coupling of linear and non-linear systems, *Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol 29, No 3, 225-232, 1994.



- [71] A. Tondl, T. Ruijgrok, F. Verhulst, R. Nabergoj, *Autoparametric Resonance in Mechanical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [72] A.F. Vakakis, Inducing Passive Nonlinear Energy Sinks in Vibrating Systems, *Journal of Vibration and Acoustics Transactions of the ASME*, 3, pp. 324-332, 2001.
- [73] B. Vázquez-González, Atenuación de vibraciones en sistemas mecánicos utilizando absorbedores pasivos y activos. Tesis de Doctorado en Ciencias en la especialidad de Ingeniería Eléctrica (Mecatrónica), CINVESTAV-IPN, México D.F., Noviembre 2001.
- [74] B. Vazquez-Gonzalez, G. Silva-Navarro, Evaluation of the autoparametric pendulum vibration absorber for a Duffing system, *Shock and Vibration*, 15, pp. 355-368, 2008.
- [75] B. Vázquez-Gonzalez, G. Silva-Navarro, Diseño y construcción de un absorbedor de vibraciones mecánicas tipo pendular. *Revista Internacional de Información Tecnológica*, Vol. 14, No. 6, pp. 41-46, Chile, Noviembre-Diciembre 2003.
- [76] B. Vázquez-Gonzalez, G. Silva-Navarro, The pendulum vibration absorber for the nonlinear primary Duffing system, *Proceedings of the Thirteenth International Congress on Sound and Vibration (ICSV13)*, pp. 1-8, July 2-6, 2006, Vienna, Austria.
- [77] F. Verhulst, Parametric and autoparametric resonance, *Acta Applicandae Mathematicae*, 70, pp. 231-264, 2002.
- [78] R. Viguíé, G. Kerschen, Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: a tuning methodology, *Journal of Sound and Vibration*, 326, pp. 780-793, 2009.
- [79] A. Vyas, A.K. Bajaj, Dynamics of autoparametric vibration absorbers using multiple pendulums, *Journal of Sound and Vibration*, 246, pp. 115-135, 2001.
- [80] K. Zaki, S. Noah, K.R. Rajagopal, A.R. Srinivasa, Effect of nonlinear stiffness on the motion of a flexible pendulum, *Nonlinear Dynamics*, 27, pp. 1-18, 2002.

# Apéndice A

## Lista de Publicaciones

Los siguientes artículos han sido publicados con resultados obtenidos del presente trabajo de tesis.

### A.1. Publicados en Revistas Indizadas en JCR

1. G. Silva-Navarro and **H.F. Abundis-Fong**. *Passive/Active Autoparametric Cantilever Beam Absorber with Piezoelectric Actuator for a Two-Story Building-Like Structure*. *Journal of Vibration and Acoustics Transactions of the ASME*, Special Issue on Modeling and Control of Adaptive Dynamic Systems and Structures, Paper No: VIB-14-1118, doi: 10.1115/1.4028711. February 2015.

### A.2. Aceptados en Revistas Indizadas en JCR

1. J. Enríquez-Zárate, G. Silva-Navarro and **H.F. Abundis-Fong**. *Active Vibration Suppression Through Positive Acceleration Feedback on a Building-Like Structure: An experimental Study*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Accepted for publication, November 2015.

### A.3. Publicados en Congresos Internacionales

1. F. Beltran-Carbajal, G. Silva-Navarro and **H.F. Abundis-Fong**. *Application of Passive/Active Duffing Vibration Absorbers in Duffing Mechanical Systems*. The 22nd International Congress on Sound and Vibration (ICSV 22). The international Institute of Acoustics and Vibration, Florence, Italy, July 2015
2. J. Enríquez-Zarate, **H.F. Abundis-Fong** and G. Silva-Navarro. *Passive Vibration Control in a Building-Like Structure using a Tuned-Mass-Damper and an Autoparametric Cantilever Beam Absorber*. Proceeding of SPIE 22nd Annual International Sym-

posium on Smart Structures and Materials + Nondestructive Evaluation and Health Monitoring, San Diego, California, USA, March 2015.

3. **H.F. Abundis-Fong** and G. Silva-Navarro. Suppression of Mechanical Vibrations in a Building-Like Structure using a Passive/Active Autoparametric Absorber. Proceeding of SPIE 21st Annual International Symposium on Smart Structures and Materials + Nondestructive Evaluation and Health Monitoring, San Diego, California, USA, March 2014.
4. **H.F. Abundis-Fong**, G. Silva-Navarro and B. Vázquez González, *Design of a Passive/Active Autoparametric Cantilever Beam Absorber with PZT Actuator for a Building-Like Structure*, ASME 2013 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems (SMASIS 2013), Snowbird, Utah, EUA. September 2013.
5. **H.F. Abundis-Fong**, G. Silva-Navarro and B. Vázquez González, *Implementación de un absorbedor Autoparamétrico Pasivo/Activo en una Estructura Tipo Edificio*, Congreso Internacional de Ingeniería Mecánica, Eléctrica, Electrónica, Mecatrónica y Diseño Industrial (5 CIMEEM 2013), México, D.F., México, 24-27, Septiembre 2013.
6. **H.F. Abundis-Fong**, G. Silva-Navarro and B. Vázquez González, *Application of a Passive/Active Autoparametric Cantilever Beam Absorber with PZT Actuator for a Building-Like Structure*, Proceedings of the 20th Internacional Congress on Sound and Vibration (ICSV20), The International Institute of Acoustics and Vibration (IIAV), Bangkok, Thailand, July 7-11, 2013.
7. G. Silva-Navarro, **H.F. Abundis-Fong** and B. Vázquez González, *Synthesis of a Passive/Active Autoparametric Cantilever Beam Absorber with PZT Actuator for Duffing Systems*, SPIE's 20th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials + Nondestructive Evaluation and Health Monitoring, San Diego, California, USA, March 2013.